CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH ÔN THI THPTQG 2018

1 Hàm số

1.1 Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

Bài toán 1.1 Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Tính đạo hàm và lập bảng xét dấu của nó.
- Căn cứ vào bảng xét dấu để kết luận.

Lưu ý 1.1

Cách tính nhanh đạo hàm của một số hàm số

- Hàm số phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ thì cách nhớ là "*anh dũng trừ bắt cướp*"

$$y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$$

- Hàm số phân thức $y = \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ thì cách nhớ là "*anh bạn – ăn cháo hai lần – bỏ cơm*"

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\left(a_2x^2 + b_2x + c_2\right)^2}$$

Ví dụ 1.1

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.

Cách 1. Tính nhanh đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x = 3(x^2 + 2x)$, và lập được bảng biến thiên (thực ra chỉ cần lập bảng xét dấu của đạo hàm):

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ đó chọn đáp án A. ■

Cách 2. Chúng ta sử dụng tính năng tính đạo hàm của hàm số bằng máy tính CASIO, sử dụng phím d/dx. ■

Riêng đối với ba loại hàm quen thuộc (bậc ba, bậc bốn trùng phương và phân thức bậc nhất) chúng ta có thể có cách làm riêng. Chẳng hạn câu này, ta biết đây là hàm số bậc ba với hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị có dạng *dấu ngã*, tức là sẽ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$. Do đó, có thể khẳng định được ngay phương án A là phương án đúng. Sau đây là một số bài tập điển hình.

Ví dụ 1.2 ĐH năm 2017 Mã đề 101

Hàm số $y = \frac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; +\infty)$. **B.** $(-1; 1)$. **C.** $(-\infty; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Hướng dẫn. Tập xác định $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm

$$y' = \frac{-4x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

Do đó, $y' < 0 \Leftrightarrow x > 0$. Chọn phương án A. ■

Ví dụ 1.3

Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = \frac{x+1}{x+3}$. **B.** $y = x^3 + x$. **C.** $y = \frac{x-1}{x-2}$. **D.** $y = -x^3 - 3x$.

1.2 Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Bài toán 1.2 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathbb{K}$.

Chúng ta có hai phương pháp chủ yếu:

- Lập bảng biến thiên của hàm số trên $\mathbb{K}$. Nếu tập $\mathbb{K}$ là một đoạn $[a; b]$ thì không cần lập bảng biến thiên mà chỉ cần
  + Giải phương trình $y' = 0$ và tìm ra các điểm x_i mà tại đó $y' = 0$ hoặc y' không xác định.
  + Tính và so sánh các giá trị $f(a), f(b), f(x_i)$ để tìm ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc hoặc điều kiện có nghiệm của phương trình.

Lưu ý 1.2

Lưu ý rằng, hàm số $y = f(x)$ muốn đạt được giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất bằng M thì ta phải tìm được ít nhất một số x_0 hữu hạn sao cho $f(x_0) = M$.

Lưu ý 1.3

Điều kiện có nghiệm của một số phương trình quen thuộc:

- Phương trình bậc hai điều kiện là $\Delta \geqslant 0$.
- Phương trình $\sin x = m, \cos x = m$ điều kiện là $|m| \leqslant 1$.
- Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ điều kiện là $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1$ hay $c^2 \leqslant a^2 + b^2$.

Cần nhớ hai cách để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất. Hai cách đó là gì? Đôi khi chúng ta hay đổi biến (đặt ẩn phụ) để đưa về khảo sát một hàm số đơn giản hơn.

Ví dụ 1.4 ĐH năm 2017 Mã đề 102

Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$, với m là tham số thực, thỏa mãn $\max\limits_{[1;2]} y + \min\limits_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m \leqslant 0$. **B.** $m > 4$. **C.** $0 < m \leqslant 2$. **D.** $2 < m \leqslant 4$.

Hướng dẫn. Điều kiện xác định $x \neq 1$, nên hàm số luôn xác định và liên tục trên đoạn $[1;2]$. Có

$$y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$$

Chỉ có thể xảy ra hai khả năng, nếu $y' > 0$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[1;2]$, do đó $\max\limits_{[1;2]} y = y(2), \min\limits_{[1;2]} y = y(1)$. Ngược lại, nếu $y' < 0$ thì hàm số nghịch biến trên đoạn $[1;2]$, do đó $\max\limits_{[1;2]} y = y(1), \min\limits_{[1;2]} y = y(2)$. Dù cho khả năng nào xảy ra thì $\max\limits_{[1;2]} y, \min\limits_{[1;2]} y$ cũng chỉ có thể nhận hai giá trị $y(1)$ và $y(2)$. Do đó, yêu cầu bài toán tương đương với

$$y(1) + y(2) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{1+m}{2} + \frac{2+m}{3} = \frac{16}{3}$$

Giải phương trình này, tìm được $m = 5$, tức là $m > 4$. ■

Ví dụ 1.5

Tìm m để hàm số $f(x) = -x^4 - 2x^2 + m$ có giá trị lớn nhất trên khoảng $(-2;4)$ bằng 2.

Hướng dẫn. Ta lập được bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	-2		0		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$m-24$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-99$

Suy ra, giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(-2;3)$ là m. Do đó, yêu cầu bài toán tương đương với $m = 2$. ■

Ví dụ 1.6

Xét hàm số $y = \left|x^3 - 3x + 1\right|$ trên đoạn $[0;3]$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là sai?

A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ là 1.

B. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ là 19.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong đoạn $[0;3]$.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = 3$.

Ví dụ 1.7 ĐH Khối B năm 2003

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$.

Hướng dẫn. Tập xác định $\mathbb{D} = [-2; 2]$. Ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho:

x	-2		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

Như vậy $\max f(x) = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, $\min f(x) = f(-2) = -2$. ■

1.3 Tìm điều kiện để hàm số đơn điệu

Bài toán 1.3 Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên tập $\mathbb{K}$.

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên tập $\mathbb{K}$ khi và chỉ khi
  + $y' \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{K}$ nếu dấu của y' *còn* phụ thuộc biến x, chẳng hạn các hàm đa thức bậc ba, bậc bốn.
  + $y' > 0$, $\forall x \in \mathbb{K}$ nếu dấu của y' *không còn* phụ thuộc biến x, chẳng hạn các hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.
- Xét các tình huống sau:
  + Nếu tập $\mathbb{K}$ là $\mathbb{R}$ thì sử dụng định lý dấu tam thức bậc hai.
  + Nếu cô lập được tham số m đưa điều kiện trên về dạng $m \leqslant g(x)$, $\forall x \in \mathbb{K}$ hoặc $m \geqslant g(x)$, $\forall x \in \mathbb{K}$ thì sử dụng nguyên lý cực trị.
  + Nếu không thì lập bảng biến thiên có chứa cả tham số để biện luận.

Lưu ý 1.4 Định lý dấu tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ thì

- $f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leqslant 0. \end{cases}$

- $f(x) \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leqslant 0. \end{cases}$

Lưu ý 1.5 Nguyên lý cực trị

- $m \leqslant g(x),\ \forall x \in \mathbb{K} \Leftrightarrow m \leqslant \min\limits_{\mathbb{K}} g(x),$
- $m \geqslant g(x),\ \forall x \in \mathbb{K} \Leftrightarrow m \geqslant \max\limits_{\mathbb{K}} g(x).$

Ví dụ 1.8

Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Hướng dẫn. Có $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \leqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 3(4m+9) \leqslant 0 \end{cases}$$

Giải hệ này tìm được $-9 \leqslant m \leqslant -3$. Kết hợp điều kiện m nguyên, ta được tất cả 7 giá trị của m. ■

Ví dụ 1.9

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + mx + 1$ nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

A. $m \leqslant -15$. **B.** $m \geqslant -15$. **C.** $m \leqslant -8$. **D.** $m > -8$.

Hướng dẫn. Yêu cầu bài toán tương đương với $y' = x^2 + 2x + m \leqslant 0\ \forall x \in [2; 3]$. Điều này tương đương với

$$m \leqslant \min_{[2;3]} \left(-x^2 - 2x\right) = \min_{[2;3]} f(x)$$

x	2	3
$f'(x)$	$-$	
f	-8 ↘	-15

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = -x^2 - 2x$ trên đoạn $[2; 3]$ và suy ra giá trị cần tìm của m là $m \leqslant -15$. ■

Nhận xét. Bài này có thể sử dụng định lý đảo về dấu tam thức bậc hai, xem ở trang 23, như sau.

- Nhận xét rằng hệ số $a > 0$ nên hàm số chỉ có thể nghịch biến ở khoảng $(x_1; x_2)$ trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.
- Do đó, yêu cầu bài toán trở thành tìm điều kiện để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 \leqslant 2 < 3 \leqslant x_2$. Điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} a \cdot y'(2) \leqslant 0 \\ a \cdot y'(3) \leqslant 0. \end{cases}$$

Giải hệ bất phương trình này cũng tìm được đáp số như cách trên. ■

Ví dụ 1.10

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trong khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m \leqslant -1$. **B.** $m \leqslant 2$. **C.** $m \leqslant 1$. **D.** $m \leqslant 0$.

Ví dụ 1.11

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$ nghịch biến trên $(2; 3)$.

A. $1 < m < 2$. **B.** $m \geqslant 2$. **C.** $m < 1$. **D.** $1 \leqslant m \leqslant 2$.

Hướng dẫn. Yêu cầu bài toán tương đương với $y' = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m \leqslant 0$, $\forall x \in (2; 3)$. Rõ ràng chúng ta không cô lập được tham số m nên phải đưa về việc lập bảng biến thiên. Phương trình $y' = 0$ luôn luôn có nghiệm $x_1 = m < x_2 = m + 2$ nên ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;3)$ khi và chỉ khi khoảng $(2;3)$ là tập con của khoảng $(m, m+2)$. Nghĩa là

$$\begin{cases} m \leqslant 2 \\ 3 \leqslant m+2 \end{cases}$$

Từ đó tìm được đáp số $1 \leqslant m \leqslant 2$. ■

Ví dụ 1.12

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{x^2+4mx+4m^2+3}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$?

A. $m > -1$. **B.** $m < 2$. **C.** $m < -1$. **D.** $m > 2$.

Hướng dẫn. Hàm số luôn xác định và liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó, ta sẽ tìm điều kiện để hàm số luôn nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty;2]$. Ta có

$$y' = \frac{x+2m}{\sqrt{x^2+4mx+4m^2+3}}.$$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$ khi và chỉ khi

$$y' \leqslant 0, \forall x \leqslant 2 \Leftrightarrow x+2m \leqslant 0, \forall x \leqslant 2.$$

Từ đó tìm được đáp số $m \leqslant -1$. ■

Ví dụ 1.13

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{-\cos x + m}{\cos x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m > 0$ hoặc $m \leqslant -1$. **C.** $m > 0$.

B. $m \geqslant 1$. **D.** $m \leqslant -1$.

Hướng dẫn. Đặt $t = \cos x$ thì ta thấy hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, nên hàm số đã cho đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y = \frac{-t+m}{t+m}$ nghịch biến trên $(0;1)$. Điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} y' = \frac{-2m}{(t+m)^2} < 0 \\ -m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Như vậy, ta chọn đáp án C. ■

Nhận xét. Bài này có thể làm trực tiếp mà không cần đặt ẩn phụ. Sử dụng công thức tính đạo hàm của hàm số hợp, ta tìm được

$$y' = \frac{-2m}{(\cos x + m)^2} \cdot (-\sin x) \, .$$

Chú ý rằng trong khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ thì $\sin x > 0$, nên yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} \frac{2m}{(\cos x + m)^2} > 0 \\ \cos x + m \neq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Từ đó cũng tìm được đáp số như trên. ■

1.4 Cực trị của hàm số

Bài toán 1.4 Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

- Đối với một hàm số cụ thể, ta lập bảng xét dấu của đạo hàm và kết luận.
- Đối với hàm ẩn, muốn x_0 thuộc tập xác định là một điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì phải thỏa mãn hai điều kiện:

  + $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định tại x_0.
  + $f'(x)$ phải đổi dấu khi đi qua x_0, nếu đổi dấu từ dương sang âm (tức là hàm số chuyển từ đồng biến sang nghịch biến) thì x_0 là điểm cực đại; đổi dấu từ âm sang dương thì x_0 là điểm cực tiểu. Cũng có thể sử dụng đến đạo hàm cấp hai, $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại; còn $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu. ■

Lưu ý 1.6

Cần phân biệt rõ ba khái niệm *điểm cực trị của hàm số, điểm cực trị của đồ thị hàm số* và *giá trị cực trị của hàm số.*

Lưu ý 1.7

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của

- Đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ chính là phần dư khi chia y cho y'. Thực hiện phép chia, ta được $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{b}{9a}\right) + mx + n$ thì đường thẳng cần tìm chính là $y = mx + n$. Cách tìm nhanh như sau:

  + Ta nhận thấy $mx + n = y - y' \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{b}{9a}\right)$.

+ Sử dụng máy tính, viết hàm $y - y' \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{b}{9a}\right)$ rồi **CALC** tại $x = 0$ tìm được n, **CALC** tiếp tại $x = 1$ thu được $m + n$ và từ đó tìm được m.

- Đồ thị hàm số phân thức bậc hai chia bậc nhất $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e} = \frac{u(x)}{v(x)}$ chính là $y = \frac{u'(x)}{v'(x)}$.

Ví dụ 1.14

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4.

Ví dụ 1.15

Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. Tính diện tích S của tam giác ABC.

A. $S = 1$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = 3$. **D.** $S = 4$.

Ví dụ 1.16

Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Đáp số. $y = -2x + 2$. ■

Ví dụ 1.17

Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$.

Đáp số. là $y = -\frac{16}{3}x + \frac{8}{3}$. ■

Ví dụ 1.18

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - x + 4$ là...

Ví dụ 1.19 ĐH năm 2017 Mã đề 101

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $P(1; 0)$. **B.** $M(0; -1)$. **C.** $N(1; -10)$. **D.** $Q(-1; 10)$.

Ví dụ 1.20 ĐH năm 2017 Mã đề 103

Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B. Tính diện tích S của tam giácOAB với O là gốc tọa độ.

A. $S = 9$. **B.** $S = \frac{10}{3}$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = 10$.

Ví dụ 1.21

Hàm số $y = \sin x - 2\cos x$ có bao nhiêu cực trị trên đoạn $[-\pi, \pi]$?

Ví dụ 1.22

Hàm số $y = \sin x - x$ có bao nhiêu cực trị trên đoạn $[0, 10]$?

1.5 Tìm điều kiện để hàm số đạt cực trị tại điểm cho trước

Bài toán 1.5 Tìm điều kiện của m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0.

- **Điều kiện cần.** Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định. Từ đó tìm được giá trị của m.
- **Điều kiện đủ.** Với m vừa tìm được, thay vào hàm số đã cho và tìm cực trị của nó để kiểm tra. ■

Ví dụ 1.23

Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$. Xác định m để hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

Cách 1. Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$, $y'' = 2x - 2m$.

- **Điều kiện cần:** Giả sử hàm số đạt cực đại tại $x = 1$. Suy ra $f'(1) = 0 \Leftrightarrow m = 1, m = 2$.

- **Điều kiện đủ:**

  + Với $m = 1$ hàm số đã cho trở thành $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$. Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$y'(x)$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

  Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy hàm số *không đạt cực đại* tại $x = 1$. Do đó, $m = 1$ không thỏa mãn yêu cầu.

  + Với $m = 2$ hàm số đã cho trở thành $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

  Ta thấy, khi $m = 2$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = 2$. ■

Cách 2. Ta xét hai trường hợp:

- Khi $y''(1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì hàm số trở thành $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$. Lập bảng biến thiên như *Cách 1* và khẳng định $m = 1$ không thỏa mãn yêu cầu.

- Khi $y''(1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Kết hợp hai trường hợp được đáp số $m = 2$. Vậy với $m = 2$ thì hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 1$. ■

Ví dụ 1.24 ĐH năm 2017 Mã đề 102

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = 1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 5$. **D.** $m - 7$.

Ví dụ 1.25

Tìm m để hàm số $y = \frac{mx^2+x+m}{x-1}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Hướng dẫn. Tập xác định $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = \frac{mx^2-2mx-1-m}{(x-1)^2}$.

- Điều kiện cần: Giả sử hàm số đạt cực đại tại $x = 2$. Suy ra $y'(2) = 0 \Leftrightarrow m = -1$.
- Điều kiện đủ: Khi $m = -1$ hàm số đã cho trở thành $y = \frac{-x^2+x-1}{x-1}$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Vậy với $m = -1$ thì hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 2$. ■

1.6 Tìm điều kiện để hàm số có cực trị

Bài toán 1.6 Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x)$ có cực trị.

Tổng quát, muốn hàm số có cực trị thì đạo hàm phải có nghiệm và phải đổi dấu khi đi qua nghiệm này. Ở đây chúng ta xét ba loại hàm thường gặp.

- Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a \neq 0$, thì đạo hàm y' là tam thức bậc hai nên có hai khả năng:

  + Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép thì hàm số không có trị.
  + Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì hàm số có hai điểm cực trị.

  Như vậy, hàm số bậc ba chỉ có hai tình huống *không có cực trị* và *có cực trị*, nếu có thì sẽ có hai điểm cực trị, gồm một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

- Hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$, với $a \neq 0$, thì phương trình $y' = 0$ tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a}. \quad (*) \end{array}\right.$$

  Phương trình $y' = 0$ này luôn có nghiệm $x = 0$ nên ta có hai khả năng:

+ Phương trình $(*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, nghiệm kép này cũng bằng 0, thì hàm số có một điểm cực trị.

+ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt, thì hàm số có ba điểm cực trị.

Như vậy, hàm số bậc bốn trùng phương luôn luôn có cực trị, có thể có một hoặc ba điểm cực trị.

- Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất thì không có cực trị. ■

Ví dụ 1.26

Tìm điều kiện để hàm số $y = \frac{x^2+2mx+1}{x-1}$ có cực trị?

Hướng dẫn. Điều kiện xác định $x \neq 1$. Ta có $y' = \frac{x^2-2x-2m-1}{(x-1)^2}$ nên

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-2m-1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x - 2m - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Đặt $g(x) = x^2 - 2x - 2m - 1$. Hàm số đã cho có cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 > 0 \\ -2m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$$

Vậy với $m > -1$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu. ■

Ví dụ 1.27

Tìm điều kiện để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + m - 1$ có cực trị?

Hướng dẫn. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$ nên

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0 \tag{1}$$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$$

Vậy với $m < 3$ thì hàm số luôn có cực đại và cực tiểu. ■

Ví dụ 1.28

Tìm điều kiện để hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 - m$ có cực đại, cực tiểu?

Hướng dẫn. Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1)$ nên

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m + 1 \quad (*) \end{array}\right.$$

Do đó, hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

Vậy với $m < -1$ thì hàm số luôn có cực đại và cực tiểu. ■

Ví dụ 1.29 ĐH Khối B năm 2002

Tìm m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có ba điểm cực trị?

Đáp số. $m < -3$ hoặc $0 < m < 3$. ■

Ví dụ 1.30

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2 - \sqrt{12}x + \frac{1}{4}(b + 3a)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm $f(x)$ số luôn có hai cực trị với a, b là các số nguyên không âm thỏa mãn $3b - a \leqslant 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a + b$.

A. 1. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 6.

Hướng dẫn. Ta có $y' = x^2 - \sqrt{b}x - \frac{3}{4}a + 3$. Hàm số luôn có hai cực trị khi và chỉ khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 12 - b - 3a > 0.$$

Như vậy các số nguyên a và b thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \\ 3b - a \leqslant 6 \\ b + 3a < 12 \end{cases}$$

Biểu diễn các bất phương trình này lên hệ trục tọa độ Oab ta sẽ được miền tứ giác $OABC$ với $O(0;0)$, $A(0;2)$, $B(3;3)$, $C(4;0)$. Trong số các điểm có tọa độ nguyên thuộc miền tứ giác $OABC$ thì có điểm $M(3;2)$ làm biểu thức P đạt giá trị lớn nhất, và giá trị lớn nhất đó là $P_{max} = 2.3 + 2 = 8$. ■

1.7 Tìm điều kiện để hàm số có cực trị thỏa mãn yêu cầu cho trước

Bài toán 1.7 Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x)$ có cực trị thỏa mãn yêu cầu cho trước.

Đối với bài toán này, trước tiên ta tìm điều kiện để hàm số có cực trị đã. Sau đó, nếu phương trình $y' = 0$ có nghiệm đẹp thì ta tìm cụ thể các nghiệm này, nếu không thì gọi các nghiệm là x_1, x_2 và sử dụng Viète.

Ví dụ 1.31 CĐ năm 2009

Tìm m để hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu có hoành độ dương?

Hướng dẫn. Tập xác định $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Có $y' = 3x^2 - 2(2m-1)x + (2-m)$ nên phương trình $y' = 0$ tương đương với

$$3x^2 - 2(2m-1)x + (2-m) \tag{2}$$

Hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu có hoành độ dương $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ 2m - 1 > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2$$

Vậy đáp số cần tìm là $\frac{5}{4} < m < 2$. ■

Ví dụ 1.32 ĐH Khối D năm 2012

Tìm m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2\left(3m^2 - 1\right)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

Hướng dẫn. Có $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1)$ nên phương trình $y' = 0$ tương đương với

$$2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1) \tag{3}$$

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -\frac{2}{\sqrt{13}}) \cup (\frac{2}{\sqrt{13}}, +\infty)$$

Khi đó, x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (3) và theo Viète ta có $x_1 + x_2 = m$ và $x_1x_2 = 1 - 3m^2$ Do đó, yêu cầu của đề bài $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$ tương đương với

$$1 - 3m^2 + 2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3} \text{ hoặc } m = 0$$

Kết hợp điều kiện được đáp số $m = \frac{2}{3}$. ■

Ví dụ 1.33

Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-2)x^2 + (m-2)x + \frac{1}{3}m^2$ có hai điểm cực trị nằm về phía bên phải trục tung?

1. $m > 2$
2. $m > 3 \vee m < 2$
3. $m > 3$
4. $m < 2$

Hướng dẫn. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, những điểm nằm về bên phải trục tung nghĩa là những điểm này có đặc điểm gì? Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục tung nghĩa là hoành độ của chúng dương? Hoành độ tìm được từ đâu?
Mở rộng bài toán, hai điểm cực trị nằm về bên trái trục tung, nằm về hai phía đối với trục tung. ■

Ví dụ 1.34

Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3(m-1)$ luôn có hai điểm cực trị. Giả sử hai điểm cực trị này là A, B. Tìm m để $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20$ với O là gốc tọa độ.

Hướng dẫn. Chỉ ra $A(0, 3m-3)$ và $B(2, -m-3)$ và tìm được $m = 1, m = -\frac{17}{11}$. ■

Ví dụ 1.35

Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$. Xác định m để hàm số có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của tam giác vuông cân.

Hướng dẫn. Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x(x^2 - m^2)$ nên

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - m^2 = 0 \quad (*) \end{array} \right.$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m \neq 0$
Khi đó, ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$A(0;1), B(m;-m^4+1), C(-m;-m^4+1)$$

Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (m;-m^4) \Rightarrow AB = \sqrt{m^2+m^8}$$
$$\overrightarrow{AC} = (-m;-m^4) \Rightarrow AC = \sqrt{m^2+m^8}$$

Vì ΔABC cân tại A nên 3 điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác vuông cân khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m^2+m^8 = 0 \Leftrightarrow m^2(m^6-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện, được đáp số $m = \pm 1$. ■

Ví dụ 1.36

Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + \left(m^2-3\right)x$ có cực đại x_1, cực tiểu x_2 và x_1, x_2 là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Hướng dẫn. Tập xác định $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Có $y' = x^2 - mx + m^2 - 3$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$
Vì y' là một tam thức bậc hai nên hàm số có cực đại x_1, cực tiểu x_2 thỏa yêu cầu bài toán khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ m > 0 \\ m^2 - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} < m < 2$$

Khi đó, áp dụng Viète ta được

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = 5 \Leftrightarrow 2m^2 - 4(m^2-3) = 5 \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}$$

Đối chiếu điều kiện ở trên ta có giá trị $m = \frac{\sqrt{14}}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán ■

Ví dụ 1.37

Tìm m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ có cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $d : x + 8y - 74 = 0$.

Hướng dẫn. Có $y' = -3x^2 + 6mx = 0$ nên đồ thị hàm số có cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$. Suy ra, một điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; -3m - 1)$. Yêu cầu bài toán tương đương với trung điểm I của hai điểm cực trị của đồ thị hàm số phải nằm trên đường thẳng d và $IA \perp d$. Mà I cũng chính là điểm uốn của đồ thị hàm số, nên có $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$. Do đó, điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} \overrightarrow{AI} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ m + 8(2m^3 - 3m - 1) - 74 = 0 \end{cases}$$

Từ đó tìm được $m = 2$. ■

Lưu ý 1.8

Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương luôn tạo thành một tam giác cân.

Ví dụ 1.38 ĐH Khối A năm 2012

Tìm m để ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m^2$ tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

Hướng dẫn. Ta có $y' = 4x^3 - 4(m + 1)x = 4x(x^2 - m - 1)$. Do đó, đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > -1$. Khi đó, ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$A(0, m^2), B(\sqrt{m + 1}, -2m - 1) \text{ và } C(-\sqrt{m + 1}, -2m - 1)$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{m + 1}, -(m + 1)^2), \overrightarrow{AC} = (\sqrt{m + 1}, -(m + 1)^2)$. Nhận thấy tam giác ABC cân tại A nên tam giác ABC vuông khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow (m + 1)^4 - (m + 1) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = -1$$

Kết hợp điều kiện được đáp số $m = 0$. ■

Ví dụ 1.39

Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm này tạo thành một tam giác đều.

Hướng dẫn. Có $y' = 4x^3 - 4(m-2)x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = m - 2$. Suy ra, đồ thị hàm số có cực đại và cực tiểu

$$\Leftrightarrow m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2.$$

Khi đó, ba điểm cực trị là $A(0, m^2 - 5m + 5)$, $B(\sqrt{m-2}, 1-m)$ và $C(-\sqrt{m-2}, 1-m)$ tạo thành một tam giác cân tại A. Do đó, yêu cầu bài toán tương đương với

$$\widehat{A} = 60^\circ \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{1}{2}$$

Từ đó tìm được đáp số $m = 2 + \sqrt[3]{3}$. ■

Ví dụ 1.40

Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 - 4$, m là tham số thực. Xác định m để đồ thị hàm số đã cho có 3 cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Hướng dẫn. TXĐ: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$, nên $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Suy ra, đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.
Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$A(0; 2m^2 - 4); B(\sqrt{m}; m^2 - 4); C(-\sqrt{m}; m^2 - 4).$$

Ta thấy B, C đối xứng qua Oy và A thuộc Oy nên ΔABC cân tại A. Do đó, gọi H là trung điểm BC thì $AH \perp BC$ và có

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH.BC \Leftrightarrow 2 = |y_B - y_A| . |2x_B| \Leftrightarrow 2 = 2m^2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 1.$$

Đối chiếu với điều kiện được $m = 1$ là giá trị cần tìm. ■

Ví dụ 1.41

Tìm m để ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - m - 1$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

Hướng dẫn. Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m < 0$. Khi đó, ba điểm cực trị là

$$A(0; -m-1), B(\sqrt{-m}; -m^2-m-1), C(-\sqrt{-m}; -m^2-m-1).$$

Gọi I là trung điểm BC thì

$$S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} IA.BC = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m = -2.$$

So sánh điều kiện được đáp số $m = -2$. ■

Ví dụ 1.42

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m = \frac{-1}{\sqrt[3]{9}}$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m = 1$.

Hướng dẫn. Trước tiên ta tìm điều kiện để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị, tức là phương trình $y' = 0$ phải có ba nghiệm phân biệt.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2+m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \end{array}\right.$$

Do đó, phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$. Lúc này, ta đã loại được hai phương án C và D và đồng thời tính được toạ độ ba điểm cực trị là

$$A(0; 1), B(-\sqrt{-m}; -m^2+1), C(\sqrt{-m}; -m^2+1)$$

Từ đó tìm được $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{-m}; -m^2), \overrightarrow{AC} = (\sqrt{-m}; -m^2)$. Rõ ràng tam giác ABC chỉ có thể vuông cân tại A, tức là $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

So sánh điều kiện được đáp số cuối cùng là $m = -1$. ■

Bài này sau khi loại được hai phương án C và D, ta cũng có thể chọn một phương án (nên chọn phương án $m = -1$) để thay vào và tìm cụ thể toạ độ các điểm cực trị, rồi kiểm tra xem có tạo thành một tam giác vuông hay không. Cách này có vẻ sẽ nhanh hơn.

Ví dụ 1.43

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 + m - 1)x$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 + x_2| = 4$.

A. $m = 2$. B. $m \in \varnothing$. C. $m = -2$. D. $m = \pm 2$.

Bài này có thể làm xuôi, tức là tìm ra giá trị của m rồi so sánh với các phương án. Hoặc, chủ động thay các giá trị của m trong các phương án vào và kiểm tra. Chúng ta sẽ cùng tìm hiểu cả hai cách.

Cách 1. Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 + m - 1$. Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Điều kiện cần và đủ là

$$\Delta' = m^2 - (m^2 + m - 1) > 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Khi đó, phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo Viète có $x_1 + x_2 = -b/a = m$, nên yêu cầu bài toán trở thành $|2m| = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$. So sánh với điều kiện được đáp số $m = -2$. ■

Cách 2. Ta sẽ lần lượt thử với $m = 2$ và $m = -2$. Với $m = 2$ hàm số trở thành

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x$$

Có $y' = x^2 - 4x + 5$. Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm nên loại $m = 2$. Với $m = -2$ thì làm tương tự ta thấy thỏa mãn yêu cầu. Tóm lại, chúng ta chọn đáp án $m = -2$. ■

Ví dụ 1.44

Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

A. $m = 0$. B. $m = \sqrt[3]{3}$. C. $m = -\sqrt[3]{3}$. D. $m = \sqrt{3}$.

Ví dụ 1.45

Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + 2m - 1$ có đồ thị là (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C_m) có 3 điểm cực trị cùng với gốc tọa độ tạo thành một hình thoi.

A. $m = \pm 1 + \sqrt{2}$. B. $m = 2 \pm \sqrt{2}$ C. $m = 4 \pm \sqrt{2}$. D. $m \in \varnothing$.

Hướng dẫn. Đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$. Khi đó, ta có ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$A\left(0; 2m-1\right), B\left(\sqrt{\frac{m}{2}}; -\frac{m^2}{4} + 2m - 1\right), C\left(-\sqrt{\frac{m}{2}}; -\frac{m^2}{4} + 2m - 1\right).$$

Yêu cầu bài toán tương đương với $OB = AB \Leftrightarrow \frac{m^4}{16} = \left(-\frac{m^2}{4} + 2m - 1\right)^2 \Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{2}$. ■

Ví dụ 1.46

Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + m^2 - m$ có các điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $-1 < x_1 < x_2$

A. $(-\infty; -2)$

B. $\left(-\frac{7}{2}; -2\right)$

C. $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

D. $\left(-\frac{7}{2}; -3\right)$

Hướng dẫn. Ta có $y' = x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)$. Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Điều kiện cần và đủ là $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.
Khi đó, giả sử hai điểm cực trị là x_1, x_2 thì theo Viète ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+3) \\ x_1 \cdot x_2 = 4(m+3) \end{cases}$$

Mặt khác, điều kiện $-1 < x_1 < x_2$ có thể viết lại thành

$$\begin{cases} (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này được $m \in \left(-\frac{7}{2}; -2\right)$. Kết hợp điều kiện ta được đáp số $m \in \left(-\frac{7}{2}; -3\right)$. ■

Nhận xét. Thực ra, bài này có thể sử dụng định lý đảo về dấu tam thức bậc hai. Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và số -1 nằm bên trái khoảng hai nghiệm. Điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(-1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} \end{cases}$$

Giải hệ này cũng tìm được đáp số như trên. ■

Lưu ý 1.9 Định lý đảo về dấu tam thức bậc hai

Xét tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và một số thực ϵ. Khi $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, giả sử thêm rằng $x_1 < x_2$, thì

- $x_1 < \epsilon < x_2 \Leftrightarrow a \cdot f(\epsilon) < 0$, tức là số ϵ nằm trong khoảng hai nghiệm.

- $\epsilon < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\epsilon) > 0, \\ \epsilon < \frac{S}{2} \end{cases}$ tức là số ϵ nằm ngoài, ở bên trái khoảng hai nghiệm.

- $x_1 < x_2 < \epsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\epsilon) > 0, \\ \epsilon < \frac{S}{2} \end{cases}$ tức là số ϵ nằm ngoài, ở bên phải khoảng hai nghiệm.

Tương tự, ta cũng có

$$x_1 \leqslant \epsilon \leqslant x_2 \Leftrightarrow a \cdot f(\epsilon) \leqslant 0$$

1.8 Tiệm cận của đồ thị hàm số

Bài toán 1.8 Tiệm cận của đồ thị hàm số

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nếu

$$\lim_{x \to x_0} y = \infty$$

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nếu

$$\lim_{x \to \infty} y = y_0 \neq \infty$$

Chú ý rằng, trong các công thức trên không cần phân biệt $+\infty$ hay $-\infty$.

Lưu ý 1.10

Để tính được các giới hạn trong bài toán tiệm cận, chủ yếu dùng hai công thức sau.

- $\lim \frac{1}{\infty} = 0$ và $\lim \frac{1}{0} = \infty$.

- Quy tắc L'Hospital để khử các dạng vô định

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Lưu ý 1.11

Chú ý rằng một đường tiệm cận vẫn có thể cắt đồ thị hàm số, ví dụ hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$, nhưng vẫn cắt đường tiệm cận ngang này tại $x = -\frac{4}{3}$.

Ví dụ 1.47 Đề thử nghiệm 2017

Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

A. $x = 1$. **B.** $y = -1$. **C.** $y = 2$. **D.** $x = -1$.

Ví dụ 1.48 ĐH năm 2017 Mã đề 101

Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn. Trước hết ta cần phải xác định rõ yêu cầu, ở đây là tìm số tiệm cận đứng, do đó ta sẽ đi tính các giới hạn dạng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ trong đó x_0 là nghiệm của mẫu. ■

Ví dụ 1.49 ĐH năm 2017 Mã đề 104

Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có bao nhiêu tiệm cận?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn. Rõ ràng, ở câu này, chúng ta phải tìm cả tiệm cận đứng và tiệm cận ngang. Tức là phải đi tính cả các giới hạn dạng $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. ■

Ví dụ 1.50 ĐH năm 2017 Mã đề 102

Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn. Trước hết ta cần phải xác định rõ yêu cầu, ở đây là tìm số tiệm cận đứng, do đó ta sẽ đi tính các giới hạn dạng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ trong đó x_0 là nghiệm của mẫu. ■

Ví dụ 1.51 ĐH năm 2017 Mã đề 103

Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. **C.** $y = \frac{1}{x^4+1}$.

B. $y = \frac{1}{x^2+x+1}$. **D.** $y = \frac{1}{x^2+1}$.

Hướng dẫn. Ta cần lần lượt đi tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ trong đó $f(x)$ lần lượt là các hàm đã cho ở bốn phương án. Nhưng muốn có giới hạn này, phải tìm được các số x_0, do đó, mục tiêu của ta là đi tìm xem trong các hàm số đã cho, hàm số nào có số x_0 làm cho mẫu không xác định. Hiển nhiên, ở đây chỉ có hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. ■

Ví dụ 1.52

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$.

Hướng dẫn. Chúng ta thấy bậc cao nhất của cả tử và mẫu là 1, nên ta chia cả tử và mẫu cho x được

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

Suy ra, đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$. ■

Trong ví dụ trên, chúng ta không thể tính chung khi $x \to \infty$ được. Mà phải phân biệt khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$ vì với mỗi một trường hợp, ta có thể thu được một tiệm cận ngang khác nhau.

Ví dụ 1.53 Đề minh hoạ 2017

Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Ví dụ 1.54

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m = 0$. **B.** $m = 0; m = 1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m \in \varnothing$.

Hướng dẫn. Nghiệm của mẫu số là $x = m$. Yêu cầu bài toán tương đương với tử số phải có nghiệm là m. Từ đó tìm được đáp số $m = 0, m = 1$. ■

Ví dụ 1.55

Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. $m = 0$. **B.** $m < 0$. **C.** $m > 0$. **D.** $m > 3$.

Ví dụ 1.56

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2mx+m}{x-1}$ cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8?

A. $m = 2$. **B.** $m = \pm\frac{1}{2}$. **C.** $m = \pm 4$. **D.** $m \neq \pm 2$.

Hướng dẫn. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2m$. Hai đường thẳng này cùng với hai trục toạ độ tạo thành một hình chữ nhật có các cạnh bằng 1 và $|2m|$. Do đó, diện tích hình chữ nhật này bằng 8 tương đương với $|2m| = 8 \Leftrightarrow m = \pm 4$. ■

Ví dụ 1.57

Tìm phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$.

Hướng dẫn. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 1$ và hai tiệm cận đứng $x = \pm 2$. ■

Ví dụ 1.58

Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

Hướng dẫn. Rõ ràng đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$. Để tìm các tiệm cận ngang, ta đi tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, từ đó tìm được thêm hai tiệm cận ngang nữa. Như vậy, đồ thị hàm số đã cho có *ba* đường tiệm cận. ■

Ví dụ 1.59 Đề thử nghiệm 2017

Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$$

A. $x = -3$ và $x = -2$.

B. $x = -3$.

C. $x = 3$ và $x = 2$.

D. $x = 3$.

Ví dụ 1.60 Đề tham khảo 2017

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2			0		$+\infty$
$y'(x)$		$\Vert$	$+$		$\Vert$	$-$	
y		$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	1 $\searrow$	0

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Ví dụ 1.61

Tìm m để đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

Đáp số. $m = 0; m = 1$ ■

Ví dụ 1.62 Đề minh hoạ 2017

Tìm m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

Đáp số. $m > 0$. ■

Ví dụ 1.63

Đồ thị hàm số $y = \frac{\ln(x-1)}{x^2+x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

Hướng dẫn. Ta thấy ngay, đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$. Chúng ta sẽ sử dụng quy tắc L'Hospital để tính giới hạn, từ đó tìm được tiệm cận ngang – nếu có – của đồ thị hàm số. Ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-1)}{x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x-1))'}{(x^2+x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x-1}}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x-1)(2x+1)} = 0$$

Suy ra, đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$. Và do đó, nó có hai đường tiệm cận. ■

Ví dụ 1.64

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{m^2x^2+m-1}}$ có bốn đường tiệm cận.

A. $m \in (1; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; 1) \setminus \left\{0; \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

C. $m \in (-\infty; 1)$.

D. $m \in (-\infty; 0)$.

Hướng dẫn. Nếu $m = 0$ thì hàm số không xác định. Do đó, điều kiện trước tiên là $m \neq 0$. Khi đó có

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{m^2+\frac{m-1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m^2}};\ \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{m^2+\frac{m-1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m^2}}$$

Suy ra đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.
Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $m^2x^2 = 1-m$ có 2 nghiệm phân biệt và khác -1. Điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} m^2+m-1\neq 0 \\ 1-m>0 \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m\neq \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \\ m\neq 0 \end{cases}$$

Như vậy, ta chọn phương án B. ■

1.9 Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Bài toán 1.9 Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số $(\mathcal{C}): y = f(x)$.

Chúng ta xét ba tình huống:

- Biết tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$ thì tính $f'(x_0)$ và thay luôn vào phương trình
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{4}$$
- Biết hệ số góc bằng k. Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$ và đi giải phương trình
$$f'(x_0) = k$$
tìm được x_0 rồi thay vào phương trình (4).
- Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(a, b)$, chú ý rằng điểm này không biết có là tiếp điểm hay không. Khi đó ta thực hiện các bước:
  + Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$, lưu ý là $y_0 = f(x_0)$.
  + Tính đạo hàm và suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(x_0)$, từ đó viết được phương trình tiếp tuyến có dạng $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
  + Vì tiếp tuyến đi qua $A(a, b)$ nên ta có phương trình
  $$b - f(x_0) = f'(x_0)(a - x_0)$$
  Giải phương trình trên, tìm được x_0 và từ đó viết được phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Lưu ý 1.12

- Cho đường thẳng $\Delta : y = ax + b$ thì
  + a là hệ số góc, được tính bởi $a = \tan\alpha$ – trong đó α là góc tạo bởi tia Ox và đường thẳng Δ lấy theo chiều dương;
  + b là hệ số tự do.
- Hai đường thẳng song song nếu hệ số góc bằng nhau và hệ số tự do khác nhau.
- Hai đường thẳng vuông góc nếu tích các hệ số góc của chúng bằng -1.

Ví dụ 1.65

Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 1$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

Ví dụ 1.66 CĐ2010

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

Đáp số. $y = -3x - 2$. ■

Ví dụ 1.67 D2005

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ có đồ thị là (C_m) và điểm $M \in (C_m)$, biết rằng $x_M = -1$, tìm m để tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

Đáp số. $m = 4$. ■

Ví dụ 1.68

Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$.Tìm m để các tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại các điểm $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$ vuông góc với nhau.

Đáp số. $m = \frac{5}{4}$; $m = \frac{3}{4}$. ■

Ví dụ 1.69

Tìm a và b để đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ cắt trục Oy tại điểm $M(0; -1)$ đồng thời tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M có hệ số góc $k = 3$.

Đáp số. $a = -4; b = 1$. ■

Ví dụ 1.70

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng có phương trình $y = 2016 - 3x$

Hướng dẫn. Gọi tiếp điểm là $M(x_0, y_0)$ thì hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$. Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2016 - 3x$ nên

$$3x_0^2 - 6x_0 = -3$$
$$\Leftrightarrow x_0 = 1$$

Do đó $y_0 = 0$ và phương trình tiếp tuyến là $y = -3x + 3$. ■

Ví dụ 1.71

Giả sử M là một điểm có tung độ bằng 5, thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục toạ độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Hãy tính diện tích tam giác OAB.

A. $\frac{121}{6}$ **B.** $\frac{119}{6}$ **C.** $\frac{123}{6}$ **D.** $\frac{125}{6}$

Ví dụ 1.72

Tìm tất cả các giá trị m sao cho trên đồ thị

$$(C_m) : y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$$

tồn tại đúng hai điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $(d) : x + 2y - 3 = 0$.

Hướng dẫn. Ta có $y' = mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m$. Gọi $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm cần tìm thì tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $(d) : x + 2y - 3 = 0$ khi và chỉ khi phương trình $y'(x_0) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt. Nghĩa là phương trình $mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt. Điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4m^2 - 4m + 1 > 0 \\ \frac{m-1}{m} < 0 \\ \frac{2-3m}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \\ 0 < m < \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < m < \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Vậy $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ là các giá trị cần tìm. ■

Ví dụ 1.73

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-2}$ biết tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B mà tam giác OAB thỏa mãn $AB = OA\sqrt{2}$.

Hướng dẫn. Giả sử $M(x_0; y_0)$, với $x_0 \neq 2$, là một điểm thuộc đồ thị hàm số. Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại điểm M có dạng:

$$y - \frac{2x_0}{x_0 - 2} = \frac{-4}{(x_0 - 2)^2}(x - x_0).$$

Do tiếp tuyến cắt các trục Ox, Oy tại các điểm A, B và tam giác OAB có $AB = OA\sqrt{2}$ nên tam giác OAB vuông cân tại O. Khi đó tiếp tuyến d tạo với tia Ox một góc $45°$ hoặc $135°$.

- Tiếp tuyến d tạo với tia Ox một góc $45°$, thì hệ số góc của tiếp tuyến là 1. Do đó, ta có phương trình $y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-2)^2} = 1$. Phương trình này vô nghiệm.

- Tiếp tuyến d tạo với tia Ox một góc $135°$, thì hệ số góc của tiếp tuyến là -1. Do đó, ta có phương trình

$$y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0 - 2)^2} = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 4 \end{array} \right.$$

  Từ đó tìm được, phương trình tiếp tuyến là $\left[\begin{array}{l} d: y = -x \\ d: y = -x + 8 \end{array} \right.$

Đường thẳng $y = -x$ đi qua gốc tọa độ nên bị loại. Như vậy chỉ có một tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán là $d: y = -x + 8$. ■

Ví dụ 1.74

Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị biết tiếp tuyến cắt Ox, Oy tại A, B sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác OAB lớn nhất.

Hướng dẫn. Tiệm cận đứng: $x = -1$, tiệm cận ngang: $y = 1$, giao điểm hai đường tiệm cận là $I(-1; 1)$. Giả sử hoành độ tiếp điểm là x_0 thì phương trình tiếp tuyến là:

$$y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0-2}{x_0+1}$$

Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng tại điểm $A\left(-1; \frac{x_0-5}{x_0+1}\right)$ và cắt tiệm cận ngang tại điểm $B(2x_0+1; 1)$. Từ đó tính được

$$IA = \left|\frac{x_0-5}{x_0+1} - 1\right| = \frac{6}{|x_0+1|}, IB = |2x_0 + 1 - (-1)| = 2|x_0+1|$$

Suy ra diện tích tam giác IAB là

$$S = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{|x_0+1|} \cdot 2\,|x_0+1| = 6.$$

Gọi p là nửa chu vi tam giác IAB, thì bán kính đường tròn nội tiếp tam giác này là:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{6}{p}$$

Bởi vậy, bán kính r lớn nhất khi và chỉ khi p nhỏ nhất. Mặt khác, tam giác IAB vuông tại I nên:

$$2p = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \geqslant 2\sqrt{IA.IB} + \sqrt{2IA.IB} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $IA = IB \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 3 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$

- Với $x = -1 - \sqrt{3}$ ta có tiếp tuyến: $d_1 : y = x + 2\left(1 + \sqrt{3}\right)$.
- Với $x = -1 + \sqrt{3}$ ta có tiếp tuyến: $d_1 : y = x + 2\left(1 - \sqrt{3}\right)$.

Như vậy, ta tìm được hai tiếp tuyến có phương trình như trên. ∎

Ví dụ 1.75

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1; 4)$.

Ví dụ 1.76 ĐH Sư phạm II - Khối B năm 99

Tìm trên trục hoành những điểm mà từ đó kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số
$$y = -x^3 + 3x + 2$$

Hướng dẫn. Gọi $A(a; 0)$ bất kì thuộc trục hoành và $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$\begin{aligned} & y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \\ \Leftrightarrow\ & y = (-3x_0^2 + 3)(x - x_0) - x_0^3 + 3x_0 + 2 \end{aligned}$$

Mà tiếp tuyến đi qua $A(a; 0)$ nên

$$\begin{aligned} & (-3x_0^2 + 3)(a - x_0) - x_0^3 + 3x_0 + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x_0 + 1)(2x_0^2 - (3a + 2)x_0 + 3a + 2) = 0 \end{aligned}$$

Từ A kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số khi và chỉ khi phương trình $2x_0^2 - (3a + 2)x_0 + 3a + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 6(a + 1) \neq 0 \end{cases}$$

Tìm được đáp số $a > 2$ hoặc $-1 \neq a < -\frac{2}{3}$. ■

Ví dụ 1.77

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. Tìm điểm điểm M thuộc đồ thị hàm số sao cho qua điểm M kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số mà tích các hệ số góc của hai tiếp tuyến nhỏ nhất.

Hướng dẫn. Có $y' = -3x^2 + 6x$. Giả sử $A(a, -a^3 + 3a^2 - 2)$ thuộc đồ thị hàm số và tiếp điểm là $M(x_0, -x_0^3 + 3x_0^2 - 2)$. Suy ra phương trình tiếp tuyến là:

$$y - (-x_0^3 + 3x_0^2 - 2) = (-3x_0^2 + 6x_0)(x - x_0)$$

Do tiếp tuyến đi qua điểm A nên ta có phương trình

$$-a^3 + 3a^2 - 2 - (-x_0^3 + 3x_0^2 - 2) = (-3x_0^2 + 6x_0)(a - x_0)$$

Phân tích thành nhân tử, thu được $x_0 = a, x_0 = \frac{3-a}{2}$. Qua điểm A kẻ được hai tiếp tuyến $\Leftrightarrow a \neq \frac{3-a}{2} \Leftrightarrow a \neq 1$. Khi đó hệ số góc của hai tiếp tuyến là

$$k_1 = ..., k_2 = ...$$

Suy ra

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{4}\left(-3a^2 + 6a + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{16} \geqslant -\frac{81}{16}$$

Từ đó tìm được $A(\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}, \pm\frac{\sqrt{10}}{4})$. ■

1.10 Nhận dạng đồ thị

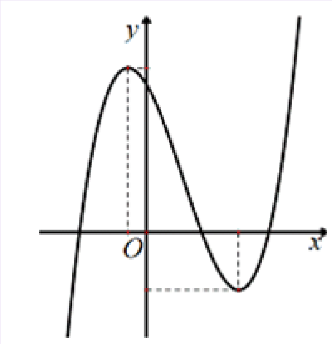
Bài toán 1.10 Nhận dạng đồ thị

Ta cần một số kết quả quen thuộc sau:

- Hình dáng của đồ thị các hàm số bậc ba, bậc bốn trùng phương, phân thức bậc nhất tương ứng với các trường hợp hệ số của chúng.
- Xét theo chiều tăng của biến x, từ trái qua phải, thì đồ thị hàm số đồng biến sẽ có hướng đi lên – ngày càng cao hơn –, còn đồ thị hàm số nghịch biến sẽ có hướng đi xuống – ngày càng thấp đi.
- Một điểm $M(x_0, y_0)$ thuộc (nằm trên) đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi và chỉ khi $y_0 = f(x_0)$.
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu cắt trục tung thì giao điểm có tọa độ $(0, f(0))$; còn để tìm giao điểm với trục hoành ta đi giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$.
- Số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ chính bằng số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

Ví dụ 1.78

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như đường cong ở hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a, d > 0; b, c < 0$.

B. $a, b, c < 0; d > 0$.

C. $a, c, d > 0; b < 0$.

D. $a, b, d > 0; c < 0$.

1.11 Đọc bảng biến thiên

Bài toán 1.11 Đọc bảng biến thiên

Ví dụ 1.79 ĐH năm 2017 Mã đề 102

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = -2$.

B. $y_{CĐ} = 2$ và $y_{CT} = 0$.

C. $y_{CĐ} = -2$ và $y_{CT} = 2$.

D. $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

Ví dụ 1.80 ĐH năm 2017 Mã đề 103

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có bốn điểm cực trị.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

C. Hàm số không có cực đại.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$.

Ví dụ 1.81 Đề minh hoạ 2017

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Ví dụ 1.82 ĐH năm 2017 Mã đề 101

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số có ba điểm cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.

D. Hàm số có hai điểm cực tiểu.

1.12 Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Bài toán 1.12 Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Vẽ đồ thị các hàm số $y = |f(x)|$ và $y = f(|x|)$.

Ta sử dụng định nghĩa giá trị tuyệt đối để viết lại hàm số đã cho.

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geqslant 0, \\ f(-x) & \text{khi } x < 0. \end{cases} \qquad y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0. \end{cases}$$

Từ đó, ta có cách vẽ như sau:

- Đối với hàm số $y = f(|x|)$, ta xóa phần đồ thị nằm bên trái trục tung – phần đồ thị ứng với $x < 0$ – và lấy đối xứng phần còn lại qua trục tung.
- Đối với hàm số $y = |f(x)|$, ta lấy đối xứng phần đồ thị nằm dưới trục hoành – phần đồ thị ứng với $f(x) < 0$ – và xóa bỏ phần đồ thị nằm dưới trục hoành đó.

Ví dụ 1.83

Đồ thị hàm số $y = \left|x^3 - 3x\right|$ cắt đường thẳng $y = 2$ tại mấy điểm?

Hướng dẫn. Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ví dụ 1.84

Phương trình $\left|x^3 - 3x + 2\right| = \log_2 10$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2 **B.** 0 **C.** 4 **D.** 3

Hướng dẫn. Cần nhớ lại định nghĩa giá trị tuyệt đối và cách vẽ đồ thị hoặc lập bảng biến thiên các hàm số $y = |f(x)|$ và $y = f(|x|)$ như thế nào?

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ví dụ 1.85 ĐH năm 2017 Mã đề 102

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

1.13 Tương giao của hai đồ thị hàm số

Bài toán 1.13 Tương giao của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

- Số giao điểm của hai đồ thị hàm số chính bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm

$$f(x) = g(x)$$

- Biến đổi phương trình trên đưa về:

  + **Phương trình trùng phương.** Đặt ẩn phụ đưa về biện luận phương trình bậc hai.

+ **Phương trình bậc ba.** Đoán nghiệm đặc biệt rồi phân tích thành tích phương trình bậc nhất và phương trình bậc hai; gọi hai nghiệm của phương trình bậc hai là x_1, x_2 rồi sử dụng Viète. Nếu không được thì cô lập tham số m và đưa về xét tương giao của đường thẳng $y = m$ và một đồ thị hàm số mới.
+ **Phương trình bậc hai.** Gọi hai nghiệm x_1, x_2 và sử dụng Viète.

Ví dụ 1.86

Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ và đường thẳng $y = x$.

A. Một. B. Hai. C. Ba. D. Không.

Chứng minh. Hướng dẫn] Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x + 3 = x$. Giải phương trình này tìm được ba nghiệm nên đáp số là có ba giao điểm. ■

Ví dụ 1.87

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2 - m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $0 < m < 4$. C. $m > 4$.

B. $0 \leqslant m \leqslant 4$. D. $m < 0$.

Ví dụ 1.88 Đề tham khảo 2017

Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị $(\mathcal{C})$. Tìm số giao điểm của $(\mathcal{C})$ và trục hoành.

Ví dụ 1.89 Đề thử nghiệm 2017

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

Ví dụ 1.90 ĐH 2017 Mã đề 103

Cho hàm số $y = (x - 2)(x^2 + 1)$ có đồ thị $(\mathcal{C})$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $(\mathcal{C})$ cắt trục hoành tại hai điểm.

B. $(\mathcal{C})$ cắt trục hoành tại một điểm.

C. $(\mathcal{C})$ không cắt trục hoành.

D. $(\mathcal{C})$ cắt trục hoành tại ba điểm.

Ví dụ 1.91 Đề thử nghiệm 2017

Cho hàm số $y = f(x)$xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $[-1; 2]$. **B.** $(-1; 2)$. **C.** $(-1; 2]$. **D.** $(-\infty; 2]$

Hướng dẫn. ■

Ví dụ 1.92 Đề minh hoạ 2017

Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

Bài toán 1.14 Biện luận số nghiệm của phương trình $h(x, m) = 0$ bằng đồ thị hàm số.

- Cô lập tham số m, đưa phương trình đã cho về dạng $f(x) = g(m)$.
- Lập bảng biến thiên hoặc vẽ đồ thị của hàm số $f(x)$.
- Căn cứ vào bảng biến thiên để kết luận.

Lưu ý 1.13

Đồ thị hàm số $y = g(m)$ là một đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ $g(m)$. Chẳng hạn, đồ thị hàm số $y = m^2 - 2m + 3$ là một đường thẳng chứ không phải là một parabol như nhiều học sinh lầm tưởng.

Ví dụ 1.93

Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2(x^2-2)+3=m$ có hai nghiệm phân biệt.

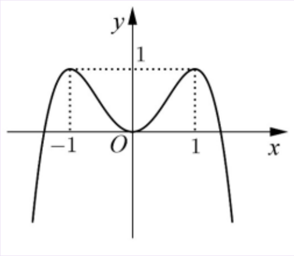
Hướng dẫn. Xét hàm số $y=x^2(x^2-2)+3$ trên $\mathbb{R}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên ta có, phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m=2$ hoặc $m>3$. ■

Ví dụ 1.94 ĐH năm 2017 Mã đề 104

Cho hàm số $y=-x^4+2x^2$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4+2x^2=m$ có bốn nghiệm thực phân biệt.



A. $m>0$. **B.** $o\leqslant m\leqslant 1$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m<1$.

Ví dụ 1.95

Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x=m$ có nghiệm trong khoảng $(0,1)$?

1. $m>0$ 2. $m\geqslant 0$ 3. $m>-1$ 4. $\geqslant -1$

Hướng dẫn. Đặt $t=\log_2 x$ thì $t<0$ với mọi $x\in(0,1)$. Do đó, ta xét hàm số

$f(t) = t^2 - 2t$ trên khoảng $(-\infty, 0)$ có bảng biến thiên như sau:

t	$-\infty$	0
$f'(t)$	$-$	||
$f(t)$	$+\infty \searrow$	0 ||

Suy ra, phương trình đã cho có nghiệm $x \in (0, 1)$ khi và chỉ khi $m > 0$. ■

Ví dụ 1.96

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ và đường thẳng $d: y = x + m$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

A. $m > 2$. **C.** $m = 2$.

B. $m > 6$. **D.** $m < 2 \vee m > 6$.

Ví dụ 1.97 ĐH Khối D năm 2011

Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng $y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Đáp số. $k = -3$. ■

Ví dụ 1.98 ĐH Khối B năm 2010

Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$, với O là gốc tọa độ.

Đáp số. $m = \pm 2$. ■

Ví dụ 1.99

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geqslant 1$.

A. $m < \frac{13}{4} \vee m \neq 1.$ **C.** $0 \leqslant m \leqslant 5.$

B. $m \leqslant 5.$ **D.** $5 \leqslant m \leqslant 10.$

Hướng dẫn. Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 - 3x^2 + mx + 1 = x + 1$. Đặt nhân tử chung ta được

$$x\left(x^2 - 3x + m - 1\right) = 0 \tag{5}$$

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (5) có ba nghiệm phân biệt. Vì phương trình (5) luôn có một nghiệm là $x = 0$ nên điều kiện cần và đủ là phương trình

$$x^2 - 3x + m - 1 = 0 \tag{6}$$

có hai nghiệm phân biệt khác 0. Từ đó tìm được điều kiện $m \neq 1, m < \frac{13}{4}$. Khi đó, theo Viète, phương trình (6) có hai nghiệm x_2, x_3 thỏa mãn

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 \cdot x_3 = m - 1. \end{cases}$$

Do đó, yêu cầu $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geqslant 1 \Leftrightarrow 3^2 - 2(m-1) \geqslant 1 \Leftrightarrow m \leqslant 5$. Như vậy, điều kiện cần tìm là $m \neq 1, m < \frac{13}{4}$. ■

Ví dụ 1.100

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$ cắt đường thẳng $\Delta : y = x + m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O.

A. $m = 6.$ **B.** $m = -3.$ **C.** $m = 5.$ **D.** $m = -1.$

Hướng dẫn. Phương trình hoành độ giao điểm của $(\mathcal{C})$ và đường thẳng Δ là

$$\frac{2x+3}{x-1} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - m - 3 = 0 \qquad (x \neq 1) \tag{7}$$

Đường thẳng Δ cắt $(\mathcal{C})$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (7) có hai nghiệm phân biệt và[1] khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 + (m-3) \cdot 1 - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

[1]Thực ra chỉ cần điều kiện có hai nghiệm phân biệt là đủ, điều kiện sau luôn luôn đúng với mọi bài toán dạng này.

Khi đó, gọi hai nghiệm của phương trình (7) là x_1, x_2 thì giao điểm của hai đồ thị đã cho là $A(x_1, x_1+m)$, $B(x_2, x_2+m)$. Tam giác OAB vuông tại O khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow x_1x_2+(x_1+m)(x_2+m)=0.$$

Sử dụng Viète có $x_1+x_2=-m+3$ và $x_1x_2=-m-3$, ta tìm được $m=6$. ■

Ví dụ 1.101

Tìm m để đường thẳng $d: y=x-2$ cắt đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số $y=x^3+(m-1)x^2-(m-2)x-2$ tại ba điểm phân biệt.

Hướng dẫn. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\begin{aligned}
& x^3+(m-1)x^2-(m-2)x-2=x-2\\
\Leftrightarrow\ & x\left(x^2+(m-1)x-m+1\right)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=0\\ x^2+(m-1)x-m+1=0 \quad (*)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Đường thẳng d cắt đồ thị $(\mathcal{C})$ tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=m^2+2m-3>0\\ g(0)=-m+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m<-3\\ m>1\end{array}\right.\\ m\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3\\ m>1\end{array}\right.$$

Vậy, giá trị cần tìm là $m<-3$ hoặc $m>1$. ■

Ví dụ 1.102

Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3+mx+2$ cắt trục hoành tại đúng một điểm.

Hướng dẫn. Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3+mx+2=0$$

Nhận xét $x=0$ không thể là nghiệm của phương trình, nên chia hai vế cho x thì được phương trình tương đương

$$m=-x^2-\frac{2}{x}$$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 - \frac{2}{x}$ trên $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra, giá trị cần tìm của m là $m > -3$. ■

Ví dụ 1.103

Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - mx - m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Hướng dẫn. Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - mx - m = 0.$$

Phương trình trên không có nghiệm đặc biệt, nhưng lại có thể cô lập được tham số m nên sẽ chuyển về tìm điều kiện để hai đồ thị hàm số *mới* cắt nhau tại ba điểm phân biệt. Chú ý rằng $x = -1$ không thỏa mãn phương trình nên chia hai vế cho $x + 1$ ta được phương trình mới tương đương

$$m = \frac{x^3}{x + 1}.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm điều kiện để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta có đáp số $m > 27/4$. ■

Ví dụ 1.104

Cho hàm số: $y = x^3 - mx^2 + (2m+1)x - m - 2$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

Hướng dẫn. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - mx^2 + (2m+1)x - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - (m-1)x + m + 2 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm dương phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 6m - 7 > 0 \\ m + 2 > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > 7 \\ m > -2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 7$$

Vậy với $m > 7$ thì đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương. ■

Ví dụ 1.105

Cho hàm số $y = x^3 - 2(m+1)x^2 + (m-2)x + m + 3$ có đồ thị $(\mathcal{C})$. Xác định m để đồ thị $(\mathcal{C})$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 sao cho $P = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(\mathcal{C})$ và trục hoành là

$$\begin{aligned} & x^3 - 2(m+1)x^2 + (m-2)x + m + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)\left(x^2 - (2m+1)x - (m+3)\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - (2m+1)x - (m+3) = 0 \quad (*) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đồ thị $(\mathcal{C})$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 8m + 13 > 0, \forall m \\ -3m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -1$$

Với $m \neq -1$, phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1; nghĩa là, phương trình $y = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2 và $x_3 = 1$. Và do đó

$$\begin{aligned} P &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 1 = 1 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= 1 + (2m+1)^2 + 2(m+3) = 4m^2 + 6m + 8 = \left(2m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} \geqslant \frac{23}{4} \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{23}{4}$ khi $m = -\frac{3}{4}$. ■

Ví dụ 1.106 ĐH năm 2017 Mã đề 101

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB = BC$.

A. $m \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

B. $m \in \mathbb{R}$.

C. $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

D. $m \in (-2; +\infty)$.

Hướng dẫn. Tìm điều kiện để đường thẳng d và đồ thị $(\mathcal{C})$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Sau đó sử dụng tính chất tâm đối xứng của $(\mathcal{C})$, tức điểm uốn, phải thuộc đường thẳng d. ■

Ví dụ 1.107 ĐH năm 2017 Mã đề 102

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

Ví dụ 1.108

Viết phương trình đường thẳng d cắt đồ thị $(\mathcal{C}) : y = x^3 - 3x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $x_A = 2$ và $BC = 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn. Có $x_A = 2$ suy ra $y_A = 4$ và $A(2; 4)$. Giả sử d là đường thẳng đi qua A và có hệ số góc là k thì phương trình của d là

$$d : y - y_A = k(x - x_A) \Leftrightarrow y = kx - 2k + 4$$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(\mathcal{C})$ và đường thẳng d là

$$x^3 - 3x + 2 = kx - 2k + 4 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 1 - k) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ g(x) = x^2 + 2x + 1 - k = 0 \end{array}\right.$$

Như vậy d cắt $(\mathcal{C})$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C khi và chỉ khi phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt và khác 2. Điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} \Delta' = k > 0 \\ g(2) = 9 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < k \neq 9$$

Khi đó, phương trình có hai nghiệm x_B, x_C thỏa mãn

$$\begin{cases} x_B + x_C = -2 \\ x_B \cdot x_C = 1 - k \end{cases}$$

Mà các điểm B, C thuộc đường thẳng d nên ta có

$$y_B = kx_B - 2k + 4; y_C = kx_C - 2k + 4.$$

Mặt khác $BC = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow BC^2 = 8$ nên suy ra

$$(x_B - x_C)^2 + k^2(x_B - x_C)^2 = 8 \Leftrightarrow \left((x_B + x_C)^2 - 4x_Bx_C\right)(1 + k^2) = 8 \Leftrightarrow k = 1.$$

Kiểm tra thấy thỏa mãn điều kiện. Thay vào tìm được đường thẳng $d : y = x+2$. ■

Ví dụ 1.109

Cho hàm số $y = 4x^3 - 6mx^2 + 1$, m là tham số. Tìm m để đường thẳng $d : y = -x + 1$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm $A(0; 1), B, C$ mà B, C đối xứng qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Hướng dẫn. Hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị $(\mathcal{C})$ là nghiệm của phương trình:

$$\begin{aligned} 4x^3 - 6mx^2 + 1 &= -x + 1 \\ \Leftrightarrow x(4x^2 - 6mx + 1) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $4x^2 - 6mx + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \frac{2}{3} \\ m < \frac{-2}{3} \end{array}\right.$$

Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (8) thì $B(x_1; -x_1 + 1), C(x_2; -x_2 + 1)$. Do đó, B và C đối xứng qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_2 \\ y_1 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 1 \\ x_2 = -x_1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$$

So sánh với điều kiện, thấy không tìm được giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu. ■

Ví dụ 1.110

Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (H). Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-2;2)$ và có hệ số góc m. Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (H) tại hai điểm phân biệt?

Hướng dẫn. Đường thẳng d đi qua điểm $A(-2;2)$ và có hệ số góc m nên có phương trình

$$y = mx + 2m + 2$$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (H) là

$$\frac{2x+1}{x-1} = mx + 2m + 2 \Leftrightarrow g(x) = mx^2 + mx - (2m+3) = 0.$$

vì $x = 1$ luôn không thể là nghiệm của phương trình trên.
Đường thẳng d cắt đồ thị (H) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1. Điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3} \text{ hoặc } m > 0$$

Vậy giá trị cần tìm là $m < -\frac{4}{3}$ hoặc $m > 0$. ■

1.14 Biện luận phương trình, bất phương trình

Bài toán 1.15

Khi biện luận số nghiệm của phương trình, bất phương trình ta hay sử dụng một số kết quả sau:

- Phương trình $m = f(x)$ có nghiệm trên $\mathbb{D} \Leftrightarrow \min\limits_{\mathbb{D}} f(x) \leqslant m \leqslant \max\limits_{\mathbb{D}} f(x)$,
- Bất phương trình $m \leqslant f(x)$ có tập nghiệm là $\mathbb{D} \Leftrightarrow m \leqslant \min\limits_{\mathbb{D}} f(x)$,
- Bất phương trình $m \geqslant f(x)$ có tập nghiệm là $\mathbb{D} \Leftrightarrow m \geqslant \max\limits_{\mathbb{D}} f(x)$.

Ví dụ 1.111

Tìm m để phương trình $mx^2 + 2mx - 3 = 0$ có nghiệm $x \in [1;2]$

Hướng dẫn. Ta có

$$mx^2 + 2mx - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{x^2 + 2x} \quad (\text{vì } x^2 + 2x \neq 0,\ \forall x \in [1;2])$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{3}{x^2+2x}$ trên đoạn $[1;2]$, ta có bảng biến thiên sau

x	1 $\qquad$ 2
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow \frac{3}{8}$

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in [1;2]$ khi và chỉ khi $\min\limits_{[1;2]} f(x) \leqslant m \leqslant \max\limits_{[1;2]} f(x)$. Từ đó tìm được đáp số $\frac{3}{8} \leqslant m \leqslant 1$. ■

Ví dụ 1.112

Tìm m để bất phương trình $x + \sqrt{2x^2+1} - m > 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$?

Hướng dẫn. Ta có bất phương trình $x + \sqrt{2x^2+1} - m > 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$x + \sqrt{2x^2+1} - m > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow m < \min_{\mathbb{R}} f(x)$$

trong đó $f(x) = x + \sqrt{2x^2+1}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và do đó, đáp số là $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

Ví dụ 1.113 ĐH Khối B năm 2007

Chứng minh rằng với mọi $m > 0$, phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$$x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)} \qquad (9)$$

Hướng dẫn. Vì $m > 0$ nên điều kiện của phương trình là $x \geqslant 2$ và phương trình (9) tương đương với

$$(x-2)(x^3+6x^2-32-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^3+6x^2-32-m=0 \end{array}\right.$$

Ta chứng minh phương trình

$$x^3+6x^2-32=m \tag{10}$$

có đúng một nghiệm trong khoảng $(2,+\infty)$.
Xét hàm số $f(x)=x^3+6x^2-32$ trên $(2,+\infty)$ có bảng biến thiên sau

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Rõ ràng khi $m > 0$ thì đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại đúng một điểm có hoành độ lớn hơn 2, tức là phương trình (10) có đúng một nghiệm trong khoảng $(2,+\infty)$. Do đó, phương trình (9) có đúng hai nghiệm khi $m > 0$. ■

Ví dụ 1.114 ĐH Khối A năm 2007

Tìm m để phương trình

$$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1} \tag{11}$$

có nghiệm.

Hướng dẫn. Điều kiện: $x \geqslant 1$, phương trình (11) tương đương với

$$-3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=m.$$

Đặt $u=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4]{1-\frac{2}{x+1}} \in [0,1)$ ta được phương trình

$$-3u^2+2u=m \tag{12}$$

Xét hàm số $f(t)=-3t^2+2t$ trên $[0;1)$ ta có bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1

Do đó phương trình (11) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (12) có nghiệm $u \in [0;1)$. Điều kiện cần và đủ là $-1 < m \leqslant \frac{1}{3}$. ■

1.15 Biến đổi hàm số

Bài toán 1.16 Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$

Ví dụ 1.115

Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$. Khi đó đồ thị hàm số $y = 2f(x) - 4$ có một tiệm cận ngang là

A. $y = 3$. **B.** $y = 2$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = -4$.

Chứng minh. Hướng dẫn] Ta có $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2f(x) - 4\right) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$. ■

1.16 Điểm thuộc đồ thị

Bài toán 1.17 Tìm điểm M thuộc đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện cho trước.

Chú ý những tính chất của đồ thị hàm số phân thức...

Lưu ý 1.14

Điểm đối xứng với điểm $M(a; b)$ qua gốc tọa độ là $M'(-a; -b)$, đối xứng qua trục hoành là $M''(a; -b)$, đối xứng qua trục tung là $M'''(-a; b)$.

Ví dụ 1.116

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là $(\mathcal{C})$.

1. Xác định phương trình tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của $(\mathcal{C})$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(\mathcal{C})$ tại điểm $M(2; 4)$
3. Giả sử tiếp tuyến Δ cắt tiệm cận đứng tại A, cắt tiệm cận ngang tại B. Chứng minh rằng M là trung điểm AB.

Ví dụ 1.117

Tìm trên đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ những điểm cách đều hai trục tọa độ.

Hướng dẫn. Giả sử $M(m, \frac{m+2}{m-1})$ thuộc đồ thị hàm số đã cho. Ta có, điểm M cách đều hai trục tọa độ khi và chỉ khi
$$|m| = \left|\frac{m+2}{m-1}\right|$$
Giải phương trình trên tìm được $m = -1 \pm \sqrt{3}$. Từ đó tìm được đáp số $M(-1 \pm \sqrt{3}, -5 \mp 3\sqrt{3})$. ■

Ví dụ 1.118

Tìm điểm M trên đồ thị $y = \frac{2x}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị cùng với hai trục tạo thành một tam giác có diện tích là $\frac{1}{4}$.

Ví dụ 1.119 ĐH Khối B năm 2003

Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

Hướng dẫn. Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $y(x_0) = -y(-x_0)$. Điều này đồng nghĩa với phương trình
$$x_0^3 - 3x_0^2 + m = -\left((-x_0)^3 - 3(-x_0)^2 + m\right) \Leftrightarrow 3x_0^2 = m$$
có nghiệm $x_0 \neq 0$. Do đó, điều kiện cần và đủ là $m > 0$. ■

Ví dụ 1.120 ĐH Khối D năm 2007

Tìm điểm M trên đồ thị $y = \frac{2x}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến đồ thị cùng với hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích là $\frac{1}{4}$.

Ví dụ 1.121

Tìm hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ sao cho độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất.

Hướng dẫn. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 3$ nên, giả sử M nằm nhánh bên trái đồ thị thì hoành độ của nó nhỏ hơn 3. Do đó, gọi tọa độ điểm

M là $(3-a, 3-8/a)$ và, tương tự, tọa độ của $N(3+b, 3+8/b)$ – với $a, b > 0$. Ta tính được $MN = \sqrt{(a+b)^2 + (8/a+8/b)^2}$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$(a+b)^2 + \left(\frac{8}{a}+\frac{8}{b}\right)^2 \geqslant \left(2\sqrt{ab}\right)^2 + 64\left(2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}\right)^2 \geqslant 64$$

Suy ra, giá trị nhỏ nhất của MN là 8. Đẳng thức xảy ra, khi $a = b = 2\sqrt{2}$, từ đó tìm được M và N.

Ví dụ 1.122

Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị $(\mathcal{C})$. Tìm trên đồ thị $(\mathcal{C})$ những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của $(\mathcal{C})$ cắt hai tiệm cận của $(\mathcal{C})$ tại A, B mà AB ngắn nhất.

A. $M(3;3), M(1;1)$.
C. $M\left(0;\frac{3}{2}\right), M\left(-1;\frac{5}{3}\right)$.
B. $M(3;3), M\left(0;\frac{3}{2}\right)$.
D. $M(1;1), (2;4)$.

Hướng dẫn. Giả sử $M(a, \frac{2a-3}{a-2})$, với $a \neq 2$, là một điểm thuộc đồ thị $(\mathcal{C})$. Phương trình tiếp tuyến Δ của $(\mathcal{C})$ tại điểm M là

$$\Delta : y = \frac{-x}{(a-2)^2} + \frac{2a^2-6a+6}{(a-2)^2}$$

Tiếp tuyến Δ cắt tiệm cận đứng tại điểm $A\left(2;\frac{2a-2}{a-2}\right)$ và cắt tiệm cận ngang tại điểm $B\,(2a-2;2)$. Do đó, độ dài đoạn AB là

$$AB = \sqrt{4(a-2)^2 + \frac{4}{(a-2)^2}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy có $AB \geqslant 2\sqrt{2}$. Vậy đoạn AB ngắn nhất bằng $2\sqrt{2}$, khi $a = 3$ hoặc $a = 1$. Từ đó tìm được hai điểm $M(3;3)$ hoặc $M(1;1)$.

Ví dụ 1.123

Tìm điểm M thuộc đường thẳng $\Delta : y = 3x - 2$ sao tổng khoảng cách từ M tới hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là ngắn nhất.

A. $M\left(\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)$.
B. $M\,(0;-2)$.
C. $M\,(1;1)$.
D. $M\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn. Tìm được hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là $A(0;2)$ và $B(2;-2)$. Nhận xét rằng A và B nằm về hai phía của đường thẳng Δ, nên $MA + MB$ ngắn nhất khi và chỉ khi ba điểm M, A, B thẳng hàng. Nói cách khác, M là giao điểm của đường thẳng Δ và đường thẳng AB. Từ đó tìm được toạ độ của $M\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$. ∎

Ví dụ 1.124

Cho M là một điểm bất kỳ thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Tìm khoảng cách ngắn nhất từ M đến đường thẳng $\Delta : y = -\frac{1}{2}x + 1$.

A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn. Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ mà nó song song với đường thẳng Δ. Suy ra hệ số góc của d là $-\frac{1}{2}$. Từ đó tìm được toạ độ các tiếp điểm là $E(3;2)$ hoặc $F(-1;0)$.
Tính được khoảng cách từ E đến đường thẳng Δ là $d(E,\Delta) = \frac{5}{\sqrt{3}}$; khoảng cách từ F đến đường thẳng Δ là $d(F,\Delta) = \sqrt{3}$. Suy ra khoảng cách nhỏ nhất cần tìm là $\sqrt{3}$ khi M trùng với F. ∎

1.17 Bài toán thực tế

Bài toán 1.18 Bài toán thực tế.

Đối với các bài toán về chuyển động cần lưu ý, nếu quãng đường s theo thời gian t được tính bởi phương trình $s = s(t)$ thì vận tốc là $v = s'(t)$ còn gia tốc là $a = v'(t) = s''(t)$.
Đối với các bài toán về diện tích, thể tích lớn nhất, nhỏ nhất ta có thể đặt một kích thước là x và biểu diễn các kích thước còn lại theo x. Sau đó lập hàm số và khảo sát để tìm ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất. Có thể thay trực tiếp các phương án vào và so sánh. ∎

Ví dụ 1.125 Đề minh hoạ 2017

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x$cm, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

A. $x = 6$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = 4$.

Ví dụ 1.126

Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 216 m/s. **B.** 30 m/s. **C.** 400 m/s. **D.** 54 m/s.

Hướng dẫn. Chúng ta cần tìm giá trị lớn nhất của vận tốc trong khoảng thời gian $t \in [0; 10]$. Có $v(t) = s'(t)$ nên ta xét hàm số $v(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$ có đạo hàm $v'(t) = -3t + 18$ trên đoạn $[0; 10]$. Ta có bảng biến thiên sau

t	0		6		10
$v'(t)$		+	0	−	
$v(t)$	0	↗	54	↘	30

Suy ra, giá trị lớn nhất của vận tốc là 54 m/s, đạt được tại thời điểm $t = 6$ giây. ■

Ví dụ 1.127

Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (tính bằng giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (tính bằng mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất đạt được của vật là bao nhiêu?

A. 24 m/s. **B.** 108 m/s. **C.** 64 m/s. **D.** 18 m/s.

Hướng dẫn. Vận tốc chuyển động của vật biến đổi theo quy luật

$$v = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t$$

Lập bảng biến thiên của hàm số này trên đoạn $[0; 6]$ ta được

t	0		4		6
$v'(t)$		+	0	−	
v	0	↗	24	↘	18

Suy ra, vận tốc lớn nhất có thể đạt được là 24 m/s. ■

Ví dụ 1.128

Một viên đá được bắn thẳng lên trên với vận tốc ban đầu là 40 m/s từ một điểm cao 5 m so với mặt đất. Vận tốc của viên đá sau t giây được cho bởi công thức $v(t) = 40 - 10t$ m/s. Tính độ cao lớn nhất viên đá có thể lên tới so với mặt đất.

A. 75 m. B. 80 m. C. 90 m. D. 85 m.

Ví dụ 1.129

Người ta muốn mạ vàng cho bề mặt phía ngoài của một cái hộp có dạng hình hộp đứng không nắp, có đáy là một hình vuông. Tìm chiều cao của hộp để lượng vàng dùng để mạ là ít nhất, biết lớp mạ ở mọi nơi là như nhau, giao giữa các mặt không đáng kể và thể tích của hộp là $4\,\text{dm}^3$.

A. 1 dm. B. 0.5 dm. C. 2 dm. D. 1.5 dm.

Ví dụ 1.130

Một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $80\,\text{cm} \times 50\,\text{cm}$ được cắt đi ở bốn góc những hình vuông bằng nhau, để khi gấp lại thì được một cái thùng không nắp dạng hình hộp. Thể tích hình hộp tạo thành lớn nhất khi bốn hình vuông bị cắt đi có cạnh là bao nhiêu?

A. 10 cm. B. 25 cm. C. 20 cm. D. 40 cm.