Tạ Ngọc Thiện

CÂN BẰNG HỆ SỐ

TRONG CHỨNG MINH

BẤT ĐẲNG THỨC

BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Tạ Ngọc Thiện
Trường THPT Kinh Môn II
huyện Kinh Môn- tỉnh Hải Dương
Số ĐT: 0987733393

1. Bài toán tổng quát 1.

Cho các số thực $a_1, a_2, ... a_n \in D$ *thỏa mãn*

$$g(a_1) + g(a_2) + ... + g(a_n) \geq (\leq) n.g(\beta) \text{ với số thực } \beta \in D.$$

Chứng minh rằng:

$$f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \geq (\leq) n.f(\beta).$$

Để giải bài toán này ta cần biểu diễn $f(a_i)$ *qua* $g(a_i), i = 1, 2, ..., n$ *nên ta xét hàm số* $h(t) = f(t) + \alpha g(t), \forall t \in D$. *Số* α *được xác định sao cho hàm số* $h(t)$ *đạt cực tiểu (hoặc cực đại) tại* $t_0 = \beta$ *thì* $h'(\beta) = 0$ *và suy ra* $\alpha = -\dfrac{f'(\beta)}{g'(\beta)}$.

Ví dụ 1. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 \geq \dfrac{1}{9}$.

Nhận xét. *Từ giả thiết ta thấy đẳng thức xảy ra khi* $a = b = c = \dfrac{1}{3}$ *và BĐT cần chứng minh có dạng* $f(a) + f(b) + f(c) \geq \dfrac{1}{9}$. *Trong đó* $f(t) = t^3, t \in (0;1)$ *và* $g(t) = t$, *khi đó* $\alpha = -\dfrac{f'(1/3)}{g'(1/3)} = -\dfrac{1}{3}$ *nên ta có lời giải như sau.*

Lời giải:

Xét hàm số $y = t^3 - \dfrac{1}{3}t$ với $t \in (0;1)$.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - \dfrac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

t	0		$1/3$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{2}{27}$	$\nearrow$	$\dfrac{2}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$y \geq -\frac{2}{27} \Leftrightarrow t^3 - \frac{1}{3}t \geq -\frac{2}{27} \Leftrightarrow t^3 \geq \frac{1}{3}t - \frac{2}{27} \text{ với } t \in (0;1)$$

Từ đó suy ra:

$$a^3 \ge \frac{1}{3}a - \frac{2}{27};$$

$$b^3 \ge \frac{1}{3}b - \frac{2}{27};$$

$$c^3 \ge \frac{1}{3}c - \frac{2}{27}$$

với $a,b,c \in (0;1)$

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức này lại với nhau ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 \ge \frac{1}{3}(a+b+c) - \frac{6}{27} = \frac{1}{9}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. Cho $a,b,c \ge -\frac{3}{4}$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \le \frac{9}{10}.$$

(Vô địch Toán Ba Lan 1996)

Nhận xét.

Từ giả thiết ta thấy $a,b,c \in \left[-\frac{3}{4};\frac{5}{2}\right]$*, đẳng thức xảy ra khi* $a=b=c=\frac{1}{3}$ *và BĐT cần chứng minh có dạng* $f(a)+f(b)+f(c) \le \frac{9}{10}$.

Trong đó $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, x \in \left[-\frac{3}{4};\frac{5}{2}\right]$ *và* $g(x) = x$*, khi đó* $\alpha = -\frac{f'(1/3)}{g'(1/3)} = -\frac{18}{25}$ *nên ta có lời giải như sau.*

Lời giải:

Xét hàm số:

$$y = \frac{x}{x^2+1} - \frac{18}{25}x \text{ với } x \in \left[-\frac{3}{4};\frac{5}{2}\right].$$

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} - \frac{18}{25} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-3/4$		$-1/3$		$1/3$		$5/2$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$\frac{3}{50}$		$-\frac{3}{50}$		$\frac{3}{50}$		$-\frac{211}{145}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$y \le \frac{3}{50} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} - \frac{18}{25}x \le \frac{3}{50} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} \le \frac{18}{25}x + \frac{3}{50} \text{ với } x \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right].$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{a}{a^2+1} \le \frac{18}{25}a + \frac{3}{50};$$

$$\frac{b}{b^2+1} \le \frac{18}{25}b + \frac{3}{50};$$

$$\frac{c}{c^2+1} \le \frac{18}{25}c + \frac{3}{50}$$

với $a,b,c \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right]$.

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức này lại với nhau ta có

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \le \frac{18}{25}(a+b+c) + \frac{9}{50} = \frac{9}{10}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét.

Qua các ví dụ trên ta thấy các bất đẳng thức cần chứng minh đều có các biến có tính chất đối xứng nên dễ dàng nhận ra dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau. Nếu các bất đẳng thức cần chứng minh không còn tính chất đối xứng giữa các biến nữa thì chắc rằng dấu bằng không thể xảy ra khi các biến bằng nhau. Khi đó các bất đẳng thức cần chứng minh sẽ hay hơn và khó hơn nhiều so với trường hợp dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau. Vậy các bất đẳng thức ở dạng này xảy ra dấu bằng khi nào và làm thế nào để tìm được dấu bằng xảy ra ? Để làm rõ vấn đề này thì ta xét các bài toán tổng quát sau đây.

2. Bài toán tổng quát 2.

Cho các số thực $a,b,c \in D$ thỏa mãn

$$mg(a) + ng(b) + pg(c) \ge (\le) k \text{ với số thực } a,b,c \in D.$$

Chứng minh rằng:

$$f(a)+f(b)+f(c)\ge(\le)\alpha k.$$

Để giải bài toán này ta cần biểu diễn $f(a),f(b),f(c)$ qua $mg(a),ng(a),pg(c)$ nên ta xét hàm số $h(t)=f(t)+\alpha\beta g(t),\forall t\in D$, $\beta\in\{m,n,p\}$. Số α được xác định sao cho hàm số $h(t)$ đạt cực tiểu (hoặc cực đại) tại $t_0=\{a,b,c\}$ thì $h'(t_0)=0$ và suy ra $\alpha=-\dfrac{f'(t_0)}{\beta g'(t_0)}$.

Khi đó dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi các biến thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} mg(a)+ng(b)+pg(c)=k \\ \dfrac{f'(a)}{mg'(a)}=\dfrac{f'(b)}{ng'(b)}=\dfrac{f'(c)}{pg'(c)} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta sẽ tìm được giá trị của các biến a, b, c từ đó ta biết được đẳng thức xảy ra khi nào.

Ví dụ 3. Cho $a,b,c>0$ và $a+4b+9c=1$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3\ge\frac{1}{1296}.$$

Nhận xét. *Từ giả thiết ta thấy $a,b,c\in(0;1)$ và BĐT cần chứng minh có dạng*
Cho các số thực $a,b,c>0$ thỏa mãn $g(a)+4g(b)+9g(c)=1$. Chứng minh rằng

$$f(a)+f(b)+f(c)\ge\frac{1}{1296}.$$

Trong đó $f(t)=t^3,t\in(0;1)$ và $g(t)=t$. Khi đó dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi a,b,c thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} a+4b+9c=1 \\ \dfrac{3a^2}{1}=\dfrac{3b^2}{4}=\dfrac{3c^2}{9} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{1}{36} \\ b=\dfrac{1}{18} \\ c=\dfrac{1}{12} \end{cases}$$

Ta có $\alpha=-\dfrac{f'(t_0)}{\beta g'(t_0)}=-\dfrac{1}{432}$. Vậy ta có lời giải như sau.

Lời giải:

Xét hàm số:

$$y = t^3 - \frac{1}{432}\beta t \text{ với } t \in (0;1).$$

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - \frac{\beta}{432} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{\beta}}{36}.$$

Bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{\beta}/36$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{\beta^3}}{23328}$	$\nearrow$	$\frac{431}{432}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$y \ge -\frac{\sqrt{\beta^3}}{23328} \Leftrightarrow t^3 - \frac{\beta}{432}t \ge -\frac{\sqrt{\beta^3}}{23328} \Leftrightarrow t^3 \ge \frac{\beta}{432}t - \frac{\sqrt{\beta^3}}{23328}$$

với $t \in (0;1); \beta \in \{1;4;9\}$.

Từ đó suy ra:

$$a^3 \ge \frac{1}{432}a - \frac{1}{23328};$$

$$b^3 \ge \frac{4}{432}b - \frac{8}{23328};$$

$$c^3 \ge \frac{9}{432}c - \frac{27}{23328}$$

với $a,b,c \in (0;1)$.

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức này lại với nhau ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 \ge \frac{1}{432}(a + 4b + 9c) - \frac{36}{23328} = \frac{1}{1296}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = \frac{1}{36}, b = \frac{1}{18}, c = \frac{1}{12}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 4. Cho $a,b,c > 0$ và $a + b + \frac{4}{9}c = \frac{208}{27}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{3a+2} + \sqrt[3]{3a+2} + \sqrt[3]{3a+2} \le 7.$$

Nhận xét. *Từ giả thiết ta thấy* $a,b,c \in \left(0;\dfrac{208}{27}\right)$ *và BĐT cần chứng minh ở trên có dạng: Cho các số thực* $a,b,c>0$ *thỏa mãn* $g(a)+g(b)+\dfrac{4}{9}g(c)=\dfrac{208}{27}$. *Chứng minh rằng:* $f(a)+f(b)+f(c)\le 7$.

Trong đó $f(t)=\sqrt[3]{3t+2}, t\in\left(0;\dfrac{208}{27}\right)$ *và* $g(t)=t$. *Khi đó dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi* a,b,c *thỏa mãn hệ phương trình*

$$\begin{cases} a+b+\dfrac{4}{9}c=\dfrac{208}{27} \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{(3a+2)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3b+2)^2}}=\dfrac{9}{4\sqrt[3]{(3c+2)^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=\dfrac{25}{3} \end{cases}$$

Ta có $\alpha=-\dfrac{f'(t_0)}{\beta g'(t_0)}=-\dfrac{1}{4}$. *Vậy ta có lời giải như sau.*

Lời giải:

Xét hàm số:

$$y=f(t)=\sqrt[3]{3t+2}-\frac{\beta}{4}t, t\in\left(0;\frac{208}{27}\right).$$

Ta có

$$y'=0\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(3t+2)^2}}-\frac{\beta}{4}=0\Leftrightarrow t=\frac{8-2\beta\sqrt{\beta}}{3\beta\sqrt{\beta}}.$$

Bảng biến thiên

t	0		$\left(8-2\beta\sqrt{\beta}\right)/3\beta\sqrt{\beta}$		$208/27$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{8+\beta\sqrt{\beta}}{6\sqrt{\beta}}$	$\searrow$	$\sqrt[3]{\dfrac{226}{9}-\dfrac{52\beta}{27}}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$y\le\frac{8+\beta\sqrt{\beta}}{6\sqrt{\beta}}\Leftrightarrow\sqrt[3]{3t+2}-\frac{\beta}{4}t\le\frac{8+\beta\sqrt{\beta}}{6\sqrt{\beta}}\Leftrightarrow\sqrt[3]{3t+2}\le\frac{\beta}{4}t+\frac{8+\beta\sqrt{\beta}}{6\sqrt{\beta}}$$

với $t\in(0;\frac{112}{3});\beta\in\left\{1;1;\frac{4}{9}\right\}$. Từ đó suy ra:

$$\sqrt[3]{3a+2}\le\frac{1}{4}a+\frac{3}{2};$$
$$\sqrt[3]{3b+2}\le\frac{1}{4}b+\frac{3}{2};$$
$$\sqrt[3]{3c+2}\le\frac{1}{9}c+\frac{56}{27}$$

với $a,b,c\in\left(0;\frac{208}{27}\right)$.

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức này lại với nhau ta có

$$\sqrt[3]{3a+2}+\sqrt[3]{3a+2}+\sqrt[3]{3a+2}\le\frac{1}{4}\left(a+b+\frac{4}{9}c\right)+\frac{137}{27}=7$$
$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{3a+2}+\sqrt[3]{3a+2}+\sqrt[3]{3a+2}\le7.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=2,b=3,c=\frac{25}{3}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

3. Bài toán tổng quát 3. *Cho các số thực $a,b,c\in D$ thỏa mãn*

$$g(a)+g(b)+g(c)\ge(\le)k \text{ với số thực } a,b,c\in D.$$

Chứng minh rằng

$$mf(a)+nf(b)+pf(c)\ge(\le)\alpha k.$$

Để giải bài toán này ta cần biểu diễn $mf(a),nf(b),pf(c)$ qua $g(a),g(a),g(c)$ nên ta xét hàm số $h(t)=\beta f(t)+\alpha g(t),\forall t\in D$, $\beta\in\{m,n,p\}$. Số α được xác định sao cho hàm số $h(t)$ đạt cực tiểu (hoặc cực đại) tại $t_0=\{a,b,c\}$ thì $h'(t_0)=0$ và suy ra $\alpha=-\frac{\beta f'(t_0)}{g'(t_0)}$. Khi đó dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi các biến thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}g(a)+g(b)+g(c)=k\\ \frac{mf'(a)}{g'(a)}=\frac{nf'(b)}{g'(b)}=\frac{pf'(c)}{g'(c)}\end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta sẽ tìm được a, b, c từ đó ta biết được đẳng thức xảy ra khi nào.

Ví dụ 5. Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^3+4b^3+9c^3\ge\frac{36}{121}.$$

Nhận xét. *Từ giả thiết ta thấy* $a,b,c\in(0;1)$ *và BĐT cần chứng minh ở trên có dạng: Cho các số thực* $a,b,c>0$ *thỏa mãn* $g(a)+g(b)+g(c)=1$. *Chứng minh rằng:* $f(a)+4f(b)+9f(c)\ge\frac{36}{121}$.

Trong đó $f(t)=t^3, t\in(0;1)$ *và* $g(t)=t$. *Khi đó dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi* a,b,c *thỏa mãn hệ phương trình*

$$\begin{cases}a+b+c=1\\ \dfrac{3a^2}{1}=\dfrac{12b^2}{1}=\dfrac{27c^2}{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{6}{11}\\ b=\dfrac{3}{11}\\ c=\dfrac{2}{11}\end{cases}$$

Ta có $\alpha=-\frac{\beta f'(t_0)}{g'(t_0)}=-\frac{108}{121}$. *Vậy ta có lời giải như sau.*

Lời giải:

Xét hàm số:

$$y=\beta t^3-\frac{108}{121}t \text{ với } t\in(0;1).$$

Ta có

$$y'=0\Leftrightarrow 3\beta t^2-\frac{108}{121}=0\Leftrightarrow t=\frac{6}{11\sqrt{\beta}}.$$

Bảng biến thiên

t	0		$6/11\sqrt{\beta}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{432}{1331\sqrt{\beta^3}}$	$\nearrow$	$\frac{431}{432}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$y\ge-\frac{432}{1331\sqrt{\beta}}\Leftrightarrow\beta t^3-\frac{108}{121}t\ge-\frac{432}{1331\sqrt{\beta}}\Leftrightarrow\beta t^3\ge\frac{108}{121}t-\frac{432}{1331\sqrt{\beta}}$$

với $t\in(0;1);\beta\in\{1;4;9\}$. Từ đó suy ra:

$$a^3 \geq \frac{108}{121}a - \frac{432}{1331};$$

$$4b^3 \geq \frac{108}{121}b - \frac{216}{1331};$$

$$9c^3 \geq \frac{108}{121}c - \frac{144}{1331}$$

với $a,b,c \in (0;1)$.

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức này lại với nhau ta có :

$$a^3 + 4b^3 + 9c^3 \geq \frac{108}{121}(a+b+c) - \frac{792}{1331} = \frac{36}{121}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = \frac{6}{11}, b = \frac{3}{11}, c = \frac{2}{11}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có

$$\sin A + \sin B + \sqrt{6}\sin C \leq \frac{5\sqrt{10}}{4}.$$

(HSG Thái Nguyên 2012)

Nhận xét.

Vì A, B, C là 3 góc của tam giác nên ta có $A+B+C=\pi$ và $A,B,C \in (0;\pi)$. Do đó BĐT cần chứng minh có dạng: Cho các số thực $A,B,C > 0$ thỏa mãn $g(A)+g(B)+g(C)=\pi$. Chứng minh rằng:

$$f(A) + f(B) + \sqrt{6}f(C) \leq \frac{5\sqrt{10}}{4}.$$

Trong đó $f(t) = \sin t, t \in (0;\pi)$ và $g(t) = t$. Khi đó dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi a,b,c thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} A+B+C=\pi \\ \cos A = \cos B = \sqrt{6}\cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \arccos\frac{\sqrt{6}}{4} \\ B = \arccos\frac{\sqrt{6}}{4} \\ C = \pi - 2\arccos\frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Ta có $\alpha = -\frac{\beta f'(t_0)}{g'(t_0)} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$. Vậy ta có lời giải như sau.

Lời giải:

Xét hàm số

$$y=\beta\sin t-\frac{\sqrt{6}}{4}t \text{ với } t\in(0;\pi).$$

Ta có

$$y'=0\Leftrightarrow \beta\mathrm{cost}-\frac{\sqrt{6}}{4}=0\Leftrightarrow t=\arccos\frac{\sqrt{6}}{4\beta}.$$

Bảng biến thiên

t	0		$\arccos\left(\sqrt{6}/4\beta\right)$		π
y'		$+$	0	$-$	
y			$\frac{\sqrt{16\beta^2-6}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\arccos\frac{\sqrt{6}}{4\beta}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	β				$-\frac{\pi\sqrt{6}}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$y\le\frac{\sqrt{16\beta^2-6}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}\Leftrightarrow \beta\sin t\le\frac{\sqrt{6}}{4}t+\frac{\sqrt{16\beta^2-6}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$$

với $t\in(0;\pi);\beta\in\left\{1;1;\sqrt{6}\right\}$. Từ đó suy ra:

$$\sin A\le\frac{\sqrt{6}}{4}A+\frac{\sqrt{10}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\arccos\frac{\sqrt{6}}{4};$$

$$\sin B\le\frac{\sqrt{6}}{4}B+\frac{\sqrt{10}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\arccos\frac{\sqrt{6}}{4};$$

$$\sqrt{6}\sin C\le\frac{\sqrt{6}}{4}C+\frac{3\sqrt{10}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\arccos\frac{1}{4}$$

với $A,B,C\in(0;\pi)$.

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức này lại với nhau ta có

$$\sin A+\sin B+\sqrt{6}\sin C\le\frac{5\sqrt{10}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}(A+B+C)-\frac{\sqrt{6}}{4}\left(\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}+\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}+\arccos\frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sin A+\sin B+\sqrt{6}\sin C\le\frac{5\sqrt{10}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}(A+B+C)-\frac{\sqrt{6}}{4}(A+B+C)=\frac{5\sqrt{10}}{4}.$$

$$\Leftrightarrow\sin A+\sin B+\sqrt{6}\sin C\le\frac{5\sqrt{10}}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$A=\arccos\frac{\sqrt{6}}{4};B=\arccos\frac{\sqrt{6}}{4};C=\pi-2\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 7. Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{4(a+b)}\geq\frac{7}{8}.$$

Nhận xét. *Biến đổi BĐT đã cho về dạng*

$$\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{4(3-c)}\geq\frac{7}{8}$$

Từ giả thiết ta thấy $a,b,c\in(0;3)$ *và BĐT cần chứng minh ở trên có dạng:*

Cho các số thực $a,b,c>0$ *thỏa mãn* $g(a)+g(b)+g(c)=3$*. Chứng minh rằng:*

$$f(a)+f(b)+\frac{1}{4}f(c)\geq\frac{7}{8}.$$

Trong đó $f(t)=\frac{t}{3-t},t\in(0;3)$ *và* $g(t)=t$*. Khi đó dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi* a,b,c *thỏa mãn hệ phương trình*

$$\begin{cases}a+b+c=3\\ \dfrac{3}{(3-a)^2}=\dfrac{3}{(3-b)^2}=\dfrac{3}{4(3-c)^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{5}\\ b=\dfrac{3}{5}\\ c=\dfrac{9}{5}\end{cases}$$

Ta có $\alpha=-\frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}=-\frac{25}{48}$*. Vậy ta có lời giải như sau.*

Lời giải:

Xét hàm số

$$y=f(t)=\frac{\beta t}{3-t}-\frac{25}{48}t,t\in(0;3).$$

Ta có

$$y'=0\Leftrightarrow\frac{3\beta}{(3-t)^2}-\frac{25}{48}=0\Leftrightarrow t=\frac{15-12\sqrt{\beta}}{5}.$$

Bảng biến thiên

t	0	$\left(15-12\sqrt{\beta}\right)/5$	3
y'	$-$	0	$+$
y	0 ↘	$\dfrac{40\sqrt{\beta}-16\beta-25}{16}$	↗ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$y\geq\frac{40\sqrt{\beta}-16\beta-25}{16}\Leftrightarrow\frac{\beta t}{3-t}-\frac{25}{48}t\geq\frac{40\sqrt{\beta}-16\beta-25}{16}\Leftrightarrow\frac{\beta t}{3-t}\geq\frac{25}{48}t+\frac{40\sqrt{\beta}-16\beta-25}{16}$$

với $t\in(0;3);\beta\in\left\{1;1;\frac{1}{4}\right\}$.

Từ đó suy ra:

$$\frac{a}{3-a}\geq\frac{25}{48}a-\frac{1}{16};$$
$$\frac{b}{3-b}\geq\frac{25}{48}b-\frac{1}{16};$$
$$\frac{c}{4\left(3-c\right)}\geq\frac{25}{48}a-\frac{9}{16}$$

với $a,b,c\in(0;3)$.

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức này lại với nhau ta có:

$$\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{4(3-\mathrm{c})}\geq\frac{25}{48}\left(a+b+c\right)-\frac{11}{16}=\frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{4(a+b)}\geq\frac{7}{8}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=\frac{3}{5},b=\frac{3}{5},c=\frac{9}{5}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

4. Bài toán tổng quát 4. *Cho các số thực $a,b,c\in D$ thỏa mãn*

$$mg(a)+ng(b)+pg(c)\geq(\leq)k \text{ với số thực } a,b,c\in D.$$

Chứng minh rằng

$$m'f(a)+n'f(b)+p'f(c)\geq(\leq)\alpha k.$$

Để giải bài toán này ta cần biểu diễn $m'f(a),n'f(b),p'f(c)$ qua $mg(a),ng(b),pg(c)$ nên ta xét hàm số $h(t)=\beta f(t)+\alpha\gamma g(t),\forall t\in D$

, $\beta \in \{m', n', p'\}; \gamma \in \{m, n, p\}$. Số α được xác định sao cho hàm số $h(t)$ đạt cực tiểu (hoặc cực đại) tại $t_0 = \{a, b, c\}$ thì $h'(t_0) = 0$ và suy ra $\alpha = -\dfrac{\beta f'(t_0)}{\gamma g'(t_0)}$.

Khi đó dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi các biến thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} mg(a) + ng(b) + pg(c) = k \\ \dfrac{m' f'(a)}{mg'(a)} = \dfrac{n' f'(b)}{ng'(b)} = \dfrac{p' f'(c)}{pg'(c)} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta sẽ tìm được giá trị của các biến a, b, c từ đó ta biết được đẳng thức xảy ra khi nào.

Ví dụ 8 . Cho $a, b, c > 0$ và $a + 4b + 9c = 1$. Chứng minh rằng

$$a^3 + 25b^3 + 36c^3 \geq \frac{100}{5041}.$$

Nhận xét. *Từ giả thiết ta thấy $a, b, c \in (0;1)$ và BĐT cần chứng minh có dạng:*

Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $g(a) + 4g(b) + 9g(c) = 1$. Chứng minh rằng:

$$f(a) + 25f(b) + 36f(c) \geq \frac{100}{5041}.$$

Trong đó $f(t) = t^3, t \in (0;1)$ và $g(t) = t$. Khi đó dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi a, b, c thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} a + 4b + 9c = 1 \\ \dfrac{3a^2}{1} = \dfrac{75b^2}{4} = \dfrac{108c^2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{10}{71} \\ b = \dfrac{4}{71} \\ c = \dfrac{5}{71} \end{cases}$$

Ta có $\alpha = -\dfrac{\beta f'(t_0)}{\gamma g'(t_0)} = -\dfrac{300}{5041}$. Vậy ta có lời giải như sau.

Lời giải:

Xét hàm số

$$y = \beta t^3 - \frac{300\gamma}{5041} t \text{ với } t \in (0;1).$$

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3\beta t^2 - \frac{300\gamma}{5041} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{71}\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}.$$

Bảng biến thiên

t	0	$10\sqrt{\gamma}/71\sqrt{\beta}$	1
y'	$-$	0	$+$
y	0 $\searrow$	$-\dfrac{2000}{357911}\sqrt{\dfrac{\gamma^3}{\beta}}$	$\nearrow$ $\dfrac{431}{432}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$y \geq -\frac{2000}{357911}\sqrt{\frac{\gamma^3}{\beta}} \Leftrightarrow \beta t^3 - \frac{300\gamma}{5041}t \geq -\frac{2000}{357911}\sqrt{\frac{\gamma^3}{\beta}} \Leftrightarrow \beta t^3 \geq \frac{300\gamma}{5041}t - \frac{2000}{357911}\sqrt{\frac{\gamma^3}{\beta}}$$

với $t \in (0;1); \beta \in \{1;25;36\}, \gamma \in \{1;4;9\}$.

Từ đó suy ra:

$$a^3 \geq \frac{300}{5041}a - \frac{2000}{357911};$$

$$25b^3 \geq \frac{1200}{5041}a - \frac{3200}{357911};$$

$$36b^3 \geq \frac{2700}{5041}a - \frac{9000}{357911}$$

với $a,b,c \in (0;1)$.

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức này lại với nhau ta có

$$a^3 + 25b^3 + 36c^3 \geq \frac{300}{5041}(a+4b+9c) - \frac{14200}{357911} = \frac{100}{5041}$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 25b^3 + 36c^3 \geq \frac{100}{5041}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = \frac{10}{71}, b = \frac{4}{71}, c = \frac{5}{71}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 9. Cho $a,b,c > 0$ và $2a+3b+4c=1$. Chứng minh rằng

$$2\sqrt{2a+1} + 3\sqrt{2b+1} + 4\sqrt{2c+1} < 10.$$

(HSG Ninh Thuận 2012)

Nhận xét. *Từ giả thiết ta thấy $a,b,c \in (0;1)$ và BĐT cần chứng minh có dạng:*
Cho các số thực $a,b,c > 0$ thỏa mãn $2g(a)+3g(b)+4g(c)=1$. Chứng minh rằng:

$$2f(a)+3f(b)+4f(c) < 10.$$

Trong đó $f(t) = \sqrt{2t+1}, t \in (0;1)$ và $g(t) = t$. Khi đó dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi a,b,c thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a+3b+4c=1 \\ \sqrt{2a+1}=\sqrt{2b+1}=\sqrt{2c+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{9} \\ b=\dfrac{1}{9} \\ c=\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

Ta có $\alpha = -\dfrac{\beta f'(t_0)}{\gamma g'(t_0)} = -\dfrac{3}{\sqrt{11}}$. *Vậy ta có lời giải như sau.*

Lời giải:

Xét hàm số

$$y=\beta\sqrt{2t+1}-\frac{3\beta}{\sqrt{11}}t \text{ với } t\in(0;1).$$

Ta có

$$y'=0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\sqrt{2t+1}}-\frac{3\beta}{\sqrt{11}}=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{9}.$$

Bảng biến thiên

t	0		1/9		1
y'		+	0	−	
y			$\dfrac{10\beta\sqrt{11}}{33}$		
	β	$\nearrow$		$\searrow$	$\dfrac{\beta\left(\sqrt{33}-3\right)}{\sqrt{11}}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$y\le\frac{10\beta\sqrt{11}}{33} \Leftrightarrow \beta\sqrt{2t+1}-\frac{3\beta}{\sqrt{11}}t\le\frac{10\beta\sqrt{11}}{33} \Leftrightarrow \beta\sqrt{2t+1}\le\frac{3\beta}{\sqrt{11}}t+\frac{10\beta\sqrt{11}}{33}$$

với $t\in(0;1);\beta\in\{2;3;4\}$.

Từ đó suy ra:

$$2\sqrt{2a+1}\le\frac{6}{\sqrt{11}}a+\frac{20\sqrt{11}}{33};$$

$$3\sqrt{2b+1}\le\frac{9}{\sqrt{11}}b+\frac{30\sqrt{11}}{33};$$

$$4\sqrt{2c+1}\le\frac{12}{\sqrt{11}}c+\frac{40\sqrt{11}}{33}$$

với $a,b,c\in(0;1)$.
Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức này lại với nhau ta có

$$2\sqrt{2a+1}+3\sqrt{2b+1}+4\sqrt{2c+1}\le\frac{3}{\sqrt{11}}(2a+3b+4c)+\frac{90\sqrt{11}}{33}=3\sqrt{11}<10.$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2a+1}+3\sqrt{2b+1}+4\sqrt{2c+1}<10$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 10. Cho $a,b,c>0$ và $2a+b+c=6$. Chứng minh rằng

$$a+\frac{11}{8}(b+c)+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{29}{4}.$$

Nhận xét. *Từ giả thiết ta thấy* $a,b,c\in(0;6)$ *và BĐT cần chứng minh có dạng:*
Cho các số thực $a,b,c>0$ *thỏa mãn* $2g(a)+g(b)+g(c)=6$. *Chứng minh rằng:*

$$f(a)+f(b)+f(c)\ge\frac{29}{4}.$$

Trong đó $f(t)=\beta t+\frac{1}{t}, t\in(0;6)$ *và* $g(t)=t$. *Khi đó dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi* a,b,c *thỏa mãn hệ phương trình*

$$\begin{cases}2a+b+c=6\\ \dfrac{1-\frac{1}{a^2}}{2}=\dfrac{11}{8}-\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{11}{8}-\dfrac{1}{b^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=1\end{cases}$$

Ta có $\alpha=-\frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}=-\frac{3}{8}$. *Vậy ta có lời giải như sau.*

Lời giải:
Xét hàm số

$$y=f(t)=\beta t+\frac{1}{t}-\frac{3\gamma}{8}t, t\in(0;6).$$

Ta có

$$y'=0\Leftrightarrow\beta-\frac{3\gamma}{8}-\frac{1}{t^2}=0\Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{8}{8\beta-3\gamma}}.$$

Bảng biến thiên

t	0	$\sqrt{8}/\sqrt{8\beta-3\gamma}$	6
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty \searrow$	$\sqrt{\dfrac{8\beta-3\gamma}{2}}$	$\nearrow \dfrac{72\beta-27\gamma+2}{12}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$y\ge\sqrt{\frac{8\beta-3\gamma}{2}}\Leftrightarrow \beta t+\frac{1}{t}-\frac{3\gamma}{8}t\ge\sqrt{\frac{8\beta-3\gamma}{2}}\Leftrightarrow \beta t+\frac{1}{t}\ge\frac{3\gamma}{8}t+\sqrt{\frac{8\beta-3\gamma}{2}}$$

với $t\in(0;6);\beta\in\left\{1;\frac{11}{8};\frac{11}{8}\right\};\gamma\in\{2;1;1\}$.

Từ đó suy ra:

$$a+\frac{1}{a}\ge\frac{6}{8}a+1;$$
$$\frac{11}{8}b+\frac{1}{b}\ge\frac{3}{8}b+2;$$
$$\frac{11}{8}c+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{8}c+2$$

với $a,b,c\in(0;6)$.

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức này lại với nhau ta có

$$a+\frac{11}{8}(b+c)+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{8}(2a+b+c)+5=\frac{29}{4}$$
$$\Leftrightarrow a+\frac{11}{8}(b+c)+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{29}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=2,b=1,c=1$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 11. Cho $x,y,z>0$ và $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$P=\left(x+\frac{2}{x}\right)+\left(20y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{2}{z}\right)\ge 15.$$

Nhận xét. *Giả sử dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi* $x=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ *thì ta có*

$$xyz=1\Leftrightarrow 1=\sqrt[3]{xyz}\Leftrightarrow 3=3\sqrt[3]{mn}\sqrt[3]{x\frac{y}{m}\frac{z}{n}}\le\sqrt[3]{mn}\left(x+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}\right)\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt[3]{mn}}\le x+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}$$

Khi đó BĐT cần chứng minh có dạng:

Cho các số thực $x,y,z>0$ *thỏa mãn* $g(x)+\frac{g(y)}{m}+\frac{g(z)}{n}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{mn}}$. *Chứng minh rằng:* $f(x)+f(y)+f(z)\ge 15$.

Trong đó $f(t)=\beta t+\frac{\gamma}{t},t\in(0;+\infty)$ *và* $g(t)=t$. *Khi đó dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi* a,b,c *thỏa mãn hệ phương trình*

$$\begin{cases} x=\frac{y}{m}=\frac{z}{n};xyz=1 \\ 1-\frac{2}{x^2}=m\left(20-\frac{1}{y^2}\right)=m\left(1-\frac{2}{y^2}\right) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=\frac{1}{8};n=1 \\ x=2;y=\frac{1}{4};z=2 \end{cases}$$

Ta có $\alpha=-\frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}=-\frac{1}{2}$. *Vậy ta có lời giải như sau.*

Lời giải:

Ta có

$$xyz=1\Leftrightarrow 1=\sqrt[3]{xyz}\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x.8y.z}\le\frac{1}{2}(x+8y+z)\Leftrightarrow 6\le x+8y+z$$

Xét hàm số

$$y=f(t)=\beta t+\frac{\gamma}{t}-\frac{\lambda}{2}t,t\in(0;+\infty);\beta\in\{1;20;1\};\gamma\in\{2;1;2\};\ \lambda\in\{1;8;1\}.$$

Ta có

$$y'=0\Leftrightarrow\left(\beta-\frac{\lambda}{2}\right)-\frac{\gamma}{t^2}=0\Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{2\gamma}{2\beta-\lambda}}.$$

Bảng biến thiên

t	0	$\sqrt{2\gamma}/\sqrt{2\beta-\lambda}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$ ↘	$\sqrt{4\beta\gamma-2\lambda\gamma}$	↗ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$y\ge\sqrt{4\beta\gamma-2\lambda\gamma}\Leftrightarrow\beta t+\frac{\gamma}{t}\ge\frac{\lambda}{2}t+\sqrt{4\beta\gamma-2\lambda\gamma}$

với $t\in(0;+\infty);\beta\in\{1;20;1\};\gamma\in\{2;1;2\};\lambda\in\{1;8;1\}$.

Từ đó suy ra:

$$x+\frac{2}{x}\ge\frac{x}{2}+2;$$

$$20y+\frac{1}{y}\ge 4y+8;$$

$$z+\frac{2}{z}\ge\frac{z}{2}+2$$

với $x,y,z>0$.

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức này lại với nhau ta có

$$P=\left(x+\frac{2}{x}\right)+\left(20y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{2}{z}\right)\ge\frac{1}{2}(x+8y+z)+12\ge 15$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=2;y=\frac{1}{4};z=2$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. *Qua các ví dụ đã nêu ở trên ta nhận thấy rằng việc đi tìm các giá trị của các biến để dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra bằng phương pháp hàm số là rất đơn giản, dễ hiểu và hiệu quả hơn nhiều so với các phương pháp đã biết. Ngoài ra thông qua phương pháp chúng ta cũng có thể sáng tạo ra rất nhiều các bài toán chứng minh bất đẳng thức bằng cách thay đổi các hệ số trong điều kiện của bất đẳng thức hoặc trong chính bản thân các bất đẳng thức có sẵn và các bài toán chứng minh bất đẳng thức được tạo ra sẽ khó hơn, hay hơn nhiều bất đẳng thức ban đầu.*

5. Bài tập luyện tập

Bài 1. Cho $a,b,c>0$ và $15a+\sqrt[3]{5}b+\sqrt[5]{3}c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{1}{a}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^5}.$$

(Olympic 30-4 Cà Mau 2012)

Bài 2. Cho x,y,z là 3 số thỏa $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{3+4^x}+\sqrt{3+4^y}+\sqrt{5+4^z}\ge 7$$

Bài 3. Cho $a,b,c\in R$ và $a+b+3c=10$. Chứng minh rằng

$$a^4+b^4+c^4\ge 2\left(a^3+b^3+c^3\right).$$

Bài 4. Cho $a,b,c\ge-\frac{3}{4}$ và $a+b+c=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{3a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\le\frac{12}{5}.$$

Bài 5. Cho $a,b,c>0$ và $2a+2b+3c=15$. Chứng minh rằng
$$3\sqrt{a}+2\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca.$$

Bài 6. Cho $a,b,c,d>0$ và $a+b+2c+3d=4$. Chứng minh rằng
$$6\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\ge a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{191}{18}.$$

Bài 7. Cho các số thực dương a,b,c và $a+b+c=4$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{16}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2.$$

Bài 8. Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z\le 4$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{32}{z^2}}\ge 5\sqrt{2}.$$

Bài 9. Cho $a,b,c>0$ và $a^2+2b^2+5c^2=11$. Chứng minh rằng
$$\frac{16}{a}+\frac{9}{b}+\frac{4}{c}-(a+b+c)\ge 17.$$

Bài 10. Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=6$. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{a^2+c^2}+\frac{2c}{a^2+b^2}\ge\frac{12}{5}.$$

Bài 11. Cho $a,\ b,\ c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$$

(HSG Kiên Giang 2014)

Bài 12. Cho ba số thực $x,y,z\in[1;4]$ và thỏa mãn $x\ge y, x\ge z$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{x}{2x+3y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}.$$

(Đề thi Đại học Khối A 2011)

Bài 13. Xét các số thực dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $abc+a+c=b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}$$

(Đề thi HSG THPT toàn quốc bảng A 1999)

Bài 14. Xét các số thực dương a,b,c thỏa mãn $21ab+2bc+8ac\le 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P(a,b,c)=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}.$$

(Đề thi chọn ĐTQG 2001)

***