ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ ĐỂ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Các em học sinh nên nhớ rằng "Không có phương pháp giải nào là vạn năng", do đó các em p không ngừng luyện tập để tạo ra sợi dây liên kết giữa các phần kiến thức của mình, khi đó các em mớ thể vận dụng linh hoạt các phương pháp sao cho bài giải của mình khoa học nhất, hay nhất.

Đối với một số loại hình chóp, hình lăng trụ trong một số bài toán ta có thể sử dụng việc đặt mộ trục tọa độ thích hợp, để chuyển từ việc giải hình học không gian tổng hợp thuần túy *(mà việc này có gặp nhiều khó khăn trong dựng hình, tính toán với các em học sinh)* sang việc tính toán dựa vào tọa Cách giải bài toán như vậy gọi là phương pháp tọa độ hóa.

Đối với phương pháp tọa độ hóa, việc tính toán có thể sẽ dài dòng và phức tạp hơn phương p hình học không gian thuần túy, tuy nhiên cách giải này thực sự rất hữu ích cho nhiều bạn học sinh việc nắm vững những phương pháp trong cách giải hình học không gian còn yếu hoặc những bài t hình không gian về khoảng cách khó; về xác định GTLN, GTNN; các bài toán về quỹ tích điểm,...

Để có thể làn tốt được các bài toán giải bằng phương pháp tọa độ hóa thì các em học sinh phải n chắc các kiến thức (cụ thể là các công thức tính) của phần "Phương pháp tọa độ trong không gian" những kiến thức cơ bản nhất của hình học không gian.

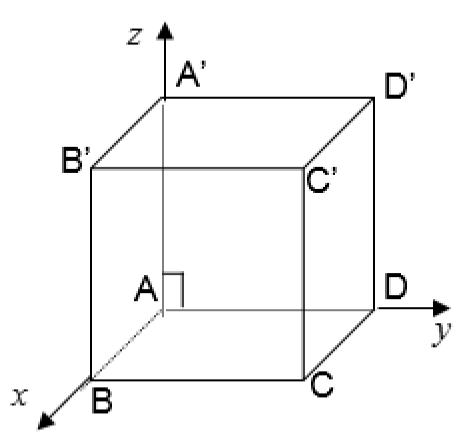
Sau đây thầy sẽ trình bày cụ thể phương pháp: "Ứng dụng phương pháp tọa độ để giải toán hình không gian".

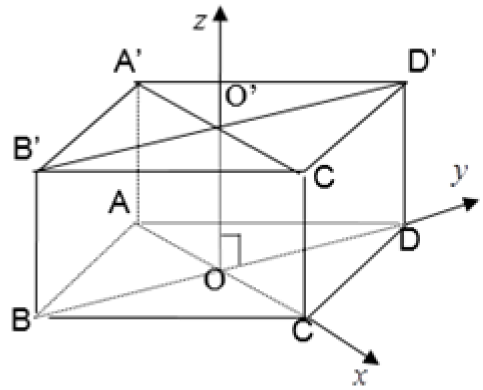
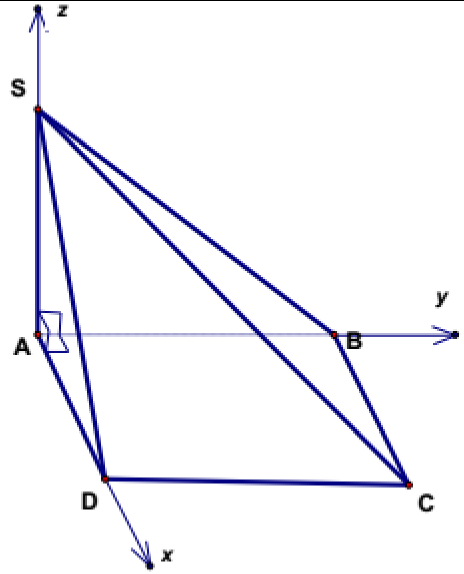
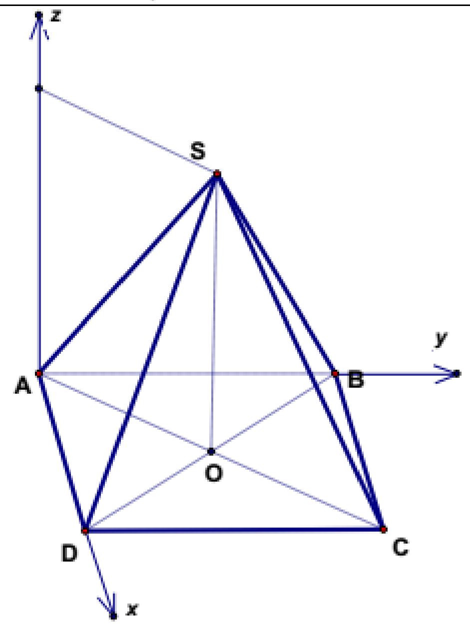
Cao Văn Tuấn – 09753062

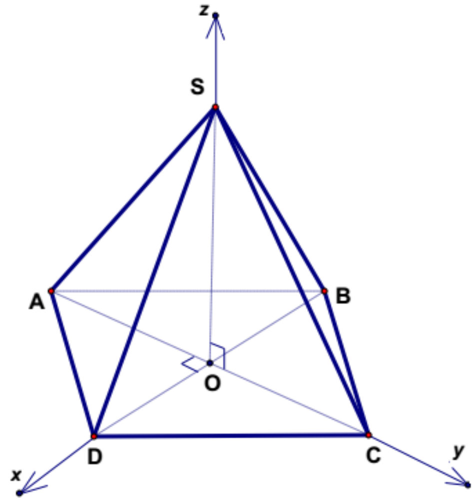
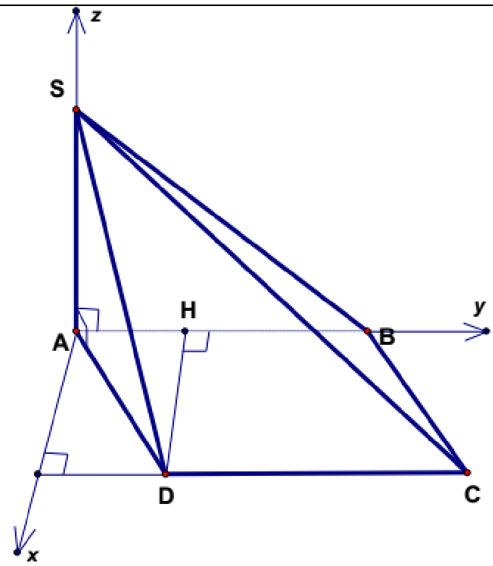
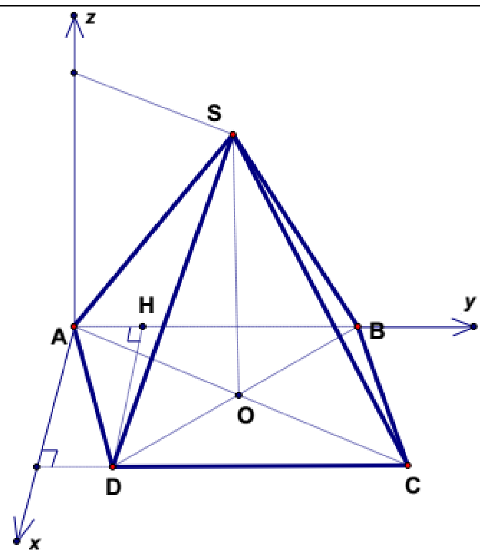
1. Phương pháp

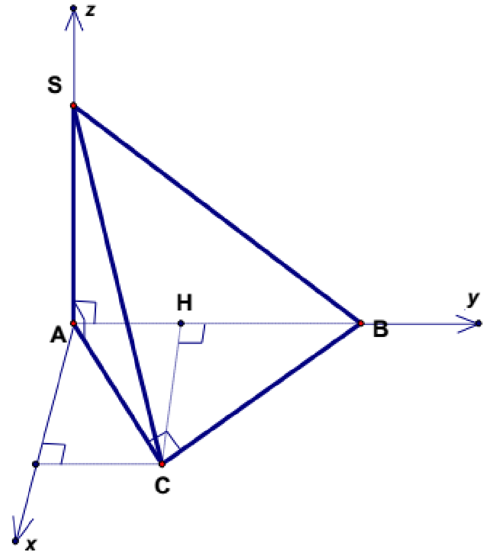
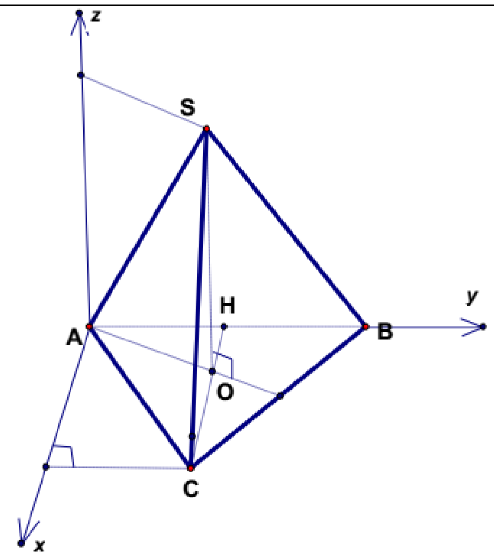
+ ***Bước 1: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz trong không gian:*** Vì O*x*, O*y*, O*z* vuông góc với nhau từ đôi một nên nếu hình vẽ bài toán cho có chứa các cạnh vuông góc thì ta ưu tiên chọn các cạnh làm trục tọa độ.
+ ***Bước 2: Suy ra tọa độ của các đỉnh, điểm trên hệ trục tọa độ vừa ghép.***
+ ***Bước 3: Sử dụng các kiến thức về tọa độ không gian để giải quyết bài toán***

2. Các bài toán ghép trục tọa độ thường gặp và cách suy ra tọa độ các đỉnh

Các bài toán thường gặp	Cách ghép trục	Tọa độ các điểm
Hình lập phương hoặc hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$		+ Với hình lập phương: $\begin{cases} A(0;0;0),\ B(a;0;0) \\ C(a;a;0),\ D(0;a;0) \\ A'(0;\ 0;\ a),\ B'(a;0;a) \\ C'(a;\ a;\ 0),\ D'(0;\ a;\ a) \end{cases}$ + Với hình hộp chữ nhật: $\begin{cases} A(0;0;0),\ B(a;0;0) \\ C(a;b;0),\ D(0;b;0) \\ A'(0;0;c),\ B'(a;0;c) \\ C'(a;b;c),\ D'(0;b;c) \end{cases}$

Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi.		+ Gốc tọa độ trùng với giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi ABCD. + Trục Oz đi qua 2 tâm của 2 đáy
Hình chóp S.ABCD có: + ABCD là hình chữ nhật, hình vuông. + SA ⊥ (ABCD).		$\begin{cases} A=(0;0;0) \\ B=(0;\lvert AB\rvert;0) \\ C=(\lvert AD\rvert;\lvert AB\rvert;0) \\ D=(\lvert AD\rvert;0;0) \\ S=(0;0;\lvert SA\rvert) \end{cases}$
Hình chóp S.ABCD có: + Đáy hình chữ nhật, hình vuông. + Các cạnh bên bằng nhau (SO vuông góc với đáy).		$\begin{cases} A=(0;0;0) \\ B=(0;\lvert AB\rvert;0) \\ S=\left(\dfrac{\lvert AD\rvert}{2};\dfrac{\lvert AB\rvert}{2};\lvert SO\rvert\right) \\ C=(\lvert AD\rvert;\lvert AB\rvert;0) \\ D=(\lvert AD\rvert;0;0) \end{cases}$

<table>
<tr>
<td>Hình chóp S.ABCD đều có:
+ Đáy là hình thoi, hình vuông.
+ SO vuông góc với đáy.</td>
<td>
</td>
<td>$$\begin{cases} O=(0;0;0) \\ A=(0;-|OA|;0) \\ B=(-|OB|;0;0) \\ C=(0;|OC|;0) \\ D=(|OD|;0;0) \\ S=(0;0;|SO|) \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Hình chóp S.ABCD đều có:
+ Đáy là hình bình hành, hình thoi.
+ SA vuông góc với đáy.</td>
<td>
</td>
<td>$$\begin{cases} A=(0;0;0) \\ B=(0;|AB|;0) \\ C=(|DH|;|AB+AH|;0) \\ D=(|DH|;|AH|;0) \\ S=(0;0;|SA|) \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Hình chóp S.ABCD đều có:
+ Đáy là hình bình hành.
+ SO vuông góc với đáy.</td>
<td>
</td>
<td>$$\begin{cases} A=(0;0;0) \\ B=(0;|AB|;0) \\ C=(|DH|;|AB+AH|;0) \\ D=(|DH|;|AH|;0) \\ S=\left(\frac{|DH|}{2};\frac{|AB+AH|}{2};|SO \right. \end{cases}$$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Hình chóp S.ABC có:
+ Đáy là tam giác vuông, tam giác đều.
+ SA vuông góc với đáy.</td>
<td>
</td>
<td>$$\begin{cases} A=(0;0;0) \\ B=(0;|AB|;0) \\ C=(|CH|;|AH|;0) \\ S=(0;0;|SA|) \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Hình chóp S.ABC có:
+ Đáy là tam giác đều cạnh a.
+ Các cạnh bên bằng nhau.</td>
<td>
</td>
<td>$$\begin{cases} A=(0;0;0) \\ B=(0;|AB|;0)=(0;a;0) \\ C=(|CH|;|AH|;0) \\ \quad =\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};0\right) \\ S=(|OH|;|AH|;|SO|) \\ \quad =\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\dfrac{a}{2};|SO|\right) \end{cases}$$</td>
</tr>
</table>

Trên đây là một số dạng cơ bản của một số loại hình khối mà chúng ta có thể tọa độ hóa một cách đơn giản. Các em lưu ý rằng chúng ta có thể tọa độ hóa một khối đa diện bất kỳ. Chỉ cần chúng ta xác định được đường cao của khối đa diện đó và thông thường trên lý thuyết ta đều đặt gốc tọa độ là chân đường cao của khối đa diện; trục cao (trục Oz) là đường cao, sau đó ta dựng hai tia còn lại. Nhưng trong thực hành giải toán chúng ta căn cứ tùy bài toán để đặt hệ trục miễn sao chúng ta có thể tìm các tọa độ các đỉnh liên quan đến hình khối cần tính có thể tìm được một cách dễ dàng hoặc không quá phức tạp.

Ví dụ như bài toán sau: (Các em hãy xem và suy nghĩ nên đặt hệ trục ra sao).

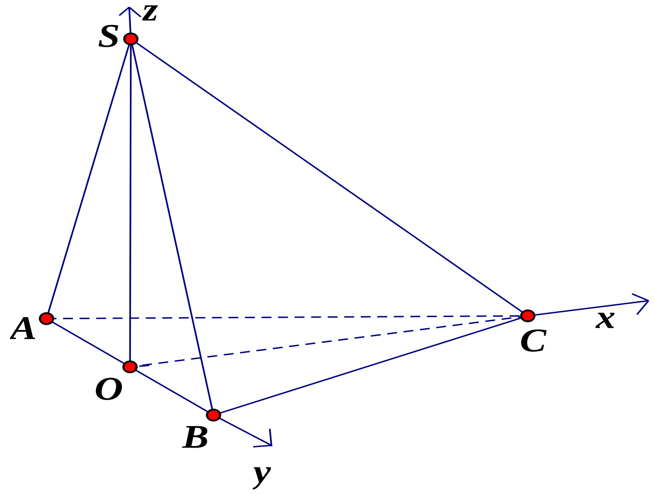
Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy góc 60^0. Mặt bên (SAB) vuông góc với đáy, tam giác SAB cân tại S. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC.

Bình luận: Rõ ràng rằng việc tính thể tích của khối chóp này là không quá khó khăn, chỉ cần các em nắm được cách xác định góc giữa hai mặt phẳng là xác định được. Vì vậy, ý tính thể tích thầy để các em tự suy nghĩ và thực hiện.
Với câu hỏi tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau này, các em hoàn toàn có thể thực hiện theo hình tổng hợp. Ở đây chúng ta bàn luận về việc đặt hệ trục tọa độ để thực hiện ý thứ hai này.

Trước hết các em cần lưu ý: Xác định chiều cao của hình chóp này như thế nào?
Điều này là không quá khó: Vì sao? Hãy nhớ: "Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau, trong mặt này dựng một đường thẳng vuông góc với giao tuyến thì đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng kia".

Gắn vào hình chóp này: Ta thấy mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy, mà giao tuyến của hai mặt phẳng này là AB. Ta cần tìm chiều cao cho nên, các em chỉ cần từ S dựng SH vuông góc với AB, ($H \in AB$) vì tam giác SAB cân tại S cho nên H là trung điểm AB. Tức là các em đã xác định được chiều cao và chân đường vuông góc.

Vậy chúng ta có thể đặt hệ trục tọa độ rồi. Các em vẽ hình và đặt hệ trục như sau:



Tính toán tọa độ các điểm (căn cứ vào phần trước), ta có: $\begin{cases} O(0;0;0),\ S\left(0;0;\dfrac{3a}{4}\right) \\ A\left(0;-\dfrac{a}{2};0\right),\ B\left(0;\dfrac{a}{2};0\right),\ C(a;0;0) \end{cases}$

Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: SA, BC ta có:

$d(\mathrm{SA},\mathrm{BC}) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{SA}},\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right].\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{SA}},\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right]\right|}$, ta thu được kết quả cần tính.

Kể ra thì cũng không quá phức tạp đúng không các em. Các em hãy suy nghĩ có cách đặt hệ trục tọa nào khác không? Ở mục số **4. Ví dụ minh họa**, thầy sẽ trình bày thêm một số ví dụ cụ thể về các dạ toán để các em hiểu rõ hơn về phương pháp này.

3. Sử dụng các kiến thức về tọa độ để giải quyết bài toán

a) Khoảng cách giữa 2 điểm

Khoảng cách giữa hai điểm $\mathrm{A}(x_\mathrm{A};\ y_\mathrm{A};\ z_\mathrm{A})$ và $\mathrm{B}(x_\mathrm{B};\ y_\mathrm{B};\ z_\mathrm{B})$ là:

$$\boxed{\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2 + (z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A})^2}}$$

b) Khoảng cách từ điểm đến đoạn thẳng

Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ?

Cách 1: Cho đường thẳng Δ đi qua M, có một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và một điểm A. Khoảng cá từ A đến đường thẳng Δ được tính bởi công thức:

$$\boxed{d_{(\mathrm{A},\Delta)} = \dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right]\right|}{|\vec{u}|}}$$

Cách 2:

+ Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với Δ.
+ Tìm tọa độ giao điểm H của (α) và Δ.
+ *d*(M, d) = MH.

c) Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

Khoảng cách từ $\mathrm{M}_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ đến mặt phẳng $(\mathrm{P}): \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0$ là:

$$\boxed{d_{(\mathrm{M}_0,(\mathrm{P}))} = \dfrac{|\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \mathrm{C}z_0 + \mathrm{D}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}}$$

d) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Định nghĩa: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì c mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

e) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ_1 và Δ_2, biết:

+ Δ_1 đi qua M và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$

+ Δ_2 đi qua N và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_2$

Cách 1: Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được tính bằng công thức:

$$\boxed{d\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\frac{\left|\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]\right|}}$$

Cách 2:

+ Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ_1 và song song với Δ_2.
+ Khi đó: $d\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=d\left(\Delta_2,(\alpha)\right)=d\left(M,(\alpha)\right)$ với $\forall M\in\Delta_2$.

ĐẶC BIỆT: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD khi biết tọa độ của chúng:

$$\boxed{d\left(AB,CD\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}}$$

f) Khoảng cách giữa 2 đường thẳng song song

Khoảng cách giữa 2 đường thẳng song song bằng khoảng cách từ 1 điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

$\longrightarrow$ quay về dạng toán khoảng cách từ 1 điểm đến đường thẳng ☺.

g) Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) (với Δ // (α))

$$\boxed{d_{(\Delta,(\alpha))}=d_{(M,(\alpha))}} \quad \text{với } \forall M\in\Delta$$

h) Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng: Δ_1 có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=\left(x_1;\ y_1;\ z_1\right)$

Δ_2 có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=\left(x_2;\ y_2;\ z_2\right)$

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Khi đó:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\left|\vec{u}_1.\vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right|.\left|\vec{u}_2\right|}=\frac{\left|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}} \quad \left(0\le\varphi\le 90^0\right)$$

i) Góc gữa hai mặt phẳng

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$ và (P'): $A'x+B'y+C'z+D'=0$

$$\boxed{\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right)\right|=\frac{\left|\vec{n}_P.\vec{n}_Q\right|}{\left|\vec{n}_P\right|.\left|\vec{n}_Q\right|}=\frac{\left|A.A'+B.B'+C.C'\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}} \quad \left(0^0\le\varphi\le 90^0\right)$$

j) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho: Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left(x;\ y;\ z\right)$.

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(A;\ B;\ C\right)$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ và (α). Khi đó:

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|Ax+By+Cz\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} \quad \left(0\le\varphi\le 90^0\right)$$

k) Diện tích thiết diện

+ Diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

+ Diện tích hình bình hành: $S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$.

l) Thể tích khối đa diện

+ Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$.

+ Thể tích tứ diện: $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

4. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh là a. Gọi N là trung điểm của $B'C'$.

a) Chứng minh rằng: AC' vuông góc với $(A'BD)$.

b) Tính thể tích khối tứ diện $ANBD'$.

c) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và BD'.

d) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(AC'D)$.

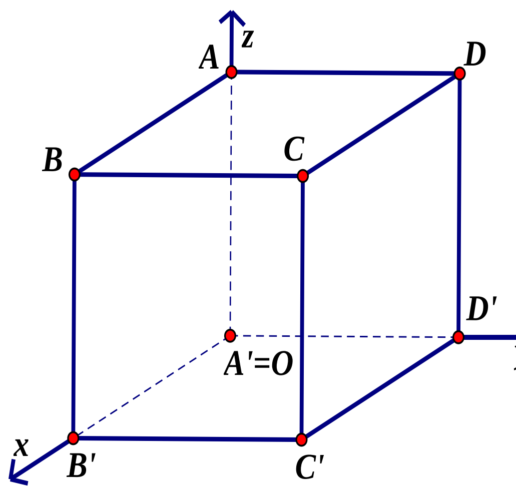
Giải:

Các em lưu ý, đây là một bài tính toán và chứng minh các yếu tố liên quan đến hình lập phương, chún có thể thực hiện bằng phương pháp tổng hợp, thầy không trình bày phương pháp đó nữa, mà giải bài này theo phương pháp tọa độ hóa.

Như đã nói ở phần trước, với hình lập phương và hình hộp chữ nhật thì việc chọn hệ trục tọa độ là rấ dàng. Thầy chọn hệ trục như sau. (*Các em hãy chọn hệ trục khác đi và giải nó theo cách của các em*).

Khi đó ta có tọa độ các đỉnh của hình lập phương như sau:

$$\begin{cases} A'(0;0;0),B'(a;0;0),C'(a;a;0),D'(0;a;0) \\ A(0;0;a),B(a;0;a),C(a;a;a),D(0;a;a),N\left(a;\dfrac{a}{2};0\right) \end{cases}$$



a) Mục đích của ta là chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng. Ta sẽ chỉ ra rằng VTCP của đường thẳng này cùng phương với VTPT của mặt phẳng $(A'BD)$.

Ta có: $\overrightarrow{AC'}=(a;a;-a)$

$\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right]=(-a^2;-a^2;a^2)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'BD)$.

Ta thấy hai vrctơ $\overrightarrow{AC'}$ và $\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right]$ cùng phương.

Vì thế ta có AC' vuông góc với mặt phẳng $(A'BD)$.

b) Tính thể tích tứ diện $ANBD'$.

Ta có công thức tính thể tích tứ diện là: $V_{ANBD'}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AD'}\right|$.

Ta có: $\begin{cases} \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}\right]=\left(0;a^2;\dfrac{a^2}{2}\right) \\ \overrightarrow{AD'}=(0;a;-a) \\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}\right].\overrightarrow{AD'}=\dfrac{a^3}{2} \end{cases}$.

Do đó thể tích tìm được là: $V=\dfrac{a^3}{12}$ (đvtt).

c) Để tính góc giữa hai đường thẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng ta sử dụng hai công th sau: $\cos(a,b)=\left|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$ và $d(a,b)=\dfrac{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}$.

Với $\vec{a},\vec{b}$ là các véc tơ chỉ phương của đường thẳng a và b. Đường thẳng a,b lần lượt đi qua hai điểm A và B.

Do đó ta có góc giữa hai đường thẳng AN và BD′ là: $\cos\left(\mathrm{AN},\mathrm{BD}'\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AN}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}'}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AN}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}'}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng này là: $d\left(\mathrm{AN},\mathrm{BD}'\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AN}},\overrightarrow{\mathrm{BD}'}\right].\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AN}},\overrightarrow{\mathrm{BD}'}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{26}}{26}$.

d) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $\left(\mathrm{AC'D}\right)$.

Viết phương trình mặt phẳng $\left(\mathrm{AC'D}\right)$.

Mặt phẳng $\left(\mathrm{AC'D}\right)$ có véc tơ pháp tuyến cùng phương với $\left[\overrightarrow{\mathrm{AC}'},\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right]=\left(-a^2;0;-a^2\right)$.

Ta chọn véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(\mathrm{AC'D}\right)$ là $\vec{n}=(1;0;1)$.

Vì thế phương trình mặt phẳng $\left(\mathrm{AC'D}\right)$ là: $x+z-a=0$.

Áp dụng công thức khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng ta có: $d\left(\mathrm{C},\left(\mathrm{AC'D}\right)\right)=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $\mathrm{ABCD.A'B'C'D'}$ có cạnh $\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AD}=1,\ \mathrm{AA'}=\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $\mathrm{A'C}$ và BD.

b) Gọi $\left(\mathrm{Q}\right)$ là mặt phẳng qua A vuông góc với $\mathrm{A'C}$. Tính diện tích của thiết diện của hình chóp $\mathrm{A'.ABCD}$ cắt bởi mặt phẳng $\left(\mathrm{Q}\right)$.

Giải:

Chúng ta đặt hệ trục tọa độ giống như ví dụ 1. Từ đây ta tính được tọa độ các đỉnh như sau:

$\mathrm{A}\left(0;0;0\right),\mathrm{B}\left(1;0;0\right),\mathrm{D}\left(0;1;0\right),\mathrm{A'}\left(0;0;\sqrt{2}\right)$

a) Dành cho các em tự tính toán.

b)

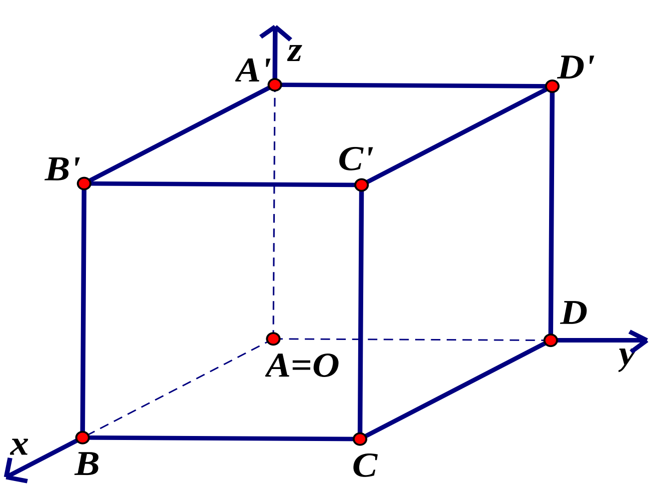
Với bài toán này, các em có thể viết được phương trình mặt phẳng $\left(\mathrm{Q}\right)$, các đường thẳng: $\mathrm{A'B},\ \mathrm{A'C},\ \mathrm{A'D}$ và tìm giao điểm của nó với mặt phẳng $\left(\mathrm{Q}\right)$, ta có tọa độ các giao điểm là:

$\mathrm{M}\left(\dfrac{2}{3};0;\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right),\mathrm{N}\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\mathrm{P}\left(0;\dfrac{2}{3};\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

Ta có thiết diện là tứ giác AMNP.

Và diện tích của tứ giác này là:

$$\mathrm{S_{AMNP}}=\mathrm{S_{AMN}}+\mathrm{S_{ANP}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$$



Ví dụ 3: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh $BD = 2\sqrt{2}$. Mặt bên tạo với mặt đáy góc 60^0.

a) Tính thể tích khối chóp, xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

b) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

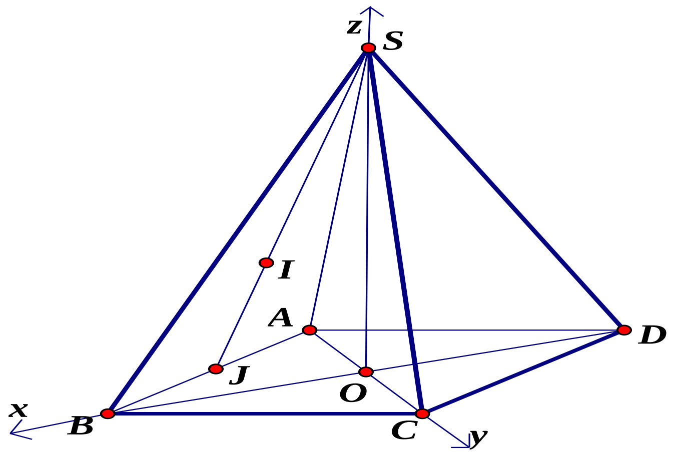
d) Gọi I là trọng tâm tam giác SAB, tính khoảng cách từ I đến các mặt phẳng $(ABCD)$ và (SCD)

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có tọa độ các đỉnh như sau:

$$\begin{cases} O(0;0;0), A(0;-\sqrt{2};0) \\ B(\sqrt{2};0;0), D(-\sqrt{2};0;0) \\ C(0;\sqrt{2};0), S(0;0;\sqrt{3}) \end{cases}$$

Đến đây công việc còn lại là tính toán, thầy để dành cho các em.



Các em có thể thấy rằng nếu như tọa độ hóa một khối đa diện được thì việc giải những bài toán h không gian trở nên đơn giản hơn rất nhiều.

Sau đây chúng ta xét một số khối đa diện mà việc tọa độ và tính toán phức tạp hơn.

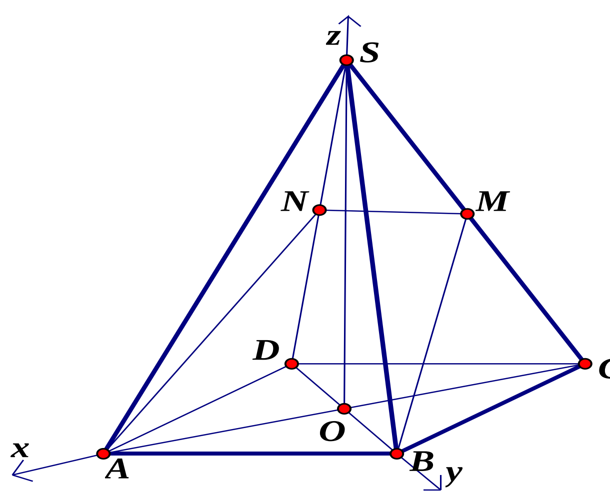
Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh là $\sqrt{5}$ tâm O, SO vuông góc với đ các cạnh bên $SA = 2\sqrt{3}, SB = 3$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

b) Mặt phẳng (AMB) cắt SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có tọa độ các đỉnh như sau: $\begin{cases} O(0;0;0), A(2;0;0), B(0;1;0) \\ C(-2;0;0), D(0;-1;0) \\ S(0;0;2\sqrt{2}), M(-1;0;\sqrt{2}) \end{cases}$



a) Ta có $\cos(SA,BM) = \dfrac{\left|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{BM}\right|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow (SA,BM) = 30^0$.

$d(SA,BM) = \dfrac{\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{SB}}{\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BM}\right]} = ...$

b) Viết phương trình mặt phẳng (AMB) và phương trình đường thẳng SD. Từ đó tìm được tọa giao điểm D của (AMB) và SD.

Ta có: $V_{S.ABMN} = V_{S.AMB} + V_{S.AMN} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SM}\right| + \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{SM}\right| = ...$

5. Bài tập rèn luyện

Bài 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = *a*, $\mathrm{SA} = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC.

ĐS: $d = \frac{a}{6}$.

Bài 2: Cho hình vuông ABCD cạnh *a*. Từ điểm H của cạnh AB dựng SH vuông góc với (ABCD), biết góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và mặt đáy bằng 60^0.

a) Tính SH và khoảng cách từ H đến (SCD).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCK) biết K là trung điểm của cạnh AD.

ĐS: a) $\mathrm{SH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, d\left(\mathrm{H},(\mathrm{SCD})\right) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ b) $\alpha = 90^0$

Bài 3: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh *a*, AC = *a*. Tam giác SAB cân tại S, và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên SA tạo với đáy một góc α sao cho $\tan\alpha = 2$.

a) Tính thể tích khối chóp *S.ABCD*.

b) Tính khoảng cách từ *O* đến (*SCD*)

c) Tính khoảng cách từ *A* đến (*SBC*).

ĐS: b) $d\left(\mathrm{O},(\mathrm{SCD})\right) = \frac{a\sqrt{21}}{14}$ b) $d\left(\mathrm{A},(\mathrm{SBC})\right) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$

Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông, đường cao AB, BC = *2a*, SA = *a*. SA vuông góc với đáy. Biết SC vuông góc với BD.

a) Tính độ dài đoạn thẳng *AD*.

b) Tính thể tích khối chóp *S.ABCD*

c) Gọi M là điểm trên đoạn SA, AM = *x*, Tính độ dài đường cao DE của tam giác BDM theo *a*, *x*. Tìm *x* để DE có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

ĐS: a) $\mathrm{AD} = \frac{a}{2}$ c) $\begin{cases} \mathrm{DE}_{\max} = \frac{a\sqrt{3}}{2} & khi \;\; x = a \\ \mathrm{DE}_{\min} = \frac{a}{2} & khi \;\; x = 0 \end{cases}$

Bài 5: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, với AB =*2a*, $\mathrm{BAC} = 30^0, \mathrm{SA} = 2a$ và vuông góc với đáy.

a) Tính thể tích khối chóp *S.ABC*.

b) Gọi M là điểm di động trên cạnh AC sao cho AM = *x*, $\left(0 \le x \le a\sqrt{3}\right)$. Tính khoảng cách từ S đến BM theo *a*, *x*. Tìm *x* để khoảng cách trên đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Bài 6 (ĐH Đà Nẵng khối A năm 2001): Cho tứ diện S.ABC có $\mathrm{SC} = \mathrm{CA} = \mathrm{AB} = a\sqrt{2}$. SC vuông góc với (ABC), tam giác ABC vuông tại A, các điểm M, N lần lượt thuộc SA và BC sao cho $\mathrm{AM} = \mathrm{CN} = t$ với $\left(0 < t < 2a\right)$.

a) Tính độ dài đoạn MN, tìm *t* để độ dài đoạn MN nhỏ nhất.

b) Khi MN nhỏ nhất, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

Bài 7: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh *a*, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau. Biết khoảng cách từ S đến (ABC) là *h*. Tìm điều kiện của *h* để hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc. Khi đó hãy tính thể tích khối chóp S.ABC.

Bài 8 (ĐH khối B năm 2002): Cho hình lập phương $\mathrm{ABCD.A_1B_1C_1D_1}$ cạnh là *a*.

a) Tính theo *a* khoảng cách giữa hai đường thẳng $\mathrm{A_1B}$ và $\mathrm{B_1D}$.

b) Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh $\mathrm{BB_1, CD, A_1D_1}$. Tính góc giữa MP và $\mathrm{C_1N}$.

Bài 9 (ĐHSP TPHCM năm 1992): Cho hình lập phương $\mathrm{ABCD.A_1B_1C_1D_1}$ cạnh là *a*. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AD và CD. Lấy P trên cạnh BB_1 sao cho BP = $3PB_1$. Xác định và tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (MNP).

ĐS: $\mathrm{S} = \frac{7a^2\sqrt{6}}{16}$

Bài 10: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có AB = a, AD = 2a, AA_1 = a.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD_1 và B_1C.

b) Gọi M là điểm chia đoạn AD theo tỉ số $\frac{AM}{MD}=3$. Hãy tính khoảng cách từ M đến mặt phẳ
(AB_1C).

c) Tính thể tích khối tứ diện AB_1D_1C.

Bài 11: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B , biết BA=a. cạnh b $AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích khối lăng trụ và khoảng cách giữa đường thẳng AM, $B'C$.

Bài 12: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên là 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm của BC. Tính theo a thể t khối chóp $A'.ABC$ và tính cos của góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

Bài 13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA =a, $SB=a\sqrt{3}$. Mặt phẳ (SAB) vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tính thể tích khối ch S.ABCD và cos của góc giữa hai đường thẳng SM và DN.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN CÓ LỜI GIẢI CHI TIẾT

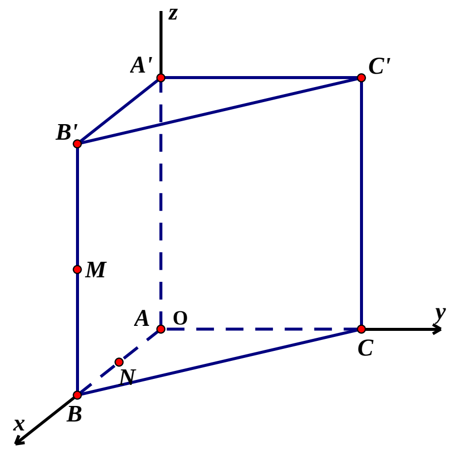
Bài 1. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A′B′C′, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a, AC=2a, AA'=b$
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB′ và AB.

a. Tính theo a và b thể tích của tứ diện A′CMN.

b. Tính tỉ số $\frac{b}{a}$ để $B'C\perp AC'$.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có $O\equiv A$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua cấc điểm B, C, A′. Khi đó $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;2a;0), A'(0;0;b), B'(a;0;b)$, $C'(0;2a;)$, $M\left(a;0;\frac{b}{2}\right), N\left(\frac{a}{2};0;0\right)$



a. Thể tích của tứ diện A′CMN là:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{A'M}\right].\overrightarrow{A'N}\right|$$

Ta có $\overrightarrow{A'C}=(0;2a;-b)$, $\overrightarrow{A'M}=\left(a;0;-\frac{b}{2}\right)$, $\overrightarrow{A'N}=\left(\frac{a}{2};0;-b\right)$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{A'M}\right]=\left(-ab;-ab;-2a^2\right)$$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{A'M}\right].\overrightarrow{A'N}=-\frac{a^2b}{2}+0+2a^2b=\frac{3a^2b}{4}$$

Vậy $V_{A'CMN}=\frac{1}{6}\left|\frac{3a^2b}{4}\right|=\frac{a^2b}{8}$

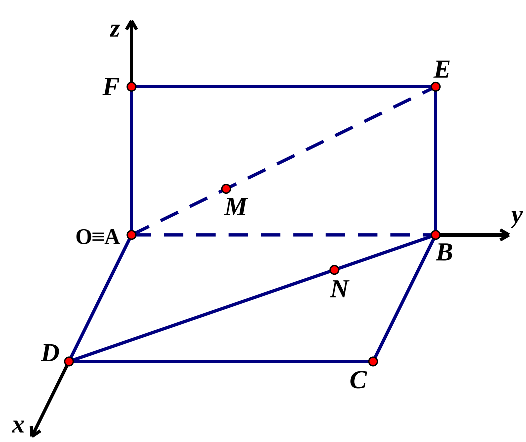
b. Ta có: $\overrightarrow{B'C}=(a;-2a;c)$, $\overrightarrow{AC'}=(0;2a;b)$

$$B'C\perp AC'\Leftrightarrow\overrightarrow{B'C}.\overrightarrow{AC'}=0\Leftrightarrow 0-4a^2+b^2=0\Leftrightarrow b=2a\Leftrightarrow\frac{b}{a}=2$$

Bài 2. Cho hai hình chữ nhật ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau $AB=2a, BC=BE=a$. Trên đường chéo AE lấy điểm M và trên đường chéo BD lất điểm N sao cho $\frac{AM}{AE}=\frac{BN}{BD}=k$ với $k\in(0;1)$. Tính k để MN là đoạn vuông góc chung của AE và BD.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $A\equiv O$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua D, B, F. Khi đó $A(0;0;0)$, $B(0;2a;0)$, $C(a;2a;0)$, $D(a;0;0)$, $E(0;2a;a)$, $F(0;0;a)$



Ta có: $\frac{AM}{AE}=k\Leftrightarrow AM=kAE,\ k\in(0;1)$

Mà $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AE}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AE}$, đo đó tọa độ của M là:

$$\begin{cases}x_M=kx_E=0\\ y_M=ky_E=2ka\\ z_M=kz_E=ka\end{cases}\text{ hay } M(0;2ka;ka)$$

Tương tự $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N-0=k(a-0)\\ y_N-2a=k(0-2a)\\ z_N-0=k(0-0)\end{cases}$ hay $N(ka;2a-2ka;0)$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=(ka;2a-4ka;-ka)\\ \overrightarrow{AE}=(0;2a;a)\\ \overrightarrow{BD}=(a;-2a;0)\end{cases}$

MN là đoạn vuông góc chung của AE và BD $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AE}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a^2-8ka^2-ka^2=0\\ ka^2-4a^2+8ka^2=0\end{cases}\Leftrightarrow k=\dfrac{4}{9}$

Vậy MN là đoạn vuông góc chung của AE và BD khi $k=\dfrac{4}{9}$

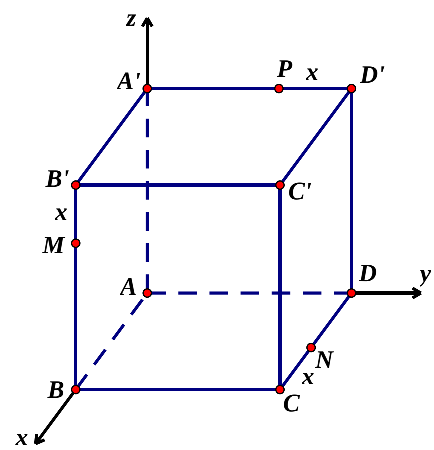
Bài 3. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh bằng a. Trên các cạnh BB′, CD, A′D′ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $B'M=CN=D'P=x$, $x\in(0;a)$.

a. Chứng minh $AC'\perp(MNP)$.

b. Xác định vị trí của M, N, P để tam giác MNP có diện tích bé nhất.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có $O\equiv A$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua các điểm B, D, A′. Khi đó $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;a)$, $B'(a;0;a)$, $C'(a;a;a)$, $D'(0;a;a)$, $M(a;0;a-x)$, $N(a-x;a;0)$, $P(0;a-x;a)$



a. Ta có $\overrightarrow{AC'}=(a;a;a)$

$\overrightarrow{MN}=(-x;a;-a+x)$

$\overrightarrow{MP}=(-a;a-x;x)$

$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN}=0\\ \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MP}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AC'}\perp\overrightarrow{MN}\\ \overrightarrow{AC'}\perp\overrightarrow{MP}\end{cases}\Rightarrow AC'\perp(MNP)$ (đpcm)

b. Ta có $MN=MP=NP=\sqrt{x^2+a^2+(a-x)^2}=\sqrt{2x^2-2ax+2a^2}$

$\Rightarrow$Tam giác MNP là tam giác đều có cạnh bằng $\sqrt{2}\sqrt{x^2-ax+a^2}$

$\Rightarrow$Diện tích của tam giác MNP là: $S=\dfrac{MN^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x^2-ax+a^2\right)$

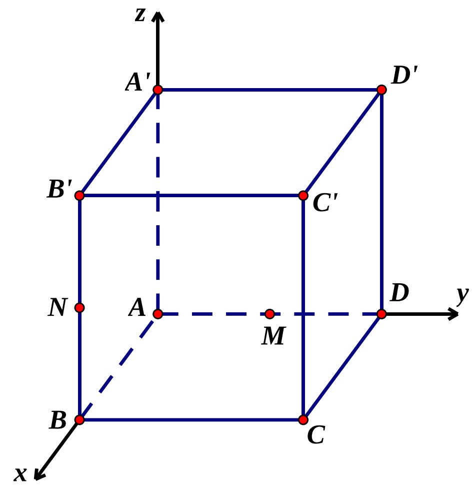
hay $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^2}{4}\right]\geq\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{8}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{2}$

Vậy $\min(S)=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{8}$ khi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BB′, CD, A′D′.

Bài 4. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ có cạnh bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BB′. Chứng minh $AC'\perp(AB'D')$ và tính thể tích của khối tứ diện A′CMN.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có như hình vẽ, ta có: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$ $D(0;a;0)$, $A'(0;0;a)$, $B'(a;0;a)$, $C'(a;a;a)$, $D'(0;a;a)$



a. Ta có $\overrightarrow{A'C}=(a;a;-a)$, $\overrightarrow{AB'}=(a;0;a)$, $\overrightarrow{AD'}=(0;a;a)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AB'}=0$ và $\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AD'}=0$

$\Rightarrow A'C\perp AB'$ và $A'C\perp AD'$

$\Rightarrow A'C\perp(AB'D')$ (đpcm)

b. Thể tích của tứ diện A'CMN là:

$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{A'N},\overrightarrow{A'M}\right].\overrightarrow{A'C}\right|$

Ta có: $N\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$, $M\left(0;\frac{a}{2};0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'N}=\left(a;0;-\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{A'M}=\left(0;\frac{a}{2};-a\right)$ và $\overrightarrow{A'C}=(a;a;-a)$

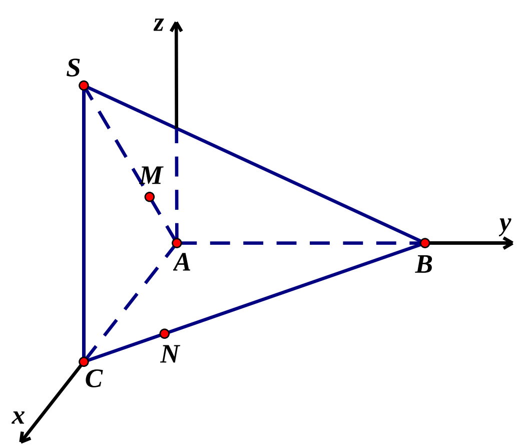
$\Rightarrow \left[\overrightarrow{A'N},\overrightarrow{A'M}\right]=\left(\frac{a^2}{4};a^2;\frac{a^2}{2}\right)$ và $\left[\overrightarrow{A'N},\overrightarrow{A'M}\right].\overrightarrow{A'C}=\frac{a^3}{4}+a^3-\frac{a^3}{2}=\frac{3a^3}{4}$

Vậy $V=\frac{1}{6}.\frac{3a^3}{4}=\frac{a^3}{8}$ (đvtt)

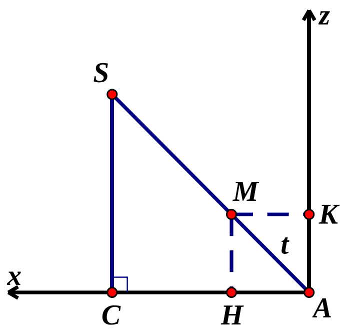
Bài 5. Cho tứ diện SABC có $SC=CA=AB=a\sqrt{2}$, $SC\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại A. Các điểm $M\in SA$, $N\in BC$ sao cho $AM=CN=t$ $(0<t<2a)$. Tính t để MN ngắn nhất. Trong trường hợp này chứng minh MN là đoạn vuông góc chung của BC và SA đồng thời tính thể tích của khối tứ diện ABMN.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $A\equiv O(0;0;0)$, tia Ox chứa AC, tia Oy chứa AB và tia Oz cùng hướng với vec-tơ $\overrightarrow{CS}$. Khi đó ta có $A(0;0;0)$, $B(0;a\sqrt{2};0)$, $C(a\sqrt{2};0;0)$, $S(a\sqrt{2};0;a\sqrt{2})$



Vẽ $MH \perp Ax\ (H \in Ax)$ và $MK \perp Az\ (K \in Az)$

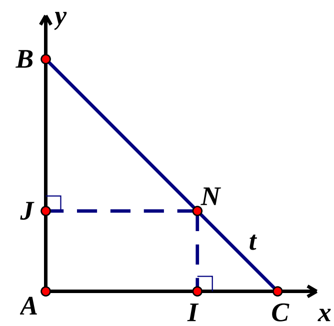


Vì tam giác SCA vuông cân ở C nên MHAK là hình vuông có cạnh huyền bằng t

$\Rightarrow AH = AK = \dfrac{t\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{t\sqrt{2}}{2};0;\dfrac{t\sqrt{2}}{2}\right)$

Vẽ $NI \perp Ax\ (I \in Ax)$ và $NJ \perp Ay\ (J \in Ay)$



Vì tam giác INC vuông cân ở I

$\Rightarrow IN = IC = \dfrac{NC\sqrt{2}}{2} = \dfrac{t\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow N\left(a\sqrt{2} - \dfrac{t\sqrt{2}}{2};\dfrac{t\sqrt{2}}{2};0\right)$

a. Ta có: $\overrightarrow{MN} = \left(\sqrt{2}(a-t);\dfrac{t\sqrt{2}}{2};-\dfrac{t\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{2(a-t)^2 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}} = \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2} = \sqrt{3\left(t - \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{3}} \ge a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Đẳng thức xảy ra khi $t = \dfrac{2a}{3}$

Vậy MN ngắn nhất bằng $a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ khi $t = \dfrac{2a}{3}$

b. Khi MN ngắn nhất $\left(t = \dfrac{2a}{3}\right)$, ta có $\overrightarrow{MN} = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{3};\dfrac{a\sqrt{2}}{3};-\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\right)$

Ta còn có $\overrightarrow{SA} = \left(a\sqrt{2};0;a\sqrt{2}\right)$ và $\overrightarrow{BC} = \left(a\sqrt{2};-a\sqrt{2};0\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SA} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{SA} \\ \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

Vậy MN là đường vuông góc chung của SA và BC (đpcm)

Bài 6. Cho khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và $AB' \perp BC'$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Giải

Gọi O là trung điểm của AC.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ là O, tia Ox đi qua A, tia Oy đi qua B.

Khi đó $A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$,

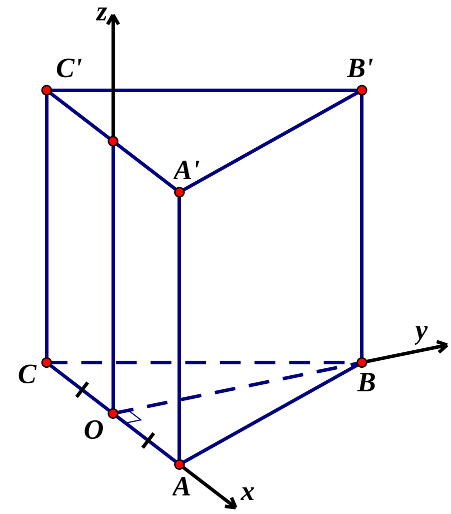
$C\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $B'\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right)$, $C'\left(-\frac{a}{2};0;h\right)$

$\left(h=AA'=BB'=...\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB'}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right)$ và $\overrightarrow{BC'}=\left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right)$

$AB'\perp BC'\Leftrightarrow \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}=0\Leftrightarrow \frac{a^2}{4}-\frac{3a^2}{4}+h^2=0\Leftrightarrow h=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy thể tích của khối lăng trụ là $V=S_{\Delta ABC}.h=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$



Bài 7. Cho khối lập phương ABCD.A′B′C′D′ có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh A′B′, BC, DD′.

a. Tính góc giữa hai đường thẳng AC′ và A′B.

b. Chứng minh $AC'\perp(MNP)$ và tính thể tích của khối tứ diện AMNP.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ A′xyz như hình vẽ, ta có: $A'(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C'(1;1;0)$, $D'(0;1;0)$, $A(0;0;1)$

$B(1;0;1)$, $C(1;1;1)$, $D(0;1;1)$, $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $N\left(1;\frac{1}{2};1\right)$, $P\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$

a. Ta có $\overrightarrow{AC'}=(1;1;-1)$ và $\overrightarrow{A'B}=(1;0;1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{A'B}=0$

$\Rightarrow$ Góc giữa hai đường thẳng AC′ và A′B có số đo bằng 90^0

b. $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$ và $\overrightarrow{MP}=\left(-\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN}=0$ và $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MP}=0$

$\Rightarrow AC'\perp MN$ và $AC'\perp MP$

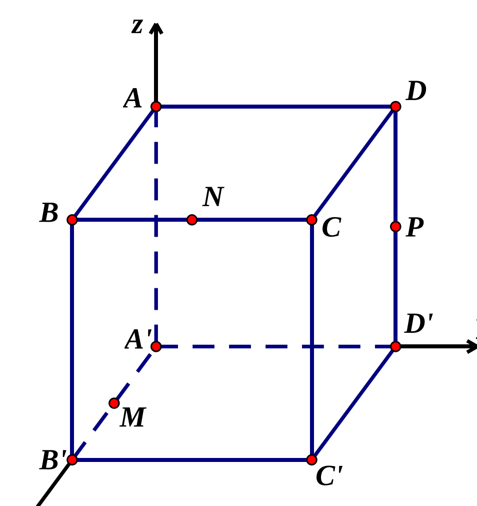
$\Rightarrow AC'\perp(MNP)$ (đpcm)

Thể tích khối tứ diện AMNP là:

$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MA}\right|$ với $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=\left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$,

$\overrightarrow{MA}=\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$

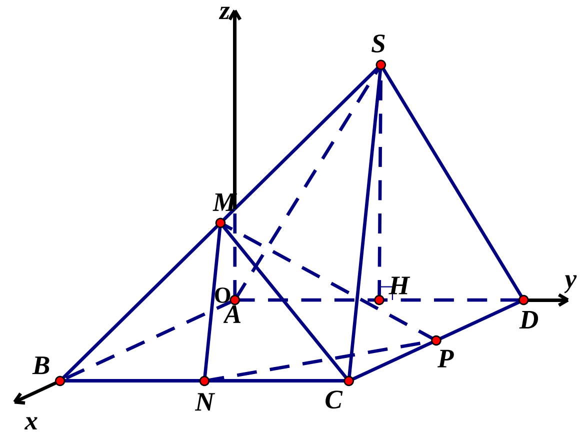
Vậy $V=\frac{1}{6}.\left|\frac{3}{8}+0+\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{16}$ (đvtt)



Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Chứng minh rằng $AM\perp BP$ và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, tia Ox đi qua B, tia Oy đi qua D, tia Oz cùng hướng với vec-tơ $\overrightarrow{HS}$ (H là trung điểm của AD), khi đó $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $S\left(0;\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $N\left(a;\frac{a}{2};0\right)$, $P\left(\frac{a}{2};a;0\right)$



Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$ và $\overrightarrow{BP}=\left(-\frac{a}{2};a;0\right)$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP}=0\Rightarrow AM\perp BP$ (đpcm)

Thể tích của CMNP là $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{CP}\right|$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{CP}=\left(-\frac{a}{2};0;0\right)\\ \overrightarrow{CM}=\left(-\frac{a}{2};-\frac{3a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right),\ \overrightarrow{CN}=\left(0;-\frac{a}{2};0\right)\end{cases}$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right]=\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{8};0;\frac{a^2}{4}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{CP}=-\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$

Vậy $V_{CMNP}=\frac{1}{6}\left|-\frac{a^3\sqrt{3}}{16}\right|=\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$

Bài 9. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên hợp với đáy góc 45^0. Gọi O là tâm của ABCD và I, J, K lần lượt là trung điểm SO, SD, DA.

a. Xác định đoạn vuông góc chung của IJ và AC.
b. Tính thể tích của khối tứ diện AIJK.

Giải

a. IJ là đường trung bình của tam giác SOD.

$\Rightarrow IJ \parallel OD \Rightarrow IJ\perp SO$ hay $IJ\perp IO$ (1)

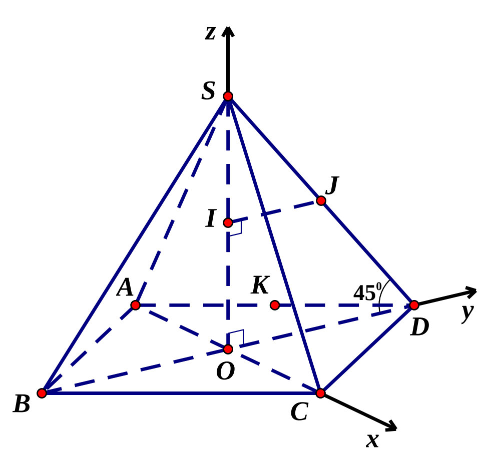
$SO\perp(ABCD)\Rightarrow SO\perp AC$ hay $IO\perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra IO là đoạn vuông góc chung của IJ và AC.

b. Góc giữa cạnh bên SD và đáy (ABCD) là $SDO=45^0$

$\Rightarrow$ Tam giác SOD vuông cân tại O

$\Rightarrow OS=OD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có O trùng với tâm của hình vuông ABCD, tia Ox đi qua C, tia Oy đi qua D và tia Oz đi qua S. \

Khi đó $A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$,

$D\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $I\left(0;0;\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$, $J\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$, $K\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right)$

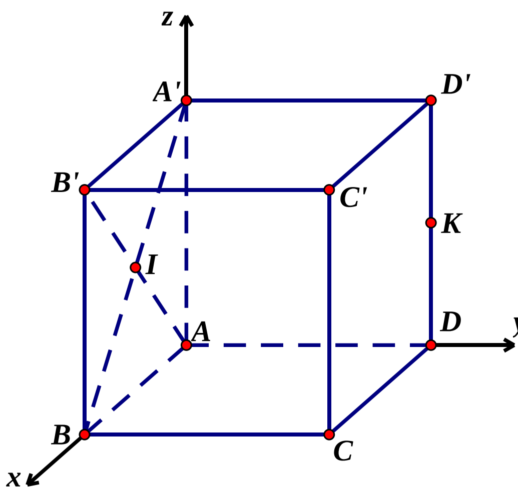
Thể tích của tứ diện AIJK là $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right].\overrightarrow{AK}\right|$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AI}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)\\ \overrightarrow{AJ}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)\\ \overrightarrow{AK}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right]=\left(-\frac{a^2}{8};0;\frac{a^2}{4}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right].\overrightarrow{AK}=-\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$

Vậy $V_{AIJK}=\frac{1}{6}\left|-\frac{a^3\sqrt{2}}{32}\right|=\frac{a^3\sqrt{2}}{192}$

Bài 10. Cho khối lập phương ABCD.A′B′C′D′ có cạnh bằng a. K là trung điểm của DD′ và O là tâm của hình vuông AA′B′B. Tính thể tích của khối tứ diện AIKA′. Suy ra khoảng cách từ A′ đến mặt phẳng (AB′K)

Giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có $A\equiv O$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, D, A′. Khi đó $A(0;0;0)$, $A'(0;0;a)$, $B(a;0;0)$, $B'(a;0;a)$, $C(a;a;0)$ $C'(a;a;a)$, $D(0;a;0)$, $D'(0;a;a)$, $K\left(0;a;\frac{a}{2}\right)$, $I\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$ (I là trung điểm của AB′ và A′B)

Thể tích của khối tứ diện AIKA′ là $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AK}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

Ta có $\overrightarrow{AI}=\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{AK}=\left(0;a;\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{AA'}=(0;0;a)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AK}\right]=\left(-\frac{a^2}{2};-\frac{a^2}{4};\frac{a^2}{2}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AK}\right].\overrightarrow{AA'}=\frac{a^3}{2}$

Vậy $V_{AIKA'}=\frac{1}{6}.\frac{a^3}{2}=\frac{a^3}{12}$

Ta có $(AB'K)\equiv(AIK)$

$\Rightarrow d\left(A',(AB'K)\right)=d\left(A',(AIK)\right)=\frac{3V_{A'.AIK}}{S_{\Delta AIK}}$ với $V_{A'.AIK}=\frac{a^3}{12}$ và

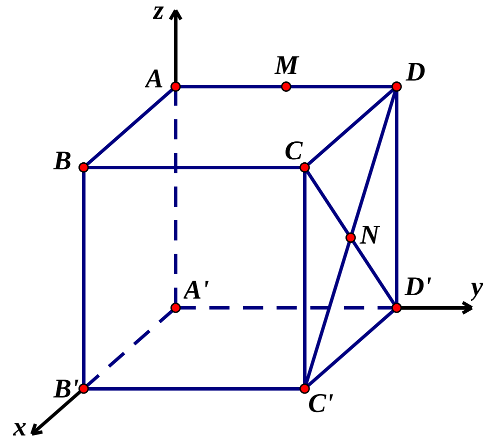
$S_{\Delta AIK}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AK}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^4}{4}}=\frac{3a^2}{8}$

Vậy $d\left(A',(AB'K)\right)=\frac{3a^2}{12}:\frac{3a^2}{8}=\frac{2a}{3}$

Bài 11. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của cạnh AD và N là tâm của hình vuông CC′D′D . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện BC′MN.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ A′xyz như hình vẽ.



Ta có $A'(0;0;0)$, $B'(a;0;0)$, $C'(a;a;0)$,

$D'(0;a;0)$, $A(0;0;a)$, $B(a;0;a)$,

$C(a;a;a)$, $D(0;a;a)$, $M\left(0;\frac{a}{2};a\right)$, $N\left(\frac{a}{2};a;\frac{a}{2}\right)$

Phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện BC′MN có dạng:

$x^2+y^2+z^2+2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+\delta=0$

Bán kính mặt cầu nói trên là $R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta}$

Mặt cầu (S) đi qua B, C′, M, N nên:

$$\begin{cases} a^2+0+a^2+2\alpha a+0+2\gamma a+\delta=0 \\ a^2+a^2+0+2\alpha a+2\beta a+0+\delta=0 \\ 0+\frac{a^2}{4}+a^2+0+\beta a+2\gamma a+\delta=0 \\ \frac{a^2}{4}+a^2+\frac{a^2}{4}+\alpha a+2\beta a+\gamma a+\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha a+2\gamma a+\delta=-2a^2 & (1) \\ 2\alpha a+2\beta a+\delta=-2a^2 & (2) \\ \beta a+2\gamma a+\delta=-\frac{5a^2}{4} & (3) \\ \alpha a+2\beta a+\gamma a+\delta=-\frac{6a^2}{4} & (4) \end{cases}$$

(1) trừ (2) $\Rightarrow \beta=\gamma$ (5)

(2) trừ (3) kết hợp với (5) $\Rightarrow 2\alpha-\beta=-\frac{3a}{4}$ (6)

(3) trừ (4) kết hợp với (5) ta được $\alpha=-\frac{a}{4}$ (7)

(6) trừ (7) $\Rightarrow \beta=\frac{a}{4}$ mà $\gamma=\beta$ nên $\gamma=\frac{a}{4}$

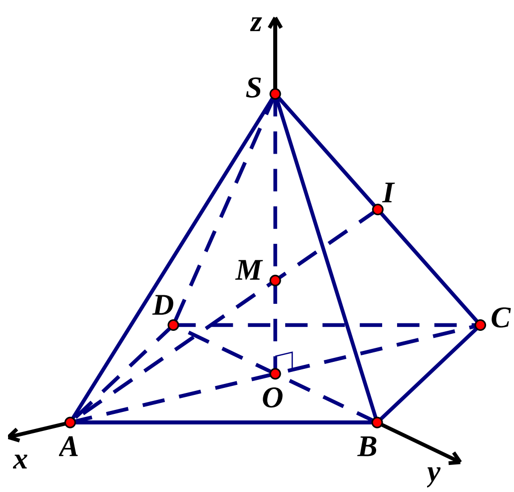
Thay α,β vào (1) ta được $\delta=-2a^2$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện BC′MN là: $R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta}=\sqrt{\frac{a^2}{16}+\frac{a^2}{16}+\frac{a^2}{16}+2a^2}=\frac{a\sqrt{35}}{6}$

Bài 12. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Gọi I là trung điểm của cạnh bên SC. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABI)

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho gốc tọa độ là tâm O của hình vuông ABCD, tia Ox chứa OA, tia Oy chứa OB và tia Oz chứa OS.



Khi đó $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};a\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $S(0;0;h)$

Giao điểm M của SO và AI là trọng tâm của tam giác SAC và ta có $M\left(0;0;\frac{h}{3}\right)$

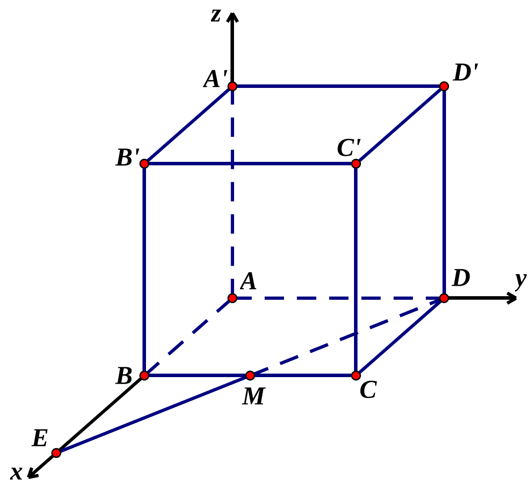
Mp(ABI) cũng là mp(ABM). Vậy, phương trình của mp(ABI) là:

$$\frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{z}{\frac{h}{3}}=1 \text{ hay } \frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{z}{\frac{h}{3}}-1=0$$

vậy khoảng cách từ S tới mp(ABI) là: $d=\dfrac{\left|\frac{h}{\frac{h}{3}}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{h}{3}}\right)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{a^2}+\frac{9}{h^2}}}$ hay $d=\dfrac{2ah}{\sqrt{4h^2+9a^2}}$

Bài 13. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (A'MD)

Giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Kéo dài DM cắt AB tại E.

Ta có $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow$ BM là đường trung bình của tam giác ADE

$\Rightarrow$ B là trung điểm của AE

$\Rightarrow AE=2AB=2$. Khi đó:

$A(0;0;0)$, $E(2;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$.

Mp(A'MD) cũng là mặt phẳng (A'ED) nên phương trình của mặt phẳng (A'MD) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1 \Leftrightarrow x+2y+2z-2=0$

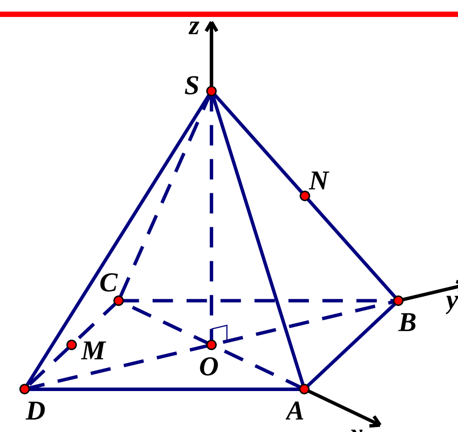
$\Rightarrow$ Khoảng cách từ A tới mp(A'MD) là $d\left(A,\left(A'MD\right)\right)=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{2}{3}$

Bài 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a và $BAD=120^0$, đường cao SO (O là tâm của ABCD), $SO=2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC và SB.

a. Tính thể tích của khối tứ diện SAMN.

b. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một mặt cầu tâm O và tiếp xúc với bốn mặt bên của S.ABCD. Tính thể tích của khối cầu tạo bởi mặt cầu nói trên.

Giải



Ta có $BAD=120^0 \Rightarrow ABC=60^0$

ABCD là hình thoi cạnh bằng a và $ABC=60^0$

$\Rightarrow$ ABC, ADC là các tam giác đều cạnh bằng a.

$\Rightarrow OA=OC=\frac{a}{2}$ và $OB=OD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Khi đó $O(0;0;0)$, $A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$,

$C\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $D\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $S(0;0;2a)$, $M\left(-\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$, $N\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{4};a\right)$

a. Thể tích của tứ diện SAMN là $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{SN}\right|$

$\overrightarrow{SA}=\left(\frac{a}{2};0;-2a\right)$, $\overrightarrow{SM}=\left(-\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{4};-2a\right)$, $\overrightarrow{SN}=\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{4};-a\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right]=\left(-\frac{a^2\sqrt{3}}{2};\frac{3a^2}{2};-\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{SN}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}+\frac{a^3\sqrt{3}}{8}=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{SAMN}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

b. Mặt cầu tâm O và tiếp xúc với bốn mặt bên.

Phương trình mp(SAB) là: $\frac{x}{\frac{a}{2}}+\frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}+\frac{z}{2a}=1$ hay $4\sqrt{3}x+4y+\sqrt{3}z-2a\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow d\left(O,(SAB)\right)=\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{67}}=2a\sqrt{\frac{3}{67}}$

Tương tự ta cũng có: $d\left(O,(SBC)\right)=d\left(O,(SCD)\right)=d\left(O,(SDA)\right)=2a\sqrt{\frac{3}{67}}$

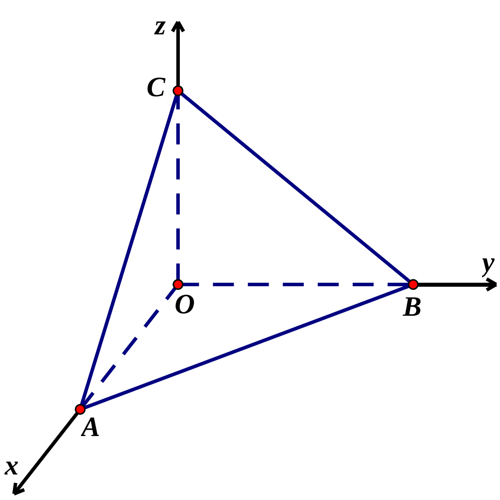
Vậy tồn tại duy nhất mặt cầu tâm O và tiếp xúc với bốn mặt bên (SAB), (SBC), (SCD), (SDA), bán kính của mặt cầu này bằng $2a\sqrt{\frac{3}{67}}$ (đpcm)

Bài 15. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một và $OA^2+OB^2+OC^2=3$. Tính thể tích của OABC khi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Đặt $OA=a, OB=b$ và $OC=c$ $(a,b,c>0)$ ta có $a^2+b^2+c^2=3$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, ta có $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$



Phương trình mp(ABC) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

hay $bcx+acy+abz-abc=0$

$\Rightarrow d\left(O,(ABC)\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $\begin{cases}a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}\end{cases}$

$$\Rightarrow\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge 9\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge 9\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\ge\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}\le\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow d\left(O,\left(ABC\right)\right)\le\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a^2=b^2=c^2=1$ hay $a=b=c=1$

Vậy $d\left(O,\left(ABC\right)\right)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$ khi $a=b=c=1$ và trong trường hợp nà

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{abc}{6}=\frac{1}{6}\text{ (đvtt)}$$

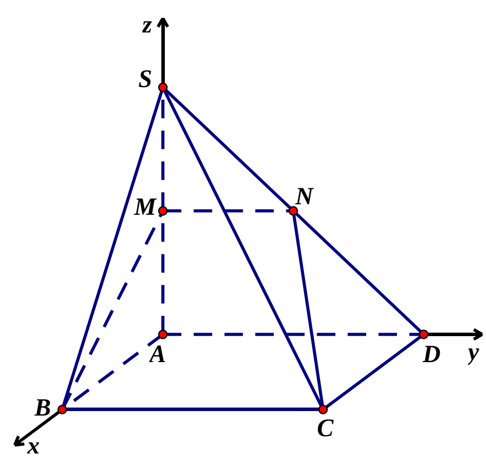
Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA\perp\left(ABCD\right)$ và $SA=2a$ Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

a. Tính khoảng cách từ A đến mp(BCM) và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CN.
b. Tính cô-sin góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC)
c. Tính tỉ số thể tích giữa hai phần của hình chóp S.ABCD chia bởi mp(BCM)

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có $A\equiv O$, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD và tia Oz chứa AS. Khi đ

$A\left(0;0;0\right)$, $B\left(a;0;0\right)$, $C\left(a;a;0\right)$, $D\left(0;a;0\right)$, $S\left(0;0;2a\right)$, $M\left(0;0;a\right)$, $N\left(0;\frac{a}{2};a\right)$



Ta có $\overrightarrow{BC}=\left(0;a;0\right)$ và $\overrightarrow{BM}=\left(-a;0;a\right)$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BM}\right]=\left(a^2;0;a^2\right)$$

a. Mp(BCM) có vtpt

$$\vec{n}=\frac{1}{a^2}.\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BM}\right]=\left(1;0;1\right)$$

Vậy phương trình của mp(BCM) là:

$1\left(x-a\right)+0\left(y-0\right)+1\left(z-0\right)=0$ hay $x+z-a=0$

$$\Rightarrow d\left(A,\left(BCM\right)\right)=\frac{\left|-a\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Ta có:

$$\overrightarrow{BS}=\left(-a;0;2a\right),\ \overrightarrow{CN}=\left(-a;-\frac{a}{2};a\right),\overrightarrow{SC}=\left(a;a;-2a\right)$$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{CN}\right]=\left(a^2;-a^2;\frac{a^2}{2}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{SC}=a^3-a^3-a^3=-a^3$$

$\Rightarrow$ Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, CN là: $d\left(SB,CN\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{SC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{CN}\right]\right|}=\frac{\left|-a^3\right|}{\sqrt{a^4+a^4+\frac{a^4}{4}}}=\frac{a^3}{\frac{3a^2}{2}}=\frac{2a}{3}$

b. $\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(0;2a^2;a^2\right)$

$\Rightarrow$ Mp(SCD) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(0;2;1\right)$

$\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(2a^2;0;a^2\right)\Rightarrow$ Mp(SBC) có vec-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'}=\left(2;0;1\right)$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC), ta có: $\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|.\left|\overrightarrow{n'}\right|}=\frac{\left|-1\right|}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\frac{1}{5}$

c. Thể tích của khối chóp S.ABCD là $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{1}{3}a^2.2a=\frac{2a^3}{3}$

Mp(BCM) cắt SD tại N, ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\left(BCM\right)\cap\left(SAD\right)=MN\\ \left(BCM\right)\supset BC,\left(SAD\right)\supset AD\\ BC\,//\,AD\end{array}\right\}\Rightarrow MN\,//\,AD\,//\,BC\qquad(1)$$

Mp(BCM) chia khối chóp thành hai phần: khối chóp S.BCMN và khối đa diện còn lại.

Thể tích của khối chóp S.BCMN là $V_1=\frac{1}{3}S_{BCMN}.d\left(S,\left(BCM\right)\right)$ trong đó:

BCMN là hình thang có đáy lớn $BC=a$, đáy nhỏ $MN=\frac{a}{2}$, chiều cao $BM=\sqrt{AB^2+AM^2}=a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow S_{BCMN}=\frac{1}{2}\left(AB+MN\right).BM=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right).a\sqrt{2}=\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$$

$$d\left(S,\left(BCM\right)\right)=\frac{\left|2a-a\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}\Rightarrow V_1=\frac{1}{3}.\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}.\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a^3}{4}$$

Vậy tỉ số thể tích giữa hai phần của hình chóp S.ABCD chia bởi mp(BCM) là: $k=\frac{V_1}{V-V_1}=\frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{2a^3}{3}-\frac{a^3}{4}}=\frac{3}{5}$

Chú ý: ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(SAB\right)\supset BM\Rightarrow BC\perp BM\qquad(2)$

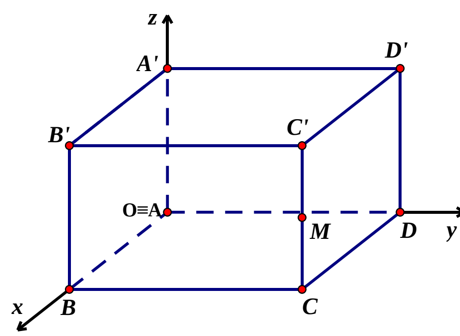
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ BCMN là hình thang có đường cao BM.

Bài 17. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có $AB=AD=a$, $AA'=b$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC′.

a. Tính thể tích của khối tứ diện BDA′M.

b. Tìm tỉ số $\frac{a}{b}$ để $\left(A'BD\right)\perp\left(MBD\right)$

Giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc $O\equiv A$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua các điểm B, D, A′. Khi đó $A\left(0;0;0\right)$, $B\left(a;0;0\right)$, $C\left(a;a;0\right)$, $D\left(0;a;0\right)$, $A'\left(0;0;b\right)$, $C'\left(a;a;b\right)$, $M\left(a;a;\frac{b}{2}\right)$

a. Thể tích của khối tứ diện BDA′M

$$V_{BDA'M}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{BA'}\right|$$

với $\begin{cases} \overrightarrow{BD}=(-a;a;0),\ \overrightarrow{BM}=\left(0;a;\frac{b}{2}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right]=\left(\frac{ab}{2};\frac{ab}{2};-a^2\right) \\ \overrightarrow{BA'}=(-a;0;b)\Rightarrow\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{BA'}=-\frac{3a^2b}{2} \end{cases}$

vậy $V_{BDA'M}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{BA'}\right|=\frac{a^2b}{4}$

b. Mặt phẳng (BDM) có vec-tơ pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right]=\left(\frac{ab}{2};\frac{ab}{2};-a^2\right)$

Mặt phẳng (A'BD) có vec-tơ pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA'}\right]=\left(ab;ab;a^2\right)$

Hai mặt phẳng (BDM) và (A'BD) vuông góc với nhau

$\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow\frac{a^2b^2}{2}+\frac{a^2b^2}{2}-a^2=0\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow\frac{a}{b}=1$

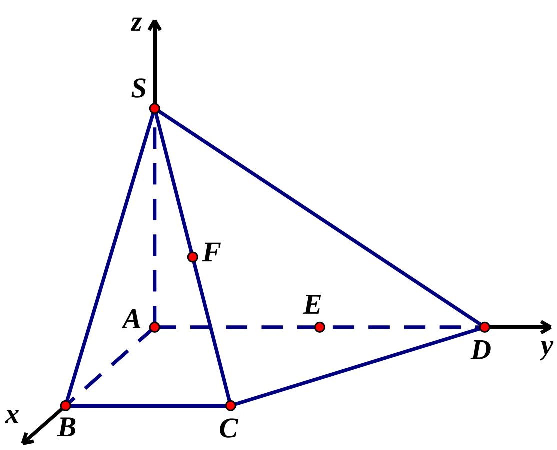
Bài 18. Cho hình chóp S.ABCD có chiều cao $SA=a$, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B $AB=BC=a,\ AD=2a$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AD và SC.

a. Tính khoảng cách từ A đến mp(SCD) và thể tích của tứ diện SBEF.

b. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SCDE.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $O\equiv A$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua các điểm B, D, S. Khi đó $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;2a;0)$, $S(0;0;a)$, $E(0;a;0)$, $F\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$



a. Phương trình mp(SCD) có dạng: $\frac{x}{m}+\frac{y}{2a}+\frac{z}{a}=1$. Mặt phẳng này đi qua điểm $C(a;a;0)$ nên: $\frac{a}{m}+\frac{a}{2a}=1\Leftrightarrow m=2a$

Vậy phương trình của mp(SCD) là: $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2a}+\frac{z}{a}=1$ hay $x+y+2z-2a=0$

$\Rightarrow d\left(A,(SCD)\right)=\frac{|-2a|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{2a\sqrt{6}}{3}$

Thể tích của tứ diện SBEF là: $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SE}\right].\overrightarrow{SF}\right|$

Ta có $\overrightarrow{SB}=(a;0;-a)$, $\overrightarrow{SE}=(0;a;-a)$, $\overrightarrow{SF}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-\frac{a}{2}\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SE}\right]=\left(a^2;a^2;a^2\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SE}\right].\overrightarrow{SF}=\frac{a^3}{2}+\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{2}=\frac{a^3}{2}$

Vậy $S_{SBEF}=\frac{1}{6}\left|\frac{a^3}{2}\right|=\frac{a^3}{12}$

b. Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SCDE có dạng

$x^2+y^2+z^2+2Mx+2Ny+2Pz+Q=0$

Mặt cầu đi qua S, C, D, E nên $\begin{cases} a^2+2Pa+Q=0 \\ a^2+a^2+2Ma+2Na+Q=0 \\ 4a^2+4Na+Q=0 \\ a^2+2Na+Q=0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta có: $M=-\dfrac{a}{2}$, $N=-\dfrac{3a}{2}$, $P=-\dfrac{3a}{2}$, $Q=2a^2$.

Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SCDE có tâm $I\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{3a}{2};\dfrac{3a}{2}\right)$ và bán kính

$$R=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{9a^2}{4}+\frac{9a^2}{4}-2a^2}=\frac{a\sqrt{11}}{2}$$

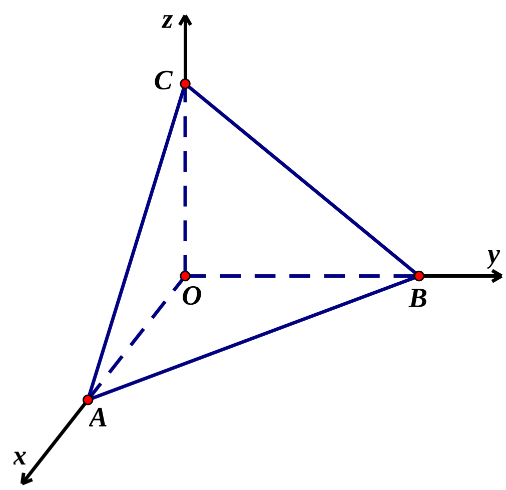
Bài 19. Cho tứ diện OABC có các tam giác OAB, OBC và OCA là các tam giác vuông đỉnh O. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) và các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB). Bằng phương pháp tọa độ hãy chứng minh:

a. Tam giác ABC có ba góc nhọn.

b. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.



Ta có $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, với $a>0, b>0, c>0$

$(a=OA,\ b=OB,\ c=OC)$

a. Chứng minh tam giác ABC có ba góc nhọn

$\overrightarrow{AB}=(-a;b;0)$, $\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2>0$

Vậy góc A của tam giác ABC là góc nhọn.

Chứng minh tương tự, các góc B và C của tam giác ABC cũng là các góc nhọn.

b. Chứng minh $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

Phương trình của mp(ABC) là: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

$\Rightarrow$ Mp(ABC) có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left(\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{c}\right)$

Mặt phẳng (OBC) chính là mặt phẳng (Oyz) nên có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$

α là góc hợp bởi mp(ABC) và mp(OBC), ta có: $\cos\alpha=\dfrac{\left|\vec{n}.\vec{i}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{i}\right|}=\dfrac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}\Rightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$

Tương tự, ta có $\cos^2\beta=\dfrac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$, $\cos^2\gamma=\dfrac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$

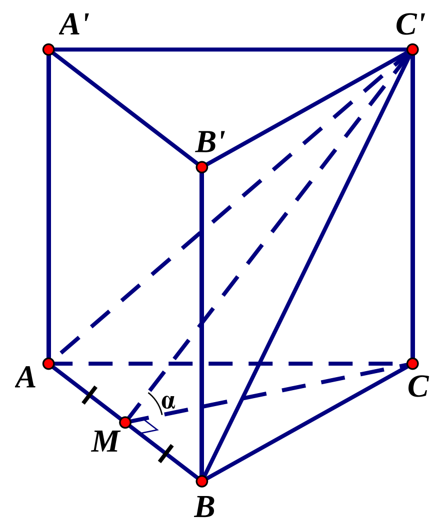
Vậy $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (đpcm)

Bài 20. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A′B′C′ có cạnh đáy băng a và mp(C′AB) hợp với mặt đáy (ABC) một góc bằng $\alpha\left(0^0<\alpha<90^0\right)$

a. Tính theo a và α thể tích của khối tứ diện C′A′AB.

b. Tìm α để hai mặt phẳng (ABC′) và (A′B′C) vuông góc với nhau.

Giải



Gọi M là trung điểm của AB, ta có $MC\perp AB$ (vì ABC là tam giác đều)

$\Rightarrow M'C\perp AB$ (định lý ba đường vuông góc)

$\Rightarrow CMC'=\alpha$: góc hợp bởi mp(C′AB) và mặt đáy (ABC)

Ta còn có $\begin{cases}CM\perp AB\\ CM\perp AA'\end{cases}\Rightarrow CM\perp\left(AA'B\right)$

$\Rightarrow CM=d\left(C,\left(AA'B\right)\right)=d\left(C',\left(AA'B\right)\right)$ (vì $CC'/\!/\left(AA'B\right)$)

a. Thể tích của khối tứ diện C′A′AB là:

$$V_{C'A'AB}=V_{C'.A'AB}=\frac{1}{3}S_{A'AB}.d\left(C',\left(A'AB\right)\right)=\frac{1}{3}S_{A'AB}.CM$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}AA'.AB.CM=\frac{1}{6}AA'.a.\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

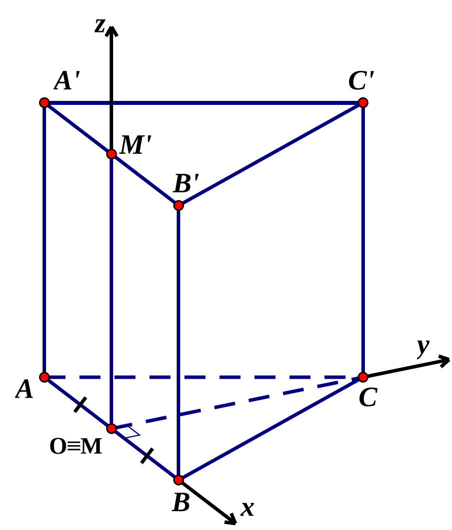
Tam giác MCC′ vuông tại C′ và có $CMC'=\alpha,\ MC=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow CC'=MC\tan\alpha=\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\alpha=AA'$

Vậy $V_{C'.A'AB}=\frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\alpha.a.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\tan\alpha}{8}$

b. Tìm α để $\left(ABC'\right)\perp\left(A'B'C\right)$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có $O\equiv M$, ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, C, M′ (M′ là trung điểm của A′B′). Khi đó $M\left(0;0;0\right)$, $A\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $A'\left(-\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\alpha\right)$,

$B'\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\alpha\right)$, $C'\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\alpha\right)$



Ta có:

$\overrightarrow{AB}=\left(a;0;0\right)$, $\overrightarrow{AC'}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\alpha\right)$,

$\overrightarrow{A'B'}=\left(a;0;0\right)$, $\overrightarrow{A'C}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\alpha\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC'}\right]=\left(0;-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\tan\alpha;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)\\ \left[\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C}\right]=\left(0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\tan\alpha;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vtpt của hai mặt phẳng (ABC′) và (A′B′C) lần lượt là:

$\overrightarrow{n_1}=\frac{2}{a^2\sqrt{3}}.\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC'}\right]=\left(0;-\tan\alpha;1\right)$ và $\overrightarrow{n_2}=\frac{2}{a^2\sqrt{3}}.\left[\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C}\right]=\left(0;\tan\alpha;1\right)$

$(ABC')\perp(A'B'C)\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow -\tan^2\alpha+1=0\Leftrightarrow \tan\alpha=1\left(0^0<\alpha<90^0\right)\Leftrightarrow \alpha=45^0$

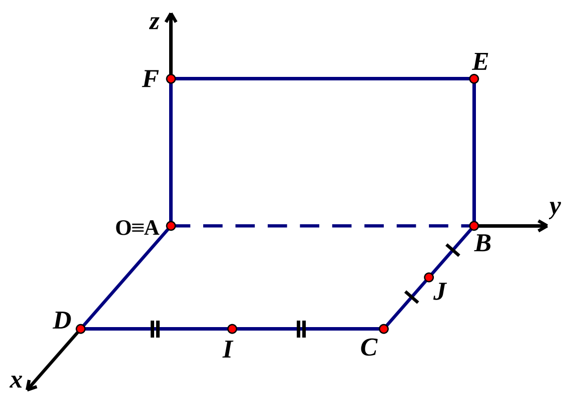
Bài 21. Cho hai hình chữ nhật ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau $AB=a,\ BC=BE=b$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của CD và CB.

a. Tính thể tích của khối tứ diện IJEF theo a và b.

b. Tìm hệ thức giữa a và b để hai mặt phẳng (AIF) và (DJE) vuông góc với nhau.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc $O\equiv A$, ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua D, B, F. Khi đó $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $D(b;0;0)$, $C(b;a;0)$, $E(0;a;b)$, $F(0;0;b)$, $I\left(b;\frac{a}{2};0\right)$, $J\left(\frac{b}{2};a;0\right)$



a. Thể tích của khối tứ diện IJEF là $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IE}\right].\overrightarrow{IF}\right|$

Ta có $\overrightarrow{IF}=\left(-b;-\frac{a}{2};b\right)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{IJ}=\left(-\frac{b}{2};\frac{a}{2};0\right)\\ \overrightarrow{IE}=\left(-b;\frac{a}{2};b\right)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IE}\right]=\left(\frac{ab}{2};\frac{b^2}{2};\frac{ab}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IE}\right].\overrightarrow{IF}=-\frac{ab^2}{2}-\frac{ab^2}{4}+\frac{ab^2}{4}=-\frac{ab^2}{2}$$

Vậy $V_{IJEF}=\frac{1}{6}\left|-\frac{ab^2}{2}\right|=\frac{ab^2}{12}$

b. Ta có $\overrightarrow{AI}=\left(b;\frac{a}{2};0\right)$, $\overrightarrow{AF}=(0;0;b)$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AF}\right]=\left(\frac{ab}{2};-b^2;0\right)$$

$\Rightarrow$ Vtpt của mp(AIF) là $\overrightarrow{n_1}=\left(\frac{ab}{2};-b^2;0\right)$

Tương tự $\overrightarrow{DJ}=\left(-\frac{b}{2};a;0\right)$, $\overrightarrow{DE}=(-b;a;b)$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{DJ},\overrightarrow{DE}\right]=\left(ab;\frac{b^2}{2};\frac{ab}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ Vtpt của mp(DJE) là $\overrightarrow{n_2}=\left(ab;\frac{b^2}{2};\frac{ab}{2}\right)$

Hai mặt phẳng (AIF) và (DJE) vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow\frac{a^2b^2}{2}-\frac{b^4}{2}=0\Leftrightarrow a=b$

Bài 22. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật, cạnh bên $SA\perp(ABCD)$ $AB=a,\ SA=AD=2a$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD. Tính theo a độ dài đoạn thẳng HK và thể tích của khối tứ diện ACHK.

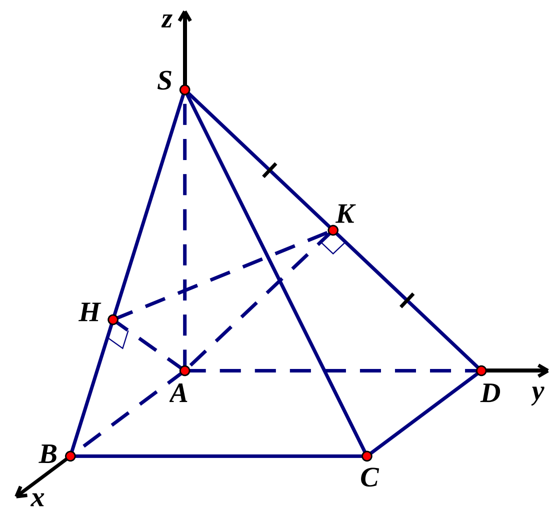
Giải

Tính HK.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AD = 2a$ $\Rightarrow \Delta SAD$ vuông cân tại A.

Mà $AK \perp SD$ $(K \in SD)$ nên K là trung điểm của SD.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có $O \equiv A$, tia Ox đi qua B, tia Oy đi qua D, tia Oz đi qua S. Khi đó $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $C(a;2a;0)$, $S(0;0;2a)$, $K(0;a;a)$



Ta có $\overrightarrow{SB} = (a;0;-2a)$

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của đường thẳng SB: $\begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases}$

(vtcp của $\overrightarrow{SB}$ là $\vec{u} = \frac{1}{a}\overrightarrow{SB} = (1;0;-2)$)

Lấy $H(a+t;0;-2t) \in SB$ ta có $\overrightarrow{AH} = (a+t;0;-2t)$

H là hình chiếu của A trên đường thẳng SB $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow a + t + 0 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{a}{4}$

Vậy $H\left(\frac{4a}{5};0;\frac{2a}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{HK} = \left(-\frac{4a}{5};a;\frac{3a}{5}\right) \Rightarrow HK = \sqrt{\frac{16a^2}{25} + a^2 + \frac{9a^2}{25}} = a\sqrt{2}$

Chú ý: Ta có thể tính HK bằng cách khác

Áp dụng định lý cosin vào tam giác SHK, ta có:

$HK^2 = SH^2 + SK^2 - 2.SH.SK.\cos HSK$

K là trung điểm của SD nên $SK = \frac{SD}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$

Tam giác SAB vuông tại A và có đường cao AH nên:

$SH.SB = SA^2 \Leftrightarrow SH.a\sqrt{5} = 4a^2 \Leftrightarrow SH = \frac{4a}{\sqrt{5}}$

$\cos HSK = \cos BSD = \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2SBB.SD} = \frac{5a^2 + 8a^2 - 5a^2}{2.a\sqrt{5}.2a\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$

Vậy $HK^2 = \left(\frac{4a}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 - 2.\frac{4a}{\sqrt{5}}.a\sqrt{2}.\frac{2}{\sqrt{10}} = 2a^2 \Leftrightarrow HK = a\sqrt{2}$

Thể tích của khối tứ diện ACHK:

Ta có $V_{ACHK} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH}\right].\overrightarrow{AK}\right|$

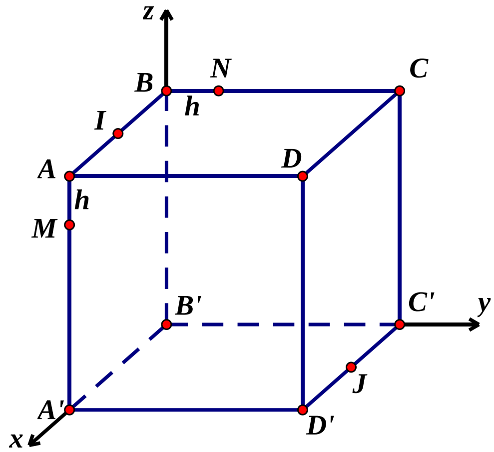
với $\overrightarrow{AC} = (a;2a;0)$, $\overrightarrow{AH} = \left(\frac{4a}{5};0;\frac{2a}{5}\right)$, $\overrightarrow{AK} = (0;a;a)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH}\right] = \left(\frac{4a^2}{5};-\frac{2a^2}{5};-\frac{8a^2}{5}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH}\right].\overrightarrow{AK} = -\frac{2a^3}{5} - \frac{8a^3}{5} = -2a^3$

Vậy $V_{ACHK} = \frac{1}{6}.\left|-2a^3\right| = \frac{a^3}{3}$

Bài 23. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ có cạnh bằng 1. M và N là hai điểm thay đổi và lần lượt ở trên cạnh AA′, BC sao cho $AM = BN = h,\ h \in (0;1)$. Chứng minh rằng khi h thay đổi, đường thẳng MN luôn cắt và vuông góc với một đường thẳng cố định.

Giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho gốc O trùng với B′, tia Ox đi qua A′, tia Oy đi qua C′, tia Oz đi qua B. Khi đó $B'(0;0;0),\ A'(1;0;0),\ C'(0;1;0),\quad D'(1;1;0),\ B(0;0;1),\ A(1;0;1),$ $C(0;1;1),\ D(1;1;1),\ M(1;0;1-h),\ N(0;h;1)$

Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và C′D′, ta có $I\left(\frac{1}{2};0;1\right),\ J\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ (I và J cố định)

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1;h;h)$ và $\overrightarrow{IJ} = (0;1;-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{IJ} = 0$

$\Rightarrow MN \perp IJ$ $\qquad (1)$

Phương trình tham số của hai đường thẳng MN và IJ lần lượt là $\begin{cases} x = -t \\ y = h + ht \\ z = 1 + ht \end{cases}$ và $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} -t = \frac{1}{2} \\ h + ht = t' \\ 1 + ht = 1 - t' \end{cases}$ ta có nghiệm duy nhất $(t;t') = \left(-\frac{1}{2};\frac{h}{2}\right)$

Vậy hai đường thẳng MN và IJ cắt nhau $\qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ khi h thay đổi, đường thẳng MN luôn cắt và vuông góc với đường thẳng cố định IJ (đpcm)

Chú ý: Giao điểm của hai đường thẳng MN và IJ là $K\left(\frac{1}{2};\frac{h}{2};1-\frac{h}{2}\right)$

Bài 24. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh B′B, CD và A′D′.

a. Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng A′B, B′D và cặp đường thẳng PI, AC′ (I là tâm của đáy ABCD)

b. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C′N, tính góc giữa hai mặt phẳng (PAI) và (DCC′D′)

Giải

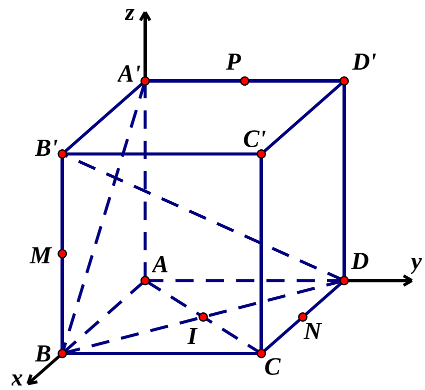
a. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho gốc O trùng với A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD, tia Oz chứa AA′. Khi đó: $A(0;0;0),\ B(1;0;0),\ D(0;1;0),\ A'(0;0;1),\ C(1;1;0),\ B'(1;0;1),\ C'(1;1;1),\ D'(0;1;1)$

$d(A'B, B'D)$

Ta có $\overrightarrow{A'B}=(1;0;-1)$, $\overrightarrow{B'D}=(-1;1;-1)$ và $\overrightarrow{A'B'}=(1;0;0)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'D}\right]=(1;2;1)$

$\Rightarrow d(A'B,B'D)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'D}\right].\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'D}\right]\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ $d(PI,AC')$



Ta có:

$P\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$, $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)\Rightarrow\overrightarrow{IP}=\left(-\dfrac{1}{2};0;1\right)$

$\overrightarrow{AC'}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{AP}=\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)\Rightarrow d(PI,AC')=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IP},\overrightarrow{AC'}\right].\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{IP},\overrightarrow{AC'}\right]\right|}=\dfrac{\sqrt{14}}{28}$

b. Ta có $M\left(1;0;\dfrac{1}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{1}{2};1;0\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{MP}=\left(-1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{NC'}=\left(\dfrac{1}{2};0;1\right)\Rightarrow\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NC'}=0\Rightarrow MP\perp NC'$

$\Rightarrow$ Góc giữa hai đường thẳng MP và NC′ có số đo bằng 90^0

Mp(PAI) có vec-tơ pháp tuyến: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AI}\right]=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{4}\right)$

Mp(DCC′D′) có vec-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AD}=(0;1;0)$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (PAI) và (DCC′D′), ta có: $\cos\varphi=\dfrac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\varphi\approx 48^0 11'$

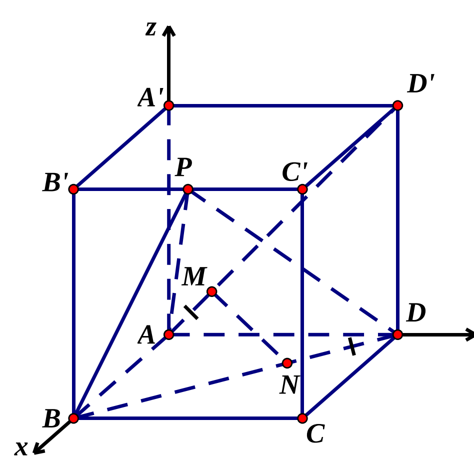
Bài 25. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh bằng a. Xét điểm M trên AD′ và điểm N trên DB sao cho $AM=DN=k\ \left(0<k<a\sqrt{2}\right)$. Gọi P là trung điểm của B′C′

a. Tính góc giữa hai đường thẳng AP và BC′
b. Tính thể tích khối tứ diện APBC′
c. Chứng minh MN luôn song song với mp(A′D′CB) khi k thay đổi và tìm k để đoạn thẳng MN ngắn nhất.

Giải

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD, tia Oz chứa AA′. Khi đó $A(0;0;0)$, $A'(0;0;a)$, $B(a;0;0)$, $B'(a;0;a)$, $D(0;a;0)$, $D'(0;a;a)$,

$C(a;a;0)$, $C'(a;a;a)$, $P\left(a;\dfrac{a}{2};a\right)$



a. Ta có $\overrightarrow{AP}=\left(a;\dfrac{a}{2};a\right)$,

$\overrightarrow{BC'}=(0;a;a)$

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AP và BC′, ta có:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BC'}\right|}{\left|\overrightarrow{AP}\right|.\left|\overrightarrow{BC'}\right|}=\frac{\left|0+\frac{a^2}{2}+a^2\right|}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}+a^2}.\sqrt{a^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=45^0$$

b. Ta có $\overrightarrow{AP}=\left(a;\frac{a}{2};a\right)$, $\overrightarrow{AB}=(a;0;0)$, $\overrightarrow{AC'}=(a;a;a)$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\right]=\left(0;a^2;-\frac{a^2}{2}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AC'}=0+a^3-\frac{a^3}{2}=\frac{a^3}{2}$$

Vậy $V_{APBC'}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AC'}\right|=\frac{1}{6}.\left|\frac{a^3}{2}\right|=\frac{a^3}{12}$

c. Mp(A′D′CB) đi qua điểm $A'(0;0;a)$ và có vtpt $\vec{n}=\frac{1}{a^2}.\left[\overrightarrow{A'D'},\overrightarrow{A'B}\right]=(1;0;1)$ nên có phương trình

$1(x-0)+0(y-0)+1(z-a)=0$ hay $x+z-a=0$

Từ giả thiết $M\in AD'$, $N\in DB$, $AM=DN=k$ ta được:

$$M\left(0;\frac{k}{\sqrt{2}};\frac{k}{\sqrt{2}}\right),\ N\left(\frac{k}{\sqrt{2}};\frac{a\sqrt{2}-k}{\sqrt{2}};0\right)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(\frac{k}{\sqrt{2}};\frac{a\sqrt{2}-2k}{\sqrt{2}};-\frac{k}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\overrightarrow{MN}.\vec{n}=1.\frac{k}{\sqrt{2}}+0.\left(\frac{a\sqrt{2}-2k}{\sqrt{2}}\right)+1.\left(-\frac{k}{\sqrt{2}}\right)=0$$

$\Rightarrow\overrightarrow{MN}\perp\vec{n}\qquad(1)$

Ngoài ra ta có $x_M+z_M-a=0+\frac{k}{\sqrt{2}}-a\neq0$ (vì $0<k<a\sqrt{2}$)

$\Rightarrow M\notin(A'D'CB)\qquad\qquad(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MN\,//\,(A'D'CB)$

Ta có:

$$MN^2=\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}-2k}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2=3k^2-2a\sqrt{2}k+a^2=3\left[\left(k-\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2+\frac{a^2}{9}\right]\geq3.\frac{a^2}{9}=\frac{a^2}{3}\Leftrightarrow MN\geq\frac{a}{\sqrt{3}}$$

Vậy MN ngắn nhất bằng $\frac{a}{\sqrt{3}}$ khi $k=\frac{a\sqrt{2}}{3}\in\left(0;a\sqrt{2}\right)$

Bài 26. Cho hình hộp đứng ABC.A′B′C′ đáy ABC là tam giác vuông cân, $AA'=2a$, $AB=AC=a$. Gọi G, G′ lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác A′B′C′, I là tâm của hình chữ nhật AA′B′B.

a. Chứng minh hai đường thẳng IG và G′C song song với nhau đồng thời tính khoảng cách giữa hai đường thẳng này.

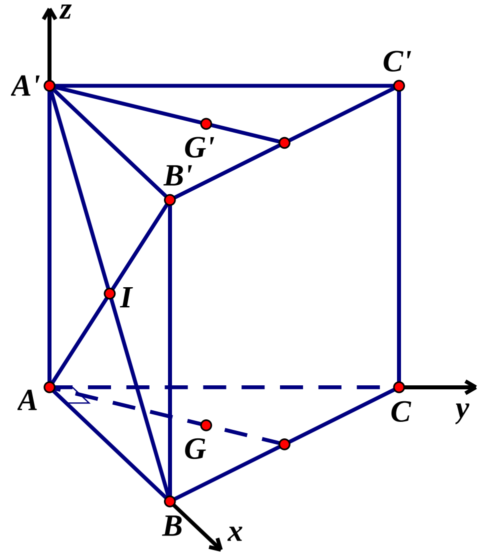
b. Tính thể tích của khối chóp A.IGCG′.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, C, A′. Khi đó

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;a;0)$, $A'(0;0;2a)$, $B'(a;0;2a)$, $C'(0;a;2a)$, $G\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};0\right)$, $G'\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};2a\right)$, $I\left(\frac{a}{2};0;a\right)$ (I là trung điểm của AB′ và A′B)

a. Ta có



$\overrightarrow{IG}=\left(-\frac{a}{6};\frac{a}{3};-a\right),\ \overrightarrow{G'C}=\left(-\frac{a}{3};\frac{2a}{3};-2a\right),\ \overrightarrow{GC}=\left(-\frac{a}{3};\frac{2a}{3};0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IG}$ và $\overrightarrow{G'C}$ cùng phương $\left(\overrightarrow{G'C}=2\overrightarrow{IG}\right)$, $\overrightarrow{IG}$ và $\overrightarrow{GC}$ không cùng phương $\Rightarrow IG \,//\, G'C$ (đpcm)

Tính $d\left(IG,G'C\right)$

Ta có:

$$IG \parallel G'C \Rightarrow d\left(IG,G'C\right)=d\left(G,G'C\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{G'C},\overrightarrow{GC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{G'C}\right|}$$

Ta có: $\left[\overrightarrow{G'C},\overrightarrow{GC}\right]=\left(\frac{4a^2}{3};\frac{2a^2}{3};0\right)$

$$\Rightarrow d\left(IG,G'C\right)=\frac{\sqrt{\frac{16a^4}{9}+\frac{4a^4}{9}+0}}{\sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{4a^2}{9}+4a^2}}=2a\sqrt{\frac{5}{41}}$$

b. Mp(IGCG′) có vtpt $\vec{n}=\frac{3}{2a^2}.\left[\overrightarrow{G'C},\overrightarrow{GC}\right]=\left(2;1;0\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình của mp(IGCG′) là $2\left(x-\frac{a}{3}\right)+1\left(y-\frac{a}{3}\right)+0\left(z-0\right)=0$ hay $2x+y-a=0$

$$\Rightarrow h=d\left(A,\left(IGCG'\right)\right)=\frac{\left|-a\right|}{\sqrt{4+1}}=\frac{a}{\sqrt{5}}$$

Thể tích của khối chóp A.IGCG′ là $V=\frac{1}{3}S_{IGCG'}.h$ trong đó:

$S_{IGCG'}=\frac{1}{2}\left(IG+G'C\right).d\left(IG,G'C\right)$ với $IG=\frac{a\sqrt{41}}{6}$, $G'C=\frac{a\sqrt{41}}{3}$, $d\left(IG,G'C\right)=2a\sqrt{\frac{5}{41}}$

$\Rightarrow S_{IGCG'}=\frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{41}}{6}+\frac{a\sqrt{41}}{3}\right).2a\sqrt{\frac{5}{41}}=\frac{a^2\sqrt{5}}{2}$, $h=d\left(A,\left(IGCG'\right)\right)=\frac{a}{\sqrt{5}}$

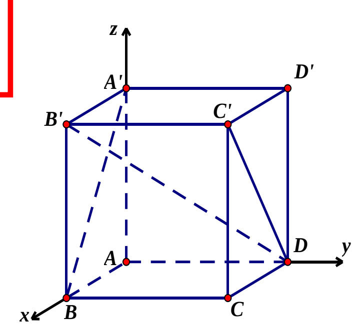
Vậy $V_{A.IGCG'}=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{5}}{2}.\frac{a}{\sqrt{5}}=\frac{a^3}{6}$

Bài 27. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ có cạnh bằng a.

a. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A′B và B′D.

b. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB′, CD, A′D′. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C′N.

Giải



Chọn hệ tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A và ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, D, A′ (như hình vẽ). Khi đó $A\left(0;0;0\right), B\left(a;0;0\right), D\left(0;a;0\right)$, $A'\left(0;0;a\right), C\left(a;a;0\right), B'\left(a;0;a\right)$, $C'\left(a;a;a\right), D'\left(0;a;a\right)$

a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng A′B và B′D.

Ta có: $\overrightarrow{A'B}=(a;0;-a)$,

$\overrightarrow{B'D}=(-a;a;-a)$, $\overrightarrow{A'B'}=(a;0;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'D}\right]=\left(a^2;2a^2;a^2\right)$

Vậy $d(A'B,B'D)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{B'D}\right].\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'D}\right]\right|}=\dfrac{a^3}{a^2\sqrt{6}}=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$

b. Góc giữa hia đường thẳng MP và C′N

Ta có $M\left(a;0;\dfrac{a}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{a}{2};a;0\right)$, $P\left(0;\dfrac{a}{2};a\right)\Rightarrow\overrightarrow{MP}=\left(-a;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{NC'}=\left(\dfrac{a}{2};0;a\right)\Rightarrow\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NC'}=0\Rightarrow MP\perp NC'$

Vậy góc giữa hai đường thẳng MP và C′N có số đo bằng 90^0

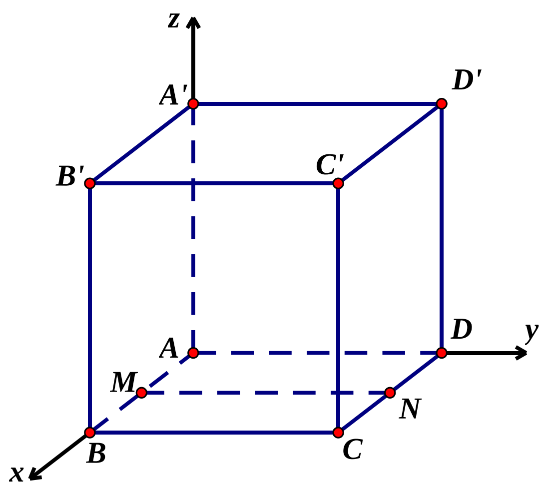
Bài 28. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ với $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A′C và MN.

b. Viết phương trình mặt phẳng chứa A′C và tạo với mặt phẳng Oxy một góc α biết $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Giải

a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng A′C và MN.



Cách 1.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa A′C và song song với MN. Khi đó:

$d(A'C,MN)=d(M,(P))$

Phương trình của mặt phẳng (P):

Ta có $C(1;1;0)$, $M\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $N\left(\dfrac{1}{2};1;0\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{A'C}=(1;1;-1)$, $\overrightarrow{MN}=(0;1;0)$

$\Rightarrow$ Vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}\right]=(1;0;1)$

$\Rightarrow$ Phương trình của mp(P) là: $1(x-0)+0(y-0)+1(z-1)=0$ hay $x+z-1=0$

Vậy $d(A'C,MN)=d(M,(P))=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}+0-1\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Cách 2.

$d(A'C,MN)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}\right].\overrightarrow{A'M}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}\right]\right|}$ với $\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}\right]=(1;0;1)$, $\overrightarrow{A'M}=\left(\dfrac{1}{2};0;-1\right)$

$\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}\right]\right|=\sqrt{2}$, $\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}\right].\overrightarrow{A'M}=-\dfrac{1}{2}$

Vậy $d(A'C,MN)=\dfrac{\left|-\dfrac{1}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

b. Viết phương trình mặt phẳng chứa A'C tạo với mp(Oxy) một góc α.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A'C và tạo với mp(Oxy) một góc α.

Phương trình mp(Q) có dạng: $ax+by+cz+d=0\left(a^2+b^2+c^2>0\right)$

Mp(Q) đi qua $A'(0;0;1)$ và $C(1;1;0)$ nên $\begin{cases} c+d=0 \\ a+b+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow c=-d=a+b$

Khi đó phương trình của (Q) là: $ax+by+(a+b)z-(a+b)=0$

$\Rightarrow$ Mp(Q) có vtpt là $\vec{n}=(a;b;a+b)$

Mp(Oxy) có vtpt là $\vec{k}=(0;0;1)$

Gọi α là góc giữa (Q) và (Oxy), ta có $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$\Leftrightarrow \left|\cos\left(\vec{n},\vec{k}\right)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \dfrac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2+(a+b)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow 6(a+b)^2=2\left(a^2+b^2+ab\right)$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+5ab=0 \Leftrightarrow \left(2a^2+ab\right)+\left(2b^2+4ab\right)=0$

$\Leftrightarrow a(2a+b)+2b(b+2a)=0 \Leftrightarrow (2a+b)(a+2b)=0$

$\Leftrightarrow a=-2b$ hoặc $b=-2a$

Với $a=-2b$, chọn $a=2$ và $b=-1$

$\Rightarrow$ Phương trình của mặt phẳng (Q) là $2x-y+z-1=0$

Với $b=-2a$, chọn $a=1$ và $b=-2$

$\Rightarrow$ Phương trình của mặt phẳng (Q) là $x-2y-z+1=0$

Bài 29. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên các đoạn thẳng BD và AD' sao cho $DM=AN$.

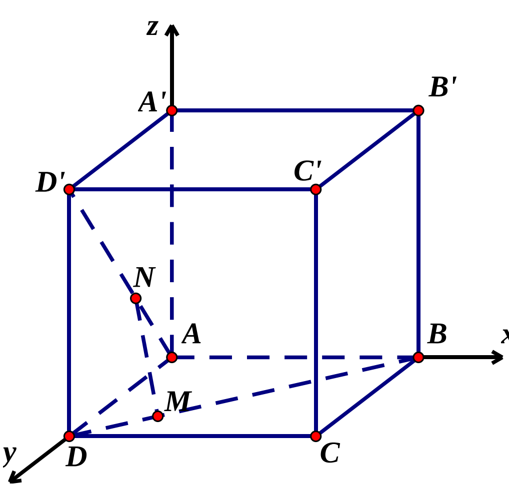
a. Xác định vị trí của hai điểm M, N để MN nhỏ nhất. Chứng minh rằng khi đó MN vuông góc với BD và AD'.

b. Chứng minh rằng MN vuông góc với một đường thẳng cố định.

Giải

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD, tia Oz chứa AA'.

a. Giả sử cạnh hình lập phương có độ dài bằng a.Đặt $AN=DM=t\left(0\le t\le a\sqrt{2}\right)$.



Khi đó ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $D'(0;a;a)$,

$M\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}};a-\dfrac{t}{\sqrt{2}};0\right)$, $N\left(0;\dfrac{t}{\sqrt{2}};\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$

Do đó $\overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{t}{\sqrt{2}};t\sqrt{2}-a;\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$

Ta có:

$MN^2=\left(-\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(t\sqrt{2}-a\right)^2+\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2=3t^2-2\sqrt{2}at+a^2$

Xét hàm số $f(t)=3t^2-2\sqrt{2}at+a^2$. Hàm số này có đồ thị là một parabol quay bề lõm lên phía trên. Do đó f(t) nhỏ nhất khi và chỉ khi $t=\frac{a\sqrt{2}}{3}$

Vì $\frac{a\sqrt{2}}{3}\in\left[0;a\sqrt{2}\right]$ nên MN nhỏ nhất khi $t=\frac{a\sqrt{2}}{3}\Leftrightarrow$ M, N thuộc đoạn BD, AD′ tương ứng sao cho

$DM=\frac{1}{3}BD,\ AN=\frac{1}{3}AD'$

Khi MN nhỏ nhất ta có: $t=\frac{a\sqrt{2}}{3}$ nên $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{a}{3};-\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$

Mặt khác $\overrightarrow{BD}=\left(-a;a;0\right),\ \overrightarrow{AD}=\left(0;a;a\right)$ nên:

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD}=\left(-\frac{a}{3}\right).\left(-a\right)+\left(-\frac{a}{3}\right).a+\frac{a}{3}.0=0$$

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'}=\left(-\frac{a}{3}\right).0+\left(-\frac{a}{3}\right).a+\frac{a}{3}.a=0$$

Vậy MN vuông góc với BD và AD′.

b. Trước hết ta tìm phương $\vec{\alpha}=\left(x;y;z\right)\neq\vec{0}$ vuông góc với vec-tơ $\overrightarrow{MN}$. Điều đó tương đương với:

$$\vec{\alpha}.\overrightarrow{MN}=0\ \forall t\in\left[0;a\sqrt{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+y\left(t\sqrt{2}-a\right)+z\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=0\quad\forall t\in\left[0;a\sqrt{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}+y\sqrt{2}+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)t-ya=0\qquad\forall t\in\left[0;a\sqrt{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{x}{\sqrt{2}}+y\sqrt{2}+\frac{z}{\sqrt{2}}=0\\ ya=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z\\ y=0\end{cases}$$

Chọn $\vec{\alpha}=\left(1;0;1\right)$

Vậy MN vuông góc với một đường thẳng cố định nhận $\vec{\alpha}=\left(1;0;1\right)$ làm vec-tơ chỉ phương.

Chú ý: Ta có kết luận tương tự là MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Bài 30. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại điểm A. Các điểm M, N thay đổi trên đường thẳng Δ sao cho $\left(MBC\right)\perp\left(NBC\right)$

a. Chứng minh rằng $AM.AN$ không đổi.

b. Xác định vị trí của M, N để tứ diện MNBC có thể tích nhỏ nhất.

Giải

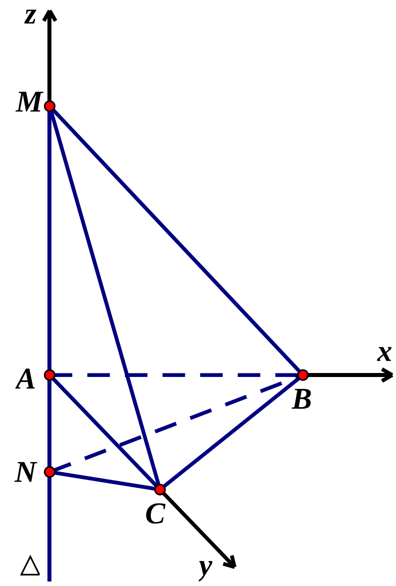
Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với điểm A, các tia Ox, Oy Oz lần lượt trùng các tia AB, AC, AM.

Đặt $AB=b,\ AC=c,\ AM=m$ (b, c không đổi)

Khi đó $A\left(0;0;0\right),\ B\left(b;0;0\right),\ C\left(0;c;0\right),\ M\left(0;0;m\right)$

Giả sử $N\left(0;0;n\right)$

Ta có (MBC): $\frac{x}{b}+\frac{y}{c}+\frac{z}{m}-1=0$ có pháp vec-tơ $\vec{\alpha}\left(\frac{1}{b};\frac{1}{c};\frac{1}{m}\right)$;



(NBC): $\frac{x}{b}+\frac{y}{c}+\frac{z}{n}-1=0$ có pháp vec-tơ $\vec{\beta}=\left(\frac{1}{b};\frac{1}{c};\frac{1}{n}\right)$.

Vậy $(MBC)\perp(NBC)\Leftrightarrow \vec{\alpha}.\vec{\beta}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{m.n}=0\Leftrightarrow mn=\frac{-b^2c^2}{b^2+c^2}$$

Mặt khác $m>0$ nên $n<0$. Vậy M và N nằm về hai phía của A.

a. Ta có $AM.AN=|m|.|n|=|m.n|=\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$ không đổi.

b. Ta có: $\overrightarrow{BC}=(-b;c;0)$, $\overrightarrow{BM}=(-b;0;m)$, $\overrightarrow{BN}=(-b;0;n)$

$$\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BN}\right]=(0;b(n-m);0)$$

Vậy $V_{MNBC}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BN}\right].\overrightarrow{BC}\right|=\frac{1}{6}.|bc(n-m)|$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$V_{MNBC}=\frac{1}{6}bc(n-m)\geq\frac{1}{6}bc.2\sqrt{m.(-n)}=\frac{1}{3}.\frac{b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m=-n=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$

Vậy V_{MNBC} nhỏ nhất khi M, N nằm về hai phía của A và $AM=AN=\frac{AB.AC}{BC}$

Chú ý: ta có thể tính thể tích tứ diện MNBC theo cách:

$$V_{MNBC}=V_{MABC}+V_{NABC}=\frac{1}{3}AM.S_{\Delta ABC}+\frac{1}{3}AN.S_{\Delta ABC}$$

$$=\frac{1}{3}(AM+AN).S_{\Delta ABC}=\frac{1}{6}bc(m-n)$$

Bài 31. Cho tam giác đều ABC có cạnh a, I là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với A qua I. Dựng đoạn $SD=\frac{a\sqrt{6}}{2}$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

a. $(SAB)\perp(SAC)$

b. $(SBC)\perp(SAD)$

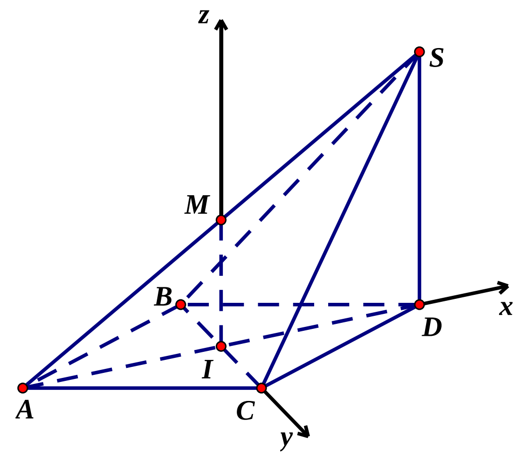
Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với điểm I, các tia Ox, Oy, lần lượt trùng các tia ID, IC, tia Oz song song và cùng chiều với tia DS. Khi đó $D\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$

$C\left(0;\frac{a}{2};0\right)$, $B\left(0;-\frac{a}{2};0\right)$, $A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $S\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)$

SA cắt Iz tại trung điểm M của SA. Ta có $M=\left(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)$

a. Mặt phẳng (SAB) đi qua $A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;-\frac{a}{2};0\right)$, $M\left(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)$ nên có phương trình đoạn chắn (SBA):



(SBA): $-\frac{2x}{a\sqrt{3}}-\frac{2y}{a}+\frac{4z}{a\sqrt{6}}-1=0$ và có pháp vec-tơ $\overrightarrow{n_1}\left(-\frac{2}{a\sqrt{3}};\frac{-2}{a};\frac{4}{a\sqrt{6}}\right)$

Mặt phẳng (SAC) đi qua $A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{a}{2};0\right)$, $M\left(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)$ nên có phương trình đoạn chắn

(SAC): $-\frac{2x}{a\sqrt{3}}+\frac{2y}{a}+\frac{4z}{a\sqrt{6}}-1=0$ và có pháp vec-tơ $\overrightarrow{n_2}\left(-\frac{2}{a\sqrt{3}};\frac{2}{a};\frac{4}{a\sqrt{6}}\right)$

Ta có $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=-\frac{2}{a\sqrt{3}}.\frac{-2}{a\sqrt{3}}+\frac{2}{a}.\left(-\frac{2}{a}\right)+\frac{4}{a\sqrt{6}}.\frac{4}{a\sqrt{6}}=0$

Do đó $(SAB)\perp(SAC)$

b. Mặt phẳng (SBC) có cặp vec-tơ chỉ phương là:

$\overrightarrow{BC}(0;a;0)\parallel\vec{\alpha}(0;1;0)$; $\overrightarrow{CS}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{-a}{2};\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)\parallel\vec{\beta}\left(\sqrt{3};-1;\sqrt{6}\right)$

Vậy (SBC) có vec-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_3}=\left[\vec{\alpha},\vec{\beta}\right]=\left(\sqrt{6};0;-\sqrt{3}\right)$

Mặt phẳng (SAD) trùng mặt phẳng tọa độ (xOz) nên có pháp vec-tơ $\overrightarrow{n_4}(0;1;0)$

Do $\overrightarrow{n_3}.\overrightarrow{n_4}=0$ nên $(SBC)\perp(SAD)$

Bài 32. Cho hình vuông ABCD. Các tia Am và Cn cùng vuông góc với mặt ABCD và cùng chiều. Các điểm M, N lần lượt thuộc Am, Cn. Chứng minh rằng $(BMN)\perp(DMN)\Leftrightarrow(MBD)\perp(NBD)$

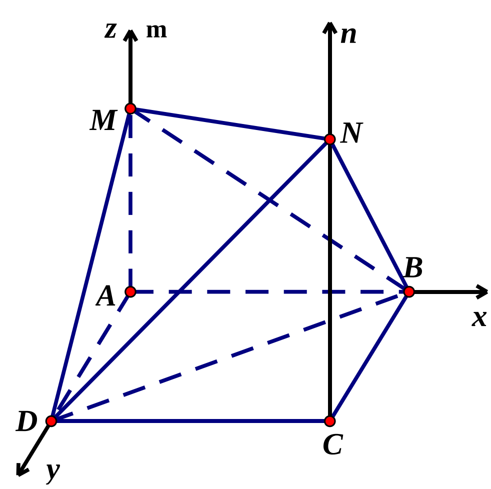
Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với điểm A, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng các tia AB, AD, Am. Giả sử hình vuông ABCD có cạnh bằng a.

Đặt $AM=m$, $CN=n$. Ta có:

$B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $M(0;0;m)$,

$N(a;a;n)$, $C(a;a;0)$



Mặt phẳng (BMN) có cặp vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{BM}=(-a;0;m)$, $\overrightarrow{BN}=(0;a;n)$

Do đó (BMN) có pháp vec-tơ

$\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BN}\right]=\left(-am;an;-a^2\right)/\!/\overrightarrow{\alpha_1}(m;-n;a)$ Mặt phẳng (DMN) có cặp vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{DM}=\left(0;-a;m\right)$, $\overrightarrow{DN}=\left(a;0;n\right)$

Do đó (DMN) có pháp vec-tơ $\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DN}\right]=\left(-an;am;a^2\right)//\overrightarrow{\alpha_2}\left(-n;m;a\right)$

Vậy $\left(BMN\right)\perp\left(DMN\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{\alpha_1}.\overrightarrow{\alpha_2}=0\Leftrightarrow m.n=\dfrac{a^2}{2}$ (1)

Ta có (MBD): $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{m}-1=0$ có pháp vec-tơ là $\overrightarrow{\beta_1}=\left(\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{m}\right)$

Mặt phẳng (BDN) có cặp vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{BD}=\left(-a;a;0\right)$, $\overrightarrow{BN}=\left(0;a;n\right)$

Do đó (NBD) có pháp vec-tơ $\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BN}\right]=\left(an;an;-a^2\right)//\overrightarrow{\beta_2}\left(n;n;-a\right)$ (2)

Vậy $\left(MBD\right)\perp\left(NBD\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{\beta_1}.\overrightarrow{\beta_2}=0\Leftrightarrow\dfrac{n}{a}+\dfrac{n}{a}-\dfrac{a}{m}=0\Leftrightarrow m.n=\dfrac{a^2}{2}$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

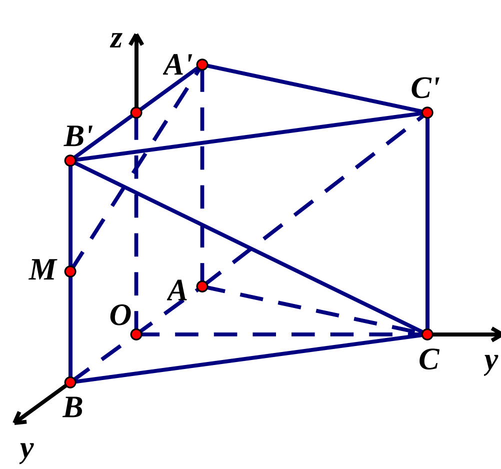
Bài 33. Cho hình lăng trụ đều ABC.A′B′C′ có tất cả các cạnh bằng nhau, M là trung điểm của BB′. Chứng minh rằng A′M vuông góc với AC′ và CB′.

Giải

Gọi O là trung điểm của AB. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có các tia Ox, Oy lần lượt trùng với các tia OC, OB, tia Oz song song cùng chiều với tia AA′. Giả sử các cạnh của hình lăng trụ bằng a. Khi đó

$C\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$, $A\left(0;\dfrac{-a}{2};0\right)$, $B'\left(0;\dfrac{a}{2};a\right)$

, $A'\left(0;\dfrac{-a}{2};a\right)$, $C'\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0;a\right)$, $M\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$



Vậy $\overrightarrow{A'M}\left(0;a;\dfrac{-a}{2}\right)//\vec{\alpha}\left(0;2;-1\right)$

$\overrightarrow{AC'}=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};a\right)//\vec{\beta}=\left(\sqrt{3};1;2\right)$

$\overrightarrow{CB'}=\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};a\right)//\vec{\gamma}=\left(-\sqrt{3};1;2\right)$

Do $\vec{\alpha}.\vec{\beta}=0$, $\vec{\alpha}.\vec{\gamma}=0$ nên $A'M\perp AC'$ và $A'M\perp CB'$

Bài 34. Cho hình chóp đều S.ABCD, đáy có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Biết rằng $BM\perp DN$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc tọa độ O là tâm của hình vuông ABCD, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng các tia OA, OB, Ó.

Đặt $SO=h$. Khi đó: $B\left(0;\dfrac{a}{\sqrt{2}};0\right)$, $D\left(0;\dfrac{-a}{\sqrt{2}};0\right)$, $A\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}};0;0\right)$, $C\left(\dfrac{-a}{\sqrt{2}};0;0\right)$,

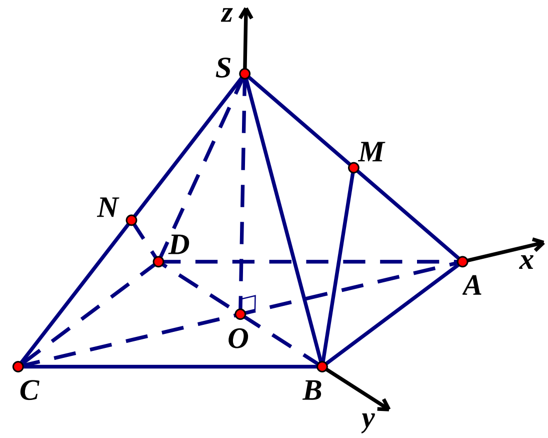
$S\left(0;0;h\right)$, $M\left(\dfrac{a}{2\sqrt{2}};0;\dfrac{h}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{-a}{2\sqrt{2}};0;\dfrac{h}{2}\right)$ (vì M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC)

Ta có $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{a}{2\sqrt{2}};\frac{-a}{\sqrt{2}};\frac{h}{2}\right)$; $\overrightarrow{DN}=\left(\frac{-a}{2\sqrt{2}};\frac{a}{\sqrt{2}};\frac{h}{2}\right)$

Ta có:

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DN}=0\Leftrightarrow\frac{-a^2}{8}-\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{4}=0\Leftrightarrow h=\frac{a\sqrt{10}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{10}}{6}$



Bài 35. Cho hình chóp đều S.ABC, đáy có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Biết rằng $(AMN)\perp(SBC)$. Tính thể tích hình chóp S.ABC.

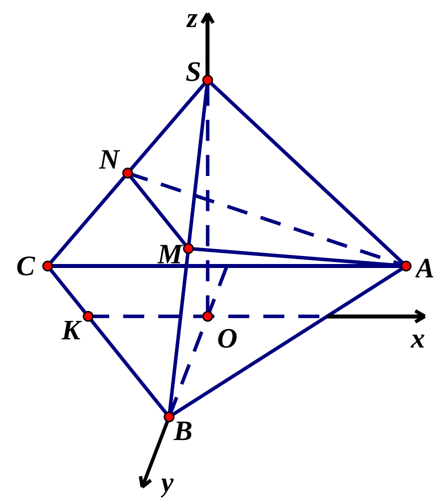
Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có O là tâm tam giác đều ABC, các tia Oy, Oz lần lượt trùng các tia OB, OS, tia Ox cùng hướng với tia CA.

Đặt $SO=h$. Khi đó:

$A\left(\frac{a}{2};\frac{-a}{2\sqrt{3}};0\right)$, $B\left(0;\frac{a}{\sqrt{3}};0\right)$, $C\left(\frac{-a}{2};\frac{-a}{2\sqrt{3}};0\right)$,

$S(0;0;h)$, $M\left(0;\frac{a}{2\sqrt{3}};\frac{h}{2}\right)$, $N\left(\frac{-a}{4};\frac{-a}{4\sqrt{3}};\frac{h}{2}\right)$



Mặt phẳng (AMN) có cặp vec-tơ chỉ phương

$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{-a}{2};\frac{a}{\sqrt{3}};\frac{h}{2}\right)$, $\overrightarrow{AN}=\left(\frac{-3a}{4};\frac{a}{4\sqrt{3}};\frac{h}{2}\right)$

Vậy (AMN) có pháp vec-tơ

$\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=\left(\frac{3ah}{8\sqrt{3}};\frac{-ah}{8};\frac{5a^2}{8\sqrt{3}}\right)//\vec{\alpha}\left(\frac{3ah}{\sqrt{3}};-ah;\frac{5a^2}{\sqrt{3}}\right)$

Mặt phẳng (SBC) cắt trục Ox tại $K\left(\frac{-a}{3};0;0\right)$ và đi qua $B\left(0;\frac{a}{\sqrt{3}};0\right)$, $S(0;0;h)$ nên có phương trình đoạn chắn (SBC): $\frac{-3x}{a}+\frac{\sqrt{3}y}{a}+\frac{z}{h}-1=0$

Vậy (SBC) có pháp vec-tơ $\vec{\beta}\left(\frac{-3}{a};\frac{\sqrt{3}}{a};\frac{1}{h}\right)$

Ta có $(AMN)\perp(SBC)\Leftrightarrow\vec{\alpha}.\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\frac{-9h}{\sqrt{3}}-h\sqrt{3}+\frac{5a^2}{h\sqrt{3}}=0\Leftrightarrow h=\sqrt{\frac{5}{12}}a$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SO.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\sqrt{\frac{5}{12}}a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$

Bài 36. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều. Gọi M, N, P, K lần lượt là trung điểm của BC, CD, SD, SB.

a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MK và AP.

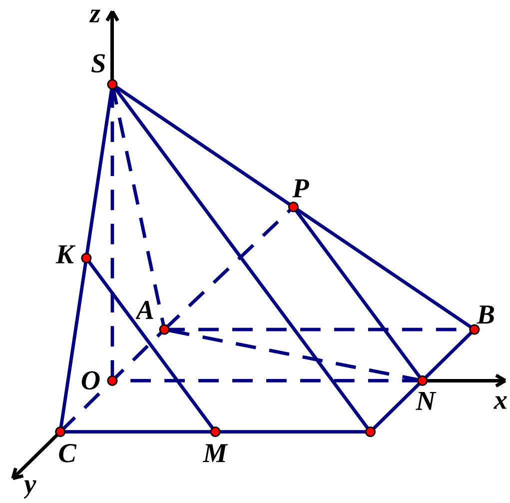
b. Chứng minh rằng $(ANP)\perp(ABCD)$.

Giải

Gọi O là trung điểm của AB. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng các tia ON, OB, OS. Khi đó:

$A\left(0;\frac{-a}{2};0\right)$, $B\left(0;\frac{a}{2};0\right)$, $N(a;0;0)$, $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$,

$D\left(a;\frac{-a}{2};0\right)$, $P\left(\frac{a}{2};\frac{-a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$, $K\left(0;\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$



a. Đường thẳng MK có vec-tơ chỉ phương là:

$\overrightarrow{MK}=\left(\frac{-a}{2};\frac{-a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)//\vec{\alpha}\left(2;1;-\sqrt{3}\right)$

Đường thẳng AP có vec-tơ chỉ phương là:

$\overrightarrow{AP}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)//\vec{\beta}\left(2;1;\sqrt{3}\right)$

Ta có $\left[\vec{\alpha},\vec{\beta}\right]=\left(2\sqrt{3};-4\sqrt{2};0\right)$, $\overrightarrow{AK}=\left(0;\frac{3a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

Vậy $d(MK,AP)=\frac{\left|\left[\vec{\alpha},\vec{\beta}\right].\overrightarrow{AK}\right|}{\left|\left[\vec{\alpha},\vec{\beta}\right]\right|}=\frac{3\sqrt{3}a}{2\sqrt{15}}=\frac{3a}{2\sqrt{5}}$

b. Mặt phẳng (APN) có cặp vec-tơ chỉ phương là

$\overrightarrow{NP}=\left(\frac{-a}{2};\frac{-a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)//\vec{\alpha}=\left(2;1;-\sqrt{3}\right)$; $\overrightarrow{AP}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)//\vec{\beta}\left(2;1;\sqrt{3}\right)$

Do đó (ANP) có pháp vec-tơ là $\left[\vec{\alpha},\vec{\beta}\right]=\left(2\sqrt{3};-4\sqrt{3};0\right)//\overrightarrow{n_1}=\left(1;-2;0\right)$

Mặt phẳng (ABCD) có pháp vec-tơ là $\overrightarrow{n_2}=\left(0;0;1\right)$

Do $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$ nên $(ANP)\perp(ABCD)$

Bài 37. Trong hệ trục tọa độ Oxyz cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′ có $A(0;0;0)$, $D(0;1;0)$, $D'(0;1;2)$, $B'(1;0;2)$. Gọi E là điểm đối xứng với A qua B. Điểm M thuộc đoạn CD sao cho mặt phẳng (A′ME) tạo với mặt (ABB′A′) góc φ thỏa mãn $\tan\varphi=\sqrt{2}$

a. Viết phương trình mặt phẳng (A′ME)

b. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua C, B′, D′ và có tâm thuộc mặt phẳng (A′ME)

Giải

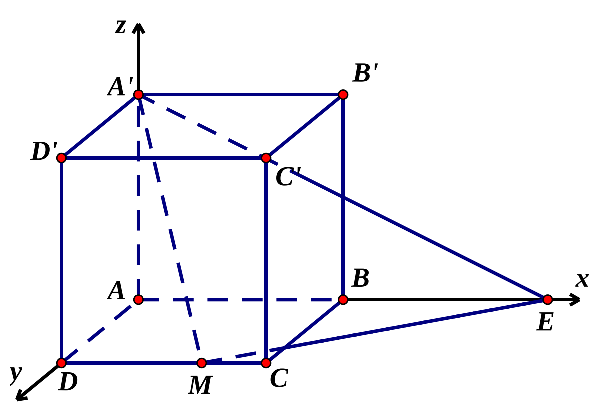
Dễ dàng suy ra được tọa độ của các điểm $A'(0;0;2)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $C'(1;1;2)$, $E(2;0;0)$

Đặt $DM=t\ (0\le t\le 1)$. Khi đó $M(t;1;0)$

Mặt phẳng (A′ME) có cặp vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{A'M}=(t;1;-2)$, $\overrightarrow{A'E}=(2;0;-2)//\vec{\alpha}(1;0;-1)$

Do đó (A′ME) có pháp vec-tơ $\left[\overrightarrow{A'M},\vec{\alpha}\right]=\overrightarrow{n_1}(-1;t-2;-1)$

Mặt phẳng (ABB′A′) có pháp vec-tơ $\overrightarrow{n_2}(0;1;0)$



Ta có $\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\dfrac{|t-2|}{\sqrt{2+(t-2)^2}}$ suy ra $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+(t-2)^2}}$

Vậy $\sqrt{2}=\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{|t-2|}\Leftrightarrow|t-2|=1\Leftrightarrow t=1$ (vì $0\le t\le 1$)

Vậy $M(1;1;0)$ (trùng với điểm C)

a. Mặt phẳng (A′ME) có pháp vec-tơ $\overrightarrow{n_1}(-1;t-2;-1)=(-1;-1;-1)//(1;1;1)$ và đi qua điểm $E(2;0;0)$ nên có phương trình:

$(A'ME):1(x-2)+1(y-0)+1(z-0)=0$ hay $(A'ME):x+y+z-2=0$

b. (S) đi qua C, B′, D′ nên có tâm I thuộc các mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ lần lượt là các mặt phẳng trung trực của CB′, CD′.

(α) đi qua trung điểm $K\left(1;\dfrac{1}{2};1\right)$ của CB′ và có pháp vec-tơ $\overrightarrow{CB'}=(0;-1;2)$

Vậy $(\alpha):-\left(y-\dfrac{1}{2}\right)+2(z-1)=0\Leftrightarrow 2y-4z+3=0$

(β) đi qua trung điểm $L\left(\dfrac{1}{2};1;1\right)$ của CD′ và có pháp vec-tơ $\overrightarrow{D'C}=(1;0;-2)$

Do đó $(\beta):1\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+0(y-1)-2(z-1)=0\Leftrightarrow 2x-4z+3=0$

Vậy tọa độ của I là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+y+z-2=0\\2y-4z+3=0\\2x-4z+3=0\end{cases}\Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};1\right)$

Mặt cầu (S) có bán kính $R=IC=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Vậy $(S):\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+(z-1)^2=\dfrac{3}{2}$

Bài 38. Cho tứ diện OABC vuông tại O. Các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) tạo với mặt phẳng (ABC) các góc α,β,γ tương ứng. Gọi S_O,S_A,S_B,S_C lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh O, A, B, C của tứ diện. Chứng minh rằng:

a. $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ với H là hình chiếu vuông góc của O trên (ABC)

b. $S_O{}^2=S_A{}^2+S_B{}^2+S_C{}^2$

Giải

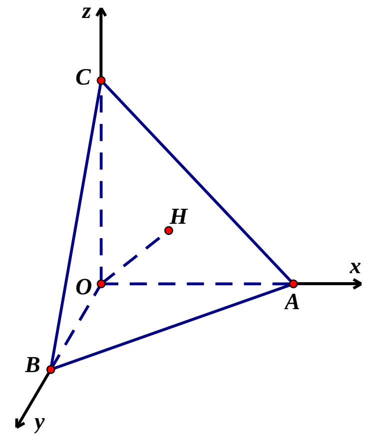
Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Giả sử $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, khi đó $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$

a. Mặt phẳng (ABC) có phương trình:

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

$$\Rightarrow OH = d\left(O,(ABC)\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$$

b. Do các tam giác OAB, OAC, OBC là các tam giác vuông tại O nên:

$$S_A^2 = S_{OBC}^2 = \left(\frac{1}{2}OB.OC\right)^2 \Rightarrow S_A^2 = \frac{b^2c^2}{4}$$

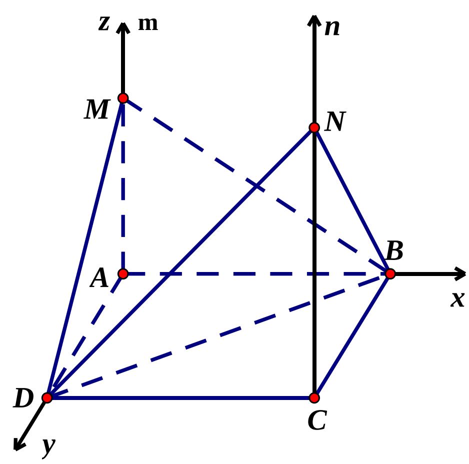
Tương tự ta có: $S_B^2 = \frac{c^2a^2}{4}$, $S_C^2 = \frac{a^2b^2}{4}$

Mặt khác: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2} \Rightarrow S_O^2 = S_{\Delta ABC}^2 = S_A^2+S_B^2+S_C^2$

Bài 39. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = a,\ AD = b$. Các tia Am và Cn cùng hướng và vuông góc vớ mặt phẳng (ABCD). Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên các tia Am, Cn sao cho $(MBD)\perp(NBD)$ Chứng minh rằng $AM.CN$ không đổi.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, khi đó: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;b;0)$, $C(a;b;0)$



Giả sử $AM = m,\ CN = n\ (m,n > 0)$. Ta có $M(0;0;m)$, $N(a;b;n)$

Mặt phẳng (MBD) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{m}\right)$

Mặt phẳng (NBD) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n'} = \left[\overrightarrow{NB},\overrightarrow{ND}\right]$

Do $\overrightarrow{NB} = (0;-b;-n)$, $\overrightarrow{ND} = (-a;0;-n)$ nên

$$\vec{n'} = (bn;an;-ab) = abn\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};-\frac{1}{n}\right)$$

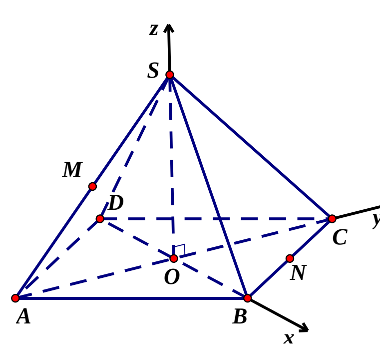
$$(MBD)\perp(NBD) \Rightarrow \vec{n}.\vec{n'} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{mn} = 0.$$

Do đó: $\frac{1}{mn} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \Rightarrow AM.CN = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = const$

Bài 40. Cho hình chóp đều S.ABCD, đáy có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC O là tâm của đáy ABCD. Biết MN tạo với mặt phẳng (ABCD) góc 30^0

a. Chứng minh rằng: $SO = MN$

b. Tính góc giữa MN và (SBD)



Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, khi đó: $O(0;0;0)$, $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $N\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right)$, $A\left(0;\frac{-a\sqrt{2}}{2};0\right)$ Giả sử $SO = h\ (h > 0)$. Khi đó

$S(0;0;h)$, $M\left(0;\frac{-a\sqrt{2}}{4};\frac{h}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN}\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{h}{2}\right)$

a. Mặt phẳng (ABCD) có phương trình $z=0$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}(0;0;1)$, suy ra $\sin 30^0 = \frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{MN}\right|}$

(vì MN tạo với (ABCD) góc 30^0). Do đó:

$$\frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{2a^2}{16}+\frac{2a^2}{4}+\frac{h^2}{4}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h}{\sqrt{\frac{5a^2+2h^2}{8}}} = 1 \Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{6} \text{ hay } h = \frac{a\sqrt{30}}{6}$$

Vậy $SO = h = \frac{a\sqrt{30}}{6}$

Mặt khác $MN = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{2}+\frac{5a^2}{24}} = \frac{a\sqrt{30}}{6}$

Vậy $SO = MN$

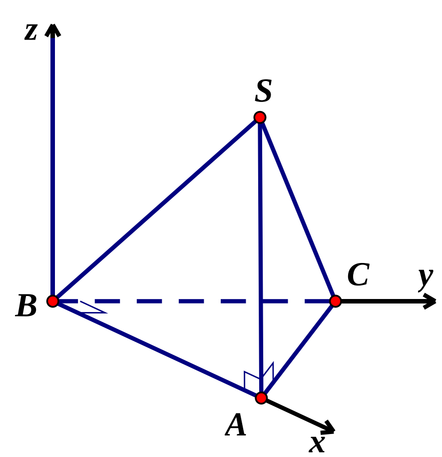
b. Mặt phẳng (SBD) có phương trình $y=0$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n'}(0;1;0)$

$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{30}}{12}\right)$

Gọi α là góc giữa MN và (SBD), ta có: $\sin\alpha = \frac{\left|\vec{n'}.\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\vec{n'}\right|.\left|\overrightarrow{MN}\right|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{30}}{6}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Bài 41. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt (ABC). Tam giác ABC vuông tại B, $AB=a$, $BC=b$. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60^0. Tính thể tích hình chóp và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải



Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Giả sử $SA=h$, khi đó $B(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $C(0;b;0)$, $S(a;0;h)$

$\overrightarrow{SC} = (-a;b;-h)$

Mặt phẳng (ABC) có phương trình $z=0$. $\vec{n}=(0;0;1)$ là vec-tơ pháp tuyến của (ABC)

Do SC tạo với (ABC) góc 60^0 nên:

$$\sin 60^0 = \frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{SC}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{SC}\right|} \Rightarrow \frac{h}{\sqrt{a^2+b^2+h^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \sqrt{3(a^2+b^2)}$$

Giả sử $I(x_0;y_0;z_0)$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, ta có:

$IA^2 = IB^2 = IC^2 = IS^2$

$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = (x_0 - a)^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + (y_0 - b)^2 + z_0^2$

$= x_0^2 + y_0^2 + \left(z_0 - \sqrt{3(a^2 + b^2)}\right)^2$

$\Rightarrow x_0 = \dfrac{a}{2}; y_0 = \dfrac{b}{2}; z_0 = \dfrac{\sqrt{3(a^2+b^2)}}{2}$

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, ta có:

$R = IB = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Gọi V là thể tích hình chóp, ta có:

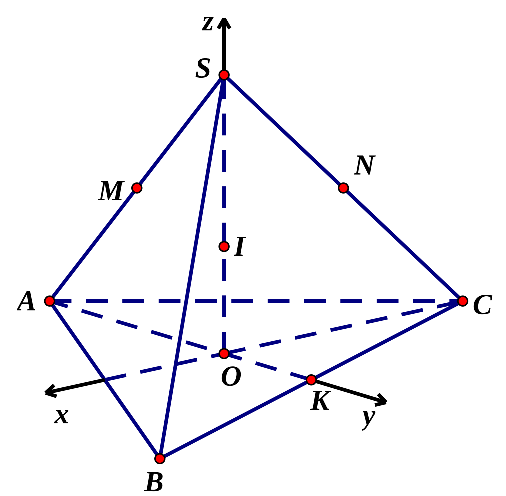
$V = \dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{6}SA.AB.BC = \dfrac{1}{6}ab.\sqrt{3(a^2+b^2)}$

Bài 42. Cho hình chóp đều S.ABC, đáy có cạnh bằng a. M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Biết $BM \perp AN$. Tính thể tích và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Giải

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC và K là trung điểm của BC, khi đó: $OK = \dfrac{1}{3}AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $KB = KC = \dfrac{a}{2}$. Giả sử $SO = h\ (h > 0)$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Khi đó: $O(0;0;0)$, $B\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$, $C\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$, $A\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{3};0\right)$, $S(0;0;h)$



$\Rightarrow M\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\dfrac{h}{2}\right)$, $N\left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{12};\dfrac{h}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{3}}{3};\dfrac{h}{2}\right)$, $\overrightarrow{AN} = \left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{5a\sqrt{3}}{12};\dfrac{h}{2}\right)$

Do $BM \perp AN$ nên $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{8} - \dfrac{15a^2}{36} + \dfrac{h^2}{4} = 0 \Leftrightarrow h = \dfrac{\sqrt{42}}{6}a$

Gọi V là thể tích hình chóp, ta có: $V = \dfrac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{42}}{6}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{24}$

Gọi I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, dễ thấy $I \in SO$ nên $I(0;0;m)$

Ta có:

$IA^2 = IS^2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{3} + m^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{42}}{6} - m\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{3} + m^2 = \dfrac{7}{6}a^2 - \dfrac{\sqrt{42}}{3}a.m + m^2 \Leftrightarrow m = \dfrac{5a}{2\sqrt{42}}$

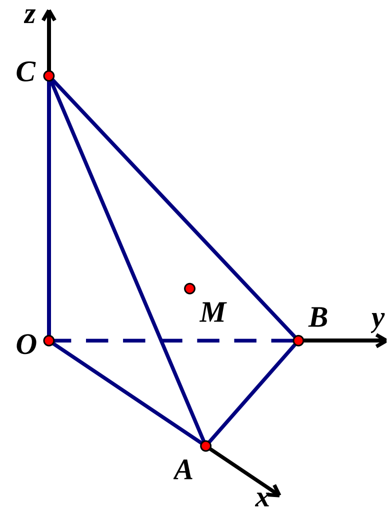
Vậy $R = IA = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{25a^2}{168}} = \dfrac{9a}{2\sqrt{42}}$

Bài 43. Cho điểm M nằm trong góc tam diện vuông Oxyz. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm phân biệt A, B, C. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích tứ diện OABC.

Giải

Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Giả sử $M(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng (α) cắt Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$



Khi đó mặt phẳng (α) có phương trình: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Ta có $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$. Vì $M\in(\alpha)$ nên $\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}=1$

Suy ra $1\ge 3\sqrt[3]{\frac{x_0y_0z_0}{abc}}$ (bất đẳng thức Cô-si)

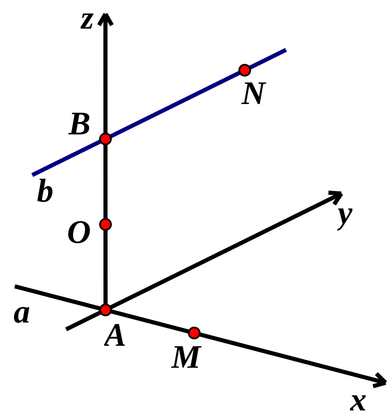
$\Rightarrow abc\ge 27x_0y_0z_0 \Rightarrow V_{OABC}\ge\frac{27x_0y_0z_0}{6}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x_0}{a}=\frac{y_0}{b}=\frac{z_0}{c}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3x_0\\b=3y_0\\c=3z_0\end{cases}$

Bài 44. Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b vuông góc với nhau, nhận AB làm đoạn vuông góc chung (A thuộc a, B thuộc b). Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên a, b sao cho $MN=AM+BN$. Chứng minh rằng khoảng cách từ trung điểm O của đoạn AB tới đường thẳng MN không đổi. Từ đó suy ra MN luôn tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB.

Giải

Kẻ $Ay\,/\!/\,b$. Dễ thấy $Ay\perp a$, $Ay\perp AB$.



Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Giả sử $AB=h,\ AM=m,\ BN=n\ (h,m,n>0)$.

Khi đó: $A(0;0;0)$, $B(0;0;h)$, $M(m;0;0)$, $N(0;n;h)$, $O\left(0;0;\frac{h}{2}\right)$

Theo giả thiết $MN=AM+BN$ nên ta có

$\sqrt{m^2+n^2+h^2}=m+n\Leftrightarrow h^2=2mn$

Ta có $\overrightarrow{MN}=(-m;n;h)$, $\overrightarrow{OM}=\left(m;0;-\frac{h}{2}\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OM}\right]=\left(-\frac{hn}{2};\frac{hm}{2};-mn\right)$

Do đó

$$d(O,MN)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}=\frac{\sqrt{\frac{h^2n^2}{4}+\frac{h^2m^2}{4}+m^2n^2}}{\sqrt{m^2+n^2+h^2}}=\frac{\sqrt{\frac{2mn^3}{4}+\frac{2m^3n}{4}+m^2n^2}}{\sqrt{m^2+n^2+2mn}}=\sqrt{\frac{mn}{2}}=\frac{h}{2}$$

Vậy khoảng cách từ O đến MN không đổi và bằng $\frac{AB}{2}$. Do đó MN luôn tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB.

Bài 45. Trong không gian tọa độ cho các điểm $A(0;0;1)$, $D(0;2;0)$. Các điểm B và C thay đổi trên trục Ox sao cho $(ACD)\perp(ABD)$. Xác định vị trí của B và C để thể tích tứ diện ABCD nhỏ nhất. Ứng với vị trí đó viết phương trinh mặt phẳng (α) chứa AD và tạo với các mặt (ACD), (ABD) những góc bằng nhau.

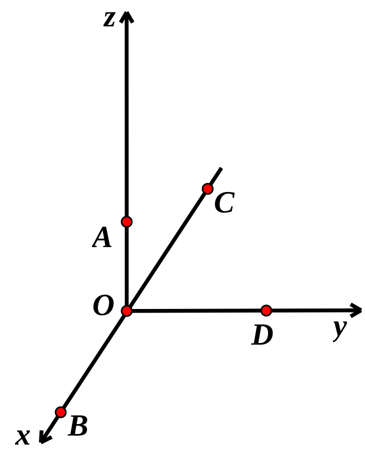
Giải

Giả sử $B(b;0;0)$, $C(c;0;0)$. Khi đó (ABD) có phương trình: $\frac{x}{b}+\frac{y}{2}+z=1$

và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(\frac{1}{b};\frac{1}{2};1\right)$

Mặt phẳng (ACD) có phương trình: $\frac{x}{c}+\frac{y}{2}+z=1$ và có vec-tơ pháp tuyến

$\overrightarrow{n'}=\left(\frac{1}{c};\frac{1}{2};1\right)$



Do $(ACD)\perp(ABD)$ nên $\vec{n}.\overrightarrow{n'}=0 \Rightarrow \frac{1}{bc}+\frac{1}{4}+1=0 \Rightarrow bc=-\frac{4}{5}$

Vậy ta có $OB.OC=\frac{4}{5}$ và B, C nằm khác phía đối với O.

Ta có:

$V_{ABCD}=V_{BOAD}+V_{COAD}=\frac{1}{3}(BO+CO).S_{\Delta OAD}=\frac{1}{3}(BO+CO)\geq\frac{2}{3}\sqrt{BO.CO}=\frac{4}{3\sqrt{5}}$ Dấu “=” xảy ra

$\Leftrightarrow BO=CO=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Khi đó mp(AOD) tạo với các mặt phẳng (ACD), (ABD) những góc bằng nhau và do đó, mặt phẳng (α) qua AD và vuông góc với (AOD) cũng tạo với các mặt phẳng (ACD), (ABD) những góc bằng nhau.

(AOD) có phương trình: $x=0$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}(1;0;0)$

Mặt phẳng (α) có vec-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AD}\right]=(0;1;2)$. Do đó (α) có phương trình

$0.(x-0)+1.(y-0)+2.(z-1)=0$ hay $y+2z-2=0$.

Bài 46. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ có $A(0;-1;0)$, $C(2;1;0)$, $B'(2;-1;2)$, $D'(0;1;2)$. Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên các đoạn A’B’ và BC sao cho $D'M\perp AN$.

a. Chứng minh rằng MN luôn vuông góc với một đường thẳng cố định.

b. Khi M là trung điểm của A’B’, viết phương trình mặt phẳng (DMN)

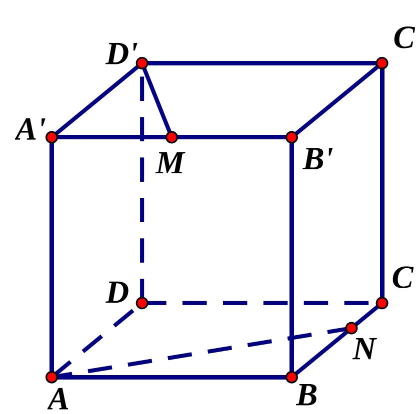
Giải

Ta có $\overrightarrow{AC}=(2;2;0)$, $\overrightarrow{B'D'}=(-2;2;0)$

$\Rightarrow AC\perp B'D'$ và $AC=B'D'$

$\Rightarrow AC\perp BD$ và $AC=BD$

$\Rightarrow$ ABCD là hình vuông



Tương tự, ta chứng minh được các mặt còn lại của hình hộp là những hình vuông, do đó ABCD.A’B’C’D’ là hình lập phương.

Giả sử $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{B'D'}\right]\Rightarrow\vec{n}=(0;0;8)$

$\Rightarrow$ (ABCD) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}(0;0;8)$

$\Rightarrow$ (ABCD) có phương trình: $z=0$

(A’B’C’D’) có phương trình: $z=2$

Từ đó dễ dàng xác định được các đỉnh còn lại của hình lập phương là:

$B(2;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;-1;2)$, $C'(2;1;2)$

$A'B'$ có phương trình: $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$. BC có phương trình: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 2s \\ z = 0 \end{cases}$ $(t, s \in \mathbb{R})$

Do M, N nằm trên các đoạn A'B' và BC nên $M(2t;-1;2)$, $N(2;-1+2s;0)$ với $0 \le t \le 1$, $0 \le s \le 1$

Theo giả thiết $D'M \perp AN \Rightarrow \overrightarrow{D'M}.\overrightarrow{AN} = 0 \Rightarrow t = s$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2-2t; 2t; -2)$

a. Xét $\vec{u} = (1;1;1)$, ta thấy $\overrightarrow{MN}.\vec{u} = 0\ \forall t$ nên MN luôn vuông góc với các đường thẳng có phương $\vec{u}$, suy ra MN luôn vuông góc với một đường thẳng cố định.

b. Khi M là trung điểm của A'B' thì $t = s = \frac{1}{2}$

Ta có $M(1;-1;2)$, $N(2;0;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (1;1;-2)$, $\overrightarrow{DM} = (1;-2;2)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DM}\right] = (-2;-4;-3)$

$\Rightarrow$ (DMN) qua $D(0;1;0)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (2;4;3)$

Vậy (DMN) có phương trình: $2x + 4y + 3z - 4 = 0$