PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Phương trình mũ cơ bản.

Dạng 1. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ x \in D_f \cap D_g \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

Dạng 2. $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ f(x) = b \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0, a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases} \end{array}\right.$

Dạng 3. $\begin{cases} a^{f(x)} = b^{g(x)} \\ a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\log_a b$

2. Phương trình mũ biến đổi về dạng tích.

VD1. Phương trình: $12.3^x + 3.15^x - 5^{x+1} = 20 \Leftrightarrow (4 + 5^x)(3^{x+1} - 5) = 0$

(ĐHuế - D2001)

VD2. Phương trình: $2^{x-3}.3^{x-2} - 2.2^{x-3} - 3.3^{x-2} + 6 = 0 \Leftrightarrow (2^{x-3} - 3)(3^{x-2} - 2) = 0$

3. Biến đổi tương đương.

VD. Giải phương trình $4^{\lg 10x} - 6^{\lg x} = 2.3^{\lg 100x^2}$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 4^{1+\lg x} - 6^{\lg x} = 2.3^{2+2\lg x} \Leftrightarrow 4.2^{2\lg x} - 6^{\lg x} = 18.3^{2\lg x} \Leftrightarrow 4\left(\frac{2}{3}\right)^{2\lg x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} - 18 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = \frac{9}{4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \lg x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{100}$

4. Các phương trình mũ không mẫu mực.

VD1. Giải phương trình $4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16$

HD. $4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16 \Leftrightarrow 4.4^x + 16.2^x = 4.2^x + 16 \Leftrightarrow 4.2^{2x} + 12.2^x - 16 = 0$

Đặt $2^x = t > 0$

VD2. Giải phương trình $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$

HD. Đặt $u = 4^{x^2-3x+2}, v = 4^{x^2+6x+5} \Rightarrow uv = 4^{2x^2+3x+7}$

Pt đã cho tương đương u + v = uv + 1 $\Leftrightarrow$ (u - 1)(1 - v) =0

VD3. Giải phương trình $4.3^x - 9.2^x = 5.6^{\frac{x}{2}}$

HD. $4.3^x - 9.2^x = 5.6^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 4.3^x - 9.2^x = 5.(\sqrt{6})^x \Leftrightarrow 4.\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^x - 9\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^x - 5 = 0$

Đặt $t = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^x > 0 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^x = \frac{1}{t}$

VD4. Giải phương trình $4^x + 5^x = 9^x$

HD. i) x = 1 là nghiệm

ii) $4^x + 5^x = 9^x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{5}{9}\right)^x = 1$

x < 1: $\left(\frac{4}{9}\right)^x > \left(\frac{4}{9}\right), \left(\frac{5}{9}\right)^x > \frac{5}{9} \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{5}{9}\right)^x > 1$

x > 1: $\left(\frac{4}{9}\right)^x < \left(\frac{4}{9}\right), \left(\frac{5}{9}\right)^x < \frac{5}{9} \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{5}{9}\right)^x < 1$

VD5. Với giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm, có nghiệm duy nhất: $\frac{1}{3^{|x-1|}} = 3m - 2$

HD. Ta có $y = \frac{1}{3^{|1-x|}} = \begin{cases} \frac{1}{3^{x-1}}, & \text{nếu } x \ge 1 \\ \frac{1}{3^{1-x}}, & \text{nếu } x \le 1 \end{cases} = \begin{cases} 3\left(\frac{1}{3}\right)^x, & \text{nếu } x \ge 1 \\ \frac{1}{3}.3^x, & \text{nếu } x \le 1 \end{cases}$

Vẽ đồ thị và dựavào đồ thị, ta có kết quả:

i) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi 0 < 3m - 2 ≤ 1 ⇔ $\frac{2}{3} < m \le 1$.

ii) Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi 3m - 2 = 1 ⇔ m = 1.

*** Bài tập luyện tập:**

1. Giải phương trình:

$$2^{x^2+4} + 2^{x^2+5} + 1956^{x^2} + 1958^{x^2} + 1979^{x^4} + 1981^{x^4} + 1976^{x^6} + 1982^{x^6} = 54$$

2. Giải phương trình:

$$2^{x^2-1} + 2^{x^2+1} = 5$$

3. Giải phương trình:

$$4.(\sqrt{5}-1)^{4x-3} - 3(\sqrt{5}+1)^{4x-3} = 2^{4x-3}$$

4. Giải phương trình:

$$(2+\sqrt{2})^{\log_2 x} + x(2-\sqrt{2})^{\log_2 x} = 1 + x^2$$

5. Giải phương trình:

$$(2+\sqrt{3})^{3x} + 2(2+\sqrt{3})^{2x} - 2(2-\sqrt{3})^x = 1$$

6. Giải phương trình:

$$(26+15\sqrt{3})^x+2(7+4\sqrt{3})^x-2(2-\sqrt{3})^x=1$$

7. Giải phương trình:

$$64.9^x-84.12^x+27.16^x=0$$

8. Giải phương trình:

$$(\cos72^0)^x+(\cos36^0)^x=3.2^{-x}$$

9. Giải phương trình:

$$4^{x-\sqrt{x^2-5}}-12.2^{x-1-\sqrt{x^2-5}}+8=0$$

10. Giải phương trình:

$$4^{x^2+x}+2^{1-x^2}=2^{(x+1)^2}+1$$

11. Giải phương trình:

$$3.25^{x-2}+(3x-10)5^{x-2}+3-x=0$$

12. Cho phương trình: $\left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x+a\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^x=8$

1. Giải phương trình với a = 7.
2. Biện luận theo a số nghiệm của phương trình.

13. Giải phương trình:

$$1956^x+1958^x+1979^x+1981^x+2001^x=5.$$

14. Giải phương trình:

$$4^{sin^2x}+2.^{cos^2x}=2+\sqrt{2}$$

15. Giải phương trình: $x^{x^2}=x$

II. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1. Các biến đổi logarit (trong $\mathbb{R}$).

- **Định nghĩa:** $\log_a x=y \Leftrightarrow x=a^y;\forall x>0,(a>0,a\neq1)$
- **Số 0 và số âm không có logarit.**
- $\log_a 1=0,(a>0,a\neq1)$
- **Định nghĩa:** $\log_a a=1,(a>0,a\neq1)$
- **Lôgarit hoá:** $x=\log_a a^x,\ \forall x,\ (a>0,a\neq1)$
- **Mũ hoá:** $x=a^{\log_a x};\forall x>0,(a>0,a\neq1)$
- $\log_a|xy|=\log_a|x|+\log_a|y|, xy\neq0,\ (a>0,a\neq1)$
- $\log_a\left|\dfrac{x}{y}\right|=\log_a|x|-\log_a|y|, xy\neq0,\ (a>0,a\neq1)$
- $\log_a|x^\alpha|=\alpha\log_a|x|,\forall x\neq0,(a>0,a\neq1)$

$$\log_a \frac{1}{|x|} = -\log_a |x|, \forall x \neq 0, (a > 0, a \neq 1)$$

$$\log_a \sqrt[n]{|x|} = \frac{1}{n}\log_a |x|, \forall x \neq 0, (a > 0, a \neq 1)$$

- $\log_{a^\alpha} |x| = \frac{1}{\alpha}\log_a |x|, \forall x \neq 0, \alpha \neq 0, (a > 0, a \neq 1)$

$$\log_{\frac{1}{a}} |x| = -\log_a |x|, \forall x \neq 0, (a > 0, a \neq 1)$$

$$\log_{\frac{1}{a}} |x| = -\log_a |x|, \forall x \neq 0, (a > 0, a \neq 1)$$

$$\log_a \frac{1}{|x|} = -\log_a |x|, \forall x \neq 0, (a > 0, a \neq 1)$$

$$\log_{\sqrt[n]{a}} |x| = n\log_a |x|, \forall x \neq 0, (a > 0, a \neq 1)$$

- $\log_{a^\beta} |x^\alpha| = \frac{\alpha}{\beta}\log_a |x|, \forall x \neq 0, \beta \neq 0, (a > 0, a \neq 1)$
- $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}, \forall x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1, (a > 0, a \neq 1)$
- **Đổi cơ số:** $\log_a |x| = \log_a b.\log_b |x|, \forall x \neq 0, (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1)$

$$\log_a b.\log_b a = 1, (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1)$$

$$\log_{a_1} a_2.\log_{a_2} a_3 ... \log_{a_{n-1}} a_n.\log_{a_n} a_1. = 1, (a_i > 0, a_i \neq 1, i = \overline{1,n})$$

- **Xuân Bang:**

$$\log_a |x| \log_b |y| = \log_b |x| \log_a |y|, \forall xy \neq 0, (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1)$$

- **Chú ý các biến hoá mũ và logarit:**

VD:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{\log_{\sqrt[m]{a}} |x^n|} = a^{\frac{m}{n}\log_a |x^n|} = a^{\log_a |x|^m} = |x|^m, x \neq 0, (a > 0, a \neq 1; m, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$$

2. Phương trình logarit (trong $\mathbb{R}$).

2.1. Dạng cơ bản.

Dạng 1. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \ (hay\ g(x) > 0) \end{cases}$

VD. Giải phương trình $\log_4 x + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = 0$

HD. $\log_4 x + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 x - \log_2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \log_2\sqrt{x} = \log_2(x-2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = x-2 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{x}+2=0 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -1 \vee \sqrt{x} = 2 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

Dạng 2. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, a\neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

VD. Giải phương trình $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}}(x+2) = 2$

HD. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}}(x+2) = 2$

$\Leftrightarrow \log_3 x + 2\log_3(x+2) = 2 \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3(x+2)^2 = 2 \Leftrightarrow \log_3 x(x+2)^2 = 2$

$\Leftrightarrow x(x+2)^2 = 9$

Dạng 3. $\log_a f(x) = \log_b f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a,b>0;\ a,b\neq 1;\ a\neq b \\ \log_a f(x) = \log_b a \log_a f(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = 1$

VD. Giải phương trình $\log_2(\sin x) = \log_3(sinx)$

HD. $\log_2(\sin x) = \log_3(sinx)$

$\Leftrightarrow \log_2(\sin x) = \log_3 2\log_2(sinx) \Leftrightarrow \log_2(sinx).(\log_3 2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \log_2(sinx) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1$

Dạng 4. $\log_a f(x) = \log_b g(x)$

Đặt $\log_a f(x) = \log_b g(x) = t \Leftrightarrow \begin{cases} a,b>0;\ a,b\neq 1;\ a\neq b \\ a^{f(x)} = t \\ a^{g(x)} = t \end{cases}$: Khử x trong hệ, giải phương trình ẩn t.

VD1. Giải phương trình $\log_2(\sin x) = \log_3(\cos x)$

HD. $\log_2(\sin x) = \log_3(\cos x) = t$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} \sin x = 2^t \\ \cos x = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 4^t \\ \cos^2 x = 9^t \end{cases} \Leftrightarrow 4^t + 9^t = 1$$: Vô nghiệm

VD2. Giải phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$

HD.

Đặt $2\log_3 \cot x = \log_2 \cos x = t$ ta có:

$$\begin{cases} \cos x = 2^t \\ \cot^2 x = 3^t \\ \cos x > 0, \cot x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 4^t \\ \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 3^t \\ \cos x > 0, \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 4^t \\ \sin^2 x = \dfrac{4^t}{3^t} \\ \cos x > 0, \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 4^t \\ \dfrac{4^t}{3^t} + 4^t = 1 \\ \cos x > 0, \sin x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 4^t \\ t = -1 \\ \cos x > 0, \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

2.2. Biến đổi tương đương.

VD1. Giải phương trình $\log_5 x + \log_3 x = \log_5 3 \log_9 225$

HD.

$\log_5 x + \log_3 x = \log_5 3 \log_9 225$

$\Leftrightarrow \log_5 x + \log_3 x = \log_5 15 \Leftrightarrow \log_5 3.\log_3 x + \log_3 x = 1 + \log_5 3 \Leftrightarrow (1 + \log_5 3)\log_3 x = 1 + \log_5 3$

$\Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$

VD2. Giải phương trình $\log_{\frac{2}{x}} 2 + \log_2 4x = 3$

HD.

$$\log_{\frac{2}{x}} 2 + \log_2 4x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,\ x \neq 2 \\ \dfrac{1}{1 - \log_2 x} + 2 + \log_2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,\ x \neq 2 \\ \dfrac{1}{1 - \log_2 x} + \log_2 x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,\ x \neq 2 \\ \log_2^2 x - 2\log_2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,\ x \neq 2 \\ \log_2 x = 0 \vee \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1, x = 4$$

2.3. Biến đổi về tích.

VD1. Giải phương trình $x^2(\lg(x-1) - x\lg x - \lg x^2 + x + 2 = 0$

HD. ĐK x > 0

Ptrình $\Leftrightarrow\ x^2(\lg x - 1) - x\lg x - 2\lg x + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(\lg x - 1) - x(\lg x - 1) - 2(\lg x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(\lg x - 1) = 0$

VD2. Giải phương trình $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(21 + 23x + 6x^2) = 4$

HD.

Ptrình $\Leftrightarrow\ \log_{3x+7}(2x+3)^2 + \log_{2x+3}(2x+3)(3x+7) = 4$

ĐK: $\begin{cases} 2x + 3 > 0, 2x + 3 \neq 1 \\ 3x + 7 > 0, 3x + 7 \neq 1 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với:

$2\log_{3x+7}(2x+3) + 1 + \log_{2x+3}(3x+7) = 4 \Leftrightarrow 2\log_{3x+7}(2x+3) + \log_{2x+3}(3x+7) = 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t + \dfrac{1}{t} = 3 \\ t = \log_{3x+7}(2x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - 3t + 1 = 0 \\ t = \log_{3x+7}(2x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, t = \dfrac{1}{2} \\ t = \log_{3x+7}(2x+3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{3x+7}(2x+3) = 1 \\ \log_{3x+7}(2x+3) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 3 = 3x + 7 \\ 2x + 3 = \sqrt{3x+7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ 4x^2 + 12x + 9 = 3x + 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ 4x^2 + 9x + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-2, x=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow x=-\dfrac{1}{4}$$

2.4. Giải phương trình trên từng tập con của tập xác định.

VD. Giải phương trình $\log_{x+3}\left(3-\sqrt{1-2x+x^2}\right)=\dfrac{1}{2}$

HD. $\log_{x+3}\left(3-\sqrt{1-2x+x^2}\right)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \log_{x+3}\left(3-|1-x|\right)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-|1-x|=\sqrt{x+3} \\ x+3>0, x+3\neq 1 \end{cases}$

i) - 3 < x ≤ 1, x ≠ - 2:

Pt tương đương:

$$\Leftrightarrow 3-(1-x)=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=2+x \Leftrightarrow \begin{cases} 2+x\geq 0 \\ x+3=4+4x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2+3x+1=0 \end{cases}$$

$$-1\leq x\leq 1 \Rightarrow x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

ii) x ≥ 1:

Pt tương đương:

$$3-(1-x)=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=4-x \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x\geq 0 \\ x+3=16-8x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 4 \\ x^2-9x+13=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1\leq x\leq 4 \\ x=\dfrac{9\pm\sqrt{29}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{9-\sqrt{29}}{2}$$

2.5. Các phương trình logarit không mẫu mực.

VD1. Giải phương trình $\log_3(x^2+x+1)-\log_3 x=2x-x^2$

HD. x > 0.

$$\log_3(x^2+x+1)-\log_3 x=2x-x^2 \Leftrightarrow \log_3\left(1+x+\frac{1}{x}\right)=-(1-x)^2+1$$

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \Rightarrow 1+x+\frac{1}{x}\geq 3 \Rightarrow \log_3\left(1+x+\frac{1}{x}\right)\geq 1$$

Mặt khác $-(1-x)^2+1\leq 1$

Phương trình tương đương $\begin{cases} \log_3\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)=1 \\ -(1-x)^2+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

VD2. Giải phương trình $\lg(x^2-x-6)+x=\lg(x+2)+4$.

HD. ĐK $\begin{cases} x^2-x-6>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-3)>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x-3>0 \Leftrightarrow x>3$

Phương trình tương đương với: $\lg(x-3)=4-x$

* x = 4 là nghiệm
* x > 4: $\lg(x-3) > 0, 4-x<0$
* 3 < x < 4: $\lg(x-3) < 0, 4-x>0$
**) Có thể nói, trên (3; + ∞): y = $\lg(x-3) < 0$ đồng biến, còn y = 4 - x nghịch biến nên phương trình có nghiệm duy nhất x = 4.

VD3. Giải phương trình $(x+2)\log_3^2(x+1)+4(x+1)\log_3(x+1)-16=0$

HD. ĐK: x > - 1

Do x > - 1 nên x + 2 $\neq$ 0.

Đặt $\log_3(x+1)=t$, phương trình trở thành: $(x+2)t^2+4(x+1)t-16=0$

$\Delta = 4(x+1)^2 + 16(x+2) = (2x+6)^2$

$$t=\frac{-2(x+1)\pm(2x+6)}{x+2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=\dfrac{4}{x+2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(x+1)=-4 \\ \log_3(x+1)=\dfrac{4}{x+2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{80}{81} \\ x=2\end{array}\right.$$ (Xem phương trình không mẫu mực)

VD4. Giải phương trình $\log_2(x+3^{\log_6 x})=\log_6 x$

HD. Đặt $\log_6 x=t \Leftrightarrow x=6^t$

Phương trình đã cho tương đương $\log_2(6^t+3^t)=t \Leftrightarrow 6^t+3^t=2^t \Leftrightarrow 3^t+\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=1$

t = - 1 là nghiệm(xem phương trình không mẫu mực)

VD5. Giải phương trình $2.2^{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}=\log_2(2x)$

HD. ĐK: $x\geq 2$

$$2.2^{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}=\log_2(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1}=\log_2(2x) \\ x\geq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1}-\log_2(2x)=0 \\ x\geq 2\end{cases} \quad (*)$$

Đặt f(x) = $2^{x-1}-\log_2(2x), x\geq 2$

Suy ra f '(x) = $2^{x-1}\ln 2-\dfrac{1}{x\ln 2}, x\geq 2$

f ''(x) = $2^{x-1}\ln^2 2+\dfrac{1}{x^2\ln 2}>0, \forall x\geq 2$.

$\Rightarrow$ Trên (0; +∞) đồ thị f(x) lõm và f(1) = 0, f(2) = 0 $\Rightarrow$(0; +∞) phương trình f(x) = 0 có đúng hai nghiệm. Vậy phương trình (*) có đúng một nghiệm x = 2 thoả đk $x\geq 2$.

Luyện tập:

1. Giải phương trình $4^{\log 10x}-6^{\log x}=2.3^{\log 100x^2}$

2. Giải phương trình $\ln(\sin^2 x)-1+\sin^3 x=0$

3. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\log_{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}(x-m+1)+\log_{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}(mx-x^2)$$

4. Tìm tất cả các giá trị m để tổng bình phương các nghiệm của phương trình sau lớn hơn 1:

$$2\log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + mx - 2m^2) = 0$$

5. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số a:
$2\log x - \log(x-1) = \log a$

6. Giải phương trình $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x} + 2)$

7. Giải phương trình: $\left(2+\sqrt{2}\right)^{\log_2 x} + x\left(2-\sqrt{2}\right)^{\log_2 x} = 1 + x^2$

8. Tìm tất cả các giá trị k để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt, có 3 nghiệm phân biệt: $4^{-|x-k|}\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}(2|x-k| + 2) = 0$

9. Giải phương trình: $2^{\log x^2} - 3^{\log x + 1} + 3^{\log x^2} = 0$

10. Giải phương trình: $(x - 1)\log_5 3 + \log_5(3^{x+1} + 3) = \log_5(11.3^x - 9)$

13. Giải phương trình: $4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2.3^{\log_2 4x^2}$

14. Giải phương trình: $4^{log_9 x} - 6.2^{log_9 x} + 2^{log_3 27} = 0$

15. Giải phương trình: $2^{2log_3(x^2-16)} + 2^{log_3(x^2-16)+1} = 24$

Đại học, cao đẳng 2002 - 2008:

16. Giải phương trình: $16\log_{27x^3} x - 3\log_{3x} x^2 = 0$

17. Giải phương trình: $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \dfrac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = \log_2(4x)$

18. Giải phương trình: $\log_5\left(5^x - 4\right) = 1 - x$

19. Tìm m để phương trình $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng (0; 1)

20. Giải phương trình: $\log_3\dfrac{3}{x} - \log_3\dfrac{x^3}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} + \log_2\sqrt{x}$

21. Cho phương trình: $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$.

1) Giải phương trình khi m = 2

2) Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$

22. Giải phương trình: $\log_4(x-1) + \dfrac{1}{\log_{2x+1} 4} = \dfrac{1}{2} + \log_2\sqrt{x+2}$

23. Giải phương trình: $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$

24. Giải phương trình: $(2 - \log_3 x)\log_{9x} 3 - \dfrac{4}{1 - \log_3 x} = 1$

25. Giải phương trình: $\left(2-\log_3 x\right)\log_{9x} 3-\dfrac{4}{1-\log_3 x}=1$

26. Giải phương trình: $\log_x 2+2\log_{2x} 4=\log_{\sqrt{2x}} 8$

27. Giải phương trình: $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1}-\log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\log_8(x-1)^3=0$

28. Giải phương trình: $\log_3\left(3^x-1\right)\log_3\left(3^{x+1}-3\right)=6$

29. Giải phương trình: $2\left(\log_2 x+1\right)\log_4 x+\log_2\dfrac{1}{4}=0$

30. Giải phương trình: $\log_2^2(x+1)+6\log_2\sqrt{x+1}+2=0$

31. Giải phương trình: $\log_2(4^x+15.2^x+27)+2\log_2\dfrac{1}{4.2^x-3}=0$

32. Giải phương trình:

$$\log_2(4^x+15.2^x+28)\log_3(x^2-3x+3)=\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(4^x+15.2^x+28)\log_{\sqrt{2}}(x^2-3x+3)$$

III. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Phương pháp giải

1. Biến đổi về tích.
2. Giải hệ trên từng tập con của tập xác định.
3. Biến đổi tương đương.
4. Sử dụng các phương pháp giải phương trình không mẫu mực.

- Đặt ẩn phụ.
- Đối lập.
- PP hàm số dự đoán và chứng minh không còn nghiệm.
- Khảo sát hàm số.
- Dùng dấu hiệu cần và đủ.
- Dùng min max.
- PP toạ độ và PP hình học

VD1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} e^x-e^y=\left(\log_2 y-\log_2 x\right)(xy+1) \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

HD. ĐK: x > 0, y > 0.

Ta có từ điều kiện : xy + 1 > 0

Nếu x > y > 0 thì $e^x>e^y, \log_2 x>\log_2 y \Rightarrow e^x-e^y>0, \log_2 y-\log_2 x<0$

$$\Rightarrow e^x-e^y>0, \left(\log_2 y-\log_2 x\right)(xy+1)<0$$

Nếu 0 < x < y thì $\Rightarrow e^x-e^y<0, \left(\log_2 y-\log_2 x\right)(xy+1)>0$.

Suy ra x = y = $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

VD2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_4(x^2+y^2) - \log_4 2x+1 = \log_4(x+3y) \\ \log_4(xy+1) - \log_4(4y^2+2y-2x+4) = \log_4 \dfrac{x}{y} - 1 \end{cases}$

HD. ĐKiện: x >, y > 0, $4y^2 + 2y - 2x + 4 > 0$.
Hệ phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases} \log_4 4(x^2+y^2) = \log_4 2x(x+3y) \\ \log_4 4(xy+1) = \log_4 \dfrac{x}{y}(4y^2+2y-2x+4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2+y^2) = 2x(x+3y) \\ 4(xy+1) = \dfrac{x}{y}(4y^2+2y-2x+4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ xy-x^2+2x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x-2y)=0 \\ xy-x^2+2x-2y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x-2y)=0 \\ (x-y)(2-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=0 \\ 2-x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2y=0 \\ 2-x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=y=2 \\ x=y=0 \\ x=2, y=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=2, y=1 \end{array}\right.$$

VD3. B2007-TK2. Chứng minh rằng hệ $\begin{cases} e^x = 2007 - \dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}} \\ e^y = 2007 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$ có đúng 2 nghiệm thỏa mãn điều kiện x > 0, y > 0.

HD. Đặt: $f(t) = e^t$, $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}; g'(t) = \dfrac{-1}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}} < 0, \forall |t| > 1$

Ta có f tăng trên và g giảm trên từng khoảng
Xác định.

Hệ phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + g(y) = 2007 \\ f(y) + g(x) = 2007 \end{cases}$

$\Rightarrow$ f(x) + g(y) = f(y) + g(x) (*)

Nếu x > y $\Rightarrow$ f(x) > f(y) $\Rightarrow$ g(y) < g(x) (do(*))

$\Rightarrow$ y > x (do g giảm) $\Rightarrow$ vô lý.

Tương tự khi y > x cũng dẫn đến vô lý.

Do đó, (1) $\Leftrightarrow$ (2)$\begin{cases} e^x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 2007 = 0 \\ x = y \end{cases}$

Xét: $h(x) = e^x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 2007 \quad (|x| > 1)$

Nếu $x < -1$ thì $h(x) < e^{-1} - 2007 < 0 \Rightarrow$ hệ vô nghiệm

Khi $x > 1 \Rightarrow h'(x) = e^x - \dfrac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = e^x - (x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$

$$h''(x) = e^x + \frac{3}{2}(x^2-1)^{-\frac{5}{2}}.2x = e^x + \frac{3x}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}} > 0$$

và $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$

Vậy h(x) liên tục và có đồ thị là đường cong lõm trên $(1, +\infty)$

Do đó để chứng minh (2) có 2 nghiệm dương ta chỉ cần chứng minh tồn tại $x_0 > 1$ mà $h(x_0) < 0$

Chọn $x_0 = 2 \Rightarrow h(2) = e^2 + \dfrac{2}{\sqrt{3}} - 2007 < 0$

Suy ra: $h(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm $x_1 > 1$, $x_2 > 1$

VD4. D2006. Chứng minh rằng với a > 0, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a \end{cases}$$

HD. Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + a \\ e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+a+x) = 0 \end{cases}$

Đặt $f(x) = e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+a+x)$, $x > -1$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) > 0, \ \forall x > -1$. Suy ra hệ có nghiệm duy nhất.

VD5. D2006-TK2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

HD. Hệ đã cho tương đương $\begin{cases} \ln(1+x) - x = \ln(1+y) - y \\ x > -1, y > -1 \\ x = 10y \vee x = 2y \end{cases}$

VD6. B2005. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x - 1} + \sqrt{2 - y} = 1 \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

HD. Hệ đã cho tương đương $\begin{cases} \sqrt{x - 1} + \sqrt{2 - y} = 1 \\ 3\log_3(3x) - 3\log_3 y = 3 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x - 1} + \sqrt{2 - y} = 1 \\ x = y \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$

VD7. TKA2007. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases} \quad (I)$$

HD. Đặt $u = x - 1$, $v = y - 1$

(I) thành (II) $\begin{cases} u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^v \\ v + \sqrt{v^2 + 1} = 3^u \end{cases}$

Xét hàm $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} > \frac{|x| + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 0$$

Vậy f đồng biến trên R.

Nếu $u > v \Rightarrow f(u) > f(v) \Rightarrow 3^v > 3^u \Rightarrow v > u$ (vô lý)

Tương tự nếu $v > u$ cũng dẫn đến vô lý

Do đó hệ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^u \\ u = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3^u(\sqrt{u^2 + 1} - u) \quad (1) \\ u = v \end{cases}$

Đặt: $g(u) = 3^u(\sqrt{u^2 + 1} - u)$

$$\Rightarrow g'(u) = 3^u \ln 3(\sqrt{u^2 + 1} - u) + 3^u\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} - 1\right)$$

$$g'(u) = 3^u\left(\sqrt{u^2 + 1} - u\right)\left(\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}\right) > 0, \forall u \in R$$

Vậy g(u) đồng biến trên R.

Ta có g(0) = 1. Vậy u = 0 là nghiệm duy nhất của (1)

Nên (II) $\Leftrightarrow$ $u = 0 = v$

Vậy (I) $\Leftrightarrow$ $x = y = 1$.

* Bài tập luyện tập.

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3} \end{cases}$ (ĐHNN HN -A98)

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3.2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \end{cases}$ (ĐHSP2HN-A98)

3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^{y+4x} = y^{5(y-\frac{x}{3})} \\ x^3 = y^{-1} \end{cases}$ (ĐHKTQD-A99)

4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} e^x - e^y = \left(\log_2 y - \log_2 x\right)(2+xy) \\ x^3 + y^3 = 16 \end{cases}$ (ĐHNT-D99)

5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 9x^2 - y^2 = 3 \\ \log_3(3x+y) - \log_3(3x-y) = 1 \end{cases}$

6. Giải và biện luận theo k hệ phương trình: $\begin{cases} \log_x(3x+ky) = 2 \\ \log_y(3y+kx) = 2 \end{cases}$

7. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \log_x(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \log_y(y\cos\alpha + x\sin\alpha) = 4 \\ \log_x(x\cos\alpha + y\sin\alpha).\log_y(y\cos\alpha + x\sin\alpha) = 4 \end{cases}$

a) Giải hệ với $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

b) Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Giải và biện luận hệ theo α.

8. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \log_x(ax+by) + \log_y(ay + bx) = 4 \\ \log_x(ax+by).\log_y(ay + bx) = 4 \end{cases}$

a) Giải hệ với a = 3, b = 5.
b) Giải và biện luận hệ theo a > 0, b > 0.

9. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_3 x^2 - \log_3 y = 0 \\ |x|^3 + y^2 - ay = 0 \end{cases}$

a) Giải hệ với a = 2.
b) Tìm tất cả các giá trị a để hệ có nghiệm..

10. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$ (ĐHTCKT-A2000)

11. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + a = 1 \\ 2^{a^2}.4^{x+y-xy} = 2 \end{cases}$ (ĐHMỏ-ĐC-A2000)

12. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\log_2 3+\log_2 y = y+\log_2 \dfrac{3x}{2} \\ x\log_3 12+\log_3 x = y+\log_3 \dfrac{2y}{3} \end{cases}$ (ĐHTL-A2000)

13. Xác định giá trị của tham số a để PT sau có nghiệm (x.y) với mọi giá trị của tham số b: $\begin{cases} (a-1)x^5+y^5=1 \\ e^{bx}+(a+1)by^4=a^2 \end{cases}$ (ĐHDược-A2001)

14. 1) Giải phương trình: $x^{log_6(3x)}-36\sqrt[5]{x^7}=0$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^4+y).3^{y-x^4}=1 \\ 8(x^4+y)-6^{x^4-y}=0 \end{cases}$ (ĐH Mỏ-ĐC-A2001)

15. Giải hệ: $\begin{cases} 3^{2x-2y}+2.3^{x-y}-3=0 \\ 3^x+3^{1-y}=4 \end{cases}$

16. Cho hệ phương trình $\begin{cases} a^x+a^y=\dfrac{1}{2},\ \text{a} > 0. \\ x+y=b^2-b+1. \end{cases}$

a) Giải hệ khi b = 1.

b) Tìm a để hệ có nghiệm với mọi b $\in$ [0; 1]