BÀI TOÁN THỰC TẾ
BÀI TOÁN TỐI ƯU MIN - MAX

Tài liệu có tham khảo nguồn:
1) Bài toán tối ưu Min_max của thầy Lê Bá Bảo.
2) Tuyển chọn các bài toán thực tế của thầy Nguyễn Văn Rin.
3) Một số bài toán của thầy Hồ Hà Đặng

A. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

PHẦN 1. BÀI TOÁN THỰC TẾ_TỐI ƯU

Ví dụ 1. (***SGK 12 CB***) Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi $16\ (cm)$, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Hình vuông có cạnh bằng $4\ (cm)$ là hình có diện tích lớn nhất và $\max S = 16\ (cm^2)$

Ví dụ 2. (***SGK 12 CB***) Trong tất cả các hình chữ nhật có diện tích $48\ (m^2)$, hãy xác định hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:

Hình vuông có cạnh bằng $4\sqrt{3}\ (m)$ là hình có chu vi nhỏ nhất và $\min P = 16\sqrt{3}\ (m)$.

Ví dụ 3. (***SGK BT 12 CB***) Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R, hãy tìm hình trụ có thể tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải:

Kí hiệu chiều cao, bán kính đáy và thể tích của hình trụ nội tiếp hình cầu lần lượt là h, r và V.

Khi đó: $V = h\pi r^2$.

Vì $r^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4} \Rightarrow V = h\pi\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right) = \pi\left(hR^2 - \dfrac{h^3}{4}\right)$.

Ví dụ trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $V(h) = \pi\left(hR^2 - \dfrac{h^3}{4}\right)$, $h \in (0;2R)$.

Ta có: $V'(h) = \pi\left(R^2 - \dfrac{3h^2}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Bảng biến thiên:

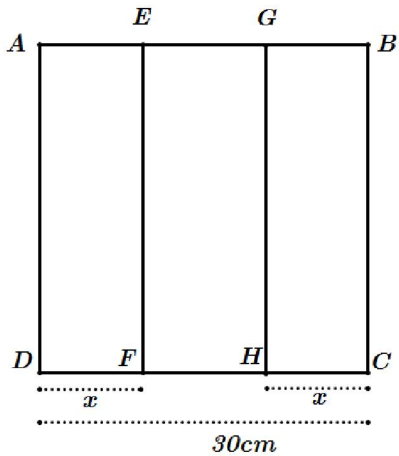
h	0		$\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$		$2R$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

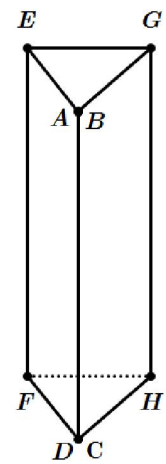
Từ BBT, suy ra $\max\limits_{(0;2R)} V = V\left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Vậy hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R có thể tích lớn nhất khi chiều cao của nó bằng $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Khi đó, thể tích khối trụ là $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Ví dụ 4. (***Team 12 Huế***) Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $30\ (cm)$. Người ta gập tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.





Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là

A. $x=5\ (cm)$. B. $x=9\ (cm)$. C. $x=8\ (cm)$. D. $x=10\ (cm)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $DF=CH=x,\ FH=30-2x \Rightarrow p_{\Delta DHF}=15$.

Thể tích khối lăng trụ như hình vẽ là

$$V=S_{FDH}.EF=30\sqrt{15(15-x)(15-x)(15-30+2x)}$$
$$=30\sqrt{15(15-x)^2(2x-15)},\ x\in\left(\frac{15}{2};15\right)$$

Xét hàm số $f(x)=(15-x)^2(2x-15)$

$$f'(x)=-2(15-x)(2x-15)+2(15-x)^2=-2(15-x)(3x-30)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=15 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$15/2$		10		15
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	125	$\searrow$	

Dựa vào BBT, $\max\limits_{\left(\frac{15}{2};15\right)} f(x)=125$ khi $x=10$.

Do đó thể tích khối lăng trụ như hình vẽ lớn nhất khi $x=10\ (cm)$.

Khi đó $V_{\max}=750\sqrt{3}\ (cm^3)$.

Lựa chọn đáp án **D**.

Ví dụ 5. (***SGK BT 12 CB***) Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s\left(t\right)=6t^2-t^3$. Tính thời điểm t (giây) tại đó vận tốc v $\left(m/s\right)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải:

Theo giả thiết: $s\left(t\right)=6t^2-t^3$, $t\in\left(0;+\infty\right)$.

Vận tốc của chuyển động là $v\left(t\right)=s'\left(t\right)=12t-3t^2$.

Ta có: $v'\left(t\right)=12-6t=0\Leftrightarrow t=2$.

Bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$v'\left(t\right)$		$+$	0	$-$	
$v\left(t\right)$		$\nearrow$	12	$\searrow$	

Dựa vào BBT, ta có $\max\limits_{\left(0;+\infty\right)} v\left(t\right)=v\left(2\right)=12$ $\left(m/s\right)$. Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t=2$ $\left(s\right)$.

Ví dụ 6. (***SGK BT 12 CB***) Cho số dương m. Hãy phân tích m thành tổng của hai số dương sao cho tích của chúng là lớn nhất.

Hướng dẫn giải:

Cho $m>0$. Đặt x là số thứ nhất, $0<x<m$, số thứ hai là $m-x$.

Xét tích $P\left(x\right)=x\left(m-x\right)$, $x\in\left(0;m\right)$. Ta có: $P'\left(x\right)=-2x+m=0\Leftrightarrow x=\dfrac{m}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{m}{2}$		m
$P'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	
$P\left(x\right)$		$\nearrow$	$\dfrac{m^2}{4}$	$\searrow$	

Từ BBT, ta có $\max\limits_{\left(0;m\right)} P\left(x\right)=P\left(\dfrac{m}{2}\right)=\dfrac{m^2}{4}$. Vậy phân tích m thành tổng hai số $\dfrac{m}{2}$.

Ví dụ 7. (***SGK BT 12 CB***) Tìm hai số có hiệu là 13 sao cho tích của chúng là bé nhất.

Hướng dẫn giải:

Gọi một trong hai số phải tìm là x, ta có số kia là $x+13$.

Xét tích $P\left(x\right)=x\left(13+x\right)$. Ta có: $P'\left(x\right)=2x+13=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{13}{2}$.

Bảng biến thiên:

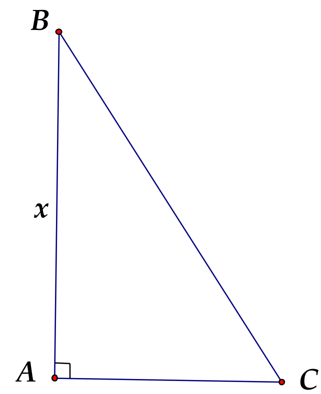
x	$-\infty$		$-\dfrac{13}{2}$		$+\infty$
$P'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	
$P\left(x\right)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{169}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT, ta có $\min P(x) = P\left(-\frac{13}{2}\right) = -\frac{169}{4}$. Vậy tích hai số là bé nhất khi một số là $-\frac{13}{2}$ và số kia là $\frac{13}{2}$.

Ví dụ 8. (***SGK BT 12 CB***) Hãy tìm tam giác vuông có diện tích lớn nhất nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số a $(a > 0)$.

Hướng dẫn giải:

Kí hiệu cạnh góc vuông AB là x, $x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$.



Khi đó, cạnh huyền $BC = a - x$, cạnh góc vuông kia là

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}.$$

Diện tích tam giác ABC là $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}$, $x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$.

Ta có: $S'(x) = \frac{a(a-3x)}{2\sqrt{a^2 - 2ax}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a}{3}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$	$\searrow$	

Từ BBT, suy ra $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = \frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi $AB = \frac{a}{3}$, $BC = \frac{2a}{3}$.

Ví dụ 9. (***SGK 12 NC***) Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

Hướng dẫn giải:

Đặt $BM = x$; $x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$ ta được $MN = a - 2x$; $QM = x\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S(x) = MN.QM = (a-2x)x\sqrt{3} = \sqrt{3}\left(ax - 2x^2\right)$.

Ta có: $S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$	$\searrow$	

Từ BBT, suy ra $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=\dfrac{a}{4}$ và giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật là $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x)=S\left(\dfrac{a}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{8}$.

Ví dụ 10. (***SGK 12 NC***) Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n)=480-20n\ (gam)$. Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

Hướng dẫn giải:

Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì sau một vụ, số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ trung bình cân nặng $f(n)=nP(n)=480n-20n^2\ (gam)$.

Xét hàm số $f(x)=480x-20x^2;\ x\in(0;+\infty)$.

(Biến số n lấy các giá trị nguyên dương được thay thế bởi biến số x lấy các giá trị trên khoảng $(0;+\infty)$).

Ta có: $f'(x)=480-40x=0 \Leftrightarrow x=12$.

Bảng biến thiên:

x	0		12		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	2880	$\searrow$	

Từ BBT, trên $(0;+\infty)$, hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=12$. Từ đó, suy ra $f(n)$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $n=12$.

Ví dụ 11. (***SGK 12 NC***) Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0{,}025x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất và tính độ giảm đó.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $G(x)=0{,}75x^2-0{,}025x^3\ x>0$. $G'(x)=1{,}5x-0{,}075x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=20$.

Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		$\nearrow$	100	$\searrow$	

Từ BBT, suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)} G(x)=G(20)=100$. Vậy liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg. Khi đó, độ giảm huyết áp là 100.

Ví dụ 12. (*SGK 12 NC*) Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc của cá bơi khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

Hướng dẫn giải:

Vận tốc cá bơi khi ngược dòng là $v-6$ (km/h). Thời gian cá bơi để vượt khoảng cách 300 km là $t=\dfrac{300}{v-6}$ (giờ).

Năng lượng tiêu hao của cá để vượt khoảng cách đó là $E(v)=cv^3.\dfrac{300}{v-6}=300c.\dfrac{v^3}{v-6}$ (jun), $v>6$.

Ta có: $E'(v)=600cv^2\dfrac{v-9}{(v-6)^2}=0\Leftrightarrow v=9\vee v=0$ (loại do $v>6$).

Bảng biến thiên:

v	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$	$+\infty$	$\searrow$	$E(9)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT, để ít tiêu hao năng lượng nhất, cá phải bơi với vận tốc (khi nước đứng yên) là 9 (km/h).

Ví dụ 13. (*SGK 12 NC*) Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3, t=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 25$. Nếu coi f là hàm số xác định trên $[0;25]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t.

a) Tính tốc độ truyền bệnh vào ngày thứ 5.

b) Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất và tính tốc độ đó.

c) Xác định các ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 600.

d) Xét chiều biến thiên của hàm số f trên đoạn $[0;25]$.

Hướng dẫn giải:

Số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3$, $t\in\mathbb{Z}$, $t\in[0;25]$. Để xét tốc độ truyền bệnh, người ta xem hàm số f là xác định trên đoạn $[0;25]$.

a) $f'(t)=90t-3t^2=3t(30-t)$.

Tốc độ truyền bệnh vào ngày thứ năm là $f'(5)=375$ (người/ngày).

b) $f''(t)=90-6t=0\Leftrightarrow t=15$.

Bảng biến thiên:

t	0		15		$+\infty$
$f''(t)$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$		$\nearrow$	675	$\searrow$	

Từ BBT, tốc độ truyền bệnh là lớn nhất vào ngày thứ 15.

Tốc độ đó là $f'(15)=675$ (người/ngày).

c) $f'(t)>600 \Leftrightarrow 90t-3t^2>600 \Leftrightarrow t^2-30t+200<0 \Leftrightarrow 10<t<20$.

Từ ngày 11 đến ngày thứ 19, tốc độ truyền bệnh là lớn hơn 600 người mỗi ngày.

Ví dụ 14. (***SGK 12 NC***) Cho parabol $(P): y=x^2$ và điểm $A(-3;0)$. Xác định điểm M thuộc parabol (P) sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất và tìm khoảng cách ngắn nhất đó.

Hướng dẫn giải:

Gọi $M(x;x^2)$ là một điểm bất kì của parabol (P).

Ta có: $AM^2=(x+3)^2+x^4=x^4+x^2+6x+9$. Khoảng cách AM đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $f(x)=AM^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

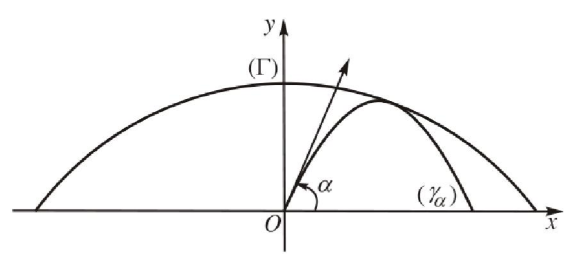
Xét $f(x)=x^4+x^2+6x+9 \Rightarrow f'(x)=4x^3+2x+6=(x+1)(4x^2-4x+6)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT, ta suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x=-1$ và $f(-1)=5$. Do đó, khoảng cách AM đạt giá trị nhỏ nhất khi M nằm ở vị trí của điểm $M_0(-1;1)$; $AM_0=\sqrt{5}$.

Ví dụ 15. (***SGK 12 NC***) Một viên đạn được bắn ra với vận tốc ban đầu $v_0>0$ từ một nòng súng đặt ở gốc tọa độ O, nghiêng một góc α với mặt đất (nòng súng nằm trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy và tạo với trục hoành Ox góc α).



Biết quỹ đạo chuyển động của viên đạn là parabol $(\gamma_\alpha): y=-\dfrac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x^2+x\tan\alpha$ (g là gia tốc trọng trường).

Chứng minh rằng với mọi $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, (γ_α) luôn tiếp xúc với parabol (Γ) có phương trình là $y=-\dfrac{g}{2v_0^2}x^2+\dfrac{v_0^2}{2g}$ và tìm tọa độ tiếp điểm. ((Γ) được gọi là *parabol an toàn*).

Hướng dẫn giải:

Hoành độ tiếp điểm của hai parabol là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} -\dfrac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x^2+x\tan\alpha=-\dfrac{g}{2v_0^2}x^2+\dfrac{v_0^2}{2g} & (1)\\ -\dfrac{g}{v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x+\tan\alpha=-\dfrac{g}{v_0^2}x & (2)\end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow x=\dfrac{v_0^2}{g\tan\alpha}$. Dễ thấy đó cũng là nghiệm của phương trình (1). Vậy với mọi $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ hai parabol luôn tiếp xúc với nhau.

Hoành độ tiếp điểm là $x=\dfrac{v_0^2}{g\tan\alpha}$.

Tung độ của tiếp điểm là $y=-\dfrac{g}{2v_0^2}\left(\dfrac{v_0^2}{g\tan\alpha}\right)^2+\dfrac{v_0^2}{2g}=\dfrac{v_0^2}{2g}\left(1-\dfrac{1}{\tan^2\alpha}\right)$.

Điểm $\left(\dfrac{v_0^2}{g\tan\alpha};\dfrac{v_0^2}{2g}\left(1-\dfrac{1}{\tan^2\alpha}\right)\right)$ là tiếp điểm của hai parabol với mọi $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 16. (***SGK 12 NC***) Một tạp chi được bán với giá 20 nghìn đồng một cuốn. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in, …) được cho bởi công thức $C(x)=0,0001x^2-0,2x+10000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

1) a) Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí.

b) Tỉ số $M(x)=\dfrac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chi cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất.

2) Các khoản thu bao gồm tiền bán tạp chí và 90 triệu nhận được từ quảng cáo và sự trợ giúp cho báo chí. Giả sử số cuốn in ra đều được bán hết.

a) Chứng minh rằng số tiền lãi khi in x cuốn tạp chí là $L(x)=-0,0001x^2+1,8x-1000$.

b) Hỏi in bao nhiêu cuốn thì có lãi?

c) In bao nhiêu cuốn thì lãi nhiều nhất? Tính số tiền lãi đó.

Hướng dẫn giải:

1) a) Tổng chi phí cho x cuốn tạp chí là $T(x)=C(x)+0,4x=0,0001x^2+0,2x+10000$.

b) Ta có: $M(x)=0,0001x+\dfrac{10000}{x}+0,2$ với $x=1,2,\ldots$ (6)

Ta xét hàm số $y=M(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ (trong đó $M(x)$ được xác định bởi công thức (6) với mọi $x>0$) và tìm $x>0$, trong đó hàm số M đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $M'(x)=0,0001-\dfrac{10000}{x^2}=0\Leftrightarrow x=10000$.

Bảng biến thiên:

x	0		$10\,000$		$+\infty$
$M'(x)$		$-$	0	$+$	
$M(x)$		$\searrow$	$2,2$	$\nearrow$	

Từ BBT, suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} M(x)=M(10\,000)=2,2$. Vậy chi phí trung bình cho x cuốn tạp chí thấp nhất khi $x=10\,000$ (cuốn). Chi phí cho mỗi cuốn khi đó là 2,2 vạn đồng $=22\,000$ (đồng).

2) a) Tổng số tiền thu được khi bán x cuốn tạp chí (x nguyên dương) là $2x+9000$ (vạn đồng).

Số tiền lãi khi bán x cuốn là: $L(x)=2x+9000-T(x)=-0,0001x^2+1,8x-1000$.

b) Có lãi khi $L(x)>0$, tức là: $-0,0001x^2+1,8x-1000>0 \Leftrightarrow \dfrac{0,9-\sqrt{0,71}}{0,0001}<x<\dfrac{0,9+\sqrt{0,71}}{0,0001}$

$\Leftrightarrow 9000-\sqrt{71000000}<x<9000+\sqrt{71000000}$.

Vì x lấy giá trị nguyên dương và

$$9000-\sqrt{71000000}>573,85 \text{ và } 9000+\sqrt{71000000}>17426,15$$

nên $573<x<17427$.

c) Ta xét hàm số: $L(x)=-0,0001x^2+1,8x-1000$; $x\in(0;+\infty)$ và tìm $x>0$ để tại đó $L(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $L'(x)=-0,0002x+1,8=0 \Leftrightarrow x=9000$.

Bảng biến thiên:

x	0		9000		$+\infty$
$L'(x)$		$+$	0	$-$	
$L(x)$		$\nearrow$	7100	$\searrow$	

Từ BBT, suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)} L(x)=L(9000)=7100$. Vậy muốn lãi nhiều nhất thì phải in 9000 cuốn.

Khi đó tiền lãi thu được là: 7100 vạn đồng $=71000000$ (đồng).

Ví dụ 17. (***SGK 12 NC***) Người ta định làm một cái hộp hình trụ bằng tôn có thể tích V cho trước. Tìm bán kính đáy r và chiều cao h của hình trụ sao cho tốn ít nguyên liệu nhất.

Hướng dẫn giải:

Thể tích hình trụ là $V=h\pi r^2$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\dfrac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$.

Ta tìm $r>0$ sao cho tại đó S đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét hàm số $S(r)=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$; $r\in(0;+\infty)$. Ta có: $S'(r)=4\pi r-\dfrac{2V}{r^2}=0 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

r	0		$\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
$S'(r)$		$-$	0	$+$	
$S(r)$		$\searrow$	$S\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)$	$\nearrow$	

Từ BBT, $\min\limits_{(0;+\infty)} S(r)=S\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)$ khi $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Khi đó $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$.

Ví dụ 18. (*SGK 12 NC*) Chu vi một tam giác là 16 cm, độ dài cạnh tam giác là 6 cm. Tìm độ dài hai cạnh còn lại của tam giác sao cho tam giác có diện tích lớn nhất

Hướng dẫn giải:

Gọi $x,\ y$ là độ dài hai cạnh còn lại của tam giác.

Ta có: $x+y=16-6=10,\ x>0,\ y>0.$

Diện tích tam giác là: $S=\sqrt{p(p-6)(p-x)(p-y)}=\sqrt{8.2(8-x)(8-y)}=4\sqrt{(8-x)(8-y)}.$

Thay $y=10-x$, ta được: $S=4\sqrt{(8-x)(x-2)}=4\sqrt{-x^2+10x-16};\ x\in(0;10).$

Ta có: $S'(x)=4\sqrt{(8-x)(x-2)}=4\sqrt{-x^2+10x-16};\ x\in(0;10).$

Đặt $f(x)=-x^2+10x-16$; $x\in(0;10)$. Ta có: $f'(x)=-2x+10=0\Leftrightarrow x=5.$

Bảng biến thiên:

x	0		5		10
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$		$\nearrow$	9	$\searrow$	

Từ BBT, suy ra tam giác có diện tích lớn nhất khi $x=5\ (cm)$ và $y=5\ (cm)$; $\max\limits_{(0;10)} f(x)=f(5)=9.$

Khi đó diện tích tam giác là $S=4\sqrt{9}=12\ (cm^2).$

Ví dụ 19. (*SGK BT 12 NC*) Hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB và hai cạnh bên đều dài 1 m. Tính góc $\alpha=\widehat{DAB}=\widehat{CBA}$ sao cho hình thang có diện tích lớn nhất và tính diện tích đó.

Hướng dẫn giải:

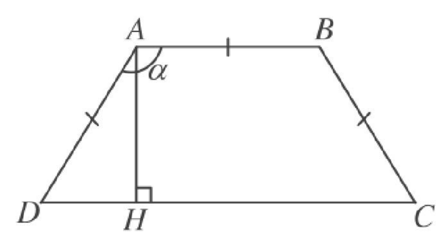
Dựng $AH\perp CD$. Đặt $x=\widehat{ADC};\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}$,

ta được:

$AH=\sin x;\ DH=\cos x;\ DC=1+2\cos x.$

Diện tích hình thang là:

$S=\dfrac{AB+CD}{2}.AH=(1+\cos x)\sin x;\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right).$



Đặt $S(x)=(1+\cos x)\sin x=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\sin x;\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right).$

Ta có: $S'(x)=\cos 2x+\cos x=2\cos^2 x+\cos x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right).$

Suy ra hình thang có diện tích lớn nhất khi $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$. Khi đó, diện tích hình thang là $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\ (cm^2).$

Ví dụ 20. (*SGK BT 12 NC*) Trong các tam giác vuông mà cạnh huyền có độ dài bằng 10 cm, hãy xác định tam giác có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải:

Gọi x, y là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng 10 (cm), $0 < x < 10$ và $0 < y < 10$.

Diện tích tam giác là: $S = \frac{1}{2}xy\ \left(cm^2\right)$. Ta có $x^2 + y^2 = 100$.

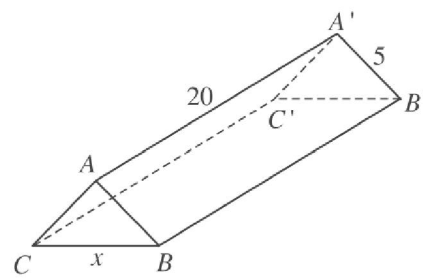
S đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi tích $x^2y^2 = x^2\left(100 - x^2\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ quy về: Tìm $x \in (0;10)$ sao cho tại đó hàm số $z = x^2\left(100 - x^2\right)$; $x \in (0;10)$ đạt giá trị lớn nhất. Kết quả: Tam giác vuông cân có diện tích lớn nhất. Độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác đó là $x = y = 5\sqrt{2}\ (cm)$.

Ví dụ 21. (*SGK BT 12 NC*) Một hành lang giữa hai tòa nhà có hình dạng của một hình lăng trụ đứng. Hai mặt bên $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là hai tấm kính hình chữ nhật dài 20 m, rộng 5 m. Gọi x (mét) là độ dài cạnh BC.

a) Tính thể tích V của hình lăng trụ theo x.

b) Tìm x sao cho hình lăng trụ có thể tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

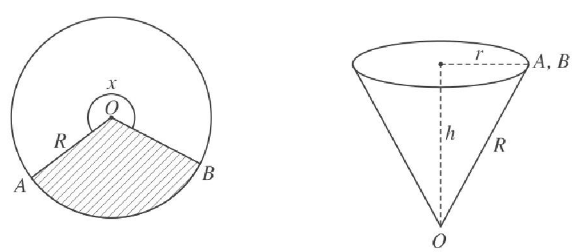


Hướng dẫn giải:

a) $V = 5x\sqrt{100 - x^2}\ \left(m^3\right)$; $0 < x < 10$.

b) Hình lăng trụ có thể tích lớn nhất khi $x = 5\sqrt{2}\ (m)$ và $\max\limits_{(0;10)} V = V\left(5\sqrt{2}\right) = 250\ \left(m^3\right)$.

Ví dụ 22. (*SGK BT 12 NC*) Cắt bỏ hình quạt tròn AOB (hình phẳng có nét gạch trong hình bên) từ một mảnh các tông hình tròn bán kính R rồi dán hai bán kính OA và OB của hình quạt tròn còn lại với nhau để được một cái phễu có dạng của một hình nón. Gọi x là góc ở tâm của quạt tròn dùng làm phễu, $0 < x < 2\pi$.



a) Hãy biểu diễn bán kính r của hình tròn đáy và đường cao h của hình nón theo R và x.

b) Tính thể tích hình nón theo R và x.

c) Tìm x để hình nón có thể tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Hướng dẫn giải:

a) Vì độ dài của đường tròn đáy hình nón bằng độ dài $\overset{\frown}{AB}$ của quạt tròn dùng làm phễu, nên ta có: $2\pi r = Rx \Leftrightarrow r = \frac{R}{2\pi}; h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2x^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$.

b) Thể tích hình nón là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$; $0 < x < 2\pi$.

c) Ta tìm $x \in (0;2\pi)$ sao cho tại đó V đạt giá trị lớn nhất.

Đặt $V\left(x\right)=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}\Rightarrow V'\left(x\right)=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{x\left(8\pi^2-3x^2\right)}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}$.

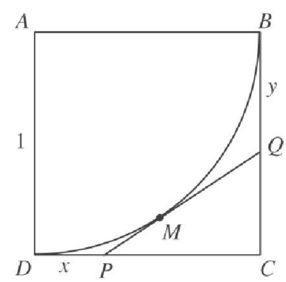
Với $0<x<2\pi$, ta có: $V\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}\approx 1,63\pi\in\left(0;2\pi\right)$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$		2π
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$	$\searrow$	

Từ BBT, suy hình trụ có thể tích lớn nhất khi $x=\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$ và $\max\limits_{(0;2\pi)}V=V\left(\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$.

Ví dụ 23. (***SGK BT 12 NC***) Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1 và cung $\overset{\frown}{AB}$ là một phần tư đường tròn tâm A, bán kính AB chứa trong hình vuông. Tiếp tuyến tại điểm M của cung $\overset{\frown}{BD}$ cắt đoạn thẳng CD tại điểm P và cắt đoạn thẳng BC tại điểm Q. Đặt $x=DP$ và $y=BQ$.



a) Chứng minh rằng: $PQ^2=x^2+y^2-2x-2y+2$ và $PQ=x+y$. Từ đó tính y theo x.

b) Tính PQ theo x và tìm x để PQ có độ dài nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:

a) $y=\frac{1-x}{1+x}$; $0<x<1$.

b) $PQ=\frac{x^2+1}{x+1}$; $0<x<1$. Đoạn thẳng PQ có độ dài nhỏ nhất khi $x=\sqrt{2}-1$.

Ví dụ 24. (***SGK BT 12 NC***) Thể tích V của 1 kg nước ở nhiệt độ T (T nằm giữa 0^0 và 30^0) được cho bởi công thức $V=999,87-0,06426T+0,0085043T^2-0,0000679T^3$ $\left(cm^3\right)$. Ở nhiệt độ nào thì nước có khối lượng riêng lớn nhất?

Hướng dẫn giải:

Ví dụ trở thành: Tìm $T\in\left(0;30\right)$ sao cho tại đó V đạt giá trị nhỏ nhất.

Kết quả: $T\approx 3,9665$ $\left({}^0C\right)$.

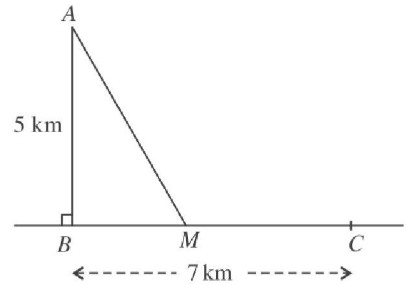
Ví dụ 25. (***SGK BT 12 NC***) Lưu lượng xe ôtô vào đường hầm được cho bởi công thức $f\left(v\right)=\frac{209,4v}{0,36v^2+13,2v+264}$ (xe/giây), trong đó v (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $f'(v)=290,4.\dfrac{-0,36v^2+264}{\left(0,36v^2+13,2v+264\right)^2}$; $v>0$.

$f'(v)=0\Leftrightarrow v=\dfrac{\sqrt{264}}{0,6}$. f đạt giá trị lớn nhất khi $v=\dfrac{\sqrt{264}}{0,6}\approx 27,08$ (km/h) và $f\left(\dfrac{\sqrt{264}}{0,6}\right)\approx 8,9$.

Ví dụ 26. (***SGK BT 12 NC***) Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB=5\ (km)$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là $7\ (km)$. Người canh hải đăng có thể chèo đó từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc $4\ (km/h)$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6\ (km/h)$. Xác định vị trí của điểm M để người đó đến kho nhanh nhất.



Hướng dẫn giải:

Đặt $x=BM,\ 0\le x\le 7$. Khi đó, $AM=\sqrt{x^2+25}$, $MC=7-x$.

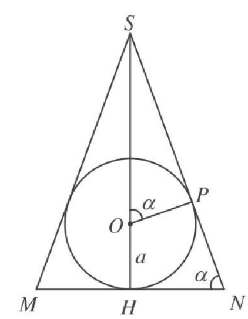
Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là $T(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}+\dfrac{7-x}{6}$ (giờ), $0\le x\le 7$.

Hàm số T đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x=2\sqrt{5}\approx 4,472$ (km).

Ví dụ 27. (***SGK BT 12 NC***) Một hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp hình cầu bán kính a.

a) Chứng minh rằng thể tích của hình chóp là $V=\dfrac{4a^2x^2}{3(x-2a)}$; trong đó x là chiều cao của hình chóp.

b) Với giá trị nào của x, hình chóp có thể tích nhỏ nhất?



Hướng dẫn giải:

Gợi ý: a) Mặt phẳng đi qua đường cao SH của hình chóp và trung điểm M của một cạnh đáy cắt hình chóp theo tam giác cân SMN và cắt hình cầu theo hình tròn tâm O, bán kính a nội tiếp tam giác SMN.

Có thể tính thể tích hình chóp theo x và $\alpha=\widehat{SNH}$. Sau đó sử dụng đẳng thức $x=a+SO$ để tìm hệ thức giữa a, x và α.

a) Ta có $HN=x\cot\alpha$; $MN=2x\cot\alpha$. Thể tích hình chóp là $V=\dfrac{1}{3}MN^2.SH=\dfrac{4}{3}x^3\cot^2\alpha$.

Ta tính $\cot^2\alpha$ theo a và x.

Từ đẳng thức: $SH=OH+SO\Rightarrow x=a+\dfrac{a}{\cos\alpha}\Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\dfrac{x^2-2ax}{(x-a)^2}$;

$\cot^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{a^2}{x(x-2a)}$. Từ đó suy ra công thức cần chứng minh.

b) Cần chú ý V xác định khi $x>2a$.

Ví dụ 28. (***SGK BT 12 NC***) Một sợi dây kim loại dài $60\ (cm)$ được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành vòng tròn. Phải cắt sợi dây như thế nào để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

Hướng dẫn giải:

Độ dài cạnh hình vuông là $x = \dfrac{60}{\pi+4}\ (cm)$. Đoạn dây được uốn thành hình vuông là $\dfrac{240}{\pi+4} \approx 33,6\ (cm)$. Bán kính đường tròn là $r = \dfrac{30}{\pi+4}\ (cm)$.

Đoạn dây được uốn thành vòng tròn có độ dài là $\dfrac{60}{\pi+4} \approx 26,4\ (cm)$.

Ta có: $4x + 2\pi r = 60 \Rightarrow x = \dfrac{30-\pi r}{2};\ 0 < r < \dfrac{30}{\pi}$.

Tổng diện tích hình vuông và hình tròn là $S = \pi r^2 + x^2 = \pi r^2 + \dfrac{1}{4}(30-\pi r)^2$.

Dễ thấy S đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $r = \dfrac{30}{\pi+4}$.

Ví dụ 29. (***SGK BT 12 NC***) Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 000 000 đồng/1 tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100 000 đồng/1 tháng thì có thêm hai căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng? Khi đó, có bao nhiêu căn hộ được cho thuê?

Hướng dẫn giải:

Gợi ý: Nếu tăng giá cho thuê mỗi căn hộ x (đồng/tháng) thì sẽ có $\dfrac{2x}{100\,000}$ căn hộ bị bỏ trống.

Khi đó, số tiền công ty thu được là $S = (2\,000\,000 + x)\left(50 - \dfrac{2x}{100\,000}\right)$ (đồng/tháng).

Kết quả: 2 250 000 (đồng/1 tháng) và có 45 căn hộ.

PHẦN 2. CÁC VÍ DỤ THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN TÍCH PHÂN

Ví dụ 1. (***SGK 12 NC***) Giả sử một vật chuyển động có vận tốc thay đổi theo thời gian, $v = f(t)\ (0 < t < T)$. Chứng minh rằng quãng đường L vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = a$ đến thời điểm $t = b\ (0 < a < b < T)$ là: $L = F(b) - F(a)$, trong đó F là một nguyên hàm bất kì của f trên khoảng $(0;T)$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $s = s(t)$ là quãng thời đường đi được của vật cho đến thời điểm t. Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = a$ đến thời điểm $t = b$ là $L = s(b) - s(a)$. Mặt khác, ta đã biết $s'(t) = f(t)$, do đó $s = s(t)$ là một nguyên hàm của f. Thành thử, tồn tại một hằng số C sao cho $s(t) = F(t) + C$. Vậy $L = s(b) - s(a) = \left[F(b) + C\right] - \left[F(a) + C\right] = F(b) - F(a)$.

Ví dụ 2. (***SGK 12 NC***) Một ô tô đang chạy với vận tốc $20\ (m/s)$ thì người người đạp phanh (còn gọi là "thắng"). Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc

$v(t)=-40t+20\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bằng đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

Hướng dẫn giải:
Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu được đạp phanh. Gọi T là thời điểm ô tô dừng. Ta có $v(T)=0$ suy ra $20=40T \Leftrightarrow T=0,5$. Như vậy, khoảng thời gian từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn của ô tô là 0,5 giây. Trong khoảng thời gian 0,5 giây đó, ô tô di chuyển được quãng đường là $L=\int_0^{0,5}(20-40t)\mathrm{d}t=\left(20t-20t^2\right)\Big|_0^{0,5}=5\ (m)$.

Ví dụ 3. (***SGK 12 NC***) Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=1-2\sin 2t\ (m/s)$. Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0\ (s)$ đến thời điểm $t=\dfrac{3\pi}{4}\ (s)$.

Hướng dẫn giải:

Quãng đường $S=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}(1-2\sin 2t)\mathrm{d}t=\dfrac{3\pi}{4}-1.$

Ví dụ 4. (***SGK 12 NC***) Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t)=160-10t\ (m/s)$. Tính quãng đường vật di chuyển được thời điểm $t=0\ (s)$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

Hướng dẫn giải:

Gọi t_0 là thời điểm vật dừng lại. Ta có $v(t_0)=0$. Suy ra $t_0=16$.

Vậy $S=\int_0^{16}(160-10t)\mathrm{d}t=1280\ (m)$.

Ví dụ 5. (***SGK 12 NC***) Một vật đang chuyển động với vận tốc $10\ (m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2\ (m/s^2)$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

Hướng dẫn giải:
Gọi $v(t)$ là vận tốc của vật. Ta có $v'(t)=a(t)=3t+t^2$. Suy ra $v(t)=\dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+C$.

Vì $v(0)=10$ nên suy ra $C=10$. Vậy $v(t)=\dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+10.$

Thành thử quãng đường vật đi được là $S=\int_0^{10}\left(\dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+10\right)\mathrm{d}t=\dfrac{4300}{3}\ (m)$.

Ví dụ 6. (***SGK 12 NC***) Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu $25\ (m/s)$. Gia tốc trọng trường là $9,8\ (m/s^2)$.

a) Sau bao lâu thì viên đạn đạt tới độ cao lớn nhất?

b) Tính quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất (tính chính xác đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải:
Gọi $v(t)$ là vận tốc của viên đạn. Ta có $v'(t)=a(t)=-9,8$.

Suy ra $v(t)=-9,8t+C$. Vì $v(0)=25$ nên $C=25$. Vậy $v(t)=-9,8t+25$.

Gọi T là thời điểm viên đạn đạt độ cao lớn nhất. Tại đó viên đạn có vận tốc bằng 0.

Vậy $v(T)=0$. Suy ra $T=\dfrac{25}{9,8}\approx 2,55$ (giây).

Vậy quãng đường viên đạn đi được cho đến khi rơi xuống đất là $2S\approx 31,89\ (m)$.

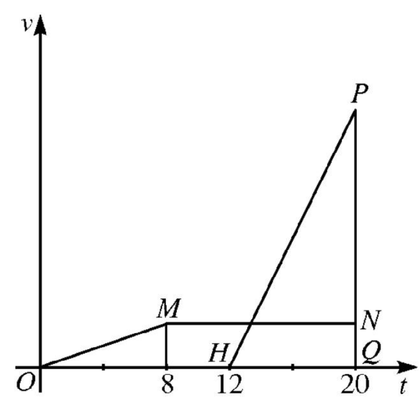
Ví dụ 7. (***SGK 12 NC***) Giả sử một vật từ trạng nghỉ khi $t=0\ (s)$ chuyển động thẳng với vận tốc $v(t)=t(5-t)\ (m/s)$. Tìm quảng đường vật đi được cho tới khi nó dừng lại.

Hướng dẫn giải:

Vật dừng lại tại thời điểm $t=5$. Quãng đường vật đi được là $S=\int\limits_0^5 t(5-t)\mathrm{d}t=\dfrac{125}{6}\ (m)$.

Ví dụ 8. (***SGK 12 NC***) Một chất điểm A xuất phát từ vị trí O, chuyển động thẳng nhanh dần đều; 8 giây sau nó đạt đến vận tốc 6 (m/s). Từ thời điểm đó nó chuyển động thẳng đều. Một chất điểm B xuất phát từ cùng vị trí O nhưng chậm hơn 12 giây so với A và chuyển động thẳng nhanh dần đều. Biết rằng B đuổi kịp A sau 8 giây (kể từ lúc B xuất phát). Tìm vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A.

Hướng dẫn giải:



Thời điểm A và B gặp nhau là 20 giây kể từ lúc A xuất phát.

Đồ thị vận tốc của A là đường gấp khúc OMN. Quãng đường A đã đi được là diện tích hình thang $OMNQ$.

Diện tích của nó là $(20+12)\dfrac{6}{2}=96$, do đó lúc gặp B, A đi được 96 (m). Đồ thị vận tốc của B là đường thẳng HP.

Vì B xuất phát cùng vị trí với A nên quãng đường B đi được là 96 (m).

Mặt khác, quãng đường B đã đi được bằng diện tích hình tam giác HPQ với $HQ=8$ và PQ chính là vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A. Suy ra $96=\dfrac{8PQ}{2}=4PQ$ nên $PQ=24$. Vậy vận tốc của B tại thời điểm nó đuổi kịp A là 24 (m/s).

Ví dụ 9. (***SGK BT 12 NC***) Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\dfrac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải:

Ta có: $N(t)=8000\ln(1+0,5t)+250\,000$.

$$N(10)=8000\ln 6+250\,000\approx 264334.$$

Kết quả: ≈ 264334.

Ví dụ 10. (*SGK BT 12 NC*) Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s) có gia tốc $v'(t)=\frac{3}{t+1}$ (m/s^2). Vận tốc ban đầu của vật là 6 (m/s). Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải:

Ta có: $v(t)=3\ln(t+1)+6$.

$$v(10)=3\ln 11+6\approx 13\ (m/s).$$

Kết quả: $\approx 13\ (m/s)$.

Ví dụ 11. (*SGK BT 12 NC*) Gọi $h(t)$ (cm) là mức nước ở bồn chứa sau khi bơm được t giây. Biết rằng $h'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải:

$h(t)=\frac{3}{20}(t+8)^{\frac{4}{3}}-\frac{12}{5}$.

Kết quả: $2,66\ (m)$.

Ví dụ 12. (*SGK BT 12 NC*) Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin(\pi t)}{\pi}$ (m/s). Tính quãng đường di chuyển của vật đó trong khoảng thời gian 1,5 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải:

Kết quả: $\frac{3}{4\pi}+\frac{1}{\pi^2}\approx 0,34\ (m)$.

Ví dụ 13. (*SGK BT 12 NC*) Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t)=1,2+\frac{t^2+4}{t+3}$ (m/s). Tính quãng đường di chuyển của vật đó trong khoảng thời gian 4 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải:

Kết quả: $0,8-13\ln 3+13\ln 7\approx 11,81\ (m)$.

PHẦN 3. BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN MŨ LÔGARIT

Ví dụ 1: (**VÍ DỤ LÃI KÉP**) Một người gửi số tiền 1 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi kép). Hỏi người đó được lĩnh bao nhiêu tiền sau n năm ($n\in\mathbb{N}^*$), nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi ?

Hướng dẫn giải:

Giả sử $n\geq 2$. Gọi số vốn ban đầu là P, lãi suất là r. Ta có $P=1$ (triệu đồng), $r=0,07$.

+ Sau năm thứ nhất : Tiền lãi là $T_1=P.r=1.0,07=0,07$ (triệu đồng).

Số tiền được lĩnh (còn gọi là vốn tích lũy) là $P_1=P+T_1=P+P.r=P(1+r)=1,07$ (triệu đồng).

+ Sau năm thứ hai : Tiền lãi là $T_2 = P_1.r = 1,07.0,07 = 0,0749$ (triệu đồng).

Vốn tích lũy là $P_2 = P_1 + T_2 = P_1 + P_1.r = P(1+r)^2 = 1,1449$ (triệu đồng).

Tương tự, vốn tích lũy sau *n* năm là $P_n = P(1+r)^n = (1,07)^n$ (triệu đồng).

Vậy sau *n* năm người đó được lĩnh $(1,07)^n$ (triệu đồng).

Ví dụ 2: Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ trong đó m_0 là khối lượng phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác).

Ví dụ 3: Dân số thế giới được tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm.

Ví dụ 4: Cho biết năm 2003, Việt Nam có 80.902.400 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%. Hỏi năm 2010 Việt Nam sẽ có bao nhiêu người, nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm không đổi ?

Hướng dẫn giải :

Vào năm 2010, tức là sau 7 năm, dân số của Việt Nam là $80902400.e^{7.0,0147} \approx 89670648$ người.

Ví dụ 5: Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu ?

Hướng dẫn giải :

Gọi số tiền gửi ban đầu là P. Sau n năm, số tiền thu được là $P_n = P.(1+0,084)^n = P.(1,084)^n$.

Để $P_n = 2P$ thì phải có $(1,084)^n = 2$.

Do đó $n = \log_{1,084} 2 \approx 8,59$. Vì n là số tự nhiên nên ta chọn $n = 9$.

Ví dụ 6: Cho biết chu kì bán rã của một chất phóng xạ là 24 giờ (1 ngày đêm). Hỏi 250 gam chất đó sẽ còn lại bao nhiêu sau :

a) 1,5 ngày đêm ? b) 3,5 ngày đêm ?

Hướng dẫn giải:

Ta biết công thức tính khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t là $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã.

Ta có $T = 24$ giờ $= 1$ ngày đêm, $m_0 = 250$ gam.

Do đó :

a) Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau 1,5 ngày đêm là $m(1,5) = 250.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1,5}{1}} \approx 88,388$ gam.

b) Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau 3,5 ngày đêm là $m(1,5) = 250.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3,5}{1}} \approx 22,097$ gam.

Ví dụ 7: Một khu rừng có trữ lượng gỗ 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4%/mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ ?

Bài giải :

Gọi trữ lượng gỗ ban đầu là V_0, tốc độ sinh trưởng hằng năm của rừng là i phần trăm. Ta có :

+ Sau 1 năm, trữ lượng gỗ là $V_1 = V_0 + V_0 i = V_0(1+i)$;

+ Sau 2 năm, trữ lượng gỗ là $V_2 = V_1 + V_1 i = V_0(1+i)^2$;

...

+ Sau 5 năm, trữ lượng gỗ là $V_5 = V_0(1+i)^5$.

Thay $V_0 = 4.10^5$ (m^3), $i = 4\% = 0,04$, ta được $V_5 = 4.10^5(1+0,04)^5 \approx 4,8666.10^5$ (m^3).

Ví dụ 8 : Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi sau 10 giờ có bao nhiêu con vi khuẩn ? Sau bao lâu số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng gấp đôi ?

Bài giải :

Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loài vi khuẩn này. Từ giả thiết $300 = 100.e^{5r}$ suy ra $r = \dfrac{\ln 300 - \ln 100}{5} = \dfrac{\ln 3}{5} \approx 0,2197$. Tức là tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là $21,97\%$ /mỗi giờ.

Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100.e^{10.0,2197} \approx 900$ (con).

Từ 100 con, để có 200 con thì thời gian cần thiết là

$$t \approx \frac{\ln 200 - \ln 100}{0,2197} \approx 3,15 \text{ giờ} \approx 3 \text{ giờ } 9 \text{ phút}.$$

Bài tập 9 : Cho biết chu kì bán rã của chất phóng xạ plutôni Pu^{239} là 24360 năm (tức là một lượng Pu^{239} sau 2430 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hằng năm ($r < 0$), t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 10 gam Pu^{239} sau bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn 1 gam ?

Bài giải :

Trước tiên, ta tìm tỉ lệ phân hủy hằng năm của Pu^{239}.

Ta có Pu^{239} có chu kì bán hủy là 24360 năm, do đó ta có $5 = 10.e^{r.24360}$.

Suy ra : $r = \dfrac{\ln 5 - \ln 10}{2430} \approx -2,84543.10^{-5} \approx -0,000028$.

Vậy sự phân hủy của Pu^{239} được tính theo công thức $S = A.e^{-0,000028t}$, trong đó S và A tính bằng gam, t tính bằng năm.

Theo bài ra, ta có : $1 = 10.e^{-0,000028t} \Leftrightarrow t = \dfrac{-\ln 10}{-0,000028} \approx 82235$ (năm)

Vậy sau khoảng 82235 năm thì 10 gam chất Pu^{239} sẽ phân hủy còn 1 gam.

Ví dụ 10 : (*Trích* **Đề minh họa 2017**) Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12% /năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách : Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng theo cách đó là bao nhiêu ? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m=\dfrac{100.(1,01)^3}{3}$ (triệu đồng).   B. $m=\dfrac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$ (triệu đồng).

C. $m=\dfrac{100.1,03}{3}$ (triệu đồng).   D. $m=\dfrac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3-1}$ (triệu đồng).

Hướng dẫn giải :

Lãi suất 12%/1năm $\Rightarrow$ 1%/tháng. (do vay ngắn hạn).

Sau tháng 1, ông A còn nợ: $100.1,01-m$ (triệu đồng).

Sau tháng 2, ông A còn nợ: $(100.1,01-m).1,01-m$ (triệu đồng).

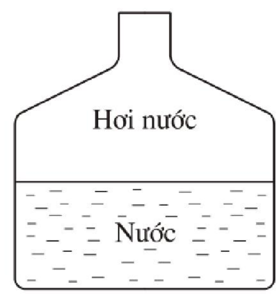
Sau tháng 3, ông A hết nợ, do đó ta có :

$$(100.1,01^2-2,01m).1,01-m=100.1,01^3-3,0301m=0$$

$$\Rightarrow m\approx\frac{100.1,01^3}{3} \text{ (triệu đồng).}$$

Lựa chọn đáp án **A**.

Ví dụ 11 : Khoảng 200 năm trước, hai nhà khoa học Pháp là Clô-zi-ut (R. Clausius) và Cla-pay-rông (E. Clapeyron) đã thấy rằng áp suất p của hơi nước (tính bằng milimét thủy ngân, viết tắt là mmHg) gây ra khi nó chiếm khoảng trống phía trên của mặt nước chứa trong một bình kín (*Hình 2.7*) được tính theo công thức $p=a.10^{\frac{k}{t+273}}$, trong đó t là nhiệt độ C của hơi nước, a và k là những hằng số. Cho biết $k\approx-2258,624$.



Hình 2.7

a) Tính a biết rằng khi nhiệt độ của nước là 100^0C thì áp suất của hơi nước là 760 mmHg (tính chính xác đến hàng phần chục).

b) Tính áp suất của hơi nước khi nhiệt độ của nước là 40^0C (tính chính xác đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải :

a) Khi nhiệt độ nước là $t=100^0C$ thì $P=760$. Do đó ta có phương trình (ẩn a) :

$$760=a.10^{\frac{-2258,624}{373}}\Rightarrow a\approx 863188841,4.$$

b) $\approx 52,5$ mmHg.

Ví dụ 12 : Sử dụng công thức $L(dB)=10\log\dfrac{I}{I_0}$, hãy tính gần đúng, chính xác đến hàng đơn vị, độ lớn (dB) của âm thanh có tỉ số $\dfrac{I}{I_0}$ cho trong bảng sau rồi điền vào cột còn trống :

STT	Loại âm thanh	$\dfrac{I}{I_0}$	Độ lớn (L)
1	Ngưỡng nghe	1	
2	Nhạc êm dịu	4000	
3	Nhạc mạnh phát ra từ loa	$6,8\times10^8$	
4	Tiếng máy bay phản lực	$2,3\times10^{12}$	
5	Ngưỡng đau tai	10^{13}	

Hướng dẫn giải :

Ta có bảng sau

STT	Loại âm thanh	$\frac{I}{I_0}$	Độ lớn (L)
1	Ngưỡng nghe	1	0 dB
2	Nhạc êm dịu	4000	36 dB
3	Nhạc mạnh phát ra từ loa	$6,8\times10^{8}$	88 dB
4	Tiếng máy bay phản lực	$2,3\times10^{12}$	124 dB
5	Ngưỡng đau tai	10^{13}	130 dB

B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN_TRÍCH TỪ ĐỀ THI THỬ CÁC TRƯỜNG THPT

Câu 1. Ông A gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn 1 năm với lãi suất $7,65\%$ / năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Hỏi sau 5 năm, ông A thu được cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu triệu đồng? **(NGUYỄN TẤT THÀNH – HÀ NỘI)**

A. $15.(0,0765)^5$ triệu đồng.
B. $15.\left[1+2.(0,0765)\right]^5$ triệu đồng.
C. $15.(1+0,765)^5$ triệu đồng.
D. $15.(1+0,0765)^5$ triệu đồng.

Câu 2. Một người gửi 6 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn 1 năm với lãi suất $7,56\%$ / năm. Hỏi sau bao nhiêu năm, người gửi sẽ có ít nhất 12 triệu đồng từ số tiền gửi ban đầu (giả sử lãi suất không thay đổi). **(LIÊN HÀ – HÀ NỘI)**

A. 5 năm.
B. 10 năm.
C. 12 năm.
D. 8 năm.

Câu 3. Ông An gửi gói tiết kiệm tích lũy cho con tại một ngân hàng với số tiền tiết kiệm ban đầu là $200.000.000$ VNĐ, lãi suất 7% / năm. Từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền $20.000.000$ VNĐ. Ông không rút lãi định kỳ hàng năm. Biết rằng, lãi suất định kỳ hàng năm không thay đổi. Hỏi sau 18 năm, số tiền ông An nhận về cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? **(LÊ QUÝ ĐÔN – HÀ NỘI)**

A. $1.335.967.000$ VNĐ.
B. $1.686.898.000$ VNĐ.
C. $743.585.000$ VNĐ.
D. $739.163.000$ VNĐ.

Câu 4. Bác Bình cần sửa lại căn nhà với chi phí 1 tỷ đồng. Đặt kế hoạch sau 5 năm phải có đủ số tiền trên thì mỗi năm bác Bình cần gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiết kiệm như nhau gần nhất bằng giá trị nào sau đây, biết lãi suất của ngân hàng là 7% / năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. **(YÊN HÒA – HÀ NỘI)**

A. 162 triệu đồng.
B. $162,5$ triệu đồng.
C. $162,2$ triệu đồng.
D. $162,3$ triệu đồng.

Câu 5. Biết rằng khi đỗ vào trường đại học X, mỗi sinh viên cần nộp một khoản tiền lúc nhập học là 5 triệu đồng. Bố mẹ Minh tiết kiệm để đầu mỗi tháng đều gửi một số tiền như nhau vào ngân hàng theo hình thức lãi kép. Hỏi mỗi tháng, họ phải gửi số tiền là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn) để sau 9 tháng, rút cả gốc lẫn lãi thì được 5 triệu đồng, biết lãi suất hiện tại là $0,5\%$ / tháng. **(PHAN ĐÌNH PHÙNG – HÀ NỘI)**

A. 542.000 đồng.
B. 555.000 đồng.
C. 556.000 đồng.
D. 541.000 đồng.

Câu 6. Chị Minh vay ngân hàng 300 triệu đồng theo phương thức trả góp để mua nhà. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất chị Minh trả $5,5$ triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là $0,5\%$ mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu, chị Minh trả hết số tiền trên? **(SỞ GD&ĐT BẮC NINH)**

A. 64 tháng. B. 54 tháng. C. 63 tháng. D. 55 tháng.

Câu 7. Một sinh viên X trong thời gian học 4 năm đại học đã vay ngân hàng mỗi năm 10 triệu đồng với lãi suất bằng 3% / năm (thủ tục vay một năm 1 lần vào thời điểm đầu năm học). Khi ra trường X thất nghiệp chưa trả được tiền cho ngân hàng nhưng phải chịu lãi suất 8% / năm. Sau 1 năm thất nghiệp, sinh viên X cũng tìm được việc làm và bắt đầu trả nợ dần. Tính tổng số tiền sinh viên X nợ ngân hàng trong 4 năm đại học và 1 năm thất nghiệp? **(TIÊN DU – BẮC NINH)**

A. $46.538.667$ đồng. B. $43.091.358$ đồng.
C. $48.621.980$ đồng. D. $45.188.656$ đồng.

Câu 8. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $\left(r > 0\right)$, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Khi đó, sau thời gian bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần so với số lượng ban đầu? **(NGÔ SĨ LIÊN – BẮC GIANG)**

A. $t = \dfrac{5}{\log 3}$ giờ. B. $t = \dfrac{3}{\log 5}$ giờ. C. $t = \dfrac{5\ln 3}{\ln 10}$ giờ. D. $t = \dfrac{3\ln 5}{\ln 10}$ giờ.

Câu 9. Một người gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép như sau: Mỗi tháng, người này tiết kiệm một số tiền là X đồng rồi gửi vào ngân hàng theo kỳ hạn 1 tháng với lãi suất $0,8\%$ / tháng. Tìm X để sau 3 năm kể từ ngày gửi lần đầu tiên người đó có tổng số tiền là 500 triệu đồng. **(SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC)**

A. $X = \dfrac{4.10^6}{1,008^{37} - 1}$. B. $X = \dfrac{4.10^6}{1 - 0,008^{37}}$.

C. $X = \dfrac{4.10^6}{1,008\left(1,008^{36} - 1\right)}$. D. $X = \dfrac{4.10^6}{1,008^{36} - 1}$.

Câu 10. Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất $0,5\%$ một tháng, sau mỗi tháng lãi suất được nhập vào vốn. Hỏi sau một năm người đó rút tiền thì tổng số tiền người đó nhận được là bao nhiêu? **(SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH)**

A. $100.\left(1,005\right)^{12}$ (triệu đồng). B. $100.\left(1 + 12.0,005\right)^{12}$ (triệu đồng).

C. $100.1,005$ (triệu đồng). D. $100.\left(1,05\right)^{12}$ (triệu đồng).

Câu 11. Với mức tiêu thụ thức ăn của trang trại A không đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ sẽ hết sau 100 ngày. Nhưng thực tế, mức tiêu thụ thức ăn tăng thêm 4% mỗi ngày (ngày sau tăng 4% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế, lượng thức ăn dự trữ đó sẽ hết sau khoảng bao nhiêu ngày? (làm tròn số đến hàng đơn vị) **(CHU VĂN AN – HÀ NỘI)**

A. 37 ngày. B. 41 ngày. C. 40 ngày. D. 43 ngày.

Câu 12. Anh Phúc đầu tư 100 triệu đồng vào một công ty theo thức lãi kép với lãi suất 15% một năm. Giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi. Hỏi sau 3 năm, số tiền lãi của anh Phúc gần nhất với giá trị nào sau đây? **(PHẠM HỒNG THÁI – HÀ NỘI)**

A. $104,6$ triệu đồng. B. $52,1$ triệu đồng.
C. $152,1$ triệu đồng. D. $4,6$ triệu đồng.

Câu 13. Một người có 10 triệu đồng gửi vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng (1 quý là 3 tháng), lãi suất $6\%/1$ quý theo hình thức lãi kép (sau 3 tháng sẽ tính lãi và cộng vào gốc). Sau đúng 3 tháng, người đó lại gửi thêm 20 triệu đồng với hình thức và lãi suất như vậy. Hỏi sau 1 năm, tính từ lần gửi đầu tiên, người đó nhận được số tiền gần kết quả nào nhất? **(QUANG TRUNG – HÀ NỘI)**

A. 35 triệu. B. 37 triệu. C. 36 triệu. D. 38 triệu.

Câu 14. Một người gửi vào ngân hàng theo thể thức lãi kép với lãi suất 12% một năm, kỳ hạn 1 tháng. Hỏi sau bao lâu, số tiền trong tài khoản của người đó gấp ba lần số tiền ban đầu? **(CHU VĂN AN – HÀ NỘI)**

A. 12 năm 5 tháng. B. 9 năm 3 tháng.

C. 11 năm. D. 10 năm 2 tháng.

Câu 15. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $H\left(x\right)=\dfrac{2}{5}x^2\left(33-x\right)$, trong đó $x\left(mg\right)\left(x>0\right)$ là liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Tính lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất. **(CHU VĂN AN – HÀ NỘI)**

A. $25\left(mg\right)$. B. $22\left(mg\right)$. C. $33\left(mg\right)$. D. $30\left(mg\right)$.

Câu 16. Tỷ lệ tăng dân số hằng năm của Việt Nam là $1,07\%$. Năm 2016, dân số của Việt Nam là $93.422.000$ người. Hỏi với tỷ lệ tăng dân số như vậy thì năm 2026, dân số Việt Nam gần kết quả nào nhất? **(LÊ QUÝ ĐÔN – HÀ NỘI)**

A. 105 triệu người. B. 115 triệu người. C. 120 triệu người. D. 110 triệu người.

Câu 17. Một người gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% một năm. Biết rằng, nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu. Nếu sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được số tiền lãi là: **(CHUYÊN HÀ NỘI – AMSTERDAM)**

A. $20,128$ triệu đồng. B. $70,128$ triệu đồng.

C. $3,5$ triệu đồng. D. $50,7$ triệu đồng.

Câu 18. Ông A vay ngân hàng $600.000.000$ đồng để mua xe ôtô với lãi suất $7,8\%$ một năm. Ông A bắt đầu hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng 1 năm kể từ ngày vay ông bắt đầu hoàn nợ và hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng 1 năm. Số tiền hoàn nợ là như nhau ở mỗi lần và sau đúng 8 năm thì trả hết tiền nợ. Hỏi theo cách đó thì số tiền ông A phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ. **(NGUYỄN THỊ MINH KHAI – HÀ NỘI)**

A. $130.000.000$ đồng. B. $136.776.000$ đồng.

C. $103.618.000$ đồng. D. $121.800.000$ đồng.

Câu 19. Các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm virus Zika kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f\left(t\right)=45t^2-t^3\left(t=0,1,2,...,25\right)$. Nếu coi $f\left(t\right)$ là một hàm xác định trên đoạn $\left[0;25\right]$ thì $f'\left(t\right)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất. **(VIỆT NAM – BA LAN)**

A. 20. B. 10. C. 15. D. 5.

Câu 20. Biết dân số Việt Nam năm 2005 vào khoảng 80 triệu người. Tỉ lệ tăng dân số vào khoảng $1,5\%$ mỗi năm. Tốc độ tặng trưởng dân số theo công thức $S=A.e^{nr}$, trong đó n là số năm, A là dân số từ thời điểm tính, r là tỉ lệ tăng dân số. Hỏi khoảng bao nhiêu năm sau, dân số đạt 100 triệu người? **(VIỆT NAM – BA LAN)**

A. 15 năm. B. 10 năm. C. 23 năm. D. 20 năm.

Câu 21. Dân số của một xã được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm và i là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Giả sử năm 2000 thành lập xã X với số dân ban đầu là 100.000 người. Sau 5 năm, xã đó có 500.000 người. Vậy sau 10 năm, xã X có bao nhiêu người? **(NGỌC HỒI – HÀ NỘI)**

A. 900.000 người. B. 700.000 người. C. 600.000 người. D. 800.000 người.

Câu 22. Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng$/m^2$. Hãy xác định kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là? **(TRẦN PHÚ – HÀ NỘI)**

A. 74 triệu đồng. B. 75 triệu đồng. C. 76 triệu đồng. D. 77 triệu đồng.

Câu 23. Một khu rừng có trữ lượng gỗ là $4.10^5\left(m^3\right)$. Biết tốc độ sinh trưởng của cây trong rừng là 4% / năm. Sau 5 năm thì khu rừng đó có số m^3 gỗ là: **(ĐỐNG ĐA – HÀ NỘI)**

A. 8.10^5. B. 6.10^5. C. $4,8.10^5$. D. $4.\left(10,4\right)^5$.

Câu 24. Một người thợ thủ công pha một khối thạch cao và nước tạo thành một hỗn hợp có thể tích $V = 330cm^3$, sau đó đổ vào khuôn để đúc thành những viên phấn hình trụ có bán kính đáy $R = 0,5cm$ và chiều cao $h = 6cm$. Biết rằng trong quá trình đúc sự tiêu hao nguyên liệu là không đáng kể. Hỏi người thợ thủ công đó đúc được bao nhiêu viên phấn? **(KIM LIÊN – HÀ NỘI)**

A. 50 viên. B. 70 viên. C. 24 viên. D. 23 viên.

Câu 25. Một khúc gỗ có dạng hình lăng trụ tứ giác đều có cạnh đáy là $60cm$ và chiều cao là $2m$. Mỗi mét khối gỗ này trị giá 3 triệu đồng. Hỏi khúc gỗ đó có giá bao nhiêu tiền? **(TRẦN NHÂN TÔNG – HÀ NỘI)**

A. 720.000 đồng. B. $1.080.000$ đồng. C. $2.160.000$ đồng. D. $4.320.000$ đồng.

Câu 26. Bom nguyên tử là loại bom chứa Uranium-235 được phát nổ khi ghép các khối Uranium-235 thành một khối chứa $50kg$ tinh khiết. Uranium-235 có chu kỳ bán rã là 704 triệu năm. Nếu quả bom ban đầu chứa $64kg$ Uranium-235 tinh khiết và sau t triệu năm thì quả bom không thể phát nổ. Khi đó t thỏa mãn phương trình:

A. $\frac{50}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}}$. B. $\frac{64}{50} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}}$. C. $\frac{64}{50} = 2^{\frac{t}{704}}$. D. $\frac{50}{64} = 2^{\frac{t}{704}}$.

Câu 27. Sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là $78.685.800$ người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là $1,7\%$. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 100 triệu người. **(NHÂN CHÍNH – HÀ NỘI)**

A. Năm 2018. B. Năm 2015. C. Năm 2020. D. Năm 2014.

Câu 28. Tỷ lệ tăng dân số hằng năm của Việt Nam được duy trì ở mức $1,05\%$. Theo số liệu của Tổng Cục Thống Kê, năm 2014 dân số của Việt Nam là $90.728.900$ người. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì năm 2030, dân số Việt Nam là bao nhiêu? **(NGUYỄN TRÃI – HÀ NỘI)**

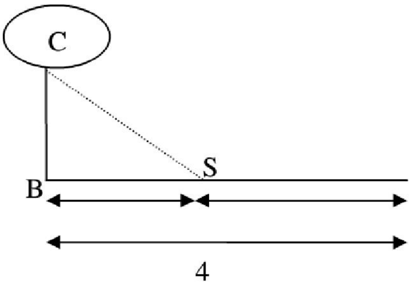
A. $107.232.573$ người. B. $107.232.574$ người.

C. 105.971.355 người. D. 106.118.331 người.

Câu 29. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C. Khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1 km. Khoảng cách từ B đến A là 4 km. Mỗi km dây điện đặt dưới nước là mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất. **(AN LÃO – BÌNH ĐỊNH)**

A. $\frac{15}{4}$ km. B. $\frac{13}{4}$ km.

C. $\frac{10}{4}$ km. D. $\frac{19}{4}$ km.



Câu 30. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá $2.000.000$ đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng. **(AN LÃO – BÌNH ĐỊNH)**

A. $2.225.000$ đồng. B. $2.100.000$ đồng. C. $2.200.000$ đồng. D. $2.250.000$ đồng

Câu 31. Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành một hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành một vòng tròn. Hỏi khi tổng diện tích của hình vuông và hình tròn ở trên nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)? **(AN NHƠN – BÌNH ĐỊNH)**

A. $26,43$ cm. B. $33,61$ cm. C. $40,62$ cm. D. $30,54$ cm.

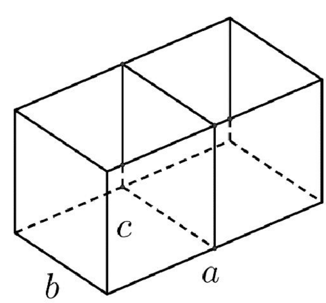
Câu 32. Người thợ cần làm một cái bể cá hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296m^3$. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với 3 kích thước a,b,c như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước a,b,c bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dầy của kính không đáng kể. **(TIÊN DU – BẮC NINH)**

A. $a=3,6m;b=0,6m;c=0,6m$

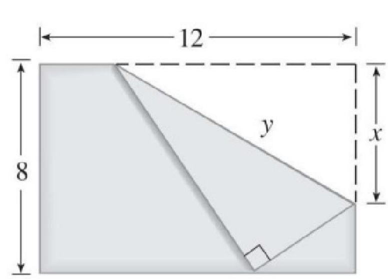
B. $a=2,4m;b=0,9m;c=0,6m$.

C. $a=1,8m;b=1,2m;c=0,6m$.

D. $a=1,2m;b=1,2m;c=0,9m$.

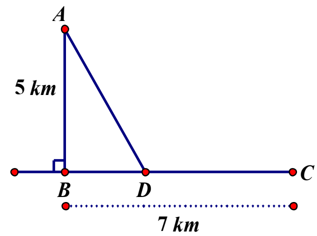


Câu 33. Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12 cm và chiều rộng 8 cm. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm đáy dưới như hình vẽ. Để độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?



A. 6. B. $6\sqrt{5}$. C. $6\sqrt{2}$. D. $6\sqrt{3}$.

Câu 34. Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của tỉnh Quảng Ninh muốn tiếp cận vị trí C để tiếp tế lương thực và thuốc phải đi theo con đường từ A đến B và từ B đến C (như hình vẽ). Tuy nhiên do nước ngập con đường từ A đến B nên đoàn cứu trợ không thể đi đến C bằng xe, nhưng đoàn cứu trợ có thể chèo thuyền từ A đến vị trí D với vận tốc $6km/h$ rồi đi bộ từ D đến C với vận tốc $4km/h$. Biết A cách B một khoảng $5km$, B cách C một khoảng $7km$. Xác định vị trí điểm D cách B bao nhiêu km để đoàn cứu trợ đi đến vị trí C nhanh nhất. **(NINH GIANG – HẢI DƯƠNG)**



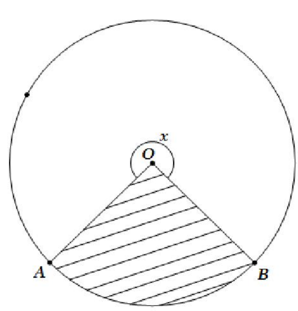
A. $BD = 5km$. B. $BD = 2\sqrt{2}km$. C. $BD = 4km$. D. $BD = 2\sqrt{3}km$.

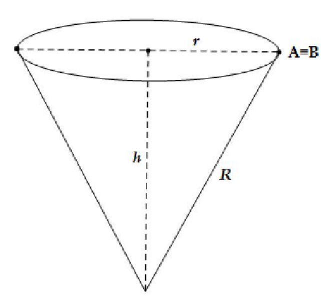
Câu 35. Một công ty sản xuất một loại vỏ hộp sữa giấy hình trụ có thể tích không đổi là V, với mục tiêu chi phí làm vỏ hộp là ít nhất, tức diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất. Hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r. Tìm hệ thức liên hệ giữa r và h để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất.

A. $r = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; h = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. B. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}; h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

C. $r = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}; h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. D. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Câu 36. Cắt bỏ hình tròn AOB (hình phẳng có nét gạch trong hình dưới) từ một mảnh các tông của hình tròn bán kính R rồi dán hai bán kính OA và OB của hình quạt tròn lại với nhau để được cái phểu có dạng một hình nón. Gọi x là góc ở tâm của hình quạt dùng làm phểu $\left(0 < x < 2\pi\right)$. Tìm x để khối nón có thể tích lớn nhất ?





A. $x = \frac{2\sqrt{6}}{27}\pi$. B. $x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. C. $x = \frac{2\sqrt{6}}{9}\pi$. D. $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

Câu 37. Ông A gửi 150 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi suất kép kỳ hạn 1 năm với lãi suất kép $x \in \left[5\%; 7\%\right]$ năm. Sau 4 năm, ông rút tất cả tiền ra và vay thêm ngân hàng $\frac{1060}{75}$ triệu đồng cũng với lãi suất $x\%$. Ngân hàng cần lấy lãi suất x bao nhiêu để 3 năm nữa sau khi trả ngân hàng, số tiền của ông còn lại nhỏ nhất (giả sử lãi suất không thay đổi).

A. 6%. B. 5%. C. 7%. D. $6,5\%$.

Câu 38. Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 12% trên năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách sau: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, số tiền *m* mà ông A phải trả cho ngân hàng theo cách đó là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m = \dfrac{100.\left(1,01\right)^3}{3}$ (triệu đồng). B. $m = \dfrac{100.\left(1,03\right)}{3}$ (triệu đồng).

C. $m = \dfrac{\left(1,01\right)^3}{\left(1,01\right)^3 - 1}$ (triệu đồng). D. $m = \dfrac{120.\left(1,12\right)^3}{\left(1,12\right)^3 - 1}$ (triệu đồng).

Câu 39. Ông A mong muốn sở hữu khoản tiền $20.000.000$ đồng vào ngày 2/3/2012 ở một tài khoản lãi suất năm là $6,05\%$. Hỏi ông A cần đầu tư bao nhiêu tiền trên tài khoản này vào ngày 2/3/2007 để đạt được mục tiêu đề ra?

A. $14.909.965,25$ đồng. B. $14.909.965,26$ đồng.

C. $14.909.955,25$ đồng. D. $14.909.865,25$ đồng.

Câu 40. Ông A gửi $9,8$ triệu đồng tiết kiệm với lãi suất $8,4\%$ / năm và lãi suất hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi theo cách đó thì sau bao nhiêu năm người đó thu được tổng số tiền 20 triệu đồng (biết rằng lãi suất không thay đổi).

A. 9 năm B. 8 năm. C. 7 năm. D. 10 năm.

Câu 41. Ông A gửi tiết kiệm với lãi suất $8,4\%$ / năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

A. 9 năm B. 8 năm. C. 7 năm. D. 10 năm.

Câu 42. Anh A mua nhà trị giá 300 triệu đồng theo phương thức trả góp. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất anh A trả $5.500.000$ đồng và chịu lãi suất số tiền chưa trả là $0,5\%$ / tháng thì sau bao nhiêu tháng anh A trả hết số tiền trên.

A. $n = 64$. B. $n = 60$. C. $n = 65$. D. $n = 64,1$.

Câu 43. Một người được lĩnh lương khởi điểm là 700.000 đồng / tháng. Cứ 3 năm anh ta lại được tăng lương thêm 7%. Hỏi sau 36 năm làm việc anh ta được lĩnh tất cả bao nhiêu tiền.

A. 450788972 đồng. B. 450788900 đồng.

C. 450799972 đồng. D. 450678972 đồng.

Câu 44. Theo dự báo với mức tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay thì trữ lượng dầu của nước A sẽ hết sau 100 năm nữa. Nhưng do nhu cầu thực tế, mức tiêu thụ tăng lên 4% mỗi năm. Hỏi sau bao nhiêu năm số dầu dự trữ của nước A sẽ hết.

A. $n = 41$ năm. B. $n = 42$ năm. C. $n = 43$ năm. D. $n = 41,1$ năm.

Câu 45. Biết thể tích khí CO_2 năm 1998 là $V\left(m^3\right)$. 10 năm tiếp theo, mỗi năm thể tích CO_2 tăng $m\%$, 10 năm tiếp theo nữa, thể tích CO_2 mỗi năm tăng $n\%$. Tính thể tích CO_2 năm 2016?

A. $V = \dfrac{\left(100+m\right)^{10}\left(100+n\right)^{10}}{10^{40}}$. B. $V = \dfrac{\left(100+m\right)^{10}\left(100+n\right)^{8}}{10^{36}}$.

C. $V = \dfrac{\left(100+m\right)^{10}\left(100+n\right)^{10}}{10^{36}}$. D. $V = \dfrac{\left(100+m\right)^{10}\left(100+n\right)^{8}}{10^{20}}$.

Câu 46. Bà A gửi 100 triệu đồng vào tài khoản định kỳ tính lãi kép với lãi suất là 8% / năm. Sau 5 năm, bà rút toàn bộ tiền và dùng một nửa để sửa nhà, số tiền còn lại bà tiếp tục đem gửi ngân hàng trong 5 năm với cùng lãi suất. Tính số tiền lãi thu được sau 10 năm.

A. $81,412$ triệu đồng. B. $115,892$ triệu đồng.

C. 119 triệu đồng. D. 78 triệu đồng.

Câu 47. Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi thêm tiền gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. 210 triệu đồng. B. 220 triệu đồng. C. 212 triệu đồng. D. 216 triệu đồng.

Câu 48. Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất ban đầu 4% / năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Cứ sau một năm lãi suất tăng $0,3\%$. Hỏi sau 4 năm tổng số tiền người đó nhận được gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 119 triệu đồng. B. $119,5$ triệu đồng. C. 120 triệu đồng. D. $120,5$ triệu đồng.

Câu 49. Anh A mong muốn rằng sau 6 năm sẽ có 2 tỷ để mua nhà. Hỏi anh A phải gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiền tiết kiệm như nhau hàng năm gần nhất với giá trị nào sau đây, biết rằng lãi suất của ngân hàng là 8% / năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn.

A. $253,5$ triệu đồng. B. 251 triệu đồng. C. 253 triệu đồng. D. $252,5$ triệu đồng.

Câu 50. Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn 1 quý, với lãi suất $1,65\%$ một quý. Hỏi sao bao lâu người gửi có ít nhất 20 triệu đồng (bao gồm cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

A. 16 quý. B. 18 quý. C. 17 quý. D. 19 quý.

Câu 51. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là $78.685.800$ người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là $1,7\%$. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người.

A. năm 2026. B. năm 2022. C. năm 2020. D. năm 2025.

Câu 52. Số tiền $58.000.000$ đồng gửi tiết kiệm trong 8 tháng thì lãnh về được $61.329.000$ đồng. Tính lãi suất hàng tháng?

A. $0,8\%$. B. $0,6\%$. C. $0,5\%$. D. $0,7\%$.

Câu 53. Cô giáo dạy Văn gửi 200 triệu đồng loại kì hạn 6 tháng vào ngân hàng với lãi suất $6,9\%$ một năm thì sau 6 năm 9 tháng hỏi cô giáo dạy Văn nhận được bao nhiêu tiền cả vốn và lãi biết rằng cô giáo không rút lãi ở tất cả các kỳ hạn trước và nếu rút trước ngân hàng sẽ trả lãi suất theo loại lãi suất không kì hạn là $0,002\%$ một ngày (1 tháng tính 30 ngày).

A. $471688328,8$ đồng. B. $302088933,9$ đồng.

C. $311392005,1$ đồng. D. $321556228,1$ đồng.

Câu 54. Một người muốn sau 4 tháng có 1 tỷ đồng để xây nhà. Hỏi người đó phải gửi mỗi tháng là bao nhiêu tiền (như nhau), biết lãi suất 1 tháng là 1%.

A. $M = \dfrac{1,3}{3}$ (tỷ đồng). B. $M = \dfrac{1}{1,01 + \left(1,01\right)^2 + \left(1,01\right)^3}$ (tỷ đồng).

C. $M = \dfrac{1.1,03}{3}$ (tỷ đồng). D. $M = \dfrac{1.\left(1,01\right)^3}{3}$ (tỷ đồng).

Câu 55. Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 5% một quý theo hình thức lãi kép (sau 3 tháng sẽ tính lãi và cộng vào gốc). Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 50 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Tính tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi tiền.

A. $176,676$ triệu đồng. B. $178,676$ triệu đồng.

C. $177,676$ triệu đồng. D. $179,676$ triệu đồng.

Câu 56. Một lon nước soda 80^0F được đưa vào một máy làm lạnh chứa đá tại 32^0F. Nhiệt độ của soda ở phút thứ t được tính theo định luật Newton bởi công thức $T\left(t\right)=32+48.\left(0,9\right)^t$. Phải làm mát soda trong bao lâu để nhiệt độ là 50^0F?

A. $t=1,56$ phút. B. $t=9,3$ phút. C. $t=2$ phút. D. $t=4$ phút.

Câu 57. Cường độ một trận động đất M (richter) được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ XX, một trận động đất ở San Francisco có cường độ $8,3$ độ richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Tính cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ.

A. $8,9$ độ richter. B. $33,2$ độ richter. C. $2,075$ độ richter. D. 11 độ richter.

Câu 58. Giả sử số lượng một bầy ruồi tại thời điểm t so với thời điểm $t=0$ là $N\left(t\right)=N_0e^{kt}$, N_0 là số lượng bầy ruồi tại thời điểm $t=0$, k là hằng số tăng trưởng của bầy ruồi. Biết số lượng bầy ruồi tăng lên gấp đôi sau 9 ngày. Hỏi sau bao nhiêu ngày bầy ruồi có 800 con?

A. 27 ngày. B. $27,1$ ngày. C. 26 ngày. D. 28 ngày.

Câu 59. Một người gửi tiền vào ngân hàng một số tiền là 100 triệu đồng, họ định gửi theo kì hạn n năm với lãi suất là 12% một năm; sau mỗi năm không nhận lãi mà để lãi nhập vốn cho năm kế tiếp. Tìm n nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được hơn 40 triệu đồng.

A. $n=5$. B. $n=4$. C. $n=3$. D. $n=2$.

Câu 60. Giả sử $n=f\left(t\right)=n_0.2^t$ là số lượng cá thể trong một đám vi khuẩn tại thời điểm t (giờ), n_0 là số lượng cá thể lúc ban đầu. Biết tốc độ phát triển về số lượng của vi khuẩn tại thời điểm t chính là $f'\left(t\right)$. Giả sử mẫu thử ban đầu có $n_0=100$ con vi khuẩn. Vậy tốc độ phát triển sau 4 giờ là bao nhiêu con vi khuẩn?

A. 1600 con. B. 1109 con. C. 500 con. D. 3200 con.

Câu 61. Các loài cây xanh trong quá trinh quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cây bị chết thì hiện tượng quang hợp của nó cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thanh nitơ 14. Biết rằng nếu gọi $P\left(t\right)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P\left(t\right)$ được tính theo công thức: $P\left(t\right)=100.\left(0,5\right)^{\frac{t}{5750}}\left(\%\right)$. Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 65%. Niên đại của công trình kiến trúc đó gần với số nào sau đây nhất.

A. 41776 năm. B. 6136 năm. C. 3574 năm. D. 4000 năm.

Câu 62. Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất $0\,0,85\%$ / tháng. Hợp đồng với ngân hàng ông A sẽ hoàn nợ trong n tháng: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và bằng $11,589$ triệu đồng. Tìm n.

A. $n=8$. B. $n=9$. C. $n=10$. D. $n=11$.

Câu 63. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức $1,05\%$. Theo số liệu của Tổng cục thống kê, dân số của Việt Nam năm 2014 là $90.728.900$ người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào năm 2030 thì dân số của Việt Nam là bao nhiêu?

A. 107232573 người. B. 107232574 người.

C. 105971355 người. D. 106118331 người.

Câu 64. Năng lượng của một trận động đất được tính bằng $E=1,74.10^{19}.10^{1,44M}$ với M là độ lớn theo thang độ Richter. Thành phố A xảy ra một trận động đất 8 độ Richter và năng lượng của nó gấp 14 lần trận động đất đang xảy ra tại thành phố B. Hỏi khi đó độ lớn của trận động đất tại thành phố B là bao nhiêu?

A. $7,2$ độ Richter. B. $7,8$ độ Richter. C. $9,6$ độ Richter. D. $6,9$ độ Richter.

Câu 65. Một người gửi ngân hàng 80 triệu đồng theo hình thức lãi đơn với lãi suất 3% / quý. Hỏi sau ít nhất bao lâu, số tiền thu về hơn gấp rưỡi số tiền vốn.

A. 52 tháng. B. 51 tháng. C. 49 tháng. D. 50 tháng.

Câu 66. Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn 1 quý với lãi suất $1,65\%$ một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 20 triệu đồng cả vốn lẫn lãi từ số vốn ban đầu?

A. 4 năm 9 tháng. B. 4 năm 3 tháng. C. 4 năm 8 tháng. D. 4 năm 6 tháng.

Câu 67. Chu kỳ bán rã của chất phóng xạ Plutonium Pu^{239} là 24360 năm (tức là một lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân hủy thì chỉ còn một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S=Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm $\left(r<0\right)$, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 10 gam Pu^{239} sau bao lâu còn lại 2 gam?

A. 46120 năm. B. 82235 năm. C. 57480 năm. D. 92042 năm.

Câu 68. Trên mỗi chiếc Radio FM đều có vạch chia để người dùng dễ dàng chọn sóng Radio cần tìm. Vạch ngoài cùng bên trái và bên phải tương ứng với $88MHz$ và $108MHz$. Hai vạch cách nhau 12 cm. Biết vị trí của vạch cách vạch ngoài cùng bên trái d cm thì có tần số $F=ka^{d}\left(MHz\right)$ với k và a là hằng số. Tìm vị trí của vạch ứng với tần số $91MHz$ để bắt sóng VOV Giao Thông Quốc Gia.

A. Cách vạch ngoài cùng bên phải $8,47\,cm$ .B. Cách vạch ngoài cùng bên trái $1,92\,cm$.

C. Cách vạch ngoài cùng bên phải $10,03\,cm$ .D. Cách vạch ngoài cùng bên trái $2,05\,cm$.

Câu 69. Người ta quy ước $\lg x$ và $\log x$ là giá trị của $\log_{10} x$. Trong các lĩnh vực kỹ thuật, $\lg x$ được sử dụng khá nhiều, kể cả máy tính cầm tay hay quang phổ. Hơn nữa, trong toán học, người ta sử dụng $\lg x$ để tìm số chữ số của một số nguyên dương nào đó. Ví dụ số A có n chữ số thì khi đó $n=\left[\lg A\right]+1$ với $\left[\lg A\right]$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng A. Hỏi số 2017^{2017} có bao nhiêu chữ số?

A. 9999 chữ số. B. 6666 chữ số. C. 6665 chữ số. D. 6699 chữ số.

Câu 70. Số lượng động vật nguyên sinh tăng trưởng với tốc độ $0,7944$ con/ngày. Giả sử trong ngày đầu tiên, số lượng động vật nguyên sinh là 2. Hỏi sau 6 ngày, số lượng động vật nguyên sinh là bao nhiêu?

A. 37 con. B. 21 con. C. 48 con. D. 106 con.

Câu 71. E. coli (Escherichia coli) là vi khuẩn đường ruột gây tiêu chảy, đau bụng dữ dội. Cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn E. coli lại tăng gấp đôi. Ban đầu, chỉ có 60 vi khuẩn E. coli trong đường ruột. Hỏi sau 8 giờ, số lượng vi khuẩn E. coli là bao nhiêu?

A. 1006632960 vi khuẩn. B. 2108252760 vi khuẩn.

C. 158159469 vi khuẩn. D. 3251603769 vi khuẩn.

Câu 72. Theo số liệu thực tế, dân số thế giới năm 1950 là 2560 triệu người, còn năm 1980 là 3040 triệu người. Người ta dự đoán dân số thế giới phụ thuộc vào thời gian *t* theo hàm số mũ $P\left(t\right)=ae^{bt}$ với a, b là hằng số và độ biến thiên của $P\left(t\right)$ theo thời gian tỷ lệ thuận với $P\left(t\right)$. Hãy dự đoán dân số thế giới vào năm 2020.

A. 8524 triệu dân. B. 5360 triệu dân. C. 7428 triệu dân. D. 3823 triệu dân.

Câu 73. Thầy Nguyễn Văn Rin muốn mua chiếc Iphone 7 giá $18.500.000$ đồng của cửa hàng Thế giới di động để lấy lòng với người yêu nhân ngày $20/10$ nhưng vì chưa đủ tiền nên Thầy đã quyết định chọn mua hình thức trả góp và trả trước 5 triệu đồng trong 12 tháng, với lãi suất là $3,4\%$ / tháng. Hỏi mỗi tháng, Thầy sẽ phải trả cho công ty Thế giới di động số tiền là bao nhiêu?

A. 1554000 đồng. B. 1564000 đồng.

C. 1584000 đồng. D. 1388824 đồng.

Câu 74. Ông A thanh toán tiền mua xe bằng các kỳ khoản năm: $5.000.000$ đồng, $6.000.000$ đồng, $10.000.000$ đồng và $20.000.000$ đồng. Kỳ khoản đầu thanh toán 1 năm sau ngày mua. Với lãi suất áp dụng là 8%. Hỏi giá trị chiếc xe ông A mua là bao nhiêu?

A. $32.412.582$ đồng. B. $35.412.582$ đồng.

C. $33.412.582$ đồng. D. $34.412.582$ đồng.

Câu 75. Trong vòng 4 năm, ông A gửi vào một tài khoản lãi suất 8% với các khoản tiền lần lượt là: $5.000.000$ đồng, $6.000.000$ đồng, $10.000.000$ đồng và $20.000.000$ đồng.. Ngay sau khi gửi khoản tiền cuối cùng, tổng số tiền trong tài khoản của ông A là bao nhiêu?

A. $44.096.960$ đồng. B. $46.096.960$ đồng.

C. $45.096.960$ đồng. D. $43.096.960$ đồng.

Câu 76. Áp suất không khí P (đo bằng $mmHg$) suy giảm mũ so với độ cao x (mét), tức P giảm theo công thức $P=P_0.e^{xi}$, trong đó $P_0=760\ mmHg$ là áp suất ở mực nước biển $\left(x=0\right)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 mét thì áp suất của không khí là $672,71\ mmHg$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao 3000 mét là bao nhiêu (làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng đơn vị)?

A. $531\ mmHg$. B. $530\ mmHg$. C. $528\ mmHg$. D. $527\ mmHg$.

Câu 77. Biết rằng tỉ lệ lạm phát hằng năm của một quốc gia trong 10 năm qua là 5%. Năm 1994, nếu nạp xăng cho một ô tô là 24,95\$. Hỏi năm 2000, tiền nạp xăng cho ô tô đó là bao nhiêu?

A. 33,44 \$ B. 44,44 \$ C. 44,33 \$. D. 35,44 \$.

Câu 78. Tỉ lệ gia tăng dân số hằng năm của Indonesia là $1,5\%$. Năm 1998, dân số nước này là $212.942.000$ người. Hỏi dân số của Indonesia vào năm 2006?

A. $240.901.000$ người. B. $250.091.000$ người.

C. $230.091.000$ người. D. $220.091.000$ người.

Câu 79. Trên mặt của mỗi chiếc radio đều có các vạch chia để người sử dụng dễ dàng chọn đúng sóng radio cần tìm. Biết vạch chia ở vị trí cách tận cùng bên trái một khoảng d

(cm) thì ứng với tần số $F = ka^d\,(kHz)$, trong đó k và a là hai hằng số được chọn sao cho vạch tận cùng bên trái ứng với tần số $53\ kHz$, vạch tận cùng bên phải ứng với tần số $160\ kHz$ và hai vạch này cách nhau $12\ cm$. Tính a (làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. $a \approx 1,096$. B. $a \approx 0,908$. C. $a \approx 1,084$. D. $a \approx 0,922$.

Câu 80. Một sinh viên được gia đình gửi vào sổ tiết kiệm ngân hàng là 90 triệu đồng với lãi suất $0,9\%$ / tháng. Nếu mỗi tháng sinh viên đó đều rút ra một số tiền như nhau vào ngày ngân hàng trả lãi thì hàng tháng anh ta rút ra bao nhiêu tiền (làm tròn đến hàng nghìn) để đúng sau 4 năm đại học sẽ vừa hết số tiền cả vốn lẫn lãi.

A. 2317000 đồng. B. 2417000 đồng. C. 2340000 đồng. D. 2298000 đồng.

Câu 81. Năm 1994, tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là $\dfrac{358}{10^6}$. Biết rằng tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí tăng $0,4\%$ hằng năm. Hỏi năm 2004, tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là bao nhiêu?

A. $\dfrac{373}{10^6}$. B. $\dfrac{363}{10^6}$. C. $\dfrac{383}{10^6}$. D. $\dfrac{353}{10^6}$.

Câu 82. Biết rằng tỉ lệ giảm dân số hằng năm của Nga là $0,5\%$. Năm 1998, dân số của Nga là $148.861.000$ người. Hỏi năm 2008, dân số của nước Nga là bao nhiêu?

A. $139.699.000$ người. B. $140.699.000$ người.

C. $149.699.000$ người. D. $145.699.000$ người.

Câu 83. Biết rằng tỉ lệ giảm dân số hằng năm của Italia là $0,1\%$. Năm 1998, dân số của Italia là $56.783.000$ người. Hỏi năm 2020, dân số của nước Italia là bao nhiêu?

A. $55.547.000$ người. B. $54.547.000$ người.

C. $52.547.000$ người. D. $53.547.000$ người.

Câu 84. Cho biết chu kì bán hủy của chất phóng xạ Plutoni là 24360 năm (tức là một lượng Plutoni sau 24360 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = A.e^{rt}$; trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hằng năm $(r < 0)$, t là thời gian phân hủy và S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 10 gam Plutoni sau bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn 1 gam?

A. 80922 năm. B. 100922 năm. C. 99922 năm. D. 88922 năm.

Câu 85. Ông Bách dự tính mua trả chậm một chiếc xe gắn máy bằng cách trả ngay $2.200.000$ đồng tiền mặt, $3.800.000$ đồng cuối năm sau và $5.300.000$ đồng cuối năm kế tiếp. Biết lãi suất áp dụng là $6,24\%$, hỏi giá của chiếc xe là bao nhiêu?

A. $10.472.500$ đồng. B. $12.472.500$ đồng.

C. $9.472.500$ đồng. D. $11.472.500$ đồng.

Câu 86. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4% /năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được tổng số tiền là 20 triệu đồng, biết rằng lãi suất không thay đổi?

A. 9 năm. B. 10 năm. C. 8 năm. D. 7 năm.

Câu 87. Ông Bách dự định đầu tư khoản tiền 20 triệu đồng vào một dự án với lãi suất tăng dần: $3,35\%$ trong 3 năm đầu, $3,75\%$ trong 2 năm kế tiếp và $4,8\%$ ở 5 năm cuối. Tính giá trị khoản tiền ông Bách nhận được cuối năm thứ 10.

A. 30 triệu. B. 40 triệu. C. 25 triệu. D. 35 triệu.

Câu 88. Ông Bách gửi vào tài khoản 7 triệu đồng. Một năm sau, ông rút ra 7 triệu đồng. Một năm sau ngày rút ông nhận được khoản tiền 272.340 đồng. Tính lãi suất áp dụng trên tài khoản của ông Bách.

A. $3,75\%$. B. $2,75\%$. C. $1,75\%$. D. $4,75\%$.

Câu 89. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,03\%$ / ngày. Hỏi sau bao lâu, người đó được lãi 2 triệu đồng?

A. 611 ngày. B. 608 ngày. C. 610 ngày. D. 609 ngày.

Câu 90. Theo dự báo với mức tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay thì trữ lượng dầu của nước A sẽ hết sau 100 năm nữa. Nhưng do nhu cầu thực tế, mức tiêu thụ tăng lên 4% mỗi năm. Hỏi sau bao nhiêu năm số dầu dự trữ của nước A sẽ hết?

A. 39 năm. B. 40 năm. C. 38 năm. D. 41 năm.

Câu 91. Bạn Bình gửi tiết kiệm số tiền $58.000.000$ đồng trong 8 tháng tại một ngân hàng thì nhận được $61.329.000$ đồng. Tính lãi suất hàng tháng?

A. $0,6\%$. B. 6%. C. $0,7\%$. D. 7%.

Câu 92. Các nhà khoa học thực hiện nghiên cứu trên một nhóm học sinh bằng cách cho họ xem một danh sách các loài động vật và sau đó kiểm tra xem họ nhớ được bao nhiêu $\%$ mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M\left(t\right)=75-20\ln\left(t+1\right), t\geq 0$ (đơn vị $\%$). Hỏi khoảng thời gian ngắn nhất bao lâu thì số học sinh trên nhớ được danh sách đó dưới 10%.

A. Khoảng 24 tháng. B. Khoảng 22 tháng.

C. Khoảng 25 tháng. D. Khoảng 32 tháng.

Câu 93. Ông A mua nhà trị giá 300 triệu đồng và vay ngân hàng theo phương thức trả góp. Nếu ông A muốn trả hết nợ trong vòng 5 năm và trả lãi với mức 6% / năm thì mỗi tháng ông phải trả bao nhiêu tiền? (làm tròn đến nghìn đồng).

A. 5935 nghìn đồng. B. 1500 nghìn đồng.

C. 4935 nghìn đồng. D. 6935 nghìn đồng.

Câu 94. Tỉ lệ tăng dân số hằng năm của Việt Nam là 1%. Năm 2010, dân số nước ta là $88.360.000$ người. Sau khoảng bao nhiêu năm thì dân số nước ta sẽ là $128.965.000$ người, biết rằng tỉ lệ tăng dân số hằng năm không thay đổi?

A. 36 năm. B. 37 năm. C. 38 năm. D. 39 năm.

Câu 95. Anh A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất $1,1\%$ / tháng. Anh A muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, anh bắt đầu hoàn nợ và những lần tiếp theo cách nhau đúng một tháng. Số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết nợ sau đúng 18 tháng kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, tổng số tiền lãi mà anh A phải trả là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong suốt thời gian anh A vay.

A. $10.773.700$ đồng. B. $10.774.000$ đồng.

C. $10.773.000$ đồng. D. $10.773.800$ đồng.

Câu 96. Số $p=2^{756839}-1$ là một số nguyên tố. Hỏi nếu viết trong hệ thập phân, số đó có bao nhiêu chữ số?

A. 227831 chữ số. B. 227832 chữ số.

C. 227834 chữ số. D. 227835 chữ số.

Câu 97. Để xác định nồng độ pH, người ta tính theo công thức $pH = \log\frac{1}{\left[H^+\right]}$, trong đó $\left[H^+\right]$ là nồng độ ion H^+. Tính nồng độ pH của $Ba\left(OH\right)_2$ biết nồng độ ion H^+ là $10^{-11}M$.

A. $pH = 11$. B. $pH = -11$. C. $pH = 3$. D. $pH = -3$.

Câu 98. Người ta thả một lá bèo vào một hồ nước. Kinh nghiệm cho thấy sau 9 giờ, bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng gấp 10 lần lượng lá bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì số lá bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ mặt hồ?

A. 3 giờ. B. $\frac{10^9}{3}$ giờ. C. $9 - \log 3$ giờ. D. $\frac{9}{\log 3}$ giờ.

Câu 99. Đầu năm 2016, Curtis Cooper và các cộng sự tại nhóm nghiên cứu Đại học Central Mis-souri, Mỹ vừa công bố số nguyên tố lớn nhất tại thời điểm đó. Số nguyên tố này là một số dạng số nguyên tố Mersenne có giá trị bằng $M = 2^{74207281} - 1$. Hỏi M có bao nhiêu chữ số?

A. 2233862 chữ số. B. 22338618 chữ số.

C. 22338617 chữ số. D. 2233863 chữ số.

Câu 100. Nhà toán học người Pháp Pierre de Fermat là người đầu tiên đưa ra khái niệm số Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$ với n là số nguyên dương không âm. Fermat dự đoán F_n là số nguyên tố nhưng Euler đã chứng minh được F_5 là hợp số. Hãy tìm số chữ số của F_{13}.

A. 1243 chữ số. B. 1234 chữ số. C. 2452 chữ số. D. 2467 chữ số.

HẾT