KỸ THUẬT ĐÁNH GIÁ TỪNG BIẾN BẰNG HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

CỞ SỞ LÝ THUYẾT

Bất đẳng thức đưa được về dạng $f\left(a_1\right)+f\left(a_2\right)+...+f\left(a_n\right)\ge m\ (\le m)$ với giả thiết $a_1^k+a_2^k+...+a_n^k=h$.

- Ý tưởng: Khi đó ta tìm cách đánh giá $f\left(a_1\right)\ge \alpha a_1^k+\beta$ (*)

Với dự đoán được dấu bằng xảy ra tại tâm là $a_i=a_0\ \left(i=\overline{1,n}\right)$

Để (*) đúng thì $\begin{cases} f\left(a_0\right)\ge \alpha a_0^k+\beta \\ f'\left(a_0\right)\ge \alpha k a_0^{k-1} \end{cases}$, từ đây ta tìm được $\alpha,\ \beta$.

Khi đó chứng minh lại (*) ta có thể dùng biến đổi tương đương hoặc dùng phương pháp hàm số với lưu ý cần hạn chế miền của biến từ điều kiện ràng buộc.

Tóm Lại : Phương pháp sẽ là công cụ rất mạnh nếu có hai đặc điểm sau

1. Đưa được bài toán về dạng $f\left(a_1\right)+f\left(a_2\right)+...+f\left(a_n\right)\ge m\ (\le m)$
2. Điểm rơi của bài toán xảy ra khi $a_1=a_2=......=a_n$

Bài mẫu 01 Cho các số thực a,b,c dương và $a+b+c=1$. Hãy tìm giá trị Lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1+a}{2a^2+(1-a)^2}+\dfrac{1+b}{2b^2+(1-b)^2}+\dfrac{1+c}{2c^2+(1-c)^2}$

<u>Phân tích và hướng dẫn giải</u>

- Bài toán đã có dạng $f(a)+f(b)+f(c)$ (các biến hoàn toàn độc lập)
- Vai trò giữa các biến là như nhau, do đó ta dễ dàng dự đoán điểm rơi là $a=b=c=\dfrac{1}{3}$
- Bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất nghĩa là đánh giá $P\le M=?$

Kết nối những điều trên cho ta ý tưởng đánh giá bđt phụ $\dfrac{1+x}{2x^2+(1-x)^2}\le mx+n$

Công việc còn lại là tìm m,n. Với việc đánh giá điểm rơi như trên , để tìm m,n ta dùng hệ sau $\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{3}\right)=m.\dfrac{1}{3}+n \\ f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3}m+n=2 \\ m=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{3}{2} \\ n=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Ta chứng minh $\dfrac{1+x}{2x^2+(1-x)^2}\le \dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{-(1+x)(3x-1)^2}{2x^2+(1-x)^2}\le 0; \forall x\in (0;1)$

Dấu bằng xảy ra khi $x=\dfrac{1}{3}$. Vậy ta có lời giải sau.

Ta chứng minh

$\frac{1+a}{2a^2+(1-a)^2} \le \frac{3}{2}a+\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{-(1+a)(3a-1)^2}{2a^2+(1-a)^2} \le 0; \forall a \in (0;1)(1)$ dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$

$\frac{1+b}{2b^2+(1-b)^2} \le \frac{3}{2}b+\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{-(1+b)(3b-1)^2}{2b^2+(1-b)^2} \le 0; \forall b \in (0;1)(1)$ dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow b=\frac{1}{3}$

$\frac{1+c}{2c^2+(1-c)^2} \le \frac{3}{2}c+\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{-(1+c)(3c-1)^2}{2c^2+(1-c)^2} \le 0; \forall c \in (0;1)(3)$ dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow b=\frac{1}{3}$

Cộng vế với vế của $(1),(2),(3)$ ta có

$$P=\frac{1+a}{2a^2+(1-a)^2}+\frac{1+b}{2b^2+(1-b)^2}+\frac{1+c}{2c^2+(1-c)^2} \le \frac{3}{2}(a+b+c)+\frac{9}{2}=6$$

Vậy giá trị lớn nhất của , $MaxP=6 \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

● Lưu ý: Để cong việc chứng minh ở bước phân tích thật đơn giản ta sử dụng máy tính CASIOFX – 570ES hỗ trợ như sau

1. Tính $f\left(\frac{1}{3}\right)$, ta nhập $\frac{1+x}{2x^2+(1-x)^2} \xrightarrow{Calc:x=\frac{1}{3}} f\left(\frac{1}{3}\right)=2$

2. Tính $f'\left(\frac{1}{3}\right) \xrightarrow{Nhap} Shift+\int_a^b dx \xrightarrow{xuat.hien} \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{2x^2+(1-x)^2}\right)_{x=\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

3. Để biến đổi $\frac{1+x}{2x^2+(1-x)^2} \le \frac{3}{2}x+\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{-(1+x)(3x-1)^2}{2x^2+(1-x)^2} \le 0; \forall x \in (0;1)$

Mẹo : Ta nhớ rằng do có điểm rơi tại $x=\frac{1}{3}$, do vậy nếu $\frac{1+x}{2x^2+(1-x)^2} \le \frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$ xảy ra thì chắc chắn sẽ có $x=\frac{1}{3}$ là nghiệm kép, hay có nhân tử chung là $(3x-1)^2$ do vậy ta thực hiện hai việc sau

1. Chuyển vế và quy đồng biểu thức cần chứng minh

$$\frac{1+x}{2x^2+(1-x)^2}\le\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{2(1+x)-3\left[2x^2+(1-x)^2\right]}{2(2x^2+(1-x)^2)}\le 0$$

2. Thực hiện phép chia đa thức cho đa thức bằng Casio như sau

Nhập $\left(\frac{2(1+x)-3\left[2x^2+(1-x)^2\right]}{(3x-1)^2}\right)_{CALC:x=100}=-101=-100-1=-(x+1)$

Vậy $2(1+x)-3\left[2x^2+(1-x)^2\right]=-(x+1)(3x-1)^2\le 0;\forall x\in(0;1)$

Việc biến đổi và chứng minh hoàn tất.

Bài mẫu 02 Cho các số thực a,b,c dương và $a+b+c=1$. Hãy tìm giá trị

Lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a(1-a)}{a^2+(1-a)^2}+\frac{b(1-b)}{b^2+(1-b)^2}+\frac{c(1-c)}{c^2+(1-c)^2}$

Phân tích và định hướng giải.

○ Bài toán đã có dạng $f(a)+f(b)+f(c)$ (các biến hoàn toàn độc lập)

○ Vai trò giữa các biến là như nhau, do đó ta dễ dàng dự đoán điểm rơi là $a=b=c=\frac{1}{3}$

○ Bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất nghĩa là đánh giá $P\le M=?$

Kết nối những điều trên cho ta ý tưởng đánh giá bđt phụ $\frac{x(1-x)}{x^2+(1-x)^2}\le mx+n$

Công việc còn lại là tìm m,n. Với việc đánh giá điểm rơi như trên , để tìm m,n ta dùng hệ sau $\begin{cases}f\left(\frac{1}{3}\right)=m.\frac{1}{3}+n\\ f'\left(\frac{1}{3}\right)=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}m+n=\frac{2}{5}\\ m=\frac{27}{25}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{27}{25}\\ n=\frac{1}{25}\end{cases}$

Vậy ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{x(1-x)}{x^2+(1-x)^2}\le\frac{27}{25}x+\frac{1}{25}\Leftrightarrow\frac{(3x-1)^2(-6x-1)}{x^2+(1-x)^2}\le 0;\forall x\in(0;1),$$

Bất đẳng thức luôn đúng với $x\in(0;1)$, dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{1}{3}$, vậy ta có lời giải sau.

$\frac{a(1-a)}{a^2+(1-a)^2} \le \frac{27}{25}a+\frac{1}{25} \Leftrightarrow \frac{-(1+6a)(3a-1)^2}{a^2+(1-a)^2} \le 0; \forall a \in (0;1)(1)$ dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$

$\frac{a(1-a)}{b^2+(1-b)^2} \le \frac{27}{25}b+\frac{1}{25} \Leftrightarrow \frac{-(1+6b)(3b-1)^2}{b^2+(1-b)^2} \le 0; \forall b \in (0;1)(1)$ dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow b=\frac{1}{3}$

$\frac{c(1-c)}{c^2+(1-c)^2} \le \frac{27}{25}c+\frac{1}{25} \Leftrightarrow \frac{-(1+6c)(3c-1)^2}{c^2+(1-c)^2} \le 0; \forall c \in (0;1)(3)$ dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow b=\frac{1}{3}$

Cộng vế với vế của $(1),(2),(3)$ ta có

$$P=\frac{a(1-a)}{a^2+(1-a)^2}+\frac{b(1-b)}{b^2+(1-b)^2}+\frac{c(1-c)}{c^2+(1-c)^2} \le \frac{27}{25}(a+b+c)+\frac{3}{25}=\frac{6}{5}$$

Vậy $maxP=\frac{6}{5} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài mẫu 03

Cho các số thực a,b,c dương và $a^3+b^3+c^3=3$.

Hãy chứng minh rằng $4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 27$.

Phân tích và định hướng giải

○ Trước hết ta viết lại biểu thức cần chứng minh như sau

$$\left(\frac{4}{a}+5a^2\right)+\left(\frac{4}{b}+5b^2\right)+\left(\frac{4}{c}+5c^2\right) \ge 27$$

Tới đây ta có các phân tích chi tiết sau.

○ Bài toán đã có dạng $f(a)+f(b)+f(c)$ (các biến hoàn toàn độc lập)

○ Vai trò giữa các biến là như nhau, do đó ta dễ dàng dự đoán điểm rơi là $a=b=c=1$

○ Bài toán yêu cầu chứng minh $P \ge 27$

Kết nối những điều trên cho ta ý tưởng đánh giá bđt phụ

$$\frac{4}{x}+5x^2 \ge mx^3+n; \forall x \in \left(0;\sqrt[3]{3}\right)$$

Công việc còn lại là tìm m,n. Với việc đánh giá điểm rơi như trên , để tìm m,n ta dùng hệ sau $\begin{cases} f(1)=m.1^3+n \\ f'(1)=3m.1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=9 \\ m=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=7 \end{cases}$

Vậy ta tiến hành đánh giá

$$\frac{4}{x}+5x^2\geq 2x^3+7;\forall x\in\left(0;\sqrt[3]{3}\right)\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2\left(-2x^2+x+4\right)}{x}\geq 0;\forall x\in\left(0;\sqrt[3]{3}\right)$$

Chú ý: Kết quả trên được tìm thấy như sau

- Sau khi chuyển vế ta được $\frac{-2x^4+5x^3-7x+4}{x}(*)$
- Nhập $\frac{-2x^4+5x^3-7x+4}{(x-1)^2}(*)$ vào máy tính Casio Fx – 570 es,

  CALC: x = 100 thì được kết quả

  $-19896=-20000+100+4=-2x^2+x+4$
- Vậy $-2x^4+5x^3-7x+4=(x-1)^2\left(-2x^2+x+4\right)$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì $-2x^2+x+4>0;\forall x<\sqrt[3]{3}$

Do vậy ta có các kết quả sau

$$\frac{4}{a}+5a^2\geq 2a^3+7;\forall a\in\left(0;\sqrt[3]{3}\right)(1)$$

$$\frac{4}{b}+5b^2\geq 2b^3+7;\forall b\in\left(0;\sqrt[3]{3}\right)(2)$$

$$\frac{4}{c}+5c^2\geq 2c^3+7;\forall c\in\left(0;\sqrt[3]{3}\right)(3)$$

Cộng vế với vế của $(1),(2),(3)$ ta có $4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 27$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài mẫu 04 Cho các số thực a,b,c dương và $ab+bc+ac=2016abc$ .Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a(2016a-1)^2}+\frac{1}{b(2016b-1)^2}+\frac{1}{c(2016c-1)^2}.$$

Phân tích và định hướng giải

○ Bài toán đã có dạng $f(a)+f(b)+f(c)$ (các biến hoàn toàn độc lập)

○ Vai trò giữa các biến là như nhau, do đó ta dễ dàng dự đoán điểm rơi là $a=b=c=k=?$

○ Vấn đề đặt ra là ta chưa biết điểm rơi của bài toán, do vậy ta cần xử lý điều kiện để tìm điểm rơi, muốn vậy ta viết lại điều kiện như sau

$$ab+bc+ac=2016abc\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2016$$

○ Từ điều kiện mới , ta có ý tưởng sẽ đặt ẩn phụ như sau:

Đặt $x=\frac{1}{a};y=\frac{1}{b};z=\frac{1}{c}$, từ đây ta có bài toán mới

Cho x,y,z là các số thực dương và thỏa mãn $x+y+z=2016$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^3}{(2016-x)^2}+\frac{y^3}{(2016-y)^2}+\frac{z^3}{(2016-z)^2}$

∘ Dự đoán điểm rơi $x=y=z=672$

∘ Bài toán yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất , có nghĩa là đánh giá $P\geq M=?$

∘ Bài toán đã có dạng $f(x)+f(y)+f(z)$ (các biến hoàn toàn độc lập) cho ta ý tưởng đánh giá $\frac{a^3}{(2016-a)^2}\geq ma+n$.

∘ Tìm m,n bằng cách xét hpt quen thuộc sau

$$\begin{cases} f(672)=672m+n \\ f'(672)=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 168=672m+n \\ 1=m \end{cases} \Leftrightarrow m=1;n=-504$$

∘ Xét BĐT phụ $\frac{a^3}{(2016-a)^2}\geq a-504 \Leftrightarrow \frac{a^3-(a-504)(2016-a)^2}{(2016-a)^2}\geq 0;\forall a\in(0;2016)$

Để phân tích tử số , ta nhập vào máy tính $\frac{a^3-(a-504)(2016-a)^2}{(x-672)^2}$ (do dự đoán $x=672$ là nghiệm kép của pt $\frac{a^3}{(2016-a)^2}=a-504$

Tiếp tục nhấn CALC: $x=100$ cho kết quả là $4536=45x+36$

Vậy $\frac{a^3-(a-504)(2016-a)^2}{(2016-a)^2}=\frac{(a-672)^2(45a+36)}{(2016-a)^2}\geq 0;\forall a\in(0;2016)$, dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a=672$; Từ đây có lời giải

$$\frac{x^3}{(2016-x)^2}\geq x-504;\forall x\in(0;2016)(1)$$

$$\frac{y^3}{(2016-y)^2}\geq y-504;\forall y\in(0;2016)(2)$$

$$\frac{z^3}{(2016-z)^2}\geq z-504;\forall z\in(0;2016)(3)$$

Cộng vế với vế $(1),(2),(3)$ ta được

$$P=\frac{x^3}{(2016-x)^2}+\frac{y^3}{(2016-y)^2}+\frac{z^3}{(2016-z)^2}\geq 504$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P: MinP = 504$ dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 672$.

Nhận xét

Từ bài toán trên cho ta kinh nghiệm trong việc xử lý điều kiện ban đầu để tìm điểm rơi, từ đó thiết lập các mối quan hệ để kết nối với phương pháp.

Bài mẫu 05 Cho các số thực a,b,c là 3 cạnh của một tam giác, có chu vi bằng 1. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)-\left(\frac{ab+bc+ac}{abc}\right).$$

Phân tích và định hướng giải

○ a,b,c là 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng

$$1 \Rightarrow a,b,c>0; a+b+c=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1-c \\ b+c=1-a \\ c+a=1-b \end{cases}$$

○ Bài toán chưa có dạng $f(a)+f(b)+f(c)$, do đó ta cần viết lại biểu thức về dạng như sau

$$P = 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(\frac{4}{1-a}-\frac{1}{a})+\left(\frac{4}{1-b}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{4}{1-c}-\frac{1}{c}\right)$$

○ Tới đây ta dự đoán $a=b=c=\frac{1}{3}$ và đánh giá BĐT phụ

$$f(x)=\frac{4}{1-x}-\frac{1}{x}\le mx+n$$

○ Tìm $m;n$ bằng hpt $\begin{cases} f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{m}{3}+x \\ f'\left(\frac{1}{3}\right)=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=\frac{m}{3}+n \\ 18=m \end{cases} \Rightarrow m=18; n=-3$

Ta chứng minh $\frac{4}{1-x}-\frac{1}{x}\le 18x-3 \Leftrightarrow \frac{(3x-1)^2(2x-1)}{x(1-x)}\le 0(*); \forall x\in(0;1)$

○ Một vấn đề lúc này là $(*)$ chưa luôn đúng trên $(0;1)$, điều này khiến ta suy nghĩ tới việc phải đánh giá điều kiện chặt hơn nữa, không mất đi tính tổng quát ta giả sử $a=max\{a,b,c\}\Rightarrow 1=a+b+c>2a\Rightarrow a<\frac{1}{2}$. Vậy lúc đó $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\Rightarrow(*)$ luôn đúng.

Ta có lời giải

Từ giả thiết $a+b+c=1$

không mất đi tính tổng quát ta giả sử

$$a = max\left\{a,b,c\right\} \Rightarrow 1 = a+b+c > 2a \Rightarrow a < \frac{1}{2} \Rightarrow a,b,c \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$$

Ta có: $\frac{4}{1-a} - \frac{1}{a} \le 18a - 3 \Leftrightarrow \frac{(3a-1)^2(2a-1)}{a(1-a)} \le 0(*); \forall a \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{4}{1-b} - \frac{1}{b} \le 18b - 3 \Leftrightarrow \frac{(3b-1)^2(2b-1)}{b(1-b)} \le 0(*); \forall b \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{4}{1-c} - \frac{1}{c} \le 18c - 3 \Leftrightarrow \frac{(3c-1)^2(2c-1)}{c(1-c)} \le 0(*); \forall c \in (0;1)$$

Cộng vế thu được

$$P = \left(\frac{4}{1-a} - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{4}{1-b} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{4}{1-c} - \frac{1}{c}\right) \le 18(a+b+c) - 9 = 9$$

Vậy $MaxP = 9 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài mẫu 06 Cho các số thực a,b,c dương và $a^2 + b^2 - 3(a+b) + 4 = 0(*)$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 32\left(\frac{a+1}{a^2+2a} + \frac{b+1}{b^2+2b}\right) + \frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2+9}}$

Phân tích và định hướng giải

○ Các biến a,b đối xứng, ta dự đoán $a = b = k = ?$, tuy nhiên chưa dự đoán được điểm rơi vì ở điều kiện còn chưa thuận lợi cho việc dự đoán, điều này làm ta có ý tưởng đánh giá điều kiện trước . Ta có nhận xét

$$a^2 + b^2 \le \frac{(a+b)^2}{2} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow (a+b)^2 - 6(a+b) + 8 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le a+b \le 4$$

○ Do nhận định $a = b = k = ?$ nên có hai khả năng $\left[\begin{array}{l} a = b = 1 \\ a = b = 2 \end{array}\right.$, Thử trực tiếp từng trường hợp ta thấy $MinP = \frac{124}{5} \Leftrightarrow a = b = 2$

○ Mặt khác trong biểu thức P có $\frac{a+1}{a^2+2a}; \frac{b+1}{b^2+2b}$ giống nhau về loại hàm nhưng lại khác biệt với biểu thức còn lại , do đó ta có ý tưởng dồn biến về $a+b$ ở biểu thức thứ 3.

○ Hai biểu thức $\frac{a+1}{a^2+2a} + \frac{b+1}{b^2+2b}$ có dạng $f(a) + f(b)$ nên ta đánh giá bđt phụ sau

$f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}\geq mx+n$ với $x\in\left(0;4\right)$.

○ Để tìm $m;n$ ta xét hệ sau $\begin{cases} f\left(2\right)=2m+x \\ f'\left(2\right)=m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{3}{8}=2m+n \\ -\dfrac{5}{32}=m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=-\dfrac{5}{32} \\ n=\dfrac{11}{6} \end{cases}$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$\dfrac{x+1}{x^2+2x}\geq-\dfrac{5}{32}x+\dfrac{11}{16}\Leftrightarrow\dfrac{\left(x-2\right)^2\left(5x+8\right)}{32\left(x^2+2x\right)}\geq 0$ với $x\in\left(0;4\right)$ .dấu ''='' xảy ra khi $x=2$

Từ đây ta có $\begin{cases} \dfrac{a+1}{a^2+2a}\geq-\dfrac{5}{32}a+\dfrac{11}{6} \\ \dfrac{b+1}{b^2+2b}\geq-\dfrac{5}{32}b+\dfrac{11}{16} \end{cases}\Rightarrow\dfrac{a+1}{a^2+2a}+\dfrac{b+1}{b^2+2b}\geq-\dfrac{5}{32}\left(a+b\right)+\dfrac{11}{8}$, dấu bằng xảy ra khi $a=b=2$

Vậy $P=32\left(\dfrac{a+1}{a^2+2a}+\dfrac{b+1}{b^2+2b}\right)+\dfrac{a+b}{\sqrt{\left(a+b\right)^2+9}}\geq 44-5\left(a+b\right)+\dfrac{a+b}{\sqrt{\left(a+b\right)^2+9}}$

○ Đặt $t=a+b\Rightarrow t\in\left[2;4\right]$ ta có:

$$g\left(t\right)=44-5t+\frac{t}{\sqrt{t^2+9}}\Rightarrow g'\left(t\right)=-5+\frac{9}{\sqrt{\left(t^2+9\right)^3}}<0;\forall t\in\left[2;4\right]$$

Vậy $g\left(t\right)$ nghịch biến trên $\left[2;4\right]\Rightarrow g\left(t\right)\geq g\left(4\right)=\dfrac{124}{5}\Rightarrow Min g\left(t\right)=\dfrac{124}{5}$, dấu "=" xảy ra khi $a=b=2$.

Nhận xét:

Qua bài toán này ta có thêm điều gì?

1. Kinh nghiệm xử lý điều kiện để tìm ra điểm rơi
2. Bài toán không dùng hoàn toàn theo phương pháp hệ số bất định, mà chỉ là công cụ để hướng bài toán về phương pháp dồn biến kết hợp hàm số.

Bài mẫu 07 *Cho a,b,c là số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.*

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$

Phân tích và định hướng giải

○ Bài toán chưa có dạng $f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)$, do đó việc cần làm là đánh giá các tích bc,ac,ab về các tổng $\left(b+c\right),\left(a+c\right),\left(a+b\right)$ rồi dựa vào điều kiện bài toán tiến hành độc lập các biến số, cụ thể ta có:

$$\begin{cases} bc \le \left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2 \\ ac \le \left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2 \\ ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \end{cases}$$

○ Ngoài ra các biến a,b,c đối xứng ta không khó để dự đoán $a=b=c=1$

Ta có lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$VT=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$$

$$\ge \frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+2(a+c)^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+2(3-a)^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+2(3-b)^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+2(3-c)^2}}=f(a)+f(b)+f(c)$$

Ta sẽ tìm m,n để $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+2(3-a)^2}}\ge ma+n$; m, n là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} f(1)=m+n \\ \left(f(1)\right)'=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{4}{9} \\ n=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Như vậy ta sẽ chứng minh $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+2(3-a)^2}}\ge \dfrac{4}{9}a-\dfrac{1}{9},\ \forall a\in(0;3)$. Thật vậy:

- Nếu $0<a<\dfrac{1}{4}$ thì hiển nhiên đúng
- Nếu $\dfrac{1}{4}\le a<3$ thì $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+2(3-a)^2}}\ge \dfrac{4}{9}a-\dfrac{1}{9} \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+2(3-a)^2}}\right)^2\ge\left(\dfrac{4}{9}a-\dfrac{1}{9}\right)^2$

$\Leftrightarrow (a-1)^2\left(8a^2-20a+3\right)\le 0$ (Đúng $\forall a, \dfrac{1}{4}\le a<3$)

Suy ra : $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge \dfrac{4}{9}a-\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}b-\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}c-\dfrac{1}{9}=1$ □

∗ Nhận xét

Trong bài mẫu 07, bạn đọc được trải nghiệm thêm sự đa dạng của phương pháp, khi ta có thêm các động tác đánh giá phụ ngay từ đầu nhằm đưa bài toán trở về đúng dạn mà ta mong muốn, để tìm hiểu thêm vấn đề này, mời bạn đọc tiếp tục theo dõi bài mẫu 08.

Bài mẫu 08 Cho các số thực x,y,z dương và $x+y+z=1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất

Phân tích và định hướng giải

○ Quan sát sơ bộ bài toán , ta có các nhận định sau đây

1. Hai biểu thức đầu tiên trong P có vẻ bề ngoài giống nhau và khác biểu thức thứ 3, do đó ta nhận định bài toán sẽ được dồn biến về $x+y$ ở biểu thức thứ 3.
2. Do x,y,z dương nên và $x+y+z=1$ dễ dàng nhận định $x=y=z=\frac{1}{3}$
3. Để có thể sử dụng phương pháp đánh giá từng biến theo hệ sô bất định ta cần chuyển bài toán về dạng $f(x)+f(y)+f(z)$, muốn vậy ta đánh giá $yz\le\frac{(y+z)^2}{4};xz\le\frac{(x+z)^2}{4}$ kết hợp $\begin{cases} y+z=1-x \\ z+x=1-y \end{cases}$ ta có đánh giá cho bđt sau

○ Ta có $\begin{cases} \dfrac{x^2}{(y+z)^2+5yz}\ge\dfrac{x^2}{(y+z)^2+5\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2}=\dfrac{4x^2}{9(1-x)^2} \\ \dfrac{y^2}{(x+z)^2+5xz}\ge\dfrac{y^2}{(x+z)^2+5\left(\dfrac{x+z}{2}\right)^2}=\dfrac{4y^2}{9(1-y)^2} \end{cases}$

○ Với ý đồ sử dụng phương pháp hệ số bất định, ta đã thành công bước đầu tiên là độc lập các biến với nhau, việc cần làm tiếp theo là đánh giá để đưa bài toán về biến $x+y$.

Ta xét bđt sau $f(a)=\frac{4a^2}{9(1-a)^2}\ge ma+n;\forall a\in(0;1)$, để tìm hai số thực m,n ta xét hpt

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}m+n \\ f'\left(\frac{1}{3}\right)=m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{1}{9}=\frac{1}{3}m+n \\ m=1 \end{cases}\Leftrightarrow m=1;n=-\frac{2}{9}$$

Vậy ta chứng minh

$f(a)=\frac{4a^2}{9(1-a)^2}\ge a-\frac{2}{9};\forall a\in(0;1)\Leftrightarrow\frac{(3a-1)^2(7-a)}{(1-a)^2}\ge 0;\forall a\in(0;1)$ dấu bằng xảy ra khi $a=\frac{1}{3}$ (BĐT luôn đúng khi $a\in(0;1)$

Vậy ta có lời giải sau

$$\circ \text{ Ta có } \begin{cases} \dfrac{x^2}{(y+z)^2+5yz} \geq \dfrac{x^2}{(y+z)^2+5\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2} = \dfrac{4x^2}{9(1-x)^2} \\ \dfrac{y^2}{(x+z)^2+5xz} \geq \dfrac{y^2}{(x+z)^2+5\left(\dfrac{x+z}{2}\right)^2} = \dfrac{4y^2}{9(1-y)^2} \end{cases}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$

$\circ$ $\dfrac{4x^2}{9(1-x)^2} \geq x-\dfrac{2}{9}; \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow \dfrac{(3x-1)^2(7-x)}{(1-x)^2} \geq 0; \forall x \in (0;1)$ dấu ''='' xảy ra khi $x=\dfrac{1}{3}$

$\circ$ $\dfrac{4y^2}{9(1-y)^2} \geq y-\dfrac{2}{9}; \forall y \in (0;1) \Leftrightarrow \dfrac{(3y-1)^2(7-y)}{(1-y)^2} \geq 0; \forall y \in (0;1)$ dấu ''='' xảy ra khi $y=\dfrac{1}{3}$

Vậy lúc đó ta có

$$P = \frac{x^2}{(y+z)^2+5yz} + \frac{y^2}{(x+z)^2+5xz} - \frac{3(x+y)^2}{4}$$

$$\geq \frac{4x^2}{9(1-x)^2} + \frac{4y^2}{9(1-y)^2} - \frac{3(x+y)^2}{4} \geq \left(x-\frac{2}{9}\right)+\left(y-\frac{2}{9}\right) - \frac{3(x+y)^2}{4} = (x+y)-\frac{4}{9}-\frac{3(x+y)^2}{4}$$

$\circ$ Với $x+y=1-z; \forall z \in (0;1)$, phần việc còn lại là khảo sát hàm số $g(z)$ trên khoảng $(0;1)$, công việc khá dễ này xin dành cho bạn đọc.

$*$ Nhận xét.

Với một bài toán mà có thể đưa về dạng $f(a)+f(b)+f(c) \geq m (\leq m)$ thì qua những bài tập mẫu trên có lẽ bạn đọc đã quen thuộc và gạt bỏ được nỗi sợ hãi khi gặp những bài toán kiểu này. Câu hỏi đặt ra ngay lúc này, đó là với những bài toán có dạng $f(a,b)+f(b,c)+f(a,c) \geq m (\leq m)$ thì liệu phương pháp trên còn phát huy được sức mạnh của nó nữa hay không ??? Câu trả lời của chúng tôi là '' Có ", bạn đọc tiếp tục theo dõi các bài mẫu sau đây.

Bài mẫu 09 Cho các số thực x,y,z dương và $x+y+z=3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{25x^2}{\sqrt{2x^2+16xy+7y^2}} + \dfrac{25y^2}{\sqrt{2y^2+16yz+7z^2}} + \dfrac{z^2(x+3)}{x}$

Phân tích và định hướng giải

○ Dựa vào các biểu thức $\frac{25x^2}{\sqrt{2x^2+16xy+7y^2}};\frac{25y^2}{\sqrt{2y^2+16yz+7z^2}}$ cho ta dự đoán điểm rơi của bài toán là $x=y=z=1$ (do có sự đối xứng và x,y,z dương).

○ Với những biểu thức kiểu $\frac{25x^2}{\sqrt{2x^2+16xy+7y^2}};\frac{25y^2}{\sqrt{2y^2+16yz+7z^2}}$ ta sẽ có hai cách xử lý để tìm ra bđt phụ

● Cách 1 : Sử dụng máy tính cầm tay Casio fx – 570es như sau:

Do yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất của P nên ta sẽ đánh giá để tìm ra bđt phụ như sau, giả sử $\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+16ab+7b^2}}\geq ma+n;\forall a,b\in(0;3)$; ta coi

$b=100\Rightarrow f(a)=\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+1600a+7.100^2}}$

Lúc này ẩn còn lại sẽ là a và do ta dự đoán $a=b$ nên ta sẽ coi như điểm rơi là $a=b=100$ (chỉ là điểm rơi tạm thời, chưa dùng đến $a=b=c=1$ nhé).

Vậy ta xét $f(a)=\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+1600a+7100^2}}\geq ma+n$

Để tìm $m;n$ ta xét hệ phương trìnhsau.

$$\begin{cases} f(100)=100m+n \\ f'(100)=m \end{cases}\Rightarrow m=8;n=-300=-3b(do...b=100).$$

Vậy ta chứng minh

$$\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+16ab+7b^2}}\geq 8a-3b;\forall a,b\in(0;3)(*)$$

+ Nếu $8a-3b<0\Rightarrow(*)$ luôn đúng.

+ Nếu $8a-3b\geq 0\Rightarrow(*):\left(25a^2\right)^2-(8a-3b)^2\left(2a^2+7b^2+16ab\right)\geq 0(**)$

Để phân tích $(**)$ ta chú ý rằng do $a=b\Rightarrow(**)$ sẽ có nghiệm kép là $a=b$ hay $(a-b)^2$ là nhân tử chung, vậy ta nhập vào máy tính casio fx 570es biểu thức

$$\frac{\left(25a^2\right)^2-(8a-3b)^2\left(2a^2+7b^2+16ab\right)}{(a-b)^2}\xrightarrow{CALC:a=100;b=\frac{1}{100}}$$ thu được kq

$=4970065,994$

Ta phân tích

$$4970065,994=497.00.66-\frac{63}{10000}=4970000+66-\frac{63}{10000}=497a^2+66ab-63b^2$$

Bạn đang thắc mắc, tại sao ko để nguyên là 66 mà lại là $66ab$

Trả lời

○ Ở biểu thức $\frac{\left(25a^2\right)^2-\left(8a-3b\right)^2\left(2a^2+7b^2+16ab\right)}{\left(a-b\right)^2}$ không có hạng tử tự do, tất cả đều có chứa biến a,b do đó khi phân tích sẽ ko thể có hạng tử tự do, hơn nữa ta cho $a=100;b=\frac{1}{100}\Rightarrow a.b=1\Rightarrow 66=66.1=66ab$ (bạn nhớ điều này nhé).

Vậy lúc này

$$\left(25a^2\right)^2-\left(8a-3b\right)^2\left(2a^2+7b^2+16ab\right)=\left(a-b\right)^2\left(497a^2+66ab-63b^2\right)\ge 0\left(**\right)$$

Do $497a^2+66ab-63b^2=\left(71a-21b\right)\left(7a+3b\right)\ge 0;\left(do..8a-3b\ge 0\right)$ vậy $\left(**\right)$ luôn đúng, dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

- Cách 2: Không sử dụng máy tính casio

$$\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+16ab+7b^2}}\ge ma+nb;\forall a,b\in\left(0;3\right)\Leftrightarrow\frac{25}{\sqrt{2+7\left(\frac{b}{a}\right)^2+16\left(\frac{b}{a}\right)}}\ge m+n\left(\frac{b}{a}\right)$$

Xét $f\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{25}{\sqrt{7\left(\frac{b}{a}\right)^2+16\left(\frac{b}{a}\right)+2}}$, do ta dự đoán $a=b\Rightarrow\frac{b}{a}=1$, để tìm m,n ta xét hpt

$$\begin{cases}f\left(1\right)=m+n\\ f'\left(1\right)=m\end{cases}\Leftrightarrow m=8;n=-3$$, vậy ta sẽ chứng minh $\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+16ab+7b^2}}\ge 8a-3b;\forall a,b\in\left(0;3\right)$

Thực hiện giống cách 1. Đến đây ta có lời giải

Ta có

$$\frac{25x^2}{\sqrt{2x^2+16xy+7y^2}}\ge 8x-3y;\forall x,y\in\left(0;3\right)\left(1\right)$$

+ Nếu $8x-3y<0\Rightarrow\left(1\right)$ Luôn đúng

+ Nếu $8x-3y\ge 0\Rightarrow\left(1\right)\Leftrightarrow\left(x-y\right)^2\left(71x-21y\right)\left(7x+3y\right)\ge 0$ luôn đúng với $8x-3y\ge 0$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y$

Chứng minh tương tự ta có

$\frac{25y^2}{\sqrt{2y^2+16yz+7y^2}}\ge 8y-3z;\forall y,z\in\left(0;3\right)\left(2\right)$ dấu '' = '' xảy ra khi $y=z$

Lúc đó

$$P\ge 8\left(x+y\right)-3\left(y+z\right)+\frac{z^2\left(3+x\right)}{x}=3x+5\left(x+y+z\right)-8z+\frac{3z^2}{x}+z^2$$

$\Leftrightarrow P \geq 3\left(x+\dfrac{z^2}{x}\right)+z^2-8z+15 \geq z^2-2z+15=\left(z-1\right)^2+14 \geq 14$, dấu " = " xảy ra khi $z=1$, vậy $MinP=14 \Leftrightarrow x=y=z=1$.

∗ Nhận xét.

Qua ví dụ trên, bạn đọc thấy được sự đa dạng của phương pháp, không nhất thiết phải dồn được bài toán về dạng $f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)$, ở ví dụ vừa rồi thấy rằng nếu ta đưa được bài toán về dạng $f\left(a;b\right)+f\left(b;c\right)+f\left(c;a\right)$ thì bài toán vẫn có thể giải quyết theo phương pháp sử dụng hệ số bất định, ta cùng xét thêm các ví dụ tiếp theo để hiểu kỹ hơn về bài toán kiểu này nhé.

Bài mẫu 10. Cho các số thực x,y,z dương và $x+y+z=1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2+xy+y^2}}+\dfrac{y^2}{\sqrt{2y^2+yz+z^2}}+\dfrac{z^2}{\sqrt{2z^2+xz+x^2}}$

Phân tích và định hướng giải

○ Kiểu dáng của bài toán khá giống với bài mẫu 09, do vậy ta sẽ không bàn nhiều về các bước phân tích nữa, ta sẽ đi tim bđt phụ sau $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2+xy+y^2}} \geq mx+ny;\forall x;y \in \left(0;1\right)$ thực hiện tương tự một trong hai cách của bài toán trên ta dễ dàng tìm được $m=\dfrac{11}{16};n=-\dfrac{3}{16}$, vậy ta sẽ chứng minh

$$\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2+xy+y^2}} \geq \dfrac{11}{16}x-\dfrac{3y}{16};\forall x;y \in \left(0;1\right) \Leftrightarrow \dfrac{16x^2}{\sqrt{2x^2+xy+y^2}} \geq 11x-3y\left(1\right)$$

+ Nếu $11x-3y<0 \Rightarrow \left(1\right)$ luôn đúng

+ Nếu $11x-3y \geq 0;\left(1\right) \Leftrightarrow \left(x-y\right)^2\left(x+3y\right)\left(14x-3y\right) \geq 0$ luôn đúng với $11x-3y \geq 0$

Dấu " = " xảy ra khi $x=y$, do có tính đối xứng ta có ngay

$$\dfrac{y^2}{\sqrt{2y^2+yz+z^2}} \geq \dfrac{11}{16}y-\dfrac{3}{16}z;\dfrac{z^2}{\sqrt{2z^2+xz+x^2}} \geq \dfrac{11}{16}z-\dfrac{3}{16}x$$

Vậy $P \geq \dfrac{11}{16}\left(x+y+z\right)-\dfrac{3}{16}\left(x+y+z\right)=\dfrac{1}{2}$

Vậy $MinP=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=y=z$.

KỸ THUẬT CHỨNG MINH BĐT – TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT BẰNG PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN

1. Phương pháp giải

- Cơ sở của phương pháp giải là dựa vào định lý sau

Định lí: ***(Bất đẳng thức tiếp tuyến)***

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp hai trên $[a;b]$.

i) Nếu $f''(x)\ge 0\ \forall x\in[a;b]$ thì $f(x)\ge f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\quad \forall x_0\in[a;b]$

ii) Nếu $f''(x)\le 0\ \forall x\in[a;b]$ thì $f(x)\le f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\quad \forall x_0\in[a;b]$

Đẳng thức trong hai Bất đẳng thức trên xảy ra $\Leftrightarrow x=x_0$.

Ta có thể chứng minh định lí trên như sau

i) Xét hàm số $g(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)-f(x_0)$, $x\in[a;b]$

Ta có : $g'(x)=f'(x)-f'(x_0)\Rightarrow g''(x)=f''(x)\ge 0\ \forall x\in[a;b]$

Suy ra phương trình $g'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=x_0$ và $g'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi x qua x_0 nên ta có : $g(x)\ge g(x_0)=0\ \forall x\in[a;b]$.

ii) Chứng minh tương tự.

Chú ý: Phương trình $f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M(x_0;f(x_0))$.

• **Các bước để chứng minh**

Bước 1: Đưa bất đẳng thức về dạng $f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)\ge k$ (hoặc $f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)\le k$), trong đó $a_i\in D\ (i=1,..,n)$ là các số thực cho trước.

Bước 2: Ta đi chứng minh $f(x)\ge f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, $\forall x\in D$ (với $a_1=a_2=...=a_n=x_0$ thì đẳng thức xảy ra) bằng cách. Xét hàm số $g(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)-f(x_0)$

Khi đó nếu $g''(x)\ge 0$ thì $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=x_0$

Khi đó $g'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi x qua x_0 nên ta có :

$g(x)\ge g(x_0)=0\ \ \forall x\in D$.

Bước 3: Lần lượt thay x bởi $a_1,a_2,...,a_n$ rồi cộng lại ta suy ra đpcm.

2. Các ví dụ minh họa

Bài mẫu 01	*Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của $Q=y\ln x+z\ln y+x\ln z$.*

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\ln x-x+1$ trên $(0;+\infty)$

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$, $f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}-1=0\Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra $\ln x - x + 1 \le 0, \forall x \in (0;+\infty)$

Ta có $\ln x \le x - 1 \Leftrightarrow y\ln x \le xy - y$

Tương tự ta có $z\ln y \le yz - z$, $x\ln z \le xz - x$

Cộng vế với vế ta được : $y\ln x + z\ln y + x\ln z \le xy + yz + zx - (x+y+z)$

Mặt khác ta có $xy + yz + zx \le \dfrac{(x+y+z)^2}{3}$

Do đó $Q \le \dfrac{(x+y+z)^2}{3} - (x+y+z) = 0$.

Vậy $\max Q = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

<u>Bạn sẽ thắc mắc</u>

Tại sao chúng ta lại có được hàm số $f(x) = \ln x - x + 1$ trên $(0;+\infty)$?

<u>Câu trả lời</u> .

○ Trước tiên dự đoán điểm rơi , do x, y, z có vai trò đối xứng nên dự đoán $x = y = z = 1$

○ Xét hàm số $g(x) = \ln x; \forall x \in (0;3)$ ta sẽ lập phương trình tiếp tuyến của hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$, phương trình có dạng

$y = g'(1)(x-1) + g(1) = x - 1$

○ Lại do Bài yêu cầu tìm giá trị lớn nhất nên có ý tưởng đánh giá $Q \le M = ?$, do vậy ta sẽ đi chứng minh $f(x) = \ln x - x + 1 \le 0, \forall x \in (0;3)$, do đó ta có lời giải như trên.

Tới đây chắc bạn đã hình dung ra phương thức để giải quyết bài toán bằng phương pháp tiếp tuyến rồi chứ ? Và không khó để nhận ra rằng có nhiều nét tương đồng giữa phương pháp này và phương pháp ĐÁNH GIÁ MỘT BIẾN BẰNG PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH, chỉ khác ở chỗ ta tìm ra bất đẳng thức phụ bằng cách thiết lập phương trình tiếp tuyến tai điểm rơi đã dự đoán, Mời bạn đọc tiếp tục trải nghiệm các ví dụ tiếp theo để hiểu rõ hơn về phương pháp cũng như thông điệp mà tác giả muốn gửi gắm nhé .

Bài mẫu 02 *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P = (a^2+3)(b^2+3)(c^2+3)$$

Hướng dẫn và định hướng giải

○ Trước hết ta dễ dàng nhận ra điểm rơi của bài toán $a=b=c=1$

○ Biểu thức P là tích của các hạng tử, do vậy muốn độc lập các biến ta có ý tưởng loga hóa P, cụ thể ta có $\ln P=\ln\left(a^2+3\right)+\ln\left(b^2+3\right)+\ln\left(c^2+3\right)$, tới đây mọi việc còn lại chỉ là đi xác định phương trình tiếp tuyến của hàm số $f\left(x\right)=\ln\left(x^2+1\right)$ tại $x=1$, pt có dạng

$$y=f'\left(1\right)\left(x-1\right)+f\left(1\right)=\frac{1}{2}\left(x-1\right)+\ln 4$$

○ Lại do yêu cầu của bài tìm giá trị nhỏ nhất của P, nên ta có ý tưởng đánh giá $P\geq M=?$, vậy ta chứng minh

$$\ln\left(x^2+1\right)\geq\frac{1}{2}\left(x-1\right)+\ln 4\Leftrightarrow\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\left(x-1\right)-\ln 4\geq 0;\forall x\left(0;3\right)$$

Ta có $f'\left(x\right)=\frac{2x}{x^2+3}-\frac{1}{2}$, $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\frac{2x}{x^2+3}-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=1$ (vì $x>0$)

Dễ thấy qua $x=1$, $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ $\left(-\right)$ sang $\left(+\right)$ nên $f\left(x\right)\geq f\left(1\right)=0$

Suy ra $\ln\left(x^2+3\right)\geq\frac{1}{2}\left(x-1\right)+\ln 4,\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)$

Thay lần lượt x bởi a,b,c rồi cộng các BĐT lại ta được

$$\ln\left(a^2+3\right)+\ln\left(b^2+3\right)+\ln\left(c^2+3\right)\geq\frac{1}{2}\left(a+b+c-3\right)+3\ln 4$$

Hay $\ln P\geq 3\ln 4\Leftrightarrow P\geq 4^3=64$

Vậy $\min P=64\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài mẫu 03. Cho các số thực a,b,c dương và $a+b+c=1$. Hãy tìm giá trị Lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a\left(1-a\right)}{a^2+\left(1-a\right)^2}+\frac{b\left(1-b\right)}{b^2+\left(1-b\right)^2}+\frac{c\left(1-c\right)}{c^2+\left(1-c\right)^2}$

Phân tích và định hướng giải.

○ Bài toán đã có dạng $f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)$ (các biến hoàn toàn độc lập)

○ Vai trò giữa các biến là như nhau, do đó ta dễ dàng dự đoán điểm rơi là $a=b=c=\frac{1}{3}$

○ Bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất nghĩa là đánh giá $P\leq M=?$

Ta thiết lập phương trình tiếp tuyến của hàm số $f(x)=\dfrac{x(1-x)}{x^2+(1-x)^2}$ tại điểm rơi

$x=\dfrac{1}{3}$,

phương trình có dạng $y=f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{27}{25}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{2}{5}=\dfrac{27}{25}x+\dfrac{1}{25}$

Vậy ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ sau

$\dfrac{x(1-x)}{x^2+(1-x)^2}\le\dfrac{27}{25}x+\dfrac{1}{25}\Leftrightarrow\dfrac{(3x-1)^2(-6x-1)}{x^2+(1-x)^2}\le 0;\forall x\in(0;1)$,

Bất đẳng thức luôn đúng với $x\in(0;1)$, dấu bằng xảy ra khi $x=\dfrac{1}{3}$, vậy ta có lời giải sau.

$\dfrac{a(1-a)}{a^2+(1-a)^2}\le\dfrac{27}{25}a+\dfrac{1}{25}\Leftrightarrow\dfrac{-(1+6a)(3a-1)^2}{a^2+(1-a)^2}\le 0;\forall a\in(0;1)(1)$ dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{a(1-a)}{b^2+(1-b)^2}\le\dfrac{27}{25}b+\dfrac{1}{25}\Leftrightarrow\dfrac{-(1+6b)(3b-1)^2}{b^2+(1-b)^2}\le 0;\forall b\in(0;1)(1)$ dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow b=\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{c(1-c)}{c^2+(1-c)^2}\le\dfrac{27}{25}c+\dfrac{1}{25}\Leftrightarrow\dfrac{-(1+6c)(3c-1)^2}{c^2+(1-c)^2}\le 0;\forall c\in(0;1)(3)$ dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow b=\dfrac{1}{3}$

Cộng vế với vế của $(1),(2),(3)$ ta có

$$P=\frac{a(1-a)}{a^2+(1-a)^2}+\frac{b(1-b)}{b^2+(1-b)^2}+\frac{c(1-c)}{c^2+(1-c)^2}\le\frac{27}{25}(a+b+c)+\frac{3}{25}=\frac{6}{5}$$

Vậy $maxP=\dfrac{6}{5}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bạn thấy gì ở ví dụ này?

Rõ ràng ví dụ này đã được chúng tôi đề cập trong phương pháp hệ số bất định, và giờ đây chúng tôi giải quyết bài toán theo phương pháp tiếp tuyến, và ta nhận định thêm một lần nữa chúng khác biệt bởi phương pháp tìm ra bất đẳng thức phụ mà thôi

Bài mẫu 04 Cho các số thực x,y,z dương và $x+y+z=3$. Hãy tìm giá trị nhỏ

Phân tích và định hướng giải

○ Dựa vào các biểu thức $\frac{25x^2}{\sqrt{2x^2+16xy+7y^2}};\frac{25y^2}{\sqrt{2y^2+16yz+7z^2}}$ cho ta dự đoán điểm rơi của bài toán là $x=y=z=1$ (do có sự đối xứng và x,y,z dương).

○ Với những biểu thức kiểu $\frac{25x^2}{\sqrt{2x^2+16xy+7y^2}};\frac{25y^2}{\sqrt{2y^2+16yz+7z^2}}$ ta sẽ có hai cách xử lý để tìm ra bđt phụ

● **Cách 1** : Sử dụng máy tính cầm tay Casio fx – 570es như sau:

Do yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất của P nên ta sẽ đánh giá để tìm ra bđt phụ như sau, giả sử $\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+16ab+7b^2}}\ge ma+n;\forall a,b\in(0;3)$; ta coi

$$b=100\Rightarrow f(a)=\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+1600a+7.100^2}}$$

Lúc này ẩn còn lại sẽ là a và do ta dự đoán $a=b$ nên ta sẽ coi như điểm rơi là $a=b=100$ (chỉ là điểm rơi tạm thời, chưa dùng đến $a=b=c=1$ nhé).

Vậy ta xét $f(a)=\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+1600a+7100^2}}\ge ma+n$

Để tìm $m;n$ ta xét hệ phương trìnhsau.

$$\begin{cases} f(100)=100m+n \\ f'(100)=m \end{cases}\Rightarrow m=8;n=-300=-3b(do...b=100).$$

Vậy ta chứng minh

$$\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+16ab+7b^2}}\ge 8a-3b;\forall a,b\in(0;3)(*)$$

+ Nếu $8a-3b<0\Rightarrow(*)$ luôn đúng.

+ Nếu $8a-3b\ge 0\Rightarrow(*):\left(25a^2\right)^2-(8a-3b)^2\left(2a^2+7b^2+16ab\right)\ge 0(**)$

Để phân tích $(**)$ ta chú ý rằng do $a=b\Rightarrow(**)$ sẽ có nghiệm kép là $a=b$ hay $(a-b)^2$ là nhân tử chung, vậy ta nhập vào máy tính casio fx 570es biểu thức

$$\frac{\left(25a^2\right)^2-(8a-3b)^2\left(2a^2+7b^2+16ab\right)}{(a-b)^2}\xrightarrow{CALC:a=100;b=\frac{1}{100}}$$ thu được kq

$=4970065,994$

Ta phân tích

$$4970065,994=497.00.66-\frac{63}{10000}=4970000+66-\frac{63}{10000}=497a^2+66ab-63b^2$$

Bạn đang thắc mắc, tại sao ko để nguyên là 66 mà lại là $66ab$

Trả lời

◦ Ở biểu thức $\dfrac{\left(25a^2\right)^2-\left(8a-3b\right)^2\left(2a^2+7b^2+16ab\right)}{\left(a-b\right)^2}$ không có hạng tử tự do, tất cả đều có chứa biến a,b do đó khi phân tích sẽ ko thể có hạng tử tự do, hơn nữa ta cho $a=100;b=\dfrac{1}{100}\Rightarrow a.b=1\Rightarrow 66=66.1=66ab$ (bạn nhớ điều này nhé).

Vậy lúc này

$$\left(25a^2\right)^2-\left(8a-3b\right)^2\left(2a^2+7b^2+16ab\right)=\left(a-b\right)^2\left(497a^2+66ab-63b^2\right)\geq 0\left(**\right)$$

Do $497a^2+66ab-63b^2=\left(71a-21b\right)\left(7a+3b\right)\geq 0;\left(do..8a-3b\geq 0\right)$ vậy $\left(**\right)$ luôn đúng, dấu "$=$" xảy ra khi $a=b$.

- **<u>Cách 2</u>**: Không sử dụng máy tính casio

$$\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+16ab+7b^2}}\geq ma+nb;\forall a,b\in\left(0;3\right)\Leftrightarrow\frac{25}{\sqrt{2+7\left(\frac{b}{a}\right)^2+16\left(\frac{b}{a}\right)}}\geq m+n\left(\frac{b}{a}\right)$$

Xét $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{25}{\sqrt{7\left(\frac{b}{a}\right)^2+16\left(\frac{b}{a}\right)+2}}$, do ta dự đoán $a=b\Rightarrow\dfrac{b}{a}=1$, để tìm m,n ta xét hpt

$$\begin{cases} f\left(1\right)=m+n \\ f'\left(1\right)=m \end{cases}\Leftrightarrow m=8;n=-3$$, vậy ta sẽ chứng minh $\dfrac{25a^2}{\sqrt{2a^2+16ab+7b^2}}\geq 8a-3b;\forall a,b\in\left(0;3\right)$

Thực hiện giống cách 1. Đến đây ta có lời giải

Ta có

$$\frac{25x^2}{\sqrt{2x^2+16xy+7y^2}}\geq 8x-3y;\forall x,y\in\left(0;3\right)\left(1\right)$$

+ Nếu $8x-3y<0\Rightarrow\left(1\right)$ Luôn đúng

+ Nếu $8x-3y\geq 0\Rightarrow\left(1\right)\Leftrightarrow\left(x-y\right)^2\left(71x-21y\right)\left(7x+3y\right)\geq 0$ luôn đúng với $8x-3y\geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y$

Chứng minh tương tự ta có

$$\frac{25y^2}{\sqrt{2y^2+16yz+7y^2}}\geq 8y-3z;\forall y,z\in\left(0;3\right)\left(2\right)$$ dấu "$=$" xảy ra khi $y=z$

Lúc đó

$P \ge 8(x+y)-3(y+z)+\frac{z^2(3+x)}{x} = 3x+5(x+y+z)-8z+\frac{3z^2}{x}+z^2$

$\Leftrightarrow P \ge 3\left(x+\frac{z^2}{x}\right)+z^2-8z+15 \ge z^2-2z+15=(z-1)^2+14 \ge 14$, dấu " = " xảy ra khi $z=1$, vậy $MinP=14 \Leftrightarrow x=y=z=1$.

∗ Nhận xét:

Đây cũng là một ví dụ chúng tôi đã đề cập tới trong phương pháp hệ số bất đinh, và cũng là lời giải thực hiện theo phương pháp hệ số bất định, vậy nếu thực hiện bài toán này theo phương pháp tiếp tuyến thì sẽ như thế nào? Bạn đọc tiếp tục théo dõi lời giải

○ Trước hết ta cần khẳng định rằng tiếp tuyến của hàm số là một đường thẳng, hay nói chính xác nó phải là một hàm số bậc nhất, để thực hiện được bài toán này theo phương pháp tiếp tuyến ta sẽ làm như sau.

● **Cách 3**: Phương pháp tiếp tuyến

$\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+16ab+7b^2}} \ge ma+nb; \forall a,b \in (0;3) \Leftrightarrow \frac{25}{\sqrt{2+7\left(\frac{b}{a}\right)^2+16\left(\frac{b}{a}\right)}} \ge m+n\left(\frac{b}{a}\right)$

Xét $f\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{25}{\sqrt{7\left(\frac{b}{a}\right)^2+16\left(\frac{b}{a}\right)+2}}$, do ta dự đoán $a=b \Rightarrow \frac{b}{a}=1$, để tìm m,n ta xét hpt

Đặt $t=\frac{b}{a}; \Rightarrow f(t)=\frac{25}{\sqrt{7t^2+16t+2}}$ do dự đoán $a=b=1$ nên ta sẽ lập phương trình tiếp tuyến của hàm số $f(t)$ tại điểm có hoành độ $t=1$, phương trình có dạng

$y=f'(1)(t-1)+f(1) \Leftrightarrow y=-3(t-1)+5=8-3t$

Vậy ta sẽ chứng minh

$\frac{25}{\sqrt{7t^2+16t+2}} \ge 8-3t$ hay $\frac{25x^2}{\sqrt{2x^2+16xy+7y^2}} \ge 8x-3y; \forall x,y \in (0;3)(1)$

+ Nếu $8x-3y<0 \Rightarrow (1)$ Luôn đúng

+ Nếu $8x-3y \ge 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (x-y)^2(71x-21y)(7x+3y) \ge 0$ luôn đúng với $8x-3y \ge 0$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y$

Chứng minh tương tự ta có

$\frac{25y^2}{\sqrt{2y^2+16yz+7y^2}} \ge 8y-3z; \forall y,z \in (0;3)(2)$ dấu '' = '' xảy ra khi $y=z$

Lúc đó

$P \ge 8(x+y) - 3(y+z) + \dfrac{z^2(3+x)}{x} = 3x + 5(x+y+z) - 8z + \dfrac{3z^2}{x} + z^2$

$\Leftrightarrow P \ge 3\left(x + \dfrac{z^2}{x}\right) + z^2 - 8z + 15 \ge z^2 - 2z + 15 = (z-1)^2 + 14 \ge 14$, dấu " = " xảy ra khi $z = 1$, vậy $MinP = 14 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

- **Cách 4**.

Giả sử ta xét biểu thức sau $f(x) = \dfrac{25x^2}{\sqrt{2x^2 + 16xy + 7y^2}}$ (coi như ẩn là $x; y$ là tham số), ta sẽ đi thiết lập phương trình tiếp tuyến của hàm số này như sau

○ Theo dự đoán điểm rơi, ta có $x = y \Rightarrow pttt$ của hàm số

$f(x): y = f'(y)(x-y) + f(y)$

Ta có $f'(y) = 8; f(y) = 5y \Rightarrow pttt: y = 8(x-y) + 5y = 8x - 3y$, đến đây ta làm giống trên nhé.

∗ Chú ý để tính đạo hàm nhanh ta làm như sau

1. Ấn $Shift + \dfrac{d}{dx} \xrightarrow{tren.may.xuat.hien} \dfrac{d}{dx}(\ )_{x=}$
2. Nhập $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{25x^2}{\sqrt{2x^2 + 16xy + 7y^2}}\right)_{x=y} = 8$

Bạn hiểu rồi chứ ? ta sẽ củng cố thêm kiến thức bằng một số ví dụ nữa nhé

Bài mẫu 05 Cho các số thực x, y, z dương và $x + y + z = 3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x(3x+y)^2}{3x^2 - 2xy + y^2} + \dfrac{y(3y+z)^2}{3y^2 - 2xy + z^2} + \dfrac{z(3z+x)^2}{3z^2 - 2xz + z^2}$

Phân tích và định hướng giải.

○ Trước hết, do $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 3$ nên dự đoán $x = y = z = 1$.

○ Bài toán yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất của P nên ta đánh giá $P \ge M = ?$, từ đó ta có ý tưởng đánh giá $\dfrac{x(3x+y)^2}{3x^2 - 2xy + y^2} \le mx + ny$

○ Để tìm ra BĐT phụ này ta lập pt tiếp tuyến của hàm số $f(x) = \dfrac{x(3x+y)^2}{3x^2 - 2xy + y^2}$ tại điểm rơi dự đoán $x = y$, phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(y)(x-y) + f(y)$

Làm tương tự bài mẫu 04 ta dễ dàng tìm được $f'(y) = 4; f(y) = 8y$, vậy ta có phương trình tiếp tuyến là $y = 4(x-y) + 8y = 4(x+y)$

○ Ta chứng minh

$$\frac{x(3x+y)^2}{3x^2-2xy+y^2}\le 4x+4y\Leftrightarrow\frac{x(3x+y)^2-(3x^2-2xy+y^2)(4x+4y)}{3x^2-2xy+y^2}\le 0\Leftrightarrow\frac{(x-y)^2(-3x-4y)}{3x^2-2xy+y^2}\le 0(*)$$

Ta thấy $(*)$ luôn đúng vì

$$x;y\in(0;3)\Rightarrow -3x-4y<0;3x^2-2xy+y^2=(x-y)^2+2x^2>0$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y$

$*$ Chú ý:

Để phân tích $x(3x+y)^2-(3x^2-2xy+y^2)(4x+4y)=(x-y)^2(-3x-4y)$ ta dùng Casio như sau

Do dự đoán $x=y\Rightarrow$ biểu thức sẽ có $(x-y)^2$ là nhân tư chung, do đó ta nhập

$$\frac{x(3x+y)^2-(3x^2-2xy+y^2)(4x+4y)}{(x-y)^2}CALC:x=100;y=\frac{1}{100}\Rightarrow$$ Máy cho kết quả là

$$-300,004=-300-\frac{4}{100}=-3x-4y$$.

Vậy ta có lời giải

$$\frac{x(3x+y)^2}{3x^2-2xy+y^2}\le 4x+4y\frac{x(3x+y)^2-(3x^2-2xy+y^2)(4x+4y)}{3x^2-2xy+y^2}\le 0\Leftrightarrow\frac{(x-y)^2(-3x-4y)}{3x^2-2xy+y^2}\le 0(1)$$

$$\frac{y(3y+z)^2}{3y^2-2zy+z^2}\le 4y+4z\Leftrightarrow\frac{y(3y+z)^2-(3y^2-2zy+z^2)(4z+4y)}{3y^2-2zy+z^2}\le 0\Leftrightarrow\frac{(y-z)^2(-3y-4z)}{3y^2-2zy+z^2}\le 0(2)$$

$$\frac{z(3z+x)^2}{3z^2-2xz+x^2}\le 4z+4x\Leftrightarrow\frac{z(3z+x)^2-(3z^2-2xz+x^2)(4z+4x)}{3z^2-2xz+x^2}\le 0\Leftrightarrow\frac{(z-x)^2(-3z-4x)}{3z^2-2xz+z^2}\le 0(3)$$

Từ $(1),(2),(3)\Rightarrow x=y=z=1$, Cộng vế với vế ta có

$$P=\frac{x(3x+y)^2}{3x^2-2xy+y^2}+\frac{y(3y+z)^2}{3y^2-2xy+z^2}+\frac{z(3z+x)^2}{3z^2-2xz+z^2}\le 8(x+y+z)=24$$

Vậy $MaxP=24\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài toán được giải quyết

Bài mẫu 06. Cho các số thực x,y,z dương và $x+y+z=3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+xz+x^2}+\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}$

Lời giải

Hoàn toàn giống ví dụ trên, ta giả sử thiết lập phương trình tiếp tuyến của hàm số

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}$$ tại $x=y$

- Phương trình tiếp tuyến $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y$
- Ta chứng minh $f(x)=\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}\ge\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y\Leftrightarrow\frac{(x-y)^2(x+y)}{x^2+xy+y^2}\ge 0;\forall x,y\in(0;3)$, dấu bằng xảy ra khi $x=y$
- Tương tự ta cũng có $\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}\ge\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z$; $\frac{z^3}{z^2+xz+x^2}\ge\frac{2}{3}z-\frac{1}{3}x$

Cộng vế với vế ta có $P=\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+xz+x^2}+\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}\ge\frac{x+y+z}{3}=1$

Vậy $MinP=1\Leftrightarrow x=y=z=1$

Bài mẫu 07. Cho các số thực x,y,z dương . Hãy chứng minh rằng

$$P=\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Phân tích và định hướng giải

- Trước hết ta thấy ngay tính đối xứng trong biểu thức P nên dự đoán $a=b=c$
- Ta thiết lập phương trình tiếp tuyến của hàm số $f(a)=\frac{a^4}{a^3+b^3}$ tại điểm có

hoành độ $a=b$, phương trình có dạng $y=f'(b)(a-b)+f(b)$ với

$$f'(b)=\frac{5}{4};\ f(b)=\frac{b}{2}\Rightarrow pttt:y=\frac{5}{4}(a-b)+\frac{b}{2}=\frac{5}{4}a-\frac{3}{4}b$$

- Việc tiếp theo ta chứng minh

$$f(a)=\frac{a^4}{a^3+b^3}\ge\frac{5}{4}a-\frac{3}{4}b\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2(3b^2+ab-a^2)}{4(a^3+b^3)}\ge 0;\forall a,b>0$$

Tương tự ta cũng có $\frac{b^4}{b^3+c^3}\ge\frac{5}{4}b-\frac{3}{4}c;\frac{c^4}{c^3+a^3}\ge\frac{5}{4}c-\frac{3}{4}a$

Cộng vế với vế ta có $P=\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}\ge\frac{a+b+c}{2}$ (đpcm)

Dấu " = " xảy ra khi $a=b=c$.

Bài mẫu 08. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{x}{e^x}+\frac{y}{e^y}+\frac{z}{e^z}-\frac{2(xy+yz+zx)}{e}$

Phân tích và định hướng giải

- Trước tiên ta cũng dễ dàng dự đoán điểm rơi của bài toán là $x=y=z=1$

○ Quan sát biểu thức P có chứa $2\left(xy+zy+zx\right)$ chưa độc lập về biến, một cách tự nhiên ta nghĩ ngay tới biểu thức

$$\left(x+y+z\right)^2=x^2+y^2+z^2+2\left(xy+zy+zx\right)\Rightarrow 2\left(xy+zy+zx\right)=\left(x+y+z\right)^2-x^2+y^2$$

○ Với $x+y+z=3$ ta có $P=\frac{x}{e^x}+\frac{x^2}{e}+\frac{y}{e^y}+\frac{y^2}{e}+\frac{z}{e^z}+\frac{z^2}{e}-\frac{9}{e}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{e^x}$ trên $\left(0;3\right)$, phương trình tiếp tuyến của hàm sồ

$y=f'\left(1\right)\left(x-1\right)+f\left(1\right)=-\frac{1}{e}x+\frac{2}{e}$, ta chứng minh

$f\left(x\right)=\frac{1}{e^x}\geq-\frac{1}{e}x+\frac{2}{e}\Leftrightarrow\frac{x}{e^x}\geq\frac{x^2}{e}+\frac{2x}{e}$ việc chứng minh khá đơn giản bằng bẳng biến thiên, xin dành cho bạn đọc

Tương tự cũng có

$$f\left(y\right)=\frac{1}{e^y}\geq-\frac{1}{e}y+\frac{2}{e}\Leftrightarrow\frac{y}{e^y}\geq\frac{y^2}{e}+\frac{2y}{e}$$

$$f\left(z\right)=\frac{1}{e^z}\geq-\frac{1}{e}z+\frac{2}{e}\Leftrightarrow\frac{z}{e^z}\geq\frac{z^2}{e}+\frac{2z}{e}$$

Cộng vế lại ta có

$$\frac{x}{e^x}+\frac{y}{e^y}+\frac{z}{e^z}\geq-\frac{1}{e}\left(x^2+y^2+z^2\right)+\frac{2}{e}\left(x+y+z\right)\Leftrightarrow\frac{x}{e^x}+\frac{y}{e^y}+\frac{z}{e^z}+\frac{1}{e}\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\frac{6}{e}$$

Suy ra $P\geq\frac{6}{e}-\frac{9}{e}=-\frac{3}{e}$

Vậy $MinP=-\frac{3}{e}\Leftrightarrow x=y=z=1.$

Bài mẫu 09. *(ĐH 2003) Cho các số dương x, y và z thoả mãn $x+y+z\leq 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\geq\sqrt{82}$$

Phân tích và định hướng giải.

Dự đoán dấu bằng xảy ra tại $x=y=z=\frac{1}{3}$ khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}$ tại điểm có hoành độ $x_0=\frac{1}{3}$ là $y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$ hay $y=-\frac{80}{\sqrt{82}}x+\frac{162}{3\sqrt{82}}$. Do đó ta sẽ đi chứng minh $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\geq-\frac{80}{\sqrt{82}}x+\frac{162}{3\sqrt{82}}$. Khi đó ta có các BĐT tương tự và cộng lại, sử dụng giả thiết ta suy ra điều phải chứng minh.

Lời giải

Từ giả thiết bài toán ta suy ra $x, y, z \in (0;1)$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \frac{80}{\sqrt{82}}x - \frac{162}{3\sqrt{82}}$ với $x \in (0;1)$

Ta có $f'(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} + \frac{80}{\sqrt{82}}$; $f''(x) = \frac{\frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^6}}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} > 0, \forall x > 0$

Suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

X	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$f(1)$

Suy ra $f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \frac{80}{\sqrt{82}}x - \frac{162}{3\sqrt{82}} \geq f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

Hay $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \geq -\frac{80}{\sqrt{82}}x + \frac{162}{3\sqrt{82}}$ (*), tương tự ta có

$\sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} \geq -\frac{80}{\sqrt{82}}y + \frac{162}{3\sqrt{82}}$, $\sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq -\frac{80}{\sqrt{82}}z + \frac{162}{3\sqrt{82}}$

Cộng vế với vế ta được

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq -\frac{80}{\sqrt{82}}(x + y + z) + \frac{162}{\sqrt{82}} \geq \sqrt{82}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài mẫu 10. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = x\ln x + y\ln y + z\ln z - x^2 - y^2 - z^2$.

Lời giải

○ Xét hàm số $f(x) = \ln x; x \in (0;3)$, do dự đoán được điểm rơi là $x = y = z = 1$, ta thiết lập ○ phương trình tiếp tuyến của hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$

Phương trình có dạng $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = x - 1$

○ Ta chứng minh $\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \leq 0 (*); \forall x \in (0;3)$

○ Xét $g(x)=lnx-x+1 \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1$

○ Lập bẳng biến thiên ta thấy $g(x)\le g(1)=0$ vậy $(*)$ luôn đúng, dấu "=" xảy ra khi $x=1$ tư đây ta có $x\,lnx \le x^2-x \Rightarrow x\,lnx-x^2\le -x$

Do tính đối xứng nên ta cũng có $\begin{cases} y\,lny-y^2\le -y \\ z\,lnz-z^2\le -z \end{cases}$

Cộng vế với vế ta có

$P=x\ln x+y\ln y+z\ln z-x^2-y^2-z^2\le -(x+y+z)=-3$

Vậy $MaxP=-3$ Dấu " = " xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài mẫu 11.

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P=x(1+lnx)+y(1+lny)+z(1+lnz)$.

Phân tích và định hướng giải

○ Do có tính đối xứng giữa các biến , mà x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$ nên ta dự đoán điểm rơi là $x=y=z=1$.

○ Ta xét hàm số $f(x)=1+lnx;\forall x\in(0;\sqrt{3})$, Phương trình tiếp tuyến của hàm số này tại $x=1$ là $y=x$

○ Do yêu cầu của bài là tìm giá trị lớn nhất nên ta sẽ chứng minh $1+lnx\le x \Leftrightarrow g(x)=lnx-x+1\le 0$ (đã được chứng minh ở ví dụ trên)

Vậy $1+lnx\le x \Leftrightarrow x(1+lnx)\le x^2$

Tương tự cũng có $y(1+lny)\le y^2; z(1+lnz)\le z^2$, cộng vế theo vế ta có

$P=x(1+lnx)+y(1+lny)+z(1+lnz)\le x^2+y^2+z^2=3$

Vậy $MaxP=3 \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài mẫu 12.

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\sqrt{log_3^2 x+1}+\sqrt{log_3^2 y+1}+\sqrt{log_3^2 z+1}$.

Phân tích và định hướng giải

○ Quan sát thấy biểu thức P đối xứng và có chứa các hàm log , ở điều kiện lại chứa tích các biến, từ đây cho ta ý tưởng lấy loga hai vế ở điều kiện và đặt ẩn phụ như sau.

○ $xyz = 3 \Leftrightarrow log_3 x + log_3 y + log_3 z = 1$, đặt $a = log_3 x; b = log_3 y; c = log_3 z$ lúc đó ta có $a + b + c = 1$ và biểu thức trở thành $P = \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1}$

○ Biểu thức chứa các biến hoàn toàn độc lập với nhau, cho ta ý tưởng lập phương trình tiếp tuyến của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{3}$:

$$y = \frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Ta cần chứng minh $\sqrt{x^2+1} \geq \frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (3x-1)^2 \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{3}$

Vậy ta có $\begin{cases} \sqrt{a^2+1} \geq \frac{1}{\sqrt{10}}a + \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \sqrt{b^2+1} \geq \frac{1}{\sqrt{10}}b + \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \sqrt{c^2+1} \geq \frac{1}{\sqrt{10}}c + \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$

Cộng vế ta có

$$P = \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \geq \frac{1}{\sqrt{10}}(a+b+c) + \frac{9}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow MinP = \sqrt{10} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt[3]{3}.$$

Bài mẫu 13.

Cho x, y, z dương và thỏa mãn $x\left(1 - \frac{1}{y}\right) + y\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 4(*)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = xy + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}$.

Phân tích và định hướng giải

○ Quan sát thấy x, y đối xứng do đó ta dự đoán điểm rơi $x = y$, thay vao đk ta có $x\left(1 - \frac{1}{x}\right) + x\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 4 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow x = y = 3$

○ Trong P có hai biểu thức độc lập, khiến ta suy nghĩ dùng tiếp tuyến để đánh giá hai biểu thức này

○ Xét hàm số $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ có pttt tại $x=3$ là $y=\dfrac{3x+1}{\sqrt{10}}$

Ta cần chứng minh $\sqrt{x^2+1}\ge\dfrac{3x+1}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow x^2-6x+9\ge 0\Leftrightarrow (x-3)^2\ge 0$, dấu bằng xảy ra khi $x=3$ Vậy $\begin{cases}\sqrt{x^2+1}\ge\dfrac{3}{\sqrt{10}}x+\dfrac{1}{\sqrt{10}}(1)\\ \sqrt{y^2+1}\ge\dfrac{3}{\sqrt{10}}y+\dfrac{1}{\sqrt{10}}(2)\end{cases}$

○ Công việc cuối cùng ta đánh giá xy , với bạn mới học bđt sẽ rấ dễ nhầm lẫn vì sẽ dùng AM – GM đánh giá $xy\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$ tuy nhiên bạn để ý sẽ thấy chúng ngược dấu, ta sẽ dùng đến điều kiện như sau.

$$x\left(1-\frac{1}{y}\right)+y\left(1-\frac{1}{x}\right)=4(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+4\ge 2\sqrt{\dfrac{x}{y}.\dfrac{y}{x}}+4=6\\ (x+y)xy=(x+y)^2-2xy\Rightarrow xy=\dfrac{(x+y)^2}{x+y-2}(3)\end{cases}$$

Như vậy việc dồn biến đã hoàn thành, ta đặt $t=x+y\ge 6$

Từ $(1),(2),(3)\Rightarrow P\ge\dfrac{(x+y)^2}{x+y-2}+\dfrac{3}{\sqrt{10}}(x+y)+\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\dfrac{t^2}{t-2}+\dfrac{3}{\sqrt{10}}t+\dfrac{2}{\sqrt{10}}$

Xét $f(t)=\dfrac{t^2}{t-2}+\dfrac{3}{\sqrt{10}}t+\dfrac{2}{\sqrt{10}};\forall t\ge 6\Rightarrow f'(t)=\dfrac{t(t-4)}{(t-2)^2}+\dfrac{3}{\sqrt{10}}>0;\forall t\ge 6$

Vậy $f(t)$ đồng biến với $\forall t\ge 6\Rightarrow f(t)\ge f(6)=9+2\sqrt{10}$,

Kết luận $MinP=9+2\sqrt{10}$, dấu bằng xảy ra khi $t=6\Leftrightarrow x=y=3$.