TRUNG TÂM LUYỆN THI VÀ GIA SƯ CHẤT LƯỢNG CAO

SĐT: 01234332133. ĐC: Phòng 5, dãy 22 Tập thể xã tắc.TP HUẾ

Biên soạn: Ths. Trần Đình Cư

KĨ THUẬT GIẢI NHANH

Chuyên đề

HÌNH GIẢI TÍCH KHÔNG GIAN

- ✓ Dành cho học sinh luyện thi THPT Quốc Gia.
- ✓ Bồi dưỡng học sinh giỏi 10, 11, 12.
- ✓ Giáo viên giảng dạy, dạy thêm và luyện thi Quốc gia

TÀI LIỆU DÀNH TẶNG

HỌC SINH LỚP TOÁN THẦY CƯ

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$
2. $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$
3. $\vec{a} \pm \vec{b} = \left(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\right)$
4. $\text{k}.\vec{\text{a}} = \left(ka_1, ka_2, ka_3\right)$
5. $\left|\vec{\text{a}}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
6. $\vec{\text{a}} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
7. $\vec{\text{a}}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\left(\vec{\text{a}}, \vec{b}\right)$
8. $\vec{\text{a}} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$
9. $\vec{\text{a}} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$
10. $[\vec{\text{a}}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

Trong không gian (Oxyz) cho $A\left(x_A; y_A; z_A\right); B\left(x_B; y_B; z_B\right); C\left(x_C; y_C; z_C\right)$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right)$$

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$$

I là trung điểm của AB thì $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$

G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$

Lưu ý:

Nếu $M \in (Oxy)$ thì $z_M = 0$

Nếu $M \in (Oyz)$ thì $x_M = 0$

Nếu $M \in (Oxz)$ thì $y_M = 0$

Nếu $M \in x'Ox$ thì $y_M = z_M = 0$

Nếu $M \in z'Oz$ thì $x_M = y_M = 0$

Nếu $M \in y'Oy$ thì $x_M = z_M = 0$

Tính chất tích có hướng

1. $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$

2. $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

3. $\left[\vec{a},\vec{b}\right] \perp \vec{a}; \left[\vec{a},\vec{b}\right] \perp \vec{b}$

Ứng dụng của tích có hướng

1. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c} = \vec{0}$
2. Diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
3. Diện tích hình bình hành ABCD: $S = \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$
4. Thể tích tứ diện ABCD: $V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$
5. Thể tích hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $V = \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

VẤN ĐỀ 1. Các bài toán điển hình thường gặp

Ví dụ 1: $\vec{a}=(1;m;2);\vec{b}=(m+2;2;1);\vec{c}=(0;m-2;2)$

a) Tìm m để $\vec{a}\perp\vec{b}$

b) Tìm m để $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng

c) Tìm m để $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$

ĐS: $a)m=-\frac{4}{3};\quad b)m=-\frac{2}{5};\quad c)m=-6\pm 3\sqrt{3}$

Ví dụ 2: Tìm x,y để ba điểm $A(-2;0;2);B(1;2;3);C(x;y-3;7)$ thẳng hàng

ĐS: $x=13,\ y=13$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có A(1;2;1), B(5;3;4); C(8;-3;2)

a) Chứng minh rằng ΔABC vuông

b) Tìm điểm M sao cho $MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất

Hướng dẫn

$a)\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$

$b)M(x;y,z)...;x=4,y=-4,z=-1$

Ví dụ 4. Cho 3 điểm A(1;-1;2), B(2;1;0); C(0;1;-1). Tìm điểm M thuộc trục Oz sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất

Hướng dẫn: $M(0;0;t);...,t=\frac{1}{3}$

BTTT: Cho 3 điểm A(1;-1;2), B(-1;2;0); C(3;-1;0). Tìm điểm M thuộc trục Oz sao cho $MA^2+MB^2-MC^2$ nhỏ nhất

Hướng dẫn: $M(0;0;t);...,t=\frac{1}{3}$

Ví dụ 5. Cho 3 điểm A(1;-1;1), B(2;1;-2); C(0;0;1). Tìm tọa độ trực tâm của ΔABC

Hướng dẫn:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CH}\text{ đồng phẳng}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\\ \overrightarrow{CH}.\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}\right]=0\end{cases}.ĐS:H\left(\frac{5}{9};-\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$$

BTTT: Cho 3 điểm A(4;-2;-1), B(1;4;-1); C(1;-2;-7). Tìm tọa độ trực tâm của ΔABC.

Đáp số: H(3;-1;-2)

Ví dụ 6. Cho 2 điểm A(1;2;-1), B(-2;1;3). Tìm M thuộc trục Ox sao cho ΔAMB có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn $M(t;0;0).S_{\Delta AMB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{17t^2+2t+75},....t=-\frac{1}{17}$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có A(-1;0;2), B(0;4;3); C(-2;1;2). Tính độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC, $D \in BC$.

Hướng dẫn:

$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = k$ rồi suy ra $\overrightarrow{DB} = -k\overrightarrow{DC}$. Suy ra tọa độ của D, sau đó tính DA.

$$ĐS: D\left(-\frac{3}{2};\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right) \Rightarrow AD = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

BTTT: Cho tam giác ABC có A(1;2;-1), B(2;-1;3); C(-4;7;5). Tính độ dài đường phân giác trong góc B.

Đáp số: $\left(-\frac{17}{3};\frac{26}{3};7\right)$

Ví dụ 8. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết A(0;0;-2), B(1;-4;1); C(2;2;-1)

Hướng dẫn:

$$\begin{cases} IA = IB = IC \\ \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{MA} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{MA} = 0 \end{cases} \qquad ĐS: I\left(\frac{59}{30};-\frac{14}{15};\frac{13}{30}\right)$$

BTTT: Cho điểm $M\left(\frac{1}{2} - 2x; 3 - x; \frac{5}{2} - 2x\right)$ và tam giác ABC với A(1;1;3), B(0;5;2);C(-1;3;4).

a) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
b) Chứng minh rằng với mọi $x \neq 0$, đường thẳng MI vuông góc với (ABC)

Hướng dẫn:

$a)$ Tam giác ABC vuông tại C $\Rightarrow$ tâm là trung điểm của AB

b) $\begin{cases} \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

Ví dụ 9. Cho 4 điểm A(-2;2;-1); B(-3;-2;-4); C(5;1;2); $D \in (\mathrm{Ox}z)$.

Tìm D biết DA=DB và $V_{ABCD} = \frac{37}{6}$.

Hướng dẫn:

$D \in (Oxz)$ nên D(x;0;z).

$$\mathrm{V}_{ABCD} = \frac{37}{6} \Leftrightarrow \left|15x - 29z - 35\right| = 37;\ DA = DB \Leftrightarrow DA^2 = DB^2 \Leftrightarrow x + 3z = -10$$

$ĐS: D(-1;0;-3)$ hoặc $D(-4;0;-2)$

Ví dụ 10.

a) Cho hai điểm A(1;2;-1); B(4;3;5). Xác định M thuộc Ox sao cho M cách đều A và B
b) Cho hai điểm A(-4;-1;2); B(3;5;-1). Tìm C biết trung điểm của AC thuộc Oy và trung điểm của BC thuộc (Oxz)

Hướng dẫn:

$a)\, M(0;0;4)$

$b)\, C(a;b;c)....ĐS: a=4; b=-5; c=2$

Ví dụ 11. Cho 4 điểm A(1;2;4); B(2;-1;0); C(-2;3;-1); $M(x;y;z) \in (ABC)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y, z. Tìm tọa độ D biết ABCD là hình bình hành và diện tích hình bình hành ABCD.

Hướng dẫn:

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 19x+17y-8z-29=0$$

$$D(-1;0;-5); S_{ABCD}=\sqrt{714}$$

Ví dụ 12. Cho tứ diện ABCD, có A(2;3;1); B(1;1;-2); C(2;1;0); D(0;-1;2). Đường cao AH. Tìm tọa độ chân đường cao

Hướng dẫn:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BD} \\ \left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BH}=0 \end{cases} \quad .....H\left(3;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Ví dụ 13. Cho 3 điểm A(3;2;-5); B(-2;1;-3); C(5;1;-1).

a) Chứng minh rằng ΔABC nhọn
b) Tìm điểm D thuộc (xOy) sao cho tứ diện ABCD là tứ diện trực tâm (có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau)

Hướng dẫn:

$a)$* Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của tam giác

* Chứng minh $AB^2+BC^2>CA^2, AB^2+CA^2>BC^2, BC^2+CA^2>AB^2$

$b)\, D(x;y;0)$

Điều kiện $ABCD$ là tứ diện trực tâm $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]\neq 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=0 \end{cases} \quad .....D\left(\frac{31}{7};\frac{19}{7};0\right)$

Ví dụ 14. Tam giác ABC có các đỉnh A, B, C lần lượt thuộc các trục Ox, Oy, Oz và có trọng tâm G(1;2;-1). Tính diện tích tam giác đó.

Hướng dẫn:

$A(x;0;0); B(0;y;0); C(0;0;z)$.G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\begin{cases} x=3 \\ y=7 \\ z=-3 \end{cases}$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{3V_{OABC}}{h}$ (h là khoảng cách từ O đến (ABC)) $=\dfrac{27}{2}$

Ví dụ 15. Cho ba điểm A(2;0;0), B(1;1;2), C(3;-1;1).

a) Chứng minh rằng tam giác ABC là một tam giác vuông
b) Biết ABC.A′B′C′ là một hình lăng trụ đứng có các cạnh bên AA′, BB′, CC′ và A′ ở trên mặt phẳng (Oyz). Tìm tọa độ của A′,B′,C′

Hướng dẫn và đáp số

$a)\Delta ABC$ là tam giác vuông tại A

b)$A'\in(Oyz)\Rightarrow A'(0;m;p)$

ABC.A'B'C' là hình lăng trụ đứng nên

$$AA'\perp\begin{cases}AB\\AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB}=0\\\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-2\\p=0\end{cases}........B'(-1;-1;2)\,và\,C'(1;-3;1)$$

Ví dụ 16. Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′ có A(1;2;-1); C(3;-4;1), B′(2;-1;3)., D′(0;3;5)

a) Tính tọa độ các đỉnh của hình hộp
b) Tính thể tích hình hộp

Hướng dẫn và đáp số:

$a)$ AC có trung điểm I(2;-1;0). B'D' có trung điểm là I'(1;1;4); A'(x;y;z).

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{II'}\Leftrightarrow A'(0;4;3);\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{II'}\Leftrightarrow B(3;-3;-1)$$

$$C'(2;-2;5);D(1;1;1;)$$

$$b)V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\overrightarrow{AA'}.\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|=6$$

BTTT: Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′ có A(1;0;1); B′(2;1;1), C(4;5;-5), D′(1;-1;1). Tính tọa độ các đỉnh của hình hộp.

Đáp số:

$$B\left(3;\frac{7}{2};-\frac{3}{2}\right);D\left(2;\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right);A'\left(0;-\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right);C'\left(3;\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right);$$

Ví dụ 17. Cho 3 điểm A(2;-1;-4); B(-2;3;-4), C(2;m+1;-8)

a) Tìm m để tam giác ABC là tam giác đều
b) Với giá trị m tìm được, hãy xác định tọa độ điểm S thuộc (Oyz) sao cho S.ABC là hình chóp đều.

Đáp số: a) m=2; **b)** S(0;1;-6)

VẤN ĐỀ 2. Ứng dụng tọa độ giải toán hình học không gian

Bài 1. Cho $S.ABCD$ có ABCD là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a, SA \perp (ABCD)$, góc giữa SB với mặt phẳng (ABCD) bằng 60^0. Lấy $M \in SA, AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, (BCM) cắt SD tại N. Tính $V_{S.BCNM}$.

Bài 2. Cho $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, ΔSAD đều, $\left(SAD\right) \perp \left(ABCD\right)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Chứng minh $AM \perp BP$ và V_{CMNP}.

Bài 3. Cho $S.ABC$ có $SA \perp \left(ABC\right)$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a, BD = SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SC. Chứng minh ΔAMB cân tại M. Tính S_{AMB}.

Bài 4. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông, $AB = AC = a, AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA′, BC′. Chứng minh MN là đường vuông góc chung của AA′ và BC′. Tính $V_{M.A'BC'}$

Bài 5. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy ABCD là hình bình thoi cạnh a, $BAD = 60^0$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AA′, CC′. Chứng minh bốn điểm B′, M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Tính AA′ theo a để B′MDN là hình vuông.

Bài 6. D2010. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, cạnh bên SA=a; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên (ABCD) là điểm H thuộc AC, $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a

CHỦ ĐỀ 2. MẶT PHẲNG VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. **Vectơ pháp tuyến của mpα:** Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là véctơ pháp tuyến của α nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α)

2. **Cặp véctơ chỉ phương của mpα:** Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương và khác $\vec{0}$. Nếu giá của $\vec{a}, \vec{b}$ song song hoặc nằm trên (α) thì $\vec{a}, \vec{b}$ được gọ là cặp vectơ chỉ phương của (α). Lúc đó: $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$

3. **Phương trình mặt phẳng:** Có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ với $\vec{n} = (A; B; C)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.
   - Phương trinh mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ sẽ có dạng $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
   - Phương trình mặt phẳng đi qua A(a,0,0) B(0,b,0) ; C(0,0,c) có dạng $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$
   - Phương trình các mặt phẳng tọa độ

     (Oyz) : x = 0 ; (Oxz) : y = 0 ; (Oxy) : z = 0

4. Vị trí tương đối của hai mp (α1) và (α2) :

Cho hai mặt phẳng $\begin{aligned}(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ (\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\end{aligned}$

- $\alpha \text{ cắt } \beta \Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$
- $\alpha // \beta \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$
- $\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$
- $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

5. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

Cho $M(x_0; y_0; z_0)$ và $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Lúc đó $d(M, \alpha) = \dfrac{\left|Ax_o + By_o + Cz_o + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

☞ ***Lưu ý:*** Cho mặt phẳng mp α: Ax + By + Cz + D = 0.

Đặt f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D. với $M(x_M, y_M, z_M)$, $N(x_N, y_N, z_N)$

Ta có: $f(x_M, y_M, z_M).\ f(x_N, y_N, z_N) > 0 \Leftrightarrow$ M và N nằm cùng phía đối với mặt phẳng α.

$f(x_M, y_M, z_M).\ f(x_N, y_N, z_N) < 0 \Leftrightarrow$ M và N nằm khác phía đối với mặt phẳng α.

☞ **Trường hợp đặc biệt:**

Khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng tọa độ:

$d(M, (Oxy)) = |z_M|$ $\qquad$ $d(M, (Oxz)) = |y_M|$

$d(M, (Oyz)) = |x_M|$

6. Góc giữa hai mặt phẳng : $\cos(\alpha, \beta) = \dfrac{\left|\vec{n}_\alpha . \vec{n}_\beta\right|}{\left|\vec{n}_\alpha\right| . \left|\vec{n}_\beta\right|}$

VẤN ĐỀ 1. Viết phương trình mặt phẳng

Phương pháp chung: Để lập phương trình mặt phẳng (α) ta cần xác định một điểm thuộc (α) và một VTPT của nó.

TH 1: *(α)* đi qua điểm $M\left(x_0; y_0; z_0\right)$ có VTPT $\vec{n} = \left(A; B; C\right)$:

$$(\alpha):\ A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0$$

TH 2: (α) đi qua điểm $M\left(x_0; y_0; z_0\right)$ có cặp VTCP $\vec{a}, \vec{b}$. Khi đó một VTPT của (α) là $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

TH 3: (α) đi qua điểm $M\left(x_0; y_0; z_0\right)$ và song song với (β): Ax + By + Cz + D = 0:

$$(\alpha):\ A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0$$

TH 4: (α) đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C:

Khi đó ta có thể xác định một VTPT của (α) là: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$

TH 5: Phương trình mặt phẳng đi qua A(a,0,0) B(0,b,0) ; C(0,0,c) có dạng $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

TH 6: (α) đi qua điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau (β), (γ):

- Xác định các VTPT $\overrightarrow{n_\beta}, \overrightarrow{n_\gamma}$ của (β) và (γ).
- Một VTPT của (α) là: $\left[\overrightarrow{n_\beta}, \overrightarrow{n_\gamma}\right]$.

Ví dụ 1. Trong mỗi trường hợp sau, viết phương trình mặt phẳng

a) Đi qua ba điểm A(-1;2;3),B(2;-4;3),C(4;5;6)

b) Đi qua điểm M(1;2;-2) và vuông góc với trục Oy

c) Đi qua điểm M(1;3;-2) và vuông góc với đường thẳng BC với B(0;2;-3), C(1;-4;1)

d) Đi qua M(1;3;-2) và song song với $(\alpha): 2x - y + 3z + 4 = 0$

e) Đi qua điểm A(3;1;-1),B(2;-1;4) và vuông góc với mặt phẳng 2x-y+3z+4=0

f) Đi qua điểm M(2;-1;2), song song với Oy và vuông góc với mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$.

g) Đi qua điểm M(-2;3;1) và vuông góc với hai mặt phẳng

$(\alpha): 2x+y+2z+5=0;$ $(\beta): 3x+2y+z-3=0$

h) Đi qua $A(1;1;-1); B(5;3;1)$ và song song với trục Oz

i) Mặt phẳng trung trực (α) của đoạn thẳng AB, biết $A(-1;2;-1); B(-5;3;2)$

Ví dụ 2. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua điểm M(2;1;-1) và qua giao tuyến của hai mặt phẳng $x-y+z-4=0;\ 3x-y+z-1=0$

b) Qua giao tuyến của hai mặt phẳng $y+2z-4=0; x+y-z+3=0$ đồng thời song song với mặt phẳng $x+y+z-2=0$

c) Qua giao tuyến của hai mặt phẳng $3x-y+z-2=0; x+4y-5=0$ đồng thời vuông góc với mặt phẳng $2x-z+7=0$

Ví dụ 3. Cho điểm H(-1;4;2). Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục toạ độ tại A, B, C (không trùng với O). Biết H là trực tâm của tam giác ABC. Viết phương trình mặt phẳng (α)

Hướng dẫn:

chứng minh: $\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC)$

$(\alpha) \equiv (ABC)$: *Qua* H và nhận $\overrightarrow{OH}$ làm vtpt

$(\alpha): x-4y-2z+21$

BTTT: Viết phương trình (α) đi qya $H(2;1;1)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trục tâm của tam giác ABC. **Đáp số:** $2x+y+z-6=0$

Ví dụ 4. Cho mặt phẳng (α) đi qua điểm M(-4;1;-3) và cắt ba trục toạ độ Ox, Oy, Oz tại A,B,C (Khác O). Biết M là trọng tâm của tam giác ABC. Viết phương trình của mặt phẳng (α)

Hướng dẫn:

Gọi A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c).

Phương trình mặt phẳng (α): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

M là trọng tâm của ΔABC nên $\begin{cases} -4=\frac{a+0+0}{3} \\ 1=\frac{0+b+0}{3} \\ -3=\frac{0+0+c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a=-12, b=3, c=-9$

BTTT: Viết phương trình (α) đi qua $G(1;2;3)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC. **Đáp số:** $6x+3y+2z-18=0$

Ví dụ 5. Cho điểm M(4;1;2). Gọi (P) là mặt phẳng qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz theo chiều dương lần lượt tại A,B,C. Viết phương trình của (P) khi khối tứ diện OABC có thể tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

Gọi $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$. $(a>0, b>0, c>0)$

Phương trình mặt phẳng (P): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

(P) đi qua điểm M(4;1;2) nên $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=1$. (1)

$V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}abc$ (2)

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có: $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{4}{a}.\frac{1}{b}.\frac{2}{c}}$ (3)

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow 3\sqrt[3]{\frac{8}{6V}}\Leftrightarrow V\ge 36$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{4}{a}=\frac{1}{b}=\frac{2}{c}=\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow a=12; b=3; c=6$

BTTT: Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm M(1;1;1) cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho thể tích của OABC có giá trị nhỏ nhất. **Đáp số:** $x+y+z-3=0$

Ví dụ 6. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+x-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua giao tuyến (α) và mặt phẳng (xOy) và (P) tạo với 3 mặt phẳng tọa độ một tứ diện có thể tích bằng $\frac{125}{36}$

Hướng dẫn:

Phương trình (xOy): z = 0

Phương trình mặt phẳng (P) thuộc chùm xác đinh bởi (◎) và (xOy) có dạng:

$$m(2x-y+z-5)-nz=0 \Leftrightarrow (P): 2mx-my+(m+n)z-5m=0$$

(P) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt là $A\left(\frac{5}{2}; 0; 0\right)$, $B(0; -5; 0)$, $C\left(0; 0; \frac{5m}{m+n}\right)$

$$V=\frac{1}{6}.OA.OB.OC=\frac{1}{6}.\frac{5}{2}.5.\left|\frac{5m}{m+n}\right|=\frac{125}{36}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1,\ n=2\\ m=1,\ n=-4\end{array}\right.$$

Vậy có 2 mặt phẳng (P):

$$\left[\begin{array}{l}(P_1): 2x-y+3z-5=0\quad (m=1;\ n=2)\\ (P_2): 2x-y-3z-5=0\quad (m=1;\ n=-4)\end{array}\right.$$

Ví dụ 7. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(1;2;4)$, cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A,B,C sao cho OA=OB=OC$\neq 0$

Hướng dẫn:

$(\alpha): a(x-1)+b(y-2)+c(z-4)=0, a^2+b^2+c^2 \neq 0$ (1)

$\Leftrightarrow$ ax $+by+cz=a+2b+4c$

(α) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt A$\left(\dfrac{a+2b+4c}{2};0;0\right); B\left(0;\dfrac{a+2b+4c}{2};0\right);$

$C\left(0;0;\dfrac{a+2b+4c}{2}\right)$ với a+2b+4c $\neq 0$.

Ta có: OA=OB=OC $\Leftrightarrow$ OA^2=OB^2=OC^2 $\Leftrightarrow a^2=b^2=c^2$

+*Nếu a,b, c cùng dấu thì* $a=b=c$ *và* (1) *trở thành* $x+y+z-7=0$

+ *Nếu a,b cùng dấu và khác dấu với c thì* $a=b=-c$ *và* (1)*trở thành* $x+y-z+1=0$

+*Nếu a,c cùng dấu và khác dấu với b thì* $a=c=-b$ *và* (1)*trở thành* $x-y+z-3=0$

+*Nếu c,b cùng dấu và khác dấu với a thì* $-a=b=c$ *và* (1)*trở thành* $-x+y+z-5=0$

Ví dụ 8. Cho $A(0;1;2);B(2;-2;1);C(-2;0;1)$

a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B, C
b) Tìm $M\in(\alpha):2x+2y+z-3=0$ sao cho MA=MB=MC

Đáp số: *a)* $(ABC): x+2y-4z+6=0;$ *b)* $M(2;3;-7)$

BTTT: Cho $A(0;0;3);B(2;0;-1);$ và $(P):3x-8y+7z-1=0$. Tìm $C\in(P)$ sao cho tam giác ABC đều. **ĐS:** $C(2;-2;-3);$ $C\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

Ví dụ 9. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(4;-1;1)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $OA=2OB=3OC$
ĐS: $x+2y+3z-5=0$

Ví dụ 10. Cho hai điểm A(-1;3;2), B(2;3;-1) và $(\alpha): 2x-y-3z+5=0$. Tìm điểm C thuộc (α) sao cho tam giác ABC đều.

VẤN ĐỀ 2. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Phương pháp:

Cho hai mặt phẳng $\begin{matrix}(\alpha): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\(\beta): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{matrix}$

- α *cắt* $\beta \Leftrightarrow A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$
- $\alpha // \beta \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$
- $\alpha\equiv\beta \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$

$\alpha\perp\beta \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

Ví dụ 1: Cho hai mặt phẳng $(P): x+y+z-2=0; (Q): 2x-3y+z+2=0$

a) Chứng tỏ $(P)\perp(Q)$. Chỉ ra phương trình giao tuyến d của (P) và (Q)

b) Lập phương trình mặt phẳng (R) chứa d và qua M(1;2;3).

Đáp số: b) $7x-13y+3z+10=0$

Ví dụ 2: Cho ba mặt phẳng $(P): x+y+z-2=0; (Q): x-3y-z+2=0; (R): 4y+z-2=0$

a) Chứng tỏ (P) và (R) cắt nhau theo giao tuyến (d)

b) Lập phương trình mặt phẳng (T) chứa d và song song với (Q)

Đáp số: b) $x-3y-z=0$

Ví dụ 3: Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z-1=0;\quad (\beta): x-2y+z=0$

a) Chứng tỏ $(\alpha),(\beta)$ cắt nhau theo giao tuyến d

b) Lập phương trình mặt phẳng (γ) chứa d và cắt các trục tọa độ theo thứ tự các điểm M, N, P sao cho $V_{OMNP}=\dfrac{1}{6}$

Đáp số: b) $x+y+z-1=0$

Ví dụ 4: Xác định k và m để ba mặt phẳng sau đây cùng đi qua một đường thẳng :
$5x+ky+4z+m=0;\quad 3x-7y+z-3=0;\quad x-9y-2z+5=0$

Hướng dẫn:

Gọi Δ là giao tuyến của 2 mặt phẳng 3x-7y+z-3=0; x-9y-2z+5=0

Lấy $A\left(\dfrac{1}{7};0;\dfrac{18}{7}\right); B\left(\dfrac{31}{10};\dfrac{9}{10};0\right)\in\Delta$

Điểm A,B thuộc : 5x+ky+4z+m=0 $\Rightarrow$ k=-5;m=-11

Ví dụ 5: Xác định m để ba mặt phẳng sau đây đôi một cùng vuông góc với nhau, tìm giao điểm chung của 3 mặt phẳng đó.

$(P): 5x+ky+4z+m=0;$

$(Q): 3x-7y+z-3=0;$

$(R): x-9y-2z+5=0$

Hướng dẫn:

Ba mặt phẳng đôi một vuông góc nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0 \\ \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R}=0 \\ \overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_Q}=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$

Gọi I(x;y;z) là nghiệm chung của 3 mặt phẳng, tọa độ I là nghiệm của hệ 3 phương trình ba mặt phẳng trên. I(1;2;3)

BTTT: Xác định m để ba mặt phẳng sau đây đôi một cùng vuông góc với nhau, tìm giao điểm chung của 3 mặt phẳng đó.

$(P): x+y+z-6=0;$

$(Q): mx-2y+z+m-1=0;$ **Đáp số: I(1;2;3)**

$(R): mx+(m-1)y-z+2m=0$

VẤN ĐỀ 3. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song. Hính chiếu và điểm đối xứng

Phương pháp

- Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\boxed{d\left(M_0,(\alpha)\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

- *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*

Chú ý: *Nếu hai mặt phẳng không song song thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.*

- *Điểm H là hình chiếu của điểm M trên (P)* $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH}, \vec{n} \text{ cùng phương} \\ H \in (P) \end{cases}$

- *Điểm M′ đối xứng với điểm M qua (P)* $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$

Ví dụ 1: Cho $(P): 6x - 2y + z + 1 = 0$; $(Q): 6x - 2y + z - 3 = 0$. Tính khoảng cách giữa (P) và (Q).

Ví dụ 2: Viết phương trình tổng quát của (P) cách (Q) một khoảng $k = \sqrt{14}$ với $(Q): 3x - y + 2x - 3 = 0$.

Ví dụ 3: Viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)//(\beta): x + 2y - 2z + 5 = 0$ và cách $A(2;-1;4)$ một khoảng $k = 4$

Ví dụ 4:Tìm $M \in Ox$ và cách đều hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ với $(\alpha): x + 2y - 2z + 1 = 0$ và $(\beta): 2x + 2y + z - 5 = 0$.

Ví dụ 5: Tìm $M \in Oy$ và cách đều $N\left(1;-4;-2\right)$ và $(\alpha): x + y + z - 14 = 0$.

Ví dụ 6: Cho $A\left(1;1;1\right)$. Tìm $M \in Oz$ sao cho $MA = 3d\left(A,(\text{Ox}y)\right)$

Ví dụ 7: Cho $(P): x + y + 5z - 14 = 0$; $M(1;-4;-2)$

a) Tính $d(M,(P))$

b) Tìm tọa độ hình chiếu của M trên (P). Từ đó suy ra tọa độ M′ là điểm đối xứng của M trên (P).

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 4 = 0$; $(\alpha): -4x + 2y - 4z + 9 = 0$

a) Tính $d\left(\alpha,\beta\right)$

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) cách đều hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$

Đáp số: $a)\ \frac{1}{6}$; $\quad b)\ 2x - y + 2z - \frac{17}{4} = 0$

Bài 2. B2009. Cho $A\left(1;2;1\right); B\left(-2;1;3\right); C\left(2;-1;1\right); D\left(0;3;1\right)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua A, B và $d\left(C,(\alpha)\right) = d\left(D,(\alpha)\right)$

Đáp số: $(\alpha_1): 4x + 2y + 7z - 15 = 0$; $(\alpha_2): 2x + 3z - 5 = 0$;

Bài 3. Cho $A(1;2;1);B(0;4;0);C(0;0;4);$. Viết Phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng OA và cách đều hai điểm B, C.

Đáp số: $(\alpha_1):3x-y-z=0;\ (\alpha_2):x-y+z=0;$

Bài 4. B2010. Cho $A(1;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c),\ b,c>0$ và $(P):y-z+1=0$. Xác định b, c biết $(ABC)\perp(P)$ và $d(O;(ABC))=\dfrac{1}{3}$.

Đáp số: $b=c=\dfrac{1}{2}$

Bài 5. Cho ba điểm A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c) với a, b, c là những số dương thay đổi sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Xác định a, b, c để khoảng cách từ O đến (ABC) lớn nhất

Đáp số: $a=b=c=1$

VẤN ĐỀ 4. Góc của hai mặt phẳng

Phương pháp

Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình: (α): $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

(β): $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

Góc giữa (α), (β) ***bằng*** *hoặc* ***bù*** *với góc giữa hai VTPT* $\vec{n}_1,\vec{n}_2$.

$$\boxed{\cos\left((\alpha),(\beta)\right)=\frac{\left|\vec{n}_1.\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}$$

Chú ý:

- $0^0\le\left((\alpha),(\beta)\right)\le 90^0$.
- $(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

Ví dụ 1: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(3;0;0)$, $C(0;0;1)$ và cắt trục tung tại điểm B sao cho ΔABC có $S=\dfrac{7}{2}$

Ví dụ 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(0;0;3)$, $C(0;0;1)$, cắt trục hoành tại điểm B và (α) tạo với (Oxy) một góc 30^0.

Ví dụ 3: Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(3;0;0),B(2;1;0)$ và tạo với (Oxy) một góc 60^0.

Hướng dẫn: $(P):x+y\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}z-3=0$

Ví dụ 4: Cho $(\alpha):x+2y+3z-6=0;\ (\beta):(m+1)x+(m+2)y-4m-6=0$. Tìm m để $\cos\left((P),(Q)\right)=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$

Hướng dẫn: $m=-1;\ \ m=-\dfrac{7}{2}$

Ví dụ 5: Tìm m để góc giữa hai mặt phẳng sau bằng α : $\begin{cases} mx+2y+mz-12=0 \\ x+my+z+7=0 \\ \alpha=45^0 \end{cases}$

VẤN ĐỀ 5. Ứng dụng giải toán hình học không gian

Ví dụ 1: A2003. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC đều cạnh a, $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $SA\perp(ABC)$.

Tính $d\left(A,(SBC)\right)$. **Đáp số:** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 2: B2004. Cho $S.ABC$,$SA=3a,\ SA\perp(ABC),AB=BC=2a,ABC=120^0$. Tính $d\left(A,(SBC)\right)$. **Đáp số:** $d=\dfrac{3a}{2}$

Ví dụ 3: A2007. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=a,AC=2a,\ \mathrm{AA}'=2a\sqrt{5}$, $BAC=120^0$. M là trung điểm của CC′. Chứng minh: $MB\perp MA'$ và $d\left(A,(A'BM\right)$.

Đáp số: $d\left(A,(A'BM\right)=\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$

Ví dụ 4: DB A2003. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ΔABC cân $AB=AC=a$ $BB'=a,\ BAC=120^0$. I là trung điểm của CC′. Chứng minh: $\Delta AB'I$ vuông và tính $\cos\left((ABC),(AB'I)\right)$. **Đáp số:** $\cos\left((ABC),(AB'I)\right)=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{3}$, $SA\perp\left(ABCD\right)$.Tính $\mathrm{d}\left(A,\left(SBC\right)\right)$ và khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAB đến $\left(SAC\right)$. **Đáp số:** $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $d\left(G,\left(SAC\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$

Ví dụ 6: Cho hình thoi ABCD tâm O cạnh a, $AC=a$. Từ trung điểm H của AB dựng $AH\perp(ABCD),SH=a$. Tính $d\left(O;(SCD\right)$ và $d\left(A;(SBC\right)$

Đáp số: $d\left(O,\left(SCD\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$; $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$

Ví dụ 7: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A\left(0;0;0\right),B\left(a;0;0\right);D\left(0;a;0\right)$, $A'\left(0;0;b\right)$ với $a,b>0$, M là trung điểm CC′.

a) Tính $V_{BDA'M}$

b) Tìm tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để $(A'BD)\perp(MBD)$

Ví dụ 8: Cho tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi α, β, γ lần lượt là các góc hợp bởi các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA) với mặt phẳng (ABC). Bằng phương pháp toạ độ, chứng minh rằng:

a) Tam giác ABC có ba góc nhọn

b) b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có ABCD là hình chữ nhật, $AD = a, AB = 2a,$ $SD = a,$ $SB = 2a, (SBD) \perp (ABCD)$. Tính $V_{S.ABCD}$ và $d(A,(SBC))$

CHỦ ĐỀ 3. MẶT CẦU VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

VẤN ĐỀ 1. Viết phương trình mặt cầu

Phương pháp: Muốn viết phương trình mặt cầu ta cần xác định tâm và bán kính của nó

- $S(I,R):\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (1)
- $S(I,R):\ x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2) (với $a^2+b^2+c^2-d>0$)

$\Rightarrow$Tâm I(a ; b ; c) và $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

Các trường hợp cơ bản:

TH1: Mặt cầu tâm I đi qua A. Lúc đó bán kính là R=IA

TH2 : Viết phương trình mặt cầu đường kính AB

- Tâm I là trung điểm AB
- Bán kính R=IA

TH 3: Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

- Bước 1: Giả sử mặt cầu có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$
- Bước 2: Vì A,B,C,D $\in$ mc(S) nên ta thiết lập được hệ 4 phương trình 4 ẩn, giải hệ ta được a,b,c,d

TH 4: Mặt cầu đi qua A,B,C và có tâm $I\in(\alpha)$

- Bước 1: Giả sử mặt cầu có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$
- Bước 2: Vì A,B,C $\in$ mc(S) và I thuộc mặt phẳng (α) nên ta thiết lập được hệ 4 phương trình 4 ẩn, giải hệ ta được a, b, c, d

Ví dụ 1: Cho $A(-1;0;-3);B(1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S)

a) Có đường kính AB
b) Có tâm $I\in Oy$ và đi qua hai điểm A, B

Đáp số: $a)\,x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3;\qquad b)\,x^2+(y+1)^2+z^2=11$

Ví dụ 2: Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm $A(1;2;4);B(1;-3;-1);\ C(2;2;-3)$ và có tâm $I\in(Oxy)$.

Đáp số: $(S):x^2+y^2+z^2+4x-2y-21=0$

Ví dụ 3: Cho 4 điểm $A(1;5;3);B(4;2;-5);C(5;5;-1);D(1;2;4)$

a) Viết (S_1) đi qua A, B, C và có tâm $I\in(Oxz)$
b) Viết (S_2) đi qua A, B, C, D

Đáp số: $a)\,x^2+y^2+z^2-\frac{22}{5}x-\frac{2}{5}y-\frac{147}{5}=0;\ b)\,x^2+y^2+z^2-x-4y+2z-19=0$

Ví dụ 4: Lập phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $A(2;1;1);B(1;1;0);\ C(0;2;4)$ và $R=\sqrt{5}$.

Đáp số: $(S_1):x^2+y^2+z^2-2y-4z=0;\ (S_2)\,x^2+y^2+z^2-\frac{4}{9}x-\frac{38}{9}y+\frac{32}{9}z-\frac{8}{3}=0$

VẤN ĐỀ 2. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Phương pháp: Cho $(S):\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ và $\alpha:\ Ax+By+Cz+D=0$

Gọi $d=d(I,\alpha)$: khỏang cách từ tâm mc(S) đến mpα :

TH 1: $d > R$: $(S) \cap \alpha = \phi$

TH 2: $d = R$: α tiếp xúc (S) tại H (H: tiếp điểm, α: tiếp diện)

Tìm tiếp điểm H (là hình chiếu của tâm I trên mpα)

- Bước 1 : Viết phương trình đường thẳng (d) qua I và vuông góc mpα . Ta có $\overrightarrow{a_d} = \vec{n}_\alpha$
- Bước 2 : Tọa độ H là nghiệm của hpt : (d) và (α)

TH 3: $d < R$: α cắt (S) theo đường tròn có pt $\begin{cases}(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2\\ \alpha\ : Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$

Tìm bán kính r và tâm H của đường tròn:

- Bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I,\alpha)}$
- Tìm tâm H (là hchiếu của tâm I trên mpα)

Chú ý: *Cách tìm giao điểm của đường thẳng và mặt cầu*

$$d: \begin{cases} x = x_o + a_1t \\ y = y_o + a_2t \\ z = z_o + a_3t \end{cases} \quad (1) \quad \text{và} \quad (S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2 \quad (2)$$

- Bước 1 : thay phương trình (1) vào pt (2), giải tìm t,
- Bước 2 : Thay t vào (1) được tọa độ giao điểm

Các trường hợp cơ bản :

TH 1 : Mặt cầu tâm I tiếp xúc mpα : $(S)\left\langle \begin{array}{l} \text{Pt mặt cầu tâm I} \\ R = d(I,\alpha) = \dfrac{|A.x_I + B.y_I + C.z_I + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{array}\right.$

TH 2: Viết phương trình mặt phẳng α tiếp xúc (S) và $\perp \Delta$

- Bước 1: Mặt phẳng α vuông góc Δ nên có : $\vec{n} = \overrightarrow{a_\Delta} = (A,B,C)$.

  Do đó α : $Ax + By + Cz + D = 0$ (A,B, C đã biết)
- Bước 2: Để tìm D ta sử dụng thêm giải thiết $d(I, \alpha) = R$

Ví dụ 1: DB B2006. Viết phương trình mặt cầu $O(0;0;0); A(0;0;4); B(2;0;0)$ và tiếp xúc với $(P): 2x+y-z+5=0$.

Đáp số: $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 6$

Ví dụ 2: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc trục tung và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-3z+5=0;\quad (\beta): 2x+y-3z-11=0$

Đáp số: $x^2+(y-3)^2+z^2 = \dfrac{32}{7}$

Ví dụ 3: Cho $A(1;0;-1); B(1;2;1); C(0;2;0)$

a) Viết phương trình mặt cầu đi qua O, A, B, C

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với OG và tiếp xúc với (S).

Đáp số: $a)\ x^2+(y-3)^2+z^2 = \dfrac{32}{7};\qquad b)\ x+2y-3\pm\sqrt{10} = 0$

Ví dụ 4: Viết phương trình mặt cầu

a) Có tâm $I(2;-1;4)$ và tiếp xúc với (Oxy)

b) Có tâm $O(0;0;0)$ và tiếp xúc với mặt cầu tâm $J(3;-2;4)$ và có bán kính $R'=1$

Đáp số:

$a)\ (S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=16$

$b)\ (S_1):x^2+y^2+z^2=\left(\sqrt{29}-1\right)^2;\quad (S_2):x^2+y^2+z^2=\left(\sqrt{29}+1\right)^2$

Ví dụ 4: Lập phương trình mặt cầu có bán kính bằng 2 và tiếp xú với (Oxy) tại M(3;1;0)

Đáp số: $I_1(3;1;-2);\quad I_2(3;1;2)$

Ví dụ 5: Cho $A(1;2;3);B(3;5;4);C(3;0;5)$

a) Lập phương trình mặt phẳng qua A, B, C

b) Lập phương trình mặt cầu nhận đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC làm đường tròn lớn.

Hướng dẫn: $a)\ (ABC):4x-y-5z+13=0;\ (S):\left(x-\frac{39}{7}\right)^2+\left(y-\frac{89}{14}\right)^2+\left(z-\frac{81}{14}\right)^2=\frac{667}{14}$

Ví dụ 7: Cho $M_1(2;1;-3);(P_1):x+y+2z+3=0;(P_2):x+y+2z-9=0;$

a) Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại M_1 và tiếp xúc với (P_2)

b) Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại M_1 và cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn.

Đáp số: $a)\ (S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6;\quad b)\ (S):(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=24$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho $M_1(2;5;0)$ và hai mặt phẳng $(P_1):3x-2y-z+4=0;\ (P_2):x-3y+2z-1=0$

a) Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại M_1 và tiếp xúc với (P_2)

b) Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại M_1 và cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn.

c) Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại M_1 và cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn có bán kính $r=\sqrt{\frac{21}{2}}$

Hướng dẫn

a) $(S_1):(x-4)^2+(y-9)^2+(z-2)^2=56;\quad (S_2):(x-4)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\left(z+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{56}{9}$

b) $(S):(x-8)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=56$

c) $(S):\left(x-\frac{15}{3}\right)^2+\left(y-\frac{29}{3}\right)^2+\left(z-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{686}{9}$

Bài 2. Cho $(P): 2x-3y+2z-3=0;\ (S):(x-8)^2+(y+8)^2+(z-7)^2=68$

a) Xác định vị trí tương đối của (P) và (S)

b) Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và tiếp xúc với (S)

c) Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn lớn

d) Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có bán kính $r=\sqrt{51}$

e) Viết phương trình mặt cầu (S′) đối xứng với (S) qua (P).

Đáp số:

$b) 2x-3y+2z-20=0;\quad 2x-3y+2z-88=0$

$c) (Q): 2x-3y+2z-54=0$

$d) (Q_1): 2x-3y+2z-37=0;\ (Q_2): 2x-3y+2z-71=0;$

$e) (x+4)^2+(y-10)^2+(z+5)^2=68$

Bài 3. Cho $(P): 2x-y+2z-5=0;\ (S):(x-3)^2+y^2+(z-4)^2=9$

a) Chứng tỏ (P) tiếp xúc với (S). Tìm tọa độ tiếp điểm

b) Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và tiếp xúc với (S)

c) Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn lớn

d) Viết phương trình mặt cầu (S′) đối xứng với (S) qua (P).

Đáp số:

$a) M(1;1;2);\ \ b)(Q): 2x-y+2z-23=0;\ c): 2x-y+2z-14=0;\ d)(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$

Bài 4. Cho $(P): x+2y+3z-10=0;\ (S):(x-2)^2+y^2+(z+2)^2=56$

a) Chứng tỏ (P) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn. Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn

b) Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và tiếp xúc với (S)

c) Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn lớn.

d) Viết phương trình mặt cầu (S′) đối xứng với (S) qua (P).

Đáp số:

$a) J(3;2;1); r=\sqrt{42}\ ;\quad b)(Q_1): x+2y+3z+32=0;\ (Q_2): x+2y+3z-x+2y+3z-24=0;$

$c) 2x+2y+3z+4=0;\quad d) x+2y+3z+18=0;\ e)(S'):(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=56$

Bài 5. Cho $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$. Viết phương trình mặt phẳng song song với $(\alpha): x+2y+z-1=0$ và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có $S=3\pi$.

Đáp số: $(\alpha_1): x+2y+z+2=0;\quad (\alpha_2): x+2y+z-10=0$

Bài 6. Cho $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-6=0$.

a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua $A(4;0;0); B(0;0;8)$ và tiếp xúc với (S)

b) Viết phương trình mặt phẳng qua $C(2;1;1); D(1;1;0)$ và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có $S=6\pi$

Đáp số:

a) $(\alpha_1): 2x+2y+z-8=0;\ (\alpha_2): 8x-y+4z-32=0;$

b) $(\alpha_1): x-y-z=0;\ (\alpha_2): x+5y-z-6=0;$

Bài 7. Lập phương trình mặt cầu đi qua $A(1;0;0); B(0;1;0); C(0;3;2)$ và cắt $(P): 2x+2y+z=0$ theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng 1.

Đáp số: $(S_1): x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+1=0; (S_2): x^2+y^2+z^2-8x-8y+2z+7=0;$

Bài 8. Cho $(S): (x-5)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=37; (P): 2x+y+2z-1=0$

a) Chứng tỏ (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C). Xác định tâm và bán kính của (C)

b) Lập phương trình mặt cầu chứa (C) và

- Có tâm thuộc $(Q): x+y+z+9=0$
- Đi qua $A(4;2;-2)$
- Tiếp xúc với $(Q): 3x+y-7=0$

Đáp số:

$a)\ (C): \begin{cases} H(1;1;-1) \\ r=1 \end{cases}$

$b)$

$\oplus (S_1): x^2+y^2+z^2+6x+2y+10z-2=0$

$\oplus$

$\oplus$

LUYỆN TẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Bài 1. Cho bốn điểm A(2;-1;6), B(-3;-1;-4), C(5;-1;0), D(1;2;1).

a) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC và khoảng cách từ D tới (ABC)

b) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

Hướng dẫn:

$a)$ Bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $r=\dfrac{S_{ABC}}{p}$

$p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}$.Để ý: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C

r=$\dfrac{30}{6\sqrt{5}}=\sqrt{5}$. Khoảng cách từ D tới (ABC) là d(D,(ABC))=$\dfrac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}$;

$V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$. $ĐS:3$

$b)$ Gọi I(x;y;z) là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD:

IA=IAB=IC=ID $\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IA^2=IC^2 \\ IA^2=ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{13}{3} \\ z=1 \end{cases}$. Bán kính $R=IC=\sqrt{\dfrac{1525}{36}}$.

Cách 2: Gọi (S) : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Thay tọa độ A,B, C, D vào (S) ta được hệ phương trình 4 ẩn a,b,c,d

BTTT: Cho 4 điểm A(0;1;0);B(2;3;1);C(-2;2;2);D(1;-1;2)

a) Chứng minh rằng tứ diện ABCD vuông tại A
b) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

Hướng dẫn và đáp số:

$a)$chứng minh AB, AC, AD đôi một vuông góc nhau

$b)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}$

Bài 2. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A′B′C′ với A(-1;6;-1), B(-4;6;2), C(-1;3;2), A′(5;12;5)

a) Chứng minh rằng hình lăng tụ đã cho là hình lăng trụ đều và tính thể của nó
b) Tìm toạ độ của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A′B′C′ và viết phương trình của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ ABC.A′B′C′

Hướng dẫn:

$a)\, ycbt \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \text{ là tam giác đều} \\ AA'\perp (ABC) \end{cases}$

$b)$Vì tam giác ABC là tam giác đều nên tâm trùng với trọng tâm G,

G(-2;5;1) là trọng tâm của ABC

Gọi G' là trọng tam của tam giác A'B'C', ta có

$\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}\Leftrightarrow G'(4;11;7)$.Hình lăng trụ ABC.A'B'C' là hình lăng trụ đều nên (S) ngoại tiếp hình lăng trụ này có tâm là trung điểm I(1;8;4) của GG', R=IA=$\sqrt{33}$

Bài 3. ĐHCĐ 2005 B . Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với A(0;-3;0), B(4;0;0), C(0;3;0), $B_1(4;0;4)$.

a) Tìm tọa độ các đỉnh A_1, C_1. Viết phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1).

b) Gọi M là trung điểm của A_1B_1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, M và song song với BC. Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm N. Tính độ dài MN.

Bài 4. Cho phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+4my+2z+6m^2-1=0$ (1)

Xác định m để phương trình (1) là phương trình của mặt cầu. Khi đó, tìm m để bán kính của mặt cầu đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn:

(1) là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow A^2+B^2+C^2-D>0 \Leftrightarrow -1<m<3$

Khi đó: $R=\sqrt{-m^2+2m+3}$

Xét hàm số $f(m)=-m^2+2m+3, m\in(-1;3)$

$R_{\max}=2$ khi m=1

Bài 5. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình lần lượt là: $2x-y-3z+4=0$; $x^2+y^2+z^2+6x-2y-2z-3=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) song song với (P) và tiếp xúc với (S).

Hướng dẫn:

(α) // (P) nên (α) có dạng $2x-y-3z+D=0$ $(D\neq 4)$.

(α) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow d(I,(\alpha))=R \Leftrightarrow D=24$ hoặc $D=-4$

Bài 6. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) và đi qua A(0;0;4), B(2;1;3), C(0;2;6)

Hướng dẫn:

Mặt cầu (S) đi qua A,B,C có tâm I thuộc các mặt phẳng trung trực (α) của AB và mặt phẳng trung trực (β) của AC

$(\alpha): 2x+y-x+1=0$; $(\beta): y+z-6=0$

Tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}2x+y-x+1=0\\ y+z-6=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow I\left(0;\frac{5}{7};\frac{7}{2}\right)$

BTTT: Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-z-3=0$ và đi qua A(-3;6;1), B(2;3;-3), C(-6;2;0)

Đáp số: $(S):\left(x+\frac{39}{10}\right)^2+\left(y-\frac{51}{10}\right)^2+\left(z+\frac{57}{10}\right)^2=\frac{4651}{100}$

Bài 7. Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với $(Q): x+3=0$ và đi qua A(1;2;-1), B(-1;0;3), C(3;-2;1)

Hướng dẫn:

(S) đi qua A,B,C nên tâm I của (S) thuộc mặt phẳng trung trực (α) của AB và mặt phẳng trung trực (β) của AC

$(\alpha): x+y-2z+1=0; \quad (\beta): x-2y+z-2=0.$

Do đó I thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x-2y+z-2=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}. I \in \Delta \Rightarrow I(t;-1+t;t)$ và $d(I;(Q)) = IA \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3+2\sqrt{2} \\ t=3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Bài 8. ĐHCĐ 2004 K.D Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho ba điểm A(2;0;1), B(1;0;0), C(1;1;1) và mặt phẳng (P) : x + y + z – 2 = 0. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

Hướng dẫn: $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu (S). $\begin{cases} IA^2 = IB^2 = IC^2 \\ I \in (p) \end{cases}$

BTTT: Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với $(\alpha): 2x+2y+z+12=0$ và đi qua A(1;2;-1), $B\left(\frac{32}{9};\frac{41}{9};\frac{83}{9}\right);C\left(-\frac{9}{5};\frac{38}{5};-1\right)$

Đáp số:

$(S_1): (x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 49;$

$(S_2): \left(x-\frac{156}{5}\right)^2 + \left(y-\frac{103}{5}\right)^2 + \left(z+\frac{149}{20}\right)^2 = \frac{519841}{400}$

Bài 9. ĐHCĐ 2009 A Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x-2y-z-4=0$ và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định toạ độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

BTTT. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 5 \\ x-2y+2z+1=0 \end{cases}$. Tìm tâm và bán kính

Bài 10. Cho 4 điểm A(1;2;1);B(2;0;-1);C(1;3;-4);D(0;-2;2). Chứng minh rằng tập hợp những điểm M thỏa mãn : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MD^2$ là một mặt cầu. Viết phương trình mặt cầu đó.

Hướng dẫn: $M(x;y;z).(S): (x+4)^2 + (y+3)^2 + (z-12)^2 = 334$

CHỦ ĐỀ 4. ĐƯỜNG THẲNG VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng: $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là vtcp của đường thẳng d nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với d

2. Các dạng phương trình đường thẳng:

Phương trình tham số của đường thẳng: *(d) qua M(x_o ;y_o ;z_o) có vtcp* $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$

- **PTTS:** $(d):\begin{cases} x = x_o + a_1t \\ y = y_o + a_2t\ ;\ t \in R \\ z = z_o + a_3t \end{cases}$

- **PTCT:** $(d): \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$

- **PT tổng quát của (d) là giao tuyến của 2 mp α_1 và α_2**

$(d):\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$. Lúc đó véctơ chỉ phương $\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

VẤN ĐỀ 1. Viết phương trình đường thẳng

Phương pháp chung:

- Tìm một điểm trên d và một vtcp của d
- Tìm 2 mặt phẳng cùng đi qua d thì d là giao tuyến của 2 mặt phẳng

Các trường hợp cơ bản:

TH 1: Đường thẳng (d) đi qua A,B: $(d)\begin{cases} qua A & (hay B) \\ Vtcp & \overrightarrow{a_d} = \overrightarrow{AB} \end{cases}$

TH 2: Đường thẳng (d) qua A và song song (Δ): $(d)\left\langle \begin{array}{l} \text{qua } A \\ \text{Vì (d) // } (\Delta) \text{ nên vtcp } \vec{a}_d = \vec{a}_\Delta \end{array} \right.$

TH 3 : Đường thẳng (d) qua A và vuông góc mpα: $(d)\left\langle \begin{array}{l} \text{qua } A \\ \text{Vì (d)} \perp (\alpha) \text{ nên vtcp } \vec{a}_d = \vec{n}_\alpha \end{array} \right.$

TH 4 : Đường thẳng (d) qua A và vuông góc (d_1),(d_2): $(d)\left\langle \begin{array}{l} \text{qua } A \\ \text{vtcp } \vec{a} = [\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}] \end{array} \right.$

Một số lưu ý:

- Nếu d_1 qua A và cắt d_2 thì d_1 nằm trong mặt phẳng đi qua A và chứa d_2
- Nếu d_1 qua A và vuông góc với d_2 thì d_1 nằm trong mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d_2
- Nếu d qua A và song song với (α) thì d chứa trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α)

Ví dụ 1 : Cho $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z}{-1}$; $(\alpha):2x-y+3z-6=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua giao điểm A của d và (α) và song song với $d':\begin{cases}x=-1+3t\\y=-3+t\\z=-2t\end{cases}$

Đáp số: $\Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=-2+t\\z=2t\end{cases}$

Ví dụ 2: Cho $A(2;0;-3);B(4;-2;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z+4=0$

Viết phương trình đường thẳng d chứa trong (P) sao cho d cách đều A và B

Đáp số: $\Delta:\begin{cases}x=-3+4t\\y=-6-3t\\z=2+t\end{cases}$

Ví dụ 3: Cho $A(1;4;2);B(-1;2;4)$ và mặt phẳng $(\Delta):\begin{cases}x=1-t\\y=-2+t\\z=2t\end{cases}$

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua trọng tâm G của ΔOAB và $\perp(OAB)$

b) Tìm $M\in\Delta$ sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất

Đáp số: $a)\ d:\begin{cases}x=2t\\y=2-t\\z=2+t\end{cases};\quad b) M(-1;0;4)$

Ví dụ 4: DB B2009. Cho $A(1;0;-1);B(2;3;-1);C(1;3;1)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng qua trực tâm ΔABC và vuông góc với (ABC).

Đáp số: $\Delta:\begin{cases}x=-6t\\y=\dfrac{10}{3}+2t\\z=-\dfrac{3}{2}-3t\end{cases}$

Ví dụ 5: ĐHA 2011. Cho $A(2;0;1);B(0;-2;3)$. Tìm $M\in(P):2x-y-z+4=0$ sao cho $MA=MB=3$. **Đáp số:** $M_1(0;1;3)$; $M\left(-\dfrac{6}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right)$

Ví dụ 6: Cho $A(2;1;0);B(0;1;2);C(0;0;1)$. Tìm $M\in(P):x+y-z+2=0$ sao cho $MA=MB$ và MC nhỏ nhất. **Đáp số:** $M\left(\frac{1}{2};-2;\frac{1}{2}\right)$

Dạng 1. Viết phương trình đường thẳng Δ ($\Delta\subset(P)$ hoặc $//(P)$) qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d

Phương pháp:

Ví dụ 1: Cho $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{3};(P):2x-5y-3z+8=0;A(3;-4;1)$

a) Viết phương trình đường thẳng Δ_1 qua A, nằm trên (P) và $\perp d$

b) Viết phương trình Δ_1 qua A, song song với (Oxy) và $\perp d$

Hướng dẫn:

$a)\Delta_1:\frac{x-3}{9}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-1}{-4};$ $\quad b)\Delta_2:\begin{cases}x=3-t\\y=-4-2t\\z=1\end{cases}$

Ví dụ 2: Cho $d:\frac{x+1}{-1}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-1}{-4};(\alpha):2x+y-2z+9=0$

a) Tìm $I\in d$ sao cho $d\left(I;(\alpha)\right)=2$

b) Tìm $A=d\cap(\alpha)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A, chứa trong (α) và vuông góc với d

Hướng dẫn:

$a)d\left(I;(\alpha)\right)=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}I(3;-7;1)\\I(-3;5;7)\end{array}\right.;$ $\quad b)\Delta:\begin{cases}x=t\\y=-1\\z=4+t\end{cases}$

Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2

Phương pháp:

Cách 1:

- Bước 1: Chuyển d_2 về dạng tham số
- Bước 2: Giả sử d cắt d_2 tại B, $B\in d_2\Rightarrow$ toạ độ B có chứa tham số
- Bước 3: d vuông góc với $d_1\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_{d_1}}$

Cách 2:

- Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d_1.
- Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A và d_2.

Khi đó $\Delta=(P)\cap(Q)$.

Ví dụ 1: Cho $d_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1};$ $d_2:\begin{cases}x=-1\\y=t\\z=1+t\end{cases}$

Viết phương trình đường thẳng Δ qua $A(0;1;1)$, vuông góc d_1 và cắt d_2

Hướng dẫn: $\Delta:\begin{cases} x=-t \\ y=1+t \\ z=1+2t \end{cases}$

Ví dụ 2: Cho $d:\begin{cases} x=-3+2t \\ y=1-t \\ z=-1+4t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua $A(0;1;1)$, vuông góc và cắt d

Hướng dẫn: $\Delta:\begin{cases} x=-4+3t \\ y=-2+2t \\ z=4-t \end{cases}$

Ví dụ 3: Cho d là giao tuyến của $(\alpha):5x+y+z+2=0;(\beta):x-y+2z+1=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua $A(2;-1;0)$, vuông góc và cắt d.

Hướng dẫn: $\Delta:\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1 \\ z=-t \end{cases}$

Dạng 3. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A, song song với (P) và cắt d

Phương pháp

Ví dụ 1: Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua $A(3;-1;4)$, cắt trục Oy và song song với $(P):2x+y=0$

Hướng dẫn: $\Delta:\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y+1}{6}=\dfrac{z+4}{4}$

Ví dụ 2: Viết phương trình chinhd tắc của đường thẳng Δ đi qua $A(3;-2;-4)$, cắt $d:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$ và song song với $(P):2x+y=0$

Hướng dẫn: $\Delta:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z+4}{7}$

Dạng 4. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2

Phương pháp: Tìm các giao điểm A = $d_1 \cap$ (P), B = $d_2 \cap$ (P). Khi đó d chính là đường thẳng AB.

Ví dụ: Viết phương trình tham số của đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(P):y+2z=0$ và cắt cả hai $d_1:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{4}$, $d_2:\begin{cases} x=2-t \\ y=4+2t \\ z=1 \end{cases}$

VẤN ĐỀ 2. Vị trí tương đối của 2 đường thẳng trong không gian

Phương pháp: d_1 qua M có vtcp $\overrightarrow{u_{d_1}}$; d_2 qua N có vtcp $\overrightarrow{u_{d_2}}$

- d_1 chéo d_2 $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{u_{d_2}}\right].\overrightarrow{MN} \neq 0$ (không đồng phẳng)
- d_1 , d_2 đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{u_{d_2}}\right].\overrightarrow{MN} = 0$
- d_1, d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{u_{d_2}}\right] \neq \vec{0}$ và $\left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{u_{d_2}}\right].\overrightarrow{MN} = 0$
- d_1, d_2 song song nhau $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{u_{d_2}}\right] = \vec{0}$ và $\left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{MN}\right] \neq \vec{0}$
- d_1, d_2 trùng nhau $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{u_{d_2}}\right] = \vec{0}$ và $\left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{MN}\right] = \vec{0}$

Ví dụ 1 : Cho $d_1 : \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = m + 2t \\ z = 1 - m - 3t \end{cases}$; $d_2 : \begin{cases} x = m - 2t' \\ y = mt \\ z = 1 - m + t' \end{cases}$. Tìm m để d_1 chéo d_2

Đáp số: $\begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Ví dụ 2 : Cho $A(4;2;2); B(0;0;7)$ và $d : \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-1}{1}$

a) Chứng minh d và AB cùng thuộc một mặt phẳng

b) Tìm $C \in d$ sao cho tam giác ABC cân tại A

Hướng dẫn:

$a)\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right].\overrightarrow{BM} = 0;$ $\qquad b)\ C(1;8;2);\ C(9;0;-2)$

Ví dụ 3: Cho $d_1 : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$; $d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$

a) Tìm giao điểm của d_1, d_2

b) Viết phương trình mặt phẳng chứa d_1, d_2.

Hướng dẫn: $a) I(2;3;1);$ $\qquad b) (\alpha) : 6x - 8y + z + 11 = 0$

Dạng 1. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2

Phương pháp

Cách 1:

- Bước 1: Chuyển d_1 và d_2 về dạng tham số
- Bước 2: Giả sử d cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A và B
- Bước 3: Ba điểm A,B,M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right] = \vec{0}$

Cách 2: Gọi (P) = (M, d_1), (Q) = (M, d_2). Khi đó d = (P) $\cap$ (Q). Do đó, một VTCP của d có thể chọn là $\vec{a} = \left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right]$.

Ví dụ 1: Cho $A(1;-1;1)$ và hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+2t\\ y=t\\ z=3-t\end{cases}$; $d_2:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$

a) Chứng minh d_1 chéo d_2

b) Viết phương trình đường thẳng qua A và cắt cả d_1, d_2

Đáp số: $d:\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-7}$

Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng Δ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2

Phương pháp

- **Bước 1:** Chuyển d_1 và d_2 về dạng tham số
- **Bước 2:** Giả sử d cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A và B
- **Bước 3:** d // Δ nên $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{u_\Delta} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u_\Delta}\right]=\vec{0}$

Cách 2: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và d_1, mặt phẳng (Q) chứa Δ và d_2. Khi đó d = (P) $\cap$ (Q).

Chú ý: d vuông góc với (P) và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 thì ta làm tương tự. Cụ thể

- Bước 1: chuyển d_1 và d_2 về dạng tham số
- Bước 2: Giả sử d cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A và B
- Bước 3: d vuông góc với (P) nên $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{n_{(P)}} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=\vec{0}$

Ví dụ 1: Viết phương trình đường thẳng $\Delta//Ox$ và cắt cả hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{3};\ d_2:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{2}$

Đáp số: $\Delta:\begin{cases}x=t\\ y=-\dfrac{8}{5}\\ z=-\dfrac{7}{5}\end{cases}$

Ví dụ 2. A2007. Cho $d_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{1},\ d_2:\begin{cases}x=-1+2t\\ y=1+t\\ z=3\end{cases}$

a) Chứng minh d_1 chéo d_2

b) Viết phương trình đường thẳng $\Delta\perp(P):7x+y-4z=0$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2

Đáp số: $\Delta:\begin{cases}x=2+7t\\y=t\\z=-1-4t\end{cases}$

Dạng 3. Viết phương trình đường vuông góc chung d của hai đường thẳng chéo nhau d_1,d_2

Phương pháp

Cách 1:

- Bước 1: Chuyển d_1 và d_2 về dạng tham số (t_1,t_2)
- Bước 2: Lấy $I\in d_1; J\in d_2$. $\begin{cases}IJ\perp d_1\\IJ\perp d_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{u_1}\\\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{u_2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1\\t_2\end{cases}$.
- Bước 3: d chính là IJ

• Cách 2:

- Vì d ⊥ d_1 và d ⊥ d_2 nên một VTCP của d có thể là: $\vec{a}=\left[\vec{a}_{d_1},\vec{a}_{d_2}\right]$.
- Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d_1, bằng cách:
  - Lấy một điểm A trên d_1.
  - Một VTPT của (P) có thể là: $\vec{n}_P=\left[\vec{a},\vec{a}_{d_1}\right]$.
- Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và d_2.

Khi đó d = (P) ∩ (Q).

Ví dụ 1: Cho $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=-5+t\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=0\\y=4-2t'\\z=5+3t'\end{cases}$

a) Chứng minh d_1 chéo d_2

b) Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2. Suy ra khoảng cách giữa d_1,d_2

Hướng dẫn: *b)* $d:\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{2}$; $\quad d\left(d_1;d_2\right)=2\sqrt{17}$

Ví dụ 2: Cho $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=2t\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=-2-2t'\\y=-t'\\z=t'\end{cases}$

a) Chứng minh d_1,d_2 chéo nhau và vuông góc nhau

b) Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1,d_2

Hướng dẫn: *b)* $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z+2}{2}$;

VẤN ĐỀ 3. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Dạng 1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Phương pháp:

Ví dụ 1: B2003. Cho $A(2;0;0);B(0;0;8);\overrightarrow{AC}=(0;6;0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến OA. **Đáp số:** $d=5$

Ví dụ 2: A2009. Cho mặt phẳng và hai đường thẳng có phương trình $(P): x-2y+2x-1=0; \Delta_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+9}{6}$; $\Delta_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}$

Tìm $M\in\Delta_1: d\left(M;(\Delta_2)\right)=d\left(M;(P)\right)$.

Đáp số: $M_1(0;1;-3)$; $M_2\left(\frac{18}{35};\frac{53}{35};\frac{3}{35}\right)$

Ví dụ 3: D2010. Cho $\Delta_1: \begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$; $\Delta_2: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$. Tìm $M\in\Delta_1: d\left(M;\Delta_2\right)=1$

Đáp số: $M_1(4;1;1)$; $M_2(7;4;4)$

Dạng 2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp:

$d(d_1;d_2)=$

Ví dụ 1: Cho $A(1;0;0);B(1;1;0);C(0;1;0);D(0;0;2)$. Tính $d(AC,BD)$. **Đáp số:** $d=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ví dụ 2: Cho $d_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-4}{2}$; $d_2: \begin{cases} x=1+3t \\ y=2+t \\ z=-1+2t \end{cases}$

a) Chứng minh d_1,d_2 chéo nhau. Tính $d(d_1,d_2)$

b) Với A, B cố định thuộc d sao cho $AB=\sqrt{117}$. Khi C di động trên d′. Tìm giá trị nhỏ nhất của S_{ABC}

Hướng dẫn:

$a)\ d(d_1,d_2)=\sqrt{13};\quad b) S_{\min}=\frac{39}{2}$ xảy ra khi $CH\equiv MN$

Dạng 3. Ứng dụng tọa độ giải toán không gian

Ví dụ 1: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC vuông cân tại B, $AA'=a\sqrt{2}, BA=BC=a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính $d(AM,B'C)$

Đáp số: $d(AM,B'C)=\frac{a}{\sqrt{7}}$

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có tất cả các cạnh đều bằng a, M là trung điểm của AA′. Chứng minh $MB\perp CB'$ và $d(MB,B'C)$.

Đáp số: $d\left(MB,B'C\right)=\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$

Ví dụ 3: A2012. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA=2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

VẤN ĐỀ 4. Các bài toán liên quan giữa đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp:

Các trường hợp cơ bản

TH **1:** (α) đi qua một điểm M và một đường thẳng (d) không chứa M:

- Trên (d) lấy điểm A và VTCP $\vec{u}$.
- Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]$

TH 2: (α) đi qua một điểm M và vuông góc với một đường thẳng (d):

VTCP $\vec{u}$ của đường thẳng (d) là một VTPT của (α).

TH 3: (α) đi qua 2 đường thẳng cắt nhau d_1,d_2

- Xác định các VTCP $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ của các đường thẳng d_1,d_2
- Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]$.
- Lấy một điểm M thuộc d_1 hoặc d_2 $\Rightarrow$ M ∈ (α).

TH 4: (α) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 (d_1,d_2 chéo nhau):

- Xác định các VTCP $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ của các đường thẳng d_1,d_2.
- Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]$.
- Lấy một điểm M thuộc d_1 $\Rightarrow$ M ∈ (α).

TH 5: (α) đi qua điểm M và song song với hai đường thẳng chéo nhau d_1,d_2:

- Xác định các VTCP $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ của các đường thẳng d_1,d_2.
- Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]$.

TH 6: (α) đi qua một đường thẳng (d) và vuông góc với một mặt phẳng (β):

- Xác định VTCP $\vec{u}$ của (d) và VTPT $\overrightarrow{n_\beta}$ của (β).
- Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\vec{u},\overrightarrow{n_\beta}\right]$.
- Lấy một điểm M thuộc d $\Rightarrow$ M ∈ (α).

Ví dụ 1: Viết phương trình mặt phẳng qua $A\left(0;-1;3\right)$ và chứa $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$

Đáp số: $y+z-3=0$

Ví dụ 2: Cho $A(0;1;2)$, $d_1: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$; $d_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=2+t \end{cases}$

a) Viết phương trình (α) qua A và song song với d_1, d_2

b) Tìm $M \in d_1, N \in d_2$ sao cho A, M, N thẳng hàng

Dạng 1. Đường thẳng song song với mặt phẳng

Ví dụ 1: D2009. Cho $A(2;1;0); B(1;1;2); C(1;1;0)$. Tìm D trên AB sao cho $CD//(\alpha): x+y+z-20=0$. **Đáp số:** $D(3;1;-2)$

Ví dụ 2: DB B2007. Cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{2}$; $d': \frac{x-5}{6}=\frac{y}{4}=\frac{z+5}{-5}$ và mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-1=0$

a) Viết phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc với (α)

b) Tìm $M \in d, N \in d'$ sao cho $MN//(\alpha)$ và khoảng cách từ MN đến (α) bằng 2.

Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{4}$; $\Delta_2: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và song song Δ_2. **Đáp số:** $2x-z=0$

Ví dụ 4: Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3}$ và $(P): x-y-z-1=0$. Lập phương trình chính tắc Δ đi qua A(1;1;-2) song song với (P) và vuông góc với d.

Đáp số: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{-3}$

Ví dụ 5: Cho $d: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}$; $(P): x+3y+2z+2=0$

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d và vuông góc với (P)

b) Viết phương trình Δ qua M(2;2;4), song song với (P) và cắt d.

Đáp số: $a)\ (\alpha): x-y+z-1=0$; $\quad b)\ \Delta: \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{1}$

Ví dụ 6: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t; \\ z=2 \end{cases}$ $\Delta_2: \frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$

a) Viết phương trình mặt phẳng chứa Δ_1 và song song Δ_2

b) Xác định $A \in \Delta_1, B \in \Delta_2$ sao cho AB nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

$a)\ (P): x+y-z+2=0$;

$b)$ AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung $\Rightarrow \mathrm{A}(1;-1;2); B(3;1;0)$

Dạng 2. Hình chiếu vuông góc của một điểm lên mặt phẳng

Phương pháp: Cho điểm M và mặt phẳng (α). Tìm toạ độ hình chiếu H của M lên mặt phẳng (α)

- **Bước 1:** Lập phương trình tham số của đường thẳng MH (đường thẳng MH có vtcp $\vec{u}$ trùng với vtpt $\vec{n}$ của (α))
- **Bước 2:** Thay x, y, z trong phương trình tham số của đường thẳng MH vào phương trình (α) để tính t rồi suy ra toạ độ H.

Ví dụ 1: Cho $A(-3;5;-5), B(5;-3;7),\ (P): x+y+z=0$

a) Tìm giao điểm I của AB và (P)

b) Tìm M thuộc (P) sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất

Hướng dẫn: $a) I(-1;3;-2);\qquad b) M(0;0;0)$

Ví dụ 2: Cho $A(1;2;-1);\ d: \frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{3}; (P): 2x+y-z+1=0$

a) Tìm điểm B đối xứng với A qua (P)

b) Viết phương trình đường thẳng qua A, cắt d và song song với (P)

Hướng dẫn: $a) B(-3;0;1);\qquad b) \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-9}=\frac{z+1}{-5}$

Ví dụ 3: DB A2007. Cho $A(-1;3;-2); B(-3;7;-18), (P): 2x-y+z+1=0$

a) Viết phương trình mặt phẳng chứa BC và vuông góc với (P)

b) Tìm $M \in (P): MA+MB$ ngắn nhất

Đáp số: $a) (\alpha): 2x+5y+z-11=0;\qquad b) M(2;2;-3)$

Ví dụ 4: DB D2004. Cho $A(2;0;0);\ B(2;2;0); S(0;0;m)$

a) Khi $m=2$ tìm C đối xứng với O qua (SAB)

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SA. Chứng minh $S_{OBH} < 2, \forall m$

Hướng dẫn:

$a) C(2;0;2);\qquad b) S_{OBH}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OB}\right]\right|=2\sqrt{\frac{m^4+8m^2}{m^2+8m^2+16}}<2, \forall m$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Cho điểm A(3;1;1), B(7;3;9) và (α): x+y+z+3=0. Tìm điểm M trên (α) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

Gọi I là trung điểm của AB, I cố đinh.

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2MI.$

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất (M thuộc (α), I cố định)

$\Leftrightarrow$M là hình chiếu vuông góc của I trên (α)....$ĐS$: M(0;-3;0)

Bài 2. Cho 3 điểm A(-2;1;6), B(-4;-4;7), C(-3;0;-1) và (α): 2x-y-z-5=0. Tìm điểm M tthuộc (α) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ ngắn nhất.

Hướng dẫn:

Gọi G là trung trọng tâm của tam giác ABC, ta có G(-3;-1;4) và

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3MG.$

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ ngắn nhất $\Leftrightarrow$ MI ngắn nhất (M thuộc (α) và G cố định)

$\Leftrightarrow$M là hình chiếu vuông góc của G trên (α)....$ĐS$: M(1;-3;0)

Bài 3. Cho 4 điểm A(-5;2;0), B(-8;-1;-1), C(1;1;-5), D(-3;-2;2) và (α): 4x-y-2z-8=0. Tìm điểm M tthuộc (α) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ ngắn nhất.

Hướng dẫn:

Gọi G là trung trọng tâm của tứ giác ABCD, ta có G($-\frac{15}{4}$;0;-1) và

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4MG.$

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ ngắn nhất

$\Leftrightarrow$ MG ngắn nhất (M thuộc (α) và G cố định)

$\Leftrightarrow$M là hình chiếu vuông góc của G trên (α)....$ĐS$: M($\frac{1}{4}$;-1;-3)

Bài 4. Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-3z=0$ và hai điểm A(0;0;-3), B(9;15;12). Tìm điểm M thuộc (α) sao cho :

a) MA+MB ngắn nhất
b) | MA-MB | dài nhất

Hướng dẫn:

$a)$ A và B khác phía so với (α):

MA+MB $\geq$ AB(Không đổi)

MA+MB ngắn nhất $\Leftrightarrow$ M ở trên đoạn thẳng AB mà M $\in (\alpha)$ nên M là giao điểm của đoạn thẳng AB với (α).....$ĐS: M(3;5;2)$

$b)$ A' là điểm đối xứng của A qua (α), ta có:

$\left|MA - MB\right| = \left|MA' - MB\right| \leq A'B.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ M ở trên đường thẳng AB, mà M $\in (\alpha)$ nên M=A'B$\cap$ (α).

Vậy max$\left|MA - MB\right| = A'B.....M(-17;-11;-6)$

Bài 5. Cho mặt phẳng $(\alpha): x+3y-z-19=0$ và hai điểm A(-2;0;1), B(-7;-5;3). Tìm điểm M thuộc (α) sao cho :

a) MA+MB ngắn nhất
b) | MA-MB | dài nhất

Hướng dẫn:

A và B cùng phía so với (α):

a) MA+MB ngắn nhất

- Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (α), H là hình chiếu vuông góc của A trên (α) và H(0;6;-1) $\Rightarrow$ A'(2;12;-3).M=A'B$\cap(\alpha)$....$ĐS: M(3;5;2)$

$b)\left|MA - MB\right|$ dài nhất

$\left|MA - MB\right| \leq AB$

Vậy max$\left|MA - MB\right| = AB.....ĐS: M(3;5;-1)$

BTTT:

Bài 1. Cho mặt phẳng $(\alpha): x-3y+3z-11=0$ và hai điểm A(3;-4;5), B(3;3;-3). Tìm điểm M thuộc (α) sao cho : |MA-MB| lớn nhất.

Hướng dẫn và đáp số:

A và B khác phía so với (α). M$\left(-\frac{31}{7};-\frac{5}{7};\frac{31}{7}\right)$

Bài 2. Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+z+1=0$ và hai điểm A(-1;3;-2), B(-9;4;0). Tìm điểm K thuộc (α) sao cho : AK + BK đạt giá trị nhỏ nhất

Dạng 3. Hình chiếu vuông góc của một đường thẳng lên mặt phẳng

Phương pháp: Cho sẵn đường thẳng d và (α)

Cách 1:

- Bước 1: Tìm giao điểm A của d và (α)
- Bước 2: lấy $B \in d$, rồi tìm toạ độ của điểm H, H là hình chiếu vuông của B lên (α)
- Bước 3: Viết phương trình của đường thẳng AH (đường này đi qua điêm A hoặc H và có vtcp $\vec{u} = \overrightarrow{AH}$. Đường thẳng AH chính là hình chiếu của đường thẳng d trên (α)

Đặc biệt: Nếu d $//(\alpha)$ thì lấy $A \in d$. Tìm H là hình chiếu vuông góc của A trên (α). Khi đó, gọi d′ là hình chiếu vuông góc của d trên (α), ta có d′ // d (Đường thẳng d′ đi qua H và có vtcp $\vec{u}$)

Cách 2: Lập phương trình mặt phẳng (β) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (α) bằng .
Khi đó $d = (\alpha) \cap (\beta)$. Chuyển d về dạng tham số

Ví dụ 1: Cho $A(2;-1;3); B(3;0;2)$; $(P): x-2y+z-7=0$. Viết phương trình hình chiếu của AB lên (P).

Đáp số: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$

Ví dụ 2: Cho $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}; (\alpha): 3x-2y-z=0$

a) Tính $d\left(d,(\alpha)\right)$

b) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d lên (α)

Hướng dẫn: $a) d = \sqrt{14};$ $b) \Delta: \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z-2}{4}$

Ví dụ 3. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+3t \\ z = 3+t \end{cases}$ trên mỗi mặt phẳng tọa độ.

Hướng dẫn:

* Hình chiếu vuông góc của d trên (Oxy)

Đường thẳng d cắt (Oxy) tại A(-5;-11;0). Lấy B(1;-2;3) $\in$ d, hình chiếu vuông góc của B trên (Oxy) là H(1;-2;0). Hình chiếu của d trên (Oxy) chính là AH: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+3t \\ z = 0 \end{cases}$

Tương tự: Hình chiếu của d lần lượt trên (Oyz) và (Ozx): $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2+3t \\ z = 3+t \end{cases}; \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 0 \\ z = 3+t \end{cases}$

Ví dụ 4: Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5+2t \\ y = -10+t \\ z = -2t \end{cases}$ trên mặt phẳng: $3x-4y+z-3=0$

Hướng dẫn:

$\vec{n}.\vec{u} = 0 \Rightarrow d // (\alpha)$ hoặc d $\subset (\alpha)$. *Điểm* A $\in$ d nhưng A $\notin (\alpha)$. Do đó: d // (α)

H là hình chiếu của A trên $(\alpha) \Rightarrow$ H(-1;-2;-2)

Hình chiếu của d trên (α) là: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d:\begin{cases} x=\frac{7}{2}+3t \\ y=-2t \\ z=-2t \end{cases}$ trên mặt phẳng: $x+2y-2z-2=0$

Hướng dẫn:

d cắt (α) tại A(2;1;1). Lấy $B\left(\frac{7}{2};0;0\right)\in d$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên $(\alpha)\Rightarrow H\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Hình chiếu của d trên (α) là AH: $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-2t \\ z=1-t \end{cases}$

Bài 2. Cho mặt phẳng $(\alpha): x-3y-3z+2=0$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x+4}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{2}$; $d_2:\begin{cases} x=-1+5t \\ y=2+t \\ z=-3t \end{cases}$. Viết phương trình hình chiếu theo phương d_2 của đường thẳng d_1 trên (α)

Hướng dẫn:

d cắt (α) tại A(-2;-1;1).Lấy B(-4;0;3) thuộc d và gọi H là hình chiếu theo phương d_2 của B trên$(\alpha)\Rightarrow$ H(1;1;0).*Đường* thẳng AH là hình chiếu theo phương d_2 của d_1

AH: $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=-1+2t \\ z=1-t \end{cases}$

BTTT: Cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z+3=0$ và hai đường thẳng

$$\Delta_1:\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3};\quad \Delta_2:\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$$

a) Viết phương trình hình chiếu của Δ_2 theo phương Δ_1 lên (α)

b) Tìm trên mặt phẳng (α) điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_2}\right|$ nhỏ nhất. Biết $M_1(3;1;1)$; $M_2(7;3;9)$

Bài 5. Cho điểm A(-1;2;1), đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=4-2t \\ z=-2-3t \end{cases}$ và $(P): x-2y-3z-6=0$

a) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua d và A

b) Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d trên (P). Viết phương trình của đường thẳng Δ

Hướng dẫn:

$a)(Q): 4x - y + 2z + 4 = 0;$ $\qquad b)\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{-1}$

Dạng 4. Hình chiếu của một điểm lên đường thẳng

Phương pháp: Cho sẵn điểm M và đường thẳng Δ. Tìm tọa độ điểm H (H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ).

- **Bước 1:** Lấy H(…,…,…)$\in \Delta$ (tọa độ điểm H chính là phương trình tham số của Δ)
- **Bước 2:** Tìm tọa độ của $\overrightarrow{MH}$ theo t. H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0$($\vec{u}$ là vtcp của Δ). Tìm t rồi suy ta tọa độ H.

Chú ý: $d(M,\Delta) = MH$

Ví dụ 1: Cho $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}; (P): 2x - y - 2z + 1 = 0$

a) Tìm tọa độ $M \in d$ sao cho $d(M,(P)) = 3$

b) Gọi K là điểm đối xứng của I(2;-1;3) qua đường thẳng d. Hãy xác định tọa độ K

Đáp số: $a)M_1(21,-8,30); M_2(-15;10;-24);$ $\qquad b)K(4;3;3)$

Ví dụ 2: D2006. Cho $A(1;2;3); d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$

a) Tìm A' đối xứng với A qua d_1

b) Viết phương trình đường thẳng Δ qua A, vuông góc d_1 và cắt d_2

Ví dụ 3: A2008. Cho $A(2;5;3); d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$

a) Tìm hình chiếu vuông góc của A trên d

b) Viết phương trình (α) chứa d sao cho $d(A,(\alpha))_{max}$

Hướng dẫn: $a)H(3;1;4);$ $\qquad b)\ (\alpha): x - 4y + z - 3 = 0$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho 3 điểm A(-1;3;2); B(4;0;-3);C(5;-1;4). Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC và viết phương trình mặt cầu tâm A, tiếp xúc với đường thẳng BC.

Hướng dẫn:

$$BC: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -t \\ z = -3 + 7t \end{cases} \quad ...H\left(\frac{231}{51}; -\frac{27}{51}; \frac{36}{51}\right)$$

$$(S): \begin{cases} \text{tâm A} \\ \text{R=AH} \end{cases} \Rightarrow (S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = \frac{760}{17}$$

Bài 2. Tìm điểm M1 đối xứng với điểm M(2;-1;-5) qua đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{1}$

Hướng dẫn:

Tìm tọa độ hình chiếu H của M lên đường thẳng Δ.

$\overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 .... H(0;-2;-2)$.

H là trung điểm của MM'. Sử dụng công thức trung điểm $\Rightarrow M'$(-2;-3;1)

Bài 3. Cho 3 điểm A(4;1;-28); B(4;-9;2);C(10;2;-10) và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 9+2t \\ y = -t \\ z = -4+3t \end{cases}$.

Tìm điểm M thuộc d sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

Hướng dẫn:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$, $G(6;-2;-12)$ là trọng tâm của ΔABC

$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3MG$. Vậy $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ MG nhỏ nhất (G cố định và M $\in$ d) $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của G lên d

..........ĐS: M(5;2;-10)

BTTT: Cho 3 điểm A(2;0;1); B(2;-1;0);C(1;0;1) và đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$.

a) Tìm điểm M thuộc d sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

b) Tính thể tích hình chóp OABC

Bài 4. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$ và hai điểm A(3;0;2) và B(1;2;1).

a) Tìm điểm I trên d sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$ có độ dài nhỏ nhất

b) Kẻ AA′, BB′ vuông góc với d. Tính độ dài AA′

Bài 5. Cho điểm A(-2;1;-3) và đường thẳng $\Delta: \frac{x-7}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$

a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên Δ

b) Viết phương trình (α) chứa Δ và khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất

Hướng dẫn:

$a) H(3;-2;1)$

$b)$ Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên (α) (α là mặt phẳng chứa Δ), t

có AK ≤ AH (không đổi) ⇒ d(A,(α)) ≤ AH.

Vậy, d(A,(α)) lớn nhất (bằng AH) ⇔ K ≡ H

(α) di qua H có vtcp $\overrightarrow{AH}$. $ĐS: 5x-3y+4z-25=0$

Bài 6. Cho 4 điểm A(-4;4;0); B(2;0;4);C(1;2;-1);D(7;-2;3). Chứng minh rằng

a) Bốn điểm A,B,C,D cùng nằm trên một mặt phẳng
b) Tìm khoảng cách từ C đến đường thẳng (AB)
c) Tìm M thuộc (AB) sao cho MC+MD đạt giá trị nhỏ nhất

LUYỆN TẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Bài 1. Cho (α): $3x-4y+z-3=0$ và hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases} x=-5-3t \\ y=1+t \\ z=-8-2t \end{cases}$; $d_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+1}{-4}$. Lập phương trình đường thẳng Δ nằm trong (α) và cắt cả (d_1) và (d_2).

Hướng dẫn: Hình vẽ

$d_1 \cap (\alpha) = A(1;-1;-4);$

$d_2 \cap (\alpha) = B(0;-2;-5);$

Đường thẳng Δ nằm trong (α),cắt cả d_1, d_2 là đường thẳng đi qua AB.

$\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+4}{1}$

Bài 2. Cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$; $(P): x+y+z+2=0$. Lập phương trình đường thẳng d nằm trong (P), cắt và vuông góc với Δ.

Hướng dẫn: Hình vẽ

$\Delta \cap (P) = A(-1;-2;1)$. Gọi $\vec{a}$ là vtcp của d. Ta có:

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \\ \vec{a} \perp \overrightarrow{n_{(P)}} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (5;-5;0)$$

d nằm trong (P) và cắt Δ nên d đi qua A. d: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2-t \\ z=1 \end{cases}$

BTTT:

Cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$; $(P): x+2y-z-2=0$. Lập phương trình đường thẳng d nằm trong (P), cắt và vuông góc với Δ.

Bài 3. Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2+3t\\t=7-t\\z=3-4t\end{cases}$; $(P):x-3y-4z-2=0$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(-1;4;0)$, song song với (P) và cắt d.

Hướng dẫn:Hình vẽ

Điểm M $\notin$ (P).

Gọi Δ là đường thẳng đi qua $M_0(-1;4;0)$ cắt d tại điểm M(-2+3t;7-t;3-4t).

$\Delta//(P)\Rightarrow \overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}.\vec{n}=0\Leftrightarrow t=1$

$\Delta:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z}{-1}$

BTTT: Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(-1;4;0)$ cắt $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và song song với $(P):x+3y+z-1=0$

Bài 3. Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng

$d:\begin{cases}x=2+2t\\y=3+3t\\z=-4-5t\end{cases}$; $d':\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$.

Hướng dẫn:

Lấy $I\in d$, lấy $J\in d'$. IJ là đường vuông góc chung của d và d'

$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{u_d}\\\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{u_{d'}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{u_d}=0\\\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{u_{d'}}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t=-1\end{cases}$.

Phương trình $IJ:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$

BTTT: Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng

$\Delta_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$ và $\Delta_2:\dfrac{x+8}{2}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z-10}{-1}$

a) Tính khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2

b) Viết phương trình đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2

Bài 4. Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm M(-4;-5;3) và cắt cả hai đường thẳng

$d_1:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$; $d_2:\begin{cases}x=2+2t\\y=-1+3t\\z=1-5t\end{cases}$

Hướng dẫn:

Giả sử Δ cắt d_1 tại A và cắt d_2 tại B.Đường thẳng Δ đi qua M và cắt d_1 tại A và cắt d_2 tại B $\Leftrightarrow$ A,B,M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AM}$

$\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}\right]=\vec{0} \Leftrightarrow t=t'=0$.Lúc đó $\Delta:\dfrac{x+4}{-3}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$

BTTT: Lập phương trình Δ đi qua M(1;2;-1) và cắt cả hai đường thẳng

$$\Delta_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1};\ \Delta_2:\begin{cases}x+y+z-3=0\\ y-z=0\end{cases}$$

Bài 5. Cho đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{5};\quad (P):2x-5y-z-4=0$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua A(2;-2;1), song song với (P) và vuông góc với d. Δ cắt hay không cắt d?

Hướng dẫn:

Điểm $A\notin(P)$

$$\begin{cases}\Delta//(P)\\ \Delta\perp d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}\perp\vec{n}\\ \vec{a}\perp\vec{u}\end{cases}\Rightarrow \vec{a}=\left[\vec{n},\vec{u}\right]=(-28;-14;14)$$

hoặc $\vec{a}=(2;1;-1)$. $\Delta:\begin{cases}x=2+2t\\ y=-2+t\\ z=1-t\end{cases}$

Giải hệ: $\begin{cases}\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{5}\\ x=2+2t\\ y=-2+t\\ z=1-t\end{cases}$

Hệ vô nghiệm, vậy Δ vuông góc với d nhưng không cắt d

BTTT: Viết phương trình đường thẳng Δ qua M(1;1;1) song song với $(P):x+2y-z+1=0$ và vuông góc với $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$

Bài 6. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha):x+2y-z+1=0$ và cắt đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và $\Delta_1:\begin{cases}x=2+t\\ y=-t\\ z=-1+2t\end{cases}$

Bài 7. Cho điểm A(1-2m;m²-2;2m) và hai mặt phẳng $(\alpha_1):2x-y+3z-1=0;(\alpha_2):x+2y-2z-5=0$

a) Xác định m để điểm A thuộc giao tuyến của (α_1); (α_2)

b) Với những giá trị nào của m thì A không thuộc (α_1) và (α_2). Trong trường hợp này, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và song song với cả hai mặt phẳng (α_1) và (α_2).

Hướng dẫn:

$a) m=-1$

$b) A \notin (\alpha_1)$ và $A \notin (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 3 \\ m \neq 4 \end{cases}$

Δ song song với cả hai (α_1) và $(\alpha_2) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{n_{\alpha_1}} \\ \overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{n_{\alpha_2}} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_{\alpha_1}}, \overrightarrow{n_{\alpha_2}}\right] = (-4;3;5)$

Vậy, phương trình Δ: $\begin{cases} x = 1-2m-4t \\ y = m^2-2+3y \\ z = 2m+5t \end{cases}$ với $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 3 \\ m \neq 4 \end{cases}$

Bài 8. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=-1+2t \\ y= \quad t \\ z=4-3t \end{cases}$; $\quad \Delta_2: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$

a) Chứng minh Δ_1 và Δ_2 chéo nhau

b) Viết phương trình đường Δ thẳng đi qua M(1;2;-3) và cắt các đường thẳng Δ_1 và Δ_2

Bài 9. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=1-3t \\ y= \quad 2t \\ z= \quad t \end{cases}$; $\quad \Delta_2: \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=-2+t \end{cases}$

a) Chứng minh Δ_1 và Δ_2 chéo nhau. Tính khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2

b) Viết phương trình đường Δ thẳng đi qua M(2;-1;3) vuông góc với Δ_1 và cắt Δ_2

c) Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(\gamma): 2x-y+3z-1=0$ và cắt các đường thẳng Δ_1 và Δ_2

Bài 10. Cho đường thẳng

$\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-3=0$

a) Viết phương trình hình chiếu vuông góc d của đường thẳng Δ trên mặt phẳng (α)

b) Viết phương trình hình chiếu song song theo phương $m: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ của đường thẳng Δ trên mặt phẳng (α)

Hướng dẫn: Xem phương pháp giải ở mục " Hình Chiếu"

Bài 11. Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-3z=0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (α), vuông góc với Δ và cắt đường thẳng Δ

Bài 12. Cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-7}{5}=\dfrac{z+4}{-3};\ d_2:\begin{cases}x=-1-3t\\y=2t\\z=-2+t\end{cases}$

Chứng minh d_1 cắt d_2. Viết phương trình mặt phẳng chứa d_1 và d_2

Hướng dẫn:

$a)\begin{cases}\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\neq\vec{0}\\\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương đồng thời ba vecto

$\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{AB}$ đồng phẳng

b)$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(11;7;19)$. $(\alpha):11x+7y+16z+27=0$

BTTT: Cho hai đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=1-t\\y=1-5t;\\z=1-3t\end{cases}\quad\Delta_2:\begin{cases}x=1+2t\\y=1-3t\\z=1-t\end{cases}$

a) Chứng minh Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2

Bài 13. Cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+5t\\y=-5+7t;\\z=3+3t\end{cases}\quad d':\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{4}$

a) Chứng minh d và d' chéo nhau

b) Lập phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d và d′

Hướng dẫn:

$a)\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\overrightarrow{AB}\neq0$

$b)\begin{cases}(\alpha)//d,d'\\d\left(d,(\alpha)\right)=d(d',(\alpha))\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\alpha)\text{ có vtpt }\vec{n}=\dfrac{1}{17}\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]\\d\left(A,(\alpha)\right)=d\left(B,(\alpha)\right)\end{cases}$

$\Rightarrow(\alpha)$ có vtpt $\vec{n}=(2;-1;-1)$ và đi qua trung điểm $\mathrm{I}\left(-2;-\dfrac{9}{2};2\right)$ của AB

Bài 14. Tìm a để đường thẳng

$d:\begin{cases}x=-1+\left(a^2+1\right)t\\y=4-at\\z=-5+\left(2a+1\right)t\end{cases}$ cắt và vuông góc với đường thẳng $d':\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{3}$

Hướng dẫn:

d và d' vuông góc nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0 \Leftrightarrow a=-1$ hoặc $a=-\dfrac{5}{2}$

+ Với a=-1: $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow d$ và d' cắt nhau

+Với a=-$\dfrac{5}{2}$: $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{AB}\neq 0 \Rightarrow d$ và d' chéo nhau

Vậy, với a=-1 thì 2 đường thẳng đã cho cắt nhau

Bài 15. Tìm m (m nguyên dương) để hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-2};\ d_2:\begin{cases}x=m^2-7+2t\\ y=m-1-3t\\ z=m-t\end{cases}$ cắt nhau. Trong trường hợp này, viết phương trình mặt phẳng qua d_1 và d_2

Hướng dẫn:

$\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\neq\vec{0}\Rightarrow$ không cùng phương. Hai đường thẳng cắt nhau

$\Leftrightarrow \overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{AB}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-3\\ m=\dfrac{11}{4}(loại)\end{array}\right.$

$(\alpha):8x+7y-5z-4=0$

Bài 16. Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\ y=m-1-mt\\ z=m+3+\left(m^2-5\right)t\end{cases}$ và $(\alpha):3x-2y-z-5=0$. Tìm m để đường thẳng d thuộc (α). trong trường hợp này, viết phương trình (β) qua d và vuông góc với (α)

Hướng dẫn:

Đường thẳng d thuộc $(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{n}\\ A\in(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow m=-2$. Và khi đó: $(\beta):2x+y+4z-1=0$

Bài 17. Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=m+1+2t\\ y=m^2-4+\left(m^2-3\right)t\\ z=3+t\end{cases}$ và $(\alpha):2x-3y-z+5=0$. Tìm m để đường thẳng d song song với (α). Trong trường hợp này, tính khoảng cách giữa d và (α)

Hướng dẫn:

Đường thẳng d song song $(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{n}\\ A\notin(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow m=2$. Và khi đó: $\mathrm{d}\left(d,(\alpha)\right)=\dfrac{8}{\sqrt{14}}$

Bài 18. Tìm m để đường thẳng

$d_1:\begin{cases}x=2-t\\y=-3+3t\\z=-1+2t\end{cases}$ song song hoặc trùng với đường thẳng $d_2:\begin{cases}x=1-2m-mt\\y=-6-\left(m^2+2\right)t\\z=-3+2mt\end{cases}$. Trong trường hợp $d_1//d_2$, viết phương trình mặt phẳng đi qua d_1 và d_2

Hướng dẫn:

$d_1//\,d_2$ hoặc $d_1\equiv d_2 \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=\vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-2(\text{ với gt này thì } d_1//\,d_2)\\ m=-1(\text{ với gt này thì } d_1\equiv\, d_2)\end{array}\right.$

$(\alpha): 2y-3z+3=0$

Bài 18. Cho 3 điểm A(-2;2;1), B(1;2;-2);C(2;1;2). Viết phương trình tham số đường thẳng Δ vuông góc với (ABC) và đi qua trực tâm của tam giác ABC

Chứng minh rằng tồn tại điểm S thuộc đường thẳng $d:\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{-1}$ sao cho S.ABC là hình chóp đều.

Hướng dẫn:

Ta để ý rằng ΔABC đều $\Rightarrow$ trực tâm của tam giác trùng với trọng tâm của tam giác

$\Delta:\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}+t\\y=\dfrac{5}{3}+5t\\z=\dfrac{1}{3}+t\end{cases}$ $\left(\Delta \text{ là trục đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC\right)$

$b)S=\Delta\cap d\Rightarrow S(-1;-5;-1)$, rõ ràng $S\neq G$

Bài 19. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases}x=-3+3t\\y=1-3t\\z=-2+9t\end{cases}$ $\qquad d_2:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{-3}$

Hướng dẫn: Để ý: $d_1//d_2,\ d\left(d_1,d_2\right)=\sqrt{30}$

Bài 20. Tìm điểm I thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1\\y=1-t\\z=t\end{cases}$ và cách đường thẳng $d':\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+7}{2}$ một khoảng bằng 3.

Bài 21. Cho hai đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=-1-2t\\y=-t\\z=3+t\end{cases}$; $\quad \Delta':\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+3}{2}$

a) Chứng minh Δ và Δ' chéo nhau. Tính khoảng cách giữa Δ và Δ'

b) Trên Δ lấy đoạn AB=4 và trên Δ' lấy đoạn CD=3. Tính thể tích của khối tứ diện ABCD

VẤN ĐỀ 5. Các bài toán liên quan giữa đường thẳng và mặt cầu

Ví dụ 1. Lập phương trình mặt cầu có tâm I(2;3;-1) và cắt đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}$ tại 2 điểm A và B sao cho AB=16.

Hướng dẫn:

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $\begin{cases} HA=HB=8 \\ IH\perp\Delta \Rightarrow IH=d(I,\Delta) \end{cases}$

$\Rightarrow R^2=AH^2+IH^2=64+IH^2$. Với IH là khoảng cách từ I đến AB

$ĐS:(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\frac{641}{9}$

ĐHCĐ 2010 A –NC. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho điểm *A*(0; 0; –2) và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ *A* đến Δ. Viết phương trình mặt cầu tâm *A*, cắt Δ tại hai điểm *B* và *C* sao cho *BC* = 8.

BTTT: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d:\begin{cases} x=t \\ y=1+\frac{1}{2}t \\ z=-1+t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$. Tìm m để d cắt (S) tại 2 điểm M,N sao cho MN=8

Hướng dẫn:

(S): I(-2; 3; 0); $\mathrm{R}=\mathrm{IN}=\sqrt{13-\mathrm{m}}$, với m < 13.

Dựng $\mathrm{IH}\perp\mathrm{MN}\Rightarrow\mathrm{MH}=\mathrm{HN}=4$

$\Rightarrow \mathrm{IH}=\sqrt{\mathrm{IN}^2-\mathrm{HN}^2}=\sqrt{13-\mathrm{m}-16}=\sqrt{-\mathrm{m}-3}$, m < -3.

$$h=\frac{\left|[\overrightarrow{AI};\vec{u}]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{3^2+6^2+6^2}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}=3.$$

IH = h $\Leftrightarrow\sqrt{-\mathrm{m}-3}=3 \quad \Leftrightarrow -\mathrm{m}-3=9 \Leftrightarrow \mathrm{m}=-12$ (thoã)

Bài 2. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng $d: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ và tiếp xúc với $(\alpha): x+y-2z+5=0;\ (\beta): 2x-y+z+2=0$.

Hướng dẫn:

Gọi I là tâm (S) $\Rightarrow$ I(2t;1+t;-1+2t).

(S) tiếp xúc với (α) và $(\beta)\Leftrightarrow$ R=d(I;(α))=d(I;(β)) $\Leftrightarrow t=\frac{4}{3}$ hoặc t=-2

BTTT: . Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng $d:\begin{cases}x=3+3t\\y=-2t\\z=-1-2t\end{cases}$ và tiếp xúc với $(\alpha): x+2y-2z-2=0;\ (\beta): 2x+y-2z+4=0$.

Đáp số:

$$\left[\begin{array}{l}(S):\left(x+\frac{12}{5}\right)^2+\left(y-\frac{18}{5}\right)^2+\left(z-\frac{13}{5}\right)^2=\frac{16}{25}\\(S):\left(x+\frac{12}{11}\right)^2+\left(y-\frac{30}{11}\right)^2+\left(z-\frac{19}{11}\right)^2=\frac{16}{25}\end{array}\right.$$

Bài 3. Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-10x+2y+26z-113=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+13}{2}$; $\Delta_2:\begin{cases}x=-7+3t\\y=-1-2t\\z=8\end{cases}$. Viết phương trình (P) tiếp xúc với (S) và song song với cả Δ_1 và Δ_2

Hướng dẫn:

(P) song song với $\Delta_1 và\ \Delta_2$ nên $\overrightarrow{n_p}=\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}},\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right]=(4,6,5)$

$\Rightarrow (P): 4x+6y+5z+D=0$. Mặt khác: $\mathrm{d}\left(I,(P)\right)=R \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D=205\\D=-103\end{array}\right.$

Bài 4. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}$; $(\alpha): 2x+y-2z+2=0$

Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên d, bán kính bằng 1 và tiếp xúc với (α)

Hướng dẫn:

Gọi I là tâm (S) $\Rightarrow$ I(1+3t;-2+t;t).

(S) tiếp xúc với (α) $\Rightarrow$ R=d(I;(α))=1 $\Leftrightarrow t=\frac{1}{5}$ hoặc t=-1

Bài 5. Trong không gian cho (P) và mặt cầu (S) có phương trình lần lượt là

$$(P): 2x+2y+z-m^2-3m=0;\quad (S): (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9.$$

Tìm m để (P) tiếp xúc với (S). Tìm toạ độ tiếp điểm

Hướng dẫn:

(P) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow$ d(I,(P))=R $\Leftrightarrow$ m=2 hoặc m=-5

Tọa độ giao điểm của đường thẳng đi qua I và vuông góc với(P) là tiếp điểm của (P) và (S). $ĐS: M(3;1;2)$

Bài 6. Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với hai đường thẳng

$$d_1:\begin{cases}x=5+4t\\ y=-1+3t;\\ z=3\end{cases}\qquad d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$$

Hướng dẫn:

Gọi IJ là đoạn vuông góc chung của d_1 và $\mathrm{d}_2(\mathrm{I}\in \mathrm{d}_1,\mathrm{J}\in \mathrm{d}_2)$

(S) có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với hai đường thẳng d_1

và d_2 là mặt cầu có đường kính IJ. Ta có: $\begin{cases}IJ\perp d_1\\ IJ\perp d_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\ t'=-1\end{cases}$

$$(S):\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+2\right)^2+\left(z-2\right)^2=\frac{29}{4}$$

Bài 7. Viết phương trình mặt cầu có tâm ở trên đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z+4}{2}$ và tiếp xúc $d_1:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ và $\mathrm{d}_2:\begin{cases}x=-2+t\\ y=-t\\ z=-2-3t\end{cases}$

Hướng dẫn:

Gọi I là tâm mặt cầu $\Rightarrow \mathrm{I}\left(2-t;6-3t;-4+2t\right)$

Mặt cầu tiếp xúc với d_1 và d_2 nên $\mathrm{d}\left(\mathrm{I},(\mathrm{d}_1)\right)=d\left((\mathrm{I},\mathrm{d}_2\right)=R$

$\Leftrightarrow t=1$. Lúc đó: (S):$\left(x-1\right)^2+\left(y-3\right)^2+\left(z+2\right)^2=18$

Bài 8. Cho mặt cầu (S) có tâm I(2;0;-1) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2-t\\ y=a-2+t\\ z=a-1+2t\end{cases}$. Xác định a để mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất

Hướng dẫn:

(S) tiếp xúc với đường thẳng Δ nên R=d$\left(I;\Delta\right)$

$$R=\frac{\sqrt{3a^2-12a+20}}{\sqrt{6}}\ge\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow R_{\min}=\frac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow a=2$$

Bài 9. Viết phương tình mặt cầu (S) có tâm I(-4;1;1) và cắt mặt phẳng $(\alpha):x+2y-2z+1=0$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng $2\sqrt{2}$

Hướng dẫn:

Dễ dàng nhận thấy: $\sqrt{R^2-d^2\left(I,(\alpha)\right)}=2\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{R^2-1}=2\sqrt{2}\Rightarrow R=3$

Bài 10. Viết phương tình mặt cầu (S) có tâm I(-4;1;1) và cắt đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$ tại hai điểm A và b sao cho tam giác IAB vuông

Hướng dẫn:

Tam giác IAB cân tại I. Mặt khác theo giả thiết nó là tam giác vuông. Do đó tam giác IAB vuông cân tại I. Vậy R=IA=IB=$\sqrt{2}d\left(I,\Delta\right)=\frac{\sqrt{40}}{3}$

Bài 11. Cho đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$; $\Delta_2: \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$

a) Tìm các điểm A thuộc Δ_1, B thuộc Δ_2 sao cho AB là đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2

b) Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng Δ_1 tại A và Δ_2 tại B.

Hướng dẫn:

$$a)\begin{cases} \overrightarrow{u_{\Delta_1}}.\overrightarrow{BA}=0 \\ \overrightarrow{u_{\Delta_2}}.\overrightarrow{BA}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t'=0 \end{cases}$$

b)Mặt cầu (S) tiếp xúc với $\overrightarrow{u_{\Delta_1}}.\overrightarrow{BA}=0$ tai A và Δ_2 tại B nên có tâm I thuộc mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ vuông góc với đường thẳng Δ_1 tại A và Δ_2 tại B.

Vì AB là đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 nên AB thuộc mặt phẳng (α).

Tương tự AB thuộc mặt phẳng (β). Δ_1 và Δ_2 không cùng phương, do đó (α) không song song với $(\beta) \Rightarrow$ AB=$(\alpha)\cap(\beta) \Rightarrow$ I $\in$ AB.(S) qua AB $\Rightarrow$ I là trung điểm của AB.

(S):$\left(x-5\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-5\right)^2=21$

CHỦ ĐỀ 5. GÓC TRONG KHÔNG GIAN

PHƯƠNG PHÁP

1. *Góc giữa hai đường thẳng*

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có các VTCP $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

Góc giữa d_1, d_2 ***bằng*** *hoặc* ***bù*** *với góc giữa $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.*

$$\cos\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) = \frac{\left|\vec{a}_1.\vec{a}_2\right|}{\left|\vec{a}_1\right|.\left|\vec{a}_2\right|}$$

2. *Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng*

Cho đường thẳng d có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d' của nó trên (α).

$$\sin\left(d, (\alpha)\right) = \frac{\left|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

VẤN ĐỀ 1. Góc và các bài toán liên quan

Ví dụ 1. Cho ba đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3) có phương trình :

$$(d_1): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad t \in R, \ (d_2): \begin{cases} x - y + 4z - 3 = 0 \\ 2x - y - z + 1 = 0 \end{cases}; \ (d_3): \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{1}$$

a) Xác định cosin góc giữa (d_1),(d_2).

b) Lập phương trình đường thẳng (d) song song với (d_3) đồng thời cắt cả (d_1),(d_2).

Ví dụ 2. Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình $(d): \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{-1}$ và (P):2x+y+z-1=0

a) Xác định số đo góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) .

b) Tìm toạ độ giao điểm A của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P).

c) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng (d_1) đi qua A vuông góc với (d) và nằm trong mặt phẳng (P).

Ví dụ 3: Tìm k để đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + kt \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $(\alpha): x - 3z + 5 = 0$ có số đo góc bằng 45^0.

Đáp số: $k = 0$

Ví dụ 4: Cho điểm $A(3; -5; 1)$ đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -6 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và $(\alpha): 2x + y - 2z + 5 = 0$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt d và hợp với (α) một góc 45^0

Ví dụ 5: Cho điểm $A\left(3;-1;-3\right)$ đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=-4 \end{cases}$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt và hợp với d một góc 60^0.

Ví du 6: Trong không gian, cho $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1};\Delta:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với Δ một góc 30^0

VẤN ĐỀ 2 . Sử dụng tọa độ giải toán hình học không gian

Ví dụ 1 : A2008. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a,AC=a\sqrt{3},\mathrm{AA}'=2a.$ Hình chiếu A′ lên (ABC) là trung điểm H của BC. Tính $V_{A'.ABC}$ và $\left(\mathrm{AA}',B'C'\right)$.

Ví dụ 2: B2008. Cho $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA=a, $SB=a\sqrt{3}$, $\left(SAB\right)\perp\left(ABCD\right)$. Gọi M, N là trung điểm của AB và BC. Tính $V_{S.BMDN}$ và $\cos\left(SM,DN\right)$.

Ví dụ 3 : Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy $AB=a,AC=2a,BAC=120^0$. Gọi M là trung điểm của BB′, $(MAC)\perp(MA'C')$. Tính $V_{ABC.A'B'C'}$ và $\cos\left(\left(MAC\right),\left(BCC'B'\right)\right)$

Ví dụ 4 : B2001. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh bằng a.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BA′ và DB′
b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB′, CD, A′D′. Tính góc của hai đường thẳng MP và NC′.

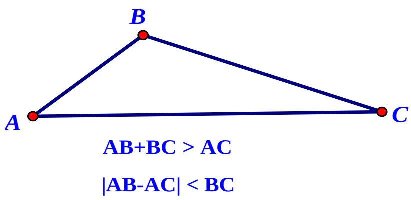
CHỦ ĐỀ 6. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

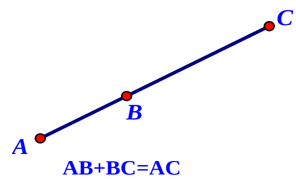
VẤN ĐỀ 1. Giải toán cực trị hình học bằng cách sử dụng bất đẳng thức hình học

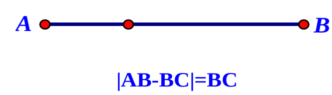
Phương pháp: Ta thường sử dụng các bất đẳng thức hình học sau

1) Bất đẳng thức tam giác: Với ba điểm A,B,C ta có:

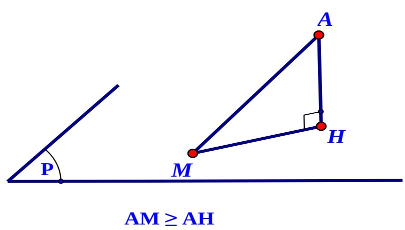
- $AB+BC\geq AC$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A,B,C$ thẳng hàng và B nằm giữa A,C;
- $\left|AB-AC\right|\leq BC$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A,B,C$ thẳng hàng và A nằm ngoài B,C;

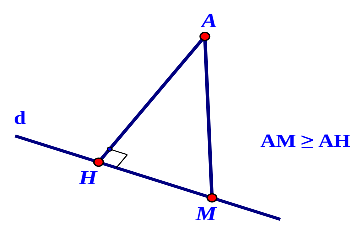






2) Bất đẳng thức giữa đường xiên và đường vuông góc: Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P) (hoặc đường thẳng d), M là điểm bất kì trên (P) (hoặc d) thì $AM\geq AH$. Dấu "=" xảy ra khi $M\equiv H$





Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A\left(5;-2;6\right)$; $B\left(3;-2;1\right)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z-6=0$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho

a) $MA+MB$ nhỏ nhất. b) $\left|MA-MB\right|$ lớn nhất

Lời giải: Đặt $F\left(x,y,z\right)=2x-y+2z-6$, ta có $F\left(5,-2,6\right).F\left(3,-2,\right)>0$ nên A,B nằm cùng phía so với (P).

a) Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P). Lúc đó $MA=MA'$.

Ta có: $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$. Dấu "=" xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với $(P)\Rightarrow \Delta:\begin{cases}x=5+2t\\ y=-2-t\\ z=6+2t\end{cases}$. Gọi H là tọa độ giao điểm của Δ với (P) (H là trung điểm của AA'). Suy ra $H\left(1;-1;2\right)\Rightarrow A'\left(-3;2;-2\right)$. Phương trình đường thẳng $A'B:\begin{cases}x=-3+6t\\ y=2-4t\\ z=-2+3t\end{cases}$.

Ta có $M=\text{A'B}\cap(\text{P})\Rightarrow \text{M}\left(\frac{21}{11};-\frac{14}{11};\frac{5}{11}\right)$

b) Vì A và B cùng phía so với (P) nên với mọi $M \in (P)$ ta luôn có $|MA - MB| \le AB$, đẳng thức xảy ra khi $M = AB \cap (P)$.

Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -2 \\ z = 6 - 5t \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{17}{7}; -2; -\frac{3}{7}\right)$

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;1;0); B(2;1;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, $\Delta \perp d$ sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng Δ nhỏ nhất.

Lời giải: Δ nằm trong mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với d.

Ta có $(P): 2x + y + z - 3 = 0$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên (P) và trên Δ.

Ta có $d(B, \Delta) = BK \ge BH$. Dấu "=" xảy ra khi $K \equiv H$. Vậy đường thẳng Δ cần tìm là đường thẳng AH. Gọi d' là đường thẳng đi qua B và song song với d thì $d': \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$. H là giao điểm của d' và (P) nên $H\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Từ đó, $\Delta: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ y = t \end{cases}$

VẤN ĐỀ 2. Giải toán cực trị bằng phương pháp hàm số hoặc bằng cách sử dụng bất đẳng thức đại số

Phương pháp

- Ta thường dùng phương pháp hàm số để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một yếu tố nếu yếu tố đó được tính bởi một biểu thức phụ thuộc một biến số
- Ta thường dùng các bất đẳng thức đại số để tìm GTLN, GTNN của một yếu tố nếu yếu tố đó được tính bởi một biểu thức phụ thuộc một hoặc nhiều biến số

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;0); M(1;1;1)$. Giả sử (P) là mặt phẳng thay đổi nhưng luôn đi qua đường thẳng AM và cắt các trụ Oy, Oz lần lượt tại các điểm $B(0;b;0), C(0;0;c), (b > 0, c > 0)$. Chứng minh rằng $b + c = \frac{bc}{2}$ và tìm b, c sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

Lời giải: mặt phẳng (P) có phương trình $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Vì $M(1;1;1) \in (P)$ nên $\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow b + c = \frac{bc}{2}$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; b; 0), \overrightarrow{AC} = (-2; 0; c), \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (bc; 2c; 2b)$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + 4(b^2 + c^2)}$. Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có $b^2 + c^2 \ge 2bc$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b = c$. Mặt khác ta cung có $b + c \ge 2\sqrt{bc}$ mà $b + c = \frac{bc}{2}$ nên

$\frac{bc}{2} \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow bc \geq 16$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b = c = 4$. Từ đó ta suy ra $S_{\Delta ABC} \geq \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + 4.2.bc} \geq \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 8.16} = 4\sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b = c = 4$.

Vậy Min $S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{6}$, đạt được khi $\Leftrightarrow b = c = 4$

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và ba điểm $A(3;2;1), B(1;-2;1)$. Tìm M thuộc Δ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất

Lời giải: Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(t;2t;1-t), \overrightarrow{AM} = (t-3;2t-2;-t+2), \overrightarrow{BM} = (t-1;2t+2;-t)$

Ta có

$$MA + MB = \sqrt{6t^2 - 18t + 17} + \sqrt{6t^2 + 6t + 5} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}t\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{6}t + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$, đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ta có $MA + MB \geq \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}t + \sqrt{6}t + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2} = \sqrt{38}$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}t = \sqrt{6}t + \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Vậy $M\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$

Ví dụ 5. Trong không gian cho điểm $A(1;-1;1)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa hai điểm $M(1;1;1), N(-1;2;-1)$ và tạo với đường thẳng Δ một góc lớn nhất.

Lời giải: Giả sử $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$. Gọi $\varphi = (\Delta, (\alpha))$. Vì $M, N \in (\alpha)$ nên

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + 2b - c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -\frac{3}{2}b \\ c = -a + \frac{1}{2}b \end{cases}$$

. Ta được $(\alpha): 2ax + 2by + (b - 2a)z - 3b = 0$

Ta có $\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{u}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\overrightarrow{u}\right|} = \frac{|4a + 2b - b + 2a|}{\sqrt{6}\sqrt{4a^2 + 4b^2 + (b-2a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{b^2 + 12ab + 36b^2}{5b^2 - 4ab + 8a^2}}$

Nếu $a=0 \Rightarrow \sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, với $a \neq 0$, đặt $t=\dfrac{b}{a}, t\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+12t+36}{5t^2-4t+8}$ ta tìm được $\max f(t)=f\left(\dfrac{5}{8}\right)=\dfrac{53}{9}$. Do đó $\varphi_{max} \Leftrightarrow \sin\varphi_{max} \Leftrightarrow \dfrac{b}{a}=\dfrac{5}{8}$, chọn $b=5, a=8$

Vậy phương trình mặt phẳng $(\alpha): 16x+10y-11z-15=0$

VẤN ĐỀ 3. Giải toán cực trị bằng phương pháp ứng dụng tâm tỉ cự

Phương pháp: Xuất phát từ việc khai thác bài toán sau

Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ với n số $k_1, k_2, ..., k_n$ mà $k_1+k_2+...+k_n=k\neq 0$. Lúc đó ta có các tính chất sau

- Có duy nhất một điểm G sao cho $k_1\overrightarrow{GA_1}+k_2\overrightarrow{GA_2}+...+k_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$, điểm G như vậy gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm A_i, gắn với các hệ số k_i. Trong trường hợp các hệ số k_i bằng nhau (và do đó ta có thể xem các k_i đều bằng 1) thì G gọi là trọng tâm của hệ điểm A_i.
- Nếu G là tâm tỉ cự thì mọi điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{k}\left(k_1\overrightarrow{OA_1}+k_2\overrightarrow{OA_2}+...+k_n\overrightarrow{OA_n}\right)$

Dạng 1. Cực trị độ dài vectơ

Xét bài toán tổng quát: Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ với n số $k_1, k_2, ..., k_n$ mà $k_1+k_2+...+k_n=k\neq 0$ và đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P). Tìm M ở trên d hoặc trên (P) sao cho $\left|k_1\overrightarrow{MA_1}+k_2\overrightarrow{MA_2}+...+k_m\overrightarrow{MA_m}\right|$ nhỏ nhất.

Cách giải :

- **Bước 1:** Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1\overrightarrow{IA_1}+k_2\overrightarrow{IA_2}+...+k_m\overrightarrow{IA_m}=\vec{0}$
- **Bước 2:** Áp dụng qua tắc 3 điểm biến đổi
$$\left|k_1\overrightarrow{MA_1}+k_2\overrightarrow{MA_2}+...+k_m\overrightarrow{MA_m}\right|=\left|\left(k_1+k_2+...+k_n\right)\overrightarrow{MI}\right|=|k|.MI$$
- **Bước 3:** Tìm độ dài nhỏ nhất của vecto $\overrightarrow{MI}$ xảy ra khi M ở vị trí nào.

Ví dụ 1 : Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(3;1;1)$; $B(7;3;9)$ và $(\alpha): x+y+z+3=0$. Tìm $M\in(\alpha)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất. **Đáp số :** $M(0;-3;0)$

Ví dụ 2 : Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(3;4;-1)$; $B(-5;3;-2)$; $C(3;-1;2)$; $D(1;1;4)$ Tìm M trong không gian sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất. **Đáp số :** $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{4};\dfrac{3}{4}\right)$

Ví dụ 3 : Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1;2;3)$; $B(-1;0;-3)$; $C(2;-3;-1)$ và $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$. Tìm $M\in\Delta$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}\right|$ lớn nhất.

Đáp số : $M\left(\dfrac{31}{7};\dfrac{29}{7};-\dfrac{5}{7}\right)$

Dạng 2. Cực trị độ dài bình phương vô hướng của vectơ

Xét bài toán tổng quát : Cho n giác $A_1A_2...A_n$ với n số $k_1, k_2, ..., k_n$ mà $k_1 + k_2 + ... + k_n = k > 0$ và đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P). Tìm M ở trên d hoặc trên (P) sao cho $S = k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_n^2$ nhỏ nhất.

Cách giải :

- **Bước 1:** Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1\overrightarrow{IA_1} + k_2\overrightarrow{IA_2} + ... + k_m\overrightarrow{IA_m} = \vec{0}$. Từ đây ta tìm được điểm I
- **Bước 2:** Áp dụng qua tắc 3 điểm biến đổi

$$S = k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_n^2 = kMI^2 + k_1IA_1^2 + k_2IA_2^2 + ... + k_nIA_n^2.$$

Bước 3: Do $k > 0$ Vậy để $S = k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta xác định vị trí M cần tìm

Chú ý: Bài toán tìm GTLN cũng hoàn toàn làm tương tự

Ví dụ 1 : Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1;2;-1)$; $B(3;1;-2); C(1;-2;1)$ và $(\alpha): x - y + 2z = 0$. Tìm $M \in (\alpha)$ sao cho $MA^2 - MB^2 - MC^2$ lớn nhất. **Đáp số :** $M(2;-2;-2)$

Ví dụ 2 : Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1;1;1)$; $B(0;1;2); C(-2;0;1)$ và $(\alpha): x - y + z + 1 = 0$. Tìm $M \in (\alpha)$ sao cho $2MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất.

Đáp số : $M\left(\frac{-3}{2}; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right)$

Ví dụ 3 : Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1;2;3)$; $B(-1;0;-3); C(2;-3;-1)$ và $(\alpha): 2x + y - 2z - 1 = 0$. Tìm $M \in (\alpha)$ sao cho $3MA^2 + 4MB^2 - 6MC^2$ nhỏ nhất.

Đáp số : $M(-11;25;1)$

Dạng 3. Cực trị dựa vào tính chất hình học

Phương pháp :

Ví dụ 1 : Cho hai điểm A(-1;6;6); B(3;-2;4)

a) Tìm điểm M thuộc (Oxy) sao cho MA+MB nhỏ nhất
b) Tìm điểm N thuộc (Oyz) sao cho $|NA - NB|$ nhỏ nhất

Hướng dẫn và đáp số:

$a)\, z_A$ và z_B cùng dấu nên hai điểm A và B cùng một phía đối với (Oxy)

$ĐS:\ M\left(\frac{7}{5}; \frac{6}{5}; 0\right)$

$b)\, x_A$ và x_B cùng dấu nên hai điểm A và B hai phía khác nhau đối với (Oyz)

$ĐS:\ N(0;10;7)$

Ví dụ 2: Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(5;-2;6)$; $B(3;-2;1)$ và $(\alpha): 2x - y + 2z - 6 = 0$. Tìm $M \in (\alpha)$ sao cho

a) $MA+MB$ nhỏ nhất.

b) $\left|MA-MB\right|$ lớn nhất

Ví dụ 3: Trong Oxyz cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$ và ba điểm $A\left(3;2;-1\right)$; $B\left(3;-2;1\right)$. Tìm $M\in\Delta$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. **Đáp số:**

Ví dụ 4: Trong không gian Oxyz cho điểm $A\left(1;-1;1\right)$ và đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-1=0$

a) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất

b) Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất.

c) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa hai điểm $M\left(1;1;1\right),N\left(-1;2;-1\right)$ và tạo với đường thẳng Δ một góc lớn nhất.

Đáp số:

$a)\ (Q):2x-y+3z+1=0;\quad b)\ (R):10x-7y+13z+3=0;\quad c)(\alpha):16x+10y-11z-15=0$

Ví dụ 5: Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A\left(0;-1;2\right)$ và cắt đường thẳng $d':\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$ sao cho

a) Khoảng cách từ $B(2;1;1)$ đến đường thẳng d là lớn nhất, nhỏ nhất

b) Khoảng cách giữa d và $\Delta:\frac{x-5}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$ là lớn nhất

Đáp số:

$a)\ d:\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1};\qquad b)\ d:\frac{x}{29}=\frac{y+1}{-41}=\frac{z-2}{4}$

PHỤ LỤC

PHỤ LỤC 1. MỘT SỐ BÀI TẬP RÈN LUYỆN HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRƯỚC KHI THI

Bài 1. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) : $\begin{cases} x-y-2=0 \\ 2x-z-6=0 \end{cases}$ sao cho giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$ là đường tròn có bán kính $r=1$.

Hướng dẫn:

Mặt phẳng (P) chứa (d) có dạng: $m(x-y-2)+n(2x-z-6)=0$

$\Leftrightarrow (P): (m+2n)x-my-nz-2m-6n=0$

Mặt cầu (S) có tâm I(-1; 1; -1), bán kính R = 2.

(P) cắt (S) theo một đường tròn giao tiếp (C) có bán kính r = 1

$\Leftrightarrow d(I;\, P)=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|-m-2n-m+n-2m-6n|}{\sqrt{(m+2n)^2+m^2+n^2}}=\sqrt{3}$ $\quad\Leftrightarrow |-4m-7n|=\sqrt{3}.\sqrt{2m^2+5n^2+4m.n}$

$\Leftrightarrow 5m^2+22m.n+17n^2=0$. Cho $n=1\Rightarrow 5m^2+22m+17=0\Leftrightarrow m=-1$ hay $m=-\dfrac{17}{5}$

Vậy, có 2 mặt phẳng (P): $\left[\begin{array}{l}(P_1): x+y-z-4=0 \\ (P_2): 7x-17y+5z-4=0\end{array}\right.$

Bài 2. Trong không gian Oxyz cho A(0; 1; 0), B(2; 2; 2), C(-2; 3; 1) và đường thẳng (◎) : $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$

a) Tìm điểm M thuộc (◎) để thể tích tứ diện MABC bằng 3.

b) Tìm điểm N thuộc (◎) để thể tích tam giác ABN nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

a) Phương trình tham số của (Δ): $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=3+2t \end{cases}$

Ta có $M\in(\Delta)\Rightarrow M(1+2t;\,-2-t;\,3+2t)$

$\overrightarrow{AB}=(2;\,1;\,2),\ \overrightarrow{AC}=(-2;\,2;1)$

$[\overrightarrow{AB};\,\overrightarrow{AC}]=(-3;\,-6;\,6)=-3(1;\,2;\,-2)=-3.\vec{n}$, với $\vec{n}=(1;\,2;\,-2)$

Phương trình mp (ABC) qua A với pháp vectơ $\vec{n}$: (ABC): $x+2y-2z-2=0$.

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB};\,\overrightarrow{AC}]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2}=\dfrac{9}{2}.$

Đường cao MH của tứ diện MABC là khoảng từ M đến (ABC):

$$MH=d(M(ABC))=\frac{|1+2t+2(-2-t)-2(3+2t)-2|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|-4t-11|}{3}$$

Thể tích tứ diện MABC bằng 3

$\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}.\frac{9}{2}.\frac{|4t+11|}{3}=3 \Leftrightarrow |4t+11|=6 \Leftrightarrow t=-\frac{5}{4}$ hay $t=-\frac{17}{4}$.

Vậy, có 2 điểm M cần tìm là: $M\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$ hay $M\left(-\frac{15}{2};\frac{9}{4};\frac{11}{2}\right)$

b) $N\in(\Delta)\Rightarrow N(1+2t;-2-t;3+2t)$

$$S_{ABN}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{NA};\overrightarrow{NB}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{32t^2+128t+146}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(4t+8)^2+9}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \max S_{ABN}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 4t+8=0\Leftrightarrow t=-2.$ Vậy, điểm N cần tìm là N(-3; 0; 1).

Bài 3. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng (d) và mặt cầu (S):

$(d):\begin{cases}2x-2y-z+1=0\\ x+2y-2z-4=0\end{cases}$; $(S):x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$

Tìm m để (d) cắt (S) tại hai điểm M, N sao cho MN = 8.

Hướng dẫn:

Mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-3)^2+z^2=13-m$ có tâm I(-2; 3; 0), bán kính $R=IN=\sqrt{13-m}$, với $m<13$.

Dựng $IH\perp MN\Rightarrow MH=HN=4\Rightarrow IH=\sqrt{IN^2-HN^2}=\sqrt{13-m-16}=\sqrt{-m-3}$,

Phương trình tham số của đường thẳng (d): $\begin{cases}x=t\\ y=1+\frac{1}{2}t\\ z=-1+t\end{cases}$

(d) có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left(1;\frac{1}{2};1\right)=\frac{1}{2}(2;1;2)$ và đi qua điểm A(0; 1; -1)

$\overrightarrow{AI}=(-2;2;1);\ [\overrightarrow{AI};\vec{u}]=(3;6;-6)$

Khoảng cách h từ I đến đường thẳng (d): $h=\frac{\left|[\overrightarrow{AI};\vec{u}]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{3^2+6^2+6^2}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}=3.$

Ta có: $IH=h\Leftrightarrow\sqrt{-m-3}=3\Leftrightarrow -m-3=9\Leftrightarrow m=-12$ (thỏa điều kiện)

Vậy, giá trị cần tìm: m = -12.

Bài 4. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (◎) : 2x – y + z – 5 = 0. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua giao tuyến của (◎) và mặt phẳng (xOy) và (P) tạo với 3 mặt phẳng tọa độ một tứ diện có thể tích bằng $\frac{125}{36}$.

Hướng dẫn: Phương trình mặt phẳng (xOy): z = 0

- Phương trình mặt phẳng (P) thuộc chùm xác định bởi (◎) và (xOy) có dạng:
  $m(2x-y+z-5)-nz=0\Leftrightarrow(P):2mx-my+(m+n)z-5m=0$
- Giao điểm A, B, C của (P) và 3 trục Ox, Oy, Oz lần lượt có tọa độ:

$$A\left(\frac{5}{2}; 0; 0\right),\ B(0; -5; 0), C\left(0; 0; \frac{5m}{m+n}\right)$$

- Thể tích tứ diện OABC bằng

$$\frac{125}{36} \Leftrightarrow V = \frac{1}{6}.OA.OB.OC = \frac{1}{6}.\frac{5}{2}.5.\left|\frac{5m}{m+n}\right| = \frac{125}{36}$$

$$\Leftrightarrow |m+n| = 3|m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+n=3m \\ m+n=-3m \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1,\ n=2 \\ m=1,\ n=-4 \end{array}\right.$$

Vậy, có 2 phương trình mặt phẳng (P): $\left[\begin{array}{l} (P_1): 2x-y+3z-5=0\ \ (m=1;\ n=2) \\ (P_2): 2x-y-3z-5=0\ \ (m=1;\ n=-4) \end{array}\right.$

Bài 5. Trong không gian Oxyz, tìm trên Ox điểm A cách đều đường thẳng

$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng (◎) : 2x – y – 2z = 0.

Hướng dẫn: Gọi $A(a; 0; 0) \in Ox$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (◎) : $d(A; \alpha) = \frac{|2a|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{|2a|}{3}$

(◎) qua $M_0(1; 0; -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 2)$

Đặt $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{u}$. Do đó: d(A; ◎) là đường cao vẽ từ A trong tam giác AM_0M_1

$$\Rightarrow d(A; \Delta) = \frac{2.S_{AM_0M_1}}{M_0M_1} = \frac{\left|[\overrightarrow{AM_0}; \vec{u}]\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{8a^2-24a+36}}{3}$$

Theo giả thiết: d(A; ◎) = d(A; ◎)

$$\Leftrightarrow \frac{|2a|}{3} = \frac{\sqrt{8a^2-24a+36}}{3} \Leftrightarrow 4a^2 = 8a^2-24a+36 \Leftrightarrow 4a^2-24a+36=0$$

$$\Leftrightarrow 4(a-3)^2 = 0 \Leftrightarrow a=3.$$

Vậy, có một điểm: A(3; 0; 0).

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc Oxyz cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S):

(P): $2x+2y+z-m^2-3m=0$; $(S): (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$.

Tìm m để (P) tiếp xúc (S). Với m tìm được xác định tọa độ tiếp điểm.

Hướng dẫn:

Ta có: $(P): 2x+2y+z-m^2-3m=0$; $(S): (x-1)^2+(y+1)^2+(x-1)^2=9$ có tâm I(1; -1; 1) và bán kính R = 3.

(P) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d[I, (P)] = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2.1+2.(-1)+1.1-m^2-3m|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 3 \Leftrightarrow |m^2+3m-1| = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-5 \end{array}\right.$$

Vậy, (P) tiếp xúc (S) khi m = -5 hay m = 2, khi đó (P): 2x + 2y + z – 10 = 0

Đường thẳng (d) qua I và vuông góc với (P) có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$

Tọa độ tiếp điểm là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x+2y+z-10=0 \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$

Vậy, tọa độ tiếp điểm M(3; 1; 2).

Bài 7. Trong không gian oxyz cho hai đường thẳng:

$$(d_1): \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=4 \end{cases}; \qquad (d_2): \begin{cases} x+y-3=0 \\ 4x+4y+3z-12=0 \end{cases}$$

Chứng minh (d_1) và (d_2) chéo nhau. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

Hướng dẫn:

(d_1) đi qua điểm A(0; 0; 4) và có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}=(2;1;0)$

(d_2) đi qua điểm B(3; 0; 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}=(3;-3;0)$

$\overrightarrow{AB}=(3;0;-4)$; $\overrightarrow{AB}.[\vec{u_1};\vec{u_2}]=36\neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \vec{u_1}, \vec{u_2}$ không đồng phẳng.

Vậy, (d_1) và (d_2) chéo nhau.

(d_2) có phương trình tham số: $\begin{cases} x=3+t' \\ y=-t' \\ z=0 \end{cases}$.

Gọi MN là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2)

$M\in(d_1)\Rightarrow M(2t;t;4)$, $\quad N\in(d_2)\Rightarrow N(3+t';-t';0)\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(3+t'-2t;-t'-t;-4)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN}\perp\vec{u_1} \\ \overrightarrow{MN}\perp\vec{u_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3+t'-2)-(t'+t)=0 \\ 3+t'-2t+(t'+t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=-1 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2;1;4) \\ N(2;1;0) \end{cases}$

Tọa độ trung điểm I của MN: I(2; 1; 2), bán kính $R=\dfrac{1}{2}MN=2$.

Vậy, phương trình mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$.

Bài 8. Trong không gian Oxyz cho 2 đường thẳng: $(d_1): \begin{cases} x=t \\ y=4+t \\ z=6+2t \end{cases}$; và $(d_2): \begin{cases} x=t' \\ y=3t'-6 \\ z=t'-1 \end{cases}$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của điểm I(1; -1; 1) trên (d_2). Tìm phương trình tham số của đường thẳng qua K vuông góc với (d_1) và cắt (d_1).

Hướng dẫn:

(d_1) có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}=(1;1;2)$; (d_2) có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}=(1;3;1)$

$K\in(d_2)\Rightarrow K(t';3t'-6;t'-1)\Rightarrow \overrightarrow{IK}=(t'-1;3t'-5;t'-2)$

$\overrightarrow{IK}\perp\vec{u_2}\Leftrightarrow t'-1+9t'-15+t'-2=0\Leftrightarrow t'=\dfrac{18}{11}\Rightarrow K\left(\dfrac{18}{11};-\dfrac{12}{11};\dfrac{7}{11}\right)$

Giả sử (◎) cắt (d_1) tại $H(t;\,4+t;\,6+2t),\ (H\in(d_1))$

$$\overrightarrow{HK}=\left(\frac{18}{11}-t;\,-\frac{56}{11}-t;\,-\frac{59}{11}-2t\right)$$

$$\overrightarrow{HK}\perp\vec{u}_1 \Leftrightarrow \frac{18}{11}-t-\frac{56}{11}-t-\frac{118}{11}-4t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{26}{11}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{HK}=\left(4;\,-\frac{30}{11};\,-\frac{7}{11}\right)=\frac{1}{11}(44;\,-30;\,-7).$$

Vậy, phương trình tham số của đường thẳng (◎): $\begin{cases}x=\dfrac{18}{11}+44\lambda\\ y=-\dfrac{12}{11}-30\lambda\\ z=\dfrac{7}{11}-7\lambda\end{cases}$.

Bài 9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng

$$(P): x+2y-2z+5=0;\ (Q): x+2y-2z-13=0.$$

Viết phương trình của mặt cầu (S) đi qua gốc tọa độ O, qua điểm A(5;2;1) và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

Hướng dẫn:

Bài 1.

Gọi I(a;b;c) là tâm và R là bán kính của mặt cầu (S). Từ giả thiết ta có:

$$OI=AI=d\big(I,(P)\big)=d\big(I,(Q)\big)\Leftrightarrow\begin{cases}OI=AI\\ OI=d\big(I,(P)\big)\\ d\big(I,(P)\big)=d\big(I,(Q)\big)\end{cases}$$

Ta có:

$$OI=AI\Leftrightarrow OI^2=AI^2\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=(a-5)^2+(b-2)^2+(c-1)^2$$
$$\Leftrightarrow 10a+4b+2c=30\ (1)$$

$$OI=d\big(I,(P)\big)\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{|a+2b-2c+5|}{3}\Leftrightarrow 9\left(a^2+b^2+c^2\right)=(a+2b-2c+5)^2\quad(2)$$

$$d\big(I,(P)\big)=d\big(I,(Q)\big)\Leftrightarrow\frac{|a+2b-2c+5|}{3}=\frac{|a+2b-2c-13|}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+2b-2c+5=a+2b-2c-13\ (\text{loại})\\ a+2b-2c+5=-a-2b+2c+13\end{array}\right.\Leftrightarrow a+2b-2c=4\ (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra: $b=\dfrac{17}{3}-\dfrac{11a}{6};\ c=\dfrac{11-4a}{3}$ (4)

Từ (2) và (3) suy ra: $a^2+b^2+c^2=9$ (5)

Thế (4) vào (5) và thu gọn ta được: $(a-2)(221a-658)=0$

Như vậy $a=2$ hoặc $a=\dfrac{658}{221}$.Suy ra: I(2;2;1) và R = 3 hoặc $I\left(\dfrac{658}{221};\dfrac{46}{221};-\dfrac{67}{221}\right)$ và R= 3

Vậy có hai mặt cầu thỏa mãn yêu cầu với phương trình lần lượt là:

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9 \text{ và } \left(x-\frac{658}{221}\right)^2+\left(y-\frac{46}{221}\right)^2+\left(z+\frac{67}{221}\right)^2=9$$

Bài 10. Trong không gian với hệ trục *Oxyz* cho mặt cầu (*S*) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ và mặt phẳng (α):2*x* + 2*y* - *z* + 17 = 0. Viết phương trình mặt phẳng (β) song song với (α) và cắt (*S*) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π.

Hướng dẫn:

Do (β) // (α) nên (β) có phương trình 2x + 2y – z + D = 0 $(D\neq 17)$

Mặt cầu (S) có tâm I(1; -2; 3), bán kính R = 5

Đường tròn có chu vi 6π nên có bán kính r = 3.

Khoảng cách từ I tới (β) là h = $\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

Do đó $\dfrac{|2.1+2(-2)-3+D|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=4 \Leftrightarrow |-5+D|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=-7 \\ D=17 \text{ (lo¹i)} \end{array}\right.$

Vậy (β) có phương trình 2x + 2y – z - 7 = 0

Bài 11. Trong không gian Oxyz, tìm trên Ox điểm A cách đều đường thẳng

(d) : $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ và mặt phẳng (Δ) : 2x – y – 2z = 0.

Hướng dẫn: Gọi A(a; 0; 0) $\in Ox$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) : $d(A;\alpha)=\dfrac{|2a|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{|2a|}{3}$

(Δ) qua $M_0(1;0;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;2)$

Đặt $\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{u}$. Do đó: d(A; Δ) là đường cao vẽ từ A trong tam giác AM_0M_1

$$\Rightarrow d(A;\Delta)=\frac{2.S_{AM_0M_1}}{M_0M_1}=\frac{\left|[\overrightarrow{AM_0};\vec{u}]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{8a^2-24a+36}}{3}$$

Theo giả thiết: d(A; Δ) = d(A; α)

$$\Leftrightarrow \frac{|2a|}{3}=\frac{\sqrt{8a^2-24a+36}}{3} \Leftrightarrow 4a^2=8a^2-24a+36 \Leftrightarrow 4a^2-24a+36=0$$

$$\Leftrightarrow 4(a-3)^2=0 \Leftrightarrow a=3.$$

Vậy, có một điểm A(3; 0; 0).

Bài 12. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz .Viết phương trình (P) qua O , vuông góc với mặt phẳng (Q) : $x+y+z=0$ và cách điểm M(1;2;-1) một khoảng bằng $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn: Phương trình mặt phẳng (P) qua O nên có dạng : Ax + By + Cz = 0 với $A^2+B^2+C^2 \neq 0$

Vì (P) $\perp$ (Q) nên 1.A+1.B+1.C = 0 $\Leftrightarrow$ A+B+C = 0 $\Leftrightarrow C=-A-B$ (1)

Theo đề :

$$d(M;(P)) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|A+2B-C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow (A+2B-C)^2 = 2(A^2+B^2+C^2) \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) , ta được : 8AB+5$B^2=0 \Leftrightarrow B=0$ hay B $=-\dfrac{8A}{5}$

- $B=0 \xrightarrow{(1)} C=-A$. Cho $A=1, C=-1$ thì (P) : $x-z=0$
- B $=-\dfrac{8A}{5}$. Chọn A = 5 , B = $-1 \xrightarrow{(1)} C=3$ thì (P) : $5x-8y+3z=0$

Bài 13. Cho điểm A(10; 2; -1) và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{3}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với d và khoảng cách từ d tới (P) là lớn nhất.

Hướng dẫn:

Gọi H là hình chiếu của A trên d, mặt phẳng (P) đi qua A và (P)//d, khi đó khoảng cách giữa d và (P) là khoảng cách từ H đến (P).

G.sử điểm I là hình chiếu của H lên (P), ta có $AH \geq HI$ => HI lớn nhất khi $A \equiv I$

Vậy (P) cần tìm là mặt phẳng đi qua A và nhận $\overrightarrow{AH}$ làm véc tơ pháp tuyến.

$H \in d \Rightarrow H(1+2t;t;1+3t)$ vì H là hình chiếu của A trên d nên $AH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ ($\vec{u}=(2;1;3)$ là véc tơ chỉ phương của d) $\Rightarrow H(3;1;4) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(-7;-1;5)$

Vậy (P): 7(x – 10) + (y – 2) – 5(z + 1) = 0

⇔ 7x + y -5z -77 = 0

Bài 14. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A (3 ; - 1 ; 1) , đường thẳng Δ và mp (P) lần lượt có phương trình Δ : $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$, (P) : x – y + z - 5 = 0 .

Viết phương trình tham số của đường thẳng d thỏa các điều kiện :đi qua A , nằm trong (P) và hợp với đường thẳng Δ một góc 45^0.

Hướng dẫn:

Gọi $\overrightarrow{u_d}$, $\overrightarrow{u_\Delta}$, $\overrightarrow{n_P}$ lần lươt là các vtcp của đt d , đt Δ và vtpt của mp (P).

Đặt $\overrightarrow{u_d}=(a;b;c), \quad (a^2+b^2+c^2\neq 0)$. Vì d nằm trong (P) nên ta có : $\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{u_d}$

=> a – b + c = 0 ⇔ b = a + c (1).

Theo gt : góc giữa 2 đt bằng 45^0 ⇔ Góc giữa 2 vtcp bằng 45^0 .

$$\Leftrightarrow \frac{|a+2b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2(a+2b+c)^2 = 9(a^2+b^2+c^2) \, (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có : $14c^2+30ac=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=-\dfrac{15a}{7} \end{array}\right.$

* Với c = 0 : chọn a = b = 1 . Ta có ptts của d là : x = 3 + t ; y = - 1 – t ; z = 1

* Với c = - 15a / 7 . chọn a = 7 , c = - 15 , b = -8 . ta có ptts của d là : $d:\begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=1-15t \end{cases}$

Bài 15. Trong không gian oxyz cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$; $d_2 \begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$

và điểm M(1;2;3).

1.Viết phương trình mặt phẳng chứa M và d_1 ; Tìm M′ đối xứng với M qua d_2.

2.Tìm $A\in d_1; B\in d_2$ sao cho AB ngắn nhất .

Hướng dẫn:

Trong không gian oxyz cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$; $d_2 \begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$

và điểm M(1;2;3).

1.Viết phương trình mặt phẳng chứa M và d_1 ; Tìm M′ đối xứng với M qua d_2.

+ Phương trình mặt phẳng chứa M và d_1 …. Là (P) x + y – z = 0

+ Mp(Q) qua M và vuông góc với d_2 có pt 2x – y - z + 3 = 0

+ Tìm được giao của d_2 với mp(Q) là H(-1 ;0 ;1)

… $\Rightarrow$ Điểm đối xứng M′ của M qua d_2 là M′(-3 ;-2 ;-1)

2.Tìm $A\in d_1; B\in d_2$ sao cho AB ngắn nhất .

Gọi A(t;t;2t) và B(-1-2t_1 ;-t_1 ;1+t_1) AB ngắn nhất khi nó là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 và d_2 .

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{v_1}=0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{v_2}=0 \end{cases}$ …….$\Rightarrow$ tọa độ của $A\left(\dfrac{3}{35};\dfrac{3}{35};\dfrac{6}{35}\right)$ và $B\left(\dfrac{-1}{35};\dfrac{-17}{35};\dfrac{18}{35}\right)$

Bài 16. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz ,cho điểm I(1;5;0) và hai đường thẳng

$\Delta_1:\begin{cases} x=t \\ y=4-t \\ z=-1+2t \end{cases}$; $\Delta_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{-3}$

1. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm I và cắt cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2
2. Viết phương trình mặt phẳng(α) qua điểm I , song song với Δ_1 và Δ_2

Hướng dẫn:

I(1;5;0) , $\Delta_1:\begin{cases}x=t\\y=4-t\\z=-1+2t\end{cases}$ $\Delta_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{-3}$

Δ_1 có vtcp $u_1(1;-1;2)$;và Δ_1 đi qua điểm $M_1(0;4;-1)$

Δ_2 có vtcp $u_2(1;-3;-3)$; Δ_2 đi qua điểm $M_2(0;2;0)$

- mp(P)chứa Δ_1 và điểm I có vtpt $\vec{n}=\left[\overrightarrow{M_1I},\overrightarrow{u_1}\right]=(3;-1;-2)$

$\rightarrow$p/t mp(P) : 3x –y - 2z + 2 = 0

Tương tự mp(Q) chứa Δ_2 và điểm I có vtpt $\overrightarrow{n'}$ (3;-1;2)

$\rightarrow$p/t mp(Q) : 3x - y + 2z + 2 = 0

*Vì đường thẳng d qua I , cắt Δ_1 và Δ_2, nên d = (P) $\cap$(Q)

$\rightarrow$đường thẳng d có vtcp $\overrightarrow{u_d}=\left[\vec{n},\overrightarrow{n'}\right]$= (1;3;0); d đi qua điểm I(1;5;0)

Nên p/t tham số của d là $\begin{cases}x=1+t\\y=5+3t\\z=0\end{cases}$

*mp(α) qua điểm I và song song với Δ_1 và Δ_2 nên (α) có vtpt $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]$=(9;5;-2)

$\rightarrow$ p/t (α) : 9x + 5y -2z – 34 = 0

Bài 17. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz* cho 4 điểm *A*(1; -1; 2), *B*(1; 3; 2), *C*(4; 3; 2), *D*(4; -1; 2) và mặt phẳng (*P*) có phương trình: $x+y+z-2=0$. Gọi *A'*là hình chiếu của *A* lên mặt phẳng *Oxy*. Gọi (*S*) là mặt cầu đi qua 4 điểm *A'*, *B, C, D*. Xác định toạ độ tâm và bán kính của đường tròn (C) là giao của (*P*) và (*S*).

Hướng dẫn:

Dễ thấy A' (1; -1; 0)

* Giả sử phương trình mặt cầu (S) đi qua A', B, C, D là:

$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0,\qquad \left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$

Vì $A',B,C,D\in(S)$ nên ta có hệ: $\begin{cases}2a-2b+d+2=0\\2a+6b+4c+d+14=0\\8a+6b+4c+d+29=0\\8a-2b+4c+d-21=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{5}{2}\\b=-1\\c=-1\\d=-1\end{cases}$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-5x-2y-2z+1=0$

(S) có tâm $I\left(\dfrac{5}{2};1;1\right)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$

+) Gọi H là hình chiếu của I lên (P). H là tâm của đường tròn (C)

+) Gọi (d) là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P).

(d) có vectơ chỉ phương là: $\vec{n}(1;1;1)$

Suy ra phương trình của d: $\begin{cases} x = 5/2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{5}{2} + t; 1 + t; 1 + t\right)$

Do $H = (d) \cap (P)$ nên: $\dfrac{5}{2} + t + 1 + t + 1 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow 3t = -\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow t = -\dfrac{5}{6} \Rightarrow H\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{6}\right)$

Bà 18. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz* cho $(P): x + 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng $(d): \dfrac{x+3}{2} = y + 1 = z - 3$, điểm *A*(-2; 3; 4). Gọi *Δ* là đường thẳng nằm trên (*P*) đi qua giao điểm của (*d*) và (*P*) đồng thời vuông góc với *d*. Tìm trên *Δ* điểm *M* sao cho khoảng cách *AM* ngắn nhất.

Hướng dẫn:

Chuyển phương trình d về dạng tham số ta được: $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases}$

Gọi I là giao điểm của (d) và (P) $\Rightarrow I(2t - 3; t - 1; t + 3)$

Do $I \in (P) \Rightarrow 2t - 3 + 2(t-1) - (t-3) + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(-1;0;4)$

* (d) có vectơ chỉ phương là $\vec{a}(2;1;1)$, mp(P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;2;-1)$

$\Rightarrow \left[\vec{a}, \vec{n}\right] = (-3;3;3)$. Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ $\Rightarrow \vec{u}(-1;1;1)$

$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 1 - u \\ y = u \\ z = 4 + u \end{cases}$. Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(-1 - u; u; 4 + u)$, $\Rightarrow \overrightarrow{AM}(1 - u; u - 3; u)$

AM ngắn nhất $\Leftrightarrow AM \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -1(1-u) + 1(u-3) + 1.u = 0$

$\Leftrightarrow u = \dfrac{4}{3}$. Vậy $M\left(\dfrac{-7}{3}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{16}{3}\right)$

Bài 19. Cho mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z = 0$ và các điểm A(1;2;-1), B(3;1;-2), C(1;-2;1). Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (α) sao cho:

a) MA+MB nhỏ nhất
b) |MA-MB| lớn nhất
c) $MA^2 - MB^2 - MC^2$ lớn nhất
d) $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất

Đáp số:

$a) M\left(\dfrac{13}{5}; 1; -\dfrac{4}{5}\right); \quad b) M\left(\dfrac{7}{2}; \dfrac{11}{2}; 1\right); \quad c) M(2;-2;-2); \quad d) M\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$

Bài 20. Cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{2}$ và các điểm A(1;4;2), B(-1;2;4). Tìm điểm M thuộc d sao cho:

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất

b) MA+MB nhỏ nhất

c) MA^2+MB^2 nhỏ nhất

d) ΔAMB nhỏ nhất

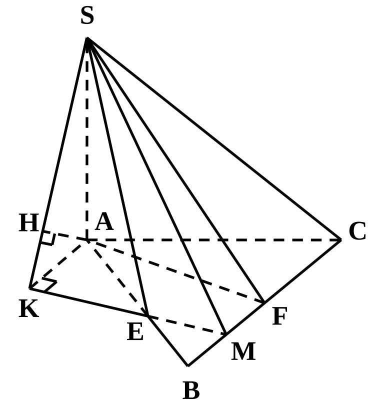
Đáp số:

$$a)M\left(-1;0;4\right);\ b)M\left(-1;0;4\right);\ c)M\left(\frac{-2\left(1+2\sqrt{7}\right)}{3\left(1+\sqrt{7}\right)};-\frac{1}{3};\frac{10-4\sqrt{7}}{3\left(1+\sqrt{7}\right)}\right);\ d)M\left(-\frac{12}{7};\frac{5}{7};\frac{38}{7}\right)$$

PHỤ LỤC 2. GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BẰNG HAI CÁCH

Bài 1. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều có cạnh bằng $2a\sqrt{2}$, SA vuông góc với (ABC) và SA = a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SE và AF.

Hướng dẫn:



***Cách 1*:** Gọi M là trung điểm của BF $\Rightarrow$ EM // AF

$$\Rightarrow (SA;\ AF) = (EM;\ AF) = SEM$$

◎SAE vuông tại A có:

$$SE^2 = SA^2 + AE = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow SE = a\sqrt{3}$$

$$AF = \frac{2a\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow EM = BM = MF = \frac{a\sqrt{6}}{2};\ BF = a\sqrt{2}$$

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = a^2 + 8a^2 = 9a^2 \Rightarrow SB = 3a$$

$$SF^2 = SA^2 + AF^2 = a^2 + 6a^2 = 7a^2 \Rightarrow SF = a\sqrt{7}$$

Áp dụng định lý đường trung tuyến SM trong ◎SBF có:

$$SB^2 + SF^2 = 2.SM^2 + \frac{1}{2}BF^2 \Leftrightarrow 9a^2 + 7a^2 = 2SM^2 + \frac{1}{2}.2a^2 \Leftrightarrow SM^2 = \frac{15a^2}{2}$$

Gọi ◎ là góc nhọn tạo bởi SE và AF. Áp dụng định lý hàm Côsin vào ◎SEM có:

$$\cos\alpha = \left|\cos SEM\right| = \left|\frac{ES^2 + EM^2 - SM^2}{2.ES.EM}\right| = \left|\frac{3a^2 + \frac{3a^2}{2} - \frac{15a^2}{2}}{2.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{3}}\right| = \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^o.$$

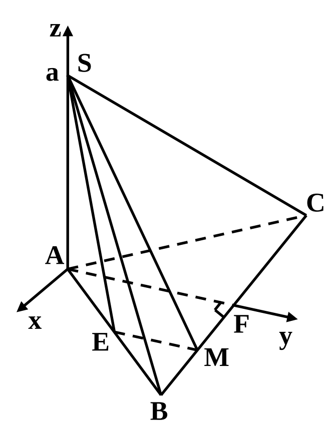
Dựng $AK \perp ME;\ AH \perp SK.$ Ta có: $AK = MF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $AH \perp (SME)$

Vì $AF // ME \Rightarrow d(SE;\ AF) = d(AF;\ (SME)) = AH.$

◎SAK vuông có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy, $d(SE;\ AF) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2:



Dựng hệ trục Axyz, với Ax, Ay, Az với A(0; 0; 0),

$B(a\sqrt{2};\ a\sqrt{6};\ 0)$, $C(-a\sqrt{2};\ a\sqrt{6};\ 0)$, $S(0;\ 0;\ a)$,

$E\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ \frac{a\sqrt{6}}{2};\ 0\right);\ F(0;\ a\sqrt{6};\ 0);M\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ a\sqrt{6};\ 0\right).$

$$\overrightarrow{SE}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{6}}{2};-a\right);\ \overrightarrow{AF}=(a;\ a\sqrt{6};\ 0),\ \overrightarrow{SM}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ a\sqrt{6};\ -a\right)$$

Gọi ◎ là góc nhọn tạo bởi SE và AF.ta có:

$$\cos\alpha=\cos(\overrightarrow{SE};\ \overrightarrow{AF})=\left|\frac{0.\frac{a\sqrt{2}}{2}+a\sqrt{6}.\frac{a\sqrt{6}}{2}0(-a)}{\sqrt{0+6a^2+0}.\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{3a^2}{2}+a^2}}\right|=\frac{3a^2}{a\sqrt{6}.a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45^o.$$

$$[\overrightarrow{SE};\ \overrightarrow{SM}]=\left(\frac{a^2\sqrt{6}}{2};\ 0;\ \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2};\ 0;\ 1)=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\vec{n},\ \text{với}\ \vec{n}=(\sqrt{2};\ 0;\ 1)$$

Phương trình mặt phẳng (SEM) qua S với pháp vectơ $\vec{n}:\ \sqrt{2}x+z-a=0.$

Khoảng cách từ A đến (SEM): $d(A;SEM)=\dfrac{|0+0-a|}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

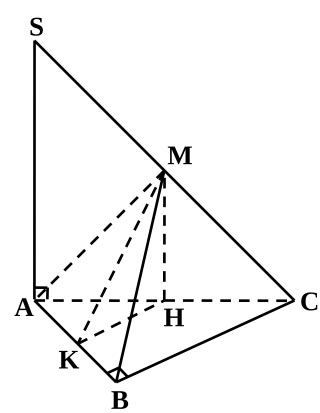
Vì $AF//EM\Rightarrow AF//(SEM)\Rightarrow d(SE;\ AF)=d(A;\ SEM)$. Vậy, $d(SE;\ AF)=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

Bài 2. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, BC = 2a, cạnh SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M là trung điểm SC. Chứng minh ◎MAB cân và tính diện tích ◎MAB theo a.

Hướng dẫn:

Cách 1:

Ta có: $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp AC$. Do đó ◎SAC vuông tại A có AM là trung tuyến nên $MA=\dfrac{1}{2}SC.$



Ta lại có: $\begin{cases}SA\perp(ABC)\\AB\perp BC\ \ (\Delta ABC\ \text{vuông tại B})\end{cases}$

$\Rightarrow SB\perp BC$ (định lý 3 đường vuông góc)

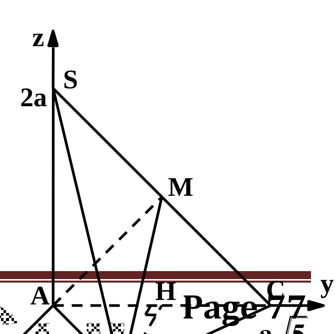
Do đó ◎SBC vuông tại B có BM là trung tuyến nên $MB=\dfrac{1}{2}SC.$ Suy ra: MA = MB $\Rightarrow$ ◎MAB cân tại M..

Dựng MH // SA và $HK\ //\ BC\ \ (H\in AC;\ K\in AB)$

vì: $\begin{cases}SA\perp(ABC)\\BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}MH\perp(ABC)\\HK\perp AB\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}MH=\dfrac{1}{2}SA=a\\HK=\dfrac{1}{2}BC=a\end{cases}$

◎MHK vuông tại H có:

$$MK^2=MH^2+HK^2=a^2+a^2=2a^2\Rightarrow MK=a\sqrt{2}$$



Diện tích ◎MAB: $S_{MAB}=\frac{1}{2}.MK.AB=\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Cách 2: ◎ABC vuông tại B có: $AC^2=AB^2+BC^2=a^2+4a^2=5a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{5}$

Dựng $BH\perp AC\ (H\in AC)$, ta có: $AH=\frac{AB^2}{AC}=\frac{a^2}{a\sqrt{5}}=\frac{a}{\sqrt{5}}$;

$$\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{5}{4a^2}\ \Rightarrow BH=\frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Dựng hệ trục tọa vuông góc Axyz, với Ax, Ay, Az đôi một vuông góc và

$$A(0;\,0;\,0),\ C(0;\,a\sqrt{5};\,0),\ S(0;\,0;\,2a),\ B\left(\frac{2a}{\sqrt{5}};\,\frac{a}{\sqrt{5}};\,0\right)$$

Tọa độ trung điểm M của SC là $M\left(0;\,\frac{a\sqrt{5}}{2};\,a\right)$

Ta có: $\overrightarrow{MA}=\left(0;\,\frac{a\sqrt{5}}{2};\,a\right)\Rightarrow MA=\frac{3a}{2}$; $\overrightarrow{MB}=\left(-\frac{2a}{\sqrt{5}};\,\frac{3a}{2\sqrt{5}};\,a\right)\Rightarrow MB=\frac{3a}{2}$.

suy ra: MA = MB ⇒ ◎MAB cân tại M.

Ta có: $[\overrightarrow{MA};\,\overrightarrow{MB}]=\left(\frac{a^2}{\sqrt{5}};\,-\frac{2a^2}{\sqrt{5}};\,a^2\right)\Rightarrow\left|[\overrightarrow{MA};\,\overrightarrow{MB}]\right|=a^2\sqrt{2}$

Diện tích ◎MAB: $S_{MAB}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{MA};\,\overrightarrow{MB}]\right|=\frac{1}{2}.a^2\sqrt{2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Bài 3. Cho hình chóp đều S.ABC, đáy ABC có cạnh bằng a, mặt bên tạo với đáy một góc bằng $\varphi(0^o<\varphi<90^o)$. Tính thể tích khối hình chóp S.ABC và khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).

Cách 1: Gọi H là trung điểm của BC.. Do S.ABC đều và ◎ABC đều nên chân đường cao đỉnh S trùng với giao điểm ba đường cao là trực tâm O của ◎ABC và có ◎SBC cân tại S. **S**uy ra: $BC\perp SH,\ BC\perp AH,$ nên $SHA=\varphi$.

Ta có: $OH=\frac{1}{3}AH=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

ΔSHO vuông góc: $SO=HO.tg\varphi=\frac{a\sqrt{3}}{6}tg\varphi$ và $SH=\frac{HO}{\cos\varphi}=\frac{a\sqrt{3}}{6.\cos\varphi}$

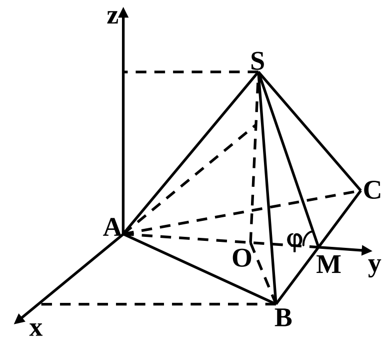
Thể tích hình chóp S.ABC: $V=\frac{1}{3}.SO.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}tg\varphi.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3tg\varphi}{24}$

Diện tích ◎SBC: $S_{SBC}=\frac{1}{2}.SH.BC=\frac{a^2\sqrt{3}}{12.\cos\varphi}$.

Gọi h là khoảng cách từ A đến (SBC), ta có:

$$V=\frac{1}{3}.h.S_{SBC}\ \Rightarrow\ h=\frac{3.V}{S_{SBC}}=3.\frac{a^3tg\varphi}{24}:\frac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\varphi}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\varphi$$

Cách 2: Vì S.ABC là hình chóp đều nên chân đường cao đỉnh S trùng với tâm O đường tròn (ABC). Gọi M là trung điểm của BC.



Ta có:

$$AO = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ và } OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$AM \perp BC,\ SM \perp BC \Rightarrow \ SMA = \varphi$$

◎SOM vuông có: $SO = OM.tg\varphi = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}tg\varphi$

Dựng hệ trục tọa độ Axyz, với Ax, Ay, Az đôi một vuông góc, A(0; 0; 0),

$$B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), M\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), O\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{3}; 0\right), S\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{3}; \frac{a\sqrt{3}}{6}tg\varphi\right)$$

Thể tích hình chóp: $V = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABC} = \dfrac{a^3 tg\varphi}{24}$

Ta có: $\overrightarrow{BS} = \left(-\dfrac{a}{2}; -\dfrac{a\sqrt{3}}{6}; \dfrac{a\sqrt{3}}{6}tg\varphi\right)$, $\overrightarrow{BC} = (-a; 0; 0)$

$$[\overrightarrow{BS}; \overrightarrow{BC}] = \left(0; -\frac{a^2\sqrt{3}}{6}tg\varphi; -\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right) = \vec{n}$$

Phương trình mặt phẳng (SBC) qua B với vectơ pháp tuyến $\vec{n}$:

$$0\left(x - \frac{a}{2}\right) - \frac{a^2\sqrt{3}}{6}tg\varphi\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{a^2\sqrt{3}}{6}(z - 0) = 0 \Leftrightarrow (SBC):\ tg\varphi y + z - \frac{a\sqrt{3}}{2}tg\varphi = 0.$$

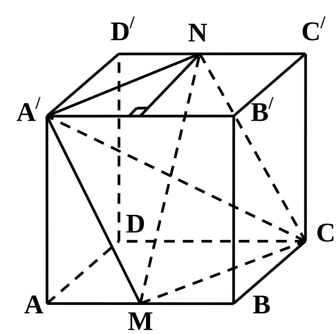
Khoảng cách d từ A đến (SBC): $d = \dfrac{\left|tg\varphi.O + O - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}tg\varphi\right|}{\sqrt{tg^2\varphi + 1}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}tg\varphi}{\dfrac{1}{\cos\varphi}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\sin\varphi.$

Bài 4. Cho hình lập phương ABCD . A'B'C'D' cạnh a. M, N lần lượt là trung điểm của AB và C'D'. Tính khoảng cách từ B' đến (A'MCN).

Cách 1: Bốn tam giác vuông $AA'M,\ BCM,\ CC'N,\ A'D'N$ bằng nhau (c.g.c)

$\Rightarrow A'M = MC = CN = NA' \ \Rightarrow A'MCN$ là hình thoi.

Hai hình chóp B'A'MCN và B'.A'NC có chung đường cao vẽ từ đỉnh B' và $S_{A'MCN} = 2.S_{A'NC}$ nên: $V_{B'.A'MCN} = 2.V_{B'.A'NC.}$



Mà:

$$V_{B'.ANC} = V_{C.A'B'N} = \frac{1}{3}.CC'.S_{A'B'N} = \frac{1}{3}.a.\frac{1}{2}.a.a = \frac{a^3}{6}$$

$$\Rightarrow V_{B'.A'MCN} = \frac{a^3}{3}.$$

Ta có: $S_{A'MCN} = \frac{1}{2}.A'C.MN$, với

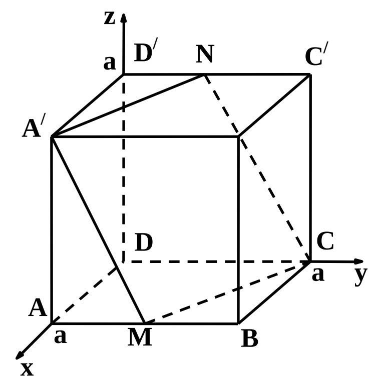
$A'C = a\sqrt{3};\ MN = BC' = a\sqrt{2}\ \Rightarrow S_{A'MCN} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$

Gọi H là hình chiếu của B/ trên (A/MCN), ta có: $V_{B'.A'MCN} = \frac{1}{3}.B'H.S_{A'MCN}$

$\Rightarrow B'H = \frac{3.V_{B'.A'MCN}}{S_{A'MCN}} = 3.\frac{a^3}{3} : \frac{a^2\sqrt{6}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$

Cách 2: Chọn hệ trục Dxyz, với Dx, Dy, Dz đôi một vuông góc, A(a; 0; 0), B(a; a; 0), C(0; a; 0), D(0; 0; 0), A/(a; 0; a), B/(a; a; a), C/(0; a; a), D/(0; 0; a),

$M\left(a; \frac{a}{2}; 0\right), N\left(0; \frac{a}{2}; a\right)$



Ta có:

$\overrightarrow{A'C} = (-a; a; -a),\ \overrightarrow{MN} = (-a; 0; a)$

$[\overrightarrow{A'C}; \overrightarrow{MN}] = (a^2; 2a^2; a^2) = a^2(1; 2; 1)$

$= a^2.\vec{n}$ với $\vec{n} = (1; 2; 1).$

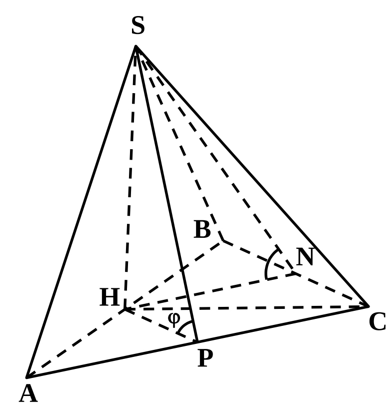
Phương trình mp (A/MCN) qua C(0; a; 0) với pháp vectơ $\vec{n}$:

$1(x-0) + 2(y-a) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow (A'MCN): x + 2y + z - 2a = 0.$

Khoảng cách d từ B/(a; a; a) đến mp(A/MCN): $d = \frac{|a + 2a + a - 2a|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{2a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$

Bài 5. Tính thể tích của hình chóp S.ABC, biết đáy ABC là một tam giác đều cạnh a, mặt bên (SAB) vuông góc với đáy, hai mặt bên còn lại cùng tạo với đáy góc ◎.

*Cách 1:*Dựng $SH \perp AB$



Ta có:

$(SAB) \perp (ABC),\ (SAB) \cap (ABC) = AB,\ SH \subset (SAB)$

$\Rightarrow SH \perp (ABC)$ và SH là đường cao của hình chóp.

Dựng $HN \perp BC,\ HP \perp AC$

$\Rightarrow SN \perp BC,\ SP \perp AC \Rightarrow SPH = SNH = \alpha$

◎SHN = ◎SHP ⇒ HN = HP.

◎AHP vuông có: $HP = HA.\sin 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$

◎SHP vuông có: $SH = HP.tg\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4}tg\alpha$

Thể tích hình chóp $S.ABC$: $V = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.tg\alpha.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{16}tg\alpha$

Cách 2: Dựng $SH \perp AB$

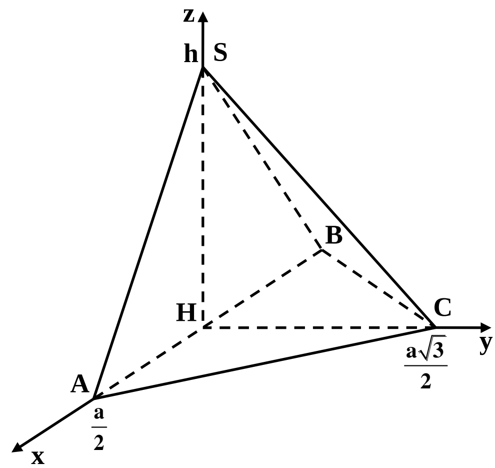
Ta có: $(SAB) \perp (ABC), (SAB) \cap (ABC) = B, SH \subset (SAB) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Vì (SAC) và (SBC) cùng tạo với (ABC) một góc ◎ và ◎ABC đều, nên suy ra H là trung điểm AB.

Dựng hệ trục tọa độ Hxyz, với Hx, Hy, Hz đôi một vuông góc, $H(0;\ 0;\ 0)$,

$A\left(\frac{a}{2};\ 0;\ 0\right);\ B\left(-\frac{a}{2};\ 0;\ 0\right)$,

$C\left(0;\ \frac{a\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$, $S(0;\ 0;\ h), (h > 0)$.



Phương trình mp (ABC): z = 0, với pháp vectơ $\vec{n}_1 = (0;\ 0;1)$. Phương trình mp (SAC):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a\sqrt{3}} + \frac{z}{h} = 1$$

$$\Leftrightarrow (SAC): 2h\sqrt{3}x + 2hy + a\sqrt{3}z - ah\sqrt{3} = 0$$

với $\vec{n}_2 = (2h\sqrt{3};\ 2h;\ a\sqrt{3})$.

(SAC) tạo với (ABC) một góc ◎:

$$\cos\alpha = \frac{\left|0 + 0 + a\sqrt{3}\right|}{\sqrt{0+0+1}.\sqrt{12h^2 + 4h^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{16h^2 + 3a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha = \frac{16h^2 + 3a^2}{3a^2}$$

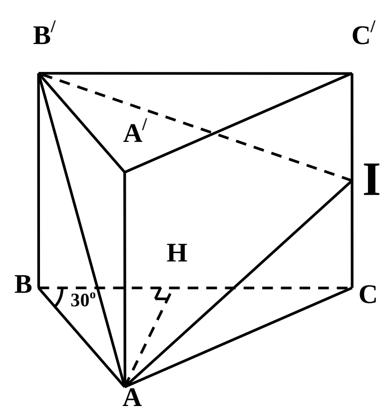
$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3a^2tg^2\alpha}{16} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{4}tg\alpha$$

Thể tích hình chóp S.ABC: $V = \frac{1}{3}.h.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}tg\alpha.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{16}tg\alpha$.

Bài 6. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân với AB = AC = a, góc $BAC = 120^o$, cạnh bên BB' = a. Gọi I là trung điểm CC'. Chứng minh ◎AB'I vuông tại A và tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I).

Hướng dẫn:

Cách 1: Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow AH \perp BC$.



◎ABH là nửa tam giác đều cạnh AB = a ⇒ $AH = \frac{a}{2}$ và

$BH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$. $\Delta IB^/C^/$ vuông có:

$$IB^{/2} = IC^{/2} + B^/C^{/2} = \frac{a^2}{4} + 3a^2 = \frac{13a^2}{4}$$

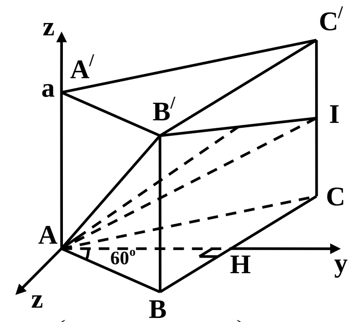
◎AIC vuông có: $AI^2 = IC^2 + AC^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}$

Ta có: $AI^2 + AB'^2 = \dfrac{5a^2}{4} + 2a^2 = \dfrac{13a^2}{4} = IB'^2$ (AB/ là đường chéo của hình vuông AA/B/B cạnh a). Vậy, ◎AB/I vuông tại A.

Ta có: $S_{AB'I} = \dfrac{1}{2}.AI.AB' = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$; $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.AH.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Gọi ◎ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB/I), theo công thức chiếu, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} : \frac{a^2\sqrt{10}}{4} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$



Cách 2: Gọi H là trung điểm BC $\Rightarrow AH \perp BC$

◎ABH là nửa tam giác đều cạnh AB = a

$$\Rightarrow AH = \frac{a}{2} \text{ và } BH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$$

Dựng hệ trục Axyz, với Ax, Ay, Az đôi một vuông góc, A(0; 0; 0),

$B\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; \dfrac{a}{2}; 0\right)$, $C\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; \dfrac{a}{2}; 0\right)$, $A'(0; 0; a)$, $B'\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; \dfrac{a}{2}; a\right)$, $C'\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; \dfrac{a}{2}; a\right)$, $I\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; \dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{2}\right)$

$$\overrightarrow{AB'} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a\right), \overrightarrow{AI} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$$

Ta có: $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AI} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{2} + a.\dfrac{a}{2} = -\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{2a^2}{4} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB'} \perp \overrightarrow{AI}.$ Vậy, ◎AB/I vuông tại A.

Phương trình mp(ABC): z = 0 có pháp vectơ $\vec{n}_1 = (0; 0; 1)$

mp (AB/I) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AI}$, nên có pháp vectơ:

$$[\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{AI}] = \left(-\frac{a^2}{4}; -\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}; \frac{2a^2\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{a^2}{4}(1; 3\sqrt{3}; -2\sqrt{3}) = -\frac{a^2}{4}.\vec{n}_2$$

với $\vec{n}_2 = (1; 3\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$. Gọi ◎ là góc giữa (ABC) và (AB/I), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|0 + 0 - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{0+0+1}.\sqrt{1+27+12}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{40}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$