ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TRẮC NGHIỆM NÂNG CAO

HÀM SỐ

(CHINH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10)

(CÓ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT)

ÔN THI THPT QUỐC GIA

TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A – LÝ THUYẾT CHUNG

Cho hàm số $y = f(x,m)$, m là tham số, có taaph xác định D.

□ Hàm số f đồng biến trên $D \Leftrightarrow f' \geq 0, \forall x \in D$.

□ Hàm số f nghịch biến trên $D \Leftrightarrow f' \leq 0, \forall x \in D$.

Từ đó suy ra điều kiện của m.

1. Sử dụng GTLN, GTNN của hàm số trên tập D để giải quyết bài toán tìm giá trị của tham số để hàm số đơn điệu.

Lí thuyết nhắc lại:

Cho bất phương trình:

$$f(x,m) \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f(x) \geq g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \geq g(m)$$

Cho bất phương trình:

$$f(x,m) \leq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f(x) \leq g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \leq g(m)$$

Phương pháp: Để điều kiện để hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định (hoặc từng khoảng xác định) của hàm số $y = f(x,m)$, ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Tìm TXĐ của hàm số.
- Bước 2: Tính y'. Để hàm số đồng biến $y' \geq 0, \forall x \in D$, (để hàm số nghịch biến $y' \leq 0, \forall x \in D$) thì ta sử dụng lý thuyết nhắc lại phần trên.
- Bước 3: Kết luận giá trị của tham số.

Chú ý:

+ Phương pháp trên chỉ sử dụng được khi ta có thể tách được thành $f(x)$ và $g(m)$ riêng biệt.

+ Nếu ta không thể tách được thì phải sử dụng dấu của tam thức bậc 2.

2. Sử dụng phương pháp tham thức bậc hai để tìm điều kiện của tham số:

Lý thuyết nhắc lại:

1) $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

2) Nếu $y' = ax^2 + bx + c$ thì:

- $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$
- $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

3) Định lí về dấu của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$

□ Nếu $\Delta < 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a.

□ Nếu $\Delta = 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a, trừ $x = -\dfrac{b}{2a}$

□ Nếu $\Delta > 0$ thì $g(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và trong khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ khác dấu với a, ngoài khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ cùng dấu với a.

4) So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số 0.

• $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ • $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ • $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

5) Để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có độ dài khoảng đồng biến (nghịch biến) $(x_1; x_2)$ bằng d thì ta thực hiện các bước sau:

□ Tính y'.

□ Tìm điều kiện để hàm số có khoảng đồng biến và ngịch biến: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ (1)

□ Biến đổi $|x_1 - x_2| = d$ thành $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = d^2$ (2)

□ Sử dụng định kí Vi-et đưa (2) thành phương trình theo m.

□ Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số: $y = \dfrac{mx+1}{x+m}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $m \le 1$ hoặc $m \ge -1$. **B.** $m < -1$ hoặc $m > 1$.
C. $m \le 2$ hoặc $m \ge -1$. **D.** $m \le 2$ hoặc $m \ge 1$.

Hướng dẫn giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{m^2 - 1}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $y' > 0, \forall x \neq -m \Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$

Chọn B.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$. **B.** $m \le -\sqrt{2}$. **C.** $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. **D.** $m \ge \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y = \sin x + \cos x + mx$

$y' = \cos x - \sin x + m$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}. \Leftrightarrow m \ge \sin x - \cos x, \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow m \ge \max\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)$, với $\varphi(x) = \sin x - \cos x.$

Ta có: $\varphi(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}.$

Do đó: $\max_{\mathbb{R}} \varphi(x) = \sqrt{2}$. Từ đó suy ra $m \ge \sqrt{2}$.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$ luô nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-4 \le m \le \frac{2}{3}$. **B.** $m \ge 2$. **C.** $\begin{cases} m > 3 \\ m \ne 1 \end{cases}$. **D.** $m \le 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = m - 3 + (2m+1)\sin x$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2m+1)\sin x \le 3 - m, \forall x \in \mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m = -\frac{1}{2}$ ta có $0 \le \frac{7}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $m < -\frac{1}{2}$ ta có $\sin x \ge \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \le -1$

$\Leftrightarrow 3 - m \ge -2m - 1 \Leftrightarrow m \ge -4$

Trường hợp 3: $m > -\frac{1}{2}$ ta có:

$\sin x \le \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \ge 1 \Leftrightarrow 3 - m \ge 2m + 1 \Leftrightarrow m \le \frac{2}{3}$. Vậy $m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right]$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x}{2} + \sin^2 x, x \in [0;\pi]$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ *và* $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$. **B.** $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.

C. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ *và* $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$. **D.** $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$ *và* $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

TXĐ: $\mathrm{D} = \mathbb{R}$. $y' = \frac{1}{2} + \sin 2x$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$

Vì $x \in [0;\pi]$ nên có 2 giá trị $x = \frac{7\pi}{12}$ và $x = \frac{11\pi}{12}$ thỏa mãn điều kiện.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
y'	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖
y		↗		↘		↗	

Hàm số đồng biến $\left(0;\dfrac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\dfrac{11\pi}{12};\pi\right)$

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln\left(16x^2+1\right)-\left(m+1\right)x+m+2$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\infty\right)$.

A. $m\in\left(-\infty;-3\right]$. **B.** $m\in\left[3;+\infty\right)$. **C.** $m\in\left(-\infty;-3\right)$. **D.** $m\in\left[-3;3\right]$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $y=\ln\left(16x^2+1\right)-\left(m+1\right)x+m+2$

$y'=\dfrac{32x}{16x^2+1}-\left(m+1\right)$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{32x}{16x^2+1}-\left(m+1\right)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$$

Cách 1: $\dfrac{32x}{16x^2+1}-\left(m+1\right)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 32x-\left(m+1\right)\left(16x^2+1\right)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -16\left(m+1\right)x^2+32x-\left(m+1\right)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-16\left(m+1\right)<0\\ \Delta'=16^2-16\left(m+1\right)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m>-1\\ -16m^2-32m+240\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m>-1\\ \left[\begin{array}{l}m\le -5\\ m\ge 3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 3.$$

Cách 2: $\dfrac{32x}{16x^2+1}-\left(m+1\right)\le 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{32x}{16x^2+1}\le m+1,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m+1\ge \max\limits_{\mathbb{R}} g(x)$, với $g(x)=\dfrac{32x}{16x^2+1}$

Ta có: $g'(x)=\dfrac{-512x^2+32}{\left(16x^2+1\right)^2}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0; g\left(\frac{1}{4}\right)=4; g\left(-\frac{1}{4}\right)=-4$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=4$

Do đó: $m+1\ge 4 \Leftrightarrow m\ge 3$.

Câu 6: Hàm số $y=\frac{x^2-4x}{x+m}$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì giá trị của m là:

A. $m\in\left(-\frac{1}{2};2\right]\setminus\{-1\}$. **B.** $m\in(-1;2]\setminus\{-1\}$. **C.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$y=\frac{x^2-4x}{x+m}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$ và $y'=\frac{x^2+2mx-4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases}-m<1\\ x^2+2mx-4m\ge 0, \forall x\in[1;+\infty)\end{cases}$

$x^2+2mx-4m\ge 0, \forall x\in[1;+\infty) \Leftrightarrow 2m(x-2)\ge -x^2, \forall x\in[1;+\infty)$ (1)

Do $x=2$ thỏa bất phương trình $2m(x-2)\ge -x^2$ với mọi m nên ta chỉ cần xét $x\ne 2$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases}2m\le \frac{-x^2}{x-2}, \forall x\in[1;2)\\ 2m\ge \frac{-x^2}{x-2}, \forall x\in(2;+\infty)\end{cases}$ (2)

Xét hàm số $f(x)=\frac{-x^2}{x-2}$ trên $[1;+\infty)\setminus\{2\}$ có $f'(x)=\frac{-x^2+4x}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=4\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	1		2		4		$+\infty$
y'		$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$+\infty$

$$YCBT \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 2m \le 1 \\ 2m \ge -8 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \le \frac{1}{2}.$$

Cách khác

$y = \dfrac{x^2 - 4x}{x + m}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ và $y' = \dfrac{x^2 + 2mx - 4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $[1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 1 \\ x^2 + 2mx - 4m \ge 0, \forall x \in [1; +\infty) \end{cases}$

$$x^2 + 2mx - 4m \ge 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta \le 0 \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < x_2 \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 + 4m \le 0 \\ \begin{cases} m^2 + 4m > 0 \\ -m + \sqrt{m^2 + 4m} \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \le m \le 0 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -4 \end{array}\right. \\ m \ge -1 \\ m \le \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Kết hợp với đk $m > -1$ ta được $-1 < m \le \dfrac{1}{2}$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:

$y = \dfrac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \dfrac{1}{3}$ đồng biến trên $[2; +\infty)$

A. $m \ge \dfrac{2}{3}$ **B.** $m \le 1$ **C.** $m \ge -1$ **D.** $m \le -1$

Giải:

Ta có: $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Hàm số đồng biến trên $[2; +\infty)$ thì

$$y' \ge 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) \ge 0, \forall \in [2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m(x^2 - 2x + 3) + 2x - 6 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{6 - 2x}{x^2 - 2x + 3}, \forall \in [2; +\infty)$$

Đặt $f(x) = \dfrac{6 - 2x}{x^2 - 2x + 3}, \forall x \in [2; +\infty)$ ta tìm GTLN của hàm: $f(x), \forall x \in [2; +\infty)$

Ta có:

$f'(x)=\dfrac{2x^2-12x+6}{\left(x^2-2x+3\right)^2},\forall x\in[2;+\infty)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{2x^2-12x+6}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{6} \\ x=3-\sqrt{6}\,(loai)\end{array}\right.$

Ta có: $f(2)=\dfrac{2}{3}, f\left(3+\sqrt{6}\right)=\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le m\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}\le m.$

Chọn A.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:
$y=-x^3+3x^2+3mx-1$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m\le 1$ **B.** $m\le -1$ **C.** $m\ge -1$ **D.** $m\le 0$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y'=-3x^2+6x+3m$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ thì:

$y'\le 0\Leftrightarrow -3x^2+6x+3m\le 0,\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^2-2x\ge m,\forall x\in(0;+\infty)$

Đặt $f(x)=x^2-2x,\forall x\in(0;+\infty)$ Ta đi tìm GTNN của hàm $f(x),\forall x\in(0;+\infty)$

Ta có:

$f'(x)=2x-2$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1.$

Ta có: $f(0)=0; f(1)=-1, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Vậy để hàm số nghịch biến trong khoảng $(0;+\infty)$ thì: $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)\ge m\Leftrightarrow m\le -1$.

Chọn B.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biế trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m\le 0$. **B.** $m\le 12$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m\ge 12$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Cách 1:Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3x^2-12x+m$

□ Trường hợp 1:

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} 3>0\ (hn) \\ 36-3m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 12$

□ Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa
$x_1<x_2\le 0\ (*)$

□ Trường hợp 2.1: $y'=0$ có nghiệm $x=0$ suy ra $m=0$. Nghiệm còn lại của $y'=0$ là $x=4$ (không thỏa (*))

□ Trường hợp 2.2: $y'=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa

$$x_1<x_2<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ S<0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}36-3m>0\\ 4<0(vl)\\ \dfrac{m}{3}>0\end{cases} \Rightarrow \text{không có } m. \text{Vậy } m\ge 12$$

Cách 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow m\ge 12x-3x^2=g(x), \forall x\in(0;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)$.

x	0		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m\in[-5;2)$. **B.** $m\in(-\infty;2]$. **C.** $m\in(2,+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-5)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=4x^3-4(m-1)x$.

Hàm số đồng biến trên $(1;3) \Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x\in(1;3) \Leftrightarrow g(x)=x^2+1\ge m, \forall x\in(1;3)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;3)$.

x	1		3
g'		$+$	0
g	2	$\nearrow$	10

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m\le \min g(x) \Leftrightarrow m\le 2$.

Câu 11: Tìm tham số m để hàm số $y=x^3+3mx^2+3(m+1)x+2$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4.

A. $m<\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$ **B.** $m<\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$ hoặc $m>\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$

C. $m>\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ **D.** $\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}<m<\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $D=\mathbb{R}$, $y'=3x^2+6mx+3(m+1)=3(x^2+2mx+m+1)$

$y'=0\Leftrightarrow x^2+2mx+m+1=0\ (1)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4 $\Leftrightarrow y'\le 0$ trên đoạn có độ dài lớn hơn 4 $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm $x_1;x_2\ (x_1\ne x_2)$ thoả mãn $|x_1-x_2|>4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ |x_1-x_2|>4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ \left|2\sqrt{\Delta'}\right|>4\end{cases}\Leftrightarrow \Delta'>4\Leftrightarrow m^2-m-1>4$$

$$\Leftrightarrow m^2-m-5>0\Leftrightarrow m<\frac{1-\sqrt{21}}{2}\vee m>\frac{1+\sqrt{21}}{2}.$$

Vậy hàm số (1) nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4

$$\Leftrightarrow m<\frac{1-\sqrt{21}}{2}\vee m>\frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

Chọn B.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}mx^2+2mx-3m+4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m=-1;m=9$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=9$. **D.** $m=1;m=-9$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x^2-mx+2m$

Ta không xét trường hợp $y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ vì $a=1>0$

Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa

$$\left|x_1-x_2\right|=3\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\Leftrightarrow m^2-8m>0\\ \left(x_1-x_2\right)^2=9\Leftrightarrow S^2-4P=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>8\ hay\ m<0\\ m^2-8m=9\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=9\end{array}\right.$$

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{mx^3}{3}+7mx^2+14x-m+2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-2;-\dfrac{14}{15}\right]$. **D.** $\left[-\dfrac{14}{15};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$mx^2+14mx+14\le 0,\forall x\ge 1$, tương đương với $g(x)=\dfrac{-14}{x^2+14x}\ge m$ (1)

Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x\in\left[1;+\infty\right)$, suy ra $\min\limits_{x\ge 1} g(x)=g(1)=-\dfrac{14}{15}$

Kết luận: $(1)\Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} g(x)\ge m\Leftrightarrow -\dfrac{14}{15}\ge m$

Câu 14: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{m\right\}$. Ta có $y'=\dfrac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2}=\dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x)\ge 0,\forall x>1$ và $m\le 1$ (1)

Vì $\Delta_g{}'=2(m+1)^2\ge 0,\forall m$ nên $(1)\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1\le x_2\le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases}2g(1)=2(m^2-6m+1)\ge 0\\ \dfrac{S}{2}=m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow m\le 3-2\sqrt{2}\approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15: Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biế trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\dfrac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\dfrac{p}{q}$ tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-4x^3+2(2m-3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1;2)\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow m\le x^2+\dfrac{3}{2}=g(x),\forall x\in(1;2)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;2)$. $g'(x)=2x=0\Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên

x	1		2
g'		$+$	0
g	$\dfrac{5}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{11}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m\le \min g(x)\Leftrightarrow m\le\dfrac{5}{2}$. Vậy $p+q=5+2=7$.

Câu 16: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+201$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ sao cho $b-a>3$ là

A. $m>6$. **B.** $m=9$. **C.** $m<0$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>6 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$

Hàm số nghịch biến trên $(a;b)\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)\le 0\,\forall x\in(a;b)$

$\Delta=m^2-6m+9$

TH1: $\Delta\le 0\Rightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)\ge 0\quad\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Vô lí

TH2: $\Delta>0\Leftrightarrow m\ne 3\Rightarrow y'$ có hai nghiệm $x_1,x_2\,(x_2>x_1)$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên $(x_1;x_2)$.

Yêu cầu đề bài:

$\Leftrightarrow x_2 - x_1 > 3 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 > 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P > 9$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 4(m-2) > 9 \Leftrightarrow m^2 - 6m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < 0 \end{array}\right.$

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{m\cos x - 4}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $1 \le m < 2$.

B. $\left[\begin{array}{l} -2 < m \le 0 \\ \dfrac{1}{2} \le m < 2 \end{array}\right.$.

C. $m \ge 2$.

D. $-2 < m \le 0$.

Hướng dẫn giải:

$y = \dfrac{m\cos x - 4}{\cos x - m} \Rightarrow y' = \dfrac{(m^2-4)\sin x}{(\cos x - m)^2}; y' < 0, \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ m \notin \left(0;\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < m \le 0 \\ \dfrac{1}{2} \le m < 2 \end{array}\right.$.

Chọn B.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số: $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

A. $m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$.

B. $m \le 0$.

C. $1 \le m < 2$.

D. $m \ge 2$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = \tan x$, với $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$

Hàm số đã cho trở thành tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng (0;1)

Ta có: $y'(t) = \dfrac{-m+2}{(t-m)^2}$

Để hàm số đồng biến trong khoảng (0;1) thì:

$\begin{cases} y'(t) > 0 \\ t \ne m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 > 0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le m < 2 \\ m \le 0 \end{array}\right.$

Chọn A.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\cot x-1}{m\cot x-1}$ đồng biến trên khoản $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;0)$.

C. $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $y'=\dfrac{-\left(1+\cot^2 x\right)(m\cot x-1)+m\left(1+\cot^2 x\right)(\cot x-1)}{(m\cot x-1)^2}=\dfrac{\left(1+\cot^2 x\right)(1-m)}{(m\cot x-1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m\cot x-1\neq 0,\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y'=\dfrac{\left(1+\cot^2 x\right)(1-m)}{(m\cot x-1)^2}>0,\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\le 0\vee m\ge 1 \\ 1-m>0\end{cases}\Leftrightarrow m\le 0.$$

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:
$y=x^3-mx^2-\left(2m^2-7m+7\right)x+2(m-1)(2m-3)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. $-1\le m\le\dfrac{5}{2}$ **B.** $-1<m\le\dfrac{5}{2}$ **C.** $-1<m<\dfrac{5}{2}$ **D.** $-\dfrac{1}{2}<m\le\dfrac{5}{2}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y'=3x^2-2mx-\left(2m^2-7m+7\right)$

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ thì ta xét 2 trường hợp sau:

TH1: Hàm số luôn đồng biến trên R:

$\Delta'\le 0\Leftrightarrow m^2+3\left(2m^2-7m+7\right)\le 0\Leftrightarrow m^2-3m+3\le 0,(VL)$

Vậy không có giá trị nào của m để hàm số luôn đồng biến trên R,

TH2: Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$

$\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-3m+3>0,(\forall x\in\mathbb{R})$.

Giả sử $x_1,x_2,(x_1<x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $y'=0$, để Hàm số đồng biến tron khoảng $(2;+\infty)$ thì:

$$x_1<x_2\le 2\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{S}{2}\le 2 \\ (x_1-2)(x_2-2)\ge 0\Leftrightarrow x_1x_2-2(x_1+x_2)+4\ge 0,(1)\end{cases}$$

Theo định lí vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{3} \\ x_1x_2=\dfrac{-2m^2+7m-7}{3} \end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\begin{cases} m\le 6 \\ \dfrac{-2m^2+7m-7}{3}-2\left(\dfrac{2m}{3}\right)+4\ge 0 \Leftrightarrow -2m^2+3m+5\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 6 \\ -1\le m\le \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1\le m\le \dfrac{5}{2}$$

Vậy với $-1\le m\le \dfrac{5}{2}$ thì hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$.

Chọn A.

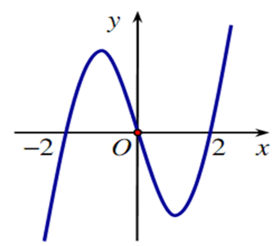
Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$.



Hướng dẫn giải:

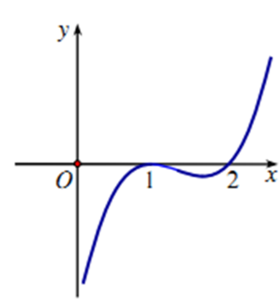
Chọn D.

• Từ đồ thị ta thấy:

+ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

+ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 22: Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây



A. $(2;+\infty)$ **B.** $(1;2)$

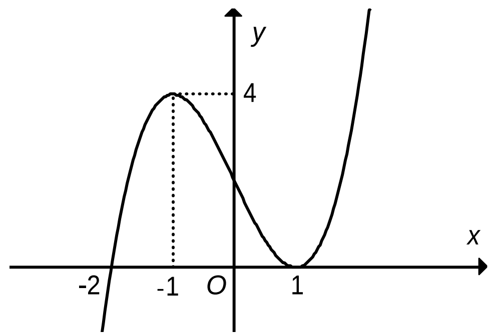
C. $(0;1)$ **D.** $(0;1)$ và $(2;+\infty)$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x)>0$ khi $x\in(2;+\infty)\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

Câu 23: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a\neq 0)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm l $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khi đó nhận xét nào sau đây sai?

A. Trên $(-2;1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.

B. Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn có độ dài bằng 2.

C. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Hướng dẫn giải:

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy:

- $f'(x)>0$ khi $\left[\begin{array}{l}-1<x<1\\ x>1\end{array}\right.\longrightarrow f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$, $(1;+\infty)$.

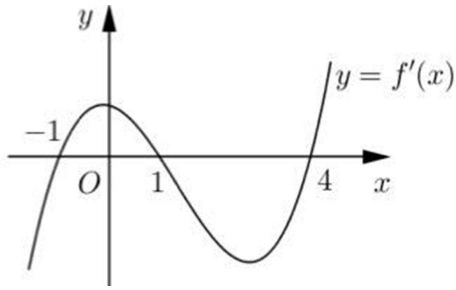
Suy ra A và C đều đúng.

- $f'(x)<0$ khi $x<-2\longrightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Suy ra D đúng, B sai.

Chọn B.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$.Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(x^2)$ đồn biến trên khoảng:



A. $(1;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;1)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

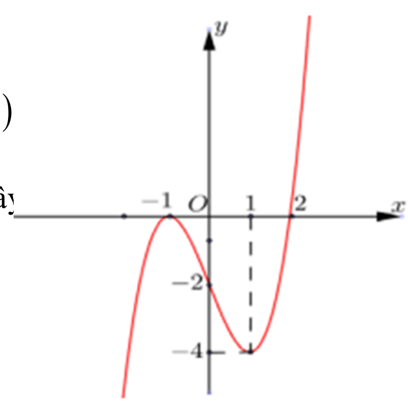
Ta có: $\left(f\left(x^2\right)\right)' = \left(x^2\right)'.f'\left(x^2\right) = 2xf'\left(x^2\right)$

Ta có: $\left(f\left(x^2\right)\right)' > 0 \Leftrightarrow 2xf'\left(x^2\right) > 0$.

TH1: $\begin{cases} x > 0 \\ f'\left(x^2\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x^2 < 1 \vee x^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1 \vee x > 2$.

TH2: $\begin{cases} x < 0 \\ f'\left(x^2\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 < -1 \vee 1 < x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < -1$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên R. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ($y = f'(x)$ trên R). Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2\right)$. Mệnh đề nào dưới đây



A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Xét hàm số

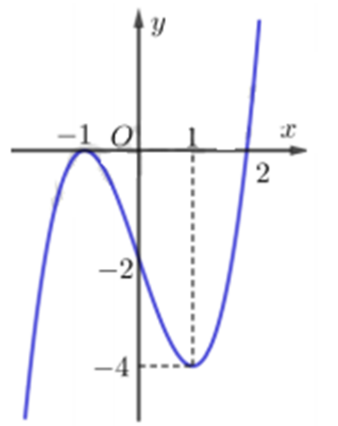
$g(x) = f(x^2 - 2)$

$g'(x) = 2x.f'(x^2 - 2)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x.f(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$

Ta lập bảng xét dấu => đáp án D

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ như hìn vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(2 - x^2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 0)$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Dễ thấy $f'(x) = (x+1)^2(x-2)$

Do $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x = 2$ nên $f(x)$ đạt cực trị tại $x = 2$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$ do $f'(x) < 0 (\forall x < 2)$

Đặt $t = 2 - x^2 \Rightarrow g(x) = f(t) \Longrightarrow g'(x) = f'(t).t'(x) = f'(2 - x^2)(-2x)$

$= (2 - x^2 + 1)^2 (2 - x^2 - 2)(-2x) = (3 - x^2)^2 .3x^2 \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Khái niệm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số f xác định trên tập $D\left(D\subset\mathbb{R}\right)$ và $x_0\in D$.

1) x_0 là điểm cực đại của f nếu tồn tại khoảng $\left(a;b\right)\subset D$ và $x_0\in\left(a;b\right)$ sao cho $f\left(x\right)<f\left(x_0\right),\in\left(a;b\right)\backslash\left\{x_0\right\}$

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực đại (cực đại) của f.

2) x_0 là điểm cực tiểu của f nếu tồn tại khoảng $\left(a;b\right)\subset D$ và $x_0\in\left(a;b\right)$ sao cho $f\left(x\right)>f\left(x_0\right),\in\left(a;b\right)\backslash\left\{x_0\right\}$

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của f.

3) Nếu $f\left(x_0\right)$ được gọi là cực trị của f thì điểm $\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số f.

2. Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Nếu hàm số f có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại điểm đó thì $f'\left(x_0\right)=0$.

Chú ý: Hàm số f chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị.

Định lí 1: giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $\left(a;b\right)\backslash\left\{x_0\right\}$

1) Nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì f đạt cực tiểu tại x_0

2) Nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì f đạt cực đại tại x_0.

Định lí 2: Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0, $f'\left(x_0\right)=0$ và có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

1) Nếu $f''\left(x_0\right)<0$ thì f đạt cực đại tại x_0.

2) Nếu $f''\left(x_0\right)>0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.

4. Kiến thức cần nhớ:

1) Khoảng cách giữa hai điểm A, B $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$

2) Khoảng cách từ điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ đến đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$:

$d\left(M,\Delta\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3) Diện tích tam giác ABC:

$S=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A=\dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ với $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right);\vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$.

Chú ý: $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

(1). Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\left(a\neq 0\right)$.

II - HÀM BẬC BA

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1 - Cực trị của hàm số

Xét hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

□ $b^2-3ac\le 0$ hàm số **không** có điểm cực trị.

□ $\begin{cases}b^2-3ac>0\\ a=0\end{cases}$ hàm số có duy nhất một điểm cực trị.

□ $\begin{cases}b^2-3ac>0\\ a\neq 0\end{cases}$ hàm số có hai điểm cực trị x_1,x_2 là nghiệm của phương trình:

Với $y'=0\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=0$, có $x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}$, $x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}\Rightarrow\left|x_1-x_2\right|=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{b^2-3ac}{a^2}}$.

Khi đó:

□ Đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $d:y=\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)x+d-\dfrac{bc}{9a}$.

□ Hệ số góc của đường thẳng qua hai điểm cực trị là $k=\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)$.

□ Tọa độ 2 điểm cực trị là $A\left(x_1;\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)x_1+d-\dfrac{bc}{9a}\right)$, $B\left(x_2;\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)x_2+d-\dfrac{bc}{9a}\right)$.

□ Độ dài đoạn thẳng AB là $\sqrt{1+\dfrac{4}{9}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)^2}\left|x_1-x_2\right|$.

□ Diện tích tam giác OAB là $S=\dfrac{1}{2}\left|\left(d-\dfrac{bc}{9a}\right)\left(x_1-x_2\right)\right|$.

□ Trung điểm I của AB cũng chính là điểm uốn của đồ thị hàm số, tức hoành độ của I là nghiệm của phương trình $y''=0$, vì vậy $I\left(-\frac{b}{3a};d-\frac{bc}{3a}+\frac{2b^3}{27a^2}\right)$.

2. Các dạng toán hay gặp:

□ $AB\perp\Delta\Leftrightarrow k.k_\Delta=-1$

□ $AB//\Delta\Rightarrow k=k_\Delta$

□ $(AB,\Delta)=\alpha\Leftrightarrow\tan\alpha=\left|\frac{k-k_\Delta}{1+k.k_\Delta}\right|$

□ A,B cách đều $\Delta\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}AB//\Delta\\ I\in\Delta\end{array}\right.$

□ >> **Cụ thể:** $AB//\Delta$ (A,B nằm cùng phía Δ); $I\in\Delta$ (A,B nằm về hai phía với Δ).

□ A,B đối xứng $\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}I\in\Delta\\ k.k_\Delta=-1\end{cases}$.

□ A,B nằm về hai phía trục hoành $\Leftrightarrow y=0$ có ba nghiệm phân biệt

□ ΔABC cân tại $C\Leftrightarrow\overrightarrow{CI}.\overleftrightarrow{AB}=0$

□ ΔABC đều $\Leftrightarrow\overrightarrow{CI}.\overleftrightarrow{AB}=0, CI=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$

□ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=ax^3+bx^2+cx+d$ và trục hoành chia thành hai phần, phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành và chúng có diện tích bằng nhau khi và chỉ khi tâm đối xứng thuộc trục hoành, tức $y\left(-\frac{b}{3a}\right)=0\Leftrightarrow d-\frac{bc}{3a}+\frac{2b^3}{27a^2}=0$.

3. Thủ thuật casio (tham khảo) viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số

*** Chú ý:** có $y''=6ax+2b\Rightarrow y=\frac{y'.y''}{18a}+\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}$

Suy ra $\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}=y-\frac{y'.y''}{18a}$

Do đó bằng máy tính ta có thể tìm nhanh được đường thẳng đi qua hai điểm cực trị hàm số bằng cách

MODE 2 (Vào môi trường số phức)

Nhập biểu thức $y-\frac{y'.y''}{18a}$

Calc với $x=i$, **(CALC ENG)**

Ta được kết quả là $mi+n$, khi đó đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=mx+n$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+5$. Tính bán kính R của đườn tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

A. $R=5$. **B.** $R=\sqrt{5}$. **C.** $R=10$. **D.** $R=2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $\begin{array}{l} y'=3x^2-3 \\ y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=3 \\ x=-1\Rightarrow y=7 \end{array}\right. \end{array}$

Vậy $A(1;3),B(-1;7)$

Lúc đó $S_{OAB}=\frac{1}{2}.\left|1.7-3.(-1)\right|=5\Rightarrow R_{OAB}=\frac{OA.OB.AB}{4S_{OAB}}=5$

Câu 2: Kí hiệu $d_{\min}$ là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm s $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$. Tìm $d_{\min}$.

A. $d_{\min}=\frac{2}{3}$. **B.** $d_{\min}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$. **C.** $d_{\min}=\frac{4}{3}$. **D.** $d_{\min}=\frac{2\sqrt{13}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Điều kiện $b^2-3ac>0\Leftrightarrow m^2+1>0$. Khi đó độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đ thị hàm số là

$$d=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}}.\sqrt{1+\frac{4}{9}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(4\left(m^2+1\right)^2+9\right)}\geq\frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $m=0$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-1\right)x-1$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Biết rằng tồn tại duy nhất điểr $A(a;b)$ sao cho A là điểm cực đại $\left(C_m\right)$tương ứng với $m=m_1$và A là điểm cực tiểu $(C_m$ tương ứng với $m=m_2$. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=-3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có

$y' = x^2 - 2mx + m^2 - 1; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m-1 \\ x = m+1 \end{array}\right. \Rightarrow M\left(m-1; \dfrac{m^3-3m-1}{3}\right), N\left(m+1; \dfrac{m^3-3m-5}{3}\right)$

là các điểm cực trị của (C_m).

Ta có $M \in (H_1): y = \dfrac{x^3+3x^2-3}{3}, N \in (H_2): y = \dfrac{x^3-3x^2-3}{3}$.

Khi đó $A(0;-1) = (H_1) \cap (H_2) \Rightarrow S = 0 - 1 = -1$.

Câu 4: Tìm m để hàm số $y = \dfrac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2-1)x + \dfrac{2}{3}$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

A. $m = \dfrac{2}{3}$. **B.** $m = 5$. **C.** $-1 < m$. **D.** $m = 7$.

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2-1) = 2(x^2 - mx - 3m^2 + 1)$,

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $\Delta = 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right. (1)$

$x_1; x_2$ là các nghiệm của $y' = 0$ nên theo định lý Vi-et ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$

Do đó: $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

$\Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện (1) ta thấy chỉ có $m = \dfrac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

Câu 5: Biết rằng hàm số $y = \dfrac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2+4m+3)x + \dfrac{1}{2}$ đạt cực trị tại x_1, x_2. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)$

A. $\min P=-9$. **B.** $\min P=-1$. **C.** $\min P=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\min P=-\dfrac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $y'=2x^2+2(m+1)x+m^2+4m+3$

Vì hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1,x_2 theo Viet ta có

$\begin{cases} x_1.x_2=\dfrac{m^2+4m+3}{2} \\ x_1+x_2=-(m+1) \end{cases}$ thay vào biểu thức $P=x_1x_2-2(x_1+x_2)$ ta được

$$P=\frac{m^2+4m+3}{2}+2(m+1)=\frac{m^2+8m+7}{2}=\frac{(m+4)^2-9}{2}$$

Vậy để $p_{\min}\Leftrightarrow(m+4)^2=0$ hay $P_{\min}=-\dfrac{9}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$. Xác định m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m\in(-1;3)\cup(3;4)$. **B.** $m\in(1;3)$.

C. $m\in(3;4)$. **D.** $m\in(-1;4)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2-m \end{array}\right.$.

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2-m\neq-1\Leftrightarrow m\neq3$.

● Nếu $-1<2-m\Leftrightarrow m<3$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow-2<-1<2-m<3\Leftrightarrow\begin{cases} m>-1 \\ m<3 \end{cases}\Leftrightarrow-1<m<3$.

● Nếu $2-m<-1\Leftrightarrow m>3$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow-2<2-m<-1<3\Leftrightarrow\begin{cases} m>3 \\ m<4 \end{cases}\Leftrightarrow3<m<4$.

Vậy $m\in(-1;3)\cup(3;4)$.

Chọn A.

Câu 7: Tập hợp tất cả các giá trị tham số m sao cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)-18$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;5)$ là

A. $(-\infty;-3)\cup(7;+\infty)$ **B.** $(-3;+\infty)\setminus\{3\}$ **C.** $(-\infty;7)\setminus\{3\}$ **D.** $(-3;7)\setminus\{3\}$

Hướng dẫn giải:

Đáp án D

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2),\forall x\in\mathbb{R}$

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+m-2=0\Leftrightarrow x^2-x-2+m(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)+m(x+1)=0\Leftrightarrow (x+1)(x-2+m)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2-m\end{array}\right.$

Để hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;5)\Leftrightarrow\begin{cases}2-m\ne -1\\-5<2-m<5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 3\\7>m>-3\end{cases}$

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx-1$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1;x_2$ sao cho: $|x_1-x_2|\ge 8$.

A. $\left[\begin{array}{l}m\ge\frac{1+\sqrt{64}}{2}\\m\le\frac{1-\sqrt{64}}{2}\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}m\ge\frac{1+\sqrt{63}}{2}\\m\le\frac{1-\sqrt{63}}{2}\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}m\ge\frac{1+\sqrt{61}}{2}\\m\le\frac{1-\sqrt{61}}{2}\end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l}m\ge\frac{1+\sqrt{65}}{2}\\m\le\frac{1-\sqrt{65}}{2}\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=x^2-2mx+m$

Hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khi và chỉ khi:

$\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\m<0\end{array}\right.,\quad(2)$

Ta có: $|x_1-x_2|\ge 8\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2\ge 64\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2\ge 64,(1)$

Theo Đl vi-et Ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1.x_2=m\end{cases}$.

Thay vào (1) ta được:

$(2m^2)-4m\ge 64\Leftrightarrow 4m^2-4m-64\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge\frac{1+\sqrt{65}}{2}\\m\le\frac{1-\sqrt{65}}{2}\end{array}\right.,(3)$

Kết hợp (2) và (3) ta được: $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right.$ thỏa mãn bài toán.

Chọn D.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{3}$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1;x_2$ sao cho: $x_1+2x_2=1$.

A. $m=\frac{2}{3}$ hoặc $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=2$.

Hướng dẫn giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$

Hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y'=0$ cos2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m\ne 0 \\ \Delta'=(m-1)^2-3m(m-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ -2m^2+4m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ \dfrac{2-\sqrt{6}}{2}<m<\dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \end{cases} (*)$$

Theo đl viet và đề bài, ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m} & (1) \\ x_1.x_2=\dfrac{3(m-2)}{m} & (2) \\ x_1+2x_2=1 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) ta có: $x_1=\frac{3m-4}{m}, x_2=\frac{2-m}{m}$

Thế vào (2) ta được: $\left(\frac{3m-4}{m}\right)\left(\frac{2-m}{m}\right)=\frac{3(m-2)}{m}\quad (m\ne 0)$

$\Leftrightarrow 3m^2-8m+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2}{3} \\ m=2 \end{array}\right.$ (thỏa (*).

Vậy giá trị cần tìm là: $m=\frac{2}{3}$ hoặc $m=2$.

Chọn A.

Câu 10: Cho hàm số : $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tất cả các giá trị của tham số m để $\left(C_m\right)$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2,\ x_3$ thỏa $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15$ là

A. $m>1$ hoặc $m<-1$. **B.** $m<-1$. **C.** $m>0$. **D.** $m>1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Phương pháp tự luận:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d :

$$\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow(x-1)\left[x^2+(-3m+1)x-3m-2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \underbrace{x^2+(-3m+1)x-3m-2}_{g(x)}=0\quad(1)\end{array}\right.$$

$\left(C_m\right)$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_g>0\\ g(1)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9m^2+6m+9>0\\ -6m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow m\neq0.$$

Gọi $x_1=1$ còn x_2,x_3 là nghiệm phương trình (1) nên theo Viet ta có $\begin{cases}x_2+x_3=3m-1\\ x_2x_3=-3m-2\end{cases}$.

Vậy

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2>15\Leftrightarrow1+(x_2+x_3)^2-2x_2x_3>15$$
$$\Leftrightarrow(3m-1)^2+2(3m+2)-14>0\Leftrightarrow9m^2-9>0\Leftrightarrow m>1\vee m<-1$$

Vậy chọn $m>1\vee m<-1$.

Phương pháp trắc nghiệm: Ta kiểm tra ngay trên đáp án

+ Với $m=-2$, ta giải phương trình bậc ba: $\frac{1}{3}x^3+2x^2-x-\frac{4}{3}=0$ thu được 3 nghiệm $x_1=-6.37...,x_2=1,x_3=-0.62...$ Ta chọn những giá trị nhỏ hơn các nghiệm này và kiểm tra điều kiện của bài toán.

Cụ thể ta tính $(-6.4)^2+1^2+(-0.63)^2=42.3569>15\Rightarrow$ loại C, **D.**

+ Với $m=2$, ta làm tương tự thu được 3 nghiệm $x_1=6.27...,x_2=1,x_3=-1.27...$

Tính $6.2^2+1^2+(-1.3)^2=41.13>15\Rightarrow$ loại **B.**

Vậy chọn $m>1\vee m<-1$.

Câu 11: Cho hai hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+ax+1$ và $g\left(x\right)=\frac{x^3}{3}+x^2+3ax-a$; với a là tham số thực

Tìm tất cả các giá trị của a sao cho mỗi hàm số có hai cực trị đồng thời giữa hai hoành đ

cực trị của hàm số này có một hoành độ cực trị của hàm số kia.

A. $-\frac{15}{4}<a<\frac{1}{5}$. **B.** $-4<a<15$. **C.** $-\frac{15}{4}<a<0$. **D.** $-4<a<0$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $f^{/}\left(x\right)=x^2-x+a$ và $g^{/}\left(x\right)=x^2+2x+3a$.

Ta cần tìm a sao cho $f^{/}\left(x\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;\ x_2$ $\left(x_1<x_2\right)$ và $g^{/}\left(x\right)=0$ c

hai nghiệm phân biệt $x_3;\ x_4$ $\left(x_3<x_4\right)$ thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} x_3<x_1<x_4<x_2 \\ x_1<x_3<x_2<x_4 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_f=1-4a>0\\ \Delta_g'=1-3a>0\\ f'\left(x_3\right).f'\left(x_4\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<\frac{1}{4}\\ \left(x_3^{\ 2}-x_3+a\right)\left(x_4^{\ 2}-x_4+a\right)<0\end{cases}.\ (*)$$

Lại có $\left(x_3^{\ 2}-x_3+a\right)\left(x_4^{\ 2}-x_4+a\right)=\left[g'\left(x_3\right)-\left(3x_3+2a\right)\right]\left[g'\left(x_4\right)-\left(3x_4+2a\right)\right]$

$=\left(3x_3+2a\right)\left(3x_4+2a\right)=9x_3.x_4+6a\left(x_3+x_4\right)+4a^2.$

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases}x_3+x_4=-2\\ x_3x_4=3a\end{cases}$.

Suy ra $\left(x_3^{\ 2}-x_3+a\right)\left(x_4^{\ 2}-x_4+a\right)=9.3a+6.\left(-2\right)a+4a^2=4a^2+15a.$

Do đó $\left(*\right)\Leftrightarrow\begin{cases}a<\frac{1}{4}\\ 4a^2+15a<0\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{15}{4}<a<0.$

Chọn C.

Cách trắc nghiệm. Ta thấy đáp án A & B chứa giá trị $a=0$, đáp án C & D không chứ

$a=0$.

Ta thử $a=0$, khi đó $f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị $x=0,\ x=1$;

$g\left(x\right)$ có hai điểm cực trị $x=0,\ x=-2$.

Do đó $a=0$ không thỏa mãn nên loại A & **B.**

Bây giờ ta chọn $a=-\frac{15}{4}$ thuộc đáp án D nhưng không thuộc đáp án C để thử.

Với $a=-\frac{15}{4}$ thì $f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị $x=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{5}{2}$;

$g\left(x\right)$ có hai điểm cực trị $x=-\frac{9}{2}$, $x=\frac{5}{2}$.

Do đó $a=-\frac{15}{4}$ không thỏa mãn nên loại **D.**

Câu 12: Tìm tất cả m sao cho điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-1$ nằm bên phải trục tung.

A. Không tồn tại m. **B.** $0<m<\frac{1}{3}$. **C.** $m<\frac{1}{3}$. **D.** $m<0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Để hàm số có cực tiểu, tức hàm số có hai cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $3x^2+2x+m=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Delta'=1-3m>0\Leftrightarrow m<\frac{1}{3}$.

Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{CĐ}$, x_{CT} là hoành độ hai điểm cực trị. Theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_{CĐ}+x_{CT}=-\frac{2}{3}<0 \ (2) \\ x_{CĐ}.x_{CT}=\frac{m}{3} \ (3) \end{cases}$, trong đó $x_{CĐ}<x_{CT}$ vì hệ số của x^3 lớn hơn 0.

Để cực tiểu của đồ thị hàm số nằm bên phải trục tung thì phải có: $x_{CT}>0$, kết hợp (2) và (3) suy ra (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow x_{CĐ}.x_{CT}=\frac{m}{3}<0\Leftrightarrow m<0$.

Câu 13: Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $\left[0;2017\right]$ để đồ thị hàm số $y=x^3-\left(2m+1\right)x^2+\left(3m+2\right)x-\left(m+2\right)$ có hai điểm cực trị A, B nằm về hai phía trục hoành?

A. 2014. **B.** 2015. **C.** 2013. **D.** 2012.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-\left(2m+1\right)x^2+\left(3m+2\right)x-\left(m+2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2-2mx+m+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2mx+m+2=0 \ (1) \end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành khi và chỉ khi (1) c hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ 1^2 - 2m.1 + m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1; m > 2 \\ m \neq 3 \end{cases}$.

Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [0;2017] \end{cases} \Rightarrow m \in \{4;5;6;...;2017\}$.

Câu 14: Với giá trị nào của m thì hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm s $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ nằm về hai phía so với trục hoành?

A. $m > 3$. **B.** $-1 < m < \sqrt{2}$. **C.** $m < 3$. **D.** $2 < m < 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + m$.

Hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu nên phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $\Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Gọi x_1, x_2 là điểm cực trị của hàm số và y_1, y_2 là các giá trị cực trị tương ứng.

Ta có: $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2 = y'.\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}m - 2\right)x + \frac{2}{3}m - 2$ nên $y_1 = k(x_1 + 1)$, $y_2 = k(x_2 + 1)$.

Yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow y_1.y_2 < 0 \Leftrightarrow k^2(x_1 + 1)(x_2 + 1) < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{m}{3} - 2 + 1 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Vậy $m < 3$ thỏa mãn bài toán.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàn số $y = x^3 - \frac{3m}{2}x^2 + m$ nằm khác phía với đường thẳng $y = x$.

A. $m > 0$. **B.** $m < 0$. **C.** $m \neq 0$. **D.** $0 < m \neq 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $y' = 3x^2 - 3mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m \end{array}\right.$.

Điều kiện để có hai cực trị là $m \neq 0$, khi đó hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;m)$, $B\left(m;m-\frac{1}{2}m^3\right)$. Hai điểm $A(0;m)$, $B\left(m;m-\frac{1}{2}m^3\right)$ nằm khác phía với đường thẳng $x-y=0$ $(0-m)\left(m-m+\frac{1}{2}m^3\right)<0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m^4>0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Câu 16: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-1\right)x$ có hai điểm cực trị A,B sao cho A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta thấy với mọi m hàm số luôn có hai cực trị.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=-\frac{2x}{3}+\frac{m\left(m^2-1\right)}{3}$.

Vì A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y=5x-9$ nên trung điểm AB thuộc đường thẳng $y=5x-9$. Do đó :

$$5\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-9=-\frac{2}{3}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{m\left(m^2-1\right)}{3} \Leftrightarrow 5\left(\frac{2m}{2}\right)-9=-\frac{2}{3}\left(\frac{2m}{2}\right)+\frac{m\left(m^2-1\right)}{3}$$

$$\Leftrightarrow m^3-18m+27=0$$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng 0.

Câu 17: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có hai điểm cực trị A,B nằm cùng một phía và cách đều đường thẳng $x+2y-1=0$. Tính tổng các phần tử S.

A. 0. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $y'=3x^2-6mx; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right. \Rightarrow A\left(0;4m^3\right), B\left(2m;0\right), \left(m\neq 0\right)$

Khi đó hệ số góc của đường thẳng $AB: k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-4m^3}{2m}=-2m^2$. Hệ số góc của $x+2y-1=0$ là $k_d=-\frac{1}{2}$. Theo giả thiết $k_{AB}=k_d \Leftrightarrow -2m^2=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$.

Thử lại $m=\frac{1}{2}\Rightarrow AB: y=-\frac{1}{2}(x-1)\equiv d$ (loại) ; $m=-\frac{1}{2}\Rightarrow AB: y=-\frac{1}{2}(x+1)//d$.

Vậy $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, tổng các phần tử S bằng $-\frac{1}{2}$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-2mx^2+m^3$ có hai cực tr
A và B sao cho góc $\widehat{AOB}=120^o$?

A. $m=\pm 2\sqrt[4]{\frac{27}{25}}$. **B.** $m=\pm 6\sqrt{\frac{3}{5}}$. **C.** $m=\pm 2\sqrt{\frac{3}{5}}$. **D.** $m=\pm\frac{12}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $y'=3x^2-4mx, y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{4m}{3}\end{array}\right.$.

Điều kiện để hàm số có hai cực trị là $m\neq 0$, khi đó tọa độ hai điểm cực trị l
$A(0;m^3), B\left(\frac{4m}{3};-\frac{5m^3}{27}\right)$ v

$$\cos\widehat{AOB}=\frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{OA.OA}=\frac{-\frac{5m^6}{27}}{|m^3|\sqrt{\left(\frac{4m}{3}\right)^2+\left(-\frac{5m^3}{27}\right)^2}}=-\frac{5m^2}{\sqrt{25m^4+1296}}$$

Có $\widehat{AOB}=120^o\Leftrightarrow -\frac{5m^2}{\sqrt{25m^4+1296}}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt[4]{\frac{27}{25}}$.

Câu 19: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm s
$y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+m$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB c
diện tích bằng 6. Hỏi trong S có tất cả bao nhiêu phần tử?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\ x=m+1\end{array}\right.$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}A(m-1;-2(m-1))\\ B(m+1;-2(m+1))\end{array}\right.$ là cá
điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Theo giả thiết, ta có: $S_{OAB}=2|m^2-1|=6\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^3$ có hai điểm cực trị tạo thành 1 tam giác OAB có diện tích bằng 48

A. $m=2$. **B.** $m=\pm 2$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=\pm 3$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$y'=3x^2-6mx=3x\left(x-2m\right), y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2m \end{cases}$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0.(1)$

Khi đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;3m^3\right);B\left(2m;-m^3\right)$

Ta có:

$\overrightarrow{OA}\left(0;3m^3\right)\Rightarrow OA=3\left|m^3\right|.$ (2)

Ta thấy $A\in Oy \Leftrightarrow OA\equiv Oy \Rightarrow d\left(B,OA\right)=d\left(B,Oy\right)=2\left|m\right|.$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $S_{OAB}=\frac{1}{2}.OA.d\left(B,OA\right)=3m^4$

Do đó: $S_{OAB}=48 \Leftrightarrow 3m^4 \Leftrightarrow 48 \Leftrightarrow m=\pm 2$ thỏa mãn (1)

Vậy $m=\pm 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Câu 21: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1 (O là gốc tọa độ).

A. $m=1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=\pm 1$ **D.** $m=3$

Hướng dẫn giải:

Ta có $y'=3x^2-6mx=3x\left(x-2m\right)$. Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì $m\neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;1)$ và $B(2m;-4m^3+1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm B lên trục tung, ta có $BH=\left|2m\right|$. Diện tích của tam giác OAB là $S=\frac{1}{2}BH.OA=\frac{1}{2}.\left|2m\right|$

Theo đề bài S=1 nên ta có $\frac{1}{2}.\left|2m\right|=1$ suy ra $m=\pm 1$. Vậy m=±1 là giá trị cần tìm.

Chọn C.

Câu 22: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm s $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(2m-1)x^2+(m^2-m)x-1$ có hai điểm cực trị A,B sao cho tam giác OAB c diện tích bằng 2. Hỏi S có bao nhiêu phần tử nguyên.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Hàm số có hai cực trị $A\left(m;\frac{2m^3-3m^2-6}{6}\right), B\left(m-1;\frac{2m^3-3m^2-5}{6}\right)$.

Vậy $S_{OAB}=\frac{1}{2}\left|m\left(\frac{2m^3-3m^2-5}{6}\right)-\left(m-1\left(\frac{2m^3-3m^2-6}{6}\right)\right)\right|$ $=\frac{1}{12}\left|(m-2)(2m^2+m+3)\right|=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m\approx-1,62\end{array}\right.$.

Câu 23: Cho $C(5;9)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm s $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$ có hai điểm cực trị A,B sao cho tam giác ABC cân tại C. Tín tổng các phần tử S.

A. 0. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $-\frac{15}{2}$. **D.** $\frac{15}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-1; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+1\end{array}\right.$.

Khi đó $I\left(m;\frac{m^3}{3}-m\right)$ là trung điểm AB và hệ số góc của đường thẳng AB là

$$k_{AB}=\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)=\frac{2}{3}\left(m^2-1-\frac{m^2}{3.\frac{1}{3}}\right)=-\frac{2}{3}.$$

Theo giả thiết $k_{IC}=\frac{y_C-y_I}{y_C-y_I}=\frac{9-\left(\frac{m^3}{3}-m\right)}{5-m}=-\frac{1}{k_{AB}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2m^3-15m-9=0$.

Vậy tổng các phần tử S bằng 0.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+m^3$ có hai điểm cực trị cùng với điểm $C\left(1;\frac{7}{8}\right)$ tạo thành một tam giác cân tại C.

A. $m=1$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $y'=3x^2-6mx$.

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $m\neq 0$, khi đó giả sử tọa độ hai điểm cực trị là

$$A\left(0;m^3\right),\ B\left(2m;-3m^3\right).$$

Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là $I\left(m;-m^3\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AI}=\left(m;-2m^3\right)$, $\overrightarrow{CI}=\left(m-1;-m^3-\frac{7}{8}\right)$.

Tam giác ABC cân tại C $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CI}=0 \Leftrightarrow m-1+2m^5+\frac{7}{4}m^2=0$.

$\Leftrightarrow (2m-1)\left(x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{2} \\ x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+x+1=0\ (2) \end{array}\right.$.

$(2) \Leftrightarrow x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{15}{16}x^2+\frac{1}{16}x^2+x+1=0$.

$\Leftrightarrow x^2\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{15}{16}x^2+2.\frac{\sqrt{15}}{4}x.\frac{2}{\sqrt{15}}+\frac{4}{15}+\frac{11}{15}\right)=0$.

$\Leftrightarrow x^2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}x+\frac{2}{\sqrt{15}}\right)^2+\frac{11}{15}=0\,(\text{VN})$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m đẻ hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có hai điểm cực trị A,B sao cho tam giác OAB vuông cân tại O.

A. $m=\pm\frac{1}{2}$. **B.** $m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $m=\pm\frac{1}{4}$. **D.** $m=\pm 1$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $y'=3x^2-6mx=3x\left(x-2m\right) \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

Tọa độ hai điểm cực trị là: $A\left(0;4m^3\right), B\left(2m;0\right)$. Với $m \neq 0$

Ta có $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow$ tam giác OAB vuông tại O

Để tam giác OAB cân tại $O \Leftrightarrow OA = OB$

$\Leftrightarrow \left|4m^3\right| = \left|2m\right| \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.(lưu ý $m \neq 0$ thì hàm số mới có hai điểm cực trị)

Câu 26: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3x$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC đều với $C\left(2;1\right)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $y' = 3mx^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{m}}\left(m > 0\right)$, khi đó $A\left(-\frac{1}{\sqrt{m}};\frac{2}{\sqrt{m}}\right)$, $B\left(\frac{1}{\sqrt{m}};-\frac{2}{\sqrt{m}}\right)$.

Khi đó gốc tọa độ là trung điểm AB, nên tam giác ABC đều trước tiên cần có $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB} = 2.\frac{2}{\sqrt{m}} + 1.\frac{-4}{\sqrt{m}} = 0$ (luôn đúng).

Mặt khác $OC = \frac{\sqrt{3}}{2}AB \Leftrightarrow \sqrt{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{m}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{m}}\right)^2} \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy, tổng tất cả giá trị các phần tử của S bằng 3.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + \frac{4}{27}m^3$ có hai điểm cực trị A, B cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có tâm đường tròn ngoại tiếp $I\left(1;2\right)$.

A. $0 < m < 12$. **B.** $m = 6$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 12$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $y' = 3x^2 - 2mx; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2m}{3} \end{array}\right.$

Điều kiện để có hai cực trị là $m \neq 0$. Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $A\left(0;\frac{4}{27}m^3\right), B\left(\frac{2m}{3};0\right)$

Thấy tam giác OAB là tam giác vuông tại O, do đó tâm đường tròn ngoại tiếp I là trung điểm cạnh AB. Vì vậy ta có $\begin{cases} \dfrac{m}{3}=1 \\ \dfrac{2m^3}{27}=2 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$.

Câu 28: Cho hàm số $y=(x-m)^3-3x+m^2\,(1)$. Gọi M là điểm cực đại của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị m thích hợp đồng thời là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị khác của m. Số điểm M thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có $y'=3(x-m)^2-3, y''=6(x-m)$

Suy ra $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+1 \end{array}\right.$.

Vì $x=x_1=m-1, y''(m-1)<0$ nên hàm số đạt cực đại $x=x_1=m-1$ tại và giá trị cực đại là $y_1=m^2-3m+2$.

Tương tự, ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x=x_2=m+1$ và giá trị cực tiểu là $y_2=m^2-3m-2$.

Ta giả sử điểm M là điểm cực đạ của đồ thị hàm số ứng với giá trị m_1 và là điểm cực tiểu ứng của đồ thị hàm số ứng với với giá trị m_2.

Từ YCBT suy ra hệ phương trình $\begin{cases} m_1-1=m_2+1 \\ m_1^2-3m_1+2=m_2^2-3m_2-2 \end{cases}$

Giải hệ ta tìm được nghiệm $m_1=\dfrac{3}{2}, m_2=-\dfrac{1}{2}$ và suy ra tồn tại duy nhất một điêm $M\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$ thỏa bài toán.

Chọn A.

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O.

A. $m=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=\pm\dfrac{1}{3}$. **C.** $m=\pm\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y'=-3x^2+6x+3(m^2-1)=-3(x^2-2x-m^2+1)$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có: $\Delta'=m^2>0\Leftrightarrow m\neq 0$. (1)

Khi đó: $y'=0$ có các nghiệm là: $x=1\pm m\Rightarrow$ tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số l
$A\left(1-m;-2-2m^3\right)$ và $B\left(1+m;-2+2m^3\right)$.

Ta có:

$\overrightarrow{OA}\left(1-m;-2-2m^3\right)\Rightarrow OA^2=\left(1-m\right)^2+4\left(1+m^3\right)^2$;

$\overrightarrow{OB}\left(1+m;-2+2m^3\right)\Rightarrow OB^2=\left(1+m\right)^2+4\left(1-m^3\right)^2$.

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi:

$OA=OB\Leftrightarrow OA^2=OB^2$

$\Leftrightarrow\left(1-m\right)^2+4\left(1+m^3\right)^2=\left(1+m\right)^2+4\left(1-m^3\right)^2$

$\Leftrightarrow -4m+16m^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\pm\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m=\pm\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn C.

Câu 30: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm s
$y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$ có hai điểm cực trị A,B sao cho $\dfrac{OA}{OB}=\sqrt{2}$. Tính tổn
tất cả các phần tử của S.

A. -6. **B.** 6. **C.** -3. **D.** 0.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right);y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\ x=m+1\end{array}\right.$.

Các điểm cực trị có tọa độ là $\left(m-1;-2\left(m-1\right)\right);\left(m+1;-2\left(m+1\right)\right)$

Theo yêu cầu bài toán ta có $\left[\begin{array}{l}\left|\dfrac{m-1}{m+1}\right|=\sqrt{2}\\ \left|\dfrac{m+1}{m-1}\right|=\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\pm 2\sqrt{2}\\ m=-3\pm 2\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng 0.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3m - 3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20$ (Trong đó O là gốc tọa độ).

A. $m = -1$. **B.** $m = 1$.

C. $m = -1$ hoặc $m = -\frac{17}{11}$. **D.** $m = 1$ hoặc $m = -\frac{17}{11}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y' = m(3x^2 - 6x)$

Với mọi $m \neq 0$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3m - 3 \\ x = 2 \Rightarrow y = -m - 3 \end{array}\right.$. Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Giả sử $A(0; 3m - 3); B(2; -m - 3)$.

Ta có: $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20 \Leftrightarrow 11m^2 + 6m - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\frac{17}{11} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\frac{17}{11} \end{array}\right.$.

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - 4my + 5m^2 - 1 = 0$.

A. $1 < m < \frac{5}{3}$. **B.** $-1 < m < \frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{5} < m < 1$. **D.** $-\frac{3}{5} < m < 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Dễ có $A(0; 2)$, $B(2; -2)$ và (C_m) có tâm $I(m; 2m)$, $R = 1$.

Cách 1: Thay tọa độ vào phương trình (C_m) lấy tích âm.

$(4 - 8m + 5m^2 - 1)(8 - 4m + 8m + 5m^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 8m + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < m < 1$.

Cách 2: Ta có $IB = \sqrt{5m^2 + 4m + 7} > R = 1$. Vậy để thỏa yêu cầu bài toán thì $IA < R \Leftrightarrow \sqrt{5m^2 - 8m + 4} < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < m < 1$.

Câu 33: Cho (C_m) là đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx + 1$ (với $m < 0$ là tham số thực). Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m). Đường thẳng d cắt đường tròn tâm $I(-1; 0)$ bán kính $R=3$ tại hai điểm phân biệt A,B. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao ch diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất. Hỏi S có tất cả bao nhiêu phần tử.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $y'=3x^2+3m$

Để hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow m<0$.

Ta có $d: y=2mx+1$.

Do đó $x=d\left(I,d\right)=\dfrac{\left|-2m+1\right|}{\sqrt{4m^2+1}}\le\dfrac{\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(\left(-2m\right)^2+1^2\right)}}{\sqrt{4m^2+1}}=\sqrt{2}, AB=2\sqrt{R^2-x^2}=2\sqrt{9-x^2}$.

Vậy $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}AB.x=x\sqrt{9-x^2}\le\max\limits_{\left(0;\sqrt{2}\right]}x\sqrt{9-x^2}=y\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{14}$.

Dấu bằng đạt tại $\dfrac{-2m}{1}=\dfrac{1}{1}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn A.

Câu 34: Với $m\in\left[-1;1\right]$, đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$ có hai điểm cực tr A, B và tam giác OAB có bán kính đường tròn nội tiếp có giá trị lớn nhất là M_0, đạt tạ $m=m_0$. Tính $P=M_0+m_0$.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+1\end{array}\right.$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}A\left(m-1;-2\left(m-1\right)\right)\\B\left(m+1;-2\left(m+1\right)\right)\end{array}\right.$ là cá điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Do đó theo yêu cầu bài toán, ta có: $r_{OAB}=\dfrac{S}{p}=\dfrac{4\left|m^2-1\right|}{\sqrt{5\left(m-1\right)^2}+\sqrt{5\left(m+1\right)^2}+2\sqrt{5}}\le\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\forall m\in\left[-1;1\right]$.(AM-MG)

Dấu bằng xảy ra tại $m=m_0=0$, $M_0=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow P=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ c cực đại, cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

A. $m=4$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Hướng dẫn giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$$y'=-3x^2+6mx; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi phương trình y'=0 có hai nghiệm phân biệt, điều này tương đương với $m\neq 0$.

Hai điểm cực trị là $A(0;-3m-1); B\left(2m;4m^3-3m-1\right)$

Trung điểm I của đoạn thawngt Ab là $I\left(m;2m^3-3m-1\right)$

Vectơ $\overrightarrow{AB}=\left(2m;4m^3\right)$; một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(8;-1)$.

Hai điểm cực đại, cực tiểu A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng d khi và chỉ khi:

$$\left\{\begin{array}{l} I\in d \\ AB\perp d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m+8\left(2m^3-3m-1\right)-74=0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=2\left(t/m\right).$$

Chọn C.

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m^2x+m$ đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$.

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Điều kiện có cực đại và cực tiểu: $b^2-3ac>0 \Leftrightarrow 9-3m^2>0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

Khi đó phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị đó là

$$y=\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}=\frac{2}{3}\left(m^2-3\right)x+m+\frac{m^2}{3}.$$

Gọi hai điểm cực trị là $A\left(x_1;\frac{2}{3}\left(m^2-3\right)x_1+m+\frac{m^2}{3}\right), B\left(x_2;\frac{2}{3}\left(m^2-3\right)x_2+m+\frac{m^2}{3}\right)$

Trung điểm I của AB là $I\left(1;m^2+m-2\right)$

A,B đối xứng nhau qua đường thẳng Δ $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} AB\perp\Delta \\ I\in \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}\left(m^2-3\right).\frac{1}{2}=-1 \\ m^2+m-2=\frac{1}{2}.1-\frac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow m=0$

P/S: có thể thực hiện bằng cách thử đáp án để chọn được kết quả.

Câu 37: Với mọi $m>1$, đồ thị của hàm số $y=mx^3-3mx^2+(2m+1)x+3-m$ luôn có hai điểm cực trị và gọi Δ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đó. Tìm điểm cố định K mà Δ đi qua.

A. $K\left(\frac{1}{2};-3\right)$. **B.** $K\left(3;-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $K\left(-\frac{1}{2};3\right)$. **D.** $K\left(-3;\frac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $\Delta:\ y=\frac{2}{3}\left(2m+1-\frac{9m^2}{3m}\right)x+3-m-\frac{-3m(2m+1)}{9m}$

$\Leftrightarrow \Delta: 3y=2(1-m)x+10-m$. Gọi $K(x_o;y_o)$ là điểm cố định mà Δ đi qua, ta có

$3y_o=2(1-m)x_o+10-m, \forall m>1 \Leftrightarrow -m(2x_o+1)+2x_o+10-3y_o=0, \forall m>1$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x_o+1=0\\2x_o+10-3y_o=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_o=-\frac{1}{2}\\y_o=3\end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{1}{2};3\right)$.

Câu 38: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx$ có hai điểm cực trị A,B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng: $y=x+2$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=3\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-3\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

[Phương pháp tự luận]

Ta có: $y=6x^2-6(m+1)x+6m$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=m\end{array}\right.$

Điều kiện để hàm số có 2 điểm cực trị là: $m\neq 1$

Ta có: $A(1;3m-1)$ $B(m;-m^3+3m^2)$

Hệ số góc đt AB là: $k=-(m-1)^2$

Đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $k=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2: $y-\dfrac{y'.y''}{18a}=2x^3-3(y+1)x^2+6yx-\dfrac{\left(6x^2-6(y+1)x+6y\right)\left(12x-6(y+1)\right)}{36}$

Bước 3: Cacl $x=i$, $y=1000$

Kết quả: $1001000-9980001.i$. Hay: $y=1001000-9980001.x$

Vậy phương trình đt qua 2 điểm cực trị AB là: $y=m^2-m-(m-1)^2x$

Có đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $\Leftrightarrow (m-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3+mx^2+7x+3$ vuông góc với đường thẳng $y=\dfrac{9}{8}x+1$

A. $m=\pm 5$. **B.** $m=\pm 6$. **C.** $m=\pm 12$. **D.** $m=\pm 10$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Điều kiện $b^2-3ac>0 \Leftrightarrow m^2-21>0$. Khi đó hệ số góc của đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $k_{AB}=\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)=\dfrac{2}{3}\left(7-\dfrac{m^2}{3}\right)=\dfrac{2\left(21-m^2\right)}{9}$. Theo giả thiết, ta có $k_{AB}.\dfrac{9}{8}=-1 \Leftrightarrow \dfrac{2\left(21-m^2\right)}{9}.\dfrac{9}{8}=-1 \Leftrightarrow m=\pm 5$.

Câu 40: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^3-3x^2-mx+2$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng có phương trình: $y=x-1\ (d)$.

A. $m=0$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\dfrac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

[Phương pháp trắc nghiệm]

$y'=3x^2-6x-m$

Hàm số có 2 cực trị $m>-3$, gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $y'=0$, ta có: $x_1+x_2=2$

Bấm máy tính:

$$x^3-3x^2-mx+2-\left(3x^2-6x-m\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$$

$$-\frac{994}{3}-\frac{2006}{3}i=-\frac{1000-6}{3}-\frac{2000+6}{3}i=-\frac{2m+6}{3}x-\frac{m-6}{3}$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A\left(x_1;-\frac{2m+6}{3}x_1-\frac{m-6}{3}\right);\ B\left(x_2;-\frac{2m+6}{3}x_2-\frac{m-6}{3}\right)$$

Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I\left(1;-m\right)$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $y=-\frac{2m+6}{3}x-\frac{m-6}{3}\ \left(\Delta\right)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta//d\ or\ \Delta\equiv d\\ I\in d\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{2m+6}{3}=1\\ -m=1-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\frac{9}{2}\\ m=0\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện thì $m=0$.

Câu 41: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ th hàm số $y=x^3-3\left(m-1\right)x^2+\left(2m^2-3m+2\right)x-m^2+m$ có hệ số góc bằng $-\frac{2}{3}$.

A. $m=-1$. **B.** $m=4$. **C.** $m\in\left\{0;3\right\}$. **D.** $m\in\left\{-1;4\right\}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Điều kiện có hai cực trị là $b^2-3ac>0\Leftrightarrow 9\left(m-1\right)^2-3\left(2m^2-3m+2\right)>0\Leftrightarrow m^2-3m+1>0$

Khi đó hệ số góc của đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$k=\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)=-\frac{2\left(m^2-3m+1\right)}{3}$$

Theo giả thiết ta có $-\frac{2\left(m^2-3m+1\right)}{3}=-\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=3\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Câu 42: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ th hàm số $y=x^3-3mx^2+6m^3$ tạo với trục hoành góc 45^o.

A. $m=\pm1$. **B.** $m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $m=-1$. **D.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right. \Rightarrow m \neq 0$; $A\left(0;6m^3\right)$, $B\left(2m;2m^3\right)$.

Hệ số góc của đường thẳng AB là $k = \dfrac{2m^3 - 6m^3}{2m - 0} = -2m^2$.

Vì AB tạo với trục hoành góc 45^{o} nên $\left|k\right| = 1 \Rightarrow m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

III - HÀM TRÙNG PHƯƠNG

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1 - Cực trị của hàm số

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

□ Với điều kiện $ab < 0$ hàm số có 3 cực trị.

□ Khi hàm số có 3 điểm cực trị thì 3 điểm cực trị là $0; -\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

□ Tọa độ 3 điểm cực trị tương ứng của đồ thị hàm sô là: $\begin{cases} A(0;c) \\ B\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; c - \frac{b^2}{4a}\right); C\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; c - \frac{b^2}{4a}\right) \end{cases}$

Nhận xét: tam giác ABC cân tại A, có $A \in Oy$; $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4 - 8ab}{16a^2}}$; $BC = \sqrt{\frac{-b}{2a}}$

□ Các điểm cực trị đồ thị hàm số thuộc các trục tọa độ $\Leftrightarrow b^2 = 4ac$

□ Điểm $(0; y_0)$ là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow 3y_0 = 3c - \frac{b^2}{2a}$.

□ Điểm $(0; y_0)$ là trực tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow y_0 - c = -\frac{8a + b^3}{4ab}$.

□ Điểm $(0; y_0)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow y_0 - c = \frac{8a - b^3}{4ab}$.

Do đó $\cos\widehat{BAC} = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} (*)$ và $S_{\Delta ABC} = \sqrt{\frac{-b^5}{32a^3}}$

□ Tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = 0 \Leftrightarrow b^3 = -8a$.

□ Tam giác ABC đều $\Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^3 = -24a$.

□ Tam giác ABC có một góc bằng $120°$ $\Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3b^3 = -8a$

Lưu ý, chỉ cần nhớ công thức $(*)$ để suy ra 3 trường hợp đặc biệt trên.

□ Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \left|\frac{b^3 - 8a}{8ab}\right|$.

□ Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = \dfrac{b^2}{|a|\left(4+\sqrt{16-\dfrac{2b^3}{a}}\right)}$.

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$.

2 - Giao điểm với trục hoành

Với $ab < 0; ac > 0; b^2 - 4ac > 0$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Khi đó:

□ Hoành độ 4 giao điểm lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow 9b^2 = 100ac$.

□ Cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt, tạo thành 3 đoạn thẳng có độ dài bằng nhau $\Leftrightarrow 9b^2 = 100ac$

□ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục hoành có phần phía trên Ox và phần phía dưới Ox bằng nhau $5b^2 = 36ac$.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 43: Cho hàm số $y = 3x^4 - 6x^2 + 2$ có đồ thị (C). Gọi A là điểm cực đại của (C); B, C la hai điểm cực tiểu của (C). Gọi d là đưởng thẳng qua A; S la tổng khoảng cách từ B, C đến d. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của S.

A. $4+\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **B.** $6+\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $4+4\sqrt{5}$. **D.** $2+\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $A(0;2)$, $B(-1;-1)$, $C(1;-1)$. Khi đó $d: y = kx + 2$ và $S = \dfrac{|k+3|+|3-k|}{\sqrt{k^2+1}}$.

Dễ có $\max S = 6$, $\min S = \dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + \dfrac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m = 0$. **B.** $-1 \le m < 0$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -1$.

Hướng dẫn giải:

Ta xét hai trường hợp sau đây:

TH1: $m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$. khi đó: $y = x^2 + \dfrac{3}{2} \Rightarrow$ Hàm số chỉ có cực tiểu $(x=0)$ mà không có cực đại $\Rightarrow m = -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

TH2: $m=1\neq 0\Leftrightarrow m\neq -1$. Khi đó hàm số đã cho là hàm bậc 4 c

$$y'=4(m+1)x^3-2mx=4(m+1)x\left[x^2-\frac{m}{2(m+1)}\right]$$

Hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại khi và chỉ khi y'=0 có đúng 1 nghiệm và đổ dấu từ âm sang dương khi x đi qua nghiệm này.

Nghĩa là: $\begin{cases}4(m+1)>0\\ \dfrac{m}{2(m+1)}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<0.$

Kết hợp với những giá trị m tìm được, ta có: $-1\leq m<0$.

Chọn B.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m$ c ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA=BC$; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộ trục tung, B và C là hia điểm cực trị còn lại.

A. $m=0$. **B.** $m=2-\sqrt{8}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=2\pm\sqrt{8}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y'=4x^3-4(m+1)x=4x\left(x^2-(m+1)\right)$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi y'=0 có 3 nghiệm phân biệt.

$h(x)=x^2-(m+1)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m+1>0\Leftrightarrow m>-1$. (*).

Khi đó, ta có $y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=-\sqrt{m+1}\\x=\sqrt{m+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(0;m)\\B\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)\\C\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)\end{cases}$

Vì vai trò của B và C là tương tự nhau nên ta chọn

$B\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right),C\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)$

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(0;m)\Rightarrow OA=|m|;\overrightarrow{BC}\left(2\sqrt{m+1};0\right)\Rightarrow BC=2\sqrt{m+1}$

Do đó:

$OA=BC\Leftrightarrow|m|=2\sqrt{m+1}\Leftrightarrow m^2-4m-4=0,(\Delta'=8)$

$\Leftrightarrow m=2\pm\sqrt{8}$ (thỏa mãn (*))

Vậy $m=2\pm\sqrt{8}$ thỏa ycbt.

Chọn D.

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^4 - m$ có ba điểm cực trị đều thuộc các trục tọa độ.

A. $m = 1$.   **B.** $m = 2$.   **C.** $m = \frac{1}{2}$.   **D.** $m = 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Điều kiện để có ba điểm cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow -2m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Câu 47: Khi đó ba điểm cực trị đều thuộc các trục tọa độ $\Leftrightarrow c - \frac{b^2}{4a} = 0 \Leftrightarrow 2m^4 - m - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Cho biết đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị A, B, C. Tìm tung độ y_G của điểm G là trọng tâm của tam giác ABC.

A. $y_G = c - \frac{b^2}{6a}$.   **B.** $y_G = c + \frac{b^2}{12a}$.   **C.** $y_G = c + \frac{b^2}{6a}$.   **D.** $y_G = c - \frac{b^2}{12a}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Áp dụng công thức giải nhanh, dễ dàng ta có đáp án **A.**

Câu 48: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x^4}{4} - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ O.

A. $m = \frac{1}{2}$.   **B.** $m = \frac{1}{3}$.   **C.** $m = \frac{1}{4}$.   **D.** $m = \frac{1}{5}$.

Hướng dẫn giải:

$y' = x^3 - 2(3m+1)x = x\left(x^2 - (6m+2)\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - (6m+2)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 6m + 2\,(*) \end{array}\right.$$

Để hàm số có 3 cực trị thì pt y'=0 có 3 nghiệm phân biệt nên pt (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. ĐK tương đương $6m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$.

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số $A(0; 2m+2)$; $B\left(\sqrt{6m+2}; -9m^2 - 4m + 1\right)$;

$C\left(-\sqrt{6m+2}; -9m^2 - 4m + 1\right)$.

Theo công thức trọng tâm ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_O \\ y_A + y_B + y_C = 3y_O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0\left(t/\text{m}\right) \\ -18m^2 - 6m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{3} \\ m = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Với m=1/3 thỏa ycbt.

Chọn B.

Câu 49: Điều kiên đầy đủ của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m - 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh một tam giác có trực tâm $H\left(0;1\right)$ là?

A. $m = 1$. **B.** $m = 0$.

C. $1 - m^2\left(m^4 + 2 - 2m\right) = 0$. **D.** $1 + m^2\left(m^4 + 2 - 2m\right) = 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Điều kiện để hàm số có ba cực trị $-m^2 < 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Tọa độ ba điểm cực trị là $A\left(0; 2m - 1\right), B\left(-m; 2m - 1 - m^4\right), C\left(m; 2m - 1 - m^4\right)$.

Ta có $AH \perp BC$ do đó để tam giác ABC nhận H là trực tâm khi và chỉ khi $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$.

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{BH} = \left(m; m^4 + 2 - 2m\right) \\ \overrightarrow{AC} = \left(m; -m^4\right) // \left(1; -m^3\right) \end{cases} \Rightarrow m - m^3\left(m^4 + 2 - 2m\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - m^2\left(m^4 + 2 - 2m\right) = 0\left(m \neq 0\right).$$

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2\left(m+1\right)x^2 + 3m + 2$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $m = 0$. **B.** $m = -\dfrac{1}{2}$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Điều kiện để có ba điểm cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow -2\left(m+1\right) < 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Theo giả thiết ta có: $b^3 = -8a \Leftrightarrow -8\left(m+1\right)^3 = -8 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 51: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2\left(m+1\right)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

A. $m = 0$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 1$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y'=4x^3-4(m+1)x=4x\underbrace{\left[x^2-(m+1)\right]}_{t(x)}$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt khi đó phương trình $t(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 nên:

$m+1>0\Rightarrow m>-1$. (*)

Khi đó, ta có: $y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=-\sqrt{m+1}\\x=\sqrt{m+1}\end{cases}$

Suy ra các điểm cực trị của đồ thi hàm số là $A(0;m^2),B\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right),C\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right)$

Ta thấy $A\in Oy$, B và C đối xứng nhau qua Oy nên tam giác ABC cân tại Ta có:

$\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{m+1};-(m+1)^2\right),\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{m+1};-(m+1)^2\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(m+1)^4-(m+1)$

Ta giác ABC vuông kh và chỉ khi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow(m+1)^4-(m+1)=0\Leftrightarrow(m+1)\left[(m+1)^3-1\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+1=0\\m+1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=0\end{array}\right.$

Kết hợp với ĐK (*) ta có m=0.

Chọn A.

Câu 52: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

A. $m=\sqrt[3]{3}$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\sqrt[3]{2}$. **D.** $m=3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Điều kiện có 3 cực trị là $ab<0\Leftrightarrow1.(-2m)<0\Leftrightarrow m>0$

Khi đó tam giác ΔABC đều $\Leftrightarrow b^3=-24a\Leftrightarrow(-2m)^3=-24.1\Leftrightarrow m=\sqrt[3]{3}$.

Câu 53: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^2\left(x^2+2m-3\right)-m-1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh một tam giác đều.

A. $m=-2\sqrt[3]{3}$. **B.** $m=\dfrac{3}{2}-2\sqrt[3]{3}$.

C. $m=\sqrt[3]{3}$. **D.** $m=-\sqrt[3]{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Điều kiện có ba cực trị là $ab<0\Leftrightarrow 1.(2m-3)<0\Leftrightarrow m<\frac{3}{2}$.

Khi đó ba điểm cực trị là ba đỉnh một tam giác đều khi và chỉ khi

$$b^3=-24a\Leftrightarrow (2m-3)^3=-24.1\Leftrightarrow \mathrm{m}=\frac{3}{2}-\sqrt[3]{3}.$$

Câu 54: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-4(m-1)x^2+2m-1$ c ba điểm cực trị là ba đỉnh một tam giác có một góc bằng 120^o?

A. $m=1+\frac{1}{\sqrt[3]{24}}$. **B.** $m=1+\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$. **C.** $m=1+\frac{1}{\sqrt[3]{48}}$. **D.** $m=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Điều kiện để hàm số có ba cực trị $m>1$.

Tam giác ABC cân tại A với

$$\cos A=\cos 120^o=\frac{b^3+8a}{b^3-8a}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 3b^3=-8a\Leftrightarrow 3\left[-4(m-1)\right]^3=-8\Leftrightarrow m=1+\frac{1}{\sqrt[3]{24}}.$$

Câu 55: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+mx^2+m-m^4$ có b điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng $120°$.

A. $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $m=-\sqrt[3]{3}$. **C.** $m=-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $m=-\frac{4}{\sqrt[3]{3}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Điều kiện để có 3 cực trị $ab<0\Leftrightarrow m<0$

Khi đó tam giác tạo thành từ ba điểm cực trị có một góc bằng $120°$ ứng vớ $3b^3=-8a\Leftrightarrow 3m^3=-8\Leftrightarrow m=-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+(3m+1)x^2-3$ có b điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ độ dài cạnh bên.

A. $m=-\frac{5}{3}$. **B.** $-\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $y' = 4x^3 + 2(3m+1)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{3m+1}{2} \end{array}\right.$. Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow -\dfrac{3m+1}{2} > 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{3}$. Khi đó $A(0;-3)$, $B\left(\sqrt{-\dfrac{3m+1}{2}};\dfrac{-9m^2-6m-13}{4}\right)$, $C\left(-\sqrt{-\dfrac{3m+1}{2}};\dfrac{-9m^2-6m-13}{4}\right)$. Tam giác ABC luôn cân tại A nên cạnh đáy $BC = 2\sqrt{-\dfrac{3m+1}{2}}$, cạnh bên $AB = \sqrt{\dfrac{-3m-1}{2} + \left(\dfrac{-9m^2-6m-1}{4}\right)^2}$.

Theo yêu cầu bài toán, ta có : $BC = \dfrac{2}{3}AB$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{-\dfrac{3m+1}{2}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{-3m-1}{2} + \left(\dfrac{-9m^2-6m-1}{4}\right)^2} \Rightarrow$

Câu 57: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 + mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m = -1$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Điều kiện để có 3 cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m < 0$

Theo giả thiết bài toán, ta có:

$b^5 = -32a^3S_0^2 \Leftrightarrow m^5 = -32.1^3.1^2 \Leftrightarrow m = -2$.

Câu 58: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $m < 1$. **B.** $0 < m < 1$. **C.** $0 < m < \sqrt[3]{4}$. **D.** $m > 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$. Để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị thì $m > 0$.

Khi đó $A(0;0)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2\right)$, $C\left(\sqrt{m};-m^2\right)$.

$S_{ABC} = m^2\sqrt{m} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Câu 59: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4.

A. $m=\sqrt[5]{16}$. **B.** $m=\sqrt[5]{17}$. **C.** $m=\sqrt[5]{18}$. **D.** $m=\sqrt[5]{19}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m\,(*) \end{array}\right.$$

Để hàm số có 3 cực trị thì phương trình y'=0 có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình (*) c
2 nghiệm phân biệt khác 0. Điều kiện tương đương m>0

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số
$A\left(0;m^4+2m\right);B\left(\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right);C\left(-\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right)$

Gọi $\left(0;m^4-m^2+2m\right)$ là trung điểm BC.

$$AH=\sqrt{\left(-m^2\right)^2}=m^2, BC=\sqrt{\left(2\sqrt{m}\right)^2}=2\sqrt{m}$$

Vì ba điểm cực trị luôn tạo thành 1 tam giác cân tại đỉnh A,

nên $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC\Leftrightarrow \frac{1}{2}m^2 2\sqrt{m}=4\Leftrightarrow m^5=16\Leftrightarrow m=\sqrt[5]{16}$

vậy với $m=\sqrt[5]{16}$ thỏa mãn yêu cầu toán.

Chọn A

Câu 60: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có 3 điển
cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m=1$.

Hướng dẫn giải:

$$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$$

$$y'=0\Leftrightarrow x\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m\,(*) \end{array}\right.$$

Để hàm số có 3 cực trị thì pt y'=0 có 3 nghiệm phân biệt nên pt (*) có 2 nghiệm phân biệ
khác 0. ĐK tương đương $m>0$.

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số: $A(0;1),B\left(\sqrt{m};3m^2+1\right),C\left(-\sqrt{m};3m^2+1\right)$

$$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{m};3m^2\right),\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{m};3m^2\right)$$

Vì 3 điểm cực trị của hàm trùng phương trên luôn tạo thành 1 tam giác cân tại A, nên tar
giác ABC vuông tại A.

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-m+9m^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}\end{array}\right.$. So với ĐK suy ra $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$ thỏa ycbt.

Chọn C.

Câu 61: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-m$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng 120^0

A. $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ **B.** $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ **C.** $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ **D.** $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$.

Hướng dẫn giải:

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$

$y'=0\Leftrightarrow x\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\left(*\right)\end{array}\right.$

Để hàm số có 3 cực trị thì pt y’=0 có 3 nghiệm phân biệt nên pt (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. ĐK tương đương $m>0$.

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số: $A\left(0;m^2-m\right),B\left(\sqrt{m};-m\right),C\left(-\sqrt{m};-m\right)$

$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{m};-m^2\right),\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{m};-m^2\right)$

Theo đề bài ta có:

$$cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-m+m^4}{\sqrt{m^4+m}.\sqrt{m^4+m}}=\frac{m^3-1}{m^3+1}=cos120^0$$

$$\Leftrightarrow\frac{m^3-1}{m^3+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 3m^3=1\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

Vậy với $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ thỏa ycbt.

Câu 62: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2++2m+m^4$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

A. $m=\sqrt[3]{3}$. **B.** $m=\sqrt[3]{9}$ **C.** $m=\sqrt[3]{13}$ **D.** $m=\sqrt[3]{14}$

Hướng dẫn giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$

$y'=0\Leftrightarrow x\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\left(*\right)\end{array}\right.$

Hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qu các nghiệm đó $\Leftrightarrow$ pt (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m>0$.

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=m^4+2m \\ x=\pm\sqrt{m} \Rightarrow y=m^4-m^2+2m \end{array}\right.$

Đò thị hàm số có một điểm cực đại là $A\left(0;m^4+2m\right)$ và hai điểm cực tiểu là

$B\left(-\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right),C\left(\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right)$

Các điểm A, B, C lập thành 1 tam giac đều $\Leftrightarrow \begin{cases} AB=AC \\ AB=BC \end{cases}$

$\Leftrightarrow AB^2=BC^2 \Leftrightarrow m+m^4=4m \Leftrightarrow m\left(m^3-3\right)=0$

Vậy $m=\sqrt[3]{3}$ (m>0).

Chọn A.

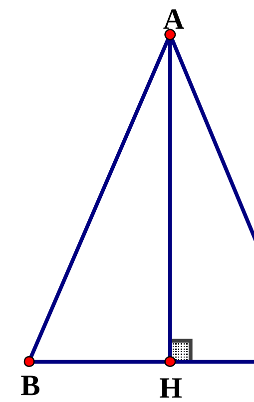
Câu 63: Cho biết đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ \left(a\neq 0\right)$ có ba điểm cực trị. Tìm bán kính R củ đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị đó.

A. $R=\frac{1}{8}\left|\frac{b^2}{a}-\frac{8}{b}\right|$ **B.** $R=\frac{1}{4}\left|\frac{b^2}{a}+\frac{8}{b}\right|$

C. $R=\frac{1}{8}\left|\frac{b^2}{a}+\frac{8}{b}\right|$ **D.** $R=\frac{1}{4}\left|\frac{b^2}{a}-\frac{8}{b}\right|$

Hướng dẫn giải:

Chọn A



Gọi A là điểm cực trị thuộc Oy và H là hình chiếu vuông góc của A lên BC.

Toạ độ ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;c\right)$, $B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}};\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, $C\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}};\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

Ta có $AB=\frac{\sqrt{b^4-8ab}}{|4a|}$, $BC=2\sqrt{\frac{-b}{2a}}$, $AH=\frac{b^2}{|4a|}$.

ΔABC có $\sin C=\frac{AH}{AC}=\frac{b^2}{\sqrt{b^4-8ab}}$.

Theo định lí sin, ta có $R=\frac{AB}{2\sin C}=\frac{b^4-8ab}{8|a|b^2}(*)$.

Do hàm số có ba cực trị nên $ab<0$. Do đó $(*)\Leftrightarrow R=\frac{1}{8}\left|\frac{b^4-8ab}{ab^2}\right|=\frac{1}{8}\left|\frac{b^2}{a}-\frac{8}{b}\right|$.

Câu 64: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

A. $m = 1$. **B.** $m = 2$.
C. $m = -1$. **D.** $m = -2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Điều kiện có ba cực trị là $ab < 0 \Leftrightarrow 1.(-2m) < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó

$$R = \frac{1}{8}\left|\frac{b^2}{a} - \frac{8}{b}\right| = \frac{1}{8}\left|\frac{(-2m)^2}{1} - \frac{8}{-2m}\right| = \frac{1}{2}\left|m^2 + m\right| = 1 \Leftrightarrow m = 1 > 0.$$

Câu 65: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - m^3 + m$ có hai điểm cực trị cùng với điểm $I(1;1)$ tạo thành một tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính $R = \sqrt{5}$.

A. $m \in \left\{-\frac{3}{5};1\right\}$. **B.** $m \in \left\{-1;\frac{3}{5}\right\}$.

C. $m \in \left\{\frac{3}{5};1\right\}$. **D.** $m \in \left\{-1;-\frac{3}{5}\right\}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3\left(m^2 - 1\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{array}\right.$.

Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $A(m-1;-2\text{m}+2)$, $B(m+1;-2\text{m}-2)$.

Ta có $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

Suy ra $\sin\widehat{BIA} = \frac{AB}{2R} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 \Rightarrow IA \perp IB$.

Tính được $\overrightarrow{IA} = (m-2;-2m+1)$, $\overrightarrow{IB} = (m;-2m-3)$.

Vậy ta có phương trình

$$m(m-2) + (-2m+1)(-2m-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \frac{3}{5} \end{array}\right..$$

Câu 66: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác bán kính đường tròn nội tiếp bằng $\sqrt{2} - 1$.

A. $m = 1$. **B.** $m = 2\sqrt{2} - 1$. **C.** $m = \sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2} - 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$. Để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị thì $m > 0$.

Khi đó $A(0;0)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2\right)$, $C\left(\sqrt{m};-m^2\right)$.

$S_{ABC} = m^2\sqrt{m}$ và $p = \dfrac{2\sqrt{m+m^4} + 2\sqrt{m}}{2} = \sqrt{m+m^4} + \sqrt{m}$.

Lại có $r_{ABC} = \dfrac{S}{p} = \dfrac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4} + \sqrt{m}} = \dfrac{\sqrt{m^3+1} - 1}{m} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow m = 1\,(m > 0)$.

Câu 67: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm s $y = mx^4 - 2(m+1)x^2 - 1$ có ba điểm cực trị A, B, C với A thuộc Oy và thoả mã $OA = BC$.

A. $m = \dfrac{3}{4}$ **B.** $m = -\dfrac{4}{3}$ **C.** $m = \dfrac{-3}{4}$ **D.** $m = \dfrac{4}{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow -2m(m+1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right.$

Khi đó $OA = BC \Leftrightarrow |c| = 2\sqrt{\dfrac{-b}{2a}} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{m+1}{m}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{m} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\dfrac{4}{3}$.

Câu 68: Cho biết đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị A, B, C với A thuộc Oy và thoả mãn $OB = AC$. Tìm hệ thức đúng trong các hệ thức sau

A. $b^2 = -2ac$ **B.** $b^2 = 4ac$ **C.** $b^2 = 2ac$ **D.** $b = -4ac$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Ta có $OB^2 = \dfrac{-b}{2a} + \dfrac{\left(4ac - b^2\right)^2}{16a^2} = \dfrac{\left(4ac - b^2\right)^2 - 8ab}{16a^2}$, $AC^2 = \dfrac{b^4 - 8ab}{16a^2}$

Ta có $OB = AC \Leftrightarrow b^4 = \left(4ac - b^2\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 4ac - b^2 \\ b^2 = -4ac + b^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 2ac \\ ac = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 2ac \\ c = 0 \end{array}\right.$

Câu 69: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 1$ có ba điểm cực tr Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác nội tiếp.

A. $m = \pm 1$. **B.** $m = 1$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $m = -1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

$y' = y = 4x^3 - 4m^2x$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m \neq 0$

Khi đó 3 điểm cực trị là: $A\left(0;m^4+1\right),B\left(-m;1\right),C\left(m;1\right)$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$. Do tính chất đối xứng, ta có: A,O,I thẳng hàng $\Rightarrow AO$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$.

Vậy $AB\perp OB\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow m^2-m^4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ m=\pm 1\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $m=\pm 1$ (thỏa mãn).

Câu 70: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{8}x^4-\left(2m-1\right)x^2+m+3$ có ba điểm cực trị cùng với gốc tọa độ là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=4$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có $y'=\frac{1}{2}x^3-2\left(2m-1\right)x$.

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x^2=4\left(2m-1\right)\end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi $2m-1>0\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$.

Giả sử ba điểm cực trị là

$A\left(0;m+3\right)$, $B\left(2\sqrt{2m-1};-2\left(2m-1\right)^2+m+3\right)$, $C\left(-2\sqrt{2m-1};-2\left(2m-1\right)^2+m+3\right)$.

$\overrightarrow{AB}=\left(2\sqrt{2m-1};-2\left(2m-1\right)^2\right),\overrightarrow{AC}=\left(-2\sqrt{2m-1};-2\left(2m-1\right)^2\right)$.

Điều kiện để ba cực trị tạo thành một tam giác vuông là:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow -4\left(2m-1\right)+4\left(2m-1\right)^4=0\Leftrightarrow 4\left(2m-1\right)\left[\left(2m-1\right)^3-1\right]=0$.

$\Leftrightarrow \left(2m-1\right)^3=1\Leftrightarrow m=1$ (do $m>\frac{1}{2}$).

Khi đó $A\left(0;4\right)$, $B\left(2;2\right)$, $C\left(-2;2\right)$(thỏa mãn yêu cầu đề bài).

Vậy $m=1$.

Câu 71: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+m$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn hơn 1.

A. $m<-1$. **B.** $m>2$.

C. $m\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. **D.** Không tồn tại m.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

[Phương pháp tự luận]

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m > 0$

Ba điểm cực trị là $A(0;m), B\left(-\sqrt{m};m-m^2\right), C\left(\sqrt{m};m-m^2\right)$

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I\left(0;m-m^2\right)$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AI.BC = m^2\sqrt{m}$

Chu vi của ΔABC là: $2p = AB + BC + AC = 2\left(\sqrt{m+m^4} + \sqrt{m}\right)$

Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là: $r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}}$

Theo bài ra: $r > 1 \Leftrightarrow \frac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}} > 1 \Leftrightarrow \frac{m^2\sqrt{m}\left(\sqrt{m+m^4}-\sqrt{m}\right)}{m^4} > 1$ (vì $m > 0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{m}\left(\sqrt{m+m^4}-\sqrt{m}\right) > m^2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+m^5} > m^2 + m \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m > 2$ thỏa mãn.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Sử dụng công thức $r = \frac{b^2}{4|a| + \sqrt{16a^2 - 2ab^3}} \Rightarrow r = \frac{4m^2}{4+\sqrt{16+16m^3}} = \frac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}}$

Theo bài ra: $r > 1 \Leftrightarrow \frac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}} > 1 \Leftrightarrow \frac{m^2\left(\sqrt{1+m^3}-1\right)}{m^3} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+m^3} - 1 > m$

$\sqrt{1+m^3} > m + 1 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sqrt{1+m^3} > m+1 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m > 2$ thỏa mãn.

Câu 72: Cho hàm số $y = x^4 - 2\left(1-m^2\right)x^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích lớn nhất.

A. $m = -\frac{1}{2}$. **B.** $m = \frac{1}{2}$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

[Phương pháp tự luận]

$y' = 4x^3 - 4\left(1 - m^2\right)x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 - m^2 \end{array}\right.$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi: $|m| < 1$

Tọa độ điểm cực trị $A(0; m+1)$

$B\left(\sqrt{1-m^2}; -m^4 + 2m^2 + m\right)$

$C\left(-\sqrt{1-m^2}; -m^4 + 2m^2 + m\right)$

$\overrightarrow{BC} = \left(-2\sqrt{1-m^2}; 0\right)$

Phương trình đường thẳng BC: $y + m^4 - 2m^2 - m = 0$

$d\left(A, \mathrm{BC}\right) = m^4 - 2m^2 + 1$, $BC = 2\sqrt{1-m^2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC.d[A, BC] = \sqrt{1-m^2}\left(m^4 - 2m^2 + 1\right) = \sqrt{\left(1-m^2\right)^5} \le 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m = 0$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

$\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{1-m^2}; -m^4 + 2m^2 - 1\right)$

$\overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{1-m^2}; -m^4 + 2m^2 - 1\right)$

Khi đó S = $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1-m^2}\left(m^4 - 2m^2 + 1\right) = \sqrt{\left(1-m^2\right)^5} \le 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m = 0$.

Câu 73: Cho hàm số $y = x^4 - mx^3 + 4x + m + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số ban đầu có 3 cực trị và trọng tâm của tam giác với 3 đỉnh là toạ độ các điểm cực trị trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{4x}{4x - m}$.

A. $m = 2$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = 4$ **D.** $m = 3$

Hướng dẫn giải:

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi phong trình y'(x) = 0 có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 4x^3 - 3mx^2 + 4 = 0$ có 3nghiệm phân biệt

Xét g(x) = $4x^3-3mx^2+4$ có g'(x) = $12x^2-6mx \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0, x=\frac{m}{2}$

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ và $g(0)=4>0$, $g(\frac{m}{2})=\frac{16-m^3}{4}$ nên g(x) = 0

có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2}>0 \\ \frac{16-m^3}{4}<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>2\sqrt[3]{2}$ (học sinh có thể lập bảng biến thiên

của hàm $\mu(x)=\frac{x^3+1}{x^2}$ trên $R\setminus\{0\}$ để tìm ra kết quả trên)

Khi đó tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\frac{4x}{4x-m}$ là $I(\frac{m}{4};1)$

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2),C(x_3;y_3)$ là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho thì

x_1, x_2, x_3 là nghiệm phơng trình: $4x^3-3mx^2+4=0$ nên theo định lý Viet ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\frac{3m}{4} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{m}{4} \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=\frac{9m^2}{16} \end{cases}$$

Viết hàm số ban đầu dới dạng: $y(x)=y'(x)(\frac{x}{4}-\frac{m}{16})+(-\frac{3m^2x^2}{16}+3x+\frac{5m}{4}+2)$, vì thế

$$y_i=y(x_i)=y'(x_i)(\frac{x_i}{4}-\frac{m}{16})+(-\frac{3m^2x_i^2}{16}+3x_i+\frac{5m}{4}+2)=-\frac{3m^2x_i^2}{16}+3x_i+\frac{5m}{4}+2$$

$do\ y'(x_i)=0 \quad (i=1,2,3)$

Từ đó: $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=-\frac{m^2}{16}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+(x_1+x_2+x_3)+\frac{5m}{4}+2=-\frac{9m^4}{16^2}+\frac{5m}{4}+2$

Trọng tâm của tam giác ABC là G($\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$) $\equiv$ $I(\frac{m}{4};1)$ khi và chỉ

khi: $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=1 \Leftrightarrow -\frac{9m^4}{16^2}+\frac{5m}{4}+2=1 \Leftrightarrow (m-4)(9m^3+36m^2+144m+64)=0$

Vì $m>2\sqrt[3]{2}$ nên $m=4$ là giá trị duy nhất cần tìm.

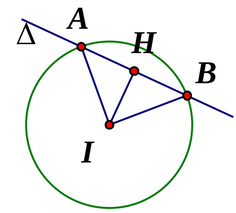
Chọn C.

Câu 74: Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm s $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại 2 điểm phân biệt A,B sa cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Ta có $y'=3x^2-3m$ nên $y'=0\Leftrightarrow x^2=m$.

Đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m>0$.

Ta có $y=x^3-3mx+2=\dfrac{1}{3}x\left(3x^2-3m\right)-2mx+2=\dfrac{1}{3}x.y'-2mx+2$.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ có phương trình $\Delta: y=-2mx+2$

Ta có: $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}.IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\dfrac{1}{2}\sin\widehat{AIB}\le\dfrac{1}{2}$

Diện tích tam giác IAB lớn nhất bằng $\dfrac{1}{2}$ khi $\sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow AI\perp BI$.

Gọi H là trung điểm AB ta có: $IH=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=d_{(I,\Delta)}$

Mà $d_{(I,\Delta)}=\dfrac{\left|2m+1-2\right|}{\sqrt{4m^2+1}}$

Suy ra: $d_{(I,\Delta)}=\dfrac{\left|2m+1-2\right|}{\sqrt{4m^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\left|4m-2\right|=\sqrt{2\left(4m^2+1\right)}$

$\Leftrightarrow 8m^2-16m+2=0\Leftrightarrow m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

IV – CỰC TRỊ HÀM SỐ KHÁC

Câu 75: Cho hàm số $y=|x|^3-mx+5$, m là tham số. Hỏi hàm số đã cho có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $y=\sqrt{x^6}-mx+5$

Suy ra: $y'=\dfrac{3x^5}{|x|^3}-m=\dfrac{3x^5-m|x|^3}{|x|^3}$ và hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

TH1: $m=0$. Ta có: $y'=\dfrac{5x^5}{|x|^3}=0$ vô nghiệm và hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	
y		↘		↗	

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

TH2: $m>0$. Ta có: $y'=0\Leftrightarrow 3x^5=m|x|^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 3x^5=mx^3 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt{\dfrac{m}{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y		↘		↘		↗	

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

TH3: $m<0$. Ta có: $y'=0\Leftrightarrow 3x^5=m|x|^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ 3x^5=-mx^3 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\sqrt{-\dfrac{m}{3}}$

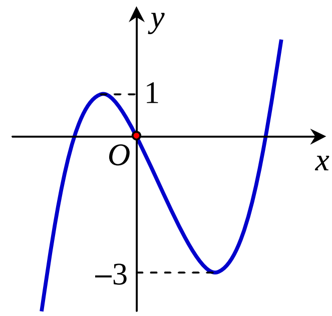
x	$-\infty$		$-\sqrt{-\dfrac{m}{3}}$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	
y		↘		↗		↗	

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

Vậy trong mọi trường hợp hàm số có đúng một cực trị với mọi tham số m

Chú ý: Thay vì trường hợp 2 ta xét $m>0$, ta có thể chọn m là một số dương (như $m=3$) để làm. Tương tự ở trường hợp 3, ta chọn $m=-3$ để làm sẽ cho lời giải nhanh hơn.

Câu 76: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ có ba điểm cực trị là

A. $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$.
B. $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$.
C. $m=-1$ hoặc $m=3$.
D. $1\le m\le 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ gồm hai phần:

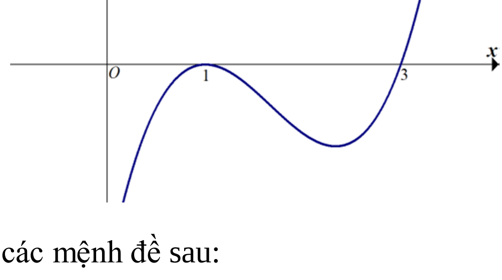
□ Phần 1 là phần đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ nằm phía trên trục hoành;

□ Phần 2 là phần đối xứng của đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đã cho hình bên ta suy ra dạng đồ thị của hàm số $y=f(x)+m$. Khi đó hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ và trục hoành tại nhiều nhất hai điểm chung

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+m\le 0 \\ -3+m\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 3 \end{array}\right..$$

Câu 77: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$

B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Đáp án C

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ để nhận xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ và các điểm cực trị của hàm số.

Cách giải:

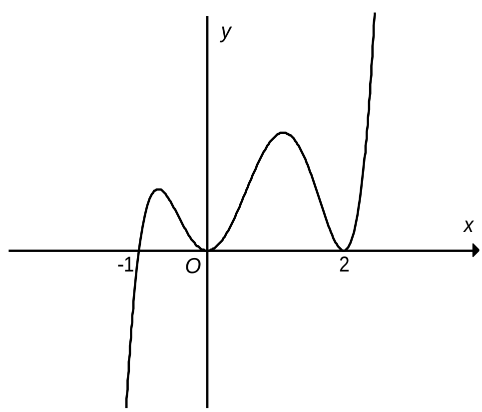
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: $f'(x) \ge 0$ khi $x \ge 3 \Rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(3;+\infty) \Rightarrow$ Đáp án A sai.

Tại $x = 1$ ta thấy $f'(x) = 0$ nhưng tại đây hàm $y = f'(x)$ không đổi dấu nên $x = 1$ không là điểm cực trị của hàm số $y = f(x) \Rightarrow$ Đáp án B sai.

Tại $x = 3$ ta thấy $f'(x) = 0$ và tại đây đây hàm $y = f'(x)$ có đổi dấu từ âm sang dương nên $x = 3$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x) \Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Như vậy hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực trị $\Rightarrow$ Đáp án D sai.

Câu 78: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x$ trên khoảng K.



Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ trên là:

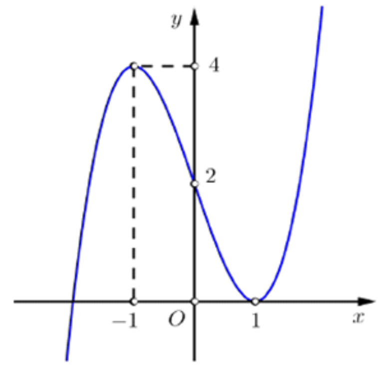
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải: Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ chỉ có một nghiệm đơn (và hai nghiệm kép) nên $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua nghiệm đơn này. Do đó suy ra hàm số $f(x)$ có đúng một cực trị.

Chọn B.

Nhận xét. Đây là một dạng toán suy ngược đồ thị. Dạng này sẽ xuất hiện nhiều hơn trong các đề thi lần sau.

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tập hợp tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị.



A. $m > 1$. **B.** $m < -1$.

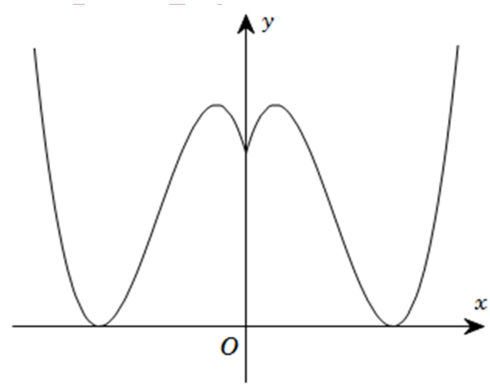
C. $m > -1$. **D.** $m < 1$.

Hướng dẫn giải: Trước tiên ta có nhận xét rằng: đồ thị hàm số $y = f(|x| + m)$ được suy từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách nào?

● Bước 1. Tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ sang phải (nếu $m < 0$), sang trái (nếu $m > 0$) $|m|$ đơn vị.

● Bước 2. Giữ nguyên phần đồ thị vừa nhận được phía bên phải trục tung, xóa bỏ phần đồ thị vừa nhận được phía bên trái trục tung.

● Bước 3. Lấy đối xứng phần đồ thị giữ ở bước 2 qua trục tung ta được đồ thị hoàn chỉnh của hàm số $y = f(|x| + m)$.

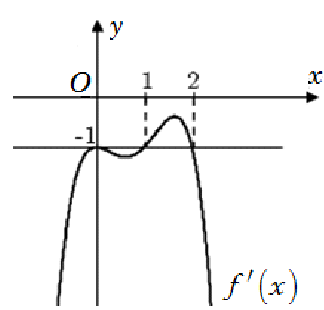


Do đó bằng tư duy + hình vẽ thì yêu cầu bài toán cần tịnh tiến đồ thị sao cho điểm cực đại sang phải và nằm trong góc phần tư thứ nhất. Suy ra $m < -1$.

Khi đó ta được đồ thị của hàm số $y = f(|x| + m)$ như hình bên.

Chọn B.

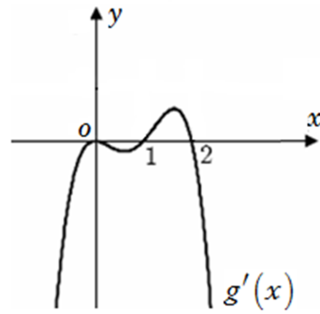
Câu 80: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + x$.



A. Không có điểm cực tiểu. **B.** $x = 0$.

C. $x = 1$. **D.** $x = 2$.

Hướng dẫn giải:



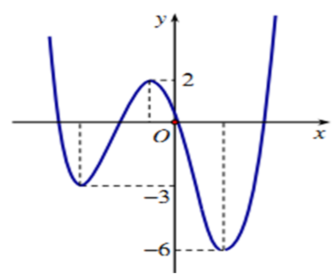
Xét hàm số $g(x)=f(x)+x$ trên $\mathbb{R}$, ta có

$g'(x)=f'(x)+1;\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số $g'(x)$ là đồ thị hàm số $f'(x)$ tịnh tiến lên trên trục Oy một đơn vị (hình bên), khi đó

- $g'(x)$ không đổi dấu khi đi qua điểm $x=0$ suy ra $x=0$ không là điểm trị của hàm số.
- $g'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi đi qua điểm $x=1$ suy ra $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số.
- $g'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi đi qua điểm $x=2$ suy ra $x=2$ là điểm cực đại của hàm số.

Chọn C.



Câu 81: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x-1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 12 **B.** 15

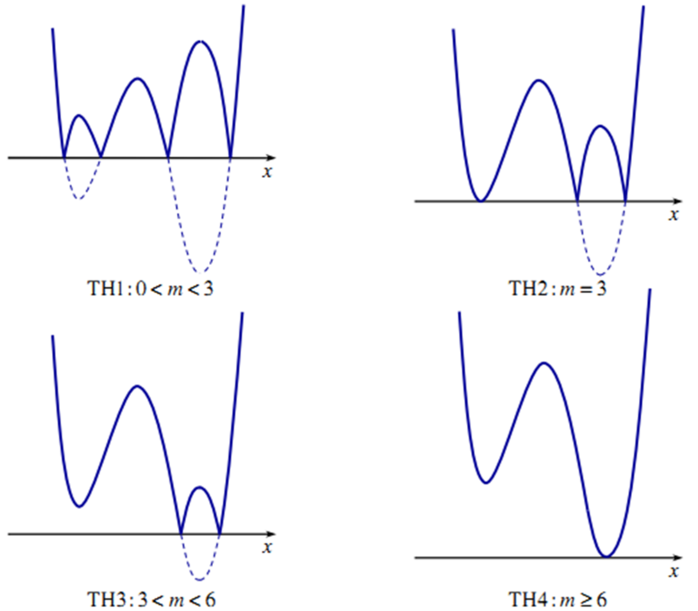
C. 18 **D.** 9

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Nhận xét: Số giao điểm của $(C):y=f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C'):y=f(x-1)$ với Ox

Vì $m>0$ nên $(C''):y=f(x-1)+m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C'):y=f(x-1)$ lên trên m đơn vị.



TH1: $0 < m < 3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.

TH2: $m = 3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

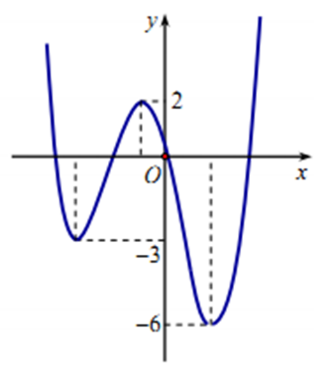
TH3: $3 < m < 6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH4: $m \geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3 \leq m < 6$. Do $m \in \mathbb{Z}^*$ nên $m \in \{3;4;5\}$

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12

Câu 82: Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-2017)+m|$ có

5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử của tập S bằng

A. 12 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 9

Hướng dẫn giải:

Đáp án A

Nhận xét: Số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox abnwgf số gaio điểm của $(C'): y = f(x-2017)$ với Ox

Vì $m > 0$ nên $(C''): y = f(x-2017)+m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C'): y = f(x-2017)$ lên trên m đơn vị

Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2018	↘	-2018	↗	$+\infty$

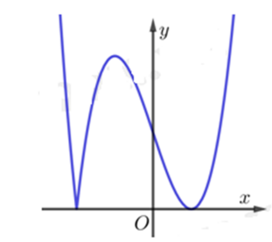
Đồ thị hàm số $y = \left|f(x-2017)+2018\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

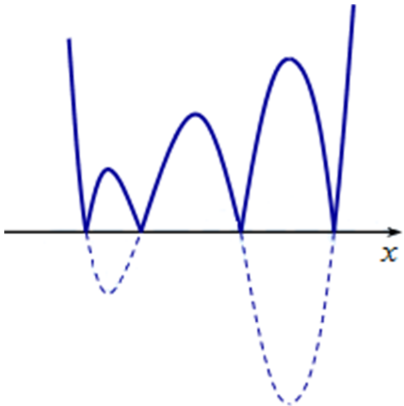
Hướng dẫn giải:

Đáp án B

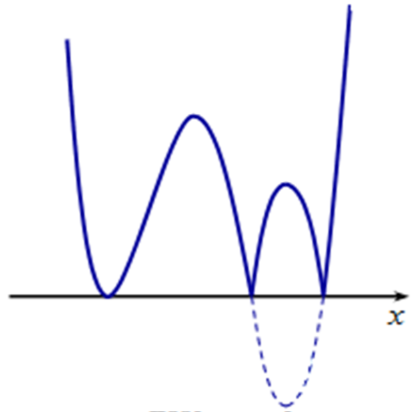
Ta có đồ thị hàm số $y = \left|f(x-2017)+2018\right|$ có dạng như bên:



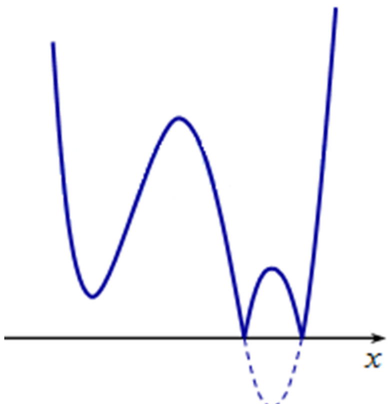
Dễ thấy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.



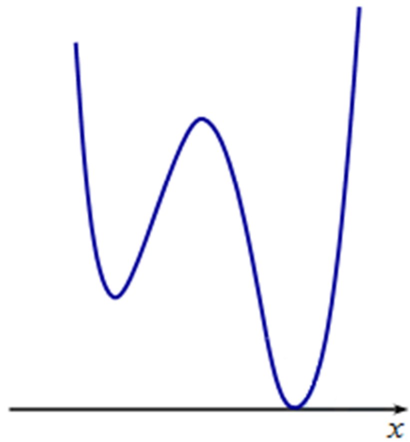
$\text{TH1}: 0 < m < 3$



$\text{TH2}: m = 3$



$\text{TH3}: 3 < m < 6$



$\text{TH4}: m \geq 6$

$TH1: 0 < m < 3$ Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị (loại)

$TH2: m = 3$ Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (NHẬN)

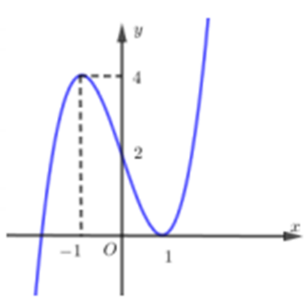
$TH3: 3 < m < 6$ Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (NHẬN)

$TH4: m > 6$ Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (loại)

Vậy $3 \leq m < 6$. Do $m \in \mathbb{Z}^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12

Câu 84: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



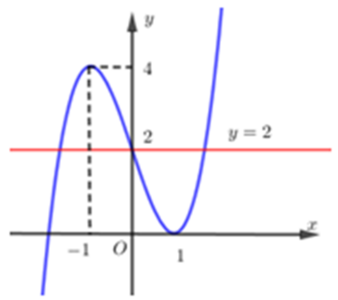
Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 2x$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải:

Đáp án C

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra $f'(x) = x^3 - 3x + 2$



Hàm số $y = f(x) - 2x \Rightarrow y' = f'(x) - 2 = x^3 - 3x$ có ba nghiệm bội lẻ nên hàm số có 3 điển cực trị

Câu 85: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a > 0, c > 2017$ và $a + b + c < 2017$. Số cực trị của hàn số $y = \left| f(x) - 2017 \right|$ là:

A. 1 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 7

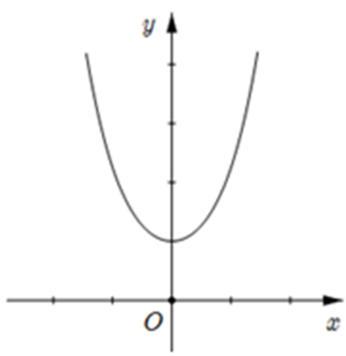
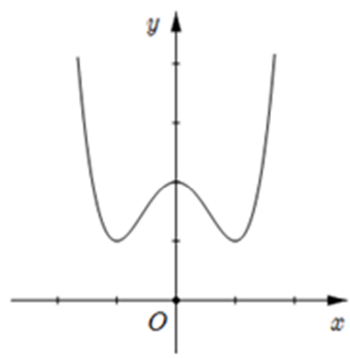
Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có: $y = \left| f(x) - 2017 \right| = \sqrt{\left(f(x) - 2017 \right)^2} \Rightarrow y' = \dfrac{2\left(f(x) - 2017 \right).f'(x)}{2\sqrt{\left(f(x) - 2017 \right)^2}}$

Xét $f(x) = ax^4 + bx^2 + c(a > 0)$ ta có: $\begin{cases} f(1) = a + b + c < 2017 \\ f(0) = c > 2017 \end{cases} \Rightarrow f(1) < f(0)$

Dựa vào 2 dạng của đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương khi $a > 0$

$a > 0$		

Suy ra hàm số $y = f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị và PT: $f\left(x\right) - 2017$ có 4 nghiệm phân biệt

Như vậy PT $y' = \dfrac{2\left(f\left(x\right) - 2017\right).f'\left(x\right)}{2\sqrt{\left(f\left(x\right) - 2017\right)^2}} = 0$ có 7 nghiệm phân biệt do đó hàm số có 7 cực trị.

Câu 86: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 2}$.

A. $y = 2x + 1$. **B.** $y = -2x + 1$. **C.** $y = -2x - 1$. **D.** $y = 2x - 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 2}$ có dạng:

$$y = \frac{\left(x^2 - x + 1\right)'}{\left(x + 2\right)'} = 2x - 1.$$

Câu 87: Biết hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{x^2 + mx + n}{x^2 + 1}$ có hai cực trị x_1, x_2. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

A. $y = mx + n$. **B.** $y = \dfrac{m}{2}x + n$. **C.** $y = -mx + n$. **D.** $y = \dfrac{-m}{2}x + n$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Phương trình đường cong đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + n}{x^2 + 1}$ có dạng:

$$y = \frac{\left(x^2 + mx + n\right)'}{\left(x^2 + 1\right)'} = \frac{2x + m}{2x}.$$

Gọi tọa độ của hai điểm cực trị là $\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right)$. Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của pt:

$2x\left(x^2 + mx + n\right) = \left(x^2 + 1\right)\left(2x + m\right) \Leftrightarrow mx^2 + \left(2n - 2\right)x - m = 0$.

Ta tìm k thỏa $2x + m + k\left[mx^2 + \left(2n - 2\right)x - m\right] = 0$ có nghiệm $x = 0$. Khi đó $k = 1$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + n}{x^2 + 1}$ có dạng:

$$y = \frac{2x + m + 1\left[mx^2 + \left(2n - 2\right)x - m\right]}{2x} = \frac{2x + mx^2 + 2\left(n - 1\right)x}{2x} = \frac{m}{2}x + n.$$

Câu 88: Biết rằng hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-2x+m}{x^2+2}$ có hai cực trị x_1,x_2. Tính $k=\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}$.

A. $k=\dfrac{-2}{m}$. **B.** $k=1$. **C.** $k=\dfrac{2}{m}$. **D.** $k=\dfrac{-1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Phương trình đường cong đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+m}{x^2+2}$ có dạng:

$$y=\frac{\left(x^2-2x+m\right)'}{\left(x^2+2\right)'}=\frac{2x-2}{2x}.$$

Gọi tọa độ của hai điểm cực trị là $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$. Khi đó x_1,x_2 là nghiệm của pt:

$2x\left(x^2-2x+m\right)=\left(x^2+2\right)\left(2x-2\right)\Leftrightarrow 2x^2+\left(4-2m\right)x-4=0$.

Ta tìm k thỏa $2x-2+k\left[2x^2+\left(4-2m\right)x-4\right]=0$ có nghiệm $x=0$. Khi đó $k=\dfrac{-1}{2}$.

Câu 89: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-2x+m-1}{2x+1}$ vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=\dfrac{\left(mx^2-2x+m-1\right)'}{\left(2x+1\right)'}=\dfrac{2mx-2}{2}=mx-1$ có hệ số góc bằng m.

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất có hệ số góc $k=1$;

Hai đường thẳng vuông góc với nhau nên $m.1=-1\Leftrightarrow m=-1$.

Chọn C.

Câu 90: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-5;5\right]$ để hàm số $y=\left|x^4+x^3-\dfrac{1}{2}x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Hướng dẫn giải:

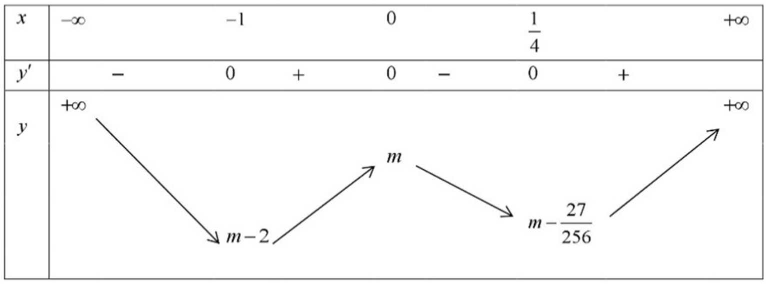
Chọn C.

Xét hàm số $y=x^4+x^3-\dfrac{1}{2}x^2+m$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 + 3x^2 - x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1. \\ x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

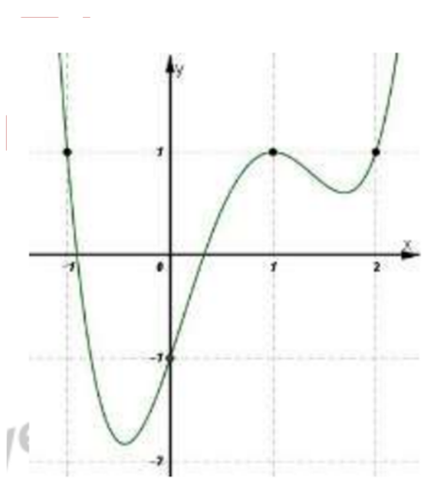


Từ bảng biến thiên, để hàm số đã cho có 5 cực trị thì đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m - 2 < 0 < m - \dfrac{27}{256} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \dfrac{27}{256} < m < 2 \end{array}\right.$.

Vì m nguyên và $m \in [-5;5] \Rightarrow m \in \{-5;-4;-3;-2;-1;1\}$.

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 91: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên R và có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm số $g(x)$ đặt cực đại tại điểm nào sau đây?



A. $x = 1$ **B.** $x = 2$ **C.** $x = 0$ **D.** $x = -1$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Phương pháp: Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x_0 \Leftrightarrow g'(x) = 0$ bà qua điểm x_0 thì $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm.

Cách giải: Ta có: $g'(x)=f'(x)-1 \Rightarrow f'(x_0)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=2 \\ x_0=-1 \end{array}\right.$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>1 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$

$g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<1 \Leftrightarrow x\in(-1;1)\cup(1;2)$

Ta có BBT:

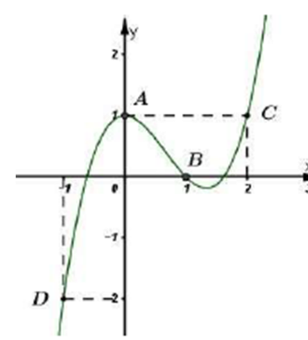
x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
$g(x)$		↗		↘		↘		↗	

Ta thấy qua $x_0=-1$ thì $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm, qua $x_0=1$ thì $g'(x)$ không đổi dấu (luôn mang dấu âm) và qua $x_0=2$, $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương.

Vậy $x_0=-1$ là điểm cực đại của hàm số $y=g(x)$.

Câu 92: Cho hàm số $y=f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A. $x=-1$.

B. $x=1$.

C. $x=0$.

D. $x=2$.

Hướng dẫn giải:

Đáp án B

Phương pháp giải: Dựa vào bảng biến thiên của hàm số để kết luận điểm cực trị

Xét hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$, có $g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1; \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=(x-1)^2\ (*)$

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy: $f'(0)=1=(0-1)^2$ nên $x=0$ là một nghiệm của $g'(x)$.

$f'(1)=0=(1-1)^2 \Rightarrow x=1$ là một nghiệm của $g'(x)$.

$f'(2)=1=(2-1)^2 \Rightarrow x=2$ là một nghiệm của $g'(x)$.

Vậy phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2.$

Vẽ đồ thị hàm số $y = (x-1)^2$ trên cùng mặt phẳng tọa độ với $y = f'(x)$ ta thấy:

Trong khoảng $(0;1)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = (x-1)^2$ nên $g'(x) < 0, \forall x \in (0;1)$

Trong khoảng $(1;2)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ □nằm phía dưới đồ thị hàm số $y = (x-1)^2$ nên

$g'(x) < 0, \forall x \in (1;2)$.

Vậy $x = 1$ là điểm cực đại của hàm số $y = g(x)$.

Câu 93: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Xét hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Có $y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, để hàm số đã cho có 7 cực trị thì $\begin{cases} m - 5 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5$.

Vì m nguyên nên các giá trị cần tìm của m là $m \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên cần tìm của m.

Câu 94: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $y'=x^2-\sqrt{12}x+\frac{1}{4}\left(b+3a\right)\ \forall x\in R$, biết hàm số luôn c hai cực trị với a, b là các số thực không âm thỏa mãn $3b-a\le 6$. Tìm giá trị lớn nhất củ biểu thức $P=2a+b$?

A. 1 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 6

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

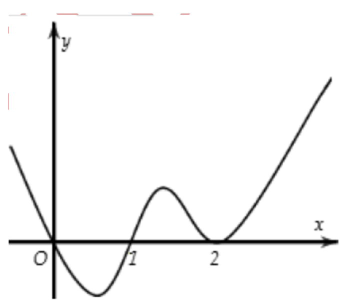
Ta có: $y'=x^2-\sqrt{b}x-\frac{3}{4}a+3,\ \forall x\in R$

Hàm số luôn có hai cực trị khi và chỉ khi: $\Delta>0\Leftrightarrow 12-b-3a>0$

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} a\ge 0\\ b\ge 0\\ 3b-a\le 6\\ b+3a<12\end{cases}$ nếu biểu diễ lên hệ trục tọa độ ta sẽ được miền tứ giác OABC

với $O\left(0;0\right)$, $A\left(0;2\right)$, $B\left(3;3\right)$, $C\left(4;0\right)$ trong các điểm có tọa độ nguyên thuộc miền OABC có điểm $M\left(3;2\right)$ làm biểu thức P có giá trị lớn nhất là $P_{max}=2.3+2=8$

Câu 95: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị của $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau. Xác định số điểm cực t của hàm $y=f\left(x\right)$.



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Từ đồ thị của hàm $y=f'\left(x\right)$, ta đi phục dựng lại bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ với chú ý rằng nếu $x<0;1<x<2;x>2$ thì $f'\left(x\right)$ luôn dương nên hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến Còn nếu $0<x<1$ thì $f'\left(x\right)$ luôn âm nên hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến.

Còn tại các giá trị $x\in\left\{0;1;2\right\}$ thì đạo hàm $f'\left(x\right)=0$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	+	

Từ bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ ta nhận thấy hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị là $x=0;x=1$

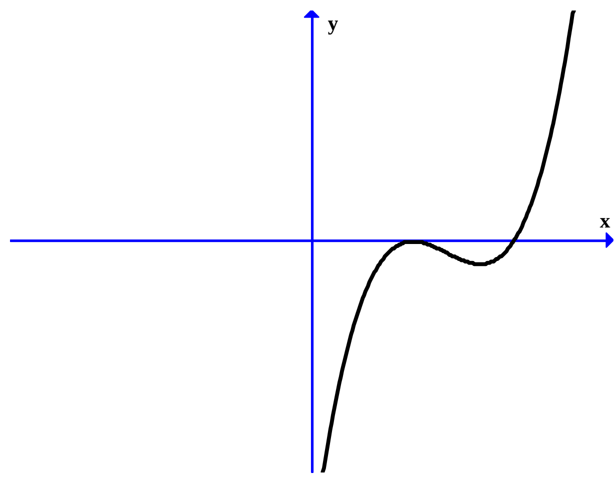
Câu 96: Biết rằng phương trình $2x^3+bx^2=-cx+1$ có đúng hai nghiệm thực dương phân biệt. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|2|x|^3+bx^2+c|x|-1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

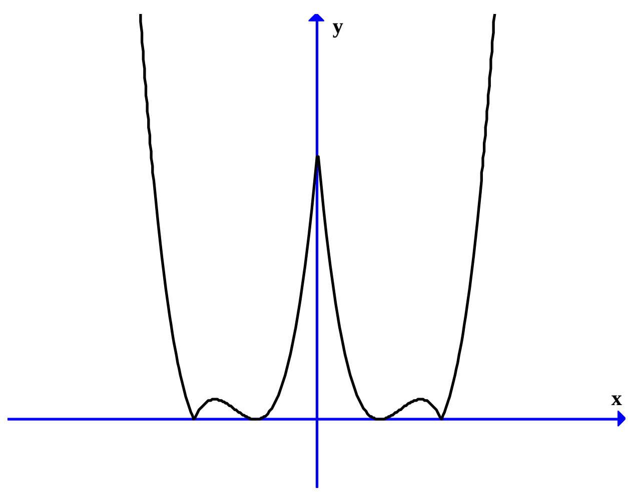
Hướng dẫn giải:

Chọn B

Vì phương trình $2x^3+bx^2=-cx+1$ có đúng hai nghiệm thực dương phân biệt nên đồ thị hàm số $y=2x^3+bx^2+cx-1 (C)$ phải cắt Ox tại đúng hai điểm có hoành độ dương trong đó điểm cực đại của đồ thị hàm số là một trong hai điểm đó. Vậy đồ thị (C) có dạng:



Bằng phép suy đồ thị ta có đồ thị hàm số $y=\left|2|x|^3+bx^2+c|x|-1\right|$ có dạng



Dựa vào đồ thị ta có đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị.

GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa GTLN, GTNN

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trong khoảng K (đoạn, khoảng, nửa khoảng)

+ Nếu có $x_0\in K$ sao cho $f\left(x\right)\le f\left(x_0\right),\forall x\in K$ thì $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị lớn hất của hàm số trê khoảng K. Kí hiệu: $\max\limits_{K} y=f\left(x_0\right)$

+ Nếu có $x_0\in K$ sao cho $f\left(x\right)\ge f\left(x_0\right),\forall x\in K$ thì $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị nhỏ hất của hàm số trê khoảng K. Kí hiệu: $\min\limits_{K} y=f\left(x_0\right)$.

2. Phương pháp tìm GTLN, GTNN.

Bài toán 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng K:

Phương pháp: Lập bảng biến thiên trên khoảng K, rồi nhìn trên đó để kết luận max, min.

Bài toán 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$:

Phương pháp 1: Lập bảng biến thiên trên khoảng đó và kết luận.

Phương pháp 2: Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì ta có các bước làm sau:

1. Tính đạo hàm của hàm số $y=f\left(x\right)$ đã cho.

2. Tìm các điểm $x_1;x_2;...;x_n$ trên đoạn $\left[a;b\right]$, tại đó $f'\left(x\right)=0$ hoặc $f'\left(x\right)$ không xác định.

3. Tính: $f\left(a\right); f(x_1); f(x_2);...; f(x_n); f(b)$.

4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên (ở mục 3)

Khi đó: $M=\max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right); \mathrm{m}=\min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right)$

Chú ý:

1. Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì hàm số f(x) luôn tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nh nhất và tất cả các giá trị trung gian nằm giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trê đoạn đó.

2. Nếu đề bài không cho rõ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng, đoạn nà cón nghĩa là ta tìm GTLN, GTNN của hàm số trên tập xác định của hàm số đó.

3. Tính đạo hàm y'. Nếu $y'\ge 0,\forall x\in\left[a;b\right]\Rightarrow\begin{cases}\min f\left(x\right)=f\left(a\right)\\ \max f\left(x\right)=f\left(b\right)\end{cases}$

4. Tính đạo hàm y'. Nếu $y'\le 0,\forall x\in\left[a;b\right]\Rightarrow\begin{cases}\min f\left(x\right)=f\left(b\right)\\ \max f\left(x\right)=f\left(a\right)\end{cases}$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trên đoạn $\left[-2;2\right]$, hàm số $y=\dfrac{mx}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ khi và chỉ khi

A. $m=2$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m<0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Cách 1: Với $m=0$ thì $y=0$ nên $\max\limits_{[-2;2]} y=0$ khi $x=1$.

Với $m\neq 0$.

Đặt $x=\tan t$, ta được $y=\frac{m}{2}.\sin 2t$. Với $x\in\left[-2;2\right]$ thì $t\in\left[-\arctan 2;\arctan 2\right]$.

Hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ tương ứng với $t=\frac{\pi}{4}$.

Khi $m>0$ thì $\max\limits_{[-\arctan 2;\arctan 2]} y=\frac{m}{2}$ khi và chỉ khi $t=\frac{\pi}{4}$.

Khi $m<0$ thì $\max\limits_{[-\arctan 2;\arctan 2]} y=\frac{m}{2}$ khi và chỉ khi $t=-\frac{\pi}{4}$.

Vậy $m\geq 0$ thỏa mãn bài toán.

Cách 2: Ta có $y'=\frac{m\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$,

TH1: $m=0\Rightarrow y=0$ là hàm hằng nên cũng coi GTLN của nó bằng 0 khi $x=1$

TH2: $m\neq 0$. Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1\ (n)\\ x=1\quad (n)\end{array}\right.$

Vì hàm số đã cho liên tục và xác định nên ta có hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y\left(1\right)\geq y\left(-2\right)\\ \mathrm{y}\left(1\right)\geq y\left(2\right)\\ y\left(1\right)\geq y\left(-1\right)\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 0\Rightarrow m>0$ (do $m\neq 0$)

Vậy $m\geq 0$

Chú ý: Ngoài cách trên trong TH2 $m\neq 0$, ta có thể xét $m>0$, $m<0$ rồi lập BBT cũng tìm được kết quả như trên.

Câu 2: Cho hàm số $y=\left|x^2+2x+a-4\right|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-2;1\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a=3$ **B.** $a=2$ **C.** $a=1$ **D.** $a=4$

Hướng dẫn giải:

Ta có $y=\left|x^2+2x+a-4\right|=\left|\left(x+1\right)^2+a-5\right|$. Đặt $u=\left(x+1\right)^2$ khi đó $\forall x\in\left[-2;1\right]$ thì $u\in\left[0;4\right]$ Ta được hàm số $f\left(u\right)=\left|u+a-5\right|$. Khi đó

$\underset{x\in[-2;1]}{Max}\, y = \underset{u\in[0;4]}{Max}\, f(u) = Max\{f(0), f(4)\} = Max\{|a-5|;|a-1|\}$

Trường hợp 1: $|a-5| \ge |a-1| \Leftrightarrow a \le 3 \Rightarrow \underset{u\in[0;4]}{Max}\, f(u) = 5-a \ge 2 \Leftrightarrow a = 3$

Trường hợp 2: $|a-5| \le |a-1| \Leftrightarrow a \ge 3 \Rightarrow \underset{u\in[0;4]}{Max}\, f(u) = a-1 \ge 2 \Leftrightarrow a = 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\underset{x\in[-2;1]}{Max}\, y = 2 \Leftrightarrow a = 3$

Chọn A.

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{x^3 + 2\left(1+\sqrt{x^3+1}\right)} + \sqrt{x^3 + 2\left(1-\sqrt{x^3+1}\right)}$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Hướng dẫn giải:

$y = \sqrt{x^3 + 2\left(1+\sqrt{x^3+1}\right)} + \sqrt{x^3 + 2\left(1-\sqrt{x^3+1}\right)}$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{\left(\sqrt{x^3+1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x^3+1}-1\right)^2}$

$\Leftrightarrow y = \left|\sqrt{x^3+1}+1\right| + \left|\sqrt{x^3+1}-1\right|$

Điều kiện để hàm số xác định $x \ge -1$

Ta có $y = \sqrt{x^3+1}+1+\left|\sqrt{x^3+1}-1\right|$

- Nếu $-1 \le x < 0$ thì $\sqrt{x^3+1}-1 < 0 \Rightarrow \left|\sqrt{x^3+1}-1\right| = 1-\sqrt{x^3+1} \Rightarrow y = 2$

- Nếu $x \ge 0$ thì $\sqrt{x^3+1}-1 \ge 0 \Rightarrow y = 2\sqrt{x^2+1} \ge 2$

Vậy: $y \ge 2, \forall x \ge -1, y = 2 \Leftrightarrow x = 0$

Chọn C.

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $(C): y=\left(x^7+7x^4-4\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)^3$

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Tập xác định: $D=[1;+\infty)$

$$y=\left(x^7+7x^4-4\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)^3$$

$$\Rightarrow y'=\underbrace{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)^3\left[7x^6+28x^3+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\left(x^7+7x^4-4\right)\right]}_{\geq 0,\forall x\geq 1}.$$

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{2\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Khi đó $M+m$ bằng

A. – 4. **B.** – 5. **C.** – 6. **D.** 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $t=|\cos x|, 0\leq t\leq 1\Rightarrow y=f(t)=\dfrac{2t^2+t+1}{t+1}, 0\leq t\leq 1$

$$f'(t)=\frac{2t^2+4t}{(t+1)^2};\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-2\notin[0;1]\end{array}\right.\Rightarrow f(0)=1, f(1)=2$$

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y=1, \max\limits_{\mathbb{R}} y=2$

Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

A. $M=m+\dfrac{2}{3}$. **B.** $M=m+1$. **C.** $M=\dfrac{3}{2}m$. **D.** $M=m+\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt $t=\sin x, -1\leq t\leq 1\Rightarrow y=f(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+1}$, $f'(t)=\dfrac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2}$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\in[-1;1]\\ t=-2\notin[-1;1]\end{array}\right.\Rightarrow f(0)=1,\ f(-1)=0,\ f(1)=\frac{2}{3}.$$ Vậy $M=1, m=0$

Câu 7: Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}}$ là

A. 0 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 2

Hướng dẫn giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$, ta có $f\left(x\right)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}}=\dfrac{2\sin^2 x}{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 x}=\dfrac{4\sin^2 x}{2-\sin^2 x}$.

Đặt $\sin^2 x=t\ \left(t\in\left[0;1\right]\right)$, hàm số trở thành $g\left(t\right)=\dfrac{4t}{-t+2}$ với $t\in\left[0;1\right]$, ta có

$g'\left(t\right)=\dfrac{8}{\left(-t+2\right)^2}>0\forall t\in\left[0;1\right]$, suy ra hàm số đồng biến trên $\left[0;1\right]$, vậy

$\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f\left(x\right)=\max\limits_{t\in\left[0;1\right]} g\left(t\right)=g\left(1\right)=4$, xảy ra khi $t=1\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Chọn B.

Câu 8: Tìm m để bất phương trình $\dfrac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+4\cos^2 x+1}\le m+1$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $m\ge\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$. **B.** $m\ge\dfrac{3\sqrt{5}+9}{4}$. **C.** $m\ge\dfrac{\sqrt{65}-9}{4}$. **D.** $m\ge\dfrac{3\sqrt{5}-9}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Đặt $y=\dfrac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+4\cos^2 x+1}=\dfrac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+2\cos 2x+3}$

(Do $\sin 2x+2\cos 2x+3>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số xác định trên $\mathbb{R}$)

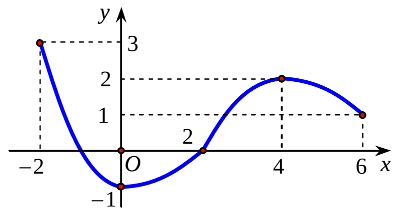
$\Leftrightarrow\left(3-y\right)\sin 2x+\left(1-2y\right)\cos 2x=3y$

(Phương trình $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2$)

Suy ra $\left(3-y\right)^2+\left(1-2y\right)^2\ge 9y^2\Leftrightarrow 2y^2+5y-5\le 0\Leftrightarrow\dfrac{-5-\sqrt{65}}{4}\le y\le\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}$.

$\Rightarrow\max y=\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}$.Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}\le m+1\Leftrightarrow m\ge\dfrac{\sqrt{65}-9}{4}$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$ trê đoạn $\left[-2;6\right]$ như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



A. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(-2)$.
B. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(2)$.
C. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(6)$.
D. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(-1)$.

Hướng dẫn giải:

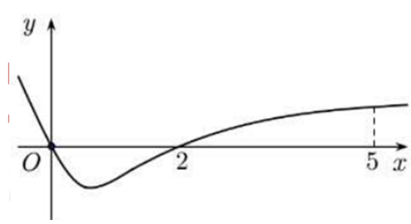
☑ Do vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại $x=-1$ hoặc $x=6$.

☑ Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và trục Ox $(-1\le x\le 2)$, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và trục Ox $(2\le x\le 6)$. Ta có

$$S_1<S_2\Rightarrow -\int\limits_{-1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x<\int\limits_{2}^{6} f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow -f(2)+f(-1)<f(6)-f(2)\Leftrightarrow f(-1)<f(6).$$

Vậy $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(6)$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên R và có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là:



A. $f(2);f(0)$
B. $f(0);f(5)$
C. $f(2);f(5)$
D. $f(1);f(3)$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Phương pháp: Dựa vào tính đơn điệu của hàm số, vẽ bảng biến thiên để xác định Min, Max của hàm số $f(x)$.

Cách giải: Từ đồ thị $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$, ta có $f'(0)=0; f'(2)=0$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên:

x	$-\infty$		0		2		5		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+		+	
y		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(5)$	$\nearrow$	

Suy ra $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$. Từ giả thiết, ta có:

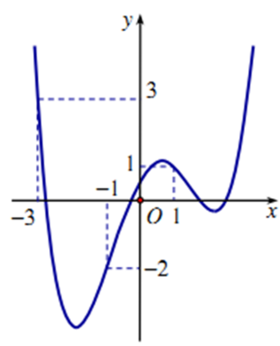
$$f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Leftrightarrow f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[2;5]; 3 \in [2;5] \Rightarrow f(3) > f(2)$

$$\Rightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(3) = f(0) - f(2) \Rightarrow f(5) > f(0)$$

Suy ra $\max\limits_{[0;5]} f(x) = \{f(0), f(5)\} = f(5)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$ **B.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(1)$

C. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$ **D.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$

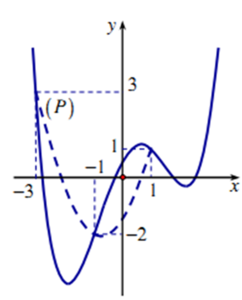
Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

Căn cứ vào đồ thị $y = f'(x)$ ta có

$$\begin{cases} f'(-1) = -2 \\ f'(1) = 1 \\ f'(-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(-1) = 0 \\ g'(1) = 0 \\ g'(-3) = 0 \end{cases}$$



Ngoài ra, vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ bên (đường màu đỏ), ta thấy (P) đi qua các điểm $(-3;3), (-1;-2), (1;1)$ với đỉnh $I\left(-\frac{3}{4}; -\frac{33}{16}\right)$

Rõ ràng

• Trên khoảng $(-1;1)$ thì $f'(x) > x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, nên $g'(x) > 0\ \ \forall x \in (-1;1)$

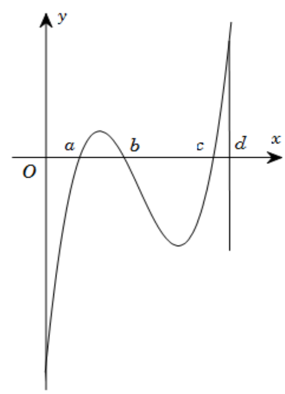
• Trên khoảng $(-3;-1)$ thì $f'(x) < x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, nên $g'(x) < 0\ \ \forall x \in (-3;-1)$

Từ những nhận định trên, ta có bảng biến thiên của hàm $y = g'(x)$ trên $[-3;1]$ như sau:

x	-3		-1		1
g'(x)		$-$	0	$+$	0
g(x)		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$

Câu 12: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $M + m = f(0) + f(c)$.

B. $M + m = f(d) + f(c)$.

C. $M + m = f(b) + f(a)$.

D. $M + m = f(0) + f(a)$.

Hướng dẫn giải:

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có nhận xét:

● Hàm số $y = f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x = a$.

● Hàm số $y = f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x = b$.

● Hàm số $y = f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x = c$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;d]$ như sau:

x	0		a		b		c		d
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$ $\searrow$		$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$f(d)$

Sử dụng bảng biến thiên ta tìm được: $\begin{cases} \max\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right] = \max\left\{f(0), f(b), f(d)\right\} \\ \min\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right] = \min\left\{f(a), f(c)\right\} \end{cases}$.

Quan sát đồ thị, dùng phương pháp tích phân để tính diện tích, ta có

$$\int_a^b f'(x)dx < \int_b^c \left[0 - f'(x)\right]dx \longrightarrow f(c) < f(a) \longrightarrow \min_{[0;d]}\left[f(x)\right] = f(c).$$

Tương tự, ta có

$$\begin{cases} \int_0^a \left[0 - f'(x)\right]dx > \int_a^b f'(x)dx \to f(0) > f(b) \\ \int_b^c \left[0 - f'(x)\right]dx > \int_c^d f'(x)dx \to f(b) > f(d) \end{cases} \to f(0) > f(b) > f(d) \longrightarrow \max_{[0;d]}\left[f(x)\right] =$$

Vậy $\max\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right] = f(0)$; $\min\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right] = f(c)$.

Chọn A.

Câu 13: Cho hai số thực $x \neq 0,\ y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Giá tr lớn nhất M của biểu thức $A = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3}$ là:

A. $M = 0$. **B.** $M = 0$. **C.** $M = 1$. **D.** $M = 16$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3 + y^3}{x^3y^3} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^3y^3} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2.$$

Đặt $x = ty$. Từ giả thiết ta có: $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \Rightarrow (t+1)ty^3 = (t^2 - t + 1)y^2$

Do đó $y=\dfrac{t^2-t+1}{t^2+t};x=ty=\dfrac{t^2-t+1}{t+1}$. Từ đó $A=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2=\left(\dfrac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\right)^2$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{-3t^2+3}{\left(t^2-t+1\right)^2}$.

Lập bảng biến thiên ta tìm giá trị lớn nhất của A là: 16 đạt được khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Câu 14: Cho các số thực x,y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$ là

A. $\min P=-80$. **B.** $\min P=-91$. **C.** $\min P=-83$. **D.** $\min P=-63$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có

$x+y=2(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3})\Leftrightarrow (x+y)^2=4(x+y)+8\sqrt{x-3}.\sqrt{y+3}\ge 4(x+y)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y\ge 4\\ x+y\le 0\end{array}\right.$

Mặt khác $x+y=2(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3})\le 2\sqrt{2(x+y)}\Leftrightarrow x+y\le 8\Rightarrow x+y\in[4;8]$

Xét biểu thức $P=4(x^2+y^2)+15xy=4(x+y)^2+7xy\ge 16(x+y)+7xy=7x(y+3)+16y-5x$.

Mà $\begin{cases}y+3\ge 0\\ y\ge 4-x\end{cases}\Rightarrow P\ge 16(4-x)-5x=64-21x$, kết hợp với

$x+y\ge 4\Rightarrow x\in[3;7]\Rightarrow 64-21x\ge -83$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là -83

Câu 15: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$ là:

A. $\min P=-83$ **B.** $\min P=-63$ **C.** $\min P=-80$ **D.** $\min P=-91$

Hướng dẫn giải:

Ta có $\mathrm{x}+\mathrm{y}=2\left(\sqrt{\mathrm{x}-3}+\sqrt{\mathrm{y}+3}\right)\Leftrightarrow \left(\mathrm{x}+\mathrm{y}\right)^2=4\left(\mathrm{x}+\mathrm{y}\right)+8\sqrt{\mathrm{x}-3}.\sqrt{\mathrm{y}+3}\ge 4\left(\mathrm{x}+\mathrm{y}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{x}+\mathrm{y}\ge 4\\ \mathrm{x}+\mathrm{y}\le 0\end{array}\right.$. Mặt khác

$\mathrm{x}+\mathrm{y}=2\left(\sqrt{\mathrm{x}-3}+\sqrt{\mathrm{y}+3}\right)\le 2\sqrt{2\left(\mathrm{x}+\mathrm{y}\right)}\Leftrightarrow \mathrm{x}+\mathrm{y}\le 8\Rightarrow \mathrm{x}+\mathrm{y}\in[4;8]$

Xét biểu thức $\mathrm{P}=4\left(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\right)+15\mathrm{xy}=4\left(\mathrm{x}+\mathrm{y}\right)^2+7\mathrm{xy}$ và đặt

$t = x + y \in [4;8] \Rightarrow P = 4t^2 + 7xy$.

Lại có $(x+3)(y+3) \ge 0 \Leftrightarrow xy \ge -3(x+y) - 9 \Rightarrow P \ge 4(x+y)^2 - 21(x+y) - 63$

$= 4t^2 - 21t - 63$.

Xét hàm số $f(t) = 4t^2 - 21t - 63$ trên đoạn $[4;8]$ suy ra $P_{\min} = f(7) = -83$

Chọn A.

Câu 16: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Khi đó, giá trị của $M + m$ bằng

A. 44. **B.** 41. **C.** 43. **D.** 42.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $(x+y)^2 = \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2}.\sqrt{y+1}\right)^2 \le (1+2).\left((x-1)+(y+1)\right) = 3.(x+y)$

Do đó: $0 \le (x+y) \le 3$.

Theo bài ra: $P = (x+y)^2 + 2(x+y) + 2 + 8.\sqrt{4-(x+y)}$

Đặt $t = x + y$. Đk: $0 \le t \le 3$.

Xét: $P = f(t) = t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4-t}$ trên $[0;3]$.

Có $f'(t) = 2t + 2 - \dfrac{4}{\sqrt{4-t}}$.

Đặt $g(t) = f'(t) = 2t + 2 - \dfrac{4}{\sqrt{4-t}} \Rightarrow g'(t) = f''(t) = 2 + \dfrac{2}{\sqrt{(4-t)^3}} > 0$ với $\forall t \in [0;3]$.

Do đó: hàm số $g(t)$ đồng biến trên $[0;3]$.

Khi đó: $g(t) > g(0) \Rightarrow f'(t) \ge f'(0) = 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;3]$.

$\Rightarrow \begin{cases} M = f(3) = 25 \\ m = f(0) = 18 \end{cases}$. Vì vậy: $M + m = 43$.

Câu 17: Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$

A. $\min P = 5$. **B.** $\min P = \dfrac{7}{3}$. **C.** $\min P = \dfrac{17}{3}$. **D.** $\min P = \dfrac{115}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$

$P=\frac{1}{3}x^3+x^2+y^2-x+1 \Rightarrow P=\frac{1}{3}x^3+x^2+(2-x)^2-x+1 \Rightarrow P=\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x+5$

Xét hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x+5$ trên $[0;+\infty)$

$y'=x^2+4x-5$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{115}{3}$	$\searrow$	$\frac{7}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min P=\frac{7}{3}$.

TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A – KIẾN THỨC CHUNG

1. Định nghĩa:

+) Đường thẳng $x = a$ là TCĐ của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ nếu có một trong các điều kiện sau:

$\lim\limits_{x \to a^+} y = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to a^+} y = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to a^-} y = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to a^-} y = -\infty$

+) Đường thẳng $y = b$ là TCN của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ nếu có một trong các điều kiện sau:

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = b$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} y = b$

2. Dấu hiệu:

+) Hàm phân thức mà nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử có tiệm cận đứng.

+) Hàm phân thức mà bậc của tử $\le$ bậc của mẫu có TCN.

+) Hàm căn thức dạng: $y = \sqrt{} - \sqrt{}, y = \sqrt{} - bt, y = bt - \sqrt{}$ có TCN. (Dùng liên hợp)

+) Hàm $y = a^x, \left(0 < a \ne 1\right)$ có TCN $y = 0$

+) Hàm số $y = \log_a x, \left(0 < a \ne 1\right)$ có TCĐ $x = 0$

3. Cách tìm:

+) TCĐ: Tìm nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử.

+) TCN: Tính 2 giới hạn: $\lim\limits_{x \to +\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} y$

4. Chú ý:

+) Nếu $x \to +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \left|x\right| = x$

+) Nếu $x \to -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \left|x\right| = -x$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{x^2 - x}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D = \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; +\infty\right)$

Tiệm cận đứng:

$\lim\limits_{x \to 1^+} y = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{x\left(x - 1\right)} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} y = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{x\left(x - 1\right)} = -\infty$

Suy ra $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Tiệm cận ngang:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^4}}+3+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 3 \Rightarrow y=3 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^4}}+3+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 3 \Rightarrow y=3 \text{ là tiệm cận ngang}$$

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

Câu 2: Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{\left(mx^2-2x+1\right)\left(4x^2+4mx+1\right)}$ có đúng 1 đường tiệm cận là

A. $\{0\}$.

B. $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

C. $\varnothing$

D. $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$. Nên hàm số luôn có 1 đường tiệm cận ngang $y=0$. Vậy ta tìm điều kiện để hàm số không có tiệm cận đứng.

Xét phương trình: $\left(mx^2-2x+1\right)\left(4x^2+4mx+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} mx^2-2x+1=0 & (1) \\ 4x^2+4mx+1=0 & (2) \end{array}\right.$

TH1: Xét $m=0$, ta được $y=\dfrac{2x-1}{(-2x+1)\left(4x^2+1\right)}=-\dfrac{1}{4x^2+1}$ (thỏa ycbt)

TH2: Xét $m\neq 0$. Có: $\Delta_1=1-m$ và $\Delta_2=4m^2-4$

Th2a. Cả 2 phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm:

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m<0 \\ 4m^2-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ -1<m<1 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$

Th2b: (1) vô nghiệm, (2) có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$: ta thấy trường hợp này vô lí (vì $m>1$)

Th2c: (2) vô nghiệm, (1) có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$: ta thấy trường hợp này vô lí (vì $-1<m<1$)

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}(C)$. Gọi M là điểm bất kỳ trên (C), d là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Giá trị nhỏ nhất của d là

A. 5. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Tọa độ điểm M có dạng $M\left(x_0;\frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $x_0\neq 2$

Phương trình tiệm cận đứng, ngang lần lượt là $x-2=0\ (d_1)$, $y-2=0\ (d_2)$.

Ta có $d=d(M,d_1)+d(M,d_2)=|x_0-2|+\frac{1}{|x_0-2|}\geq 2$

Câu 4: Số điểm thuộc đồ thị (H) của hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có tổng các khoảng cách đến hai tiệm cậ của (H) nhỏ nhất là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn B

TCĐ: $x=-1$; TCN: $y=2$. Gọi $M\left(x;\frac{2x-1}{x+1}\right)\in(H)$

Tổng khoảng cạc từ M đến hai tiệm cận là:

$$d=|x+1|+\left|\frac{2x-1}{x+1}-2\right|=|x+1|+\frac{3}{|x+1|}\geq 2\sqrt{|x+1|.\frac{3}{|x+1|}}=2\sqrt{3}$$

$\Rightarrow d_{\min}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow |x+1|=\frac{3}{|x+1|}\Leftrightarrow (x+1)^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}-1\Rightarrow$ có tất cả 2 điểm thuộcd dồ thị (H) thỏa mãn đề bài.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\frac{2x-\sqrt{(m-1)x^2+1}}{x-1}$ c đúng hai tiệm cận ngang?

A. $m=1$ **B.** $m\in(1;4)\cup(4;+\infty)$ **C.** $m<1$ **D.** $m>1$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{(m-1)x^2+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{\sqrt{(m-1)x^2+1}}{x}}{1-\frac{1}{x}}=2-\sqrt{(m-1)}$ (với $m\geq 1$)

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{(m-1)x^2+1}}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{\sqrt{(m-1)x^2+1}}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\sqrt{\frac{(m-1)x^2+1}{x}}}{1-\frac{1}{x}} = 2+\sqrt{(m-1)}$$

Để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang thì $m>1$

Câu 6: Số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sqrt{mx^2-4x}-mx+1$ có tiệm cận ngang là:

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Hướng dẫn giải:

Chọn C

$y=x\sqrt{m-\frac{4}{x}}-mx+1$. Để hàm số có giới hạn hữu hạn tại vô cực thì hệ số của x phải triệt tiêu

+) $x\to-\infty \Rightarrow y=-x\sqrt{m-\frac{4}{x}}-mx+1$ suy ra hệ số của x là $-\sqrt{m}-m\neq 0$ nên giới hạn này không hữu hạn.

+) $x\to+\infty \Rightarrow y=x\sqrt{m-\frac{4}{x}}-mx+1$ suy ra hệ số của x là $\sqrt{m}-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$

Với $m=0$ thay trở lại hàm số không xác định khi $x\to+\infty$

Với $m=1$

$$\Rightarrow y=\sqrt{x^2-4x}-x+1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-4x}+x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x-1}{\sqrt{x^2-4x}+x+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

Vậy có một giá trị thực của m để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

Câu 7: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Cho hàm số $y=\frac{ax^2+x-1}{4x^2+bx+9}$ có đồ thị (C) (a,b là các hằng số dương, $ab=4$). Biết rằng (C) có tiệm cận ngang $y=c$ và có đúng 1 tiệm cận đứng. Tính tổng $T=3a+b-24c$

A. $T=1$. **B.** $T=4$. **C.** $T=7$. **D.** $T=11$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\frac{a}{4}$. Tiệm cận ngang $y=c \Rightarrow \frac{a}{4}=c$.

(C) có một tiệm cận đứng nên phương trình $4x^2+bx+9=0$ có nghiệm kép.

$\Delta=0\Leftrightarrow b^2-144=0\Leftrightarrow b=\pm 12$. Vì $b>0\Rightarrow b=12\Rightarrow a=\dfrac{1}{3}\Rightarrow c=\dfrac{1}{12}$.

Vậy $T=11$.

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số (C) tạ với hai đường tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Khi đó khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến Δ bằng?

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Phương pháp tự luận

□ Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-2}{x_0+1}\right)\in(C)$, $(x_0\neq -1)$, $I(-1;1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-2}{x_0+1}.$$

□ Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(-1;\dfrac{x_0-5}{x_0+1}\right)$.

□ Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B(2x_0+1;1)$.

□ Ta có $IA=\dfrac{6}{|x_0+1|}$, $IB=2|x_0+1|\Rightarrow IA.IB=12$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIAB l

$S_{IAB}=pr$, suy ra

$$r=\frac{S_{IAB}}{p}=\frac{IA.IB}{IA+IB+AB}=\frac{IA.IB}{IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}}\le\frac{IA.IB}{2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2.IA.IB}}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

□ Suy ra $r_{\max}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow |x_0-1|^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1-\sqrt{3}\\ x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

□ $\overrightarrow{IM}\left(\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{6}$.

Phương pháp trắc nghiệm

□ $IA=IB\Rightarrow\Delta IAB$ vuông cân tại $I\Rightarrow IM\perp\Delta$.

□ $cx_M+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_M+1=\pm\sqrt{|1+2|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1-\sqrt{3}\\ x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{6}$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. $m=0$ **B.** $m<0$ **C.** $m>0$ **D.** $m>3$

Hướng dẫn giải:

Đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có hai đường tiệm cận ngang khi và chỉ khi các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} y=a\left(a\in\mathbb{R}\right),\lim\limits_{x\to-\infty} y=b\left(b\in\mathbb{R}\right)$ tồn tại. Ta có:

+ với $m=0$ ta nhận thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty,\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$ suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

+ Với $m<0$, khi đó hàm số có TXĐ $D=\left(-\sqrt[4]{-\frac{3}{m}};\sqrt[4]{-\frac{3}{m}}\right)$, khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty} y,\lim\limits_{x\to-\infty} y$ không tồn tại suy ra đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

+ Với $m>0$, khi đó hàm số có TXĐ $D=\mathbb{R}$ suy ra $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{m+\frac{3}{x^2}}},\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{x^2\sqrt{m+\frac{3}{x^4}}}=\frac{1}{\sqrt{m}}$

suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang.

Vậy $m>0$ thỏa YCBT.

Chọn C.

Câu 10: Cho hàm số $y=\frac{2mx+m}{x-1}$. Với giá trị nào của tham số m thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

A. $m=2$. **B.** $m=\pm\frac{1}{2}$. **C.** $m=\pm4$. **D.** $m\ne\pm2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Để đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận thì $m\ne0$.

Khi đó đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận là $x=1,y=2m$. Hình chữ nhật tạo bởi 2 tiệm cận và 2 trục tọa độ có diện tích là $\left|2m\right|.1=8\Leftrightarrow m=\pm4$

Câu 11: Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-2}$, có đồ thị (C). Gọi P, Q là 2 điểm phân biệt nằm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ P hoặc Q tới 2 đường tiệm cận là nhỏ nhất. Độ dài đoạn thẳng PQ là:

A. $4\sqrt{2}$ **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** 4 **D.** $2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ có tiệm cận ngang y = 1 và tiệm cận đứng x = 2. Suy ra tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là I (2;1)

Gọi $P\left(x_0;\dfrac{x_0+2}{x_0-2}\right)\in(C)$. Khi đó tổng khoảng cách từ P đến hai đường tiệm cận

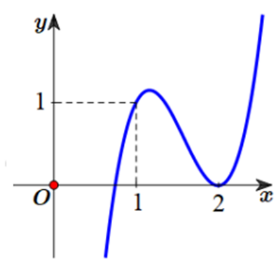
$S=d(A,d_1)+d(A,d_2)=|x_0-2|+\left|\dfrac{x_0+3}{x_0-3}-1\right|=|x_0-2|+\left|\dfrac{4}{x_0-3}\right|\ge 2\sqrt{|x_0-2|.\left|\dfrac{4}{x_0-2}\right|}=4$

$\Rightarrow S_{\min}=4\Leftrightarrow|x_0-2|=\left|\dfrac{4}{x_0-2}\right|\Leftrightarrow(x_0-2)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0-2=2\\x_0-2=-2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=4;y=-3\\x_0=0;y=-1\end{array}\right.$

$\Rightarrow P(4;-3),Q(0;-1)$

$\Rightarrow PQ=4\sqrt{2}$.

Câu 12: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm s $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Dễ thấy $x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số vì TXĐ: $x\ge 1$.

Ta xét phương trình: $f^2(x)-f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=0 & (1)\\f(x)=1 & (2)\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy rằng

□ Phương trình (1), có hai nghiệm phân biệt là $x_1<1;x_2=2$ (nghiệm kép).

□ Phương trình (2), có ba nghiệm phân biệt là $x_3=1;x_4\in(1;2);x_5>2$

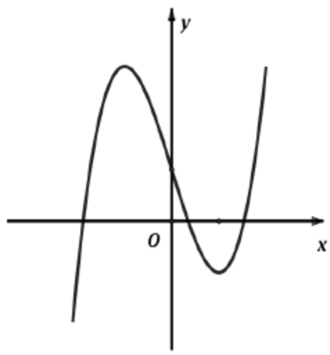
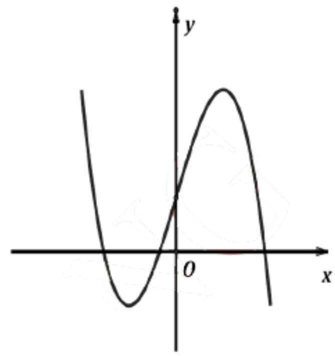
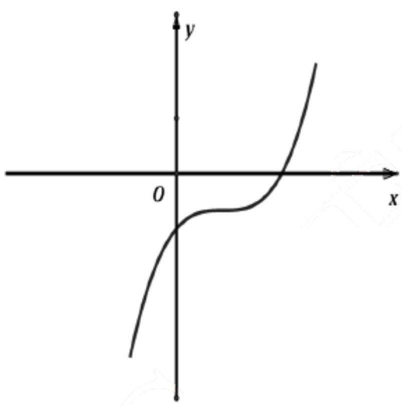
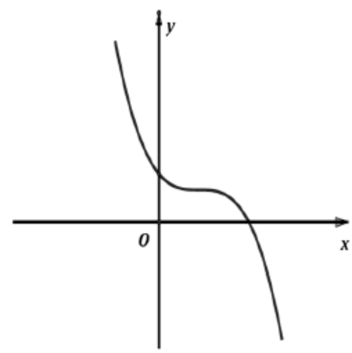
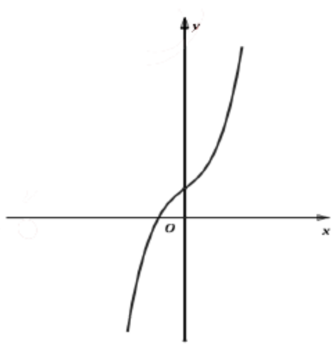
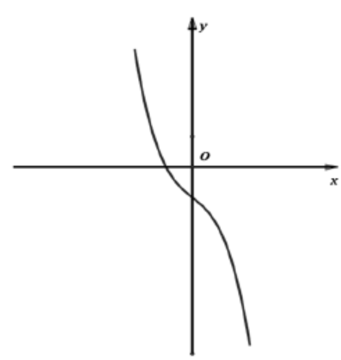
Do đó $f^2(x)-f(x)=(x-1)(x-2).h(x)$ suy ra $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x.h(x)}$.

Mà $h(x)=0$ có 3 nghiệm lớn hơn 1 $(2;x_4;x_5)\Rightarrow$ ĐTHS $y=g(x)$ có 3 đường TCĐ.

ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A – KIẾN THỨC CHUNG

1. Định hình hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

	a>0	***a<0***
$y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay $\Delta_{y'} > 0$		
$y' = 0$ có hai nghiệm kép hay $\Delta_{y'} = 0$		
$y' = 0$ vô nghiệm hay $\Delta_{y'} > 0$		

2. Đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c$

+) Đạo hàm: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{array}\right.$

+) Để hàm số có 3 cực trị: $ab < 0$

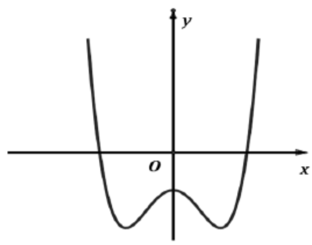
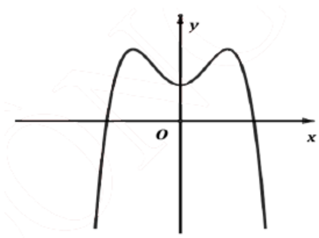
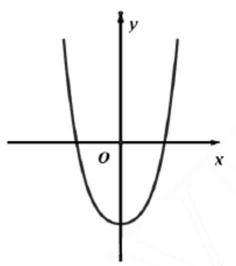
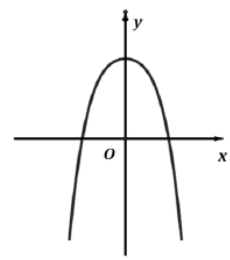
- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu

- Nếu $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$ hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu

+) Để hàm số có 1 cực trị $ab \ge 0$

- Nếu $\begin{cases} a>0 \\ b\ge 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực tiểu và không có cực đại

- Nếu $\begin{cases} a<0 \\ b\le 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và không có cực tiểu

	a>0	**a<0**
$y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt hay $ab<0$		
$y'=0$ có đúng 1 nghiệm hay $ab\ge 0$		

3. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

+) Tập xác định: $D=R\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

+) Đạo hàm: $y=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

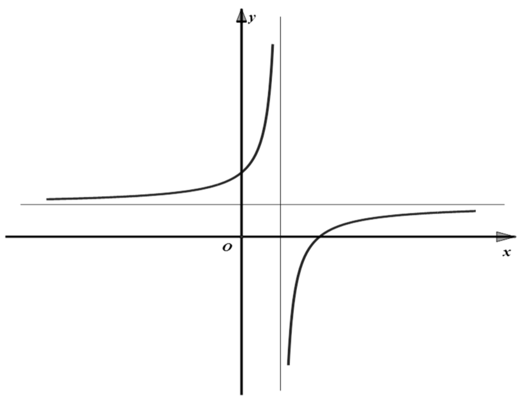
- *Nếu $ad-bc>0$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 2 và 4.*

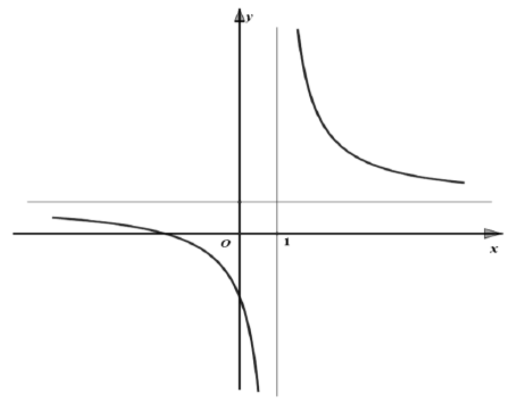
- *Nếu $ad-bc<0$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 1 và 3.*

+) Đồ thị hàm số có: TCĐ: $x=-\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y=\dfrac{a}{c}$

+) Đồ thị có tâm đối xứng: $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$

$ad-bc>0$	$ad-bc<0$





4. Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Dạng 1: Từ đồ thị (C) của hàm số $y=f\left(x\right)$, suy ra cách vẽ đồ thị (G) của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$

$$y=\left|f\left(x\right)\right|=\begin{cases} f\left(x\right) & \text{khi } f\left(x\right)\ge 0 \\ -f\left(x\right) & \text{khi } f\left(x\right)<0 \end{cases}$$

Suy ra $\left(G\right)=\left(C_1\right)\cup\left(C_2\right)$

+ $\left(C_1\right)$ là phần đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành $\left(y_{(C)}\ge 0\right)$.

+ $\left(C_2\right)$ là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục hoành $\left(y_{(C)}<0\right)$

Dạng 2: Từ đồ thị (C) của hàm số $y=f\left(x\right)$, suy ra cách vẽ đồ thị (H) của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$

Vì $\left|-x\right|=\left|x\right|$ nên $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là hàm số chẵn, suy ra đồ thị (H) nhận trục tung làm trục đối xứng. Vì Suy ra $(H)=\left(C_3\right)\cup\left(C_4\right)$

+ $\left(C_3\right)$ là phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung $\left(x\ge 0\right)$.

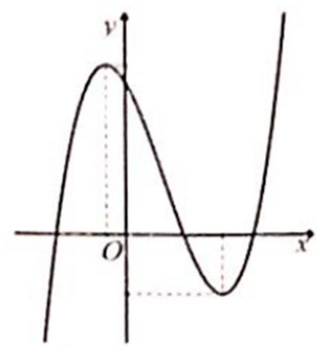
+ $\left(C_4\right)$ là phần đối xứng của $\left(C_3\right)$ qua trục tung.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 13: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây ***đúng***?

A. $a,d>0;b,c<0$. **B.** $a,b,c<0;d>0$.

C. $a,c,d>0;b<0$. **D.** $a,b,d>0;c<0$.



Lời giải: Theo đồ thị, ta có $a>0$ và hoành độ hai cực trị trái dấu suy ra $\frac{c}{a}<0 \Rightarrow c<0$.

Loại phương án B và **C.**

Điểm uốn của đồ thị có hoành độ dương. Suy ra $-\frac{b}{a}<0 \Rightarrow b<0$.

Chọn A.

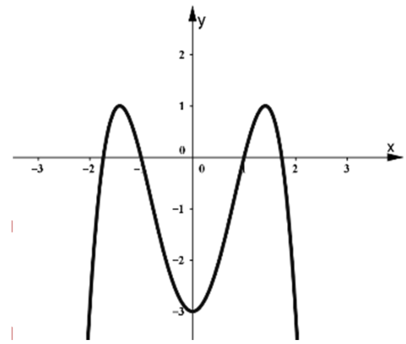
Câu 14: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a>0,\ b<0,\ c>0$

B. $a<0,\ b>0,\ c<0$

C. $a<0,\ b<0,\ c<0$

D. $a>0,\ b<0,\ c<0$



Hướng dẫn giải:

Do giới hạn của y khi x tiến tới vô cùng thì $-\infty$ nên $a<0$. Loại A và D

$y'=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right)$

Do $a<0$ mà nếu $b<0$ thì phương trình $2ax^2+b$ vô nghiệm

Nên $b>0$ thì hàm số mới có 3 cực trị.

Chọn B.

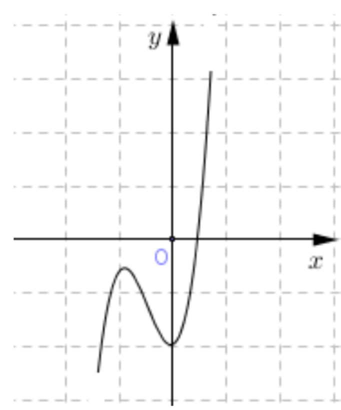
Câu 15: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?.

A. $a>0, b=0, c<0, d<0.$.

B. $a>0, b>0, c=0, d<0.$.

C. $a>0, b=0, c>0, d<0.$.

D. $a>0, b<0, c=0, d<0.$.



Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên $a>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tai điểm nằm dưới trục hoành nên $d<0$.

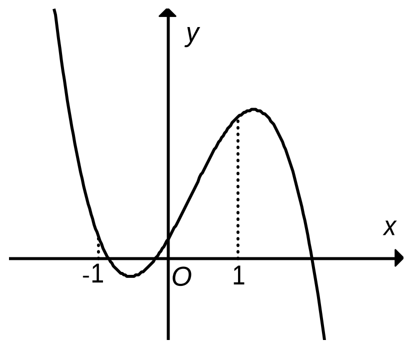
$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Đồ thị đạt cực tiểu tại $x = 0$ nên $y'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$

Đồ thị hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và cực đại tại $x_1 < 0 \Rightarrow x_1 + 0 = -\dfrac{2b}{3a} < 0 \Rightarrow b > 0$ (vì $a > 0$)

Vậy $a > 0, b > 0, c = 0, d < 0.$

Câu 16: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây đúng:

A. $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0.$ **B.** $a < 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0.$

C. $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d > 0.$ **D.** $a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0.$

Hướng dẫn giải:

Đồ thị hàm số thể hiện $a < 0$, cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

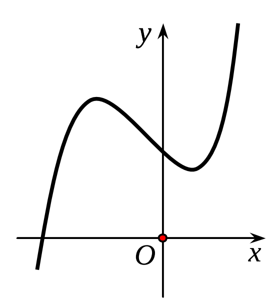
Đồ thị hàm số có $x_{\text{CD}} > 1,\ -1 < x_{\text{CT}} < 0 \longrightarrow \begin{cases} x_{\text{CD}} + x_{\text{CT}} > 0 \\ x_{\text{CD}}.x_{\text{CT}} < 0 \end{cases}$. $(*)$

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$. Do đó $(*) \leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{2b}{3a} > 0 \longrightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a<0} b > 0 \\ \dfrac{c}{3a} < 0 \longrightarrow \dfrac{c}{a} < 0 \xrightarrow{a<0} c > 0 \end{cases}$.

Vậy $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0.$

Chọn A.

Câu 17: Cho biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?



A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Từ đồ thị ta thấy có $a>0$ và có 2 cực trị $\Rightarrow y'=3ax^2+2bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt hay $\Delta=4b^2-12ac>0 \Leftrightarrow b^2-3ac>0.$

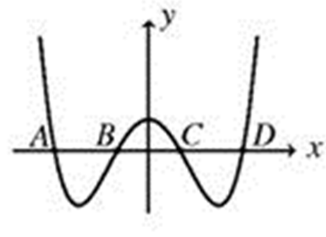
hình vẽ bên. Biết rằng $AB=BC=CD$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a>0,b<0,c>0,100b^2=9ac$.

B. $a>0,b>0,c>0,9b^2=100ac$.

C. $a>0,b<0,c>0,9b^2=100ac$.

D. $a>0,b>0,c>0,100b^2=9ac$.



Hướng dẫn giải:

Chọn C.

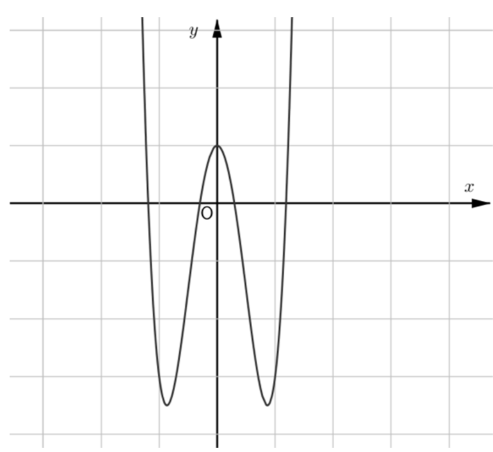
Đồ thị hàm số có hệ số $a>0$ và hàm số có 3 cực trị nên $b<0$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;c)$ nên $c>0$

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D như hình vẽ bên. Biết rằng $AB=BC=CD$ tức là phương trình $ax^4+bx^2+c=0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow at^2+bt+c=0$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa $t_2=9t_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1+t_2=10t_1 \\ t_1.t_2=9t_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10t_1=-\dfrac{b}{a} \\ 9t_1^2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=-\dfrac{b}{10a} \\ 9\left(-\dfrac{b}{10a}\right)^2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow 9b^2=100ac$$

Vậy $a>0,b<0,c>0,9b^2=100ac$

Câu 18: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?.



A. $a>0,b<0,c>0,b^2-4ac>0$.

B. $a>0,b<0,c>0,b^2-8ac>0$.

C. $a>0,b<0,c>0,b^2-4ac<0$.

D. $a<0,b>0,c>0,b^2-8ac<0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Vì: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$.

Giao trục tung tại điểm $A(0;c)$ có tung độ dương nên $c > 0$.

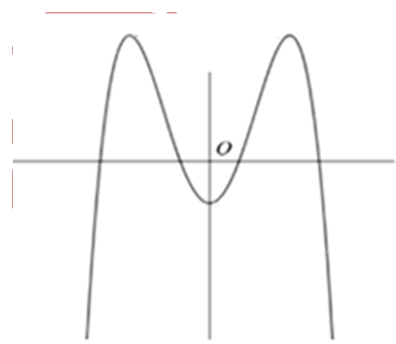
Hàm số có ba cực trị nên $a.b < 0$ do đó $b < 0$.

Hàm số có ba điểm cực trị là $A(0;c), B\left(-\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}; -\dfrac{b^2}{4a}+c\right), C\left(\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}; -\dfrac{b^2}{4a}+c\right)$.

Từ đồ thị ta có: $-\dfrac{b^2}{4a}+c < 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0.$

Câu 19: Cho hàm số $+y = ax^4 + bx^2 + c\,(c \neq 0)$ có đồ thị sau:.

Xét dấu a, b, c



A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c < 0$.

C. $a < 0, b > 0, c < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Hàm số có nhánh phải đi xuống nên $a < 0$.

Hàm số có 3 cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

Hàm số cắt trục tung tại tung độ âm nên $c < 0$

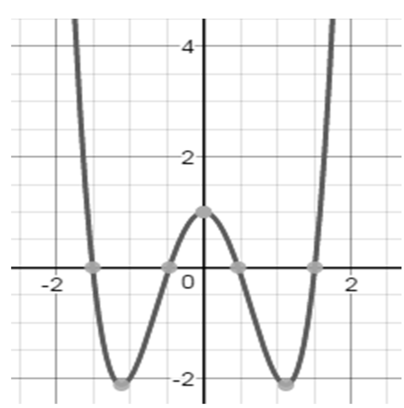
Câu 20: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c > 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0$.

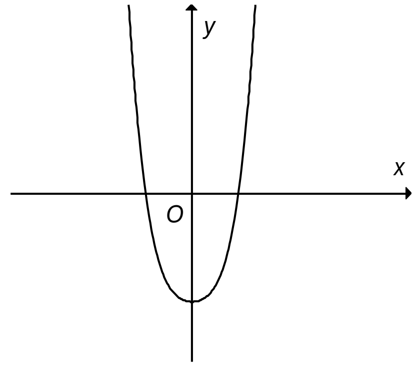


Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ là số dương nên suy ra $c > 0$

Câu 21: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Kết luận nào sau đây đúng?



A. $a > 0;\ b \geq 0;\ c < 0.$

B. $a > 0;\ b < 0;\ c \leq 0.$

C. $a > 0;\ b \geq 0;\ c > 0.$

D. $a < 0;\ b < 0;\ c < 0.$

Hướng dẫn giải:

Dựa vào dáng điệu đồ thị suy ra $a > 0$.

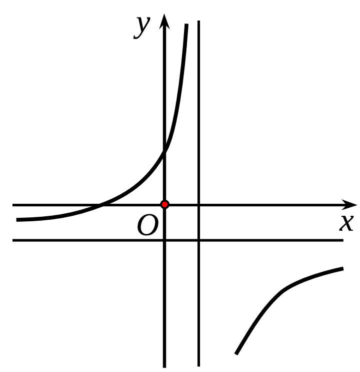
Hàm số có 1 điểm cực trị nên $ab \geq 0 \longrightarrow b \geq 0.$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0.$

Vậy $a > 0;\ b \geq 0;\ c < 0.$

Chọn A.

Câu 22: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0$.

B. $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$.

C. $a < 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$.

D. $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d < 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

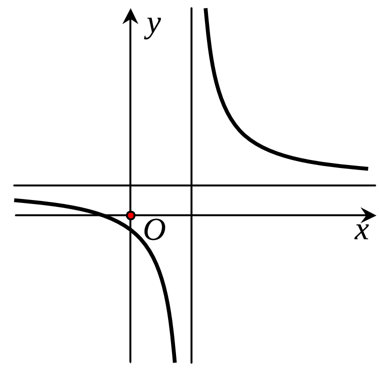
Từ hình vẽ tiệm cận ngang, tiệm cận đứng, giao của đồ thị với trục tung và trục hoành ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{c} < 0 \\ -\dfrac{d}{c} > 0 \\ -\dfrac{b}{a} < 0 \\ \dfrac{b}{d} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ \text{cd} < 0 \\ ab > 0 \\ \text{bd} > 0 \end{cases}$$

Ta có a, b, d cùng dấu nhau và c trái dấu a, b, d.

Câu 23: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $b > 0, c < 0, d < 0$.



B. $b>0,c>0,d<0$.

C. $b<0,c>0,d<0$.

D. $b<0,c<0,d<0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Từ đồ thị ta có:

* Tiệm cận ngang $\begin{cases} y=\dfrac{a}{c}>0 \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow c>0$.

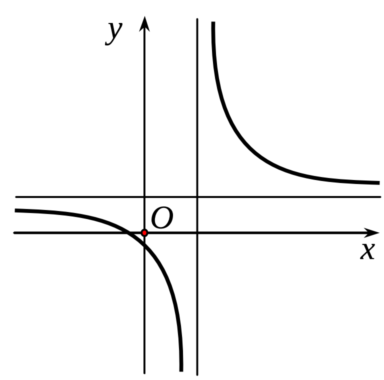
Loại $b>0,c<0,d<0$ và $b<0,c<0,d<0$.

Còn lại $b>0,c>0,d<0$, $b<0,c>0,d<0$.

* Tiệm cận đứng $\begin{cases} x=-\dfrac{d}{c}>0 \\ c>0 \end{cases} \Rightarrow -d>0 \Rightarrow d<0$.

* Cho $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{b}{d}<0 \Rightarrow b>0$. Chọn $b>0,c>0,d<0$.

Câu 24: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $bc>0,\ ad<0$.

B. $ac>0,\ bd>0$.

C. $bd<0,\ ad>0$.

D. $ab<0,\ cd<0$.

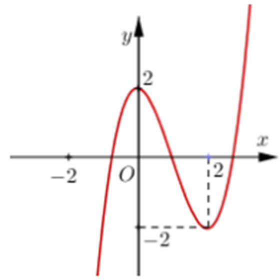
Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Từ hình vẽ tiệm cận ngang, tiệm cận đứng, giao của đồ thị với trục tung và trục hoành ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{c}>0 \\ -\dfrac{d}{c}>0 \\ -\dfrac{b}{a}<0 \\ \dfrac{b}{d}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac>0 \\ cd<0 \\ ab>0 \\ \text{bd<0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad<0 \\ bc>0 \end{cases}.$$

Câu 25: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$. có đồ thị như hĩnh vẽ sau



Tính $S=a+b$

A. $S=1$ **B.** $S=0$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=-1$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

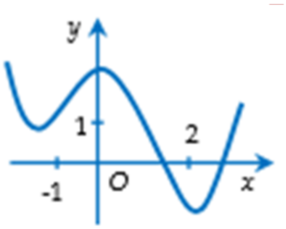
Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số đi qua 2 điểm cực trị $A(0;2),B(2;-2)$

Điểm $A(0;2)$ là điểm cực đại suy ra $\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=2 \end{cases} (1)$

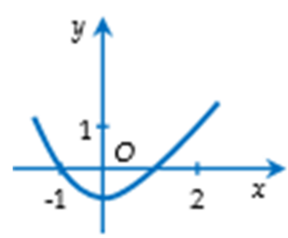
Điểm $B(2;-2)$ là điểm cực đại suy ra $\begin{cases} y'(2)=0 \\ y'(2)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a+4b+c=0 \\ 8a+4b+2c+d=-2 \end{cases} (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $a=1,b=-3,c=0,d=2$. Vậy tổng $a+b=1-3=-2$

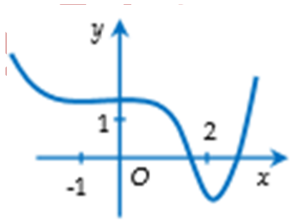
Câu 26: Một trong số các đồ thị dưới đây là đồ thị của hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mã $g'(0)=0, g''(x)<0, \forall x\in(-1;2)$. Hỏi đó là đồ thị nào?



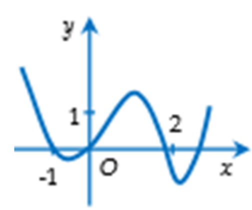
A.



B.



C.



D.

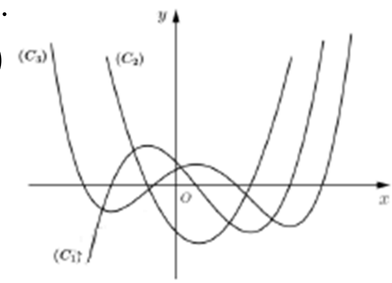
Hướng dẫn giải:

Vì hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\begin{cases} g'(x)=0 \\ g''(x)<0 \end{cases} \Rightarrow g(x)$ đạt cực đại tại $x=0$

Quan sát bốn đồ thị hàm số thấy chỉ có đồ thị hàm số A đạt cực đại tại $x=0$

Chọn A

Câu 27: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của các hàm số $y=f\left(x\right), y=f'\left(x\right)$ và $y=f''\left(x\right)$ lần lượt là các đường cong nào trong hình vẽ bên.



A. $\left(C_1\right),\left(C_3\right),\left(C_2\right)$

B. $\left(C_3\right),\left(C_2\right),\left(C_1\right)$

C. $\left(C_3\right),\left(C_1\right),\left(C_2\right)$

D. $\left(C_1\right),\left(C_2\right),\left(C_3\right)$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng:

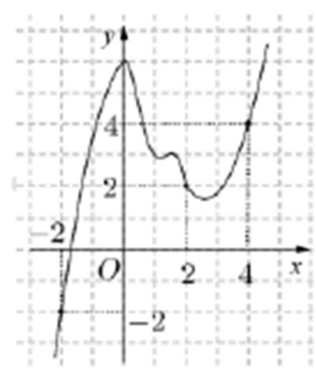
Đồ thị $\left(C_3\right)$ có dạng đồ thị hàm số trùng phương.

Đồ thị $\left(C_2\right)$ có dạng đồ thị hàm số bậc hai (parabol)

Đồ thị $\left(C_1\right)$ có dạng đồ thị hàm số bậc ba

Vậy đồ thị của các hàm số $y=f\left(x\right), y=f'\left(x\right), y=f''\left(x\right)$ lần lượt là $\left(C_3\right),\left(C_1\right)\left(C_2\right)$

Câu 28: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị của hàm số $y-f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Đặt $h\left(x\right)=f\left(x\right)-x$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $h\left(0\right)=h\left(4\right)+2<h\left(2\right)$

B. $h\left(1\right)+1=h\left(4\right)<h\left(2\right)$

C. $h\left(-1\right)<h\left(0\right)<h\left(2\right)$

D. $h\left(2\right)<h\left(4\right)<h\left(0\right)$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

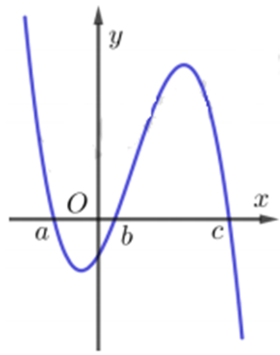
Ta có $h\left(x\right)=f\left(x\right)-x$ suy ra $h'\left(x\right)=f'\left(x\right)-1$

Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ cắt đường thẳng $y=1$ tại điểm có hoành độ $x_0\in\left(-2;-1\right)$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy $f'\left(x\right)>1$ trên khoảng $\left(x_0;+\infty\right)\Rightarrow h'\left(x\right)>0, \forall x\in\left(x_0;+\infty\right)$

Suy ra $h\left(x\right)$ là hàm số đồng biến trên $\left(x_0;+\infty\right)$. Vậy $h\left(-1\right)<h\left(0\right)<h\left(2\right)$

Câu 29: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ.



Xét 4 mệnh đề sau

$\left(1\right): f\left(c\right)>f\left(a\right)>f\left(b\right)$

$\left(2\right): f\left(c\right)>f\left(b\right)>f\left(a\right)$

$\left(3\right): f\left(a\right)>f\left(b\right)>f\left(c\right)$

$\left(4\right): f\left(a\right)>f\left(b\right)$

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng

A. 4 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Trên khoảng $\left(a;b\right)$ ta có: $f'\left(x\right)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(a;b\right)$

Ta có $f\left(a\right)>f\left(b\right)$

Tương tự trên khoảng $\left(b;c\right)$ có $f'\left(x\right)>0$ nên hàm số đồng biến trên $\left(b;c\right)$ suy ra $f\left(c\right)>f\left(b\right)$

(Đến đây rõ ràng ra suy ra được 4 đúng và 1 trong 2 ý (1) và (2) có 1 ý đúng ta sẽ suy ra đáp án cần chọn là C)

Chặt chẽ hơn: Dựa vào đồ thị ta thấy

$$S_2=\int_b^c f'\left(x\right)dx>S_1=-\int_a^b f'\left(x\right)dx\Rightarrow f\left(c\right)-f\left(b\right)>f\left(a\right)-f\left(b\right)$$

Do đó $f\left(c\right)>f\left(a\right)>f\left(b\right)$

SỰ TƯƠNG GIAO

A – KIẾN THỨC CHUNG

Để biện luận theo m về số giao điểm của hai hàm số và thỏa mãn các điều kiện về tính chất hình học phẳng Oxy thì ta làm các bước sau:

Bước 1: TXĐ:

Bước 2: Phương trình hoành độ giao điểm và đưa về dạng: $f(x,m)=g(x,m)\Leftrightarrow F(x,m)=0$

Sử dụng biệt thức Δ, hoặc đưa về phương trình tích hoặc dùng đồ thị để biện luận số giao điểm của hai hàm số.

Bước 3: Dựa theo yêu cầu của đề bài mà ta sử dụng các công thức biến đổi của hình học phẳng như: vectơ, tích vô hướng, khoảng cách, hình chiếu, điểm đối xứng,…

Bước 4: Giải và kết luận giá trị của tham só m.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I - SỰ TƯƠNG GIAO BẰNG SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Câu 1: Biết rằng đồ thị của hàm số $y=P(x)=x^3-2x^2-5x+2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt lần lượt có hoành độ là x_1,x_2,x_3. Khi đó giá trị của biểu thức $T=\dfrac{1}{x_1^{\ 2}-4x_1+3}+\dfrac{1}{x_2^{\ 2}-4x^2+3}+\dfrac{1}{x_3^{\ 2}-4x_3+3}$ bằng

A. $T=\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{P'(1)}{P(1)}+\dfrac{P'(3)}{P(3)}\right]$

B. $T=\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{P'(1)}{P(1)}-\dfrac{P'(3)}{P(3)}\right]$

C. $T=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{P'(1)}{P(1)}-\dfrac{P'(3)}{P(3)}\right]$

D. $T=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{P'(1)}{P(1)}+\dfrac{P'(3)}{P(3)}\right]$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Ta có: $T=\dfrac{1}{(x_1-1)(x_1-3)}+\dfrac{1}{(x_2-1)(x_2-3)}+\dfrac{1}{(x_3-1)(x_3-3)}$

$\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{x_1-3}+\dfrac{1}{x_2-3}+\dfrac{1}{x_3-3}\right)-\left(\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}+\dfrac{1}{x_3-1}\right)\right]$ vì $\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-1}$.

Vì x_1,x_2,x_3 là 3 nghiệm của phương trình $P(x)=0\Rightarrow P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Suy ra $P'(x)=(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_3)(x-x_1)$

$\Rightarrow\dfrac{P'(x)}{P(x)}=\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_3)+(x-x_3)(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{1}{x-x_3}$ (*).

Thay $x=1,x=3$ vào biểu thức (*), ta được $T=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{P'(x)}{P(1)}-\dfrac{P'(3)}{P(3)}\right]$.

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoàn độ lần lượt là x_1,x_2,x_3. Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}$.

A. $T=\dfrac{1}{3}$ **B.** $T=3$ **C.** $T=1$ **D.** $T=0$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Vì x_1,x_2,x_3 là ba nghiệm của phương trình $f(x)=0\Rightarrow f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Ta có $f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+a(x-x_2)(x-x_3)+a(x-x_3)(x-x_1)$.

Khi đó

$$\begin{cases} f'(x_1)=a(x_1-x_2)(x_1-x_3) \\ f'(x_2)=a(x_2-x_3)(x_2-x_1) \\ f'(x_3)=a(x_3-x_1)(x_3-x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{a(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{1}{a(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{1}{a(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$=\frac{1}{a(x_1-x_2)(x_1-x_3)}-\frac{1}{a(x_1-x_2)(x_2-x_3)}+\frac{1}{a(x_1-x_3)(x_2-x_3)}$$

$$=\frac{x_2-x_3-x_1+x_3+x_1-x_2}{a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=0.$$

Câu 3: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -8+4a-2b+c>0 \\ 8+4a+2b+c<0 \end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$ nên tồn tại số $M>2$ sao cho $y(M)>0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$ nên tồn tại số $m<-2$ sao cho $y(m)<0$; $y(-2)=-8+4a-2b+c>0$ và $y(2)=8+4a+2b+c<0$.

Do $y(m).y(-2)<0$ suy ra phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(m;-2)$.

$y(-2).y(2)<0$ suy ra phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2;2)$.

$y(2).y(M)<0$ suy ra phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(2;M)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox có 3 điểm chung.

Câu 4: Biết đường thẳng $y=(3m-1)x+6m+3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;\frac{3}{2})$. **D.** $(\frac{3}{2};2)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng

$x^3-3x^2+1=(3m-1)x+6m+3 \Leftrightarrow x^3-3x^2-(3m-1)x-6m-2=0$.

Giả sử phương trình $x^3-3x^2-(3m-1)x-6m-2=0$ có ba nghiệm x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_2=\frac{x_1+x_3}{2}$ (1).

Mặt khác theo viet ta có $x_1+x_2+x_3=3$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $x_2=1$. Tức $x=1$ là một nghiệm của phương trình trên. Thay $x=1$ vào phương trình ta được $m=-\frac{1}{3}$.

Thử lại $m=-\frac{1}{3}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{m-x}{x+2}(H_m)$ và đường thẳng $d:2x+2y-1=0$ giao nhau tại hai điểm cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích là $S=\frac{3}{8}$.

A. $m=3$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Hướng dẫn giải:

Hoành độ giao điểm A, B của d và (H_m) là các nghiệm của phương trình: $\frac{-x+m}{x+2}=-x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2+x+2(m-1)=0, x\neq -2, \quad (1)$

Phương trình (1) có 2 nghiệm x_1,x_2 phân biệt khác -2:

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=17-16m>0\\ 2.(-2)^2-2+2(m-1)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\frac{17}{16}\\ m\neq -2\end{cases}$$

Ta có:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{2}.\sqrt{(x_2-x_1)^2}$$

$$=\sqrt{2}.\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17-16m}$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ đến d là $h=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Suy ra $S_{OAB}=\frac{1}{2}.h.AB=\frac{1}{2}.\frac{1}{2\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17-16m}=\frac{3}{8}\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn)

Chọn A.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{2x}{x-2}(H)$ và đườn thẳng $d: y=x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị sa cho khoảng cách giữa hai điểm đó là nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

A. $m=4$ và $\sqrt{30}$. **B.** $m=\frac{1}{2}$ và $\sqrt{31}$. **C.** $m=0$ và $\sqrt{32}$. **D.** $m=-1$ và $\sqrt{33}$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x}{x-2}=x+m\Leftrightarrow x^2+(m-4)x-2m=0,\quad (1)$$

Để d cắt (H) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2+16\\ -4\neq 0\end{cases},\forall m\quad (2)$$

Giả sử $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ là hai giao điểm khi đó x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1)

Thei viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=4-m\\ x_1.x_2=-2m\end{cases}\quad (3)$

$y_1=x_1+m,\ \ y_2=x_2+m$

Để A, B thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị thì A và B nằm khác phía đối với đường thẳn $x-2=0$.

A và B nằm khác phía đối với đường thẳng $x-2=0$ khi và chỉ khi $(x_1-2)(x_2-2)<0$ hay

$x_1.x_2-2(x_1+x_2)+4<0,\quad (4)$

Tahy (3) vào (4) ta được $-4<0$ luôn đúng (5). Mặt khác ta lại có

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2(x_1+x_2)^2-8x_1x_2}\quad (6)$$

Tahy (3) vào (6) ta được: $AB=\sqrt{2m^2+32}\geq\sqrt{32}$ vậy $AB=\sqrt{32}$ nhỏ nhất khi $m=0\quad (7)$

Từ (1), (5), (7) ta có $m=0$ và $AB=\sqrt{32}$ thỏa mãn.

Chọn C.

Nhận xét: Đối với các bài khoảng cách như Câu 1 và 2, thì có cách nào tính khoảng cách AI nhanh nhất không?

Chúng ta khẳng định là có.

Thật vậy, ta có bài tổng quát: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ và đường thẳng $y=mx+n,\left(m\ne 0\right)$

Gọi A, B là hai điểm mà đường thẳng cắt hàm số. Giả sử $A\left(x_1;y_1\right),B\left(x_2;y_2\right)$ là 2 giao điểm, khi đó x_1,x_2 là 2 nghiệm phương trình: $f\left(x\right)=mx+n,\left(1\right)$

$$AB=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(m\left(x_1-x_2\right)\right)^2}=\sqrt{\left(1+m^2\right)\left(x_1-x_2\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(1+m\right)^2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right)}=\frac{1}{m}\sqrt{\left(1+m^2\right)\Delta}$$

Với Δ được tính từ phương trình (1).

+Nếu AB nhỏ nhất thì Δ nhỏ nhất.

Ta có thể xét bài tập sau đây:

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}\left(H\right)$ và đường thẳng $d:y=x+m2x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt *A*, *B* thuộc 2 nhánh khác nhau. Xác định *m* để đoạn *AB* có độ dài ngắn nhất.

A. $m=5$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=0$. **D.** $m=-1$.

Hướng dẫn giải:

Để đường thẳng d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt thì phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+1}{x-1}=2x+m$ có hai nghiệm phân biệt với mọi m và $x_1<1<x_2$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=\left(x-1\right)\left(2x+m\right)\\ x\ne 1\end{cases}\text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1<1<x_2.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+\left(m-3\right)x-m-1=0\left(*\right)\\ x\ne 1\end{cases}\text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1<1<x_2.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ f\left(1\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(m+1\right)^2+16>0,\forall m\\ f\left(1\right)=2+\left(m-3\right)-m-1=-2<0\end{cases}$$

Vậy với mọi giá trị m thì đường thẳng d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai nhánh khác nhau.

Gọi $A\left(x_1;2x_1+m\right),B\left(x_2;2x_2+m\right)$ là giao điểm giữa d và (H).

(x_1,x_2 là 2 nghiệm phương trình (*))

Ta có:

$$AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(2\left(x_2-x_1\right)\right)^2}=\sqrt{5\left(x_2-x_1\right)^2}=\sqrt{5\left(\left(x_2+x_1\right)^2-4x_1x_2\right)}$$

Theo viet ta có: $AB=\dfrac{1}{2}\sqrt{5\left[\left(m+1\right)^2+16\right]}\ge 2\sqrt{5}$

$AB_{\min} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow m = -1$

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét: Vậy ta có thể tính theo công thức tính nhanh ở trên $AB = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+2^2\right)\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{5\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{5\left(\left(m+1\right)^2+16\right)} \to \min$

Khi $\Delta \to \min$. vậy $m = -1$.

Chọn D.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}\left(H\right)$ và đường thẳng $d: y = x + m2x + m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt *A*, *B* sao cho $AB = \sqrt{5}$.

A. $m = 4$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 0$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = 10 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$2x^2 + mx + m + 2 = 0, \left(x \neq -1\right), \quad \left(1\right)$

(d) cắt (H) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m - 16 > 0\left(2\right) \\ x \neq -1 \end{cases}$

Gọi $A\left(x_1; y_1\right)$ và $B\left(x_2; y_2\right)$ là giao điểm giữa d và (H). Ta có x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1).

$AB = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+2^2\right)\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{5\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{5\left(m^2 - 8m - 16\right)} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow m^2 - 8m - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 10 \\ m = -2 \end{array}\right.$

Thỏa mãn (2).

Chọn D.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $y = x + m - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

A. $m = 4 \pm \sqrt{10}$. **B.** $m = 4 \pm \sqrt{3}$. **C.** $m = 2 \pm \sqrt{3}$. **D.** $m = 2 \pm \sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Hoành độ giao điểm là nghiệm PT: $\frac{2x+1}{x+1} = x + m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right) = x^2 + \left(m-2\right)x + m - 2 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$.

Đường thẳng $y = x + m - 1$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f\left(x\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1, hay

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f\left(-1\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 12 > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 2 \\ m > 6 \end{array}\right. \left(*\right).$$

Khi đó, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $f\left(x\right) = 0$, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - m \\ x_1 x_2 = m - 2 \end{cases}$ (Viète).

Giả sử $A\left(x_1; x_1 + m - 1\right), B\left(x_2; x_2 + m - 1\right) \Rightarrow AB = \sqrt{2}\left|x_2 - x_1\right|$.

Theo giả thiết $AB = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{2}\left|x_2 - x_1\right| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 = 6 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow m = 4 \pm \sqrt{10}$$

Kết hợp với điều kiện $\left(*\right)$ ta được $m = 4 \pm \sqrt{10}$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của a và b sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}\left(C\right)$ và đường thẳng $d: y = ax + b$ giao nhau tại hai điểm phân biệt, đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: x - 2y + 3 = 0$.

A. $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình của Δ được viết lại dưới dạng $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Để giao điểm đối xứng qua Δ thì $\Delta \perp d \Leftrightarrow a.\dfrac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow a = -2$.

Suy ra đường thẳng $d: y = -2x + b$

Phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C):

$\dfrac{x-1}{x+1} = -2x + b \Leftrightarrow 2x^2 - \left(b-3\right)x - \left(b+1\right) = 0.$ (1)

Để d và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow b^2 + 2b + 17 > 0 \Rightarrow \forall b \in \mathbb{R}$

Goi I là trung điểm của AB, ta có: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{b-3}{4} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{b+3}{2} \end{cases}$

Vì A, B đối xứng nhau qua Δ nên trung điểm I thuộc vào đường thẳng Δ, ta có:

$x_I - 2y_I + 3 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{b-3}{4} - \left(b+3\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow b = -1.$

Vậy $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ thỏa ycbt.

Chọn A.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}(C)$ và đường thẳn $d: y = mx + 3$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O. ((là gốc tọa độ)

A. $m = 3 \pm \sqrt{5}.$ **B.** $m = 3 - \sqrt{5}.$ **C.** $m = 3 + \sqrt{5}$. **D.** $m = 2 \pm \sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Pt hoành độ gia điểm: $\dfrac{2x+1}{x-1} = mx + 3, (x \neq 1) \Leftrightarrow mx^2 - (m-1)x - 4 = 0, (1)$

(d) cắt đồ thị hàm số (C) tại A, B khi và chỉ khi pt (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1, nên:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-1} = mx + 3, (x \neq 1) \Leftrightarrow mx^2 - (m-1)x - 4 = 0, (1) \\ m.1^2 - (m-1).1 - 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -7 - 4\sqrt{3} \\ m > -7 + 4\sqrt{3} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A.x_B + (mx_A + 3)(mx_B + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 1)(x_A.x_B) + 3m(x_A + x_B) + 9 = 0, (2)$$

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{m-1}{m} \\ x_A.x_B = -\dfrac{4}{m} \end{cases}, (3)$

Thay (3) vào (2) ta được: $m^2 - 6m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \pm \sqrt{5}$

Vậy với $m = 3 \pm \sqrt{5}.$ thỏa mãn ycbt.

Chọn A.

Câu 12: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2;5)$. Tìm các giá trị của tham số m đ đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giá PAB đều.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là:

A. $m = 1, m = -5$ **B.** $m = 1, m = 4$ **C.** $m = 6, m = -5$ **D.** $m = 1, m = -8$

Hướng dẫn giải:

$\frac{2x-1}{x+1}=-x+m \Leftrightarrow x^2-(m-3)x-m-1=0 \ (1)$, với $x \neq -1$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m+13>0 \\ 0.m-3 \neq 0 \end{cases}$ (đúng $\forall m$)

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1), ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m-3 \\ x_1x_2=-m-1 \end{cases}$

Giả sử $A(x_1;-x_1+m)$, $B(x_2;-x_2+m)$

Khi đó ta có: $AB=\sqrt{2(x_1-x_2)^2}$

$PA=\sqrt{(x_1-2)^2+(-x_1+m-5)^2}=\sqrt{(x_1-2)^2+(x_2-2)^2}$,

$PB=\sqrt{(x_2-2)^2+(-x_2+m-5)^2}=\sqrt{(x_2-2)^2+(x_1-2)^2}$

Suy ra ΔPAB cân tại P

Do đó ΔPAB đều $\Leftrightarrow PA^2=AB^2$

$\Leftrightarrow (x_1-2)^2+(x_2-2)^2=2(x_1-x_2)^2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2+4(x_1+x_2)-6x_1x_2-8=0$

$\Leftrightarrow m^2+4m-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-5 \end{array}\right.$. Vậy giá trị cần tìm là $m=1,\ m=-5$.

Chọn C.

Câu 13: Cho hàm số $y=\frac{2x-4}{x+1}$ có đồ thi (C) điểm $A(-5;5)$. Tìm m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành (O là gốc toạ độ).

A. $m=0$ **B.** $m=0;m=2$ **C.** $m=2$ **D.** $m=-2$

Hướng dẫn giải:

Do các điểm O và A thuộc đường thẳng $\Delta: y=-x$ nên để $OAMN$ là hình bình hành thì $MN=OA=5\sqrt{2}$

Hoành độ của M và N là nghiệm của pt:

$\frac{2x-4}{x+1}=-x+m \Leftrightarrow x^2+(3-m)x-(m+4)=0 \ (x \neq -1) \ (1)$

Vì $\Delta=m^2-2m+25>0, \forall m$,nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt

Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của (1) ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 3 \\ x_1x_2 = -(m+4) \end{cases}$

Gọi

$M(x_1; -x_1 + m), N(x_2; -x_2 + m) \Rightarrow MN^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = 2m^2 - 4m + 50$

$MN = 5\sqrt{2} \Rightarrow 2m^2 - 4m + 50 = 50 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 0 \end{array}\right.$

+ $m = 0$ thì O, A, M, N thẳng hàng nên không thoã mãn.

+ $m = 2$ thoã mãn.

Chọn C.

Câu 14: Cho hàm số $y = \dfrac{3x - 2m}{mx + 1}$ với m là tham số. Xác định m để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD.

A. $m = \pm\dfrac{5}{3}$ **B.** $m = \pm 3$ **C.** $m = \pm\dfrac{2}{3}$ **D.** $m = \pm\dfrac{1}{3}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị: $3mx^2 - 3m^2x - m = 0, x \neq \dfrac{-1}{m}$

Vì $m \neq 0$ nên phương trình $\Leftrightarrow 3x^2 - 3mx - 1 = 0$ (*). Ta có $\Delta = 9m^2 + 12 > 0, \forall m \neq 0$ và $f\left(\dfrac{-1}{m}\right) = \dfrac{3}{m^2} + 2 \neq 0, \forall m \neq 0$ (ở đây $f(x)$ là vế trái của (*)) nên d luôn cắt đồ thị tại 2 điểm A, B phân biệt $\forall m \neq 0$

Ta có $A(x_1; 3x_1 - 3m), B(x_2; 3x_2 - 3m)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của (*). Kẻ đường cao OH của ΔOAB ta có $OH = d(0; d) = \dfrac{|-3m|}{\sqrt{10}}$ và

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (3x_2 - 3x_1)^2} = \sqrt{10(x_2 - x_1)^2}$$
$$= \sqrt{10(x_1 + x_2)^2 - 40x_1x_2} = \sqrt{10m^2 + \dfrac{40}{3}}$$

(Định lý Viet đối với (*)).

Mặt khác ta có $C(m; 0), D(0; -3m)$ (để ý $m \neq 0$ thì C, D, O phân biệt). Ta tìm m để $S_{\Delta OAB} = 2S_{\Delta OCD}$ hay $\sqrt{10m^2 + \dfrac{40}{3}} \cdot \dfrac{|-3m|}{\sqrt{10}} = 2|m||3m| \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{2}{3}$

Chọn C.

Câu 15: Cho hàm số $y = \dfrac{2x + 1}{x + 1}(C)$. Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

A. 12 **B.** -4 **C.** -3 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Phương triình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$\frac{2x+1}{x+1}=kx+2k+1 \Leftrightarrow 2x+1=(x+1)(kx+2k+1);\ (x\neq -1)$

$\Leftrightarrow kx^2+(3k-1)x+2k=0\ (1);\quad (x\neq -1)$

d cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 1 \\ \Delta=k^2-6k+1>0 \\ k(-1)^2+(3k-1)(-1)+2k\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ k<3-2\sqrt{2} \vee k>3+2\sqrt{2} \end{cases}.$

Khi đó: $A(x_1;kx_1+2k+1), B(x_2;kx_2+2k+1)$ với x_1,x_2 là nghiệm của (1).

Theo định lý Viet tao có $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{-3k+1}{k} \\ x_1x_2=2 \end{cases}.$

Ta có $d(A;Ox)=d(B;Ox) \Leftrightarrow |kx_1+2k+1|=|kx_2+2k+1|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} kx_1+2k+1=kx_2+2k+1 \\ kx_1+2k+1=-kx_2-2k-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=x_2 \\ k(x_1+x_2)+4k+2=0 \end{array}\right..$

Do hai điểm A, B phân biệt nên ta loại nghiệm $x_1=x_2$. Do đó

$k(x_1+x_2)+4k+2=0 \Leftrightarrow k=-3$

Chọn C.

Câu 16: Nếu đồ thị hàm số $y=\frac{x-4}{x+1}$ cắt đường thẳng $(d):2x+y=m$ tại hai đểm AB sao cho độ dài AB nhỏ nhất thì

A. *m=-1* **B.** *m=1* **C.** *m=-2* **D.** *m=2*

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm

$\frac{x-4}{x+1}=-2x+m \qquad (x\neq -1)$

$\Leftrightarrow 2x^2-(m-3)x-m-4=0$

$\Delta=(m+1)^2+40>0, \forall m\in R$

Suy ra (d) luôn cắt dồ thị hàm số tại hai điểm A,B

$x_A+x_B=\frac{m-3}{2}; \qquad x_A.x_B=\frac{-m-4}{2};$

$y_A=-2x_A+m; \qquad y_B=-2x_B+m$

$y_B-y_A=-2(x_B-x_A)$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{5(x_B-x_A)^2}$$
$$=\sqrt{5\left[(x_B+x_A)^2-4x_Ax_B\right]}=\sqrt{5\left[\left(\frac{m-3}{2}\right)^2-4\frac{-m-4}{2}\right]}=\sqrt{\frac{5}{4}\left[(m+1)^2+40\right]}\ge 5\sqrt{2}$$

Vậy AB nhỏ nhất khi m=-1

Câu 17: Cho hàm số $y=\frac{x}{1-x}$ (C). Tìm m để đường thẳng $d:y=mx-m-1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M,N sao cho AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất với $A(-1;1)$.

A. $m=1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=3$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$\frac{x}{1-x}=mx-m=1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ mx^2-2mx+m+1=0(1)\end{cases}$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow m<0$

Gọi I là trung điểm của MN $\Rightarrow I(1;-1)$ cố định.

Ta có: $AM^2+AN^2=2AI^2+\frac{MN^2}{2}$

Do AM^2+AN^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất

$MN^2=(x_2-x_1)^2(1+m)^2=-4m-\frac{4}{m}\ge 8$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=-1$

Vậy $\min(AM^2+AN^2)=20$ khi $m=-1$

Chọn C.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2\,(C)$ và đường thẳng $\Delta: y=-x+2$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;2)$; B; C sao cho tam giác MBC có diện tích $2\sqrt{2}$, với $M(3;1)$

A. $\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=3\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=3\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=3\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải:

Pt hoành độ giao điểm của đồ thị với Δ là

$$x^3+2mx^2+3(m-1)+2=-x+2$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow y=2\\ x^2+2mx+3m-2=0 \quad (1)\end{cases}$$

Đường thẳng Δ cắt đồ thị hàm số (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;2)$, B, C thì pt (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0, khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ g(0)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2>0\\ 3m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<1\end{array}\right.\\ m\neq\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Gọi $B(x_1;y_1)$ và $C(x_2;y_2)$, trong đó x_1,x_2 là nghiệm của (1);

$y_1=-x_1+2$ và $y_2=-x_2+2$

Ta có: $h=d(M;(\Delta))=\dfrac{|3+1-2|}{\sqrt{2}}\Rightarrow BC=\dfrac{2S_{MBC}}{h}=\dfrac{2.2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4$

Mà $BC^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=2\left[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right]$

$=8(m^2-3m+2)$

Suy ra $8(m^2-3m+2)=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=3\end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=3\end{array}\right.$ thỏa ycbt.

Chọn A.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m + 3)x + 4$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m), đường thẳng d có phương trình $y = x + 4$ và điểm $K(1; 3)$. Tìm các giá trị của tham số m để d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0; 4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.

A. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{2}$ **B.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$ **C.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$ **D.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{142}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$x^3 + 2mx^2 + (m + 3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x(x^2 + 2mx + m + 2) = 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2+2mx+m+2=0\ (*)\end{array}\right.$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-m-2>0\\ m+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(2;+\infty)$

Khi đó $B = (x_1; x_1 + 4)$, $C = (x_2; x_2 + 4)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của (*).

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-2m\\ x_1x_2=m+2\end{cases}$

$\Rightarrow BC=\sqrt{2(x_1-x_2)^2}=\sqrt{2(x_1+x_2)^2-8x_1x_2}=2\sqrt{2(m^2-m-2)}$

Ta có khoảng cách từ K đến d là $h=\sqrt{2}$. Do đó diện tích ΔKBC là:

$S=\frac{1}{2}.h.BC=\frac{1}{2}\sqrt{2}.2\sqrt{2\left(m^2-m-2\right)}=2\sqrt{m^2-m-2}$

$S=8\sqrt{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{m^2-m-2}=8\sqrt{2}\Leftrightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{137}}{2}\ (TM)$.

Chọn B.

Câu 20: Đường thẳng $d: y=x+4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+\left(m+3\right)x+4$ tại 3 điểm phâ biệt $A\left(0;4\right),B$ và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M\left(1;3\right)$. Tìm tất cả cá giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m=2$ hoặc $m=3$. **B.** $m=-2$ hoặc $m=3$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-2$ hoặ $m=-3$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị $\left(C\right)$: $x^3+2mx^2+\left(m+3\right)x+4=4$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+\left(m+2\right)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \varphi\left(x\right)=x^2+2mx+m+2=0\quad(1)\end{array}\right.$

Với $x=0,$ ta có giao điểm là $A\left(0;4\right)$.

d cắt $\left(C\right)$ tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi\left(0\right)=m+2\ne 0\\ \Delta'=m^2-m-2>0\end{cases}\qquad(*)$

Ta gọi các giao điểm của d và $\left(C\right)$ lần lượt là $A, B\left(x_B;x_B+2\right),C\left(x_C;x_C+2\right)$ với x_B,x_C là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases}x_B+x_C&=-2m\\ x_B.x_C&=m+2\end{cases}$

Ta có diện tích của tam giác MBC là $S=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot d\left(M,BC\right)=4$.

Phương trình d được viết lại là: $d: y=x+4\Leftrightarrow x-y+4=0$.

Mà $d\left(M,BC\right)=d\left(M,d\right)=\frac{\left|1-3+4\right|}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}}=\sqrt{2}$.

Do đó: $BC=\frac{8}{d\left(M,BC\right)}=\frac{8}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow BC^2=32$

Ta lại có: $BC^2=\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2=2\left(x_C-x_B\right)^2=32$

$\Leftrightarrow\left(x_B+x_C\right)^2-4x_B.x_C=16\Leftrightarrow\left(-2m\right)^2-4\left(m+2\right)=16$

$\Leftrightarrow 4m^2-4m-24=0\Leftrightarrow m=3\vee m=-2$.

Đối chiếu với điều kiện, loại đi giá trị $m=-2$.

Chọn C.

Câu 21: Gọi (C_m) là độ thì hàm số $y=x^4-2x^2-m+2017$. Tìm m để (C_m) có đúng 3 điểm chung phân biệt với trục hoành, ta có kết quả:

A. $m=2017$ **B.** $2016<m<2017$ **C.** $m\ge 2017$ **D.** $m\le 2017$

Hướng dẫn giải:

- Phương pháp: Tìm m để phương trình ẩn x tham số m có n nghiệm phân biệt thuộc khoảng K

+ Cô lập m, đưa phương trình về dạng m = f(x)

+ Vẽ đồ thị (hoặc bảng biến thiên) của y=f(x) trên K

+ Biện luận để đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số y =f(x) tại n điểm phân biệt trên K

- Cách giải: $\left(C_m\right)$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt ⇔ Phương trình $x^4-2x^2-m+2017=0\Leftrightarrow m=x^4-2x^2+2017$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $y=x^4-2x^2+2017$ trên R

Có $y'=4x^3-4x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\pm 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số y =f(x) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi m =2017

Chọn A.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}$ $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $x_1;x_2;x_3$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15$.

A. $\left[\begin{matrix} m<-1 \\ m>4 \end{matrix}\right.$ **B.** $\left[\begin{matrix} m<-1 \\ m>1 \end{matrix}\right.$ **C.** $\left[\begin{matrix} m<-1 \\ m>2 \end{matrix}\right.$. **D.** $\left[\begin{matrix} m<0 \\ m>1 \end{matrix}\right.$.

Hướng dẫn giải:

Pt hoành độ giao điểm:

$$\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow x^3-3mx^2-3x+3m+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2+(1-3m)x-3m-2\right]=0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x=1 \\ x^2+(1-3m)x-3m-2=0(2) \end{matrix}\right.$$

$\left(C_m\right)$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt thì pt (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\begin{cases} \Delta=(1-3m)^2+4(3m+2)>0 \\ g(1)=-6m\ne 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2+2m+3>0,\forall m \\ m\ne 0 \end{cases}\Leftrightarrow m\ne 0 \quad (3)$$

Giả sử $x_3=1, x_1, x_2$ là nghiệm của (2).

Ta có: $x_1 + x_2 = 3m - 1; x_1x_2 = -3m - 2$. Khi đó:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 1 > 15$$

$$\Leftrightarrow (3m-1)^2 + 2(3m+2) - 14 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right. (4)$$

Từ (3) và (4) ta có giá trị cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Chọn B.

Câu 23: Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y = m^2x + 2m^3$. Biết rằn $m_1, m_2\ (m_1 > m_2)$ là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phâ biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$. Phát biểu nào sau đây là ***đúng*** về qua hệ giữa hai giá trị m_1, m_2?

A. $m_1 + m_2 = 0$. **B.** $m_1^2 + 2m_2 > 4$. **C.** $m_2^2 + 2m_1 > 4$. **D.** $m_1 - m_2 = 0$.

Hướng dẫn giải:

$$x^3 + 3mx^2 - m^2x - 3m^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = -m \quad (DK: m \neq 0) \\ x = -3m \end{array}\right.$$

$$ycbt \Leftrightarrow x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83 \Leftrightarrow m^4 + m^4 + 81m^4 = 83 \Leftrightarrow m = \pm 1 \Rightarrow m_1 + m_2 = 0.$$

Chọn A.

Câu 24: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ có đồ thị (C). Giá trị của m thì (C) cắt trụ hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$ là

A. $m < 1$ **B.** $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ **C.** $-\frac{1}{4} < m < 1$ **D.** $\frac{1}{4} < m < 1$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là

$$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \end{array}\right.$$

(C) và trục hoành cắt nhau tại 3 điểm phân biệt: $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases}$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 1 < 4 \Leftrightarrow 1 + 2m + 1 < 4 \Leftrightarrow m < 1$$

Chọn B.

Câu 25: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (3m-1)x + 6m$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 20$.

A. $m = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{3}$. **B.** $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{22}}{3}$. **C.** $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$. **D.** $m = \dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

PT hoành độ: $x^3 - 3mx^2 + (3m-1)x + 6m = 0 \Leftrightarrow (x+1)[x^2 - (3m+1)x + 6m] = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 = x_3 \\ x^2 - (3m+1)x + 6m = 0\ (*) \end{array}\right.$$

(*) có 2 nghiệm phân biệt khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 18m + 1 > 0 \\ 9m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{3}; m > \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{3} \\ m \neq -\dfrac{2}{9} \end{cases}$.

Gt $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 19 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 19 \Rightarrow (3m+1)^2 - 18m = 19$.

$\Leftrightarrow 9m^2 - 12m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{2 \pm \sqrt{22}}{3}$.

Câu 26: Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m$ (m là tham số) có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 30$ khi $m = m_0$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4 < m_0 \le 7$. **B.** $0 < m_0 < 4$. **C.** $m_0 > 7$. **D.** $m_0 \le -2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x^4 - mx^2 + m = 0$ $(*)$.

Đặt $t = x^2 \ge 0$ khi đó $(*) \Leftrightarrow f(t) = t^2 - mt + m = 0$.

Để (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(t) = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow m > 4$

Khi đó, gọi t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ là hai nghiệm phân biệt của $f(t) = 0$

Suy ra $x_1 = -\sqrt{t_2}$; $x_2 = -\sqrt{t_1}$; $x_3 = \sqrt{t_1}$; $x_4 = \sqrt{t_2} \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2\left(t_1^2 + t_2^2\right) = 30$.

Mà $\begin{cases} t_1 + t_2 = m \\ t_1t_2 = m \end{cases} \Rightarrow t_1^2 + t_2^2 = \left(t_1 + t_2\right)^2 - 2t_1t_2 = m^2 - 2m$ suy ra $\begin{cases} m > 4 \\ m^2 - 2m = 15 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$.

Câu 27: Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y = m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ tại hai điểm A, B thỏa mãn tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $m\in\left(\frac{7}{9};\frac{9}{4}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $m\in\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4}\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

PT hoành độ giao điểm là $m+1=x^4-3x^2-2\xrightarrow{t=x^2}t^2-3t-m-3=0\ (1)$.

Hai đồ thị có 2 giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow t_1t_2<0\Leftrightarrow -m-3<0\Leftrightarrow m>-3\ (2)$

Khi đó $\begin{cases} t_1=\dfrac{3+\sqrt{21+4m}}{2}\\ t_2=\dfrac{3-\sqrt{21+4m}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_A=\sqrt{t_1}\\ x_B=-\sqrt{t_1}\end{cases}$

Suy ra tọa độ hai điểm A,B là $A\left(\sqrt{t_1};m+1\right),B\left(-\sqrt{t_1};m+1\right)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OA}=\left(\sqrt{t_1};m+1\right)\\ \overrightarrow{OB}=\left(-\sqrt{t_1};m+1\right)\end{cases}$

Tam giác OAB vuông tại O

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow -t_1+(m+1)^2=0\Leftrightarrow -\dfrac{3+\sqrt{21+4m}}{2}+(m+1)^2=0$

Giải PT kết hợp với điều kiện $(2)\Rightarrow m=1\Rightarrow m\in\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$.

Câu 28: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x+m$ có đồ thị (C), với m là tham số. Giả sử đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn $x_1<x_2<x_3$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $1<x_1<x_2<3<x_3<4$ **B.** $0<x_1<1<x_2<3<x_3<4$

C. $x_1<0<1<x_2<3<x_3<4$ **D.** $1<x_1<3<x_2<4<x_3$

Hướng dẫn giải:

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=-x^3+6x^2-9x$. Dựa vào đồ thị ta tìm được $-4<m<0$ thì đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x+m$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.

Ta có $y(0).y(1)<0;\ y(1).y(3)<0;\ y(3).y(4)<0$ do đó $0<x_1<1<x_2<3<x_3<4$

Chọn B.

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m\ (C_m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt với các hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $m=11$. **B.** $m=10$. **C.** $m=9$. **D.** $m=8$.

Hướng dẫn giải:

Pt hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2-9x+m=0\ (*)$

Giả sử $\left(C_m\right)$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3\left(x_1 < x_2 < x_3\right)$ thì x_1, x_2, x_3 là nghiệm của pt(*)

Khi đó: $x^3 - 3x^2 - 9x + m = \left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right)$

$x^3 - \left(x_1 + x_2 + x_3\right)x^2 + \left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\right)x - x_1x_2x_3$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3\ (1)$

Ta có:

x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $x_1 + x_3 = 2x_2\quad (2)$

Thế (2) vào (1) ta được $x_2 = 1$, thay vào pt (*) ta được: $m = 11.$

Với $m = 11: (*) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 - 2x - 11\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - 2\sqrt{3} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + 2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$$

Vậy m=11 thỏa ycbt.

Chọn A.

Câu 30: Đường thẳng $d: y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m + 3)x + 4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4), B$ và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m = 2$ hoặc $m = 3.$ **B.** $m = -2$ hoặc $m = 3.$

C. $m = 3.$ **D.** $m = -2$ hoặc $m = -3.$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị (C): $x^3 + 2mx^2 + (m + 3)x + 4 = 4$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m + 2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \varphi(x) = x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Với $x = 0,$ ta có giao điểm là $A(0;4).$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(0) = m + 2 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Ta gọi các giao điểm của d và (C) lần lượt là $A, B\left(x_B; x_B + 2\right), C\left(x_C; x_C + 2\right)$ với x_B, x_C là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_B + x_C & = -2m \\ x_B.x_C & = m+2 \end{cases}$

Ta có diện tích của tam giác MBC là $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot d\left(M, BC\right) = 4.$

Phương trình d được viết lại là: $d: y = x + 4 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0.$

Mà $d\left(M, BC\right) = d\left(M, d\right) = \frac{\left|1 - 3 + 4\right|}{\sqrt{1^2 + \left(-1\right)^2}} = \sqrt{2}.$

Do đó: $BC = \frac{8}{d\left(M, BC\right)} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow BC^2 = 32$

Ta lại có: $BC^2 = \left(x_C - x_B\right)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2 = 2\left(x_C - x_B\right)^2 = 32$

$\Leftrightarrow \left(x_B + x_C\right)^2 - 4x_B.x_C = 16 \Leftrightarrow \left(-2m\right)^2 - 4\left(m+2\right) = 16$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 24 = 0 \Leftrightarrow m = 3; m = -2.$

Đối chiếu với điều kiện, loại đi giá trị $m = -2.$

Câu 31: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m đ đường thẳng $y = \left(m-2\right)x + 3$ tạo với đồ thị $\left(C\right)$ có hai phần diện tích khép kín bằng nhau?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải:

Đồ thị hàm bậc ba $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$ có tâm đối xứng $I\left(1; -2\right)$ (trong đó hoành độ điểm I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$).

Để bài toán được thỏa mãn thì trước hết đường thẳng $d: y = \left(m-2\right)x + 3$ phải đi qu $I\left(1; -2\right)$ nên $-2 = \left(m-2\right).1 + 3 \longleftrightarrow m = -3$.

Thử lại. Với $m = -3$ thì $d: y = -5x + 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và $\left(C\right)$ là: $x^3 - 3x^2 + x - 1 = -5x + 3$

$\longleftrightarrow \left(x-1\right)\left(x^2 - 2x + 4\right) = 0 \longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x + 4 = 0. \quad \left(*\right) \end{array}\right.$

Phương trình $\left(*\right)$ vô nghiệm nên d chỉ cắt $\left(C\right)$ tại duy nhất một điểm nên không thể tạ với đồ thị $\left(C\right)$ hai phần diện tích khép kín.

Chọn A.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x) = x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$. Hỏi đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ cắt trục hoàn tại bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Ta có

$f(x)=x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)=(x^3-x)(x^4-13x^2+36)=x^7-14x^5+49x^3-36x$

$f'(x)=7x^6-70x^4+147x^2-36$

Đặt $t=x^2, t\ge 0$

Xét hàm $g(t)=7t^3-70t^2+147t-36$

Do phương trình $g'(t)=21t^2-140t+147=0$ có hai nghiệm dương phân biệt và $g(0)=-36<0$ nên $g(t)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt

Do đó $f'(x)=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

II - SỰ TƯƠNG GIAO BẰNG BBT VÀ ĐỒ THỊ

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Khi đó $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ khi và chỉ khi

A. $\frac{1}{2} < m < 1$. **B.** $\frac{1}{2} \le m < 1$. **C.** $0 < m < 1$. **D.** $0 < m \le 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$, suy ra $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

NX: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ khi và chỉ khi $\frac{1}{2} < m < 1$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	

y	$+\infty$ ↘	1	$-\infty$ ↗	2	↘	$-\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(x\right)+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt là

A. $\left(-2;1\right)$ **B.** $\left[-1;2\right)$ **C.** $\left(-1;2\right)$ **D.** $\left(-2;1\right]$

phương trình $f\left(x\right)+m=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -1<-m<2 \Leftrightarrow -2<m<1$

Câu 35: Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+4x+2017$. Định m để phương trình $y'=m^2-m$ có đúng hai ngiệm thuộc đoạn $[0;m]$

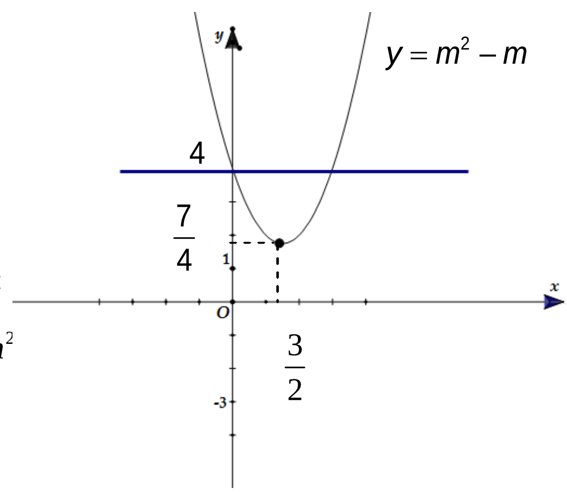
A. $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{3};2\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1-2\sqrt{2}}{3};2\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2};2\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2};2\right]$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có: $y'=m^2-m \Leftrightarrow x^2-3x+4=m^2-m$

Đặt $f\left(x\right)=x^2-3x+4 \ \left(P\right)$



Yêu cầu bài toán:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}<m \\ \dfrac{7}{4}<m^2-m\le m^2-3m+4 \\ m^2-m\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}<m \\ \dfrac{7}{4}<m^2-m \\ m^2-m\le m^2 \\ m^2-m\le 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}<m \\ \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2} \\ m>\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \\ m\le 2 \\ 0<m\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2};2\right]$$

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực k để phương trình $\left|-2x^3-\dfrac{3}{2}x^2+3x+\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{k}{2}-1\right|$ có đúng 4 nghiệm phân biệt

A. $k\in\left(\dfrac{19}{4};5\right)$. **B.** $k\in\varnothing$.

C. $k\in(-2;-1)\cup\left(1;\dfrac{19}{4}\right)$. **D.** $k\in\left(-2;-\dfrac{3}{4}\right)\cup\left(\dfrac{19}{4};6\right)$.

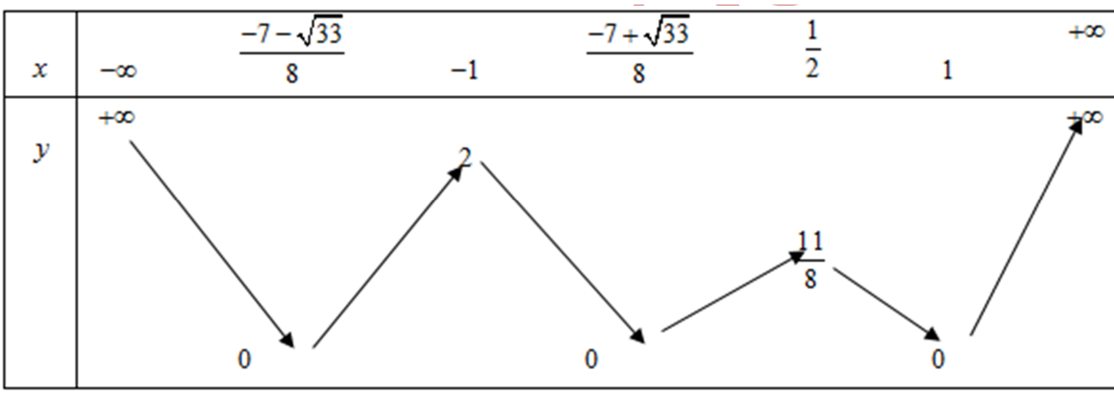
Hướng dẫn giải:

Chọn D

Xét hàm số $y=-2x^3-\dfrac{3}{2}x^2+3x+\dfrac{1}{2}$. Ta có: $y'=-6x^2-3x+3$. $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

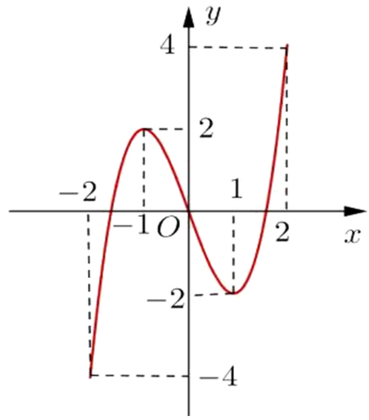
Bảng biến thiên đồ thị hàm số $y=-2x^3-\dfrac{3}{2}x^2+3x+\dfrac{1}{2}$. Với:

$-2x^3-\dfrac{3}{2}x^2+3x+\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-7\pm\sqrt{33}}{8}\end{array}\right.$



Từ bảng biến thiên, nhận thấy: ycbt $\Leftrightarrow\dfrac{11}{8}<\left|\dfrac{k}{2}-1\right|<2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{19}{4}<k<6\\ -2<k<-\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$.

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường con trong hình vẽ bên dưới. Xác định giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)|=m$ có s nghiệm thực nhiều nhất.

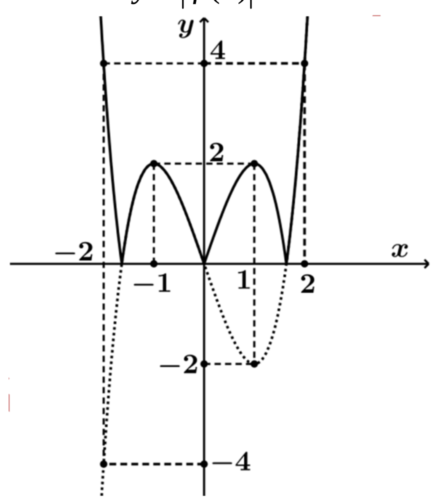


A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Dựa vào đồ thị ta có đồ thị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là:



Từ đồ thị ta thấy rằng, với m thỏa $0<m<2$ thì phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m$ có số nghiệm nhiều nhất là 6.

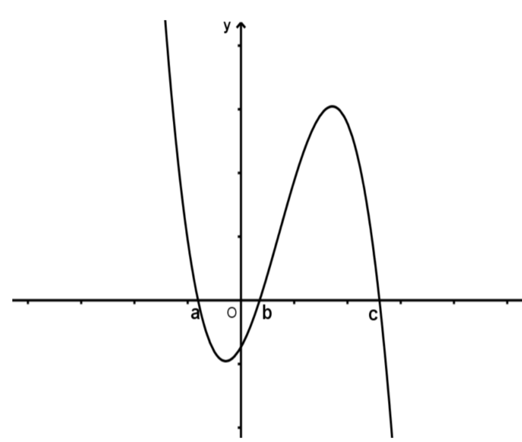
Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(c)>f(a)>f(b)$.

B. $f(c)>f(b)>f(a)$.

C. $f(a)>f(b)>f(c)$.

D. $f(b)>f(a)>f(c)$.



Hướng dẫn giải:

Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên các đoạn $[a;b]$ và $[b;c]$, lại có $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Do đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = f'(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ là:

$S_1 = \int_a^b |f'(x)| dx = -\int_a^b f'(x) dx = -f(x)\Big|_a^b = f(a) - f(b)$. Vì $S_1 > 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$ (1)

Tương tự: diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = f'(x) \\ y = 0 \\ x = b \\ x = c \end{cases}$ là:

$S_2 = \int_b^c |f'(x)| dx = \int_b^c f'(x) dx = f(x)\Big|_b^c = f(c) - f(b)$. $S_2 > 0 \Rightarrow f(c) > f(b)$ (2).

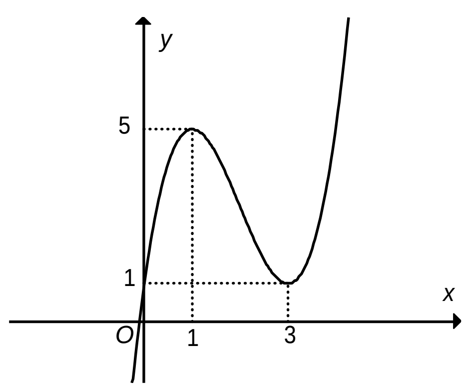
Mặt khác, dựa vào hình vẽ ta có: $S_1 < S_2 \Leftrightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$ (3).

(có thể so sánh $f(a)$ với $f(b)$ dựa vào dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[a;b]$ và so sánh $f(b)$ với $f(c)$ dựa vào dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[b;c]$).

Từ (1), (2) và (3)

Chọn A.

Câu 39: Gọi $y = f(x)$ là hàm số của đồ thị trong hình bên. Hỏi với những giá trị nào của số thực m thì phương trình $|f(x)| = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.



A. $0 < m < 1$. **B.** $m > 5$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array}\right.$. **D.** Cả **A, B.**

Hướng dẫn giải:

Bản chất của bài toán là biện luận số nghiệm của phương trình dựa vào đồ thị. Và điều quan trọng là xác định được đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ (C), ta nhắc lại kiến thức:

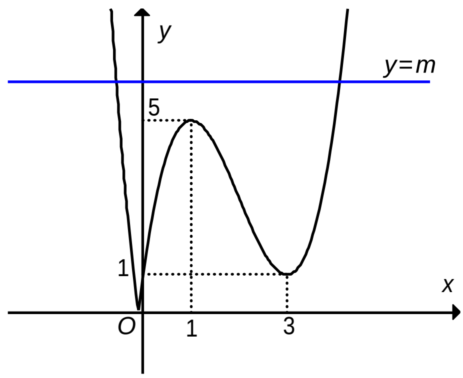
□ Ta có $y=\left|f\left(x\right)\right|=\begin{cases} f\left(x\right),\ f\left(x\right)\geq 0 \\ -f\left(x\right),\ f\left(x\right)\leq 0 \end{cases}$.

□ Cách vẽ đồ thị hàm số $\left(C\right)$.

o Giữ nguyên đồ thị $y=f\left(x\right)$ phía trên trục hoành.

o Lấy đối xứng phần đồ thị $y=f\left(x\right)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành (bỏ phần dưới).

o Kết hợp hai phần ta được đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ như hình vẽ.

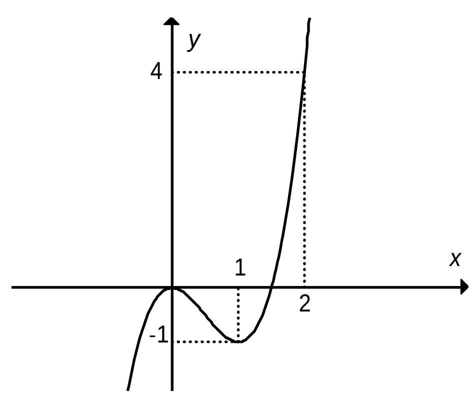


Phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ và đường thẳng $y=m$ (cùng phương với trục hoành).

Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi $\left[\begin{array}{l} 0<m<1 \\ m>5 \end{array}\right.$.

Chọn D.

Câu 40: Hình bên là đồ thị của hàm số $y=2x^3-3x^2$. Sử dụng đồ thị đã cho tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $16\left|x\right|^3-12x^2\left(x^2+1\right)=m\left(x^2+1\right)^3$ có nghiệm.



A. Với mọi m. **B.** $-1\leq m\leq 4$.

C. $-1\leq m\leq 0$. **D.** $1\leq m\leq 4$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình $16\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|^3-12\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2=m\longleftrightarrow 2\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|^3-3\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2=m$.

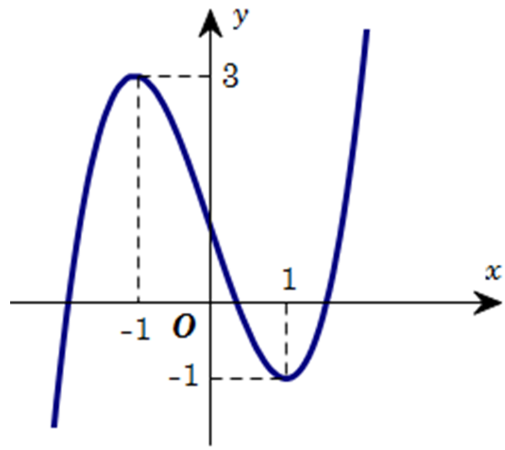
Đặt $t=\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\geq 0$. Ta có $x^2+1\geq 2x\longrightarrow t=\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\leq 1$. Do đó $0\leq t\leq 1$.

Phương trình trở thành $2t^3 - 3t^2 = m \quad (*)$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2$ (chỉ xét trong phần $x \in [0;1]$) và đường thẳng $y = m$ (cùng phươn với trục hoành).

Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1] \longleftrightarrow -1 \le m \le 0$.

Chọn C.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Khi đó, phương trình $f(|x-2|) = -\dfrac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

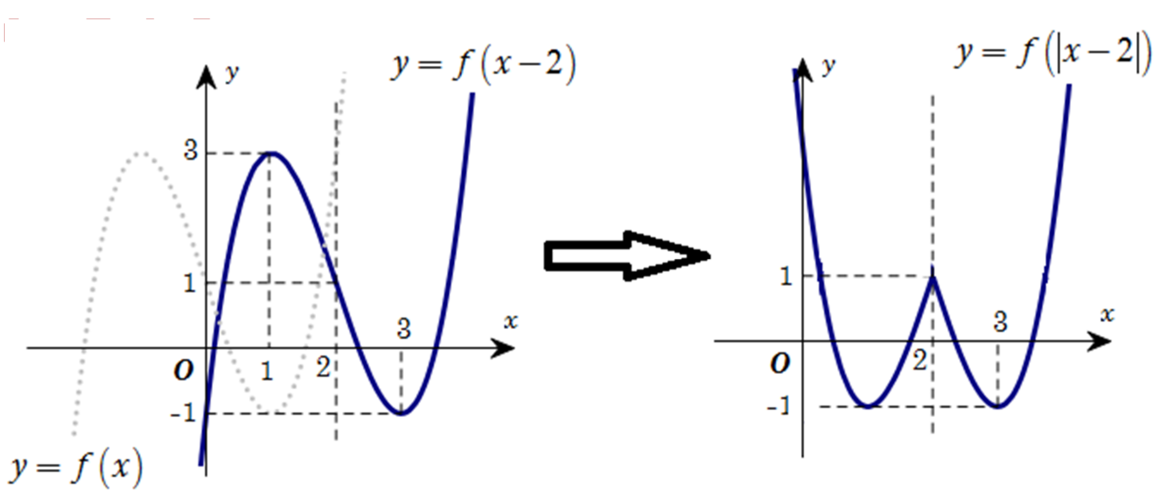
A. 2. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Trước tiên tịnh tiến đồ thị sang phải 2 đơn vị để được đồ thị hàm số $y = f(x-2)$.

Tiếp theo giữ phần đồ thị phía bên phải đường thẳng $x = 2$, xóa bỏ phần đồ thị phía bên trá đường thẳng $x = 2$.

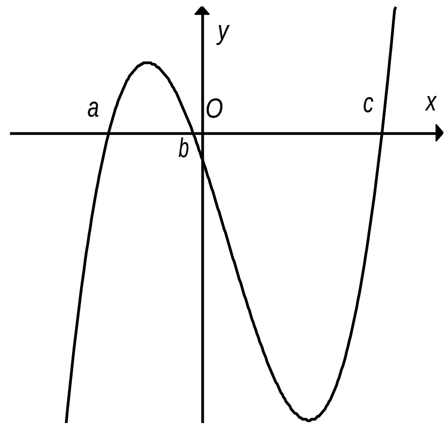
Cuối cùng lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ lại ở trên qua đường thẳng $x = 2$. Ta được toà bộ phần đồ thị của hàm số $y = f(|x-2|)$. (hĩnh vẽ bên dưới)



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình $f\left(|x-2|\right)=-\dfrac{1}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn D.

Câu 42: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f^{/}\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Biết $f\left(a\right)>0$, hỏi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?



A. 4 điểm. **B.** 3 điểm.

C. 2 điểm. **D.** 1 điểm.

Hướng dẫn giải: Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$, ta có nhận xét:

● Hàm số $y=f'\left(x\right)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x=a$.

● Hàm số $y=f'\left(x\right)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x=b$.

● Hàm số $y=f'\left(x\right)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x=c$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f^{/}\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$-\infty$	↘	$f\left(a\right)$	↗	$f\left(b\right)$	↘	$f\left(c\right)$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $f\left(b\right)>f\left(a\right)>0$.

Quan sát đồ thị $y=f^{/}\left(x\right)$, dùng phương pháp tích phân để tính diện tích, ta có

$$\int_a^b f'(x)dx<\int_b^c\left[0-f'\left(x\right)\right]dx\longrightarrow f\left(c\right)<f\left(a\right).$$

● Nếu $f\left(c\right)<0$ thì đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

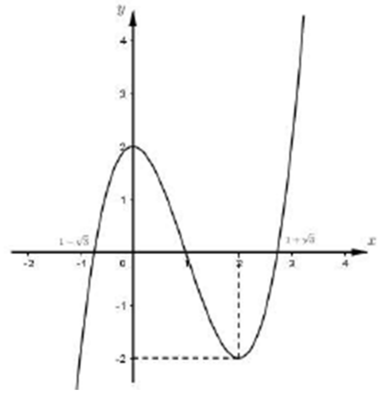
● Nếu $f\left(c\right)=0$ thì đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt (tiếp xúc) trục hoành tại một điểm.

● Nếu $f\left(c\right)>0$ thì đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ không cắt trục hoành.

Vậy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất là hai điểm.

Chọn C.

Câu 43: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hỏi phương trình $\left(x^3-3x^2+2\right)^3-3\left(x^3-3x^2+2\right)^2+2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực dương phân biệt?



A. 3 **B.** 5

C. 7 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Phương pháp:

Đặt $t=x^3-3x^2+2=f\left(x\right)$, dựa vào đồ thị hàm số đã cho tìm ra các nghiệm t_i.

Xét các phương trình $f\left(x\right)=t_i$, số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=t_i$ song song với trục hoành.

Cách giải:

Đặt $t=x^3-3x^2+2=f\left(x\right)$ khi đó phương trình trở thành $t^3-3t^2+2=0$ và hàm số

$f\left(t\right)=t^3-3t^2+2$ có hình dáng y như trên. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f\left(t\right)=\left[\begin{array}{l}t=1-\sqrt{3}\\t=1\\t=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$

Với $t=1+\sqrt{3}\Rightarrow f\left(x\right)=1+\sqrt{3}\ \ (1)$. Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=1+\sqrt{3}$ song song với trục hoành.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y=1+\sqrt{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 1 điểm duy nhất nên phương trình (1) có 1 nghiệm duy nhất.

Với $t=1\Rightarrow f\left(t\right)=1\ \ (2)$. Lập luận tương tự như trên ta thấy phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt.

Với $t=1-\sqrt{3}\Rightarrow f\left(t\right)=1-\sqrt{3}\ \ (3)$. Phương trình 3 có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình ban đầu có 7 nghiệm phân biệt.

Chú ý và sai lầm: Sau khi đặt ẩn phụ và tìm ra được 3 nghiệm t, nhiều học sinh kết luận sai lầm phương trình có 3 nghiệm phân biệt và chọn đáp án **A.** Số nghiệm của phương trình là số nghiệm x chứ không phải số nghiệm t.

TIẾP TUYẾN

A – LÝ THUYẾT CHUNG

Bài toán 1: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$

Nếu cho x_0 thì tìm $y_0 = f(x_0)$

Nếu cho y_0 thì tìm x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = y_0$

Tính $y' = f'(x)$. Suy ra $y'(x_0) = f'(x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Bài toán 2: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$ biết Δ có hệ số góc k cho trước

Cách 1: Tìm tọa độ tiếp điểm.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$

Δ có hệ số góc $k \Rightarrow f'(x_0) = k \quad (1)$

Giải phương trình (1), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$. Từ đó viết phương trình của Δ.

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

Phương trình đường thẳng Δ có dạng $y = kx + m$.

Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases} (*)$

Giải hệ (*), tìm được m. Từ đó viết phương trình của Δ.

Chú ý: Hệ số góc k của tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp như sau:

+ Δ tạo với chiều dương trục hoành góc α thì $k = \tan\alpha$

+ Δ song song với đường thẳng $d: y = ax + b$ thì $k = a$

+ Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = ax + b\,(a \neq 0)$ thì $k = -\dfrac{1}{a}$

+ Δ tạo với đường thẳng $d: y = ax + b$ một góc α thì $\left|\dfrac{k - a}{1 + ka}\right| = \tan\alpha$.

Bài toán 3: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ đi qua điểm $A(x_A; y_A)$

Cách 1: Tìm tọa độ tiếp điểm.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó: $y_0 = f(x_0), y'_0 = f'(x_0)$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M: y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ nên: $y_A - y_0 = f'(x_0).(x_A - x_0) \quad (2)$

Giải phương trình (2), tìm được x_0. từ đó viết phương trình của Δ.

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A\left(x_A;y_A\right)$ và có hệ số góc $k: y-y_A=k\left(x-x_A\right)$

Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x)=k\left(x-x_A\right)+y_A \\ f'(x)=k \end{cases} (*)$$

Giải hệ (*), tìm được *x* (suy ra *k*). Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ.

Bài toán 4: Tìm những điểm trên đường thẳng d mà từ đó có thể vẽ được 1,2,3,… tiếp tuyến với đồ th $(C): y=f(x)$.

Giả sử $d: ax+by+c=0.M\left(x_M;y_M\right)\in d$

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc $k: y=k\left(x-x_M\right)+y_M$

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ pt sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=k\left(x-x_M\right)+y_M & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{cases}$

+ Thế k từ (2) vào (1) ta được $f(x)=\left(x-x_M\right).f'(x)+y_M \quad (C)$

+ Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M = số nghiệm của x của (C).

Bài toán 5:

Tìm những điểm mà từ đó có thể vẽ được 2 tiếp tuyến với đồ thị $(C): f=f(x)$ và hai tiếp tuyến đ vuông góc với nhau.

Gọi $M\left(x_M;y_M\right)$

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc $k: y=k\left(x-x_M\right)+y_M$

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ pt sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=k\left(x-x_M\right)+y_M & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{cases}$

+ Thế k từ (2) vào (1) ta được $f(x)=\left(x-x_M\right).f'(x)+y_M \quad (C)$

+ Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow$ (C) có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau $\Leftrightarrow f'\left(x_1\right).f'\left(x_2\right)=-1$.

Từ đó ta tìm được M .

Chú ý: Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì

$$\begin{cases} \text{(C) có 2 nghiệm phân biệt } x_1,x_2 \\ f\left(x_1\right).f\left(x_2\right)<0 \end{cases}$$

Bài toán 6: Tìm giá trị tham số mà tiếp tuyến của hàm số thỏa mãn các tính chất hình học Oxy ta s dụng cách viết phương trình tiếp tuyến của các dạng trên

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ pt sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{cases}$

Sử dụng công thức cơ bản của hình học Oxy về công thức khoảng cách, độ dài, vectơ,…

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$, có đồ thị (C). Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để tiếp tuyến của (C) tại điểm $x_0=-\dfrac{b}{3a}$ có hệ số góc nhỏ nhất.

A. $a<0$. **B.** $a>0$. **C.** $-1<a<0$. **D.** $0<a<1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có hệ số góc $k=y'=3ax^2+2bx+c$.

Theo giả thiết ta có:

$$k\geq y'(-\frac{b}{3a})=c-\frac{b^2}{3a}=3ax^2+2bx+c\geq c-\frac{b^2}{3a}\forall x$$

$$\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+\frac{b^2}{3a}\geq 0\forall x\Leftrightarrow 3a(x+\frac{b}{3a})^2\geq 0,\forall x\Leftrightarrow a>0.$$

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m^2+2m-5\,(C)$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d:x+y+7=0$ góc α, biết $cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{26}}$

A. $m\leq -\dfrac{1}{4}$ hoặc $m\geq \dfrac{1}{2}$. **B.** $m\leq -1$ hoặc $m\geq \dfrac{1}{3}$.

C. $m\leq -\dfrac{1}{3}$ hoặc $m\geq \dfrac{1}{4}$. **D.** $m\leq -\dfrac{1}{5}$ hoặc $m\geq \dfrac{1}{3}$.

Giải:

$y'=3x^2+2(1-2m)x+(2-m)$

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến, phương trình tiếp tuyến $y=kx+b$. Suy ra tiếp tuyến có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(k;-1)$, đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(1;1)$

Ta có:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{26}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{k^2+1}}\Leftrightarrow 12k^2-26k+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k_1=\dfrac{3}{2}\\ k_2=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Để hàm số (C) có tiếp tuyến thỏa mãn ycbt thì ít nhất một trong hai phương trình: $y'=k_1\ (1)$ hoặc $y'=k_2\ (2)$ có nghiệm thực x.

Nghĩa là: $\left[\begin{array}{l} 3x^2+2(1-2m)x+2-m=\dfrac{3}{2} \\ 3x^2+2(1-2m)x+2-m=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_1' \ge 0 \\ \Delta_2' \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8m^2-2m-1\ge 0 \\ 4m^2-m-3\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -\dfrac{1}{4}; m\ge \dfrac{1}{2} \\ m\le -\dfrac{3}{4}; m\ge 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m\le -\dfrac{1}{4}$ hoặc $m\ge \dfrac{1}{2}$

Vậy với $m\le -\dfrac{1}{4}$ hoặc $m\ge \dfrac{1}{2}$. thỏa ycbt.

Chọn A.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}(C)$ và đườn thẳng $d: y=2x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

A. $m=-1.$ **B.** $m=-2.$ **C.** $m=-3$ **D.** $m=-4$

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\dfrac{x+1}{x-1}=2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+(m-3)x-m-1=0 \ (1) \\ x\ne 1 \end{cases}$

Đề hàm số (C) và d giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình (1) luôn có nghiệm phân biệt khác 1 khi và chỉ khi:

$\begin{cases} \Delta=(m-3)^2+8(m+1)=(m+1)^1+16>0, \forall m\in\mathbb{R} \\ g(1)=-2\ne 0 \end{cases}$

Vậy hàm số (C) và d luôn luôn giao nhau tại hai điểm phân biệt $A, B.$

Gọi $x_1, x_2\,(x_1\ne x_2)$ lần lượt là hoành độ của A và B thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trìn (1).

Theo Vi-et: $x_1+x_2=\dfrac{1}{2}(3-m)(*)$, tiếp tuyến Δ_1, Δ_2 tại A, B của hàm số (C) có hệ số gó lần lượt là:

$k_1=y'(x_1)=\dfrac{-2}{(x_1-1)^2}$ và $k_2=y'(x_2)=\dfrac{-2}{(x_2-1)^2}$

Theo đề bài: $\Delta_1//\Delta_2 \Leftrightarrow k_1=k_2 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{(x_1-1)^2}=-\dfrac{2}{(x_2-1)^2}$

$\Leftrightarrow (x_1-1)^2=(x_2-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1-1=x_2-1 \\ x_1-1=-x_2+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=x_2\,(loai) \\ x_1+x_2=2, \quad (2) \end{array}\right.$

Thay (*) vào (2) ta được: $\frac{1}{2}(3-m)=2 \Leftrightarrow m=-1$

Vậy $m=-1$ thỏa ycbt.

Chọn A.

Câu 4: Cho điểm $A(0;m)$, tìm tất cả các giá trị thực của m để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến tới hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}(C)$ sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục Ox.

A. $\begin{cases} -2<m \\ m\neq 1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} \frac{-2}{3}<m \\ m\neq 1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} \frac{-2}{5}<m \\ m\neq 1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} \frac{-2}{7}<m \\ m\neq 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình tiếp tuyến qua $A(0;m)$, có dạng: $y=kx+m,(1)$

ĐK có 2 tiếp tuyến đi qua A:

$\begin{cases} \frac{x+2}{x-1}=kx+m \quad (2) \\ \frac{-3}{(x-1)^2}=k \quad (3) \end{cases}$ có hai nghiệm $x\neq 1$.

Thay (3) vào (2) và rút gọn ta được:

$(m-1)x^2-2(m+2)x+m+2=0 \quad (4)$

Để (4) có 2 nghiệm $x\neq 1$ là: $\begin{cases} m\neq 1 \\ f(1)=-3\neq 0 \\ \Delta'=3m+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m>-2 \end{cases}(*)$

Gọi hoành độ tiếp điểm $x_1;x_2$ là nghiệm của (4), tung độ tiếp điểm là $y_1=\frac{x_1+2}{x_1-1}, y_2=\frac{x_2+2}{x_2-1}$

Để hai tiếp điểm nằm khác phía trục Õ là:

$y_1.y_2<0 \Leftrightarrow \frac{(x_1+2)(x_2+2)}{(x_1-1)(x_2-1)}<0$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}<0 \Leftrightarrow \frac{9m+6}{-3}<0 \Leftrightarrow m>-\frac{2}{3}.$$

So với điều kiện (*), vậy $\begin{cases} -\frac{2}{3} < m \\ m \neq 1 \end{cases}$ thỏa ycbt.

Chọn B.

Câu 5: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x+2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M củ (C) tạo với trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: y = -4x$.

A. $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ **B.** $M\left(2; \frac{1}{5}\right)$, $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$

C. $M\left(3; \frac{1}{4}\right)$, $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ **D.** $M\left(5; \frac{1}{3}\right)$, $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$

Gọi $M\left(a; \frac{a-1}{2a+2}\right) \in (C), (a \neq -1)$ là điểm cần tìm. Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M, ta c phương trình Δ:

$$\Delta: y = f'(a)(x-a) + \frac{a-1}{2a+2} \Rightarrow y = \frac{1}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{a-1}{2(a+1)}$$

Gọi $A = Ox \cap \Delta \Rightarrow A\left(-\frac{a^2-2a-1}{2}; 0\right)$

$B = Oy \cap \Delta \Rightarrow B\left(0; \frac{a^2-2a-1}{2(a+1)^2}\right)$. Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ ΔOAB có trọng tâm l $G\left(-\frac{a^2-2a-1}{6}; \frac{a^2-2a-1}{6(a+1)^2}\right)$

Do $G \in d$ nên: $-4.\frac{a^2-2a-1}{6} + \frac{a^2-2a-1}{6(a+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{(a+1)^2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+1 = \frac{1}{2} \\ a+1 = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ a = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

(Vì A, B $\neq 0$ nên $a^2 - 2a - 1 \neq 0$).

Với $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; với $a = -\frac{3}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$

Chọn A.

Câu 6: (KSCL CHV) Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M với (C) cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B để đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất, với I là giao điểm của 2 tiệm cận.

A. $M\left(4;\frac{5}{2}\right)$ *và* $M(3;3)$ **B.** $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ *và* $M(3;3)$

C. $M(1;1)$ *và* $M(3;3)$ **D.** $M\left(5;\frac{7}{3}\right)$ *và* $M(3;3)$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y'=-\frac{1}{(x-2)^2}$

Giả sử $M\left(a;\frac{2a-3}{a-2}\right)\in(C), a\neq 2, y'(a)=\frac{-1}{(a-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng:

$\Delta: y=\frac{-1}{(a-2)^2}(x-a)+\frac{2a-3}{a-2}$

Tọa độ giao điểm A, B của (Δ) và hai tiệm cận là:

$A\left(2;\frac{2a-2}{a-2}\right);\ B(2a-2;2)$

Ta thấy $\begin{cases}\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+2a-2}{2}=a=x_M\\ \frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2a-3}{a-2}=y_M\end{cases}$, Suy ra M là trung điểm của AB.

Mặt khác $I(2;2)$ và tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S=\pi IM^2=\pi\left[(a-2)^2+\left(\frac{2a-3}{a-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(a-2)^2+\frac{1}{(a-2)^2}\right]\geq 2\pi$$

Theo Bđt Cô si

Dấu "=" xảy ra khi $(a-2)^2=\frac{1}{(a-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=3\end{array}\right.$

Do đó hai điểm M cần tìm là: $M(1;1)$ *và* $M(3;3)$.

Chọn C.

Câu 7: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}(C)$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

A. $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right),M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

B. $M\left(0;-1\right),M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

C. $M\left(2;1\right),M\left(1;\frac{1}{2}\right)$

D. $M\left(0;-1\right),M\left(2;1\right)$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y'=\frac{3}{\left(x+1\right)^2}$

Giả sử $M\left(a;\frac{2a-1}{a+1}\right)\in\left(C\right),a\neq -1$, thì tiếp tuyến tại M với $\left(C\right)$ có phương trình

$$y=\frac{3}{\left(a+1\right)^2}\left(x-a\right)+\frac{2a-1}{a+1}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x-a\right)-\left(a+1\right)^2\left(y-2\right)-3\left(a+1\right)=0$$

Khoảng cách từ $I\left(-1;2\right)$ tới tiếp tuyến là:

$$d=\frac{\left|3\left(-1-a\right)-3\left(a+1\right)\right|}{\sqrt{9+\left(a+1\right)^4}}=\frac{6\left|a+1\right|}{\sqrt{9+\left(a+1\right)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\frac{9}{\left(a+1\right)^2}+\left(a+1\right)^2}}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy $\frac{9}{\left(a+1\right)^2}+\left(a+1\right)^2\geq 2\sqrt{9}=6$, Vậy $d\leq\sqrt{6}$

Khoảng cách lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi:

$$\frac{9}{\left(a+1\right)^2}+\left(a+1\right)^2\Leftrightarrow\left(a+1\right)^2=3\Leftrightarrow a=-1\pm\sqrt{3}$$

Vậy có hai điểm M: $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right),M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

Chọn A.

Câu 8: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}\left(C\right)$ sao cho tiếp tuyến tại M của $\left(C\right)$ cắt hai tiệm cận của $\left(C\right)$ tại A, B và có độ dài AB ngắn nhất.

A. $M\left(3;3\right),M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ **B.** $M\left(3;3\right),M\left(4;\frac{5}{2}\right)$

C. $M\left(6;\frac{9}{4}\right),M\left(1;1\right)$ **D.** $M\left(3;3\right),M\left(1;1\right)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y' = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$

Giả sử $M\left(a;\dfrac{2a-3}{a-2}\right) \in (C), a \neq 2.$ Ta có: $y'(a) = -\dfrac{1}{(a-2)^2}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình $\Delta: y = -\dfrac{1}{(x-2)^2}(x-a) + \dfrac{2a-3}{a-2}$

Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $A\left(2;2+\dfrac{2}{a-2}\right)$

Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $B(2a-2;2)$

Ta có: $AB^2 = 4\left[(a-2)^2 + \dfrac{1}{(a-2)^2}\right] \geq 8$.

Dấu "=" xảy ra khi $(a-2)^4 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-2=1 \\ a-2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=1 \end{array}\right.$

Vậy điểm M cần tìm có tọa độ là: $M(3;3), M(1;1)$.

Chọn D.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của thàm số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1(C)$, đường thẳng $d: y = mx + m + 3$ giao nhau tại $A(-1;3), B, C$ và tiếp tuyến của (C) tại B và C vuông góc nhau.

A. $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$　　**B.** $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-4+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \dfrac{-4-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$　　**D.** $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-5+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \dfrac{-5-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$x^3 - (m+3)x - m - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - m - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=3 \\ x^2 - x - m - 2 = 0(*) \end{array}\right.$

Để hàm số (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt khác -1, nên:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Giả sử $x_B; x_C$ là nghiệm của (*), hệ số góc của tiếp tuyến:

$k_B = 3x_B^2 - 3; k_C = 3x_C^2 - 3$

Theo giả thiết:

$k_B.k_C = -1 \Leftrightarrow (3x_B^2 - 3)(3x_C^2 - 3) = -1 \Leftrightarrow 9m^2 + 18m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array} \right.$$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array} \right.$ thỏa ycbt.

Chọn A.

Câu 10: Cho hàm số: $y = \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + \dfrac{5}{2} (C)$ và điểm M $\in (C)$ có hoành độ x_M = a. Với giá trị nào của thì tiếp tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) 2 điểm phân biệt khác M.

A. $\begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq 1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} |a| < \sqrt{7} \\ a \neq \pm 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Điểm M$\in (C)$, x_M = a => $y_M = \dfrac{a^4}{2} - 3a^2 + \dfrac{5}{2}$ ta có Pt tiếp tuyến với (C) có dạng

(Δ): $y = y'_{x_M}(x - x_M) + y_M$ với $y'_M = 2a^3 - 6a$

=> (Δ) $y = (2a^3 - 6a)(x - a) + \dfrac{a^4}{2} - 3a^2 + \dfrac{5}{2}$

Hoành độ giao điểm của (Δ) và (C) là nghiệm của phương trình

$$\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2} = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2} \Leftrightarrow (x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^3 - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ g(x) = x^2 + 2ax + 3a^2 - 6 = 0 \end{array} \right.$$

Bài toán trở thành tìm a để g(x)=0 có 2 nghiệm phân biệt khác a

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{g(x)} = a^2 - (3a^2 - 6) > 0 \\ g(a) = 6a^2 - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3 < 0 \\ a^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$

Chọn A.

Câu 11: Cho hàm số: $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đó cắt đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{2}IB$, với $I(2,2)$.

A. $y = -x+2$; $y = -x-3$ **B.** $y = x+2$; $y = -x+6$

C. $y = -x+2$; $y = -x+6$ **D.** $y = x-2$; $y = x-6$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M\left(x_0; \dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right) \in (C)$. PTTT của (C) tại M: $y = -\dfrac{1}{(x_0-2)^2}x + \dfrac{2x_0^2 - 6x_0 + 6}{(x_0-2)^2}$

Do $AB = \sqrt{2}IB$ và tam giác AIB vuông tại I $\Rightarrow$ IA = IB nên hệ số góc của tiếp tuyến k = 1 hoặc k = -1. vì $y' = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0$ nên ta có hệ số góc tiếp tuyến k = -1.

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ có hai phương trình tiếp tuyến $y = -x+2$; $y = -x+6$

Chọn C.

Câu 12: Cho hàm số: $y = \dfrac{x+2}{x-1}(C)$. Tìm a sao cho từ A(0, a) kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) nằm ở hai phía trục Ox.

A. $\left(\dfrac{-2}{3}; +\infty\right)$ **B.** $(-2; +\infty) \setminus \{1\}$ **C.** $(-2; +\infty)$ **D.** $\left(\dfrac{-2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

Hướng dẫn giải:

Đường thẳng qua A(0, a) có hệ số góc k có phương trình $y = kx + a$ tiếp xúc (C)

<=> $kx + a = \dfrac{x+2}{x-1}$ có nghiệm kép <=> $(kx+a)(x-1) = x+2$ có nghiệm kép

<=> $kx^2 - (k-a+1)x - (a-2) = 0$ có nghiệm kép

<=> $\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = (k-a+1)^2 - 4k(a+2) = 0 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} k \neq 0 \\ h(k) = k^2 + 2(a+5)k + (a-1)^2 = 0 \end{cases}$ có 2 nghiệm k phân biệt

<=> $\begin{cases} \Delta = 12(a+2) > 0 \\ h(0) = (a-1)^2 \neq 0 \end{cases}$ <=> $a \in (-2; +\infty) \setminus \{1\}$ $\quad (1)$

Khi đó $\begin{cases} x_1 = \dfrac{k_1-(a-1)}{2k_1} => y_1 = \dfrac{k_1+(a+1)}{2} \\ x_2 = \dfrac{k_2-(a-1)}{2k_2} => y_2 = \dfrac{k_2+(a+1)}{2} \end{cases}$

Mà

$y_1y_2 < 0 => \left[k_1+(a+1)\right]\left[k_2+(a+1)\right] < 0$

$<=> k_1k_2 + (a+1)(k_1+k_2) + (a+1)^2 = -4(3a+2) < 0$

$=> a > \dfrac{-2}{3} \quad (2)$

Từ (1) và (2) $=> a \in \left(\dfrac{-2}{3};+\infty\right)\backslash\{1\}$

Chọn D.

Câu 13: Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ với $x_0 > -1$ là điểm thuộ (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phâ biệt A, B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d: 4x+y=0$. Hỏi giá tr của x_0+2y_0 bằng bao nhiêu?

A. $-\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $-\dfrac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

□ Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-1}{2(x_0+1)}\right) \in (C)$ với $x_0 \neq -1$ là điểm cần tìm.

□ Gọi Δ tiếp tuyến của (C) tại M ta có phương trình.

$$\Delta: y = f'(x_0)(x-x_0) + \frac{x_0-1}{2(x_0+1)} = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0-1}{2(x_0+1)}.$$

□ Gọi $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A\left(-\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2};0\right)$ và $B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B\left(0;\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0+1)^2}\right)$.

□ Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ ΔOAB có trọng tâm là

$$G\left(-\frac{x_0^2-2x_0-1}{6};\frac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}\right).$$

□ Do G thuộc đường thẳng $4x+y=0 \Rightarrow -4.\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6} + \dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow 4=\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}$ (vì A,B không trùng O nên $x_0^2-2x_0-1\neq 0$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+1=\dfrac{1}{2} \\ x_0+1=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{1}{2} \\ x_0=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

□ Vì $x_0>-1$ nên chỉ chọn $x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)\Rightarrow x_0+2y_0=-\dfrac{7}{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị là $\left(C\right)$, đường thẳng $d:y=x+m$. Với mọi m ta luôn có d cắt $\left(C\right)$ tại 2 điểm phân biệt A,B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với $\left(C\right)$ tại A,B. Tìm m để tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-5$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

□ Phương trình hoành độ giao điểm của d và $\left(C\right)$ là

$$\frac{-x+1}{2x-1}=x+m\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq \dfrac{1}{2} \\ g\left(x\right)=2x^2+2mx-m-1=0\ \ (*) \end{cases}.$$

□ Theo định lí Viet ta có $x_1+x_2=-m;\ \ x_1x_2=\dfrac{-m-1}{2}$. Giả sử $A\left(x_1;y_1\right),B\left(x_2;y_2\right)$.

□ Ta có $y'=\dfrac{-1}{\left(2x-1\right)^2}$, nên tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại A và B có hệ số góc lần lượt là $k_1=-\dfrac{1}{\left(2x_1-1\right)^2}$ và $k_2=-\dfrac{1}{\left(2x_2-1\right)^2}$. Vậy

$$k_1+k_2=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}-\frac{1}{(2x_2-1)^2}=-\frac{4(x_1^2+x_2^2)-4(x_1+x_2)+2}{\left[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1\right]^2}$$

$$=-\left(4m^2+8m+6\right)=-4\left(m+1\right)^2-2\leq -2$$

□ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất bằng -2 khi $m=-1$.

Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Biết khoảng cách từ $I\left(-1;2\right)$ đến tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M là lớn nhấtthì tung độ của điểm M nằm ở góc phần tư thứ hai, gần giá trị nào nhất?

A. $3e$. **B.** $2e$. **C.** e. **D.** $4e$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Phương pháp tự luận

□ Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

□ Gọi $M\left(x_0; \dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right) \in (C), (x_0 \neq -1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0+1} \Leftrightarrow 3x-(x_0+1)^2 y + 2x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0.$$

□ $d(I,\Delta) = \dfrac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}} = \dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}} \le \dfrac{6}{\sqrt{2\sqrt{9}}} = \sqrt{6}$.

□ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{9}{(x_0+1)^2} = (x_0+1)^2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1+\sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 2-\sqrt{3}\,(L) \\ x_0 = -1-\sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 2+\sqrt{3}\,(N) \end{array}\right..$$

Tung độ này gần với giá trị e nhất trong các đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm

Ta có $IM \perp \Delta \Rightarrow cx_0 + d = \pm\sqrt{|ad-bc|} \Rightarrow x_0+1 = \pm\sqrt{|2+1|}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1+\sqrt{3} \Rightarrow y = 2-\sqrt{3}\,(L) \\ x_0 = -1-\sqrt{3} \Rightarrow y = 2+\sqrt{3}\,(N) \end{array}\right..$$

Câu 16: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết rằng tiếp tuyến tại một điểm M bất kỳ của $(C$ luôn cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B. Độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB là

A. 4. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Lấy điểm $M\left(m; 2+\dfrac{1}{m-2}\right) \in (C)$ với $m \neq 2$. Ta có $y'(m) = -\dfrac{1}{(m-2)^2}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình $d: y = -\dfrac{1}{(m-2)^2}(x-m) + 2 + \dfrac{1}{m-2}$.

Giao điểm của d với tiệm cận đứng là $A\left(2; 2+\dfrac{2}{m-2}\right)$.

Giao điểm của d với tiệm cận ngang là $B(2m-2; 2)$.

Ta có $AB^2 = 4\left[(m-2)^2 + \frac{1}{(m-2)^2}\right] \ge 8$, suy ra $AB \ge 2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $(m-2)^2 = 1$, nghĩa là $m=3$ hoặc $m=-1$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x^2+x-2}{x-2}$. Điểm trên đồ thị mà tiếp tuyến tại đó lập với đường tiệm cận đứng và đường thẳng $d: y = x+3$ một tam giác có chu vi nhỏ nhất thì hoành độ bằng

A. $2 \pm \sqrt[4]{10}$. **B.** $2 \pm \sqrt[4]{6}$. **C.** $2 \pm \sqrt[4]{12}$. **D.** $2 \pm \sqrt[4]{8}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $\Delta: x = 2$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(x_0; y_0)$ là

$$d_1: y = \frac{{x_0}^2 - 4x_0}{(x_0-2)^2}(x - x_0) + \frac{{x_0}^2 + x_0 - 2}{x_0 - 2}$$

$d_1 \cap \Delta = \{A\} \Rightarrow A\left(2; \frac{5x_0-2}{x_0-2}\right)$

$d_1 \cap d = \{B\} \Rightarrow B(2x_0-2; 2x_0+1)$

$\Delta \cap d = \{I\} \Rightarrow I(2;5)$

$\Rightarrow IA = \frac{8}{|x_0-2|}; IB = 2\sqrt{2}|x_0-2|; AB = \sqrt{2(2x_0-4)^2 + \frac{64}{(x_0-2)^2} - 32}$

Chu vi

$P = IA + AB + IB = \frac{8}{|x_0-2|} + 2\sqrt{2}|x_0-2| + \sqrt{2(2x_0-4)^2 + \frac{64}{(x_0-2)^2} - 32} \ge 8\sqrt{2} + 2\sqrt{32\sqrt{2} - 32}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \frac{8}{|x_0-2|} = 2\sqrt{2}|x_0-2| \\ 2(2x_0-4)^2 = \frac{64}{(x_0-2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt[4]{8}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m), m là tham số. Tìm các giá trị của m để trên (C_m) có duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến của (C_m) tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x + 2y = 0$.

A. $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>1 \end{array}\right.$ **C.** $0<m<\dfrac{1}{3}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

$y' = mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m$. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng 2

Ta tìm $m: mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m = 2$ $(*)$ có đúng một nghiệm âm

$(*) \Leftrightarrow (x-1)(mx+3m-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $mx = 2-3m$

$m = 0$: không thỏa yêu cầu

$m \neq 0$, yêu cầu bài toán xảy ra khi $\dfrac{2-3m}{m} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Chọn C.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^3 - 12x + 12$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;-4)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m nguyên thuộc khoảng $(2;5)$ để từ A kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C). Tổng tất cả các phần tử nguyên của S bằng

A. 7. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Đường thẳng đi qua $A(m;-4)$ với hệ số góc k có phương trình $y = k(x-m) - 4$ tiếp xúc với đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 12x + 12 = k(x-m) - 4 & (1) \\ 3x^2 - 12 = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thế (2) vào (1) ta được: $x^3 - 12x + 12 = (3x^2 - 12)(x-m) - 4$.

$\Leftrightarrow x^3 - 12x + 12 = 3x^3 - 3mx^2 - 12x + 12m - 4$.

$\Leftrightarrow 2x^3 - 3mx^2 + 12m - 16 = 0$.

$\Leftrightarrow (x-2)\left[2x^2 - (3m-4)x - (6m-8)\right] = 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ 2x^2 - (3m-4)x - (6m-8) = 0 \; (*) \end{array}\right.$.

Để từ A kẻ được ba tiếp tuyến tới đồ thị (C) thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = (3m-4)(3m+12) > 0 \\ 8 - 6m + 8 - 6m + 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > \dfrac{4}{3} \end{array}\right. \\ m \neq 2 \end{cases}$ hay $m \in (-\infty;-4) \cup \left(\dfrac{4}{3};2\right) \cup (2;+\infty)$.

Do đó $S=\{3;4\}$.

Tổng tất cả các giá trị nguyên của S là $3+4=7$.

Câu 20: Cho hàm số: $y=x+1+\frac{1}{x-1}$ (C) Tìm những điểm trên đồ thị (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến tại điểm đó tạo với 2 đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

A. $M=\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}};2-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ **B.** $M=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}};2+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

C. $M=\left(1;2+\sqrt{2}\right)$ **D.** $M=\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}};2+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M=\left(a;y\left(a\right)\right)\in\left(C\right);a>0$ thì $y\left(a\right)=a+1+\frac{1}{a-1}=\frac{a^2}{a-1}$

PTTT của (C) tại M là: $y-y\left(a\right)=y'\left(a\right)\left(x-a\right)\Leftrightarrow y=\frac{a^2-2a}{\left(a-1\right)^2}\left(x-a\right)+\frac{a^2}{a-1}$ (d)

Tiệm cận đứng x = 1; Tiệm cận xiên y = x + 1

Giao điểm của 2 tiệm cận là I=(1; 2)

Giao điểm của d với tiệm cận đứng x = 1 là $A=\left(1;\frac{2a}{a-1}\right)$

Với tiệm cận xiên là: $B=\left(2a-1;2a\right)$

Ta có $AI=\frac{2}{\left|a-1\right|};BI=2\sqrt{2}\left|a-1\right|$, nên $AI.BI=4\sqrt{2}$ vì a > 1

Lại có $\angle AIB=\frac{\pi}{4}$ suy ra $AB^2=AI^2+BI^2-2AI.BICos\frac{\pi}{4}=AI^2+BI^2-\sqrt{2}AI.BI$

Theo bất đẳng thức Cô si: $AB^2\ge 2AI.BI-\sqrt{2}AI.BI=\left(2-\sqrt{2}\right)AI.BI$

$\Leftrightarrow AB\ge 2\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}$ (1)

Đặt p là chu vi tam giác ABI thì: $p=AB+AI+BI\ge AB+2\sqrt{AI.BI}\ge 2\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}+4\sqrt[4]{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AI=BI\Leftrightarrow a=1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Vậy $Minp=2\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}+4\sqrt[4]{2}\Leftrightarrow a=1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Hay điểm cần tìm là $M=\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}};2+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

Chọn D.

Câu 21: Cho các hàm số $y = f(x), y = f(x^2), y = \frac{f(x)}{f(x^2)}$ có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2),(C_3)$. Hệ s góc các tiếp tuyến của $(C_1),(C_2),(C_3)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ lần lượt là k_1, k_2, k_3 thỏ mãn $k_1 + 2k_2 = 3k_3 \neq 0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = -\frac{1}{5}$. **B.** $f(1) = -\frac{2}{5}$. **C.** $V = -\frac{3}{5}$ **D.** $f(1) = -\frac{4}{5}$.

Hướng dẫn giải:

$k_1 = f'(x_0) = f'(1)$

$k_2 = 2x_0 f'(x_0{}^2) = 2f'(1)$

$$k_3 = \left(\frac{f(x_0)}{f(x_0{}^2)}\right)' = \frac{f'(x_0).f(x_0{}^2) - f(x_0).2x_0.f'(x_0{}^2)}{\left(f(x_0{}^2)\right)^2} = \frac{-f(1).f'(1)}{\left(f(1)\right)^2} = \frac{-f'(1)}{f(1)}$$

Vì vậy: $k_1 + 2k_2 = 3k_3 \Leftrightarrow f'(1) + 4f'(1) = -\frac{3f'(1)}{f(1)} \Leftrightarrow f(1) = -\frac{3}{5}$.

Chọn C.

Câu 22: Cho các hàm số $y = f\left(x\right), y = g\left(x\right), y = \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$. Nếu các hệ số góc của các tiếp tuyến củ các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 0$ bằng nhau và khác 0 thì:

A. $f\left(0\right) < \frac{1}{4}$. **B.** $f\left(0\right) \leq \frac{1}{4}$. **C.** $f\left(0\right) > \frac{1}{4}$. **D.** $f\left(0\right) \geq \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải::

Theo giả thiết ta có:

$$f'\left(0\right) = g'\left(0\right) = \frac{f'\left(0\right)g\left(0\right) - g'\left(0\right)f\left(0\right)}{g^2\left(0\right)} \Rightarrow f\left(0\right) = -g^2\left(0\right) + g\left(0\right) = -\left[g\left(0\right) - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

Chọn B.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x); y = g(x)$ dương có đạo hàm $f'(x); g'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng tiếp tuyế tại điểm có hoành độ $x_o = 0$ của đồ thị hàm số $y = f(x); y = g(x)$ và $y = \frac{f(x)+1}{g(x)+1}$ có cùn hệ số góc và khác 0. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(0) \leq -\frac{3}{4}$. **B.** $f(0) \geq -\frac{3}{4}$. **C.** $f(0) \leq \frac{3}{4}$. **D.** $f(0) \geq \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Theo giả thiết ta có:

$$k = f'(0) = g'(0) = \frac{f'(0).[g(0)+1] - g'(0)[f(0)+1]}{[g(0)+1]^2} \neq 0$$

Do đó

$$k=\frac{k.[g(0)+1]-k[f(0)+1]}{[g(0)+1]^2}\Leftrightarrow [g(0)+1]^2=g(0)-f(0)$$

$$\Leftrightarrow f(0)=-[g(0)]^2-g(0)-1=-(g(0)+\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}\le-\frac{3}{4}.$$

Câu 24: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (H). Gọi hai điểm $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A,B có cùng hệ số góc k. Biết diện tích tam giác OAB bằng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $k<-9$. **B.** $-9\le k\le-6$. **C.** $-6\le k\le-3$. **D.** $-3\le k<0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Theo giả thiết ta có:

$y'(x_1)=y'(x_2)=k\Leftrightarrow x_1;x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $y'=k$.

Do đó

$$-\frac{3}{(2x-1)^2}=k\Leftrightarrow 4x^2-4x+1+\frac{3}{k}=0.$$

Theo định lý Vi-et ta có $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=1;x_1.x_2=\frac{k+3}{4k}$.

Khi đó $A(x_1;\frac{x_1+1}{2x_1-1});B(x_2;\frac{x_2+1}{2x_2-1})$.

Suy ra:

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}\left|x_1.\frac{x_2+1}{2x_2-1}-x_2.\frac{x_1+1}{2x_1-1}\right|=\frac{1}{2}\left|x_1.\frac{x_2+1}{x_2-x_1}-x_2.\frac{x_1+1}{x_1-x_2}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{2x_1x_2+x_1+x_2}{x_2-x_1}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{\frac{k+3}{2k}+1}{\sqrt{1-\frac{k+3}{k}}}\right|=\frac{3k+3}{4k\sqrt{\frac{-3}{k}}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=-3.$$

Câu 25: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2x-1$ có đồ thị (C). Hai điểm A, B phân biệt trên (C) có hoành độ lần lượt là a và b$\left(a>b\right)$ và tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. $AB=2$. Tính $S=2a+3b.$

A. $S=4$. **B.** $S=6$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Điểm uốn của (C) là điểm $I(1;-1)$.

Vậy $A(a;a^3-3a^2+2a-1),B(2-a;(2-a)^3-3(2-a)^2+2(2-a)-1)$.

Do $AB=\sqrt{4(a-1)^2+4(a^3-3a^2+2a)^2}=2|a-1|\sqrt{1+a^2(a-2)^2}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=2\end{array}\right.$

Do đó $a=2,b=0\Rightarrow S=4$.

Chọn A.

Câu 26: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Xét điểm A thuộc (C). Gọi S là tập hợp tất c các giá trị thực của a sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại điểm thứ hai B $(B\neq A)$ thỏ mãn $ab=-\dfrac{1}{2}$ trong đó a, b lần lượt là hoành độ của A và **B.** Tính tổng tất cả các phầ tử của S.

A. $S=4$. **B.** $S=6$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Điểm uốn của (C) là điểm $I(1;-1)$.

Vậy $A(a;a^3-3a^2+2a-1),B(2-a;(2-a)^3-3(2-a)^2+2(2-a)-1)$.

Do $AB=\sqrt{4(a-1)^2+4(a^3-3a^2+2a)^2}=2|a-1|\sqrt{1+a^2(a-2)^2}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=2\end{array}\right.$

Do đó $a=2,b=0\Rightarrow S=4$.

Chọn A.

Câu 27: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để trên đồ thị hàm s $y=-\dfrac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+(3m-2)x-\dfrac{5}{3}$ tồn tại hai điểm $M_1(x_1;y_1),M_2(x_2;y_2)$ có toạ độ tho mãn $x_1.x_2>0$ sao cho tiếp tuyến với đồ thị hàm số đồ thị hàm số tại hai điểm đó cùng vuôn góc với đường thẳng $x-2y+1=0$. Tìm số nguyên âm lớn nhất thuộc tập S.

A. -1. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -4.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Do cả hai tiếp tuyến cùng vuông góc với đường thẳng $x-2y+1=0$ nên x_1,x_2 là nghiệm củ phương trình $y'=k=-2\Leftrightarrow-2x^2+2(m-1)x+3m=0(1)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1x_2>0$, tức là

$$\begin{cases}\Delta'=(m-1)^2+2.3m>0\\P=\dfrac{3m}{-2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\m^2+4m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-2-\sqrt{3}\\-2+\sqrt{3}<m<0\end{array}\right..$$

Vậy $m\in\left(-\infty;-2-\sqrt{3}\right)\cup\left(-2+\sqrt{3};0\right)$.

Chọn D.

Câu 28: Gọi A là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{5}{2}$ (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C khác A sao cho $AC=3AB$ (với B nằm giữa A và C). Tính độ dài đoạn thẳng O**A.**

A. $OA=\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm A có $x_A=a$ có dạng $y=(2a^3-6a)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến và (C): $\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}=(2a^3-6a)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}\Leftrightarrow x^2+2ax+3a^2-6=0$.

Để tiếp tuyến có 3 giao điểm với (C) thì (1) có 2 nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}\\ a\neq\pm1\end{cases}$$

Khi đó x_B,x_C là nghiệm của phương trình (1) $\begin{cases}x_B+x_C=-2a\\ x_B.x_C=3a^2-6\end{cases}$ (2)

Mặt khác: $AC=3AB\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow x_C-3x_B=-2a$ (3)

Ta tìm được: $a=\pm\sqrt{2}\Rightarrow A\left(\pm\sqrt{2};\frac{-3}{2}\right)\Rightarrow OA=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Chọn D.

Câu 29: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $I(1;2)$ Tiếp tuyến của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B sao cho tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất là $4\sqrt{a}+2\sqrt{b}$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $S=a+b$.

A. $S=8$. **B.** $S=5$. **C.** $S=6$. **D.** $S=7$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

$A\left(a;\frac{2a-1}{a-1}\right)\in(C)$

Phương trình tiếp tuyến tại A là $y=-\frac{1}{(a-1)^2}x+\frac{a}{(a-1)^2}+\frac{2a-1}{a-1}$

Gọi giao điểm tiếp tuyến và tiệm cận đứng là $A\left(1;2+\frac{2}{a-1}\right)$

Gọi giao điểm tiếp tuyến và tiệm cận ngang là $B(2a-1;2)$

$\overrightarrow{IA}=\left(0;\dfrac{2}{a-1}\right)\Rightarrow IA=\dfrac{2}{|a-1|}$

$\overrightarrow{IB}=(2a-2;0)\Rightarrow IB=2|a-1|$

Chu vi tam giác IAB: $CV_{IAB}=IA+IB+AB=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}\geq IA+IB+\sqrt{2}IA.IB$

$\overset{cauchy}{\geq}4+4\sqrt{2}=2\sqrt{4}+4\sqrt{2}$

Vậy $S=6$

Câu 30: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1=\dfrac{5}{2}$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2\neq A_1$ có hoành độ x_2. Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3\neq A_2$ có hoành độ x_3. Cứ tiếp tục như thế tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n\neq A_{n-1}$ có hoành độ x_n. Tìm x_{2018}.

A. $x_{2018}=-2^{2018}+\dfrac{1}{2}$. **B.** $x_{2018}=-2^{2018}-\dfrac{1}{2}$.

C. $x_{2018}=-3.2^{2017}-\dfrac{1}{2}$. **D.** $x_{2018}=3.2^{2017}-\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Tiếp tuyến (C) tại điểm $A_1\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{27}{2}\right)$ là $y=\dfrac{45}{2}x-\dfrac{174}{4}$.

Vậy giao điểm thứ hai của tiếp tuyến và (C) là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^3-3x^2-\frac{45}{2}x+\frac{175}{4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{2}\\[2mm] x=-\dfrac{7}{2}\end{array}\right..$$

Tiếp tuyến (C) tại điểm $A_1\left(\dfrac{-7}{2};\dfrac{-243}{2}\right)$ là $y=\dfrac{189}{2}x-\dfrac{837}{4}$.

Vậy giao điểm thứ hai của tiếp tuyến và (C) là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^3-3x^2-\frac{189}{2}x-\frac{833}{4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-7}{2}\\[2mm] x=\dfrac{17}{2}\end{array}\right..$$

Và làm tiếp tục sau đó nhận xét:

$x_1 = \frac{5}{2} = (-1)^{1+1}(2)^1 + \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-7}{2} = (-1)^{2+1}2^2 + \frac{1}{2}$

$x_3 = \frac{17}{2} = (-1)^{3+1}2^3 + \frac{1}{2}$

....

$x_n = (-1)^{n+1}2^n + \frac{1}{2}$

Do đó $x_{2018} = (-1)^{2018+1}.2^{2018} + \frac{1}{2} = -2^{2018} + \frac{1}{2}$.

Chọn A.

Câu 31: Cho hàm số: $y = x^3 - 2009x$ có đồ thị là (C). M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1 = 1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2, tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} (n = 4; 5;…), gọi $\left(x_n; y_n\right)$ là tọa độ điểm M_n. Tìm n để: $2009x_n + y_n + 2^{2013} = 0$

A. $n = 685$ **B.** $n = 627$ **C.** $n = 675$ **D.** $n = 672$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M_k\left(x_k; y_k\right)$ suy ra tiếp tuyến tại $M_k: y - y_k = y'\left(x_k\right)\left(x - x_k\right)$

$\Leftrightarrow y = \left(3x_k^2 - 2009\right)\left(x - x_k\right) + x_k^3 - 2009x_k$

Tọa độ điểm M_{k+1} được xác định:

$x^3 - 2009x = \left(3x_k^2 - 2009\right)\left(x - x_k\right) + x_k^3 - 2009x_k \Leftrightarrow \left(x - x_k\right)\left(x^2 + x.x_k - 2x_k^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = x_k \vee x = -2x_k \Rightarrow x_{k+1} = -2x_k$

Ta có: $x_1 = 1; x_2 = -2; x_3 = 4; ...; x_n = \left(-2\right)^{n-1}$

$2009x_n + y_n + 2^{2010} = 0 \Leftrightarrow 2009x_n + x_n^3 - 2009x_n + 2^{2010} = 0$

$\Leftrightarrow \left(-2\right)^{3n-3} = -2^{2013} = \left(-2\right)^{2013} \Leftrightarrow 3n - 3 = 2013 \Leftrightarrow n = 672$

Chọn D.

KHOẢNG CÁCH VÀ ĐIỂM ĐẶC BIỆT

Câu 1: Cho hàm số $y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc $(C$ đến hai hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng?

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Điểm $M\left(0,\frac{3}{2}\right)$ nằm trên trục Oy. Khoảng cách từ M đến hai trục là $d=\frac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ lớn hơn $\frac{3}{2}\Rightarrow d=|x|+|y|>\frac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ nhỏ hơn $\frac{3}{2}$:

□ Với $0<x<\frac{3}{2}\Rightarrow y>\frac{3}{2}\Rightarrow d=|x|+|y|>\frac{3}{2}$

□ Với $-\frac{3}{2}<x<0; y>0\Rightarrow d=-x+x+1+\frac{1}{x+2}=1+\frac{1}{x+2}; d'=-\frac{1}{(x+2)^2}<0$.

Chứng tỏ hàm số nghịch biến. Suy ra $\min d=y(0)=\frac{3}{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và A là điểm thuộc (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổn các khoảng cách từ A đến các tiệm cận của (C).

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 3 **D.** $2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M\left(m;\frac{m+1}{m-1}\right)\in(C)(m\neq 1)$. Tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận $x=1$ và $y=1$ là

$$S=|m-1|+\left|\frac{m+1}{m-1}-1\right|=|m-1|+\frac{2}{|m-1|}\geq 2\sqrt{|m-1|.\frac{2}{|m-1|}}=2\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow |m-1|=\frac{2}{|m-1|}\Leftrightarrow |m-1|=\sqrt{2}\Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{2}$

Chọn A.

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận của (C). Tìn tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài IM là ngắn nhất?

A. $M_1\left(0;-3\right)$ và $M_2\left(-2;5\right)$ **B.** $M_1\left(1;-1\right)$ và $M_2\left(-3;3\right)$

C. $M_1\left(2;-\frac{1}{3}\right)$ và $M_2\left(-4;\frac{7}{3}\right)$ **D.** $M_1\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{3}\right)$ và $M_2\left(-\frac{5}{2};\frac{11}{3}\right)$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M\left(m;\frac{m-3}{m+1}\right)$ thuộc đồ thị, có I(–1; 1)

$IM=\sqrt{(m+1)^2+\frac{16}{(m+1)^2}}$, $IM=\sqrt{(m+1)^2+\frac{16}{(m+1)^2}}\geq\sqrt{2\sqrt{16}}\geq 2\sqrt{2}$

IM nhỏ nhất khi $IM=2\sqrt{2}$. Khi đó $(m + 1)^2 = 4$. Tìm được hai điểm $M_1\left(1;-1\right)$ và $M_2\left(-3;3\right)$.

Chọn B

Câu 4: Hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị $y=\frac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng?

A. 8 **B.** 4 **C.** $x_M<3$ **D.** $8\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử $x_M<3$, $x_N>3$, khi đó $M\left(3-m;3-\frac{8}{m}\right)$, $N\left(3+n;3+\frac{8}{n}\right)$ với $m,n>0$

$$MN^2=(m+n)^2+\left(\frac{8}{m}+\frac{8}{n}\right)^2\geq(2\sqrt{mn})^2+64\left(2\sqrt{\frac{1}{m}.\frac{1}{n}}\right)^2=4\left(mn+\frac{64}{mn}\right)\geq 64$$

$\Rightarrow MN\geq 8$. Kết luận MN ngắn nhất bằng 8

Chọn A.

Câu 5: Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x+2}$ mà có khoảng cách đến đường thẳng $d: y=3x+6$ nhỏ nhất. Khi đó

A. $a+2b=1$ **B.** $a+b=2$ **C.** $a+b=-2$ **D.** $a+2b=3$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Phương pháp giải:

Sử dụng công thức tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, đưa về khảo sát hàm số để tìm giá trị nhỏ nhất – giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải:

Điểm

$M(a;b)\in(H)\Rightarrow M\left(a;\dfrac{2a+1}{a+2}\right)\Rightarrow d(M;(d))=\dfrac{\left|3a-\dfrac{2a+1}{a+2}+6\right|}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}.\left|\dfrac{3a^2+10a+11}{a+2}\right|$

Xét hàm số $f(a)=\dfrac{3a^2+10a+11}{a+2}$ với $a\neq -2$, có $f'(a)=\dfrac{3(a^2+4a+3)}{(a+2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=-3\end{array}\right.$

Tính các giá trị $f(-1)=4;f(-3)=-8$ và $\lim\limits_{x\to-2}f(a)=\infty;\lim\limits_{x\to\infty}f(a)=\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $|f(a)|$ bằng $4\Leftrightarrow a=-1$

Vậy $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow a+b=-2$

Câu 6: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2$. Tìm m để trên đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng qua gốc tọa độ

A. $-1\le m\le 0$ hoặc $m\ge 1$ **B.** $-1<m<0$ hoặc $m>1$

C. $1>m>0$ hoặc $m<-1$ **D.** $1\ge m\ge 0$ hoặc $m\le -1$

Hướng dẫn giải:

Gọi hai điểm đối xứng nhau qua O là $A(x_0,y_0),B(-x_0,-y_0)$

Khi đó ta có $y_0=x_0{}^3-3mx_0{}^2+3(m^2-1)x_0+1-m^2$ và

$-y_0=-x_0{}^3-3mx_0{}^2-3(m^2-1)x_0+1-m^2$

Từ đó suy ra: $-6mx_0{}^2+2-2m^2=0(*)$

Nếu $x_0=0$ thì $2-2m^2=0$ suy ra $y_0=1-m^2=0$. Vậy $A\equiv B\equiv O$

Do đó: đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\2-2m^2\neq 0\\\Delta'=6m(2-2m^2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<0$ hay $m>1$

Chọn B.

Câu 7: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2$. Tìm m để trên đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng qua gốc tọa độ

A. $-1\le m\le 0$ hoặc $m\ge 1$ **B.** $-1<m<0$ hoặc $m>1$

C. $1>m>0$ hoặc $m<-1$ **D.** $1\ge m\ge 0$ hoặc $m\le -1$

Hướng dẫn giải:

Đáp án B.

Giải: gọi hai điểm đối xứng nhau qua O là $A(x_0,y_0),B(-x_0,-y_0)$

Khi đó ta có $y_0 = x_0^3 - 3mx_0^2 + 3\left(m^2-1\right)x_0 + 1 - m^2$ và
$-y_0 = -x_0^3 - 3mx_0^2 - 3\left(m^2-1\right)x_0 + 1 - m^2$

Từ đó suy ra: $-6mx_0^2 + 2 - 2m^2 = 0(*)$

Nếu $x_0 = 0$ thì $2 - 2m^2 = 0$ suy ra $y_0 = 1 - m^2 = 0$. Vậy $A \equiv B \equiv O$

Do đó: đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2 - 2m^2 \neq 0 \\ \Delta' = 6m\left(2-2m^2\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0$ hay $m > 1$

Câu 8: Tọa độ cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x+4}{x-2}$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x - 2y - 6 = 0$ là

A. $(4;4)$ và $(-1;-1)$.
B. $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.
C. $(0;-2)$ và $(3;7)$.
D. $(1;-5)$ và $(5;3)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = \dfrac{1}{2}x - 3$ suy ra $\Delta: y = -2x + m$.

Giả sử Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình

$$\frac{x+4}{x-2} = -2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \underbrace{2x^2 - (m+3)x + 2m + 4}_{h(x)} = 0 \end{cases}\cdot$$

Điều kiện cần:

Để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2, tức là $\begin{cases} \Delta > 0 \\ h(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m - 23 > 0 \\ -6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 5 - 4\sqrt{3} \\ m > 5 + 4\sqrt{3} \end{array}\right.$ (*).

Điều kiện đủ:

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = 2x_I + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{m+3}{4} \\ y_I = \dfrac{m+3}{2} + m \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{m+3}{4}; \frac{3m+3}{2}\right).$$

Để hai điểm A, B đối xứng nhau qua $d: x - 2y - 6 = 0$ khi $I \in d$

$\Leftrightarrow \dfrac{m+3}{4} - 2.\dfrac{3m+3}{2} - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa điều kiện (*)).

Với $m=-3$ phương trình $h(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=-1 \\ x=1 \Rightarrow y=-5 \end{array}\right.$

Vậy tọa hai điểm cần tìm là $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

GẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ.

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Đối với phương trình chứa tham số

Xét phương trình $f(x,m) = g(m)$, (1)

B1: Lập luận số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị (C): $y = f(x,m)$ và đường thẳng d: $y = g(m)$.

B2: Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = f(x,m)$

B3: Kết luận: * phương trình có nghiệm: $\min\limits_{x\in D} f(x,m) \le g(m) \le \max\limits_{x\in D} f(x,m)$.

* phương trình có k nghiệm: d cắt (C) tại k điểm.

* phương trình vô nghiệm khi: d không cắt (C) .

2. Đối với bất phương trình chứa tham số

$f(x) \le g(m)$ với mọi $x \in D \Leftrightarrow g(m) \ge \max\limits_{x\in D} f(x)$

$f(x) \le g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g(m) \ge \min\limits_{x\in D} f(x)$

$f(x) \ge g(m)$ với mọi $x \in D \Leftrightarrow g(m) \le \min\limits_{x\in D} f(x)$

$f(x) \ge g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g(m) \le \max\limits_{x\in D} f(x)$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Phương trình $2017^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trong $[-5\pi;2017\pi]$?

A. vô nghiệm. **B.** 2017. **C.** 2022. **D.** 2023.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có hàm số $y = 2017^{\sin x} - \sin x - \sqrt{2-\cos^2 x}$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Xét hàm số $y = 2017^{\sin x} - \sin x - \sqrt{2-\cos^2 x}$ trên $[0;2\pi]$.

Ta có

$$y' = \cos x.2017^{\sin x}.\ln 2017 - \cos x - \frac{2\sin x.\cos x}{2\sqrt{2-\cos^2 x}} = \cos x.\left(2017^{\sin x}.\ln 2017 - 1 - \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)$$

Do vậy trên $[0;2\pi]$, $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$.

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2017 - 1 - \sqrt{2} > 0$; $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2017} - 1 - \sqrt{2} < 0$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\searrow$	$y\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$\nearrow$	0

Vậy trên $\left[0;2\pi\right]$ phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Ta có $y\left(\pi\right)=0$, nên trên $\left[0;2\pi\right]$ phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có ba nghiệm phân biệt là $0,\ \pi,\ 2\pi$.

Suy ra trên $\left[-5\pi;2017\pi\right]$ phương trình có đúng $2017-\left(-5\right)+1=2023$ nghiệm.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m\sqrt{2+\tan^2 x}=m+\tan x$ có nhất một nghiệm thực.

A. $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$. **B.** $-1<m<1$. **C.** $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$. **D.** $-1<m<1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$pt\Leftrightarrow m=\frac{\tan x}{\sqrt{2+\tan^2 x}-1}$$

Đặt $\tan x=t\Rightarrow m=\dfrac{t}{\sqrt{2+t^2}-1}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t}{\sqrt{2+t^2}-1}\Rightarrow f'\left(t\right)=\dfrac{2-\sqrt{2+t^2}}{\sqrt{2+t^2}.\left(\sqrt{2+t^2}-1\right)^2}=0\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}$

Lập BBT với $\lim\limits_{t\to+\infty}f\left(t\right)=1,\ \lim\limits_{t\to-\infty}f\left(t\right)=-1,\ f\left(-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2},\ f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\Rightarrow m\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Câu 3: Giá trị của m để phương trình $x+\sqrt{2x^2+1}=m$ có nghiệm là:

A. $m\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $m\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $m>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đặt $f(x)=x+\sqrt{2x^2+1}\ \Rightarrow f'\left(x\right)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy, $m\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm thực?

A. $m\ge 2$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $m\le 3$.

Chọn A.

Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{x+1}, t\ge 0$. Phương trình thành: $2t=t^2-1+m \Leftrightarrow m=-t^2+2t+1$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+1, t\ge 0;\ f'(t)=-2t+2$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m\le 2$.

Câu 5: Phương trình $x^3+x(x+1)=m(x^2+1)^2$ có nghiệm thực khi và chỉ khi:

A. $-6\le m\le -\dfrac{3}{2}$. **B.** $-1\le m\le 3$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $-\dfrac{1}{4}\le m\le\dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Sử dụng máy tính bỏ túi.

$x^3+x(x+1)=m(x^2+1)^2 \Leftrightarrow mx^4-x^3+(2m-1)x^2-x+m=0$

Chọn $m=3$ phương trình trở thành $3x^4-x^3+5x^2-x+3=0$ (không có nghiệm thực) nên loại đáp án B, **C.**

Chọn $m=-6$ phương trình trở thành $-6x^4-x^3-13x^2-x-6=0$ (không có nghiệm thực) nên loại đáp án **A.**

Kiểm tra với $m=0$ phương trình trở thành $-x^3-x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0$ nên chọn đáp án **D.**

Tự luận

Ta có $x^3+x(x+1)=m\left(x^2+1\right)^2 \Leftrightarrow m=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$ (1)

Xét hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$y'=\frac{\left(x^3+x^2+x\right)'\left(x^4+2x^2+1\right)-\left(x^3+x^2+x\right)\left(x^4+2x^2+1\right)'}{\left(x^4+2x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(3x^2+2x+1\right)\left(x^4+2x^2+1\right)-\left(x^3+x^2+x\right)\left(4x^3+4x\right)}{\left(x^4+2x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{-x^6-2x^5-x^4+x^2+2x+1}{\left(x^4+2x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(-x^4+1\right)\left(x^2+2x+1\right)}{\left(x^4+2x^2+1\right)^2}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left(-x^4+1\right)\left(x^2+2x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}$	$\searrow$	0

Phương trình (1) có nghiệm thực khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{4} \le m \le \dfrac{3}{4}$.

Chọn D.

Câu 6: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{m+x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m\in\left[5;\dfrac{23}{4}\right]$. **B.** $m\in[5;6]$. **C.** $m\in\left(5;\dfrac{23}{4}\right)\cup\{6\}$. **D.** $m\in\left[5;\dfrac{23}{4}\right)\cup\{6\}$.

Hướng dẫn giải:

+) $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{m+x-x^2}$ (1)

Điều kiện: $-1\le x\le 2$

+) $(1)\Leftrightarrow 3+2\sqrt{-x^2+x+2}=-x^2+x+m$

Đặt: $-x^2+x=t;\ f(x)=-x^2+x;\ f'(x)=-2x+1$

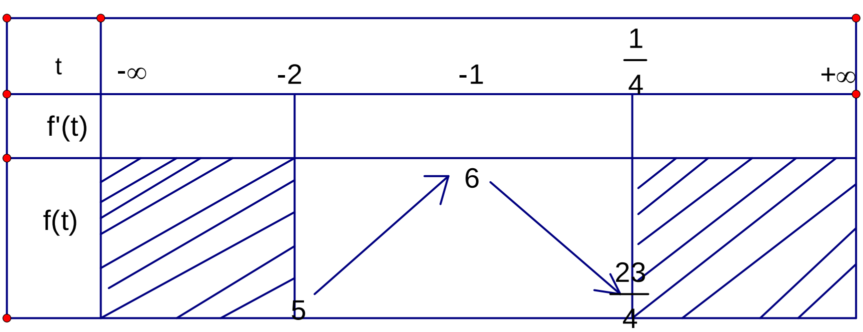
$f(-1)=2,\ f(2)=-2,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}\Rightarrow t\in\left[-2;\dfrac{1}{4}\right]$

$(1)\Leftrightarrow 3+2\sqrt{t+2}=t+m\Leftrightarrow 2\sqrt{t+2}=t+m-3\Leftrightarrow m=2\sqrt{t+2}+3-t$

Đặt $f(t)=2\sqrt{t+2}+3-t$

$f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t+2}}-1=\dfrac{1-\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}}$. $f'(t)=0\Rightarrow 1-\sqrt{t-2}=0\Leftrightarrow t=-1$

Bảng biến thiên



+) $-x^2+x=t\Leftrightarrow -x^2+x-t=0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta=1-4t>0\Leftrightarrow t\le\dfrac{1}{4}$

Do đó để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in\left[-2;\dfrac{1}{4}\right]$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow m\in[5;6]$.

Chọn B.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $m\sqrt{x^2-2x+2}+m+2x-x^2\le 0$ có nghiệm $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

A. $m \le \frac{2}{3}$. **B.** $m \le -1$. **C.** $m \ge \frac{2}{3}$. **D.** $m \le 0$.

Hướng dẫn giải:

Bpt $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x\left(2-x\right) \le 0 \Leftrightarrow m \le \frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-2x+2}+1}, (1)$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2} \Rightarrow x^2-2x=t^2-2$.

Ta xác đinhk ĐK của t:

Xét hàm số $t=\sqrt{x^2-2x+2}$ với $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$, ta đi tìm ĐK ràng buộc của t.

Ta có: $t'=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}, t'=0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy với $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$ thì $1\le t\le 2$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow m\le\frac{t^2-2}{t+1}$ với $t\in[1;2]$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2-2}{t+1}$ với $t\in[1;2]$. Ta có: $f'(t)=\frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2}>0, \forall x\in[1;2]$. Vậy hàm số f tăng trên [1;2].

Do đó, yêu cầu của bài toán trở thành tìm m để (1) có nghiệm $t\in[1;2]$

$\Leftrightarrow m\le \max\limits_{t\in[1;2]} f(t)=f(2)=\frac{2}{3}$.

Vậy $m\le\frac{2}{3}$ thì pt có nghiệm.

Chọn A.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2-4x+5}=m+4x-x$ có đúng 2 nghiệm dương?

A. $1\le m\le 3$. **B.** $-3<m<\sqrt{5}$. **C.** $-\sqrt{5}<m<3$. **D.** $-3\le m<3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt $t=f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$. Ta có $f'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

Xét $x>0$ ta có bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $m = t^2 + t - 5 \Leftrightarrow t^2 + t - 5 - m = 0$ (*1*).

Nếu phương trình (*1*) có nghiệm t_1, t_2 thì $t_1 + t_2 = -1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t \geq 1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1; \sqrt{5}\right)$. Đặt $g(t) = t^2 + t - 5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t) = m$ có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1; \sqrt{5}\right)$. Ta có $g'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in \left(1; \sqrt{5}\right)$.

Bảng biến thiên:

t	1		$\sqrt{5}$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	-3	$\nearrow$	$\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $-3 < m < \sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho bất phương trình:

$m\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2\right) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ có nghiệm.

A. $m \leq \sqrt{2} - 1$. **B.** $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$. **C.** $m \geq 1$. **D.** $m \leq 1$.

Hướng dẫn giải:

ĐK: $x \in [-1;1]$.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$. Với $x \in [-1;1]$, ta xác định ĐK của t như sau:

Xét hàm số $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ với $x \in [-1;1]$.

Ta có:

$t' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x\left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-x^4}}$, cho $t' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta có $t(-1) = \sqrt{2}, t(0) = 0, t(1) = \sqrt{2}$

Vậy với $x \in [-1;1]$ thì $t \in \left[0; \sqrt{2}\right]$

Từ $t=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1-x^4}=2-t^2$.

Khi đó pt đã cho tương đương với: $m(t+2)=-t^2+t+2 \Leftrightarrow \dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình $\dfrac{-t^2+t+2}{t+2}=m$ có nghiệm $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$ với $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{-t^2-4t}{(t+2)^2}<0, \forall t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$

Suy ra: $\max\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t)=f(0)=1, \min\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t)=f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-1$.

Bây giờ yêu cầu bài toán xảy ra khi: $\min\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t)\le m\le \max\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t) \Leftrightarrow \sqrt{2}-1\le m\le 1$

Vậy với $\sqrt{2}-1\le m\le 1$ thảo yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho bất phương trình:

$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$ (1) có nghiệm.

A. $m\le\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}-1\le m\le 1$. **C.** $-1<m\le\dfrac{1}{3}$. **D.** $m\le -1$.

Hướng dẫn giải:

ĐK xác định của phương trình: $x\ge 1$.

Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x+1)^2}} \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} \quad (2)$$

Đặt $t=2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}, (t\ge 0)$. Vì $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4]{1-\dfrac{2}{x+1}}<1$ nên t<1.

Vậy với $x\ge 1$ thì $0\le t<1$

Khi đó, $(2)\Leftrightarrow 3t^2+m=2t \Leftrightarrow -3t^2+2t=m, (3)$.

Bây giờ bài toán trở thành tìm m để (3) có nghiệm $t\in[0;1)$.

Xét hàm số $f(t)=-3t^2+2t$ trên khoảng $[0;1)$. Ta có:

$f'(t)=-6t+2, f'(t)=0 \Leftrightarrow -6t+2=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$.

BBT

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$0 \nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow -1$

Vậy với $-1 < m \le \frac{1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn C.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $m \le 9$. **B.** $m \ge \frac{9}{2}$. **C.** $-1 < m$. **D.** $m \le 7$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1 \quad (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge -\frac{1}{2} \\ 3x^2+4x-1=mx \quad (2) \end{array}\right. \quad (*)$

Nhận xét:

$x=0$ không phải là nghiệm của (2). Do vậy, ta tiếp tục biến đổi:

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ \frac{3x^2+4x-1}{x}=m \quad (3) \end{cases}$

Bài toán trở thành tìm m để (3) có 2 nghiệm thực phân biệt:

$x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{0\}$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{3x^2+4x-1}{x}$ với $x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{0\}$. Ta có:

$f'(x)=\frac{3x^2+1}{x^2} > 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{0\}$

BBT

X	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$ $+\infty$	||	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Vậy với $m \geq \frac{9}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt.

Chọn B.

Câu 12: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt: $\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m,(m\in\mathbb{R})$

A. $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\leq m\leq 3\sqrt{2}+6$

B. $2\sqrt{6}+3\sqrt[4]{6}\leq m\leq 3\sqrt{2}+8$

C. $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\leq m\leq 3\sqrt{2}+6$

D. $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\leq m\leq 3\sqrt{2}+6$

Chọn A.

ĐK: $0\leq x\leq 6$

Đặt vế trái của phương trình là $f(x), x\in[0;6]$.

Ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}}+\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}--\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right), x\in(0;6)$$

Đặt:

$$u(x)=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right), v(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}--\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right), x\in(0;6)$$

Ta thấy $u(2)=v(2)=0, x\in(0;6)\Rightarrow f'(2)=0$. Hơn nữa $u(x),v(x)$ cùng dương trên khoảng (0;2) và cùng âm trên khoảng (2;6).

BBT

X	0		2		6
$f'(x)$	||	+	0	−	||

$f(x)$	$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}+6$	$\searrow$	$\sqrt[4]{12}+2\sqrt{3}$

Vậy với $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m\le 3\sqrt{2}+6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn A.

Câu 13: Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m.$$

A. $m\le\frac{47}{64};\frac{3}{2}\le m$ **B.** $\frac{49}{64}<m\le\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{47}{64}<m\le\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{47}{64}\le m\le\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{3+cos4x}{4}+cos^2 4x=m$$

$\Leftrightarrow\ 4cos^2 4x+cos4x=4m-3\ \ (1)$

Đặt t = cos4x. Phương trình trở thành: $4t^2+t=4m-3$, (2)

Với $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ thì $t\in[-1;1]$.

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $t\in[-1; 1)$, (3)

Xét hàm số g(t) = $4t^2+t$ với $t\in[-1;1)$, g’(t) = 8t+1.

g’(t) = 0 $\Leftrightarrow$ t = $-\frac{1}{8}$

Lập bảng biến thiên

t	-1		$-\frac{1}{8}$		1
g’(t)		$-$	0	$+$	
g(t)	3	$\searrow$	$-\frac{1}{16}$	$\nearrow$	5

Dựa vào bảng biến thiên suy ra (3) xảy ra $\Leftrightarrow -\frac{1}{16}<4m-3\le 3\Leftrightarrow \frac{47}{64}<m\le\frac{3}{2}$

Vậy giá trị của m phải tìm là: $\frac{47}{64} < m \le \frac{3}{2}$.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc $[10;10]$ để phương trình $\sqrt{1-x^2} - m\left(2\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1-x} - 3\right) + 1 = 0$ có nghiệm?

A. 12   **B.** 13   **C.** 8   **D.** 9

Hướng dẫn giải:

ĐK: $-1 \le x \le 1$. Đặt $u = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

$\Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}; u' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	-1		0		1
u'		$+$	0	$-$	
u	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

Từ BBT $\Rightarrow$ $\sqrt{2} \le t \le 2$

PT có dạng:

$\frac{t^2}{2} - m(2t-3) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 2m(2t-3)(*)$

Do $t = \frac{2}{3}$ không là nghiệm nên $(*) \Leftrightarrow 2m = \frac{t^2}{2t-3} = f(t)$

PT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Đồ thị h/s $y = f(t)$ và đt $y = 2m$ có điểm chung có hoành độ $\sqrt{2} \le t \le 2$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2t-3}$ trên $\left[\sqrt{2};2\right]$: $f'(t) = \frac{2t(t-3)}{(2t-3)^2} < 0 \, \forall t \in \left[\sqrt{2};2\right]$

BBT:

t	$\sqrt{2}$		$\frac{3}{2}$			2
$f'(t)$		$-$	||	$-$		
$f(t)$	$-2\left(2\sqrt{2}+3\right)$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$		4

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m \le -2\left(2\sqrt{2}+3\right) \\ 2m \ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -\left(2\sqrt{2}+3\right) \\ m \ge 2 \end{array}\right.$. Đáp án **A.**

Câu 15: Tìm m để phương trình $x^4 - (2m+3)x^2 + m + 5 = 0$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thoả mãn:

$$-2 < x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4 < 3$$

A. Không có m   **B.** $m = 1$ **C.** $m = 4$ **D.** $m = 3$

Hướng dẫn giải:

Đặt $x^2 = X$, ta có phương trình: $f\left(X\right) = X^2 - \left(2m+3\right).X + m + 5 = 0^{(*)}$

để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ thì phương trình (*) có hai nghiệm thoả mãn: $0 < X_1 < X_2$. Khi đó $x_1 = -\sqrt{X_2}; x_2 = -\sqrt{X_1}; x_3 = \sqrt{X_1}; x_4 = \sqrt{X_2}$

Do đó: $-2 < -\sqrt{X_2} < -1 < -\sqrt{X_1} < 0 < \sqrt{X_1} < 1 < \sqrt{X_2} < 3$

$\Leftrightarrow 2 > \sqrt{X_2} > 1 > \sqrt{X_1} > 0 \Leftrightarrow 4 > X_2 > 1 > X_1 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(1) < 0 \\ af(0) > 0 \\ af(4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+3 < 0 \\ m+5 > 0 \\ -7m+9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m > -5 \\ m < \dfrac{9}{7} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ không tồn tại m thoả mãn bài toán.

Chọn A.

Câu 16: Cho phương trình $2m^2x^3 + 8x + \sqrt{x^3 + x + 2} = 2m^2 + 10$ (m là tham số). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình đã cho vô nghiệm.

B. Phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực.

C. Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

D. Số nghiệm của phương trình phụ thuộc vào giá trị của tham số m.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x^3 + x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 - x + 2\right) \geq 0 \Leftrightarrow x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = 2m^2x^3 + 8x + \sqrt{x^3 + x + 2}$ liên tục trên $\left[-1; +\infty\right)$.

Ta có $f'\left(x\right) = 6m^2x^2 + 8 + \dfrac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x + 2}} > 0$ với $\forall x \in \left(-1; +\infty\right)$.

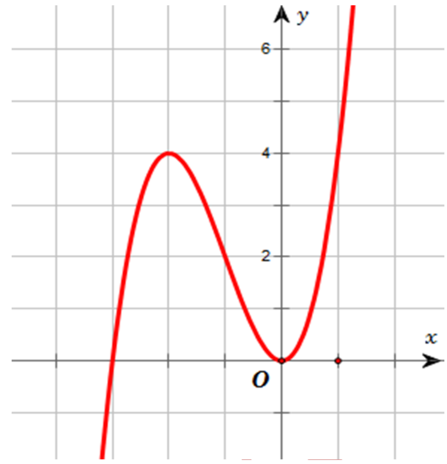
Suy ra hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[-1; +\infty\right)$.

Do đó, phương trình $f\left(x\right) = 2m^2x^3 + 8x + \sqrt{x^3 + x + 2} = 2m^2 + 10$ có tối đa một nghiệm.

Mà $f\left(1\right) = 2m^2.1^3 + 8.1 + \sqrt{1^3 + 1 + 2} = 2m^2 + 10 \longrightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất.

Chọn B.

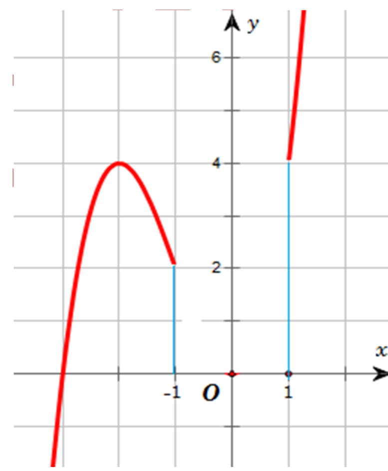
Câu 17: Hình vẽ bên là đường biểu diễn của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{3x^2-3}=\sqrt{-x^3+m}$ có hai nghiệm thực âm phân biệt.



A. $-1\le m\le 1$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.$. **D.** $m=-4$.

Hướng dẫn giải:



Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -1 \end{array}\right.$ (1) và $x\le \sqrt[3]{m}$ (2).

Phương trình $\sqrt{3x^2-3}=\sqrt{-x^3+m}$

$$\longleftrightarrow 3x^2-3=-x^3+m \longleftrightarrow x^3+3x^2=m+3.$$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ (chỉ xét trong phần x thỏa điều kiện (1) & (2)) và đường thẳng $y=m+3$ (cùng phương với trục hoành).

Xét với $\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -1 \end{array}\right.$, đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ có dạng như hình vẽ. Dựa vào đồ thị, ta thấy đ

phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi $2\le m+3\le 4 \longleftrightarrow -1\le m\le 1$.

Với $-1\le m\le 1$ thì (1) thỏa mãn (2).

Chọn A.

Câu 18: Bất phương trình $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\ge 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Hỏi tổn $a+b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. -2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Điều kiện: $-2\le x\le 4$. Xét $f(x)=\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2;4]$.

Có $f'(x)=\dfrac{3\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}>0, \forall x\in(-2;4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2;4]$, bpt $\Leftrightarrow f(x)\ge f(1)=2\sqrt{3}\Leftrightarrow x\ge 1$.

So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $S=[1;4]\Rightarrow a+b=5$.

Câu 19: Bất phương trình $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$ có tập nghiệm $(a;b]$. Hỏi hiệu $b-a$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -1.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Điều kiện: $1\le x\le 3$; bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{(3-x)^2+2}+\sqrt{3-x}$

Xét $f(t)=\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t}$ với $t\ge 0$. Có $f'(t)=\dfrac{t}{2\sqrt{t^2+2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>0,\forall t>0$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$. (1) $\Leftrightarrow f(x-1)>f(3-x)\Leftrightarrow x-1>3\Leftrightarrow x>2$

So với điều kiện, bpt có tập nghiệm là $S=(2;3]$

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2-3x+2\le 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2+(m+1)x+m+1\ge 0$?

A. $m\le -1$. **B.** $m\le -\dfrac{4}{7}$. **C.** $m\ge -\dfrac{4}{7}$. **D.** $m\ge -1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Bất phương trình $x^2-3x+2\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

Bất phương trình $mx^2+(m+1)x+m+1\ge 0\Leftrightarrow m(x^2+x+1)\ge -x-2\Leftrightarrow m\ge \dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$ với $1\le x\le 2$. Có $f'(x)=\dfrac{x^2+4\text{x}+1}{(x^2+x+1)^2}>0,\forall x\in[1;2]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{[1;2]} f(x)\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{4}{7}$

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $-x^3+3mx-2<-\dfrac{1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x\ge 1$?

A. $m<\dfrac{2}{3}$. **B.** $m\ge \dfrac{2}{3}$. **C.** $m\ge \dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}\le m\le \dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Bpt $\Leftrightarrow 3mx<x^3-\dfrac{1}{x^3}+2,\forall x\ge 1\Leftrightarrow 3m<x^2-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{2}{x}=f(x),\forall x\ge 1$.

Ta có $f'(x)=2x+\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{2}{x^2}\ge 2\sqrt{2x\left(\dfrac{4}{x^5}\right)}-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{4\sqrt{2}-2}{x^2}>0$ suy ra $f(x)$ tăng.

Ycbt $\Leftrightarrow f(x)>3m,\forall x\ge 1\Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} f(x)=f(1)=2>3m\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}>m$

Câu 22: Tìm tham số thực m để bất phương trình: $\sqrt{x^2-4x+5} \ge x^2-4x+m$ (1) có nghiệm thự trong đoạn $[2;3]$.

A. $m<-1$ **B.** $m\le -1$ **C.** $m\le -\frac{1}{2}$ **D.** $m<-\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-4x+5}\ge 1 \Rightarrow x^2-4x=t^2-5$.

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow t\ge t^2-5+m \Leftrightarrow m\le -t^2+t+5=g(t),\ t\in[1;+\infty)$.

Ta có: $g'(t)=-2t+1.$ *Cho* $g'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$ $\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(t)$	$+$ 0 $-$	$-$	$-$
$g(t)$		$3 \searrow -1$	

Dựa vào bảng biến thiên, $m\le -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 23: Tìm m để bpt sau có tập nghiệm là $(-\infty;+\infty)$: $(x+1)(x+3)+m>5\sqrt{x^2+4x+29}$

A. $m<26$. **B.** $m\ge 26$. **C.** $m\ge -\frac{129}{4}$. **D.** $m\le -\frac{129}{4}$.

Hướng dẫn giải:

$(x+1)(x+3)+m>5\sqrt{x^2+4x+29} \Leftrightarrow m>-x^2-4x-3+5\sqrt{x^2+4x+29} \Leftrightarrow m>-t^2+5t+26$

Với $t=\sqrt{x^2+4x+29}, t=\sqrt{(x+2)^2+25}\ge 5$

BPT $(x+1)(x+3)+m>5\sqrt{x^2+4x+29}$ có nghiệm là $(-\infty;+\infty)$ $\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{[5;+\infty)} f(t)$ với $f(t)=-t^2+5t+26$

Do $f(t)=-t^2+5t+26=t(5-t)+26\le 26$ với $t\ge 5$ nên $\max\limits_{[5;+\infty)} f(t)=26$

Chọn B.

ỨNG DỤNG THỰC TẾ

I - CÁC BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Câu 1: Một vật chuyển động có phương trình là $S(t)=40\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right),(t(s))$, quãng đường tính theo đơn vị mét.

a. Tính vận tốc của vặt chuyển động tại thời điểm t=4(s)

b. Tính gia tốc của vật chuyển động tại thời điểm t=6(s).

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $v(t)=S'(t)=40\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)'.cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=40\pi cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$

vậy: $v(4)=S'(4)=40\pi cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=40\pi\frac{1}{2}=20\pi\,(m/s)$

b) Ta có:

$a(t)=v'(t)=-40\pi\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)'\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=-40\pi^2\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$

Vậy: $a(6)=v'(6)=-40\pi^2\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-40\pi^2\frac{\sqrt{3}}{2}=-20\sqrt{3}\pi^2\left(m/s^2\right)$

Câu 2: Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $S(t)=50t^2,(t(s))$, độ cao tính theo đơn vị là mét.

a. Tính vận tốc của vật rơi tự do tại thời điểm t=6(s).

b. Sau thời gian bao lâu thì vật rơi tự do đạt vận tốc $50(m/s)$.

Hướng dẫn giải:.

a. Ta có $v(t)=S'(t)=10t$.

Vậy vận tốc thời điểm $t=6(s)$ là: $v(6)=S'(6)=10.6=60(m/s)$

b. Vậy để vận tốc của vật rơi do đạt $50(m/s)$ thì: $50=10t\Leftrightarrow t=5(s)$

Câu 3: Một vật chuyển động có vận tốc được biểu thị bởi công thức là $v(t)=5t^2+7t,(t(\mathrm{s}))$, trong đó $v(t)$ tính theo đơn vị là (m/s)

a. Tính gia tốc của vật tại thời điểm t=2(s).

b. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc chuyển động của vật bằng 12 m/s.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $a(t)=v'(t)=10t+7$. Vậy gia tốc của vật tại thời điểm $t=2(s)$

$a(2)=v'(2)=10.2+2=27\left(m/s^2\right)$

b) Vật tại thời điểm vận tốc chuyển động của vật bằng 12 m/s:

$v(t)=12\Leftrightarrow 5t^2+7t=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\ \ (\mathrm{t/m})\\ t=-2,4(\mathrm{loai})\end{array}\right.$

Với $t=1(s):a(1)=v'(1)=10+7=17\left(m/s^2\right)$

Câu 4: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3, t(s)$. Vận tốc $v(m/s)$ củ chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu.

A. $t=4$ **B.** $t=3$ **C.** $t=2$ **D.** $t=1$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $v(t)=S'(t)=6t-3t^2$

$v'(t)=6-6t.$

$v'(t)=0 \Leftrightarrow 6-6t=0 \Leftrightarrow t=1$

BBT

t	0		1		$+\infty$
$V'(t)$		+	0	−	
V(t)		↗	V_{max}	↘	

Vậy vận tốc của chuyển động đạt GTLN khi t=1.

Chọn D.

Câu 5: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, v các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lê xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức $h(t)=24t+5t^2-\frac{t^3}{3}$. Biết rằn phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy đinh trước 5 giờ. Hỏ cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong h phải lên cao nhất mới xả nước.

A. $15h$ **B.** $16h$ **C.** $17h$ **D.** $18h$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$h'(t)=24+10t-t^2$

$h'(t)=0 \Leftrightarrow 24+10t-t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2(\text{loai}) \\ t=12 \ \ (\text{t/ m}) \end{array}\right.$

BBT

t	0		12		$+\infty$
$h'(t)$		+	0	−	
$h(t)$		↗	$h_{\max}$	↘	

Vậy để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời và 15 giờ chiều cùng ngày.

Chọn A.

Câu 6: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyể động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10,(t(s))$, trong đó t là khoảng thời gian tín bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn c chuyển được bao nhiêu mét?

A. 0,2m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $v_0 = 10\left(m/s\right)$

Gia tốc của ô tô chuyển động chậm dần đều: $a = v'\left(t\right) = -5$.

Tại thời điểm ô tô dừng lại thì vận tốc bằng 0.

Ta có: $v_{(t)}^2 - v_0^2 = 2aS \Leftrightarrow 0 - 10^2 = 2\left(-5\right)S \Leftrightarrow S = 10\left(m\right)$

Vậy ô tô còn có thể đi được quãng đường là $10m$.

Chọn C.

Lưu ý:

Bài này còn có thể áp dụng tích phân để tìm quãng đường di chuyển của ô tô khi dừng lại.

Câu 7: Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 300km (tới nơi sinh sản). Vận tốc dòng nước 6km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong thời gian t giờ cho bởi công thức $E\left(v\right) = cv^3t$, trong đó c là hằng số; E tính bằng jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất là bao nhiêu?

A. 9km/h **B.** 6km/h **C.** 10km/h **D.** 12km/h

Hướng dẫn giải:

Vận tốc của con cá khi bơi ngược dòng: $v - 6\left(km/h\right), \left(v \ge 6\right)$

Thời gian con cá bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản: $t = \dfrac{300}{v-6}\left(h\right)$

Năng lượng tiêu thụ của con cá khi bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản:

$$E\left(v\right) = cv^2\frac{900}{v-6} - cv^3\frac{300}{\left(v-6\right)^2} = \frac{300cv^2}{v-6}\left(3 - \frac{v}{v-6}\right).$$

$$E'\left(v\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{300cv^2}{v-6}\left(3 - \frac{v}{v-6}\right) = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{v}{v-6} = 0 \Leftrightarrow \text{v} = 9.$$

BBT

X	6		9		$+\infty$
$E'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	
E(x)		$\searrow$	$E_{\min}$	$\nearrow$	

Vậy vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng $v = 9\left(km/h\right)$. Chọn. A

Nhận xét:

Đối với bài này có rất nhiều em tìm nhầm hàm $E\left(v\right) = c\left(v-6\right)^3\dfrac{300}{v-6}\left(J\right)$. Và sẽ tìm được chọn $v = 6km/h$ đó là Chọn sai hoàn toàn vì vận tốc v trong biểu thức $E\left(v\right) = cv^3t$, v là vận tốc thực của con cá khi di chuyển, còn t là thời gian con cá bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản ứng với vận tốc của con cá đã trừ đi vận tốc dòng nước.

Câu 8: Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương

của vận tốc, khi $v = 10km/h$ thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tố
của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?

A. 10km/h **B.** 15km/h **C.** 20km/h **D.** 25km/h

Hướng dẫn giải:

Gọi $x(km/h)$ là vận tốc của tàu. Thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\frac{1}{x}$ (giờ).

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\frac{1}{x}.480$ (ngàn đồng).

Khi vận tốc $v = 10km/h$ thì chi phí cho quãng đường 1 km ở phần thứ hai là:

$\frac{1}{10}.30 = 3$ (ngàn đồng).

Xét tại vận tốc $x(km/h)$, gọi y (ngàn đồng) chi phí cho quãng đường 1 km tại vận tốc x th

chi phí cho quãng đường 1 km tại vận tốc x, ta có: $y = kx^3$

Ta có: $3 = k10^3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{10^3}$. Suy ra $y = \frac{3x^3}{1000}$.

Vậy tổng chi phí tiền nhiên liệu cho 1 km đường là: $P(x) = \frac{480}{x} + \frac{3x^3}{1000}$.

Bài toán trở thành tìm x để $P(x)$ nhỏ nhất.

$P'(x) = -\frac{480}{x^2} + \frac{9x^2}{1000}$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{480}{x^2} + \frac{9x^2}{1000} = 0 \Leftrightarrow x = 20$

$P''(x) = \frac{960}{x^3} + \frac{18x}{1000}$

$P''(20) = \frac{960}{20^3} + \frac{18.20}{1000} > 0$

Suy ra $P(x)$ đạt GTNN tại $x = 20$

Vậy vận tốc của tàu $x = 20(km/h)$.

Chọn C.

Câu 9: Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8m/s^2$ và t tín
bằng giây (s). Vận tốc của vật tại thời điểm t = 5s bằng:

A. 49m/s **B.** 25m/s **C.** 10m/s **D.** 18m/s

Hướng dẫn giải:

$v = S' = gt$ nên tại thời điểm $t = 5s$. Vận tốc của vật là:

$v = 9,8.5 = 49(m/s)$.

Chọn A.

Câu 10: Một chất điểm chuyển động thẳng theo phương trình $S = t^3 - 3t^2 + 4t$, trong đó t tính bằn
giây (s) và S tính bằng mét (m). Gia tốc của chất điểm lúc t=2s là:

A. $4m/s^2$ **B.** $6m/s^2$ **C.** $8m/s^2$ **D.** $12m/s^2$

Hướng dẫn giải:

$a = S'' = 6t - 6$ nên tại thời điểm t=2s thì gia tốc của chất điểm là: $a = 6.2 - 6\left(m/s^2\right)$.

Chọn B.

Câu 11: Cho chuyển động thẳng theo phương trình $S = t^3 + 3t^2 - 9t + 27$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m).Gia tốc chuyển động tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là:

A. $0m/s^2$ **B.** $6m/s^2$ **C.** $24m/s^2$ **D.** $12m/s^2$

Hướng dẫn giải:

$v = S' = 3t^2 + 6t - 9; a = S'' = 6t + 6$

Tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu: $3t^2 + 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3\left(loai\right) \end{array}\right.$

Với $t = 1$ thì gia tốc của chuyển động là: $a = 6.1 + 6 = 12\left(m/s^2\right)$.

Chọn D.

Câu 12: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + 2t - 100$, trong đó t tính bằng giây (s). Chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất tại thời điểm:

A. $t = 1$ **B.** $t = 16$ **C.** $t = 5$ **D.** $t = 3$

Hướng dẫn giải:

$S' = t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2\left(l\right) \\ t = 1 \end{array}\right.$

Vậy chất điểm đạt GTNN tại t= 1s.

Chọn A.

Câu 13: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a\left(t\right) = 3t + t^2\left(m/s^2\right)$. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc?

A. $11100m$ **B.** $\frac{6800}{3}m$ **C.** $\frac{4300}{3}m$ **D.** $\frac{5800}{3}m$

Hướng dẫn giải:

$a\left(t\right) = 3t + t^2$

$v'\left(t\right) = a\left(t\right); \quad S'\left(t\right) = v(t)$

Theo đề ta có: vận tốc ban đầu là $10\left(m/s\right)$

$\Rightarrow v\left(t\right) = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 10\left(m/s\right)$

$S\left(t\right) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{12}t^4 + 10t\left(m\right)$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là: $S\left(10\right) = \frac{4300}{3}\left(m\right)$.

Chọn C.

Câu 14: Một vật chuyển động với vận tốc $v\left(t\right)\left(m/s\right)$, có gia tốc $v'\left(t\right) = \frac{3}{t+1}\left(m/s^2\right)$. vận tốc ban đầu của vật là $6m/s$. Vận tốc của vật sau 10 giây là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

A. 14m/s **B.** 13m/s **C.** 11m/s. **D.** 12m/s.

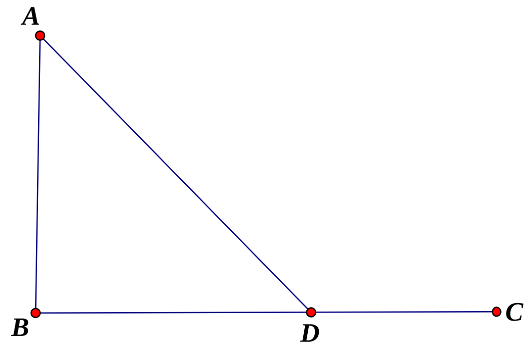
Hướng dẫn giải:

Vận tốc của vật sau 10 giây là $v = 6 + 7 = 13\left(m/s \right)$.

Chọn B.

II - CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU

Câu 15: Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của tỉnh Quảng Ninh muốn tiếp cận vị trí C để tiếp tế lượng thực phải đi theo con đường từ A đến B và từ B đến C (như hình vẽ). Tuy nhiên do nước ngập con đường từ A đến B nên đoàn cứu trợ không thể đi đến C bằng xe, nhưng đoàn cứu trợ có thể chèo thuyền từ A đến D với vận tốc 6km/h rồi đi bộ từ D đến C với vận tốc 4km/h. Biết A cách B 5km, B cách C 7km. Xác định vị trí điểm D cách B bao nhiêu km để đoàn cứu trợ đến C nhanh nhất.



A. $BD = 5km$. **B.** $BD = 2\sqrt{2}km$. **C.** $BD = 4km$. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải:

Gọi $BD = x(km)$, $0 \le x \le 7$.

$AD = \sqrt{25 + x^2}$, $CD = 7 - x$.

Thời gian đi từ A đến C là: $T(x) = \dfrac{\sqrt{25+x^2}}{6} + \dfrac{7-x}{4}$.

Ta có $T'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{3\sqrt{25+x^2}} - \dfrac{1}{2}\right) < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\right) < 0$

$T(x)$ nghịch biến với x thỏa mãn $0 \le x \le 7$ do đó $T(x)$ nhỏ nhất khi $x = 7$.

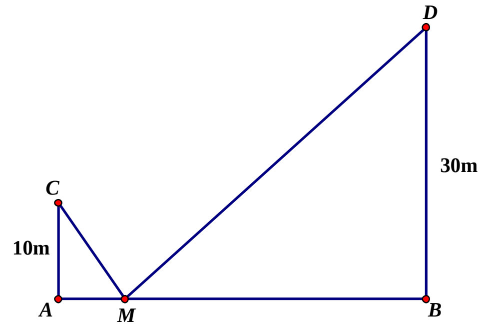
Câu 16: Có hai chiếc cọc cao $10m$ và $30m$ lần lượt đặt hai vị trí A, B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng $24m$. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc như hình vẽ. Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?

A. $AM = 6m,\ BM = 18m$. **B.** $AM = 7m,\ BM = 17m$.

C. $AM = 4m,\ BM = 20m$. **D.** $AM = 12m,\ BM = 12m$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Gọi độ dài $AM = x,\ 0 < x < 24$.

Ta có $CM = \sqrt{CM^2 + AM^2} = \sqrt{100 + x^2}$,

$DM = \sqrt{BM^2 + BD^2} = \sqrt{900 + (24 - x)^2} = \sqrt{1476 - 48x + x^2}$

Tổng độ dài đường dây là $S = \sqrt{100 + x^2} + \sqrt{1476 - 48x + x^2}$

Đặt $f(x) = \sqrt{100 + x^2} + \sqrt{1476 - 48x + x^2},\ 0 < x < 24$ với

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{100 + x^2}} - \frac{24 - x}{\sqrt{(24 - x)^2 + 30^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{100 + x^2}} - \frac{24 - x}{\sqrt{(24 - x)^2 + 30^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{100 + x^2}} = \frac{24 - x}{\sqrt{(24 - x)^2 + 30^2}}$$

Bình phương 2 vế không âm ta được

$$x^2 + 6x - 72 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -12\ (l) \end{array}\right. \Rightarrow AM = 6\,\text{m},\ BM = 18\,\text{m}.$$

Cách 2: (Casio hoặc công thức giải nhanh).

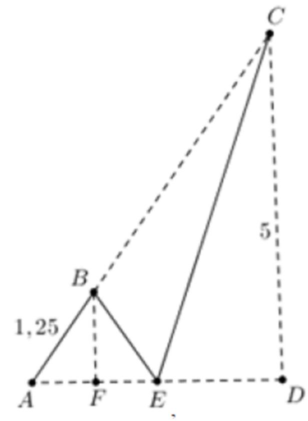
Câu 17: Một người lính đặc công thực hiện bơi luyện tập từ vị trí A trên bờ biển đến một chiế thuyền đang neo đậu tại vị trí C trên biển. Sau khi bơi được $1,25\text{km}$ do khát nước người nà đã bơi vào vị trí E trên bờ biển để uống nước rồi mới từ E bơi đến C. Hãy tính xem ngườ lính này phải bơi ít nhất bao nhiêu kilomet. Biết rằng khoảng cách từ A đến C là $6,25\text{kn}$ và khoảng cách ngắn nhất từ C vào bờ là 5km.

A. $3\sqrt{5}$ km. **B.** $\frac{5}{2}$ km.

C. $\sqrt{26} + \sqrt{5}$ km. **D.** $\frac{15}{2}$ km

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta có $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=3,75$, $AB=BE=1,25$.

Gọi độ dài đoạn $AF=x$ với $0<x<3,75$, theo hình vẽ $AF=EF=x$ do đó

$EC=\sqrt{CD^2+ED^2}=\sqrt{25+\left(3,75^2-2x\right)^2}$.

Quãng đường người lính bơi phải bơi là $1,25+1,25+\sqrt{25+\left(3,75-2x\right)^2}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=1,25+1,25+\sqrt{25+\left(3,75-2x\right)^2}$ với $f'\left(x\right)=\dfrac{-15+8x}{2\sqrt{39,0625-15x+4x^2}}$

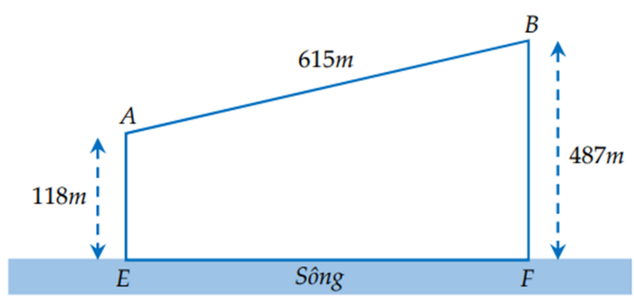
Bảng biến thiên

x	0 $\qquad \frac{15}{8}$ $\qquad 3,75$
$f'(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$
$f(x)$	$\searrow$ $7,5$ $\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên, quãng đường ngắn nhất người đó bơi là $7,5$ km.

Cách 2: (Casio hoặc công thức giải nhanh)

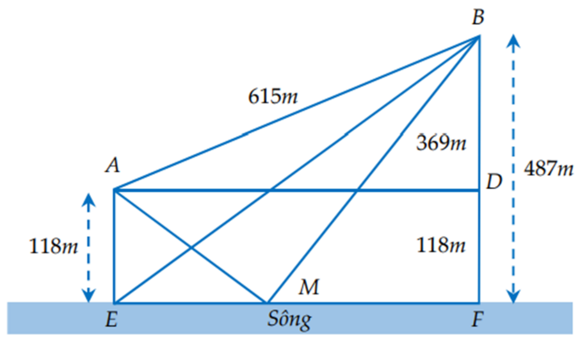
Câu 18: Hai vị trí A,B cách nhau 615m và cùng nằm về một phía bờ sông. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ dông lần lượt là 118m và 478m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là bao nhiêu (làm trong đến chữ số thập phân thứ nhất).



A. $569,5\text{m}$. **B.** $671,4\text{m}$. **C.** $779,8\text{m}$. **D.** $741,2\text{m}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước rồi đi từ M về B.

Ta có $BD = BF - AE = 369\,(\mathrm{m})$, $EF = A\sqrt{AB^2 - BD^2} = 492\,(\mathrm{m})$.

Đặt $EM = x$ với $0 < x < 492$, ta được $MF = 492 - x,\ AM = \sqrt{x^2 + 118^2}$,

$BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}$.

Tổng quãng đường AM và MB là $\sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}$ với $0 < x < 492$.

Đặt $f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}$ với $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \dfrac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}$$

Bình phương hai vế không âm ta được

$$x^2\left[(492 - x)^2 + 487^2\right] = (492 - x)^2\left(x^2 + 118^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (492 - x)^2 x^2 + 487^2.x^2 = (492 - x)^2 x^2 + (492 - x)^2 118^2$$

$$\Leftrightarrow (487x)^2 = (58056 - 118x)^2$$

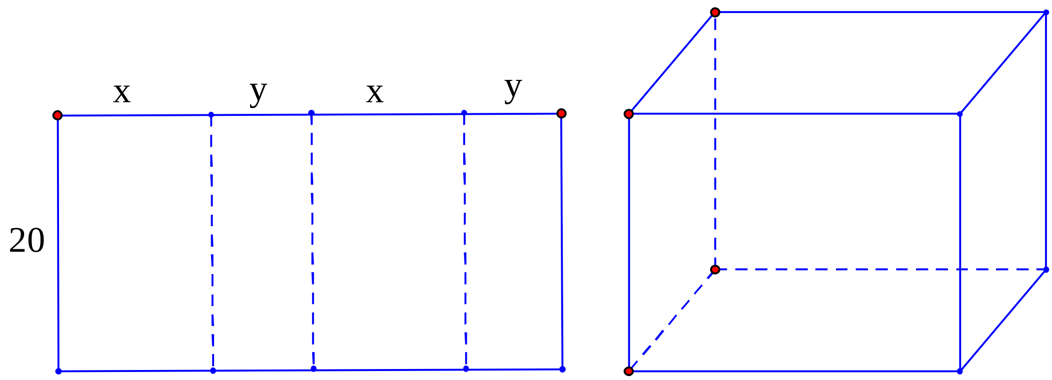
$$\left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{58056}{605} & (n) \\ x = -\dfrac{58056}{605} & (l) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$0 \quad \dfrac{58056}{605} \quad 492$
$f'(x)$	$-\quad 0 \quad +$
$f(x)$	$\searrow$ 779,8 $\nearrow$

Cách 2: (Casio hoặc công thức giải nhanh).

Câu 19: Người ta gập một miếng bìa hình chữ nhật có kích thước $60\mathrm{cm} \times 20\mathrm{cm}$ như hình vẽ để ghé thành một chiếc hộp hình hộp đứng (hai đáy trên và dưới được cắt từ miếng tôn khác đ ghép vào). Tính diện tích toàn phần của hộp khi thể tích của hộp lớn nhất.



A. $1425\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $1200\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $2150\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $1650\left(\text{cm}^3\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Theo bài ta có $2x+2y=60 \Leftrightarrow y=30-x$.

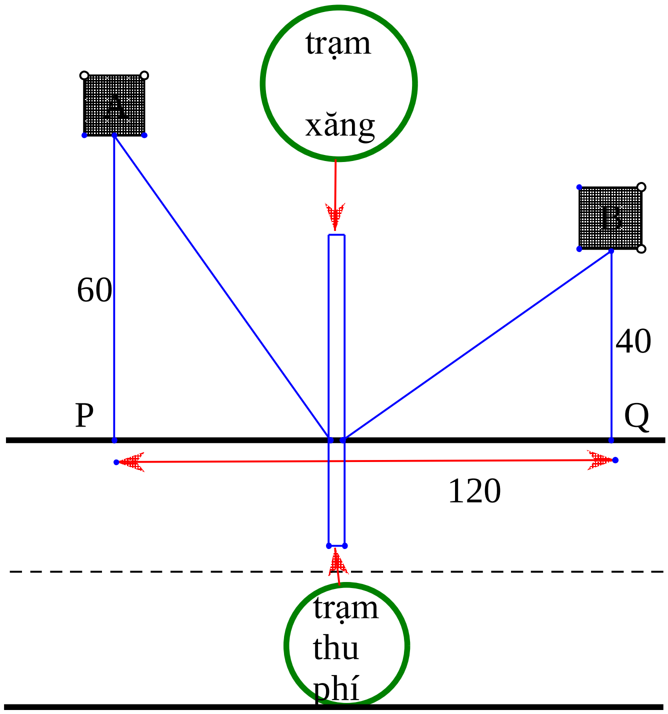
Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V=20xy=20x\left(30-x\right)\le 20.\dfrac{\left(x+30-x\right)^2}{4}$

$=5.30^2=4500cm^3$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=30-x \Leftrightarrow x=15 \Rightarrow y=15$.

Vậy diện tích toàn phần của khối hộp chữ nhật là $S_{tp}=2.20x+2.20y+2xy=1650\text{ cm}^2$.

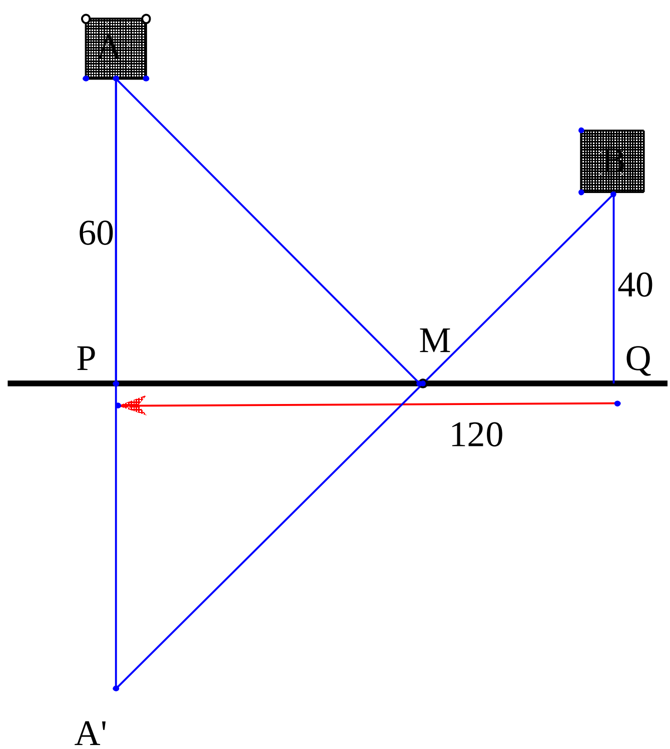
Câu 20: Đường cao tốc mới xây nối hai thành phố A và B. Hai thành phố này muốn xây một trạm thu phí và trạm xăng ở trên đường cao tốc như hình vẽ. Để tiết kiệm chi phí đi lại, hai thành phố này quyết định tính toán xem dựng trạm thu phí ở vị trí nào để tổng khoảng cách từ hai trung tâm thành phố đến trạm là ngắn nhất, biết khoảng cách từ trung tâm thành phố A, B đến đường cao tốc lần lượt là $60\,\text{km}$ và $40\,\text{km}$; khoảng cách giữa hai trung tâm thành phố là $120\,\text{km}$ (được tính theo khoảng cách của hình chiếu vuông góc của hai trung tâm thành phố lên đường cao tốc, tức là PQ kí hiệu như hình vẽ). Tìm vị trí của trạm thu phí và trạm xăng? (Giả sử chiều rộng của trạm thu phí không đáng kể)



A. 72km kể từ P. **B.** 42km kể từ Q. **C.** 48km kể từ P. **D.** Tại P.

Hướng dẫn giải:

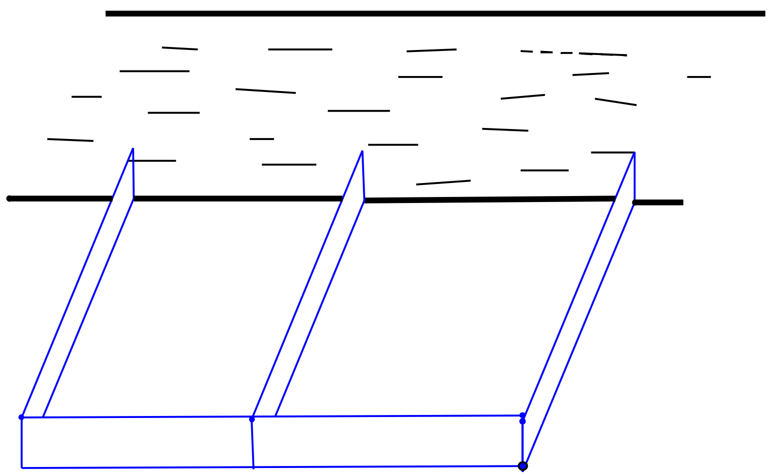
Chọn A.



Gọi A' đối xứng với A qua PQ. Gọi M là vị trí xây trạm thu phí và trạm xăng PQ. Ta có $MA + MB = MA' + MB \geq AB$. Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ và PQ.

Vì $\dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{PA'}{QB} = \dfrac{PA}{QB} \Leftrightarrow \dfrac{MP}{PA} = \dfrac{MQ}{QB} = \dfrac{MP+MQ}{PA+QB} = \dfrac{6}{5} \Rightarrow MP = 72$.

Câu 21: Một người nông dân có $15.000.000$ đồng để làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để ngăn khu đất thành hai hình chữ nhật bằng nhau với mục đích trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông, chi phí nguyên vật liệu 60.000 đồng/mét. Còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng/mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được?



A. $6250\,\text{m}^2$. **B.** $1250\,\text{m}^2$. **C.** $3125\,\text{m}^2$. **D.** $50\,\text{m}^2$.

Hướng dẫn giải:

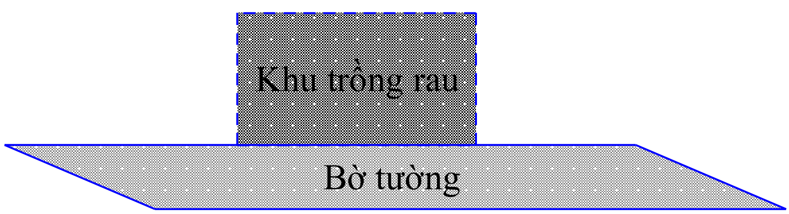
Chọn A.

Gọi a (m) là chiều dài hàng rào song song bờ sông, b (m) là chiều dài mặt hàng rào vuông góc với bờ sông. Chi phí xây dựng vật liệu được tính là:

$60.000\times a+50.000\times 3b=15.000.000 \Leftrightarrow 2a+5b=500$.

Mà $2a+5b\ge 2\sqrt{10ab}$, suy ra $ab\le 6250$. Diện tích đất rào là $S=ab=6250\left(\text{m}^2\right)$.

Câu 22: Bác nông dân làm một hàng rào trồng rau hình chữ nhật có chiều dài song song với bờ tường. Bác chỉ làm ba mặt, mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng $200\,\text{m}$ lưới sắt để làm nên toàn bộ hàng rào đó. Hỏi diện tích lớn nhất bác có thể rào là bao nhiêu.



A. $1500\,\text{m}^2$. **B.** $10000\,\text{m}^2$. **C.** $2500\,\text{m}^2$. **D.** $5000\,\text{m}^2$.

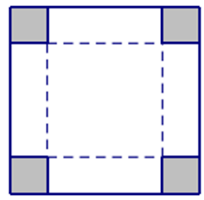
Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi kích thước hàng rào trồng rau hình chữ nhật là $a\times b$ trong đó a là cạnh song song bờ tường. Theo đề, ta có $a+2b=200\Rightarrow 200\ge 2\sqrt{2ab}\Leftrightarrow ab\le 5000\left(\text{m}^2\right)$.

Diện tích lớn nhất của đám rau đó là $S = ab = 5000\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Câu 23: Từ một tấm bìa cứng hình vuông cạnh a, người ta cắt bốn góc với bốn hình vuông bằn nhau *(như hình* vẽ) rồi gấp lại tạo thành một hình hộp không nắp. Tìm cạnh của hình vuôn bị cắt để thể tích khối hộp lớn nhất.



A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{8}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a}{6}$.

Hướng dẫn giải:

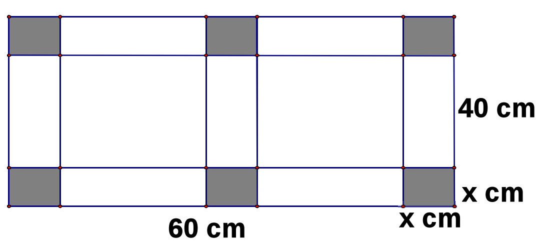
Chọn D.

HD: Gọi x là độ dài cạnh mỗi hình vuông bị cắt ở 4 góc. Hình hộp được tạo ra có đáy là hình vuông cạnh $a-2x$ và chiều cao là x, thể tích của nó là:

$$V = (a-2x)^2 x \Leftrightarrow 4V = (a-2x)(a-2x)4x \le \left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3 = \frac{8a^3}{27}$$

Dấu bằng khi $(a-2x) = (a-2x) = 4x \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$.

Câu 24: Cho một tấm bìa hình chữ nhật chiều dài $AB = 60\text{cm}$ chiều rộng $BC = 40\text{cm}$. Người ta cắ 6 hình vuông bằng nhau như hình vẽ, mỗi hình vuông cạnh bằng $x\text{cm}$, rồi gấp tấm bìa lạ như hình vẽ dưới đây để được một hộp quà có nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớ nhất



A. $\frac{20}{3}\text{cm}$.. **B.** 4cm. **C.** 5cm. **D.** $\frac{10}{3}\text{cm}$.

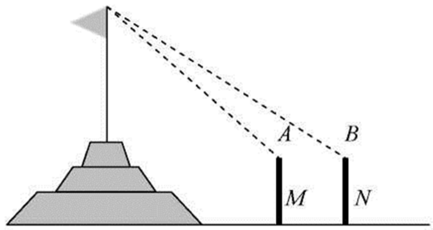
Lời giải. Các kích thước khối hộp lần lượt là: $\frac{60-3x}{2}$; $40-2x$; x.

Khi đó $V_{hop} = \left(\frac{60-3x}{2}\right)(40-2x)x = 3x^3 - 120x^2 + 1200x.$

Khảo sát hàm $f(x)=3x^3-120x^2+1200x$ với $0<x<20$, ta được $\max\limits_{(0;20)} f(x)=f\left(\frac{20}{3}\right)$.

Chọn A.

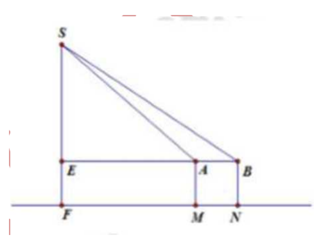
Câu 25: Để đo chiều cao từ mặt đất đến đỉnh cột cờ của một Kỳ đài trước Ngọ Môn (Đại Nội - Huế), người ta cắm hai cọc bằng nhau MA và NB cao $1,5m$ so với mặt đất. Hai cọc này song song, cách nhau $10m$ và thẳng hàng so với tim cột cờ (như hình vẽ). Đặt giác kế đứng tại A và B để nhắm đến đỉnh cột cờ, người ta đo được các góc lần lượt là $51^0 40'12''$ và $45^0 39'$ so với đường song song mặt đất. Hãy tính chiều cao của cột cờ (Làm tròn đến $0,01m$).



A. $63,48m$. **B.** $52,29m$. **C.** $62,29m$. **D.** $53,48m$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

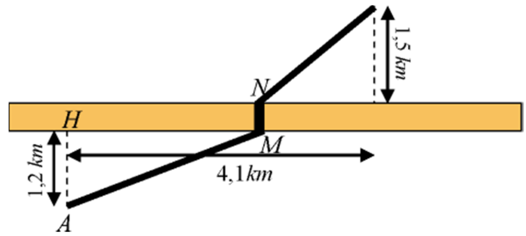


$$\begin{cases}\cot \widehat{SAE}=\dfrac{EA}{SE}\\ \cot \widehat{SBE}=\dfrac{EB}{SE}=\dfrac{EA+AB}{SE}\end{cases}\Rightarrow \cot \widehat{SBE}=\cot \widehat{SAE}+\dfrac{AB}{SE}$$

$$\Leftrightarrow SE=\frac{AB}{\cot \widehat{SBE}-\cot \widehat{SAE}}\approx 53,48m$$

Suy ra, chiều cao của cột cờ là $SE+10\approx 63,48m$

Câu 26: Người ta muốn làm một con đường từ địa điểm A đến địa điểm B ở hai bên bờ một con sông, các số liệu được thể hiện trên hình vẽ, con đường được làm theo đường gấp khúc $AMNB$. Biết rằng chi phí xây dựng $1km$ đường bên bờ sông có điểm B gấp $1,3$ lần chi phí xây dựng 1km đường bên bờ sông có điểm A, còn chi phí làm cầu MN tại điểm nào cũng như nhau. Hỏi phải xây dựng cầu tại điểm M cách điểm H bao nhiêu (làm tròn đến $0,001km$) để chi phí làm đường là nhỏ nhất.



A. 1,758 *km*. **B.** 2,630 *km*. **C.** 2,360 *km*. **D.** Kết quả khác.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi t là chi phí xây dựng 1 km đường bên bờ sông có điểm A. Đặt $0 \le x = HM \le 4,1km$.

Tổng chi phí xây dựng là (chưa tính cầu) là:

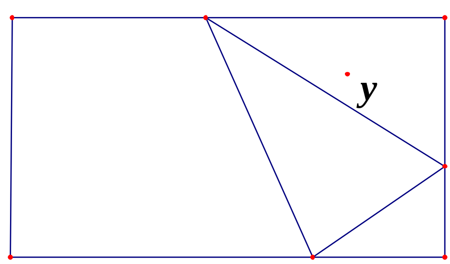
$$T = tAM + 1,3t.BN = t.\sqrt{AH^2 + HM^2} + 1,3t\sqrt{BK^2 + NK^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T}{t} = \sqrt{1,2^2 + x^2} + 1,3\sqrt{1,5^2 + (4,1 - x)^2} = f(x)$$

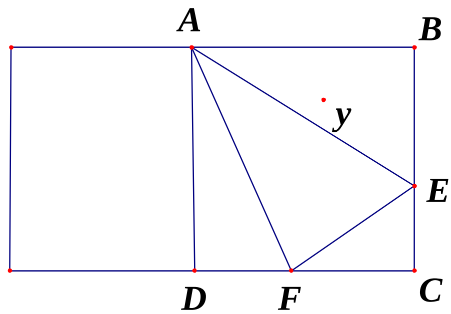
Xét hàm số $f(x)$ với $0 \le x \le 4,1 \Rightarrow \underset{x\in[0;4,1]}{Min} f(x) \approx f(2,6303)$.

Câu 27: Cho một tờ giấy hình chữ nhật có chiều dài $12cm$, chiều rộng $8cm$. Gấp góc bên phải t giấy sao cho khi gấp, đỉnh của nó có chạm với đáy dưới (như hình vẽ). Gọi độ dài nếp gấp l y thì giá trị nhỏ nhất của y là bao nhiêu.

A. $3\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $6\sqrt{2}$.



Hướng dẫn giải:



Đặt $EF = x, EC = 8 - x \Rightarrow FC = \sqrt{x^2 - (8 - x)^2} = \sqrt{16x - 64}$.

Ta có $\Delta ADF \sim \Delta FCE\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{EF}{AF}=\dfrac{CF}{AD}$.

$AF=\dfrac{EF.AD}{FC}=\dfrac{8x}{\sqrt{16x-64}}$.

$y=AE=\sqrt{AF^2+EF^2}=\sqrt{\dfrac{64x^2}{16x-64}+x^2}=\sqrt{\dfrac{16x^3}{16x-64}}=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-4}}$.

$f(x)=\dfrac{x^3}{x-4},x\in(4;8)$.

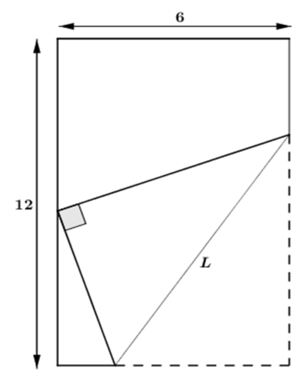
$f'(x)=\dfrac{48x^2(16x-64)-16.16x^3}{(16x-64)^2}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 768x^3-3072x^2-256x^3=0 \Leftrightarrow 512x^3-3072x^2=0 \Leftrightarrow x=6$.

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=+\infty;\ f(6)=108;\ f(8)=256$

Vậy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=6$, suy ra y đạt giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

Câu 28: Một mảnh giấy hình chữ nhật có chiều dài 12cm và chiều rộng 6cm. Thực hiện thao tác gấp góc dưới bên phải sao cho đỉnh được gấp nằm trên cạnh chiều dài còn lại (như hình vẽ). Hỏi chiều dài L tối thiểu của nếp gấp là bao nhiêu?



A. $\min L=6\sqrt{2}$ cm. **B.** $\min L=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm.

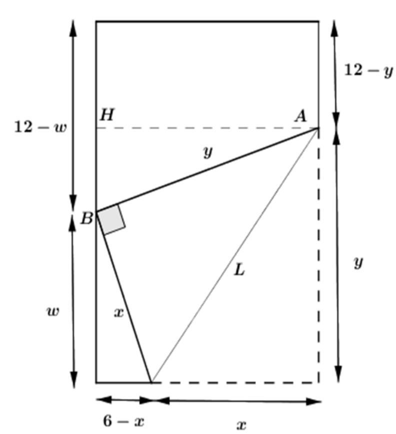
C. $\min L=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ cm. **D.** $\min L=9\sqrt{2}$ cm.

Hướng dẫn giải:

Đặt $x,\ y,\ w$ được biểu diễn như hình vẽ

$(0<x\le 6,\ 0<y\le 12,\ w\ge 0)$.

Ta có



$x^2=w^2+(6-x)^2 \longrightarrow w^2=12x-36 \longrightarrow w=\sqrt{12x-36}$.

Do $w\ge 0 \longrightarrow \sqrt{12x-36}\ge 0 \leftrightarrow x\ge 3$ nên cần có $3\le x\le 6$. (1)

Lại có $HB=\sqrt{y^2-36}\longrightarrow 6\le y\le 12.$

Vì $y=HB+w=\sqrt{y^2-36}+\sqrt{12x-36}$

$\longrightarrow y-\sqrt{12x-36}=\sqrt{y^2-36}$

$\longrightarrow y^2-2y\sqrt{12x-36}+12x-36=y^2-36$

$\longrightarrow y=\dfrac{6x}{\sqrt{12x-36}}=\dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x-3}}.$

Từ đó, suy ra $6\le\dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x-3}}\le 12\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\\x^2\ge 12(x-3)\\x^2\le 48(x-3)\end{cases}\Leftrightarrow 24-12\sqrt{3}\le x\le 24+12\sqrt{3}.\ (2)$

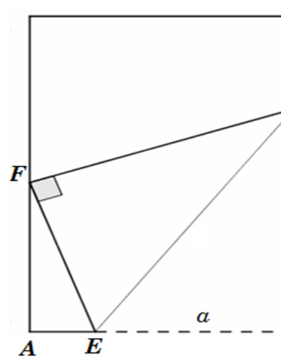
Từ (1) và (2), ta được $24-12\sqrt{2}\le x\le 6.$

Chiều dài nếp gấp $L=\sqrt{x^2+y^2}\longrightarrow L^2=x^2+\dfrac{3x^2}{x-3}.$

Khảo sát $f(x)=x^2+\dfrac{3x^2}{x-3}$ với $x\in\left[24-12\sqrt{2};6\right]$, ta được $\min\limits_{\left[24-12\sqrt{3};6\right]}f(x)=f\left(\dfrac{9}{2}\right)=\dfrac{243}{4}.$

Suy ra $L\ge\sqrt{\dfrac{243}{4}}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}.$

Chọn B.



Cách 2. Đặt $EB=a$ như hình vẽ $\longrightarrow\begin{cases}EF=a\\AE=6-a\end{cases}.$

Trong tam giác vuông AEF có

$$\cos\widehat{AEF}=\frac{6-a}{a}\longrightarrow\cos\widehat{FEB}=\frac{a-6}{a}\text{ (hai góc bù nhau).}$$

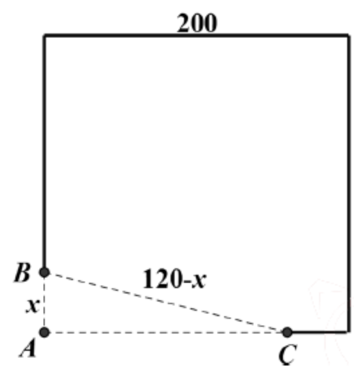
Ta có $\Delta BEG=\Delta FEG$

$\longrightarrow\widehat{FEG}=\widehat{BEG}=\dfrac{1}{2}\widehat{FEB}\longrightarrow\cos\widehat{FEG}=\sqrt{\dfrac{a-3}{a}}.$

Trong tam giác vuông AEF có $EG=\dfrac{EF}{\cos\widehat{FEG}}=\sqrt{\dfrac{a^3}{a-3}}.$

Xét hàm $f\left(a\right)=\dfrac{a^3}{a-3}$ với $a>3$, ta được $\min f\left(a\right)$ đạt tại $a=\dfrac{9}{2}\longrightarrow EG=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Câu 29: Cho một tấm gỗ hình vuông cạnh $200cm$. Người ta cắt một tấm gỗ có hình một tam giác vuông ABC từ tấm gỗ hình vuông đã cho như hình vẽ sau. Biết $AB=x\left(0<x<60cm\right)$ là một cạnh góc vuông của tam giác ABC và tổng độ dài cạnh góc vuông AB với cạnh huyền BC bằng $120cm$. Tìm x để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.



A. $x=40cm$. **B.** $x=50cm$. **C.** $x=30cm$. **D.** $x=20cm$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có độ dài cạnh $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{\left(120-x\right)^2-x^2}=\sqrt{14400-240x}$.

Diện tích tam giác ABC là: $S=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{1}{2}x\sqrt{14400-240x}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x\sqrt{14400-240x}$ với $0<x<60$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\sqrt{14400-240x}-\dfrac{120x}{\sqrt{14400-240x}}=\dfrac{14400-360x}{\sqrt{14400-240x}}$;.

$\Rightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=40\in\left(0;60\right)$.

Bảng biến thiên:

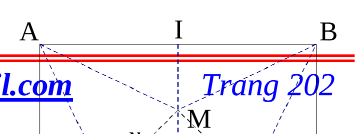
x	0		40		60
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-\infty$	
$f\left(x\right)$		↗		↘	

Vậy $S_{\max}\Leftrightarrow f\left(x\right)_{\max}\Leftrightarrow x=40$.

Câu 30: Cho một tấm bìa hình vuông cạnh 5 dm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình là:

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn D.

Gọi x là chiêu dài cạnh đáy ($0 < x < 5\sqrt{2}$), ta có

$$MI = \frac{5 - x\sqrt{2}}{2}, AM^2 = \frac{25}{4} + \frac{25 - 10\sqrt{2}x + 2x^2}{4} = \frac{25 - 5\sqrt{2}x + x^2}{2}$$

Đường cao hình chóp là $h = \sqrt{\frac{25 - 5\sqrt{2}x + x^2}{2} - \frac{x^2}{2}} = \sqrt{\frac{25 - 5\sqrt{2}x}{2}}$

Thể tích của khối chóp là $V = \frac{1}{3}x^2\sqrt{\frac{25 - 5\sqrt{2}x}{2}} \Rightarrow V^2 = \frac{1}{18}\left(25x^4 - 5\sqrt{2}x^5\right)$

Xét hàm số $y = 25x^4 - 5\sqrt{2}x^5$ trên khoảng $\left(0; 5\sqrt{2}\right)$

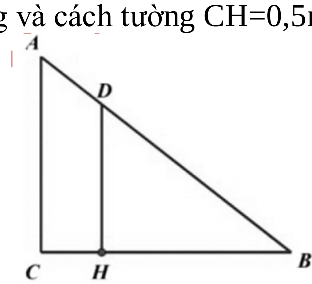
$y = 25.4x^3 - 25\sqrt{2}x^4 = 25x^3\left(4 - \sqrt{2}x\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

x	0		$2\sqrt{2}$		$5\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	320	$\searrow$	

Suy ra $\max\limits_{\left(0;5\sqrt{2}\right)} y = 320$ tại $x = 2\sqrt{2}$. Suy ra $V_{\max} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Câu 31: Chiều dài bé nhất của cái thang AB để nó có thể tựa vào tường AC và mặt đất BC, ngan qua cột đỡ DH cao 4m, song song và cách tường CH=0,5m là:



A. Xấp xỉ 5,602 **B.** Xấp xỉ 6,5902 **C.** Xấp xỉ 5,4902 **D.** Xấp xỉ 5,5902

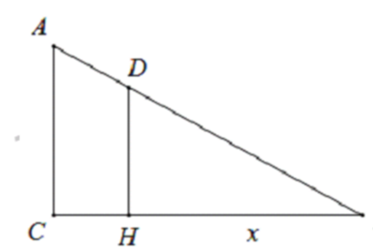
Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Đặt $BH = x\left(x > 0\right)$. Ta có

$$BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \sqrt{x^2 + 16}$$

Vì $DH // AC$ nên



$$\frac{DA}{DB} = \frac{HC}{HB} \Rightarrow DA = \frac{DB.HC}{HB} = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{2x}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{x^2 + 16} + \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{2x}$$

Xét hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{x^2 + 16} + \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{2x}$ trên $\left(0; +\infty\right)$. Ta có f(x) liên tục trên $(0;+\infty)$ và

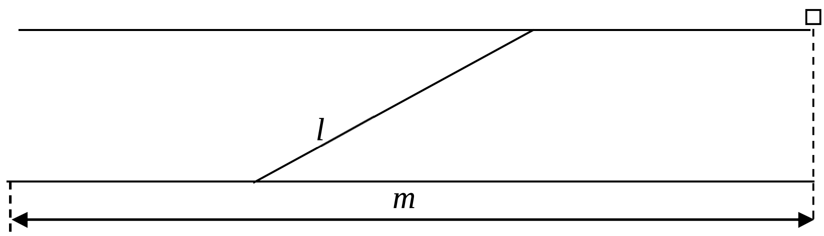
$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}+\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}.2x-2\sqrt{x^2+16}}{4x^2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}-\frac{8}{x^2\sqrt{x^2+16}}=\frac{x^3-8}{x^2\sqrt{x^2+16}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2;\ f'(x)>0\Leftrightarrow x>2;\ f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<2$$

Suy ra $\min AB=\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x)=f(2)=\frac{5\sqrt{5}}{2}\approx 5,5902(m)$

Câu 32: Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một nửa vận tốc chạy trên bộ. Bạn hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, mục tiêu ở cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay.

A. $\frac{400}{3}$ **B.** $\frac{40}{33}$ **C.** $\frac{100}{3}$ **D.** $\frac{200}{3}$



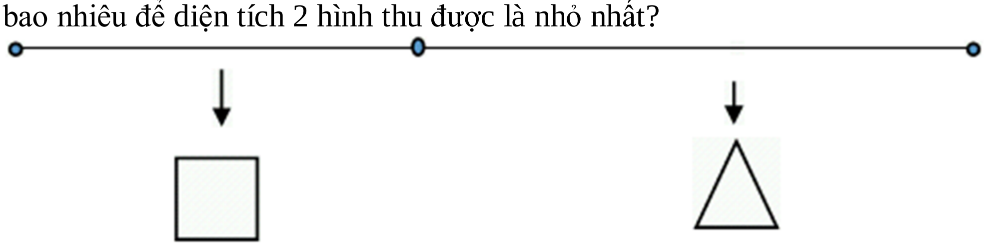
Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Vấn đề là chọn thời gian bơi và thời gian đi bộ sao cho “tối ưu”. Giả sử độ dài đoạn bơi là l và tốc độ bơi của chiến sĩ là v. Ký hiệu m là độ dài đoạn sông kể từ người chiến sĩ đến đồn địch, khi ấy tổng thời gian bơi và chạy bộ của người chiến sĩ là $t=\frac{l}{v}+\frac{m-\sqrt{l^2-100^2}}{2v}$.

Do m,v là cố định nên thời gian đạt cực tiểu khi hàm số $f(l)=\frac{l}{v}-\frac{\sqrt{l^2-100^2}}{2v}=\frac{2l-\sqrt{l^2-100^2}}{2v}$ đạt cực tiểu, và cũng tức là khi hàm $g(l)=2l-\sqrt{l^2-100^2}$ đạt cực tiểu. Điều này xảy ra khi $2-\frac{l}{\sqrt{l^2-100^2}}=0$, hay $l=2\sqrt{l^2-100}$, tức là $l=400/3=133,333333$ (met).

Câu 33: Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phầm thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



A. $\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}$ (m) **B.** $\dfrac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ (m) **C.** $\dfrac{12}{4+\sqrt{3}}$ (m) **D.** $\dfrac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ (m)

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi độ dài cạnh hình tam giác đều là x (m) khi đó độ dài cạnh hình vuông là $\dfrac{6-3x}{4}$

Tổng diện tích khi đó là:

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2+\left(\dfrac{6-3x}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}\left(\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-36x+36\right)$

Diện tích nhỏ nhất khi

$x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}$

Vậy diện tích Min khi $x=\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}$

Hoặc đến đây ta có thể bấm máy tính giải phương trình $\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-36x+36$ ấn bằng v

hiện giá trị.

Câu 34: Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngà thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì c thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khác sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 480 ngàn. **B.** 50 ngàn. **C.** 450 ngàn. **D.** 80 ngàn.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x>400$ (đơn vị: ngàn đồng).

Giá chênh lệch sau khi tăng $x-400$.

Số phòng cho thuê giảm nếu giá là x: $\dfrac{(x-400)\cdot 2}{20}=\dfrac{x-400}{10}$.

Số phòng cho thuê với giá x là $50-\dfrac{x-400}{10}=90-\dfrac{x}{10}$.

Tổng doanh thu trong ngày là: $f(x)=x\left(90-\dfrac{x}{10}\right)=-\dfrac{x^2}{10}+90x$.

$f'(x)=-\dfrac{x}{5}+90$. $f'(x)=0\Leftrightarrow x=450$.

Bảng biến thiên:

x	400		450		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	20250	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$.

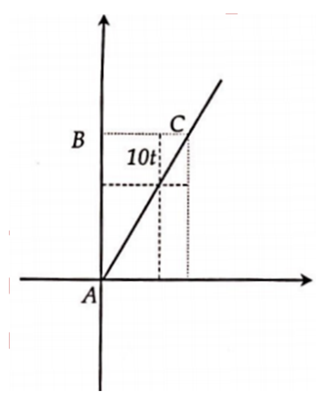
Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2.025.000 đồng.

Câu 35: Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau tại cùng một thời điểm. Một con bay trên quỹ đạo đường thẳng từ điểm $A(0;0)$ đến điểm $B(0;100)$ với vận tốc $5m/s$. Con còn lại bay trên quỹ đạo đường thẳng từ $C(60;80)$ về A với vận tốc $10m/s$. Hỏi trong quá trình bay, thì khoảng cách ngắn nhất mà hai con đạt được là bao nhiêu?

A. $20(m)$ **B.** $50(m)$ **C.** $20\sqrt{10}(m)$ **D.** $20\sqrt{5}(m)$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Xét ở thời điểm t

Tọa độ của con chuồn chuồn bay từ B về A là $(0;100-5t)$.

Do con chuồn chuồn bay từ C về A trên đường thẳng AC có hệ số góc $k = \tan\alpha = \dfrac{4}{3}$ nên tọa độ của con chuồn chuồn này là:

$$\begin{cases} x = 60 - 10t.\cos\alpha = 60 - 10t.\dfrac{3}{5} = 60 - 6t \\ y = 80 - 10\sin\alpha = 80 - 8t \end{cases}$$

Như vậy ở thời điểm t khoảng cách giữa 2 con chuồn chuồn sẽ là: $d = \sqrt{(60-6t)^2 + (20+3t)^2}$

Khoảng cách giữa 2 con chuồn chuồn nhỏ nhất khi và chỉ khi $(60-6t)^2 + (20+3t)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $t \in [0;10]$

Xét $f(t) = (60-6t)^2 + (20+3t)^2$ trên $[0;10]$

Ta có: $f'(t) = 90t - 600 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{20}{3}$

$\Rightarrow \min f(t) = f\left(\dfrac{20}{3}\right) = 2000$

$\Rightarrow$ khoảng cách ngắn nhất giữa 2 con chuồn chuồn trong quá trình bay l
$\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}(m)$

Nhận xét: Đây là một bài toán cần khả năng tư duy thật nhanh khi làm bài thi trắc nghiệm
Và bài toán này cũng cần khả năng tính toán rất cẩn thận vì số liệu khá lớn. Ở bước xử lí đạ
hàm của hàm số $f(t)$ nếu tính toán sai rất có thể các bạn sẽ chọn min ở 2 đầu của đoạ
$[0;10]$ nên sẽ chọn đáp án **B** hoặc **C.**

Câu 36: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với gi
2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thu
mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập ca
nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000 **B.** 2.350.000 **C.** 2.450.000 **D.** 2.550.000

Hướng dẫn giải:

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x : đồng; $x \geq 2000.000$ đồng)

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống.

Theo quy tắc tam xuất ta có số căn hộ bị bỏ trống là:

$$\frac{2\left(x - 2.000.000\right)}{100.000} = \frac{x - 2.000.000}{50.000}$$

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50 - \frac{x - 2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$$

Gọi $F\left(x\right)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, (F(x): đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\dfrac{x}{50.000} + 90\right)x = -\dfrac{1}{50.000}x^2 + 90x$ (bằng số căn hộ cho thuê nhân với gi
cho thuê mỗi căn hộ).

Bài toán trở thành tìm GTLN của $F\left(x\right) = -\dfrac{1}{50.000}x^2 + 90x$, ĐK: $x \geq 2.000.000$

$$F'\left(x\right) = -\frac{1}{25.000}x + 90$$

$$F'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000		2.250.000		$+\infty$
F'(x)		+	0	−	
F(x)		$\nearrow$	$F_{\max}$	$\searrow$	

Suy ra F(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Chọn A.

Nhận xét:

Sau khi tìm được hàm $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$. Ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng biến thiên như trên. Đề đã cho bốn đáp án x, ta dùng phím CALC của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho F(x) lớn nhất chính là giá trị cần tìm.

Câu 37: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ **B.** 43.000đ **C.** 42.000đ **D.** 41.000đ

Hướng dẫn giải:

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng, (x: đồng; $30.000 \le x \le 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi

Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

Giảm giá 50.000 – x thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là:

$$(50000 - x).\frac{50}{5000} = \frac{1}{100}(50000 - x).$$

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x:

$$40 + \frac{1}{100}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right).(x - 30.000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$

Bài toán trở thành tìm GTLN của

$F(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$, Đk: $30.000 \le x \le 50.000$.

$$F'(x) = -\frac{1}{50}x + 840$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x + 840 = 0 \Leftrightarrow x = 42.000$$

Vì hàm F(x) liên tục trên $30.000 \le x \le 50.000$ nên ta có:

$$F(30.000) = 0$$

$$F(42.000) = 1.440.000$$

$$F(50.000) = 800.000$$

Vậy với $x = 42.000$ thì $F(x)$ đạt GTLN.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng là 42.000 đồng.

Chọn C.

Câu 38: Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nế một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính l $\left(30-\dfrac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗ chuyến xe là lớn nhất.?

A. 30 **B.** 40 **C.** 50 **D.** 60

Hướng dẫn giải:

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất, $(0 < x \le 60)$

Gọi F(x) là hàm lợi nhuận thu được (F(x): đồng)

Số tiền thu được:

$$F(x)=\left(300-\frac{5x}{2}\right)^2.x=90.000x-1500x^2+\frac{25}{4}x^3$$

Bài toán trở thành tìm x để F(x) đạt giá trị lớn nhất.

$$F'(x)=90000-3000x+\frac{75}{4}x^2$$

$$F'(x)=0 \Leftrightarrow 90000-3000x+\frac{75}{4}x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=120(loai) \\ x=40(\text{t/ m}) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

X	0		40		60
F'(x)		+	0	−	
F(x)		$\nearrow$	$F_{\max}$	$\searrow$	

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chở 40 người.

Chọn B.

Câu 39: Cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$. Lề trên và dưới là $3cm$, l trái và lề phải là $2cm$. Kích thước tối ưu của trang giấy?

A. Dài $24cm$, rộng $17cm$ **B.** Dài $30cm$, rộng $20cm$

C. Dài $24cm$, rộng $18cm$ **D.** Dài $24cm$, rộng $19cm$

Giải:

Gọi chiều dài của trang chữ nhật là $x(cm),(x>0)$

Chiều rộng của trang chữ nhật là: $\dfrac{384}{x}cm$

Chiều dài của trang giấy là $x+6(cm)$

Chiều rộng của trang giấy là: $\dfrac{384}{x}+4(cm)$

Diện tích trang giấy: $S=(x+6)\left(\dfrac{384}{x}+4\right)=408+4x+\dfrac{2304}{x}$

Bài toán trở thành tìm x để S đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $S'(x)=4-\dfrac{2304}{x^2}$

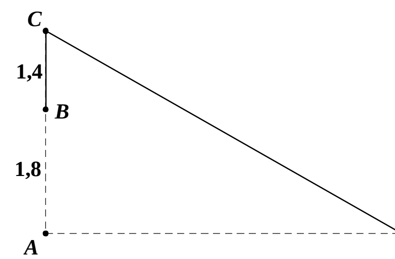
$$S'=0\Leftrightarrow 4-\frac{2304}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=24(\text{t/ m})\\ x=-24(\text{loai})\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		24		$+\infty$
S’(x)		$-$	0	$+$	
S(x)		$\searrow$	$S_{\min}$	$\nearrow$	

Vậy kích thước tối ưu của trang giấy có chiều dài là 30 cm, chiều rộng là 20 cm.

Câu 40: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn.



A. $AO=2,4m$ **B.** $AO=2m$

C. $AO=2,6m$ **D.** $AO=3m$

Giải:

Đặt độ dài cạnh $AO=x\left(cm\right),\left(x>0\right)$

Suy ra:

$BO=\sqrt{3,24+x^2},CO=\sqrt{10,24+x^2}$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\cos\widehat{\text{BOC}}=\frac{OB^2+OC^2-BC^2}{2.OB.OC}=\frac{\left(3,24+x^2\right)+\left(10,24+x^2\right)-1,96}{2\sqrt{\left(3,24+x^2\right)\left(10,24+x^2\right)}}$$

$$=\frac{5,76+x^2}{\sqrt{\left(3,24+x^2\right)\left(10,24+x^2\right)}}$$

Vì góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn nên bài toán trở thành bài toán tìm x để $F\left(x\right)=\frac{5,76+x^2}{\sqrt{\left(3,24+x^2\right)\left(10,24+x^2\right)}}$

Đạt GTNN.

Đặt $\left(3,24+x^2\right)=t,\left(t>3,24\right)$.

Suy ra $F\left(t\right)=\frac{t+\frac{63}{25}}{\sqrt{t\left(t+7\right)}}=\frac{25t+63}{25\sqrt{t\left(t+7\right)}}$

Ta tìm t để $F(t)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t)=\left(\frac{25t+63}{25\sqrt{t(t+7)}}\right)'=\frac{1}{25}\left(\frac{25\sqrt{t(t+7)}-(25t+63)\left(\frac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}}\right)}{t(t+7)}\right)$$

$$=\frac{1}{25}\left(\frac{50\left(t^2+7t\right)-(25t+63)(2t+7)}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}}\right)=\frac{1}{25}\left(\frac{49t-441}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}}\right)$$

$F'(t)=0\Leftrightarrow t=9$

BBT

t	3,24		9		$+\infty$
F'(t)		$-$	0	$+$	
F(t)		$\searrow$	$F_{\min}$	$\nearrow$	

Thay vào đặt ta có: $\left(3,24+x^2\right)=9\Leftrightarrow x^2=\frac{144}{25}\Leftrightarrow x=2,4m$

Vậy để nhìn rõ nhất thì AO =2,4 m.

Chọn A.

Câu 41: Một công trình nghệ thuật kiến trúc trong công viên thành phố Việt Trì có dạng là một tò nhà hình chóp tứ giác đều nội tiếp một mặt cầu có bán kính 5(m). Toàn bộ tòa nhà đó đượ trang trí các hình ảnh lịch sử và tượng anh hùng, do vậy để có không gian rộng bên trong tò nhà người ta đã xây dựng tòa nhà sao cho thể tích lớn nhất. Tính chiều cao của tòa nhà đó.

A. $h=\frac{20}{3}(m)$ **B.** $h=\frac{22}{3}(m)$ **C.** $h=\frac{23}{3}(m)$ **D.** $h=\frac{25}{3}(m)$

Giải:

Gọi độ dài cạnh đáy, chiều cao của hình chóp tứ giác đều lần lượt là x và h, (x>0, h>0, m)

Dựng mặt phẳng trung trực của 1 cạnh bên cắt trục đáy ở O, vậy O là tâm mặt câu. Ta có $OS=5m,$ nên $OI=h-5,$ với I là giao của 2 đường chéo đáy. Vì tam giác OIC vuông nên t có:

$$IC=\sqrt{OC^2-OI^2}=\sqrt{5^2-(h-5)^2}\Leftrightarrow\frac{x\sqrt{2}}{2}=\sqrt{10h-h^2}$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{20h-2h^2},(5<h<10)$$

Ta có thể tích khối chóp tứ giác đều:

$$V(h)=Bh=\frac{1}{3}\left(\sqrt{20h-2h^2}\right)^2h=\frac{1}{3}\left(20h^2-2h^3\right)$$

Bài toán trở thành tìm h để V(h) đạt GTNN.

$$V'(h)=\frac{1}{3}\left(40h-6h^2\right)$$

$$V'(h)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(40h-6h^2\right)=0\Leftrightarrow h=\frac{20}{3}$$

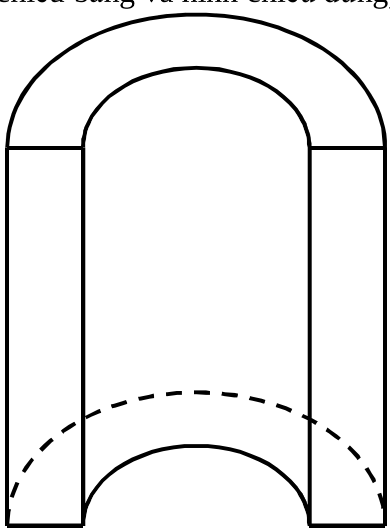
BBT

h	5		$\frac{20}{3}$		10
$V'(h)$		+	0	$-$	
$V(h)$		$\nearrow$	$V_{\max}$	$\searrow$	

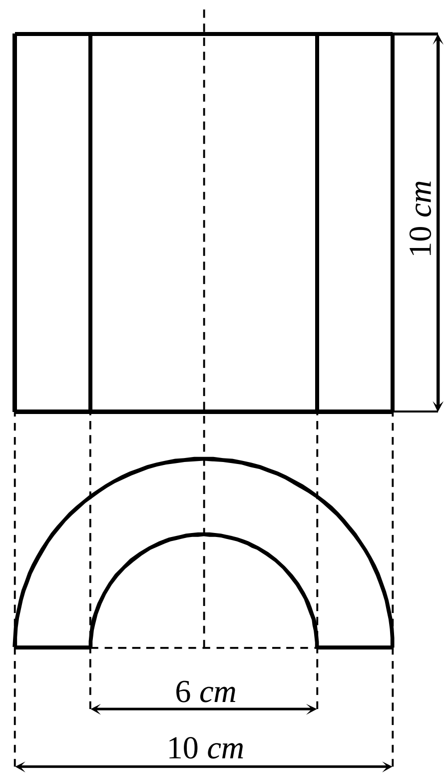
Vậy chọn chiều cao đó là $h=\frac{20}{3}(m)$

Chọn A.

Câu 42: Một chi tiết máy có hình dạng như hình vẽ 1, các kích thước được thể hiện trên hình vẽ 2 (hình chiếu bằng và hình chiếu đứng).



Hình vẽ 1



Hình vẽ 2

Người ta mạ toàn phần chi tiết này bằng một loại hợp kim chống gỉ. Để mạ $1m^2$ bề mặt cần số tiền 150000 đồng. Số tiền nhỏ nhất có thể dùng để mạ 10000 chi tiết máy là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị nghìn đồng).

A. 48238 (nghìn đồng).   **B.** 51238 (nghìn đồng).

C. 51239 (nghìn đồng).   **D.** 37102 (nghìn đồng).

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

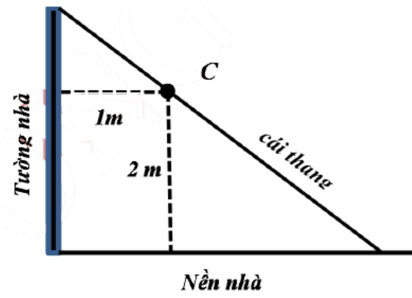
Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích nửa hình trụ trong và ngoài của chi tiết. S_3, S_4 là diện tích hình vành khăn và diện tích bề mặt trước của chi tiết. Ta có:

$S_1 = \pi R_1 l = \pi.3.10 = 30\pi, S_2 = \pi R_2 l = \pi.5.10 = 50\pi$, $S_3 = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = 16\pi$,
$S_4 = 2.10.2 = 40$.

Khi đó, diện tích bề mặt của một chi tiết máy là $S = 96\pi + 40\left(cm^2\right)$

Số tiền nhỏ nhất cần dùng để mạ 10000 chi tiết máy là:
$\dfrac{96\pi + 40}{10000} \cdot 150000 \cdot 10000 \approx 51238934$ (đồng).

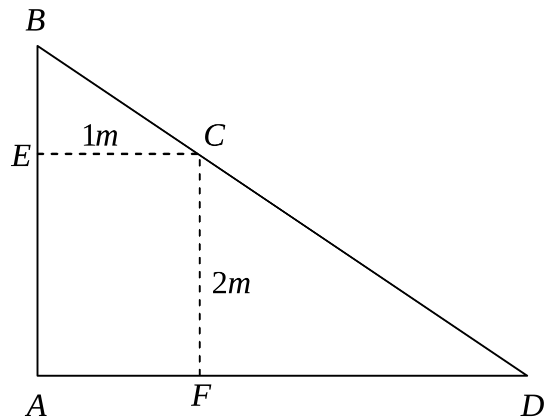
Câu 43: Ông An cần sản xuất một cái thang để trèo qua một bức tường nhà. Ông muốn cái than phải luôn được đặt qua vị trí C, biết rằng điểm C cao $2m$ so với nền nhà và điểm C các tường nhà $1m$ (như hình vẽ bên).
Giả sử kinh phí để sản xuất thang là 300.000 đồng/1 mét dài. Hỏi ông An cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất thang? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).



A. $2.350.000$ đồng.
B. $3.125.000$ đồng.
C. $1.249.000$ đồng.
D. 600.000 đồng.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Đặt $BC = x$.
Ta có: $\Delta BCE \sim \Delta CDF$.

$\Leftrightarrow \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{CE}{DF} \Leftrightarrow \dfrac{x}{CD} = \dfrac{1}{\sqrt{CD^2 - 4}}$.

$\Leftrightarrow x^2\left(CD^2 - 4\right) = CD^2$.

$\Leftrightarrow CD^2 = \dfrac{4x^2}{x^2 - 1} \Leftrightarrow CD = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Vậy chi phí sản xuất thang là:

$f\left(x\right) = \left(x + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right).3.10^5$ với $x > 1$.

$$f'\left(x\right) = 3.10^5\left(1 + \dfrac{2\sqrt{x^2 - 1} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1}\right) = 3.10^5\left(1 + \dfrac{-2}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^3}\right).$$

$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2 - 1\right)^3} = 2 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)^3 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt[3]{4} + 1$.

Hay $x = \sqrt{\sqrt[3]{4} + 1}$.
Khi đó chi phí sản xuất thang là $1.249.000$ đồng.

Câu 44: Một xe buýt của hãng xe A có sức chứa tối đa là 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $20\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng). Khẳng định đúng là:

A. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng $3.200.000$ (đồng).
B. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 45 hành khách.
C. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng $2.700.000$ (đồng).
D. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 50 hành khách.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Số tiền của chuyến xe buýt chở x hành khách là

$$f\left(x\right)=20x.\left(3-\frac{x}{40}\right)^2=20\left(9x-\frac{3x^2}{20}+\frac{x^3}{1600}\right)\ \left(0<x\le 50\right)$$

$$f'\left(x\right)=20\left(9-\frac{3x}{10}+\frac{3x^2}{1600}\right)\Leftrightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=40\\x=120\end{array}\right.$$

x	**0**		**40**		**50**
y'		**+**	**0**	**-**	
y		↗	**3200000**	↘	

Vậy: một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng: $3.200.000$ (đồng)

Câu 45: Một công ti dự kiến chi 1 tỉ đồng để sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ có dung tích 5 lít. Biết rằng chi phí để làm mặt xung quanh của thùng đó là 100,000 $đ/m^2$, chi phí để làm mặt đáy là 120 000 $đ/m^2$. Hãy tính số thùng sơn tối đa mà công ty đó sản xuất (giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể).

A. 57582 thùng. **B.** 58135 thùng. **C.** 18209 thùng. **D.** 12525 thùng.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi chiều cao hình trụ là h $\left(h>0\right)$ (m).

Bán kính đáy hình trụ là x $\left(x>0\right)$ (m).

Thể tích khối trụ là: $V=\pi x^2h=\frac{5}{1000}\Rightarrow h=\frac{5}{1000\pi x^2}$ (m).

Diện tích mặt xung quanh là: $S_{xq}=2\pi xh=\frac{1}{100x}$.

Diện tích hai đáy là: $S_d = 2\pi x^2$

Số tiền cần thiết để sản xuất một thùng sơn là: $f(x) = \frac{1000}{x} + 240000\pi x^2 \ (x > 0)$

Ta có: $f'(x) = \frac{-1000}{x^2} + 480000\pi x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{480\pi}}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{\sqrt[3]{480\pi}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	2	↘	≈ 17201.05	↗	5

Vậy với số tiền 1 tỉ đồng thì công ty có thể sản xuất tối đa là: $\frac{10^9}{17201.05} \approx 58135$ thùng.

Câu 46: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc v mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạc tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằn nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơ 100 chiế**c.** Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuấ phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

A. 42.000 đồng. **B.** 40.000 đồng. **C.** 43.000 đồng. **D.** 39.000 đồng.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm $100x$ chiế**c.** Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ chiế**c.**

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng). Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là: $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000 = -100(x-9)^2 + 44100 \le 44100$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 9$.

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

Câu 47: Người ta xây một bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 600.000 *đồng/m*^{2}. Hãy xác định kích thước của bể sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là

A. 85 triệu đồng. **B.** 90 triệu đồng. **C.** 75 triệu đồng. **D.** 86 triệu đồng.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Cách 1: dùng phương pháp hàm số.

Gọi $x(m)$ là chiều rộng của đáy bể, khi đó chiều dài của đáy bể là $2x(m)$ và $h(m)$ là chiều cao bể. Bể có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3 \Leftrightarrow 2x^2h = \frac{500}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2}$.

Diện tích cần xây là: $S = 2(xh + 2xh) + 2x^2 = 6x\frac{250}{3x^2} + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2$.

Xét hàm $S(x) = \frac{500}{x} + 2x^2, (x > 0) \Rightarrow S'(x) = \frac{-500}{x^2} + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Lập bảng biến thiên suy ra $S_{\min} = S(5) = 150$.

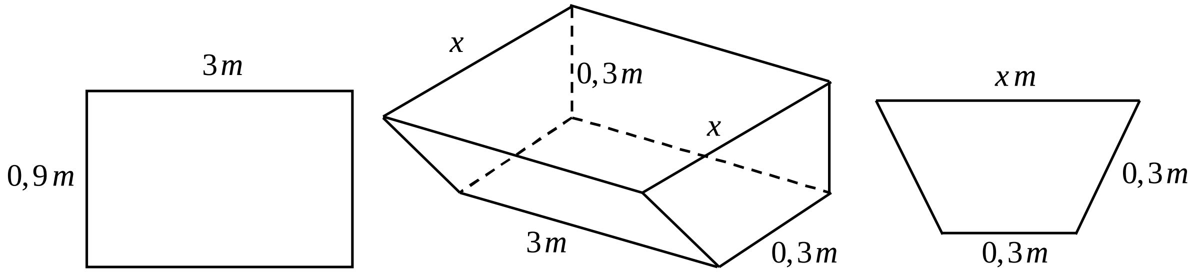
Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích xây dựng là nhỏ nhất và bằng $S_{\min} = 150$.

Vậy giá thuê nhân công thấp nhất là: $150.600000 = 90000000$ đồng.

Cách 2: Dùng bất đẳng thức Cauchy.

$$S = \frac{500}{x} + 2x^2 = \frac{250}{x} + \frac{250}{x} + 2x^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{250}{x}.\frac{250}{x}.2x^2} = 150.$$

Câu 48: Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9m \times 3m$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối (bị cắt bởi mặt phẳng song song với hai mặt đáy) là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ có chiều cao bằng chiều dài của tấm tôn. Hỏi $x(m)$ bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



(a) Tấm tôn (b) Máng xối (c) Mặt cắt

A. $x=0,5m$. **B.** $x=0,65m$. **C.** $x=0,4m$. **D.** $x=0,6m$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

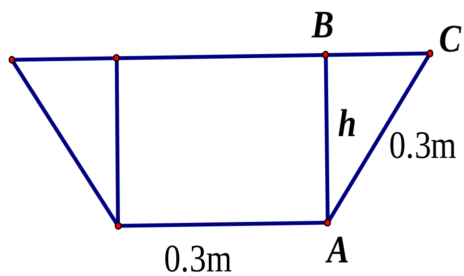
Gọi h là chiều cao của lăng trụ

Vì chiều cao lăng trụ bằng chiều dài tấm tôn nên thể tích máng xối lớn nhất khi diện tích hình thang cân (mặt cắt) lớn nhất

Ta có $S=\frac{h}{2}(x+0,3)$

$$BC=\frac{x-0,3}{2}\left(x>0,3\right)$$

$$\Rightarrow h=\sqrt{(0,3)^2-\frac{(x-0,3)^2}{4}}$$



ĐK: $(0,3)^2-\frac{(x-0,3)^2}{4}>0;\left(0,3<x<0,9\right)$

Khi đó:

$$S=\frac{1}{4}(x+0,3)\sqrt{4.(0,3)^2-(x-0,3)^2}$$

Xét hàm số

$$f(x)=(x+0,3)\sqrt{4.(0,3)^2-(x-0,3)^2};\left(0,3<x<0,9\right)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sqrt{4.(0,3)^2-(x-0,3)^2}+(x+0,3)\frac{-2(x-0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2-(x-0,3)^2}}$$

$$=\frac{4.(0,3)^2-(x-0,3)^2-(x+0,3)(x-0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2-(x-0,3)^2}}=\frac{0,36-2x(x-0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2-(x-0,3)^2}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -x^2+0,3x+0,18=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-0,3\\ x=0,6\end{array}\right.$$

x	$0,3$		$0,6$		$0,9$
$f'(x)$	|	$+$	0	$-$	|
$f(x)$	|	$\nearrow$		$\searrow$	|

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ lớn nhất khi $x=0,6$

Vậy thể tích máng xối lớn nhất khi $x=0,6m$.

Câu 49: Một sợi dây kim loại dài $0,9m$ được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành tam giác đều, đoạn thứ hai được uốn thành hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Tìm độ dài cạnh của tam giác đều (tính theo đơn vị cm) sao cho tổng diện tích của tam giác và hình chữ nhật là nhỏ nhất.

A. $\dfrac{60}{2-\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{60}{\sqrt{3}+2}$. **C.** $\dfrac{30}{1+\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{240}{\sqrt{3}+8}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi a,b lần lượt là độ dài cạnh tam giác đều và chiều rộng hình chữ nhật.

Khi đó $3a+6b=90(cm)\Rightarrow b=\dfrac{30-a}{2}(cm)$.

$$S=S_{\Delta}+S_{\square}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+2b^2=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+2\left(\frac{30-a}{2}\right)^2=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)a^2-120a+1800}{4}.$$

Để S nhỏ nhất thì $f(a)=\left(2+\sqrt{3}\right)a^2-120a+1800$ nhỏ nhất với $a\in(0;30)$.

$f'(a)=2\left(2+\sqrt{3}\right)a-120$, $f'(a)=0\Leftrightarrow a=\dfrac{60}{2+\sqrt{3}}\in(0;30)$.

Ta có $f(0)=1800$, $f(30)=900\sqrt{3}$, $f\left(\dfrac{60}{2+\sqrt{3}}\right)=3600\sqrt{3}-5400$.

Nên $\min\limits_{a\in(0;30)} f(a)=f\left(\dfrac{60}{2+\sqrt{3}}\right)=3600\sqrt{3}-5400$.

Vậy $a=\dfrac{60}{2+\sqrt{3}}$ thì S nhỏ nhất.

Câu 50: Bạn A có một đoạn dây dài $20m$. Bạn chia đoạn dây thành hai phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều. Phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

A. $\dfrac{40}{9+4\sqrt{3}}m$. **B.** $\dfrac{180}{9+4\sqrt{3}}m$. **C.** $\dfrac{120}{9+4\sqrt{3}}m$. **D.** $\dfrac{60}{9+4\sqrt{3}}m$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Bạn A chia sợi dây thành hai phần có độ dài $x(m)$ và $20-x(m)$, $0<x<20$ (như hình vẽ).

Phần đầu uốn thành tam giác đều có cạnh $\frac{x}{3}(m)$, diện tích $S_1=\left(\frac{x}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}\left(m^2\right)$

Phần còn lại uốn thành hình vuông có cạnh $\frac{20-x}{4}(m)$, diện tích $S_2=\left(\frac{20-x}{4}\right)^2\left(m^2\right)$

Tổng diện tích hai hình nhỏ nhất khi $f(x)=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}+\left(\frac{20-x}{4}\right)^2$ nhỏ nhất trên khoảng $(0;20)$.

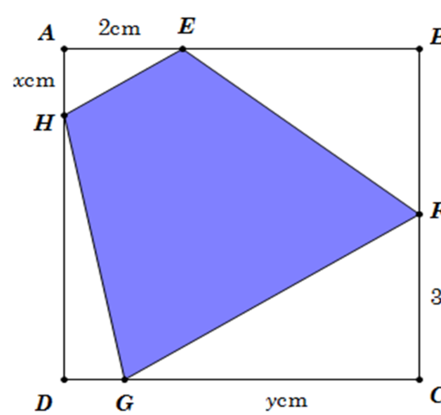
Ta có: $f'(x)=\frac{x\sqrt{3}}{18}-\frac{20-x}{8}=0\Leftrightarrow x=\frac{180}{4\sqrt{3}+9}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{180}{4\sqrt{3}+9}$		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta được $x=\frac{180}{4\sqrt{3}+9}$.

Câu 51: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. 7. **B.** 5.

C. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S=S_{\Delta AEH}+S_{\Delta CGF}+S_{\Delta DGH}$ lớn nhất (do $S_{\Delta BEF}$ không đổi).

Tính được $2S = 2x + 3y + (6-x)(6-y) = xy - 4x - 3y + 36.$ (1)

Ta có $EFGH$ là hình thang $\to \widehat{AEH} = \widehat{CGF}$

$\longrightarrow \Delta AEH \sim \Delta CGF \longrightarrow \frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \leftrightarrow \frac{2}{y} = \frac{x}{3} \longrightarrow xy = 6.$ (2)

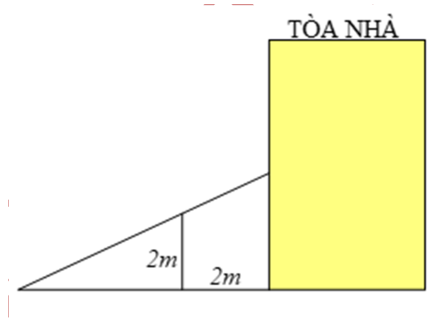
Từ (1) và (2), suy ra $2S = 42 - \left(4x + \frac{18}{x}\right).$

Để $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Mà $4x + \frac{18}{x} \ge 2\sqrt{4x.\frac{18}{x}} = 12\sqrt{2}.$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x = \frac{18}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \to y = 2\sqrt{2}$.

Chọn C.

Câu 52: Cho bức tường cao 2m, nằm song song vưới tòa nhà và cách tòa nhà 2m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối đa của thang bằng bao nhiêu mét



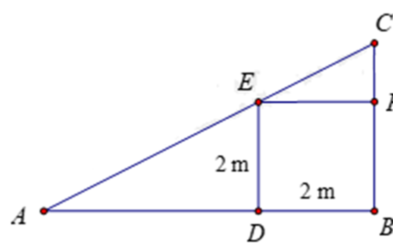
A. $\frac{5\sqrt{13}}{3}m$ **B.** $4\sqrt{2}m$ **C.** 6m **D.** $3\sqrt{5}m$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt $\widehat{CEF} = \varphi \Rightarrow \widehat{AED} = 90^\circ - \varphi$

KHI ĐO $AE = \frac{DE}{cos(90^\circ - \varphi)}; EC = \frac{EF}{cos\varphi}$



Do đó

$$AC = \frac{2}{\sin\varphi} + \frac{2}{cos\varphi} \ge \frac{8}{\sin\varphi + cos\varphi} \ge \frac{8}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} \ge 4\sqrt{2}$$