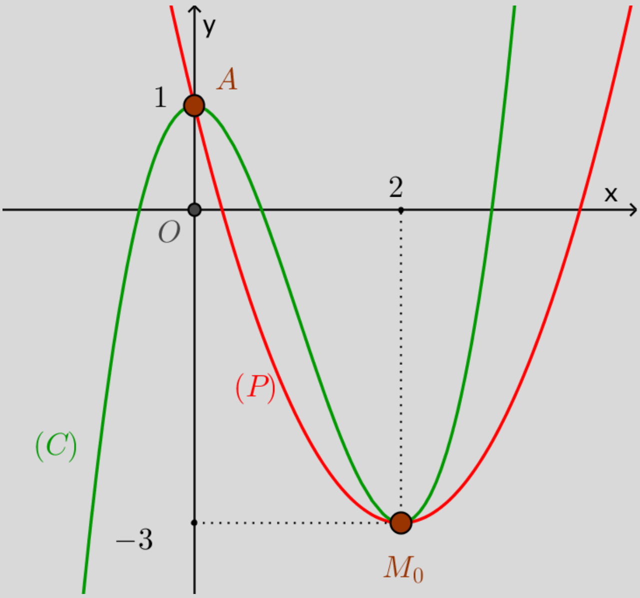
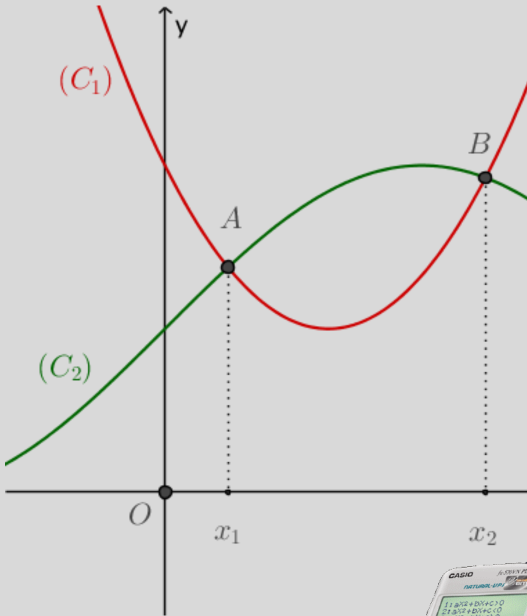
TOÁN
LUYỆN THI
ĐẠI HỌC

Chuyên đề
HÀM SỐ





- KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM
- CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI
- THỦ THUẬT CASIO GIẢI TOÁN HÀM SỐ
- BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CÓ LỜI GIẢI CHI TIẾT

ÔN THI THPT QUỐC GIA

Tài liệu gần 500 trang bao gồm các chủ đề sau:

Bố cục của các chủ đề gồm các phần sau:

1. Kiến thức cơ bản cần nắm
2. Các dạng toán và phương pháp giải (kèm theo các bài toán minh họa)
3. Thủ thuật Casio giải nhanh
4. Bài tập trắc nghiệm rèn luyện (có lời giải chi tiết)

Tài liệu được tôi sưu tầm và biên soạn để làm tư liệu cho các em lớp 12 ôn thi kỳ thi THPT Quốc gia tham khảo, giúp các em ôn lại kiến thức nhanh chóng và hiệu quả hơn. Trong quá tình tổng hợp và biên soạn không tránh khỏi những sai sót đáng tiếc do số lượng kiến thức và bài tập khá nhiều. Mong các đọc giả thông cảm và đóng góp ý kiến để những tài liệu sau của tôi được chỉnh chu hơn! Mọi đóng góp xin gửi về:

Facebook: https://web.facebook.com/duytuan.qna.

Hoặc qua Gmail: btdt94@gmail.com.

Các em có thể xem thêm các chuyên đề luyện thi Đại học môn Toán tại Website: https://toanhocplus.blogspot.com/

Xin chân thành cảm ơn!!!

Quảng Nam - 02.2018

Bùi Trần Duy Tuấn

MỤC LỤC

Chủ đề 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

☆☆☆

A. LÝ THUYẾT VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

I. LÝ THUYẾT CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa :

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K.

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

2. Định lý :

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K.

- Nếu $f'(x) > 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x) < 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.
- Nếu $f'(x) = 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên K.

3. Định lý mở rộng :

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K.

- Nếu $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K.
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì $f(x)$ không đổi trên K.

Chú ý :

- Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết " Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó". Chẳng hạn: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và có đạo hàm $f'\left(x\right) > 0, \forall x \in K$ trên khoảng $\left(a;b\right)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $\left[a;b\right]$.
- Nếu $f'\left(x\right) \geq 0, \forall x \in K$ (hoặc $f'\left(x\right) \leq 0, \forall x \in K$) và $f'\left(x\right) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số đồng biến trên khoảng K (hoặc nghịch biến trên khoảng K).

II. CÁC KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG BỔ TRỢ

1. Lập bảng xét dấu của một biểu thức $P(x)$

Bước 1. Tìm nghiệm của biểu thức $P(x)$, hoặc giá trị của x làm biểu thức $P(x)$ không xác định.

Bước 2. Sắp xếp các giá trị của x tìm được theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

Bước 3. Sử dụng máy tính tìm dấu của $P(x)$ trên từng khoảng của bảng xét dấu.

2. Một số kiến thức liên quan đến tam thức bậc hai

Cho tam thức $\boxed{g(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)}$

- Định lí về dấu của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c\ \ (a \neq 0)$:

$\circ\ g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\circ\ g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$\circ\ g(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\circ\ g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

- So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số 0:

$\circ\ x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\circ\ 0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\circ\ x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

- So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số a bất kỳ:

$\circ\ x_2 > x_1 > a \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - a).(x_2 - a) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2a \end{cases}$ $\qquad$ $\circ\ x_1 < x_2 < a \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - a).(x_2 - a) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2a \end{cases}$

$\circ\ x_1 < a < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - a).(x_2 - a) < 0 \end{cases}$

3. Kiến thức liên quan đến xác định tham số m.

$\circ\ f(x) \leq h(m), \forall x \in (a;b) \Leftrightarrow \max\limits_{(a;b)} f(x) \leq h(m)$

$\circ\ f(x) \geq h(m), \forall x \in (a;b) \Leftrightarrow \min\limits_{(a;b)} f(x) \geq h(m)$

4. Đạo hàm một số hàm số thường gặp

$1.(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$	$7.(e^x)' = e^x$	$13.(\sin x)' = \cos x$	$19.(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$2.(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$	$8.(e^u)' = u'e^u$	$14.(\sin u)' = u'.\cos u$	$20.(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$3.(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$9.(a^x)' = a^x \ln a$	$15.(\cos x)' = -\sin x$	$21.(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

4. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	10. $\left(a^u\right)' = u'a^u \ln a$	16. $\left(\cos u\right)' = -u'.\sin u$	22. $\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$
5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	11. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x.\ln a}$	17. $\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	
6. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	12. $\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u.\ln a}$	18. $\left(\tan u\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	

Công thức tính nhanh đạo hàm hàm phân thức:

23. $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$

24. $\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{\left(dx^2+ex+f\right)^2}$

III. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định

✫ Phương pháp

Bước 1: Tìm tập xác định D.

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 3: Tìm nghiệm $f'(x) = 0$ hoặc những giá trị x làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4: Xác định dấu của $f'(x)$ tại các khoảng giá trị vừa tìm được.

Bước 5: Kết luận.

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số: $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -3x^2 + 12x - 9$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu trên, hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$, đồng biến trên $\left(1;3\right)$.

Bài toán 2: Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số: $y=-x^4+4x^2-3$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-4x^3+8x$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow -4x^3+8x=0 \Leftrightarrow 4x(-x^2+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=0\\-x^2+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu trên, hàm số đồng biến trên: $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt{2}\right)$, hàm số nghịch biến trên: $\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Bài toán 3: Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số: $y=\dfrac{3-2x}{x+7}$.

Lời giải:

Ta có: $y=\dfrac{3-2x}{x+7}=\dfrac{-2x+3}{x+7}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-7\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{(-2).7-1.3}{(x+7)^2}=\dfrac{-17}{(x+7)^2}<0, \forall x\in \mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-7\}$.

Bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu trên, hàm số luôn nghịch biến trên: $(-\infty;-7)$ và $(-7;+\infty)$.

Bài toán 4: Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số: $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}, \forall x\in\mathrm{D}$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}=0 \Leftrightarrow -x^2-4x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu, hàm số nghịch biến trên: $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty)$, hàm số đồng biến trên $(-5;-2)$ và $(-2;1)$.

Bài toán 5: Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số: $y=(4-3x)\sqrt{6x^2+1}$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3\sqrt{6x^2+1}+\dfrac{6x(4-3x)}{\sqrt{6x^2+1}}=\dfrac{-36x^2+24x-3}{\sqrt{6x^2+1}}$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{-36x^2+24x-3}{\sqrt{6x^2+1}}=0 \Leftrightarrow -36x^2+24x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1}{6} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu, hàm số đã cho đồng biến trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{6}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, hàm số nghịch biến trên: $\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài toán 6: Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số: $y=\sqrt{x^2-2x}$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi: $x^2-2x\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ x\ge 2 \end{array}\right. \Rightarrow$ Tập xác định: $\mathrm{D}=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

Ta có: $y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}, \forall x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. Hàm số không có đạo hàm tại: $x=0; x=2$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	‖				‖	$+$	

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu, hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Bài toán 7: Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số: $y = x - \sin x$, $x \in [0;\pi]$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[0;\pi]$.

Ta có: $y' = 1 - \cos x$.

Trên đoạn $[0;\pi]$: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;\pi] \\ 1 - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;\pi] \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;\pi] \\ x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng xét dấu y':

x	0		π
y'		$+$	

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu, hàm số đã cho đồng biến trên $[0;\pi]$.

Bài toán 8: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số: $y = 2\sin x + \cos 2x$, $x \in [0;\pi]$

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[0;\pi]$.

Ta có: $y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x - 4\cos x.\sin x = 2\cos x(1 - 2\sin x), x \in [0;\pi]$.

Trên đoạn $[0;\pi]$: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;\pi] \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của y':

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Kết luận: Dựa vào xét dấu trên, hàm số đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right)$, hàm số nghịch biến trên: $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{5\pi}{6};\pi\right)$.

Bài toán 9: Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số: $y=\left|x^2-2x-3\right|$.

Lời giải:

Ta có: $y=\left|x^2-2x-3\right|=\begin{cases} x^2-2x-3 & khi \quad x\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty) \\ -x^2+2x+3 & khi \quad x\in(-1;3) \end{cases}$

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Tìm $y'=\begin{cases} 2x-2 & \text{khi} \quad x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty) \\ -2x+2 & \text{khi} \quad x\in(-1;3) \end{cases}$.

Hàm số không có đạo hàm tại $x=-1$ và $x=3$.

Ta lại có: Trên khoảng $(-1;3)$: $y'=0 \Leftrightarrow x=1$.

Trên khoảng $(-\infty;-1)$: $y'<0$. Trên khoảng $(3;+\infty)$: $y'>0$

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu, hàm số nghịch biến trong các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$, hàm số đồng biến trong các khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

2. Tìm m để hàm số tăng hoặc giảm trên từng khoảng xác định

☆ **Phương pháp**

Nếu $y = f(x,m) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$, $y' = f'(x,m) = 3a^2x^2 + 2bx + c$ có biệt thức Δ

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Nếu $y = f(x,m) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có $y' = f'(x,m) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

- Hàm số đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x,m) > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc > 0$
- Hàm số nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x,m) < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc < 0$

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Tìm tham số m để hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+2)x + 3m - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 3(m+2)$ có $\Delta' = 9 - 9(m+2)$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ 9 - 9(m+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1$.

Kết luận: $m \geq -1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 2: Tìm tham số m để hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1)$ có $\Delta' = 9 + 3.3(m^2 - 1) = 9m^2$

Hàm số luôn giảm trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta' = 9m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.

Kết luận: $m = 0$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 3:

Tìm tham số m để hàm số: $y = \dfrac{1}{3}(3-m)x^3 - (m+3)x^2 + (m+2)x - 3$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

Xét $a=3-m=0 \Leftrightarrow m=3$ khi đó $a\neq 0$ loại $m=3$ vì hàm số bậc 2 với hệ số $a\neq 0$ không đồng biến hoặc không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Xét $a=3-m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 3$

Ta có: $y'=(3-m)x^2-2(m+3)x+(m+2)$ có $\Delta'=(m+3)^2-(3-m)(m+2)=2m^2+5m+3$.

Hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-m>0 \\ \Delta'=2m^2+5m+3\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ -\frac{3}{2}\leq m\leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\leq m\leq -1$.

Kết luận: $-\frac{3}{2}\leq m\leq -1$ thì hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 4:

Tìm tham số m để hàm số: $y=\dfrac{mx-2}{x-m+1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{m-1\}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định

$\Leftrightarrow y'=\dfrac{-m^2+m+2}{(x-m+1)^2}<0, \forall x\neq m-1 \Leftrightarrow -m^2+m+2<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$.

Kết luận: $m\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ thì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

3. Tìm m để hàm số tăng hay giảm trong khoảng con của $\mathbb{R}$

☆ Phương pháp

Nếu $y' = f'(x) = ax^2 + bx + c$ hoặc $y' = f'(x)$ là một hàm bất kỳ nào khác, mà ta cần $y' = f'(x) \geq 0$ hay $y' = f'(x) \leq 0$ trên khoảng (a,b) hoặc đoạn $[a,b]$ (hoặc trên nửa đoạn hay nửa khoảng nào đó).

Trường hợp 1: Tách được tham số m (Phương pháp cô lập tham số)

- ***Bước 1:*** Tìm miền xác định của $y' = f'(x)$.
- ***Bước 2:*** Độc lập (tách) m (hay biểu thức chứa m) ra khỏi biến x và chuyển m về một vế. Đặt vế còn lại là $g(x)$. Lưu ý khi chuyển vế thành phân thức thì phải để ý điều kiện xác định của biểu thức để khi xét dấu $g'(x)$ ta đưa vào bảng xét dấu $g'(x)$.
- ***Bước 3:*** Tính $g'(x)$. Cho $g'(x) = 0$ và tìm nghiệm.
- ***Bước 4:*** Lập bảng biến thiên của $g'(x)$.
- ***Bước 5:*** Kết luận: "Lớn hơn số lớn – Bé hơn số bé". Nghĩa là: khi ta đặt $m \geq g(x)$ (1) hoặc $m \leq g(x)$ (2) thì dựa vào bảng biến thiên ta sẽ lấy giá trị $m \geq$ số lớn nhất trong bảng biến thiên ứng với (1) hoặc $m \leq$ số nhỏ nhất trong bảng ứng với (2).

Trường hợp 2: Không tách được tham số m. (Phương pháp delta)

$y' = f'(x) = ax^2 + bx + c$

- $\Delta \leq 0$: $y' = f'(x)$ sẽ cùng dấu với a

  • $a > 0$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $(a;b)$.

  • $a < 0$ thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số nghịch biến trên $(a;b)$.

- $\Delta > 0$: $y' = f'(x)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 và đổi dấu khi qua hai nghiệm.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu với a		0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

Lúc đó bài toán đưa về dạng "So sánh hai nghiệm của phương trình bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c = 0$ với 1 số a bất kì ".

$$x_2 > x_1 > a \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - a).(x_2 - a) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2a \end{cases} \qquad x_1 < x_2 < a \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - a).(x_2 - a) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2a \end{cases}$$

$$x_1 < a < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - a).(x_2 - a) < 0 \end{cases}$$

Nếu $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$, $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Tìm điều kiện để hàm số đồng biến hay nghịch biến trên $(x_0;+\infty)$, $(-\infty;x_0)$.

- Hàm số đồng biến trên $(x_0;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc>0\\ -\dfrac{d}{c}\le x_0\end{cases}$, trên $(-\infty;x_0)\Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc>0\\ -\dfrac{d}{c}\ge x_0\end{cases}$
- Hàm số nghịch biến trên $(x_0;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc<0\\ -\dfrac{d}{c}\le x_0\end{cases}$, trên $(-\infty;x_0)\Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc<0\\ -\dfrac{d}{c}\ge x_0\end{cases}$

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Tìm tham số m để hàm số: $y=x^3-2mx^2-(m+1)x+1$ đồng biến trên đoạn $[0;2]$.

Lời giải:

Hàm số $y=x^3-2mx^2-(m+1)x+1$ đồng biến (tăng) trên đoạn $[0;2]$

$\Leftrightarrow y'=3x^2-4mx-m-1\ge 0,\forall x\in[0;2]\Leftrightarrow 3x^2-1\ge m(4x+1),\forall x\in[0;2]$

$\Leftrightarrow m\le\dfrac{3x^2-1}{(4x+1)},\forall x\in[0;2]$.

Đặt $g(x)=\dfrac{3x^2-1}{(4x+1)}$, ta có $g'(x)=\dfrac{12x^2+6x+4}{(4x+1)^2}>0,\forall x\in[0;2]$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	0		2
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$\dfrac{11}{9}$

Dựa vào bảng biến thiên: $m\le -1$ (Vì $m\le g(x)$ nên lấy m nhỏ hơn số nhỏ trong bảng biến thiên).

Bài toán 2:

Tìm tham số m để hàm số: $y=x^3+3x^2+(m+1)x+4m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải:

Hàm số: $y=x^3+3x^2+(m+1)x+4m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

$\Leftrightarrow y'=3x^2+6x+m+1\le 0,\forall x\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow m\le -3x^2-6x-1=g(x),\forall x\in(-1;1)$.

Đặt $g(x)=-3x^2-6x-1$. Ta có $g'(x)=-6x-6$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow -6x-6=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$			
$g(x)$			2	$\searrow$	-10		

Dựa vào bảng biến thiên, để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ thì $m \le -10$.

Bài toán 3: Tìm m để hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m^2 - m$ đồng biến trên nửa khoảng $[2;+\infty)$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$.

Để hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[2;+\infty) \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in [2;+\infty)$

Tam thức bậc hai y' có $\Delta' = 7m^2 - 7m + 7 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên $y' = 0$ có hai nghiệm là:

$x_1 = \dfrac{m+1-\sqrt{\Delta'}}{3}$; $x_2 = \dfrac{m+1+\sqrt{\Delta'}}{3}$.

Vì $x_1 < x_2$ nên $y' \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le x_1 \\ x \ge x_2 \end{array}\right.$.

Suy ra $y' \ge 0, \forall x \in [2;+\infty) \Leftrightarrow x_2 \le 2 \Leftrightarrow \dfrac{m+1+\sqrt{\Delta'}}{3} \le 2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} \le 5 - m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le 5 \\ \Delta' \le (5-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 5 \\ 2m^2 + m - 6 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le m \le \dfrac{3}{2}.$$

Vậy $-2 \le m \le \dfrac{3}{2}$ thỏa YCBT.

Bài toán 4:

Tìm tham số m để hàm số: $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + (m-2)x^2 - m(m-3)x - \dfrac{1}{3}$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -x^2 + 2(m-2)x - m(m-3)$.

Hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2(m-2)x - m(m-3) \le 0, \forall x \in (1;+\infty)$

Ta có $\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = 4 - m$.

Trường hợp 1: $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow 4 - m \le 0 \Leftrightarrow m \ge 4$

Mà $a = -1 < 0$ nên $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y' \le 0, \forall x \in (1;+\infty)$

Vậy $m \geq 4$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$. Khi đó y' có 2 nghiệm $x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu trên, hàm số đã cho nghịch biến trên $(1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-1)(x_2-1) \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 2 < 0 \end{cases}$$

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-2) \\ x_1x_2 = m(m-3) \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} m(m-3) - 2(m-2) + 1 \geq 0 \\ 2(m-2) - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 5 \geq 0 \\ m - 2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \\ m < \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

Vậy $m \leq \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \vee m \geq 4$ thỏa YCBT.

Bài toán 5: Tìm tham số m để hàm số: $y = x + m\cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 1 - m\sin x$.

Hàm số đồng biến trên $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - m\sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m\sin x \leq 1,, \forall x \in \mathbb{R}$ $(*)$

Với $m = 0$ thì $(*)$ luôn đúng.

Với $m > 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \sin x \leq \dfrac{1}{m}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 \leq \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$.

Với $m < 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \sin x \geq \dfrac{1}{m}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \geq \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow -1 \leq m < 0$.

Vậy: $-1 \leq m \leq 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài toán 6: Tìm m để hàm số $y = \dfrac{mx+2}{x+2m}$ đồng biến trên $(-2;+\infty)$.

Lời giải:

Hàm số $y = \dfrac{mx+2}{x+2m}$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-2m\}$, $y' = \dfrac{2m^2-2}{(x+2m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(-2;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 2 > 0 \\ -2m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 1 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy $m > 1$ thỏa YCBT.

Bài toán 7:

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên $(0;\dfrac{\pi}{4})$.

A. $m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$ **B.** $m \le 0$ **C.** $1 \le m < 2$ **D.** $m \ge 2$

(Đề minh họa Kỳ thi THPTQG 2017 của Bộ giáo dục đào tạo)

Lời giải:

Đặt $t = \tan x$ thì với $x \in (0;\dfrac{\pi}{4}) \Rightarrow t \in (0;1)$.

Hàm số đã cho trở thành $y = \dfrac{t-2}{t-m}$, $t \in \left(0;1\right)$, TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \left\{m\right\}$

Ta có $y' = \dfrac{-m+2}{\left(t-m\right)^2}$, $t \in \left(0;1\right)$. Khi đó điều kiện bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -m+2>0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ 1 \le m < 2 \end{array}\right.$.

Ta chọn đáp án A.

4. Tìm m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có độ dài khoảng đồng biến (nghịch biến) bằng l.

✫ Phương pháp

Bước 1: Tính $y' = f'(x)$.

Bước 2: Tìm điều kiện để hàm số có khoảng đồng biến và nghịch biến: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \quad (1)$.

Bước 3: Biến đổi $|x_1 - x_2| = l$ thành $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2 = l^2 \qquad (2)$.

Bước 4: Sử dụng định lý Viét đưa (2) thành phương trình theo m.

Bước 5: Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1:

Tìm tham số m để hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + m$ và $\Delta' = 9 - 3m$

- Với $\Delta' = 9 - 3m \le 0 \Leftrightarrow m \ge 3$

  Lúc đó $y' \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số tăng trên $\mathbb{R}$, không thỏa YCBT.

- Với $\Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$

  Khi đó $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$) và hàm số nghịch biến trong đoạn $[x_1; x_2]$ với độ dài $l = |x_1 - x_2|$

  Theo định lý Vi – ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1x_2 = \dfrac{m}{3} \end{cases} \quad (m < 3)$

  Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 .

  $\Leftrightarrow l = |x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow 4 - \dfrac{4}{3}m = 1 \Rightarrow m = \dfrac{9}{4}$ (thỏa ĐK).

Vậy $m = \dfrac{9}{4}$ thỏa YCBT.

Bài toán 2:

Tìm tham số m để hàm số: $y = -x^3 + x^2 - (2 - m)x + 1$ đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 2

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

$y' = -3x^2 + 2x - (2 - m)$ có $\Delta' = -5 + m$.

Nếu $\Delta' = -5 + m \le 0 \Leftrightarrow m \le 5$ thì $y' \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số tăng trên $\mathbb{R}$, không thỏa YCBT.

Nếu $\Delta' = -5 + m > 0 \Leftrightarrow m > 5$. Khi đó $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$) và hàm số nghịch biến trong đoạn $\left[x_1; x_2\right]$ với độ dài $l = \left|x_1 - x_2\right|$.

Theo định lý Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2}{3} \\ x_1 x_2 = \dfrac{2-m}{3} \end{cases} \quad (m > 5)$

Hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 2

$\Leftrightarrow l = \left|x_1 - x_2\right| = 2 \Leftrightarrow \left(x_1 - x_2\right)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{9} - 4.\frac{2-m}{3} = 4 \Leftrightarrow m = \frac{14}{3} \text{(thỏa)}.$$

Vậy $m = \dfrac{14}{3}$ thỏa YCBT.

5. Tìm tập nghiệm của phương trình

☆ Phương pháp

Phương pháp 1

Bước 1: Đưa phương trình về dạng: $f(x)=k$, (1).

Bước 2: Xét hàm số $y=f(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số đồng biến (nghịch biến).

Bước 3: Lúc đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=x_0$ (mà ta nhẩm được).

Phương pháp 2

Bước 1: Đưa phương trình về dạng: $f(x)=g(x)$, (1)

Bước 2: Xét hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Dùng lập luận để khẳng định $y=f(x)$ là hàm đồng biến (nghịch biến) và $y=g(x)$ là hàm nghịch biến (đồng biến).

Bước 3: Lúc đó nếu phương trình (1) có nghiệm $x=x_0$ là nghiệm duy nhất.

Phương pháp 3

Bước 1: Đưa phương trình về dạng $f(u)=f(v)$, (1)

Bước 2: Xét hàm số : $y=f(t)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số đồng biến (nghịch biến).

Bước 3: Khi đó từ (1) suy ra : $u=v$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Giải phương trình: $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 4x-1\ge 0 \\ 4x^2-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \frac{1}{2}$

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hàm số $y=f\left(x\right)=\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}$ và $y=1$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}$, tập xác định : $D=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

Đạo hàm $f\left(x\right)'=\frac{2}{\sqrt{4x-1}}+\frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}>0, \forall x>\frac{1}{2}$

Suy ra hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ và $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

Do đó hàm số có nghiệm duy nhất và đó là $x=\frac{1}{2}$.

Bài toán 2: Giải phương trình: $\sqrt{3+\sin x}-\sqrt{2-\sin x}=1$.

Lời giải:

Đặt $t = \sin x$, điều kiện $|t| \le 1$

Khi đó phương trình có dạng : $\sqrt{3+t} - \sqrt{2-t} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3+t} = 1 + \sqrt{2-t} \quad (*)$

Xét hàm số :

- Hàm số $f(t) = \sqrt{3+t}$ là hàm đồng biến trên $D = [-1,1]$
- Hàm số $g(t) = 1 + \sqrt{2-t}$ là hàm nghịch biến trên $D = [-1,1]$

Từ (*) suy ra : $f(t) = g(t)$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất

Ta thấy $t = 1$ là nghiệm phương trình $(*)$, do đó: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Bài toán 3: Giải phương trình: $\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x - x^2 - 1} = 2 \ (*)$

Lời giải:

Điều kiện: $x^2 - 3x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 2 \end{array}\right.$

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \ge 0 \Rightarrow u^2 = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow 3x - x^2 - 1 = 1 - u^2$

Khi đó : (*) $\Leftrightarrow \log_3(u+2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1-u^2} = 2 \qquad (**)$

Xét hàm số: $f(x) = \log_3(x+2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1-x^2}$

- Miền xác định: $D = [0, +\infty)$
- Đạo hàm : $f'(x) = \frac{1}{(x+2)\ln 3} + \frac{1}{5}.2x.5^{x^2}.\ln 3 > 0, \forall x \in D$

Suy ra hàm số tăng trên D

Mặc khác: $f(1) = 2$. Do đó (**) có dạng : $f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$

Với $u = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài toán 4: Giải phương trình: $2^{x-1} - 2^{x^2 - x} = (x-1)^2$

Lời giải:

Biến đổi phương trình về dạng : $2^{x-1} + x - 1 = 2^{x^2 - x} + x^2 - x \qquad (*)$

Xét hàm số $f(x) = 2^t + t$

- Miền xác định : $D = R$
- Đạo hàm : $f'(t) = \ln 2.2^t + 1 > 0 \quad \forall t \in D$

Suy ra hàm số đồng biến

Từ (*) có dạng $f(x-1)=f(x^2-x)\Leftrightarrow x-1=x^2-x\Leftrightarrow x=1$

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình .

Bài toán 5: Giải phương trình: $e^{|8\sin x-5|}-e^{|4\sin x-1|}=\dfrac{1}{|8\sin x-5|}-\dfrac{1}{|4\sin x-1|}$

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Biến đổi phương trình về dạng: $e^{|8\sin x-5|}-\dfrac{1}{|8\sin x-5|}=e^{|4\sin x-1|}-\dfrac{1}{|4\sin x-1|}$ (*)

Xét hàm số $f(t)=e^t-\dfrac{1}{t}$

- Miền xác định : $D=R$
- Đạo hàm : $f'(x)=e^t+\dfrac{1}{t^2}>0,\ \forall x\in D$

Suy ra hàm số đồng biến.

Từ (*) có dạng : $f(|8\sin x-5|)=f(|4\sin x-1|)\Leftrightarrow |8\sin x-5|=|4\sin x-1|$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8\sin x-5=4\sin x-1\\8\sin x-5=1-4\sin x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\\sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\vee x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$$

Bài toán 6: Giải phương trình: $2x^3+x^2-3x+1=2(3x-1)\sqrt{3x-1}\quad(1)$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{3}$.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow 2x^3+x^2+1=2\left(\sqrt{3x-1}\right)^3+\left(\sqrt{3x-1}\right)^2+1\Leftrightarrow f(x)=f\left(\sqrt{3x-1}\right)$.

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t^2+1$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=6t^2+2t>0,\forall t\in(0;+\infty)\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$$\Rightarrow f(x)=f\left(\sqrt{3x-1}\right)\Leftrightarrow x=\sqrt{3x-1}\Leftrightarrow x^2=3x-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}>\dfrac{1}{3}\quad(N)\\x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}>\dfrac{1}{3}\quad(N)\end{array}\right..$$

Bài toán 7: Giải phương trình: $2x^3+7x^2+5x+4=2(3x-1)\sqrt{(3x-1)}\quad(2)$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge\frac{1}{3}$.

Đặt $y=\sqrt{3x-1}\ge0$. Khi đó: $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}2x^3+7x^2+5x+4=2y^3 & (3)\\ 3x-1=y^2 & (4)\end{cases}$.

Cộng vế theo vế của (3) cho (4), ta được: $2(x+1)^3+(x+1)^2=2y^3+y^2\Leftrightarrow f(x+1)=f(y)$.

Xét hàm số: $f(t)=2t^3+t^2$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

$f'(t)=6t^2+2t>0,\forall t\in(0;+\infty)\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow f(x+1)=f(y)\Leftrightarrow x+1=y$.

Thay $y=x+1$ vào (3), ta được: $2x^3+6x^2+6x+2=2x^3+7x^2+5x+4\Leftrightarrow x^2-x+2=0$.

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 8: Giải phương trình: $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$.

Lời giải:

Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Đặt $y=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$. Khi đó, phương trình đã cho được viết lại thành h

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-4x^2-5x+6=y\\ 7x^2+9x-4=y^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-4x^2-5x+6=y\\ y^3+y=x^3+3x^2+4x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-4x^2-5x+6=y\\ y^3+y=(x+1)^3+x+1\quad(*)\end{cases}\ (a)$$

Khi đó, $(*)$ có dạng: $f(y)=f(x+1)\quad(**)$.

Xét hàm số: $f(t)=t^3+t,\forall t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lúc này, $(**)\Leftrightarrow y=x+1$.

Và hệ phương trình $(a)\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-4x^2-5x+6=y\\ y=x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-4x^2-6x+5=0\\ y=x+1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt5}{2}\end{array}\right.$.

Bài toán 9: Giải phương trình: $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0\quad(1)$.

Lời giải:

Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Lúc này phương trình $(1)\Leftrightarrow(-3x)\left(2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right)=(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)\quad(2)$.

Đặt $u=-3x$; $v=2x+1$ với $u,\ v>0$.

Khi đó ta có $\left(2\right) \Leftrightarrow u\left(2+\sqrt{u^2+3}\right)=v\left(2+\sqrt{v^2+3}\right) \quad \left(3\right)$.

Xét hàm: $f\left(t\right)=2t+\sqrt{t^4+3t^2}$ liên tục trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $f'(t)=2+\dfrac{2t^3+3t}{\sqrt{t^4+3t^2}}>0;\forall t>0 \Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Khi đó phương trình $\left(3\right) \Leftrightarrow f\left(u\right)=f\left(v\right) \Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow -3x=2x+1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$.

Vậy $x=-\dfrac{1}{5}$ là nghiệm của phương trình.

6. Tìm tập nghiệm của bất phương trình

✩ Phương pháp

Phương pháp 1

Bước 1: Đưa phương trình về dạng : $f(x) > k \quad (1)$.

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số đồng biến (nghịch biến).

Bước 3: Từ (1) ta thấy $f(x) > f(\alpha)$

Bước 4: Dựa vào định nghĩa về đơn điệu suy ra $x > \alpha$ nếu hàm số đồng biến hay $x < \alpha$ nếu hàm số nghịch biến.

Phương pháp 2

Bước 1: Đưa phương trình về dạng : $f(u) > f(v) \quad (1)$

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số đồng biến (nghịch biến).

Bước 3: Khi đó từ (1) suy ra: $u > v$ nếu đồng biến , $u < v$ nếu nghịch biến.

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3} \ge 4$.

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge \frac{1}{5}$.

Xét hàm số: $y = \sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+3}} > 0, \forall x > \frac{1}{5} \Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

Mặt khác: $f(1) = 4$. Khi đó bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow f(x) \ge f(1) \Leftrightarrow x \ge 1$.

Vậy $x \ge 1$ là nghiệm của bpt đã cho.

Bài toán 2: Giải bất phương trình: $\sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} > 5 \quad (1)$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+9 \ge 0 \\ 2x+4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -2$

Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4}$ liên tục trên nửa khoảng $[-2; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+9}} + \frac{1}{\sqrt{2x+4}} > 0, \forall x > -2 \Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên $[-2; +\infty)$.

Mặt khác: $f(0) = 5$,do đó :

- Nếu $x > 0$ thì $f(x) > f(0) \Leftrightarrow \sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} > 5$, nên $x > 0$ là nghiệm

- Nếu $-2 \le x \le 0$ thì $f(x) \le f(5) \Leftrightarrow \sqrt{x+9}+\sqrt{2x+4} \le 5$ nên $-2 \le x \le 0$ không là nghiệm.

Vậy với $x > 0$ là nghiệm của (1)

Bài toán 3: Giải bất phương trình: $3\sqrt{3-2x}+\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}-2x \le 6 \quad (1)$

Lời giải:

Điều kiện: $\dfrac{1}{2} < x \le \dfrac{3}{2}$.

Bất phương trình: $(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{3-2x}+\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}} \le 2x+6 \Leftrightarrow f(x) \le g(x) \quad (*)$.

Xét hàm số: $f(x)=3\sqrt{3-2x}+\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}$ liên tục trên nửa khoảng $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Ta có: $y'=f(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{3-2x}}-\dfrac{5}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}<0$; $\forall x \in \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right] \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Hàm số $g(x)=2x+6$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=g(1)=8$.

- Nếu $x>1 \Rightarrow f(x)<g(1)=8=g(1)<g(x) \Rightarrow (*)$ đúng.
- Nếu $x<1 \Rightarrow f(x)>f(1)=8=g(1)>g(x) \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

Kết hợp với điều kiện ta chọn nghiệm: $1 \le x \le \dfrac{3}{2}$.

Bài toán 4: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}<2\sqrt{3}+\sqrt{4-x} \quad (1)$.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^3+3x^2+6x+16 \ge 0 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 4$.

Lúc đó: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}<2\sqrt{3} \Leftrightarrow f(x)<2\sqrt{3} \quad (2)$.

Xét hàm số: $f(x)=\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{3(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}>0, \forall x \in (-2;4)$

$\Rightarrow f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(-2;4)$ và có $f(1)=2\sqrt{3}$ nên: $(2) \Leftrightarrow f(x)<f(1) \Leftrightarrow x<1$.

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của bất phương trình là: $-2 \le x < 1$.

Bài toán 5: Giải bất phương trình: $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6} \le 4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2} \quad (1)$.

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Khi đó, phương trình: $(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right) \le 4 \quad (2)$.

Với $\sqrt{2x-1}-3 \le 0 \Leftrightarrow x \le 5 \Rightarrow (2)$: luôn đúng.

Với $x > 5$:

Xét hàm số: $f(x) = \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)$ liên tục trên khoảng $(5;+\infty)$.

Ta có: $f'(x) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+6}}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)+\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{2x-1}} > 0; \forall x > 5$.

$\Rightarrow f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$ và có $f(7) = 4$. Do đó: $(2) \Leftrightarrow f(x) \le f(7) \Leftrightarrow x \le 7$.

Kết hợp với điều kiên, nghiệm của bất phương trình là: $\dfrac{1}{2} \le x \le 7$.

Bài toán 6: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11} > \sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-2x+3 \ge 0 \\ x^2-6x+11 \ge 0 \\ 3-x \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 3 \quad (*)$

Biến đổi bất phương trình thành: $\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x-1} > \sqrt{x^2-6x+11}+\sqrt{3-x}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2}+\sqrt{x-1} > \sqrt{(3-x)^2+2}+\sqrt{3-x} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2+2}+\sqrt{t}$ trên $[1;3]$

Ta có: $f'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{t}} > 0,\ \forall t \in [1;3]$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1,3]$

Từ (1) ta có $f(x-1) > f(3-x) \Leftrightarrow x-1 > 3-x \Leftrightarrow x > 2$

So điều kiện nghiệm bất phương trình là $2 < x \le 3$.

7. Giải hệ phương trình

☆ Phương pháp

Bước 1: Đặt điều kiện (nếu có).

Bước 2: Biến đổi 1 hoặc kết hợp nhiều phương trình của hệ về dạng $f(u)=f(v)$.

Bước 3: Khảo sát hàm số $f(t)$.

Nhận xét hàm số luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến rồi từ đó suy ra $u=v$.

Bước 4: Giải phương trình $u=v$ và kết luận nghiệm.

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4 & (1)\\ \sqrt{2y+3}+\sqrt{4-x}=4 & (2)\end{cases}$.

Lời giải:

Điều kiện: $-\dfrac{3}{2}\le x,\ y\le 4$.

Lấy (1) trừ (2) ta được: $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=\sqrt{2y+3}-\sqrt{4-y}\quad(3)$.

Xét hàm số: $f(t)=\sqrt{2t+3}-\sqrt{4-t}$ liên tục trên đoạn $\left[-\dfrac{3}{2};4\right]$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2t+3}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-t}}>0$; $\forall x\in\left[-\dfrac{3}{2};4\right]\Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{3}{2};4\right)$.

$\Rightarrow(3)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay $x=y$ vào (1). Giải phương trình ta tìm được: $\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\dfrac{11}{9}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=3\\ y=\dfrac{11}{9}\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ là: $S=(x;y)=\left\{(3;3),\left(\dfrac{11}{9};\dfrac{11}{9}\right)\right\}$.

Bài toán 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(4x^2+1)x=(1-y)\sqrt{5-2y} & (1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 & (2)\end{cases}$ $(ĐH-A.2010)$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x\le\dfrac{3}{4}\\ y\le\dfrac{5}{3}\end{cases}$

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\Leftrightarrow(4x^2+1)2x+2(y-3)\sqrt{5-2y}=0$

$$\Leftrightarrow\left[(2x)^2+1\right](2x)=(6-2y)\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\left[(2x)^2+1\right](2x)=(5-2y+1)\sqrt{5-2y}$$

$$\Leftrightarrow \left[(2x)^2+1\right](2x)=\left[\left(\sqrt{5-2y}\right)^2+1\right]\left(\sqrt{5-2y}\right) \text{ có dạng } f(2x)=f\left(\sqrt{5-2y}\right).$$

Xét hàm số $f(t)=t(t^2+1)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $f(2x)=f\left(\sqrt{5-2y}\right) \Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ (2x)^2=5-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le \dfrac{3}{4} \\ y=\dfrac{5-4x^2}{2} \end{cases}$.

Lúc này, phương trình $(2) \Leftrightarrow 4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}=7 \quad (3)$.

Xét hàm số: $g(x)=4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7$ liên tục trên khoảng $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$.

Ta có: $g'(x)=4x(4x^2-3)-\dfrac{4}{\sqrt{3-4x}}<0, \forall x\in\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$

$\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$ và có $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow (3)$ có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=2$.

So với điều kiện, nghiệm của hệ là: $S=(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Bài toán 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x=y^3-3y & (1) \\ x^6+y^6=1 & (2) \end{cases}$.

Lời giải:

Từ (1) và $(2) \Rightarrow$ Điều kiện: $\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -1\le y\le 1 \end{cases}$.

Từ $(1) \Leftrightarrow f(x)=f(y) \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có: $f'(t)=3(t^2-1)\le 0; \forall t\in[-1;1] \Rightarrow f(t)$ luôn nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$ nên $(*) \Leftrightarrow x=y$.

Thay $x=y$ vào (2), ta được nghiệm của hệ là: $x=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$.

Bài toán 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2x=y & (1) \\ y^3+2y=x & (2) \end{cases}$

Lời giải:

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=3t^2+2>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} f(x) = y & (3) \\ f(y) = x & (4) \end{cases}$.

Nếu: $x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow y > x$ (do (3) và (4) dẫn đến mâu thuẫn).

Nếu: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow y < x$ (mâu thuẫn).

$\Rightarrow x = y$

Thay $x = y$ vào (1), ta được: $x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (do $x^2 + 1 > 0, \forall x$).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (0; 0)$.

B. THỦ THUẬT CASIO GIẢI ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN

I. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Tính đồng biến nghịch biến : Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng I. Nếu $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in I$ (hoặc $f'(x)\le 0$ với mọi $x\in I$) và $f'(x)=0$ tại hữu hạn điểm của I thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I.

Các cách sử dụng Casio giải đồng biến, nghịch biến

Cách 1 : Sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio . Quan sát bảng kết quả nhận được , khoảng nào làm cho hàm số luôn tăng thì là khoảng đồng biến, khoảng nào làm cho hàm số luôn giảm là khoảng ngịch biến.

Cách 2 : Tính đạo hàm, thiết lập bât phương trình đạo hàm, cô lập m và đưa về dạng $m\ge f(x)$ hoặc $m\le f(x)$. Tìm Min, Max của hàm $f(x)$ rồi kết luận.

Cách 3 : Tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm. Sử dụng tính năng giải bất phương trình INEQ của máy tính Casio (đôi với bất phương trình bậc hai, bậc ba)

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Hỏi hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào ?

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ **D.** $(-\infty;0)$

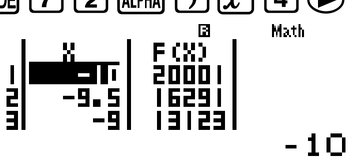
[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

Lời giải:

Cách 1 : CASIO MODE 7

Để kiểm tra đáp án A ta sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 với thiết lập Start -10 End $-\frac{1}{2}$ Step 0.5

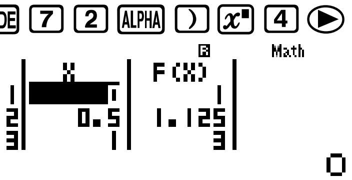
MODE 7 2 ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 4 ▶ + 1 = = − 1 0 = − 0 . 5 = 0 . 5 =



Ta thấy ngay khi x càng tăng thì $f(x)$ càng giảm $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

Tương tự như vậy, để kiểm tra đáp án B ta cũng sử dụng chức năng MODE 7 với thiết lập Start 0 End 9 Step 0.5

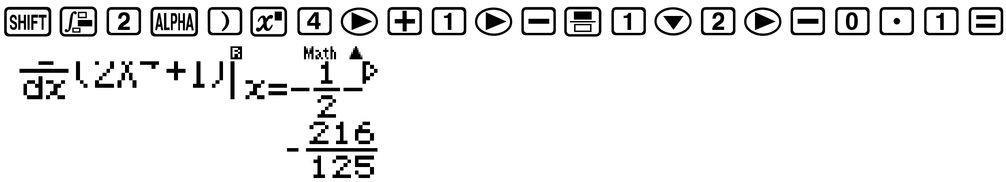
MODE 7 2 ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 4 ▶ + 1 = = 0 = 9 = 0 . 5 =



Ta thấy khi x càng tăng thì tương ứng $f\left(x\right)$ càng tăng $\Rightarrow$ Đáp án **B** đúng

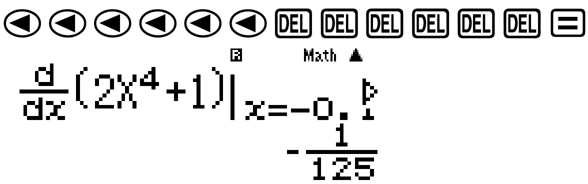
<u>Cách 2</u> : CASIO ĐẠO HÀM

Kiểm tra khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ta tính $f'\left(-\dfrac{1}{2}-0.1\right)$



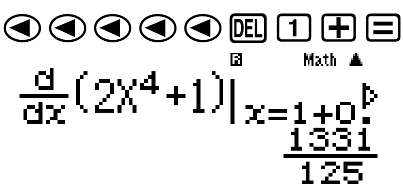
Đạo hàm ra âm (hàm số nghịch biến)$\Rightarrow$ Giá trị $-\dfrac{1}{2}-0.1$ vi phạm $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

Kiểm tra khoảng $\left(-\infty;0\right)$ta tính $f'\left(0-0.1\right)$



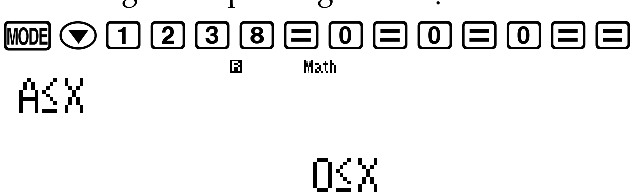
Điểm $0-0.1$ vi phạm $\Rightarrow$ Đáp án **D** sai và **C** cũng sai $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

Xác minh thêm 1 lần nữa xem B đúng không . Ta tính $f'\left(1+0.1\right)=\dfrac{1331}{125}$ $\Rightarrow$ Chính xác



<u>Cách 3</u> : CASIO MODE 5 INEQ

Hàm số bậc 4 khi đạo hàm sẽ ra bậc 3. Ta nhẩm các hệ số này trong đầu. Sử dụng máy tính Casio để giải bất phương trình bậc 3



Rõ ràng $x\geq 0$

<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận

Tính đạo hàm $y'=8x^3$

Để hàm số đồng biến thì $y'\geq 0\Leftrightarrow x^3\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$

<u>Bình luận</u> :

Khi sử dụng Casio ta phải để ý : Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(a;b\right)$ thì sẽ **luôn tăng** khi x tăng. Nếu lúc tăng lúc giảm thì không đúng .

Bài toán 2: Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ đồng biến trên tập xác định khi giá trị của m là :

A. $m \le 1$ **B.** $m \ge 3$ **C.** $-1 \le m \le 3$ **D.** $m < 3$

[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Lời giải:

Cách 1 : CASIO

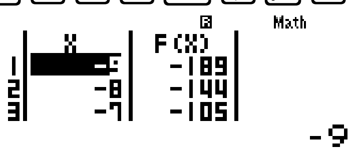
Để giải các bài toán liên quan đến tham số m thì ta phải cô lập m

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow y' \ge 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + m \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -3x^3 - 6x = f(x)$

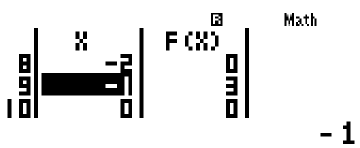
Vậy để hàm số y đồng biến trên tập xác định thì $m \ge f(x)$ hay $m \ge \max f(x)$ với mọi x thuộc R

Để tìm Giá trị lớn nhất của $f(x)$ ta vẫn dùng chức năng MODE 7 nhưng theo cách dùng của kỹ thuật Casio tìm min max

MODE 7 − 3 ALPHA) x^2 − 6 ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 3 khi $x = -1$



Vậy $m \ge 3$

Cách tham khảo : Tự luận

Tính đạo hàm $y' = 3x^2 + 6x + m$

Để hàm số đồng biến thì $y' \ge 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + m \ge 0$ với mọi $x \in R$ (*)

$\Leftrightarrow \Delta' \le 0 \Leftrightarrow 9 - 3m \le 0 \Leftrightarrow m \ge 3$

Bình luận :

Kiến thức (*) áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc 2 : "Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có $\Delta \le 0$ thì dấu của tam thức bậc 2 luôn cùng dấu với a" .

Bài toán 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

A. $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ 1 \le m < 2 \end{array}\right.$ **B.** $m < 2$ **C.** $1 \le m < 2$ **D.** $m \ge 2$

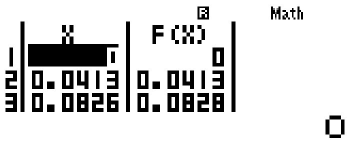
[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

Lời giải:

Cách 1 : CASIO

Để bài toán dễ nhìn hơn ta tiến hành đặt ẩn phụ : Đặt $\tan x = t$. Đổi biến thì phải tìm miền giá trị của biến mới. Để làm điều này ta sử dụng chức năng MODE 7 cho hàm $f(x) = \tan x$.

SHIFT MODE 4 MODE 7 tan ALPHA)) = = 0 = SHIFT $\times 10^x$ ÷ 4 = (SHIFT $\times 10^x$ ÷ 4) ÷ 1 9 =



Ta thấy $0 \le \tan x \le 1$ vậy $t \in (0;1)$

Bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = \dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

Tính đạo hàm : $y' = \dfrac{(t-m)-(t-2)}{(t-m)^2} = \dfrac{2-m}{(t-m)^2}$

$y' > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-m}{(t-m)^2} > 0 \Leftrightarrow m < 2$ (1)

Kết hợp điều kiện xác định $t - m \ne 0 \Leftrightarrow m \ne t \Rightarrow m \notin (0;1)$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ 1 \le m < 2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Đáp án **A** là chính xác

Bình luận :

Bài toán chứa tham só m ở dưới mẫu thường đánh lừa chúng ta. Nếu không tỉnh táo chúng ta sẽ chọn luôn đáp án **B**

Tuy nhiên điểm nhấn của bài toán này là phải kết hợp điều kiện ở mẫu số. $m \ne t$ mà $t \in (0;1)$ vậy $m \notin (0;1)$.

Bài toán 4:

Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = \sin x - \cos x + 2017\sqrt{2}mx$ đồng biến trên R

A. $m \ge 2017$ **B.** $m < 0$ **C.** $m \ge \dfrac{1}{2017}$ **D.** $m \ge -\dfrac{1}{2017}$

[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Lời giải:

Cách 1 : CASIO

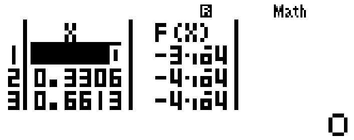
Tính đạo hàm $y' = \cos x + \sin x + 2017\sqrt{2}m$

$y' \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{-\sin x - \cos x}{2017\sqrt{2}} = f(x)$

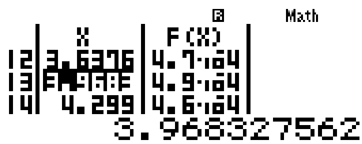
Để hàm số luôn đồng biến trên R thì $m \ge f(x)$ đúng với mọi $x \in R$ hay $m \ge \max f(x)$

Để tìm giá trị lớn nhất của hàm số ta lại sử dụng chức năng MODE 7. Vì hàm $f\left(x\right)$ là hàm lượng giác mà hàm lượng giác $\sin x, \cos x$ thì tuần hoàn với chu kì 2π vậy ta sẽ thiết lập Start 0 End 2π Step $\dfrac{2\pi}{19}$

SHIFT MODE 4 MODE 7 ▭/▭ − sin ALPHA)) − cos ALPHA)) ▼ 2 0 1 7 √▭ 2 = = 0 = 2 SHIFT ×10ˣ = 2 SHIFT ×10ˣ ÷ 1 9 =



Quan sát bảng giá trị của $F\left(X\right)$ ta thấy $f\left(\max\right) = f\left(3.9683\right) \approx 5.10^{-4}$



Đây là 1 giá trị $\approx \dfrac{1}{2017}$ vậy $m \ge \dfrac{1}{2017}$ $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận

Tính đạo hàm $y' = \cos x + \sin x + 2017\sqrt{2}m$. $y' \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{-\sin x - \cos x}{2017\sqrt{2}} = f\left(x\right)$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì $\left(-\sin x - \cos x\right)^2 \le \left(\left(-1\right)^2 + \left(-1\right)^2\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 2$

$\Rightarrow -\sqrt{2} \le \left(-\sin x - \cos x\right) \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow \dfrac{-\sqrt{2}}{2017\sqrt{2}} \le f\left(x\right) \le \dfrac{\sqrt{2}}{2017\sqrt{2}}$

$f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{\sqrt{2}}{2017\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2017}$ $\Rightarrow m \ge f\left(\max\right) = \dfrac{1}{2017}$

<u>Bình luận</u> :

Vì chu kì của hàm $\sin x, \cos x$ là 2π nên ngoài thiết lập Start 0 End 2π thì ta có thể thiết lập Start $-\pi$ End $-\pi$

Nếu chỉ xuất hiện hàm $\tan x$, $\cot x$ mà hai hàm này tuần hoàn theo chu kì π thì ta có thể thiết lập Start 0 End π Step $\dfrac{\pi}{19}$

<u>Bài toán 5:</u> Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. Mệnh đền nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\propto; -1\right)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\propto; 0\right)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; +\propto\right)$

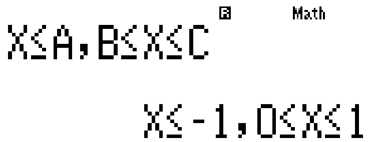
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(1; +\propto\right)$

[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Lời giải:

Giải bất phương trình đạo hàm với lệnh MODE 5 INEQ

MODE ▼ 1 2 3 − 4 = 0 = 4 = 0 = =



Rõ ràng hàm số đồng biến trên miền $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài toán 6: Trong các hàng số sau, hãy chỉ ra hàm số giảm (nghịch biến) trên R

A. $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ **B.** $y=\left(\frac{5}{3e}\right)^{-x}$ **C.** $y=(\pi)^{3x}$ **D.** $y=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x$

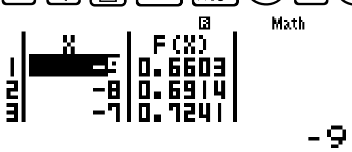
[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Lời giải:

Hàm số ngịch biến trên R tức là luôn giảm

Kiểm tra tính nghịch biến $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ của hàm với chức năng MODE 7 Start -9 End 10 Step 1

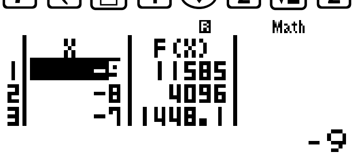
MODE 7 (▭/▭ SHIFT x10ˣ ▼ 3 ▶) x■ ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



Ta thấy $f(x)$ luôn tăng $\Rightarrow$ A sai

Tương tự như vậy , với hàm $y=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x$ ta thấy $f(x)$ luôn giảm $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

MODE 7 (▭/▭ 1 ▼ 2 √▭ 2 ▶ ▶) x■ ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



Bài toán 7: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{(m-1)x+1}{2x+m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

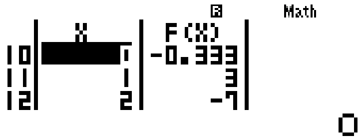
A. $m<2$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$ **C.** $m\neq 2$ **D.** $-1<m<2$

[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Lời giải:

Chọn $m=-3$. Khảo sát hàm $y=\frac{(-3-1)x+1}{x-3}$ với chức năng MODE 7

MODE 7 ▭/▭ (− 3 − 1) ALPHA) + 1 ▼ 2 ALPHA) − 3 = = − 9 = 1 0 =
1 =



Ta thấy hàm số lúc tăng lúc giảm $\Rightarrow$ $m=-3$ sai $\Rightarrow$ **A, B, C** đều sai

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

<u>Chú ý</u> : Việc chọn m khéo léo sẽ rút ngắn quá trình thử đáp án

<u>Bài toán 8:</u> Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m-\sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$

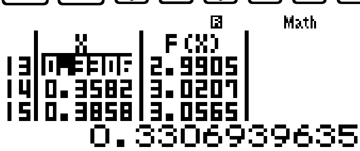
A. $m\ge\dfrac{5}{2}$ **B.** $m\le\dfrac{5}{2}$ **C.** $m\le\dfrac{5}{4}$ **D.** $m\ge\dfrac{5}{4}$

[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

<u>Lời giải:</u>

Chọn $m=3$. Khảo sát hàm $y=\dfrac{3-\sin x}{\cos^2 x}$ với chức năng MODE 7

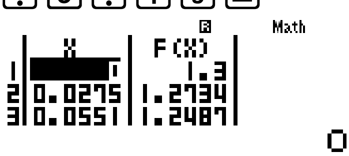
SHIFT MODE 4 MODE 7 ▭ 3 − sin ALPHA)) ▼ cos ALPHA)) x^2 = = 0 = SHIFT $\times10^x$ ÷ 6 = SHIFT $\times10^x$ ÷ 6 ÷ 1 9 =



Ta thấy hàm số lúc tăng lúc giảm $\Rightarrow$ $m=3$ sai $\Rightarrow$ **A, D** đều sai

Chọn $m=1.3$. Khảo sát hàm $y=\dfrac{1.3-\sin x}{\cos^2 x}$ với chức năng MODE 7

MODE 7 ▭ 1 • 3 − sin ALPHA)) ▼ cos ALPHA)) x^2 = = 0 = SHIFT $\times10^x$ ÷ 6 = SHIFT $\times10^x$ ÷ 6 ÷ 1 9 =



Ta thấy hàm số luôn $\Rightarrow$ $m=1.3$ đúng $\Rightarrow$ **B** là đáp số chính xác (Đáp án **C** không chứa 1.3 nên sai)

<u>Bài toán 9:</u> Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+m\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

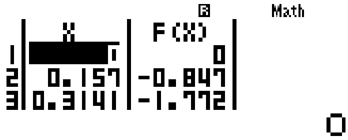
A. $m>0$ **B.** $m<\dfrac{3}{2}$ **C.** $m\ge\dfrac{3}{2}$ **D.** $m>\dfrac{3}{2}$

[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

<u>Lời giải:</u>

Chọn $m=5$. Khảo sát hàm $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+5\sin x$ với chức năng MODE 7

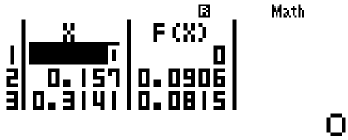
MODE 7 2 sin ALPHA)) $x^{■}$ 3 ▶ − 3 sin ALPHA)) x^2 − 5 sin ALPHA)) = = 0 =
SHIFT $\times10^x$ ÷ 2 = SHIFT $\times10^x$ ÷ 2 0 =



Ta thấy hàm số luôn giảm $\Rightarrow$ $m=-5$ sai $\Rightarrow$ **B** sai

Chọn $m=1$. Khảo sát hàm $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+\sin x$ với chức năng MODE 7

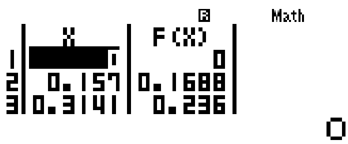
AC ◀ ◀ ◀ ◀ DEL DEL + = = = = =



Ta thấy hàm số lúc tăng lúc giảm $\Rightarrow$ $m=1$ sai $\Rightarrow$ **A** sai

Chọn $m=\frac{3}{2}$. Khảo sát hàm $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+\frac{3}{2}\sin x$ với chức năng MODE 7

AC ◀ ◀ ◀ ◀ (3 ÷ 2) = = = = =



Ta thấy hàm số luôn tăng $\Rightarrow$ $m=\frac{3}{2}$ đúng $\Rightarrow$ **C** sai

Bài toán 10: Tìm m để hàm số $y=mx^3-x^2+3x+m-2$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$?

A. $m=0$ **B.** $m=\pm1$ **C.** $3m\neq\pm1$ **D.** $m=1$

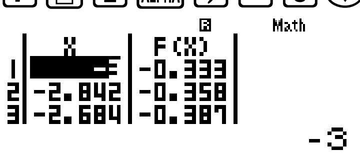
[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]

Lời giải:

Tính đạo hàm $y'=3mx^2-2x+3$. Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 3mx^2-2x+3\geq0 \Leftrightarrow m\geq\frac{2x-3}{3x^2}=f(x)$

Vậy $m\geq f(\max)$ trên miền $(-3;0)$. Tìm $f(\max)$ bằng lệnh MODE 7

MODE 7 ▤ 2 ALPHA) − 3 ▼ 3 ALPHA) x^2 = = − 3 = 0 = 3 ÷ 1 9 =



Ta thấy $f(\max)=0.3333...=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $m\geq\frac{1}{3}$ sai $\Rightarrow$ **D** là đáp số chính xác

Bài toán 11: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{e^x-m-2}{e^x-m^2}$ đồng biến trong khoảng $\left(\ln\frac{1}{4};0\right)$

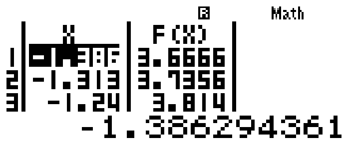
A. $m\in[-1;2]$ **B.** $m\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ **C.** $m\in(1;2)$ **D.** $m\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\cup[1;2)$

[Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017]

Lời giải:

Chọn $m=1$. Khảo sát hàm $y=\dfrac{e^x-1-2}{e^x-1^2}$ với chức năng MODE 7

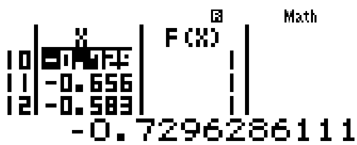
MODE 7 $\frac{\square}{\square}$ ALPHA $\times10^x$ $x^{\blacksquare}$ ALPHA) ▶ − 1 − 2 ▼ ALPHA $\times10^x$ $x^{\blacksquare}$ ALPHA) ▶ − 1 x^2 = = ln 1 ÷ 4) = 0 = − ln 1 ÷ 4) ÷ 1 9 =



Ta thấy hàm số luôn tăng trên $\Rightarrow$ $m=1$ nhận $\Rightarrow$ **A**, **D** có thể đúng

Chọn $m=-1$. Khảo sát hàm $y=\dfrac{e^x-(-1)-2}{e^x-(-1)^2}$ với chức năng MODE 7

AC ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ (− ▶) ▼ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ (− ▶) = = = = =



Ta thấy hàm số luôn không đổi (hàm hằng) $\Rightarrow$ $m=-1$ loại $\Rightarrow$ **A** sai và **D** là đáp số chính xác.

Bài toán 12: Tìm tất cả các giá trị thực m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3.

A. $\left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<0 \end{array}\right.$ **B.** $m>6$ **C.** $m<0$ **D.** $m=9$

[Thi thử chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần 1 năm 2017]

Lời giải:

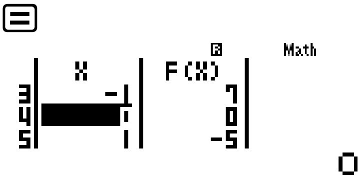
Tính $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$. Theo Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=1-m \\ x_1x_2=m-2 \end{cases}$

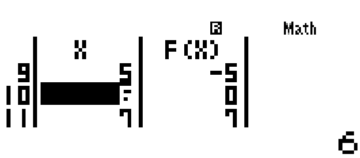
Khoảng nghịch biến lớn hơn 3 $\Rightarrow |x_1-x_2|>3 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2>9 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2-9>0$

$\Leftrightarrow (1-m)^2-4(m-2)-9>0$

Sử dụng MODE 7 với Start -3 End 10 Step 1 để giải bất phương trình trên

MODE 7 (1 − ALPHA)) x^2 − 4 (ALPHA) − 2) − 9 = = − 3 = 1 0 = 1 =





Ta nhận được $\left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ **A** là đáp số chính xác.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sao đây là khẳng đinh đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3x+2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=-x^4+4x^2+10$ và các khoảng sau:

(I): $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$; (II): $\left(-\sqrt{2};0\right)$; (III): $\left(0;\sqrt{2}\right)$;

Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. Chỉ (I). **B.** (I) và (II). **C.** (II) và (III). **D.** (I) và (III).

Câu 4. Cho hàm số $y=\frac{3x-1}{-4+2x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Câu 5. Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $h(x)=x^4-4x^2+4$. **B.** $g(x)=x^3+3x^2+10x+1$.

C. $f(x)=-\frac{4}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3-x$. **D.** $k(x)=x^3+10x-\cos^2 x$.

Câu 6. Hỏi hàm số $y=\frac{x^2-3x+5}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$. **B.** $(-4;2)$.

C. $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$. **D.** $(-4;-1)$ và $(-1;2)$.

Câu 7. Hỏi hàm số $y=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x-2$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(5;+\infty)$ **B.** $(2;3)$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(1;5)$

Câu 8. Hỏi hàm số $y=\frac{3}{5}x^5-3x^4+4x^3-2$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. B. $\mathbb{R}$. C. $(0;2)$. D. $(2;+\infty)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Hỏi hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\left[\begin{array}{l}a=b=0,c>0\\a>0;b^2-3ac\le 0\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}a=b=0,c>0\\a>0;b^2-3ac\ge 0\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}a=b=0,c>0\\a<0;b^2-3ac\le 0\end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l}a=b=c=0\\a<0;b^2-3ac<0\end{array}\right.$.

Câu 10. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+15$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-9;-5)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

Câu 11. Cho hàm số $y=\sqrt{3x^2-x^3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=\frac{x}{2}+\sin^2 x, x\in[0;\pi]$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

B. $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.

C. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.

D. $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

Câu 13. Cho hàm số $y=x+\cos^2 x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi;+\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi;+\infty\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

D. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 14. Cho các hàm số sau:

$(\mathrm{I}): y=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+4$; $(\mathrm{II}): y=\frac{x-1}{x+1}$; $(\mathrm{III}): y=\sqrt{x^2+4}$

$(\mathrm{IV}): y=x^3+4x-\sin x$; $(\mathrm{V}): y=x^4+x^2+2$.

Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên những khoảng mà nó xác định?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 15. Cho các hàm số sau:

(I) : $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$; (II) : $y = \sin x - 2x$;

(III) : $y = -\sqrt{x^3 + 2}$; (IV) : $y = \dfrac{x-2}{1-x}$

Hỏi hàm số nào nghịch biến trên toàn trục số?

A. (I), (II). **B.** (I), (II) và (III). **C.** (I), (II) và (IV). **D.** (II), (III).

Câu 16. Xét các mệnh đề sau:

(I). Hàm số $y = -(x-1)^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(II). Hàm số $y = \ln(x-1) - \dfrac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 17. Cho hàm số $y = |x+1|(x-2)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \cos 2x + \sin 2x.\tan x, \forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn giảm trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** Hàm số luôn tăng trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số không đổi trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. **D.** Hàm số luôn giảm trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định ?

A. $m<-3$. **B.** $m\le -3$. **C.** $m\le 1$. **D.** $m<1$.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số sau luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

$y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$

A. $-3\le m\le 1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $-3<m<1$. **D.** $m\le -3; m\ge 1$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{x^2-(m+1)+2m-1}{x-m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

A. $m>1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\ge 1$.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=x+m\cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $|m|\le 1$. **B.** $m>\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $|m|\ge 1$. **D.** $m<\frac{1}{2}$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=(m-3)x-(2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-4\le m\le \frac{2}{3}$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $\begin{cases} m>3 \\ m\ne 1 \end{cases}$. **D.** $m\le 2$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số sau luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

$y=2x^3-3(m+2)x^2+6(m+1)x-3m+5$

A. 0. **B.** –1. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 26. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}+mx^2-mx-m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m=-5$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-6$.

Câu 27. Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho hàm số $y=\frac{(m+3)x-2}{x+m}$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó?

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=0$. **D.** Không có m.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. $-2<m<2$. **B.** $-2\le m\le -1$. **C.** $-2<m\le -1$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m\le 0$. **B.** $m\le 12$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m\ge 12$.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m\in[-5;2)$. **B.** $m\in(-\infty;2]$. **C.** $m\in(2,+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-5)$.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+2mx-3m+4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m=-1;m=9$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=9$. **D.** $m=1;m=-9$.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$?

A. $1\le m<2$. **B.** $m\le 0;1\le m<2$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m\le 0$.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=\frac{mx^3}{3}+7mx^2+14x-m+2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

A. $\left(-\infty;-\frac{14}{15}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-2;-\frac{14}{15}\right]$. **D.** $\left[-\frac{14}{15};+\infty\right)$.

Câu 34. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 35. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{x^2-2mx+m+2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. Hai. **B.** Bốn. **C.** Vô số. **D.** Không có.

Câu 36. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số α và β sao cho hàm số $y=f(x)=\frac{-x^3}{3}+\frac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)x^2-\frac{3}{2}x\sin\alpha\cos\alpha-\sqrt{\beta-2}$ luôn giảm trên $\mathbb{R}$?

A. $\frac{\pi}{12}+k\pi\le\alpha\le\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$. **B.** $\frac{\pi}{12}+k\pi\le\alpha\le\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$.

C. $\alpha\le\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$. **D.** $\alpha\ge\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$.

Câu 38. Tìm mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y=f(x)=2x+a\sin x+b\cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. **B.** $a+2b=2\sqrt{3}$. **C.** $a^2+b^2\le 4$. **D.** $a+2b\ge\frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^3-3x^2-9x-m=0$ có đúng 1 nghiệm?

A. $-27 \le m \le 5$. **B.** $m < -5$ hoặc $m > 27$.
C. $m < -27$ hoặc $m > 5$. **D.** $-5 \le m \le 27$.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1} = x+m$ có nghiệm thực?

A. $m \ge 2$. **B.** $m \le 2$. **C.** $m \ge 3$. **D.** $m \le 3$.

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = m + 4x - x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

A. $1 \le m \le 3$. **B.** $-3 < m < \sqrt{5}$. **C.** $-\sqrt{5} < m < 3$. **D.** $-3 \le m < 3$.

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2 - 3x + 2 \le 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m + 1 \ge 0$?

A. $m \le -1$. **B.** $m \le -\dfrac{4}{7}$. **C.** $m \ge -\dfrac{4}{7}$. **D.** $m \ge -1$.

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình: $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$?

A. $-1 \le m \le 3$. **B.** $0 \le m \le 2$. **C.** $0 \le m \le 3$. **D.** $-1 \le m \le 2$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm thực?

A. $m \ge -\dfrac{7}{2}$. **B.** $m \ge \dfrac{3}{2}$. **C.** $m \ge \dfrac{9}{2}$. **D.** $\forall m \in \mathbb{R}$.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2 - 1}$ có hai nghiệm thực?

A. $\dfrac{1}{3} \le m < 1$. **B.** $-1 \le m \le \dfrac{1}{4}$. **C.** $-2 < m \le \dfrac{1}{3}$. **D.** $0 \le m < \dfrac{1}{3}$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{(1+2x)(3-x)} > m + 2x^2 - 5x - 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; 3\right]$?

A. $m > 1$. **B.** $m > 0$. **C.** $m < 1$. **D.** $m < 0$.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $3\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}\right) - 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \ge m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$?

A. $m \le 6$. **B.** $m \ge 6$. **C.** $m \ge 6\sqrt{2} - 4$. **D.** $m \le 6\sqrt{2} - 4$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18 + 3x - x^2} \le m^2 - m + 1$ nghiệm đúng $\forall x \in [-3, 6]$?

A. $m \ge -1$. **B.** $-1 \le m \le 0$.
C. $0 \le m \le 2$. **D.** $m \le -1$ hoặc $m \ge 2$.

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m - 1 > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m \le 3$. **B.** $m \ge 1$. **C.** $-1 \le m \le 4$. **D.** $m \ge 0$.

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $-x^3+3mx-2<-\dfrac{1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x\ge 1$?

A. $m<\dfrac{2}{3}$. **B.** $m\ge\dfrac{2}{3}$. **C.** $m\ge\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}\le m\le\dfrac{3}{2}$.

Câu 51. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình $2^{\cos^2 x}+3^{\sin^2 x}\ge m.3^{\cos^2 x}$ có nghiệm?

A. $m=4$. **B.** $m=8$. **C.** $m=12$. **D.** $m=16$.

Câu 52. Bất phương trình $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\ge 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Hỏi tổng $a+b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. -2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 53. Bất phương trình $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$ có tập nghiệm $(a;b]$. Hỏi hiệu $b-a$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 54. **(NGÔ GIA TỰ - VP)** Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+2017$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ sao cho $b-a>3$ là

A. $m>6$. **B.** $m=9$. **C.** $m<0$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>6 \end{array}\right.$.

Câu 55. **(CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU)** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=2^{x^3-x^2+mx}$ đồng biến trên $[1,2]$.

A. $m>\dfrac{1}{3}$. **B.** $m\ge\dfrac{1}{3}$. **C.** $m\ge -1$. **D.** $m>-8$.

Câu 56. **(CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – GL)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sin x+\cos x+mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$. **B.** $m\le-\sqrt{2}$. **C.** $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$. **D.** $m\ge\sqrt{2}$.

Câu 57. **(BIÊN HÒA – HÀ NAM)** Hàm số $y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì giá trị của m là:

A. $m\in\left(-\dfrac{1}{2};2\right]\backslash\{-1\}$. **B.** $m\in(-1;2]\backslash\{-1\}$. **C.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right]$.

Câu 58. **(LÊ HỒNG PHONG)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln(16x^2+1)-(m+1)x+m+2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;\infty)$.

A. $m\in(-\infty;-3]$. **B.** $m\in[3;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;-3)$. **D.** $m\in[-3;3]$.

Câu 59. **(LÊ HỒNG PHONG)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\cot x-1}{m\cot x-1}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;0)$.
C. $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;1)$.

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=x+m\cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $|m|\le 1$. **B.** $m>\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $|m|\ge 1$. **D.** $m<\frac{1}{2}$.

Câu 61. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=(m-3)x-(2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-4\le m\le\frac{2}{3}$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $\begin{cases} m>3 \\ m\ne 1\end{cases}$. **D.** $m\le 2$.

Câu 62. Tìm mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y=f(x)=2x+a\sin x+b\cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. **B.** $a+2b=2\sqrt{3}$. **C.** $a^2+b^2\le 4$. **D.** $a+2b\ge\frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m\le 0$. **B.** $m\le 12$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m\ge 12$.

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m\in[-5;2)$. **B.** $m\in(-\infty;2]$. **C.** $m\in(2,+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-5)$.

Câu 65. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+2mx-3m+4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m=-1;m=9$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=9$. **D.** $m=1;m=-9$.

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$?

A. $1\le m<2$. **B.** $m\le 0;1\le m<2$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m\le 0$.

Câu 67. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=\frac{mx^3}{3}+7mx^2+14x-m+2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

A. $\left(-\infty;-\frac{14}{15}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-2;-\frac{14}{15}\right]$. **D.** $\left[-\frac{14}{15};+\infty\right)$.

Câu 68. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 69. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 70. **(CHUYÊN THÁI BÌNH – L4)** Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\left(m-x^3\right)\sqrt{1-x^3}$ đồng biến trên $(0;\ 1)$.

A. $m\geq -2$. **B.** $m\leq -2$. **C.** $m>1$. **D.** $m<1$.

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1D	2A	3D	4B	5C	6D	7D	8B	9A	10B
11B	12A	13A	14C	15A	16A	17B	18C	19C	20D
21A	22B	23A	24A	25A	26C	27D	28C	29D	30B
31A	32B	33B	34C	35C	36D	37B	38C	39C	40B
41B	42C	43B	44C	45D	46D	47D	48D	49B	50A
51A	52C	53A	54D	55D	56D	57D	58B	59B	60A
61A	62C	63D	64B	65A	66B	67B	68C	69D	70B

Câu 1. **Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có $y'=\dfrac{2}{(1-x)^2}>0,\ \forall x\neq 1$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

Câu 2. **Chọn A.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2\leq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 3. **Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. $y'=-4x^3+8x=4x(2-x^2)$. Giải $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

Trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt{2}\right)$, $y'>0$ nên hàm số đồng biến.

Câu 4. **Chọn B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ta có $y'=-\dfrac{10}{(-4+2x)^2}<0,\forall x\in D$.

Câu 5. **Chọn C.**

Ta có: $f'(x)=-4x^4+4x^2-1=-(2x^2-1)^2\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 6. **Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. $y'=\dfrac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$. Giải $y'=0\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-4\end{array}\right.$

y' không xác định khi $x=-1$. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4;-1)$ và $(-1;2)$

Câu 7. **Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. $y'=x^2-6x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right.$

Trên khoảng $(1;5)$, $y'<0$ nên hàm số nghịch biến.

Câu 8. **Chọn B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. $y'=3x^4-12x^3+12x^2=3x^2(x-2)^2\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 9. Chọn A.

$$y'=3ax^2+2bx+c\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=0,c>0\\ a>0;b^2-3ac\le 0\end{array}\right.$$

Câu 10. Chọn B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Do $y'=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$ nên hàm số **không** đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 11. Chọn B.

HSXĐ: $3x^2-x^3\ge 0\Leftrightarrow x\le 3$ suy ra $D=(-\infty;3]$. $y'=\dfrac{6x-3x^2}{2\sqrt{3x^2-x^3}}$, $\forall x\in(-\infty;3)$.

Giải $y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$. y' không xác định khi $\left\{\begin{array}{l}x=0\\ x=3\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		3
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖

Hàm số nghịch biến $(-\infty;0)$ và $(2;3)$. Hàm số đồng biến $(0;2)$

Câu 12. Chọn A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. $y'=\dfrac{1}{2}+\sin 2x$. Giải $y'=0\Leftrightarrow\sin 2x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vì $x\in[0;\pi]$ nên có 2 giá trị $x=\dfrac{7\pi}{12}$ và $x=\dfrac{11\pi}{12}$ thỏa mãn điều kiện.

Bảng xét dấu:

x	0		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
y'	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖

Hàm số đồng biến $\left(0;\dfrac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\dfrac{11\pi}{12};\pi\right)$

Câu 13. Chọn A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$; $y'=1-\sin 2x\ge 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Câu 14. Chọn C.

(I): $y'=x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(II): $y'=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$, $\forall x\ne -1$ (III): $y'=\left(\sqrt{x^2+4}\right)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

(IV): $y'=3x^2+4-\cos x>0,\forall x\in\mathbb{R}$ (V): $y'=4x^3+2x=2x(2x^2+1)$

Câu 15. Chọn A.

(I): $y'=(-x^3+3x^2-3x+1)'=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

(II): $y' = (\sin x - 2x)' = \cos x - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

(III) $y' = -\left(\sqrt{x^3+2}\right)' = -\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}} \le 0, \forall x \in \left(-\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$;

(IV) $y' = \left(\dfrac{x-2}{1-x}\right)' = \left(\dfrac{x-2}{-x+1}\right)' = -\dfrac{1}{(1-x)^2} < 0,\ \forall x \ne 1$

Câu 16. **Chọn A.**

(I) $y' = \left(-(x-1)^3\right)' = -3(x-1)^2 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(II) $y' = \left(\ln(x-1) - \dfrac{x}{x-1}\right)' = \dfrac{x}{(x-1)^2} > 0, \forall x > 1$

(III) $y' = \dfrac{1.\sqrt{x^2+1} - x.\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1} = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x.\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1} = \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 17. **Chọn B.**

$y' = \begin{cases} 2x-1 & khi \quad x \ge -1 \\ -2x+1 & khi \quad x < -1 \end{cases}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Câu 18. **Chọn C.**

TXĐ: $D = (-\infty; 2]$. Ta có $y' = \dfrac{\sqrt{2-x} - 1}{\sqrt{2-x}}, \forall x \in (-\infty; 2)$.

Giải $y' = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Rightarrow x = 1$; y' không xác định khi $x = 2$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		2
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 19. **Chọn C.**

Xét trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $y = \cos 2x + \sin 2x.\tan x = \dfrac{\cos 2x.\cos x + \sin 2x.\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow y' = 0$

Hàm số không đổi trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 20. **Chọn D**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ta có $y'=\dfrac{m-1}{(x+1)^2}$

Để hàm số giảm trên các khoảng mà nó xác định $\Leftrightarrow y'<0, \forall x\neq -1 \Leftrightarrow m<1$

Câu 21. Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-x^2-2mx+2m-3$. Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'}<0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<0\ \ (hn) \\ m^2+2m-3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3\le m\le 1$$

Câu 22. Chọn B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{x^2-2mx+m^2-m+1}{(x-m)^2}$

Để hàm số tăng trên từng khoảng xác định của nó

$$\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in D \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-m+1\ge 0, \forall x\in D \Leftrightarrow \begin{cases} 1\ge 0\,(hn) \\ m-1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 1$$

Câu 23. Chọn A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=1-m\sin x$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\sin x\le 1, \forall x\in\mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m=0$ ta có $0\le 1, \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Trường hợp 2: $m>0$ ta có $\sin x\le \dfrac{1}{m}, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{1}{m}\ge 1 \Leftrightarrow m\le 1$

Trường hợp 3: $m<0$ ta có $\sin x\ge \dfrac{1}{m}, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{1}{m}\le -1 \Leftrightarrow m\ge -1$. Vậy $|m|\le 1$

Câu 24. Chọn A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=m-3+(2m+1)\sin x$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\le 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (2m+1)\sin x\le 3-m, \forall x\in\mathbb{R}$

TH1: $m=-\dfrac{1}{2}$ ta có $0\le \dfrac{7}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

TH 2: $m<-\dfrac{1}{2}$ ta có $\sin x\ge \dfrac{3-m}{2m+1}, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{3-m}{2m+1}\le -1 \Leftrightarrow 3-m\ge -2m-1 \Leftrightarrow m\ge -4$

TH 3: $m>-\dfrac{1}{2}$ ta có:

$$\sin x\le \frac{3-m}{2m+1}, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1}\ge 1 \Leftrightarrow 3-m\ge 2m+1 \Leftrightarrow m\le \frac{2}{3}. \text{ Vậy } m\in\left[-4;\frac{2}{3}\right]$$

Câu 25. Chọn A.

Tính nhanh, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6(m+2)x+6(m+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=m+1 \end{array}\right.$

Phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm kép khi $m=0$, suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Trường hợp $m\neq 0$, phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt (không thỏa YCBT)

Câu 26. Chọn C.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x^2+2mx-m$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}1>0\,(hn)\\ m^2+m\le 0\end{cases} \Leftrightarrow -1\le m\le 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $m=-1$

Câu 27. **Chọn D.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Ta có $y'=\dfrac{m^2+3m+2}{(x+m)^2}$

Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow y'<0,\forall x\in D \Leftrightarrow m^2+3m+2<0 \Leftrightarrow -2<m<-1$

Vậy không có số nguyên m nào thuộc khoảng $(-2;-1)$.

Câu 28. **Chọn C**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Ta có $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$. Để hàm số giảm trên khoảng $(-\infty;1)$

$\Leftrightarrow y'<0,\forall x\in(-\infty;1) \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-4<0\\ 1\le -m\end{cases} \Leftrightarrow -2<m\le -1$.

Câu 29. **Chọn D.**

Cách 1: Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3x^2-12x+m$

- Trường hợp 1:

  Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}3>0\ (hn)\\ 36-3m\le 0\end{cases} \Leftrightarrow m\ge 12$

- Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa $x_1<x_2\le 0$ (*)

  - Trường hợp 2.1: $y'=0$ có nghiệm $x=0$ suy ra $m=0$. Nghiệm còn lại của $y'=0$ là $x=4$ (không thỏa (*))
  - Trường hợp 2.2: $y'=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa

$$x_1<x_2<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ S<0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}36-3m>0\\ 4<0\,(vl)\\ \dfrac{m}{3}>0\end{cases} \Rightarrow \text{không có } m\text{. Vậy } m\ge 12$$

Cách 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ $\Leftrightarrow m\ge 12x-3x^2=g(x),\forall x\in(0;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)$.

x	0		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

Câu 30. Chọn B.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=4x^3-4(m-1)x$.

Hàm số đồng biến trên $(1;3)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(1;3)\Leftrightarrow g(x)=x^2+1\ge m,\forall x\in(1;3)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;3)$.

x	1		3
g'		$+$	0
g	2	$\nearrow$	10

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m\le \min g(x)\Leftrightarrow m\le 2$.

Câu 31. Chọn A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x^2-mx+2m$

Ta không xét trường hợp $y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ vì $a=1>0$

Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa

$$|x_1-x_2|=3\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\Leftrightarrow m^2-8m>0\\(x_1-x_2)^2=9\Leftrightarrow S^2-4P=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>8\ hay\ m<0\\m^2-8m=9\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=9\end{array}\right.$$

Câu 32. Chọn B.

+) Điều kiện $\tan x\ne m$. Điều kiện cần để hàm số đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ là $m\notin(0;1)$

+) $y'=\dfrac{2-m}{\cos^2 x(\tan x-m)^2}$.

+) Ta thấy: $\dfrac{1}{\cos^2 x(\tan x-m)^2}>0\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right);m\notin(0;1)$

+) Để hs đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}y'>0\\m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2>0\\m\le 0;m\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow m\le 0$ hoặc $1\le m<2$

Câu 33. Chọn B.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$mx^2+14mx+14\le 0,\forall x\ge 1$, tương đương với $g(x)=\dfrac{-14}{x^2+14x}\ge m$ (1)

Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x\in[1;+\infty)$, suy ra $\min\limits_{x\ge 1} g(x)=g(1)=-\dfrac{14}{15}$

Kết luận: $(1)\Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} g(x)\ge m\Leftrightarrow -\dfrac{14}{15}\ge m$

Câu 34. Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-4x^3+2(2m-3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1;2)\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow m\le x^2+\dfrac{3}{2}=g(x),\forall x\in(1;2)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;2)$. $g'(x)=2x=0\Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên

x	1		2
g'		$+$	0
g	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$\frac{11}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le \frac{5}{2}$. Vậy $p+q=5+2=7$.

Câu 35. **Chọn C.**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{x^2-2mx+2m^2-m-2}{(x-m)^2}=\dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $g(x)\ge 0, \forall x\in D$.

Điều kiện tương đương là $\Delta_{g(x)}=-m^2+m+2\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$

Kết luận: Có vô số giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 36. **Chọn D.**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2}=\dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x)\ge 0, \forall x>1$ và $m\le 1$ (1)

Vì $\Delta_g{}'=2(m+1)^2\ge 0, \forall m$ nên (1) $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1\le x_2\le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} 2g(1)=2(m^2-6m+1)\ge 0 \\ \dfrac{S}{2}=m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 3-2\sqrt{2}\approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 37. **Chọn B.**

Điều kiện xác định: $\beta \ge 2$

Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình $\frac{1}{2}\le \sin 2\alpha \le 1$

Kết luận: $\frac{\pi}{12}+k\pi \le \alpha \le \frac{5\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$.

Câu 38. **Chọn C.**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=2+a\cos x-b\sin x$

Áp dụng bất đẳng thức Schwartz ta có $2-\sqrt{a^2+b^2}\le y'\le 2+\sqrt{a^2+b^2}$

Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$y'\ge 0, \forall x \Leftrightarrow 2-\sqrt{a^2+b^2}\ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2\le 4$.

Câu 39. **Chọn C.**

(1) $\Leftrightarrow m=x^3-3x^2-9x=f(x)$. Bảng biến thiên của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$

y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$ $+\infty$

Từ đó suy ra pt có đúng 1 nghiệm khi $m < -27$ hoặc $m > 5$

Câu 40. Chọn B.

Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$. Phương trình thành: $2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 1, t \geq 0; f'(t) = -2t + 2$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m \leq 2$.

Câu 41. Chọn B

Đặt $t = f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. Ta có $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Xét $x > 0$ ta có bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $m = t^2 + t - 5 \Leftrightarrow t^2 + t - 5 - m = 0$ (*1*).

Nếu phương trình (*1*) có nghiệm t_1, t_2 thì $t_1 + t_2 = -1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t \geq 1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1; \sqrt{5}\right)$. Đặt $g(t) = t^2 + t - 5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t) = m$ có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1; \sqrt{5}\right)$. Ta có $g'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in \left(1; \sqrt{5}\right)$.

Bảng biến thiên:

t	1		$\sqrt{5}$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	-3	$\nearrow$	$\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $-3 < m < \sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 42. Chọn C.

Bất phương trình $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m(x^2 + x + 1) \geq -x - 2 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{-x-2}{x^2 + x + 1}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$ với $1\le x\le 2$. Có $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}>0,\forall x\in[1;2]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{[1;2]} f(x) \Leftrightarrow m\ge -\dfrac{4}{7}$

Câu 43. Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}$. Điều kiện: $t\ge 1$.

Phương trình thành: $t^2+t-2m-2=0$ (*). Khi $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]\Rightarrow t\in[1;2]$

(*) $\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{t^2+t-2}{2}=m$. Bảng biến thiên :

t	1		2
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên ta có : $0\le m\le 2$

Câu 44. Chọn C

Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{2}$

Phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1 \Leftrightarrow 3x^2+4x-1=mx$ (*)

Vì $x=0$ không là nghiệm nên (*) $\Leftrightarrow m=\dfrac{3x^2+4x-1}{x}$

Xét $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-1}{x}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^2}>0\ \forall x\ge -\dfrac{1}{2};x\ne 0$

Bảng biến thiên

x	$-\dfrac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm thì $m\ge \dfrac{9}{2}$.

Câu 45. Chọn D.

Điều kiện : $x\ge 1$

Pt $\Leftrightarrow 3\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}+m=2\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x+1)^2}} \Leftrightarrow 3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

$t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ với $x\ge 1$ ta có $0\le t<1$. Thay vào phương trình ta được $m=2t-3t^2=f(t)$

Ta có: $f'(t)=2-6t$ ta có: $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm khi $0 \le m < \frac{1}{3}$

Câu 46. Chọn D.

Đặt $t = \sqrt{(1+2x)(3-x)}$ khi $x \in \left[-\frac{1}{2};3\right] \Rightarrow t \in \left[0;\frac{7\sqrt{2}}{4}\right]$

Thay vào bất phương trình ta được $f(t) = t^2 + t > m$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{7\sqrt{2}}{4}$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{49+14\sqrt{2}}{8}$

Từ bảng biến thiên ta có : $m < 0$

Câu 47. Chọn D.

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(1+x)(3-x)} = t^2 - 4$

Với $x \in [-1;3] => t \in [2;2\sqrt{2}]$. Thay vào bất phương trình ta được: $m \le -t^2 + 3t + 4$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 3t + 4; f'(t) = -2t + 3$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} < 2$

t	2		$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	6	$\searrow$	$6\sqrt{2}-4$

Từ bảng biến thiên ta có $m \le 6\sqrt{2} - 4$ thỏa đề bài

Câu 48. Chọn D.

Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} > 0 \Rightarrow t^2 = \left(\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}\right)^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)}$

$\Rightarrow 9 \le t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \le 9 + (3+x) + (6-x) = 18$

$\Rightarrow \sqrt{18 + 3x - x^2} = \sqrt{(3+x)(6-x)} = \frac{1}{2}(t^2 - 9); t \in \left[3;3\sqrt{2}\right]$

Xét $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{9}{2}$; $f'(t) = 1 - t < 0; \forall t \in \left[3;3\sqrt{2}\right] \Rightarrow \max\limits_{\left[3;3\sqrt{2}\right]} f(t) = f(3) = 3$

ycbt $\Leftrightarrow \max\limits_{[3;3\sqrt{2}]} f(t)=3\le m^2-m+1 \Leftrightarrow m^2-m-2\ge 0 \Leftrightarrow m\le -1$ hoặc $m\ge 2$

Câu 49. Chọn B

Đặt $t=2^x>0$ thì $m.4^x+(m-1).2^{x+2}+m-1>0$, đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m.t^2+4(m-1).t+(m-1)>0,\forall t>0 \Leftrightarrow m(t^2+4t+1)>4t+1,\forall t>0$

$\Leftrightarrow g(t)=\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}<m,\forall t>0$.

Ta có $g'(t)=\dfrac{-4t^2-2t}{(t^2+4t+1)^2}<0$ nên $g(t)$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$

ycbt $\Leftrightarrow \max\limits_{t\ge 0} g(t)=g(0)=1\le m$

Câu 50. Chọn A.

Bpt $\Leftrightarrow 3mx<x^3-\dfrac{1}{x^3}+2,\forall x\ge 1 \Leftrightarrow 3m<x^2-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{2}{x}=f(x),\forall x\ge 1$.

Ta có $f'(x)=2x+\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{2}{x^2}\ge 2\sqrt{2x\left(\dfrac{4}{x^5}\right)}-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{4\sqrt{2}-2}{x^2}>0$ suy ra $f(x)$ tăng.

Ycbt $\Leftrightarrow f(x)>3m,\forall x\ge 1 \Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} f(x)=f(1)=2>3m \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}>m$

Câu 51. Chọn A.

$(1)\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\cos^2 x}+3\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\cos^2 x}\ge m$. Đặt $t=\cos^2 x, 0\le t\le 1$

(1) trở thành $\left(\dfrac{2}{3}\right)^t+3\left(\dfrac{1}{9}\right)^t\ge m$ (2). Đặt $f(t)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^t+3\left(\dfrac{1}{9}\right)^t$.

Ta có (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t\in[0;1] \Leftrightarrow \mathrm{m}\le \operatorname{Max}\limits_{t\in[0;1]} f(t) \Leftrightarrow m\le 4$

Câu 52. Chọn C

Điều kiện: $-2\le x\le 4$. Xét $f(x)=\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2;4]$.

Có $f'(x)=\dfrac{3(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}>0,\forall x\in(-2;4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2;4]$, bpt $\Leftrightarrow f(x)\ge f(1)=2\sqrt{3} \Leftrightarrow x\ge 1$.

So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $S=[1;4]\Rightarrow a+b=5$.

Câu 53. Chọn A.

Điều kiện: $1\le x\le 3$; bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{(3-x)^2+2}+\sqrt{3-x}$

Xét $f(t)=\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t}$ với $t\ge 0$. Có $f'(t)=\dfrac{t}{2\sqrt{t^2+2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>0,\forall t>0$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$. (1) $\Leftrightarrow f(x-1)>f(3-x) \Leftrightarrow x-1>3 \Leftrightarrow x>2$

So với điều kiện, bpt có tập nghiệm là $S=(2;3]$.

Câu 54. Chọn D.

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$

Hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)\le 0\,\forall x\in(a;b)$

$\Delta = m^2-6m+9$

TH1: $\Delta\le 0 \Rightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)\ge 0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ Vô lí

TH2: $\Delta>0 \Leftrightarrow m\ne 3 \Rightarrow y'$ có hai nghiệm $x_1, x_2\,(x_2>x_1)$

$\Rightarrow$Hàm số luôn nghịch biến trên $(x_1;x_2)$.

Yêu cầu đề bài:

$\Leftrightarrow x_2-x_1>3 \Leftrightarrow (x_2-x_1)^2>9 \Leftrightarrow S^2-4P>9$

$\Leftrightarrow (m-1)^2-4(m-2)>9 \Leftrightarrow m^2-6m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>6\\ m<0\end{array}\right.$

Câu 55. **Chọn C.**

Ta có $y'=(3x^2-2x+m)2^{x^3-x^2+mx}\ln 2$.

Hàm số đã cho đồng biến trên

$[1,2] \Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in[1,2] \Leftrightarrow 3x^2-2x+m\ge 0,\ \forall x\in[1,2]\ (*)$

Vì $f(x)=3x^2-2x+m$ có $a=3>0,\ -\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{3}<2$ nên

$$(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta'\le 0\\ \begin{cases}\Delta'>0\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}<1\\ (x_1-1)(x_2-1)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-3m\le 0\\ \begin{cases}1-3m>0\\ \dfrac{1}{3}<1\\ \dfrac{m}{3}-\dfrac{2}{3}+1\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge\dfrac{1}{3}\\ \begin{cases} m<\dfrac{1}{3}\\ m\ge -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow m\ge -1$$

Câu 56. **Chọn D.**

Ta có: $y=\sin x+\cos x+mx$

$y'=\cos x-\sin x+m$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}. \Leftrightarrow m\ge \sin x-\cos x, \forall x\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)$, với $\varphi(x)=\sin x-\cos x$.

Ta có: $\varphi(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}.$

Do đó: $\max\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)=\sqrt{2}$. Từ đó suy ra $m\ge\sqrt{2}$.

Câu 57. **Chọn D.**

$y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$ và $y'=\dfrac{x^2+2mx-4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases}-m<1\\ x^2+2mx-4m\ge 0, \forall x\in[1;+\infty)\end{cases}$

$x^2+2mx-4m\ge 0, \forall x\in[1;+\infty) \Leftrightarrow 2m(x-2)\ge -x^2, \forall x\in[1;+\infty)$ (1)

Do $x=2$ thỏa bất phương trình $2m(x-2)\ge -x^2$ với mọi m nên ta chỉ cần xét $x\ne 2$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} 2m\le \dfrac{-x^2}{x-2}, \forall x\in [1;2) \\ 2m\ge \dfrac{-x^2}{x-2}, \forall x\in (2;+\infty) \end{cases}$ (2)

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x^2}{x-2}$ trên $[1;+\infty)\setminus\{2\}$ có $f'(x)=\dfrac{-x^2+4x}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	1		2		4		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$+\infty$

$YCBT \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ 2m\le 1 \\ 2m\ge -8 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m\le \dfrac{1}{2}$.

Cách khác

$y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$ và $y'=\dfrac{x^2+2mx-4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty)\Leftrightarrow \begin{cases} -m<1 \\ x^2+2mx-4m\ge 0, \forall x\in [1;+\infty) \end{cases}$

$$x^2+2mx-4m\ge 0, \forall x\in [1;+\infty)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta\le 0 \\ \begin{cases} \Delta>0 \\ x_1<x_2\le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2+4m\le 0 \\ \begin{cases} m^2+4m>0 \\ -m+\sqrt{m^2+4m}\le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\le m\le 0 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-4 \end{array}\right. \\ m\ge -1 \\ m\le \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Câu 58. **Chọn B.**

Ta có: $y=\ln(16x^2+1)-(m+1)x+m+2$

$y'=\dfrac{32x}{16x^2+1}-(m+1)$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{32x}{16x^2+1}-(m+1)\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$

Cách 1: $\dfrac{32x}{16x^2+1}-(m+1)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 32x-(m+1)(16x^2+1)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -16(m+1)x^2+32x-(m+1)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-16(m+1)<0\\ \Delta'=16^2-16(m+1)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ -16m^2-32m+240\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ \left[\begin{array}{l}m\le -5\\ m\ge 3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 3.$$

Cách 2: $\dfrac{32x}{16x^2+1}-(m+1)\le 0\qquad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{32x}{16x^2+1}\le m+1,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m+1\ge \max\limits_{\mathbb{R}} g(x)$, với $g(x)=\dfrac{32x}{16x^2+1}$

Ta có: $g'(x)=\dfrac{-512x^2+32}{(16x^2+1)^2}$

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0; g\left(\dfrac{1}{4}\right)=4; g\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-4$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=4$

Do đó: $m+1\ge 4\Leftrightarrow m\ge 3$.

Câu 59. Chọn B.

Ta có: $y'=\dfrac{-(1+\cot^2 x)(m\cot x-1)+m(1+\cot^2 x)(\cot x-1)}{(m\cot x-1)^2}=\dfrac{(1+\cot^2 x)(1-m)}{(m\cot x-1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}m\cot x-1\ne 0,\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)\\ y'=\dfrac{(1+\cot^2 x)(1-m)}{(m\cot x-1)^2}>0,\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 0\vee m\ge 1\\ 1-m>0\end{cases}\Leftrightarrow m\le 0.$$

Câu 60. Chọn A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=1-m\sin x$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m\sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m = 0$ ta có $0 \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Trường hợp 2: $m > 0$ ta có $\sin x \leq \frac{1}{m}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{m} \geq 1 \Leftrightarrow m \leq 1$

Trường hợp 3: $m < 0$ ta có $\sin x \geq \frac{1}{m}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{m} \leq -1 \Leftrightarrow m \geq -1$

Vậy $|m| \leq 1$

Câu 61. **Chọn A.**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = m - 3 + (2m+1)\sin x$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2m+1)\sin x \leq 3 - m, \forall x \in \mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m = -\frac{1}{2}$ ta có $0 \leq \frac{7}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $m < -\frac{1}{2}$ ta có $\sin x \geq \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \leq -1$

$$\Leftrightarrow 3 - m \geq -2m - 1 \Leftrightarrow m \geq -4$$

Trường hợp 3: $m > -\frac{1}{2}$ ta có:

$\sin x \leq \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \geq 1 \Leftrightarrow 3 - m \geq 2m + 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{2}{3}$. Vậy $m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right]$

Câu 62. **Chọn C.**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 2 + a\cos x - b\sin x$

Áp dụng bất đẳng thức Schwartz ta có $2 - \sqrt{a^2 + b^2} \leq y' \leq 2 + \sqrt{a^2 + b^2}$

Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$y' \geq 0, \forall x \Leftrightarrow 2 - \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4.$$

Câu 63. **Chọn D.**

Cách 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 12x + m$

- Trường hợp 1:

  Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0\ (hn) \\ 36 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 12$

- Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 \leq 0$ (*)

  ✓ Trường hợp 2.1: $y' = 0$ có nghiệm $x = 0$ suy ra $m = 0$. Nghiệm còn lại của $y' = 0$ là $x = 4$ (không thỏa (*))

  ✓ Trường hợp 2.2: $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 3m > 0 \\ 4 < 0 (vl) \\ \dfrac{m}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{không có } m. \text{Vậy } m \geq 12$$

*Cách 2:*Hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right) \Leftrightarrow m \geq 12x - 3x^2 = g(x), \forall x \in (0;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $\left(0;+\infty\right)$.

x	0		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

Câu 64. Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$.

Hàm số đồng biến trên $(1;3) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 1 \geq m, \forall x \in (1;3)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;3)$.

x	1		3
g'		$+$	0
g	2	$\nearrow$	10

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \leq \min g(x) \Leftrightarrow m \leq 2$.

Câu 65. Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - mx + 2m$

Ta không xét trường hợp $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ vì $a = 1 > 0$

Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$\left|x_1 - x_2\right| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0 \\ \left(x_1 - x_2\right)^2 = 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \text{ hay } m < 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 9 \end{array}\right.$$

Câu 66. Chọn B.

+) Điều kiện $\tan x \neq m$. Điều kiện cần để hàm số đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ là $m \notin \left(0;1\right)$

+) $y' = \dfrac{2-m}{\cos^2 x(\tan x - m)^2}$.

+) Ta thấy: $\dfrac{1}{\cos^2 x(\tan x - m)^2} > 0 \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right); m \notin \left(0;1\right)$

+) Để hs đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y'>0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2>0 \\ m \le 0; m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$

Câu 67. Chọn B.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$mx^2+14mx+14 \le 0, \forall x \ge 1$, tương đương với $g(x)=\dfrac{-14}{x^2+14x} \ge m$ (1)

Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x \in [1;+\infty)$, suy ra $\min\limits_{x\ge 1} g(x)=g(1)=-\dfrac{14}{15}$

Kết luận: $(1) \Leftrightarrow \min\limits_{x \ge 1} g(x) \ge m \Leftrightarrow -\dfrac{14}{15} \ge m$

Câu 68. Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-4x^3+2(2m-3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1;2) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow m \le x^2+\dfrac{3}{2}=g(x), \forall x \in (1;2)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;2)$. $g'(x)=2x=0 \Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên

x	1		2
g'		$+$	0
g	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$\frac{11}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le \dfrac{5}{2}$. Vậy $p+q=5+2=7$.

Câu 69. Chọn D.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2}=\dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x) \ge 0, \forall x > 1$ và $m \le 1$ (1)

Vì $\Delta_g{}'=2(m+1)^2 \ge 0, \forall m$ nên $(1) \Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1 \le x_2 \le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} 2g(1)=2(m^2-6m+1) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2}=m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 3-2\sqrt{2} \approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 70. Chọn B.

+ Tập xác định: $D=(-\infty;1]$.

+ $y'=-3x^2\sqrt{1-x^3}-\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}.\left(m-x^3\right)=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}\left(3x^3-m-2\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{m+2}{3}} \end{array}\right..$$

* Trường hợp 1: $m = -2$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1
y'		$-$	0	$+$	

Dựa vào BXD, ta có $y' < 0,\ \forall x \in (0;1) \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

* Trường hợp 2: $m \neq -2$.

Để hàm số nghịch biến trên $(0;\ 1)$ thì $\sqrt[3]{\dfrac{m+2}{3}} < 0 \Leftrightarrow m < -2$.

Vậy $m \leq -2$ thì hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Chủ đề 2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

☆☆☆

A. LÝ THUYẾT VỀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. ĐỊNH NGHĨA

Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:

- x_0 là ***điểm cực tiểu*** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$.

  Khi đó $f(x_0)$ được gọi là ***giá trị cực tiểu*** của hàm số f.
- x_0 là ***điểm cực đại*** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$.

  Khi đó $f(x_0)$ được gọi là ***giá trị cực đại*** của hàm số f.

Chú ý:

Bảng sau đây tóm tắt các khái niệm được sử dụng trong phần này:

x_0	$f(x_0)$	$(x_0; f(x_0))$
Điểm cực đại của f	Giá trị cực đại (cực đại) của f	Điểm cực đại của đồ thị hàm số f
Điểm cực tiểu của f	Giá trị cực tiểu (cực tiểu) của f	Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số f
Điểm cực trị của f	Cực trị của f	Điểm cực trị của đồ thị hàm số f

Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ gọi là ***điểm cực trị của đồ thị*** hàm số f.

Nhận xét:

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập D; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $(a;b)$ nào đó chứa x_0 hay nói cách khác khi x_0 điểm cực đại (cực tiểu) sẽ tồn tại khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $(a;b)$.
- Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập K. Hàm số có thể không có cực trị trên một tập cho trước.

II. ĐIỀU KIỆN CẦN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

☆ ***Định lí 1:*** Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý:

- Đạo hàm $f'(x)$ *có thể* bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.
- Hàm số *có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.

Như vậy: Hàm số *chỉ có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

III. ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

☆ ***Định lí 2:*** Giả sử hàm số f liên tục trên $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a;x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(a;x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

<u>Nói cách khác:</u>

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

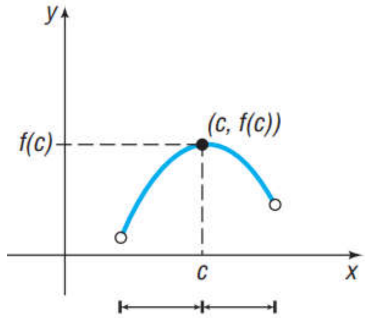
Minh họa bằng bảng biến thiên

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗	f_{CD}	↘	

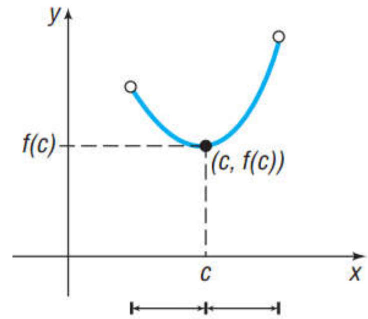
x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘	f_{CT}	↗	

Minh họa bằng đồ thị:

Giả sử hàm số f xác định trên một khoảng $(a;b)$ chứa điểm c.



Hàm số f đạt cực đại tại $x = c$.



Hàm số f đạt cực tiểu tại $x = c$.

IV. QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

✫ *Quy tắc 1:*

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Lập bảng biến thiên.

Bước 4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

✫ *Quy tắc 2:*

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)$ và ký hiệu x_i $(i=1,2,3,...)$ là các nghiệm của nó.

Bước 3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

Bước 4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i.

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. TÌM CỰC TRỊ CỦA CÁC HÀM SỐ

✰ Phương pháp:

> ***Bước 1.*** Tìm tập xác định của hàm số.
>
> ***Bước 2.*** Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
>
> ***Bước 3.*** Lập bảng biến thiên.
>
> ***Bước 4.*** Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

✍ ***Nhận xét:*** Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ không có cực trị, hàm số luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

1. Tìm cực trị của hàm bậc 3: $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$

Bài toán 1: Tìm cực trị của hàm số $y=2x^3-6x+2$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=6x^2-6$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow 6x^2-6=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	6	↘	-2	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=-1, y=6$ và hàm số đạt cực tiểu tại $x=1, y=-2$.

Bài toán 2: Tìm cực trị của hàm số $y=-x^3+3x^2-4$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3x^2+6x$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0, y=-4$ và hàm số đạt cực đại tại $x=2, y=0$.

Bài toán 3: Tìm cực trị của hàm số $y=-x^3+3x^2-3x+2$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3x^2+6x-3$. Cho $y'=0\Leftrightarrow -3x^2+6x-3=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Bài toán 4: Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2-12x+1$. Tìm tọa độ A,B và phương trình đường thẳng qua hai điểm đó.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=6x^2-6x-12$. Cho $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-19	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra tọa độ hai điểm cực trị là $A(-1;8),B(2;-19)$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là $9x+y+1=0$.

Bài toán 5: Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ có đồ thị (C). Tìm các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị (C) và khoảng cách giữa hai điểm cực trị đó.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=3x^2-6x$. Cho $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy tọa độ hai điểm cực trị là $A(-1;8),B(2;-19)$. Khi đó $AB=\sqrt{(2-0)^2+(-4-0)^2}=2\sqrt{5}$.

Bài toán 6: Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua điểm cực trị của (C): $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Vậy tọa độ hai điểm cực trị là $A(1;2), B(3;-2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = (2;-4)$ là $y = -2x + 4$.

Ta có phương trình đường thẳng d đi qua $M(-1;1)$ và vuông góc với AB có phương trình là $d: 2x + y + 1 = 0$.

2. Tìm cực trị của hàm trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$

Bài toán 1: Tìm cực trị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$, $y = 1$ và hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y = 2$.

Bài toán 2: Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x^4}{4} - x^2 + 2$.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2x^3 - 2x$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$, $y=\dfrac{3}{2}$ và hàm số đạt cực đại tại $x=0$, $y=2$.

Bài toán 3: Tìm cực trị của hàm số $y=x^4+3x^2-6$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x^3+6x$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow 4x^3+6x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, $y=-6$.

Bài toán 4: Tìm cực trị của hàm số $y=-x^4-5x^2+2$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Tính $y'=-4x^3-10x$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow -4x^3-10x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=0$, $y=2$.

3. Tìm cực trị của các hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Bài toán 1: Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(x-2)^2} \Rightarrow y'>0\ \forall x\in D$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Bài toán 2: Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{-x-2}{x+1}$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow y'>0\ \forall x\in D$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

4. Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$.

Bài toán 3: Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$. Cho $y'=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-7	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=-3$, $y=-7$ và đạt cực tiểu tại $x=1$, $y=1$.

Bài toán 4: Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+1}$.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{-x^2 - 2x + 3}{(x+1)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$, $y = 8$ và đạt cực đại tại $x = 1$, $y = 0$.

Bài toán 5: Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x - 3}$.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Tính $y' = \dfrac{x^2 - 6x + 21}{(x-3)^2} \Rightarrow y' > 0\ \forall x \in D$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

5. Tìm cực trị của các hàm số khác.

Bài toán 1: Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{4x^2 + 2x - 1}{2x^2 + x - 3}$.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}; 1\right\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{-10x - 5}{(2x^2 + x - 3)^2}$; Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 2$; $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{3}{2}\right)^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{3}{2}\right)^+} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$.

Bài toán 2: Tìm cực trị của hàm số $y=\sqrt{x^2-2x+5}$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.Cho $y'=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$, $y=2$.

Bài toán 3: Tìm cực trị của hàm số $y=x+\sqrt{2x-x^2}$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\left[0;2\right]$.

Ta có: $y'=1+\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ 2x-x^2=\left(x-1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$		2
y'	||	$+$	0	$-$	||
y	0	$\nearrow$	$1+\sqrt{2}$	$\searrow$	2

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=1+\sqrt{2}$.

Bài toán 4: Tìm cực trị của hàm số $y=\left|x\right|\left(x+2\right)$.

Lời giải:

Cách 1:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y=|x|(x+2)=\begin{cases} x(x+2) & khi\ x\geq 0 \\ -x(x+2) & khi\ x<0 \end{cases}$.

+ Với $x>0$: $y'=2x+2>0$.

+ Với $x<0$: $y'=-2x-2$; cho $y'=0\Leftrightarrow x=-1$.

Đạo hàm y' không xác định tại $x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=-1$, $y=1$ và đạt cực tiểu tại $x=0$, $y=0$.

Cách 2:

Hàm số có TXĐ $=\mathbb{R}$. Ta có

$$y=\sqrt{x^2}(x+2)\ \Rightarrow\ y'=\frac{x}{|x|}(x+2)+|x|=\frac{2(x^2+x)}{|x|}\ (x\neq 0).$$

Ta thấy với mọi $x\neq 0$, dấu của y' chính là dấu của tam thức bậc hai x^2+x.

Nên ta có bảng biến thiên của hàm số như trên.

Kết luận: hàm số đạt cực đại tại $x=-1$, giá trị cực đại tương ứng là $y(-1)=1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, giá trị cực tiểu tương ứng là $y(0)=0$.

Bài toán 5: Tìm cực trị của hàm số $y=f(x)=2\sin 2x-3$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4\cos 2x$; $y''=-8\sin 2x$. Cho $y'=0\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$.

Khi đó $y''\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)=-8\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\left[\begin{array}{ll} -8 & khi\ k=2n \\ 8 & khi\ k=2n+1 \end{array}\right.$ với $n\in\mathbb{Z}$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$, $y=y\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)=-1$.

Và hàm số đạt cực tiểu tại $x=\frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi$, $y=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2n\pi\right)-3=-5$.

Bài toán 6: Tìm cực trị của hàm số $y=f(x)=x-\sin 2x+2$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 1 - 2\cos 2x$; $y'' = 4\sin 2x$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

+ Tính $y''\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\right) = 2\sqrt{3} > 0$.

+ Tính $y''\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\left(-\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\right) = -2\sqrt{3} < 0$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $y = y\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2$.

Và hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $y = y\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = \dfrac{\pi}{6} + k\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2$.

Bài toán 7: Tìm cực trị của hàm số $y = f(x) = 3 - 2\cos x - \cos 2x$.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2\sin x + 2\sin 2x$; $y'' = 2\cos x + 4\cos 2x$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 2\sin x + 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(1 + 2\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

+ Tính $y''(k\pi) = 2\cos k\pi + 4\cos k2\pi = 2\cos k\pi + 4 > 0$.

+ Tính $y''\left(\pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = 2\cos\dfrac{2\pi}{3} + 4\cos\dfrac{4\pi}{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 4\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -3 < 0$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$, $y = y\left(\pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = \dfrac{9}{2}$.

Và hàm số đạt cực tiểu tại $x = k\pi$, $y = y(k\pi) = 3 - 2\cos k\pi - \cos k2\pi = 2 - 2\cos k\pi$.

II. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Sau đây là một số dạng toán thường gặp cho các hàm số phổ biến nhất. Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ *không có cực trị nên ta không đề cập trong phần này.*

1. HÀM SỐ BẬC 3: $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a\neq 0\right)$.

1.1 SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ BẬC 3

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c=Ax^2+Bx+C$, $\Delta_{y'}=B^2-4AC=4\left(b^2-3ac\right)$

Trường hợp	***Kết luận***
$b^2-3ac\leq 0$	Hàm số không có cực trị.
$b^2-3ac>0$	Hàm số có hai điểm cực trị.

Đối với trường hợp hàm bậc ba có hai điểm cực trị, ta có bài toán tổng quát sau đây:

1.2 BÀI TOÁN TỔNG QUÁT :

Cho hàm số $y=f\left(x;m\right)=ax^3+bx^2+cx+d$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1,x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

☆ Phương pháp:

- ***Bước 1:***
  Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
  Đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c=Ax^2+Bx+C$
- ***Bước 2:***
  Hàm số có cực trị (hai cực trị, hai cực trị phân biệt hay có cực đại và cực tiểu)
  $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt
  $$\Leftrightarrow\begin{cases}A=3a\neq 0\\ \Delta_{y'}=B^2-4AC=4b^2-12ac>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ b^2-3ac>0\end{cases}\Rightarrow m\in D_1.$$
- ***Bước 3:*** Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$. Khi đó:
  $$\begin{cases}S=x_1+x_2=-\dfrac{B}{A}=-\dfrac{2b}{3a}\\ P=x_1.x_2=\dfrac{C}{A}=\dfrac{c}{3a}\end{cases}.$$
- ***Bước 4:*** Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P. Từ đó giải ra tìm được $m\in D_2$.
- ***Bước 5***: Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m=D_1\cap D_2$.

1.3 MỘT SỐ DẠNG TOÁN TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số; y_1, y_2 là các giá trị cực trị của hàm số.

1.3.1 Điều kiện để hàm số có cực trị cùng dấu, trái dấu.

Trường hợp		Điều kiện
Cùng dấu $\begin{cases}\Delta_{y'} > 0\\ P > 0\end{cases}$	Cùng dương	$\begin{cases}\Delta_{y'} > 0\\ S > 0\\ P > 0\end{cases}$
	Cùng âm	$\begin{cases}\Delta_{y'} > 0\\ S < 0\\ P > 0\end{cases}$
Trái dấu		$\begin{cases}\Delta_{y'} > 0\\ P < 0\end{cases}$

1.3.2 Tìm điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} x_1 < \alpha < x_2\\ x_1 < x_2 < \alpha\\ \alpha < x_1 < x_2\end{array}\right.$

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < \alpha < x_2$

  $\Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \Leftrightarrow x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 < 0$
- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < \alpha$

  $\Leftrightarrow \begin{cases}(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0\\ x_1 + x_2 < 2\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0\\ x_1 + x_2 < 2\alpha\end{cases}$
- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $\alpha < x_1 < x_2$

  $\Leftrightarrow \begin{cases}(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0\\ x_1 + x_2 > 2\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0\\ x_1 + x_2 > 2\alpha\end{cases}$

Chú ý: Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng khi có 1 nghiệm là $x = \frac{-b}{3a}$, có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân khi có 1 nghiệm là $x = -\sqrt[3]{\frac{d}{a}}$.

1.3.3 Tìm điều kiện để hai hàm số có hai cực trị x_1, x_2 nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng.

Cho 2 điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.

- Nếu $(ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) < 0$ thì hai điểm A, B nằm về hai phía so với Δ.
- Nếu $(ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) > 0$ thì hai điểm A, B nằm cùng phía so với Δ.

1.3.4 Viết phương trình đi qua các điểm cực trị

Giả sử hàm số có cực trị, thực hiện phép chia đa thức y cho y' để có: $y(x) = p(x)y'(x) + Ax + B$

Như vậy, nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $\Rightarrow y'(x_0) = 0 \Rightarrow y(x_0) = Ax_0 + B$.

Suy ra đường thẳng $\Delta : y_1(x) = Ax + B$ là đường thẳng đi qua tất cả các điểm cực trị của (C).

Đối với đường thẳng qua hai cực trị của hàm số bậc 3, ta có công thức:

$\boxed{y_1(x) = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a}\right)x + d - \frac{bc}{9a}}$ hay $\boxed{y_1(x) = \frac{-2\Delta}{9a}x + d - \frac{bc}{9a}}$ hoặc $\boxed{y_1(x) = 9ay - \frac{y'.y''}{2}}$

Cách bấm máy tính tìm ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d - (3ax^2 + 2bx + c)\left(\frac{x}{3} + \frac{b}{9a}\right) \xrightarrow{x=i} Ai + B \Rightarrow y = Ax + B$$

<u>Gọi k là hệ số góc của đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu:</u> $\boxed{k = \frac{-2\Delta}{9a}x}$

<u>Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc 3 là:</u>

$$\boxed{AB = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}}} \text{ với } \boxed{e = \frac{b^2 - 3ac}{9a}}$$

1.3.5 Tìm điều kiện để đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu song song (vuông góc) với đường thẳng $d : y = px + q$.

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

– Giải điều kiện: $k = p$ (hoặc $k = -\frac{1}{p}$).

1.3.6 Tìm điều kiện để đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu tạo với đường thẳng $d : y = px + q$ một góc α .

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

– Giải điều kiện: $\left|\frac{k - p}{1 + kp}\right| = \tan\alpha$. (Đặc biệt nếu $d \equiv Ox$, thì giải điều kiện: $|k| = \tan\alpha$)

1.3.7 Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho ΔIAB có diện tích S cho trước (với I là điểm cho trước).

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

– Giải điều kiện $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}d(I; AB).AB = S$.

1.3.8 Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B đối xứng qua đường thẳng d cho trước.

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

– Gọi I là trung điểm của AB.

– Giải điều kiện: $\begin{cases}\Delta \perp d \\ I \in d\end{cases}$.

1.3.9 Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng *d* cho trước.

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Giải điều kiện: $d\left(A;d\right)=d\left(B;d\right)$

1.3.10 Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B và khoảng cách giữa hai điểm A, B là lớn nhất (nhỏ nhất).

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Tìm toạ độ các điểm cực trị A, B (có thể dùng pt đường thẳng qua hai điểm cực trị).

– Tính AB. Dùng phương pháp hàm số để tìm GTLN (GTNN) của AB.

1.4 MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1:
Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y=\left(m+2\right)x^3+3x^2+mx-5$ có cực đại, cực tiểu.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3\left(m+2\right)x^2+6x+m$. Hàm số có cực đại, cực tiểu thì trước hết $m+2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -2 \ \left(1\right)$

Khi đó y' là tam thức bậc hai có $\Delta'=-3\left(m^2+2m-3\right)$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $\Delta'>0 \Leftrightarrow \ m^2+2m-3<0 \ \Leftrightarrow \ -3<m<1 \quad \left(2\right)$

Kết hợp với $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta có những giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$m\in\left(-3;-2\right)\cup\left(-2;1\right)$.

Bài toán 2: Tìm các giá trị của *m* để hàm số $y=x^3-2mx+4$ không có điểm cực trị.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=3x^2-2m$.

Hàm số không có điểm cực trị khi phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow x^2=\dfrac{2m}{3}\leq 0 \Leftrightarrow m\leq 0$.

Bài toán 3: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+\left(m^2-1\right)x+2$, m là tham số thực.Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=2$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6mx+m^2-1;\ y''=6x-6m$.

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=2 \Rightarrow \begin{cases}y'\left(2\right)=0\\ y''\left(2\right)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-12m+11=0\\ 12-6m>0\end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

Bài toán 4:

Tìm các giá trị của m để hàm số $y=-x^3+(m+3)x^2-(m^2+2m)x-2$ đạt cực đại tại $x=2$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=-3x^2+2(m+3)x-(m^2+2m)$; $y''=-6x+2(m+3)$.

Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=2 \Rightarrow \begin{cases} y'(2)=0 \\ y''(2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12+4(m+3)-m^2-2m=0 \\ -12+2m+6<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m=0 \\ m<3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right..$$

Kết luận : Giá trị m cần tìm là $m=0$, $m=2$.

Bài toán 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+(m^2-1)x+2$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6mx+m^2-1$; $y''=6x-6m$.

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2)=0 \\ y''(2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-12m+11=0 \\ 12-6m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \quad (n) \\ m=11 \quad (l) \end{array}\right. \\ m<2 \end{cases}$

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Bài toán 6: Biết $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Tính giá trị của hàm số tại $x=-2$.

Lời giải:

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Vì $M(0;2)$, $N(2;-2)$là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên:

$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases}$ (1) và $\begin{cases} y(0)=2 \\ y(2)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ 8a+4b+2c+d=-2 \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a=1;\ b=-3;\ c=0;\ d=2 \Rightarrow y=x^3-3x^2+2 \Rightarrow y(-2)=-18$.

Bài toán 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-2x^2+(m-3)x+5$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=4$.

Lời giải:

$y'=3x^2-4x+m-3$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+m-3=0$ (1)

Hàm số đã cho có cực trị khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$\Delta' = 4 - 3(m-3) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{3}.$$

Khi đó hàm số có cực trị x_1, x_2 là nghiệm phương trình (1).

Theo Viet, ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{16}{9} - 2.\frac{m-3}{3} = \frac{16}{9} - \frac{2m-6}{3} = \frac{34-6m}{9}$.

Yêu cầu bài toán tương đương với: $\frac{34-6m}{9} = 4 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$ (nhận).

Bài toán 8: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$. Tìm tất cả giá trị của m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ thỏa mãn $x_A^2 + x_B^2 = 2$.

Lời giải:

Ta có $y' = x^2 - 2mx - 1$.

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$, hay $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B $\Leftrightarrow m^2 + 1 > 0$ (luôn đúng).

Yêu cầu bài toán tương đương $x_A^2 + x_B^2 = 2 \Leftrightarrow (x_A + x_B)^2 - 2x_A.x_B = 2 \Leftrightarrow (-2m)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow m = 0.$

Bài toán 9: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3mx + 1$, trong đó m là tham số. Tìm các giá trị của m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = 3x_2$.

Lời giải:

$y' = 3x^2 - 6x - 3m$.

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 3m = 0$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Theo Viet ta có $x_1 + x_2 = 2$ và giả thuyết $x_1 = 3x_2$.

Tìm được $x_2 = \frac{1}{2}$. Thay vào phương trình $y' = 0$, tìm được $m = -\frac{3}{4}$ (nhận).

Bài toán 10: Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có hai điểm cực trị x_1 và x_2 đồng thời $|x_1 - x_2| = 2$.

Lời giải:

$y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1)$

+ Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$

+ $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$.

Trong đó: $x_1 + x_2 = 2;\ x_1x_2 = 1 - m^2$.

Nên $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$ (nhận)

Vậy $m = \pm 1$.

Bài toán 11: Tìm m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$.

Lời giải:

$y'=2x^2-2mx-2\left(3m^2-1\right)=2\left(x^2-mx-3m^2+1\right)$,

$t\left(x\right)=x^2-mx-3m^2+1$ là tam thức bậc hai có $\Delta=13m^2-4$.

Do đó hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow t\left(x\right)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\frac{2\sqrt{13}}{13} \\ m<-\frac{2\sqrt{13}}{13}\end{array}\right.$. $\left(1\right)$

x_1, x_2 là các nghiệm của $t\left(x\right)$ nên theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-3m^2+1\end{cases}$.

Do đó $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1 \Leftrightarrow -3m^2+2m+1=1 \Leftrightarrow -3m^2+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

So với điều kiện $\left(1\right)$, ta thấy chỉ $m=\frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 12: Tìm m để hàm số $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O.

Lời giải:

Tính $y'=-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)=-3\left(x^2-2x-m^2+1\right)$.

$t\left(x\right)=x^2-2x-m^2+1$ là tam thức bậc hai có $\Delta'=m^2$.

Do đó: y có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ y' có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow t\left(x\right)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m\neq 0$ $\left(1\right)$

Khi đó y' có các nghiệm là $x=1\pm m$

$\Rightarrow$ Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(1-m;-2-2m^3\right)$ và $B\left(1+m;-2+2m^3\right)$.

$\overrightarrow{OA}=\left(1-m;-2-2m^3\right)\Rightarrow OA^2=\left(1-m\right)^2+4\left(1+m^3\right)^2$.

$\overrightarrow{OB}=\left(1+m;-2+2m^3\right)\Rightarrow OB^2=\left(1+m\right)^2+4\left(1-m^3\right)^2$.

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi:

$OA=OB \Leftrightarrow OA^2=OB^2 \Leftrightarrow \left(1-m\right)^2+4\left(1+m^3\right)^2=\left(1+m\right)^2+4\left(1-m^3\right)^2$

$$\Leftrightarrow -4m+16m^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

So với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m=\pm\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 13: Tìm m để đồ thị của hàm số $y=-x^3+3mx+1$ có 2 điểm cực trị A,B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ).

Lời giải:

Tính $y'=-3x^2+3m=-3\left(x^2-m\right)$. Cho $y'=0\Leftrightarrow x^2-m=0\quad(1)$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$.

Khi đó 2 điểm cực trị là $A\left(-\sqrt{m};1-2m\sqrt{m}\right)$, $B\left(\sqrt{m};1+2m\sqrt{m}\right)$.

ΔOAB vuông tại $O\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow 4m^3+m-1=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$ (nhận).

Vậy $m=\frac{1}{2}$.

Bài toán 14: Cho hàm số $y=x^3-3mx+1$ (1). Cho $A(2;\ 3)$, tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A.

Lời giải:

Ta có $y'=3x^2-3m$. Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m>0$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{m}\\x=-\sqrt{m}\end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $B\left(\sqrt{m};-2m\sqrt{m}+1\right)$, $C\left(-\sqrt{m};2m\sqrt{m}+1\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{BC}=\left(-2\sqrt{m};4m\sqrt{m}\right)$

Gọi M là trung điểm của BC thì $M(0;1)$, nên $\overrightarrow{AM}=(-2;-2)$.

Vậy tam giác ABC là tam giác cân khi và chỉ khi

$$AM\perp BC\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow(-2).\left(-2\sqrt{m}\right)+(-2).\left(4m\sqrt{m}\right)=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}.$$

Bài toán 15: Tìm m để hàm số $\left(C_m\right):y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$ có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến O (O là gốc tọa độ).

Lời giải:

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

Để hàm số có cực trị thì PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta=1>0,\forall m$

Cực đại của đồ thị hàm số là $A\left(m-1;2-2m\right)$ và cực tiểu của đồ thị hàm số là $B\left(m+1;-2-2m\right)$

Theo giả thiết ta có $OA=\sqrt{2}OB\Leftrightarrow m^2+6m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3+2\sqrt{2}\\m=-3-2\sqrt{2}\end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị của m là $m=-3-2\sqrt{2}$ và $m=-3+2\sqrt{2}$.

Bài toán 16: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x+2$. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số có hai điểm cực trị nằm khác phía so với trục tung.

Lời giải:

Ta có $y'=x^2-2mx+2m-1$

Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung

$\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 2m-1<0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$.

Bài toán 17: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

Lời giải:

Ta có $y'=3x^2-6mx=3x(x-2m)$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$. (1)

Khi đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;3m^3)$, $B(2m;-m^3)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(0;3m^3) \Rightarrow OA=3|m^3|$. (2)

Ta thấy $A\in Oy \Rightarrow OA\equiv Oy \Rightarrow d(B,OA)=d(B,Oy)=2|m|$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $S_{OAB}=\frac{1}{2}.OA.d(B,OA)=3m^4$.

Do đó $S_{OAB}=48 \Leftrightarrow 3m^4=48 \Leftrightarrow m=\pm 2$ thỏa mãn (1).

Vậy $m=\pm 2$.

Bài toán 18: Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ (C). Tìm m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị (C) tạo với đường thẳng $\Delta: x+my+3=0$ một góc α biết $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6x$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy tọa độ điểm cực đại của (C) là $(0;0)$ và tọa độ điểm cực tiểu là $(2;-4)$.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $\Delta_1 : 2x + y = 0 \Rightarrow VTPT\ \vec{n_1} = (2;1)$

Đường thẳng đã cho $\Delta : x + my + 3 = 0$ có $VTPT\ \vec{n_2} = (1;m)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos(\Delta;\Delta_1) = \left|\cos(\vec{n_1};\vec{n_2})\right| = \dfrac{|m+2|}{\sqrt{5}.\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{4}{5}$

$\Leftrightarrow 25(m^2 + 4m + 4) = 5.16.(m^2+1)$

$\Leftrightarrow 11m^2 - 20m - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -\dfrac{2}{11} \end{array}\right.$.

Bài toán 19: Xác định tọa độ các điểm cực trị và viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8\ (C)$.

Lời giải:

Cách 1

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 6 = 3(x^2 - 2x - 2)$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$6\sqrt{3}$	$\searrow$	$-6\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy tọa độ điểm cực đại của (C) là $(1-\sqrt{3};6\sqrt{3})$ và tọa độ điểm cực tiểu là $(1+\sqrt{3};-6\sqrt{3})$.

Suy ra, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = -6x + 6$.

Cách 2

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 6 = 3(x^2 - 2x - 2)$.

Vì $t(x) = x^2 - 2x - 2$ có $\Delta' = 3 > 0$ nên $t(x)$ có hai nghiệm phân biệt, suy ra y' có hai nghiệm phân biệt. Do đó (C) có hai điểm cực trị của (C) là $M(x_1;y_1)$ và $N(x_2;y_2)$.

Thực hiện phép chia y cho $t(x)$ ta được $y = (x+1)t(x) - 6x + 6$.

Ta có $y(x_1) = -6x_1 + 6$ và $y(x_2) = -6x_2 + 6$ (do $t(x_1) = t(x_2) = 0$).

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = -6x + 6$.

Bài toán 20: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$.

Lời giải:

Ta có $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1-m^2) = -3(x^2 - 2mx + m^2 - 1)$.

Tam thức bậc hai $t(x)=x^2-2mx+m^2-1$ có $\Delta'=1>0$ nên $t(x)$ có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu liên tiếp khi x đi qua hai nghiệm này. Do đó hàm đã cho có cực đại, cực tiểu.

Thực hiện phép chia y cho $t(x)$ ta có $y=(m-x)t(x)+2x-m^2+m$. Giả sử x_0 là điểm cực trị nào đó của hàm số, ta có:

$y(x_0)=(m-x_0)t(x_0)+2x_0-m^2+m=2x_0-m^2+m$ (do $t(x_0)=0$).

Vậy phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=2x-m^2+m$.

Bài toán 21: Gọi d là phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2$ (1) với m là tham số thực. Tìm m để d cùng với hai trục tọa độ tạo thành một tam giác cân.

Lời giải:

Ta có $y'=3x^2-6x-m$.

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=9+3m>0 \Leftrightarrow m>-3$.

Chia y cho y' ta được

$$y=x^3-3x^2-mx+2=\frac{1}{3}(x-1)y'+\left(-\frac{2m}{3}-2\right)x+2-\frac{m}{3}.$$

Vậy phương trình $d: y=\left(-\frac{2m}{3}-2\right)x+2-\frac{m}{3}$.

Đường thẳng d cắt Ox và Oy lần lượt tại $A\left(\frac{m-6}{2m+6};0\right), B\left(0;\frac{6-m}{3}\right)$.

Suy ra tam giác OAB cân khi và chỉ khi $OA=OB \Rightarrow \left|\frac{m-6}{2m+6}\right|=\left|\frac{6-m}{3}\right| \Rightarrow m=6 \vee m=-\frac{9}{2} \vee m=-\frac{3}{2}$.

Với $m=6$ thì $A\equiv B\equiv O$ và so với điều kiện ta nhận $m=-\frac{3}{2}$.

Bài toán 22: Gọi d là phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2$ (1) với m là tham số thực. Tìm m để d song song với đường thẳng $\Delta: y=-4x+3$.

Lời giải:

Ta có $y'=3x^2-6x-m$.

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=9+3m>0 \Leftrightarrow m>-3$.

Chia y cho y' ta được

$$y=x^3-3x^2-mx+2=\frac{1}{3}(x-1)y'+\left(-\frac{2m}{3}-2\right)x+2-\frac{m}{3}.$$

Vậy phương trình $d: y=\left(-\frac{2m}{3}-2\right)x+2-\frac{m}{3}$.

Do d song song với đường thẳng $\Delta: y=-4x+3$ nên $\begin{cases} -\left(\dfrac{2m}{3}+2\right)=-4 \\ 2-\dfrac{m}{3}\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$.

Vậy $m=3$.

Bài toán 23: Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x+m-2$ (1) với m là tham số thực. Tìm m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: y=\dfrac{1}{2}x$.

Lời giải:

Ta có $y'=3x^2-6(m+1)x+9$.

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \Delta'=9m^2+18m-18>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1-\sqrt{3} \\ m>-1+\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Chia y cho y' ta được: $y=x^3-3(m+1)x^2+9x+m-2=\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{m+1}{3}\right)y'-2\left(m^2+2m-2\right)x+4m+1$

Giả sử các điểm cực đại và cực tiểu là $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ và I là trung điểm của AB.

$\Rightarrow y_1=-2\left(m^2+2m-2\right)x_1+4m+1;\ y_2=-2\left(m^2+2m-2\right)x_2+4m+1$.

Và $x_1+x_2=2m+2$; $x_1.x_2=3$.

Vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y=-2\left(m^2+2m-2\right)x+4m+1$.

A, B đối xứng nhau qua $\Delta: y=\dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow \begin{cases} AB\perp\Delta \\ I\in\Delta \end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

Vậy $m=1$.

2. HÀM TRÙNG PHƯƠNG : $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$

2.1 SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ PHƯƠNG

Ta có: $y' = 4ax^3 + 2bx;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2a} \end{array}\right.$

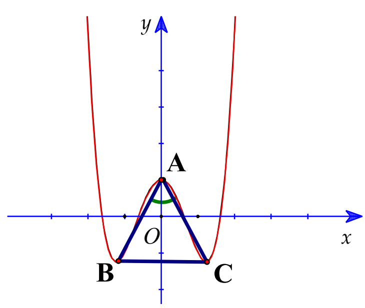
<table>
<tr><th colspan="2">Trường hợp</th><th colspan="2">Kết luận</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$ab \geq 0$</td><td>$\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$</td><td>Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu</td><td rowspan="2">Hàm số có một cực trị</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$</td><td>Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực đại</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$ab < 0$</td><td>$\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$</td><td>Hàm số có hai cực tiểu và một cực đại</td><td rowspan="2">Hàm số có ba cực trị</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$</td><td>Hàm số có một cực tiểu và hai cực đại</td></tr>
</table>

2.2 MỘT SỐ CÔNG THỨC VỀ BA ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM TRÙNG PHƯƠNG

Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\ (C)\ (ab < 0)$ có 3 cực trị:

$A(0;c), B\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$ tạo thành ΔABC.

Đặt $\alpha = \widehat{BAC}$



Nhận xét: ΔABC cân tại A, hai điểm B và C đối xứng nhau qua trục Oy.

Khi đó ta có thêm các kết quả sau:

- Độ dài cạnh: $AB = AC = \sqrt{\dfrac{b^4}{16a^2} - \dfrac{b}{2a}} = \dfrac{\sqrt{b^4 - 8ab}}{4|a|}$ và $BC = 2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

- Góc và tính chất của tam giác:

  Theo định lý hàm số cosin: $BC^2 = 2AB^2 - 2AB^2\cos\varphi = 2AB^2(1-\cos\varphi)$.Từ đó ta có:

  $\cos\varphi = \dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}$.

  Đặc biệt:

  - Δ ABC đều thì $\varphi = 60^0$ và khi đó: $\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{2} = \dfrac{b^3+8a}{b^3-8a} \Leftrightarrow b^3 = -24a$
  - Δ ABC vuông cân tại A thì: $\varphi = 90^0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow b^3 = -8a$

- ΔABC có trọng tâm $G\left(0; c-\dfrac{\Delta}{2a}\right)$

- Diện tích ΔABC : $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{4}\dfrac{b^2}{|a|}\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

  Thật vậy: Nếu gọi H là giao điểm của BC với trục Oy thì ta dễ thấy điểm H có tọa độ là:

  $H\left(0;-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$. Do đó: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2}.2.\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}.\left|c+\dfrac{\Delta}{4a}\right| = \dfrac{1}{4}\dfrac{b^2}{|a|}\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$

- Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC : $R = \dfrac{b^3-8a}{8|a|b}$. Thật vậy:

  $$R = \frac{AB.BC.CA}{4S} = \frac{AB^2.CA}{4S} = \frac{\dfrac{b^4-8ab}{16a^2}.2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}}{\dfrac{b^2}{|a|}.\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}} = \frac{b^3-8a}{8|a|b}$$

  Từ đó chúng ta có thể tìm được tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

- Tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC : $I\left(0;\dfrac{c}{2}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{\Delta}{8a}\right)$.

- Trục hoành chia ΔABC thành hai phần có diện tích bằng nhau $b^2 = 4\sqrt{2}|ac|$

- ΔABC có điểm cực trị cách đều trục hoành $b^2 = 8ac$

- ΔABC có 3 góc nhọn $b(8a+b^3) > 0$

- Đồ thị hàm số (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng $b^2 = \dfrac{100}{9}ac$

- Định tham số để hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành có diện tích phần trên và phần dưới bằng nhau $b^2 = \dfrac{36}{5}ac$.

- Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $x^2+y^2-\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}+c\right)y+c\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}\right)=0$

2.3 MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho hàm số $y=x^4+mx^2-m-5$ có đồ thị là $\left(C_m\right)$, m là tham số thực. Xác định m để đồ thị $\left(C_m\right)$ của hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x^3+2mx$, $y'=0\Leftrightarrow 4x^3+2mx=0\Leftrightarrow 2x(2x^2+m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=-\frac{m}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\end{array}\right.$

Để $\left(C_m\right)$ có 3 cực trị thì $-\frac{m}{2}>0\Leftrightarrow m<0$. Vậy $m<0$ thỏa YCBT.

Bài toán 2: Cho hàm số $y=mx^4+\left(m-1\right)x^2+1-2m$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có 3 điểm cực trị.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có : $y=mx^4+\left(m-1\right)x^2+1-2m$, $y'=4mx^3+2\left(m-1\right)x$

$y'=0\Leftrightarrow x\left(4mx^2+2m-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 4mx^2+2m-2=0\quad\left(I\right)\end{array}\right.$

Hàm số có 3 điểm cực trị hay phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy $\left(I\right)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 hay $0<m<1$.

Bài toán 3: Tìm m để hàm số $y=mx^4+\left(m^2-9\right)x^2+10$ có 3 điểm cực trị.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Để hàm số có ba điểm cực trị thì trước hết hàm số phải là hàm bậc 4, tức là $m\neq 0$.

Ta có: $y'=4mx^3+2\left(m^2-9\right)x=4mx\underbrace{\left(x^2+\frac{m^2-9}{2m}\right)}_{t(x)}$.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi

$y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow t\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow\frac{m^2-9}{2m}<0$

$\Leftrightarrow\ m\left(m^2-9\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<m<3\\ m<-3\end{array}\right.$.

Bài toán 4: Cho hàm số $y = mx^4 + (2m+1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số chỉ có một điểm cực tiểu.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4mx^3 + 2(2m+1)x$.

Hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu khi $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 2m+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$. Vậy $m > 0$ thỏa YCBT.

Bài toán 5: Tìm m để hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta xét hai trường hợp sau đây:

TH1: $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Khi đó $y = x^2 + \frac{3}{2} \Rightarrow$ hàm số chỉ có cực tiểu $(x = 0)$ mà không có cực đại

$\Rightarrow m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Khi đó hàm số đã cho là hàm bậc 4 có $y' = 4(m+1)x^3 - 2mx$.

Hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại khi $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ -m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 0$.

Kết hợp những giá trị m tìm được, ta có $-1 \leq m \leq 0$.

Bài toán 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}(m-1)x^4$ đạt cực đại tại $x = 0$

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = (m-1)x^3$.

+) $m = 1 \Rightarrow$ Hàm số không có cực trị

+) $m < 1$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$

+) $m > 1$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Vậy $m<1$ thỏa YCBT.

Bài toán 7: Tìm m để hàm số $y=x^4-2\left(m+1\right)x^2-2m-1$ đạt cực đại tại $x=1$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4\left(m+1\right)x$.

\+ Để hàm số đạt cực đại tại $x=1$ cần $y'\left(1\right)=0 \Leftrightarrow 4-4\left(m+1\right)=0 \Leftrightarrow m=0$

\+ Với $m=0 \Rightarrow y'=4x^3-4x \Rightarrow y'\left(1\right)=0$.

\+ Lại có $y''=12x^2-4 \Rightarrow y''\left(1\right)=8>0$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1 \Rightarrow m=0$ không thỏa mãn.

Vậy không có giá trị nào của m để hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Bài toán 8: Tìm m để hàm số $y=x^4-(m-1)x^2+1$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x^3-2(m-1)x$

Để hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ thì $y'\left(-1\right)=0 \Leftrightarrow m=3$

Với $m=3$ thì $y''\left(-1\right)=8>0$.

Vậy $m=3$ thỏa YCBT.

Bài toán 9: Cho hàm số $y=x^4-2\left(m+1\right)x^2+m$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA=BC$; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4\left(m+1\right)x=4x\underbrace{\left[x^2-\left(m+1\right)\right]}_{t\left(x\right)}$.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi y' có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $t\left(x\right)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow$ $m+1>0$ $\Leftrightarrow$ $m>-1$. $\quad\quad\left(*\right)$

Khi đó, ta có: $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{m+1} \\ x=\sqrt{m+1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A(0;m) \\ B\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right), \\ C\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right) \end{array}\right.$

(vai trò của B, C trong bài toán là như nhau nên có thể giả sử $B\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)$, $C\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)$.

Ta có $\overrightarrow{OA}=(0;m) \Rightarrow OA=|m|$; $\overrightarrow{BC}=\left(2\sqrt{m+1};0\right) \Rightarrow BC=2\sqrt{m+1}$.

Do đó

$OA=BC \Leftrightarrow |m|=2\sqrt{m+1} \Leftrightarrow m^2-4m-4=0 \ (\Delta'=8) \Leftrightarrow m=2\pm\sqrt{8}$ (thỏa mãn $(*)$).

Vậy $m=2\pm\sqrt{8}$ thỏa YCBT.

Bài toán 10: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4(m+1)x=4x\underbrace{\left[x^2-(m+1)\right]}_{t(x)}$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi

y' có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow t(x)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow m+1>0 \Leftrightarrow m>-1 \quad (*)$

Khi đó, ta có: $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{m+1} \\ x=\sqrt{m+1} \end{array}\right.$.

Suy ra các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;m^2)$, $B\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right)$, $C\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right)$

Ta thấy $A\in Oy$, B và C đối xứng nhau qua Oy nên tam giác ABC cân tại A. Do đó tam giác chỉ có thể vuông tại A.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{m+1};-(m+1)^2\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{m+1};-(m+1)^2\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(m+1)^4-(m+1)$.

Tam giác ABC vuông khi và chỉ khi

$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (m+1)^4-(m+1)=0 \Leftrightarrow (m+1)\left[(m+1)^3-1\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1=0 \\ m+1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right.$, kết hợp với điều kiện $(*)$ ta có $m=0$.

Bài toán 11: Tìm m để đồ thị hàm số $y=mx^4-4x^2+1$ có ba điểm cực trị là các đỉnh của một tam giác vuông cân.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4mx^3 - 8x$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x(4mx^2 - 8) = 0$ hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị là $A\left(0;1\right), B\left(\sqrt{\frac{2}{m}};1-\frac{4}{m}\right), C\left(-\sqrt{\frac{2}{m}};1-\frac{4}{m}\right)$.

Gọi I là trung điểm của BC.

ΔABC vuông cân tại A nên $BC = 2IA \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{2}{m}} = 2\left|\frac{4}{m}\right| \Leftrightarrow m = 8$.

Vậy $m = 8$ thỏa YCBT.

Bài toán 12: Tìm m để đồ thị hàm số $y = f\left(x\right) = x^4 + 2\left(m-2\right)x^2 + m^2 - 5m + 5$ có ba điểm cực trị là các đỉnh của một tam giác vuông cân.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 + 4\left(m-2\right)x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 2$.

Khi đó ba điểm cực trị là $A\left(0; m^2 - 5m + 5\right), B\left(\sqrt{2-m};1-m\right), C\left(-\sqrt{2-m};1-m\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right), \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right)$

ΔABC vuông cân tại A và $AB = AC$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \left(m-2\right)^3 = -1 \Leftrightarrow m = 1 \ \left(n\right)$.

Vậy $m = 1$ thỏa YCBT.

Bài toán 13: Tìm m để đồ thị hàm số $y = f\left(x\right) = x^4 + 2\left(m-2\right)x^2 + m^2 - 5m + 5$ có ba điểm cực trị là các đỉnh của một tam giác đều.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 + 4\left(m-2\right)x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 2$.

Khi đó ba điểm cực trị là $A\left(0; m^2 - 5m + 5\right), B\left(\sqrt{2-m};1-m\right), C\left(-\sqrt{2-m};1-m\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right), \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right)$

Do ΔABC luôn cân tại A vì $AB = AC$.

Nên ΔABC đều khi $\cos A = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt[3]{3} \ \left(n\right)$.

Vậy $m = 2 - \sqrt[3]{3}$ thỏa YCBT.

Bài toán 14: Tìm m để đồ thị hàm số $y = f\left(x\right) = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có ba điểm cực trị là các đỉnh của một tam giác có một góc bằng 120^0.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 + 4mx$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó ba điểm cực trị là $A\left(0; m^2 + m\right), B\left(\sqrt{-m}; m\right), C\left(-\sqrt{-m}; m\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{-m}; -m^2\right), \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{-m}; -m^2\right)$

Do ΔABC luôn cân tại A vì $AB = AC$.

Nên suy ra $\cos A = \cos 120^0 = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{-\sqrt{-m}.\sqrt{-m} + m^4}{m^4 - m} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{m + m^4}{m^4 - m} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3m^4 + m = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 0 & (l) \\ m = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} & (n) \end{array}\right.$.

Vậy $m = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ thỏa YCBT.

Bài toán 15: Tìm m để đồ thị hàm số $y = f\left(x\right) = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị là các đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị là $A\left(0; 2m + m^4\right), B\left(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m\right), C\left(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m\right)$.

Do ΔABC luôn cân tại A vì $AB = AC$.

Gọi H là trung điểm của BC nên $H\left(0; m^4 - m^2 + 2m\right) \Rightarrow AH = m^2$.

Khi đó $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AH.BC = \dfrac{1}{2} m^2 \sqrt{4m} = 4 \Leftrightarrow m^5 = 16 \Leftrightarrow m = \sqrt[5]{16}$.

Vậy $m = \sqrt[5]{16}$ thỏa YCBT.

Bài toán 16: Tìm m để đồ thị hàm số $y = f\left(x\right) = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị là các đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x^3-4mx$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$.

Khi đó ba điểm cực trị là $A\left(0;m-1\right),B\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right),C\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$.

Ta có $AB=AC=\sqrt{m^4+m}$; $BC=2\sqrt{m}$.

Gọi H là trung điểm của BC nên $H\left(0;-m^2+m-1\right)$.

Suy ra $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC=m^2\sqrt{m}$.

Khi đó $R=\dfrac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}}=1\Leftrightarrow\dfrac{\left(m^4+m\right)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}}=1\Leftrightarrow m^3-2m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$

Vậy $m=1$ hoặc $m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ thỏa YCBT.

3. HÀM SỐ DẠNG $y=\dfrac{a^2+bx+c}{mx+n}$

Đặt: $f(x)=ax^2+bx+c$. Ta có : $y'=\dfrac{amx^2+2anx+bn-mc}{(mx+n)^2}$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow amx^2+2anx+bn-mc=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $x_0=-\dfrac{n}{m}$

$$\Leftrightarrow \Delta'=a^2n^2-ma(bn-mc)>0 \Leftrightarrow a\left(an^2-mbn+m^2c\right)>0 \Leftrightarrow a\left(\frac{an^2}{m^2}-\frac{bn}{m}+c\right)$$

$$\Leftrightarrow af\left(-\frac{n}{m}\right)>0 \Leftrightarrow af(x_0)>0$$

Trường hợp	Kết luận
$af(x_0)>0$	Hàm số có hai điểm cực trị
$af(x_0)<0$	Hàm số không có cực trị

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{mx+n}=\frac{f(x)}{g(x)},\ y'=\frac{f'(x)g(x)-u(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

$$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2ax+b}{m}$$

Nên ta có tọa độ các cực trị là: $(x_{CT};y_{CT})=\left(x_{CT};\dfrac{2ax_{CT}+b}{m}\right)$; $(x_{CD};y_{CD})=\left(x_{CD};\dfrac{2ax_{CD}+b}{m}\right)$

Do đó phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y=\dfrac{\left(ax^2+bx+c\right)'}{(mx+n)'}=\dfrac{2ax+b}{m}$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Tìm m để hàm số $y = \dfrac{2x^2 - (m+2)x + 2m}{x-1}$ không có cực trị .

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = 2x^2 - (m+2)x + 2m$.

Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi $a.f(x_0) < 0 \Leftrightarrow 1.f(1) < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Bài toán 2: Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx - m}{x+m}$ có cực đại, cực tiểu .

A. $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right.$ C. $0 < m < 1$ D. $0 \le m \le 1$

Lời giải:

Trước hết ta thấy nếu có dấu bằng xảy ra với đạo hàm bậc ba hoặc hàm bậc hai trên bậc nhất thì hàm số sẽ không có cực trị, do đó chúng ta loại được đáp án D.

Đặt $f(x) = x^2 + 2mx - m$, hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi:

$a.f(x_0) > 0 \Leftrightarrow 1.f(-m) > 0 \Leftrightarrow -m(m+1) > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Chọn đáp án C.

Bài toán 3: Tìm các giá trị thực m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx - 2}{x-m}$ có cực đại và cực tiểu. Khi đó viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị đó.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{x^2 - 2mx - m^2 + 2}{(x-m)^2}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2mx - m^2 + 2 = 0 \quad (1) \\ x \ne m \end{cases}$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt $x \ne m$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2m^2 - 2 > 0 \\ -2m^2 + 2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$

Suy ra, hàm số có cực đại và cực tiểu khi $m < -1$ hoặc $m > 1$.

Khi đó phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y = \dfrac{\left(x^2 + mx - 2\right)'}{\left(x-m\right)'} = 2x + m$.

Bài toán 4: Tìm các giá trị thực m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + \left(2m+3\right)x + m^2 + 4m}{x+m}$ có hai cực trị trái dấu.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 3m}{(x+m)^2}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2mx + m^2 - 3m = 0 & (1) \\ x \neq -m \end{cases}$

Hàm số có hai cực trị trái dấu $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt trái dấu $x \neq -m$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3m > 0 \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = m^2 - 3m < 0 \\ 4m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 3 \\ m \neq \dfrac{3}{4} \end{cases}$. Vậy $m \in \left(0; \dfrac{3}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3}{4}; 3\right)$ thỏa YCBT.

C. THỦ THUẬT CASIO GIẢI CỰC TRỊ

I. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Điểm cực đại, cực tiểu: Hàm số f liên tục trên $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó :

Nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0

Nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0

2. Lệnh Casio: Tính đạo hàm SHIFT ∫□

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Hàm số $y=x^4+x^2+1$ đạt cực tiểu tại :

A. $x=-1$ **B.** $x=1$ **C.** $x=0$ **D.** $x=-2$

[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Lời giải:

Ngoài cách thử lần lượt từng đáp án để lấy kết quả. Nếu ta áp dụng một chút tư duy thì phép thử sẽ diễn ra nhanh hơn. Đồ thị hàm bậc 4 đối xứng nhau qua trục tung. Nếu hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ thì sẽ đạt cực tiểu tại $x=1$ $\Rightarrow$ Đáp án A và B loại vì ta chỉ được chọn 1 đáp án.

Thử với $x=0$

SHIFT ∫□ ALPHA) x■ 4 ▶ + ALPHA) x² + 1 ▶ 0 = ◀ ◀ − 0 . 1 = ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ DEL + =

$\frac{d}{dx}(X^4+X^2+1)\Big|_{x=0}$ → 0

$\frac{d}{dx}(X^4+X^2+1)\Big|_{x=0}$ → $-\frac{51}{250}$

$\frac{d}{dx}(X^4+X^2+1)\Big|_{x=0}$ → $\frac{51}{250}$

Ta thấy $f'(0)=0$, $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương $\Rightarrow$ $x=-1$ là cực tiểu $\Rightarrow$Đáp án **C** chính xác

Bài toán 2: Giá trị của m để hàm số $y=-x^3-2x^2+mx+2m$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ là :

A. $m<-1$ **B.** $m\neq-1$ **C.** $m=-1$ **D.** $m>-1$

[Thi thử THPT Yên Thế – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Lời giải:

Thử đáp án, ưu tiên thử giá trị xác định trước. Với đáp án C khi $m=-1$ $\Rightarrow y=-x^3-2x^2-x-2$

SHIFT ∫□ − ALPHA) x■ 3 ▶ − 2 ALPHA) x² − ALPHA) − 2 ▶ − 1 = ◀ ◀ − 0 . 1 = ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ DEL + =

$\frac{d}{dx}(-X^3-2X^2-X-2$ → 0

$\frac{d}{dx}(-X^3-2X^2-X-2$ → $-\frac{23}{100}$

$\frac{d}{dx}(-X^3-2X^2-X-2$ → $\frac{17}{100}$

Ta thấy $f'(-1)=0$, $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương $\Rightarrow$ $x=-1$ là cực tiểu $\Rightarrow$Đáp án **C** chính xác.

Bài toán 3: Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$

A. 4 **B.** 1 **C.** 0 **D.** -1

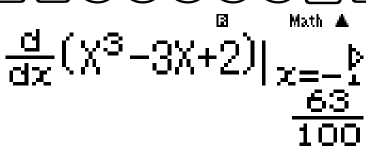
[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

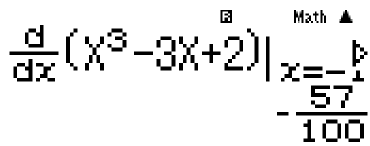
Lời giải:

Tính $y' = 3x^2 - 3$. Tìm điểm cực đại của hàm số là nghiệm phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Khảo sát sự đổi dấu qua điểm cực trị $x = -1$ bằng cách tính $f'(-1-0.1)$ và $f'(-1+0.1)$

SHIFT ∫ − ALPHA) x■ 3 ▶ − 2 ALPHA) x² − ALPHA) − 2 ▶ − 1 = ◀ ◀ − 0 • 1 = ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ DEL + =





Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm $\Rightarrow x = -1$ là điểm cực đại của hàm số

Giá trị cực đại $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$ $\Rightarrow$Đáp án chính xác là **A** chính xác.

Bài toán 4: Đồ thị hàm số $y = e^x\left(x^2 - 3x - 5\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

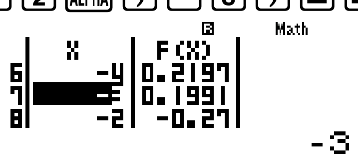
[Thi HK1 THPT Chu Văn An – Hà Nội năm 2017]

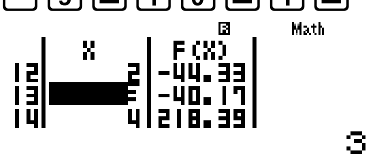
Lời giải:

Tính $y' = e^x\left(x^2 - 3x - 5\right) + e^x(2x - 3)$

Dùng MODE 7 để tìm điểm cực trị và khảo sát sự đổi dấu qua điểm cực trị

MODE 7 ALPHA ×10ˣ x■ ALPHA) ▶ (ALPHA) x² − 3 ALPHA) − 5) + ALPHA ×10ˣ x■ ALPHA) ▶ (2 ALPHA) − 3) = = − 9 = 1 0 = 1 =





Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần $\Rightarrow$ Hàm số có hai điểm cực trị .

$\Rightarrow$Đáp án chính xác là **A** chính xác.

Bài toán 5: Hàm số $y = |x|^3 - x^2 + 4$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị

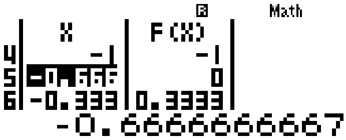
A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

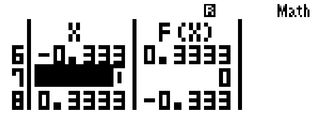
[Thi HK1 THPT Việt Đức – Hà Nội năm 2017]

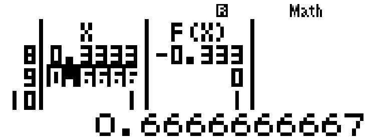
Lời giải:

Tính $y' = 3x|x| - 2x$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$. Dùng MODE 7 với thiết lập sao cho x chạy qua 3 giá trị này ta sẽ khảo sát được sự đổi dấu của y'

MODE 7 3 ALPHA) SHIFT hyp ALPHA) ▶ − 2 ALPHA) = − DEL = − 2 = 2 = 1 ÷ 3 =







Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 3 lần $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C** chính xác.

<u>Bài toán 6:</u> Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(2x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là :

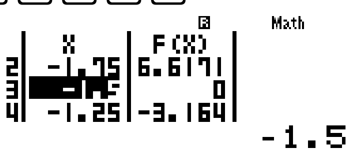
A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

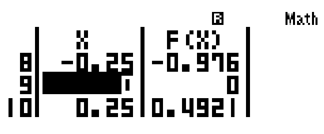
[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]

<u>Lời giải:</u>

Tính $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$. Dùng MODE 7 với thiết lập sao cho x chạy qua 3 giá trị này ta sẽ khảo sát được sự đổi dấu của y'

MODE 7 ALPHA) (ALPHA) − 1) x^2 (2 ALPHA) + 3) = = − 2 = 1 . 5 = 0 . 2 5 =





Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A** chính xác

<u>Chú ý</u> : Nếu quan sát tinh tế thì ta thấy ngay $(x-1)^2$ là lũy thừa bậc chẵn nên y' không đổi dấu qua $x = 1$ mà chỉ đổi dấu qua hai lũy thừa bậc lẻ x (hiểu là x^1) và $2x+3$ (hiểu là $(2x+3)^1$).

<u>Bài toán 7:</u> Cho hàm số $y = (x-1)(x+2)^2$. Trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng nào dưới đây.

A. $2x - y - 4 = 0$ **B.** $2x - y + 4 = 0$ **C.** $2x + y + 4 = 0$ **D.** $2x + y - 4 = 0$

[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

<u>Lời giải:</u>

Hàm số có dạng $y = (x-1)(x+2)^2 \Leftrightarrow y = x^3 + 3x^2 - 4$ Có đạo hàm $y' = 3x^2 + 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 4 \end{array}\right.$

Vậy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $M(-2;0), N(0;4)$. Trung điểm của hai điểm cực trị này là $I(-1;2)$. Điểm này thuộc đường thẳng $2x + y + 4 = 0$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B.**

Bài toán 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ có 2 điểm cực trị trái dấu .

A. $m<0$ **B.** $0<m<3$ **C.** $m<3$ **D.** Không có m

[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Lời giải:

Tính $y'=3x^2-6x+m$. Để hàm số có 2 điểm cực trị trái dấu thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Rightarrow$ Tích hai nghiệm là số âm $\Leftrightarrow \frac{m}{3}<0 \Leftrightarrow m<0$ $\Rightarrow$Đáp án chính xác là **A** chính xác .

Chú ý : Nếu quên định lý Vi-et ta có thể dùng phép thử. Với đáp án A chọn $m=-5$ chẳng hạn sẽ thấy luôn $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và hai nghiệm này đổi dấu.

Bài toán 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+2$ có đúng 1 cực đại và không có cực tiểu

A. $m<1$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m>1 \end{array}\right.$ **C.** $m<0$ **D.** $m\ge 1$

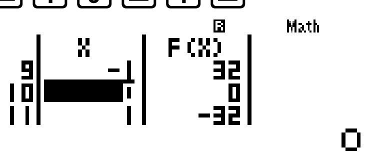
[Thi HK1 THPT Chu Văn An – Hà Nội năm 2017]

Lời giải:

Tính $y'=4mx^3+2(m-1)x$. Để hàm số có đúng 1 cực đại và không có cực tiểu thì $y'=0$ có đúng 1 nghiệm và $y'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm qua điểm đó.

Chọn $m=-5$. Dùng MODE 7 tính nghiệm $y'=0$ và khảo sát sự đổi dấu của $y'(x)$

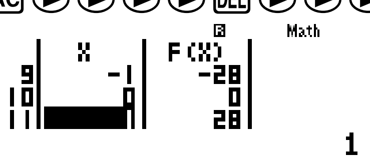
MODE 7 4 × (− 5) ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 3 ▶ + 2 (− 5 − 1) ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 1 lần từ dương sang âm$\Rightarrow m=-5$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp án đúng có thể là **A**, **B**, **C**

Chọn $m=5$. Dùng MODE 7 tính nghiệm $y'=0$ và khảo sát sự đổi dấu của $y'(x)$

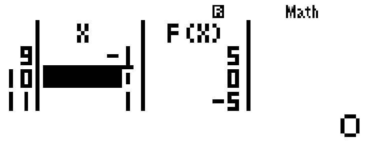
AC ▶ ▶ ▶ ▶ DEL ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ DEL = = = = =



Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 1 lần từ âm sang dương$\Rightarrow m=5$ loại $\Rightarrow$ Đáp án **B** sai.

Chọn $m=0.5$. Dùng MODE 7 tính nghiệm $y'=0$ và khảo sát sự đổi dấu của $y'(x)$

AC ▶ ▶ ▶ − 0 . ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ − 0 . = = = = =



Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 1 lần từ dương sang âm $\Rightarrow m=0.5$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp án **A** chính xác.

Bài toán 10: Tìm tập hợp tất cả các tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-m-2$ có 2 cực trị nằm ở hai nửa mặt phẳng khác nhau với bờ là trục hoành

A. $(-\infty;0)$ **B.** $(-\infty;-1)\setminus\{-5\}$ **C.** $(-\infty;0]$ **D.** $(-\infty;1)\setminus\{-5\}$

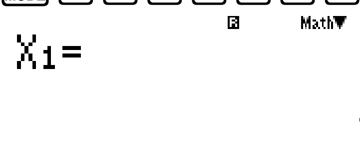
[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

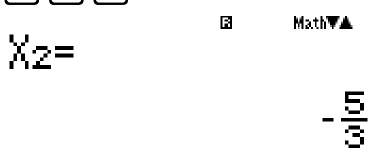
Lời giải:

Tính $y'=3x^2+2x+m$. Để hàm số có đúng 2 cực đại thì $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

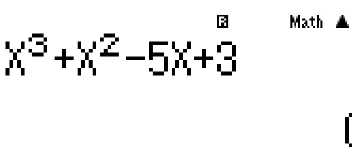
$\Leftrightarrow \Delta'=1-3m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow$ Cả 4 đáp án đều thỏa.

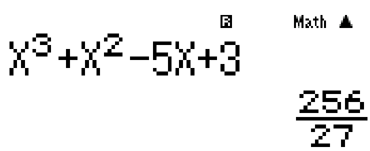
Chọn $m=-5$. Hàm số có dạng $y=x^3+x^2-5x+3$. Tính hai điểm cực trị của hàm số bằng lệnh giải phương trình MODE 5





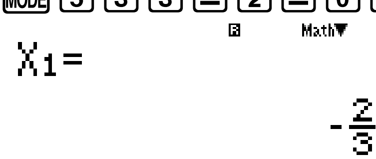
Từ đó suy ra $f(x_1)=f(1)=0; f(x_2)=f\left(-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{256}{27}$



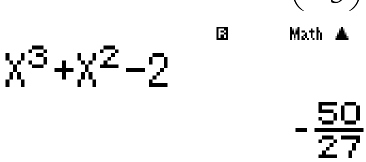


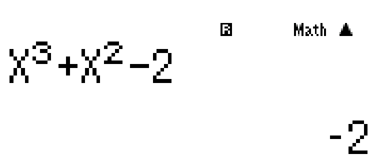
Để hai cực trị nằm về hai phía trục hoành thì $f(x_1)f(x_2)<0$ $\Rightarrow m=-5$ loại $\Rightarrow$ **B** hoặc **D** có thể đúng.

Chọn $m=0$. Hàm số có dạng $y=x^3+x^2-2$. Tính hai điểm cực trị của hàm số bằng lệnh giải phương trình MODE 5



Từ đó suy ra $f(x_1)=f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{50}{27}; f(x_2)=f(0)=-2$.





Để hai cực trị nằm về hai phía trục hoành thì $f(x_1)f(x_2)<0 \Rightarrow m=0$ loại $\Rightarrow$ **B** là đáp số chính xác.

Bài toán 11: Tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số: $y=x^3+3x^2-x+2$

Lời giải:

Bấm máy tính: MODE 2

$$x^3+3x^2-x+2-\left(3x^2+6x-1\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i}\frac{7}{3}-\frac{8}{3}i\Rightarrow y=-\frac{8}{3}x+\frac{7}{3}$$

Bài toán 12: Tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số: $y=x^3-3x^2+m^2x+m$

Lời giải:

Bấm máy tính: MODE 2

$$x^3-3x^2+m^2x+m-\left(3x^2-6x+m^2\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}\frac{1003000}{3}+\frac{1999994}{3}i$$

Ta có: $\frac{1003000}{3}+\frac{1999994}{3}i=\frac{1000000+3000}{3}+\frac{2000000-6}{3}i=\frac{m^2+3m}{3}+\frac{2m^2-6}{3}x$

Vậy đường thẳng cần tìm: $y=\frac{2m^2-6}{3}x+\frac{m^2+3m}{3}$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và đạt cực đại $x = 0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và cực tiểu tại $x = 0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = -2$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có ba điểm cực trị. **B.** Hàm số chỉ có đúng 2 điểm cực trị.

C. Hàm số không có cực trị. **D.** Hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị.

Câu 3. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

A. $y = x - 2.$ **B.** $y = 2x - 1.$ **C.** $y = -2x + 1.$ **D.** $y = -x + 2.$

Câu 4. Gọi M, n lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Khi đó giá trị của biểu thức $M^2 - 2n$ bằng:

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 + 17x^2 - 24x + 8$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $x_{CD} = 1.$ **B.** $x_{CD} = \dfrac{2}{3}.$ **C.** $x_{CD} = -3.$ **D.** $x_{CD} = -12.$

Câu 6. Cho hàm số $y = 3x^4 - 6x^2 + 1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $y_{CD} = -2.$ **B.** $y_{CD} = 1.$ **C.** $y_{CD} = -1.$ **D.** $y_{CD} = 2.$

Câu 7. Trong các hàm số sau, hàm số nào đạt cực đại tại $x = \dfrac{3}{2}$?

A. $y = \dfrac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2 - 3x.$ **B.** $y = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}.$

C. $y = \sqrt{4x^2 - 12x - 8}.$ **D.** $y = \dfrac{x - 1}{x + 2}.$

Câu 8. Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

A. $y = -10x^4 - 5x^2 + 7.$ **B.** $y = -17x^3 + 2x^2 + x + 5.$

C. $y = \dfrac{x - 2}{x + 1}.$ **D.** $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}.$

Câu 9. Cho hàm số $y = \dfrac{3x^2 + 13x + 19}{x + 3}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là:

A. $5x - 2y + 13 = 0.$ **B.** $y = 3x + 13.$ **C.** $y = 6x + 13.$ **D.** $2x + 4y - 1 = 0.$

Câu 10. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số có hai điểm cực trị. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số đạt cực đại $x=2$.

D. Hàm số không có cực trị.

Câu 11. Cho hàm số $y=x^7-x^5$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị.

B. Hàm số có đúng 3 điểm cực trị.

C. Hàm số có đúng hai điểm cực trị.

D. Hàm số có đúng 4 điểm cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 13. Cho hàm số $y=(x^2-2x)^{\frac{1}{3}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

C. Hàm số không có điểm cực trị.

D. Hàm số có đúng 2 điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+6x$. Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2. Khi đó giá trị của biểu thức $S=x_1^2+x_2^2$ bằng:

A. -10. **B.** -8. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu đạo hàm đổi dấu khi x chạy qua x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0.

B. Nếu $f'(x_0)=0$ thì hàm số đạt cực trị tại x_0.

C. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì đạo hàm đổi dấu khi x chạy qua x_0.

D. Nếu $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ thì hàm số không đạt cực trị tại x_0.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0)=0$.

B. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0)=0$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0)>0$ hoặc $f''(x_0)<0$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $[a,b]$ và x_0 thuộc đoạn $[a,b]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0)<0$ hoặc $f''(x_0)>0$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0)=0$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0.

D. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0)=0$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực đại là M, giá trị cực tiểu là m thì $M>m$.

B. Nếu hàm số $y=f(x)$ không có cực trị thì phương trình $f'(x_0)=0$ vô nghiệm.

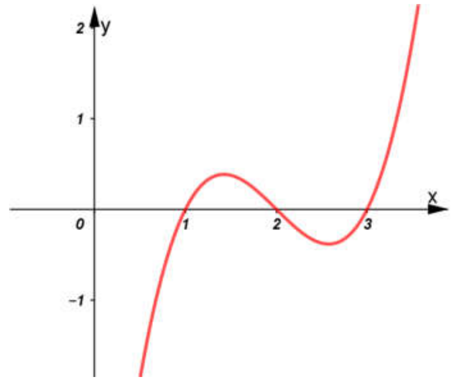
C. Hàm số $y=f(x)$ có đúng hai điểm cực trị thì hàm số đó là hàm bậc ba.

D. Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ với $a\neq 0$ luôn có cực trị.

Câu 19. Hàm số bậc ba có thể có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 hoặc 1 hoặc 2. **B.** 1 hoặc 2. **C.** 0 hoặc 2. **D.** 0 hoặc 1.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

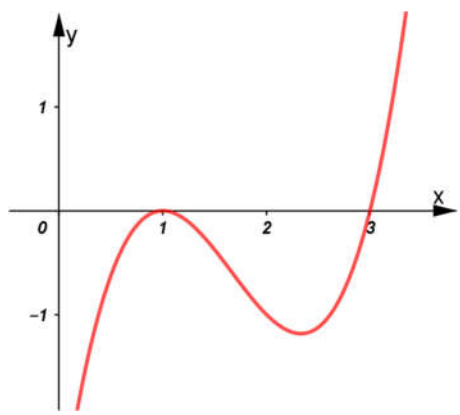
A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm có một điểm cực trị.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

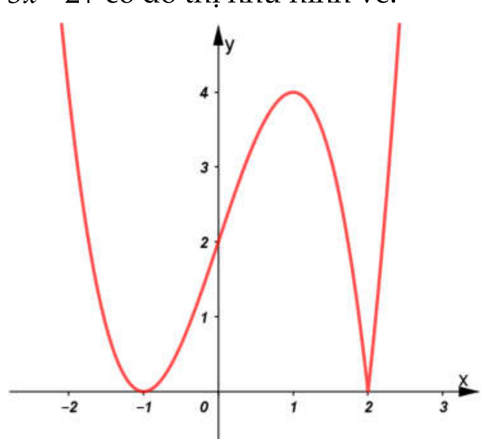
A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực tiểu.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 22. Cho hàm số $y=|x^3-3x-2|$ có đồ thị như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bốn điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

Câu 23. Hàm số nào sau đây có đúng hai điểm cực trị?

A. $y = x + \dfrac{1}{x+1}$. **B.** $y = x^3 + 3x^2 + 7x - 2$.

C. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$. **D.** $y = x - \dfrac{2}{x+1}$.

Câu 24. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào là khẳng định sai?

A. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ luôn có cực trị.

B. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ luôn có ít nhất một điểm cực trị.

C. Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, (ad - bc \neq 0)$ luôn không có cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ có nhiều nhất hai điểm cực trị.

Câu 25. Hàm số nào sau đây đạt cực đại tại $x = 1$?

A. $y = x^5 - 5x^2 + 5x - 13$. **B.** $y = x^4 - 4x + 3$.

C. $y = x + \dfrac{1}{x}$. **D.** $y = 2\sqrt{x} - x$.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 3$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. $m = 3$. **B.** $m > 3$. **C.** $m \leq 3$. **D.** $m < 3$.

Câu 27. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{4x+7}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 28. Hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 2m + 3$ có đúng 1 điểm cực trị thì giá trị của m là:

A. $m \geq 2$. **B.** $m < 2$. **C.** $m > 2$. **D.** $m = 2$.

Câu 29. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 5x - 17$. Gọi hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là x_1, x_2. Khi đó, tích số x_1x_2 có giá trị là:

A. 5. **B.** –5. **C.** –4. **D.** 4.

Câu 30. Hàm số $y = a\sin 2x + b\cos 3x - 2x \ (0 < x < 2\pi)$ đạt cực trị tại $x = \dfrac{\pi}{2}; x = \pi$. Khi đó, giá trị của biểu thức $P = a + 3b - 3ab$ là:

A. 3. **B.** –1. **C.** 1. **D.** –3.

Câu 31. Hàm số $y = -4x^3 - 6x^2 - 3x + 2$ có mấy điểm cực trị?

C. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 32. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi?

A. $m>0$. **B.** $m\neq 0$. **C.** $m=0$. **D.** $m<0$.

Câu 33. Cho hàm số $y=(m-1)x^3-3x^2-(m+1)x+3m^2-m+2$. Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì:

A. $m=1$. **B.** $m\neq 1$. **C.** $m>1$. **D.** m tùy ý.

Câu 34. Khẳng định nào là đúng trong các khẳng định sau:

A. Hàm số trùng phương có thể có 2 điểm cực trị.

B. Hàm số bậc 3 có thể có 3 cực trị.

C. Hàm số trùng phương luôn có cực trị.

D. Hàm phân thức không thể có cực trị.

Câu 35. Hàm số $y=-3\sqrt[3]{x^2}+2$ có bao nhiêu cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 36. Cho hàm số $y=-3x^4+4x^2-2017$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có 1 điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

B. Hàm số không có cực trị.

C. Hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

D. Hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Câu 37. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y=x^3+3x^2$. **B.** $y=x^3-x$. **C.** $y=x^4-3x^2+2$. **D.** $y=x^3$.

Câu 38. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+4x-7$. Gọi hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là x_1, x_2. Khi đó, giá trị của tổng x_1+x_2 là:

A. -6. **B.** -4. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 39. Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x^2+4$ là:

A. -4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 40. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Nếu đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là gốc tọa độ và điểm $A(-1;-1)$ thì hàm số có phương trình là:

A. $y=2x^3-3x^2$. **B.** $y=-2x^3-3x^2$.

C. $y=x^3+3x^2+3x$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

Câu 41. Hàm số nào dưới đây có cực trị?

A. $y=x^4+1$. **B.** $y=x^3+x^2+2x-1$.

C. $y=2x-1$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

Câu 42. Điều kiện để hàm số $y=ax^4+bx^2+c \quad (a\neq 0)$ có 3 điểm cực trị là:

A. $ab<0$. **B.** $ab>0$. **C.** $b=0$. **D.** $c=0$.

Câu 43. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2mx^2+(4m-1)x-3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m<\dfrac{1}{2}$.

B. Với mọi m, hàm số luôn có cực trị.

C. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m \neq \dfrac{1}{2}$.

D. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m > 1$.

Câu 44. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có đúng 2 cực trị?

A. $y = x^4 + 3x^2 + 2$. **B.** $y = x^3 - 5x^2 + 7$.

C. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{3x}$. **D.** $y = 2017x^6 + 2016x^4$.

Câu 45. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \sqrt{1 + 4x - x^4}$ có tọa độ là:

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 46. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + ax + b$ có điểm cực trị là $A(1;3)$. Khi đó giá trị của $4a - b$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 47. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đó. Giá trị của $2a^2 + b$ là:

A. -8. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 48. Cho hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 3$ đạt cực trị tại x_1, x_2, x_3. Khi đó, giá trị của tích $x_1x_2x_3$ là:

A. 0. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 49. Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 50. Cho hàm số y= $x^3 - 3x^2 + 2$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Hàm số có cực đại, cực tiểu. **B.** Hàm số không có cực trị.

C. Hàm số có cực đại, không có cực tiểu. **D.** Hàm số có cực tiểu không có cực đại.

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		x_0		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

Khi đó hàm số đã cho có:

A. Một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

B. Một điểm cực đại, hai điểm cực tiểu.

C. 1 điểm cực đại, không có điểm cực tiểu.

D. 2 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu.

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = mx^4 - (m+1)x^2 + 2m - 1$ có 3 điểm cực trị ?

A. $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>0 \end{array}\right.$. **B.** $m<-1$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $m>-1$.

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=x^3-2x^2+(m+3)x-1$ không có cực trị?

A. $m\geq -\frac{8}{3}$. **B.** $m>-\frac{5}{3}$. **C.** $m\geq -\frac{5}{3}$. **D.** $m\leq -\frac{8}{3}$.

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x-1$ đạt cực đại tại $x=-2$?

A. Không tồn tại m. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

C. Hàm số có giá trị cực tiểu là $-\frac{1}{3}$. **D.** Hàm số không có cực trị.

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+2x^2+mx+1$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CĐ}<x_{CT}$.

A. $m<2$. **B.** $-2<m<0$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $0<m<2$.

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m+6)x+m$ có cực đại và cực tiểu.

A. $-2<m<3$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>3 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\leq -2 \\ m\geq 3 \end{array}\right.$. **D.** $-2\leq m\leq 3$.

Câu 58. Tìm tất các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-6$ có 2 cực trị ?

A. $m\in(-3;1)\setminus\{-2\}$. **B.** $m\in(-3;1)$.

C. $m\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$. **D.** $m\in[-3;1]$.

Câu 59. Tìm tất các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m+3)x^2+4(m+3)x+m^3-m$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2$.

A. $-\frac{7}{2}<m<-2$. **B.** $-3<m<1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right.$. **D.** $-\frac{7}{2}<m<-3$.

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(\mathrm{m}^2-m+2)x^2+\left(3m^2+1\right)x$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1 \end{array}\right.$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Câu 61. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số: $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3\left(m-2\right)x+\frac{1}{6}$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

A. $1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\frac{2}{3} \\ m=2 \end{array}\right.$.

C. $m\in\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2};1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\setminus\{0\}$. **D.** $m=2$.

Câu 62. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^4+\left(m-1\right)x^2+m$ chỉ có đúng một cực trị.

A. $0<m\le 1$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$ **D.** $0\le m\le 1$.

Câu 63. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^4+\left(m^2-4m+3\right)x^2+2m-1$ có ba điểm cực trị.

A. $m\in\left(-\infty;0\right)$. **B.** $m\in\left(0;1\right)\cup\left(3;+\infty\right)$.

C. $m\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(1;3\right)$. **D.** $m\in\left(1;3\right)$.

Câu 64. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2m^2x^2+1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $m=-1$. **B.** $m\neq 0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\pm 1$.

Câu 65. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2\left(m+1\right)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. Không tồn tại m. **B.** $m=0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$. **D.** $m=-1$.

Câu 66. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác đều.

A. Không tồn tại m. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\sqrt[3]{3} \end{array}\right.$. **C.** $m=\sqrt[3]{3}$. **D.** $m=\pm\sqrt{3}$.

Câu 67. Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ là:

A. $4\sqrt{5}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 4.

Câu 68. Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$ có đồ thị là (C). Diện tích tam giác có các đỉnh là các điểm cực trị của đồ thị (C) là:

A. $m=8$. **B.** $m=16$. **C.** $m=32$. **D.** $m=4$.

Câu 69. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-3$ có cực trị.

A. $m\neq 1$. **B.** $\forall m$. **C.** $m\leq 1$. **D.** $m\geq 1$.

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^4+\left(m^2-9\right)x^2+10$ có 3 điểm cực trị.

A. $\left[\begin{array}{l}0<m<3\\ m<-3\end{array}\right.$. **B.** $m<-3$. **C.** $0<m\leq 3$. **D.** $\left[\begin{array}{l}0<m<3\\ m\leq -3\end{array}\right.$.

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left(m+1\right)x^4-mx^2+\frac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m<-1$. **B.** $-1\leq m\leq 0$. **C.** $m>1$. **D.** $-1\leq m<0$.

Câu 72. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+(m-1)x+2$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ dương.

A. $0\leq m\leq 1$. **B.** $m\geq 1$. **C.** $m\geq 0$. **D.** $m>1$.

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=-x^3+3mx+1$ có 2 điểm cực trị A,B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ).

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Câu 74. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx-3m+4$ (C) có hai điểm cực trị là A và B sao cho hai điểm này cùng với điểm $C\left(-1;-\frac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 75. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$.

A. $m=0$. **B.** $m=-\frac{2}{3}$. **C.** $m=\frac{2}{3}$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 76. Gọi x_1,x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để: $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7$

A. $m=\pm\sqrt{2}$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** $m=0$. **D.** $m=\pm 1$.

Câu 77. Cho hàm số $y=\left(m-1\right)x^4-3mx^2+5$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số có cực đại mà không có cực tiểu

A. $m\in\left(-\infty;0\right]\cup\left[1;+\infty\right)$. **B.** $m\in\left[0;1\right]$.

C. $m\in\left(0;1\right)$. **D.** $m\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

Câu 78. Cho hàm số $y=x^4-2\left(1-m^2\right)x^2+m+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích lớn nhất.

A. $m=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=1$.

Câu 79. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3+3\left(m-3\right)x^2+11-3m$ có hai điểm cực trị. Đồng thời hai điểm cực trị đó và điểm $C\left(0;-1\right)$ thẳng hàng.

A. $m=4$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=2$.

Câu 80. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số: $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I\left(1;1\right)$ bán kính bằng 1 tại 2 điểm A,B mà diện tích tam giác IAB lớn nhất.

A. $m=1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=1\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=1\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 81. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3\left(m+1\right)x^2+6mx$ có hai điểm cực trị A,B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng: $y=x+2$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=3\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-3\end{array}\right.$.

Câu 82. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+3\left(m+2\right)x-m-6$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 2 cực trị cùng dấu.

A. $\dfrac{-23}{4}<m<2$. **B.** $\dfrac{-15}{4}<m<2$. **C.** $\dfrac{-21}{4}<m<2$. **D.** $\dfrac{-17}{4}<m<2$.

Câu 83. Cho hàm số $y=2x^3-9x^2+12x+m$. Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A, B đồng thời A, B cùng với gốc tọa đọ O không thẳng hàng. Khi đó chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng bao nhiêu ?

A. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{10}+\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{20}-\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Câu 84. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thưc m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành 1 tam giác nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=1$.

Câu 85. Tính theo m khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu (nếu có) của đồ thị hàm số: $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$.

A. $\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(4m^4+5m^2+9\right)}$. **B.** $\dfrac{4}{9}\sqrt{\left(2m^2+1\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}$.

C. $\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}$. **D.** $\sqrt{\left(4m^2+4\right)\left(4m^4+8m^2+10\right)}$.

Câu 86. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=2x^3+3\left(m-1\right)x^2+6m\left(1-2m\right)x$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trên đường thẳng có phương trình: $y=-4x$ $\left(d\right)$.

A. $m \in \{1\}$. **B.** $m \in \{0;1\}$. **C.** $m \in \left\{0;\ \frac{1}{2};\ 1\right\}$. **D.** $m \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 87. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ có đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu vuông góc với đường thẳng có phương trình: $y = 3x\ (d)$.

A. $m = \pm\sqrt{\frac{45}{2}}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = \pm\sqrt{\frac{47}{2}}$.

Câu 88. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - 3m^2 - 1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

A. $m = 1$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \\ m = \pm 1 \end{array}\right.$. **D.** $m = \pm 1$.

Câu 89. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng có phương trình: $y = x - 1\ (d)$.

A. $m = 0$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -\frac{9}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -\frac{9}{2}$.

Câu 90. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \pm\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m = \pm\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m = 1$.

Câu 91. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác nội tiếp.

A. $m = \pm 1$. **B.** $m = 1$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $m = -1$.

Câu 92. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 8m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 64.

A. Không tồn tại m. **B.** $m = \sqrt[5]{2}$. **C.** $m = -\sqrt[5]{2}$. **D.** $m = \pm\sqrt[5]{2}$.

Câu 93. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn hơn 1.

A. $m < -1$. **B.** $m > 2$.

C. $m \in (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 94. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - (3m-1)x^2 + 2m + 1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với điểm $D(7;3)$ nội tiếp được một đường tròn.

A. $m=3.$ **B.** $m=1.$ **C.** $m=-1.$ **D.** Không tồn tại m.

Câu 95. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=-x^4+2mx^2-4m+1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ tạo thành 1 hình thoi.

A. Không tồn tại m. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{4} \\ m=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m=-1.$ **D.** $m=1.$

Câu 96. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O.

A. $m=\pm\dfrac{1}{2}.$ **B.** $m=\dfrac{1}{2}.$ **C.** $m=-1.$ **D.** $m=\pm1.$

Câu 97. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

A. $m=2$ hoặc $m=0$. **B.** $m=2.$ **C.** $m=-2.$ **D.** $m=\pm2.$

Câu 98. Cho hàm số $y=x^4-2\left(m+1\right)x^2+m$ (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số (C) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA=BC$; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

A. $m=2\pm2\sqrt{2}.$ **B.** $m=2+2\sqrt{2}.$ **C.** $m=2-2\sqrt{2}.$ **D.** $m=\pm1.$

Câu 99. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y=x$.

A. $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ **B.** $m=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

C. $m=0$ hoặc $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ **D.** $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Câu 100. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+m$ có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O.

A. $m=-3-2\sqrt{2}$ hoặc $m=-1$. **B.** $m=-3+2\sqrt{2}$ hoặc $m=-1$.

C. $m=-3+2\sqrt{2}$ hoặc $m=-3-2\sqrt{2}$. **D.** $m=-3+2\sqrt{2}.$

Câu 101. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ (C) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $m=\pm1.$ **B.** $m=1$ hoặc $m=0$.

C. $m=-1$ hoặc $m=0$. **D.** $m=-1.$

Câu 102. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A,B sao cho $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (Trong đó O là gốc tọa độ).

A. $m=-1.$ **B.** $m=1$.

C. $m=-1$ hoặc $m=-\dfrac{17}{11}$. **D.** $m=1$ hoặc $m=-\dfrac{17}{11}$.

Câu 103. Cho hàm số $y=x^3-3x^2\ (C)$.Tìm tất cả các giá trị thực tham số m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị (C) tạo với đường thẳng $\Delta: x+my+3=0$ một góc α biết $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$.

A. $m=2$ hoặc $m=-\dfrac{2}{11}$. **B.** $m=-2$ hoặc $m=-\dfrac{2}{11}$.

C. $m=2$ hoặc $m=\dfrac{2}{11}$. **D.** $m=2$.

Câu 104. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-4\left(m-1\right)x^2+2m-1$ có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$. **D.** $m=1-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

Câu 105. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm $M(2m^3;m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1\ (C)$ một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

A. $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

II. ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

1B	2A	3C	4B	5D	6B	7B	8A	9C	10D
11C	12A	13C	14D	15C	16B	17D	18D	19C	20C
21B	22D	23A	24A	25D	26B	27D	28A	29A	30C
31C	32C	33B	34C	35C	36D	37D	38D	39D	40B
41A	42A	43C	44B	45A	46A	47C	48A	49B	50A
51A	52A	53C	54A	55C	56D	57B	58A	59D	60B
61B	62C	63C	64D	65B	66C	67C	68A	69A	70A
71B	72D	73D	74D	75C	76B	77B	78C	79A	80B
81C	82D	83B	84D	85C	86A	87A	88D	89A	90B
91A	92D	93B	94A	95B	96A	97D	98A	99D	100C
101A	102D	103A	104C	105B					

Câu 1. **Chọn B.**

$$y'=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta được hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=0$

Câu 2. **Chọn A.**

$$y'=4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$$ Ta có: $y(0)=3;\quad y(1)=y(-1)=2$ nên hàm số có hai cực trị.

Câu 3. **Chọn C.**

$$y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.\Rightarrow A(1;-1),B(-1;3)\Rightarrow \text{Phương trình } AB: y=-2x+1$$

Phương pháp trắc nghiệm:

Bấm máy tính:

Bước 1: Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2: $x^3-3x+1-\left(3x^2-3\right)\left(\dfrac{x}{3}\right)$

Bước 3: CALC $x=i$

Kết quả: $1-2i\Rightarrow$ phương trình AB: $y=1-2x$

Câu 4. **Chọn B.**

$$y'=\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2};\ y'=0\Leftrightarrow\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ và $y_{CD}=-3$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $y_{CT}=1$

$\Rightarrow M^2-2n=7$

Phương pháp trắc nghiệm:

Bấm máy tính:

Bước 1: $\left.\dfrac{d\left(\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}\right)}{dx}\right|_{x=1000}.(100+2)^2 \to 1004003=1000^2+4000+3=x^2+4x+3$

$y'=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$

Bước 2: Giải phương trình bậc hai: $x^2+4x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\to A \\ x=-3\to B \end{array}\right.$

Bước 3: Nhập vào máy tính $\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$

Cacl $x=A\to C$

Cacl $x=B\to D$

Bước 4: Tính $C^2-2D=7$

Câu 5. **Chọn D.**

$y'=3x^2+34x-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-12 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-12$.

Câu 6. **Chọn B.**

$y'=12x^3-12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CD}=1$.

Câu 7. **Chọn B.**

Hàm số $y=\sqrt{-x^2+3x-2}$ có $y'=\dfrac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$ và y' đổi dấu từ "+" sang "−" khi x chạy qua $\dfrac{3}{2}$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=\dfrac{3}{2}$.

Dùng casio kiểm tra: $\begin{cases} y'\left(\dfrac{3}{2}\right)=0 \\ y''\left(\dfrac{3}{2}\right)<0 \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại $\dfrac{3}{2}$.

Câu 8. **Chọn A.**

Hàm số $y=-10x^4-5x^2+7$ có $y'=-40x^3-10x=0 \Leftrightarrow x=0$ và $y''(0)=-10<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 9. **Chọn C.**

$$y'=\frac{3x^2+18x+20}{(x+3)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-9+\sqrt{21}}{3}\\x=\frac{-9-\sqrt{21}}{3}\end{array}\right.$$ $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=6x+13$.

Phương pháp trắc nghiệm:

Tại điểm cực trị của đồ thị hàm số phân thức, ta có: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$y=\frac{(3x^2+13x+19)'}{(x+3)'}\Leftrightarrow y=6x+13$$

Câu 10. **Chọn D.**

TXĐ: $D=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

$y'=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=0\Leftrightarrow x=1(l)$.

y' không đổi dấu trên các khoảng xác định nên hàm số không có cực trị.

Câu 11. **Chọn C.**

$$y'=7x^6-5x^4=x^4(7x^2-5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{\frac{5}{7}}\end{array}\right..$$

y' chỉ đổi dấu khi x chạy qua $\pm\sqrt{\frac{5}{7}}$ nên hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 12. **Chọn A.**

$f'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua -1 và 3 nên hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 13. **Chọn C.**

TXĐ $D=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

$y'=\frac{1}{3}(x^2-2x)^{-\frac{2}{3}}(2x-2)$

y' không đổi dấu trên các khoảng xác định nên hàm số không có cực trị.

Câu 14. **Chọn D.**

$D=\mathbb{R}$, $y'=-3x^2+6x+6$

Phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và y' đổi dấu khi x chạy qua x_1,x_2 nên hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2.

$S=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=8$

Phương pháp trắc nghiệm:

Bước 1: Giải phương trình bậc hai: $-3x^2+6x+6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{3}\to A\\x=1-\sqrt{3}\to B\end{array}\right.$

Bước 2: Tính $A^2 + B^2 = 8$

Câu 15. **Chọn C.**

Câu 16. **Chọn B.**

Câu 17. **Chọn D.**

Câu 18. **Chọn D.**

Câu 19. **Chọn C.**

Hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d,(a \neq 0)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $\Delta' = b^2 - 3ac$

Nếu $\Delta' \leq 0$ thì y' không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và y' đổi dấu khi x chạy qua x_1, x_2 nên hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2.

Câu 20. **Chọn C.**

Câu 21. **Chọn B.**

Câu 22. **Chọn D.**

Câu 23. **Chọn A.**

Hàm số $y = x + \dfrac{1}{x+1}$ có TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$y' = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

y' đổi dấu khi x chạy qua -2 và 0 nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 24. **Chọn A.**

Câu 25. **Chọn D.**

Hàm số $y = 2\sqrt{x} - x$ có TXĐ $D = [0;+\infty)$

$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) = -\dfrac{1}{2} < 0 \end{cases}$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 26. **Chọn B.**

Để hàm số đạt cực đại $x = 1$ thì $\begin{cases} y'(1) = 3.1^2 - 2m.1 + 2m - 3 = 0 \\ y''(1) = 6.1 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$

Câu 27. **Chọn D.**

Hàm phân thức hữu tỉ bậc nhất/ bậc nhất luôn đơn điệu trên các khoảng xác định của chúng, do đó hàm này không có cực trị.

Câu 28. **Chọn A.**

Hàm trùng phương có 1 điểm cực trị khi $ab \geq 0 \Leftrightarrow m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 29. **Chọn A.**

Ta có: $y' = -x^2 + 8x - 5$.

x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 5 = 0$.

Khi đó, theo định lý Viet, ta có: $x_1 x_2 = 5$.

Câu 30. Chọn C.

TXĐ: $D=R$

Ta có: $y'=2a\cos 2x-3b\sin 3x-2$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=\dfrac{\pi}{2};x=\pi$ nên ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} y'(\dfrac{\pi}{2})=-2a+3b-2=0 \\ y'(\pi)=2a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\dfrac{4}{3} \end{cases}$. Do đó, giá trị của biểu thức $P=a+3b-3ab=1$.

Câu 31. Chọn C.

Đây là hàm số bậc 3 có $b^2-3ac=6^2-3.3.4=0$. Do đó, hàm số luôn đơn điệu trên R. Hàm số này không có cực trị.

Câu 32. Chọn C.

$y'=3x^2-6x+m;\ y''=6x-6$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ khi: $\begin{cases} y'(2)=3.2^2-6.2+m=0 \\ y''(2)=6.2-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$

Câu 33. Chọn B.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $\begin{cases} b^2-3ac>0 \\ a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+3(m-1)(m+1)>0 \\ m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 1$

Câu 34. Chọn C.

A. Hàm số trùng phương luôn có cực trị do đạo hàm của nó là một đa thức bậc 3 luôn có nghiệm thực. Nên đáp án này đúng.

B. Hàm số bậc 3 có tối đa 2 cực trị. Nên đáp án này sai.

C. Hàm số trùng phương chỉ có thể có 1 hoặc 3 điểm cực trị. Nên đáp án này sai.

D. Đáp án này sai.

Câu 35. Chọn C.

Ta có: $y'=-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Dễ dàng nhận thấy $x=0$ là điểm tới hạn của hàm số, và y' đổi dấu khi đi qua $x=0$. Nên $x=0$ là cực trị của hàm số. Hơn nữa, ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Do đó, $x=0$ là cực đại của hàm số.

Câu 36. Chọn D.

Đây là hàm số trùng phương có $ab=-3.4<0$ nên hàm số này có 3 điểm cực trị. Hơn nữa, hàm số có $a=-3<0$ nên hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Câu 37. Chọn D.

A. Có $y'=3x^2\geq 0\forall x\in R$. Do đó, hàm số này luôn đồng biến trên R. Hay nói cách khác, hàm số này không có cực trị.

B. Đây là hàm số bậc 3 có $b^2-3ac=3>0$. Do đó, hàm số này có 2 cực trị.

C. Hàm số trùng phương luôn có cực trị.

D. Đây là hàm số bậc 3 có $b^2-3ac=9>0$. Do đó, hàm số này có 2 cực trị.

Câu 38. Chọn D.

$y' = 3x^2 - 12x + 4$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 4 = 0$.

x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Khi đó, theo định lý Viet, ta có: $x_1 + x_2 = 4$.

Câu 39. **Chọn D.**

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$, $y_{CD} - y_{CT} = y(0) - y(2) = 4$.

Câu 40. **Chọn B.**

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Đồ thị hàm số có điểm cực trị là gốc tọa độ, ta có: $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = d = 0$

Đồ thị hàm số có điểm cực trị là $A(-1;-1)$, ta có: $\begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y(-1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ b - a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$

Vậy hàm số là: $y = -2x^3 - 3x^2$.

Câu 41. **Chọn A.**

A. Hàm số trùng phương luôn có cực trị.

B. Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = -5 < 0$. Do đó, hàm số này không có cực trị.

C. Hàm số bậc nhất đơn điệu trên R. Do đó, hàm số này cũng không có cực trị.

D. Hàm số phân thức hữu tỷ bậc nhất/bậc nhất luôn đơn điệu trên các khoảng xác định của nó.

Do đó, hàm số này không có cực trị.

Câu 42. **Chọn A.**

Như ta đã biết, điều kiện để hàm số trùng phương có 3 điểm cực trị là $-\dfrac{b}{2a} > 0$. Ở đây lại có, $a \neq 0$ nên điều kiện trở thành $ab < 0$.

Câu 43. **Chọn C.**

Hàm số bậc 3 có cực đại, cực tiểu thì $b^2 - 3ac > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - (4m-1) > 0$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{1}{2}$.

Câu 44. **Chọn B.**

A. Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = 25 > 0$. Do đó, hàm số có 2 cực trị.

B. Hàm số $y = x^4 + 3x^2 + 2$ có 1 cực trị.

C. Có $y' = \dfrac{2x^2 + 1}{3x^2} > 0 \ \forall x \in R \setminus \{0\}$. Do đó, hàm số này đồng biến trên từng khoảng xác định của nó. Hàm số này không có cực trị.

D. Có $y' = 2017.6x^5 + 2016.4x^3$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Do đó hàm số này có đúng 1 cực trị.

Câu 45. **Chọn A.**

Ta có $y' = \dfrac{2 - 2x^3}{\sqrt{1 + 4x - x^4}}$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y(1) = 2$

Câu 46. Chọn A.

Ta có $y'=3x^2-4x+a$

Đồ thị hàm số có điểm cực trị là $A(1;3)$, ta có: $\begin{cases} y'(1)=-1+a=0 \\ y(1)=-1+a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

Khi đó ta có, $4a-b=1$.

Câu 47. Chọn C.

$y'=3x^2-6x$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array} \right.$. Ta có: $a=y(0)=-2; b=y(2)=-6 \Rightarrow 2a^2+b=2$.

Câu 48. Chọn A.

Hàm số trùng phương luôn đạt cực trị tại $x=0$. Do đó: $x_1x_2x_3=0$.

Câu 49. Chọn B.

$y'=x^2-4x+4=(x-2)^2 \ge 0, \forall x \in R$. Hàm số không có cực trị .

Câu 50. Chọn A.

$y'=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array} \right.$. Vậy hàm số có 2 cực trị.

Câu 51. Chọn A.

Câu 52. Chọn A.

$y'=4mx^3-2(m+1)x=0 \Leftrightarrow 2x(2mx^2-m-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2mx^2=m+1 \end{array} \right.$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m(m+1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>0 \end{array} \right.$

[Phương pháp trắc nghiệm]:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị khi và chỉ khi a và b trái dấu, tức là: $ab<0$

Suy ra: $m(m+1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>0 \end{array} \right.$

Câu 53. Chọn C.

$y'=3x^2-4x+m+3$. Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \le 0 \Leftrightarrow 4-3(m+3) \le 0 \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{5}{3}$

Câu 54. Chọn A.

$y'=x^2-2mx+m+1$, $y''=2x-2m$

Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ khi: $\begin{cases} y'(-2)=0 \\ y''(-2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+4m+m+1=0 \\ 4-2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m>2 \end{cases}$ (không tồn tại m).

Câu 55. Chọn C.

Câu 56. Chọn D.

$y'=mx^2+4x+m$, ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'}>0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m^2>0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<2$

Câu 57. **Chọn B.**

$y' = x^2 + 2mx + m + 6$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 3 \end{array}\right.$$

Câu 58. **Chọn A.**

$y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m$. Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m^2 + 2m - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-3;1) \setminus \{-2\}$$

Câu 59. **Chọn D.**

$y' = x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $-1 < x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - 4(m+3) > 0 \\ (x_1+1)(x_2+1) > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)(m-1) > 0 \\ x_1x_2 + (x_1+x_2) + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ m > -\dfrac{7}{2} \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < m < -3$$

Câu 60. **Chọn B.**

$y' = x^2 + 2(m^2 - m + 2)x + 3m^2 + 1,\ y'' = 2x + 2(m^2 - m + 2)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ khi: $\begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4m - 3 = 0 \\ m^2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$

Câu 61. **Chọn B.**

$y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1 + 2x_2 = 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \\ x_1x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = \dfrac{2-m}{m} \\ x_1x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = \dfrac{2-m}{m} \\ \left(\dfrac{3m-4}{m}\right)\left(\dfrac{2-m}{m}\right) = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Câu 62. Chọn C.

Trường hợp 1: $m=0$

Ta có hàm số: $y=-x^2$, hàm số này có 1 cực trị. Vậy $m=0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m\neq 0$

$y'=4mx^3+2(m-1)x$

Hàm số có đúng 1 cực trị $\Leftrightarrow \dfrac{m-1}{m}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 1 \\ m<0 \end{array}\right.$

Kết hợp TH1 và TH2, ta có: $\left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\geq 1 \end{array}\right.$ thỏa mãn.

Câu 63. Chọn C.

$y'=4mx^3+2(m^2-4m+3)x$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \dfrac{m^2-4m+3}{m}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\in(-\infty;0)\cup(1;3) \end{cases} \Leftrightarrow m\in(-\infty;0)\cup(1;3)$

Câu 64. Chọn D.

$y'=4x^3-4m^2x,\ y'=0\Leftrightarrow 4x(x^2-m^2)=0$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq 0$

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1),\ B(m;1-m^4),\ C(-m;1-m^4)$

Do tính chất đối xứng, ta có ΔABC cân tại đỉnh A.

Vậy ΔABC chỉ có thể vuông cân tại đỉnh $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow -m^2+m^8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có: $m=\pm 1$ (thỏa mãn).

<u>Lưu ý:</u> có thể sử dụng công thức $\dfrac{b^3}{8a}+1=0$.

Câu 65. Chọn B.

$y'=4x^3-4(m+1)x,\ y'=0\Leftrightarrow 4x(x^2-m-1)=0$

Hàm số có điểm 3 cực trị $\Leftrightarrow m>-1$

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A(0;m^2),\ B(-\sqrt{m+1};-2m-1),\ C(\sqrt{m+1};-2m-1)$

Do tính chất đối xứng, ta có ΔABC cân tại đỉnh A.

Vậy ΔABC chỉ có thể vuông cân tại đỉnh $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow -(m+1)+(-m^2-2m-1)^2=0 \Leftrightarrow m^4+4m^3+6m^2+3m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có: $m=0$ (thỏa mãn).

<u>Lưu ý:</u> Có thể làm theo cách khác:

+) Cách 1: Gọi M là trung điểm của BC, tìm tọa độ điểm M, ΔABC vuông tại đỉnh A thì $2AM=BC$.

+) ***Cách 2:*** Sử dụng định lý Pitago $BC^2 = AB^2 + AC^2$

+) ***Cách 3:*** $\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \cos 45^0$

+) Hoặc sử dụng công thức $\frac{b^3}{8a} + 1 = 0$

Câu 66. **Chọn C.**

$y' = 4x^3 - 4mx$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - m\right) = 0$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow m > 0$

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A\left(0; m^4 + 2m\right)$, $B\left(-\sqrt{m}; \mathrm{m}^4 - m^2 + 2m\right)$, $C\left(\sqrt{m}; \mathrm{m}^4 - m^2 + 2m\right)$

Do tính chất đối xứng, ta có ΔABC cân tại đỉnh A.

Vậy ΔABC đều chỉ cần $AB = BC \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{3} \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có: $m = \sqrt[3]{3}$ (thỏa mãn).

<u>*Lưu ý:*</u> có thể sử dụng công thức $\frac{b^3}{8a} + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{\left(-2m\right)^3}{8} + 3 = 0 \Leftrightarrow m^3 = 3 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$.

Câu 67. **Chọn C.**

Ta có: $y = x^3 - 3x$. Các điểm cực trị: $A(1;-2); B(-1;2)$. Nên ta có $AB = 2\sqrt{5}$.

Câu 68. **Chọn A.**

Ta có: $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$

Các điểm cực trị: $A(-2;-1); B(0;3); C(2;-1)$.

Các điểm cực trị tạo thành tam giác cân tại B. $H(0;-1)$ là trung điểm của AC.

Nên $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BH.AC = \frac{1}{2}.4.4 = 8$.

Câu 69. **Chọn A.**

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Câu 70. **Chọn A.**

Để hàm số có ba cực trị thì trước hết hàm số phải là hàm số trùng phương tức $m \neq 0$.

Ta có: $y' = 4mx^3 + 2\left(m^2 - 9\right)x = 4mx(x^2 + \frac{m^2 - 9}{2m})$.

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi: y' có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\frac{m^2 - 9}{2m} < 0$

$\Leftrightarrow m\left(m^2 - 9\right) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 3 \\ m < -3 \end{array}\right.$.

Vậy các giá trị cần tìm của m là: $\left[\begin{array}{l} 0 < m < 3 \\ m < -3 \end{array}\right.$.

Câu 71. Chọn B.

Ta xét hai trường hợp sau đây:

TH1: $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$. Khi đó $y=x^2+\frac{3}{2} \Rightarrow$ hàm số chỉ có cực tiểu ($x=0$) mà không có cực đại $\Rightarrow m=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: $m+1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -1$. Khi đó hàm số đã cho là hàm số trùng phương ta có:

$y'=4(m+1)x^3-2mx=4(m+1)x\left[x^2-\frac{m}{2(m+1)}\right]$.

Hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại $\Leftrightarrow$ y' có đúng một nghiệm và đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua nghiệm này $\Leftrightarrow \begin{cases}4(m+1)>0\\ \frac{m}{2(m+1)}\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow -1<m\leq 0$.

Kết hợp những giá trị m tìm được, ta có $-1\leq m\leq 0$.

Câu 72. Chọn D.

Ta có $y'=3x^2-6mx+m-1$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi PT $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

Điều này tương đương $\Delta'=9m^2-3(m-1)>0 \Leftrightarrow 3m^2-m+1>0$ (đúng với mọi m).

Hai điểm cực trị có hoành độ dương $\Leftrightarrow \begin{cases}S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2m>0\\ \frac{m-1}{3}>0\end{cases} \Leftrightarrow m>1$

Vậy các giá trị cần tìm của m là $m>1$.

Câu 73. Chọn D.

Ta có $y'=-3x^2+3m$, $y'=0 \Leftrightarrow x^2-m=0\,(*)$

Đồ thị hàm số (1) có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ PT $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0\,(**)$

Khi đó 2 điểm cực trị $A\left(-\sqrt{m};1-2m\sqrt{m}\right)$, $B\left(\sqrt{m};1+2m\sqrt{m}\right)$

Tam giác OAB vuông tại O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow 4m^3+m-1=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Câu 74. Chọn D.

Ta có $y'=3x^2-6(m+1)x+12m$. Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (m-1)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 1$ (*). Khi đó hai điểm cực trị là

$A(2;9m)$, $B(2m;-4m^3+12m^2-3m+4)$.

ΔABC nhận O làm trọng tâm $\Leftrightarrow \begin{cases}2+2m-1=0\\ -4m^3+12m^2+6m+4-\frac{9}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$ (thoả (*).

Câu 75. Chọn C.

Ta có: $y'=2x^2-2mx-2\left(3m^2-1\right)=2\left(x^2-mx-3m^2+1\right)$,

$g(x)=x^2-mx-3m^2+1$ là tam thức bậc hai có $\Delta=13m^2-4$. Do đó hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\ \Delta>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ m<-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\end{array}\right.$. (1)

$x_1,\ x_2$ là các nghiệm của $g(x)$ nên theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-3m^2+1\end{cases}$.

Do đó $x_1x_2+2(x_1+x_2)=1 \Leftrightarrow -3m^2+2m+1=1 \Leftrightarrow -3m^2+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m=\dfrac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 76. Chọn B.

$y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

Hàm số luôn luôn có cực trị với mọi m

Theo định lí Viet: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1.x_2=m^2-1\end{cases}$

$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7 \Leftrightarrow (2m)^2-3(m^2-1)=7 \Leftrightarrow$ m= ±2

Cách 2: $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+(m^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+1 \\ x=m-1\end{array}\right.$

$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7 \Leftrightarrow (m+1)^2+(m-1)^2-(m-1)(m+1)=7 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 77. Chọn B.

$y'=4(m-1)x^3-6mx=0$ **(*)**

TH1: Nếu $m=1$, (*) trở thành: $y'=-6x=0$ hay x= 0, $y''=-6<0$

Vậy $m=1$ hàm số đạt cực đại tại $x=0$

TH2: Nếu $m\neq 1$

(*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{3m}{2(m-1)}\end{array}\right.$

Hàm số có cực đại mà ko có cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1<0 \\ \dfrac{3m}{2(m-1)}\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow 0\leq m<1$

Kết hợp 2 trường hợp: $m\in[0;1]$

Câu 78. Chọn C.

$y' = 4x^3 - 4\left(1-m^2\right)x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2 = 1-m^2 \end{array}\right.$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi: $|m| < 1$

Tọa độ điểm cực trị $A\left(0; m+1\right)$, $B\left(\sqrt{1-m^2}; -m^4+2m^2+m\right)$, $C\left(-\sqrt{1-m^2}; -m^4+2m^2+m\right)$

$\overrightarrow{BC} = \left(-2\sqrt{1-m^2}; 0\right)$

Phương trình đường thẳng BC: $y + m^4 - 2m^2 - m = 0$

$d\left(A, \mathrm{BC}\right) = m^4 - 2m^2 + 1$, $BC = 2\sqrt{1-m^2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} BC.d[A, BC] = \sqrt{1-m^2}\left(m^4 - 2m^2 + 1\right) = \sqrt{\left(1-m^2\right)^5} \le 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m = 0$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

$\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{1-m^2}; -m^4 + 2m^2 - 1\right)$

$\overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{1-m^2}; -m^4 + 2m^2 - 1\right)$

Khi đó S = $\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right|$ **=** $\sqrt{1-m^2}\left(m^4 - 2m^2 + 1\right) = \sqrt{\left(1-m^2\right)^5} \le 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m = 0$.

Câu 79. **Chọn A.**

$y' = 6x^2 + 6\left(m-3\right)x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x = 3-m \end{array}\right.$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow m \ne 3$

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị $A\left(0; 11-3m\right)$

$B\left(3-m; m^3 - 9m^2 + 24m - 16\right)$

$\overrightarrow{AB} = \left(3-m, \left(3-m\right)^3\right)$.

Phương trình đt AB: $\left(3-m\right)^2 x + y - 11 + 3m = 0$

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow C \in AB$. Hay: $-1 - 11 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2: $y - \dfrac{y'.y''}{18a} = 2x^3 + 3\left(y-3\right)x^2 + 11 - 3y - \dfrac{\left(6x^2 + 6\left(y-3\right)x\right)\left(12x + 6\left(y-3\right)\right)}{36}$

Bước 3: Cacl $x = i$, $y = 1000$

Kết quả: $-2989 - 994009i$. Hay: $y = -2989 - 994009x$

Từ đó: $-2989 = -3m + 11$, $-994009 = -\left(m-3\right)^2$

Vậy phương trình đt qua 2 điểm cực trị AB là: $\left(3-m\right)^2 x + y - 11 + 3m = 0$

A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow C \in AB$

Hay: $-1-11+3m=0 \Leftrightarrow m=4$.

Câu 80. **Chọn B.**

$y'=3x^2-3m$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{m} \\ x=-\sqrt{m} \end{array}\right.$. Hàm số có 2 cực trị khi và chỉ khi: $m>0$

Khi đó tọa độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $M\left(\sqrt{m};-2m\sqrt{m}+2\right)$

$N\left(-\sqrt{m};2m\sqrt{m}+2\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(-2\sqrt{m};4m\sqrt{m}\right)$

Phương trình đt MN: $2mx+y-2=0$

(Học sinh có thể dùng cách lấy y chia cho y')

Ta có: $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\dfrac{1}{2}\sin\widehat{AIB}\le\dfrac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $\widehat{AIB}=90^0 \Rightarrow d\left[I,MN\right]=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2: $y-\dfrac{y'.y''}{18a}=2x^3-3yx+2-\dfrac{\left(6x^2-3y\right)\left(12x\right)}{18}$

Bước 3: Cacl $x=i$, $y=1000$

Kết quả: $2-2000i$. Hay: y=$2-2000x$

Từ đó: $-2000=-2m$,

Vậy phương trình đt qua 2 điểm cực trị A,B là: $y=2-2mx$ hay $2mx+y-2=0$

Giải như tự luận ra kết quả.

Câu 81. **Chọn C.**

Ta có: $y=6x^2-6\left(m+1\right)x+6m$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=m \end{array}\right.$

Điều kiện để hàm số có 2 điểm cực trị là: $m\ne 1$

Ta có: $A\left(1;3m-1\right)$ $B\left(m;-m^3+3m^2\right)$

Hệ số góc đt AB là: $k=-\left(m-1\right)^2$

Đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $k=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2: $y-\dfrac{y'.y''}{18a}=2x^3-3\left(y+1\right)x^2+6yx-\dfrac{\left(6x^2-6\left(y+1\right)x+6y\right)\left(12x-6\left(y+1\right)\right)}{36}$

Bước 3: Cacl $x=i$, $y=1000$

Kết quả: $1001000-9980001.i$. Hay: $y=1001000-9980001.x$

Vậy phương trình đt qua 2 điểm cực trị AB là: $y=m^2-m-(m-1)^2x$

Có đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $\Leftrightarrow (m-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$

Câu 82. **Chọn D.**

$y'=3x^2-12x+3(m+2)$, $y'=0 \Leftrightarrow y'=x^2-4x+(m+2)=0$

Hàm số có 2 điểm cực trị x_1,x_2 $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m<2$

Chia y cho y' ta được: $y=\frac{1}{3}y'(x-2)+(m-2)(2x+1)$

Điểm cực trị tương ứng: $A(x_1;(m-2)(2x_1+1))$ và $B(x_2;(m-2)(2x_2+1))$

Có: $y_1.y_2=(m-2)^2(4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1)$

Với: $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=m+2 \end{cases}$ nên: $y_1.y_2=(m-2)^2(4m+17)$

Hai cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y_1.y_2>0 \Leftrightarrow (m-2)^2(4m+17)>0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m>\frac{-17}{4} \\ m\neq 2 \end{cases}$

Kết hợp đk: $-\frac{17}{4}<m<2$.

Câu 83. **Chọn B.**

Ta có: $y'=6x^2-18x+12$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y(1)=5+m \\ x=2 \Rightarrow y(2)=4+m \end{array}\right.$

$A(1;5+m)$ và $B(2;4+m)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$\overrightarrow{OA}=(1;5+m)$, $\overrightarrow{OB}=(2;4+m)$, $\overrightarrow{AB}=(1;-1)$

OAB là 1 tam giác $\Leftrightarrow -4-m\neq 2 \Leftrightarrow m\neq -6$

Chu vi của ΔOAB là: $2p=\sqrt{1+(m+5)^2}+\sqrt{4+(m+4)^2}+\sqrt{2}$

Sử dụng tính chất $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|$ với $\vec{u}=(1;-5-m)$ và $\vec{v}=(2;4+m)$

Từ đó ta có: $\sqrt{1+(m+5)^2}+\sqrt{4+(m+4)^2}+\sqrt{2}\geq\sqrt{3^2+(-1)^2}+\sqrt{2}=\sqrt{10}+\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{-5-m}{4+m}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow m=-\frac{14}{3}$.

Vậy chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng $(\sqrt{10}+\sqrt{2})$ khi $m=-\frac{14}{3}$.

Câu 84. **Chọn D.**

$y'=4x^3-4mx$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$. Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$

Khi đó đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là:

$A\left(0;m-1\right)$ $B\left(\sqrt{m};m^2+m-1\right)$ $C\left(-\sqrt{m};m^2+m-1\right)$

Vì B,C đối xứng nhau qua trục tung nên $BC\perp OA$

Do đó O là trực tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow OB\perp AC$ hay $\overrightarrow{OB}\overrightarrow{AC}=0$

Với $\overrightarrow{OB}=\left(\sqrt{m},m^2+m-1\right),\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{m},m^2\right)$

Từ đó: $-m+m^2\left(m^2+m-1\right)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$. Vậy $m=1$ là gtct.

Câu 85. **Chọn C.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

<u>Cách 1:</u>

$y'=x^2-2mx-1$

$\Delta'=m^2+1>0\forall m$, suy ra hàm số có 2 cực trị $\forall m$.Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của pt $y'=0$

Bấm máy tính:

$$\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1-\left(x^2-2mx-1\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{m}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}\frac{2003}{3}-\frac{2000002}{3}i$$

$$=\frac{2m+3}{3}-\frac{2m^2+2}{3}x$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A\left(x_1;\frac{2m+3}{3}-\frac{2m^2+2}{3}x_1\right);\ B\left(x_2;\frac{2m+3}{3}-\frac{2m^2+2}{3}x_2\right)$$

$$AB^2=\left(x_2-x_1\right)^2+\frac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\left(x_2-x_1\right)^2=\left(x_2-x_1\right)^2\left(1+\frac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\right)$$

$$=\left(4m^2+4\right)\left(1+\frac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\right)=\frac{\left(4m^2+4\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}{9}\Rightarrow AB=\frac{2}{3}\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}$$

<u>Cách 2</u>: ***Sử dụng công thức*** $AB=\sqrt{\frac{4e+16e^3}{a}}$ với $e=\frac{b^2-3ac}{9a}$

$$e=\frac{m^2+1}{3}\Rightarrow AB=\sqrt{\frac{4e+16e^3}{a}}=\frac{2}{3}\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}.$$

Câu 86. **Chọn A.**

$y'=6x^2+6\left(m-1\right)x+6m\left(1-2m\right)$

Hàm số có 2 cực trị $m\neq\frac{1}{3}$

Bấm máy tính:

$$2x^3+3\left(m-1\right)x^2+6m\left(1-2m\right)x-\left(6x^2+6\left(m-1\right)x+6m\left(1-2m\right)\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{m-1}{6}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$$

$$1997001000-8994001i=\left(2.10^9-3.10^6+10^3\right)-\left(9.10^6-6.10^3+1\right)i=$$

$$=-\left(9m^2-6m+1\right)x+2m^3-3m^2+m$$

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-\left(9m^2-6m+1\right)x+2m^3-3m^2+m\ (\Delta)$

$$\Delta \equiv d \Leftrightarrow \begin{cases} -\left(9m^2-6m+1\right)=-4 \\ 2m^3-3m^2+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

Câu 87. **Chọn A.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

$y'=3x^2+2mx+7$

Hàm số có 2 cực trị $|m|>\sqrt{21}$

Bấm máy tính:

$$x^3+mx^2+7x+3-\left(3x^2+2mx+7\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{m}{9}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}-\frac{6973}{9}-\frac{1999958}{9}i=$$

$$=-\frac{7000-27}{9}-\left(\frac{2.10^6-42}{9}\right)i=-\left(\frac{2m^2-42}{9}\right)x+\frac{7m-27}{9}$$

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-\left(\frac{2m^2-42}{9}\right)x+\frac{7m-27}{9}\ (\Delta)$

$\Delta \perp d \Leftrightarrow -\left(\frac{2m^2-42}{9}\right)3=-1 \Leftrightarrow m^2=\frac{45}{2} \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{\frac{45}{2}}$ (thỏa mãn).

Câu 88. **Chọn D.**

$y'=-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)$

Hàm số có 2 cực trị $m\neq 0$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$

Bấm máy tính:

$$-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1-\left(-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$$

$$-2000002+2000000i=-\left(2.10^6+2\right)+2.10^6 i=2m^2x-2m^2-2$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(x_1;2m^2x_1-2m^2-2\right)$; $B\left(x_2;2m^2x_2-2m^2-2\right)$

ΔOAB vuông tại $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+\left(2m^2x_1-2m^2-2\right)\left(2m^2x_2-2m^2-2\right)=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+4m^4x_1x_2-4m^2\left(m^2+1\right)\left(x_1+x_2\right)+4\left(m^2+1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(1-m^2\right)\left(1+4m^4\right)+4\left(m^2+1\right)\left(1+m^2-2m^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1-m^2\right)\left(4m^4+4m^2+5\right)=0 \Leftrightarrow m=\pm 1.$

Câu 89. **Chọn A.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

$y'=3x^2-6x-m$

Hàm số có 2 cực trị $m>-3$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$, ta có:

$x_1+x_2=2$

Bấm máy tính:

$$x^3-3x^2-mx+2-\left(3x^2-6x-m\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$$

$$-\frac{994}{3}-\frac{2006}{3}i=-\frac{1000-6}{3}-\frac{2000+6}{3}i=-\frac{2m+6}{3}x-\frac{m-6}{3}$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A\left(x_1;-\frac{2m+6}{3}x_1-\frac{m-6}{3}\right);\ B\left(x_2;-\frac{2m+6}{3}x_2-\frac{m-6}{3}\right)$$

Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I\left(1;-m\right)$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $y=-\frac{2m+6}{3}x-\frac{m-6}{3}$ (Δ)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta//d\ or\ \Delta\equiv d\\ I\in d\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{2m+6}{3}=1\\ -m=1-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\frac{9}{2}\\ m=0\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện thì $m=0$.

Câu 90. **Chọn B.**

Ta có: $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=m\end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi $m>0$ (*)

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A\left(0;m-1\right),B\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right),C\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|y_B-y_A\right|.\left|x_C-x_B\right|=m^2\sqrt{m};\ AB=AC=\sqrt{m^4+m},BC=2\sqrt{m}$$

$$R=\frac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}}=1\Leftrightarrow\frac{\left(m^4+m\right)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}}=1\Leftrightarrow m^3-2m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\pm\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện (*) ta có $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Áp dụng công thức: $R=\frac{b^3-8a}{8|a|b}\Leftrightarrow1=\frac{\left(-2m\right)^3-8}{8\left(-2m\right)}\Leftrightarrow m^3+1=2m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện (*) ta có $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$.

Câu 91. **Chọn A.**

$y'=y=4x^3-4m^2x$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m\neq0$

Khi đó 3 điểm cực trị là: $A\left(0;m^4+1\right),B\left(-m;1\right),C\left(m;1\right)$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$. Do tính chất đối xứng, ta có:

A, O, I thẳng hàng $\Rightarrow AO$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$.

Vậy $AB \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow m^2 - m^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $m = \pm 1$ (thỏa mãn).

Câu 92. Chọn D.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m \neq 0$

Áp dụng công thức $S_{\Delta ABC} = \frac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, ta có:

$S_{\Delta ABC} = \frac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\frac{b}{2a}} \Rightarrow 64 = \frac{64m^4}{4}\sqrt{\frac{8m^2}{2}} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt[5]{2}$ (thỏa mãn).

Câu 93. Chọn B.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m > 0$

Ba điểm cực trị là $A(0; m), B\left(-\sqrt{m}; m - m^2\right), C\left(\sqrt{m}; m - m^2\right)$

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I\left(0; m - m^2\right)$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AI.BC = m^2\sqrt{m}$

Chu vi của ΔABC là: $2p = AB + BC + AC = 2\left(\sqrt{m + m^4} + \sqrt{m}\right)$

Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là: $r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m + m^4} + \sqrt{m}}$

Theo bài ra: $r > 1 \Leftrightarrow \frac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m + m^4} + \sqrt{m}} > 1 \Leftrightarrow \frac{m^2\sqrt{m}\left(\sqrt{m + m^4} - \sqrt{m}\right)}{m^4} > 1$ (vì $m > 0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{m}\left(\sqrt{m + m^4} - \sqrt{m}\right) > m^2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + m^5} > m^2 + m \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m > 2$ thỏa mãn.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Sử dụng công thức $r = \frac{b^2}{4|a| + \sqrt{16a^2 - 2ab^3}} \Rightarrow r = \frac{4m^2}{4 + \sqrt{16 + 16m^3}} = \frac{m^2}{1 + \sqrt{1 + m^3}}$

Theo bài ra: $r > 1 \Leftrightarrow \frac{m^2}{1 + \sqrt{1 + m^3}} > 1 \Leftrightarrow \frac{m^2\left(\sqrt{1 + m^3} - 1\right)}{m^3} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + m^3} - 1 > m$

$\sqrt{1 + m^3} > m + 1 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sqrt{1 + m^3} > m + 1 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m > 2$ thỏa mãn.

Câu 94. Chọn A.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m > \dfrac{1}{3}$

Áp dụng công thức:

Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $x^2 + y^2 - \left(\dfrac{2}{b} - \dfrac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\dfrac{2}{b} - \dfrac{\Delta}{4a}\right) = 0$

Thay vào ta có phương trình:

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{-27m^3 + 75m^2 - m - 15}{4(3m-1)}\right)y + \frac{-54m^4 + 75m^3 + 41 - 27m - 11}{4(3m-1)} = 0 \ (T)$$

$D(7;3) \in (T) \Rightarrow 27m^4 - 78m^3 + 92m^2 - 336m + 99 = 0$

Sử dụng chức năng SOLVE, tìm ra nghiệm duy nhất thỏa mãn là $m = 3$.

Câu 95. Chọn B.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m > 0$

Ba điểm cực trị là: $A(0;1-4m), B\left(-\sqrt{m}; m^2 - 4m + 1\right), C\left(\sqrt{m}; m^2 - 4m + 1\right)$

Tứ giác $OBAC$ đã có $OB = OC, AB = AC$. Vậy tứ giác $OBAC$ là hình thoi chỉ cần thêm điều kiện

$OB = AC \Leftrightarrow m + \left(m^2 - 4m + 1\right)^2 = m + m^4 \Leftrightarrow \left(m^2 - 4m + 1\right)^2 - m^4 = 0$

$\Leftrightarrow \left(m^2 - 4m + 1 - m^2\right)\left(m^2 - 4m + 1 + m^2\right) = 0 \Leftrightarrow (1 - 4m)\left(2m^2 - 4m + 1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{4} \\ m = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$ (tm).

Câu 96. Chọn A.

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 3\left(m^2 - 1\right) = -3\left(x^2 - 2x - m^2 + 1\right)$.

$g(x) = x^2 - 2x - m^2 + 1$ là tam thức bậc hai có $\Delta' = m^2$. Do đó: y có cực đại cực tiểu

$\Leftrightarrow$ y' có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ (1)

Khi đó y' có các nghiệm là: $1 \pm m$ $\Rightarrow$ tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(1 - m; -2 - 2m^3\right)$ và $B\left(1 + m; -2 + 2m^3\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}\left(1 - m; -2 - 2m^3\right) \Rightarrow OA^2 = (1 - m)^2 + 4\left(1 + m^3\right)^2$.

$\overrightarrow{OB}\left(1 + m; -2 + 2m^3\right) \Rightarrow OB^2 = (1 + m)^2 + 4\left(1 - m^3\right)^2$.

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi:

$OA = OB \Leftrightarrow OA^2 = OB^2 \Leftrightarrow (1 - m)^2 + 4\left(1 + m^3\right)^2 = (1 + m)^2 + 4\left(1 - m^3\right)^2$

$\Leftrightarrow -4m + 16m^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m=\pm\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 97. Chọn D.

$y'=3x^2-6mx=3x\left(x-2m\right)$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi: $2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$. (1)

Khi đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;3m^3\right)$, $B\left(2m;-m^3\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}\left(0;3m^3\right) \Rightarrow OA=3\left|m^3\right|$. (2)

Ta thấy $A\in Oy \Rightarrow OA\equiv Oy \Rightarrow d\left(B,OA\right)=d\left(B,Oy\right)=2\left|m\right|$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot d\left(B,OA\right)=3m^4$.

Do đó: $S_{\Delta OAB}=48 \Leftrightarrow 3m^4=48 \Leftrightarrow m=\pm 2$ (thỏa mãn (1)).

Câu 98. Chọn A.

Ta có: $y'=4x^3-4\left(m+1\right)x=4x\left[x^2-\left(m+1\right)\right]$.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi:

y' có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m+1>0 \Leftrightarrow m>-1$. $\left(*\right)$

Khi đó, ta có: $y'=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{m+1} \\ x=\sqrt{m+1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A\left(0;m\right) \\ B\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right), \\ C\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right) \end{array}\right.$

(vai trò của B, C trong bài toán là như nhau) nên ta giả sử:

$B\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)$, $C\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)$).

Ta có: $\overrightarrow{OA}\left(0;m\right) \Rightarrow OA=\left|m\right|$; $\overrightarrow{BC}\left(2\sqrt{m+1};0\right) \Rightarrow BC=2\sqrt{m+1}$.

Do đó $OA=BC \Leftrightarrow \left|m\right|=2\sqrt{m+1} \Leftrightarrow m^2-4m-4=0$ $\left(\Delta'=8\right) \Leftrightarrow m=2\pm 2\sqrt{2}$ (thỏa mãn $\left(*\right)$). Vậy $m=2\pm 2\sqrt{2}$.

Câu 99. Chọn D.

$y'=3x^2-6mx$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$ Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m\neq 0$.

Giả sử hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0;4m^3);B(2m;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2m;-4m^3)$

Trung điểm của đoạn AB là $I(m;2m^3)$.

Điều kiện để AB đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$ là AB vuông góc với đường thẳng $(d):y=x$ và $I\in(d)$ $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2m-4m^3=0 \\ 2m^3=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta có: $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 100. Chọn C.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

Hàm số (1) có cực trị thì PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0$ có 2 nhiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1>0,\forall m$

Khi đó, điểm cực đại $A(m-1;2-2m)$ và điểm cực tiểu $B(m+1;-2-2m)$

Ta có $OA=\sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2+6m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3+2\sqrt{2} \\ m=-3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 101. Chọn A.

Ta có: $y'=4x^3-4m^2x=4x\left(x^2-m^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m^2 \end{array}\right.$

Hàm số (C) có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq 0$ (*). Với điều kiện (*) gọi ba điểm cực trị là: $A\left(0;1\right);B\left(-m;1-m^4\right);C\left(m;1-m^4\right)$.Do đó nếu ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân, thì sẽ vuông cân tại đỉnh A.

Do tính chất của hàm số trùng phương, tam giác ABC đã là tam giác cân rồi, cho nên để thỏa mãn điều kiện tam giác là vuông, thì AB vuông góc với AC.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\left(-m;-m^4\right);\overrightarrow{AC}=\left(m;-m^4\right);\overrightarrow{BC}=\left(2m;0\right)$.

Tam giác ABC vuông khi: $BC^2=AB^2+AC^2 \Leftrightarrow 4m^2=m^2+m^8+\left(m^2+m^8\right)$

$\Leftrightarrow 2m^2\left(m^4-1\right)=0; \Rightarrow m^4=1 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Vậy với $m=\pm 1$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{b^3}{8a}+1=0 \Leftrightarrow -m^6+1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Câu 102. Chọn D.

Ta có: $y'=m(3x^2-6x)$

Với mọi $m\neq 0$, ta có $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=3m-3 \\ x=2 \Rightarrow y=-m-3 \end{array}\right.$. Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Giả sử $A(0;3m-3);B(2;-m-3)$.

Ta có: $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20 \Leftrightarrow 11m^2+6m-17=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{17}{11} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{17}{11} \end{array}\right.$.

Câu 103. Chọn A.

Đường thẳng đi qua ĐCĐ, ĐCT là $\Delta_1: 2x+y=0$ có $VTPT\ \vec{n}_1\left(2;1\right)$

Đường thẳng đã cho $\Delta: x+my+3=0$ có $VTPT\ \vec{n}_2\left(1;m\right)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos\left(\Delta,\Delta_1\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|=\dfrac{\left|m+2\right|}{\sqrt{5}.\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{4}{5}$

$$\Leftrightarrow 25\left(m^2+4m+4\right)=5.16.\left(m^2+1\right)\Leftrightarrow 11m^2-20m-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-\dfrac{2}{11}\end{array}\right.$$

Câu 104. Chọn C.

Ta có $y'=4x^3-8\left(m-1\right)x=4x\left(x^2-2\left(m-1\right)\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=2\left(m-1\right)\end{array}\right.$ nên hàm số có 3 điểm cực trị khi $m>1$.

Với đk $m>1$ đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là:

$A\left(0;2m-1\right),B\left(\sqrt{2\left(m-1\right)};-4m^2+10m-5\right),B\left(-\sqrt{2\left(m-1\right)};-4m^2+10m-5\right)$.

Ta có: $\begin{array}{l} AB^2=AC^2=2\left(m-1\right)+16\left(m-1\right)^4 \\ BC^2=8\left(m-1\right)\end{array}$

Để 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành tam giác đều thì:

$AB=AC=BC\Leftrightarrow AB^2=AC^2=BC^2\Leftrightarrow 2\left(m-1\right)+16\left(m-1\right)^4=8\left(m-1\right)$

$$\Leftrightarrow 8\left(m-1\right)^4-3\left(m-1\right)=0\Leftrightarrow \left(m-1\right)\left[8\left(m-1\right)^3-3\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}\end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện ta có: $m=1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$ thỏa mãn.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{b^3}{8a}+3=0\Leftrightarrow -8\left(m-1\right)^3+3=0\Leftrightarrow m=1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$

Câu 105. Chọn B.

Ta có: $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+1\end{array}\right.\Rightarrow \forall m\in\mathbb{R}$, hàm số luôn có CĐ, CT.

Tọa độ các điểm CĐ, CT của đồ thị là $A(m;2m^3+3m^2+1)$, $B(m+1;2m^3+3m^2)$

Suy ra $AB=\sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng $AB: x+y-2m^3-3m^2-m-1=0$.

Do đó, tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới AB nhỏ nhất.

Ta có: $d(M,AB)=\dfrac{3m^2+1}{\sqrt{2}}\Rightarrow d(M,AB)\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \min d(M,AB)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ đạt được khi $m=0$.

Chủ đề 3 GTLN - GTNN CỦA HÀM SỐ

☆☆☆

A. LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên tập D.

+ Số M gọi là ***giá trị lớn nhất*** của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$.

Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$.

+ Số m gọi là ***giá trị nhỏ nhất*** của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$.

Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$.

II. PHƯƠNG PHÁP TÌM GTLN, GTNN

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K (K có thể là khoảng, đoạn, nửa khoảng, ...)

1. Tìm tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng bảng biến thiên

- ***Bước 1.*** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- ***Bước 2.*** Tìm các nghiệm của $f'(x)$ và các điểm $f'(x)$ trên K.
- ***Bước 3.*** Lập bảng biến thiên của $f(x)$ trên K.
- ***Bước 4.*** Căn cứ vào bảng biến thiên kết luận $\min\limits_K f(x), \max\limits_K f(x)$

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số không sử dụng bảng biến thiên

Trường hợp 1. Tập K là đoạn $[a;b]$

- ***Bước 1.*** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- ***Bước 2.*** Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in [a;b]$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in [a;b]$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- ***Bước 3.*** Tính $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- ***Bước 4.*** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$, $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Trường hợp 2. Tập K là khoảng $(a;b)$

- ***Bước 1.*** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- ***Bước 2.*** Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a;b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

- ***Bước 3.*** Tính $A=\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to b^{-}} f(x)$, $f(x_{i})$, $f(\alpha_{i})$.
- ***Bước 4.*** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m=\min\limits_{(a;b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

➢ **Chú ý:**

- Nếu $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right)=f\left(a\right)\\ \max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right)=f\left(b\right)\end{cases}$.
- Nếu $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{\left[a;b\right]} f(x)=f\left(b\right)\\ \max\limits_{\left[a;b\right]} f(x)=f\left(a\right)\end{cases}$.
- Hàm số liên tục trên một khoảng ***có thể*** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.
- Khi nói đến giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số f (mà không nói rõ "trên tập K") thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên tập xác định của nó.

B. CÁC DẠNG TOÁN TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ

I. TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP KHẢO SÁT TRỰC TIẾP

1. Phương pháp

Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D, ta làm như sau:

+ Bước 1: Tính $f'\left(x\right)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$ mà tại đó $f'\left(x\right) = 0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.

+ Bước 2: Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

2. Các ví dụ

Bài toán 1: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0;+\infty)$

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\left[0;+\infty\right)$

$$y' = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;+\infty) \\ x = -1 \notin [0;+\infty) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $\min\limits_{[0;+\infty)} f(x) = f(0) = 1$ $\max\limits_{[0;+\infty)} f(x) = f(1) = 3$

Bài toán 2: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right) = -\dfrac{1}{3}x^6 + \dfrac{2}{5}x^5 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$ trên tập xác định.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'\left(x\right) = -2x^5 + 2x^4 - x + 1 = -\left(x-1\right)\left(2x^4+1\right)$.

Khi đó: $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow -\left(x-1\right)\left(2x^4+1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	
$f\left(x\right)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{47}{30}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: $\max\limits_{\mathbb{R}} f\left(x\right) = \dfrac{47}{30}$.

Bài toán 3: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{6-8x}{x^2+1}$ trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{8x^2-12x-8}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Khi đó: $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 8x^2-12x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\notin\left(-\infty;1\right) \\ x=-\dfrac{1}{2}\in\left(-\infty;1\right) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	
$f\left(x\right)$	0	$\nearrow$	8	$\searrow$	-1

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: $\max\limits_{\left(-\infty;1\right)} f\left(x\right)=8$

Bài toán 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)'}{2\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}}=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in\left(0;+\infty\right) \\ x=-1\notin\left(0;+\infty\right) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: $\min\limits_{\left(0;+\infty\right)} f\left(x\right)=\sqrt{2}$.

Bài toán 5: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f\left(x\right)=1-\dfrac{2x}{x^{2}+x+1}\Rightarrow f'\left(x\right)=-\dfrac{2\left(x^{2}+x+1\right)-2x\left(2x+1\right)}{\left(x^{2}+x+1\right)^{2}}=\dfrac{2x^{2}-2}{\left(x^{2}+x+1\right)^{2}}$.

Do đó: $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x^{2}-2=0\Leftrightarrow x=\pm 1.$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: $\min\limits_{\mathbb{R}}f\left(x\right)=\dfrac{1}{3};\max\limits_{\mathbb{R}}f\left(x\right)=3$

Bình luận: Đối với bài toán này, ta có thể giải theo cách tìm miền giá trị sẽ trình bày ở phần sau.

II. TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP DÙNG MIỀN GIÁ TRỊ

1. Phương pháp

Trong một số bài toán các em sẽ khó khăn khi sử dụng đạo hàm và vẽ bảng biến thiên , chúng ta sẽ tìm kiếm phương pháp khác để giải quyết bài toàn , một trong những phương pháp hay dùng là người ta sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 : $\Delta \geq 0$
Hoặc với phương trình lượng giác cơ bản $A.\sin x + B.\cos x = C$, điều kiện để phương trình có nghiệm là $A^2 + B^2 \geq C^2$

2. Các ví dụ

Bài toán 1: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$.

Vì $x^2 - x + 1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Nên $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \Leftrightarrow y\left(x^2-x+1\right) = x^2+x+1 \Leftrightarrow (y-1)x^2 - (y+1)x + y - 1 = 0$ (*)

Nếu $y = 1$, khi đó (*) trở thành: $-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Nếu $y \neq 1$, xem (*) là phương trình bậc hai ẩn x ta có: $\Delta = -3y^2 + 10y - 3$. Khi đó để (*) có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \leq y \leq 3$.

$\Rightarrow$ Từ đây suy ra: $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 3; \min\limits_{\mathbb{R}} y = \dfrac{1}{3}$.

Bài toán 2: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y = \dfrac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3}$

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vì $\sin x - 2\cos x + 3 \neq 0 \,\forall x \in \mathbb{R}$.

Nên $y = \dfrac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} \Leftrightarrow y\left(\sin x - 2\cos x + 3\right) = 2\sin x + \cos x + 1$

$\Leftrightarrow (y-2)\sin x - (2y+1)\cos x = 1 - 3y$ (*)

Để (*) có nghiệm thì: $(1-3y)^2 \leq (y-2)^2 + \left[-(2y+1)\right]^2 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2} \leq y \leq 2$.

$\Rightarrow$ Từ đây suy ra: $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 2; \min\limits_{\mathbb{R}} y = -\dfrac{1}{2}$.

Bài toán 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y=\sqrt{3}\,\mathrm{s}\,\mathrm{inx}+\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

Mà $-1\le\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\le 1\Leftrightarrow -2\le 2s\,\mathrm{in}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\le 2\Rightarrow \min y=-2;\max y=2$

Bài toán 4: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^6 x+\cos^6 x$

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y=\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

Mà: $0\le\sin^2 2x\le 1\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\le 1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x\le 1\ \Rightarrow \min y=\dfrac{1}{4};\max y=1$.

Bài toán 5: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sin^2 x+5\cos^2 x-1$

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y=2\sin^2 x+5\cos^2 x-1=\dfrac{3\cos 2x+5}{2}\Rightarrow 1\le y\le 4$

Vậy hàm số $y=2\sin^2 x+5\cos^2 x-1$ có $\min y=1;\max y=4$.

III. TÌM GTNN, GTLN CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

Định lí: Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn:

+ Bước 1:

  Hàm số đã cho $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

  Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên khoảng $\left(a;b\right)$, tại đó $f'\left(x\right)=0$ hoặc $f'\left(x\right)$ không xác định.

+ Bước 2: Tính $f\left(a\right),f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right),f\left(b\right)$.

+ Bước 3: Khi đó:

  $\max\limits_{\left[a,b\right]} f\left(x\right)=\max\left\{f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right),f\left(a\right),f\left(b\right)\right\}$.

  $\min\limits_{\left[a,b\right]} f\left(x\right)=\min\left\{f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right),f\left(a\right),f\left(b\right)\right\}$.

Chú ý:

+ Nếu $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right)=f\left(a\right)\\ \max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right)=f\left(b\right)\end{cases}$.

  Nếu $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{\left[a;b\right]} f(x)=f\left(b\right)\\ \max\limits_{\left[a;b\right]} f(x)=f\left(a\right)\end{cases}$.

+ Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó. Ví dụ: Hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(0;1\right)$.

Các ví dụ

Bài toán 1: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau: $y=2x^3+3x^2-12x+1$ trên [–1; 5].

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-1;5\right]$

Ta có: $y'=6x^2+6x-12; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in\left[-1;5\right]\\ x=-2\notin\left[-1;5\right]\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+1$ trên [–1; 5]:

x	-1		1		5
y'		$-$	0	$+$	
y	14	$\searrow$	-6	$\nearrow$	266

Từ bảng biến thiên ta suy ra: $\max\limits_{[-1;5]} y = y(5) = 266$; $\min\limits_{[-1;5]} y = y(1) = -6$.

**** Đối với dạng ta này chúng ta có thể không cần lập bảng biến thiên mà trình bày lời giải như sau:***

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-1;5]$.

Ta có: $y' = 6x^2 + 6x - 12; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-1;5] \\ x = -2 \notin [-1;5] \end{array}\right.$.

Ta lại có: $\begin{cases} f(1) = -6 \\ f(-1) = 14 \\ f(5) = 266 \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[-1;5]} f(x) = f(1) = -6; \max\limits_{[-1;5]} f(x) = f(5) = 266$.

Bài toán 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$

Ta có: $y' = \dfrac{-10}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in (0;2)$

Ta có bảng biến thiên hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên [0; 2]:

x	0		2
y'		$-$	
y	$\dfrac{1}{3}$	$\searrow$	-5

Từ bảng biến thiên ta suy ra: $\max\limits_{[0;2]} y = y(0) = \dfrac{1}{3}$; $\min\limits_{[0;2]} y = y(2) = -5$.

**** Đối với dạng ta này chúng ta có thể không cần lập bảng biến thiên mà trình bày lời giải như sau:***

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có: $y' = \dfrac{-10}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in (0;2)$.

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên đoạn $[0;2]$.

Do đó: $\max\limits_{[0;2]} y = y(0) = \dfrac{1}{3}$; $\min\limits_{[0;2]} y = y(2) = -5$.

Bài toán 3:

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

Lời giải:

Hàm số liên tục và xác định trên đoạn $\left[2;4\right]$

Đạo hàm $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2-2x-3}{\left(x-1\right)^2}$.

Suy ra $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin\left(2;4\right)\\x=3\in\left(2;4\right)\end{array}\right.$.

Ta có $f\left(2\right)=4;\ \ f\left(3\right)=3;\ \ f\left(4\right)=\dfrac{10}{3}$.

Vậy $\max\limits_{x\in\left[2;4\right]}f\left(x\right)=4$ khi $x=2$; $\min\limits_{x\in\left[2;4\right]}f\left(x\right)=3$ khi $x=3$.

Bài toán 4: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $\mathrm{y}=\mathrm{f(x)}=\sqrt{\mathrm{x}-2}+\sqrt{8-\mathrm{x}}$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[2;8\right]$.

Ta có: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}-2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{8-\mathrm{x}}},\forall x\in\left(2;8\right)$.

$\mathrm{y}'=0\Leftrightarrow\sqrt{8-\mathrm{x}}-\sqrt{\mathrm{x}-2}=0\quad\Leftrightarrow\sqrt{8-\mathrm{x}}=\sqrt{\mathrm{x}-2}$ **(có dạng** $\sqrt{A}=\sqrt{B}\Leftrightarrow\begin{cases}B\ge0\\A=B\end{cases}$**)**

$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{x}-2\ge0\\8-\mathrm{x}=2-\mathrm{x}\end{cases}\Leftrightarrow\mathrm{x}=5\in\left(2;8\right),$

$f(2)=\sqrt{6};\ f(5)=2\sqrt{3};\ \ f(8)=\sqrt{6}$

Do đó: $\max\limits_{\left[2;8\right]}y=y\left(5\right)=2\sqrt{3}$; $\min\limits_{\left[2;8\right]}y=y\left(2\right)=\sqrt{6}$.

Bài toán 5:

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=x+\sqrt{2}\sin x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};0\right]$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $f'\left(x\right)=1+\sqrt{2}\cos x$.

Với $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

Tính các giá trị $f\left(0\right)=0;\ f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\pi}{4}-1;\ f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy $\min\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]}f\left(x\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\pi}{4}-1;\quad\max\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]}f\left(x\right)=f\left(0\right)=0$.

Bài toán 6: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin x + \cos 2x$ trên đoạn $\left[0;\pi\right]$.

Lời giải:

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;\pi\right]$.

Đạo hàm $y' = 2\cos x - 2\sin 2x$.

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ x = 2x - \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{2} - k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Vì $x \in \left[0;\pi\right]$ **nên** ta chọn $x = \dfrac{\pi}{6};\ x = \dfrac{5\pi}{6};\ x = \dfrac{\pi}{2}$.

Ta có $y\left(0\right) = 1;\quad y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2};\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1;\quad y\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2};\quad y\left(\pi\right) = 1.$

Vậy $\max\limits_{x\in\left[0;\pi\right]} y = \dfrac{3}{2}$ khi $x = \dfrac{\pi}{6}$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{6}$; $\min\limits_{x\in\left[0;\pi\right]} y = 1$ khi $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ hoặc $x = \pi$.

Bài toán 7: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{2}\cos 2x + 4\sin x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Lời giải:

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Đạo hàm $y' = -2\sqrt{2}\sin 2x + 4\cos x = -4\cos x\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right)$.

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow -4\cos x\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi;\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in \left[0;\dfrac{3\pi}{4}\right]$ nên ta chọn $x = \dfrac{\pi}{2};\ x = \dfrac{\pi}{4};\ x = \dfrac{3\pi}{4}$.

Ta có $y\left(0\right) = \sqrt{2};\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2};\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4 - \sqrt{2};\quad y\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}.$

Vậy $\max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]} y = 2\sqrt{2}$ khi $x = \dfrac{\pi}{4}$ **hoặc** $x = \dfrac{3\pi}{4}$; $\min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]} y = \sqrt{2}$ khi $x = 0$.

Bài toán 8: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(2\sin x+1\right)^2+2$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải:

Hàm số viết lại $y=4\sin^2 x+4\sin x+3$.

Đạo hàm $y'=8\sin x\cos x+4\cos x=4\cos x\left(2\sin x+1\right)$.

Suy ra $y'=0\Leftrightarrow 4\cos x\left(2\sin x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{2}\\ x=-\frac{\pi}{6}\end{array}\right.\text{(do } x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\text{)}.$$

Ta có: $y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=3;\quad y\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2;\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=11$.

Vậy $\max\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f\left(x\right)=11$ khi $x=\frac{\pi}{2}$; $\min\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f\left(x\right)=2$ khi $x=-\frac{\pi}{6}$.

Bài toán 9: Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $\left[0;1\right]$ bằng -2.

Lời giải:

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$.

Đạo hàm $f'\left(x\right)=\frac{m^2-m+1}{\left(x+1\right)^2}=\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{\left(x+1\right)^2}>0,\ \forall x\in\left[0;1\right],\forall m\in\mathbb{R}$

Suy ra hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên đoạn $\left[0;1\right]$

nên $\min\limits_{[0;1]} f\left(x\right)=f\left(0\right)=-m^2+m$.

Theo giả thiết ta có : $-m^2+m=-2\Leftrightarrow m^2-m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=2\end{array}\right.$.

Vậy $m=-1$ hoặc $m=2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài toán 10: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|x^3+3x^2-72x+90\right|$ trên $\left[-5;5\right]$.

Lời giải:

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^3+3x^2-72x+90$ trên $\left[-5;5\right]$

Hàm số $g\left(x\right)$xác định và liên tục trên đoạn $\left[-5;5\right]$

Đạo hàm $g'\left(x\right)=3x^2+6x-72$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4\in[-5;5] \\ x=-6\notin[-5;5] \end{array}\right.$$

Tính các giá trị $g(5)=-70$, $g(-5)=400$, $g(4)=-86$.

Suy ra $|g(5)|=70$; $|g(-5)|=400$; $|g(4)|=86$

Vậy $\underset{x\in[-5;5]}{Max} f(x)=\underset{x\in[-5;5]}{Max}\{|g(-5)|,|g(4)|,|g(5)|\}=400$ khi $x=-5$.

IV. TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ, BIỂU THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

1. Phương pháp

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ (biểu thức $P(x)$) trên D.

+ Bước 1: Biến đổi hàm số (biểu thức) đã cho về dạng $y=F(u(x))$ $\left(P(x)=F(u(x))\right)$

+ Bước 2: Đặt $t=u(x)$. Khi đó, ta tìm được $t\in E$ với $\forall x\in D$.

+ Bước 3: Việc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ (biểu thức $P(x)$) trên D quy về việc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $F(t)$ (biểu thức $F(t)$) trên E.

2. Các ví dụ

Bài toán 1:

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(2\sin x+1)^2+2$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải:

Đặt $t=\sin x$. Vì $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ nên $t\in[-1;1]$.

Hàm số trở thành $y=(2t+1)^2+2=4t^2+4t+3$, $t\in[-1;1]$.

Đạo hàm $y'=8t+4$.

Suy ra $y'=0\Leftrightarrow 8t+4=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}\in[-1;1]$.

Ta có $y(-1)=3$; $y\left(-\frac{1}{2}\right)=2$; $y(1)=11$.

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} f(t)=11$ khi $t=1$, suy ra $x=\frac{\pi}{2}$; $\min\limits_{[-1;1]} f(t)=2$ khi $t=-\frac{1}{2}$, suy ra $x=-\frac{\pi}{6}$.

Bài toán 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{1+\sin^6 x+\cos^6 x}{1+\sin^4 x+\cos^4 x}$.

Lời giải:

Hàm số được viết lại : $y=\frac{1+1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}{1+1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}=\frac{2-\frac{3}{8}(1-\cos 4x)}{2-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)}=\frac{13+3\cos 4x}{14+2\cos 4x}$

Đặt $t=\cos 4x$, $-1\le t\le 1$.

Hàm số $f(t)=\frac{13+3t}{14+2t}$ xác định và liên tục trên $[-1;1]$

$f'(t)=\frac{16}{(14+2t)^2}>0,\forall t\in[-1;1]$.

Suy ra hàm số tăng trên $\left[-1;1\right]$.

Vậy $\underset{x\in\mathbb{R}}{Max}\, y=\underset{t\in\left[-1;1\right]}{Max}\, f\left(t\right)=1$ khi $t=1\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$

$\underset{x\in\mathbb{R}}{Min}\, y=\underset{t\in\left[-1;1\right]}{Min}\, f\left(t\right)=\dfrac{5}{6}$ khi $t=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

Bài toán 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\sin^3 x+\sin^2 x-5\sin x+1$ là?

Lời giải:

Đặt $t=\sin x\Rightarrow t\in\left[-1;1\right]$.

Hàm số đã cho trở thành $g\left(t\right)=t^3+t^2-5t+1$.

Khi đó, bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(t\right)=t^3+t^2-5t+1$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$

Xét hàm số $g\left(t\right)=t^3+t^2-5t+1$ xác định và liên tục trên $\left[-1;1\right]$

$$g'\left(t\right)=3t^2+2t-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\notin\left(-1;1\right)\\ t=-\dfrac{5}{3}\notin\left(-1;1\right)\end{array}\right..$$

Ta có: $\begin{cases}g\left(-1\right)=6\\ g\left(1\right)=2\end{cases}\Rightarrow\underset{\left[-1;1\right]}{\max}\, g\left(t\right)=g\left(-1\right)=6\Rightarrow\underset{\mathbb{R}}{\max}\, f\left(x\right)=6$

Bài toán 4: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^6+4\left(1-x^2\right)^3$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$. Khi đó, tỉ số $\dfrac{M}{m}$ bằng ?

Lời giải:

Đặt $t=x^2$. Vì $x\in\left[-1;1\right]$ nên $t\in\left[0;1\right]$.

Hàm số đã cho trở thành $g\left(t\right)=t^3+4\left(1-t\right)^3=-3t^3+12t^2-12t+4$ với $t\in\left[0;1\right]$.

Xét hàm số $g\left(t\right)=-3t^3+12t^2-12t+4$ xác định và liên tục trên với $\left[0;1\right]$.

$$g'\left(t\right)=-9t^2+24t-12=0\Leftrightarrow-9t^2+24t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{2}{3}\in\left(0;1\right)\\ t=2\notin\left(0;1\right)\end{array}\right..$$

Ta có: $\begin{cases}g\left(0\right)=4\\ g\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{9}\\ g\left(1\right)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\underset{\left[0;1\right]}{\max}\, g\left(t\right)=g\left(0\right)=4\\ \underset{\left[0;1\right]}{\min}\, g\left(t\right)=g\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{9}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\underset{\left[-1;1\right]}{\max}\, f\left(x\right)=4=M\\ \underset{\left[-1;1\right]}{\min}\, f\left(x\right)=\dfrac{4}{9}=m\end{cases}\Rightarrow\dfrac{M}{m}=9.$

Bài toán 5: Gọi a là giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+2\sqrt{2x-x^2}$ trên đoạn $\left[0;2\right]$. Khi đó, $\log_a 2\sqrt{2}$ có giá trị bằng ?

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$.

Vì $x \in [0;2]$ nên $t \in [\sqrt{2};2]$.

Suy ra: $t^2 = x + 2\sqrt{x}\sqrt{2-x} + 2 - x \Leftrightarrow 2\sqrt{2x - x^2} = t^2 - 2$.

Hàm số đã cho trở thành: $g(t) = t^2 + t - 2$.

Khi đó, bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t) = t^2 + t - 2$ trên đoạn $[\sqrt{2};2]$.

Xét hàm số $g(t) = t^2 + t - 2$ xác định và liên tục trên với $[\sqrt{2};2]$.

Ta có: $g'(t) = 2t + 1 > 0$ với $\forall t \in (\sqrt{2};2)$

Suy ra, hàm số $g(t)$ đồng biến trên đoạn $[\sqrt{2};2]$.

Do đó: $\max\limits_{[\sqrt{2};2]} g(t) = g(2) = 4 \Rightarrow \max\limits_{[0;2]} f(x) = 4 = a \Rightarrow \log_a 2\sqrt{2} = \log_4 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{4}$.

Bình luận: Sau khi đọc xong lời giải trên sẽ có nhiều bạn đọc thắc mắc là tại sao chúng tôi biết được "Vì $x \in [0;2]$ nên $t \in [\sqrt{2};2]$"?

Giải đáp: Từ phép đặt ẩn phụ $t = \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = h(x)$, ta có: $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}$.

Khi đó: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow x = 2 - x \Leftrightarrow x = 1 \in (0;2)$.

Ta có: $\begin{cases} h(0) = \sqrt{2} \\ h(1) = 2 \\ h(2) = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[0;2]} h(x) = \sqrt{2} \\ \max\limits_{[0;2]} h(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} \le h(x) \le 2 \Rightarrow \sqrt{2} \le t \le 2$.

Bài toán 6: Cho biểu thức $P = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$ với $x^2 + y^2 \ne 0$. Giá trị nhỏ nhất của P bằng?

Lời giải:

Nếu $y = 0$ thì $P = 1 \quad (1)$

Nếu $y \ne 0$ thì $P = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{y}\right) + 1}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{y}\right) + 1}$

Đặt $t = \dfrac{x}{y}$, khi đó: $P = f(t) = \dfrac{t^2 + t + 1}{t^2 - t + 1}$; $f'(t) = \dfrac{-2t^2 + 2}{(t^2 - t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -2t^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $P=f(t)\ge\frac{1}{3}\quad(2)$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow P=f(t)\ge\frac{1}{3}\Rightarrow \min P=\frac{1}{3}$

Bài toán 7: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x\ge 0;y\ge 0$ và $x+y=1$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}$ là?

Lời giải:

Ta có: $P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}=\frac{x(x+1)+y(y+1)}{(x+1)(y+1)}=\frac{(x+y)^2-2xy+1}{xy+x+y+1}=\frac{2-2xy}{2+xy}$ (vì $x+y=1$)

Đặt $t=xy$. Hàm số đã cho trở thành $g(t)=\frac{2-2t}{2+t}$.

Vì $x\ge 0;y\ge 0\Rightarrow t\ge 0$.

Mặt khác, vì $1=x+y\ge 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow xy\le\frac{1}{4}\Rightarrow t\le\frac{1}{4}$.

Khi đó, bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t)=\frac{2-2t}{2+t}$ trên $\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

Xét hàm số $g(t)=\frac{2-2t}{2+t}$ xác định và liên tục trên $\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

Ta có: $g(t)=\frac{-6}{(2+t)^2}<0$ với $\forall t\in\left(0;\frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow$ hàm số $g(t)$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

Do đó: $\begin{cases}\min\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} g(t)=g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3}\\ \max\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} g(t)=g(0)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\min P=\frac{2}{3}\\ \max P=1\end{cases}$

Bài toán 8: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn: $x^2+y^2\le xz+yz-2xy$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=8\left(x^4+y^4+z^4\right)\left(\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{4y^4}+\frac{1}{z^4}\right)$ là?

Lời giải:

Kết hợp bất đẳng thức $AM-GM$ và bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$8\left(x^4+y^4+z^4\right)\left(\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{4y^4}+\frac{1}{z^4}\right)\ge 8\left[\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2}+z^4\right]\left(\frac{1}{2x^2y^2}+\frac{1}{z^4}\right)$$

$$\ge 8\left[\frac{(x+y)^4}{8}+z^4\right]\left[\frac{8}{(x+y)^2}+\frac{1}{z^4}\right]=\left(\frac{x+y}{z}\right)^4+64\left(\frac{z}{x+y}\right)^4+16.$$

Biểu thức P của ta bây giờ chỉ chứa một biến duy nhất $t=\left(\frac{x+y}{z}\right)^4$. Bây giờ quay trở lại điều kiện để tìm khoảng chặn cho t. Từ điều kiện ta có: $x+y\le z\Leftrightarrow\left(\frac{x+y}{z}\right)^4\le 1$.

Khi đó ta có: $P\ge t+\frac{64}{t}+16$. Xét hàm số $f(t)=t+\frac{64}{t}+16$, $f'(t)=1-\frac{64}{t^2}<0$. Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0;1]$. Suy ra $f(t)\ge f(1)=81$.

Vậy $MaxP=81$ đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$ và $z=2$

Bài toán 9: Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $-1-2\sqrt{2}<x<-1+2\sqrt{2}, y>0, z>0$ và $x+y+z=-1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{8-(y+z)^2}$ là?

Lời giải:

Ta có $P=\frac{1}{(-1-z)^2}+\frac{1}{(-1-y)^2}+\frac{1}{8-(-1-x)^2}=\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{8-(1+x)^2}$

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\ge\frac{1}{1+yz}$

Thật vậy: $\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\ge\frac{1}{1+yz}\Leftrightarrow(1+yz)\left[(1+z)^2+(1+y)^2\right]\ge\left[(1+z)(1+y)\right]^2$.

$\Leftrightarrow(1+yz)\left(2+2z+2y+z^2+y^2\right)\ge(1+zy+z+y)^2$

$\Leftrightarrow 2(z+y)(1+zy)+2(1+yz)+(1+zy)(y-z)^2+2zy(1+yz)$

$\ge(1+zy)^2+2(z+y)(1+zy)+(z+y)^2$

$\Leftrightarrow(1+zy)(y-z)^2+2+4yz+2y^2z^2-(1+yz)^2-(y-z)^2-4yz\ge 0$

$\Leftrightarrow yz(y-z)^2+(1-yz)^2\ge 0$ (hiển nhiên đúng).

Dấu "=" xảy ra khi $y=z=1$.

Ta lại có $\frac{y+z}{2}\ge\sqrt{yz}\Rightarrow yz\le\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\frac{(-1-x)^2}{4}=\frac{(1+x)^2}{4}$

Do đó $\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\ge\frac{1}{1+yz}\ge\frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{4}}=\frac{4}{4+(1+x)^2}$

$\Rightarrow P\ge\frac{4}{4+(1+x)^2}+\frac{1}{8-(x+1)^2}$

Do $-1-2\sqrt{2}<x<-1+2\sqrt{2}$ nên $(x+1)^2\in[0;8)$.

Đặt $t=(1+x)^2\Rightarrow t\in[0;8)$ và $P\ge\frac{4}{4+t}+\frac{1}{8-t}$.

Xét $f\left(t\right)=\dfrac{4}{4+t}+\dfrac{1}{8-t}$ với $t\in\left[0;8\right)$. $f'\left(t\right)=-\dfrac{4}{\left(4+t\right)^2}+\dfrac{1}{\left(8-t\right)^2}=\dfrac{-3t^2+72t-240}{\left(4+t\right)^2\left(8-t\right)^2}$

$f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow -3t^2+72t-240=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=20 \quad \textit{(loại)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		4		8
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $P\geq f\left(t\right)\geq\dfrac{3}{4}$ và $P=\dfrac{3}{4}$ khi $\begin{cases}\left(1+x\right)^2=4 \\ y=z=1 \\ x+y+z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3 \\ y=z=1\end{cases}$

Vậy $M\text{in}\,P=\dfrac{3}{4}$ khi $x=-3,y=z=1$.

<u>Bài toán 10:</u> Cho $x,y\geq 0$ thỏa mãn $x+y=4$. Tìm GTLN, GTNN của $S=\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right)$.

<u>Lời giải:</u>

Đặt $t=xy$, suy ra $0\leq t\leq\dfrac{\left(x+y\right)^2}{4}=4$.

Ta có $S=\left(xy\right)^3-\left(x+y\right)\left[\left(x+y\right)^2-3xy\right]+1=t^3-4\left[4^2-3t\right]+1=t^3+12t-63$.

Xét hàm $f\left(t\right)=t^3+12t-63$, với $t\in\left[0;4\right]$. Ta có $f'\left(t\right)=3t^2+12>0\ \ \forall t\in\left[0;4\right]\ \Rightarrow\ f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[0;4\right]$. Do đó:

- $\min S=\min\limits_{t\in\left[0;4\right]}f\left(t\right)=f\left(0\right)=-63$, đạt được khi và chỉ khi

$\begin{cases}x+y=4 \\ xy=0\end{cases}\Leftrightarrow\left(x;y\right)=\left(4;0\right)$ hoặc $\left(x;y\right)=\left(0;4\right)$.

- $\max S=\max\limits_{t\in\left[0;4\right]}f\left(t\right)=f\left(4\right)=49$, đạt được khi và chỉ khi $\begin{cases}x+y=4 \\ xy=4\end{cases}\Leftrightarrow\left(x;y\right)=\left(2;2\right)$.

<u>Bài toán 11:</u> Cho $x,\ y\geq 0$ thỏa mãn $x^2+y^2=2$. Tìm GTLN, GTNN của $S=x+y-xy$.

<u>Lời giải:</u>

Đặt $t=x+y\Rightarrow\ t>0$. Ta có:

$t^2=\left(x+y\right)^2\leq 2\left(x^2+y^2\right)=4\ \Rightarrow\ t\leq 2$,

$t^2=\left(x+y\right)^2=x^2+y^2+2xy\geq x^2+y^2=2\ \Rightarrow\ t\geq\sqrt{2}$.

Suy ra $t \in \left[\sqrt{2};2\right]$. Lại có

$$xy = \frac{\left(x+y\right)^2 - \left(x^2+y^2\right)}{2} = \frac{1}{2}t^2 - 1 \Rightarrow S = f\left(t\right) = -\frac{1}{2}t^2 + t + 1.$$

Ta có $f'\left(t\right) = -t + 1 > 0$ với mọi $t \in \left(\sqrt{2};2\right)$, $f\left(2\right) = 1$, $f\left(1\right) = \frac{3}{2}$. Do đó

- $\min S = f\left(2\right) = 1$, đạt được $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.
- $\max S = f\left(1\right) = \frac{3}{2}$, đạt được $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Bài toán 12: Cho x, $y \geq 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 8$. Tìm GTLN, GTNN của $S = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$.

Lời giải:

Đặt $t = x + y$, ta có:

$$\left(x+y\right)^2 \leq 2\left(x^2+y^2\right) = 2\cdot 8 = 16 \Rightarrow t \leq 4,$$

$$\left(x+y\right)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \geq x^2 + y^2 = 8 \Rightarrow t \geq 2\sqrt{2}.$$

Suy ra $2\sqrt{2} \leq t \leq 4$. Lại có: $x\cdot y = \frac{\left(x+y\right)^2 - \left(x^2+y^2\right)}{2} = \frac{t^2-8}{2}$.

Ta có biến đổi sau đây:

$$S = \frac{x\left(x+1\right) + y\left(y+1\right)}{\left(y+1\right)\left(x+1\right)} = \frac{\left(x+y\right)^2 + \left(x+y\right) - 2xy}{x+y+xy+1} = \frac{t^2 + t - \left(t^2-8\right)}{t + \frac{t^2-8}{2} + 1} = 2\cdot\frac{t+8}{t^2+2t-6}.$$

Xét hàm $f\left(t\right) = \frac{t+8}{t^2+2t-6}$ với $2\sqrt{2} \leq t \leq 4$. Ta có :

$$f'\left(t\right) = \frac{\left(t^2+2t-6\right) - \left(t+8\right)\left(2t+2\right)}{\left(t^2+2t-6\right)^2} = \frac{-t^2-16t-22}{\left(t^2+2t-6\right)^2} < 0,\ \forall t: 2\sqrt{2} \leq t \leq 4.$$

Suy ra f nghịch biến trên $\left[2\sqrt{2};4\right]$. Do đó $\min\limits_{t\in\left[2\sqrt{2};4\right]} f\left(t\right) = f\left(4\right) = \frac{2}{3}$. $\max f\left(t\right) = f\left(2\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$.

+) $S \geq 2\cdot \min\limits_{t\in\left[2\sqrt{2};4\right]} f\left(t\right) = \frac{4}{3}$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$. Vậy $\min S = \frac{4}{3}$, đạt được $\Leftrightarrow x = y = 2$.

+) $S \leq 2\cdot \max\limits_{t\in\left[2\sqrt{2};4\right]} f\left(t\right) = 4\sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x+y=2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy $\max S = \dfrac{4}{3}$, đạt được $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases}$.

Bài toán 13: Cho x, $y \geq 0$ thỏa mãn $x + y + xy = 3$. Tìm GTLN, GTNN của $S = \dfrac{x^2}{y+1} + \dfrac{y^2}{x+1} - \dfrac{1}{x+y+3}$.

Lời giải:

Đặt $t = x + y \Rightarrow \begin{cases} xy = 3 - t \geq 0 \\ 3 \leq t + \dfrac{t^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 3 - t \\ 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$.

Ta có

$$S = \frac{x^3 + y^3 + x^2 + y^2}{(x+1)(y+1)} - \frac{1}{x+y+3} = \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y) + (x+y)^2 - 2xy}{xy + (x+y) + 1} - \frac{1}{x+y+3}$$

$$= \frac{t^3 - 3(3-t)t + t^2 - 2(3-t)}{(3-t) + t + 1} - \frac{1}{t+3} = \frac{t^3}{4} + t^2 - \frac{7t}{4} - \frac{1}{t+3} - \frac{3}{2}.$$

Xét hàm $f(t) = \dfrac{t^3}{4} + t^2 - \dfrac{7t}{4} - \dfrac{1}{t+3} - \dfrac{3}{2}$, $t \in [2;3]$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{3t^2}{4} + 2t - \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{(t+3)^2} > 0$, $\forall t \in [2;3] \Rightarrow f(1)$ đồng biến trên $[2;3]$.

Do đó :

- $S = f(t) \geq f(2) = \dfrac{4}{5}$. Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

$\Rightarrow \min S = \dfrac{4}{5}$, Đạt được $\Leftrightarrow x = y = 1$.

- $S = f(t) \leq f(3) = \dfrac{35}{6}$. Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow \max S = \dfrac{35}{6}$, Đạt được $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$.

Bài toán 14: Cho x, y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = 1$. Tìm GTLN, GTNN của $S = x^2 - xy + y^2$.

Lời giải:

Cách 1. Từ giả thiết suy ra $1 = (x+y)^2 - xy \geq (x+y)^2 - \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{3(x+y)^2}{4}$.

Do đó, nếu đặt $t = (x+y)$ thì $\dfrac{3}{4}t^2 \leq 1$, hay $t \in \left[-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

Ta có $xy = (x+y)^2 - 1 = t^2 - 1$, suy ra

$S=\left(x+y\right)^2-3xy=t^2-3\left(t^2-1\right)=-2t^2+3$.

Xét hàm $f\left(t\right)=-2t^2+3$ với $t\in\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. Ta có $f'\left(t\right)=-4t$, $f'\left(t\right)$ có nghiệm duy nhất

$t=0\in\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. Ta có $f\left(0\right)=3$, $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

Do đó

- $\min S=\frac{1}{3}$, đạt được chẳng hạn khi

$$\begin{cases}x+y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\\x^2+xy+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\\\left(x+y\right)^2-xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\\xy=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

- $\max S=3$, đạt được khi và chỉ khi $\begin{cases}x+y=0\\x^2+xy+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\\left(x+y\right)^2-xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\xy=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\ \left(x;y\right)=\left(1;-1\right)$ hoặc $\left(x;y\right)=\left(-1;1\right)$.

Cách 2. Ta có $S=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$.

- Xét $y=0$. Khi đó $S=1$.
- Xét $y\neq 0$. Chia cả tử và mẫu của S cho y^2 và đặt $t=\frac{x}{y}$, ta được

$S=\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}=1-\frac{2t}{t^2+t+1}$.

Xét hàm $f\left(t\right)=1-\frac{2t}{t^2+t+1}$, ta có $f'\left(t\right)=\frac{2\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+t+1\right)^2}$.

Bảng biến thiên của hàm $f\left(t\right)$:

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

$\lim\limits_{t\to\pm\infty}f\left(t\right)=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\left(1-\frac{\frac{2}{t}}{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}\right)=1$

Suy ra:

+) $\min S=\frac{1}{3}$, đạt được $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{y}=1\\x^2+xy+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ hoặc $\Leftrightarrow\left(x;y\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

+) $\max S = 3$. Đạt được khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = -1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = (1;-1)$ hoặc $(x;y) = (-1;1)$.

Bài toán 15: [ĐHB09] Cho x, y thỏa mãn $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm GTNN của $A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$.

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức $(a^2 + b^2 + ab) \geq \dfrac{3}{4}(a+b)^2$ với $a = x^2$, $b = y^2$ ta được

$(x^4 + y^4 + x^2y^2) \geq \dfrac{3}{4}(x^2 + y^2)^2 \Rightarrow A \geq \dfrac{9}{4}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) + 1$.

Từ giả thiết, áp dụng bất đẳng thức $4xy \leq (x+y)^2$, ta có

$(x+y)^3 + (x+y)^2 \geq 2 \Leftrightarrow (x+y-1)\left[(x+y)^2 + 2(x+y) + 2\right] \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq 1$

(do $(x+y)^2 + 2(x+y) + 2 = (x+y+1)^2 + 1 > 0 \ \forall x, y$).

Đặt $t = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} t \geq \dfrac{(x+y)^2}{2} = \dfrac{1}{2} \\ A \geq f(t) = \dfrac{9}{4}t^2 - 2t + 1 \end{cases}$.

Xét hàm $f(t) = \dfrac{9}{4}t^2 - 2t + 1$, $t \geq \dfrac{1}{2}$. Ta có $f'(t) = \dfrac{9}{2}t - 2 > 0 \ \forall t \geq \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \Rightarrow f(t) \geq f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{16} \ \forall t \geq \dfrac{1}{2}$.

Như vậy $S \geq \dfrac{9}{16}$, dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ hoặc $(x;y) = \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Vậy $\min S = \dfrac{9}{16}$, đạt được $\Leftrightarrow (x;y) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ hoặc $(x;y) = \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài toán 16: [ĐHB12] Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^5 + y^5 + z^5$.

Lời giải:

Từ $x + y + z = 0$ suy ra $z = -(x+y)$, thay $z = -(x+y)$ vào đẳng thức thứ hai của giả thiết, ta được : $1 = x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 2(x+y)^2 - 2xy \geq 2(x+y)^2 - \dfrac{1}{2}(x+y)^2 = \dfrac{3}{2}(x+y)^2$

Do đó, nếu đặt $t = x + y$ thì ta có $\dfrac{3}{2}t^2 \leq 1 \Leftrightarrow t \in \left[-\dfrac{\sqrt{6}}{3}; \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right]$, $xy = \dfrac{2t^2 - 1}{2}$.

Biến đổi: $P = x^5 + y^5 - (x+y)^5 = (x^3+y^3)(x^2+y^2) - x^2y^2(x+y) - (x+y)^5$

$= \left[(x+y)^3 - 3xy(x+y)\right]\left[(x+y)^2 - 2xy\right] - x^2y^2(x+y) - (x+y)^5$

$= \left[t^3 - 3\cdot\frac{2t^2-1}{2}\cdot t\right]\left[t^2 - 2\cdot\frac{2t^2-1}{2}\right] - \left(\frac{2t^2-1}{2}\right)^2 t - t^5 \quad = -\frac{5}{4}(2t^3 - t)$.

Xét hàm $f(t) = -\frac{5}{4}(2t^3 - t)$, với $t \in \left[-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$.

Ta có $f'(t) = -\frac{5}{4}(6t^2 - 1)$ có hai nghiệm là $t = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} \in \left[-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$.

Ta có $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{36}$, $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\frac{5\sqrt{6}}{36}$, $f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{36}$, $f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{5\sqrt{6}}{36}$.

Vậy $\min P = -\frac{5\sqrt{6}}{36}$, đạt được chẳng hạn khi $x = y = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $z = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Bài toán 17: Cho x, y, $z > 0$ thỏa mãn $x + y + z \le \frac{3}{2}$. Tìm GTNN của biểu thức

$S = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x^2y} + \frac{1}{y^2z} + \frac{1}{z^2x}$.

Lời giải:

Đặt $t = \sqrt[3]{xyz}$. Ta có $t > 0$ và $\frac{3}{2} \ge x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow t \le \frac{1}{2}$. Suy ra $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Lại có: $x^2 + y^2 + z^2 \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3t^2$, $\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{y^2z} + \frac{1}{z^2x} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y}\cdot\frac{1}{y^2z}\cdot\frac{1}{z^2x}} = \frac{3}{xyz} = \frac{3}{t^3}$

$\Rightarrow S \ge 3\left(t^2 + \frac{1}{t^3}\right)$.

Xét hàm $f(t) = t^2 + \frac{1}{t^3}$ với $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Ta có $f'(t) = 2t - \frac{3}{t^4} = \frac{2t^5 - 3}{t^4} < 0 \ \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$, suy ra f nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Vậy $\min S = 3f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{99}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y = z \\ \sqrt[3]{xyz} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$.

Bài toán 18: **[ĐHA03]** Cho x, y, $z > 0$ thỏa mãn $x + y + z \le 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \ge \sqrt{82}. \qquad (1)$$

Lời giải:

Xét $\vec{a}\left(x;\frac{1}{x}\right)$, $\vec{b}\left(y;\frac{1}{y}\right)$, $\vec{c}\left(z;\frac{1}{z}\right)$, ta có $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(x+y+z;\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

Từ $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{c}\right|\geq\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ suy ra

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\geq\sqrt{\left(x+y+z\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}$$

Đến đây ta có hai cách đi tiếp:

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$.

Do đó: $VT\left(1\right)\geq\sqrt{9t+\frac{9}{t}}$, với $t=\left(\sqrt[3]{xyz}\right)^2$.

Ta có $0<t\leq\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2\leq\frac{1}{9}$.

Xét $f\left(t\right)=9t+\frac{9}{t}$ với $t\in\left(0;\frac{1}{9}\right]$.

Ta có $f'\left(t\right)=9-\frac{9}{t^2}<0\ \ \forall t\in\left(0;\frac{1}{9}\right]\Rightarrow f\left(t\right)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{1}{9}\right]$.

$$\Rightarrow f\left(t\right)\geq f\left(\frac{1}{9}\right)=82\Rightarrow VT\left(1\right)\geq\sqrt{f(t)}\geq\sqrt{82}\text{ (ĐPCM).}$$

Cách 2. $\left(x+y+z\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=81\left(x+y+z\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-80\left(x+y+z\right)^2$

$$\geq 2\sqrt{81\left(x+y+z\right)^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}-80\left(x+y+z\right)^2$$

$\geq 18\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-80\left(x+y+z\right)^2\geq 18.9-80=82$. Từ đó suy ra đpcm.

Bài tập tự luyện

1. [ĐHD09] Cho x, $y \geq 0$ thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm GTLN, GTNN của $S = \left(4x^2 + 3y\right)\left(4y^2 + 3x\right) + 25xy$.

2. Cho x, $y \geq 0$ thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm GTLN, GTNN của $S = \dfrac{x}{y+1} + \dfrac{y}{x+1}$.

3. Cho x, $y \geq 0$ thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm GTLN, GTNN của $S = \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right) - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

4. Cho x, $y \geq 0$ thỏa mãn $x + y + xy = 3$. Tìm GTLN, GTNN của $S = \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{y}{y+2} + \dfrac{6}{x+y+1}$.

5. Cho x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1 + xy$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $S = x^4 + y^4 - x^2y^2$.

6. Cho x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $S = \sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}$.

7. [ĐHD12] Cho x, y thỏa mãn $\left(x-4\right)^2 + \left(y-4\right)^2 + 2xy \leq 32$. Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + 3\left(xy - 1\right)\left(x + y - 2\right)$.

8. [ĐHA06] Cho $x \neq 0$, $y \neq 0$ thỏa mãn $\left(x+y\right)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3}$.

9. [ĐHB08]Cho x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = \dfrac{2\left(x^2 + 6xy\right)}{1 + 2xy + 2y^2}$

10. Cho x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 1$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $S = x^2 + 2xy - y^2$

11. Cho x, y thỏa mãn $2x^2 + y^2 + xy \geq 1$. Tìm GTNN của biểu thức $S = x^2 + y^2$.

12. Cho x, y, $z > 0$ thỏa mãn $x + y + z \leq \dfrac{3}{2}$. Tìm GTNN của biểu thức $S = x + y + z + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$.

13. [ĐHB10] Cho a, b, $c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm GTNN của biểu thức $M = 3\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) + 3\left(ab + bc + ca\right) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + a^2}$.

14. Cho x, y, $z > 0$ thỏa mãn $x + y + z \leq \dfrac{3}{2}$. Tìm GTNN của biểu thức $P = \dfrac{x}{y^2z} + \dfrac{y}{z^2x} + \dfrac{x}{x^2y} + \dfrac{x^5}{y} + \dfrac{y^5}{z} + \dfrac{z^5}{x}$.

V. ỨNG DỤNG GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ TRONG BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

1. Tìm m để phương trình có nghiệm

✫ Phương pháp

Bước 1: Tách m ra khỏi biến số x và đưa về dạng $f(x) = A(m)$.

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D.

Bước 3: Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị tham số $A(m)$ để đường thẳng $y = A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Bước 4: Kết luận các giá trị của $A(m)$ để phương trình $f(x) = A(m)$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D.

✍ Lưu ý

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì giá trị $A(m)$ cần tìm là những m thỏa mãn: $\min\limits_{x\in D} f(x) \le A(m) \le \max\limits_{x\in D} f(x)$.
- Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y = A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại k điểm phân biệt.

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Tìm tham số thực m để phương trình $x + \sqrt{3x^2+1} = m$ có nghiệm thực.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đặt $f(x) = x + \sqrt{3x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có: $f'(x) = 1 + \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}+3x}{\sqrt{3x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x^2+1}+3x}{\sqrt{3x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+1} = -3x \Leftrightarrow \begin{cases} -3x > 0 \\ 3x^2+1 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$	$\nearrow$	$-\infty$

Vậy để phương trình có nghiệm thực thì: $m \ge \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Bài toán 2: Tìm tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 3m - 1 = 0$ có nghiệm trong $\left[1;+\infty\right)$.

Lời giải:

Ta có: $x^3 - 3x^2 + 3m - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 1 = -3m \quad (*)$

Xét hàm số $f\left(x\right) = x^3 - 3x^2 - 1$ với $x \in \left[1;+\infty\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin \left[1;+\infty\right) \\ x = 2 \in \left[1;+\infty\right) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	1		2		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	-3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow -3m \ge -5 \Leftrightarrow m \le \dfrac{5}{3}$.

Bài toán 3: Tìm tham số thực m để phương trình $\left(4m-3\right)\sqrt{x+3} + \left(3m-4\right)\sqrt{1-x} + m - 1 = 0$ có nghiệm thực.

Lời giải:

Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ 1-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$ hay $x \in \left[-3;1\right]$.

Nhận thấy: $\left(\sqrt{x+3}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{1-x}}{2}\right)^2 = 1$. Giúp ta liên tưởng đến công thức lượng giác $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Do đó, ta đặt: $\dfrac{\sqrt{x+3}}{2} = \sin\alpha$ và $\dfrac{\sqrt{1-x}}{2} = \cos\alpha$.

Do $x \in \left[-3;1\right]$ nên $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Khi, đó phương trình trở thành: $2\left(4m-3\right)\sin\alpha + 2\left(3m-4\right)\cos\alpha + m - 1 = 0, \forall\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \quad (*)$

Đặt $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}, t \in \left[0;1\right] \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Lúc đó: $(*) \Leftrightarrow \left(4m-3\right)\dfrac{4t}{1+t^2} + \left(3m-4\right)\dfrac{2-2t^2}{1+t^2} + m - 1 = 0, \ \forall t \in \left[0;1\right]$.

$$\Leftrightarrow \frac{-5mt^2 + 16mt + 7m + 7t^2 - 12t - 9}{1+t^2} = 0, \ \forall t \in \left[0;1\right] \Leftrightarrow m = \frac{7t^2 - 12t - 9}{5t^2 - 16t - 7} = g(t), \ \forall t \in \left[0;1\right].$$

Ta có: $g'(t) = \dfrac{-52t^2 - 8t - 60}{\left(5t^2 - 16t - 7\right)^2} < 0,\ \forall t \in [0;1]$.

Bảng biến thiên:

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{9}{7}$	$\searrow$	$\frac{7}{9}$

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có nghiệm thực thì $\dfrac{7}{9} \le m \le \dfrac{9}{7}$.

Bài toán 4:

Tìm tham số thực m để phương trình $m\sqrt{x^2+2} = x + m\ (1)$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

Lời giải:

Tập xác định: $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow m\sqrt{x^2+2} - m = x \Leftrightarrow m = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2} - 1} = f(x); \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+2} - 1\right) - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{2 - \sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}; \forall x \in \mathbb{R}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2 - \sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để hàm số có 3 nghiệm thực phân biệt thì: $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

Bài toán 5: Tìm m để: $x^2 + (m+2)x + 4 = (m-1)\sqrt{x^3 + 4x}$, $(*)$ có nghiệm.

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge 0$.

$$(*) \Leftrightarrow (x^2+4) + (m+2)x = (m-1)\sqrt{x(x^2+4)} \qquad (1)$$

Do $x = 0$ thì phương trình không thỏa. Chia hai vế cho $x \ne 0$ được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x} - (m-1)\sqrt{\frac{x^2+4}{x}} + m + 2 = 0 \qquad (2)$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}=\sqrt{x+\dfrac{4}{x}}\ge 2$ thì (2) $\Leftrightarrow t^2-(m-1)t+m+2=0\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+t+2}{t-1}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+t+2}{t-1}$ trên $\left[2;+\infty\right)$ có: $f'(t)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow t=3$.

Bảng biến thiên:

t	2		3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	8	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m\ge 7$ thì phương trình có nghiệm.

Bài toán 6:

Tìm tham số m để: $\sqrt{21+4x-x^2}-\dfrac{3}{4}x+3=m(\sqrt{x+3}+2\sqrt{7-x})$ $(*)$ có nghiệm thực.

Lời giải:

Điều kiện: $-3\le x\le 7$.

$$(*)\Leftrightarrow 4\sqrt{21+4x-x^2}-3x+12=4m(\sqrt{x+3}+2\sqrt{7-x}) \qquad (1)$$

Đặt $t=\sqrt{x+3}+2\sqrt{7-x}$, suy ra: $t^2-19=4\sqrt{21+4x-x^2}-3x+12$.

$$t'=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}-\frac{1}{\sqrt{7-x}}\cdot \text{ Cho } t'=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x+3}=\sqrt{7-x}\Leftrightarrow x=-1.$$

Bảng biến thiên:

x	-3		-1		7
t'		$+$	0	$-$	
t	$2\sqrt{10}$	$\nearrow$	$5\sqrt{2}$	$\searrow$	$\sqrt{10}$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ tập giá trị của t là $t\in\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow t^2-19=4mt\Leftrightarrow 4m=\dfrac{t^2-19}{t}$, $\forall t\in\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-19}{t}$ trên đoạn $\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]$ có: $f'(t)=\dfrac{t^2+19}{t^2}>0,\ \forall t\in\left[\sqrt{10};5\sqrt{2}\right]$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên đoạn $\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]$.

Do đó: $\min\limits_{\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]} f(t)=f(\sqrt{10})=-\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$ và $\max\limits_{\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]} f(t)=f(5\sqrt{2})=\dfrac{31\sqrt{2}}{10}$.

Để (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]} f(t)\le 4m\le \max\limits_{\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]} f(t)\Leftrightarrow -\dfrac{9\sqrt{10}}{40}\le m\le\dfrac{31\sqrt{2}}{40}$.

Kết luận: $m \in \left[-\frac{9\sqrt{10}}{10}; \frac{31\sqrt{2}}{10} \right]$ thì phương trình đã cho có nghiệm thực.

Bài toán 7: (CHUYÊN BIÊN HÒA – HÀ NAM – LẦN 2 - 2017)
Tìm m để phương trình $x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + \left(15 - 3m^2\right)x^2 - 6mx + 10 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

A. $\frac{11}{5} < m < 4$. **B.** $2 < m \le \frac{5}{2}$. **C.** $0 < m < \frac{9}{4}$. **D.** $\frac{7}{5} \le m < 3$.

Lời giải:

Chọn B.

Ta có $x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + \left(15 - 3m^2\right)x^2 - 6mx + 10 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2+2\right)^3 + 3\left(x^2+2\right) = \left(mx+1\right)^3 + 3\left(mx+1\right)$

$\Leftrightarrow f\left(x^2+2\right) = f\left(mx+1\right)$(*) với $f\left(t\right) = t^3 + 3t$.

Do $f'\left(t\right) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên (*) $\Leftrightarrow x^2 + 2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{x^2+1}{x}$

Xét hàm số $g\left(x\right) = \frac{x^2+1}{x}$ trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Ta có $g'\left(x\right) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$

Dựa và bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ khi và chỉ khi $2 < m \le \frac{5}{2}$.

Bài toán 8: (QUỐC HỌC HUẾ - LẦN 2 - 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^2 + m\left(\sqrt{4-x^2} + 1\right) - 7$ có điểm chung với trục hoành.

A. $0 \le m \le 3$. **B.** $-1 \le m \le \frac{7}{3}$. **C.** $2 \le m \le \frac{7}{3}$. **D.** $2 \le m \le 3$.

Lời giải:

Chọn D.

Tập xác định: $D = \left[-2; 2\right]$. Ta có phương trình hoành độ giao điểm như sau:

$$x^2 + m\left(\sqrt{4-x^2} + 1\right) - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7 - x^2}{\sqrt{4-x^2} + 1}$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{7-x^2}{\sqrt{4-x^2}+1}$ trên $\left[-2;2\right]$

Có $\Leftrightarrow y'=...=\dfrac{x^3-x-2x\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}\left(\sqrt{4-x^2}+1\right)^2}$. Cho $y'=0\Rightarrow x^3-x-2x\sqrt{4-x^2}=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\sqrt{3};0;\sqrt{3}\right\}$.

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	-2		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		2
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$
$f(x)$	3	↘	2	↗	$\frac{7}{3}$	↘	2	↗	3

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $m=\dfrac{7-x^2}{\sqrt{4-x^2}+1}$ có nghiệm khi $2\le m\le 3$.

Bài toán 9: Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}\left(mx-6x^3\right)+2\log_{\frac{1}{2}}\left(-14x^2+29x-2\right)=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

A. $18<m<\dfrac{39}{2}$. **B.** $19<m<\dfrac{39}{2}$. **C.** $19<m<20$. **D.** $18<\mathrm{m}<20$.

Lời giải:

Chọn B.

Phương trình $\log_2\left(mx-6x^3\right)=\log_2\left(-14x^2+29x-2\right)\Leftrightarrow\begin{cases}mx-6x^3=-14x^2+29x-2\\-14x^2+29x-2>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m=6x^2-14x+29-\dfrac{2}{x} & (1)\\ \dfrac{1}{14}<x<2\end{cases}.$$

Xét h/số $f\left(x\right)=6x^2-14x+29-\dfrac{2}{x}$ trên $\left(\dfrac{1}{14};2\right)$; Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{12x^3-14x^2+2}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{1}{2}\\x=-\dfrac{1}{3}\left(\text{loại}\right)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{2}$		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{98}$	↗	$\frac{39}{2}$	↘	19	↗	24

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt nếu phương trình $f\left(x\right)=m$ có ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(\frac{1}{14};2\right)$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $f\left(x\right)=m$ có ba nghiệm ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(\frac{1}{14};2\right)$ khi $19<m<\frac{39}{2}$.

Bài toán 10:

Tìm giá trị m không âm sao cho phương trình $x^3-3\sqrt[3]{3x+2m}=2m$ có nghiệm duy nhất.

A. $m>1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m<2$.

Lời giải:

Chọn A

Đặt $y=\sqrt[3]{3x+2m}\Rightarrow\begin{cases}x^3-3y=2m\\ y^3-3x=2m\end{cases}\Rightarrow x^3-3y=y^3-3x$

$\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2+3\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+3\right]=0\Leftrightarrow x=y\Rightarrow 2m=x^3-3x.$

Đặt $f(x)=y=x^3-3x\Rightarrow f'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm 1.$

Bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó với $T=1+2\sqrt{2}$. không âm thì phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 2m>2\Leftrightarrow m>1$.

Bài toán 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m\sqrt{2+\tan^2 x}=m+\tan x$ có ít nhất một nghiệm thực.

A. $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$. **B.** $-1<m<1$. **C.** $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$. **D.** $-1<m<1$.

Lời giải:

Chọn C.

Điều kiện: $x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ta có: $m\sqrt{2+\tan^2 x}=m+\tan x\Leftrightarrow m\left(\sqrt{2+\tan^2 x}-1\right)=\tan x\Leftrightarrow m=\frac{\tan x}{\sqrt{2+\tan^2 x}-1}$

Đặt $t=\tan x,\ t\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{t}{\sqrt{t^2+2}-1},\ t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{2-\sqrt{2+t^2}}{\sqrt{2+t^2}\left(\sqrt{2+t^2}-1\right)^2}$ và $f'(t)=0\Leftrightarrow 2=\sqrt{2+t^2}\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}$

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{\sqrt{t^2+2}-1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{t\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{t^2}}-\dfrac{1}{t}\right)}=1$ và $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{t}{\sqrt{t^2+2}-1}=-1$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình đã cho có nghiệm thực khi $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$.

Bài toán 12: (CHUYÊN THÁI NGUYÊN-2017)

Tìm m để phương trình $2^x+3=m\sqrt{4^x+1}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m\le\dfrac{1}{3}$. **B.** $3<m<\sqrt{10}$ **C.** $m>\sqrt{10}$. **D.** $1\le m<3$.

Lời giải:

Chọn B.

CÁCH 1 :

$2^x+3=m\sqrt{4^x+1}\,.(1)$

Vì hai vế đều dương nên

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2^x+3\right)^2=m^2\left(4^x+1\right)\\ m>0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(1-m^2\right)4^x+6.2^x+9-m^2=0\\ m>0\end{cases}$$

Đặt $t=2^x\ (t>0)$, ta được : $\Leftrightarrow\begin{cases}\left(1-m^2\right)t^2+6.t+9-m^2=0 & (2)\\ m>0\end{cases}$

Phương trình (1) có hai nghiệm khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-\left(1-m^2\right)\left(9-m^2\right)>0\\ \dfrac{3}{m^2-1}>0\\ \dfrac{9-m^2}{1-m^2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{10}<m<-3\\ 3<m<\sqrt{10}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $m>0$. Suy ra $3<m<\sqrt{10}$ là giá trị cần tìm.

CÁCH 2 :

$2^x+3=m\sqrt{4^x+1} \Leftrightarrow m=\dfrac{2^x+3}{\sqrt{4^x+1}}$

Đặt $t=2^x\left(t>0\right)$ ta được : $m=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}=f\left(t\right)$

$$f'\left(t\right)=\frac{\sqrt{t^2+1}-\dfrac{t\left(t+3\right)}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}=\frac{1-3t}{\left(\sqrt{t^2+1}\right)^3}\ ;\ f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'\left(t\right)$		$+$	0	$-$	
$f\left(t\right)$	3	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $3<m<\sqrt{10}$ là giá trị cần tìm.

Bài toán 13: **(TH CAO NGUYÊN-2017)**

Phương trình $x^3-3mx+2=0$ có một nghiệm duy nhất khi điều kiện của m là:

A. $m<-2$. **B.** $m>-1$. **C.** $m<1$. **D.** $m>1$.

Lời giải:

Chọn C.

Ta có $x^3-3mx+2=0 \Leftrightarrow 3mx=x^3+2,\left(*\right)$

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Lúc này $\left(*\right)\Leftrightarrow m=\dfrac{x^3+2}{3x}$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^3+2}{3x}$ có $f'\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3x}\right)'=\dfrac{2x}{3}-\dfrac{2}{3x^2}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{\left(x^3-1\right)}{x^2}$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình đã cho có duy nhất 1 nghiệm thì đường thẳng $y=m$ (cùng phương với trục Ox) thì $m<1$.

Bài toán 14: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH-2017)

Tất cả các giá trị của m để phương trình $e^x = m(x+1)$ có nghiệm duy nhất là

A. $m>1$. **B.** $m<0,\ m\geq 1$. **C.** $m<0,\ m=1$. **D.** $m<1$.

Lời giải:

Chọn C.

Điều kiện: $m(x+1)>0$

Ta có : $e^x = m(x+1) \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x+1} = m \Leftrightarrow f(x) = g(m)$

Xét hàm số: $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{(x+1)e^x - e^x}{(x+1)^2} = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên để phương trình có nghiệm duy nhất khi hàm số $g(m)$ cắt đồ thị $f(x)$ tại đúng một điểm $\Rightarrow m<0 \vee m=1$

Bài toán 15: (CHUYÊN ĐHSP-2017)

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3+x^2+x = m(x^2+1)^2$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$?

A. $m\geq 1$. **B.** $m\leq 1$. **C.** $0\leq m\leq 1$. **D.** $0\leq m\leq \dfrac{3}{4}$.

Lời giải:

Chọn D.

Ta có $x^3+x^2+x = m(x^2+1)^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^3+x^2+x}{(x^2+1)^2} = m$ (1).

Đặt $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+x}{(x^2+1)^2}$ có đồ thị (C).

Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y=m$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{3x^4-2x^3-2x+1}{(x^2+1)^3}$.

Vì $\left(x^2+1\right)^3>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 3x^4-2x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{6} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$\frac{-1-\sqrt{13}}{6}$	0		$\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$		1
$f'(x)$			$+$	0	$-$	0
$f(x)$		0	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	$\frac{3}{4}$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow \begin{cases} \text{Min}\, f\left(x\right)=0 \\ \text{Max}\, f\left(x\right)=\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

Để phương trình (1) có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;1\right] \Leftrightarrow 0\le m\le\dfrac{3}{4}$.

2. Tìm m để bất phương trình có nghiệm

✫ Phương pháp

Bài toán: Tìm m để bất phương trình $\left|\begin{array}{l} F(x;m)>0;\ F(x;m)\ge 0 \\ F(x;m)<0;\ F(x;m)\le 0 \end{array}\right.$ có nghiệm trên D?

- ***Bước 1:*** Cô lập tham số m và đưa về dạng $A(m)>f(x)$ hoặc $A(m)\ge f(x)$ hoặc $A(m)\le f(x)$ hoặc $A(m)<f(x)$.
- ***Bước 2:*** Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D.
- ***Bước 3:*** Dựa vào bảng biến thiên xác định các giá trị của tham số m.

Chú ý:

Nếu hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì

- Bất phương trình $A(m)\le f(x)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow A(m)\le \max\limits_D f(x)$.
- Bất phương trình $A(m)\le f(x)$ nghiệm đúng $\forall x\in D \Leftrightarrow A(m)\le \min\limits_D f(x)$.
- Bất phương trình $A(m)\ge f(x)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow A(m)\ge \min\limits_D f(x)$.
- Bất phương trình $A(m)\ge f(x)$ nghiệm đúng $\forall x\in D \Leftrightarrow A(m)\ge \max\limits_D f(x)$.

Khi đặt ẩn số phụ để đổi biến, ta cần đặt điều kiện cho biến mới chính xác, nếu không sẽ làm thay đổi kết quả của bài toán do đổi miền giá trị của nó, dẫn đến kết quả sai lầm.

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Tìm m để: $\sqrt{x^2-2x-3}+\sqrt{8+2x-x^2}>m,\ (*)$ có nghiệm.

Lời giải:

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} -2\le x\le -1 \\ 3\le x\le 4 \end{array}\right.$.

Đặt $t=x^2-2x \Rightarrow t'=2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	-2		-1	1	3		4
t'		$-$		0		$+$	
t	8	$\searrow$	3		3	$\nearrow$	8

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ tập giá trị của t là $t\in[3;8]$.

$(*) \Leftrightarrow m<\sqrt{t-3}+\sqrt{8-t},\ (1)$ và đặt $f(t)=\sqrt{t-3}+\sqrt{8-t}$.

Để $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm $t\in[3;8] \Leftrightarrow m<\max\limits_{[3;8]} f(t)$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t-3}+\sqrt{8-t}$ trên $[3;8]$ có: $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t-3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{8-t}}$.

Cho $f'(t)=0 \Leftrightarrow \sqrt{t-3}=\sqrt{8-t} \Leftrightarrow t=\dfrac{11}{2}$.

Ta có bảng biến thiên:

t	3		$\dfrac{11}{2}$		8
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	$\sqrt{5}$

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m<\sqrt{10}$ sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 2: Tìm m để: $2(x+\sqrt{2-x^2})-x\sqrt{2-x^2}\ge 3m,\ (*)$ nghiệm đúng $\forall x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Lời giải:

Điều kiện: $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$. Đặt: $t=x+\sqrt{2-x^2}$.

Ta có: $t'=1-\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}\cdot$ Cho $t'=0\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}=x\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$
t'		$+$	0	$-$	
t	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra tập giá trị của t là $t\in\left[-\sqrt{2};2\right]$.

$$(*)\Leftrightarrow 3m\le-\frac{1}{2}t^2+2t+1=f(t)\qquad(1)$$

Để $(*)$ nghiệm đúng $\Leftrightarrow(1)$ nghiệm đúng $\forall t\in\left[-\sqrt{2};2\right]\Leftrightarrow 3m\le\min\limits_{\left[-\sqrt{2};2\right]}f(t)$.

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{1}{2}t^2+2t+1$ trên $\left[-\sqrt{2};2\right]$

Ta có hàm số $f(t)=-\dfrac{1}{2}t^2+2t+1$ liên tục trên đoạn $\left[-\sqrt{2};2\right]$ có $f'(t)=-t+2=0\Leftrightarrow t=2$

Ta có: $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2};\ f(2)=3$. Suy ra $\min f(t)=-2\sqrt{2}$.

Kết luận: $3m\le-2\sqrt{2}\Leftrightarrow m\le-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài toán 3: Tìm m để: $\sqrt{\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}-m}-\sqrt{3+2x-x^2}\le 2,\ (*)$ có nghiệm.

Lời giải:

Điều kiện: $-1\le x\le 3$. $(*)\Leftrightarrow\sqrt{\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}-m}\le 2+\sqrt{3+2x-x^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}-m \ge 0 \\ \sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}-m \le (2+\sqrt{3+2x-x^2})^2 \end{cases} \qquad (I)$$

Đặt: $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}$ có $t'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}$ và $t'=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	-1		1		3
t'		$+$	0	$-$	
t	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ tập giá trị của t là $t \in \left[2;2\sqrt{2}\right]$.

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} m \le t \\ m \ge t-\dfrac{t^4}{4}=f(t) \end{cases}$. Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m \le \max\limits_{[2;2\sqrt{2}]} t \\ m \ge \min\limits_{[2;2\sqrt{2}]} f(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2\sqrt{2} \\ m \ge \min\limits_{[2;2\sqrt{2}]} f(t) \end{cases}$.

Xét hàm số $f(t)=t-\dfrac{t^4}{4}$ trên $\left[2;2\sqrt{2}\right]$ có $f'(t)=1-t^3<0,\ \forall t \in \left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến nên $\min\limits_{[2;2\sqrt{2}]} f(t)=f(2\sqrt{2})=2\sqrt{2}-16$.

Kết luận: BPT có nghiệm $\Leftrightarrow m \le 2\sqrt{2}$ và $m \ge 2\sqrt{2}-16 \Leftrightarrow m \in \left[2\sqrt{2}-16;2\sqrt{2}\right]$.

Bài toán 4: Tìm tham số thực m để bất phương trình $\sqrt{x^2-4x+5} \ge x^2-4x+m \ (1)$ có nghiệm thực trong đoạn $\left[2;3\right]$.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-4x+5} \ge 1 \Rightarrow x^2-4x=t^2-5$ mà $x \in \left[2;3\right] \Rightarrow t \in \left[1;\sqrt{2}\right]$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow t \ge t^2-5+m \Leftrightarrow m \le -t^2+t+5=g(t), t \in \left[1;\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $g'(t)=-2t+1$. Cho $g'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	1		$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$-$	
$g(t)$	5	$\searrow$	$3+\sqrt{2}$

Ta được $\max g(t)=5$ *khi* $t=1$ và $\min g(t)=3+\sqrt{2}$ *khi* $t=\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, $m \le 3+\sqrt{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài toán 5: Tìm m để: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{(1-x)(3+x)} \le 2m,\ (*)$ có nghiệm.

Lời giải:

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ -3 \le x \le -2 \end{array}\right.$ thì $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x}+\sqrt{3-2x-x^2} \le 2m,\ (1)$

Đặt $t = 3-2x-x^2 \Rightarrow t' = -2x-2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	-3		-2	-1	0		1
t'		$+$		0		$-$	
t	0	$\nearrow$	3		3	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra tập giá trị của t là $t \in [0;3]$.

$(1) \Leftrightarrow 2m \ge \sqrt{3-t}+\sqrt{t} = f(t),\ (2)$.

Để $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $t \in [0;3] \Leftrightarrow 2m \ge \min f(t) \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{2}\min f(t)$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{3-t}+\sqrt{t}$ trên $[0;3]$.

Ta có $f'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{3-t}}+\frac{1}{2\sqrt{t}}$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$. Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\frac{3}{2}$		3
t'		$+$	0	$-$	
t	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\sqrt{6}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[0;3]} f(t) = \sqrt{3} \Rightarrow m \ge \frac{1}{2}\min f(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Kết luận: Vậy $m \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì bất phương trình đã cho có nghiệm.

Bài toán 6: Tìm m để bất phương trình $m < -x^2+2x+3$ có nghiệm.

Lời giải:

Xét hàm số $f(x) = -x^2+2x+3$ với $x \in \mathbb{R}$. Ta có: $f'(x) = -2x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 4$.

Do đó: $m < -x^2+2x+3 = f(x)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m < \max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 4$.

Bài toán 7:

Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $x^2-2(m-1)x+4<0$ có nghiệm $x\in[1;3]$.

Lời giải:

Phương trình $x^2-2(m-1)x+4<0\Leftrightarrow x^2+4<2(m-1)x$

$\Leftrightarrow m-1>\dfrac{x^2+4}{2x}\quad(*)$ (vì $x\in[1;3]$)

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+4}{2x}$ xác định và liên tục trên $[1;3]$.

$f'(x)=\dfrac{2x.2x-2(x^2+4)}{4x^2}=\dfrac{2x^2-8}{4x^2}$.

Do đó: $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\notin(1;3)\\x=2\in(1;3)\end{array}\right.$.

Ta có: $f(1)=\dfrac{5}{2};\ f(2)=2;\ f(3)=\dfrac{13}{6}\Rightarrow\min\limits_{[1;3]}f(x)=2.$

Bất phương trình đã cho có nghiệm $x\in[1;3]$

$\Leftrightarrow$ Bất phương trình $(*)$ có nghiệm $x\in[1;3]$

$\Leftrightarrow m-1>\min\limits_{[1;3]}f(x)=2\Leftrightarrow m>3\Leftrightarrow m\in(3;+\infty)$

Bài toán 8: **(NGUYỄN HUỆ-2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}\le m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;\log_3 5]$.

A. $m\ge 2\sqrt{2}$. **B.** $m\ge 4$. **C.** $m\le 4$. **D.** $m\le 2\sqrt{2}$.

Lời giải:

Chọn B.

Cách 1: Đặt $t=3^x$, với $t\in(0;5]$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+3}+\sqrt{5-t}$, với $t\in(0;5]$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+3}}+\dfrac{-1}{2\sqrt{5-t}}=\dfrac{\sqrt{5-t}-\sqrt{t+3}}{2\sqrt{t+3}.\sqrt{5-t}}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		5
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\sqrt{3}+\sqrt{5}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

Suy ra: $f(t)\le f(1)=4$, với $t\in(0;5]$.

Để bất phương trình $\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}\le m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;\log_3 5]$ thì $4\le m$.

Cách 2. Áp dụng BĐT Bunhiaxcopki

$\left(\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}\right)^2 \le \left(\left(3^x+3\right)+\left(5-3^x\right)\right)(1+1)=16$

$\Rightarrow \sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x} \le 4$.

Để bất phương trình $\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x} \le m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-\infty;\log_3 5\right]$ thì $4 \le m$.

Bài toán 9: **(CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU - 2017)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho bất phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{x+5}+\sqrt{4-x} \ge m$

A. $\left(-\infty;3\right]$. **B.** $\left(-\infty;3\sqrt{2}\right]$. **C.** $\left(3\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;3\sqrt{2}\right)$.

Lời giải:

Chọn B

BPT $\sqrt{x+5}+\sqrt{4-x} \ge m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m \le Max(\sqrt{x+5}+\sqrt{4-x})$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+5}+\sqrt{4-x}$ với $x \in \left[-5,4\right]$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{5+x}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}};$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{5+x}=\sqrt{4-x} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Mà $f(-5)=f(4)=3, f(-\frac{1}{2})=3\sqrt{2} \Rightarrow \max f(x)=3\sqrt{2} \Rightarrow m \le 3\sqrt{2}$.

VI. BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN GTLN, GTNN

1. Phương pháp

Bước 1: *Đặt một đại lượng cần tìm theo ẩn x, nêu điều kiện đúng của x theo đề bài (giả sử là:* $x \in D$ *)*

Bước 2: *Biểu thị một số đại lượng cần thiết theo ẩn x*

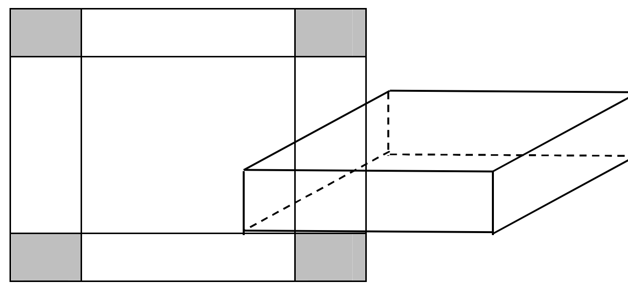
Bước 3: *Biểu thị đại lượng cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất theo ẩn x.*

Được một hàm số $y = f(x)$ *với* $x \in D$

Bước 4: *Sử dụng đạo hàm hoặc bất đẳng thức để tìm* $\max\limits_{D} f(x)$ *hoặc* $\min\limits_{D} f(x)$.

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: **[Đề Minh Họa – 2017]** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $12cm$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm $d = \frac{5}{9}$ để hộp nhận được thể tích lớn nhất.



A. $x = 6$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 4$.

Lời giải:

Chọn C.

Khi gập tấm nhôm lại lại như hình vẽ ta được một cái hộp không nắp có đáy là hình vuông cạnh $12 - 2x$ $(0 < x < 6)$. Khi đó, thể tích hình hộp nhận được là:

$$V = x(12-2x)(12-2x) = x(12-2x)^2,\ \forall x \in (0;6)$$

Cách 1: Xét hàm $f(x) = x(12-2x)^2,\ \forall x \in (0;6)$

Ta có: $f'(x) = (12-2x)^2 - 4x(12-2x) = (12-2x)(12-6x)$

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in (0;6) \\ x = 6 \notin (0;6) \end{array}\right.$.

x	0		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	128	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

$V_{\max} = 128\left(cm^3\right)$ khi $x = 2$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức AM – GM dạng $abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ để đánh giá.

$$V = x(12-2x)^2 = \frac{1}{4}.4x.(12-2x).(12-2x) \le \frac{1}{4}\left(\frac{4x+12-2x+12-2x}{3}\right)^3 = 128.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4x = 12 - 2x = 12 - 2x \Leftrightarrow x = 2 \in (0;6) \Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Cách 3: Sử dụng công cụ **TABLE** (w 7) của máy tính bỏ túi để xử lí bài toán này một cách nhanh gọn hơn. Cụ thể:

Bước 1: Bấm tổ hợp phím w 7.

Bước 2: Nhập $f(X) = X(12-2X)^2$

Sau đó ấn phím = (nếu có $g(X)$ thì **ấn** tiếp phím =). Nhập $\begin{cases} Start = 0 \\ End = 6 \\ Step = 1 \end{cases}$.

Chú ý: Ở đây, ta **chọn** $Step = 1$ vì các đáp án đều là các số nguyên dương.

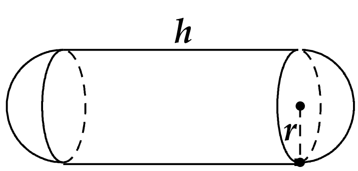
Bước 3: Tra bảng nhận được và tìm giá trị lớn nhất:

X	$f(X)$
0	0
1	100
2	128
3	108
4	64
5	20
6	0

Dựa vào bảng giá trị ở trên, ta thấy giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 128 xảy ra khi $x = 2$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Bài toán 2: Một kĩ sư được một công ty xăng đầu thuê thiết kế một mẫu bồn chứa xăng với thể tích V cho trước, hình dạng như hình vẽ bên, các kích thước r, h thay đổi sao cho nguyên vật liệu làm bồn xăng là ít nhất.



Người kĩ sư này phải thiết kế kích thước h như thế nào để đảm bảo được đúng yêu cầu mà công ty xăng dầu đã đưa ra?

A. $h = 0$. **B.** $h = \dfrac{\sqrt[3]{V}}{\pi}$. **C.** $h = 2\sqrt[3]{V}$. **D.** $h = \dfrac{\sqrt[3]{V}}{2}$.

Lời giải:

Chọn A.

Điều kiện: $h \geq 0$.

Ta có: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V - \dfrac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}$.

Diện tích toàn phần của bồn xăng là: $S(r) = 4\pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow h = \dfrac{4\pi r^3 + 2V - \dfrac{8}{3}\pi r^3}{r}$.

Ta có: $S'(r)=\dfrac{\dfrac{8}{3}\pi r^3-2V}{r^2}=0\Leftrightarrow \dfrac{8}{3}\pi r^3=2V\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$.

Lập bảng biến thiên, ta sẽ thấy $S_{\min}\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}\Rightarrow h=\dfrac{4\pi.\dfrac{3V}{4\pi}+2V-\dfrac{8}{3}\pi.\dfrac{3V}{4\pi}}{r}=0$.

nguyên vật liệu làm bồn xăng là ít nhất $\Leftrightarrow S_{\min}\Leftrightarrow h=0$

Bài toán 3: Khi xây dựng nhà, chủ nhà cần làm một bể nước bằng gạch có dạng hình hộp có đáy là hình chữ nhật chiều dài $d(m)$ và chiều rộng $r(m)$ với $d=2r$. Chiều cao bể nước là $h(m)$ và thể tích bể là $2\,m^3$. Hỏi chiều cao bể nước như thế nào thì chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}(m)$ **B.** $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(m)$ **C.** $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}(m)$ **D.** $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}(m)$

Lời giải:

Chọn A

Gọi $x\,(x>0)$ là chiều rộng của đáy suy ra thể tích bể nước bằng

$V=2x^2.h=2\Leftrightarrow h=\dfrac{1}{x^2}$

Diện tích xung quanh hồ và đáy bể là

$S=6x.h+2x^2=\dfrac{6}{x}+2x^2\ (x>0)$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{6}{x}+2x^2$ với $x>0$.

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.

Vậy chiều cao cần xây là $h=\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}(m)$.

Bài toán 4: Một đại lý xăng dầu cần xây một bồn chứa dầu hình trụ có đáy hình tròn bằng thép có thể tích $49\pi\,(m^3)$ và giá mỗi mét vuông thép là 500 ngàn đồng. Hỏi giá tiền thấp nhất mà đại lý phải trả gần đúng với số tiền nào nhất.

A. 79,5 triệu **B.** 80,5 triệu **C.** 77,4 triệu **D.** 75 triệu

Lời giải:

Chọn B

Gọi bán kính đáy là $x(m)\,(x>0)$, chiều cao bồn chứa là $h(m)$. Khi đó thể tích chứa của bồn là

$V=\pi x^2.h=49\pi\Leftrightarrow h=\dfrac{49}{x^2}\,(m)$. Do là bồn chứa dầu nên phải có nắp nên diện tích cần xây của bồn chứa là: $2.\pi x^2+2\pi x.h=2\pi x^2+\dfrac{98\pi}{x}$.

Để chi phí xây dựng thấp nhất thì diện tích xây cũng phải thấp nhất.

Xét hàm số $f\left(x\right)=2\pi x^2+\dfrac{98\pi}{x}\left(x>0\right)$ có giá trị nhỏ nhất gần bằng $159,005\left(m^2\right)$

Bài toán 5: Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 450 ngàn. **B.** 50 ngàn. **C.** 480 ngàn. **D.** 80 ngàn.

Lời giải:

Chọn A

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x>400$ (đơn vị: ngàn đồng).

Giá chênh lệch sau khi tăng $x-400$.

Số phòng cho thuê giảm nếu giá là x: $\dfrac{\left(x-400\right).2}{20}=\dfrac{x-400}{10}$.

Số phòng cho thuê với giá x là $50-\dfrac{x-400}{10}=90-\dfrac{x}{10}$.

Tổng doanh thu trong ngày là: $f(x)=x\left(90-\dfrac{x}{10}\right)=-\dfrac{x^2}{10}+90x$.

$f'(x)=-\dfrac{x}{5}+90$. $f'(x)=0\Leftrightarrow x=450$.

Bảng biến thiên:

x	400		450		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	
$f\left(x\right)$		↗	20250	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=450$.

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2.025.000 đồng.

Bài toán 6: Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

A. 29, 5 triệu VNĐ **B.** 27, 5 triệu VNĐ **C.** 29 triệu VNĐ **D.** 27 triệu VNĐ

Lời giải:

Chọn A.

Gọi x (triệu VNĐ) là số tiền cần giảm cho mỗi chiếc xe $\left(0\le x\le 4\right)$.

Số lượng xe bán ra được trong một năm sau khi giảm giá là: $x.200+600$ (chiếc)

Số lợi nhuận thu được từ việc bán xe trong một năm sau khi giảm giá là: $(x.200+600)(4-x)$

Xét hàm số $f(x)=(x.200+600)(4-x)=200(-x^2+x+12)$ $(0\le x\le 4)$ đạt giá trị lớn nhất là 2450 khi $x=\dfrac{1}{2}$.

Bài toán 7: Công ty dụ lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.

A. 1375000. **B.** 3781250. **C.** 2500000. **D.** 3000000.

Lời giải:

Chọn B

Gọi x (triệu đồng) là giá tua.

Giá đã giảm so với ban đầu là $2-x$.

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán x là: $\dfrac{(2-x)20}{0,1}=400-200x$.

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là: $150+(400-200x)=550-220x$.

Tổng doanh thu là: $f(x)=x(550-200x)=-200x^2+550x$.

$f'(x)=-400x+550$. $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{11}{8}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{11}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{3025}{8}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=\dfrac{11}{8}=1,375$.

Vậy công ty cần đặt giá tua 1375000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378125000 đồng.

Bài toán 8: Ông A muốn mua một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích $384m^2$ để xây nhà. Nhưng vợ ông muốn có khuôn viên sân vườn đẹp nên ông mua thêm về hai phía chiều dài mỗi chiều $3m$ và về hai phía chiều rộng mỗi chiều $2m$. Vậy, để ông A mua được mảnh đất có diện tích nhỏ nhất (tiết kiệm chi phí) thì mảnh đất đó chu vi là bao nhiêu?

A. $100m$ **B.** $140m$ **C.** $98m$ **D.** $110m$

Lời giải:

Chọn A.

Gọi x,y là chiều dài, chiều rộng phần đất xây nhà . Ta có

$$\begin{cases} S=(x+6)(y+4) \\ x.y=384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=(x+6)(\dfrac{384}{x}+4) \\ y=\dfrac{384}{x} \end{cases}$$

Áp dụng BĐT AM-GM : $S=\left(4x+\dfrac{2304}{x}\right)+408\ge 192+408 \Rightarrow S\ge 600$

Dấu ‘‘=’’ xảy ra khi $4x=\dfrac{2304}{x} \Leftrightarrow x=24 \Rightarrow y=16$

Vậy mảnh đất cần mua có chiều dài là: $24+6=30(m)$

Chiều rộng là: $16+4=20(m)$

Khi đó chu vi mảnh đất là $100m$.

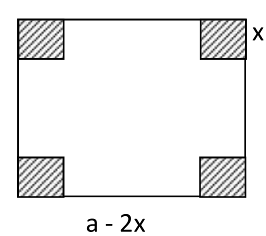
Bài toán 9: Ta có một miếng tôn phẳng hình vuông với kích thước $a(\mathrm{cm})$, ta muốn cắt đi ở 4 góc 4 hình vuông cạnh bằng $x(cm)$ để uốn thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Phải cắt như thế nào để hình hộp có thể tích lớn nhất?

A. $x=\dfrac{a}{4}$. **B.** $x=\dfrac{a}{5}$. **C.** $x=\dfrac{a}{6}$. **D.** $x=\dfrac{a}{7}$.

Lời giải:

Chọn C.

Gọi cạnh của hình vuông bị cắt là x, $(0<x<a)$.



Ta có thể tích hình hộp là: $V=x(a-2x)^2=\dfrac{1}{4}4x(a-2x)^2$.

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi cho 3 số: $4x, a-2x, a-2x>0$

Ta có : $V\le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4x+a-2x+a-2x}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{4}.\dfrac{8a^3}{27} = \dfrac{2a^3}{27}$

V lớn nhất khi và chỉ khi : $4x=a-2x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{6}$

Vậy để thể tích hộp lớn nhất, cần cắt bốn góc bốn hình vuông có cạnh $\dfrac{a}{6}$.

Bài toán 10: Một đĩa tròn bằng thép trắng có bán kính bằng R. Người ta phải cắt đĩa theo một hình quạt, sau đó gấp lại thành hình nón để làm một cái phễu. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để thể tích cái phễu lớn nhất?

A. $\approx 66^o$ **B.** $\approx 294^o$ **C.** $\approx 12,56^o$ **D.** $\approx 2,8^o$

Lời giải:

Chọn A.

Gọi x là độ dài đường tròn đáy của cái phễu (bằng chu vi đĩa tròn trừ đi độ dài cung hình quạt bị cắt đi) $\Rightarrow x = 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$ (r là bán kính đường tròn đáy hình nón).

Đường sinh của hình nón chính bằng bán kính đĩa là R.

Đường cao hình nón: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\pi r^2.h = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{x^2}{4\pi^2}.\sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$

Khảo sát hàm V ta tìm được V đạt GTLN khi $x = \dfrac{2\pi}{3}R\sqrt{6}$.

Suy ra, độ dài cung hình quạt bị cắt là: $2\pi R - \dfrac{2\pi}{3}R\sqrt{6} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi R - \dfrac{2\pi}{3}R\sqrt{6}}{2\pi R}.360 \approx 66^o$

Bài toán 11: Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỷ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi v = 10km/h thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?

A. $\approx 15(km/h)$. **B.** $\simeq 8(km/h)$. **C.** $\approx 20(km/h)$. **D.** $\approx 6.3(km/h)$.

Lời giải:

Chọn A.

Gọi $x(km/h)$ là vận tốc của tàu $\Rightarrow$ thời gian tàu đi $1km$ là $\dfrac{1}{x}$ giờ.

Phần chi phí thứ nhất là: $480.\dfrac{1}{x} = \dfrac{480}{x}$ (ngàn).

Giả sử, phần chi phí thứ 2 kí hiệu là y thì $y = kx^3 \Rightarrow k = \dfrac{y}{x^3}$.

Với $x = 10 \Rightarrow y = \dfrac{1}{10}.30 = 3$ (ngàn) $\Rightarrow k = \dfrac{3}{1000} = 0,003 \Rightarrow y = 0,003x^3$.

Do đó, tổng chi phí là: $T = \dfrac{480}{x} + 0,003x^3$. Khảo sát T ta tìm được T đạt GTNN khi $x \approx 15(km/h)$.

Bài toán 12: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = \dfrac{-1}{4}t^4 + 3t^2 - 2t - 4$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tại thời điểm nào, vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

A. $t = \sqrt{2}$. **B.** $t = 1$. **C.** $t = \sqrt{3}$. **D.** $t = 2$.

Lời giải:

Chọn A.

Ta có vận tốc $v(t) = S'(t) = -t^3 + 6t - 2$. $v'(t) = -3t^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2}\ (L) \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên ta có $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất khi $t = \sqrt{2}$.

Bài toán 13: Một tấm thiếc hình chữ nhật dài 45 cm, rộng 24 cm được làm thành một cái hộp không nắp bằng cách cắt bốn hình vuông bằng nhau từ mỗi góc và gấp mép lên. Hỏi các hình vuông được cắt ra có cạnh là bao nhiêu để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

A. $x=18$. **B.** $x=5$. **C.** $x=12$. **D.** Đáp án khác.

Lời giải:

Chọn B.

Gọi x cm $(0<x<12)$ là cạnh của các hình vuông bị cắt rời ra.Khi đó, chiều cao của hộp là x ,chiều dài là $45-2x$, và chiều rộng là $24-2x$.

Thể tích $V(x)=x(45-2x)(24-2x)=4x^3-138x^2+1080x$.

Suy ra $V'(x)=12x^2-276x+1080$.

Cho $V'(x)=0$, suy ra được giá trị x cần tìm là $x=5$.

$V''(x)=24x-276 \Rightarrow V''(5)=-156<0$. Do đó $x=5$ là điểm cực đại.

Bài toán 14: Một sợi dây có chiều dài 28 m là được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện của hình vuông và hình tròn là tối thiểu?

A. 14. **B.** $\dfrac{196}{4+\pi}$. **C.** $\dfrac{112}{4+\pi}$. **D.** $\dfrac{28\pi}{4+\pi}$

Lời giải:

Chọn C.

Gọi $l\,(0<l<28)$ là chiều dài đoạn dây làm thành hình vuông. Khi đó đoạn dây làm thành hình tròn có chiều dài là $28-l$.

Cạnh hình vuông là $\dfrac{l}{4}$, bán kính hình tròn là $\dfrac{1}{2\pi}(28-l)$.

Tổng diện tích $S(l)=\dfrac{l^2}{16}+\dfrac{1}{4\pi}(28-l)^2$, suy ra $S'(l)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{2\pi}(28-l)$.

Cho $S'(l)=0$, ta được $l=\dfrac{112}{4+\pi}$, suy ra chiều dài đoạn dây còn lại là $\dfrac{28\pi}{4+\pi}$.

Kiểm tra lại bằng đạo hàm cấp 2, $S''\left(\dfrac{112}{\pi+4}\right)>0$

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{196}{4+\pi}$ khi $x=\dfrac{112}{4+\pi}$.

Bài toán 15: **(SGD – QUẢNG NAM)**

Một hãng dược phẩm cần một số lọ đựng thuốc dạng hình trụ với dung tích $16\pi\ cm^3$. Tính bán kính đáy R của lọ để ít tốn nguyên liệu sản xuất lọ nhất

A. $R=2\ cm$. **B.** $R=1,6\ cm$. **C.** $R=\pi\ cm$. **D.** $R=\dfrac{16}{\pi}\ cm$.

Lời giải:

Chọn A.

Ta có $V=\pi R^2h=16\pi \Rightarrow h=\dfrac{16}{R^2}$.

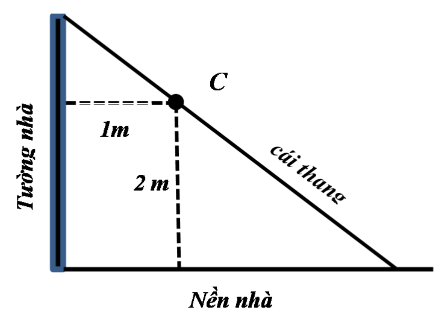
Để ít tốn nguyên liệu nhất thì diện tích toàn phần của lọ phải nhỏ nhất.

Ta có $S_{tp}=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi R^2+\dfrac{32\pi}{R^2}=2\pi R^2+\dfrac{16\pi}{R}+\dfrac{16\pi}{R}\ge 3\sqrt[3]{2\pi R^2.\dfrac{16\pi}{R}.\dfrac{16\pi}{R}}=24\pi$.

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow 2\pi R^2=\dfrac{16\pi}{R}\Leftrightarrow R=2\left(\text{cm}\right)$.

Bài toán 16: (CHUYÊN VÕ NGUYÊN GIÁP – QUẢNG BÌNH)

Ông An cần sản xuất một cái thang để trèo qua một bức tường nhà. Ông muốn cái thang phải luôn được đặt qua vị trí C, biết rằng điểm C cao $2m$ so với nền nhà và điểm C cách tường nhà $1m$ (như hình vẽ bên).



Giả sử kinh phí để sản xuất thang là 300.000 đồng/1 mét dài. Hỏi ông An cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất thang? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).

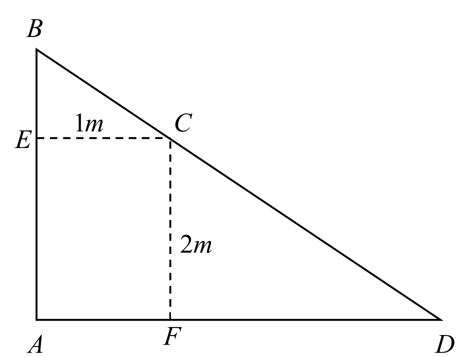
A. $2.350.000$ đồng. **B.** $3.125.000$ đồng. **C.** $1.249.000$ đồng. **D.** 600.000 đồng.

Lời giải:

Chọn C.

Đặt $BC=x$.

Ta có : $\Delta BCE\sim\Delta CDF$.



$\Leftrightarrow \dfrac{BC}{CD}=\dfrac{CE}{DF}\Leftrightarrow \dfrac{x}{CD}=\dfrac{1}{\sqrt{CD^2-4}}$.

$\Leftrightarrow x^2\left(CD^2-4\right)=CD^2$.

$\Leftrightarrow CD^2=\dfrac{4x^2}{x^2-1}\Leftrightarrow CD=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Vậy chi phí sản xuất thang là :

$f\left(x\right)=\left(x+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\right).3.10^5$ với $x>1$.

$$f'\left(x\right)=3.10^5\left(1+\dfrac{2\sqrt{x^2-1}-\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}\right)=3.10^5\left(1+\dfrac{-2}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}\right).$$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2-1\right)^3}=2 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^3=4\Leftrightarrow x^2=\sqrt[3]{4}+1$.

Hay $x=\sqrt{\sqrt[3]{4}+1}$.

Khi đó chi phí sản xuất thang là 1.249.000 đồng .

Bài toán 17: **(CHUYÊN SƠN LA – LẦN 2-2017)** Số sản phẩm của một hãng đầu DVD sản suất được trong 1 ngày là giá trị của hàm số: $f(m,n)=m^{\frac{2}{3}}.n^{\frac{1}{3}}$, trong đó là m số lượng nhân viên và n là số lượng lao động chính. Mỗi ngày hãng phải sản xuất được ít nhất 40 sản phẩm để đáp ứng nhu cầu khách hàng. Biết rằng mỗi ngày hãng đó phải trả lương cho một nhân viên là 6 USD và cho một lao động chính là 24 USD. Tìm giá trị nhỏ nhất chi phí trong 1 ngày của hãng sản xuất này.

A. 720 USD. **B.** 600 USD. **C.** 560 USD. **D.** 1720 USD.

Lời giải:

Chọn A.

Vì mỗi ngày hãng phải sản xuất được ít nhất 40 sản phẩm nên

$f(m,n)\ge 40 \Leftrightarrow m^{\frac{2}{3}}.n^{\frac{1}{3}}\ge 40 \Leftrightarrow m^2.n\ge 40^3$. Chi phí phải trả trong 1 ngày của hãng là

$$6m+24n=6(m+4n)=6\left(\frac{m}{2}+\frac{m}{2}+4n\right)\ge 6.3.\sqrt[3]{\frac{m}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot 4n}=18\sqrt[3]{m^2.n}\ge 18\sqrt[3]{40^3}=18.40=720.$$

Bài toán 18: **(CHUYÊN SƠN LA – LẦN 2-2017)** Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}$ (C). Gọi d là khoảng cách từ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị đến một tiếp tuyến của (C). Giá trị lớn nhất mà d có thể đạt được là :

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải:

Chọn D.

Ta có: $y'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$ $\forall x\ne 2$. Gọi I là giao của hai tiệm cận $\Rightarrow I(2;1)$

Gọi $M(x_0;y_0)=M\left(x_0;\frac{x_0+1}{x_0-2}\right)\in(C)$

Khi đó tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0)$ có phương trình:

$\Delta: y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$$\Leftrightarrow y=\frac{-3}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+1}{x_0-2}\Leftrightarrow \frac{-3}{(x_0-2)^2}.x-y+\frac{3x_0}{(x_0-2)^2}+\frac{x_0+1}{x_0-2}=0$$

Khi đó ta có: $d(I;\Delta)=\dfrac{\left|\dfrac{-6}{(x_0-2)^2}-1+\dfrac{3x_0}{(x_0-2)^2}+\dfrac{x_0+1}{x_0-2}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{9}{(x_0-2)^4}}}$

$$\Leftrightarrow d\left(I;\Delta\right)=\frac{\left|6x_0-12\right|}{\sqrt{\left(x_0-2\right)^4+9}}$$

Áp dụng BĐT: $a^2+b^2\ge 2ab \quad \forall a,b$

Ta có: $9+\left(x_0-2\right)^4\ge 2.3.\left(x_0-2\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{9+\left(x_0-2\right)^4}\ge\sqrt{6\left(x_0-2\right)^2}$

$$\Rightarrow d\left(I;\Delta\right)\le\frac{\left|6x_0-12\right|}{\sqrt{\left(x_0-2\right)^4+9}}\le\frac{\left|6x_0-12\right|}{\sqrt{6\left(x_0-2\right)^2}}=\sqrt{6}$$

Vậy giá trị lớn nhất mà d có thể đạt được là : $\sqrt{6}$

Bài toán 19: **(THTT – SỐ 478)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho và có hệ số góc m. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho tổng các khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho đến Δ nhỏ nhất là

A. $\{0\}$. **B.** $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\varnothing$ **D.** $\{\pm 1\}$.

Lời giải:

Chọn D.

$y=x^4-2x^2$. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=1\end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy, điểm cực đại của đồ thị hàm số là gốc tọa độ $O\left(0;0\right)$. Các điểm cực tiểu là $A\left(-1;-1\right)$ và $B\left(1;-1\right)$.

Phương trình đường thẳng Δ thỏa đề bài có dạng $y=mx$, hay $mx-y=0$.

$$S=d\left[A;\left(\Delta\right)\right]+d\left[B;\left(\Delta\right)\right]=\frac{\left|-m+1\right|}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{\left|m+1\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{\left|-m+1\right|+\left|m+1\right|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$S^2=\frac{2\left(m^2+1\right)+2\left|-m^2+1\right|}{m^2+1}=2+2.\frac{\left|-m^2+1\right|}{m^2+1}\ge 2+2.\frac{0}{m^2+1}=2.$$

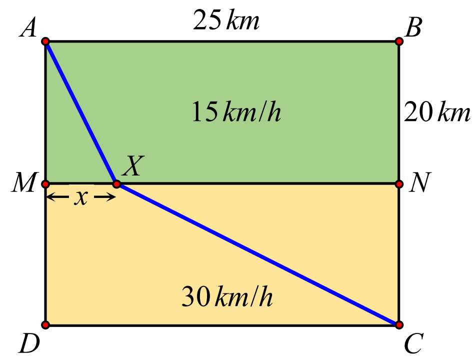
Vậy S^2 đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $-m^2+1=0$ hay $m=\pm 1$. Vì $S>0$ nên ta kết luận S đạt giá trị bé nhất là $\sqrt{2}$ khi $m=\pm 1$

Bài toán 20: (THTT – SỐ 478) Một vùng đất hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 25\,km$, $BC = 20\,km$ và M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Một người cưỡi ngựa xuất phát từ A đi đến C bằng cách đi thẳng từ A đến một điểm X thuộc đoạn MN rồi lại đi thẳng từ X đến C. Vận tốc của ngựa khi đi trên phần $ABNM$ là $15km/h$, vận tốc của ngựa khi đi trên phần $MNCD$ là $30\,km/h$. Thời gian ít nhất để ngựa di chuyển từ A đến C là mấy giờ?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{41}}{4}$. **C.** $\frac{4+\sqrt{29}}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải:

Chọn A.



Gọi $MX = x\,(km)$ với $0 \le x \le 25$

Quãng đường $AX = \sqrt{x^2 + 10^2}$

$\Rightarrow$ thời gian tương ứng $\frac{\sqrt{x^2+100}}{15}\,(h)$

Quãng đường $CX = \sqrt{(25-x)^2 + 10^2}$

thời gian tương ứng $\frac{\sqrt{x^2-50x+725}}{30}\,(h)$

Tổng thời gian $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+100}}{15} + \frac{\sqrt{x^2-50x+725}}{30}$ với $x \in [0;25]$, tìm giá trị nhỏ nhất $f(x)$

$f'(x) = \frac{x}{15\sqrt{x^2+100}} + \frac{x-25}{30\sqrt{x^2-50x+725}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Tính các giá trị $f(0) = \frac{4+\sqrt{29}}{6} \approx 1,56$, $f(25) = \frac{1+\sqrt{29}}{3} \approx 2,13$, $f(5) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \approx 1,49$

Vậy hàm số đạt GTNN bằng $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ tại $x = 5$

C. THỦ THUẬT CASIO GIẢI BÀI TOÁN MIN MAX

I. PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Để tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên miền $[a;b]$ ta sử dụng máy tính Casio với lệnh MODE 7 (Lập bảng giá trị)

Bước 2: Quan sát bảng giá trị máy tính hiển thị, giá trị lớn nhất xuất hiện là max , giá trị nhỏ nhất xuất hiện là min

Chú ý:

Ta thiết lập miền giá trị của biến x Start a End b Step $\frac{b-a}{19}$ (có thể làm tròn để Step đẹp)

Khi đề bài liên có các yếu tố lượng giác $\sin x, \cos x, \tan x...$ ta chuyển máy tính về chế độ Radian

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: **[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]**

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ trên đoạn $[1;3]$

A. $\max = \frac{67}{27}$ **B.** $\max = -2$ **C.** $\max = -7$ **D.** $\max = -4$

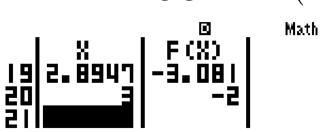
Lời giải:

Sử dụng chức năng MODE 7 của máy tính Casio với thiết lập Start 1 End 3 Step $\frac{3-1}{19}$

w7Q)^3$p2Q)dp4Q)+1==1=3=(3p1)P19=

1

Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(3) = -2$



Vậy $\max = -2$, dấu = đạt được khi $x = 3$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bình luận:

Qua ví dụ 1 ta đã thấy ngay sức mạnh của máy tính Casio, việc tìm Max chỉ cần quan sát bảng giá trị là xong.

Phương pháp tự luận tìm Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số được tiến hành theo 3 bước:

+)Bước 1: Tìm miền xác định của biến x .

+)Bước 2: Tính đạo hàm và xác định khoảng đồng biến nghịch biến.

+)Bước 3: Lập bảng biến thiên, nhìn vào bảng biến thiên để kết luận.

Trong bài toán trên đề bài đã cho sẵn miền giá trị của biến x là $[1;3]$ nên ta bỏ qua bước 1.

Bài toán 2: **[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]**

Hàm số $y=\left|3\cos x-4\sin x+8\right|$ với $x\in\left[0;2\pi\right]$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số. Khi đó tổng $M+m$ bằng bao nhiêu ?

A. $8\sqrt{2}$ **B.** $7\sqrt{3}$ **C.** $8\sqrt{3}$ **D.** 16

Lời giải:

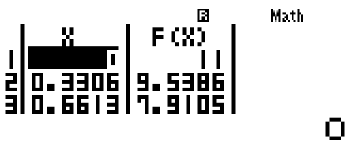
Cách 1: CASIO

Để tính toán các bài toán liên quan đến lượng giác ta chuyển máy tính về chế độ Radian

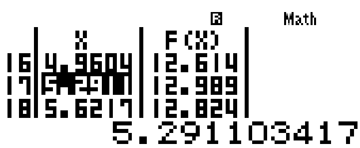
qw4

Sử dụng chức năng MODE 7 của máy tính Casio với thiết lập Start 0 End 2π Step $\frac{2\pi-0}{19}$

w7qc3kQ))p4jQ))+8==0=2qK=2qKP19=



Quan sát bảng giá trị $F\left(X\right)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F\left(X\right)$ có thể đạt được là $f\left(5.2911\right)=12.989\approx 13=M$



Ta thấy giá trị nhỏ nhất $F\left(X\right)$ có thể đạt được là $f\left(2.314\right)=3.0252\approx 3=m$

Vậy $M+m=16\Rightarrow$ Đáp số **D** là chính xác

Cách tham khảo: Tự luận

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được :

$\left(3\cos x-4\sin x\right)^2\le\left(3^2+\left(-4\right)^2\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=25$

$\Rightarrow\left|3\cos x-4\sin x\right|\le 5\Leftrightarrow -5\le 3\cos x-4\sin x\le 5\Leftrightarrow 3\le 3\cos x-4\sin x=8\le 13$

Vậy $3\le\left|3\cos x-4\sin x+8\right|\le 13$

Bình luận:

Nếu bài toán liên quan đến các đại lượng lượng giác ta nên chuyển máy tính về chế độ Radian để được kết quả chính xác nhất.

Trong Bất đẳng thức Bunhiacopxki có dạng $\left(ax+by\right)^2\le\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Bài toán 3: **[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]**

Cho các số x,y thỏa mãn điều kiện $y\le 0,x^2+x-y-12=0$ Tìm giá trị nhỏ nhất : $P=xy+x+2y+17$

A. -12 **B.** -9 **C.** -15 **D.** -5

Lời giải:

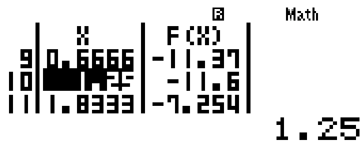
Cách 1: CASIO

Từ $x^2+x-y-12=0$ ta rút được $y=x^2+x-12$ Lắp vào P ta được : $P=(x+2)(x^2+x-12)+x+17$

Để tìm Min của P ta sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7, tuy nhiên việc còn thiếu của chúng ta là miền giá trị của x . Để tìm điều này ta xét $y\le 0 \Leftrightarrow x^2+x-12\le 0 \Leftrightarrow -4\le x\le 3$

Sử dụng MODE 7 với thiết lập Start -4 End 3 Start $\frac{7}{19}$ ta được:

w7(Q)+2)(Q)d+Q)p12)+Q)+17==p4=3=7P12=



Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị nhỏ nhất là $f(1.25)=-11.6\approx -12$

Vậy đáp số chính xác là **A**

Cách tham khảo: Tự luận

Dùng phương pháp dồn biến đưa biểu thức P chứa 2 biến trở thành biểu thức P chứa 1 biến x

$\Rightarrow\ P=(x+2)(x^2+x-12)+x+17=x^3+3x^2-9x-7$

Đặt $f(x)=x^3+3x^2-9x-7$

Tìm miền giá trị của biến x ta có : $y\le 0\Leftrightarrow x^2+x-12\le 0\Leftrightarrow -4\le x\le 3$

Khảo sát hàm $f(x)$ ta có : $f'(x)=3x^2+6x-9$, $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

So sánh $f(1)=-12; f(-3)=20; f(-4)=13; f(3)=20$

Vậy giá trị nhỏ nhất $f(\max)=-12$ đạt được khi $x=1$

Bình luận:

Một bài tìm Min max sử dụng phương pháp dồn biến hay. Việc tìm cận và tìm giá trị nhỏ nhất có sự đóng góp rất lớn của Casio để tiết kiệm thời gian.

Bài toán 4: **[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]**

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{2mx+1}{m-x}$ trên đoạn $[2;3]$ là $-\frac{1}{3}$ khi m nhận giá trị bằng :

A. -5 **B.** 1 **C.** 0 **D.** -2

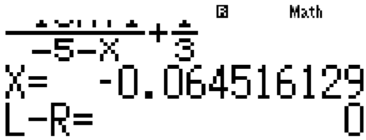
Lời giải:

Cách 1: CASIO

Ta hiểu nếu giá trị nhỏ nhất của $y=-\frac{1}{3}$ trên đoạn $[2;3]$ có nghĩa là phương trình $y+\frac{1}{3}=0$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;3]$

Thử nghiệm đáp án A với $m=-5$ ta thiết lập $\frac{-10x+1}{-5-x}+\frac{1}{3}=0$. Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE

ap10Q)+1Rp5pQ)$+a1R3qr2.5=



Ta thấy khi $y=\frac{1}{3}$ thì $x=-0.064...$ không phải là giá trị thuộc đoạn $\left[2;3\right]$ vậy đáp án **A** sai

Tương tự như vậy ta thấy đáp án C đúng với $m=0$ khi đó y có dạng $\frac{1}{-x}$

a1RpQ)$+a1R3qr2.5=

Ta thấy khi $y=\frac{1}{3}$ khi $x=3$ là giá trị thuộc đoạn $\left[2;3\right]$ $\Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

Cách tham khảo: Tự luận

Tính đạo hàm $y'=\frac{2m\left(m-x\right)-\left(2mx+1\right)\left(-1\right)}{\left(m-x\right)^2}=\frac{2m^2+1}{\left(m-x\right)^2}>0$ với mọi $x\in D$

$\Rightarrow$ Hàm y luôn đồng biến

$\Rightarrow$ Hàm y đạt giá trị lớn nhất tại cận trên $x=3$

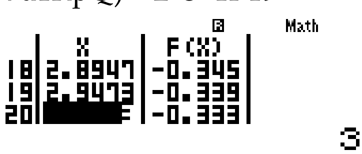
Vậy $y\left(3\right)=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{6m+1}{m-3}=\frac{-1}{3}\Leftrightarrow m=0$

Bình luận:

Ta có thể sử dụng máy tính Casio theo VD1 và VD2 với chức năng MODE 7

Ta thấy với đán án C hàm số $y=-\frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất $-\frac{1}{3}$ khi $x=3$

w7a1RpQ)==2=3=1P19=



***Bài toán 5:* [Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]**

Cho hàm số $y=a\sin x+b\cos x+x$ $\left(0<x<2\pi\right)$ đạt cực đại tại các điểm $x=\frac{\pi}{3}$ và $x=\pi$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b\sqrt{3}$

A. $T=2\sqrt{3}$ **B.** $T=3\sqrt{3}+1$ **C.** $T=2$ **D.** $T=4$

Lời giải:

Cách 1: CASIO

Ta hiểu hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì x_0 là nghiệm của phương trình $y'=0$

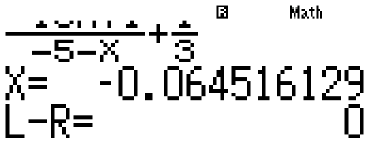
Tính $y'=a\cos x-b\sin x+1$.

Ta có $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b+\frac{\pi}{3}=0$ (1)

Lại có $y'(\pi)=0 \Leftrightarrow -a+\pi=0 \Rightarrow a=\pi$. Thế vào (1) ta được

SHIFT SOLVE

ap10Q)+1Rp5pQ)$+a1R3qr2.5=



Ta thấy khi $y=\frac{1}{3}$ thì $x=-0.064...$ không phải là giá trị thuộc đoạn $[2;3]$ vậy đáp án **A** sai

Tương tự như vậy ta thấy đáp án C đúng với $m=0$ khi đó y có dạng $\frac{1}{-x}$

a1RpQ)$+a1R3qr2.5=

Ta thấy khi $y=\frac{1}{3}$ khi $x=3$ là giá trị thuộc đoạn $[2;3] \Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

Cách tham khảo: Tự luận

Tính đạo hàm $y'=\frac{2m(m-x)-(2mx+1)(-1)}{(m-x)^2}=\frac{2m^2+1}{(m-x)^2}>0$ với mọi $x\in D$

$\Rightarrow$ Hàm y luôn đồng biến

$\Rightarrow$ Hàm y đạt giá trị lớn nhất tại cận trên $x=3$

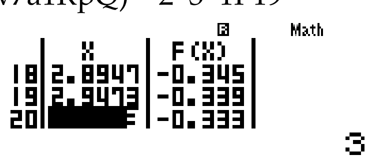
Vậy $y(3)=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{6m+1}{m-3}=\frac{-1}{3} \Leftrightarrow m=0$

Bình luận:

Ta có thể sử dụng máy tính Casio theo VD1 và VD2 với chức năng MODE 7

Ta thấy với đán án C hàm số $y=-\frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất $-\frac{1}{3}$ khi $x=3$

w7a1RpQ)==2=3=1P19=



***<u>Bài toán 6:</u>* [Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]**

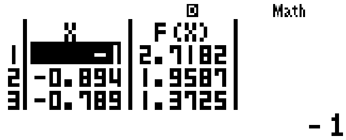
Gọi M,m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2}{e^x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Khi đó

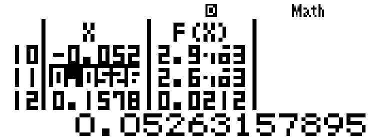
A. $M=\frac{1}{e};m=0$ **B.** $M=e;m=0$ **C.** $M=e,m=\frac{1}{e}$ **D.** $M=e;m=1$

<u>Lời giải:</u>

Lập bảng giá trị cho $y=f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ với lệnh MODE 7 Start -1 End 1 Step $\frac{2}{19}$

w7aQ)dRQK^Q)==p1=1=2P19=





Quan sát bảng giá trị thấy ngay $M = 2.7182 = e$ đạt được khi $x = -1$ và $m = 2.6x10^{-3} \approx 0$ Sử dụng Casio

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài toán 7: **[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]**

Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$

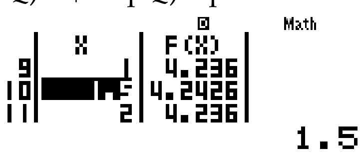
A. $M = 3$ **B.** $M = 3\sqrt{2}$ **C.** $M = 2\sqrt{3}$ **D.** $M = 2+\sqrt{3}$

Lời giải:

Theo điều kiện xác định thì $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq k \leq 6$

Lập bảng giá trị cho $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$ với lệnh MODE 7 Start -3 End 6 Step 0.5

w7sQ)+3$+s6pQ)==p3=6=0.5=



Quan sát bảng giá trị thấy ngay $M = 4.2421 = 3\sqrt{2}$ đạt được khi $x = -1$ và $m = 2.6x10^{-3} \approx 0$ Sử dụng Casio

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài toán 8: **[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]**

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left(x^2 - 2x + 3\right)^2 - 7$

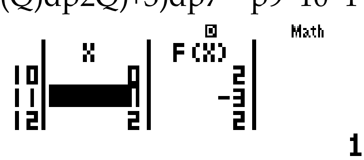
A. $\min y = -5$ **B.** $\min y = -7$ **C.** $\min y = -3$ **D.** Không tồn tại min

Lời giải:

Đề bài không nói gì đến miền giá trị của x . Khi đó ta chọn Start -9 End 10 Step 1

Lập bảng giá trị cho $y = \left(x^2 - 2x + 3\right)^2 - 7$ với lệnh MODE 7

w7(Q)dp2Q)+3)dp7==p9=10=1=



Quan sát bảng giá trị thấy ngay $\min y = -3$ đạt được khi $x = 1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài toán 9: **[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]**

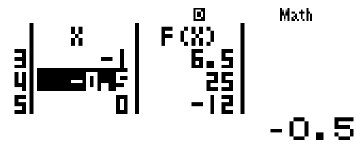
Tìm m để hàm số $y = \dfrac{mx-4}{x+m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên $\left[-2;6\right]$

A. $m = \frac{2}{6}$ **B.** $m = -\frac{4}{5}$ **C.** $m = \frac{3}{4}$ **D.** $m = \frac{6}{7}$

Lời giải:

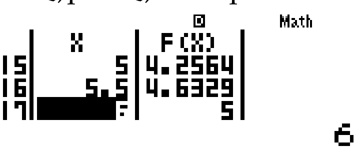
Thử với $m = \frac{2}{6}$ thì giá trị lớn nhất là 25 $\Rightarrow$ **A** sai

w7a2Q)P6p4RQ)+2P6==p2=6=0.5=



Tương tự như vậy với $m = 34$ thì giá trị lớn nhất là 5.$\Rightarrow$ Đáp số **C** chính xác

w7a34Q)p4RQ)+34==p2=6=0.5=



Bài toán 10: **[Thi thử THPT Vũ Văn Hiếu –Nam Định lần 1 năm 2017]**

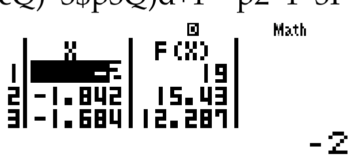
Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 + 1\right|$ trên đoạn $\left[-2;1\right]$ thì :

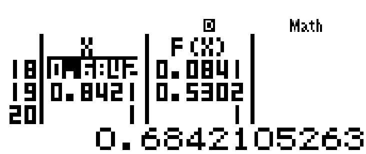
A. $M = 19; m = 1$ **B.** $M = 0; m = -19$ **C.** $M = 0; m = -19$ **D.** Kết quả khác

Lời giải:

Hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối ta thêm lệnh SHIFT HYP. Sử dụng MODE 7 với Start -2 End 1 Step $\frac{3}{19}$

w7qcQ)^3$p3Q)d+1==p2=1=3P19=





Quan sát bảng giá trị thấy $M = 19; m = 0$.$\Rightarrow$ Đáp số **C** chính xác

Bài toán 11: **[Thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc lần 1 năm 2017]**

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}$ là :

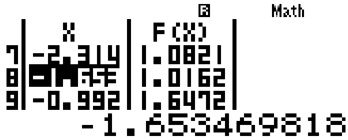
A. $\min y = 0$ **B.** $\min y = 1$ **C.** $\min y = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ **D.** Không tồn tại GTNN

Lời giải:

Vì chu kì của hàm $\sin, \cos$ là 2π nên ta chọn Start -2π End 2π Step $\frac{4\pi}{19}$

Lập bảng giá trị cho $y = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}$ với lệnh MODE 7

qw4w7s1+jQ))$+s1+kQ))==p2qK=2qK=4qKP19=



Quan sát bảng giá trị thấy ngay $M = 1.0162 \approx 1$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài toán 12: **[Thi thử chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần 1 năm 2017]**

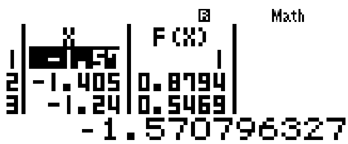
Cho hàm số $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ bằng :

A. 1. **B.** 7 **C.** -1 **D.** 3

Lời giải:

Lập bảng giá trị cho $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$ với lệnh MODE 7 Start $-\frac{\pi}{2}$ End $\frac{\pi}{2}$ Step $\frac{\pi}{19}$

qw4w73jQ))p4jQ))^3==pqKP2=qKP2=qKP19=



Quan sát bảng giá trị lớn nhất là $1 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài toán 13: **[Thi HK1 THPT chuyên Ngoại Ngữ - ĐHSP năm 2017]**

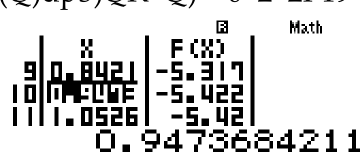
Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ trên đoạn $[0;2]$. Giá trị của biểu thức $P = (m^2 - 4M)^{2016}$ là :

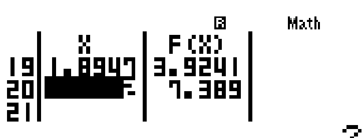
A. 0 **B.** e^{2016} **C.** 1 **D.** 2^{2016}

Lời giải:

Lập bảng giá trị cho $y = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}$ với lệnh MODE 7 Start 0 End 2 Step $\frac{2}{19}$

w7(Q)dp3)QK^Q)==0=2=2P19=





Quan sát bảng giá trị ta thấy $m = -5.422$ và $M = 7.389$ $\Rightarrow P = (m^2 - 4M)^{2016} = (-0.157916)^{2016} \approx 0$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. $\min\limits_{[2;\,4]} y = 0.$ **B.** $\min\limits_{[2;\,4]} y = 3.$ **C.** $\min\limits_{[2;\,4]} y = 5.$ **D.** $\min\limits_{[2;\,4]} y = 7.$

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4;4]$ là:

A. $\min\limits_{[-4;\,4]} f(x) = -50.$ **B.** $\min\limits_{[-4;\,4]} f(x) = 0.$ **C.** $\min\limits_{[-4;\,4]} f(x) = -41.$ **D.** $\min\limits_{[-4;\,4]} f(x) = 15.$

Câu 3. **(Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2007)**

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1;3]$ là:

A. $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = 0.$ **B.** $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = \dfrac{13}{27}.$ **C.** $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = -6.$ **D.** $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = 5.$

Câu 4. **(Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2008)**

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. $\max\limits_{[0;\,2]} f(x) = 64.$ **B.** $\max\limits_{[0;\,2]} f(x) = 1.$ **C.** $\max\limits_{[0;\,2]} f(x) = 0.$ **D.** $\max\limits_{[0;\,2]} f(x) = 9.$

Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(x+2)(x+4)(x+6) + 5$ trên nữa khoảng $[-4;+\infty)$ là:

A. $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -8.$ **B.** $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -11.$ **C.** $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -17.$ **D.** $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -9.$

Câu 6. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là:

A. $\min\limits_{[0;\,3]} y = -3.$ **B.** $\min\limits_{[0;\,3]} y = \dfrac{1}{2}.$ **C.** $\min\limits_{[0;\,3]} y = -1.$ **D.** $\min\limits_{[0;\,3]} y = 1.$

Câu 7. **(Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2008)**

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{9}{x}$ trên đoạn $[2;4]$ là:

A. $\min\limits_{[2;\,4]} y = 6.$ **B.** $\min\limits_{[2;\,4]} y = \dfrac{13}{2}.$ **C.** $\min\limits_{[2;\,4]} y = -6.$ **D.** $\min\limits_{[2;\,4]} y = \dfrac{25}{4}.$

Câu 8. **(Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2008)**

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là:

A. $\min\limits_{(1;+\infty)} y = -1.$ **B.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y = 3.$ **C.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y = 5.$ **D.** $\min\limits_{(2;+\infty)} y = \dfrac{-7}{3}.$

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$ là:

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = -1.$ **B.** $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 1.$ **C.** $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 9.$ **D.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 10.$

Câu 10. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1;1]$ là:

A. $\max\limits_{[-1;1]} y = \sqrt{5}$ và $\min\limits_{[-1;1]} y = 0.$ **B.** $\max\limits_{[-1;1]} y = 1$ và $\min\limits_{[-1;1]} y = -3.$

C. $\max\limits_{[-1;1]} y = 3$ và $\min\limits_{[-1;1]} y = 1.$ **D.** $\max\limits_{[-1;1]} y = 0$ và $\min\limits_{[-1;1]} y = -\sqrt{5}.$

Câu 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-4$ trên đoạn $\left[1;5\right]$ là:

A. $\frac{8}{3}$.　　**B.** $\frac{10}{3}$.　　**C.** -4.　　**D.** $-\frac{10}{3}$.

Câu 12. Hàm số $y=x^4-2x^2+1$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;2\right]$ lần lượt là:

A. 9; 0.　　**B.** 9; 1.　　**C.** 2; 1.　　**D.** 9; -2.

Câu 13. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ là:

A. $\frac{1}{4}$.　　**B.** 2.　　**C.** $-\frac{1}{2}$.　　**D.** 0.

Câu 14. Cho hàm số $y=\frac{x^2-3}{x-2}$. Khẳng định nào sau đây đúng về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[3;4\right]$:

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{2}$.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 6.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{13}{2}$ và giá trị nhỏ nhất bằng 6.

Câu 15. Hàm số $y=x^2+2x+1$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;1\right]$ lần lượt là $y_1;y_2$. Khi đó tích $y_1.y_2$ bằng:

A. 5.　　**B.** -1.　　**C.** 4.　　**D.** 1.

Câu 16. Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+1$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[1;3\right]$ tại điểm có hoành độ lần lượt là $x_1;x_2$. Khi đó tổng x_1+x_2 bằng

A. 2.　　**B.** 5.　　**C.** 4.　　**D.** 3.

Câu 17. Hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x. Giá trị của x là:

A. $x=3$.　　**B.** $x=0$ hoặc $x=2$.

C. $x=0$.　　**D.** $x=-2$ hoặc $x=2$.

Câu 18. Hàm số $y=\left(x-1\right)^2+\left(x+3\right)^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 3.　　**B.** -1.　　**C.** 10.　　**D.** 8.

Câu 19. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $\left[1;e\right]$ bằng là:

A. 0.　　**B.** 1.　　**C.** $\frac{1}{e}$.　　**D.** e.

Câu 20. Hàm số $y=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}}$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-3;0\right]$ lần lượt tại $x_1;x_2$. Khi đó $x_1.x_2$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** 6. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 21. Hàm số $y=\sqrt{x^2+1}+x^2$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-1;1\right]$ lần lượt là:

A. $\sqrt{2}-1;\,0$. **B.** $\sqrt{2}+1;\,0$. **C.** $1;\,-1$. **D.** $1;\,0$.

Câu 22. **(Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2004)**

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\sin x-\dfrac{4}{3}\sin^3 x$ trên $\left[0;\pi\right]$ là:

A. $\max\limits_{\left[0;\pi\right]} y=2.$ **B.** $\max\limits_{\left[0;\pi\right]} y=\dfrac{2}{3}.$ **C.** $\max\limits_{\left[0;\pi\right]} y=0.$ **D.** $\max\limits_{\left[0;\pi\right]} y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$

Câu 23. **(Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2002)**

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{2}\cos 2x+4\sin x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=4-\sqrt{2}.$ **B.** $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=2\sqrt{2}.$ **C.** $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=\sqrt{2}.$ **D.** $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=0.$

Câu 24. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=5\cos x-\cos 5x$ với $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ là:

A. $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=4.$ **B.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=3\sqrt{2}.$ **C.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=3\sqrt{3}.$ **D.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=-1.$

Câu 25. Hàm số $y=\sin x+1$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ bằng:

A. 2. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 26. Hàm số $y=\cos 2x-3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\pi\right]$ bằng:

A. -4. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 27. Hàm số $y=\tan x+x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ tại điểm có hoành độ bằng:

A. $0.$ **B.** $\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $1+\dfrac{\pi}{4}$. **D.** 1.

Câu 28. Hàm số $y=\sin x+\cos x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. $-2;\,2$. **B.** $-\sqrt{2};\,\sqrt{2}$. **C.** $0;\,1$. **D.** $-1;\,1$.

Câu 29. Hàm số $y=3\sin x-4\sin^3 x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. $3;\,-4$. **B.** $1;\,0$. **C.** $1;\,-1$. **D.** $0;\,-1$.

Câu 30. Hàm số $y=\sin^2 x+2$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt bằng:

A. $0;\,2$. **B.** $1;\,3$. **C.** $1;\,2$. **D.** $2;\,3$.

Câu 31. Hàm số $y=-9\sin x-\sin 3x$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\pi\right]$ lần lượt là:

A. $0;\ -8$. **B.** $8;\ 0$. **C.** $1;\ -1$. **D.** $0;\ -1$.

Câu 32. Hàm số $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. $0;\,-1$. **B.** $\sqrt{3};\,0$. **C.** $\sqrt{3};\,-1$. **D.** $2;\,-2$.

Câu 33. Hàm số $y=\cos^2 x-2\cos x-1$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[0;\pi\right]$ lần lượt bằng $y_1;y_2$. Khi đó tích $y_1.y_2$ có giá trị bằng:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** -4. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** 1.

Câu 34. Hàm số $y=\cos 2x+2\sin x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ lần lượt là $y_1;y_2$. Khi đó tích $y_1.y_2$ có giá trị bằng:

A. $-\frac{1}{4}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 0.

Câu 35. Hàm số $y=\cos 2x-4\sin x+4$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\frac{\pi}{2};\,0$. **B.** $5;\,1$. **C.** $5;\,-1$. **D.** $9;\,1$.

Câu 36. Hàm số $y=\tan x+\cot x$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ tại điểm có hoành độ là:

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Câu 37. Hàm số $y=\cos x\left(\sin x+1\right)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\pi\right]$ lần lượt là:

A. ± 1. **B.** ± 2. **C.** $\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $2;0$.

Câu 38. Hàm số $y=\sin^3 x+\cos^3 x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\pi\right]$ lần lượt là $y_1;y_2$. Khi đó hiệu y_1-y_2 có giá trị bằng:

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 39. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^x(x^2-x-1)$ trên đoạn [0;2] là

A. $\min\limits_{[0;2]} y=-2e.$ **B.** $\min\limits_{[0;2]} y=e^2.$ **C.** $\min\limits_{[0;2]} y=-1.$ **D.** $\min\limits_{[0;2]} y=-e.$

Câu 40. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^x(x^2-3)$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$

A. $\min\limits_{[-2;2]} y=e^2.$ **B.** $\min\limits_{[-2;2]} y=-2e.$ **C.** $\min\limits_{[-2;2]} y=e^{-2}.$ **D.** $\min\limits_{[-2;2]} y=-4e.$

Câu 41. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=e^x+4e^{-x}+3x$ trên đoạn $\left[1;2\right]$ bằng

A. $\max\limits_{[1;2]} y=e^2+\frac{4}{e^2}+6.$ **B.** $\max\limits_{[1;2]} y=e+\frac{4}{e}+3.$

C. $\max\limits_{[1;2]} y=6e+3.$ **D.** $\max\limits_{[1;2]} y=5.$

Câu 42. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x.e^{-2x}$ trên đoạn $\left[0;1\right]$ bằng

A. $\max\limits_{[0;1]} y = 1.$ **B.** $\max\limits_{[0;1]} f(x) = \frac{1}{e^2}.$ **C.** $\max\limits_{[0;1]} f(x) = 0.$ **D.** $\max\limits_{[0;1]} f(x) = \frac{1}{2e}.$

Câu 43. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 - \ln(1-2x)$ trên đoạn $[-2;0]$. Khi đó M + m bằng

A. $\frac{17}{4} - \ln 10$. **B.** $\frac{17}{4} - \ln 7$. **C.** $\frac{17}{4} - \ln \frac{5}{2}\, \frac{28}{27}$. **D.** $\frac{15}{4} - \ln 10\, 2$.

Câu 44. Hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ có giá trị lớn nhất là M, giá trị nhỏ nhất là m. Khi đó M – m bằng

A. $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$. **D.** – 1.

Câu 45. Hàm số $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ có giá trị lớn nhất là M, giá trị nhỏ nhất là m. Khi đó M.m bằng

A. $-3\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 46. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ là:

A. Không tồn tại. **B.** 1. **C.** π. **D.** – 1.

Câu 47. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ là:

A. – 1. **B.** 1. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** Không tồn tại.

Câu 48. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{1-x^2}$. Khi đó $M + m$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 49. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ bằng

A. $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 3.$ **B.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 5.$ **C.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 3 + \sqrt{5}.$ **D.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 0.$

Câu 50. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ bằng

A. $\min\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$ **B.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 0.$ **C.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 1.$ **D.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = \sqrt{2}.$

Câu 51. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - 4\sqrt{(x+4)(4-x)} + 5$ bằng

A. $\max\limits_{[-4;4]} y = 10.$ **B.** $\max\limits_{[-4;4]} y = 5 - 2\sqrt{2}.$ **C.** $\max\limits_{[-4;4]} y = -7.$ **D.** $\max\limits_{[-4;4]} y = 5 + 2\sqrt{2}.$

Câu 52. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$ bằng

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 4$. **B.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{-3}{2}.$ **C.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 3.$ **D.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y = -1.$

Câu 53. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\sin^4 x + \cos^2 x + 3$ bằng

A. $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 5$. **B.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 3$. **C.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 4$. **D.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{31}{8}$.

Câu 54. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^8 x + \cos^4 2x$. Khi đó M + m bằng

A. $\frac{28}{27}$. **B.** 4. **C.** $\frac{82}{27}$. **D.** 2.

Câu 55. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^{20} x + \cos^{20} x$. Khi đó M.m bằng

A. $\frac{1}{512}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{513}{512}$.

Câu 56. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1}$ là:

A. không có giá trị nhỏ nhất. **B.** có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

C. có giá trị nhỏ nhất bằng –1. **D.** có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Câu 57. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$; không có giá trị lớn nhất.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$; giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}$.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$; không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 58. Hàm số $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. $\sqrt{2};\ 1$. **B.** $1;\ 0$. **C.** $2;\ \sqrt{2}$. **D.** $2;\ 1$.

Câu 59. Cho hàm số $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$. Khẳng định nào sau đây sai ?

A. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{3}$.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2$.

Câu 60. Gọi $y_1; y_2$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ trên đoạn $[3;4]$. Khi đó tích $y_1.y_2$ là bao nhiêu ?

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 61. Hàm số $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-5;-3]$ bằng:

A. $-\frac{13}{12}$. **B.** $\frac{11}{6}$. **C.** $-\frac{47}{60}$. **D.** $-\frac{11}{6}$.

Câu 62. Cho hàm số $y = x - \sqrt{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm có hoành độ $x=1$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 63. Hàm số $y=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất lần lượt tại hai điểm có hoành độ:

A. 0. **B.** ± 1. **C.** $\pm\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 64. Hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. $-2;\ 1$. **B.** $0;\ 2$. **C.** $\frac{1}{2};\ 1$. **D.** $0;\ 1$.

Câu 65. Hàm số $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** Không tồn tại.

Câu 66. Hàm số $y=\sqrt{1+2\sin x.\cos x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tại điểm có hoành độ là:

A. $x=\frac{\pi}{4}$. **B.** $x=\frac{\pi}{6}$. **C.** $x=0$ và $x=\frac{\pi}{2}$. **D.** $x=\frac{\pi}{3}$.

Câu 67. Hàm số $y=\sin^6 x+\cos^6 x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. $1;\ -1$. **B.** $2;\ 0$. **C.** $\frac{1}{4};\ -1$. **D.** $1;\ \frac{1}{4}$.

Câu 68. Hàm số $y=\left(x^2+2x+3\right)\left(x^2+2x-2\right)$ có giá trị lớn nhất là:

A. có giá trị lớn nhất là 0. **B.** có giá trị lớn nhất là -8.

C. có giá trị lớn nhất là 2. **D.** không có giá trị lớn nhất.

Câu 69. Hàm số $y=\frac{x^2-2}{\sqrt{x^2+1}}$ có giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bằng:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -2.

Câu 70. Hàm số $y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;3]$ là:

A. $10;\ -\frac{9}{4}$. **B.** $120;\ 1$. **C.** $10;\ -1$. **D.** $120;\ -1$.

Câu 71. Hàm số $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}.\sqrt{x+3}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất là:

A. $2\sqrt{2}-2;\ 2$. **B.** $2\sqrt{2}+2;\ 2$. **C.** $2\sqrt{2};\ 2$. **D.** $2;\ 0$.

Câu 72. Hàm số $y=\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}+2\sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ là:

A. $2\sqrt{2}+4;2$. **B.** $2\sqrt{2}-2;2$. **C.** $2\sqrt{2};2$. **D.** $4;2$.

Câu 73. Hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;63]$ là:

A. $2;12$. **B.** $1;2$. **C.** $0;2$. **D.** $0;12$.

Câu 74. Hàm số $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+3}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ tại điểm có hoành độ bằng

A. $x=-\dfrac{\pi}{2};x=\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $x=\dfrac{\pi}{6};x=\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $x=\dfrac{\pi}{6};x=-\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $x=0;x=\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 75. Hàm số $y=x+\dfrac{1}{x}+x^2+\dfrac{1}{x^2}$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[1;3\right]$ là:

A. $3;\dfrac{112}{9}$. **B.** $1;4$. **C.** $1;\dfrac{112}{9}$. **D.** $4;\dfrac{112}{9}$.

Câu 76. Hàm số $y=x^8+\left(x^4-1\right)^2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[1;2\right]$ lần lượt tại hai điểm có hoành độ $x_1;x_2$. Khi đó tích $x_1.x_2$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 15. **D.** 0.

Câu 77. Hàm số $y=x^2+3x+\sqrt{x^2+3x+2}$ giá trị nhỏ nhất lần lượt bằng:

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 78. Hàm số $y=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;4\right]$ lần lượt là:

A. $\dfrac{8}{3};0$. **B.** $\dfrac{8}{3};-\dfrac{8}{3}$. **C.** $0;-\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{24}{5};0$.

Câu 79. Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:

A. 64 cm2. **B.** 4 cm2. **C.** 16 cm2. **D.** 8 cm2.

Câu 80. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 cm2, hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng:

A. $16\sqrt{3}$ cm **B.** $4\sqrt{3}$ cm **C.** 24 cm **D.** $8\sqrt{3}$ cm

Câu 81. Hai số có hiệu là 13, tích của chúng bé nhất khi hai số đó bằng

A. 5; – 8. **B.** 1; – 12. **C.** $\dfrac{-13}{2};\dfrac{13}{2}$. **D.** 6; – 7.

Câu 82. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=6t^2-t^3$,vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng

A. 2 (s) **B.** 12 (s) **C.** 6 (s) **D.** 4 (s)

Câu 83. Tam giác vuông có diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số a (a > 0)?

A. $\dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a^2}{9}$. **C.** $\dfrac{2a^2}{9}$. **D.** $\dfrac{a^2}{3\sqrt{3}}$.

Câu 84. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng

$P(n)=480-20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất?

A. 12. **B.** 24. **C.** 6. **D.** 32.

Câu 85. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0.025x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng

A. 100 mg. **B.** 20 mg. **C.** 30 mg. **D.** 0 mg.

Câu 86. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất bằng

A. 6 km/h. **B.** 8 km/h. **C.** 7 km/h. **D.** 9 km/h.

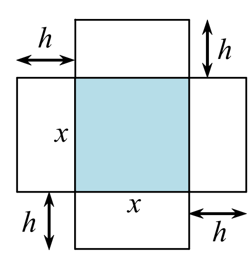
Câu 87. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3, t=0,1,2,...,25.$ Nếu coi f(t) là hàm số xác định trên đoạn [0;25] thì đạo hàm f'(t) được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

A. Ngày thứ 19. **B.** Ngày thứ 5. **C.** Ngày thứ 16. **D.** Ngày thứ 15.

Câu 88. Cho ΔABC đều cạnh A. Người ta dựng một hình chữ nhật MNPQ có cạnh MN nằm trên BC, hai đỉnh P, Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất ?

A. $BM=\frac{2a}{3}$. **B.** $BM=\frac{3a}{4}$. **C.** $BM=\frac{a}{3}$. **D.** $BM=\frac{a}{4}$.

Câu 89. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu như hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x cm, chiều cao h cm và có thể tích 500 cm3. Giá trị của x để diện tích của mảnh các tông nhỏ nhất bằng



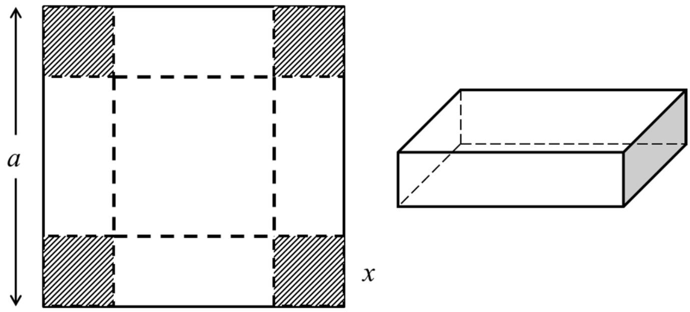
A. 100. **B.** 300.

C. 10. **D.** 1000.

Câu 90. Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R, hình trụ có thể tích lớn nhất bằng

A. $\frac{4\pi R^3}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{4\pi R^3}{3}$.

Câu 91. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh **A.** Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Tìm cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất?



A. $\frac{5a}{6}$. **B.** $\frac{a}{6}$. **C.** $\frac{a}{12}$. **D.** $\frac{a}{9}$.

Câu 92. Giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số: $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$ là:

A. $M = -1; m = \frac{-3}{2}$. **B.** $M = 3; m = -1$. **C.** $M = 3; m = \frac{-3}{2}$. **D.** $M = \frac{3}{2}; m = -3$.

Câu 93. Giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2\cos 2x + 2\sin x$ là:

A. $M = \frac{9}{4}; m = -4$. **B.** $M = 4; m = 0$. **C.** $M = 0; m = -\frac{9}{4}$. **D.** $M = 4; m = -\frac{9}{4}$.

Câu 94. Giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^4 x - 4\sin^2 x + 5$ là:

A. $M = 2; m = -5$. **B.** $M = 5; m = 2$. **C.** $M = 5; m = -2$. **D.** $M = -2; m = -5$.

Câu 95. Giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$ là:

A. $M = 3; m = -\frac{11}{4}$. **B.** $M = \frac{11}{4}; m = -3$. **C.** $M = 3; m = \frac{11}{4}$. **D.** $M = -\frac{11}{4}; m = -3$.

Câu 96. Cho hàm số $y = \frac{2\cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Khi đó M+m bằng

A. – 4. **B.** – 5. **C.** – 6. **D.** 3.

Câu 97. Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

A. $M = m + \frac{2}{3}$. **B.** $M = m + 1$. **C.** $M = \frac{3}{2}m$. **D.** $M = m + \frac{3}{2}$.

Câu 98. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$ trên đoạn $[0;4]$ là:

A. $-\frac{21}{3}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 99. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x+3)\sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 100. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ là:

A. –2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** –3.

Câu 101. Hàm số $y = 2\sin^2 x + 5\cos^2 x - 1$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 102. Hàm số $y = x + \sqrt{18 - x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. 5. **B.** -6. **C.** 6. **D.** -5.

Câu 103. Hàm số $y = 2\cos^3 x - \frac{7}{2}\cos^2 x - 3\cos x + 5$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 1.

Câu 104. Hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. -6. **B.** -7. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 105. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 1;\ x + y = 3$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 + 3x^2 + 4xy - 5x$ lần lượt bằng:

A. 20 và 18. **B.** 20 và 15. **C.** 18 và 15. **D.** 15 và 13.

Câu 106. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + \sqrt{1 + 9x^2}}{8x^2 + 1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 107. Hàm số $y = \sqrt{45 + 20x^2} + |2x - 3|$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. -9. **B.** 8. **C.** 9. **D.** -8.

Câu 108. **(Đề thi Đại học Khối B – 2003)**

Hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. $-2\sqrt{2}$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 109. **(Đề thi Đại học Khối D – 2003)**

Hàm số $y = f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt bằng:

A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$; 0. **B.** $\sqrt{5}$; 0. **C.** $\sqrt{2}$; 0. **D.** $\sqrt{5}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 110. **(Đề thi Đại học Khối B – 2004)**

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$ là :

A. 0. **B.** $\frac{9}{e^3}$. **C.** $\frac{4}{e^2}$. **D.** $\frac{4}{e}$.

Câu 111. **(Đề thi Đại học Khối D – 2011)**

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ trên đoạn [0;2] lần lượt là:

A. $\frac{17}{3}$; 3 **B.** $\frac{17}{3}$; -5. **C.** 3; -5. **D.** -3; 5.

Câu 112. **(Đề thi ĐH Khối D – 2009)**

Cho các số thực x, y thõa mãn $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y = 1$. Giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$ là:

A. $M=\dfrac{25}{2};\ m=\dfrac{191}{16}$. **B.** $M=12;\ m=\dfrac{191}{16}$.

C. $M=\dfrac{25}{2};\ m=12$. **D.** $M=\dfrac{25}{2}; m=0$.

Câu 113. **(Đề thi ĐH Khối D – 2012)**

Cho các số thực x, y thoả mãn $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $A=x^3+y^3+3(xy-1)(x+y-2)$ là :

A. $m=\dfrac{17-5\sqrt{5}}{4}$. **B.** $m=16$. **C.** $m=398$. **D.** $m=0$.

Câu 114. **(Đề thi ĐH Khối A– 2006).**

Cho hai số thực $x\ne 0,\ y\ne 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy=x^2+y^2-xy$.

Giá trị lớn nhất M của biểu thức $A=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}$ là:

A. $M=0$. **B.** $M=0$. **C.** $M=1$. **D.** $M=16$.

Câu 115. **(Đề thi ĐH Khối B– 2011).**

Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $2(a^2+b^2)+ab=(a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P=4\left(\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)$ là:

A. $m=-10$. **B.** $m=\dfrac{85}{4}$. **C.** $m=\dfrac{-23}{4}$. **D.** $m=0$.

Câu 116. **(Đề thi ĐH Khối D– 2014).**

Cho hai số thực dương thỏa mãn $1\le x\le 2;\ 1\le y\le 2$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức

$$P=\frac{x+2y}{x^2+3y+5}+\frac{y+2x}{y^2+3x+5}+\frac{1}{4(x+y-1)}$$

A. $m=0$. **B.** $m=\dfrac{85}{4}$. **C.** $m=-10$. **D.** $m=\dfrac{7}{8}$.

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1B	2C	3B	4D	5B	6C	7A	8B	9C	10C
11A	12A	13A	14D	15C	16D	17D	18D	19A	20B
21B	22D	23C	24A	25A	26A	27A	28B	29C	30D
31B	32D	33B	34A	35C	36C	37C	38D	39D	40B
41A	42D	43A	44B	45A	46D	47B	48C	49B	50A
51D	52C	53D	54C	55A	56D	57B	58C	59B	60C
61C	62B	63B	64C	65B	66C	67D	68D	69D	70D
71B	72A	73A	74C	75D	76B	77A	78A	79C	80A
81C	82A	83A	84A	85B	86D	87D	88D	89C	90B
91B	92C	93A	94B	95C	96D	97B	98D	99C	100B
101C	102C	103B	104D	105B	106C	107C	108B	109C	110C
111A	112A	113A	114D	115C	116D				

Câu 1. **Chọn B.**

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên [0;2]

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \quad \in (0;2) \\ x = -1 \notin (0;2) \end{array}\right.$

$y(1) = 3; y(0) = 5; y(2) = 7$. Do đó $\min\limits_{[0;2]} y = y(1) = 3$

Câu 2. **Chọn C.**

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4;4]$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \quad \in (-4;4) \\ x = 3 \quad \in (-4;4) \end{array}\right.$

$f(-4) = -41; f(-1) = 40; f(3) = 8; f(4) = 15$. Do đó $\min\limits_{x \in [-4;4]} f(x) = f(-4) = -41$

Câu 3. **Chọn B.**

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên [1;3]

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 16x + 16$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \quad \notin (1;3) \\ x = \frac{4}{3} \quad \in (1;3) \end{array}\right.$

$f(1) = 0; f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{27}; f(3) = -6$. Do đó $\max\limits_{x \in [1;3]} f(x) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{27}$

Câu 4. **Chọn D.**

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên [0;2]

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

Xét trên (0; 2). Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; Khi đó $f(1) = 0; f(0) = 1; f(2) = 9$

Do đó $\max_{[0;2]} f(x) = f(2) = 9$

Câu 5. **Chọn B.**

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4;+\infty)$

Ta có: $y = (x^2+6x)(x^2+6x+8)+5$. Đặt $t = x^2+6x$. Khi đó $y = t^2+8t+5$

Xét hàm số $g(x) = x^2+6x$ với $x \geq -4$. Ta có $g'(x) = 2x+6$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

x	-4		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-8	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $t \in [-9;+\infty)$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = h(t) = t^2+8t+5$ với $t \in [-9;+\infty)$. Ta có $h'(t) = 2t+8$; $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -4$; $\lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$

Bảng biến thiên

x	-9		-4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	14	$\searrow$	-11	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min_{[-4;+\infty)} y = -11$

Câu 6. **Chọn C.**

Nhận xét: Hàm số đã cho liên tục trên [0;3]

Ta có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$ với $\forall x \in [0;3]$. $y(0) = -1; y(3) = \dfrac{1}{2}$. Do đó $\min_{x\in[0;3]} y = y(0) = -1$

Câu 7. **Chọn A.**

Nhận xét: Hàm số đã cho liên tục trên [2;4]

Ta có $y' = 1 - \dfrac{9}{x^2} = \dfrac{x^2-9}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \quad \notin (2;4) \\ x = 3 \quad \in (2;4) \end{array}\right.$

Ta có $y(2) = \dfrac{13}{2}; y(3) = 6; y(4) = \dfrac{25}{4}$. Do đó $\min_{x\in[2;4]} y = y(3) = 6$

Câu 8. **Chọn B.**

Hàm số xác định với $\forall x \in (1;+\infty)$

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(1;+\infty)$

Ta có $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$; $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{x\in(1;+\infty)} f(x) = f(2) = 3$

Câu 9. **Chọn C.**

Hàm số xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $y' = \dfrac{8x^2 - 12x - 8}{(x^2+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $x = -\dfrac{1}{2}$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	9	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Vậy $\max\limits_{R} y = 9 = y(-\dfrac{1}{2})$

Câu 10. **Chọn C.**

Điều kiện xác định: $5 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{5}{4}$. Suy ra hàm số xác định với $\forall x \in [-1;1]$

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$

Ta có $y' = \dfrac{-2}{\sqrt{5-4x}} < 0, \forall x \in [-1;1]$. Do đó $\max\limits_{[-1;1]} y = y(-1) = 3$; $\min\limits_{[-1;1]} y = y(1) = 1$

Câu 11. **Chọn A.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = x^2 - 4x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Khi đó: $y(1) = -\dfrac{8}{3}$; $y(3) = -4$; $y(5) = \dfrac{8}{3} \Rightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{8}{3}$

Câu 12. **Chọn A.**

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ hoặc $x = 0$

Khi đó: $y(0) = 1$; $y(1) = 0$; $y(2) = 9 \Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là $9; 0$

Câu 13. **Chọn A.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}>0;\forall x\in D$.

Khi đó: $y(0)=-\dfrac{1}{2}$; $y(2)=\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{1}{4}$.

Câu 14. **Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ta có: $y'=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}>0;\forall x\in[3;4]\Rightarrow$Hàm số đồng biến trên đoạn $[3;4]$. Vậy $\min\limits_{[3;4]}y=y(3)=6$ và $\max\limits_{[3;4]}y=y(4)=\dfrac{13}{2}$.

Câu 15. **Chọn C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=2x+2$; $y'=0\Leftrightarrow 2x+2=0\Leftrightarrow x=-1\notin[0;1]$. $y(0)=1;y(1)=4$ suy ra $y_1.y_2=4$.

Câu 16. **Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=x^2-5x+6$; $y'=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=3$

Khi đó: $y(1)=\dfrac{29}{6};y(2)=\dfrac{17}{3};y(3)=\dfrac{11}{2}\Rightarrow x_1=2;x_2=1\Rightarrow x_1+x_2=3$

Câu 17. **Chọn D.**

TXĐ: $D=[-2;2]$. Ta có: $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=0\Leftrightarrow x=0$

Khi đó: $y(-2)=0;y(0)=2;y(2)=0$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ $x=\pm2$

Câu 18. **Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=(x-1)^2+(x+3)^2=2x^2+4x+10$.

Ta có: $y'=4x+4$; $y'=0\Leftrightarrow x=-1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Câu 19. **Chọn A.**

TXĐ: $D=(0;+\infty)$. Ta có: $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow x=e$

Khi đó: $y(1)=0;y(e)=\dfrac{1}{e}\Rightarrow$ Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Câu 20. **Chọn B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=\dfrac{x+2}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=-2$

Khi đó: $y(-3)=-\frac{4\sqrt{11}}{11};y(-1)=-\frac{2\sqrt{3}}{3};y(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=-3\end{cases}\Rightarrow x_1.x_2=0$

Câu 21. **Chọn B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x$.

$y'=0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+2\right)=0\Leftrightarrow x=0$

Khi đó: $y(-1)=\sqrt{2}+1;y(0)=1;y(1)=\sqrt{2}+1$.

Câu 22. **Chọn D.**

Ta có $y'=2\cos x-4\sin^2x.\cos x=2\cos x(1-2\sin^2x)=2\cos x.\cos 2x$

Nên $y'=0\Leftrightarrow 2\cos x.\cos 2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\\cos 2x=0\end{array}\right.$

Trên $(0;\pi)$, $y'=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

$y(0)=0;\ y(\pi)=0;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3};\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\max\limits_{[0;\pi]}y=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Câu 23. **Chọn C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y=-2\sqrt{2}\sin^2x+4\sin x+\sqrt{2}$

Đặt $t=\sin x$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[0;1]$

Khi đó, bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=g(t)=-2\sqrt{2}\,t^2+4t+\sqrt{2}$ trên đoạn $[0;1]$

$g'(t)=-4\sqrt{2}\,t+4=4(1-\sqrt{2}\,t)$; $g'(t)=0\Leftrightarrow 4(1-\sqrt{2}\,t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2}}\in(0;1)$

$g(0)=\sqrt{2};\ g(1)=4-\sqrt{2};\ g(\frac{1}{\sqrt{2}})=2\sqrt{2}$

Do đó $\min\limits_{x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}y=\sqrt{2};\left(y=\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin x=0, \sin 0=0\right)$

Câu 24. **Chọn A.**

Ta có $y=5\cos x-\cos 5x$ nên $y'=-5\sin x+5\sin 5x$

$y'=0\Leftrightarrow\sin 5x=\sin x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x=x+k2\pi\\5x=\pi-x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2}\\x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\end{array}\right.$

Trên $\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, $y'=0\Leftrightarrow x\in\left\{0;-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$

$y(0)=4$; $y\left(-\frac{\pi}{6}\right)=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$; $y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$.

Vậy $\min\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=4=y(0)$

Câu 25. **Chọn A.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=\cos x; y'=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vì $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}$ hoặc $x=\frac{\pi}{2}$.

Khi đó: $y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0; y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2 \Rightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

Câu 26. **Chọn A.**

TXĐ: $D=R$. Ta có: $y'=-2\sin 2x$; $y'=0 \Leftrightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2};\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vì $x\in\left[0;\pi\right] \Rightarrow x\in\left\{0;\frac{\pi}{2};\pi\right\}$. Do đó: $y\left(0\right)=-2$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4 \Rightarrow \min y=-4$

Câu 27. **Chọn A.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$. Ta có: $y'=\frac{1}{\cos^2 x}+1>0; \forall x\in D$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $D \Rightarrow \min y=0$.

Câu 28. **Chọn B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Vì $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2} \Rightarrow \min y=-\sqrt{2}; \max y=\sqrt{2}$

Câu 29. **Chọn C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=3\sin x-4\sin^3 x=\sin 3x \Rightarrow \min y=-1; \max y=1$.

Câu 30. **Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $0\le\sin^2 x\le 1 \Leftrightarrow 2\le\sin^2 x+2\le 3 \Rightarrow \min y=2; \max y=3$.

Câu 31. **Chọn B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-9\cos x-3\cos 3x=-9\cos x-12\cos^3 x+9\cos x=-12\cos^3 x$

$y'=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Vì: $x\in\left[0;\pi\right] \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

Do đó: $y\left(0\right)=0$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-8$; $y\left(\pi\right)=0 \Rightarrow \min y=-8$; $\max y=0$

Câu 32. **Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=\sqrt{3}\,\mathrm{sinx}+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

Mà $-1 \le \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \le 2 \Rightarrow \min y = -2; \max y = 2$

Câu 33. **Chọn B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y' = -2\sin x\cos x + 2\sin x = -2\sin x(\cos x - 1)$

$$y'=0 \Leftrightarrow -2\sin x(\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.(k\in Z)$$

Vì $x\in[0;\pi] \Rightarrow x=0$ hoặc $x=\pi$.

Khi đó: $y(0)=-2$; $y(\pi)=2 \Rightarrow \begin{cases} y_1=-2\\ y_2=2\end{cases} \Rightarrow y_1.y_2=-4$.

Câu 34. **Chọn A.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y' = -2\sin 2x + 2\cos x = -2\cos x(2\sin x - 1)$

$$y'=0 \Leftrightarrow -2\cos x(2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$

Vì $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{6}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\frac{3}{2}\\ y_2=1\end{cases}$.

Câu 35. **Chọn C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y' = -2\sin 2x - 4\cos x = -4\cos x(\sin x + 1)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$$

Vì $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$. Khi đó $y(0)=5$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Câu 36. **Chọn C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$. Ta có: $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x} = \frac{-\cos 2x}{\sin^2 x.\cos^2 x}$

$y'=0 \Leftrightarrow \frac{-\cos 2x}{\sin^2 x.\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$. Vì $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

Khi đó: $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$; $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 37. **Chọn C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y' = -\sin x(\sin x + 1) + \cos^2 x = -2\sin^2 x - \sin x + 1$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \text{ hoặc } x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \text{ hoặc } x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$$

Vì $x\in\left[0;\pi\right]\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$ hoặc $x=\dfrac{5\pi}{6}$

Khi đó: $y\left(0\right)=1;\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4};\ y\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{4};\ y\left(\pi\right)=-1$

Câu 38. **Chọn D.**

TXĐ: $D=R$

Ta có: $y'=3\cos x\sin^2 x-3\sin x\cos^2 x=3\sin x\cos x\left(\sin x-\cos x\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow 3\sin x\cos x\left(\sin x-\cos x\right)=0\Leftrightarrow \sin 2x.\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{\pi}{4}\\ x=\dfrac{\pi}{2}\\ x=\pi\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}y\left(0\right)=1\\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1\\ y\left(\pi\right)=-1\end{cases}$$

$\Rightarrow y_1=1;y_2=-1\Rightarrow y_1-y_2=2$

Câu 39. **Chọn D.**

Hàm số $y=e^x(x^2-x-1)$ liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$

Ta có $y'=\left(e^x\right)'(x^2-x-1)+e^x(x^2-x-1)'=e^x(x^2-x-1)+e^x.(2x-1)=e^x(x^2+x-2)$

Cho $y'=0\Leftrightarrow e^x(x^2+x-2)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\quad\in\left(0;2\right)\\ x=-2\ \notin\left(0;2\right)\end{array}\right.$

Ta có, $f(1)=-e;\ f(0)=-1;\ f(2)=e^2$. Vậy: $\min\limits_{x\in\left[0;2\right]}y=y(1)=-e$

Câu 40. **Chọn B.**

Hàm số $y=e^x(x^2-3)$ liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$

Ta có $y'=\left(e^x\right)'(x^2-3)+e^x(x^2-3)'=e^x(x^2-3)+e^x.2x=e^x(x^2+2x-3)$

Cho $y'=0\Leftrightarrow e^x(x^2+2x-3)=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\quad\in\left(-2;2\right)\\ x=-3\ \notin\left(-2;2\right)\end{array}\right.$

Ta có, $f(1)=-2e;\ f(-2)=e^{-2};\ f(2)=e^2$. Vậy, $\min\limits_{x\in\left[-2;2\right]}y=y(1)=-2e$

Câu 41. **Chọn A.**

Hàm số $y=e^x+4e^{-x}+3x$ liên tục trên đoạn $\left[1;2\right]$

Ta có: $y'=e^x-4e^{-x}+3$, $y'=0\Leftrightarrow e^x-4e^{-x}+3=0\Leftrightarrow e^x-\dfrac{4}{e^x}+3=0$

$$\Leftrightarrow e^{2x}+3e^{x}-4=0\Leftrightarrow e^{x}=1\Leftrightarrow x=0\notin[1;2]$$

Ta có, $y(1)=e+\dfrac{4}{e}+3;\ y(2)=e^2+\dfrac{4}{e^2}+6$. Vậy: $\max\limits_{x\in[1;2]} y=y(2)=e^2+\dfrac{4}{e^2}+6$

Câu 42. Chọn D.

Hàm số $f(x)=x.e^{-2x}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$

Ta có: $f'(x)=e^{-2x}(1-2x)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\in(0;1)$

$f(0)=0$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2e}$; $f(1)=\dfrac{1}{e^2}$. Vậy $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2e}$

Câu 43. Chọn A.

Hàm số $f(x)=x^2-\ln(1-2x)$ liên tục trên đoạn $[-2;0]$

Ta có $f'(x)=2x+\dfrac{2}{1-2x}=\dfrac{-2(2x+1)(x-1)}{1-2x}$

Suy ra trên khoảng $(-2;0)$: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

Có $f(0)=0;\ f(-2)=4-\ln 5;\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}-\ln 2$

$M=\max\limits_{x\in[-2;0]} f(x)=f(-2)=4-\ln 5;\ m=\min\limits_{x\in[-2;0]} f(x)=f(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}-\ln 2$

Vậy: $M+m=\dfrac{17}{4}-\ln 10$

Câu 44. Chọn B.

- $f'(x)=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\left(x\in\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right]\right)$
- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=2$. Vậy $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)} f(x)=2$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)} f(x)=1$.

Câu 45. Chọn A.

- $f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=4\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{3x}{2}$
- $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2}=0\\ \cos\dfrac{3x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right.\left(x\in\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]\right)$
- $f(0)=0$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\pi)=0$, $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-2$

Vậy $\max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]} f(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $\min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]} f(x)=-2$.

Câu 46. Chọn D.

- $y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pi \left(x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} \right) \right)$
- Bảng biến thiên:

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y'	||	$+$	0	$-$	||
y	|| $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ||

- Vậy $\max\limits_{\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)} y = -1$ và $\min\limits_{\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)} y$ không tồn tại.

Câu 47. Chọn B.

- $y' = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}\left(x \in (0;\pi)\right)$
- Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'	||	$-$	0	$+$	||
y	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ||

- Vậy $\min\limits_{(0;\pi)} y = 1$ và $\max\limits_{(0;\pi)} y$ không tồn tại.

Câu 48. Chọn C.

TXĐ: $D = [-1;1]$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$

$y' = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; với $-1 < x < 1$. $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$y(\pm 1) = 0; y\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}; y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

Do đó $M = \max\limits_{[-1;1]} y = y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$; $m = \min\limits_{[-1;1]} y = y\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow M + m = 0$

Câu 49. Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $y' = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $\min\limits_{\mathbb{R}} y = y(1) = 5$

Câu 50. **Chọn A.**

TXĐ $D = \mathbb{R}$. Nhận xét: Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $y' = 1 + \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 2x^2+1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{x\in R} y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ khi $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 51. **Chọn D.**

Điều kiện $-4 \le x \le 4$. Nhận xét: Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-4;4\right]$

Đặt $t = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}$ $\Rightarrow t^2 = x+4+4-x+2\sqrt{(x+4)(4-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+4)(4-x)} = \dfrac{t^2-8}{2}$

Ta có $y = t - 4\left(\dfrac{t^2-8}{2}\right) + 5 = -2t^2 + t + 21 = f\left(t\right)$

Tìm điều kiện của *t*: Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}$ với $x \in [-4;4]$

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}} - \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $g(-4) = 2\sqrt{2}$; $g(0) = 4$; $g(4) = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[-4;4]} g(x) = 2\sqrt{2}$; $\max\limits_{x\in[-4;4]} g(x) = 4 \Rightarrow t \in [2\sqrt{2};4]$

$f'(t) = -4t + 1 < 0 \, \forall t \in [2\sqrt{2};4] \Rightarrow f\left(t\right)$ là hàm nghịch biến trên $[2\sqrt{2};4]$

$\underset{\left[-4;4\right]}{Max}\, y = f(2\sqrt{2}) = 5 + 2\sqrt{2}$

Câu 52. **Chọn C.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Đặt $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$. Khi đó $y = f(t) = 2t^2 + 2t - 1$

Ta tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$. Đó cũng là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'\left(t\right) = 4t + 2$; $f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2} \in \left(-1;1\right)$; $f(-1) = -1$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{2}$; $f(1) = 3$

$\max\limits_{t\in\left[-1;1\right]} f(t) = f(1) = 3$. Do đó $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 3$

Câu 53. **Chọn D.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Biến đổi $y = 2\sin^4 x - \sin^2 x + 4$. Đặt $t = \sin^2 x$, $0 \le t \le 1$

Xét hàm số $f(t)=2t^4-t^2+4$ liên tục trên đoạn $[0;1]$. $f'(t)=8t^3-2t=2t(4t^2-1)$

Trên khoảng $(0;1)$ phương trình $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

Ta có: $f(0)=4;\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{31}{8};\quad f(1)=5$

Vậy $\min\limits_{t\in[0;1]} f(t)=\frac{31}{8}$ tại $t=\frac{1}{2} \Rightarrow \min\limits_{R} y=\frac{31}{8}$ *khi* $\sin^2 x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

Câu 54. Chọn C.

Do $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ nên ta có

$S=y=2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^4+\cos^4 2x=\frac{1}{8}(1-\cos 2x)^4+\cos^4 2x$

Đặt $t=\cos 2x$, $-1\le t\le 1$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $S=g(t)=\frac{1}{8}(1-t)^4+t^4$

, với $-1\le t\le 1$

Ta có $g'(t)=-\frac{1}{2}(1-t)^3+4t^3$; $g'(t)=0 \Leftrightarrow (1-t)^3=8t^3 \Leftrightarrow 1-t=2t \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$

$g(1)=1;\ g(-1)=3;\ g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$

Vậy $m=\min S=\frac{1}{27}$; $M=\max S=3$ nên $M+m=3+\frac{1}{27}=\frac{82}{27}$

Câu 55. Chọn A.

Nhận xét: Ta quy về hết $\sin^2 x$

Đặt $t=\sin^2 x\ \ (0\le t\le 1)$. Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(t)=t^{10}+(1-t)^{10}$ với $t\in[0;1]$

$f'(t)=10t^9-10(1-t)^9$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t^9=(1-t)^9 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

$f(0)=1;\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{512};\ f(1)=1$.

Vậy m= $\min y=\frac{1}{512}$; $M=\max y=1$ nên $M.m=\frac{1}{512}$

Câu 56. Chọn D.

TXĐ: $D=[-1;+\infty)$. Ta có: $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}>0,\ \forall x\in(-1;+\infty)$

Bảng biến thiên:

x	-1		$+\infty$
y'	||	$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x=-1$

Câu 57. **Chọn B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$; $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 58. **Chọn C.**

TXĐ: $D=\left[-1;1\right]$. Ta có: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$

$y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x}=\sqrt{1+x} \Leftrightarrow x=0$

Khi đó: $y\left(-1\right)=\sqrt{2}$; $y\left(0\right)=2$; $y\left(1\right)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2, giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$

Câu 59. **Chọn B.**

TXĐ: $D=\left[2;+\infty\right)$. Ta có: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}=\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}}<0;\forall x\in\left[2;+\infty\right)$

BBT:

x	2		$+\infty$
y'	‖	$-$	
y	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0

Từ BBT ta thấy hàm số đã cho có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Câu 60. **Chọn C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{1;2\right\}$.

Ta có: $y'=-\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}-\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2}<0;\forall x\in D$

BBT:

x	3		4
y'		$-$	
y	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{5}{6}$

Từ BBT ta thấy hàm số có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là $y_1 = \frac{3}{2}; y_2 = \frac{5}{6} \Rightarrow$ $y_1.y_2 = \frac{5}{4}$.

Câu 61. Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2;-1;0\}$

Ta có: $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} < 0; \forall x \in D$

BBT:

x	-5		-3
y'		$-$	
y	$-\frac{47}{60}$	$\searrow$	$\frac{-11}{6}$

Từ BBT ta thấy, hàm số có giá trị lớn nhất bằng $-\frac{47}{60}$.

Câu 62. Chọn B.

TXĐ: $D = [1;+\infty)$. Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$

BBT:

x	1		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	0

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1

Câu 63. Chọn B.

TXĐ: $D = [-1;1]$.

Ta có: $y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1-x^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0$

Khi đó: $y(-1) = \sqrt{2}$; $y(0) = 2$; $y(1) = \sqrt{2}$.

Câu 64. Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y=\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Mà $0\le \sin^2 2x\le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\le 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\le 1 \Rightarrow \min y=\frac{1}{2}$, $\max y=1$.

Câu 65. **Chọn B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y=\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=-\cos 2x$

Mà $-1\le \cos 2x\le 1 \Leftrightarrow -1\le -\cos 2x\le 1 \Rightarrow \max y=1$.

Câu 66. **Chọn C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\sqrt{1+2\sin x.\cos x}=\sqrt{1+\sin 2x}$; $y'=\frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$

$y'=0 \Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, vì $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$

Khi đó: $y\left(0\right)=1$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Câu 67. **Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y=\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

Mà: $0\le \sin^2 2x\le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\le 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\le 1 \Rightarrow \min y=\frac{1}{4}; \max y=1$.

Câu 68. **Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đặt $t=x^2+2x+3$ $\left(t\ge 2\right)$, Khi đó hàm số trở thành: $y=t\left(t-5\right)=t^2-5t$

Ta có: $y'=2t-5; y'=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$

Bảng biến thiên:

x	2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-6	$\searrow$	$-\frac{25}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT, ta thấy hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 69. **Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đặt: $t=\sqrt{x^2+1}\left(t\ge 1\right)\Rightarrow x^2=t^2-1$. Khi đó hàm số trở thành: $y=t-\frac{3}{t}\Rightarrow y'=1+\frac{3}{t^2}>0$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn đồng biến với mọi $t\ge 1$ $\Rightarrow \min y=y\left(1\right)=-2$.

Câu 70. Chọn D.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x-4\right)=\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-5x+6\right)$

Đặt: $t=x^2-5x+4\left(-\frac{9}{4}\le t\le 10\right)$

Khi đó hàm số trở thành: $y=f(t)=t\left(t+2\right)=t^2+2t\Rightarrow f'(t)=2t+2=0\Leftrightarrow t=-1$

BBT:

t	$-\frac{9}{4}$		-1		10
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{9}{16}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	120

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 120 và giá trị nhỏ nhất bằng -1

Câu 71. Chọn B.

TXĐ: $D=\left[-3;1\right]$. Đặt: $t=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ $\left(2\le t\le 2\sqrt{2}\right)\Rightarrow\sqrt{1-x}\sqrt{3+x}=\frac{t^2-4}{2}$

Khi đó phương trình trở thành: $y=\frac{t^2}{2}+t-2\Rightarrow y'=t+1>0;\forall t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến với mọi $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow\min y=y\left(2\right)=2;\ \max y=y\left(2\sqrt{2}\right)=2+2\sqrt{2}$.

Câu 72. Chọn A.

TXĐ: $D=\left[-2;2\right]$.

Đặt: $t=\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}$ $\left(2\le t\le 2\sqrt{2}\right)\Rightarrow 2\sqrt{4-x^2}=2\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}=t^2-4$

Khi đó hàm số trở thành: $y=f(t)=t^2+t-4\Rightarrow f'(t)=2t+1>0;\forall t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến với mọi $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow\min y=f\left(2\right)=2;\ \max y=f\left(2\sqrt{2}\right)=4+2\sqrt{2}$.

Câu 73. Chọn A.

TXĐ: $D=\left[-1;+\infty\right)$. Đặt $t=\sqrt[6]{x+1}$ $\left(1\le t\le 2\right)$

Khi đó hàm số trở thành: $y=t^3+t^2\Rightarrow y'=3t^2+2t>0;\forall t\in\left[1;2\right]$

$\Rightarrow\min y=y\left(1\right)=2;\ \max y=y\left(2\right)=12$.

Câu 74. Chọn C.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đặt $t=\sin x;\left(-1\le t\le 1\right)$. Khi đó hàm số trở thành:

$y=\dfrac{t+1}{t^2+3}\Rightarrow y'=\dfrac{-t^2-2t+3}{\left(t^2+3\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3\left(l\right)\end{array}\right.$. Do đó $y\left(-1\right)=0;\ y\left(1\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{-\pi}{2}$, hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$

Câu 75. **Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}\left(2\le t\le\dfrac{10}{3}\right)\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$

Khi đó hàm số trở thành: $y=t^2+t-2\Rightarrow y'=2t+1>0;\forall t\in\left[2;\dfrac{10}{3}\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến $\forall t\in\left[2;\dfrac{10}{3}\right]$. (chỗ này còn thiếu)

Câu 76. **Chọn B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Đặt $t=x^4-1\left(0\le t\le 15\right)$.

Khi đó hàm số trở thành: $y=\left(t+1\right)^2+t^2=2t^2+2t+1\Rightarrow y'=4t+2>0;\forall t\in\left[0;15\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0;15\right]$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t=15\Leftrightarrow x=2$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t=0\Leftrightarrow x=1$

Câu 77. **Chọn A.**

TXĐ: $D=\left(-\infty;-2\right]\cup\left[-1;+\infty\right)$. Đặt $t=\sqrt{x^2+3x+2}\ \left(t\ge 0\right)$.

Khi đó hàm số trở thành: $y=t^2+t-2\Rightarrow y'=2t+1>0;\forall t\ge 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến với mọi $t\ge 0\Rightarrow\min y=y\left(0\right)=-2$.

Câu 78. **Chọn A.**

TXĐ: $D=\left[0;+\infty\right)$. Đặt $t=\sqrt{x};\left(x\in\left[0;4\right]\Rightarrow 0\le t\le 2\right)$.

Khi đó hàm số trở thành: $y=t+\dfrac{t}{t+1}\Rightarrow y'=1+\dfrac{1}{\left(t+1\right)^2}>0$ $\Rightarrow$ hàm số đồng biến $\forall t\in\left[0;2\right]\Rightarrow\min y=y\left(0\right)=0;\ \max y=y\left(2\right)=\dfrac{8}{3}$.

Câu 79. **Chọn C.**

Cách 1: Gọi cạnh của hình chữ nhật: $a,\ b;\ 0<a,\ b<8$.

Ta có: $2(a+b)=16\Leftrightarrow a+b=8\Leftrightarrow b=8-a$

Diện tích: $S(a)=a(8-a)=-a^2+8a$; $S'(a)=-2a+8$; $S'(a)=0\Leftrightarrow a=4$

Bảng biến thiên:

a	0		4		8
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

Cách 2

Áp dụng Côsi: $a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab \leq 16$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=4$

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng 16 khi cạnh bằng 4

Câu 80. Chọn A.

Cách 1

Gọi cạnh của hình chữ nhật: a, b; $0 < a, b \leq 48$

Ta có: $ab = 48 \Leftrightarrow b = \dfrac{48}{a}$. Chu vi: $P(a) = 2\left(a + \dfrac{48}{a}\right)$

$P'(a) = 2\left(1 - \dfrac{48}{a^2}\right)$; $P'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4\sqrt{3}$

Bảng biến thiên:

a	0		$4\sqrt{3}$		48
$P'(a)$		$-$	0	$+$	
$P(a)$		$\searrow$	$16\sqrt{3}$	$\nearrow$	

Cách 2

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$

  $\Leftrightarrow$ chu vi nhỏ nhất: $2(a+b) = 16\sqrt{3}$
- Hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng $16\sqrt{3}$ khi cạnh bằng $4\sqrt{3}$.

Câu 81. Chọn C.

Gọi một trong hai số phải tìm là x, số còn lại: $x + 13$.

Tích hai số $P(x) = x(x+13) = x^2 + 13x$. $P'(x) = 2x + 13$, $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-13}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\dfrac{-13}{2}$		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{-169}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Tích của chúng bé nhất bằng $\dfrac{-169}{4}$ khi hai số là $\dfrac{13}{2}$ và $\dfrac{-13}{2}$.

Câu 82. **Chọn A.**

Vận tốc của chuyển động là $v = s'$ tức là $v(t) = 12t - 3t^2, t > 0$

$v'(t) = 12 - 6t$, $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$		$\nearrow$	12	$\searrow$	

Hàm số $v(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow$ Max $v(t) = 12$ khi $t = 2$. Vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng 12 khi $t = 2$.

Câu 83. **Chọn A.**

Cạnh góc vuông $x, 0 < x < \frac{a}{2}$; cạnh huyền: $a - x$

Cạnh góc vuông còn lại là: $\sqrt{(a-x)^2 - x^2}$

Diện tích tam giác $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}$. $S'(x) = \frac{a(a-3x)}{2\sqrt{a^2-2ax}}$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a}{3}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$	$\searrow$	

Tam giác có diện tích lớn nhất bằng $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi cạnh góc vuông $\frac{a}{3}$, cạnh huyền $\frac{2a}{3}$.

Câu 84. **Chọn A.**

Sau một vụ, trung bình số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ cân nặng: $f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2$ (gam). $f'(n) = 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$

Bảng biến thiên:

n	0		12		$+\infty$
$f'(n)$		$+$	0	$-$	
$f(n)$		$\nearrow$	$f(12)$	$\searrow$	

Trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, cần thả 12 con cá thì sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất.

Câu 85. **Chọn B.**

Ta có: $G(x) = 0.75x^2 - 0.025x^3, x > 0$; $G'(x) = 1.5x - 0.075x^2$; $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 20$

Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		$\nearrow$	100	$\searrow$	

Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg, độ giảm là 100.

Câu 86. **Chọn D.**

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v-6$ (km/h)

Thời gian để cá vượt khoảng cách 300 km là $t=\dfrac{300}{v-6}\,(v>6)$

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 300km là: $E(v)=cv^3\dfrac{300}{v-6}=300c\dfrac{v^3}{v-6}$

$E'(v)=600cv^2\dfrac{v-9}{(v-6)^2}$; $E'(v)=0\Leftrightarrow v=9$ do $(v>6)$

Bảng biến thiên:

v	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$		$\searrow$	$E(9)$	$\nearrow$	

Cá phải bơi với vận tốc 9 (km/h) thì ít tiêu hao năng lượng nhất.

Câu 87. **Chọn D.**

$f'(t)=90t-3t^2$; $f''(t)=90-6t$, $f''(t)=0\Leftrightarrow t=15$

Bảng biến thiên:

t	0		15		25
$f''(t)$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$		$\nearrow$	675	$\searrow$	

Tốc độ truyền bệnh lớn nhất là vào ngày thứ 15.

Câu 88. **Chọn D.**

Gọi H là trung điểm của $BC\Rightarrow BH=CH=\dfrac{a}{2}$.

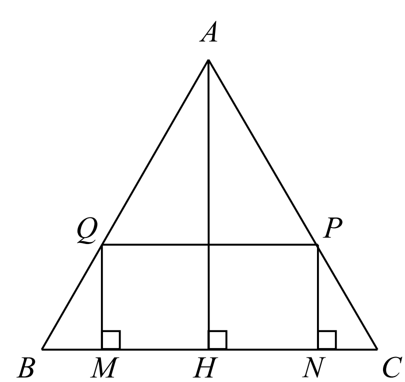
Đặt $BM=x\left(0<x<\dfrac{a}{2}\right)$

Ta có: $MN=2MH=a-2x, QM=BM\tan 60^0=x\sqrt{3}$

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là:

$S(x)=(a-2x)x\sqrt{3}=a\sqrt{3}x-2\sqrt{3}x^2$

$S'(x)=\sqrt{3}(a-4x), S'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{4}$



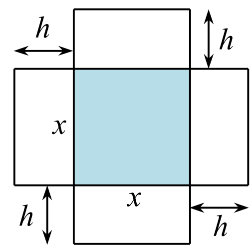
Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$	$\searrow$	

Vị trí điểm M: $BM = \dfrac{a}{4}$.

Câu 89. **Chọn C.**

Thể tích của hộp là: $V = x^2h = 500(cm^3)$. Do đó $h = \dfrac{500}{x^2}, x > 0$.



Diện tích của mảnh các tông dùng làm hộp là:

$$S(x) = x^2 + 4hx = x^2 + \frac{2000}{x}, x > 0$$

$$S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}, S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Bảng biến thiên:

x	0		10		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$	300	$\nearrow$	

Vậy muốn tốn ít nguyên liệu nhất, ta lấy độ dài cạnh đáy hình hộp là $x = 10$ (cm).

Câu 90. **Chọn B.**

Gọi chiều cao, bán kính đáy và thể tích của hình trụ nội tiếp hình cầu lần lượt là h, r và V. Khi đó, $V = \pi r^2 h$. Vì $r^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4}$ nên $V = \pi\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right)h = \pi\left(R^2h - \dfrac{h^3}{4}\right)$.

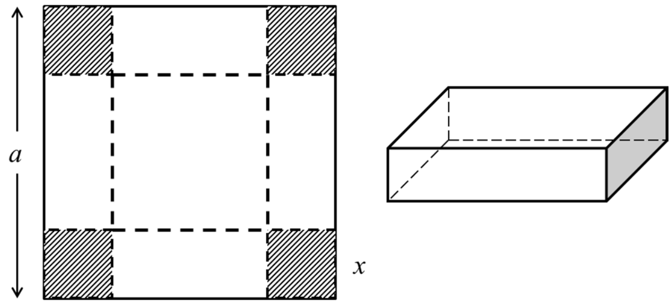
$$V(h) = \pi\left(R^2h - \frac{h^3}{4}\right), h \in (0;2R);\ V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right);\ V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Bảng biến thiên:

h	0		$\frac{2R}{\sqrt{3}}$		$2R$
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

Vậy hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R có thể tích lớn nhất khi chiều cao của nó bằng $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. Khi đó, thể tích hình trụ là $\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Câu 91. **Chọn B.**



Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

$V'(x) = (a-2x)^2 + x.2(a-2x).(-2) = (a-2x)(a-6x)$; $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$	0	↗	$\frac{2a^3}{27}$	↘	0

Vậy trong khoảng $\left(0;\frac{a}{2}\right)$ có 1 điểm cực đại duy nhất là $x = \frac{a}{6}$ tại đó $V(x) = \frac{2a^3}{27}$.

Câu 92. **Chọn C.**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đặt $t = \sin x, -1 \le t \le 1$. Khi đó $y = f(t) = 2t^2 + 2t - 1$

$f'(t) = 4t + 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1}{2} \in [-1;1] \Rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-3}{2}; f(-1) = -1; f(1) = 3$

Vậy $\min\limits_{R} y = \frac{-3}{2}, \max\limits_{R} y = 3$.

Câu 93. **Chọn A.**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y = 2(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x = -4\sin^2 x + 2\sin x + 2$

Đặt $t = \sin x, -1 \le t \le 1$, khi đó $y = f(t) = -4t^2 + 2t + 2$

$f'(t) = -8t + 2, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \in [-1;1] \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}; f(-1) = -4; f(1) = 0$

Vậy $\min\limits_{R} y = -4, \max\limits_{R} y = \frac{9}{4}$

Câu 94. **Chọn B.**

Đặt $t = \sin^2 x, 0 \le t \le 1 \Rightarrow y = f(t) = t^2 - 4t + 5$. $f'(t) = 2t - 4; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \notin [0;1]$

$f(0) = 5; f(1) = 2$. Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 2, \max\limits_{\mathbb{R}} y = 5$

Câu 95. Chọn C.

$y=\sin^4 x-\sin^2 x+3$. Đặt $t=\sin^2 x, 0\le t\le 1 \Rightarrow y=f(t)=t^2-t+3$

$f'(t)=2t-1; f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\in[0;1] \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{4}; f(0)=3; f(1)=3$

Vậy $\min\limits_{R} y=\dfrac{11}{4}, \max\limits_{R} y=3$

Câu 96. Chọn D.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $t=|\cos x|, 0\le t\le 1 \Rightarrow y=f(t)=\dfrac{2t^2+t+1}{t+1}, 0\le t\le 1$

$f'(t)=\dfrac{2t^2+4t}{(t+1)^2}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2\notin[0;1] \end{array}\right. \Rightarrow f(0)=1, f(1)=2$

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y=1, \max\limits_{\mathbb{R}} y=2$

Câu 97. Chọn B.

Đặt $t=\sin x, -1\le t\le 1 \Rightarrow y=f(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+1}$, $f'(t)=\dfrac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2}$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in[-1;1] \\ t=-2\notin[-1;1] \end{array}\right. \Rightarrow f(0)=1, f(-1)=0, f(1)=\dfrac{2}{3}$. Vậy $M=1, m=0$

Câu 98. Chọn D.

Ta có $y'=x^2-x-6 \Rightarrow \begin{cases} y'=0 \\ x\in(0;4) \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y(0)=3, y(4)=-\dfrac{23}{3}, y(3)=-\dfrac{21}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-6x+3$ trên đoạn $[0;4]$ là 3.

Câu 99. Chọn C.

Hàm số $y=(x+3)\sqrt{-x^2-2x+3}$ có tập xác định $D=[-3;1]$

$y'=\dfrac{-2x^2-6x}{\sqrt{-x^2-2x+3}} \Rightarrow \begin{cases} y'=0 \\ x\in(-3;1) \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y(-3)=0, y(1)=0, y(0)=3\sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x+3)\sqrt{-x^2-2x+3}$ là 0

Câu 100. Chọn B.

Hàm số $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ có tập xác định $D=[2;4]$

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}} \Rightarrow \begin{cases} y'=0 \\ x\in(2;4) \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y(2)=\sqrt{2}, y(3)=2, y(4)=\sqrt{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ là 2

Câu 101. Chọn C.

$y=2\sin^2 x+5\cos^2 x-1=\dfrac{3\cos 2x+5}{2} \Rightarrow 1\le y\le 4$

Vậy hàm số $y=2\sin^2 x+5\cos^2 x-1$ có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Câu 102. Chọn C.

Hàm số $y=x+\sqrt{18-x^2}$ có tập xác định $D=\left[-3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right]$

$$y'=\frac{\sqrt{18-x^2}-x}{\sqrt{18-x^2}}\Rightarrow\begin{cases}y'=0\\x\in\left(-3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow x=3$$

$$\Rightarrow y\left(-3\sqrt{2}\right)=-3\sqrt{2},y\left(3\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2},y(3)=6$$

Vậy hàm số $y=x+\sqrt{18-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng 6.

Câu 103. Chọn B.

Đặt $t=\cos x\left(-1\le t\le 1\right)$. Xét hàm $y=2t^3-\frac{7}{2}t^2-3t+5$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$

$$y'=6t^2-7t-3\Rightarrow\begin{cases}y'=0\\t\in\left(-1;1\right)\end{cases}\Leftrightarrow t=-\frac{1}{3};\ y\left(-1\right)=\frac{5}{2},y\left(1\right)=\frac{1}{2},y\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{299}{54}.$$

Vậy hàm số $y=2\cos^3x-\frac{7}{2}\cos^2x-3\cos x+5$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 104. Chọn D.

$$y=-2\sin^3x+3\cos 2x-6\sin x+4=-2\sin^3x-6\sin^2x-6\sin x+7$$

Đặt $t=\sin x\left(-1\le t\le 1\right)$. Xét hàm $y=-2t^3-6t^2-6t+7$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$

$y'=-6t^2-12t-6\Rightarrow y'=0$ vô nghiệm. Ta có: $y\left(-1\right)=9,y\left(1\right)=-7$

Vậy hàm số $y=-2\sin^3x+3\cos 2x-6\sin x+4$ có giá trị lớn nhất bằng 9.

Câu 105. Chọn B.

Ta có $y=3-x\ge 1\Rightarrow x\le 2\Rightarrow x\in\left[0;2\right]$

Khi đó $P=x^3+2\left(3-x\right)^2+3x^2+4x\left(3-x\right)-5x=x^3+x^2-5x+18$

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3+x^2-5x+18$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ ta có:

$$f'\left(x\right)=3x^2+2x-5\Rightarrow\begin{cases}f'\left(x\right)=0\\x\in\left(0;2\right)\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

$$f\left(0\right)=18,f\left(1\right)=15,f\left(2\right)=20$$

Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+2y^2+3x^2+4xy-5x$ lần lượt bằng 20 và 15.

Câu 106. Chọn C.

Ta có: $y=\dfrac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}-x}$. Hàm số y đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ khi hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{9x^2+1}-x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}-1\Rightarrow\begin{cases}f'\left(x\right)=0\\x\in\left(0;+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$

$$\min_{(0;+\infty)} f(x) = f\left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \max_{(0;+\infty)} y = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Câu 107. Chọn C.

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có:

$$\sqrt{45+20x^2} = \sqrt{5(9+4x^2)} = \sqrt{(2^2+1^1)(3^2+(2x)^2)} \geq |2.3+1.2x| = |6+2x|$$

Suy ra $y \geq |6+2x|+|2x-3|$. Áp dụng bất đẳng thức $|a|+|b| \geq |a+b|$ ta được:

$|6+2x|+|2x-3| = |6+2x|+|3-2x| \geq |6+2x+3-2x| = 9 \Rightarrow y \geq 9$

Vậy hàm số $y = \sqrt{45+20x^2}+|2x-3|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 9.

Câu 108. Chọn B.

TXĐ: $D = [-2;2]$. Hàm số $y = f(x) = x+\sqrt{4-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$.

$y' = 1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

$y(-2) = -2$; $y(2) = 2$; $y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$. Vậy $\min\limits_{[-2;2]} y = y(-2) = -2$

Câu 109. Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có: $y' = \frac{-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Do $y(-1) = 0, y(1) = \sqrt{2}, y(2) = \frac{3}{\sqrt{5}}$ nên

$\max\limits_{[-1;2]} y = y(1) = \sqrt{2}$, $\min\limits_{[-1;2]} y = y(-1) = 0$

Câu 110. Chọn C.

Hàm số xác định với $\forall x \in [1;e^3]$

Hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ liên tục trên đoạn $[1;e^3]$. Ta có $y' = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \notin (1;e^3) \\ x = e^2 \in (1;e^3) \end{array}\right.$. Khi đó $y(1) = 0$; $y(e^2) = \frac{4}{e^2}$; $y(e^3) = \frac{9}{e^3}$

So sánh các giá trị trên, ta có $\max\limits_{[1;e^3]} y = y(e^2) = \frac{4}{e^2}$

Câu 111. Chọn A.

Hàm số xác định, liên tục trên đoạn $[0;2]$

Ta có $y' = \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2+4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad \notin (0;2) \\ x = -2 \notin (0;2) \end{array}\right.$

$\Rightarrow y(0) = 3$; $y(2) = \frac{17}{3}$. Vậy $\max\limits_{x\in[0;2]} y = y(2) = \frac{17}{3}$; $\min\limits_{x\in[0;2]} y = y(0) = 3$

Câu 112. Chọn A.

Do $x+y=1$ nên $S=16x^2y^2+12(x+y)(x^2-xy+y^2)+34xy$

$=16x^2y^2+12[(x+y)^2-3xy]+34xy,\ do\ x+y=1=16x^2y^2-2xy+12$

Đặt $t=xy$. Do $x\ge 0; y\ge 0$ nên $0\le xy\le \dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow t\in[0;\dfrac{1}{4}]$

Xét hàm số $f(t)=16t^2-2t+12$ trên $[0;\dfrac{1}{4}]$. Ta có $f'(t)=32t-2$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{16}$.

Bảng biến thiên :

x	0		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	12	$\searrow$	$\frac{191}{16}$	$\nearrow$	$\frac{25}{2}$

Từ bảng biến thiên ta có:

$\min\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=f\left(\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{191}{16}$; $\max\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{25}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\dfrac{25}{2}$ đạt được khi $\begin{cases}x+y=1\\ xy=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

giá trị nhỏ nhất của S là $\dfrac{191}{16}$ đạt được khi $\begin{cases}x+y=1\\ xy=\dfrac{1}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x;y)=\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4};\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\right)\\ (x;y)=\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{4};\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)\end{array}\right.$

Câu 113. Chọn A.

Ta có $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32\Leftrightarrow(x+y)^2-8(x+y)\le 0\Leftrightarrow 0\le x+y\le 8$

$A=x^3+y^3+3(xy-1)(x+y-2)=(x+y)^3-3(x+y)-6xy+6$

$\Rightarrow K\ \ \ge(x+y)^3-\dfrac{3}{2}(x+y)^2-3(x+y)+6$

Đặt $t=x+y$. Do $0\le x+y\le 8$ nên $t\in[0;8]$

Xét hàm số $f(t)=t^3-\dfrac{3}{2}t^2-3t+6$ trên $[0;8]$.

Ta có $f'(t)=3t^2-3t-3,\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

$f(0)=6;\ f(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})=\dfrac{17-5\sqrt{5}}{4};\ f(8)=398$. Suy ra A $\ge\dfrac{17-5\sqrt{5}}{4}$

Khi $x=y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\dfrac{17-5\sqrt{5}}{4}$

Câu 114. Chọn D.

$$A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^3y^3}=\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2.$$

Đặt $x=ty$. Từ giả thiết ta có: $(x+y)xy=x^2+y^2-xy\Rightarrow(t+1)ty^3=(t^2-t+1)y^2$

Do đó $y=\frac{t^2-t+1}{t^2+t};x=ty=\frac{t^2-t+1}{t+1}$. Từ đó $A=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2=\left(\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\right)^2$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\Rightarrow f'(t)=\frac{-3t^2+3}{\left(t^2-t+1\right)^2}$.

Lập bảng biến thiên ta tìm giá trị lớn nhất của A là: 16 đạt được khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Câu 115. Chọn C.

Với a, b là các số thực dương, ta có:

$$2(a^2+b^2)+ab=(a+b)(ab+2)\Leftrightarrow 2(a^2+b^2)+ab=a^2b+ab^2+2(a+b)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si ta được:

$$(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 2\sqrt{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}$$

Suy ra: $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1\ge 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}\Rightarrow\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\ge\frac{5}{2}$.

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a},\ t\ge\frac{5}{2}$. Ta được: $P=4(t^3-3t)-9(t^2-2)=4t^3-9t^2-12t+18$.

Xét hàm số: $f(t)=4t^3-9t^2-12t+18$ với $t\ge\frac{5}{2}$

$f'(t)=6(2t^2-3t-2)>0,\forall t\ge\frac{5}{2}$. Suy ra $\min\limits_{\left[\frac{5}{2};+\infty\right)}f(t)=f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{23}{4}$.

Vậy $\min P=-\frac{23}{4}$ đạt được khi và chỉ khi $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ và $a+b=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$$\Leftrightarrow(a;b)=(2;1)\text{ hoặc }(a;b)=(1;2)$$

Câu 116. Chọn D.

Do $1\le x\le 2;\ 1\le y\le 2$ nên $(x-1)(x-2)\le 0$, nghĩa là $x^2+2\le 3x$. Tương tự $y^2+2\le 3y$

Suy ra $P\ge\frac{x+2y}{3x+3y+3}+\frac{y+2x}{3y+3x+3}+\frac{1}{4(x+y-1)}=\frac{x+y}{x+y+1}+\frac{1}{4(x+y-1)}$

Đặt $t=x+y$ suy ra $2\le t\le 4$. Xét $f(t)=\frac{t}{t+1}+\frac{1}{4(t-1)}$, với $2\le t\le 4$

$f'(t)=\frac{1}{\left(t+1\right)^2}-\frac{1}{4(t-1)^2}$. Suy ra $f'(t)=0\Leftrightarrow t=3$

Mà $f(2)=\dfrac{11}{12}$; $f(3)=\dfrac{7}{8}$; $f(3)=\dfrac{53}{60}$ nên $f(t)\ge f(3)=\dfrac{7}{8}$. Do đó $P\ge\dfrac{7}{8}$

Khi $x=1,y=2$ thì $P=\dfrac{7}{8}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{7}{8}$.

Chủ đề 4 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ

☆☆☆

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty),(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0, \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$$

Nhận xét: Như vậy để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chỉ cần tính giới hạn của hàm số đó tại vô cực.

II. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$

Lưu ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0;\ ad - bc \neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là $y = \dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.

III. QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L<0$		$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$)

Chú ý: Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to {x_0}^+, x \to {x_0}^-, x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

CÁC VÍ DỤ TÍNH GIỚI HẠN

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right) = -\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right) = 1 > 0$.

Ví dụ 2. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x^2+1}{x^2-x+1}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x^2+1}{x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x.\dfrac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 2 > 0$.

Ví dụ 3. Tìm $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1) = 0, x-1>0$ với mọi $x>1$ và $\lim\limits_{x\to1^+}(2x-3) = -1 < 0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1} = -\infty$.

Ví dụ 4. Tìm $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1) = 0, x-1<0$ với mọi $x<1$ và $\lim\limits_{x\to1^+}(2x-3) = -1 < 0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1} = +\infty$.

B. THỦ THUẬT CASIO GIẢI TIỆM CẬN

I. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1.Tiêm cận đứng: Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nhận đường thẳng $x=x_0$ là tiệm cận đứng nếu

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=\infty$ (chỉ cần một trong hai thỏa mãn là đủ)

2. Tiệm cận ngang: Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nhận đường thẳng $y=y_0$ là tiệm cận ngang nếu

$\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right)=y_0$ hoặc $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=y_0$

3. Tiệm cận xiên: Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nhận đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên nếu

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0$

4. Lệnh Casio: Ứng dụng kỹ thuật dùng CALC tính giới hạn

Giả sử cần tính $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ta dùng chức năng CALC để tính giá trị của $f(x)$ tại các giá trị của x rất gần a.

a. Giới hạn của hàm số tại một điểm

☞ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a+10^{-9}$.

☞ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a-10^{-9}$.

☞ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a+10^{-9}$ hoặc $x=a-10^{-9}$.

b. Giới hạn của hàm số tại vô cực

☞ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=10^9$.

☞ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=-10^9$.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: **[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]**

Có bao nhiêu đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

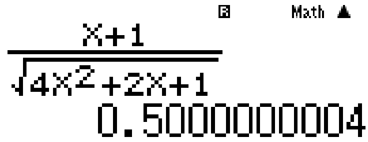
Cách 1 : CASIO

Giải phương trình : Mẫu số $=0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+2x+1}=0 \Leftrightarrow 4x^2+2x+1=0$ vô nghiệm

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

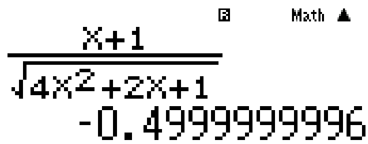
Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=\dfrac{1}{2}$. Vậy đương thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

[▭] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [√▭] [4] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [CALC] [1] [0] [$x^\blacksquare$] [9] [)] [=]



Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=-\frac{1}{2}$. Vậy đương thẳng $y=-\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

CALC − 1 0 x■ 9) =



$\Rightarrow$ Tóm lại đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang và **C** là đáp án chính xác

Cách tham khảo : Tự luận

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ đường thẳng $y=-\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

Bình luận :

Việc ứng dụng Casio để tìm tiệm cận sử dụng nhiều kỹ thuật tính giới hạn của hàm số bằng Casio. Các bạn cần học kỹ bài giới hạn trước khi học bài này.

Giới hạn của hàm số khi x tiến tới $+\infty$ và khi x tiến tới $-\infty$ là khác nhau. Ta cần hết sức chú ý tránh để sót tiệm cận ngang $y=-\frac{1}{2}$

Bài toán 2: **[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]**

Đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-3x+2}{1-x^2}\ (C)$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

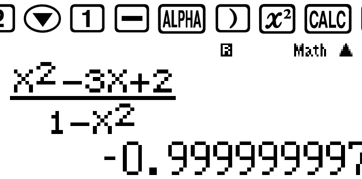
A. 4 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Lời giải:

Cách 1 : CASIO

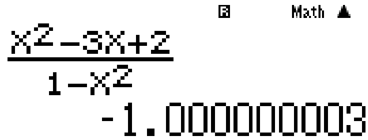
Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}=\frac{x^2-3x+2}{1-x^2}=-1$

▭ ALPHA) x² − 3 ALPHA) + 2 ▼ 1 − ALPHA) x² CALC 1 0 x■ 9) =



Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}=\frac{x^2-3x+2}{1-x^2}=-1$

CALC − 1 0 x■ 9) =



Vậy đương thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Giải phương trình : Mẫu số $=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

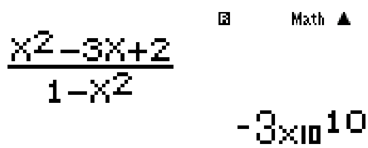
Đến đây nhiều học sinh đã ngộ nhận $x=1$ và $x=-1$ là 2 tiệm cận đứng của (C)

Tuy nhiên $x=\pm 1$ là nghiệm của phương trình Mẫu số $=0$ chỉ là điều kiện cần. Điều kiện đủ phải là $\lim\limits_{x\to\pm 1}\frac{x^2-3x+2}{1-x^2}=\infty$

$\Rightarrow$ Ta đi kiểm tra điều kiện dủ

Tính $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-3x+2}{1-x^2}=-\infty$

[MODE] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [3] [ALPHA] [)] [+] [2] [▼] [1] [−] [ALPHA] [)] [x^2] [CALC] [−] [1] [−] [0] [.] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [1] [=]



Vậy đương thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C)

Tính $\lim\limits_{x\to +1}\frac{x^2-3x+2}{1-x^2}=\frac{1}{2}$

[CALC] [1] [+] [0] [.] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [1] [=]

Vậy đường thẳng $x=1$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị (C)

$\Rightarrow$ Tóm lại đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=-1$ và 1 tiệm cận đứng $x=-1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận

Rút gọn hàm số $y=\frac{x^2-3x+2}{1-x^2}=\frac{(x-1)(x-2)}{-(x-1)(x+1)}=\frac{2-x}{x+1}$

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=-1 \Rightarrow$ đường thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang

Tính $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{3}{x+1}\right)=+\infty \Rightarrow$ đường thẳng $y=-1$ là tiệm cận đứng

<u>Bình luận</u> :

Việc tử số và mẫu số đều có nhân tử chung dẫn tới hàm số bị suy biến như ví dụ 2 là thường xuyên xảy ra trong các đề thi. Chúng ta cần cảnh giá và kiểm tra lại bằng kỹ thuật tìm giới hạn bằng Casio

Bài toán 3: **[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]**

Đồ thị hàm số nào sau đây **không** có tiệm cận ngang ?

A. $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ **B.** $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ **C.** $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ **D.** $y=\dfrac{1}{x+1}$

Lời giải:

Cách 1 : CASIO

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1}=+\infty$

[ ] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [▼] [ALPHA] [)] [−] [1] [CALC] [1] [0] [x■] [9] [)] [=]

Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-\infty$

[CALC] [−] [1] [0] [x■] [9] [)] [=]

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ không có tiệm cận ngang

$\Rightarrow$ Tóm lại **C** là đáp án chính xác

Cách tham khảo : Tự luận

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=+\infty$

Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=-\infty$ $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

Bình luận :

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang nếu $\lim\limits_{x\to\infty}y$ bằng ∞

Bài toán 4: **[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]**

Tìm tất các các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x-3}{x^2-2mx+1}$ không có tiệm cận đứng

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>1 \end{array}\right.$ **D.** $-1<m<1$

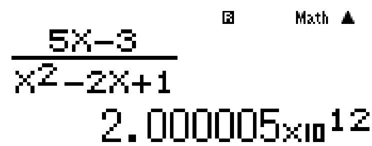
Lời giải:

Cách 1 : CASIO

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phương trình mẫu số bằng 0 không có nghiệm hoặc có nghiệm nhưng giới hạn hàm số khi x tiến tới nghiệm không ra vô cùng.:

Với $m=1$. Hàm số $\Leftrightarrow y=\dfrac{5x-3}{x^2-2x+1}$. Phương trình $x^2-2x+1=0$ có nghiệm $x=1$ Tính

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-3}{x^2-x+1}=+\infty$. $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai



Với $m=0$ hàm số $\Leftrightarrow y=\dfrac{5x-3}{x^2+1}$. Phương trình $x^2+1=0$ vô nghiệm $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng $\Rightarrow m=0$

$\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

Cách tham khảo : Tự luận

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phương trình mẫu số bằng 0 vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow m^2-1<0 \Leftrightarrow -1<m<1$

Trường hợp 2 phương trình mẫu số bằng 0 có nghiệm nhưng bị suy biến (rút gọn) với nghiệm ở tử số. $\Rightarrow$ Không xảy ra vì bậc mẫu > bậc tử

Bình luận :

Việc giải thích được trường hợp 2 của tự luận là tương đối khó khăn. Do đó bài toán này chọn cách Casio là rất dễ làm.

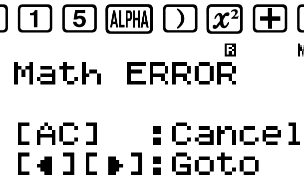
***Bài toán 5:* [Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang

A. $m<0$ **B.** Không có m thỏa **C.** $m=0$ **D.** $m>0$

Lời giải:

Thử đáp án **A** ta chọn 1 giá trị $m<0$, ta chọn $m=-2,15$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{-2.15x^2+1}}$



Vậy $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{-2.15x^2+1}}$ không tồn tại $\Rightarrow$ hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{-2.15x^2+1}}$ không thể có 2 tiệm cận ngang

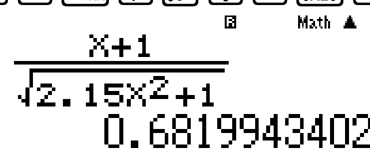
Thử đáp án **B** ta chọn gán giá trị $m=0$. Tính $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{0x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}(x+1)$

ALPHA) + 1 CALC 1 0 $x^{\blacksquare}$ 9) =

Vậy $\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ $\Rightarrow$ hàm số $y=(x+1)$ không thể có 2 tiệm cận ngang

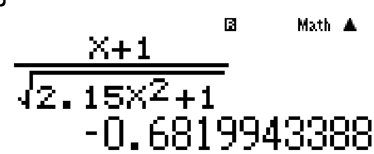
Thử đáp án **D** ta chọn gán giá trị $m=2.15$. Tính $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2.15x^2+1}}=0.6819...$

$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ ALPHA) + 1 ▼ $\sqrt{\blacksquare}$ 2 . 1 5 ALPHA) x^2 + 1 CALC 1 0 $x^{\blacksquare}$ 9) =



Tính $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2.15x^2+1}}=-0.6819...$

CALC − 1 0 $x^{\blacksquare}$ 9) =



Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang $y=\pm-0.6819...$

$\Rightarrow$ Đáp số **D** là đáp số chính xác

Bình luận :

Qua ví dụ 4 ta thấy sức mạnh của Casio so với cách làm tự luận.

Bài toán 6: **[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]**

Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$

A. $\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-2\end{array}\right.$ **B.** $x=-3$ **C.** $\left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.$ **D.** $x=3$

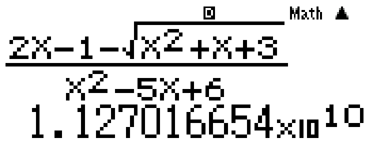
Lời giải:

Đường thẳng $x=x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì điều kiện cần : x_0 là nghiệm của phương trình mẫu số bằng 0

Nên ta chỉ quan tâm đến hai đường thẳng $x=3$ và $x=2$

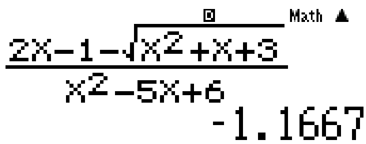
Với $x=3$ xét $\lim_{x\to3+}\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=+\infty\Rightarrow x=3$ là một tiệm cận đứng

[MODE] [2] [ALPHA] [)] [−] [1] [−] [√] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [+] [3] [▼] [ALPHA] [)] [x²] [−] [5] [ALPHA] [)] [+] [6] [CALC] [3] [+] [0] [.] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [1] [=]



Với $x=2$ xét $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=+\propto$ Kết quả không ra vô cùng $\Rightarrow x=2$ không là một tiệm cận đứng

[CALC] [2] [+] [0] [.] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [1] [=]



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài toán 7: **[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]**

Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ là :

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Phương trình mẫu số bằng 0 có 2 nghiệm $x=\pm 1$

Tính $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x^2-1}=+\propto \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng

[MODE] [ALPHA] [)] [▼] [ALPHA] [)] [x²] [−] [1] [CALC] [1] [+] [1] [0] [x■] [−] [6] [)] [=]

Tính $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x^2-1}=+\propto \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng

[CALC] [−] [1] [+] [1] [0] [x■] [−] [6] [)] [=]

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài toán 8: **[Thi thử THPT Vũ Văn Hiếu –Nam Định lần 1 năm 2017]**

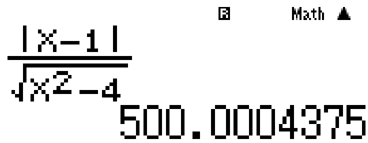
Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2-4}}$ là :

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

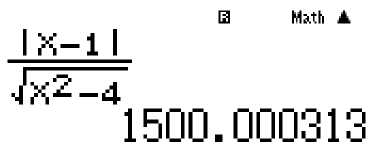
Lời giải:

Phương trình mẫu số bằng 0 có 2 nghiệm $x=\pm 2$

Tính $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2-4}}=+\infty \Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng



Tính $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2-4}}=+\infty \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

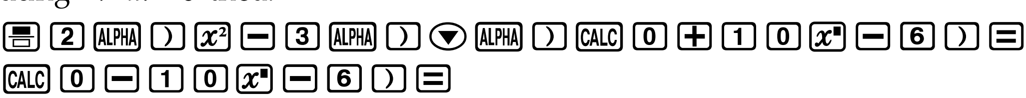
Bài toán 9: **[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]**

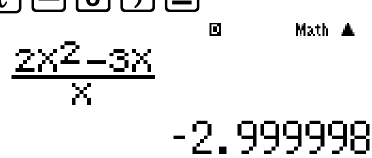
Tìm các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng ?

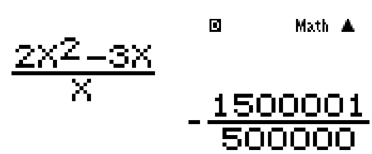
A. $m=0$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$ **C.** $m>-1$ **D.** $m>1$

Lời giải:

Với $m=0$ hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x}{x}$, Tính $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x^2-3x}{x}=-3, \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x^2-3x}{x}=-3$ $\Rightarrow$ Không có tiệm cận đứng $\Rightarrow$ $m=0$ thỏa.







Tương tự $m=1$ cũng thỏa $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Chú ý: Nếu chúng ta chú ý một chút tự luận thì hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x}{x}$ sẽ rút gọn tử mẫu và thành $y=2x-3$ là đường thẳng nên không có tiệm cận đứng.

Bài toán 10: **[Thi thử THPT Quảng Xương –Thanh Hóa lần 1 năm 2017]**

Hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

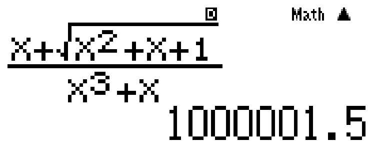
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Phương trình mẫu số bằng 0 có 1 nghiệm duy nhất $x=0$. Tính $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}=+\infty$

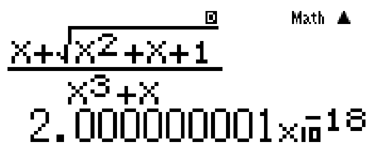
$\Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng

$\frac{\square}{\square}$ ALPHA) + √■ ALPHA) x^2 + ALPHA) + 1 ▼ ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 3 ▶ + ALPHA) CALC 0 + 1 0 $x^{\blacksquare}$ − 6) =



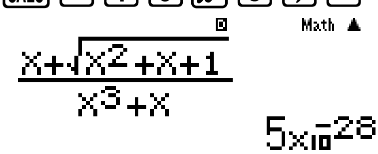
Tính $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang

CALC 1 0 $x^{\blacksquare}$ 9) =



Tính $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang

CALC − 1 0 $x^{\blacksquare}$ 9) =



Tóm lại đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang $\Rightarrow$ **B** chính xác

Chú ý: Học sinh thường mặc định có 2 tiệm cận ngang $\Rightarrow$ Chọn nhầm đáp án **C**

Bài toán 11: **[Thi HK1 chuyên Nguyễn Du – Đắc Lắc năm 2017]**

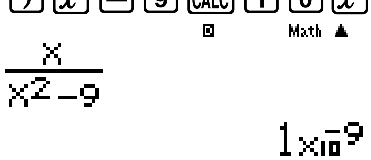
Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-m}$ có 3 đường tiệm cận

A. $m\neq 0$ **B.** $m=0$ **C.** $m>0$ **D.** $m<0$

Lời giải:

Thử với $m=9$ Tính $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{x^2-9}=0\Rightarrow$Đồ thị hàm số chỉ có 1 tiệm cận ngang

$\frac{\square}{\square}$ ALPHA) ▼ ALPHA) x^2 − 9 CALC 1 0 $x^{\blacksquare}$ 9) = CALC − 1 0 $x^{\blacksquare}$ 9) =



Phương trình mẫu số bằng 0 có hai nghiệm $x=3;x=-3$. Tính $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x}{x^2-9}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x}{x^2-9}=+\infty$

$\Rightarrow$ có 2 tiệm cận đứng

CALC 1 0 $x^{\blacksquare}$ 9) =

Vậy $m=9$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp số chứa $m=9$ là **C** chính xác.

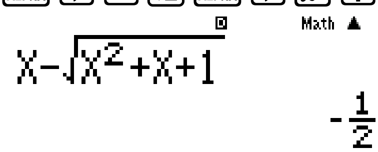
Bài toán 12: **[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x+m\sqrt{x^2+x+1}$ có đường tiệm cận ngang

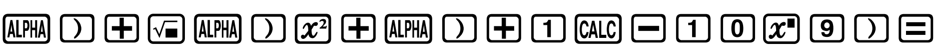
A. $m=-1$ **B.** $m<0$ **C.** $m>0$ **D.** $m=\pm1$

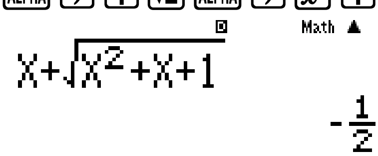
Lời giải:

Với $m=-1$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=-1$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp số đúng là **A** hoặc **D**



Với $m=1$. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=1$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**





C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=1$ và $y=-3$. **B.** $x=2$ và $y=1$.

C. $x=1$ và $y=2$. **D.** $x=-1$ và $y=2$.

Câu 2. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-3x}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=-2$ và $y=-3$. **B.** $x=-2$ và $y=1$.

C. $x=-2$ và $y=3$. **D.** $x=2$ và $y=1$.

Câu 3. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=1,\ x=2$ và $y=0$. **B.** $x=1,\ x=2$ và $y=2$.

C. $x=1$ và $y=0$. **D.** $x=1,\ x=2$ và $y=-3$.

Câu 4. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=3$ và $y=-3$. **B.** $x=3$ và $y=0$.

C. $x=3$ và $y=1$. **D.** $y=3$ và $x=-3$.

Câu 5. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x^2+x+2}{x^3-8}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $y=2$ và $x=0$. **B.** $x=2$ và $y=0$. **C.** $x=2$ và $y=3$. **D.** $y=2$ và $x=3$.

Câu 6. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-x}{3+2x}$ là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 7. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3x+2}$ là:

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 8. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ là:

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 9. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-3x-4}+x$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-3}$ khẳng định nào sau đây là **sai**:

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=3$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

D. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(3;1)$.

Câu 11. Đồ thị hàm số nào sau đây có ba đường tiệm cận ?

A. $y=\dfrac{1-2x}{1+x}$. **B.** $y=\dfrac{1}{4-x^2}$. **C.** $y=\dfrac{x+3}{5x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x^2-x+9}$.

Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{x-9x^4}{\left(3x^2-3\right)^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng, có 1 tiệm cận ngang $y=-3$.

C. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng, có 1 tiệm cận ngang $y=-1$.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, có tiệm cận ngang.

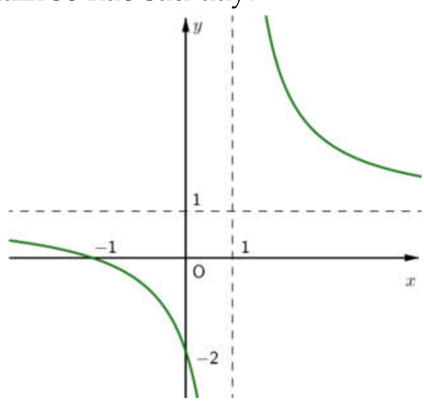
Câu 13. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận đứng:

A. $y=\dfrac{3x-1}{x^2+1}$. **B.** $y=\dfrac{-1}{x}$. **C.** $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{1}{x^2-2x+1}$.

Câu 14. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang:

A. $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}$. **C.** $y=\dfrac{3}{x^2-1}$. **D.** $y=\dfrac{3}{x-2}+1$.

Câu 15. Đồ thị như hình vẽ là của hàm số nào sau đây:



A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{3-x}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x-2}{x-1}$.

Câu 16. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{3x+2}$ có đường tiệm cận ngang là

A. $x=3$. **B.** $x=1$. **C.** $y=3$. **D.** $y=1$.

Câu 17. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 18. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 19. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+9}{x+m}$ có đồ thị (C). Kết luận nào sau đây đúng ?

A. Khi $m=3$ thì (C) không có đường tiệm cận đứng.

B. Khi $m=-3$ thì (C) không có đường tiệm cận đứng.

C. Khi $m\ne\pm3$ thì (C) có tiệm cận đứng $x=-m,$ tiệm cận ngang $y=m$.

D. Khi $m=0$ thì (C) không có tiệm cận ngang.

Câu 20. Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

A. $y=\pm1$. **B.** $x=1$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-1$.

Câu 21. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C): $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$ có tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1;\sqrt{2})$?

A. $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m=0$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=2$.

Câu 22. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+n}{x-1}$ có đồ thị (C). Biết tiệm cận ngang của (C) đi qua điểm $A(-1;2)$ đồng thời điểm $I(2;1)$ thuộc (C). Khi đó giá trị của $m+n$ là

A. $m+n=-1$. **B.** $m+n=1$. **C.** $m+n=-3$. **D.** $m+n=3$.

Câu 23. Số tiệm cận của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 24. Giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-m}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng là

A. $m=0; m=\pm1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\pm1$. **D.** $m=1$.

Câu 25. Số tiệm cận của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}{x-1}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 26. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-mx}{x+2}$ có hai đường tiệm cận ngang với

A. $\forall m\in\mathbb{R}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=0; m=1$. **D.** $m=0$.

Câu 27. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+mx}{x-1}$ có đường tiệm cận đứng khi

A. $m\ne0$. **B.** $\forall m\in R$. **C.** $m\ne-1$. **D.** $m\ne1$.

Câu 28. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{nếu } x\ge1\\ \dfrac{2x}{x-1} & \text{nếu } x<1\end{cases}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 30. Xác định m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-(2m+3)x+2(m-1)}{x-2}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=1$.

Câu 31. Xác định m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{4x^2+2(2m+3)x+m^2-1}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $m<-\dfrac{13}{12}$. **B.** $-1<m<1$. **C.** $m>-\dfrac{3}{2}$. **D.** $m>-\dfrac{13}{12}$.

Câu 32. Xác định m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $m<\dfrac{3}{2}; m\neq 1; m\neq -3$. **B.** $m>-\dfrac{3}{2}; m\neq 1$.

C. $m>-\dfrac{3}{2}$. **D.** $m<\dfrac{3}{2}$.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x+\sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang.

A. $0<m<1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m>1$. **D.** $m=1$.

Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{2x+1}}{x^3-2x^2-x+2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và có đúng 1 tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số có đúng 3 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. $m<0$. **B.** $m>0$.

C. $m=0$. **D.** Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

A. $m>1$. **B.** $m=1$.

C. $m\leq 1$. **D.** Không có m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^3-3x^2-m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-4 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m\leq -4 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\geq 0 \\ m\leq -4 \end{array}\right.$.

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-mx-2m^2}{x-2}$ có tiệm cận đứng.

A. Không có m thỏa mãn yêu đều đề bài. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\neq -2 \\ m\neq 1 \end{array}\right.$.

C. $m\in\mathbb{R}$. **D.** $\begin{cases} m\neq -2 \\ m\neq 1 \end{cases}$

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{5x-3}{x^2-2mx+1}$ không có tiệm cận đứng.

A. $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.$. **B.** $-1<m<1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi M là một điểm bất kì trên (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B. Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận của (C). Tính diện tích của tam giác IAB.

A. 2. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 41. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 42. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 3.

Câu 43. Đồ thị hàm số $y=x-\sqrt{x^2-4x+2}$ có tiệm cận ngang là:

A. $y=2$. **B.** $y=-2$. **C.** $y=\sqrt{2}$. **D.** $x=-2$.

Câu 44. Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến trục hoành

A. $M(0;-1), M(3;2)$. **B.** $M(2;1), M(4;3)$.

C. $M(0;-1), M(4;3)$. **D.** $M(2;1), M(3;2)$.

Câu 45. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 46. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{(x+2)^2}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 47. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 48. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-3}$ (C). Có tất cả bao nhiêu điểm *M* thuộc (C) sao cho khoảng cách từ *M* đến tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ điểm *M* đến tiệm cận đứng.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 49. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{3x+9}$ có đường tiệm cận đứng là $x=a$ và đường tiệm cận ngang là $y=b$. Giá trị của số nguyên *m* nhỏ nhất thỏa mãn $m\geq a+b$ là

A. 0. **B.** -3. **C.** -1. **D.** -2.

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}(C)$. Gọi M là điểm bất kỳ trên (C), *d* là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Giá trị nhỏ nhất của *d* là

A. 5. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}(C)$. Gọi *d* là khoảng cách từ giao điểm của 2 tiệm cận của (C) đến một tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị (C). Giá trị lớn nhất của *d* là

A. 2. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ (C). Gọi *d* là tiếp tuyến bất kì của (C), *d* cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại *A*, *B*. Khi đó khoảng cách giữa *A* và *B* ngắn nhất bằng

A. 4. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 53. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=2x+1-\dfrac{1}{x}$

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Câu 54. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}$

A. $y=2x$ **B.** $y=2$ **C.** $y=2x-3$ **D.** $y=2x+1$

Câu 55. Tìm giao điểm của trục tung với tiệm cận xiên của đường cong $y=\dfrac{x^3-3x+4}{2x+1}$

A. $\left(0;-\dfrac{7}{4}\right)$ **B.** $(0;4)$ **C.** $(0;-2)$ **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

Câu 56. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{x^3-x}$

A. $y=x$ **B.** $y=2x$ **C.** $y=2x-3$ **D.** $y=1-x$

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m+1}{x-1}$ không tồn tại đường tiệm cận xiên.

A. $m=-1$ **B.** $m=0$ **C.** $m\neq -1$ **D.** $m=3$

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường cong $y=\dfrac{mx^3-2}{x^3-3x+2}$ có hai tiệm cận đứng ?

A. $m \notin \left\{2; \frac{1}{4}\right\}$ **B.** $m \notin \left\{3; \frac{1}{2}\right\}$ **C.** $m \neq -1$ **D.** $m \in \{2;1\}$

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường cong $y = \frac{4x^2 - m}{x^2 - 4x + 3}$ có hai tiệm cận đứng.

A. $m \in \{4;36\}$ **B.** $m \notin \{2;1\}$ **C.** $m \notin \{3;4\}$ **D.** $m \neq -1$

Câu 60. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của đường phân giác góc phần tư thứ nhất (của mặt phẳng tọa độ) với tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Tính $x_0 + y_0$

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 8

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1C	2A	3A	4A	5B	6D	7D	8D	9C	10B	11B	12C	13A	14B	15C
16D	17B	18D	19C	20A	21D	22A	23B	24A	25A	26A	27C	28A	29C	30A
31D	32A	33D	34B	35B	36C	37C	38D	39B	40C	41A	42A	43A	44C	45A
46C	47D	48C	49D	50D	51A	52A	53A	54D	55A	56A	57B	58A	59A	60A

Câu 1. **Chọn C**

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-3}{x-1}=2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập biểu thức $\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Ấn CALC $x=1+10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng -999999998 nên $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=-\infty$.

Ấn CALC $x=1-10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng 999999998 nên $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}=+\infty$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$

Ấn CALC $x=10^{10}$. Ấn = được kết quả bằng 2 nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-3}{x-1}=2$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$

Câu 2. **Chọn A**

Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{1-3x}{x+2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{1-3x}{x+2}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-3x}{x+2}=-3$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-3$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập biểu thức $\dfrac{1-3x}{x+2}$.

Ấn CALC $x=-2+10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng 6999999997 nên $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{1-3x}{x+2}=+\infty$.

Ấn CALC $x=-2-10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng -7000000003 nên $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{1-3x}{x+2}=-\infty$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$

Ấn CALC $x=10^{10}$. Ấn = được kết quả bằng -2,999999999 nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-3x}{x+2}=-3$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-3$

Câu 3. **Chọn A**

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$. Tính tương tự với $x=2$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$

Phương pháp trắc nghiệm:

Nhập biểu thức $\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$.

Xét tại $x=1$: Ấn CALC $x=1+10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng 999999998 nên $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=+\infty$.

Ấn CALC $x=1+10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng -1,000000002 nên $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=-\infty$.

Tương tự xét với $x=2$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$ và $x=2$

Ấn CALC $x=10^{10}$. Ấn = được kết quả bằng 2.10^{-10} nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=0$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$

Câu 4. **Chọn A**

$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=3$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}=-3$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-3$

Phương pháp trắc nghiệm

Tương tự câu 3,4 nên tự tính kiểm tra

Câu 5. **Chọn B**

Tương tự câu 3.

Câu 6. **Chọn D**

Tìm tương tự các câu trên ta được tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{3}{2}$ và tiệm cận ngang là $y=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 2.

Câu 7. **Chọn D**

Tìm tương tự các câu trên ta được tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{2}{3}$ và tiệm cận ngang là $y=0$

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 2

Câu 8. **Chọn D**

Tìm được tiệm cận đứng là $x=\pm 2$ và tiệm cận ngang là $y=0$

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 3

Câu 9. **Chọn C**

Quy đồng biến đổi hàm số đã cho trở thành $y=\dfrac{x^3-3x^2-3x}{x^2-3x-4}$

Tìm được tiệm cận đứng là $x=-1, x=4$ và không có tiệm cận ngang (Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$)

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 2

Câu 10. **Chọn B**

Tìm được tiệm cận đứng là $x=3$ và tiệm cận ngang là $y=1$

Giao điểm của hai đường tiệm cận $I(3;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị $\Rightarrow$ A,C,D đúng

Câu 11. **Chọn B**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{4-x^2}$ có 3 đường tiệm cận.(TCĐ là $x=\pm2$ và TCN $y=0$)

Câu 12. **Chọn C**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-9x^4}{\left(3x^2-3\right)^2}$ có hai đường tiệm cận đứng $x=\pm1$ và một tiệm cận ngang $y=-1$

Câu 13. **Chọn A**

Phương trình $x^2+1=0$ vô nghiệm nên không tìm được số x_0 để $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{3x-1}{x^2+1}=\pm\infty$

hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{3x-1}{x^2+1}=\pm\infty$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

Các đồ thị hàm số ở B,C,D lần lượt có các TCĐ là $x=0, x=-2, x=1$

Câu 14. **Chọn B**

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}=\pm\infty$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Các đồ thị hàm số ở B,C,D lần lượt có các TCN là $y=2, y=0, y=1$

Câu 15. **Chọn C**

Từ đồ thị ta thấy có tiệm cận đứng là $x=1$ và $y=1$ $\Rightarrow$ loại A,B

Xét tiếp thấy giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;-2)$ $\Rightarrow$ **Chọn C**.

Câu 16. **Chọn D**

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{3x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{3x+2}=1$.

Do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=1$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{3X-1}{3X+2}$ ấn CALC 10^{12} ta được kết quả là 1.

Tiếp tục CALC -10^{12} ta được kết quả là 1.

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=1$

Câu 17. **Chọn B**

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=2$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=2$.

Lại có $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2x-1}{x+2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x-1}{x+2}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{2X-1}{X+2}$ ấn CALC 10^{12} ta được kết quả là 2.

Tiếp tục CALC -10^{12} ta được kết quả là 2.

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=2$.

Tiếp tục ấn CALC $-2+10^{-12}$ ta được kết quả là -5.10^{12}, ấn CALC $-2-10^{-12}$ ta được kết quả là 5.10^{12} nên có $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2x-1}{x+2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x-1}{x+2}=+\infty$.

Do đó ta được $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Câu 18. **Chọn D**

Phương pháp tự luận

Ta có: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=0;\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=0$.

Do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=0$.

Lại có $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty;\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty;$ $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x=1; x=2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{2X-1}{X^2+3X+2}$ ấn CALC 10^{12} ta được kết quả là 0.

Tiếp tục CALC -10^{12} ta được kết quả là 0.

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Tiếp tục ấn CALC $1+10^{-12}$ ta được kết quả là -1.10^{12}, ấn CALC $1-10^{-12}$ ta được kết quả là 1.10^{12} nên có $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty;\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty$ do đó ta được $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Tiếp tục ấn CALC $2+10^{-12}$ ta được kết quả là 3.10^{12}, ấn CALC $1-10^{-12}$ ta được kết quả là -3.10^{12} nên có $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty;\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty$ do đó ta được $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận.

Câu 19. **Chọn C**

Phương pháp tự luận

Xét phương trình: $mx+9=0$.

Với $x=-m$ ta có: $-m^2+9=0 \Leftrightarrow m=\pm 3$

Kiểm tra thấy với $m=\pm 3$ thì hàm số không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Khi $m \neq \pm 3$ hàm số luôn có tiệm cận đứng $x=m$ hoặc $x=-m$ và tiệm cận ngang $y=m$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{XY+9}{X+Y}$ ấn CALC $X=-3+10^{-10}; Y=-3$

ta được kết quả -3.

Tiếp tục ấn CALC $X=-3-10^{-10}; Y=-3$ ta được kết quả -3.

Vậy khi $m=-3$ đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Tương tự với $m=3$ ta cũng có kết quả tương tự.

Vậy các đáp án A và B không thỏa mãn.

Tiếp tục ấn CALC $X=-10^{10}; Y=0$ ta được kết quả $9x10^{-10}$, ấn CALC $X=10^{10}; Y=0$ ta được kết quả $9\text{x}10^{-10}$.

Do đó hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

Vậy đáp án D sai.

Câu 20. Chọn A

Phương pháp tự luận

Vì TXĐ của hàm số là $\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Lại có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=\pm 1$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ ấn CALC 10^{10} ta được kết quả là 1.

Tiếp tục ấn CALC -10^{10} ta được kết quả là -1.

Vậy có hai tiệm cận ngang là $y=\pm 1$.

Câu 21. Chọn D

Để đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng thì $m^2+2 \neq 0$ luôn đúng với mọi m.

Khi đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{m}{2}$.

Vậy để tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1;\sqrt{2})$ thì $-\dfrac{m}{2}=-1 \Leftrightarrow m=2$

Câu 22. Chọn A

Để hàm số có đường tiệm cận ngang thì $m+n \neq 0$

Khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=m$ do đó ta có $m=2$

Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $I(2;1)$ nên có $2m+n=1 \Rightarrow n=-3$

Vậy $m+n=-1$

Câu 23. Chọn B

Điều kiện xác định $\begin{cases} x^2-9\ge 0 \\ \sqrt{x^2-9}\ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)\setminus\{\pm 5\}$

Khi đó có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}=0; \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}=2$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

Mặt khác có $\lim\limits_{x\to-5^{\pm}}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}=\mp\infty; \lim\limits_{x\to 5^{\pm}}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}=\pm\infty$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận.

Câu 24. Chọn A

Xét $m=0$ thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Xét $m\ne 0$ khi đó đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng nếu $ad-bc=0\Leftrightarrow -1+m^2=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

Vậy giá trị của m cần tìm là $m=0; m=\pm 1$

Câu 25. Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}{x-1}=\infty$. Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}y=2; \lim\limits_{x\to-\infty}y=0$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 26. Chọn A

Xét $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-mx}{x+2}=-1-m$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-mx}{x+2}=1-m$

Để hàm số có hai tiệm cận ngang thì $-1-m\ne 1-m$ (thỏa với mọi m).

Vậy $\forall m\in R$ thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Câu 27. Chọn C

Xét phương trình $\sqrt{x^2-x+1}+mx=0$.

Nếu phương trình không có nghiệm $x=1$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Nếu phương trình có nghiệm $x=1$ hay $m=-1$.

Khi đó xét giới hạn: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\dfrac{1}{2}$ nên trong trường hợp này đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Vậy $m\ne -1$.

Câu 28. Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} 4-x^2\ge 0 \\ x^2-3x-4\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x\le 2 \\ x\ne -1 \\ x\ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x\le 2 \\ x\ne -1 \end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4} = +\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x\to(-1)^+$ và $x\to(-1)^-$. Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 29. Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} y = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{2x}{x-1} = -\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{1-\frac{1}{x}} = 2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

Câu 30. Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-(2m+3)x+2(m-1)}{x-2}$ không có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)=x^2-(2m+3)x+2(m-1)=0$ có nghiệm $x=2$

$\Leftrightarrow f(2)=0 \Leftrightarrow 4-2(2m+3)+2(m-1)=0 \Leftrightarrow -2m-4=0 \Leftrightarrow m=-2$.

Câu 31. Chọn D

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{4x^2+2(2m+3)x+m^2-1}$ có đúng hai tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $4x^2+2(2m+3)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow (2m+3)^2-4(m^2-1)>0 \Leftrightarrow 12m>-13 \Leftrightarrow m>-\dfrac{13}{12}$.

Câu 32. Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng hai tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-2=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ f(1)\neq0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)^2-(m^2-2)>0\\ 1+2(m-1)+m^2-2\neq0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2m+3>0\\ m^2+2m-3\neq0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\dfrac{3}{2}\\ m\neq1\\ m\neq-3\end{cases}.$$

Câu 33. Chọn D

- Nếu $m=0$ thì $y=x+1$. Suy ra, đồ thị của nó không có tiệm cận ngang.

- Nếu $m<0$ thì hàm số xác định $\Leftrightarrow mx^2+1\geq0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{-m}}\leq x\leq\dfrac{1}{\sqrt{-m}}$.

Do đó, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Với $0<m<1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}\right)=-\infty$

nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Với $m=1$ thì $y=x+\sqrt{x^2+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0.$$

Suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

- Với $m>1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 34. Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-x+3\ge 0 \\ 2x+1\ge 0 \\ x^3-2x^2-x+2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{1}{2} \\ x\ne 2 \\ x\ne \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{1}{2} \\ x\ne 2 \\ x\ne 1 \end{cases}.$

Với điều kiện trên ta có, $y=\dfrac{\left(x^2-x+3\right)-\left(2x+1\right)}{\left(x^2-3x+2\right)\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2-x+3}+\sqrt{2x+1}\right)}$

$$=\frac{x^2-3x+2}{\left(x^2-3x+2\right)\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2-x+3}+\sqrt{2x+1}\right)}=\frac{1}{\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2-x+3}+\sqrt{2x+1}\right)}.$$

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y$ không tồn tại.

Câu 35. Chọn B

Điều kiện: $mx^2+1>0$.

- Nếu $m=0$ thì hàm số trở thành $y=x+1$ không có tiệm cận ngang.

- Nếu $m<0$ thì hàm số xác định $\Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{-m}}<x<\dfrac{-1}{\sqrt{-m}}$.

Do đó, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Nếu $m>0$ thì hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Suy ra đường thẳng $y=\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Suy ra đường thẳng $y=-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

Vậy $m>0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 36. Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x\le 1 \\ x\ne m \end{cases}$.

Nếu $m>1$ thì $\lim\limits_{x\to m^+} y$; $\lim\limits_{x\to m^-} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Nếu $m=1$ thì hàm số trở thành $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^-} y=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{\sqrt{1-x}}=-\infty$$

Suy ra đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x\to 1^-$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} y$ không tồn tại.

Do đó, $m=1$ thỏa mãn.

- Nếu $m<1$ thì $\lim\limits_{x\to m^+} y=\lim\limits_{x\to m^+}\dfrac{\sqrt{1-x}}{x-m}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to m^-} y=\lim\limits_{x\to m^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{x-m}=-\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x\to m^+$ và $x\to m^-$.

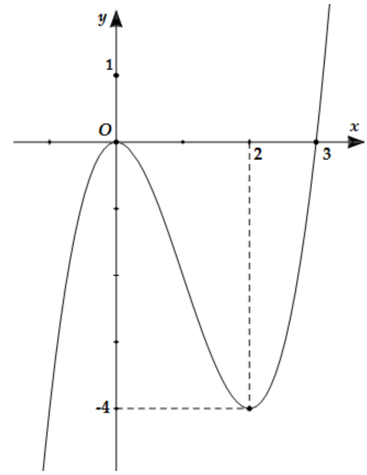
Vậy $m\le 1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 37. Chọn C

TH1 : Phương trình $x^3-3x^2-m=0$ có một nghiệm đơn $x=-1$ và một nghiệm kép.

Phương trình $x^3-3x^2-m=0$ có nghiệm $x=-1$ nên $(-1)^3-3(-1)^2-m=0\Leftrightarrow m=-4$.

Với $m=-4$ phương trình trở thành $x^3-3x^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn vì $x=2$ là nghiệm kép).



TH2: Phương trình $x^3-3x^2-m=0$ có đúng một nghiệm khác -1 $\Leftrightarrow x^3-3x^2=m$ có một nghiệm khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>0 \end{array}\right. \\ (-1)^3-3.(-1)^2 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>0 \end{array}\right. \\ m \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>0 \end{array}\right..$$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m \leq -4 \end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 38. Chọn D

Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-mx-2m^2}{x-2}$ có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow 2$ không là nghiệm của $f(x)=x^2-mx-2m^2$

$\Leftrightarrow f(2)=4-2m-2m^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}.$

Câu 39. Chọn B

Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{5x-3}{x^2-2mx+1}$ không có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow x^2-2mx+1=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow m^2-1<0 \Leftrightarrow -1<m<1$.

Câu 40. Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Đạo hàm $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.

(C) có tiệm cận đứng $x=1$ (d_1) và tiệm cận ngang $y=2$ (d_2) nên $I(1;2)$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right) \in (C), x_0 \neq 1$.

Tiếp tuyến Δ của (C) tại M có phương trình $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}$

Δ cắt d_1 tại $A\left(1;\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}\right)$ và cắt d_2 tại $B(2x_0-1;2)$.

Ta có $IA=\left|\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}-2\right|=\dfrac{4}{|x_0-1|}$; $IB=|(2x_0-1)-1|=2|x_0-1|$.

Do đó, $S=\dfrac{1}{2}IA.IB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{|x_0-1|}.2|x_0-1|=4$.

Câu 41. Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=-1$

Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Câu 42. Chọn A

Tập xác định $D=[-1;1]$

Nên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2};\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2};\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2};\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$.

Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Câu 43. Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-2}{x+\sqrt{x^2-4x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-\dfrac{2}{x}}{1+\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1+\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right)=-\infty$

vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right)=2>0$

Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=2$.

Câu 44. Chọn C

Do M thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ nên $M\left(x_0;\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right)$ với $x_0\neq1$

Phương trình tiệm cận đứng là $x-1=0$ (d).

Giải phương trình $d(M,d)=d(M,Ox)\Leftrightarrow|x_0-1|=\left|\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=4\end{array}\right.$.

Câu 45. Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Trên TXĐ của hàm số, biến đổi được $y=x-1$. Do đó đồ thị không có tiệm cận

Câu 46. Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Trên TXĐ của hàm số, biến đổi được $y=\dfrac{x-1}{x+2}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$; $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x-1}{x+2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x-1}{x+2}=+\infty$

Do đó đồ thị có 2 tiệm cận

Câu 47. Chọn D

Tập xác định $D=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=-1$

Do tập xác định $D=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1};\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}$

Do đó đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Câu 48. Chọn C

Tọa độ điểm M có dạng $M\left(x_0;\frac{x_0+2}{x_0-3}\right)$

Phương trình đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là $x-3=0\ (d_1)$, $y-1=0\ (d_2)$.

Giải phương trình $5d(M,d_1)=d(M,\mathrm{d}_2)$ tìm x_0

Câu 49. Chọn D

Ta có đường tiệm cận đứng là $x=-3$ và đường tiệm cận ngang là $y=\frac{1}{3}$

Nên $a=-3,b=\frac{1}{3}$. Do đó $m\ge a+b\Leftrightarrow m\ge-\frac{8}{3}\Rightarrow m=-2$

Câu 50. Chọn D

Tọa độ điểm M có dạng $M\left(x_0;\frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $x_0\neq2$

Phương trình tiệm cận đứng, ngang lần lượt là $x-2=0\ (d_1)$, $y-2=0\ (d_2)$.

Ta có $d=d(M,d_1)+d(M,d_2)=|x_0-2|+\frac{1}{|x_0-2|}\ge2$

Câu 51. Chọn A

Tọa độ điểm M bất kì thuộc đồ thị có dạng $M\left(x_0;\frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $x_0\neq2$

Do đó phương trình tiếp tuyến tại M là $y=-\frac{x-x_0}{(x_0-2)^2}+\frac{2x_0-3}{x_0-2}\ (\Delta)$. Tính $d(M,\Delta)\le2$.

Câu 52. Chọn A

Tọa độ điểm M bất kì thuộc đồ thị có dạng $M\left(x_0;\frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $x_0\neq2$

Do đó phương trình tiếp tuyến tại M là $y=-\frac{x-x_0}{(x_0-2)^2}+\frac{2x_0-3}{x_0-2}\ (d)$.

Tìm tọa độ giao của tiệm cận và tiếp tuyến $A\left(2;\frac{2x_0-2}{x_0-2}\right),B(2x_0-2;2)$

Từ đó đánh giá $AB \ge 4$

Câu 53. Chọn A

Tập xác định $D = R \setminus \{0\}$

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(2x + 1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} y = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(2x + 1 - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng

Ta có $\begin{cases} y = 2x + 1 - \dfrac{1}{x} \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên

Vậy hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 54. Chọn D

Ta có $y = \dfrac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2} = 2x + 1 + \dfrac{1}{x - 2}$

Ta có $\begin{cases} y = 2x + 1 + \dfrac{1}{x - 2} \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x - 2} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên.

Câu 55. Chọn A

Ta có $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x + 1} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{7}{4} + \dfrac{23}{4(2x + 1)}$

Ta có $\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{7}{4} + \dfrac{23}{4(2x + 1)} \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{23}{4(2x + 1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{7}{4}$ là tiệm cận xiên

Giao điểm của tiệm cận xiên với trục tung là điểm $M\left(0; -\dfrac{7}{4}\right)$.

Câu 56. Chọn A

Gọi $\Delta : y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x^3 - x}$

Khi đó $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x\sqrt[3]{1 - \dfrac{1}{x^3}}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{1 - \dfrac{1}{x^3}} = 1$

$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (y - ax) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x} - x\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x\left(\sqrt[3]{1 - \dfrac{1}{x^3}} - 1\right)\right) = 0$

Suy ra tiệm cận xiên của hàm số $y = \sqrt[3]{x^3 - x}$ là đường thẳng có phương trình y = x.

Câu 57. Chọn B

Hàm số không có tiệm cận xiên khi đa thức $g(x) = 2x^2 - 3x + m + 1$ có chứa nhân tử x – 1

(tức là phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm x = 1)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2-3+m+1=0 \Leftrightarrow m=0$.

Câu 58. Chọn A

Cần nhớ số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng với số giá trị x mà tại đó hàm số không xác định.

Ta có D = R\{1;2}

Để hàm số $y=\dfrac{mx^3-2}{x^2-3x+2}$ có hai tiệm cận đứng thì phương trình $g(x)=mx^3-2\#0$ và phương trình $g(x)=mx^3-2=0$ có nghiệm khác 1 và 2

Suy ra $\begin{cases} g(1)=m-2\neq 0 \\ g(2)=8m-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m\neq \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Câu 59. Chọn A

Ta có $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

Để đường cong $y=\dfrac{4x^2-m}{x^2-4x+3}$ có hai tiệm cận đứng thì phương trình $g(x)=4x^2-m\neq 0$ và phương trình $g(x)=4x^2-m=0$ có nghiệm khác 1 và 3

Suy ra $\begin{cases} g(1)=4-m\neq 0 \\ g(3)=36-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 4 \\ m\neq 36 \end{cases}$.

Câu 60. Chọn A

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất có phương trình y = x

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=-1\Rightarrow y=-1$ là tiệm cận xiên

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận xiên

Trường hợp 1: $y=-1 => x=y=-1 => x+y=-2$

Trường hợp 2: $y=1 => x=y=1 => x+y=2$.

ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

☆☆☆

A. KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ DẠNG ĐỒ THỊ CỦA CÁC HÀM SỐ

I. SƠ ĐỒ BÀI TOÁN KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số;

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$;

Bước 3. Tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$;

Bước 4. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} y; \lim\limits_{x\to-\infty} y$ và tìm tiệm cận đứng, ngang (*nếu có*);

Bước 5. Lập bảng biến thiên;

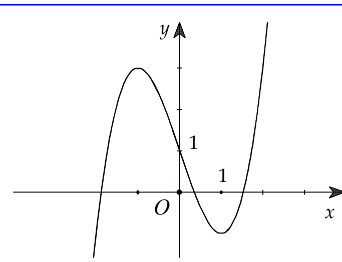
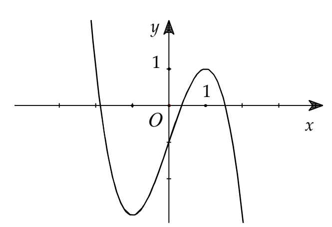
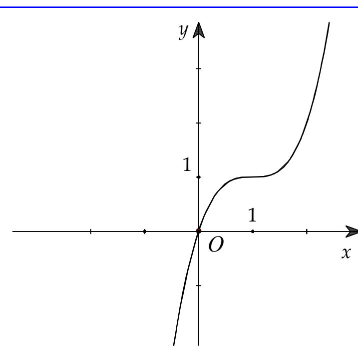
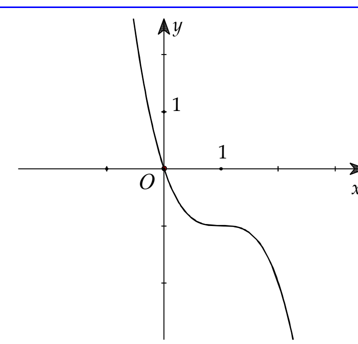
Bước 6. Kết luận tính biến thiên và cực trị (*nếu có*);

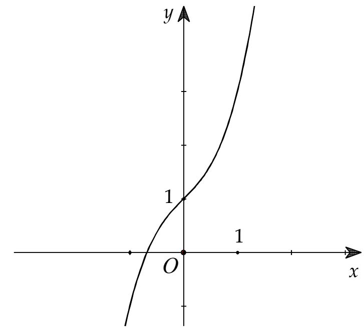
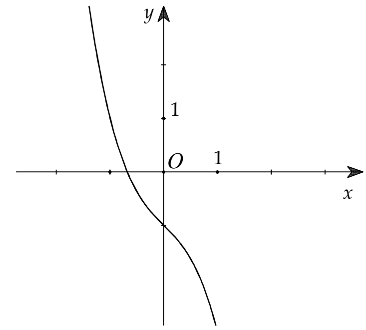
Bước 7. Tìm các điểm đặc biệt của đồ thị (*giao với trục Ox, Oy, các điểm đối xứng, …*);

Bước 8. Vẽ đồ thị.

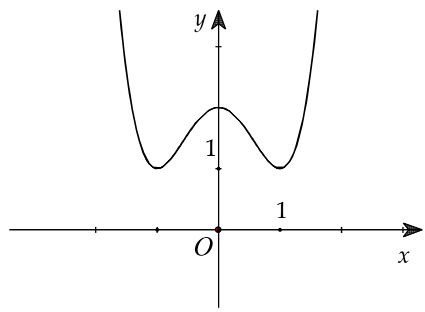
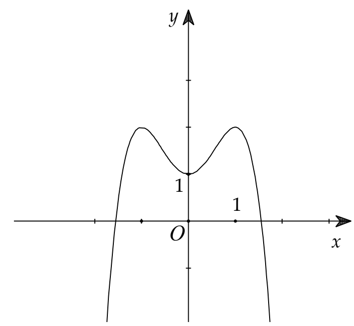
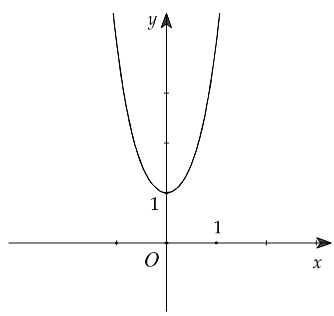
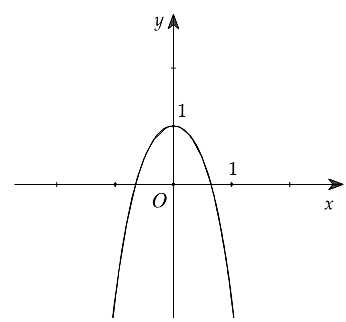
II. CÁC DẠNG ĐỒ THỊ CỦA CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

1. HÀM SỐ BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

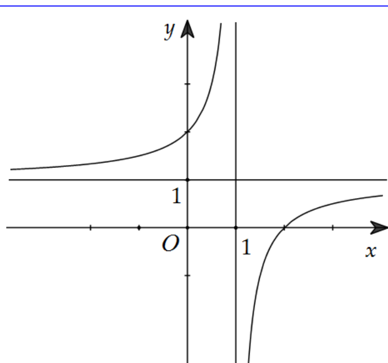
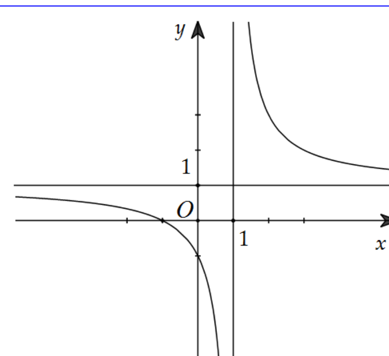
TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		

Phương trình $y' = 0$ *vô nghiệm*		

2. HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ *có 3 nghiệm phân biệt*		
Phương trình $y' = 0$ *có 1 nghiệm.*		

3. HÀM SỐ NHẤT BIẾN $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHẢO SÁT HÀM SỐ

Bài toán 1: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Lời giải:

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

2. Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = 3x^2 - 6x$ .Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến

Trên khoảng $(0;2)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến

+ Cực trị :

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{cd} = y(0) = 2$ .Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$; $y_{ct} = y(2) = -2$

+ Các giới hạn tại vô cực

s $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$.

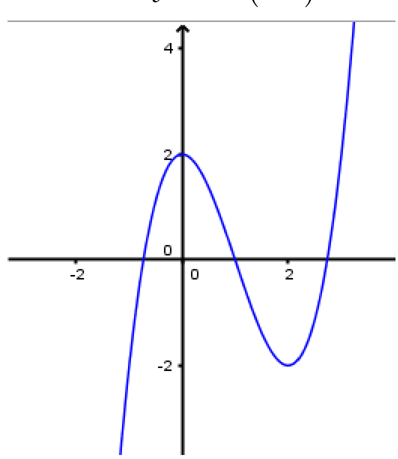
+ Bảng biến thiên:

x			0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

3. Đồ thị

Ta có $x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số qua điểm $A(1;0)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$:Đồ thị hàm số cắt Oy tại $B(0;2)$.



Lưu ý: Đồ thị hàm số nhận điểm $I(1;0)$ làm tâm đối xứng. Hoành độ điểm I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ (Điểm uốn)

Bài toán 2: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=-x^3+3x^2-3x+1$

Lời giải:

1.Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

2. Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y'=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2\le 0\,\forall x\in\mathbb{R}$ .Xét $y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

+ Cực trị : Hàm số không có cực trị

+ Các giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty;\ \lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=+\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

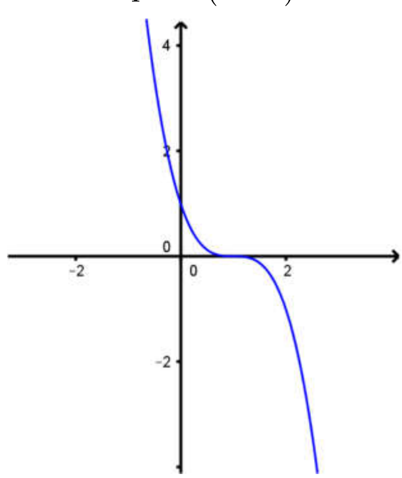
x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3. Đồ thị

Ta có $-x^3+3x^2-3x+1=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow$ đồ thị hàm số qua $A(1;0)$.

Cho $x=0\Rightarrow y=1$ $\Rightarrow$Đồ thị hàm số cắt Oy tại $B(0;1)$.

Cho $x=2\Rightarrow y=-1\Rightarrow$Đồ thị hàm số qua $C(2;-1)$.



Lưu ý: Đồ thị hàm số nhận điểm $I(1;0)$ làm tâm đối xứng.Hoành độ điểm I là nghiệm của phương trình $y''=0$ (Điểm uốn).

Bài toán 3: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$

Lời giải:

1.Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

2. Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = 3x^2 \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$ .Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

+ Cực trị : Hàm số không có cực trị

+ Các giới hạn tại vô cực

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty;\ \lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$

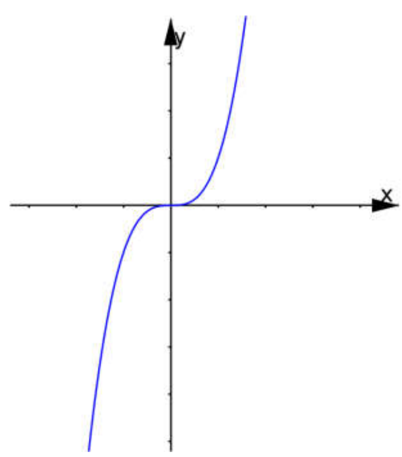
+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$		0		$+\infty$

3. Đồ thị

Ta có $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .Vậy đồ thị hàm số qua $O(0;0)$

Cho $x = 1 \Rightarrow y = 1$:Đồ thị hàm số cắt Oy tại $B(1;1)$ .Cho $x = -1 \Rightarrow y = -1$:Đồ thị hàm số cắt qua $C(-1;-1)$.



Lưu ý: Đồ thị hàm số nhận điểm $O(0;0)$ làm tâm đối xứng. Hoành độ điểm O là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ (Điểm uốn)

Bài toán 4: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số x^4-2x^2-3

Lời giải:

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$
2. Sự biến thiên:
+ Chiều biến thiên:

$$y'=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right) \text{ .Xét } y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 1\end{array}\right.$$

Trên các khoảng $\left(-1\,;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$, $y'>0$ nên hàm số đồng biến

Trên các khoảng $\left(-\infty\,;-1\right)$ và $\left(0;1\right)$, $y'<0$ nên hàm số nghịch biến

+ Cực trị :

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$; $y_{cd}=y\left(0\right)=-3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$; $y_{ct}=y\left(\pm 1\right)=-4$

+ Các giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(1-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)=+\infty.$$

+ Bảng biến thiên

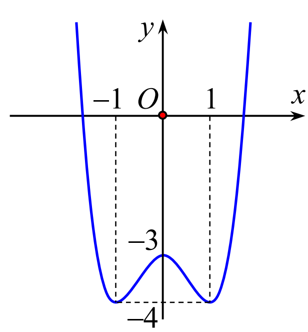
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-\infty$	0	$+$	
y	$+\infty$		-4		-3		-4		$+\infty$

3. Đồ thị

Ta có $x^4-2x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm 1$ .Vậy đồ thị hàm số qua $A\left(1;0\right)$, $B\left(-1;0\right)$.

Cho $x=0\Rightarrow y=-3$:Đồ thị hàm số cắt Oy tại $C\left(0;-3\right)$ .Cho $x=\pm 2\Rightarrow y=5$: Đồ thị hàm số qua $D\left(-2\,;5\right)$, $E\left(2\,;5\right)$.

Lưu ý: Đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.



Bài toán 6: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = 4 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$

Lời giải:

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

2. Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = -x - \frac{x^3}{2} = -x\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$ .Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến

Trên các khoảng $(0; +\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến

+ Cực trị :

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{cd} = y(0) = -3$.

Hàm số không có cực tiểu

+ Các giới hạn tại vô cực

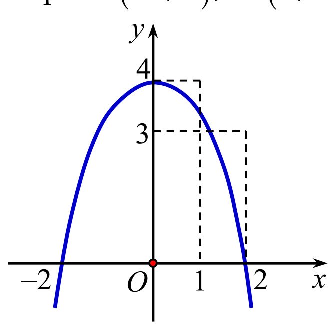
$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(-1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4}\right) = -\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

3. Đồ thị

Cho $x = \pm 2 \Rightarrow y = 0$:Đồ thị hàm qua $C(-2; 0)$, $D(2; 0)$



Lưu ý: Đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.

Bài toán 7: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $\dfrac{x+1}{x-1}$

Lời giải:

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

2. Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$ .Ta thấy y' không xác định khi $x=1$; y' luôn âm với mọi $x\neq 1$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(1;+\infty)$ và $(-\infty;1)$.

+ Cực trị :

Hàm số không có cực trị

+ Tiệm cận

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\dfrac{x+1}{x-1}=1$. Vậy đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang

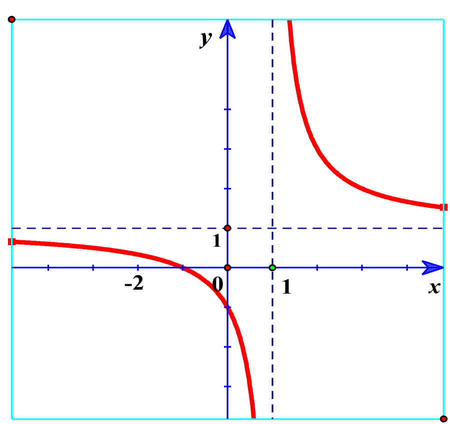
$\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=-\infty$. Vậy đường thẳng $x=1$ là tiệm cận ngang

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

3. Đồ thị

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0;-1)$ và cắt trục hoành tại điểm $B(-1;0)$ (Hình vẽ)



Lưu ý : Giao điểm $I(1;1)$ của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị

B. MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) với số $a > 0$ ta có:
Hàm số $y = f(x) + a$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Oy lên trên a đơn vị.
Hàm số $y = f(x) - a$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Oy xuống dưới a đơn vị.
Hàm số $y = f(x + a)$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua trái a đơn vị.
Hàm số $y = f(x - a)$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua phải a đơn vị.
Hàm số $y = -f(x)$ có đồ thị (C') là đối xứng của (C) qua trục Ox.
Hàm số $y = f(-x)$ có đồ thị (C') là đối xứng của (C) qua trục Oy.

Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(|x|)$.

Ta có $\quad y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

và $y = f(|x|)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị (C') nhận Oy làm trục đối xứng.

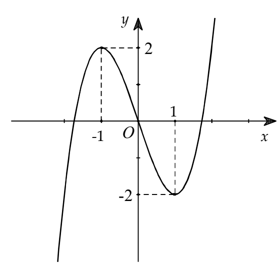
*** Cách vẽ (C') từ (C):**

+ *Giữ nguyên* phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C): y = f(x)$.

+ *Bỏ* phần đồ thị bên trái Oy của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị** *được giữ* qua Oy.

Ví dụ:

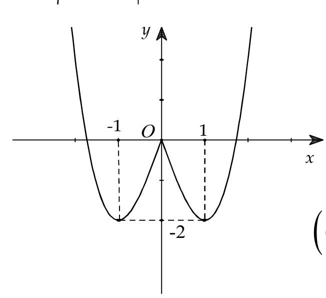
Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$.



$(C): y = x^3 - 3x$

Ta có:

$$y = |x|^3 - 3|x| = \begin{cases} x^3 - 3x & khi\ x \geq 0 \\ -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) & khi\ x < 0 \end{cases}$$



$(C'): y = |x|^3 - 3|x|$

Cách vẽ đồ thị (C'):

+ Bỏ phần đồ thị của (C) bên trái Oy, giữ nguyên (C) bên phải Oy.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.

Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

<u>Nội dung:</u> Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

+ *Giữ nguyên* phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị (C): $y = f(x)$.

+ *Bỏ* phần đồ thị phía dưới Ox của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua Ox.

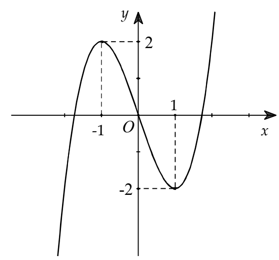
Ví dụ:

Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x^3 - 3x|$.

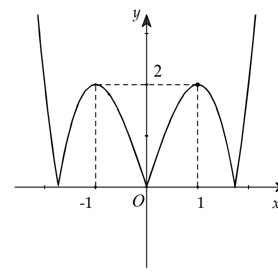
Cách vẽ đồ thị (C'):

+ Bỏ phần đồ thị của (C) dưới Ox, giữ nguyên (C) phía trên Ox.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.



$(C): y = x^3 - 3x$



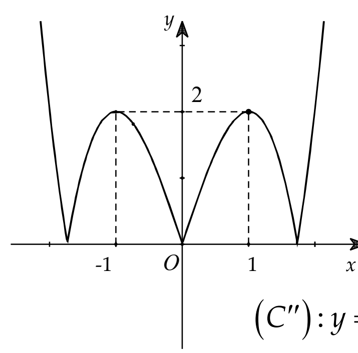
$(C'): y = |x^3 - 3x|$

Chú ý với dạng: $y = |f(|x|)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(|x|)$ và $y = |f(x)|$

Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$.

Biến đổi (C) để được đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$.

Biến đổi $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$ ta được đồ thị $(C''): y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$.



$(C''): y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$

Từ đồ thị $(C): y = u(x).v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |u(x)|.v(x)$.

Ta có: $y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x).v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) < 0 \end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

+ *Giữ nguyên* phần đồ thị trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.

+ *Bỏ* phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua Ox.

Ví dụ

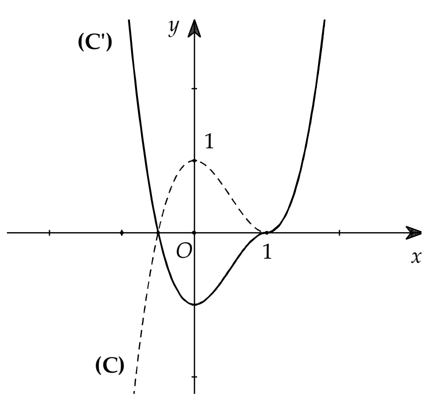
a) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x-1|(2x^2 - x - 1)$

$$y = |x-1|(2x^2 - x - 1) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 1 \\ -f(x) & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

<u>Đồ thị (C′):</u>

+ Giữ nguyên (C) với $x \geq 1$.

+ Bỏ (C) với $x < 1$. Lấy *đối xứng phần đồ thị bị bỏ* qua *Ox*.



<u>Nhận xét:</u> Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên *lấy đối xứng các điểm đặc biệt* của (C): giao điểm với *Ox*, *Oy*, CĐ, CT…

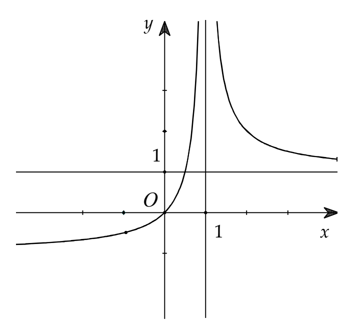
b) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị $(C'): y = \dfrac{x}{|x-1|}$

$$y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{khi } x \in (1; +\infty) \\ -\dfrac{x}{x-1} & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \end{cases}.$$

<u>Đồ thị (C′):</u>

+ Bỏ phần đồ thị của (C) với $x < 1$, giữ nguyên (C) với $x > 1$.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua *Ox*.



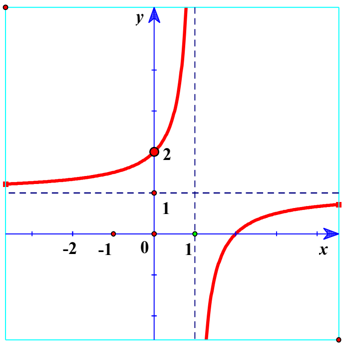
<u>Nhận xét</u>: Đối với hàm phân thức thì nên *lấy đối xứng các đường tiệm cận* để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

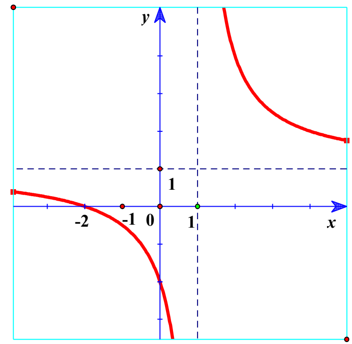
I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có đồ thị là hình vẽ nào sau đây? Hãy chọn câu trả lời đúng.

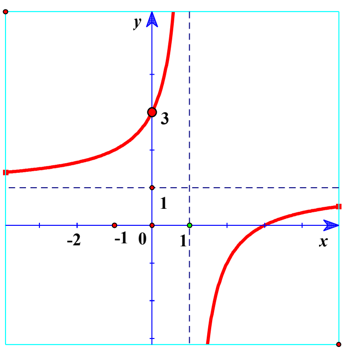
A.



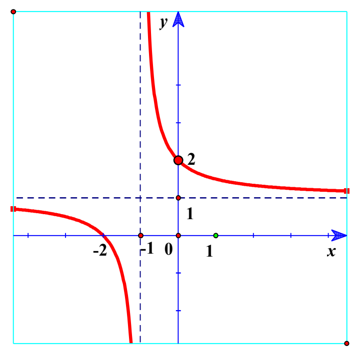
B.



C.

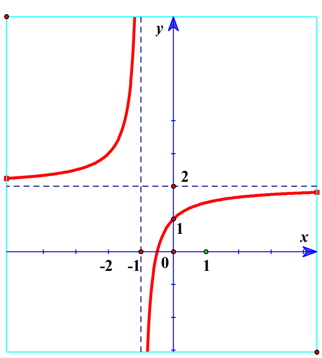


D.

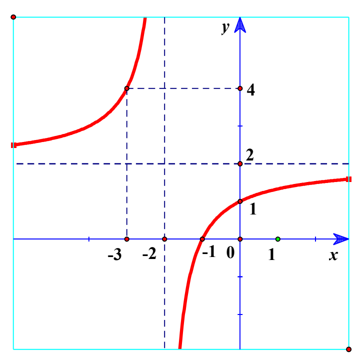


Câu 2. Hàm số $y=\dfrac{2+2x}{2+x}$ có đồ thị là hình vẽ nào sau đây? Hãy chọn câu trả lời đúng.

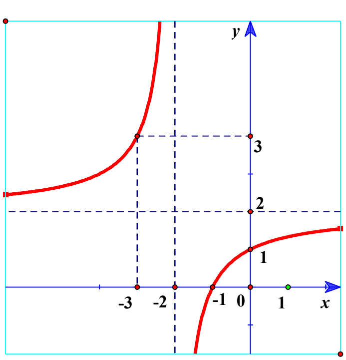
A.



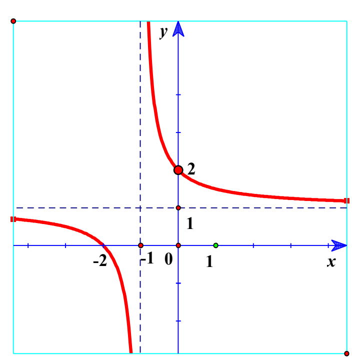
B.



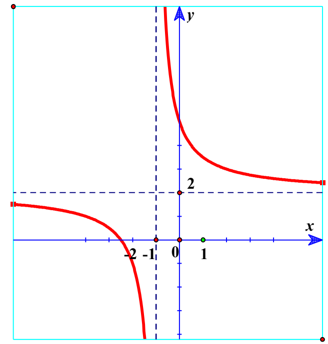
C.



D.

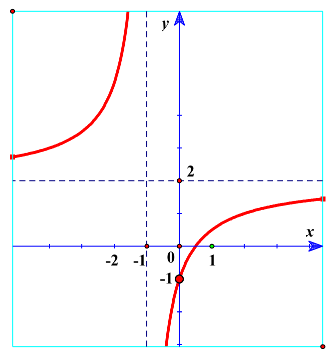


Câu 3. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 + 3x^2 + 1$. **B.** $y = \dfrac{2x+5}{x+1}$. **C.** $y = x^4 - x^2 + 1$. **D.** $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Câu 4. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. **B.** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. **D.** $y = \dfrac{1-2x}{x-1}$.

Câu 5. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1

A. $y = \dfrac{x+3}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{-x-2}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{-x+3}{x-1}$. **D.** $y = \dfrac{-x-3}{x-1}$.

Câu 6. Hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x-1}$ có bảng biến thiên nào dưới đây. Chọn đáp án đúng?

A.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

B.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

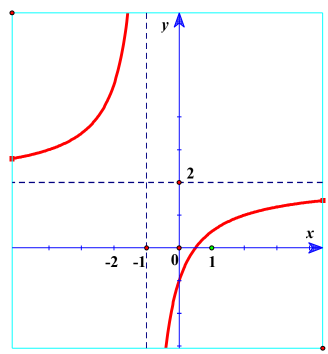
C.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

D.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là **sai?**



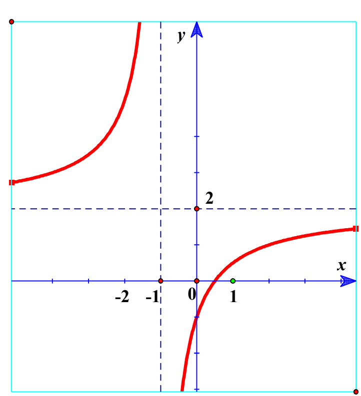
A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

B. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

D. Hàm số có hai cực trị.

Câu 8. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



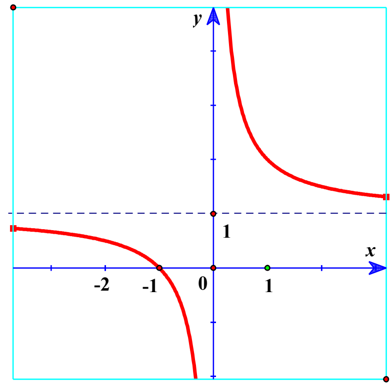
A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

B. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số có hai cực trị.

D. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 9. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=0$, tiệm cận ngang $y=1$.

C. Hàm số có hai cực trị.

D. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

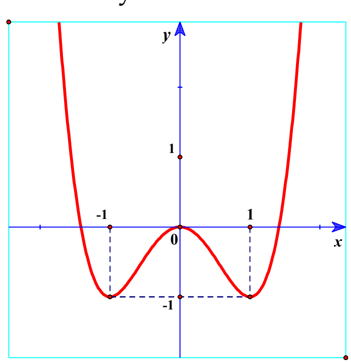
A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$.

C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.

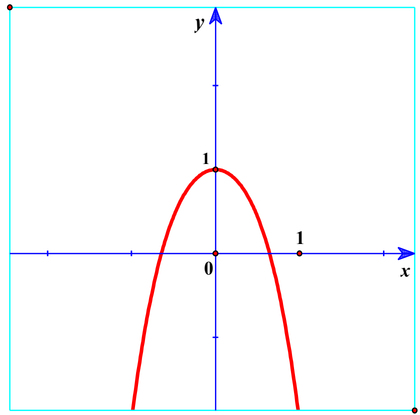
D. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

Câu 11. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



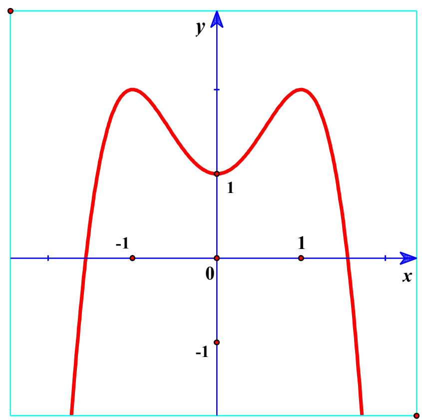
A. $y=x^4-3x^2+1$. **B.** $y=x^4+2x^2$. **C.** $y=x^4-2x^2$. **D.** $y=-x^4-2x^2$.

Câu 12. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **C.** $y = x^4 - 3x^2 + 1$. **D.** $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.

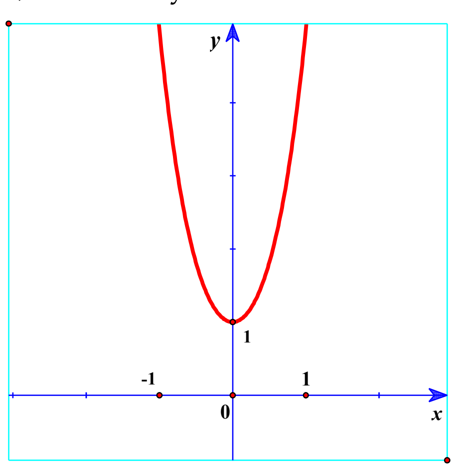
Câu 13. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = x^4 - 3x^2 + 1$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

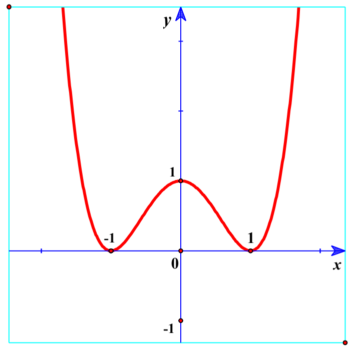
C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **D.** $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 14. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = x^4 + 3x^2 + 1$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **C.** $y = x^4 - 3x^2 + 1$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng về hàm số $f(x)$



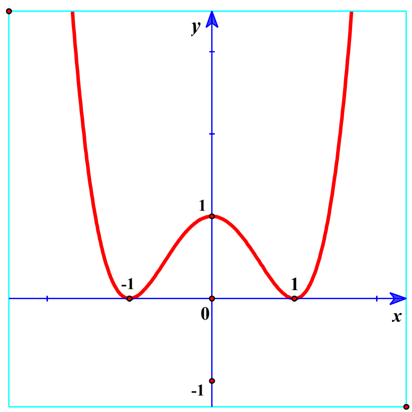
A. Hàm số $f(x)$ có điểm cực đại là $(0;\,1)$.

B. Hàm số $f(x)$ có điểm cực tiểu là $(0;\,1)$.

C. Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.

D. Hàm số $f(x)$ có ba giá trị cực trị.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Chọn khẳng định sai về hàm số $f(x)$



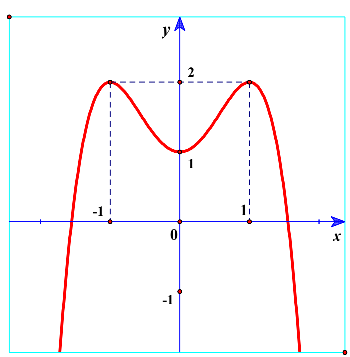
A. Hàm số $f(x)$ tiếp xúc với Ox.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-1;\,0)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là $y=0$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Chọn khẳng định sai về hàm số $f(x)$



A. Hàm số $f(x)$ có ba cực trị.

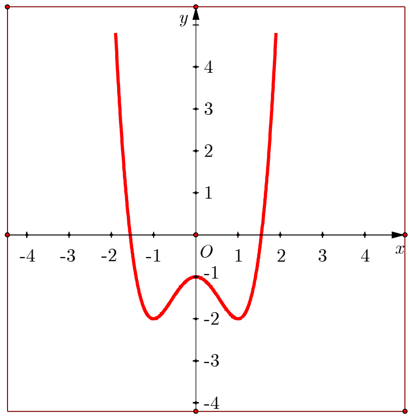
B. Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất là 2 khi $x=1$.

C. Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 1 khi $x=0$.

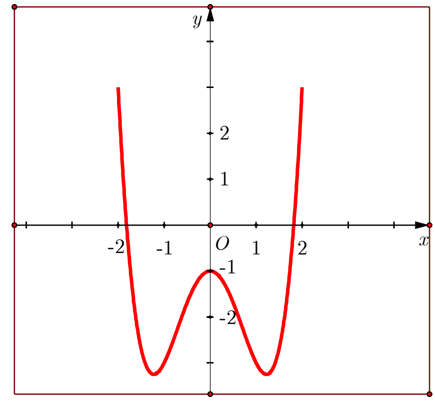
D. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.

Câu 18. Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ là đồ thị nào trong các đồ thị sau đây?

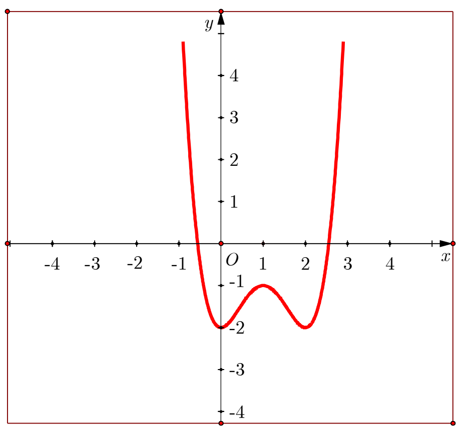
A.



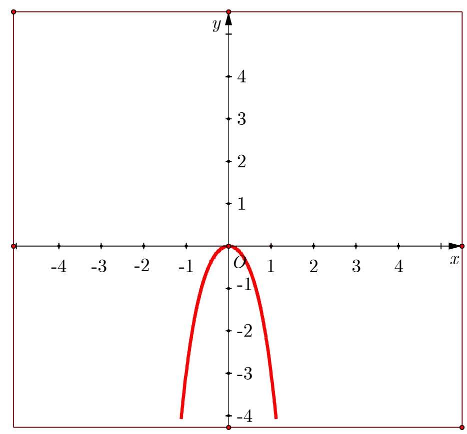
B.



C.

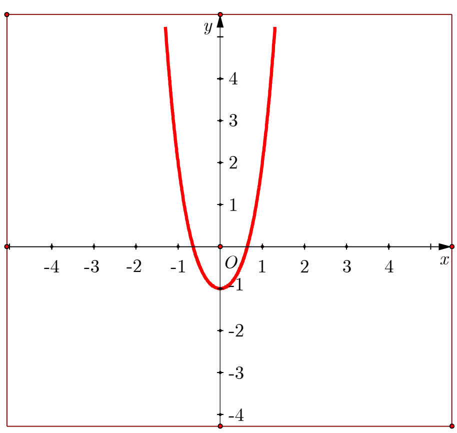


D.

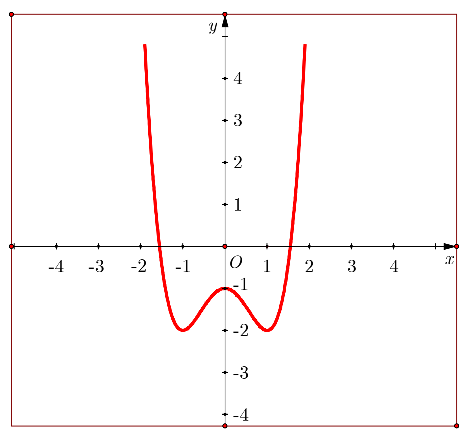


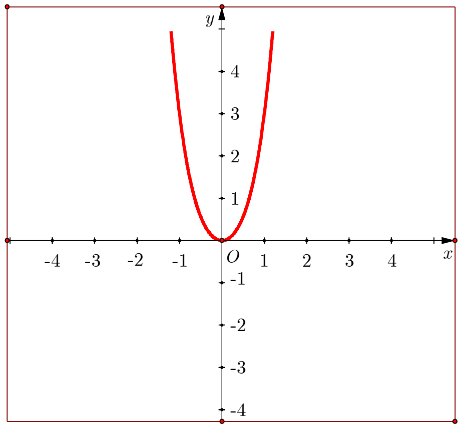
Câu 19. Cho hàm số $(C): y = x^4 + 2x^2 - 1$. Đồ thị hàm số (C) là đồ thị nào trong các đồ thị sau?

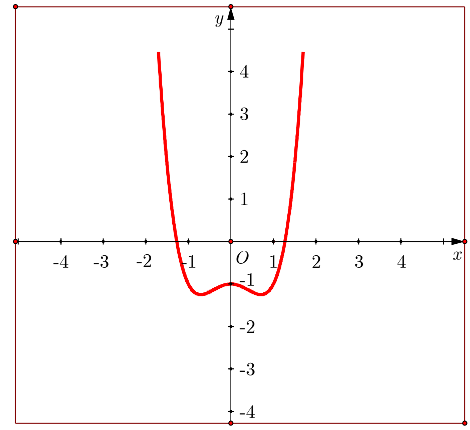
A.



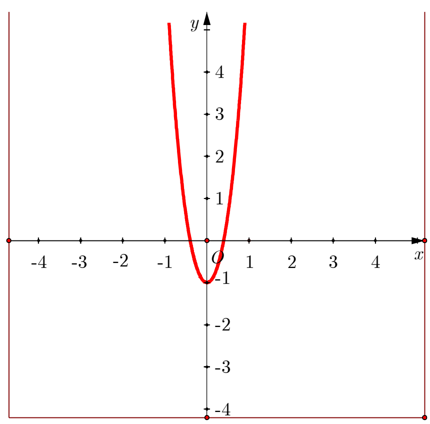
B.

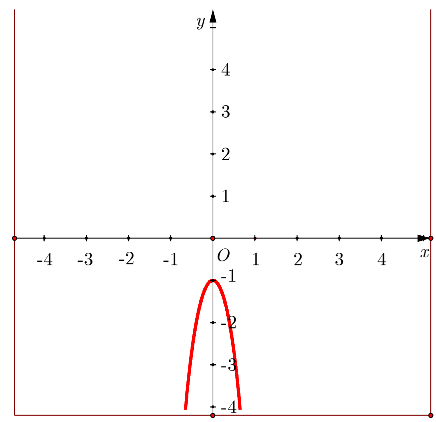


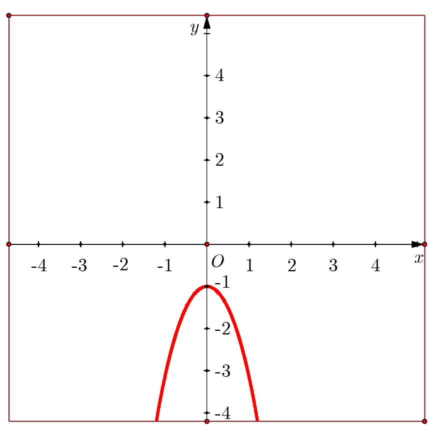
C. 

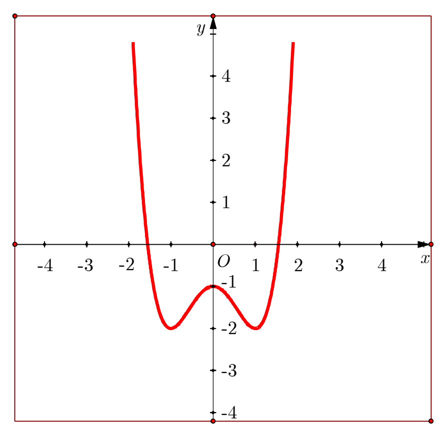
D. 

Câu 20. Đồ thị của hàm số $y = -3x^4 - 6x^2 + 1$ là đồ thị nào trong các đồ thị sau đây?

A. 

B. 

C. 

D. 

Câu 21. Bảng biến thiên sau đây là của một trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

C. $y = x^3 + 3x^2 - 2$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.

Câu 22. Bảng biến thiên sau đây là của một trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y = -x^3 - 3x^2 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 - 3x$.

C. $y = x^3 + 3x^2 - 3x$ **D.** $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

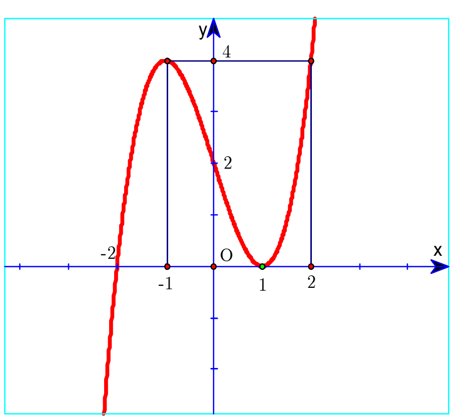
Câu 23. Bảng biến thiên sau đây là của một trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

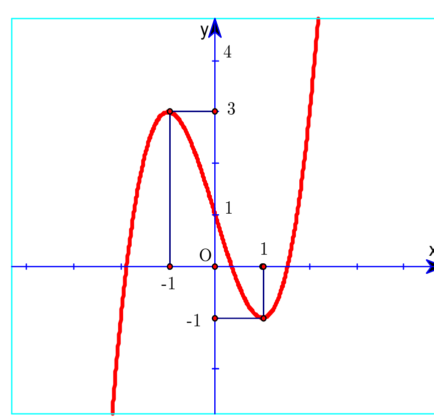
A. $y = x^3 + 3x^2 - 1$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. **D.** $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

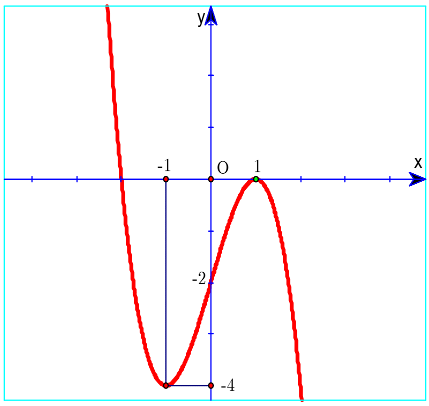
Câu 24. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là hình nào trong 4 hình dưới đây?

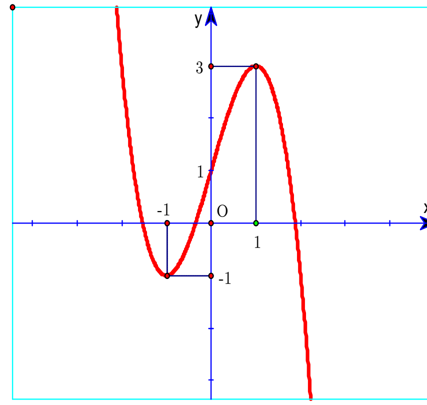


A. Hình 1.



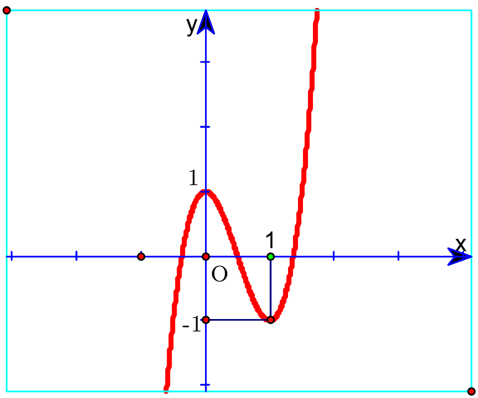
B. Hình 2.

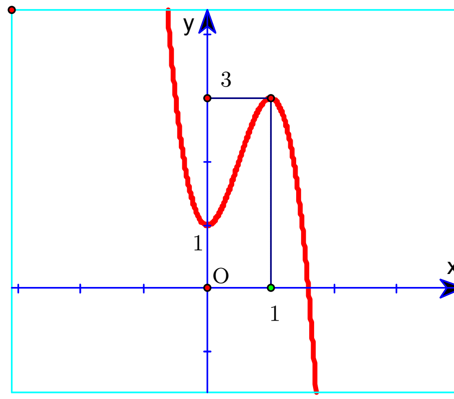




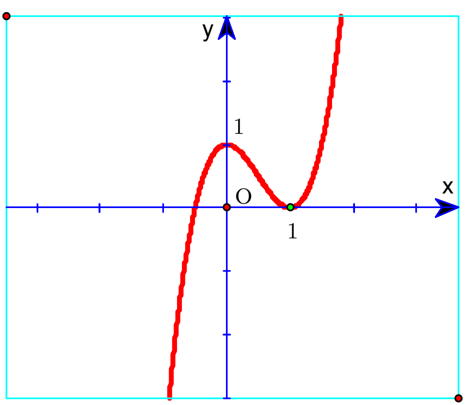
C. Hình 3. **D.** Hình 4.

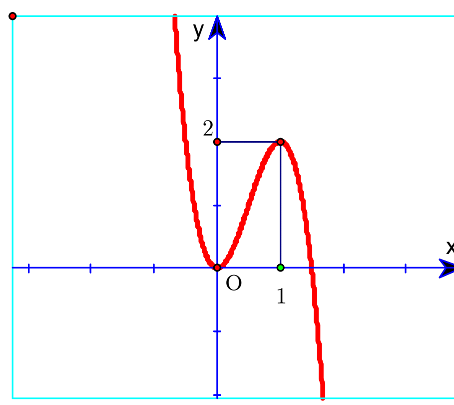
Câu 25. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có dạng:





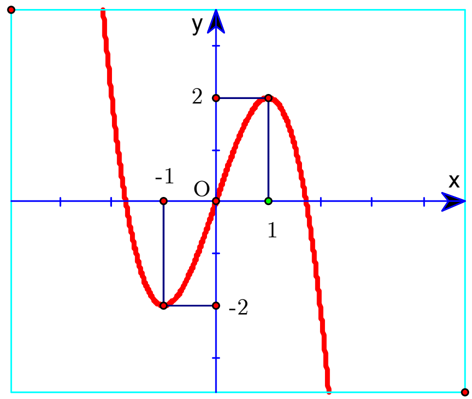
A. Hình 1. **B.** Hình 2.





C. Hình 3. **D.** Hình 4.

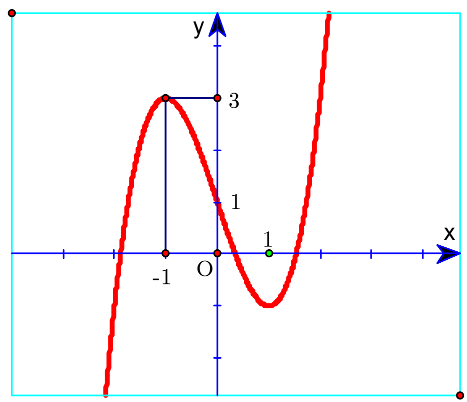
Câu 26. Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x - 1$.

C. $y = -x^3 + 3x$. **D.** $y = x^4 - x^2 + 1$.

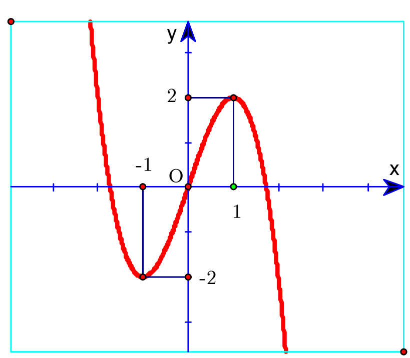
Câu 27. Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x + 1$.

C. $y = -x^2 + x - 1$. **D.** $y = x^4 - x^2 + 1$.

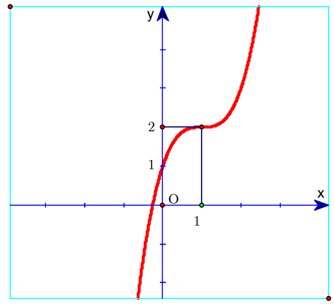
Câu 28. Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = -x^3 + 3x - 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x$.

C. $y = x^4 - x^2 + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x$.

Câu 29. Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

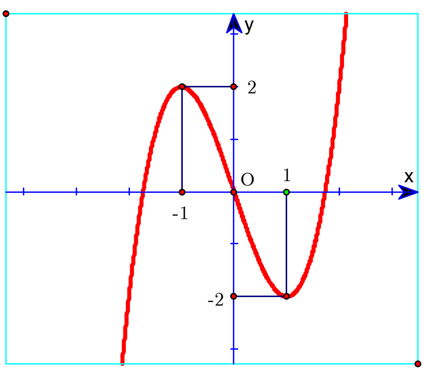


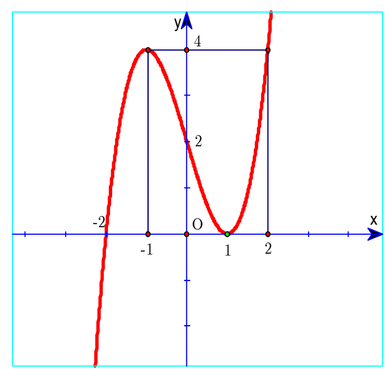
A. $y = x^3 - 3x + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

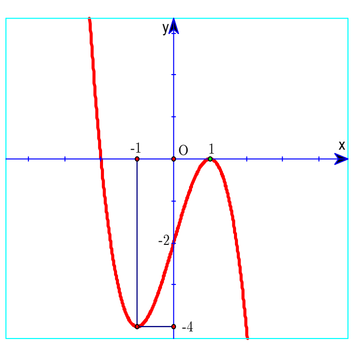
C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. **D.** $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

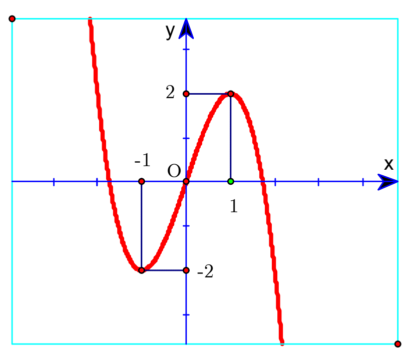
Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Đồ thị nào thể hiện hàm số $y = f(x)$?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

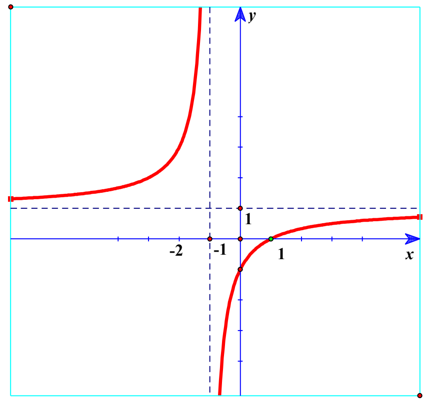
A. 

B. 

C. 

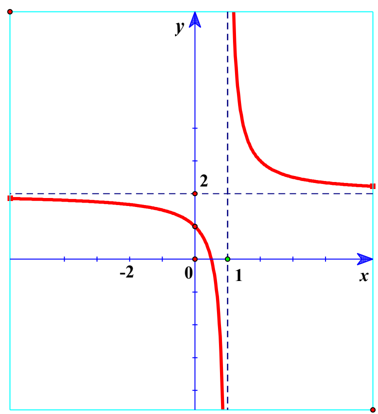
D. 

Câu 31. Xác định a, b để hàm số $y = \dfrac{ax-1}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?



A. $a=1,\ b=-1$. **B.** $a=1,\ b=1$. **C.** $a=-1,\ b=1$. **D.** $a=-1,\ b=-1$.

Câu 32. Xác định a,b,c để hàm số $y=\dfrac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?



A. $a=2,\ b=-1, c=1$. **B.** $a=2,\ b=1, c=1$.

C. $a=2,\ b=2, c=-1$. **D.** $a=2,\ b=1, c=-1$.

Câu 33. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-1}{cx+d}$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=2$ và đi qua điểm.

Lúc đó hàm số $y=\dfrac{ax+1}{cx+d}$ là hàm số nào trong bốn hàm số sau:

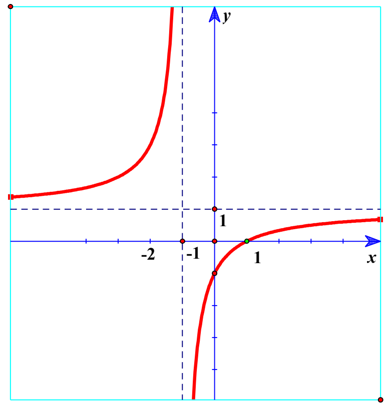
A. $y=\dfrac{-3}{5}.\dfrac{2x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$. **C.** $y=\dfrac{-2x-1}{-x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Câu 34. Bảng biến thiên ở hình bên dưới là bảng biến thiên của một trong bốn hàm số ở các đáp án A, B, C, D. Hàm số đó là hàm số nao?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

A. $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$. **D.** $y=\dfrac{2x-5}{x+1}$.

Câu 35. Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ hình bên. Khẳng định nào đúng?



A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số có một cực đại và một cực tiểu.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$		$+$	
y	-1 ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	0	↗	1

Khẳng định nào sau đây và khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

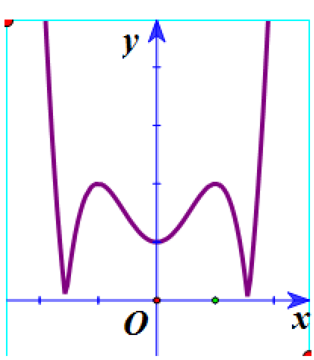
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

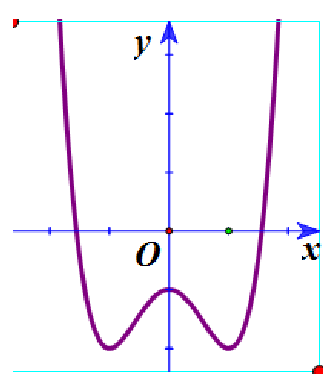
D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.

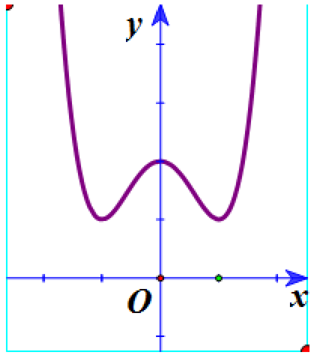
Câu 37. Đồ thị của hàm số $y=\left|x^4-2x^2-1\right|$ là đồ thị nào trong các đồ thị sau

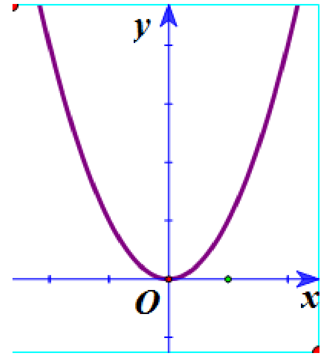
A.



B.



C. 

D. 

Câu 38. Giả sử đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ là (C), khi tịnh tiến (C) theo Ox qua trái 1 đơn vị thì sẽ được đồ thị của một hàm số trong 4 hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^4 - 2x^2$. **B.** $y = (x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 1$.

C. $y = x^4 - 2x^2 - 2$. **D.** $y = (x+1)^4 - 2(x+1)^2 - 1$.

Câu 39. Giả sử đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ là (C), khi tịnh tiến (C) theo Oy lên trên 1 đơn vị thì sẽ được đồ thị của hàm số

A. $y = x^4 - 2x^2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 2$.

C. $y = (x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 1$. **D.** $y = (x+1)^4 - 2(x+1)^2 - 1$.

Câu 40. Giả sử đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là (C), khi tịnh tiến (C) theo Oy xuống dưới 1 đơn vị thì sẽ được đồ thị của hàm số:

A. $y = f(x) - 1$. **B.** $y = f(x-1)$. **C.** $y = f(x) + 1$. **D.** $y = f(x+1)$.

Câu 41. Giả sử đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là (C), khi tịnh tiến (C) theo Ox qua phải 1 đơn vị thì sẽ được đồ thị của hàm số:

A. $y = f(x) + 1$. **B.** $y = f(x+1)$. **C.** $y = f(x-1)$. **D.** $y = f(x) - 1$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

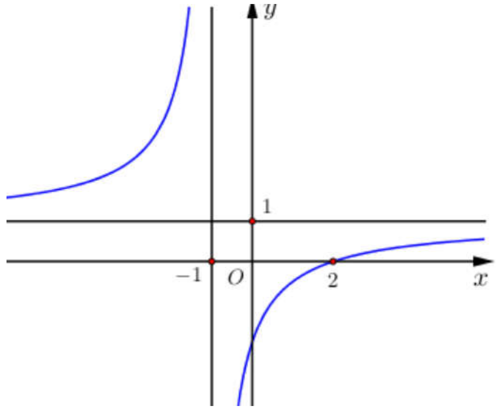
A. Hàm số có một cực đại bằng 0 và có một cực tiểu bằng -4.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -4.

C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3 và giá trị cực đại bằng 1.

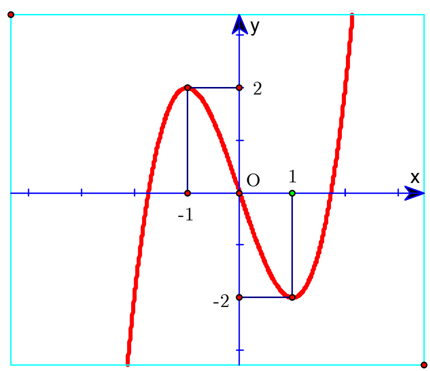
D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và đạt cực đại tại $x = 3$.

Câu 43. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $\dfrac{\left||x|-2\right|}{|x|+1}=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.



A. $[1;2]\cup\{0\}$. **B.** $[0;2)$. **C.** $[1;2)\cup\{0\}$. **D.** $[1;2)$.

Câu 44. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y=f(x)$ như hình sau. Chọn đáp án đúng?



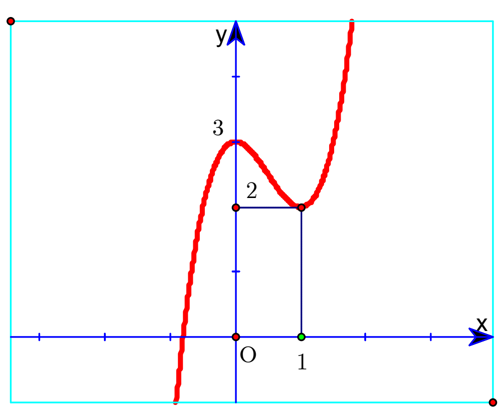
A. Phương trình $f''(x)=0$ có nghiệm là $x=0$.

B. Hàm số đồng biến trên đoạn $(-2;1)$ và $(1;2)$.

C. Hàm số không có cực trị.

D. Hàm số có hệ số $a<0$.

Câu 45. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Nhận xét nào sau đây là **sai** ?



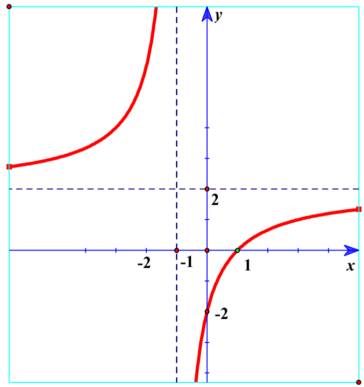
A. Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x=0$ và $x=1$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

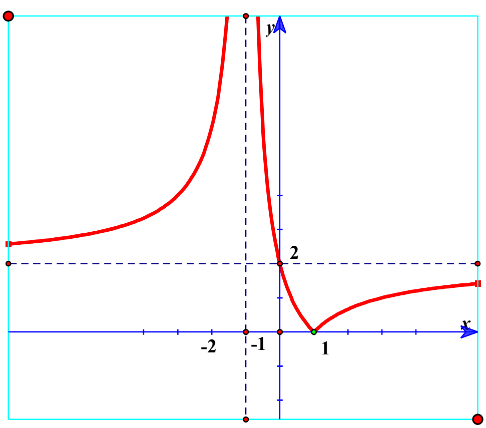
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 46. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ là hình vẽ sau:

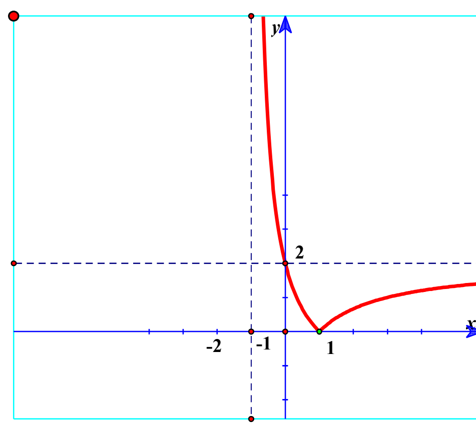


Đồ thị hàm số $y=\left|\dfrac{2x-2}{x+1}\right|$ là hình vẽ nào trong 4 hình vẽ sau:

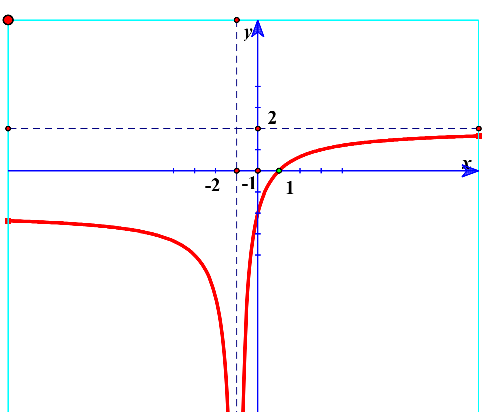
A.



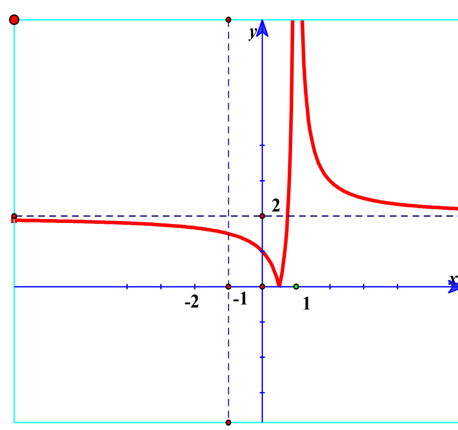
B.



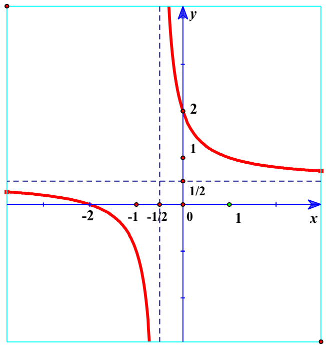
C.



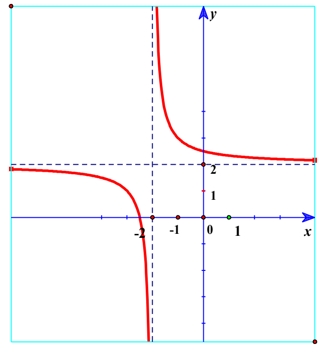
D.



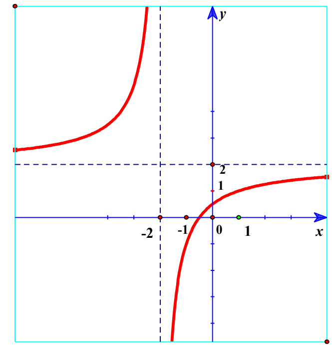
Câu 47. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$. Các đồ thị nào dưới đây có thể là đồ thị biểu diễn hàm số đã cho? Hãy chọn đáp án **sai**?



Hình (I)



Hình (II)



Hình (III)

A. Hình (I) và (III). **B.** Hình (III). **C.** Hình (I). **D.** Hình (II).

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây:

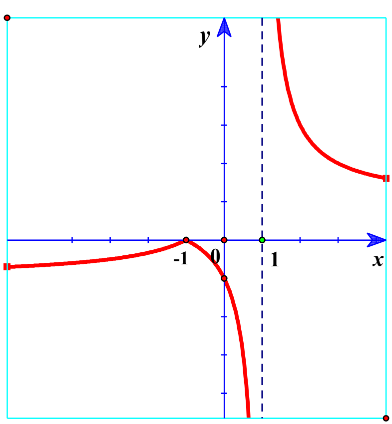
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	||	$+$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên là hàm số nào dưới đây:

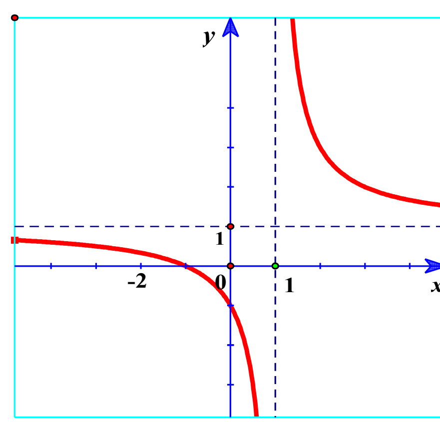
A. $y = \dfrac{1}{x(x+1)}$. **B.** $y = |x|(x+1)$. **C.** $y = \dfrac{x}{|x+1|}$. **D.** $y = \dfrac{|x|}{x+1}$.

Câu 49. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{|x+1|}{x-1}$ là hình vẽ nào trong các hình vẽ sau:

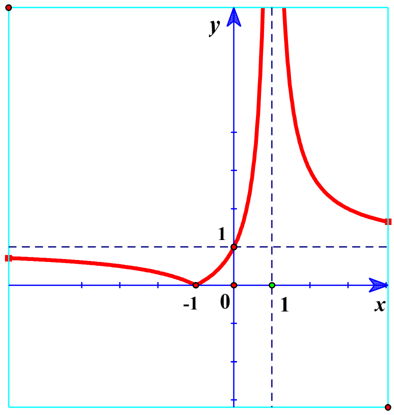
A.



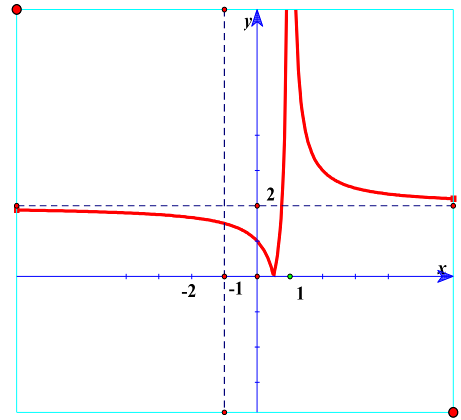
B.



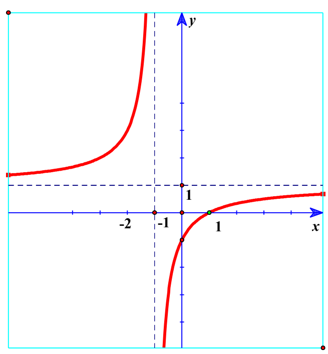
C.



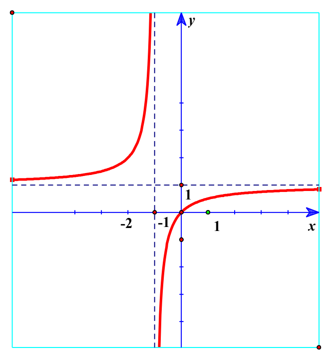
D.



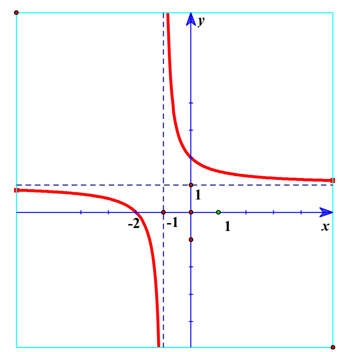
Câu 50. Cho hàm số $y = \dfrac{x - m^2 - 1}{x + 1}$. Các đồ thị nào dưới đây có thể là đồ thị biểu diễn hàm số đã cho?



Hình (I)



Hình (II)

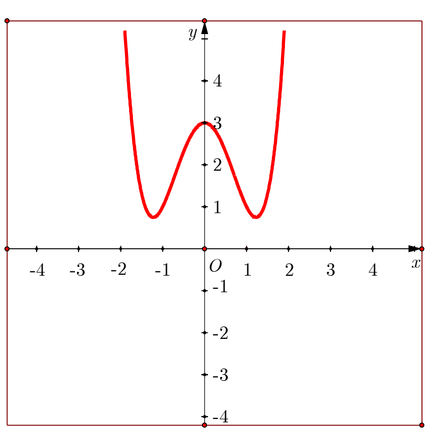


Hình (III)

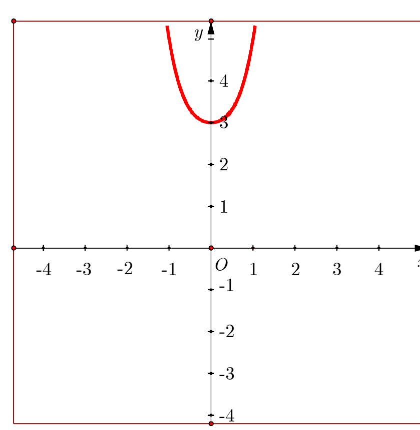
A. Hình (I) và (II). **B.** Hình (I). **C.** Hình (I) và (III). **D.** Hình (III).

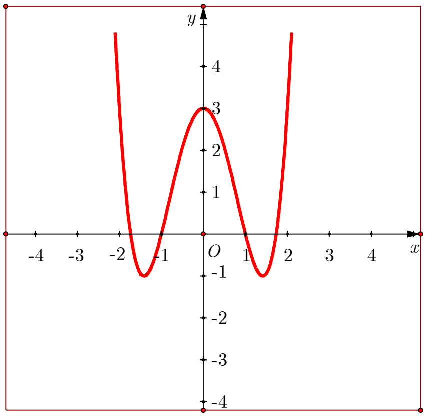
Câu 51. Cho hàm số $y = x^4 - \left(m^2 + 1\right)x^2 + 3$. Đồ thị nào dưới đây có thể là đồ thị của hàm số đã cho?

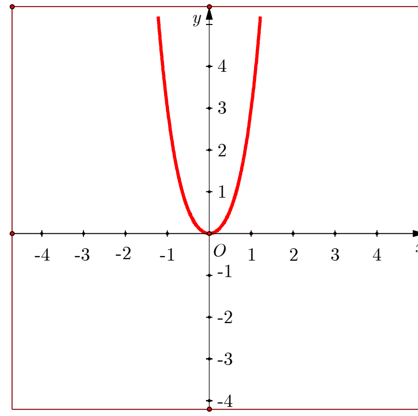
A.



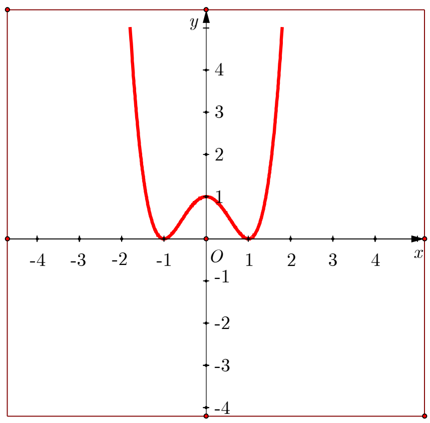
B.



C. 

D. 

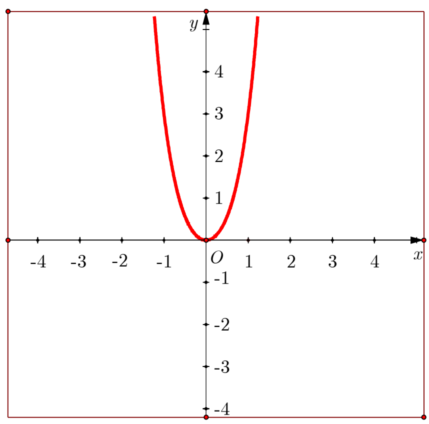
Câu 52. Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $a < 0,\ b > 0,\ c = 1$. **B.** $a > 0,\ b > 0,\ c = 1$.

C. $a > 0,\ b < 0,\ c = 1$. **D.** $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.

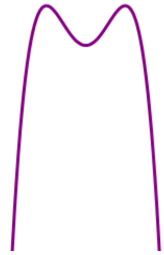
Câu 53. Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó:



A. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$. **B.** $a > 0,\ b \geq 0,\ c = 0$.

C. $a < 0,\ b \leq 0,\ c = 0$. **D.** $a > 0,\ b < 0,\ c = 0$.

Câu 54. Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó



A. $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$. **B.** $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$. **C.** $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$. **D.** $a < 0,\ b > 0$.

Câu 55. Cho hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C). Chọn khẳng định đúng nhất:

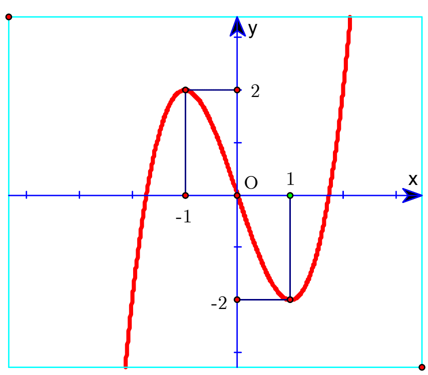
A. Đồ thị (C) có ít nhất một điểm cực đại.

B. Đồ thị (C) có đúng một điểm cực tiểu.

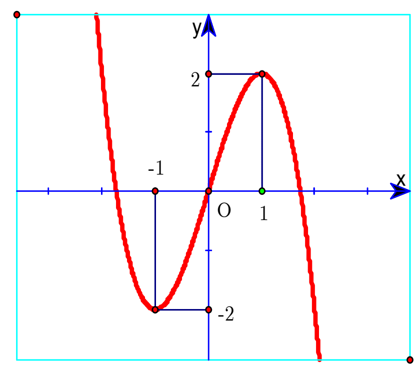
C. Đồ thị (C) có ít nhất một điểm cực tiểu.

D. Đồ thị (C) có đúng một điểm cực đại.

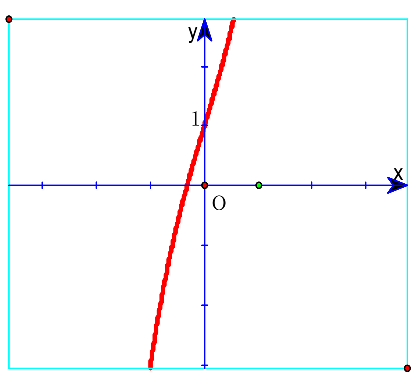
Câu 56. Cho hàm số bậc 3 có dạng: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



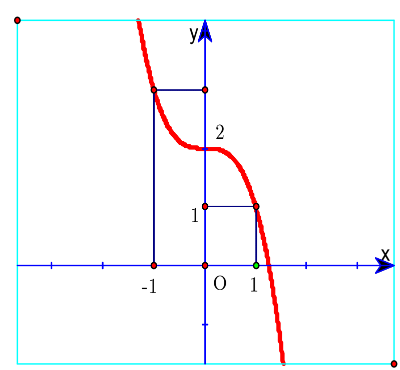
(I)



(II)



(III)



(IV)

Hãy chọn đáp án đúng?

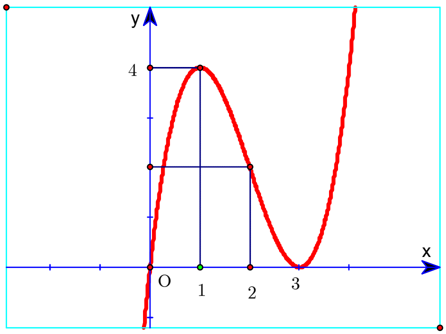
A. Đồ thị (IV) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có nghiệm kép.

B. Đồ thị (II) xảy ra khi $a \neq 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

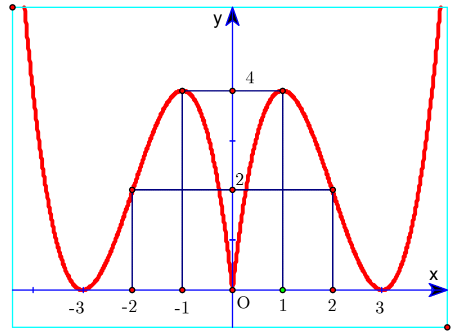
C. Đồ thị (I) xảy ra khi $a < 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

D. Đồ thị (III) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ vô nghiệm.

Câu 57. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1

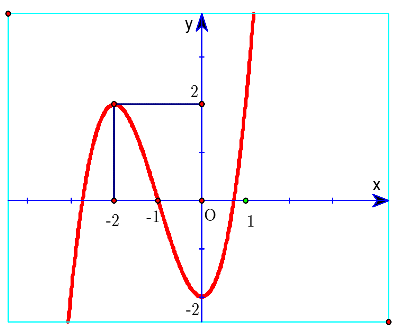


Hình 2

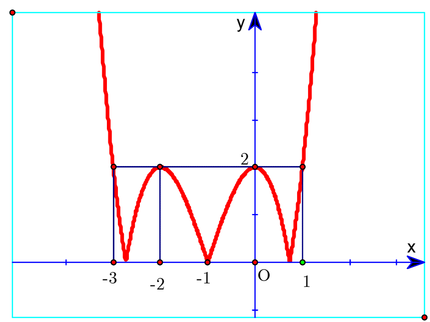
A. $y=|x|^3+6|x|^2+9|x|$.   **B.** $y=|x|^3-6x^2+9|x|$.

C. $y=\left|x^3-6x^2+9x\right|$.   **D.** $y=-x^3+6x^2-9x$.

Câu 58. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-2$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1

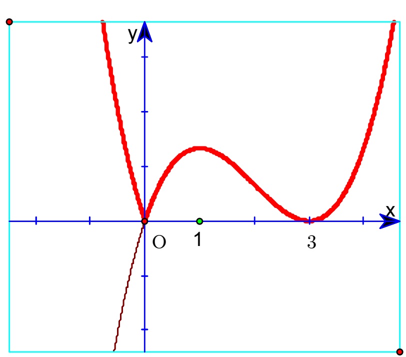


Hình 2

A. $y=-x^3-3x^2+2$.   **B.** $y=|x|^3+3|x|^2-2$.

C. $y=\left||x|^3+3x^2-2\right|$.   **D.** $y=\left|x^3+3x^2-2\right|$.

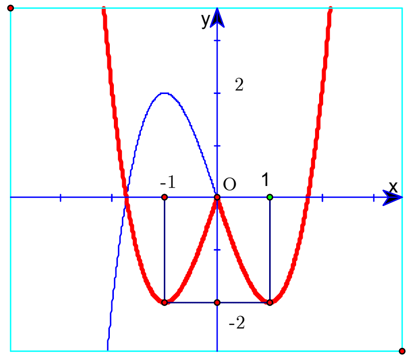
Câu 59. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=\left|\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right|$.   **B.** $y=|x|^3-2x^2+3|x|$.

C. $y=\left|x^3-2x^2+3x\right|$.   **D.** $y=\dfrac{1}{3}|x|^3-2x^2+3|x|$.

Câu 60. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=\left|x^3\right|-3\left|x\right|$. **B.** $y=\left|x^3+3x\right|$. **C.** $y=\left|x\right|^3+3\left|x\right|$. **D.** $y=\left|x^3-3x\right|$.

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1A	2A	3B	4A	5C	6A	7D	8A	9B	10A
11C	12D	13C	14A	15C	16D	17A	18A	19A	20A
21B	22D	23C	24A	25A	26A	27A	28B	29C	30A
31B	32D	33B	34A	35C	36A	37A	38D	39A	40A
41C	42A	43A	44A	45B	46A	47D	48D	49D	50B
51A	52C	53B	54D	55C	56D	57B	58D	59A	60A

Câu 1. **Chọn A.**

Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$. Tiệm cận ngang $y=1$ nên loại **trường hợp D.**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ đi qua điểm $(0;2)$ nên chọn **đáp án A.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)\Bigg|_{x=10}=\dfrac{1}{81}>0$ suy ra hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định**, loại B, D.**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ đi qua điểm $(0;2)$ nên chọn **đáp án A.**

Câu 2. **Chọn A.**

Hàm số $y=\dfrac{2+2x}{2+x}$ có tiệm cận đứng $x=-2$. Tiệm cận ngang $y=2$ nên loại **đáp án B, D.**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2+2x}{2+x}$ đi qua điểm $(-3;4)$ nên chọn **đáp án A.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2+2x}{2+x}\right)_{x=1}\approx 0,2>0$ suy ra hàm số $y=\dfrac{2+2x}{2+x}$ đồng biến trên tập xác định**, loại D.**

Sử dụng chức năng CALC của máy tính: $x=1$ nên chọn **đáp án A.**

Câu 3. **Chọn B.**

Nhìn vào đồ thị ta thấy ngay đây là hàm có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ nên loại đáp án **A, C.**

Hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có $ab-bc=1>0$ nên loại đáp án **D.**

Hàm số $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$ có $ad-bc=-3<0$ nên chọn đáp án **B.**

Câu 4. **Chọn A.**

Nhìn vào đồ thị ta thấy ngay tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=2$. Loại **B, D.**

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;-1)$.

$y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ khi $x=0\Rightarrow y=1$. Loại đáp án **B.**

$y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ khi $x=0\Rightarrow y=-1$. Chọn đáp án **A.**

Câu 5. **Chọn C.**

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy ngay tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$.

suy ra loại đáp án **A.**

Nhìn vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

$y=\dfrac{-x-2}{x-1}$ có $ad-bc=3>0$. Loại đáp án **B.** $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$ có $ad-bc=4>0$. Loại đáp án **D.**

$y=\dfrac{-x+3}{x-1}$ có $ad-bc=-2<0$. Chọn đáp án **C.**

Câu 6. **Chọn A.**

Hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$ tiệm cận ngang $y=3$

Câu 7. **Chọn D.**

Nhìn vào ta thấy đây là hàm số có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ nên không có cực trị.

Câu 8. **Chọn A.**

Nhìn vào ta thấy đồ thị có tiệm cận đứng $x=-1$ tiệm cận ngang $y=2$.

Câu 9. **Chọn B.**

Nhìn vào ta thấy đồ thị có tiệm cận đứng $x=0$ tiệm cận ngang $y=1$

Câu 10. **Chọn A.**

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị có tiệm cận đứng $x=1$ tiệm cận ngang $y=-1$

Câu 11. **Chọn C.**

Từ đồ thị và đáp án suy ra đây là hàm số bậc 4 trùng phương: $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$

có 3 cực trị nên $a>0,b<0$. Do đó loại B, D. Do đồ thị qua $O(0;0)$ nên $c=0$ loại A.

Câu 12. **Chọn D.**

Từ đồ thị và đáp án suy ra đây là hàm số bậc 4 trùng phương: x có 1 cực trị và hướng xuống nên $a<0,b<0$ nên loại A, B, C.

Câu 13. **Chọn C.**

Từ đồ thị và đáp án suy ra đây là hàm số bậc 4 trùng phương: y' có 3 cực trị và hướng xuống nên $a<0,b>0$ nên loại A, B, D.

Câu 14. **Chọn A.**

Từ đồ thị và đáp án suy ra đây là hàm số bậc 4 trùng phương: $+$ có 1 cực trị và hướng lên nên $a>0,b>0$ nên loại B, C, D.

Câu 15. **Chọn C.**

Từ đồ thị suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$ nên loại A, B, D

Câu 16. **Chọn D.**

Từ đồ thị ta suy ra các tính chất của hàm số:

1. Hàm số đạt CĐ tại $x=0$ và đạt CT tại $x=\pm 1$.

2. Hàm số tăng trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

3. Hàm số giảm trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

4. Hàm số không có tiệm cận.

Câu 17. **Chọn C.**

Từ đồ thị suy ra:

1. Hàm số đạt CĐ tại $x=\pm 1$, đạt CT tại $x=0$.

2. Hàm số không có GTNN vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$ và GTLN của hàm số là 2 khi $x=\pm 1$.

Câu 18. **Chọn A.**

Hàm số qua $(0;-1)$ do đó loại B, C. Do $a>0$ nên đồ thị hướng lên suy ra đáp án A.

Câu 19. **Chọn A.**

Hướng dẫn giải:

Do $a>0$, $b>0$ nên hàm số chỉ có 1 cực tiểu, suy ra loại B

Hàm số qua (1; 2) nên loại C, D.

Câu 20. **Chọn B.**

Do $a<0, b<0$ nên đồ thị hướng xuống và chỉ có 1 cực trị nên loại B, D.

Hàm số qua $(0;1)$ nên loại C.

Câu 21. **Chọn B.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hệ số $a>0$ nên ta loại phương án A và D và $y'=0$ có hai nghiệm là $x=0$ hoặc $x=2$ nên chỉ có phương án B là phù hợp.

Câu 22. **Chọn D.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hệ số $a>0$ nên ta loại phương án A và B và $y'=0$ có nghiệm kép là $x=1$ nên chỉ có phương án D là phù hợp.

Câu 23. **Chọn C.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hệ số $a<0$ nên ta loại phương án A và B $y'=0$ có hai nghiệm là $x=0$ hoặc $x=2$ nên chỉ có phương án C là phù hợp.

Câu 24. **Chọn A.**

Để ý khi $x=0$ thì $y=2$ nên loại cả ba phương án B, C và D.

Câu 25. **Chọn A.**

Để ý khi $x=0$ thì $y=1$ nên loại cả ba phương án D, $y'=0$ có hai nghiệm là $x=0$; $x=1$ và với $x=1$ thì $y=-1$ nên chỉ có phương án A là phù hợp.

Câu 26. **Chọn A.**

Để ý khi $x=0$ thì $y=0$ nên loại phương án D.

Dựa vào đồ thị, thấy đây là đồ thị của hàm bậc ba có hệ số $a>0$ nên loại hai phương án B và C.

Câu 27. **Chọn A.**

Để ý khi $x=0$ thì $y=1$ nên loại phương án D.

Dựa vào đồ thị, thấy đây là đồ thị của hàm bậc ba có hệ số $a>0$ nên loại hai phương án B và C.

Câu 28. **Chọn B.**

Để ý khi $x=0$ thì $y=0$ nên loại cả hai phương án A, C.

Dựa vào đồ thị, thấy đây là đồ thị của hàm bậc ba có hệ số $a<0$ nên loại phương án D.

Câu 29. Chọn C.

Để ý khi 2 thì $(-1;4),(1;4)$ nên loại cả ba phương án D.

Dựa vào đồ thị, ta thấy đây là đồ thị của hàm bậc ba có hệ số $y=x^3+3x^2-2$ nên loại phương án B.

Một dữ kiện nữa là đồ thị đi qua điểm 1 nên loại luôn phương án A.

Câu 30. Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1;2)$, điểm cực tiểu là $(1;-2)$ nên loại ba phương án B, C, D.

Câu 31. Chọn B.

Dựa vào đồ thị, ta có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$ $\quad(1)$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax-1}{x+b}$ có tiệm cận đứng $x=-b$, tiệm cận ngang $y=a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a=1, b=1$.

Câu 32. Chọn D.

Dựa vào đồ thị, ta có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=2$ và đồ thị đi qua điểm $(0;1)$ (1). Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax-1}{x+b}$ có tiệm cận đứng $x=-b$, tiệm cận ngang $y=a$ và đi qua điểm $\left(0;\dfrac{-1}{b}\right)$ (2). Từ (1) và (2) suy ra: $a=2$, $b=1, c=-1$;

Câu 33. Chọn B.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax-1}{cx+d}$ có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$, tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$

Theo đề bài ta có $\begin{cases} \dfrac{a}{c}=2 \\ -\dfrac{d}{c}=2 \\ \dfrac{a.2-1}{c.2+d}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2c \\ -d=2c \\ 2a-1=-6c-3d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2c=0 \\ 2c+d=0 \\ 2a+6c+3d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=-1 \\ d=1 \end{cases}$

Câu 34. Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=2$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Đáp án C sai vì tiệm cận đứng $x=\dfrac{1}{2}$. đáp án D sai vì tiệm cận đứng $x=-1$, đáp án B sai vì $y'=\dfrac{1}{(x-1)^2}>0$

Câu 35. Chọn C.

Đáp án A sai vì đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$.

Đáp án B sai vì hàm số đồng biến

Đáp án D sai vì hàm số không có cực trị.

Câu 36. Chọn A.

Đáp án A đúng vì có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$, $y=-1$.

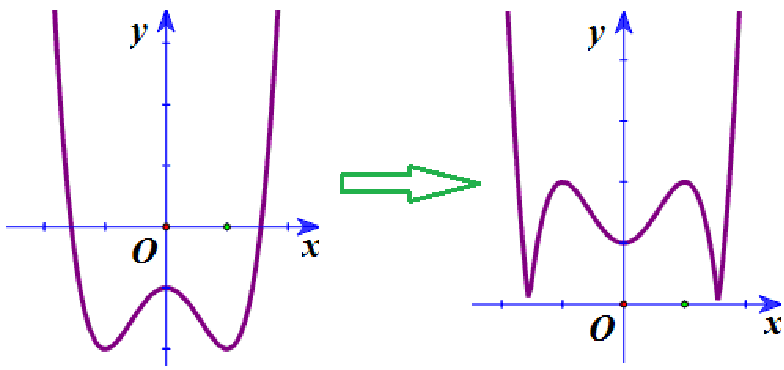
Đáp án B sai vì hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;0)$

Đáp án C sai vì đồ thị hàm số có 3 tiệm cận.

Đáp án D sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 37. Chọn A.

Vẽ đồ thị $y=x^4-2x^2-1$. Giữ nguyên phần đồ thị trên Ox, phần dưới Ox thì lấy đối xứng qua Ox ta được đồ thị cần vẽ



Câu 38. Chọn D.

Đặt $f(x)=x^4-2x^2-1$ thì khi tịnh tiến (C) theo Ox qua trái 1 đơn vị thì sẽ được đồ thị của $y=f(x+1)=(x+1)^4-2(x+1)^2-1$.

Câu 39. Chọn A.

Đặt $f(x)=x^4-2x^2-1$ thì khi tịnh tiến (C) theo Oy lên trên 1 đơn vị thì sẽ được đồ thị của $y=f(x)+1=x^4-2x^2$.

Câu 40. Chọn A.

Theo lý thuyết, ta chọn câu A.

Câu 41. Chọn C.

Theo lý thuyết, ta chọn câu C.

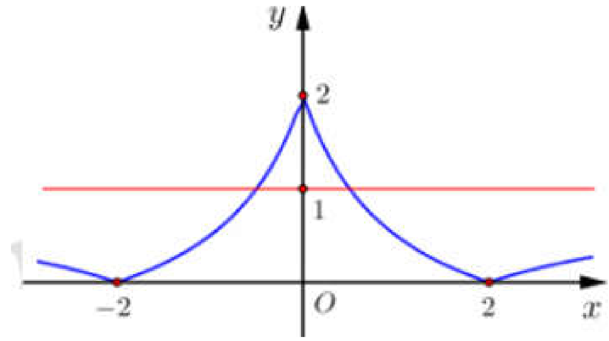
Câu 42. Chọn A.

Dựa vào BBT, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ và đạt cực đại tại $x=1$ nên loại phương án C. Hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$; y' đổi dấu và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$ nên hàm số không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất nên loại phương án B. Hàm số có giá trị cực tiểu là $y_{CT}=-4$ và giá trị cực đại là $y_{CD}=0$ nên loại phương án D.

Câu 43. Chọn C.

Ta xóa phần bên trái trục tung của $(C): y=\dfrac{x-2}{x+1}$ rồi lấy đối xứng phần bên phải trục tung của (C) qua trục tung ta được đồ thị (C') của hàm số $y=\dfrac{|x|-2}{|x|+1}$. Lấy đối xứng

(C') qua trục hoành rồi xóa phần phía dưới trục hoành ta được đồ thị $(C''): y = \dfrac{\left||x|-2\right|}{|x|+1}$ như hình vẽ bên.



Dựa vào đồ thị hàm số, phương trình $\dfrac{\left||x|-2\right|}{|x|+1} = m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \in [1;2) \cup \{0\}$.

Câu 44. Chọn A.

Dựa vào đồ thị hàm số dễ thấy hàm số đã cho là hàm bậc ba có hệ số $a > 0$ và có hai điểm cực trị nên loại các phương án C, D. Dựa vào đồ thị hàm số dễ thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$ nên loại luôn phương án B.

Câu 45. Chọn B.

Dựa vào đồ thị hàm số dễ thấy các phương án B, C, D đều đúng.

Câu 46. Chọn A.

Ta có $y = \left|\dfrac{2x-2}{x+1}\right| = \begin{cases} \dfrac{2x-2}{x+1} & \text{nếu } \dfrac{2x-2}{x+1} \geq 0 \\ -\dfrac{2x-2}{x+1} & \text{nếu } \dfrac{2x-2}{x+1} < 0 \end{cases}$

Đồ thị hàm số $y = \left|\dfrac{2x-2}{x+1}\right|$ có được bằng cách:

+ Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$ nằm phía trên trục hoành.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Câu 47. Chọn D.

Hàm số $y = \dfrac{mx+1}{x+m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Ta có $y' = \dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$,

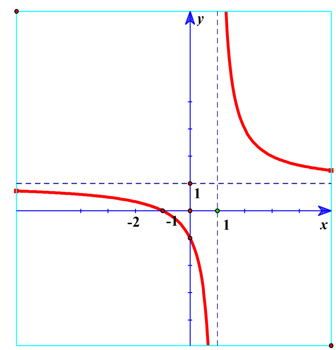
$y' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$; $y' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$. Hình (I) có $m = -\dfrac{1}{2} \in (-1;1)$ nên $y' < 0$ suy ra hàm số nghịch biến, do đó Hình (I) đúng. Hình (II) có $m=-\dfrac{3}{2}<-1$ nên $y'>0$ suy ra hàm số đồng biến, do đó Hình (II) sai. Hình (III) có $m=-2<-1$ nên $y'>0$ suy ra hàm số đồng biến, do đó Hình (III) đúng.

Câu 48. Chọn D.

Đáp án B sai vì $\lim\limits_{x\to+\infty}|x|(x+1)=+\infty$. Đáp án C sai vì $y=\dfrac{x}{|x+1|}=\dfrac{x}{\sqrt{(x+1)^2}}$ có $y'(0)=1$ $\left(\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{|x+1|}\right)\Big|_{x=0}=1\right)$. Đáp án A sai vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(x+1)}=0$

Câu 49. Chọn A.

Vẽ đồ thị **hàm số** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$



$$y=\frac{|x+1|}{x-1}=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1} & \text{nếu } x\geq -1\\ -\dfrac{x+1}{x-1} & \text{nếu } x<-1\end{cases}$$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{|x+1|}{x-1}$ có được bằng cách:

+ Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ nằm phía bên phải đường thẳng $x=-1$.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ nằm phía bên trái đường thẳng $x=-1$ qua trục hoành.

Câu 50. Chọn B.

Hàm số $y=\dfrac{x-m^2-1}{x+1}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$y'=\dfrac{m^2+2}{(x+1)^2}$ suy ra $y'>0\,\forall m$, và $y=\dfrac{x-m^2-1}{x+1}$ đi qua điểm $(0;-1)$.

Hình (I) đúng.

Hình (II) sai vì không đi qua điểm $(0;-1)$.

Hình (III) sai vì không đi qua điểm $(0;-1)$.

Câu 51. Chọn A.

Do $a=1,\ b=-(m^2+1)<0$ nên đồ thị hàm số hướng lên và có 3 cực trị (loại B, D). Đồ thị hàm số qua (0; 3).

Câu 52. Chọn C.

Do đồ thị qua (0; 1) nên $c=1$. Đồ thị hướng lên nên $a>0$ và có 3 cực trị nên $ab<0$ suy ra $b<0$. Do đó chọn câu C.

Câu 53. Chọn B.

Đồ thị hướng lên nên $a>0$. Có 1 cực trị nên $ab\ge 0$ suy ra $b\ge 0$. Qua (0; 0) nên $c=0$. Do đó chọn câu B.

Câu 54. **Chọn D.**

Đồ thị hướng xuống và có 3 cực trị nên $a<0, b>0$ suy ra câu A (c không có điều kiện)

Câu 55. **Chọn C.**

Do $a=1>0$ nên (C) có 2 trường hợp là có 1 điểm cực tiểu hay có 2 điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

Câu 56. **Chọn D.**

Hàm số của đồ thị (II) có $a<0$ nên điều kiện $a\ne 0$ chưa đảm bảo. Do đó loại phương án B.

Hàm số của đồ thị (I) có $a>0$ nên loại luôn phương án C.

Hàm số của đồ thị (IV) có $a<0$ nên loại luôn phương án D.

Câu 57. **Chọn B.**

Đồ thị Hình 2 đối xứng nhau trục tung và đi qua điểm $(-1;4),(1;4)$ nên phương án B là phù hợp nhất.

Câu 58. **Chọn D.**

Vì đồ thị Hình II nằm phía trên trục hoành và đi qua điểm $(-1;0)$.

Câu 59. **Chọn A.**

Vì đồ thị nằm phía trên trục hoành và đi qua điểm $(3;0)$.

Câu 60. **Chọn A.**

Vì đồ thị đối xứng nhau trục tung và đi qua điểm $(-1;-2),(1;-2)$.

Chủ đề 6 SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

☆☆☆

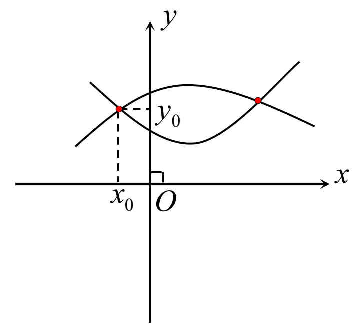
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y=g(x)$ có đồ thị (C_2).

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $f(x)=g(x)$ (1).

Khi đó:

- Số giao điểm của (C_1) và (C_2) bằng với số nghiệm của phương trình (1).
- Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ x_0 của giao điểm.
- Để tính tung độ y_0 của giao điểm, ta thay hoành độ x_0 vào $y=f\left(x\right)$ hoặc $y=g\left(x\right)$.
- Điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2).



B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN THƯỜNG GẶP

I. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BA

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Bài toán : Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$ có đồ thị (C) và hàm số bậc nhất $y = kx + n$ có đồ thị d.

Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d: ax^3 + bx^2 + cx + d = kx + n \quad (1)$

Phương trình (1) là phương trình bậc ba nên có ít nhất một nghiệm. Ta có 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Phương trình (1) có *"nghiệm đẹp"* x_0.

Thường thì đề hay cho nghiệm $x_0 = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;...$ thì khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - x_0 = 0 \\ Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Khi đó:

(C) và d có ba giao điểm	$\Leftrightarrow$	phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt
	$\Leftrightarrow$	phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm x_0.
(C) và d có hai giao điểm	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm x_0 hoặc phương trình (2) có nghiệm kép khác x_0.
(C) và d có một giao điểm	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	phương trình (1) có một nghiệm phương trình (2) vô nghiệm hoặc phương trình (2) có nghiệm kép là x_0.

Trường hợp 2: Phương trình (1) không thể nhẩm được *"nghiệm đẹp"*

Ta biến đổi phương trình (1) sao cho hạng tử chứa x tất cả nằm bên vế trái, các hạng tử chứa tham số m nằm bên vế phải, nghĩa là $(1) \Leftrightarrow f(x) = g(m)$.

Ta khảo sát và vẽ bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ và biện luận số giao điểm của (C) và d theo tham số m.

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Tìm giao điểm của đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy có ba giao điểm $A(0;1), B(1;1), C(2;1)$.

Bài toán 2: Cho hàm số $y = mx^3 - x^2 - 2x + 8m$ có đồ thị là (C_m). Tìm m đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $mx^3 - x^2 - 2x + 8m = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow (x+2)\left[mx^2 - (2m+1)x + 4m\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -2 & \\ mx^2 - (2m+1)x + 4m = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = -12m^2 + 4m + 1 > 0 \\ 12m + 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\dfrac{1}{6} < m < \dfrac{1}{2} \\ m \neq -\dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\dfrac{1}{6} < m < \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $m \in \left(-\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài toán 3: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + 1$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x(2x^2 - 3mx + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 - 3mx + m = 0\,(*) \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 8m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{8}{9}; +\infty\right).$$

Vậy $m \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{8}{9}; +\infty\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài toán 4: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là $x^3 + mx + 2 = 0$.

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình, nên phương trình tương đương với

$$m = -x^2 - \frac{2}{x} \; (x \neq 0)$$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 - \frac{2}{x}$ với $x \neq 0$, suy ra $f'(x) = -2x + \frac{2}{x^2} = \frac{-2x^3 + 2}{x^2}$.

Vậy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow m > -3$.

Vậy $m > -3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài toán 5: Tìm m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x = -m \quad (1)$$

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đường $(C): y = x^3 - 3x^2 - 9x$ và đường thẳng $d: y = -m$. Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của (C) và d.

Khảo sát và vẽ bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -27 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < 27$.

Bài toán 6: Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0)$ với hệ số góc k $(k \in \mathbb{R})$. Tìm k để đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại ba điểm phân biệt A, B, C và tam giác OBC có diện tích bằng 1 (O là gốc tọa độ).

Lời giải:

Đường thẳng d đi qua $A(-1;0)$ và có hệ số góc k nên có dạng $y = k(x+1)$, hay $kx - y + k = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = kx + k \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4 - k) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ g(x) = x^2 - 4x + 4 - k = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k \neq 9 \end{cases}.$$

Khi đó $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{k}; x = 2 + \sqrt{k}$. Vậy các giao điểm của hai đồ thị lần lượt là

$A(-1;0)$, $B\left(2 - \sqrt{k}; 3k - k\sqrt{k}\right)$, $C\left(2 + \sqrt{k}; 3k + k\sqrt{k}\right)$.

Tính được $BC = 2\sqrt{k}\sqrt{1+k^2}$, $d(O,BC) = d(O,d) = \dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$.

Khi đó $S_{\Delta OBC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}.2\sqrt{k}.\sqrt{1+k^2} = 1 \Leftrightarrow |k|\sqrt{k} = 1 \Leftrightarrow k^3 = 1 \Leftrightarrow k = 1$.

Vậy $k = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

II. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$ có đồ thị (C) và đường thẳng $y = k$ có đồ thị d.

Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d: ax^4 + bx^2 + c = k \quad (1)$

Đặt $t = x^2 \ (t \geq 0)$ ta có phương trình $at^2 + bt + c - k = 0 \quad (2)$

Khi đó :

(C) và d có bốn giao điểm	$\Leftrightarrow$	(1) có bốn nghiệm phân biệt
	$\Leftrightarrow$	(2) có hai nghiệm dương phân biệt
	$\Leftrightarrow$	phương trình (2) thỏa $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.
(C) và d có ba giao điểm	$\Leftrightarrow$	(1) có ba nghiệm phân biệt
	$\Leftrightarrow$	(2) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm dương và một nghiệm $t = 0$.
(C) và d có hai giao điểm	$\Leftrightarrow$	(1) có hai nghiệm phân biệt
	$\Leftrightarrow$	(2) có nghiệm kép dương hoặc có hai nghiệm trái dấu.
(C) và d có một giao điểm	$\Leftrightarrow$	(1) có một nghiệm
	$\Leftrightarrow$	(2) có nghiệm $t = 0$ và một nghiệm âm.
(C) và d không có giao điểm	$\Leftrightarrow$	(1) vô nghiệm
	$\Leftrightarrow$	(2) vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm âm.

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Tìm giao điểm của đồ thị $(C): y = x^4 + 2x^2 - 3$ và trục hoành.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -3 \end{array}\right. \Rightarrow x = 1 \vee x = -1.$

Vậy có hai giao điểm: $A(-1;0)$, $B(1;0)$.

Bài toán 2: Tìm m để phương trình $x^4 - 2x^2 - m + 3 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải:

Phương trình: $x^4 - 2x^2 - m + 3 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 3 = m \quad (1)$

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y = x^4 - 2x^2 + 3$ và đường thẳng $d: y = m$. Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của (C) và d.

Khảo sát và vẽ bảng biến thiên của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 < m < 3$. Vậy $2 < m < 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài toán 3: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 - 3m - 2 \ (C_m)$. Định m để đồ thị (C_m) cắt đường thẳng $d: y = -2$ tại bốn điểm phân biệt.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d:

$x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 - 3m - 2 = -2 \Leftrightarrow x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 - 3m = 0 \quad (1)$.

Đặt $t = x^2 \ (t \geq 0)$, phương trình trở thành $t^2 - 2(m+1)t + m^2 - 3m = 0 \ (2)$.

(C_m) và d có bốn giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m + 1 > 0 \\ m^2 - 3m > 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{5} \\ m < 0, m > 3 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{5} < m < 0 \\ m > 3 \end{array}\right..$$

Vậy $m \in \left(-\dfrac{1}{5}; 0\right) \cup (3; +\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài toán 4: Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m \ (C)$. Tìm m để đường thẳng $d: y = -1$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt có hoành độ đều nhỏ hơn 2.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d: y = -1$ là

$x^4-(3m+2)x^2+3m=-1 \Leftrightarrow x^4-(3m+2)x^2+3m+1=0$.

Đặt $t=x^2\ (t\ge 0)$, ta có phương trình $t^2-(3m+2)t+3m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3m+1 \end{array}\right.$.Khi đó $\left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=3m+1 \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 0<3m+1<4 \\ 3m+1\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}<m<1$ và $m\ne 0$.

Vậy $-\dfrac{1}{3}<m<1$ và $m\ne 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài toán 5: Cho hàm số $y=x^4-(3m+4)x^2+m^2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-(3m+4)x^2+m^2=0$ $\quad (1)$

Đặt $t=x^2\ (t\ge 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2-(3m+4)t+m^2=0$ $\quad (2)$

(C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=5m^2+24m+16>0 \\ P=m^2>0 \\ S=3m+4>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<-4 \vee m>-\dfrac{4}{5} \\ m\ne 0 \\ m>-\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{4}{5} \\ m\ne 0 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm $0<t_1<t_2$.

Suy ra phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt là $x_1=-\sqrt{t_2}<x_2=-\sqrt{t_1}<x_3=\sqrt{t_1}<x_4=\sqrt{t_2}$.

Bốn nghiệm x_1,x_2,x_3,x_4 lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3 \Leftrightarrow -\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2=9t_1$ (3)

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} t_1+t_2=3m+4 & (4) \\ t_1t_2=m^2 & (5) \end{cases}$

Từ (3) và (4) ta suy ra được $\begin{cases} t_1=\dfrac{3m+4}{10} \\ t_2=\dfrac{9(3m+4)}{10} \end{cases} (6)$.

Thay (6) vào (5) ta được $\dfrac{9}{100}(3m+4)^2=m^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3(3m+4)=10m \\ 3(3m+4)=-10m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=12 \\ m=-\dfrac{12}{19} \end{array}\right.$ (thỏa (*))

Vậy giá trị m cần tìm là $m = 12$; $m = -\frac{12}{19}$.

III. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ có đồ thị (C) và đường thẳng $y=kx+n$ có đồ thị d. Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=kx+n \Leftrightarrow \begin{cases} Ax^2+Bx+C=0 \quad (1) \\ x\neq -\dfrac{d}{c} \end{cases}$$

(C) và d có hai giao điểm $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{d}{c}$.

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị $(C): y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ và đường thẳng $d: y=x+2$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{2x-1}=x+2$ (1). Điều kiện: $x\neq \dfrac{1}{2}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2x+1=(2x-1)(x+2) \Leftrightarrow 2x^2+x-3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2} \\ x=1\Rightarrow y=3 \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ và $(1;3)$.

Bài toán 2: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x-1}=-x+m$ $\qquad (1)$

Điều kiện: $x\neq 1$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow$ $2x-1=(-x+m)(x-1)$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-(m-1)x+m-1=0 \qquad (2)$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=\left[-(m-1)\right]^2-4(m-1)>0 \\ 1-(m-1).1+m-1\neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2-6m+5>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty).$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$.

Bài toán 3: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x+2}$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đường thẳng $d: y=2x-1$ cắt đồ thị (C_m) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=\sqrt{10}$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{mx-1}{x+2}=2x-1 \qquad (1)$

Điều kiện: $x\neq -2$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow mx-1=(2x-1)(x+2)\Leftrightarrow 2x^2-(m-3)x-1=0 \quad (2)$

d cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=[-(m-3)]^2+8>0\\ 8+2m-6-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m\neq -\frac{1}{2} \quad (*)$$

Đặt $A(x_1;2x_1-1)$; $B(x_2;2x_2-1)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (2).

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{m-3}{2}\\ x_1x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Khi đó: $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+4(x_1-x_2)^2}=\sqrt{10} \Leftrightarrow 5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=10$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m-3}{2}\right)^2+2=2 \Leftrightarrow m=3 \qquad \text{(thỏa (*))}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m=3$.

Bài toán 4: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=-2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích là $\sqrt{3}$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$\dfrac{2x+1}{x+1}=-2x+m \Leftrightarrow 2x+1=(x+1)(-2x+m)$ (điều kiện: $x\neq -1$)

$\Leftrightarrow 2x^2+(4-m)x+1-m=0 \quad (1)$ (điều kiện: $x\neq -1$).

d cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=m^2+8>0 \quad \forall m\\ 2.(-1)^2+(4-m)(-1)+1-m\neq 0\end{cases}.$$

Suy ra d luôn cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi m.

Gọi $A(x_1;y_1);\ B(x_2;y_2)$, trong đó $y_1=-2x_1+m;\ y_2=-2x_2+m$ và $x_1,\ x_2$ là các nghiệm của (1).

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{m-4}{2} \\ x_1x_2=\dfrac{1-m}{2} \end{cases}$.

Tính được: $d(O;AB)=\dfrac{|m|}{\sqrt{5}};\ AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{5(x_1+x_2)^2-20x_1x_2}=\dfrac{\sqrt{5(m^2+8)}}{2}$

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}AB.d(O;AB)=\frac{|m|\sqrt{m^2+8}}{4}=\sqrt{3}\Leftrightarrow m=2\vee m=-2.$$

Vậy các giá trị m cần tìm là $m=2;\ m=-2.$

Bài toán 5: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm k để đường thẳng $d:y=kx+2k+1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ sao cho khoảng các từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$\dfrac{2x+1}{x+1}=kx+2k+1\Leftrightarrow 2x+1=(x+1)(kx+2k+1)$ (điều kiện: $x\neq-1$)

$\Leftrightarrow kx^2+(3k-1)x+2k=0\quad(1)$. (điều kiện: $x\neq-1$)

d cắt (C) tại hai điểm $A,\ B$ phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow\begin{cases} k\neq0 \\ \Delta=k^2-6k+1>0 \\ k(-1)^2+(3k-1)(-1)+2k\neq0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} k\neq0 \\ k<3-2\sqrt{2}\vee k>3+2\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó: $A(x_1;kx_1+2k+1),\ B(x_2;kx_2+2k+1)$ với $x_1,\ x_2$ là nghiệm của (1).

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-3k+1}{k} \\ x_1x_2=2 \end{cases}$.

Tính được $d(A;Ox)=d(B;Ox)\Leftrightarrow|kx_1+2k+1|=|kx_2+2k+1|$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} kx_1+2k+1=kx_2+2k+1 \\ kx_1+2k+1=-kx_2-2k-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=x_2\ (\text{loaïi}) \\ k(x_1+x_2)+4k+2=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow k(x_1+x_2)+4k+2=0\Leftrightarrow k=-3.$$

Vậy $k=-3$ thỏa yêu cầu bài toán.

C. THỦ THUẬT CASIO GIẢI BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO

I. NHẮC LẠI KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Phương pháp đồ thị tìm số nghiệm của phương trình :

Cho phương trình $f(x)=g(x)$ (1), số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hàm số $y=g(x)$

Chú ý : Số nghiệm của phương trình $f(x=0)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành

2. Bài toán tìm nghiệm của phương trình chứa tham số :

Ta tiến hành cô lập m và đưa phương trình ban đầu về dạng $f(x)=m$ (2) khi đó số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

Chú ý : Đường thẳng $y=m$ có tính chất song song với trục hoành và đi qua điểm có tọa độ $(0;m)$

3. Lệnh Casio :

Để tìm nghiệm của phương trình hoành độ giao diểm ta dùng lệnh SHIFT SOLVE

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: **[Thi thử chuyên KHTN lần 2 năm 2017]**

Tìm tập hợp tất các các giá trị của m để phương trình $\log_2 x-\log_2(x-2)=m$ có nghiệm :

A. $1\le m<+\infty$ **B.** $1<m<+\infty$ **C.** $0\le m<+\infty$ **D.** $0<m<+\infty$

Lời giải:

Cách 1 : CASIO

Đặt $\log_2 x-\log_2(x-2)=f(x)$ khi đó $m=f(x)$ (1).

Để phương trình (1) có nghiệm thì m thuộc miền giá trị của $f(x)$ hay $f(\min)\le m\le f(\max)$

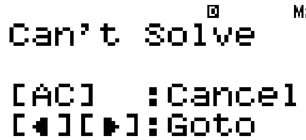
Tới đây bài toán tìm tham số m được quy về bài toán tìm min, max của một hàm số. Ta sử dụng chức năng Mode với miền giá trị của x là Start 2 End 10 Step 0.5

MODE 7 log□ 2 ▶ ALPHA) ▶ − log□ 2 ▶ ALPHA) − 2 = = 2 = 1 0 = 0 • 5 =

Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy $f(10)\approx 0.3219$ vậy đáp số **A** và **B** sai. Đồng thời khi x càng tăng vậy thì $F(X)$ càng giảm. Vậy câu hỏi đặt ra là $F(X)$ có giảm được về 0 hay không.

Ta tư duy nếu $F(X)$ giảm được về 0 có nghĩa là phương trình $f(x)=0$ có nghiệm. Để kiểm tra dự đoán này ta sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE

log□ 2 ▶ ALPHA) ▶ − log□ 2 ▶ ALPHA) − 2 SHIFT CALC 3 =



Máy tính Casio báo phương trình này không có nghiệm. Vậy dấu = không xảy ra

Tóm lại $f(x)>0 \Leftrightarrow m>0$ và **D** là đáp án chính xác

Cách tham khảo : Tự luận

Điều kiện : $x>2$

Phương trình $\Leftrightarrow m=\log_2\left(\frac{x}{x-2}\right) \Leftrightarrow m=\log_2\left(1+\frac{2}{x-2}\right)$

Vì $x>2$ nên $x-2>0 \Rightarrow 1+\frac{2}{x-2}>1 \Rightarrow \log_2\left(1+\frac{2}{x-2}\right)>\log_2 1=0$

Vậy $m=\log\left(1+\frac{2}{x-2}\right)>0$

Bình luận :

Một bài toán mẫu mực của dạng tìm tham số m ta giải bằng cách kết hợp chức năng lập bảng giá trị MODE 7 và chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE một cách khéo léo

Chú ý : $m=f(x)$ mà $f(x)>0$ vậy $m>0$ một tính chất bắc cầu hay và thường xuyên gặp

***Bài toán 2:* [Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]**

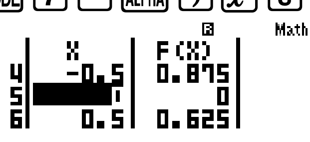
Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-3x^2+m=0$ có 3 nghiệm phân biệt

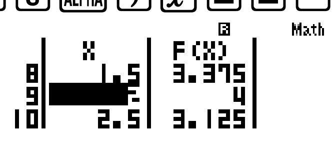
A. $-4<m<0$ **B.** $-4\le m\le 0$ **C.** $0\le m\le 4$ **D.** $0<m<1$

Lời giải:

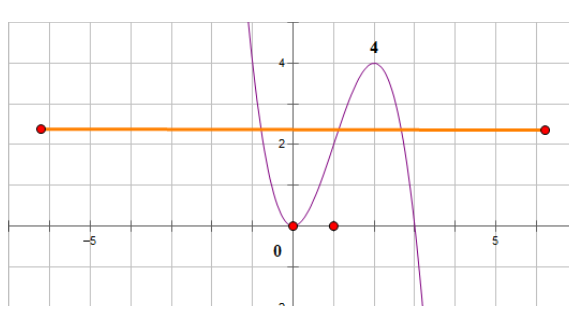
Cô lập m , đưa phương trình ban đầu về dạng $m=-x^3+3x^2$. Đặt $x^3-3x^2=f(x)$ khi đó $m=f(x)$ (1) , số nghiệm của (1) là số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và $y=m$

Để khảo sát hàm số $y=f(x)$ ta sử dụng chức năng MODE 7 Start -2 End 5 Step 0.5





Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị cực tiểu là 0 và giá trị cực đại là 4 vậy ta có sơ đồ đường đi của $f(x)$ như sau :



Rõ ràng hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt nếu $0 < m < 4$

Bài toán 3: **[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]**

Cho hàm số $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Đường thẳng $(d): y = x+1$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt M, N thì tung độ điểm I của đoạn thẳng MN bằng :

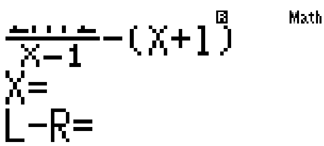
A. -3 **B.** -2 **C.** 1 **D.** 2

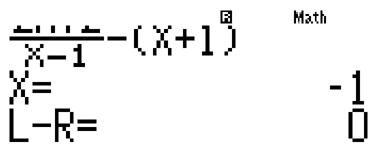
Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x+2}{x-1} = x+1$.

Nhập phương trình này vào máy tính Casio và dò nghiệm :

[▭/▭] [2] [ALPHA] [)] [+] [2] [▼] [ALPHA] [)] [−] [1] [▶] [−] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [CALC] [5] [=] [SHIFT] [CALC] [−] [5] [=]





Ta có ngay 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = x_1 + 1 = 4 \\ x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = x_2 + 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow y_I = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = 2$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài toán 4: **[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 16$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

A. $m > 12$ **B.** $m < -12$ **C.** $m < 0$ **D.** Không có m thỏa

Lời giải:

Để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 16$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình

$x^3 + mx + 16 = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

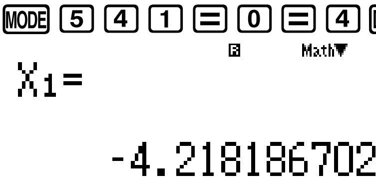
Với $m = 14$ sử dụng lệnh giải phương trình bậc 3 MODE 5

[MODE] [5] [4] [1] [=] [0] [=] [1] [4] [=] [1] [6] [=] [=] [=] [=]

Ta thấy nghiệm $x_2; x_3$ là nghiệm ảo $\Rightarrow$ không đủ 3 nghiệm thực $\Rightarrow m = 14$ không thỏa $\Rightarrow$ **A** sai

Với $m = -14$ sử dụng lệnh giải phương trình bậc 3 MODE 5

[MODE] [5] [4] [1] [=] [0] [=] [4] [DEL] [1] [4] [=] [1] [6] [=] [=] [=] [=]



Ta thấy ra 3 nghiệm thực $\Rightarrow$ Đáp án đúng có thể là **B** hoặc **C**

Thử thêm một giá trị $m=-1$ nữa thì thấy $m=-1$ không thỏa

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài toán 5: [Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

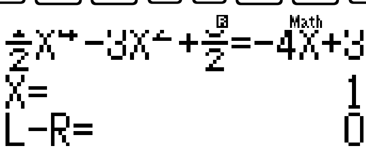
Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$ có đồ thị là (C). Biết đường thẳng $y=-4x+3$ tiếp xúc với (C) tại điểm A và cắt (C) tại điểm B. Tìm tung độ của điểm B

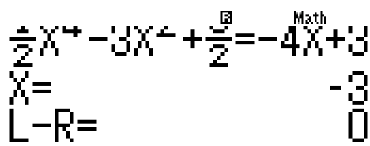
A. 1 **B.** 15 **C.** -3 **D.** -1

Lời giải:

Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}=-4x+3$. Sử dụng SHIFT SOLVE để dò 2 nghiệm phương trình trên

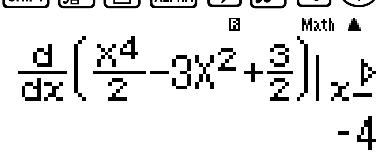
▭ 1 ▼ 2 ▶ ALPHA) $x^\blacksquare$ 4 ▶ − 3 ALPHA) x^2 + ▭ 3 ▼ 2 ▶ + 4 ALPHA) − 3 = SHIFT CALC 5 = SHIFT CALC − 5 =





Nếu A là tiếp điểm thì $y'(x_A)=0$, B là giao điểm $\Rightarrow y'(x_B)\neq 0$.

SHIFT ∫ ▭ ALPHA) $x^\blacksquare$ 4 ▼ 2 ▶ − 3 ALPHA) x^2 + ▭ 3 ▼ 2 ▶ ▶ 1 =



$\Rightarrow x_B=1\Rightarrow y_B=-4x_B+3=-1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài toán 6: [Thi HK1 THPT HN-Amsterdam năm 2017]

Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-4$ có đồ thị (C). Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị (C) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt trong đó có đúng 3 điểm có hoành độ lớn hơn -1 ?

A. $-3<m<-1$ **B.** $-2<m<2$ **C.** $2<m<3$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>3 \end{array}\right.$

Lời giải:

Số nghiệm của đồ thị (C) và trục hoành là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm.

$x^4-2mx^2+m^2-4=0$ (1). Đặt $x^2=t$ thì $(1)\Leftrightarrow t^2-2mt+m^2-4=0$ (2)

Ta hiểu 1 nghiệm $t>0$ sẽ sinh ra 2 nghiệm $x=\pm\sqrt{t}$. Khi phương trình (2) có 2 nghiệm $t_1>t_2>0$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_1}<-\sqrt{t_2}<\sqrt{t_2}<\sqrt{t_1}$. Vậy để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt trong đó có đúng 3 điểm có hoành độ lớn hơn -1 (tức là 1 điểm có hoành độ nhỏ hơn -1) thì $0<t_2\leq 1<t_1$ (*)

Thử với $m = -2.5$ Xét phương trình $t^2 - 2mt + m^2 - 4 = 0$

MODE 5 3 1 = − 5 = 2 . 5 x^2 − 4 = = =

X1 = $\frac{9}{2}$ X2 = $\frac{1}{2}$

Thỏa mãn (*) $\Rightarrow m = 2.5$ thỏa $\Rightarrow$ **C** là đáp số chính xác

Bài toán 7: **[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 + 3x^2 - 12x = m$ có đúng 1 nghiệm dương

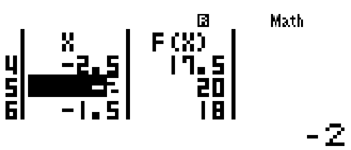
A. $\left[\begin{array}{l} m < -7 \\ m > 0 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m = -7 \\ m > 0 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -7 \\ m > 20 \end{array}\right.$ **D.** Không có m thỏa

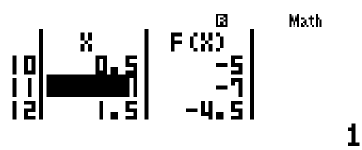
Lời giải:

Đặt $f(x) = 4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x) = m$ (1). Để (1) có đúng 1 nghiệm dương thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại đúng 1 điểm có hoành độ dương.

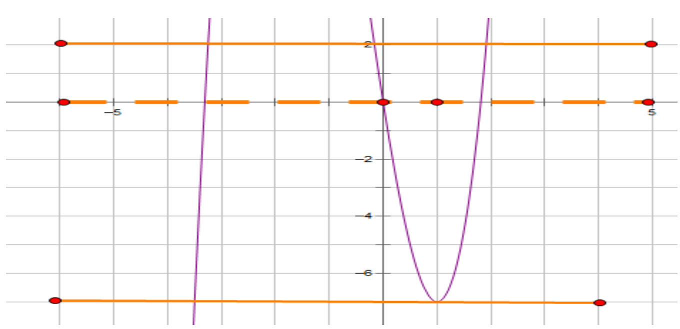
Khảo sát hàm số $y = f(x)$ với chức năng MODE 7

MODE 7 2 ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 3 ▶ + 3 ALPHA) x^2 − 1 2 ALPHA) = = − 4 = 5 = 0 . 5 =





Ta thấy đồ thị có giá trị cực đại là 20 và giá trị cực tiểu là -7 và ta sẽ mô tả được đường đi của $f(x)$ như sau :



Rõ ràng $\left[\begin{array}{l} y = m > 0 \\ y = -7 \end{array}\right.$ thì hai đồ thị cắt nhau tại đúng 1 điểm có hoành độ dương.

$\Rightarrow$ Đáp án **B** chính xác

Bài toán 8: **[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]**

Tìm tất cả giá trị m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn $-\frac{1}{2}$

A. $0 < m < 2$	**B.** $-2 < m < 2$	**C.** $\frac{9}{8} < m < 2$	**D.** $-2 \le m \le 2$

Lời giải:

Số giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm số trên là số giao điểm của phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 = m \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 - m = 0$

Thử với $m = -2$. Giải phương trinh bậc 3 với tính năng MODE 5 4

MODE 5 4 1 = − 3 = 0 = 2 − (− 2) = = =

X1= Math▼ -1 X2= Math ▲ 2

Ta thấy chỉ có 2 nghiệm $\Rightarrow$ 2 giao điểm $\Rightarrow$ $m = -2$ không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án **D** sai

Thử với $m = -1$. Giải phương trinh bậc 3 với tính năng MODE 5 4

MODE 5 4 1 = − 3 = 0 = 3 = = =

X1= Math▼ -0.8793852416

Ta thấy có nghiệm $< -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $m = -1$ không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án **B** sai

Thử với $m = 1$. Giải phương trình bậc 3 với tính năng MODE 5 4

MODE 5 4 1 = − 3 = 0 = 3 = = =

X3= Math ▲ -0.5320888862

Ta thấy có nghiệm $< -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $m = 1$ không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

$\Rightarrow$ Đáp án **C** còn lại là đâp án chính xác

Bài toán 9: **[Thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2017]**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

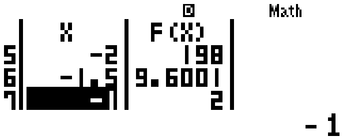
A. $m = 3$	**B.** $m > 2$	**C.** $2 \le m \le 3$	**D.** $2 < m < 3$

Lời giải:

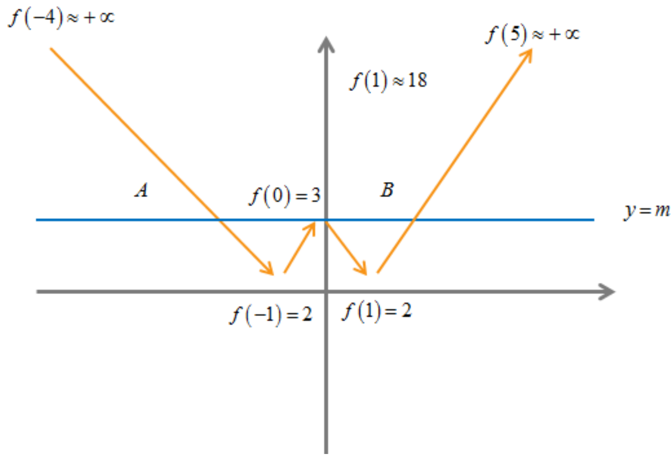
Đặt $f(x) = 4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x) = m$

Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với thiết lập Start -4 End 5 Step 0.5

MODE 7 4 x■ ALPHA) x² ▶ − 2 x■ ALPHA) x² + 2 ▶ + 6 = = − 4 = 5 = 0 . 5 =



Quan sát bảng biến thiên ta vẽ đường đi của hàm số



Rõ ràng $y=3$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt vậy đáp án A là chính xác

Bài toán 10: [Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Số nguyên dương lớn nhất để phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm ?

A. 20 **B.** 35 **C.** 30 **D.** 25

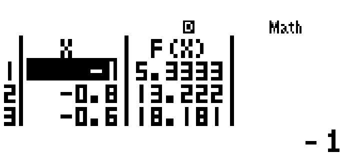
Lời giải:

Cô lập m ta được $m=\dfrac{25^{1+\sqrt{1-x^2}}-2.5^{1+\sqrt{1-x^2}}+1}{5^{1+\sqrt{1-x^2}}-2}$

Đặt $f(x)=\dfrac{25^{1+\sqrt{1-x^2}}-2.5^{1+\sqrt{1-x^2}}+1}{5^{1+\sqrt{1-x^2}}-2}$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x)=m$

Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với thiết lập Start -1 End 1 Step 2

MODE 7 $\frac{\square}{\square}$ 2 5 $x^{\square}$ 1 + $\sqrt{\square}$ 1 − ALPHA) x^2 ▶ ▶ − 2 × 5 $x^{\square}$ 1 + $\sqrt{\square}$ 1 − ALPHA) x^2 ▶ ▶ + 1 ▼ 5 $x^{\square}$ 1 + $\sqrt{\square}$ 1 − ALPHA) x^2 ▶ ▶ − 2 = = − 1 = 1 = 0 . 2 =



Quan sát bảng biến thiên ta thấy $f(x)\le f(0)=25.043...$ hay $m\le f(0)$ vậy m nguyên dương lớn nhất là 25 $\Rightarrow$ D là đáp án chính xác

Bài toán 11: [Thi HK1 chuyên Amsterdam -HN năm 2017]

Tập giá trị của tham số m để phương trình $5.16^x - 2.81^x = m.36^x$ có đúng 1 nghiệm ?

A. $m > 0$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m \le -\sqrt{2} \\ m \ge \sqrt{2} \end{array}\right.$ **C.** Với mọi m **D.** Không tồn tại m

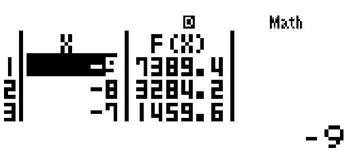
Lời giải:

Cô lập m ta được $m = \dfrac{5.16^x - 2.81^x}{36^x}$

Đặt $f(x) = \dfrac{5.16^x - 2.81^x}{36^x}$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x) = m$

Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với thiết lập Start -9 End 10 Step 1

MODE 7 ▭ 5 × 1 6 $x^{\blacksquare}$ ALPHA) ▶ − 2 × 8 1 $x^{\blacksquare}$ ALPHA) ▼ 3 6 $x^{\blacksquare}$ ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



Quan sát bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ luôn giảm hay hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến.

Điều này có nghĩa là đường thẳng $y = m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 1 điểm $\Rightarrow$ **C** chính xác.

Bài toán 12: [Thi HK1 THPT Ngô Thì Nhậm - HN năm 2017]

Phương trình $\log_3 x - \log_3(x-2) = \log_{\sqrt{3}} m$ vô nghiệm khi :

A. $m > 1$ **B.** $m < 0$ **C.** $0 < m \le 1$ **D.** $m \le 1$

Lời giải:

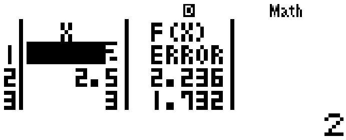
Điều kiện : $x > 2$. Phương trình ban đầu $\Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{x}{x-2}\right) = 2\log_3 m \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_3\left(\dfrac{x}{x-2}\right) = \log_3 m$

$\Leftrightarrow \log_3\sqrt{\dfrac{x}{x-2}} = \log_3 m \Leftrightarrow m = \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

Để phương trình ban đầu vô nghiệm thì đường thẳng $y = m$ không cắt đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với thiết lập Start 2 End 10 Step 0.5

MODE 7 √▭ ▭ ALPHA) ▼ ALPHA) − 2 = = 2 = 1 0 = 0 • 5 =

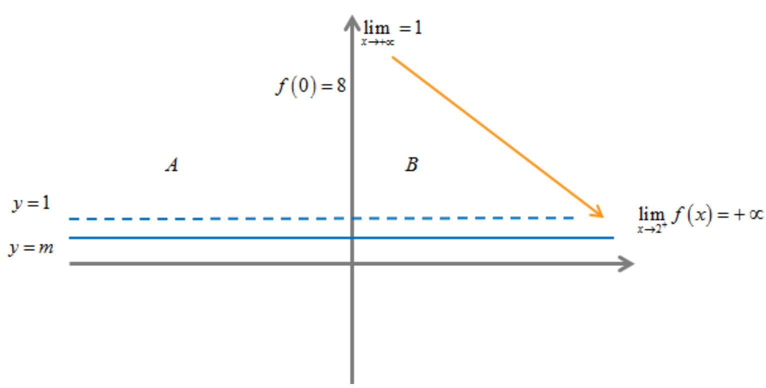


Để khảo sát chính xác hơn ta tính giới hạn của hàm $f\left(x\right)$ khi x tiến tới 2 cận là 2 và $+\infty$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} = 1$

Vậy $\lim\limits_{x\to2^+} f\left(x\right) = +\infty$

Quan sát bảng giá trị và 2 giới hạn ta vẽ đường đi cả đồ thị hàm số $y = f(x)$ và sự tương giao



Ta thấy ngay $m \le 1$ thì 2 đồ thị không cắt nhau hay phương trình ban đầu vô nghiệm.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^4+2x^2-1$ với trục Ox là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=(x+3)(x^2+3x+2)$ với trục Ox là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 3. Đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ tại các điểm có tọa độ là

A. $(0;2)$. **B.** $(-1;0)$; $(2;1)$. **C.** $(0;-1)$; $(2;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 4. Đồ thị $(C): y=\frac{2x-1}{x+1}$ cắt đường thẳng $d: y=2x-3$ tại các điểm có tọa độ là

A. $(2;-1)$; $\left(-\frac{1}{2};-2\right)$. **B.** $(2;1)$; $\left(-\frac{1}{2};-4\right)$.

C. $(-1;-5)$; $\left(\frac{3}{2};0\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};-2\right)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x-1$. Số giao điểm của (C) và d là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-4x+3}{x+2}$ và trục hoành là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 7. Giao điểm giữa đồ thị $(C): y=\frac{x^2-2x-3}{x-1}$ và đường thẳng $(d): y=x+1$ là

A. $A(2;-1)$. **B.** $A(0;-1)$. **C.** $A(-1;2)$. **D.** $A(-1;0)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=x^4-4x^2-2$ có đồ thị (C) và đồ thị (P): $y=1-x^2$. Số giao điểm của (P) và đồ thị (C) là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 9. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN với M, N là giao điểm của đường thẳng $d: y=x+1$ và đồ thị hàm số $(C): y=\frac{2x+2}{x-1}$ là

A. $I(-1;-2)$. **B.** $I(-1;2)$. **C.** $I(1;-2)$. **D.** $I(1;2)$.

Câu 10. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $(H): y=\frac{x+2}{x+1}$ cắt đồ thị hàm số $(C): y=2x^4-x^2$ tại các điểm có tọa độ là

A. $(1;1)$; $(-1;1)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 11. Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt thì tất cả các giá trị tham số m thỏa mãn là

A. $m > 1$. B. $-3 \le m \le 1$. C. $-3 < m < 1$. D. $m < -3$.

Câu 12. Đường thẳng $y = m$ **không** cắt đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 + 2$ thì tất cả các giá trị tham số m là

A. $m > 4$. B. $m \ge 4$. C. $m \le 2$. D. $2 < m < 4$.

Câu 13. Với tất cả giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^4 - 2x^2 = m + 3$ có bốn nghiệm phân biệt?

A. $m \in (-4;-3)$. B. $m = -3$ hoặc $m = -4$.

C. $m \in (-3;+\infty)$. D. $m \in (-\infty;-4)$.

Câu 14. Tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x - m + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt là

A. $-1 < m < 3$. B. $-1 \le m \le 3$.

C. $m = 1$. D. $m < -1$ hoặc $m > 3$.

Câu 15. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m$ tại ba điểm phân biệt là

A. $-2 < m < 0$. B. $-2 < m < 2$. C. $0 < m < 1$. D. $1 < m < 2$.

Câu 16. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị $(C): y = x^4 - 2x^2 - 3$ cắt đường thẳng $d: y = m$ tại bốn điểm phân biệt là

A. $-4 < m < -3$. B. $m < -4$. C. $m > -3$. D. $-4 < m < -\frac{7}{2}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 2$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = m$. Tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (C) tại bốn điểm phân biệt là

A. $-6 \le m \le -2$. B. $2 < m < 6$. C. $-6 < m < -2$. D. $2 \le m \le 6$.

Câu 18. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. $1 < m < \frac{13}{4}$. B. $0 < m < \frac{9}{4}$. C. $-\frac{9}{4} < m < 0$. D. $-1 < m < \frac{13}{4}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + m$. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ít nhất ba điểm phân biệt là

A. $0 < m < 1$. B. $-1 < m \le 0$. C. $-1 < m < 0$. D. $-1 \le m < 0$.

Câu 20. Cho hàm số $y = (x-2)\left(x^2 + mx + m^2 - 3\right)$. Tất cả giá trị của thma số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

A. $-2 < m < -1$. B. $\begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \ne -1 \end{cases}$. C. $-1 < m < 2$. D. $\begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \ne 1 \end{cases}$.

Câu 21. Tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - m + 3 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. $2 < m < 3$. B. $2 \le m \le 3$. C. $m \ge 2$. D. $m > 2$.

Câu 22. Tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $m>3.$ **B.** $m\geq 3.$

C. $m>3$ hoặc $m=2.$ **D.** $m=3$ hoặc $m=2.$

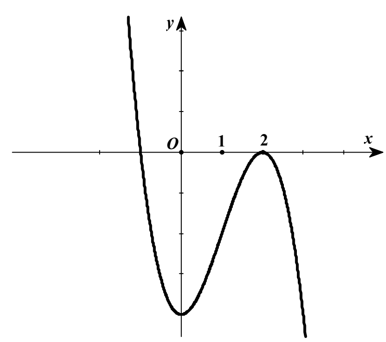
Câu 23. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=-2x^4+2x^2+1$ cắt đường thẳng $y=3m$ tại ba điểm phân biệt là

A. $\frac{1}{3}\leq m\leq \frac{1}{2}.$ **B.** $m=\frac{1}{2}.$ **C.** $m\leq \frac{1}{3}.$ **D.** $m=\frac{1}{3}.$

Câu 24. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $(C): y=-2x^3+3x^2+2m-1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

A. $\frac{1}{4}\leq m<\frac{1}{2}.$ **B.** $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}.$ **C.** $0<m<\frac{1}{2}.$ **D.** $0\leq m\leq \frac{1}{2}.$

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-3x^2+4+m=0$ có nghiệm duy nhất lớn hơn 2. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2-4$ là hình bên.



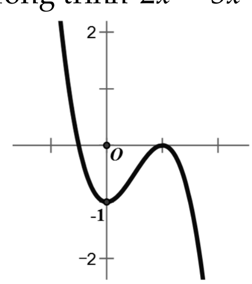
A. $m>0.$ **B.** $m\leq -4.$

C. $m<-4.$ **D.** $m\leq -4$ hoặc $m\geq 0.$

Câu 26. Tất cả giá trị của thm số m để phương trình $x^3-3x-m+1=0$ có ba nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm dương là

A. $-1\leq m\leq 1.$ **B.** $-1<m\leq 1.$ **C.** $-1<m<3.$ **D.** $-1<m<1.$

Câu 27. Cho hàm số $y=-2x^3+3x^2-1$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Dùng đồ thị (C) suy ra tất cả giá trị tham số m để phương trình $2x^3-3x^2+2m=0$ (1) có ba nghiệm phân biệt là



A. $0<m<\frac{1}{2}.$ **B.** $-1<m<0.$ **C.** $0\leq m\leq -1.$ **D.** $-1\leq m\leq 0.$

Câu 28. Cho phương trình $x^3-3x^2+1-m=0$ (1). Điều kiện của tham số m để (1) có ba nghiệm phân biệt thỏa $x_1<1<x_2<x_3$ khi

A. $m=-1$. **B.** $-1<m<3$. **C.** $-3<m<-1$. **D.** $-3\le m\le -1$.

Câu 29. Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x-1$. Giao điểm của (C) và d lần lượt là $A(1;0)$, B và C. Khi đó khoảng cách giữa B và C là

A. $BC=\frac{\sqrt{30}}{2}$. **B.** $BC=\frac{\sqrt{34}}{2}$. **C.** $BC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $BC=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 30. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d:\ y=2x-3$. Đường thằng d cắt (C) tại hai điểm A và B. Khoảng cách giữa A và B là

A. $AB=\frac{2}{5}$. **B.** $AB=\frac{5}{2}$. **C.** $AB=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $AB=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Câu 31. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d:\ y=2x-m$. Đường thằng d cắt (C) tại hai điểm A và B khi giá trị của tham số m thỏa

A. $-4-2\sqrt{6}\le m\le -4+2\sqrt{6}$. **B.** $m\le -4-2\sqrt{6}$ hoặc $m\ge -4+2\sqrt{6}$.

C. $-4-2\sqrt{6}<m<-4+2\sqrt{6}$. **D.** $m<-4-2\sqrt{6}$ hoặc $m>-4+2\sqrt{6}$.

Câu 32. Cho hàm số $(C): y=\frac{x}{x-1}$ và đường thẳng $d: y=x+m$. Tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho (C) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt là

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\varnothing$

Câu 33. Tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m^2$ cắt đồ thị hàm số $(C): y=-x^3+4x$ tại ba điểm phân biệt là

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;1]$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Câu 34. Tất cả giá trị tham số m để đồ thị $(C): y=x^4$ cắt đồ thị $(P): y=(3m+4)x^2-m^2$ tại bốn điểm phân biệt là

A. $m\in(-\infty;-4)\cup\left(-\frac{5}{4};0\right)\cup(0;+\infty)$. **B.** $m\in(-1;0)\cup(0;+\infty)$.

C. $m\in\left(-\frac{4}{5};0\right)\cup(0;+\infty)$. **D.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Câu 35. Cho đồ thị $(C): y=2x^3-3x^2-1$. Gọi d là đường thẳng qua $A(0;-1)$ có hệ số góc bằng k. Tất cả giá trị k để (C) cắt d tại ba điểm phân biệt là

A. $\begin{cases}k<\frac{9}{8}.\\k\ne 0\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}k>-\frac{9}{8}.\\k\ne 0\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}k<-\frac{9}{8}.\\k\ne 0\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}k>\frac{9}{8}.\\k\ne 0\end{cases}$

Câu 36. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng qua $I(1;2)$ với hệ số góc k. Tập tất cả các giá trị của k để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt *I, A, B* sao cho *I* là trung điểm của đoạn thẳng *AB* là

A. $\{0\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\{-3\}$. **D.** $(-3;+\infty)$.

Câu 37. Với những giá trị nào của tham số m thì $(C_m): y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2+4m+1)x - 4m(m+1)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1?

A. $\frac{1}{2} < m \neq 1.$ **B.** $m > \frac{1}{2}.$ **C.** $m \geq \frac{1}{2}.$ **D.** $m \neq 1.$

Câu 38. Cho đồ thị $(C): y = 4x^3 - 3x + 1$ và đường thẳng $d: y = m(x-1)+2$. Tất cả giá trị tham số m để (C) cắt d tại một điểm là

A. $m = 9.$ **B.** $m \leq 0.$ **C.** $m \leq 0$ hoặc $m = 9.$ **D.** $m < 0.$

Câu 39. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Giá trị của tham số m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$ là

A. $m = 0$ hoặc $m = 6.$ **B.** $m = 0.$

C. $m = 6.$ **D.** $0 \leq m \leq 6.$

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) và $d: y = x + m$. Giá trị của tham số m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến tại A và B song song với nhau.

A. Không tồn tại. **B.** $m = 0.$ **C.** $m = -3.$ **D.** $m = 3.$

Câu 41. Giá trị nào của tham số m để đồ thị $(C_m): y = (m-1)x^3 + x^2 - m$ chỉ có một điểm chung với trục hoành?

A. $m = 1.$ **B.** $m < 0$ hoặc $m > \frac{4}{3}.$

C. $m < 0.$ **D.** $m > \frac{4}{3}.$

Câu 42. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m - 1$ có đồ thị (C). Giá trị của tham số m để đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt lập thành cấp số cộng là

A. $m = 0.$ **B.** $m = 3.$ **C.** $m = -3.$ **D.** $m = \pm 6.$

Câu 43. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm A và B. Với $C(-2;5)$, giá trị của tham số m để tam giác ABC đều là

A. $m = 1.$ **B.** $m = 1$ hoặc $m = 5.$

C. $m = 5.$ **D.** $m = -5.$

Câu 44. Cho hàm số $y = x^4 - (2m-1)x^2 + 2m$ có đồ thị (C). Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d:\ y = 2$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt đều có hoành độ lớn hơn 3 là

A. $m \neq \frac{3}{2}.$ **B.** $1 < m < \frac{11}{2}.$ **C.** $\begin{cases} m \neq \frac{3}{2} \\ 1 < m < 2 \end{cases}.$ **D.** $\begin{cases} m \neq \frac{3}{2} \\ 1 < m < \frac{11}{2} \end{cases}.$

Câu 45. Cho hàm số: $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2$ có đồ thị (C). Đường thẳng $d: y=-x+2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;-2)$, B và C. Với $M(3;1)$, giá trị của tham số m để tam giác MBC có diện tích bằng $2\sqrt{7}$ là

A. $m=-1$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=4$.

C. $m=4$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 46. Cho đồ thị $(C_m): y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$. Tất cả giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$ là

A. $m=1$. **B.** $m\neq 0$. **C.** $m=2$. **D.** $m>-\frac{1}{4}$ và $m\neq 0$.

Câu 47. Cho hàm số : $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}$ có đồ thị (C_m). Tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15$ là

A. $m>1$ hoặc $m<-1$. **B.** $m<-1$.

C. $m>0$. **D.** $m>1$.

Câu 48. Cho đồ thị $(C): y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ và đường thẳng $d: y=m$. Tất cả các giá trị tham số m để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=\sqrt{2}$ là

A. $m=1+\sqrt{6}$. **B.** $m=1-\sqrt{6}$ hoặc $m=1+\sqrt{6}$.

C. $m=1-\sqrt{6}$. **D.** $m<1$ hoặc $m>3$.

Câu 49. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y=-x+m$. Giá trị của *m* để *d* cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=22$ là:

A. $m=\pm 6$ **B.** $m=-4$ **C.** $m=6$ **D.** Cả **B** và **C.**

Câu 50. Cho hàm số $y=\frac{mx-1}{x+1}$ (C). Tất cả các giá trị của *m* để (C) cắt trục *Ox, Oy* tại 2 điểm phân biệt *A, B* thỏa mãn $S_{OAB}=1$ là:

A. $m=\frac{1}{2}$ **B.** $m=\pm\frac{1}{2}$ **C.** $m=\pm 1$ **D.** $m=0; m=1$

Câu 51. Cho hàm số $y=\frac{1}{x+1}$ (C) và đường thẳng $d: y=mx$. Giá trị của *m* để *d* cắt (C) tại một điểm duy nhất là:

A. $m=0; m=-4$ **B.** $m=-4$ **C.** $m=-4; m=1$ **D.** Đáp án khác

Câu 52. Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ (C). Biết rằng có hai giá trị của *m* là m_1 và m_2 để đường thẳng $d: y=x-m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=21$. Tích m_1m_2 bằng?

A. -10 **B.** $-\frac{10}{3}$ **C.** -15 **D.** $-\frac{15}{4}$

Câu 53. Cho hàm số $y=x^4-6x^2+3$ có đồ thị là (C). Parabol $P: y=-x^2-1$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt. Tổng bình phương các hoành độ giao điểm của P và (C) bằng

A. 5 **B.** 4 **C.** 10 **D.** 8

Câu 54. Cho hàm số $y=x^4-(m+9)x^2+9m$ (C). Giá trị của m để (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ đều lớn hơn -4 là:

A. $m<16; m\neq 9$ **B.** $m\geq 4; m\neq 9$

C. $0<m\leq 16; m\neq 9$ **D.** $0<m<16; m\neq 9$

Câu 55. Cho hàm số $y=mx^4+(m+1)x^2+1$ (C). Giá trị của m để (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt là:

A. $-1\leq m<0$ **B.** $-1<m<0$ **C.** $m>1$ hoặc $m<-1$ **D.** $m=\varnothing$

Câu 56. Cho hàm số $y=x^4-(m-1)x^2-m$ (C). Giá trị của m để (C) cắt Ox tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1|+|x_2|=4$ là:

A. $m=-2$ **B.** $m=-4$ **C.** $m=4$ **D.** $m=1$

Câu 57. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+m$ (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho (C_m) cắt trục tung tại điểm M thỏa mãn $OM=5$.

A. $m=\pm 1$ **B.** $m=\pm 3$ **C.** $m=\pm 2$ **D.** $m=\pm 5$

Câu 58. Cho hàm số $y=x^4-mx^2+m$ (C). Tìm m để (C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $x_1;x_2;x_3;x_4$ thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=30$ là:

A. $m=6$ **B.** $m=5$ **C.** $m=8$ **D.** $m=3$

Câu 59. Cho hàm số $y=-x^4+5x^2-4$ có đồ thị là (C). Tìm m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt theo thứ tự *A, B, C, D* thỏa mãn $AB=BC=CD$.

A. $m=\frac{1}{2}$ **B.** $m=-\frac{7}{4}$ **C.** $m=\frac{25}{4}$ **D.** $m=\frac{13}{2}$.

Câu 60. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3x+4$ (1). Đường thẳng $(\Delta): \mathrm{y}=\mathrm{x}+4$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt $\mathrm{A}(0;4)$, B, C. Tính diện tích tam giác OBC, với O là gốc tọa độ.

A. 2 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\sqrt{2}$

Câu 61. Cho hàm số $y=x^3+(2-m)x^2+4m$ (1). Số giá trị của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $A(-2;0), B, C$ sao cho $AB^2+AC^2=12$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 62. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+3(m+1)x+1$ (1). Tìm tất cả giá trị của m dương để đường thẳng $(d): \mathrm{y}=x-2$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho B là trung điểm của AC, biết điểm A có hoành độ bằng -1.

A. $m=2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=\frac{3}{2}$ **D.** $m=\frac{1}{2}$

Câu 63. Cho hàm số $y=x^3+(2m+1)x^2+mx-m\ (C_m)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để đường thẳng $d: y=-2x-2$ cắt đồ thị hàm số (C_m) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 17$

A. 1 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 4

Câu 64. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc m cắt đồ thị $(C): y=-x^3+6x^2-9x+2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Tìm giá trị dương của m để hình thang BB'C'C có diện tích bằng 8.

A. $m=2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=\frac{3}{2}$ **D.** $m=\frac{1}{2}$

Câu 65. Cho hàm số $y=x^3+x^2+(m-3)x+1-m\ (1)$. Đường thẳng $(d): y=x-1$ cắt đồ thị (1) tại ba điểm phân biệt $A(1;0), B, C$. Kẻ $(\Delta)\perp(d)$ tại B, điểm $E(1;-2)\in(\Delta)$. Tìm m biết $EC=\sqrt{10}$.

A. $m=\frac{3}{2}$ **B.** $m=\frac{23}{8}$ **C.** $m=2$ **D.** $m=\frac{5}{2}$

Câu 66. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4\ (1)$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $M(1;2)$ và hệ số góc là k. Tính tổng giá trị của k để đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt M, A, B để $AB=2.OM$

A. -2 **B.** -3 **C.** 1 **D.** 0

Câu 67. Cho hàm số $y=x^3-2mx^2+x-2m\ (1)$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số (1) với trục hoành, tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại A cắt trục tung tại B. Tìm giá trị của m dương để diện tích tam giác OAB bằng 1, trong đó O là gốc tọa độ.

A. $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $m=\sqrt{2}$ **C.** $m=1$ **D.** $m=\frac{1}{2}$

Câu 68. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ có đồ thị (C). Trên (C) lấy hai điểm A và B sao cho điểm $M(2;9)$ là trung điểm của cạnh AB. Tính giá trị của biểu thức $P=y_A^2+y_B^2$

A. $P=360$ **B.** $P=362$ **C.** $P=364$ **D.** $P=366$

Câu 69. Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}\ (C)$. Biết rằng có hai giá trị của m là m_1 và m_2 để đường thẳng $d: y=x-m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn $AB=\sqrt{34}$. Tổng m_1+m_2 bằng?

A. -2 **B.** -4 **C.** -6 **D.** -8

Câu 70. Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}\ (C)$. Tìm m sao cho đường thẳng $d: y=x-m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn AB nhỏ nhất.

A. $m=2$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=4$ **D.** $m=-4$

Câu 71. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ (C). Tìm m sao cho đường thẳng $d: y=x-m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn điểm $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB.

A. $m=2$ **B.** $m=5$ **C.** $m=6$ **D.** $m=3$

Câu 72. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ (1). Đường thẳng $d: y=-x+1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính diện tích của tam giác ABC với $C(-4;-1)$.

A. $S=2\sqrt{3}$ **B.** $S=\sqrt{3}$ **C.** $S=3\sqrt{3}$ **D.** $S=6\sqrt{3}$

Câu 73. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+2}$ (1). Tính tổng tất cả các giá trị của m để đường thẳng $d: y=2x+m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A, B và cắt tiệm cận đứng tại M sao cho $MA^2+MB^2=25$.

A. -2 **B.** 9 **C.** 10 **D.** -6

Câu 74. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=8$.

A. $m=2$ **B.** $m=3$ **C.** $m=1$ **D.** $m=4$

Câu 75. Đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3,x_4 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Biết rằng giá trị m thỏa mãn điều kiện trên có dạng $\dfrac{a}{b}$ với $a,b>0$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+2b^2$.

A. $P=41$ **B.** $P=43$ **C.** $P=57$ **D.** $P=59$

Câu 76. Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m+1$ (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.

A. $m\neq 0,-\dfrac{1}{2}<m<1$ **B.** $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$ **C.** $m\equiv 0,-\dfrac{1}{3}<m<1$ **D.** $-\dfrac{1}{3}<m<1$

Câu 77. Cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+3m-9$ có đồ thị là (C_m). Tính giá trị của m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $x_A<x_B<x_C<x_D$ và tam giác MAC có diện tích bằng 2 với $M(5;1)$.

A. $m=6$ **B.** $m=3$ **C.** $m=9$ **D.** $m=4$

Câu 78. Cho hàm số $y=x^4-mx^2+1$ (1). Gọi m là giá trị để đường thẳng $d: y=2x+1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại bốn điểm phân biệt. Biết $m\leq 5$, số các số nguyên m cần tìm là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 79. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-\left(2m+1\right)x^2+m^2+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt a, b, c, d thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=26$.

A. $m=-2$ **B.** $m=6$ **C.** $m=3$ **D.** $m=-3$

Câu 80. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại 2 điểm phân biệt.

A. $m\ge -1$ **B.** $m\ge 0$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m=-1 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Câu 81. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-4x+3$ có đồ thị (C). Trên (C) lấy hai điểm A và B đối xứng nhau qua trục tung. Tính giá trị của biểu thức $P=y_A^2+2y_B^2$

A. $P=108$ **B.** $P=147$ **C.** $P=192$ **D.** $P=243$

Câu 82. Cho hàm số $y=x^3-2x+m$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tìm m sao cho $\left(C_m\right)$ cắt trục tung tại M thỏa mãn điều kiện $OM=4$.

A. $m=\pm 1$ **B.** $m=\pm 2$ **C.** $m=\pm 3$ **D.** $m=\pm 4$

Câu 83. Cho hàm số $y=x^3-2mx^2+1$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tìm m sao cho $\left(C_m\right)$ cắt đường thẳng $d:y=x+1$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1+x_2+x_3=2017$

A. $m=\dfrac{2017}{2}$ **B.** $m=1008$ **C.** $m=\dfrac{2017}{3}$ **D.** $m=1009$

Câu 84. Cho hàm số $y=x^3-2mx^2+1$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tìm m sao cho $\left(C_m\right)$ cắt đường thẳng $d:y=x+1$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $y_1+y_2+y_3=2017$

A. $m=\dfrac{2017}{2}$ **B.** $m=1007$ **C.** $m=\dfrac{2017}{4}$ **D.** $m=1009$

Câu 85. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-mx+3$ có đồ thị $\left(C_m\right)$, Ký hiệu t_m là số giá trị của m thỏa mãn $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm t_m.

A. $t_m=1$ **B.** $t_m=2$ **C.** $t_m=3$ **D.** $t_m=0$

Câu 86. Cho hàm số $y=x^3-7x^2+14m\text{x}-8$ có đồ thị $\left(C_m\right)$, Ký hiệu t_m là số giá trị của m thỏa mãn $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tìm t_m.

A. $t_m=1$ **B.** $t_m=2$ **C.** $t_m=0$ **D.** $t_m=3$

Câu 87. Cho hàm số $y=x^3-2m\text{x}^2+1$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tìm m sao cho $\left(C_m\right)$ cắt đường thẳng $d:y=x+1$ tại ba điểm phân biệt A, B, D với D là điểm có hoành độ không đổi, thỏa mãn trung điểm M của cạnh AB nằm trên đường thẳng $\Delta:x+y-2017=0$

A. $m=1007$ **B.** $m=\dfrac{2017}{2}$ **C.** $m=1008$ **D.** $m=\dfrac{2017}{4}$

Câu 88. Cho hàm số $y=x^3-2mx^2+1$ có đồ thị (C_m). Tìm m sao cho (C_m) cắt đường thẳng $d: y=x+1$ tại ba điểm phân biệt A, B, D với D là điểm có hoành độ không đổi, thỏa mãn $AB=2\sqrt{34}$

A. $m=\pm 1$ **B.** $m=\pm 2$ **C.** $m=\pm 3$ **D.** $m=\pm 4$

Câu 89. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét hình vuông (V) tâm O, hai đường chéo nằm trên hai trục tọa độ và (V) có diện tích bằng 2. Xác định số giao điểm của hình vuông (V) và đồ thị của hàm số $y=x^3-4x+3$

A. 1 giao điểm **B.** 2 giao điểm **C.** 3 giao điểm **D.** 4 giao điểm

Câu 90. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+2}$ (1). Gọi *m* là giá trị để đường thẳng $d: y=2x+3m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt *A, B* thỏa mãn $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\dfrac{15}{2}$ với *O* là gốc tọa độ. Giá trị của *m* bằng:

A. $\dfrac{5}{2}$ **B.** 1 **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 2

Câu 91. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ (1). Đường thẳng *d* đi qua điểm $I(-2;1)$ và có hệ số góc là *k* cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt *A, B* sao cho *I* là trung điểm của *AB*. Giá trị của *k* bằng

A. 1 **B.** -1 **C.** $\dfrac{1}{7}$ **D.** $\dfrac{1}{5}$

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để đường thẳng $y=\dfrac{x+2}{x}$ cắt đường thẳng $y=x+m$ tại hai điểm có hoành độ đối nhau.

A. $m=1$ **B.** $m=\dfrac{3}{4}$ **C.** $m=3$ **D.** $m\in\left\{2;3;\dfrac{3}{4}\right\}$

Câu 93. Cho hàm số $(C): y=\dfrac{|x|-2}{|x|-1}$ và đường thẳng $d: y=m^2+1$. Giá trị của *m* để đường thẳng *d* và đồ thị (C) có hai điểm chung là:

A. $m\in(-\infty;-1]\cup(2;+\infty)$ **B.** $m\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ **D.** $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\setminus\{0\}$

Câu 94. Cho hàm số $(C): y=\left|\dfrac{2x-3}{1-x}\right|$ và đường thẳng $d: y=m^2+1$. Giá trị của *m* để đường thẳng *d* và đồ thị (C) có hai điểm chung là:

A. $m\in(-\infty;+\infty)\setminus\{2\}$ **B.** $m\in(0;+\infty)\setminus\{2\}$

C. $m\in(-\infty;+\infty)\setminus\{1\}$ **D.** $m\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$

Câu 95. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + 2x^2 + 3$ cắt đường thẳng $y = 5x + m$ tại duy nhất 1 điểm.

A. $m = \frac{1}{4}$ **B.** $m = 0$ **C.** $m = -\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{1}{4} \neq m > 0$

Câu 96. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - m^2x^2 + 3$ cắt đường thẳng $y = \left(1 - m^2\right)x + 3$ tại 3 điểm phân biệt.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 97. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \left(x^2 - 1\right)^2 - (m+1)^2(1-m)^2$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ tương ứng lập thành 1 cấp số cộng.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 98. Tìm tất cả các giá trị của m để đường cong $y = x^4 - 40x^2 + 6m$ cắt trục hoành tại bốn điểm A, B, C, D sao cho $AB = BC = CD$.

A. $m = 24$ **B.** $m \in \{2;3\}$ **C.** $m \in \{1;5\}$ **D.** $m \in \left\{0;\frac{8}{9}\right\}$

Câu 99. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A. $m = \pm\sqrt{5}$ **B.** $m \in \{2;3\}$ **C.** $m \in \left\{-\frac{4}{9};4\right\}$ **D.** $m \in \{1;5\}$

Câu 100. Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$ có đồ thị là (C). Cho điểm A thuộc đồ thị (C) có hoành độ là 1. Tiếp tuyến của (C) tại A cắt đồ thị (C) tại điểm B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $\sqrt{65}$ **B.** $2\sqrt{17}$ **C.** $2\sqrt{65}$ **D.** $4\sqrt{17}$

Câu 101. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ cắt đường thẳng $y = m(x+1)$ tại hai điểm phân biệt.

A. $m = 3$ **B.** $m = \frac{3}{4}$ **C.** $m \in \left\{3;\frac{3}{4}\right\}$ **D.** $m \in \left\{2;3;\frac{3}{4}\right\}$

Câu 102. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường cong $y = x^3 + mx^2 - x - m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m \neq \pm 1$ **B.** $m = \frac{3}{4}$ **C.** $m \neq \pm 3$ **D.** $m \in \{1;5\}$

Câu 103. Tìm giá trị của m để đường cong $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$

A. $m \in \{2;3\}$ **B.** $-\frac{1}{4} < m < 1; m \neq 0$ **C.** $m = 1$ **D.** $-\frac{1}{4} < m < 1$

Câu 104. Tìm giá trị của m để đường cong $(C): y = x^3 + mx^2 + 1$ cắt đường thẳng $y = -x + 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$ B, C sao cho các tiếp tuyến của (C) tại B và C của đường cong vuông góc với nhau.

A. $m = \pm\sqrt{5}$ **B.** $m \in \{2;3\}$ **C.** $m \in \{3;4\}$ **D.** $m \in \{1;5\}$

Câu 105. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường cong $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1$ cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại ba điểm phân biệt A, B, C thỏa mãn điểm $C(0;1)$ nằm giữa A và B, đồng thời đoạn thẳng AB có độ dài $\sqrt{30}$

A. $m = \pm\sqrt{5}$ **B.** $m \in \{2;3\}$ **C.** $m \in \left\{0;\frac{8}{9}\right\}$ **D.** $m \in \{1;5\}$

Câu 106. Cho hàm số $y = x^3 + 2m^2 + 3(m-1)x + 2$ có đồ thị (C). Cho điểm $M(3;1)$ và đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại 3 điểm $A(0;2)$, B, C sao cho tam giác MBC có diện tích bằng $2\sqrt{6}$

A. $m = 1$ **B.** $m = 4$ **C.** $m = -1$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 4 \end{array}\right.$

Câu 107. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ có đồ thị là (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = mx - 2m - 4$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt

A. $m \geq -3$ **B.** $-1 \neq m < -3$ **C.** $1 \neq m > -3$ **D.** $m = -3$

Câu 108. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x - 4m - 1$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

A. $-\frac{5}{8} < m < \frac{1}{2}$ **B.** $m = -\frac{5}{8}$ **C.** $m = -\frac{5}{8}$ hoặc $m = \frac{1}{2}$ **D.** $m = \frac{1}{2}$

Câu 109. Cho hàm số $y = x^3 - (m+3)x^2 + 4mx - m^2$ có đồ thị là (C). Tìm m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho $x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 = 8$

A. $m = 0$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = 2$

Câu 110. Cho hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ có đồ thị là (C). Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(-1;0)$ và có hệ số góc là k. Tìm k để Δ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tam giác OBC có trọng tâm $G(2;2)$ với O là gốc tọa độ.

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{-3}{4}$ **C.** $-\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{3}{4}$

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1C	2B	3C	4B	5D	6D	7D	8B	9D	10A
11C	12A	13A	14A	15B	16A	17C	18B	19B	20B
21A	22C	23D	24C	25C	26D	27A	28C	29B	30D
31D	32C	33D	34C	35B	36D	37D	38D	39A	40A
41B	42C	43B	44D	45B	46A	47A	48B	49D	50B
51B	52C	53C	54D	55D	56B	57D	58B	59B	60A
61B	62C	63A	64A	65C	66B	67D	68B	69B	70C
71C	72D	73C	74A	75B	76C	77A	78B	79B	80C
81D	82D	83A	84B	85A	86A	87C	88D	89B	90A
91B	92A	93D	94D	95A	96C	97D	98A	99C	100D
101C	102A	103B	104A	105C	106D	107C	108C	109B	110D

Câu 1. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^4+2x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$.

Vậy số giao điểm là 2.

Câu 2. **Chọn B.**

Giải phương trình $(x+3)(x^2+3x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Vậy số giao điểm là 3.

Câu 3. **Chọn C.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm (P).

Thế vào phương trình $y=x-1$ được tung độ tương ứng $\left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=1 \end{array}\right.$.

Vậy chọn $(0;-1)$, $(2;1)$.

Câu 4. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x+1}=2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ 2x^2-3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Thế vào phương trình $2x-3$ được tung độ tương ứng: $\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-4 \end{array}\right.$.

Vậy chọn $(2;\,1)$ vaứ $\left(-\dfrac{1}{2};\,-4\right)$.

Câu 5. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^3-3x^2+1=x-1 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2-x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm là 3.

Câu 6. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x^2-4x+3}{x+2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm là 2.

Câu 7. **Chọn D.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}=x+1 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=0$.

Vậy chọn $(-1;\,0)$.

Câu 8. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^4-4x^2-2=-x^2+1 \Leftrightarrow x^4-3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}} \vee x=-\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}} \\ x^2=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}<0 \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm là 2.

Câu 9. **Chọn D.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x+2}{x-1}=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=4 \\ x=-1 \Rightarrow y=0 \end{array}\right. \Rightarrow I(1;2)$.

Vậy chọn $I(1;2)$.

Câu 10. **Chọn A.**

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (C') là $y=1$. Phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^4-x^2=1 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow y=1.$$

Vậy chọn $(1;1)$, $(-1;1)$.

Câu 11. **Chọn C.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+1=m$

Ta có: $y'=3x^2-6x$; $y'=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$

y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			1				$+\infty$
	$-\infty$				-3		

Do đó, đồ thị cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt khi $-3<m<1$.

Vậy chọn $-3<m<1$.

Câu 12. **Chọn A.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm: $-2x^4+4x^2+2=m$

Ta có: $y'=-8x^3+8x$; $y'=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \vee x=-1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			4				4		
	$-\infty$				2				$-\infty$

Do đó, đường thẳng $y=m$ **không** cắt đồ thị hàm số khi $m>4$.

Vậy chọn $m>4$.

Câu 13. **Chọn A.**

Ta khảo sát hàm số $(C): y=x^4-2x^2$ tìm được $y_{CT}=-1,\ y_{CĐ}=0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1<m+3<0 \Leftrightarrow -4<m<-3$.

Vậy chọn $m\in(-4;-3)$.

Câu 14. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận:

Ta khảo sát hàm số $(C): y=x^3-3x+1$ tìm được $y_{CĐ}=3,\ y_{CT}=-1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1<m<3$. Vậy chọn $-1<m<3$.

Phương pháp trắc nghiệm: Ta kiểm tra trực tiếp đáp án

+Với $m=2$, giải phương trình $x^3-3x-1=0$ ta bấm máy được ba nghiệm $\Rightarrow$ loại C, D.

+Với $m=-1$, giải phương trình $x^3-3x+2=0$ ta bấm máy được hai nghiệm $\Rightarrow$ loại B.

Vậy chọn $-1<m<3$

Câu 15. **Chọn B.**

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			2				$+\infty$
	$-\infty$				-2		

Đường thẳng $d: y=m$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt khi: $-2<m<2$.

Vậy chọn $-2<m<2$.

Câu 16. **Chọn A.**

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Đường thẳng $d: y = m$ cắt (C) tại bốn điểm phân biệt khi $-4 < m < -3$.

Vậy chọn $-4 < m < -3$

Câu 17. **Chọn C.**

Xét hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 2$

Tính $y' = 4x^3 - 8x$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -2 \\ x = \sqrt{2} \Rightarrow y = -6 \\ x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = -6 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $-6 < m < -2$.

Vậy chọn $-6 < m < -2$.

Câu 18. **Chọn B.**

Phương trình $\Leftrightarrow m = -x^4 + 3x^2$. Đặt $(C): y = -x^4 + 3x^2$ và $d: y = m$

Xét hàm số $y = -x^4 + 3x^2$. Ta có $y' = -4x^3 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\sqrt{6}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ d cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $0 < m < \frac{9}{4}$.

Vậy chọn $0 < m < \dfrac{9}{4}$.

Câu 19. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^4 + 2x^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = x^4 - 2x^2$.

Đặt $(C): y = x^4 - 2x^2$ và $d: y = m$

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ít nhất ba điểm phân biệt khi $-1 < m \le 0$.

Vậy chọn $-1 < m \le 0$.

Câu 20. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $(x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3) = 0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 + mx + m^2 - 3 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 4 + 2m + m^2 - 3 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 12 > 0 \\ m^2 + 2m + 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \ne -1 \end{cases}$. Vậy chọn $\begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \ne -1 \end{cases}$.

Câu 21. **Chọn A.**

Tương tự ta khảo sát hàm số $(C): y = x^4 - 2x^2 + 3$ ta tìm được $y_{CT} = 2, y_{CD} = 3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2 < m < 3$. Vậy chọn $2 < m < 3$.

Câu 22. **Chọn C.**

Phương pháp tự luận:

Tương tự ta khảo sát hàm số $(C): y = x^4 - 2x^2 + 3$ ta tìm được $y_{CT} = 2, y_{CD} = 3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = 2 \vee m > 3$. Vậy chọn $m = 2 \vee m > 3$.

Phương pháp trắc nghiệm:

+Với $m = 3$, ta giải phương trình $x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \Rightarrow$ loại B, D.

+Với $m = 2$, ta giải phương trình $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \Rightarrow$ loại A.

Câu 23. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận:

Khảo sát hàm số $(C): y = -2x^4 + 2x^2 + 1$ tìm được $y_{CT} = 1$, $y_{CĐ} = \dfrac{3}{2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 3m = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{3}$. Vậy chọn $m = \dfrac{1}{3}$.

Phương pháp trắc nghiệm:

+ Với $m = \dfrac{1}{2}$, ta giải phương trình $-2x^4 + 2x^2 - \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ loại B, A.

+ Với $m = 0$, ta giải phương trình

$$-2x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x^2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}} \vee x = -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \text{loại C.}$$

Vậy chọn $m = \dfrac{1}{3}$.

Câu 24. Chọn C.

Phương pháp tự luận:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox: $-2x^3 + 3x^2 + 2m - 1 = 0$. Ta khảo sát hàm số $(C'): y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ và cũng chỉ là tìm y_{CD}, y_{CT}. Cụ thể $y_{CD} = 1, y_{CT} = 0$. Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 < 2m < 1 \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{1}{2}$. Vậy chọn $0 < m < \dfrac{1}{2}$

Phương pháp trắc nghiệm:

+ Với $m = 0$, ta có phương trình $-2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ loại B, D.

+ Với $m = 0.1$, ta có phương trình $-2x^3 + 3x^2 - 0.8 = 0$ có 3 nghiệm $\Rightarrow$ loại C.

Câu 25. Chọn C.

Ta có $x^3 - 3x^2 + 4 + m = 0\ (*)$. Xem phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y = -x^3 + 3x^2 - 4$ và đường thẳng $d: y = m$. Số giao điểm của (C) và d là số nghiệm của (*). Dựa vào đồ thị hàm số, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ $m < -4$. Vậy chọn $m < -4$.

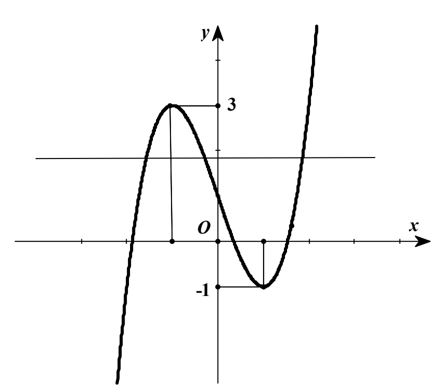
Câu 26. Chọn D.

Phương pháp tự luận:

Ta có đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ như hình bên.

Dựa vào đồ thị ta tìm được kết quả để đồ thị cắt hàm số tại ba điểm phân biệt là $-1 < m < 3$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1 < m < 1$. Vậy chọn $-1 < m < 1$.



Phương pháp trắc nghiệm: Xét $m=1$, ta được phương trình $x^3-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

không đủ hai nghiệm dương $\Rightarrow$ loại A, B, C. Vậy chọn $-1<m<1$.

Câu 27. **Chọn A.**

Phương trình $(1) \Leftrightarrow -2x^3+3x^2-1=2m-1$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và $d: y=2m-1$ (là đường thẳng song song hoặc trùng với Ox).

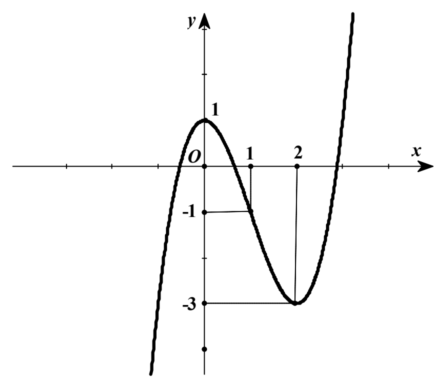
Phương trình có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (C) cắt d tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$

$-1<2m-1<0 \Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{2}$. Vậy chọn $0<m<\frac{1}{2}$.

Câu 28. **Chọn C.**

Phương pháp tự luận

Ta có $x^3-3x^2+1-m=0$ là phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ và $y=m$ (là đường thẳng song song hoặc trùng với Ox).



Xét $y=x^3-3x^2+1$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Tính $y'=3x^2-6x$.

Ta có $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=2 \Rightarrow y=-3 \end{array}\right.$.

Ta có $x=1 \Rightarrow y=-1$

Dựa vào đồ thị, số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị $y=x^3-3x^2+1$ và đường thẳng $y=m$.

Do đó, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3<m<-1$.

Phương pháp trắc nghiệm

Chọn $m=2$ thay vào (1) tìm nghiệm bằng máy tính. Ta nhận thấy (1) chỉ có một nghiệm. Suy ra loại được đáp án B.

Tiếp tục thử $m=-1$ thay vào (1) tìm nghiệm bằng máy tính. Ta nhận thấy (1) có ba nghiệm nhưng có một nghiệm bằng 1. Suy ra loại A.

Tiếp tục thử $m=-2$ thay vào (1) tìm nghiệm bằng máy tính. Ta nhận thấy (1) có ba nghiệm thỏa yêu cầu bài toán. Suy ra loại D.

Vậy C là đáp án cần tìm.

Câu 29. **Chọn B.**

Phương pháp tự luận

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d

$$2x^3-3x^2+1=x-1 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2-x+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 2x^2-x-2=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Khi đó ta có $A(1;0), B(x_1;x_1-1)$ và $C(x_2;x_2-1)$ (x_1, x_2 là nghiệm của (1))

Ta có $\overrightarrow{BC}=(x_2-x_1;x_2-x_1)$, suy ra

$$BC=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2\left(\frac{1}{4}+4\right)}=\frac{\sqrt{34}}{2}.$$

Phương pháp trắc nghiệm

Phương trình hoành độ giao điểm

$2x^3-3x^2+1=x-1 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2-x+2=0$.

- Nhập máy tính tìm nghiệm phương trình bậc ba.
- Gán hai nghiệm khác 1 vào B và C.
- Nhập máy $X-1$. Dùng lệnh CALC tìm tung độ của điểm B và C gán vào hai biến D và E. Khi đó $BC=\sqrt{(C-B)^2+(E-D)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$.

Câu 30. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d

$$\frac{2x-1}{x+1}=2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ 2x^2-3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2 \Rightarrow y=1 & \Rightarrow A(2;1) \\ x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-4 & \Rightarrow B\left(-\frac{1}{2};-4\right) \end{array}\right.$$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{5}{2};-5\right)$. Suy ra $AB=\frac{5\sqrt{5}}{2}$. Vậy chọn $AB=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Phương pháp trắc nghiệm

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-1}{x+1}=2x-3$ $(x\neq -1)$.

Dùng lệnh CALC của máy tính, ta tìm được hai nghiệm của phương trình lần lượt là $x=2$ và $x=-\frac{1}{2}$. Suy ra $A(2;1)$ và $B\left(-\frac{1}{2};-4\right)$. Dùng máy tính thu được $AB=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Vậy chọn $AB=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Câu 31. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d:

$$\frac{2x-1}{x+1}=2x-m \ (x\neq -1) \Leftrightarrow 2x^2-mx+1-m=0 \ \ (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=m^2-8(1-m)>0 \\ 2+m+1-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-4-2\sqrt{6} \vee m>-4+2\sqrt{6}.$$

Vậy chọn $m<-4-2\sqrt{6}$ hoặc $m>-4+2\sqrt{6}$.

Phương pháp trắc nghiệm

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d:

$\frac{2x-1}{x+1}=2x-m\ (x\neq -1)\Leftrightarrow 2x^2-mx+1-m=0\ \ (1)$

Chọn $m=0$ thay vào (1) tìm nghiệm bằng máy tính, ta nhận thấy (1) vô nghiệm. Suy ra loại được A và C.

Tiếp tục chọn $m=-4+2\sqrt{6}$ thay vào (1) tìm nghiệm bằng máy tính, ta nhận thấy (1) có nghiệm kép. Suy ra loại B.

Vậy chọn $m<-4-2\sqrt{6}$ hoặc $m>-4+2\sqrt{6}$.

Câu 32. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d:

$\frac{x}{x-1}=x+m\Leftrightarrow x^2+(m-2)x-m=0\quad (1)$

(C) cắt d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta>0\Leftrightarrow m^2+4>0$ (đúng với mọi m).

Vậy chọn $\mathbb{R}$.

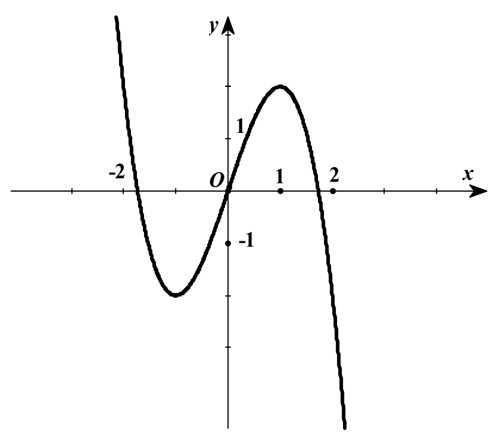
Câu 33. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d:

$-x^3+4x=x+m^2\Leftrightarrow -x^3+3x=m^2$

Ta khảo sát hàm số $(C): y=-x^3+3x$ có đồ thị sau như hình bên.



Tìm được $y_{CT}=-2,\ y_{CĐ}=2$ nên yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow -2<m^2<2\Leftrightarrow -\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$.

Vậy chọn $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$.

Phương pháp trắc nghiệm:

+ Với $m=-3,$ ta có phương trình $-x^3+3x-9=0$, bấm máy tính ta chỉ tìm được một nghiệm $\Rightarrow$ loại B, C.

+ Với $m=1.4,$ ta có phương trình $-x^3+3x-1,4^2=0$, bấm máy tính ta ra được ba nghiệm $\Rightarrow$ loại A.

Vậy chọn $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$.

Câu 34. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là:

$x^4=(3m+4)x^2-m^2\ \Leftrightarrow\ x^4-(3m+4)x^2+m^2=0\ (1)$.

(C) cắt (P) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 + 24m + 16 > 0 \\ m^2 > 0 \\ 3m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \vee m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0 \\ m > -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Vậy chọn $\begin{cases} m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Câu 35. **Chọn B.**

Phương trình đường thẳng $d: y = kx - 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d:

$$2x^3 - 3x^2 - 1 = kx - 1 \Leftrightarrow x\left(2x^2 - 3x - k\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & (1) \\ 2x^2 - 3x - k & (2) \end{array}\right.$$

(C) cắt d tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 0 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\dfrac{9}{8} \\ k \neq 0 \end{cases}.$$

Vậy chọn $\begin{cases} k > -\dfrac{9}{8} \\ k \neq 0 \end{cases}$.

Câu 36. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận:

Phương trình $d: y = k(x - 1) + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = kx - k + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - kx + k + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 - 2x - k - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \underbrace{x^2 - 2x - k - 2}_{g(x)} = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 3 > 0 \\ -3 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k > -3$$

Hơn nữa theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 = 2x_I \\ y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - 2k + 4 = 4 = 2y_I \end{cases}$ nên I là trung điểm AB.

Vậy chọn $k > -3$, hay $(-3; +\infty)$.

Phương pháp trắc nghiệm:

Ta tính toán đến phương trình (1)

+ Với $k=-2$, ta giải phương trình $x^3-3x^2+2x=0$ thu được $x_1=2, x_2=0, x_I=1$.

+ Hơn nữa $\begin{cases} x_1+x_2=2=2x_I \\ y_1+y_2=4=2y_I \end{cases}$ nên I là trung điểm $AB \Rightarrow$ loại A, C từ đó ta loại được B.

Vậy chọn $k>-3$.

Câu 37. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và trục Ox:

$$x^3-3(m+1)x^2+2(m^2+4m+1)x-4m(m+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-(3m+1)x+2m^2+2m\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2-(3m+1)x+2m^2+2m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2m \\ x=m+1 \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 1<2m\neq 2 \\ 1<m+1\neq 2 \\ 2m\neq m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}<m\neq 1 \\ 0<m\neq 1 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<m\neq 1$.

Vậy chọn $\dfrac{1}{2}<m\neq 1$.

Câu 38. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm (C) và d là $4x^3-3x+1=m(x-1)+2$

$$\Leftrightarrow 4x^3-(m+3)x+m-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 4x^2+4x-m+1=0\ (1) \end{array}\right.$$

(C) cắt d tại một điểm $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm hay phương trình (1) có nghiệm kép bằng 1

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'<0 \\ \begin{cases} \Delta'=0 \\ 4+4-m+1=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m<0 \\ \begin{cases} 4m=0 \\ m=9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m<0.$$

Vậy chọn $m<0$.

Câu 39. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d

$$\frac{2x+1}{x+1}=x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x^2+(m-1)x+m-1=0\ \ (1) \end{cases}$$

Khi đó d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chi khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2-4(m-1)>0 \\ (-1)^2-(m-1)+m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<1 \vee m>5 \quad (*)$

Khi đó ta lại có

$A(x_1;x_1+m), B(x_2;x_2+m) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;x_2-x_1) \Rightarrow AB=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2}\left|x_2-x_1\right|$,

và $\begin{cases} x_1+x_2=1-m \\ x_1x_2=m-1 \end{cases}$. Từ đây ta có

$$AB=\sqrt{10} \Leftrightarrow \left|x_2-x_1\right|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x_2+x_1)^2-4x_1x_2=5$$

$$\Leftrightarrow (1-m)^2-4(m-1)=5 \Leftrightarrow m^2-6m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=6 \end{array}\right. \text{(thỏa (*))}$$

Vậy chọn $m=0 \vee m=6$.

Phương pháp trắc nghiệm

Chọn $m=0$ thay vào d. Ta được $\dfrac{2x+1}{x+1}=x \ (x \neq -1)$.

Dùng lệnh SHIFT CALC tìm được $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right), B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-\sqrt{5},-\sqrt{5}) \Rightarrow AB=\sqrt{10}$.

Nhận thấy $m=0$ thỏa yêu cầu.

Tượng tự chọn $m=6$ kiểm tra tương tự $m=0$ nhận thấy $m=6$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy chọn $m=0 \vee m=6$.

Câu 40. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d

$\dfrac{2x+1}{x+1}=x+m \ (x \neq -1) \Leftrightarrow x^2+(m-1)x+m-1=0 \ (1)$

Khi đó d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chi khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2-4(m-1)>0 \\ 1^2-(m-1)+m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \vee m>5 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<1 \vee m>5$$

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ trong đó x_1, x_2 là nghiệm của (1) (nên ta có $x_1+x_2=1-m$). Suy ra hệ số góc của các tiếp tuyến tại điểm A và B lần lượt là

$k_A=\dfrac{1}{(x_1+1)^2}$ và $k_B=\dfrac{1}{(x_2+1)^2}$

Vì tiếp tuyến tại A và B song song, đồng thời $x_1 \neq x_2$ nên phải có $\dfrac{1}{(x_1+1)^2}=\dfrac{1}{(x_2+1)^2}$, suy ra

$x_1+1=-x_2-1 \Leftrightarrow x_1+x_2+2=0 \Leftrightarrow 1-m+2=0 \Leftrightarrow m=3 \ (l)$.

Vậy chọn không tồn tại.

Câu 41. **Chọn B.**

Phương pháp tự luận: Xét $m=1$, phương trình $x^2-1=0$ có hai nghiệm (loại).

Khi $m \neq 1$ ta thấy đồ thị hàm luôn có có hai điểm cực trị. Vậy ta tìm giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số như sau:

$$y' = 3(m-1)x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -m \\ x = \dfrac{-2}{3(m-1)} \Rightarrow y = \dfrac{-27m^3 + 54m^2 - 27m + 4}{27(m-1)^2} \end{array}\right.$$

(C_m) có 1 điểm chung với $Ox \Leftrightarrow y_{CD}.y_{CT} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{m(27m^3 - 54m^2 + 27m - 4)}{27(m-1)^2} > 0.$

$\Leftrightarrow m < 0 \vee m > \dfrac{4}{3}$.

Vậy chọn $m < 0 \vee m > \dfrac{4}{3}$.

Phương pháp trắc nghiệm: Ta kiểm tra trực tiếp các đáp án của đề bài

+ Với $m = -1$, phương trình $-2x^3 + x^2 + 1 = 0$ thu được $x = 1$ là nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ loại A, D.

+ Với $m = 2$, phương trình $x^3 + x^2 - 2 = 0$ thu được $x = 1$ là nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ loại C.

Vậy chọn $m < 0 \vee m > \dfrac{4}{3}$.

Câu 42. **Chọn C.**

Phương pháp tự luận

Đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm phân biệt tạo thành cấp số cộng khi và chỉ khi phương trình $x^3 - 3x^2 - 1 = m$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp cố cộng.

Suy ra đường thẳng $y = m$ đi qua điểm uốn của đồ thị $y = x^3 - 3x^2 - 1$ (do đồ thị (C) nhận điểm uốn làm tâm đối xứng). Mà điểm uốn của $y = x^3 - 3x^2 - 1$ là $I(1;-3)$. Suy ra $m = -3$. Vậy chọn $m = -3$.

Phương pháp trắc nghiệm

Chọn $m = -3$ thay vào phương trình $x^3 - 3x^2 - m - 1 = 0$.

Ta được $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$. Dùng chức năng tìm nghiệm phương trình bậc ba ta được ba nghiệm $x = 1 - \sqrt{3}, x = 1, x = 1 + \sqrt{3}$ thỏa cấp số cộng.

Vậy chọn $m = -3$.

Câu 43. **Chọn B.**

Phương pháp tự luận

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d:

$\dfrac{2x+1}{x-1} = x + m \ (x \neq 1) \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - m - 1 = 0 \ (1)$

Khi đó d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chi khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 + 4(m+1) > 0 \\ 1^2 + (m-3) - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 13 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases}$ đúng $\forall m \in \mathbb{R}$.

Gọi $A(x_1;x_1+m), B(x_2;x_2+m)$ trong đó x_1,x_2 là nghiệm của (1), theo Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=3-m \\ x_1x_2=-m-1 \end{cases}$.

Gọi $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{x_1+x_2+2m}{2}\right)$ là trung điểm của AB, suy ra $I\left(\dfrac{3-m}{2};\dfrac{3+m}{2}\right)$, nên $\overrightarrow{CI}\left(-2-\dfrac{3-m}{2};5-\dfrac{3+m}{2}\right)\Rightarrow CI=\dfrac{1}{2}\sqrt{(m-7)^2+(7-m)^2}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;x_2-x_1)\Rightarrow AB=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2(m^2-2m+13)}$. Vậy tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$CI=\frac{\sqrt{3}}{2}AB\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2(m-7)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2(m^2-2m+13)}$$

$$\Leftrightarrow (m-7)^2=3(m^2-2m+13)\Leftrightarrow 2m^2+8m-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-5 \end{array}\right..$$

Vậy chọn $m=1\vee m=-5$.

Câu 44. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d:

$$x^4-(2m-1)x^2+2m=2\Leftrightarrow x^4-(2m-1)x^2+2m-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=2m-2 \ \ (1) \end{array}\right.$$

Đường thẳng d cắt (C) tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 3 khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-2\neq 1 \\ 0<2m-2<9 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \dfrac{3}{2} \\ 1<m<\dfrac{11}{2} \end{cases}. \text{ Vậy chọn } \begin{cases} m\neq \dfrac{3}{2} \\ 1<m<\dfrac{11}{2} \end{cases}.$$

Câu 45. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3+2mx^2+3(m-1)x+2=-x+2\Leftrightarrow x\left(x^2+2mx+3(m-1)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+3(m-1)=0(1) \end{array}\right.$$

Đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+3>0 \\ m-1\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \forall m\in\mathbb{R} \\ m\neq 1 \end{cases}\Leftrightarrow m\neq 1$.

Khi đó ta có: $C(x_1;-x_1+2), B(x_2;-x_2+2)$ trong đó x_1,x_2 là nghiệm của (1), nên theo Viet thì $\begin{cases} x_1+x_2=-2m \\ x_1x_2=3m-3 \end{cases}$. Vậy

$$\overrightarrow{CB}=(x_2-x_1;-x_2+x_1)\Rightarrow CB=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{8(m^2-3m+3)}$$

$$d(M;(d))=\frac{|-3-1+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Diện tích tam giác MBC bằng $2\sqrt{7}$ khi và chỉ khi

$$\frac{1}{2}\sqrt{8(m^2-3m+3)}.\sqrt{2}=2\sqrt{7}\Leftrightarrow m^2-3m+3=7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=4\end{array}\right.\text{ (thỏa } m\neq 1)$$

Vậy chọn $m=-1\vee m=4$.

Câu 46. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành là

$$x^3-2x^2+(1-m)x+m=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2-x-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-x-m=0\quad(1)\end{array}\right.$$

(C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\1-1-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+4m>0\\m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{1}{4}\\m\neq 0\end{cases}$ (*)

Gọi $x_3=1$ còn x_1,x_2 là nghiệm phương trình (1) nên theo Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=-m\end{cases}$.

Vậy

$$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}=4\Leftrightarrow x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+1=4\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-3=0\Leftrightarrow m=1\text{ (thỏa (*))}$$

Vậy chọn $m=1$.

Câu 47. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d:

$$\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow(x-1)\left[x^2+(-3m+1)x-3m-2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\\underbrace{x^2+(-3m+1)x-3m-2}_{g(x)}=0\quad(1)\end{array}\right.$$

(C_m) cắt Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_g>0\\g(1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9m^2+6m+9>0\\-6m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\neq 0.$$

Gọi $x_1=1$ còn x_2,x_3 là nghiệm phương trình (1) nên theo Viet ta có $\begin{cases}x_2+x_3=3m-1\\x_2x_3=-3m-2\end{cases}$

.

Vậy

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2>15\Leftrightarrow 1+(x_2+x_3)^2-2x_2x_3>15$$

$$\Leftrightarrow(3m-1)^2+2(3m+2)-14>0\Leftrightarrow 9m^2-9>0\Leftrightarrow m>1\vee m<-1$$

Vậy chọn $m>1\vee m<-1$.

Phương pháp trắc nghiệm: Ta kiểm tra ngay trên đáp án

\+ Với $m=-2$, ta giải phương trình bậc ba: $\frac{1}{3}x^3+2x^2-x-\frac{4}{3}=0$ thu được 3 nghiệm $x_1=-6.37..., x_2=1, x_3=-0.62...$ Ta chọn những giá trị nhỏ hơn các nghiệm này và kiểm tra điều kiện của bài toán.

Cụ thể ta tính $(-6.4)^2+1^2+(-0.63)^2=42.3569>15 \Rightarrow$ loại C, D.

\+ Với $m=2$, ta làm tương tự thu được 3 nghiệm $x_1=6.27..., x_2=1, x_3=-1.27...$

Tính $6.2^2+1^2+(-1.3)^2=41.13>15 \Rightarrow$ loại B.

Vậy chọn $m>1 \vee m<-1$.

Câu 48. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm (C) và d là $\frac{x^2-x+1}{x-1}=m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x^2-(m+1)x+m+1=0 \ (1) \end{cases}$

(C) cắt d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(m+1)(m-3)>0 \\ 1-m-1+m+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-1 \vee m>3 \ (*)$

Hoành độ giao điểm x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên theo Vi-et ta có:

$\begin{cases} x_1+x_2=m+1 \\ x_1x_2=m+1 \end{cases}$. Khi đó: $A(x_1;m)$, $B(x_2;m)$, suy ra

$AB=\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2=2 \Leftrightarrow (x_2-x_1)^2=2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1=2+\sqrt{6} \\ m+1=2-\sqrt{6} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1+\sqrt{6} \\ m=1-\sqrt{6} \end{array}\right.$ (thỏa (*))

Vậy chọn $m=1+\sqrt{6} \vee m=1-\sqrt{6}$.

Câu 49. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường:

$\frac{x+1}{x-1}=-x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x+1=(-x+m)(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ g(x)=-x^2+mx-m-1=0 \ (1) \end{cases}$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 thỏa $x_1^2+x_2^2=22$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=m^2-4(m+1)>0 \\ g(1)=-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2-4m-4>0 \Leftrightarrow \begin{cases} m<2-2\sqrt{2} \\ m>2+2\sqrt{2} \end{cases}$

Theo định lí vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=m+1 \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2=22 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=22$

$\Leftrightarrow m^2-2(m+1)=22\Leftrightarrow (m-1)^2=25\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4 \\ m=6 \end{array}\right.$.

Câu 50. **Chọn B.**

Gọi $A=(C)\cap Ox \Rightarrow A\left(\frac{1}{m};0\right)\Rightarrow \overrightarrow{OA}=\left(\frac{1}{m};0\right)$

$B=(C)\cap Oy \Rightarrow B(0;-1)\Rightarrow \overrightarrow{OB}=(0;-1)$

Ta có $S_{OAB}=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}\right|=1\Leftrightarrow \left|-\frac{1}{m}\right|=2\Leftrightarrow \frac{1}{m^2}=4\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$

Câu 51. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\frac{1}{x+1}=mx\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ 1=mx(x+1) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ g(x)=mx^2+mx-1=0\ (1) \end{cases}$

Để d cắt (C) tại một điểm duy nhất thì phương trình (1) phải có nghiệm kép khác -1 hoặc (1) có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=m^2+4m=0 \\ g(-1)=-1\neq 0 \end{cases}\vee \begin{cases} \Delta=m^2+4m>0 \\ g(-1)=-1=0 \end{cases}$ (Vô lý)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-4 \end{array}\right.$

Khi $m=0$ thì d trùng với tiệm cận ngang của đồ thị (C). Suy ra $m=0$ (không thỏa).

Với $m=-4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 52. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+3}{x+1}=x-m\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ f(x)=x^2-mx-m-3=0\ (*) \end{cases}$

(C) cắt d tại hai điểm phân biệt khi

$\begin{cases} f(-1)\neq 0 \\ \Delta_{(*)}>0 \end{cases}\Leftrightarrow m^2+4m+12=(m+2)^2+8>0;\forall m\in\mathbb{R}$.

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (*), ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-m-3 \end{cases}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=21\Leftrightarrow m^2+2m-15=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-5 \\ m=3 \end{array}\right.\Rightarrow m_1m_2=-15$.

Câu 53. **Chọn C.**

PTHĐGĐ: $x^4-6x^2+3=-x^2-1\Leftrightarrow x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$

Tổng bình phương các nghiệm: 10.

Câu 54. **Chọn D.**

Trục hoành là đường thẳng có phương trình $y = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường: $x^2 - (m+9)x^2 + 9m = 0 \; (1)$

Đặt $t = x^2 \; (t > 0)$, phương trình $(1) \Leftrightarrow t^2 - (m+9)t + 9m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = m \end{array}\right.$

Với $t = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 9 \\ 0 < m < 16 \end{cases}$.

Câu 55. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành:

$$mx^4 + (m+1)x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = -1 \\ x^2 = -\dfrac{1}{m} \end{array}\right.$$

Phương trình có tối đa 2 nghiệm $\Rightarrow m = \varnothing$.

Câu 56. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành:

$$x^4 - (m-1)x^2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = -1 \\ x^2 = -m \end{array}\right.$$

(C) cắt Ox tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$. Khi đó $x = \pm\sqrt{-m}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow |x_1| + |x_2| = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{-m} = 4 \Leftrightarrow -m = 4 \Leftrightarrow m = -4$.

Câu 57. **Chọn D.**

Gọi $M = (C) \cap Oy \Rightarrow x_M = 0 \Rightarrow y_M = m$

Theo đề bài ta có $OM = 5 \Leftrightarrow |y_M| = 5 \Leftrightarrow |m| = 5 \Leftrightarrow m = \pm 5$.

Câu 58. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox: $x^4 - mx^2 + m = 0 \; (1)$

Đặt $t = x^2 \; (t > 0)$, phương trình $(1) \Leftrightarrow t^2 - mt + m = 0 \; (2)$

(C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $x_1; x_2; x_3; x_4$ $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m > 0 \\ t_1 + t_2 = m > 0 \\ t_1 t_2 = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4 \;(*)$$

Theo định lý vi-ét ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = m \\ t_1 t_2 = m \end{cases}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (x_1^4 + x_2^4) + (x_3^4 + x_4^4) = 30 \Leftrightarrow (t_1^2 + t_1^2) + (t_2^2 + t_2^2) = 30 \Leftrightarrow t_1^2 + t_2^2 = 15$

$$\Leftrightarrow (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 15 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 5 \end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện (*), ta được $m=5$.

Câu 59. **Chọn B.**

PTHĐGĐ (C) và $y=m$:

$-x^4+5x^2-4=m \Leftrightarrow x^4-5x^2+4+m=t^2-5t+4+m=0$ (1) với $t=x^2\ge 0$

Để (C) cắt $y=m$ tại 4 điểm phân biệt thì PT (1) phải có 2 nghiệm t dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_{(1)}=25-4(4+m)>0\\ 4+m>0\end{cases} \Leftrightarrow -4<m<\frac{9}{4}$$

Khi đó, PT (1) có 2 nghiệm $t_1=\dfrac{5+\sqrt{9-4m}}{2}, t_2=\dfrac{5-\sqrt{9-4m}}{2}$ với $t_1>t_2$. Tương ứng với hoành độ của 4 điểm *A, B, C, D* lần lượt là: $x_A=-\sqrt{t_1}, x_B=-\sqrt{t_2}, x_C=\sqrt{t_2}, x_D=\sqrt{t_1}$

Vì *A, B, C, D* cũng nằm trên đường thẳng nằm ngang $y=m$, nên: $AB=BC=CD$

$$\Leftrightarrow |x_B-x_A|=|x_C-x_B|=|x_D-x_C| \Leftrightarrow \left|\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}\right|=\left|2\sqrt{t_2}\right| \Leftrightarrow 2\sqrt{t_2}=\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{t_2}=\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9\left(\frac{5-\sqrt{9-4m}}{2}\right)=\frac{5+\sqrt{9-4m}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{9-4m}=4 \Leftrightarrow m=-\frac{7}{4} \text{ (thỏa).}$$

Câu 60. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3-3x^2+3x+4=x+4 \Leftrightarrow x^3-3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0; x=1; x=2$.

Với $x=1 \Rightarrow y=5 \Rightarrow B(1;5)$, với $x=2 \Rightarrow y=6 \Rightarrow C(2;6)$

Ta có $BC=\sqrt{2}, d(O;BC)=d(O,\Delta)=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \Rightarrow S_{OBC}=\dfrac{1}{2}d(O,\mathrm{BC}).BC=\dfrac{1}{2}.2\sqrt{2}.\sqrt{2}=2$

Câu 61. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3+(2-m)x^2+4m=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-mx+2m)=0$

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì $\Delta>0 \Leftrightarrow m^2-8>0$

Giả sử $B(x_1,0), C(x_2,0) \Rightarrow \begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1x_2=2m\end{cases}$. Ta có $AB^2=(x_1+2)^2, AC^2=(x_2+2)^2$

$\Rightarrow (x_1+2)^2+(x_2+2)^2=12 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+4(x_1+x_2)-4=0 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+4(x_1+x_2)-4$

$$\Leftrightarrow m^2-4m+4m-4=0 \Leftrightarrow m^2-4=0 \Leftrightarrow m^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2(l)\\ m=-2\end{array}\right.$$

Câu 62. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3+3m\mathrm{x}^2+3(m+1)x+1=x-2 \Leftrightarrow x^3+3mx^2+(3m+2)x+3=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[x^2+(3m-1)x+3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow A(-1;-3)\\ x^2+(3m-1)x+3=0\end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số (1) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow (3m-1)^2 - 12 > 0$

Giả sử $B(x_1; x_1 - 2), C(x_2; x_2 - 2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - 3m \\ x_1x_2 = 3 \end{cases}$

Do B là trung điểm của $AC \Rightarrow x_2 - 1 = 2x_1 \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = -m, x_2 = 1 - 2m$

$$\Rightarrow -m(1-2m) = 3 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1\,(l) \\ m = \dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

Câu 63. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + (2m+1)x^2 + mx - m = -2x - 2$

$$\Leftrightarrow x^3 + (2m+1)x^2 + (m+2)x - m + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2mx - m + 2) = 0$$

Để đồ thị hàm số (C_m) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -2 \end{array}\right. (*)$$

Giả sử $x_1 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = -2m \\ x_2x_3 = -m + 2 \end{cases}$. Ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 17 \Leftrightarrow x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 \le 17$

$$\Leftrightarrow 1 + 4m^2 + 2m - 4 \le 17 \Leftrightarrow 4m^2 + 2m - 20 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \le m \le 2$$

Kết hợp với (*) suy ra $m \in \left[-\dfrac{5}{2}; 2\right) \cup (1; 2]$ nên chỉ có 1 giá trị m nguyên là $m = 2$.

Câu 64. **Chọn A.**

Phương trình đường thẳng $d: y = m(x-2)$. Phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^3 + 6x^2 - 9x + 2 = m(x-2) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + m + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow A(2;0) \\ x^2 - 4x + m + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số (C_m) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Giả sử $B(x_1; mx_1 - 2m), C(x_2; mx_2 - 2m) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = m + 1 \end{cases}$.

Ta có $B'(0, mx_1 - 2m), C'(0, mx_2 - 2m)$

Ta có $S_{BB'C'C} = \dfrac{1}{2} B'C'(BB' + CC') = 8 \Leftrightarrow B'C'(BB' + CC') = 16$

Mà $B'C' = |m(x_1 - x_2)|, BB' = |x_1|, CC' = |x_2|$

Do m dương nên $x_1x_2 = m + 1 > 0$ mà $x_1 + x_2 = 4 > 0 \Rightarrow x_1 > 0, x_2 > 0$

$$\Rightarrow B'C' = m|x_1 - x_2|, BB' = x_1, CC' = x_2 \Rightarrow m|x_1 - x_2|(x_1 + x_2) = 16 \Leftrightarrow m|x_1 - x_2| = 4$$

$$\Leftrightarrow m^2(x_1 - x_2)^2 = 16 \Leftrightarrow m^2\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = 16 \Leftrightarrow m^2(16 - 4m - 4) = 16$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1\,(l) \\ m = 2 \end{array}\right..$$

Câu 65. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3+x^2+(m-3)x+1-m=x-1 \Leftrightarrow x^3+x^2+(m-4)x+2-m=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow A(1;0) \\ x^2+2x+m-2=0 \end{array}\right.$

Để (1) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì $\Delta'>0 \Leftrightarrow 1-m+2>0 \Leftrightarrow m<3$

Giả sử $B(x_1,x_1-1), C(x_2,x_2-1) \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ x_1x_2=m-2 \end{cases}$

Đường thẳng Δ qua $E(1;-2)$ và vuông góc với d nên $\Delta: \mathrm{y}=-\mathrm{x}-1$. Mà

$\mathrm{B}\in\Delta \Rightarrow \mathrm{x}_1=0$

Mà $x_1x_2=m-2 \Rightarrow m-2=0 \Leftrightarrow m=2$.

Câu 66. **Chọn B.**

Đường thẳng d qua $M(1;2)$ và có hệ số góc là k nên $d: y=k(x-1)+2$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+4=k(x-1)+2 \Leftrightarrow x^3-3x^2+2=k(x-1)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-k-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow M(1;2) \\ x^2-2x-k-2=0 \end{array}\right.$

Để (1) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì $\Delta>0 \Leftrightarrow 1+k+2>0 \Leftrightarrow k>-3$

Giả sử $A(x_1;\mathrm{k}x_1-k+2), B(x_2,kx_2-k+2) \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=-k-2 \end{cases}$

Ta có

$AB=2OM \Leftrightarrow AB^2=4OM^2 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2+k^2(x_1-x_2)^2=20 \Leftrightarrow (k^2+1)(x_1-x_2)^2=20$

$\Leftrightarrow (k^2+1)\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=20 \Leftrightarrow (k^2+1)(4k+12)=20 \Leftrightarrow k^3+3k^2+k-2=0$

Theo định lý Viet cho phương trình bậc ba thì $k_1+k_2+k_3=-3$.

Câu 67. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3-2mx^2+x-2m=0 \Leftrightarrow (x-2m)(x^2+1)=0 \Rightarrow A(2m;0)$

Ta có $y'=3\mathrm{x}^2-4mx+1$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là v

Phương trình tiếp tuyến tại A là $y=(4m^2+1)(x-2m) \Rightarrow B(0;-8m^3-2m)$

Ta có

$S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=1 \Rightarrow OA.OB=2 \Leftrightarrow |2m|.|-8m^3-2m|=2 \Leftrightarrow |8m^4+2m^2|=1 \Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 68. **Chọn B.**

Giả sử $A(a;a^3-3a+1) \Rightarrow B(4-a;17-a^3+3a)$. Mà

$B \in (C) \Rightarrow 17 - a^3 + 3a = (4-a)^3 - 3(4-a) + 1 = 12a^2 - 48a + 36 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \Rightarrow A(1;-1), B(3;19) \\ a = 3 \Rightarrow A(3;19), B(1;-1) \end{array}\right.$$

Từ đó ta có $P = y_A^2 + y_B^2 = 362$.

Câu 69. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+3}{x+1} = x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ f(x) = x^2 - mx - m - 3 = 0 \ (*) \end{cases}$

(C) cắt d tại hai điểm phân biệt khi

$\begin{cases} f(-1) \neq 0 \\ \Delta_{(*)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 4m + 12 = (m+2)^2 + 8 > 0; \forall m \in \mathbb{R}$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*), ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -m - 3 \end{cases}$

Và $\begin{cases} A(x_1; y_1) \\ B(x_2; y_2) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2}$

Yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)^2 = 34 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 17 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Rightarrow m_1 + m_2 = -4$.

Câu 70. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với d là

$\frac{x+3}{x+1} = x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ f(x) = x^2 - mx - m - 3 = 0 \ (*) \end{cases}$

(C) cắt d tại hai điểm phân biệt khi

$\begin{cases} f(-1) \neq 0 \\ \Delta_{(*)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 4m + 12 = (m+2)^2 + 8 > 0; \forall m \in \mathbb{R}$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*), ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -m - 3 \end{cases}$

Và $\begin{cases} A(x_1; y_1) \\ B(x_2; y_2) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow AB^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = m^2 + 4m + 12 = (m+2)^2 + 8 \geq 8$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Câu 71. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với d là

$\frac{x+3}{x+1} = x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ f(x) = x^2 - mx - m - 3 = 0 \ (*) \end{cases}$

$\left(C\right)$ cắt d tại hai điểm phân biệt khi

$$\begin{cases} f\left(-1\right)\neq 0 \\ \Delta_{(*)}>0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2+4m+12=\left(m+2\right)^2+8>0;\forall m\in\mathbb{R}.$$

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (*), ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-m-3 \end{cases}$. Và

$$\begin{cases} A\left(x_1;y_1\right) \\ B\left(x_2;y_2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\left(x_1;x_1-m\right) \\ B\left(x_2;x_2-m\right) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1+x_2+0}{3}=x_G \\ \dfrac{y_1+y_2+0}{3}=y_G \end{cases} \Leftrightarrow x_1+x_2=6\Rightarrow m=6$ là giá trị cần tìm.

Câu 72. Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x-1}{x+1}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x^2+2x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{3} \\ x=-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Tọa độ giao điểm của (1) và d là $A\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right), B\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$. Suy ra

$AB=\sqrt{24}$

Và $d\left(C;AB\right)=d\left(C;d\right)=\dfrac{6}{\sqrt{2}}$. Do đó $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}d\left(C;AB\right).AB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{6}{\sqrt{2}}.\sqrt{24}=6\sqrt{3}$.

Câu 73. Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+3}{x+2}=2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ \underbrace{2x^2+\left(m+3\right)x+2m-3=0}_{f(x)} \end{cases}$ (*)

$\left(C\right)$ cắt d tại hai điểm phân biệt khi

$$\begin{cases} f\left(-2\right)\neq 0 \\ \Delta_{(*)}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(m+3\right)^2-8\left(2m-3\right)=\left(m-5\right)^2+8>0;\forall m\in\mathbb{R}.$$

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (*), ta có $x_1+x_2=-\dfrac{m+3}{2};x_1x_2=\dfrac{2m-3}{2}$.

Và $\begin{cases} A\left(x_1;2x_1+m\right) \\ B\left(x_2;2x_2+m\right) \end{cases}$

Đồ thị hàm số (1) có tiệm cận đứng là $x=-2\Rightarrow M\left(-2;m-4\right)$.

Ta có $MA^2+MB^2=5\left(x_1+2\right)^2+5\left(x_2+2\right)^2=25\Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2+4\left(x_1+x_2\right)-2x_1x_2+3=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(m+3\right)^2-2\left(m+3\right)-\left(2m-3\right)+3=0\Leftrightarrow m^2-10m+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=9 \end{array}\right.\Rightarrow \sum m=10.$$

Câu 74. Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C_m\right)$ với Ox là $x^4-2mx^2+1=0$.

Đặt $t = x^2 \geq 0$, có $t^2 - 2mt + 1 = 0\ (*)$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow m > 1$.

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm của phương trình (*) ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 t_2 = 1 \end{cases}$ $(0 < t_1 < t_2)$.

Theo giả thiết: $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$ là bốn nghiệm của phương trình ban đầu nên

$2(t_1 + t_2) = 8$

$\Leftrightarrow 4m = 8 \Leftrightarrow m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 75. **Chọn B.**

Bài toán tổng quát "Cho hàm số $y = x^4 + ax^2 + b$. Giả sử đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng, khi đó $9a^2 - 100b = 0$ *"*

Chứng minh. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với Ox: $x^4 + ax^2 + b = 0$.

Đặt $t = x^2 \geq 0$. Ta có $t^2 + at + b = 0\ (*)$.

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm của phương trình (*), ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = -a \\ t_1 t_2 = b \end{cases}$ $(0 < t_1 < t_2)$.

Theo giả thiết: $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$ tạo thành một cấp số cộng nên ta có

$\sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Rightarrow t_2 = 9t_1$

$$\Rightarrow t_1 + 9t_1 = -a \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -\dfrac{a}{10} \\ t_2 = -\dfrac{9a}{10} \end{array}\right. \Rightarrow \left(-\frac{a}{10}\right).\left(-\frac{9a}{10}\right) = b \Rightarrow 9a^2 - 100b = 0.$$

Áp dụng vào bài toán trên, ta có

$$36m^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{5}{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow P = a^2 + 2b^2 = 43.$$

Câu 76. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox là

$$x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 3m + 1 \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2 = 3m + 1$ có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 và khác 1.

Hay $\begin{cases} 3m + 1 \neq 1; 3m + 1 > 0 \\ 3m + 1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\dfrac{1}{3} < m < 1 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 77. **Chọn A.**

PTHĐGĐ (C_m) với trục hoành:

$x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m - 9 = t^2 - 2(m-1)t + 3m - 9 = 0$ với $t = x^2 \geq 0$ (*)

Để $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì PT (*) phải có 2 nghiệm t dương phân biệt

$\begin{cases}\Delta'=(m-1)^2-(3m-9)>0\\ m-1>0\\ 3m-9>0\end{cases} \Leftrightarrow m>3$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases}t_1=m-1+\sqrt{m^2-5m+10}\\ t_2=m-1-\sqrt{m^2-5m+10}\end{cases}$ và

$\begin{cases}t_1+t_2=2m-2\\ t_1t_2=3m-9\end{cases}$

Hoành độ của A, B, C, D lần lượt là: $-\sqrt{t_1},-\sqrt{t_2},\sqrt{t_2},\sqrt{t_1} \Rightarrow x_A=-\sqrt{t_1}, x_C=\sqrt{t_2}$

$S_{MAC}=\dfrac{d(M,Ox).AC}{2}=\dfrac{|y_M||x_C-x_A|}{2}=2 \Leftrightarrow |x_C-x_A|=4=\left|\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}\right|$

$\Leftrightarrow t_1+t_2+2\sqrt{t_1t_2}=16=2m-2+2\sqrt{3m-9} \Leftrightarrow m=6$.

Câu 78. **Chọn B.**

PTHĐGĐ: $x^4-mx^2+1=2x+1 \Leftrightarrow x\left(x^3-mx-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x^3-mx-2=0\ (*)\end{array}\right.$

Để (1) cắt d tại 4 điểm phân biệt thì (*) phải có 3 nghiệm phân biệt, dễ thấy $x=0$ không là nghiệm của (*) nên ta có: $x^2-\dfrac{2}{x}=m$. Số nghiệm phân biệt của (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=x^2-\dfrac{2}{x}$ với đường thẳng $y=m$, ở đây ta cần có 3 giao điểm phân biệt.

Ta có: $f'(x)=2x+\dfrac{2}{x^2} \to f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1)=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=,\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của $f(x) \Rightarrow m>3$. Mà $m\le 5$ nên có 2 giá trị m nguyên thỏa.

Câu 79. **Chọn B.**

PTHĐGĐ $x^4-(2m+1)x^2+m^2+m=\left(x^2-m\right)\left(x^2-m-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=m\\ x^2=m+1\end{array}\right.$

Để đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì $m>0$

Dễ thấy: $a^2+b^2+c^2+d^2=26=2m+2(m+1) \Leftrightarrow m=6$.

Câu 80. **Chọn C.**

Ta có $y'=4x\left(x^2-1\right) \to y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 1\end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên $y=x^4-2x^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}m>0\\ m=-1\end{array}\right.$

Câu 81. **Chọn D.**

Hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ thuộc (C) và đối xứng qua trục $Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -x_B \neq 0 \\ y_A = y_B \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -x_B \neq 0 \\ x_A^3 - 3x_A^2 - 4x_A + 3 = x_B^3 - 3x_B^2 - 4x_B + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -2 \\ x_B = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2 \\ x_B = -2 \end{cases}.$$

Suy ra $y_A = y_B = -9$. Do đó $P = y_A^2 + 2y_B^2 = 3.(-9)^2 = 243$.

Câu 82. **Chọn D.**

Đồ thị (C_m) cắt trục Oy tại $M(0;m)$. Suy ra $OM = |m| = 4 \Leftrightarrow m = \pm 24$.

Câu 83. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là:

$$x^3 - 2m\text{x}^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2mx - 1 = 0 (*) \end{array} \right.$$

Để (C_m) cắt d tại ba điểm phân biệt khi (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 hay $m \in \mathbb{R}$

Khi đó $x_1 = 0$ và hệ thức Viet, ta có $x_2 + x_3 = 2m$.

Do đó $x_1 + x_2 + x_3 = 2m = 2017 \Leftrightarrow m = \dfrac{2017}{2}$.

Câu 84. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là:

$$x^3 - 2mx^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2mx - 1 = 0 \ (*) \end{array} \right.$$

Để (C_m) cắt d tại ba điểm phân biệt khi (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 hay $m \in \mathbb{R}$

Khi đó $x_1 = 0$ và hệ thức Viet, ta có $x_2 + x_3 = 2m$.

Do đó $y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + x_2 + x_3 + 3 = 2m + 3 = 2017 \Leftrightarrow m = 1007$.

Câu 85. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox là: $x^3 - 3x^2 - mx + 3 = 0 \ (*)$

Giả sử phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt, khi đó gọi các nghiệm lần lượt là x_1, x_2, x_3

Theo giả thiết, ta có $x_1 + x_3 = 2x_2$ và theo hệ thức Viet, ta được $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -m \\ x_1x_2x_3 = -3 \end{cases}$

Do đó $\left[\begin{array}{l} x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3 \\ x_1 = 3; x_2 = 1; x_3 = -1 \end{array} \right. \Rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -m = -1 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow t_m = 1$.

Câu 86. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox là: $x^3 - 7x^2 + 14mx - 8 = 0 \ (*)$

Giả sử phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt, khi đó gọi các nghiệm lần lượt là x_1, x_2, x_3

Theo giả thiết, ta có $x_1x_3 = x_2^2$ và theo hệ thức Viet, ta được $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=7 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-14m \\ x_1x_2x_3=8 \end{cases}$

Do đó $\left[\begin{array}{l} x_1=1;x_2=2;x_3=4 \\ x_1=4;x_2=2;x_3=1 \end{array}\right. \Rightarrow x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-14m=14 \Leftrightarrow m=-1 \Rightarrow t_m=1$.

Câu 87. Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là

$$x^3-2mx^2+1=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2mx-1=0\ (*) \end{array}\right.$$

Để (C_m) cắt d tại ba điểm phân biệt khi (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 hay $m \in \mathbb{R}$

Khi đó gọi tọa độ các điểm lần lượt là $D(0;1), A(x_1;x_1+1), B(x_2;x_2+1)$

Suy ra $M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{x_1+x_2+2}{2}\right)$ là trung điểm của AB mà $x_1+x_2=2m \Rightarrow M(m;m+1)$

Mà $M \in \Delta : x+y-2017=0$ nên $m+m+1=2017 \Leftrightarrow m=1008$.

Câu 88. Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là

$$x^3-2mx^2+1=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2mx-1=0\ (*) \end{array}\right.$$

Để (C_m) cắt d tại ba điểm phân biệt khi (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 hay $m \in \mathbb{R}$

Khi đó gọi tọa độ các điểm lần lượt là $D(0;1), A(x_1;x_1+1), B(x_2;x_2+1)$ suy ra

$$AB=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}$$

Mà theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow (x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4m^2+4$

Do đó $AB=2\sqrt{34} \Leftrightarrow \sqrt{8(m^2+1)}=2\sqrt{34} \Leftrightarrow m=\pm 4$.

Câu 89. Chọn B.

Gọi cạnh hình vuông là a, ta có $S_{(V)}=a^2=2 \Leftrightarrow a=\sqrt{2}$ nên một đường thẳng chứa cạnh của hình vuông có phương trình là $d: y=x+1$ đi qua hai điểm $(-1;0)$ và $(0;1)$ với điều kiện giới hạn là $x \in [-1;0]$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $\begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ x^3-4x+3=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ x^3-5x+2=0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Tương tự xét với ba đường thẳng còn lại gồm các đường $y=x-1\left(x \in [0;1]\right)$ (một giao điểm), đường thẳng $y=1-x\left(x \in [0;1]\right)$ (một giao điểm) và đường thẳng

$y=-x-1\left(x\in\left[-1;0\right]\right)$ (không cắt nhau). Vậy số giao điểm của hình vuông (V) và đồ thị của hàm số $y=x^3-4x+3$ là hai giao điểm.

Câu 90. Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+3}{x+2}=2x+3m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -2\\ \underbrace{2x^2+3\left(m+1\right)x+6m-3=0}_{f(x)}\end{cases}$ (*)

$\left(C\right)$ cắt d tại hai điểm phân biệt khi

$\begin{cases}f\left(-2\right)\neq 0\\ \Delta_{(*)}>0\end{cases}\Leftrightarrow 9\left(m+1\right)^2-8\left(6m-3\right)=\left(3m-5\right)^2+8>0;\forall m\in\mathbb{R}$.

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (*), ta có $x_1+x_2=-\dfrac{3m+3}{2};x_1x_2=\dfrac{6m-3}{2}$.

Và $\begin{cases}A\left(x_1;2x_1+3m\right)\\ B\left(x_2;2x_2+3m\right)\end{cases}$

Ta có $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\left(2x_1+3m\right)\left(2x_2+3m\right)=5x_1x_2+6m\left(x_1+x_2\right)+9m^2$

$=5.\dfrac{6m-3}{2}-6m.\dfrac{3m+3}{2}+9m^2=\dfrac{15}{2}\Leftrightarrow 5\left(6m-3\right)-6m\left(3m+3\right)+18m^2=15\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{2}$.

Câu 91. Chọn B.

Đường thẳng d đi qua điểm $I\left(-2;1\right)$ và có hệ số góc là k có phương trình

$y=k\left(x+2\right)+1$.

Phương trình hoành độ giao điểm

$\dfrac{2x-1}{x+1}=k\left(x+2\right)+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\ \underbrace{kx^2+\left(3k-1\right)x+2k+2=0}_{f(x)}\end{cases}$ (*)

$\left(C\right)$ cắt d tại hai điểm phân biệt khi

$\begin{cases}m\neq 0; f\left(-1\right)\neq 0\\ \Delta_{(*)}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left(3k-1\right)^2-4k\left(2k+2\right)>0\Leftrightarrow k^2-14k+1>0$

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (*), ta có $x_1+x_2=\dfrac{1-3k}{k};x_1x_2=\dfrac{2k+2}{k}$. Và

$\begin{cases}A\left(x_1;y_1\right)\\ B\left(x_2;y_2\right)\end{cases}$

Vì I là trung điểm của AB nên $\begin{cases}x_1+x_2=-4\\ k\left(x_1+x_2\right)+4k+2=2\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1-3k}{k}=-4\Leftrightarrow k=-1$.

Câu 92. Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+2}{x}=x+m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x+2 = x^2 + mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + (m-1)x - 2 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khác 0 và thỏa mãn $x_1 + x_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-1)^2 + 8 > 0 \\ 0^2 + (m-1).0 - 2 \neq 0 \\ x_1 + x_2 = 1 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 93. **Chọn D.**

Điều kiện: $x \neq \pm 1$. Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{|x|-2}{|x|-1} = m^2 + 1 \Leftrightarrow |x| - 2 = |x|(m^2+1) - m^2 - 1 \Leftrightarrow |x| = \frac{m^2-1}{m^2} \Rightarrow m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \setminus \{0\}.$$

Câu 94. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\left| \frac{2x-3}{1-x} \right| = m^2 + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x-3}{1-x} = m^2 + 1 \\ \dfrac{2x-3}{x-1} = m^2 + 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m^2+3)x = m^2 + 4 \\ (m^2-1)x = m^2 - 2 \end{array} \right.$$

Để có 2 nghiệm phân biệt thì $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$. Khi đó $x = \dfrac{m^2+4}{m^2+3}$ hoặc $x = \dfrac{m^2-2}{m^2-1}$

Để 2 nghiệm phân biệt thì $\dfrac{m^2+4}{m^2+3} \neq \dfrac{m^2-2}{m^2-1}, \forall m$. Do đó $m \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 95. **Chọn A.**

PTHĐGĐ: $mx^4 + 2x^2 + 3 = 5x + m \Leftrightarrow (x-1)\left(mx^3 + mx^2 + (m+2)x + m - 3\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ mx^3 + mx^2 + (m+2)x + m - 3 = 0 \ (1) \end{array} \right.$$

Với $m = 0$ thì (1) có nghiệm $x = \dfrac{3}{2}$ (loại)

Với $m \neq 0$ thì (1) luôn có nghiệm, nên cần đó là nghiệm duy nhất và bằng 1, hay:

$$m.1^3 + m.1^2 + (m+2)1 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$$

Thử lại thỏa.

Câu 96. **Chọn C.**

PTHĐGĐ:

$$x^4 - m^2x^2 + 3 = (1-m^2)x + 3 \Leftrightarrow x(x-1)\left(x^2 + x + 1 - m^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x^2 + x + 1 - m^2 = 0 \end{array} \right.$$

Để đồ thị hàm số $y = x^4 - m^2x^2 + 3$ cắt đường thẳng $y = (1-m^2)x + 3$ tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 + x + 1 - m^2 = 0$ có duy nhất 1 nghiệm khác 0 và 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1^2 - 4\left(1-m^2\right) = 0 \\ 1^2 + 1 + 1 - m^2 \neq 0 \\ 0^2 + 0 + 1 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 97. **Chọn D.**

Đặt $t = x^2 \geq 0$. PTHĐGĐ:

$$\left(x^2-1\right)^2 = (m+1)^2(1-m)^2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = \left|(m+1)(1-m)\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \left(m^2-1\right)+1 = m^2 \\ t = -\left(m^2-1\right)+1 = 2-m^2 \end{array}\right. \quad (1)$$

Để đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì: $\begin{cases} m^2 > 0 \\ 2 - m^2 > 0 \\ m^2 \neq 2 - m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \\ m \notin \{0;\pm 1\} \end{cases}$

Cần: $-\sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}, \sqrt{t_1}$ lập thành cấp số cộng với $t_1 > t_2$ là nghiệm của (1)

Hay $\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_2} \Leftrightarrow t_1 = 9t_2$

+) Nếu: $t_1 = m^2, t_2 = 2 - m^2 \to t_1 > t_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$. Khi đó:

$t_1 = 9t_2 \Leftrightarrow m^2 = 9\left(2 - m^2\right) \Leftrightarrow m = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$ (thỏa)

+) Nếu: $t_1 = 2 - m^2, t_2 = m^2 \to t_1 > t_2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$. Khi đó:

$t_1 = 9t_2 \Leftrightarrow 2 - m^2 = 9m^2 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ (thỏa)

Câu 98. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 40x^2 + 6m = 0 \quad (1)$

Đặt $t = x^2 \geq 0 \Rightarrow t^2 - 40t + 6m = 0 \quad (2)$

Ta có $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 20^2 - 6m > 0 \\ t_1 + t_2 = 40 > 0 \\ t_1 t_2 = 6m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{200}{3}$.

Từ $t = x^2$ ta được $x = \pm\sqrt{t}$, khi đó (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$

Giả sử $t_1 < t_2$ khi đó theo bài ra có ngay $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng

$\Rightarrow \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - \left(-\sqrt{t_1}\right) \Rightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Rightarrow t_2 = 9t_1 \Rightarrow$ hệ

$$\begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ t_1 + t_2 = 40 \\ t_1 t_2 = 6m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = 36 \\ t_1 t_2 = 6m \end{cases} \Rightarrow m = 24.$$

Thử lại ta thấy $m = 24$ thỏa mãn.

Câu 99. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$ (1)

Đặt $t=x^2\ge 0\Rightarrow t^2-2(m+1)t+2m+1=0$ (2)

Ta có (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(m+1)^2-(2m+1)>0\\ t_1+t_2=2(m+1)>0\\ t_1t_2=2m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2>0\\ m>-1\\ m>-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{1}{2}\\ m\ne 0\end{cases}$$

Từ $t=x^2$ ta được $x=\pm\sqrt{t}$, khi đó (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_2};-\sqrt{t_1};\sqrt{t_1};\sqrt{t_2}$

Giả sử $t_1<t_2$ khi đó theo bài ra có $-\sqrt{t_2};-\sqrt{t_1};\sqrt{t_1};\sqrt{t_2}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng

$$\Rightarrow\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=\sqrt{t_1}-\left(-\sqrt{t_1}\right)\Rightarrow\sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1}\Rightarrow t_2=9t_1\Rightarrow \text{hệ}\begin{cases}t_2=9t_1\\ t_1+t_2=2(m+1)\\ t_1t_2=2m+1\end{cases}$$

Từ $\begin{cases}t_2=9t_1\\ t_1+t_2=2(m+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_2=9t_1\\ 10t_1=2(m+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=\dfrac{m+1}{5}\\ t_2=\dfrac{9}{5}(m+1)\end{cases}$

Thế vào $t_1t_2=2m+1\Rightarrow\dfrac{m+1}{5}.\dfrac{9}{5}(m+1)=2m+1$

$$\Leftrightarrow 9\left(m^2+2m+1\right)=25(2m+1)\Leftrightarrow 9m^2-32m-16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-\dfrac{4}{9}\end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy $m=4,m=-\dfrac{4}{9}$ đều thỏa mãn.

Câu 100. Chọn D.

$y'=2x^3-6x\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến tại $A:y=-4x+4$. PTHĐGĐ tiếp tuyến và (C):

$$\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}=-4x+4\Leftrightarrow x^4-6x^2+8x-3=(x-1)^3(x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\to y=0\\ x=-3\to y=16\end{array}\right.\Rightarrow AB=4$$

Câu 101. Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là

$$x^3+1=m(x+1)\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2-x+1\right)=m(x+1)$$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ x^2-x+1=m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x^2-x+1-m=0\ (*)\end{array}\right.$. Để (C_m) cắt d tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có một nghiệm $x=-1$ hoặc phương trình (*) có nghiệm kép $x\ne -1$

Hay $\left[\begin{array}{l}(-1)^2-(-1)+1-m=0\\ \Delta_{(*)}=0;m\neq 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ 1-4(1-m)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=\dfrac{3}{4}\end{array}\right..$

Câu 102. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành là $x^3+mx^2-x-m=0$

$\Leftrightarrow (x^3-x)+m(x^2-1)=0\Leftrightarrow x(x^2-1)+m(x^2-1)=0\Leftrightarrow (x^2-1)(x+m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ x=-m\end{array}\right.$

Để phương trình trên có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-m\neq\pm 1\Leftrightarrow m\neq\pm 1$.

Câu 103. **Chọn B.**

PTHĐGĐ đường cong với trục hoành

$x^3-2x^2+(1-m)x+m=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-x-m=0\ (1)\end{array}\right.$

Để đường cong cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì PT(1) phải có 2 nghiệm phân biệt đều khác 1.

$\Leftrightarrow\begin{cases}1^2-1-m\neq 0\\ \Delta_{(1)}=1^2+4m>0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}<m\neq 0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1=1$ còn x_2,x_3 là nghiệm của PT(1)

$\Rightarrow\begin{cases}x_2+x_3=1\\ x_2x_3=-m\end{cases}\Rightarrow x_2^2+x_3^2=(x_2+x_3)^2-2x_2x_3=1+2m$

$\Rightarrow 4>x_1^2+x_2^2+x_3^2=2+2m\Leftrightarrow m<1$

Vậy $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}<m<1\\ m\neq 0\end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 104. **Chọn A.**

Đặt $f(x)=x^3+mx^2+1\Rightarrow f'(x)=3x^2+2mx$

PTHĐGĐ: $x^3+mx^2+1=-x+1\Leftrightarrow x(x^2+mx+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2+mx+1=0\ (1)\end{array}\right.$

Để đường cong cắt đường thẳng đã cho tại 3 điểm phân biệt thì PT(1) phải có 2 nghiệm phân biệt đều khác 0.

$\Leftrightarrow\begin{cases}0^2+0m+1\neq 0\\ \Delta_{(1)}=m^2-4>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.$

Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của $PT(1)\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-m\\ x_1x_2=1\end{cases}$ và đây cũng là hoành độ của B và C, để tiếp tuyến tại B, C vuông góc với nhau, thì cần có:

$f'(x_1)f'(x_2)=-1\Leftrightarrow (3x_1^2+2mx_1)(3x_2^2+2mx_2)=-1$

$\Leftrightarrow 9x_1^2x_2^2+4m^2x_1x_2+6mx_1x_2(x_1+x_2)=-1\Leftrightarrow 9+4m^2-6m^2=-1\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{5}$ (thỏa).

Câu 105. Chọn C.

Ta có:

$$2x^3-3mx^2+(m-1)x+1=2x+1 \Leftrightarrow x\left[2x^2-3mx+(m-3)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2-3mx+(m-3)=0\ (\end{array}\right.$$

Để đường cong cắt đường thẳng đã cho tại 3 điểm phân biệt thì PT(1) phải có 2 nghiệm phân biệt đều khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2.0^2-3.0\,\mathrm{m}+(m-3)\neq 0 \\ \Delta_{(1)}=9m^2-8(m-3)>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 3$$

Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của PT(1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{3m}{2} \\ x_1x_2=\dfrac{m-3}{2} \end{cases} \Rightarrow (x_1-x_2)^2=\frac{9m^2}{4}-\frac{8(m-3)}{4}=\frac{9m^2-8m+24}{4}$$ và đây cũng là hoành độ của điểm A và B. Vì $C(0;1)$ nằm giữa A, B nên $x_1x_2<0 \Leftrightarrow m<3$. Ta có:

$$AB^2=30=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=5(x_1-x_2)^2 \Leftrightarrow \frac{9m^2-8m+24}{4}=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{8}{9} \end{array}\right. \text{(thỏa).}$$

Câu 106. Chọn D.

Ta có

$$x^3+2mx^2+3(m-1)x+2=2-x \Leftrightarrow x(x^2+2mx+3m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+3m-2=0\ (1) \end{array}\right.$$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì PT(1) phải có 2 nghiệm phân biệt đều khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0^2+2m.0+3m-2\neq 0 \\ \Delta'=m^2-(3m-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<m\neq \dfrac{3}{2} \\ m>2 \end{cases}$$

Khi đó, ta có: $\begin{cases} x_B+x_C=-2m \\ x_B.x_C=3m-2 \end{cases} \Rightarrow (x_B-x_C)^2=4m^2-12m+8$

$$S_{MBC}=\frac{d(M,(d)).BC}{2} \Rightarrow BC^2=48=(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2=2(x_B-x_C)^2=2(4m^2-12m+8)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-1 \end{array}\right. \text{(thỏa).}$$

Câu 107. Chọn C.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-6x^2+9x-6=mx-2m-4 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-4x+1-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-4x+1-m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (x- \end{array}\right.$$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $(x-2)^2=m+3$ phải có 2 nghiệm phân biệt đều khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3>0 \\ (0-2)^2 \neq m+3 \end{cases} \Leftrightarrow -3<m\neq 1$.

Câu 108. **Chọn C.**

PTHĐGĐ:

$x^3-3x^2+1=(2m-1)x-4m-1 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-1-2m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-x-1-2m=0 \end{array}\right.$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $x^2-x-1-2m=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt đều khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^2-2-1-2m\neq 0 \\ \Delta'=1+4(1+2m)=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-\dfrac{5}{8}$ hoặc có 2 nghiệm chung 1nghiệm trong đó bằng

2 và nghiệm còn lại khác $2 \Rightarrow 2^2-2-1-2m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$. Thử lại có nghiệm $x=2$

hoặc $x=-1$.

Câu 109. **Chọn B.**

PTHĐ của (C) với trục hoành: $x^3-(m+3)x^2+4mx-m^2=0\ (*)$

Điều kiện cần:

$x_A^2+x_B^2+x_C^2=8=(x_A+x_B+x_C)^2-2(x_Ax_B+x_Bx_C+x_Cx_A)=(m+3)^2-8m \Leftrightarrow m=1$

Điểu kiện đủ: $m=1$ thì phương trình (*) có 3 nghiệm.

Câu 110. **Chọn D.**

Ta có $\Delta: y=k(x+1)$. PTHĐGĐ (C) và

$\Delta: x^3-5x^2+3x+9=k(x+1) \Leftrightarrow x^3-5x^2+(3-k)x+9-k=0$

ĐK cần: $\begin{cases} y_O+y_B+y_C=3y_G=6 \\ x_A+x_B+x_C=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k(x_B+1)+k(x_C+1)=6 \\ x_B+x_C=6 \end{cases} \Rightarrow k=\dfrac{3}{4}$

Đk đủ: Thay vào đủ 3 điểm phân biệt A, B, C.

Chủ đề 7 BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN, SỰ TIẾP XÚC CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

☆☆☆

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Tiếp tuyến

Cho hàm số $y = f(x)$, có đồ thị (C).

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ có dạng: $\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$.

Trong đó:

- Điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ được gọi là ***tiếp điểm***. (với $y_0 = f(x_0)$).
- $k = f'(x_0)$ là ***hệ số góc*** của tiếp tuyến.

Lưu ý:

- Tiếp tuyến của (C) ***hoàn toàn xác định*** nếu biết *hệ số góc* của tiếp tuyến ***hoặc*** *hoành độ tiếp điểm*.
- *Đường thẳng bất kỳ* đi qua $M_0(x_0; y_0)$ có hệ số góc k, có phương trình

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}.$$

- Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : y = k_1x + m_1$ và $\Delta_2 : y = k_2x + m_2$.

  Lúc đó: $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ và $m_1 \neq m_2$; $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$

2. Điều kiện tiếp xúc:

Cho hai hàm số $y = f(x)$, (C) và $y = g(x)$, (C').

(C) và (C') tiếp xúc nhau *khi chỉ khi* hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

Đặc biệt:

Đường thẳng $y = kx + m$ là tiếp tuyến với (C): $y = f(x)$ khi chỉ khi hệ $\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm.

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

I. CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN THƯỜNG GẶP

Cho hàm số $y = f(x)$, gọi đồ thị của hàm số là (C).

1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ tại $M(x_o; y_o)$.

Phương pháp

- **Bước 1.** Tính $y' = f'(x)$ suy ra hệ số góc của phương trình tiếp tuyến là $k = y'(x_0)$.
- **Bước 2.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Chú ý:

- Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thì khi đó ta tìm y_0 bằng cách thế vào hàm số ban đầu, tức $y_0 = f(x_0)$. Nếu đề cho y_0 ta thay vào hàm số để giải ra x_0.
- Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm của đồ thị $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = ax + b$. Khi đó các hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C).

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO:

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 = f'(x_0)x - x_0 f'(x_0) + f(x_0)$$

Hay $d: y = ax + b$ với $\begin{cases} a = f'(x_0) \\ b = -x_0 f'(x_0) + f(x_0) \end{cases}$

Như vậy các bước tìm tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$:

- **Bước 1:** Tìm hệ số góc tiếp tuyến $k = a = f'(x_0)$.

  Nhập $\boxed{\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\Big|_{x = x_0}}$ bằng cách nhấn $SHIFT$ $\boxed{\int_{\square}^{\square}\square}$ sau đó nhấn $=$ ta được a.

- **Bước 2:** Tìm hệ số tự do $b = -x_0 + f(x_0)$

  Sau đó nhân với $\boxed{-X}$ tiếp tục nhấn phím $+$ $\boxed{f\ (x)}$ $\boxed{CALC}$ $X = x_o$ nhấn phím $=$ ta được b.

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho hàm số $(C): y = x^3 + 3x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1;4)$ là

A. $y = -9x + 5$. **B.** $y = 9x + 5$. **C.** $y = -9x - 5$. **D.** $y = 9x - 5$.

Lời giải:

Ta có $y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow k = y'(1) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(1;4)$ là $d: y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = 9(x-1) + 4 = 9x - 5$.

Chọn đáp án D.

Sử dụng máy tính:

- Nhập $\boxed{\left.\frac{d}{dx}\left(X^3 + 3X^2\right)\right|_{x=1}}$ nhấn dấu = ta được 9.
- Sau đó nhân với $\left(\boxed{-X}\right)$ nhấn dấu + $\boxed{X^3 + 3X^2}$ $\boxed{CALC}$ $X = 1$ = ta được -5.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là $y = 9x - 5$.

Bài toán 2: Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M thuộc (C) và có hoành độ bằng 3.

A. $y = -18x + 49$. **B.** $y = -18x - 49$. **C.** $y = 18x + 49$. **D.** $y = 18x - 49$.

Lời giải:

Ta có $y' = -6x^2 + 12x$. Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -5 \Rightarrow M(3;-5)$ và hệ số góc $k = y'(3) = -18$. Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là $y = -18(x-3) - 5 = -18x + 49$. Chọn đáp án A.

Sử dụng máy tính:

- Nhập $\boxed{\left.\frac{d}{dx}\left(-2X^3 + 6X^2 - 5\right)\right|_{x=3}}$ nhấn dấu = ta được -18.
- Sau đó nhân với $\left(\boxed{-X}\right)$ nhấn dấu + $\boxed{-2X^3 + 6X^2 - 5}$ $\boxed{CALC}$ $X = 3$ nhấn dấu = ta được 49.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là $y = -18x + 49$.

Bài toán 3: Cho hàm số $(C): y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ $x_0 > 0$, biết $y''(x_0) = -1$ là

A. $y = -3x - 2$. **B.** $y = -3x + 1$. **C.** $y = -3x + \frac{5}{4}$. **D.** $y = -3x + \frac{1}{4}$.

Lời giải:

Ta có $y' = x^3 - 4x$, $y'' = 3x^2 - 4$.

Mà $y''(x_0) = -1 \Rightarrow 3{x_0}^2 - 4 = -1 \Leftrightarrow {x_0}^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$ (vì $x_0 > 0$).

Vậy $y_0 = -\frac{7}{4}$, suy ra $k = y'(1) = -3$.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là $d: y = -3(x-1) - \frac{7}{4} \Rightarrow y = -3x + \frac{5}{4}$.

Chọn đáp án C.

Sử dụng máy tính:

- Nhập $\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}X^4 - 2X^2\right)\Big|_{x=1}}$ nhấn dấu $=$ ta được -3.
- Sau đó nhân với $\left(\boxed{-X}\right)$ nhấn dấu $+$ $\boxed{\frac{1}{4}X^4 - 2X^2}$ $\boxed{CALC}$ $X = 1$ $=$ ta được $\frac{5}{4}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $d: y = -3x + \frac{5}{4}$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ có hệ số góc k cho trước.

Phương pháp

- **Bước 1**. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm và tính $y' = f'(x)$.
- **Bước 2**. Hệ số góc tiếp tuyến là $k = f'(x_0)$.

  Giải phương trình này tìm được x_0, thay vào hàm số được y_0.
- **Bước 3**. Với mỗi tiếp điểm ta tìm được các tiếp tuyến tương ứng

$$d: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Chú ý: Đề bài thường cho hệ số góc tiếp tuyến dưới các dạng sau:

- Tiếp tuyến $d // \Delta: y = ax + b \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = a$.
- Tiếp tuyến $d \perp \Delta: y = ax + b,\ (a \neq 0) \Leftrightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -\frac{1}{a}$.
- Tiếp tuyến tạo với trục hoành một góc α thì hệ số góc của tiếp tuyến d là $k = \pm\tan\alpha$.

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO:

Ta đã biết $b = -x_0 f'(x_0) + f(x_0)$ đã chứng minh ở phần trước, như vậy ta làm như sau:

Nhập $k(-X) + f(x)$ $\boxed{CALC}$ $X = x_0$ nhấn dấu $=$ ta được b.

Phương trình tiếp tuyến là $d: y = kx + b$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng 9 là:

A. $\left[\begin{array}{l} y = 9x - 14 \\ y = 9x + 18 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y = 9x + 15 \\ y = 9x - 11 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y = 9x - 1 \\ y = 9x + 4 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y = 9x + 8 \\ y = 9x + 5 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Vậy $k = y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3{x_0}^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow {x_0}^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 2 \vee x_0 = -2.$.

+ Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4$ ta có tiếp điểm $M(2;4)$.

  Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = 9(x-2) + 4 \Rightarrow y = 9x - 14$.

+ Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$ ta có tiếp điểm $N(-2;0)$.

  Phương trình tiếp tuyến tại N là $y = 9(x+2) + 0 \Rightarrow y = 9x + 18$.

  Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x - 14$ và $y = 9x + 18$. Chọn đáp án A.

Sử dụng máy tính:

+ Với $x_0 = 2$ ta nhập $9(-X) + X^3 - 3X^2 + 2$ $\boxed{CALC}$ $X = 2$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được -14 $\Rightarrow y = 9x - 14.$

+ Với $x_0 = -2$ ta nhập $9(-X) + X^3 - 3X^2 + 2$ $\boxed{CALC}$ $X = -2$ nhấn dấu $=$ ta được 18 $\Rightarrow y = 9x + 18.$

Bài toán 2: Cho hàm số $(C): y=\dfrac{2x+1}{x+2}\cdot$ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng có phương trình $\Delta: 3x-y+2=0$.

A. $y=3x-2$. **B.** $y=3x+14$ **C.** $y=3x+5$. **D.** $y=3x-8$.

Lời giải:

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}$, $\Delta: 3x-y+2=0 \Rightarrow y=3x+2$.

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng Δ nên $k=\dfrac{3}{(x_0+2)^2}=3$

$$\Leftrightarrow (x_0+2)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+2=1 \\ x_0+2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=-3 \end{array}\right.$$

+ Với $x_0=-1$ nhập $3(-X)+\dfrac{2X+1}{X+2}$ $\boxed{CALC}$ $X=-1$ nhấn dấu = ta được 2, suy ra $d: y=3x+2$ (loại do trùng với Δ).

+ Với $x_0=-3$ $\boxed{CALC}$ $X=-3$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được 14 $\Rightarrow d: y=3x+14$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $d: y=3x+14$. Chọn đáp án B.

Bài toán 3: [Thi thử chuyên Quốc Học Huế lần 1 năm 2017]

Tìm tọa độ của tất cả các điểm M trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d: \mathrm{y}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$

A. $(0;1),(2;3)$ **B.** $(1;0),(-3;2)$ **C.** $(-3;2)$ **D.** $(1;0)$

Lời giải:

Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$

$\Rightarrow$ Tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ với hệ số góc $k=f'(x_0)=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}$

Tiếp tuyến song song với $d: \mathrm{y}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$ nên có hệ số góc

$$k=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{(x_0+1)^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x_0+1)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=-3 \end{array}\right.$$

Với $x_0=1 \Rightarrow y_0=0 \Rightarrow (1;0)$

Với $x_0=-3 \Rightarrow y_0=2 \Rightarrow (-3;2)$

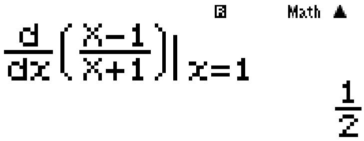
$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Sử dụng Casio

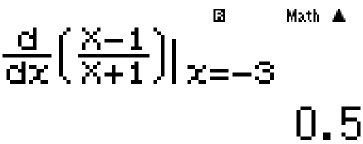
Đề bài hỏi các điểm M nên ta dự đoán có 2 điểm , lại quan sát thấy đáp án **B** được cấu tạo từ đáp án **C** và **D** nên ta ưu tiên thử đáp án **D** trước.

Tiếp tuyến song song với d nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng hệ số góc của d và bằng $\frac{1}{2}$

Tính $f'(1)=\frac{1}{2} \Rightarrow$ Điểm $M(1;0)$ là một tiếp điểm



Tính $f'(-3)=\frac{1}{2} \Rightarrow$ Điểm $M(-3;2)$ là một tiếp điểm



$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

Bài toán 4: **[Thi thử Group nhóm toán Facebook lần 5 năm 2017]**

Tìm tọa độ điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y=\frac{1}{3}x^2-x+\frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

A. $M(-2;0)$ **B.** $M\left(-3;-\frac{16}{3}\right)$ **C.** $\left(-1;\frac{4}{3}\right)$ **D.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{9}{8}\right)$

Lời giải:

Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$

$\Rightarrow$ Tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ với hệ số góc $k=f'(x_0)=x_0^2-1$

Tiếp tuyến vuông góc với $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ nên có hệ số góc

$k.\left(-\frac{1}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow k=3 \Leftrightarrow x_0^2-1=3 \Leftrightarrow x_0=\pm 2$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y=f(x)$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A;y_A)$.

Phương pháp

- *Cách 1.*
  - **Bước 1:** Phương trình tiếp tuyến đi qua $A(x_A;y_A)$ hệ số góc k có dạng
$$d: y=k(x-x_A)+y_A \quad (*)$$
  - **Bước 2:** d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:
$$\begin{cases} f(x)=k(x-x_A)+y_A \\ f'(x)=k \end{cases}.$$
  - **Bước 3:** Giải hệ này tìm được x suy ra k và thế vào phương trình $(*)$, ta được tiếp tuyến cần tìm.
- *Cách 2.*
  - **Bước 1:** Gọi $M(x_0;f(x_0))$ là tiếp điểm và tính hệ số góc tiếp tuyến $k=y'(x_0)=f'(x_0)$ theo x_0.
  - **Bước 2:** Phương trình tiếp tuyến có dạng: $d: y=y'(x_0).(x-x_0)+y_0 \quad (**)$.
Do điểm $A(x_A;y_A)\in d$ nên $y_A=y'(x_0).(x_A-x_0)+y_0$ giải phương trình này ta tìm được x_0.
  - **Bước 3:** Thế x_0 vào $(**)$ ta được tiếp tuyến cần tìm.

Chú ý: Đối với dạng viết phương trình tiếp tuyến đi qua điểm việc tính toán tương đối mất thời gian. Ta có thể sử dụng máy tính thay các đáp án: Cho $f(x)$ bằng kết quả các đáp án. Vào $\boxed{MODE}\to\boxed{5}\to\boxed{4}$ nhập hệ số phương trình. *Thông thường máy tính cho số nghiệm thực nhỏ hơn số bậc của phương trình là 1 thì ta chọn đáp án đó.*

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho hàm số $(C): y=-4x^3+3x+1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;2)$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-9x-7 \\ y=2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=4x+2 \\ y=x+1 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=x-7 \\ y=3x-5 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-x-5 \\ y=2x-2 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Ta có $y'=-12x^2+3$.

+ Tiếp tuyến của (C) đi qua $A(-1;2)$ với hệ số góc k có phương trình là $d: y=k(x+1)+2$.

+ d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} -4x^3+3x+1=k(x+1)+2 & (1) \\ -12x^2+3 \quad = k & (2) \end{cases}$$

Thay k từ (2) vào (1) ta được $-4x^3+3x+1=(-12x^2+3)(x+1)+2$

$$\Leftrightarrow 8x^3+12x^2-4=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

+ Với $x=-1 \Rightarrow k=-9$. Phương trình tiếp tuyến là $y=-9x-7$.

+ Với $y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Phương trình tiếp tuyến là $y=2$.

Chọn đáp án A.

Bài toán 2: **[Thi thử chuyên Nguyễn Thị Minh Khai lần 1 năm 2017]**

Số tiếp tuyến với đồ thị (C) : $y=x^3-3x^2+2$ đi qua điểm $M(1;0)$ là :

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Lời giải:

Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$, trong đó hệ số góc $k=f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$

Thế $f'(x_0)$ vào phương trình tiếp tuyến được $y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2$

Tiếp tuyến đi qua điểm $M(1;0)$ $\Rightarrow 0=(3x_0^2-6x_0)(1-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2$

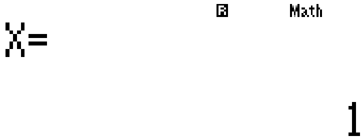
$\Leftrightarrow -2x_0^3+6x_0^2-6x_0+2=0$

$\Leftrightarrow -(x_0-1)\underbrace{(2x_0{}^2-4x_0+2)}_{\geq 0,\forall x_0}=0$

$\Leftrightarrow x_0=0$

Sử dụng Casio

Sử dụng máy tính với lệnh MODE 5 để giải phương trình bậc 3 trên



Ta thấy có 1 nghiệm x_0 $\Rightarrow$ Chỉ có 1 tiếp tuyến duy nhất.

$\Rightarrow$ D là đáp án chính xác

4. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị hàm số $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$.

Phương pháp

- **Bước 1.** Gọi d tiếp tuyến chung của $(C_1),(C_2)$ và x_0 là hoành độ tiếp điểm của d và (C_1) thì phương trình d có dạng $y = f'(x_0).(x-x_0)+f(x_0)$ $(***)$
- **Bước 2.** Dùng điều kiện tiếp xúc của d và (C_2), tìm được x_0.
- **Bước 3.** Thế x_0 vào $(***)$ ta được tiếp tuyến cần tìm.

BÀI TOÁN MINH HỌA

Cho hai hàm số:

$(C_1): y = f(x) = 2\sqrt{x}$, $(x>0)$ và $(C_2): y = g(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{8-x^2}$, $\left(-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị hàm số là:

A. $y = \dfrac{1}{2}x+5.$ **B.** $y = \dfrac{1}{2}x-1.$ **C.** $y = \dfrac{1}{2}x+2$ **D.** $y = \dfrac{1}{2}x-3.$

Lời giải:

Gọi d là phương trình tiếp tuyến chung của $(C_1),(C_2)$ và $x_0 = a$ ($a>0$ và $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$) là hoành độ tiếp điểm của d với (C_1) thì phương trình d là

$$y = f'(x)(x-a)+y_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}(x-a)+2\sqrt{a}.$$

d tiếp xúc với (C_2) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sqrt{8-x^2} = \dfrac{x}{\sqrt{a}}+\sqrt{a} & (1) \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{8-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được phương trình hoành độ tiếp điểm của d và (C_2).

$$\frac{1}{2}\sqrt{8-x^2} = -\frac{x^2}{2\sqrt{8-x^2}} - \frac{2\sqrt{8-x^2}}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2} \\ x \neq 0 \\ x(8-x^2) = -x^3-4(8-x^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2} \\ x \neq 0 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Thay $x=-2$ vào (2) ta được $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow x_0 = 4$. Vậy phương trình tiếp tuyến chung cần tìm là $y = \dfrac{1}{2}x+2$. Chọn đáp án C.

II. MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH NHANH VÀ TÍNH CHẤT CẦN BIẾT

Bài toán 2.1: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0,\ x\neq -\dfrac{d}{c}\right)$ có đồ thị (C). Gọi Δ là phương trình tiếp tuyến tại $M\in(C)$ và I là giao điểm 2 đường tiệm cận.

Ta luôn có:

1. Nếu $\Delta\perp IM$ thì chỉ tồn tại 2 điểm M thuộc 2 nhánh của đồ thị (C) đối xứng qua I và $x_M=\dfrac{\pm\sqrt{|ad-bc|}-d}{c}$. *Cách nhớ:* $\underbrace{cx_M+d}_{\text{mẫu số của hàm số}}=\pm\underbrace{\sqrt{|ad-bc|}}_{\text{tử số của hàm số}}$.

2. M luôn là trung điểm của AB (với A,B là giao điểm của Δ với 2 tiệm cận).

3. Diện tích tam giác IAB không đổi với mọi điểm M và $S_{\Delta IAB}=2\dfrac{|bc-ad|}{c^2}$.

4. Nếu $E,\ F$ thuộc 2 nhánh của đồ thị (C) và $E,\ F$ đối xứng qua I thì tiếp tuyến tại E,F song song với nhau. (suy ra một đường thẳng d đi qua $E,\ F$ thì đi qua tâm I).

CHỨNG MINH:

Ta có $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ là giao điểm của 2 tiệm cận.

Gọi $M\left(x_M;\dfrac{ax_M+b}{cx_M+d}\right)\in(C)$; $\left(x_M\neq-\dfrac{d}{c}\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y=\frac{ad-bc}{(cx_M+d)^2}(x-x_M)+\frac{ax_M+b}{cx_M+d}.$$

Chứng minh (1).

- $\overrightarrow{IM}\left(x_M+\dfrac{d}{c};\dfrac{bc-ad}{c(cx_M+d)}\right)$; $\vec{u}_\Delta\left(1;\dfrac{ad-bc}{(cx_M+d)^2}\right)$
- $\Delta\perp IM\Rightarrow \overrightarrow{IM}.\vec{u}_\Delta=0\Leftrightarrow x_M+\dfrac{d}{c}+\dfrac{bc-ad}{c(cx_M+d)}.\dfrac{ad-bc}{(cx_M+d)^2}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{(cx_M+d)^4-(ad-bc)^2}{c(cx_M+d)^3}=0\Leftrightarrow x_M=\frac{\pm\sqrt{|ad-bc|}-d}{c}.$$

Chứng minh (2).

- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $A\left(2x_M+\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $B\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{acx_M+2bc-ad}{c(cx_M+d)}\right)$.

- Xét $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M + \dfrac{d}{c} - \dfrac{d}{c} = 2x_M \\ y_A + y_B = \dfrac{a}{c} + \dfrac{ac\,x_M + 2bc - ad}{c\left(c\,x_M + d\right)} = 2.\dfrac{ax_M + b}{cx_M + d} = 2y_M \end{cases}$.

Vậy M luôn là trung điểm của AB.

Chứng minh (3).

- $\overrightarrow{IA}\left(\dfrac{2\left(cx_M + d\right)}{c};\ c\right)$ và $\overrightarrow{IB}\left(0;\ \dfrac{2\left(bc - ad\right)}{c\left(c\,x_M + d\right)}\right)$.
- ΔIAB vuông tại I

$$\Rightarrow S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{IA}\right|.\left|\overrightarrow{IB}\right| = \frac{1}{2}.\left|\frac{2\left(cx_M + d\right)}{c}\right|.\left|\frac{2\left(bc - ad\right)}{c\left(c\,x_M + d\right)}\right| = \frac{2\left|bc - ad\right|}{c^2} = \text{hằng số.}$$

Vậy diện tích ΔIAB không đổi với mọi điểm M.

Chứng minh (4):

- Gọi $E\left(x_E; \dfrac{a\,x_E + b}{cx_E + d}\right) \in (C)\left(x_E \neq -\dfrac{d}{c}\right) \Rightarrow F\left(-\dfrac{2d}{c} - x_E; \dfrac{2a}{c} - \dfrac{ax_E + b}{cx_E + d}\right)$

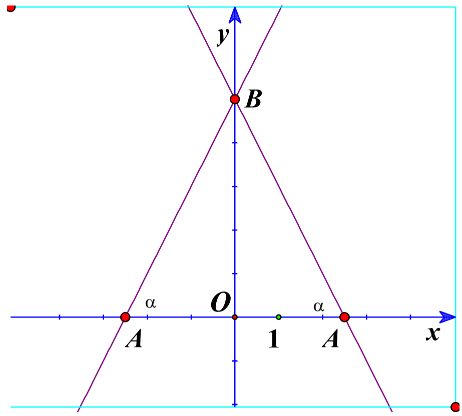
  (E, F đối xứng qua I).

- Phương trình tiếp tuyến tại E có hệ số góc $k_E = \dfrac{ad - bc}{\left(cx_E + d\right)^2}$ (1).
- Phương trình tiếp tuyến tại F có hệ số góc

$$k_F = \frac{ad - bc}{\left[c\left(-\dfrac{2d}{c} - x_E\right) + d\right]^2} = \frac{ad - bc}{\left(-2d - cx_E + d\right)^2} = \frac{ad - bc}{\left(-d - cx_E\right)^2} = \frac{ad - bc}{\left(cx_E + d\right)^2} \quad (2).$$

- Từ (1) và (2) suy ra $k_E = k_F$.

Bài toán 2.2: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là (C), $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$. Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ trên (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại A,B sao cho $OA=n.OB$. Khi đó x_0 thoả $\boxed{cx_0+d=\pm\sqrt{n.|ad-bc|}}$.



Chứng minh

Ta có: $\tan\alpha=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{1}{n}$.

Suy ra hệ số góc của đường thẳng tiếp tuyến của (C) là $k=\dfrac{1}{n}$ hoặc $k=-\dfrac{1}{n}$.

Hay $|k|=\dfrac{1}{n}$. Mà hệ số góc của (C) chính là $|k|=\dfrac{|ad-bc|}{(cx-d)^2}=\dfrac{1}{n}\Rightarrow (cx-d)^2=n|ad-bc|$

$\Rightarrow \boxed{cx_0+d=\pm\sqrt{n.|ad-bc|}}$

Chú ý loại nghiệm: Vì A, B không trùng O nên phương trình tiếp tuyến không có dạng $y=kx\ (k\in\mathbb{R})$

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}\ (1)$.Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A,B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

A. $y=-x-2$. **B.** $y=-x$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=-x+1$.

Lời giải:

Phương pháp tự luận

Gọi $M(x_0;y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0)=\dfrac{-1}{(2x_0+3)^2}<0$.

ΔOAB cân tại O nên tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y=-x$ (vì tiếp tuyến có hệ số góc âm). Nghĩa là $y'(x_0)=\dfrac{-1}{(2x_0+3)^2}=-1\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=-1\Rightarrow y_0=1\\ x_0=-2\Rightarrow y_0=0\end{array}\right.$.

- Với $x_0 = -1;\ y_0 = 1 \Rightarrow \Delta:\ y - 1 = -(x+1) \Leftrightarrow y = -x$ (loại).
- Với $x_0 = -2;\ y_0 = 0 \Rightarrow \Delta:\ y - 0 = -(x+2) \Leftrightarrow y = -x - 2$ (nhận).

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -x - 2$.

Phương pháp trắc nghiệm

- Tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O nên ta có $OA = OB \Rightarrow n = 1$.

$$cx_0 + d = \pm\sqrt{n.|ad - bc|} \Rightarrow 2x_0 + 3 = \pm\sqrt{1.|-1|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = -2 \end{array}\right..$$

- Với $x_0 = -1;\ y_0 = 1 \Rightarrow \Delta:\ y - 1 = -(x+1) \Leftrightarrow y = -x$ (loại).
- Với $x_0 = -2;\ y_0 = 0 \Rightarrow \Delta:\ y - 0 = -(x+2) \Leftrightarrow y = -x - 2$ (nhận).

Bài toán 2: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục $Ox,\ Oy$ lần lượt tại các điểm A và B thoả mãn $OA = 4OB$.

A. $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4} \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{2} \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{2} \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4} \end{array}\right.$.

Lời giải:

Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại $M(x_0; y_0) \in (C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA = 4OB$.

Do ΔOAB vuông tại A nên $\tan A = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc của d bằng $\dfrac{1}{4}$ hoặc $-\dfrac{1}{4}$.

Vì $y'(x_0) = -\dfrac{1}{(x_0-1)^2} < 0$ nên hệ số góc của d bằng $-\dfrac{1}{4}$, suy ra

$$-\frac{1}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = \dfrac{3}{2} \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \dfrac{5}{2} \end{array}\right..$$

Khi đó có 2 tiếp tuyến thoả mãn là: $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}(x+1) + \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{4}(x-3) + \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4} \end{array}\right.$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm $A(3;1)$ là

A. $y = -9x - 26$. **B.** $y = 9x - 26$. **C.** $y = -9x - 3$. **D.** $y = 9x - 2$.

Câu 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ tại điểm $B(1;-2)$ là

A. $y = 4x + 6$. **B.** $y = 4x + 2$. **C.** $y = -4x + 6$. **D.** $y = -4x + 2$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ tại điểm $C(-2;3)$ là

A. $y = 2x + 1$. **B.** $y = -2x + 7$. **C.** $y = 2x + 7$. **D.** $y = -2x - 1$.

Câu 4. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ tại điểm D có hoành độ bằng 2 có phương trình là

A. $y = -9x + 14$. **B.** $y = 9x + 14$. **C.** $y = -9x + 22$. **D.** $y = 9x + 22$.

Câu 5. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 8x^2$ tại điểm E có hoành độ bằng –3 có phương trình là

A. $y = 60x + 171$. **B.** $y = -60x + 171$.

C. $y = 60x + 189$. **D.** $y = -60x + 189$.

Câu 6. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ tại điểm F có hoành độ bằng 2 có phương trình là

A. $y = -x + 5$. **B.** $y = x + 5$. **C.** $y = -x - 1$. **D.** $y = x - 1$.

Câu 7. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3x^2$ tại điểm G có tung độ bằng 5 có phương trình là

A. $y = 12x - 7$. **B.** $y = -12x - 7$. **C.** $y = 12x + 17$. **D.** $y = -12x + 17$.

Câu 8. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$ tại điểm H có tung độ bằng 21 có phương trình là

A. $\left[\begin{array}{l} y = 40x - 101 \\ y = -40x - 59 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y = 40x - 59 \\ y = -40x - 101 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y = 40x + 59 \\ y = -40x + 101 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y = -40x - 59 \\ y = 40x + 101 \end{array}\right.$.

Câu 9. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x-1}$ tại điểm I có tung độ bằng 1 có phương trình là

A. $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{8}{5}$. **B.** $y = -\dfrac{1}{5}x - \dfrac{2}{5}$. **C.** $y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{8}{5}$. **D.** $y = \dfrac{1}{5}x - \dfrac{2}{5}$.

Câu 10. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$ có hệ số góc $k = -3$ có phương trình là

A. $y = -3x - 7$. **B.** $y = -3x + 7$. **C.** $y = -3x + 1$. **D.** $y = -3x - 1$.

Câu 11. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{4}x^4+2x^2$ có hệ số góc bằng $x+2y-9=0$ có phương trình là

A. $y=-48x+192$. **B.** $y=-48x+160$. **C.** $y=-48x-160$. **D.** $y=-48x-192$.

Câu 12. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x+3}{1-x}$ biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 4.

A. $\left[\begin{array}{l} y=4x-3 \\ y=4x+13 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=4x-3 \\ y=4x-13 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=4x+3 \\ y=4x+13 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=4x+3 \\ y=4x-13 \end{array}\right.$.

Câu 13. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2$ song song với đường thẳng $y=x$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 14. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-36x+5$ của đồ thị hàm số $y=x^4+x^2-2$ có phương trình là

A. $y=-36x-54$. **B.** $y=-36x+54$. **C.** $y=-36x-90$. **D.** $y=-36x+90$.

Câu 15. Cho hàm $y=\frac{-x+5}{x+2}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $d: y=-\frac{1}{7}x+\frac{5}{7}$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{7}x+\frac{5}{7} \\ y=-\frac{1}{7}x-\frac{23}{7} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{7}x+-\frac{5}{7} \\ y=-\frac{1}{7}x+\frac{23}{7} \end{array}\right.$. **C.** $y=-\frac{1}{7}x-\frac{23}{7}$. **D.** $y=-\frac{1}{7}x+\frac{23}{7}$.

Câu 16. Cho hàm $y=2x^3-3x-1$ có đồ thị là (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng $x+21y-2=0$ có phương trình là:

A. $\left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{21}x-33 \\ y=\frac{1}{21}x+31 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-21x-33 \\ y=-21x+31 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=21x-33 \\ y=21x+31 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=\frac{-1}{21}x-33 \\ y=\frac{-1}{21}x+31 \end{array}\right.$.

Câu 17. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^4-2x^2+3$ vuông góc với đường thẳng $x-8y+2017=0$ có phương trình là

A. $y=-\frac{1}{8}x+8$. **B.** $y=8x+8$. **C.** $y=-8x+8$. **D.** $y=\frac{1}{8}x-8$.

Câu 18. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-2}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-6x+1$ là

A. $y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$. **B.** $y=\frac{1}{6}x-1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{6}x-1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{6}x+\frac{13}{3} \end{array}\right.$.

Câu 19. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2$ tại giao điểm của đồ thị với trục Ox ?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 20. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành có phương trình là

A. $y = -9x - 18$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -9x - 18 \end{array}\right.$. **C.** $y = -9x + 18$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -9x + 18 \end{array}\right.$.

Câu 21. Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = \dfrac{x-5}{-x+1}$ tại giao điểm A của (C) và trục hoành. Khi đó, phương trình của đường thẳng d là

A. $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{5}{4}$. **B.** $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{5}{4}$. **C.** $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$. **D.** $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$.

Câu 22. Tại giao điểm của đồ thị hàm số (C): $y = 2x^3 - 6x + 1$ và trục Oy ta lập được tiếp tuyến có phương trình là

A. $y = 6x - 1$. **B.** $y = -6x - 1$. **C.** $y = 6x + 1$. **D.** $y = -6x + 1$.

Câu 23. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 2$ tại giao điểm M của (C) với trục tung là

A. $\left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 2 \end{array}\right.$. **B.** $y = 2$. **C.** $y = -2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 0 \end{array}\right.$.

Câu 24. Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ tại giao điểm A của (C) và trục tung. Khi đó, phương trình của đường thẳng d là

A. $y = \dfrac{7}{9}x - \dfrac{1}{3}$. **B.** $y = -\dfrac{7}{9}x + \dfrac{1}{3}$. **C.** $y = -\dfrac{7}{9}x - \dfrac{1}{3}$. **D.** $y = \dfrac{7}{9}x + \dfrac{1}{3}$.

Câu 25. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ song song với đường thẳng $y = 3x + 2016$ có phương trình là

A. $\left[\begin{array}{l} y = 3x - \dfrac{2}{3} \\ y = 3x - 8 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y = 3x - \dfrac{2}{3} \\ y = 3x + 8 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y = 3x - 8 \\ y = 3x + \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y = 3x + \dfrac{2}{3} \\ y = 3x + 8 \end{array}\right.$.

Câu 26. Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 5$ sẽ

A. song song với đường thẳng $x = 1$. **B.** song song với trục hoành.

C. có hệ số góc dương. **D.** có hệ số góc bằng -1.

Câu 27. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$ tại điểm có tung độ bằng 3 là

A. $x - 2y - 7 = 0$. **B.** $x + y - 8 = 0$.

C. $2x - y - 9 = 0$. **D.** $x + 2y - 9 = 0$.

Câu 28. Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm thuộc (C) và có hoành độ $x_0 = -1$.

A. $y = -9x + 5$. **B.** $y = 9x + 5$. **C.** $y = 9x - 5$. **D.** $y = -9x - 5$.

Câu 29. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ tại điểm $A(0;1)$ là

A. $y = x + 1$. **B.** $y = -7x + 1$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = 0$.

Câu 30. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 5 là

A. $y = -45x + 276$. **B.** $y = -45x + 174$.

C. $y = 45x + 276$. **D.** $y = 45x - 174$.

Câu 31. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là

A. $y = -3x + 2$. **B.** $y = 3x + 2$. **C.** $y = -3x + 8$. **D.** $y = 3x + 8$.

Câu 32. Cho hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + 3x - 1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất có phương trình là

A. $y = 15x + 55$. **B.** $y = -15x - 5$. **C.** $y = 15x - 5$. **D.** $y = -15x + 55$.

Câu 33. Cho hàm số $y = x^3 + x + 1$ có đồ thị (C). Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Trên (C) tồn tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho hai tiếp tuyến của (C) tại A và B vuông góc.

C. Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 có phương trình là $y = 4x - 1$.

D. Đồ thị (C) chỉ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Câu 34. Đường thẳng $y = ax - b$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - x + 2$ tại điểm $M(1;0)$. Khi đó ta có

A. $ab = 36$. **B.** $ab = -6$. **C.** $ab = -36$. **D.** $ab = -5$.

Câu 35. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2x + 5$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất, thì hệ số góc của tiếp tuyến đó là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{3}x}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tạo với trục hoành góc 60^0 có phương trình là

A. $\left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3}x \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3}x \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3}x \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{3}x - 4\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3}x \end{array}\right.$.

Câu 37. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m+1)x + 1$ (1), m là tham số. Kí hiệu (C_m) là đồ thị hàm số (1) và K là điểm thuộc (C_m), có hoành độ bằng -1. Tập tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm K song song với đường thẳng $d: 3x + y = 0$ là

A. $\{-1\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\left\{-\frac{1}{3}; -1\right\}$. **D.** $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Câu 38. Cho hàm số $y = x^4 + \frac{1}{2}mx^2 + m - 1$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng –1 vuông góc với đường thẳng có phương trình $x - 3y + 1 = 0$. Khi đó giá trị của m là

A. $m = -1$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -\frac{13}{3}$. **D.** $m = -\frac{11}{3}$.

Câu 39. Cho hàm số $y = \sqrt{2x+1}$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến d của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng $y = -3x + 2017$. Hỏi hoành độ tiếp điểm của d và (C) bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{4}{9}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** – 4.

Câu 40. Cho hàm số $y = 3x - 4x^3$ có đồ thị (C). Từ điểm $M(1;3)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C) ?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 41. Cho hàm số $y = x^3 + x + 2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến tại điểm $N(1;4)$ của (C) cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là *M*. Khi đó tọa độ điểm *M* là

A. $M(-1;0)$. **B.** $M(-2;-8)$. **C.** $M(0;2)$. **D.** $M(2;12)$.

Câu 42. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến tại điểm *N* của (C) cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là $M(-1;-2)$. Khi đó tọa độ điểm *N* là

A. $(-1;-4)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 43. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C). Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng –1 đi qua $A(1;3)$?

A. $m = \frac{7}{9}$. **B.** $m = \frac{1}{2}$. **C.** $m = -\frac{1}{2}$. **D.** $m = -\frac{7}{9}$.

Câu 44. Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ có đồ thị (C_m). Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 0 song song với đường thẳng $y = 3x + 1$?

A. $m = 3$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 2$.

Câu 45. Cho hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ có đồ thị (C) và gốc tọa độ *O*. Gọi Δ là tiếp tuyến của (C), biết Δ cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt *A*, *B* và tam giác *OAB* cân. Phương trình Δ là

A. $y = x + 1$. **B.** $y = x + 4$. **C.** $y = x - 4$. **D.** $y = x$.

Câu 46. Cho hàm số $y=-x^4-x^2+6$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) cắt các trục *Ox, Oy* lần lượt tại hai điểm *A, B* sao cho $OB=36OA$ có phương trình là:

A. $\left[\begin{array}{l} x-36y-4=0 \\ x+36y-4=0 \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} y=-36x-86 \\ y=36x-86 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y=-36x+58 \\ y=36x+58 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} x-36y+14=0 \\ x+36y+14=0 \end{array}\right.$.

Câu 47. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ với $x_0>-1$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A,B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d:4x+y=0$. Hỏi giá trị của x_0+2y_0 bằng bao nhiêu?

A. $-\dfrac{7}{2}$.
B. $\dfrac{7}{2}$.
C. $\dfrac{5}{2}$.
D. $-\dfrac{5}{2}$.

Câu 48. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$ (1), *m* là tham số thực. Kí hiệu (C_m) là đồ thị hàm số (1); *d* là tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 1. Tìm *m* để khoảng cách từ điểm $B\left(\dfrac{3}{4};1\right)$ đến đường thẳng *d* đạt giá trị lớn nhất?

A. $m=-1$.
B. $m=1$.
C. $m=2$.
D. $m=-2$.

Câu 49. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) tại những điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến đường thẳng $d_1:3x+4y-2=0$ bằng 2.

A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 0.

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm hai tiệm cận của (C). Tìm điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng MI?

A. $M\left(4;\dfrac{7}{3}\right)$.
B. $M\left(3;\dfrac{5}{2}\right)$.
C. $M(2;3)$.
D. $M(5;3)$.

Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị là (C), đường thẳng $d:y=x+m$. Với mọi m ta luôn có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A,B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A,B. Tìm m để tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=-1$.
B. $m=-2$.
C. $m=3$.
D. $m=-5$.

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}\,(1)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A,B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

A. $y=-x-2$.
B. $y=-x$.
C. $y=-x+2$.
D. $y=-x+1$.

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A và B thoả mãn $OA=4OB$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4} \\ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4} \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4} \\ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{2} \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{2} \\ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{2} \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{2} \\ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4} \end{array}\right.$.

Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi Δ là tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)$ (với $x_0>0$) thuộc đồ thị (C). Để khoảng cách từ tâm đối xứng I của đồ thị (C) đến tiếp tuyến Δ là lớn nhất thì tung độ của điểm M gần giá trị nào nhất?

A. $\dfrac{7\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{5\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 55. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất thì tung độ của điểm M nằm ở góc phần tư thứ hai, gần giá trị nào nhất?

A. $3e$. **B.** $2e$. **C.** e. **D.** $4e$.

Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất. Khi đó, độ dài lớn nhất của vectơ $\overrightarrow{OM}$ gần giá trị nào nhất ?

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số (C) tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Khi đó, khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến Δ bằng?

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tiếp tuyến Δ của (C) cắt 2 tiệm cận tại A và B sao cho chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất. Khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ đến tiếp tuyến Δ gần giá trị nào nhất?

A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 59. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tiếp tuyến Δ của (C) tại M cắt các đường tiệm cận tại A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó tiếp tuyến Δ của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất thuộc khoảng nào?

A. $(27;\, 28)$. **B.** $(28;\, 29)$. **C.** $(26;\, 27)$. **D.** $(29;\, 30)$.

Câu 60. Gọi $k_1;k_2$ là hệ số góc của các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^2+x$ (C) tại các giao điểm của (C) với đường thẳng $y=mx+1$. Biết $k_1+k_2=4$, giá trị của tham số m là:

A. $m=0$ **B.** $m=2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=4$

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1B	2D	3C	4A	5A	6A	7A	8B	9C	10D
11B	12D	13B	14A	15C	16C	17C	18D	19D	20B
21D	22D	23C	24C	25A	26B	27D	28B	29B	30D
31B	32A	33B	34A	35D	36C	37B	38A	39C	40C
41B	42C	43B	44D	45B	46C	47A	48B	49C	50C
51A	52A	53A	54D	55C	56D	57D	58D	59A	60B

Câu 1. Chọn B.

Tính $y'=3x^2-6x\Rightarrow y'(3)=9\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y=9x-26$.

Câu 2. Chọn D.

Tính $y'=4x^3-8x\Rightarrow y'(1)=-4\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y=-4x+2$.

Câu 3. Chọn C.

Tính $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}\Rightarrow y'(-2)=2\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y=2x+7$.

Câu 4. Chọn A.

Tính $y_0=y(2)=-4$ và $y'=-3x^2+3\Rightarrow y'(2)=-9$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=-9x+14$.

Câu 5. Chọn A.

Tính $y_0=y(-3)=-9$ và $y'=-4x^3+16x\Rightarrow y'(-3)=60$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=60x+171$.

Câu 6. Chọn A.

Tính $y_0=y(2)=3$ và $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(2)=-1$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=-x+5$.

Câu 7. Chọn A.

Giải phương trình $2x_0^3+3x_0^2=5\Leftrightarrow x_0=1$, và $y'=6x^2+6x\Rightarrow y'(1)=12$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=12x-7$.

Câu 8. Chọn B.

Giải phương trình $x_0^4+2x_0^2-3=21\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=-2\end{array}\right.$. Đồng thời $y'=4x^3+4x$, suy ra $\left[\begin{array}{l}y'(2)=40\\y'(-2)=-40\end{array}\right.$. Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là $y=40x-59$ và $y=-40x-101$.

Câu 9. Chọn C.

Giải phương trình $\frac{x_0+2}{2x_0-1}=1 \Leftrightarrow x_0=3$ và $y'=\frac{-5}{(2x-1)^2} \Rightarrow y'(3)=\frac{-1}{5}$. Phương trình tiếp tuyến là $y=-\frac{1}{5}x+\frac{8}{5}$.

Câu 10. Chọn D.

Giải phương trình $y'(x_0)=-3 \Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0+3=0 \Leftrightarrow x_0=1$. Đồng thời $y(1)=-4$ nên phương trình tiếp tuyến là $y=-3x-1$.

Câu 11. Chọn B.

Giải phương trình $y'(x_0)=-48 \Leftrightarrow -x_0^3+4x_0+48=0 \Leftrightarrow x_0=4$. Đồng thời $y(4)=-32$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-48x+160$.

Câu 12. Chọn D.

Giải phương trình

$$y'(x_0)=4 \Leftrightarrow \frac{4}{(1-x_0)^2}=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \Rightarrow y(0)=3 \Rightarrow pttt: y=4x+3 \\ x_0=2 \Rightarrow y(2)=-5 \Rightarrow pttt: y=4x-13 \end{array}\right..$$

Câu 13. Chọn B.

Giải phương trình

$$y'(x_0)=1 \Leftrightarrow -3x_0^2+4x_0-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \Rightarrow y(1)=1 \Rightarrow pttt: y=x \text{ (trùng)} \\ x_0=\frac{1}{3} \Rightarrow y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27} \Rightarrow pttt: y=x-\frac{4}{27} \end{array}\right..$$

Câu 14. Chọn A.

Giải phương trình $y'(x_0)=-36 \Leftrightarrow 4x_0^3+2x_0+36=0 \Leftrightarrow x_0=-2$. Đồng thời $y(-2)=18$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-36x-54$.

Câu 15. Chọn C.

Giải phương trình

$$y'(x_0)=-\frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{-7}{(x_0+2)^2}=\frac{-1}{7} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=5 \Rightarrow y(5)=0 \Rightarrow pttt: y=-\frac{1}{7}x+\frac{5}{7} \text{ (trùng)} \\ x_0=-9 \Rightarrow y(-9)=-2 \Rightarrow pttt: y=-\frac{1}{7}x-\frac{23}{7} \end{array}\right..$$

Câu 16. Chọn C.

Giải phương trình

$$y'(x_0)=21 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2 \Rightarrow y(2)=9 \Rightarrow pttt: y=21x-33 \\ x_0=-2 \Rightarrow y(-2)=-11 \Rightarrow pttt: y=21x+31 \end{array}\right..$$

Câu 17. Chọn C.

Giải phương trình $y'(x_0)=-8 \Leftrightarrow x_0=1$. Đồng thời $y(1)=0$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-8x+8$.

Câu 18. Chọn D.

Giải phương trình $y'(x_0)=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x_0=4\Rightarrow y(4)=1 & \Rightarrow pttt: y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3} \\ x_0=-8\Rightarrow y(-8)=3 & \Rightarrow pttt: y=\frac{1}{6}x+\frac{13}{3}\end{array}\right.$.

Câu 19. **Chọn D.**

Giải phương trình $x^4-4x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{lll} x=0 & \Rightarrow y'(0)=0 & \Rightarrow pttt: y=0 \\ x=2 & \Rightarrow y'(2)=16 & \Rightarrow pttt: y=16x-32 \\ x=-2 & \Rightarrow y'(-2)=-16 & \Rightarrow pttt: y=-16x-32\end{array}\right.$.

Câu 20. **Chọn B.**

Ta giải phương trình

$$-x^3+3x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{lll} x=1 & \Rightarrow y'(1)=0 & \Rightarrow pttt: y=0 \\ x=-2 & \Rightarrow y'(-2)=-9 & \Rightarrow pttt: y=-9x-18\end{array}\right..$$

Câu 21. **Chọn D.**

Ta giải phương trình $\frac{x-5}{-x+1}=0\Leftrightarrow x=5$. Đồng thời $y'(5)=-\frac{1}{4}$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.

Câu 22. **Chọn D.**

Giao điểm của (C) và Oy là $A(0;1)\Rightarrow y'(0)=-6$ nên phương trình tiếp tuyến là $y=-6x+1$.

Câu 23. **Chọn C.**

Giao điểm của (C) và Oy là $M(0;-2)\Rightarrow y'(0)=0$ nên phương trình tiếp tuyến là $y=-2$

.

Câu 24. **Chọn C.**

Giao điểm của (C) và Oy là $A\left(0;-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow y'(0)=-\frac{7}{9}$ nên phương trình tiếp tuyến là $y=-\frac{7}{9}x-\frac{1}{3}$.

Câu 25. **Chọn A.**

Ta giải phương trình $y'(x_0)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x_0=1\Rightarrow y(1)=\frac{7}{3} & \Rightarrow pttt: y=3x-\frac{2}{3} \\ x_0=3\Rightarrow y(3)=1 & \Rightarrow pttt: y=3x-8\end{array}\right.$.

Câu 26. **Chọn B.**

Ta có $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=1\Rightarrow y(1)=\frac{-11}{3} \\ x_0=3\Rightarrow y(3)=-5,\ \ y'(3)=0\end{array}\right.$. Vậy tiếp tuyến song song trục hoành.

Câu 27. **Chọn D.**

Theo giả thiết ta có $y_0=3\Rightarrow x_0=3$ và $y'(3)=-\frac{1}{2}$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $x+2y-9=0$.

Câu 28. **Chọn B.**

Theo giả thiết ta có $x_0=-1\Rightarrow y_0=-4$ và $y'(-1)=9$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=9x+5$.

Câu 29. **Chọn B.**

Theo giả thiết ta có $x_0=0\Rightarrow y_0=1$ và $y'(0)=-7$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=-7x+1$.

Câu 30. **Chọn D.**

Theo giả thiết ta có $x_0=5\Rightarrow y_0=51$ và $y'(5)=45$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=45x-174$.

Câu 31. **Chọn B.**

Ta có $y'=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3\geq 3\Rightarrow \min y'=3$ khi $x=x_0=1\Rightarrow y_0=y(1)=5$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến $y=3(x-1)+5=3x+2$.

Câu 32. **Chọn A.**

Ta có $y'=-3x^2+12x+3=-3(x+2)^2+15\leq 15\Rightarrow \max y'=15$ khi $x=x_0=-2$. Lúc đó $y_0=y(-2)=25$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến $y=15(x+2)+25=15x+55$.

Câu 33. **Chọn B.**

[Phương pháp tự luận]

Ta có $y'=3x^2+1>0\Rightarrow \begin{cases} y'(x_1)=3x_1^2+1>0 \\ y'(x_2)=3x_2^2+1>0 \end{cases}\Rightarrow y'(x_1).y'(x_2)>0$

hay $y'(x_1).y'(x_2)\neq -1$. Suy ra 2 tiếp tuyến A và B không vuông góc.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Ta có $y'=3x^2+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và cắt trục hoành tại một điểm duy nhất $\rightarrow$ **A, D đúng**.

Với $x_0=1\Rightarrow y'(1)=4, y_0=3$. Vậy phương trình tiếp tuyến $y=4(x-1)+3=4x-1\rightarrow$ **C đúng**.

Câu 34. **Chọn A.**

Ta có $y'=3x^2+4x-1\Rightarrow y'(1)=6$. Khi đó phương trình tiếp tuyến tại $M(1;0)$ là $y=6(x-1)=6x-6$, nên $\begin{cases} a=6 \\ b=6 \end{cases}\Rightarrow ab=36$.

Câu 35. **Chọn D.**

Ta có $y'=3x^2-2x+2=3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)+\frac{5}{3}=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\geq\frac{5}{3}\Rightarrow \min y'=\frac{5}{3}$ khi $x=x_0=\frac{1}{3}$.

Câu 36. Chọn C.

Ta có $y'=\frac{-\sqrt{3}}{(x-1)^2}<0,\forall x\neq 1$. Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ tạo với Ox góc 60^0

$\Rightarrow y'(x_0)=\pm\tan 60^0=\pm\sqrt{3}\xrightarrow{y'<0} y'(x_0)=-\sqrt{3}\Rightarrow\frac{-\sqrt{3}}{(x_0-1)^2}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow (x_0-1)^2=1$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=2\Rightarrow y_0=2\sqrt{3}\\ x_0=0\Rightarrow y_0=0\end{array}\right.$. Các tiếp tuyến tương ứng có phương trình là $\left[\begin{array}{l} y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}\\ y=-\sqrt{3}x\end{array}\right.$.

Câu 37. Chọn B.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m+1)$. Do $K\in(C_m)$ và có hoành độ bằng -1, suy ra $K\left(-1;-6m-3\right)$.

Khi đó tiếp tuyến tại K có phương trình

$$\Delta: y=y'(-1)(x+1)-6m-3=(9m+6)x+3m+3.$$

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng d

$$\Rightarrow 3x+y=0\Leftrightarrow y=-3x\Leftrightarrow\begin{cases}9m+6=-3\\3m+3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\m\neq-1\end{cases}.$$

Vậy không tồn tại m, ta chọn $\varnothing$.

Câu 38. Chọn A.

Ta có $y'=4x^3+mx$ và đường thẳng $x-3y+1=0$ viết thành $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$.

Theo yêu cầu bài toán, phải có $y'\left(-1\right)=-3\Leftrightarrow -4-m=-3\Leftrightarrow m=-1$.

Câu 39. Chọn C.

Ta có $y'=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d và (C).

Theo yêu cầu bài toán, ta có $y'\left(x_0\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2x_0+1}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2x_0+1=9\Leftrightarrow x_0=4$.

Câu 40. Chọn C.

Đường thẳng đi qua $M\left(1;3\right)$ có hệ số góc k có dạng $d: y=k\left(x-1\right)+3$.

d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases}3x-4x^3=k\left(x-1\right)+3 & (1)\\ 3-12x^2=k & (2)\end{cases}$. Thay (2) vào (1) ta được

$$3x-4x^3=\left(3-12x^2\right)\left(x-1\right)+3\Leftrightarrow 8x^3-12x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{3}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=3\\ k=-24\end{array}\right..$$

Vậy có 2 tiếp tuyến.

Câu 41. Chọn B.

Phương pháp tự luận

Ta có $y' = 3x^2 + 1 \Rightarrow y'(1) = 4$, suy ra tiếp tuyến tại $N(1;4)$ là $\Delta : y = 4x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C) là

$$x^3 + x + 2 = 4x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = -8 \end{array}\right..$$

Phương pháp trắc nghiệm

$2x_N + x_M = -\dfrac{b}{a}$ (Với $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là hàm số ban đầu)

$\Leftrightarrow 2 + x_M = 0 \Leftrightarrow x_M = -2 \Rightarrow M(-2;-8)$.

Câu 42. Chọn C.

Phương pháp tự luận

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;-2)$ có hệ số góc k có dạng $\Delta : y = k(x+1) - 2$.

Δ là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - x^2 + x + 1 = k(x+1) - 2 & (1) \\ 3x^2 - 2x + 1 = k & (2) \end{cases}.$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$x^3 - x^2 + x + 1 = (3x^2 - 2x + 1)(x+1) - 2 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right. \Rightarrow N(1;2).$$

Phương pháp trắc nghiệm

$2x_N + x_M = -\dfrac{b}{a}$ (Với $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là hàm số ban đầu)

$\Leftrightarrow 2x_N + (-1) = 1 \Leftrightarrow x_N = 1 \Rightarrow N(1;2)$.

Câu 43. Chọn B.

Ta có $y' = 3x^2 + 6mx + m + 1$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần lập.

Khi đó $x_0 = -1 \Rightarrow \begin{cases} y'(-1) = 4 - 5m \\ y_0 = 2m - 1 \end{cases}$, suy ra phương trình tiếp tuyến là $\Delta : y = (4 - 5m)(x+1) + 2m - 1$.

Do $A(1;3) \in \Delta \Rightarrow 3 = (4 - 5m)(1+1) + 2m - 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

Câu 44. Chọn D.

Ta có $y' = \dfrac{1+m}{(x+1)^2}$ khi đó $y'(0) = 3 \Leftrightarrow 1 + m = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 45. Chọn B.

Ta có $y'=\frac{1}{\left(x+1\right)^2}>0,\forall x\ne -1$. Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm của (C) với tiếp tuyến cần lập. Tam giác OAB cân tại O nên $OA=OB$, suy ra

$$y'\left(x_0\right)=\pm 1\xrightarrow{y'>0}y'\left(x_0\right)=1\Leftrightarrow \frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0\\ x_0=-2\end{array}\right..$$

- Với $x_0=0\Rightarrow y_0=0$ (loại, do $M\left(0;0\right)\equiv O$).
- Với $x_0=-2\Rightarrow y_0=2$, suy ra phương trình tiếp tuyến $\Delta : y=x+4$.

Câu 46. Chọn C.

Do $\frac{OB}{OA}=36\Rightarrow y'(x_0)=\pm 36$.

- Với $y'(x_0)=-36\Leftrightarrow -4x^3-2x_0=-36\Leftrightarrow 4x_0^3+2x_0-36=0\Leftrightarrow x_0=2$.

Vậy $y_0=y(2)=-14$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y=-36x+58$.

- Với $y'(x_0)=36\Leftrightarrow -4x^3-2x_0=36\Leftrightarrow 4x_0^3+2x_0+36=0\Leftrightarrow x_0=-2$.

Vậy $y_0=y(-2)=-14$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y=36x+58$.

Câu 47. Chọn A.

- Gọi $M\left(x_0;\frac{x_0-1}{2\left(x_0+1\right)}\right)\in\left(C\right)$ với $x_0\ne -1$ là điểm cần tìm.
- Gọi Δ tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M ta có phương trình.

$$\Delta : y=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}=\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}.$$

- Gọi $A=\Delta\cap Ox\ \Rightarrow A\left(-\frac{x_0^2-2x_0-1}{2};0\right)$ và $B=\Delta\cap Oy\Rightarrow B\left(0;\frac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0+1)^2}\right)$.
- Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ ΔOAB có trọng tâm là

$$G\left(-\frac{x_0^2-2x_0-1}{6};\frac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}\right).$$

- Do G thuộc đường thẳng $4x+y=0\Rightarrow -4.\frac{x_0^2-2x_0-1}{6}+\frac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}=0$

$$\Leftrightarrow 4=\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}\text{ (vì } A,B \text{ không trùng } O \text{ nên } x_0^2-2x_0-1\ne 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0+1=\frac{1}{2}\\ x_0+1=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-\frac{1}{2}\\ x_0=-\frac{3}{2}\end{array}\right..$$

- Vì $x_0>-1$ nên chỉ chọn $x_0=-\frac{1}{2}\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow x_0+2y_0=-\frac{7}{2}$.

Câu 48. Chọn B.

- $A\in\left(C_m\right)$ nên $A\left(1;1-m\right)$. Ngoài ra $y'=4x^3-4mx\Rightarrow y'\left(1\right)=4-4m$.

- Phương trình tiếp tuyến của $\left(C_m\right)$ tại A là $y-1+m=y'(1).(x-1)$, hay

$$(4-4m)x-y-3(1-m)=0.$$

- Khi đó $d(B;\Delta)=\dfrac{|-1|}{\sqrt{16(1-m)^2+1}}\le 1$, Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow$ khi $m=1$.
- Do đó $d(B;\Delta)$ lớn nhất bằng 1 khi và chỉ khi $m=1$.

Câu 49. Chọn C.

- Giả sử $M\left(x_0;y_0\right)\in(C) \Rightarrow y_0=\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}$.
- Ta có $d\left(M,d_1\right)=2\Leftrightarrow \dfrac{\left|3x_0+4y_0-2\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x_0+4y_0-12=0\\3x_0+4y_0+8=0\end{array}\right.$.
- Với $3x_0+4y_0-12=0\Leftrightarrow 3x_0+4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right)-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0\Rightarrow M_1(0;3)\\x_0=\dfrac{1}{3}\Rightarrow M_2\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{11}{4}\right)\end{array}\right.$
- Với $3x_0+4y_0+8=0\Leftrightarrow 3x_0+4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right)+8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=-5\Rightarrow M_3\left(-5;\dfrac{7}{4}\right)\\x_0=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow M_4\left(-\dfrac{4}{3};-1\right)\end{array}\right.$.

Suy ra có 4 tiếp tuyến.

Câu 50. Chọn C.

Phương pháp tự luận.

- Giao điểm của hai tiệm cận là $I(1;2)$. Gọi $M(a;b)\in(C)\Rightarrow b=\dfrac{2a-1}{a-1}\ (a>1)$.
- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=-\dfrac{1}{(a-1)^2}(x-a)+\dfrac{2a-1}{a-1}$.
- Phương trình đường thẳng MI là $y=\dfrac{1}{(a-1)^2}(x-1)+2$.
- Tiếp tuyến tại M vuông góc với MI nên ta có

$$-\frac{1}{(a-1)^2}.\frac{1}{(a-1)^2}=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\Rightarrow b=1\\a=2\Rightarrow b=3\end{array}\right..$$

Vì yêu cầu hoành độ lớn hơn 1 nên điểm cần tìm là $M(2;3)$.

Phương pháp trắc nghiệm

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)$, điểm M thoả yêu cầu bài toán có hoành độ được tính như sau:

$$x_0-1=\pm\sqrt{\left|2.(-1)-1.(-1)\right|}\Leftrightarrow x_0-1=\pm 1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=3\\x_0=0\ \ (L)\end{array}\right..$$

Vậy $M(2;3)$.

Câu 51. Chọn A.

- Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$\frac{-x+1}{2x-1}=x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ g(x)=2x^2+2mx-m-1=0 \ (*) \end{cases}.$$

- Theo định lí Viet ta có $x_1+x_2=-m;\ \ x_1x_2=\frac{-m-1}{2}$. Giả sử $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$.

- Ta có $y'=\frac{-1}{(2x-1)^2}$, nên tiếp tuyến của (C) tại A và B có hệ số góc lần lượt là

$k_1=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}$ và $k_2=-\frac{1}{(2x_2-1)^2}$. Vậy

$$k_1+k_2=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}-\frac{1}{(2x_2-1)^2}=-\frac{4(x_1^2+x_2^2)-4(x_1+x_2)+2}{\left[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1\right]^2}$$

$$=-\left(4m^2+8m+6\right)=-4(m+1)^2-2\leq -2$$

- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất bằng -2 khi $m=-1$.

Câu 52. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận

- Gọi $M(x_0;y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0)=\frac{-1}{(2x_0+3)^2}<0$.

- ΔOAB cân tại O nên tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y=-x$ (vì tiếp tuyến

có hệ số góc âm). Nghĩa là $y'(x_0)=\frac{-1}{(2x_0+3)^2}=-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \Rightarrow y_0=1 \\ x_0=-2 \Rightarrow y_0=0 \end{array}\right.$.

- Với $x_0=-1;\ y_0=1 \Rightarrow \Delta$: $y-1=-(x+1) \Leftrightarrow y=-x$ (loại).

- Với $x_0=-2;\ y_0=0 \Rightarrow \Delta$: $y-0=-(x+2) \Leftrightarrow y=-x-2$ (nhận).

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-x-2$.

Phương pháp trắc nghiệm

- Tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O nên ta có $OA=OB \Rightarrow n=1$.

$$acx_0^2+2bcx_0+bd\neq 0 \Rightarrow 2x_0^2+8x_0+6\neq 0 \Leftrightarrow x_0\neq -1; x_0\neq -3$$

$$cx_0+d=\pm\sqrt{n.|ad-bc|} \Rightarrow 2x_0+3=\pm\sqrt{1.|-1|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1\,(L) \\ x_0=-2\,(N) \end{array}\right..$$

- Với $x_0=-2;\ y_0=0 \Rightarrow \Delta$: $y-0=-(x+2) \Leftrightarrow y=-x-2$ (nhận).

Câu 53. **Chọn A.**

- Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại $M(x_0;y_0)\in(C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA=4OB$.

- Do ΔOAB vuông tại A nên $\tan A=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc của d bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$.

- Vì $y'(x_0)=-\frac{1}{(x_0-1)^2}<0$ nên hệ số góc của d bằng $-\frac{1}{4}$, suy ra

$$-\frac{1}{(x_0-1)^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\Rightarrow y_0=\frac{3}{2}\\ x_0=3\Rightarrow y_0=\frac{5}{2}\end{array}\right..$$

- Khi đó có 2 tiếp tuyến thoả mãn là: $\left[\begin{array}{l}y=-\frac{1}{4}(x+1)+\frac{3}{2}\\ y=-\frac{1}{4}(x-3)+\frac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}\end{array}\right..$

Câu 54. Chọn D.

Phương pháp tự luận

- Ta có $y'=\frac{-1}{(x-1)^2}$; $I(1;1)$.
- Gọi $M\left(x_0;\frac{x_0}{x_0-1}\right)\in(C)$, $(x_0\neq 1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y=-\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0}{x_0-1}\Leftrightarrow x+(x_0-1)^2y-x_0^2=0.$$

- $d(I,\Delta)=\frac{2|x_0-1|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{(x_0-1)^2}+(x_0-1)^2}}\leq\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.
- Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{1}{(x_0-1)^2}=(x_0-1)^2\Leftrightarrow|x_0-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=2\ (N)\\ x_0=0\ \ (L)\end{array}\right..$$

Tung độ này gần với giá trị $\frac{\pi}{2}$ nhất trong các đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm

Ta có $IM\perp\Delta\Rightarrow\ cx_0+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_0-1=\pm\sqrt{|-1-0|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x_0=2\Rightarrow y_0=2 & (N)\\ x_0=0 & (L)\end{array}\right..$

Câu 55. Chọn C.

Phương pháp tự luận

- Ta có $y'=\frac{3}{(x+1)^2}$.
- Gọi $M\left(x_0;\frac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in(C),(x_0\neq-1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0+1}\Leftrightarrow 3x-(x_0+1)^2y+2x_0^2-2x_0-1=0.$$

- $d\left(I,\Delta\right)=\dfrac{6\left|x_0+1\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}\le\dfrac{6}{\sqrt{2\sqrt{9}}}=\sqrt{6}$.
- Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow\left(x_0+1\right)^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2-\sqrt{3}\left(L\right)\\ x_0=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2+\sqrt{3}\left(N\right)\end{array}\right..$$

Tung độ này gần với giá trị e nhất trong các đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm

Ta có $IM\perp\Delta\Rightarrow\ cx_0+d=\pm\sqrt{\left|ad-bc\right|}\Rightarrow x_0+1=\pm\sqrt{\left|2+1\right|}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y=2-\sqrt{3}\left(L\right)\\ x_0=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y=2+\sqrt{3}\left(N\right)\end{array}\right..$$

Câu 56. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)\in\left(C\right),\left(x_0\ne2\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta:y=-\frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+2+\frac{1}{x_0-2}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(2;2+\dfrac{2}{x_0-2}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B\left(2x_0-2;2\right)$.
- Ta có $AB^2=4\left[\left(x_0-2\right)^2+\dfrac{1}{\left(x_0-2\right)^2}\right]\ge8$. Dấu $"="$ xảy ra khi $\left(x_0-2\right)^2=\dfrac{1}{\left(x_0-2\right)^2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\Rightarrow y_0=3\Rightarrow\overrightarrow{OM}\left(3;3\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{OM}\right|=3\sqrt{2}\left(N\right)\\ x_0=1\Rightarrow y_0=1\Rightarrow\overrightarrow{OM}\left(1;1\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{2}\left(L\right)\end{array}\right..$$

Phương pháp trắc nghiệm

- AB ngắn nhất suy ra khoảng cách từ I đến tiếp tuyến Δ tại M ngắn nhất

$\Rightarrow IM\perp\Delta\Rightarrow cx_M+d=\pm\sqrt{\left|ad-bc\right|}\ \Rightarrow x_M-2=\pm\sqrt{\left|-4+3\right|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=3\Rightarrow y_M=3\\ x_M=1\Rightarrow y_M=1\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{OM}\right|=3\sqrt{2}$.

Câu 57. **Chọn D.**

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-2}{x_0+1}\right)\in\left(C\right)$, $\left(x_0\ne-1\right)$, $I\left(-1;1\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y=\frac{3}{\left(x_0+1\right)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-2}{x_0+1}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(-1;\frac{x_0-5}{x_0+1}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B\left(2x_0+1;1\right)$.
- Ta có $IA=\frac{6}{\left|x_0+1\right|}$, $IB=2\left|x_0+1\right|\Rightarrow IA.IB=12$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIAB

là $S_{IAB}=pr$, suy ra

$$r=\frac{S_{IAB}}{p}=\frac{IA.IB}{IA+IB+AB}=\frac{IA.IB}{IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}}\le\frac{IA.IB}{2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2.IA.IB}}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

- Suy ra $r_{\max}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow\left|x_0-1\right|^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1-\sqrt{3}\\x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$.
- $\overrightarrow{IM}\left(\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{6}$.

Phương pháp trắc nghiệm

- $IA=IB\Rightarrow\Delta IAB$ vuông cân tại $I\Rightarrow IM\perp\Delta$.
- $cx_M+d=\pm\sqrt{\left|ad-bc\right|}\Rightarrow x_M+1=\pm\sqrt{\left|1+2\right|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1-\sqrt{3}\\x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{6}$.

Câu 58. Chọn D.

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0;2+\frac{3}{x_0-1}\right)\in(C),(x_0\neq1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y=\frac{-3}{\left(x_0-1\right)^2}(x-x_0)+2+\frac{3}{x_0-1}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(1;\ 2+\frac{6}{x_0-1}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B\left(2x_0-1;\ 2\right)$.
- Ta có $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{\left|x_0-1\right|}\cdot2\left|x_0-1\right|=2.3=6$.
- ΔIAB vuông tại I có diện tích không đổi $\Rightarrow$ chu vi ΔIAB đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$IA=IB\Leftrightarrow\frac{6}{\left|x_0-1\right|}=2\left|x_0-1\right|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1+\sqrt{3}\\x_0=1-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

- Với $x_0=1+\sqrt{3}$ thì phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y=-x+3+2\sqrt{3}$. Suy ra

$$d\left(O,\Delta\right)=\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

- Với $x_0=1-\sqrt{3}$ thì phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y=-x+3-2\sqrt{3}$. Suy ra

$$d(O,\Delta)=\frac{-3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Vậy khoảng cách lớn nhất là $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ gần với giá trị 5 nhất trong các đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm

- $IA=IB\Rightarrow cx_M+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_M-1=\pm\sqrt{|-2-1|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=1+\sqrt{3}\Rightarrow y=2+\sqrt{3}\\x_M=1-\sqrt{3}\Rightarrow y=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$

$$\Rightarrow d(O,\Delta)=\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(N).$$

Câu 59. Chọn A.

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0;\frac{2x_0-1}{x_0-2}\right)\in(C),(x_0\neq 2)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y=-\frac{3}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-2}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(2;\frac{2x_0+2}{x_0-2}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B(2x_0-2;\,2)$.
- Xét $\begin{cases}x_A+x_B=2+2x_0-2=2x_0\\y_A+y_B=\frac{2x_0+2}{x_0-2}+2=2.\frac{2x_0-1}{x_0-2}=2y_0\end{cases}\Rightarrow M$ là trung điểm của AB.
- ΔIAB vuông tại I nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB.

$$\Rightarrow S=\pi R^2=\pi IM^2=\pi\left[(x_0-2)^2+\left(\frac{2x_0-1}{x_0-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(x_0-2)^2+\frac{9}{(x_0-2)^2}\right]\geq 6\pi$$

- Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2=\frac{9}{(x_0-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\sqrt{3}+2\Rightarrow y_0=\sqrt{3}+2\\x_0=-\sqrt{3}+2\Rightarrow y_0=-\sqrt{3}+2\end{array}\right.$.
- Với $x_0=\sqrt{3}+2\Rightarrow\Delta: y=-x+2\sqrt{3}+4$ cắt 2 trục tọa độ tại $E\left(0;\,2\sqrt{3}+4\right)$ và $F\left(2\sqrt{3}+4;\,0\right)$, suy ra $S_{OEF}=\frac{1}{2}OE.OF=14+8\sqrt{3}\approx 27,8564$
- Với $x_0=-\sqrt{3}+2\Rightarrow\Delta: y=-x-2\sqrt{3}+4$ cắt 2 trục tọa độ tại $E\left(0;\,-2\sqrt{3}+4\right)$ và $F\left(-2\sqrt{3}+4;\,0\right)$, suy ra $S_{OEF}=\frac{1}{2}OE.OF=14-8\sqrt{3}\approx 0,1435$

Phương pháp trắc nghiệm

- IM lớn nhất $\Leftrightarrow IM\perp\Delta\Rightarrow cx_0+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_0-2=\pm\sqrt{|-4+1|}$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \sqrt{3}+2 \Rightarrow y_0 = \sqrt{3}+2 \\ x_0 = -\sqrt{3}+2 \Rightarrow y_0 = -\sqrt{3}+2 \end{array} \right.$. Giải tương tự như trên.

Câu 60. Chọn B.

$y = f(x) = x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 2x + 1$

Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của tiếp điểm của tiếp tuyến có hệ số $k_1; k_2$

PTHĐGĐ: $x^2 + x(1-m) - 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = m - 1$

$k_1 + k_2 = 4 \Leftrightarrow f'(x_1) + f'(x_2) = 2(x_1 + x_2) + 2 = 2(m-1) + 2 = 4 \Leftrightarrow m = 2$.

Chủ đề 8 ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

☆☆☆

A. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

I. BÀI TOÁN TÌM ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG

Xét họ đường cong (C_m) có phương trình $y = f(x,m)$, trong đó f là hàm đa thức theo biến x với m là tham số sao cho bậc của m không quá 2. Hãy tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi m thay đổi?

Phương pháp giải:

- **Bước 1:** Đưa phương trình $y = f(x,m)$ về dạng phương trình theo ẩn m có dạng sau: $Am + B = 0$ hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$.
- **Bước 2:** Cho các hệ số bằng 0, ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình: $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$.
- **Bước 3:** Kết luận
  - ✓ Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong (C_m) không có điểm cố định.
  - ✓ Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của (C_m).

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Tìm các điểm cố định của họ đồ thị $\left(C_m\right)$ có phương trình sau: $y = (m-1)x - 2m + 1$

A. $A(1;-1)$ **B.** $A(2;1)$ **C.** $A(2;-1)$ **D.** $A(1;2)$

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có: $y = (m-1)x - 2m + 1 \Leftrightarrow \left(x-2\right)m - \left(x+y-1\right) = 0 \quad (*)$

Giả sử $A\left(x_0; y_0\right)$ là điểm cố định của họ đồ thị $\left(C_m\right)$, thì khi $\left(x;y\right) = \left(x_0;y_0\right)$ luôn thỏa mãn (*)

với mọi m, hay: $\left(x_0 - 2\right)m - \left(x_0 + y_0 - 1\right) = 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ x_0 + y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow A\left(2;-1\right)$.

Vậy điểm cố định cần tìm là $A\left(2;-1\right)$. **Chọn C.**

Bài toán 2: Tìm $y = mx^2 + 2(m-2)x - 3m + 1$ có mấy điểm họ đồ thị luôn đi qua

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có: $y=mx^2+2(m-2)x-3m+1 \Leftrightarrow \left(x^2+2x-3\right)m-\left(4x+y-1\right)=0 \quad (*)$

Giả sử $A\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định của họ đồ thị $\left(C_m\right)$, thì khi $\left(x;y\right)=\left(x_0;y_0\right)$ luôn thỏa mãn (*) với mọi m, hay:

$$\left(x_0^2+2x_0-3\right)m-\left(4x_0+y_0-1\right)=0, \forall m\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2+2x_0-3=0 \\ 4x_0+y_0-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=-3 \end{cases} \Rightarrow A_1\left(1;-3\right) \\ \begin{cases} x_0=-3 \\ y_0=13 \end{cases} \Rightarrow A_2\left(-3;13\right) \end{array}\right.$$

Vậy các điểm cố định cần tìm là $A_1\left(1;-3\right); A_2\left(-3;13\right)$. **Chọn B.**

Bài toán 3: Tìm $y=(m+1)x^3-2mx^2-(m-2)x+2m+1$ có mấy điểm họ đồ thị luôn đi qua

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có: $y=(m+1)x^3-2mx^2-(m-2)x+2m+1 \Leftrightarrow \left(x^3-2x^2-x+2\right)m+\left(x^3+2x-y+1\right)=0 \quad (*)$

Giả sử $A\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định của họ đồ thị $\left(C_m\right)$, thì khi $\left(x;y\right)=\left(x_0;y_0\right)$ luôn thỏa mãn (*) với mọi m, hay:

$$\left(x_0^3-2x_0^2-x_0+2\right)m+\left(x_0^3+2x_0-y_0+1\right)=0, \forall m\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0^3-2x_0^2-x_0+2=0 \\ x_0^3+2x_0-y_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=-2 \end{cases} \Rightarrow A_1\left(-1;-2\right) \\ \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=5 \end{cases} \Rightarrow A_2\left(2;13\right) \\ \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=3 \end{cases} \Rightarrow A_3\left(1;4\right) \end{array}\right.$$

Vậy các điểm cố định cần tìm là $A_1\left(-1;-2\right); A_2\left(2;13\right); A_3\left(1;4\right)$. **Chọn C.**

Bài toán 4: Tìm $y=(1-2m)x^2-(3m-1)x+5m-2$ có mấy điểm họ đồ thị luôn đi qua

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có: $y=(1-2m)x^2-(3m-1)x+5m-2 \Leftrightarrow \left(-2x^2-3x+5\right)m+\left(x^2+x-y-2\right)=0 \quad (*)$

Giả sử $A\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định của họ đồ thị $\left(C_m\right)$, thì khi $\left(x;y\right)=\left(x_0;y_0\right)$ luôn thỏa mãn (*) với mọi m, hay:

$$\left(-2x_0^2-3x_0+5\right)m+\left(x_0^2+x_0-y_0-2\right)=0,\forall m\in\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2x_0^2-3x_0+5=0\\x_0^2+x_0-y_0-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_0=1\\y_0=0\end{cases}\Rightarrow A_1\left(1;0\right)\\\begin{cases}x_0=\dfrac{-5}{2}\\y_0=\dfrac{7}{4}\end{cases}\Rightarrow A_2\left(\dfrac{-5}{2};\dfrac{7}{4}\right)\end{array}\right.$$

Vậy các điểm cố định cần tìm là $A_1\left(1;0\right);A_2\left(\dfrac{-5}{2};\dfrac{7}{4}\right)$. **Chọn B.**

Bài toán 5: Tìm $y=x^3+mx^2-9x-9m$ có mấy điểm họ đồ thị luôn đi qua

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có: $y=x^3+mx^2-9x-9m\Leftrightarrow\left(x^2-9\right)m+x^3-9x-y=0\quad(*)$

Giả sử $A\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định của họ đồ thị $\left(C_m\right)$, thì khi $\left(x;y\right)=\left(x_0;y_0\right)$ luôn thỏa mãn (*) với mọi m, hay:

$$\left(x_0^2-9\right)m+x_0^3-9x_0-y_0=0,\forall m\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_0^2-9=0\\x_0^3-9x_0-y_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_0=3\\y_0=0\end{cases}\Rightarrow A_1\left(3;0\right)\\\begin{cases}x_0=-3\\y_0=0\end{cases}\Rightarrow A_2\left(-3;0\right)\end{array}\right..$$

Vậy các điểm cố định cần tìm là $A_1\left(3;0\right);A_2\left(-3;0\right)$. **Chọn B.**

II. BÀI TOÁN TÌM ĐIỂM CÓ TỌA ĐỘ NGUYÊN

Cho đường cong (C) có phương trình $y=f(x)$ (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

Phương pháp giải:

- **Bước 1:** Thực hiện phép chia đa thức chia tử số cho mẫu số.
- **Bước 2:** Lập luận để giải bài toán.

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2}{x^2+2x+2}$ có tọa độ nguyên ?

A. 1. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0\in\mathbb{Z},y_0\in\mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}x_0\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{2}{x_0^2+2x_0+2}\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow x_0^2+2x_0+2\in\{-2;-1;1;2\}$$

- $x_0^2+2x_0+2=-2$ (vô nghiệm)
- $x_0^2+2x_0+2=1\Leftrightarrow x_0=-1\Rightarrow y_0=2\Rightarrow M(-1;2)$
- $x_0^2+2x_0+2=-1$ (vô nghiệm)
- $x_0^2+2x_0+2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\Rightarrow y_0=1\Rightarrow M(0;1)\\x_0=-2\Rightarrow y_0=1\Rightarrow M(-2;1)\end{array}\right.$

Vậy có trên đồ thị (C) có ba điểm có tọa độ là các số nguyên. **Chọn C.**

Bài toán 2: Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{3-x}{x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Ta có:

$$y=\frac{3-x}{x-1}=\frac{-x+1+2}{x-1}=-1+\frac{2}{x-1}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=2\\x-1=-2\\x-1=1\\x-1=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\\x=2\\x=0\end{array}\right..$$

Vậy có 4 điểm thỏa yêu cầu bài toán. **Chọn D.**

Bài toán 3: Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{4}{3x-2}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn C.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{4}{3x_0-2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 3x_0 - 2 \in \{-4;-2;-1;1;2;4\} \Rightarrow x_0 \in \left\{-\frac{2}{3};0;\frac{1}{3};1;\frac{4}{3};2\right\}$$

Do $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow M_1(0;-2)$, $M_2(1;4)$ và $M_3(2;1)$.

Vậy trên đồ thị (C) có ba điểm có tọa độ là các số nguyên. **Chọn C.**

III. BÀI TOÁN TÌM ĐIỂM CÓ TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG

Cho đường cong (C) có phương trình $y=f(x)$. Tìm những điểm đối xứng nhau qua một điểm, qua đường thẳng.

Bài toán 1: *Cho đồ thị $(C): y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I(x_I, y_I)$.*

Phương pháp giải:

- ✓ Gọi $M\left(a; Aa^3+Ba^2+Ca+D\right)$, $N\left(b; Ab^3+Bb^2+Cb+D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua điểm I.
- ✓ Ta có $\begin{cases} a+b=2x_I \\ A(a^3+b^3)+B\left(a^2+b^2\right)+C\left(a+b\right)+2D=2y_I \end{cases}$.

Giải hệ phương trình tìm được a,b từ đó tìm được toạ độ M, N.

Trường hợp đặc biệt : *Cho đồ thị $(C): y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$. Trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.*

Phương pháp giải:

- ✓ Gọi $M\left(a, Aa^3+Ba^2+Ca+D\right), N\left(b, Ab^3+Bb^2+Cb+D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.
- ✓ Ta có $\begin{cases} a+b=0 \\ A(a^3+b^3)+B\left(a^2+b^2\right)+C\left(a+b\right)+2D=0 \end{cases}$.
- ✓ Giải hệ phương trình tìm được a,b từ đó tìm được toạ độ M,N.

Bài toán 2: *Cho đồ thị $(C): y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y=A_1x+B_1$.*

Phương pháp giải:

- ✓ Gọi $M\left(a; Aa^3+Ba^2+Ca+D\right)$, $N\left(b; Ab^3+Bb^2+Cb+D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng d.
- ✓ Ta có: $\begin{cases} I\in d & (1) \\ \overrightarrow{MN}.\vec{u}_d=0 & (2) \end{cases}$ (với I là trung điểm của MN và $\vec{u}_d$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d).
- ✓ Giải hệ phương trình tìm được M, N.

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-4x^2+9x+4$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ O là

A. $(3;22)$ và $(-3;-22)$.
B. $(2;14)$ và $(-2;-14)$.
C. $(1;10)$ và $(-1;-10)$.
D. $(0;4)$ và $(4;40)$.

Lời giải:

Gọi $A(x_A;x_A^3-4x_A^2+9x_A+4)$, $B(x_B;x_B^3-4x_B^2+9x_B+4)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Ta có $\begin{cases} x_A+x_B=2x_O \\ y_A+y_B=2y_O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A+x_B=0 & (1) \\ x_A^3-4x_A^2+9x_A+4+x_B^3-4x_B^2+9x_B+4=0 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được

$x_A^3-4x_A^2+9x_A+4+(-x_A)^3-4(-x_A)^2+9(-x_A)+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A=-1 \Rightarrow x_B=1 \\ x_A=1 \quad \Rightarrow x_A=-1 \end{array}\right.$.

Vậy cặp điểm cần tìm là $A(1;10)$, $B(-1;-10)$. **Chọn C.**

Bài toán 2: Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d:y=-\dfrac{1}{2}x$ là

A. $(1;2)$ và $(-2;-10)$. **B.** $(2;-1)$ và $(-2;1)$.

C. $(1;-2)$ và $(-1;2)$. **D.** $(1;2)$ và $(-1;-2)$.

Lời giải:

Gọi $A\left(a;a^3+a\right)$, $B\left(b;b^3+b\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng $d:y=-\dfrac{1}{2}x$ hay $d:x+2y=0$.

Ta có: $\begin{cases} I\in d & (1) \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_d=0 & (2) \end{cases}$ (với I là trung điểm của AB và $\vec{u}_d(2;-1)$ là vecto chỉ phương của d)

Từ (1) ta có $\dfrac{a^3+a+b^3+b}{2}=-\dfrac{1}{2}.\dfrac{a+b}{2}$

$\Leftrightarrow (a+b)(2a^2-2ab+2b^2+3)=0 \Leftrightarrow a=-b$ (3)

(vì $2a^2-2ab+2b^2+3=2\left(a^2-ab+b^2+\dfrac{3}{2}\right)=2\left(a-\dfrac{1}{2}b\right)^2+\dfrac{3}{2}b^2+3>0, \forall a,b$)

Với $\overrightarrow{AB}=\left(b-a;(b-a)(a^2+ab+b^2+2)\right)$, từ (2) ta có

$$2(b-a)-(b-a)(a^2+ab+b^2+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (b-a)(a^2+ab+b^2-1)=0$$
$$\Rightarrow a^2+ab+b^2-1=0 \ (4) \ (\text{Vì } a\neq b)$$

Thay (3) vào (4) ta được $a^2-a^2+a^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \Rightarrow b=-1 \\ a=-1 \Rightarrow b=1 \end{array}\right.$.

Vậy cặp điểm cần tìm là $A(1;2)$, $B(-1;-2)$. **Chọn D.**

Bài toán 3: Các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ là

A. $-1<m<0$. **B.** $m\neq 0$. **C.** $m>-3$. **D.** $m>0$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $y(x_0) = -y(-x_0)$ $\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $x_0^3 - 3x_0^2 + m = -\left[(-x_0)^3 - 3(-x_0)^2 + m\right]$

$\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $3x_0^2 = m \Leftrightarrow m > 0$. **Chọn D.**

Bài toán 4: Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để trên đồ thị (C_m) của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4mx + 5m}{x-2}$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ là

A. $(0;+\infty)$.

B. $\left(-\dfrac{1}{2};0\right) \setminus \left\{-\dfrac{4}{13}\right\}$.

C. $[1;+\infty)$.

D. $(-\infty;0) \cup \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{4}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \neq 2$ và $x_0 \neq 0$ sao cho $y(x_0) = -y(-x_0)$

$\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0 \neq 2$ và $x_0 \neq 0$ sao cho $\dfrac{x_0^2 - 4mx_0 + 5m}{x_0 - 2} = -\dfrac{(-x_0)^2 - 4m(-x_0) + 5m}{(-x_0) - 2}$

$\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0 \neq 2$ và $x_0 \neq 0$ sao cho $(1-2m)x_0^2 + 5m = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m(1-2m) < 0 \\ (1-2m).4 + 5m \neq 0 \\ (1-2m).0 + 5m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{4}{3} \end{cases}$$. **Chọn D.**

Bài toán 5: Tọa độ cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x+4}{x-2}$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x - 2y - 6 = 0$ là

A. $(4;4)$ và $(-1;-1)$.

B. $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

C. $(0;-2)$ và $(3;7)$.

D. $(1;-5)$ và $(5;3)$.

Lời giải:

Gọi đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = \dfrac{1}{2}x - 3$ suy ra $\Delta: y = -2x + m$.

Giả sử Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình

$$\frac{x+4}{x-2} = -2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \underbrace{2x^2 - (m+3)x + 2m + 4}_{h(x)} = 0 \end{cases}.$$

Điều kiện cần:

Để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2,

tức là $\begin{cases}\Delta>0\\ h(2)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-10m-23>0\\ -6\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<5-4\sqrt{3}\\ m>5+4\sqrt{3}\end{array}\right.$ (*).

Điều kiện đủ:

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_I=2x_I+m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_I=\dfrac{m+3}{4}\\ y_I=\dfrac{m+3}{2}+m\end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{m+3}{4};\dfrac{3m+3}{2}\right).$$

Để hai điểm A, B đối xứng nhau qua $d: x-2y-6=0$ khi $I\in d$

$\Leftrightarrow \dfrac{m+3}{4}-2.\dfrac{3m+3}{2}-6=0 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa điều kiện (*)).

Với $m=-3$ phương trình $h(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=-1\\ x=1\Rightarrow y=-5\end{array}\right.$

Vậy tọa hai điểm cần tìm là $(1;-5)$ và $(-1;-1)$. **Chọn B.**

IV. BÀI TOÁN TÌM ĐIỂM ĐẶC BIỆT KHÁC, BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH

1. KIẾN THỨC CẦN NẮM:

Loại 1. Cho hai điểm $P\left(x_1;y_1\right);Q\left(x_2;y_2\right)\Rightarrow PQ=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$.

Cho điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ và đường thẳng $d:Ax+By+C=0$, thì khoảng cách từ M đến d là $h\left(M;d\right)=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Loại 2. Khoảng cách từ $M\left(x_0;y_0\right)$ đến tiệm cận đứng $x=a$ là $h=\left|x_0-a\right|$.

Loại 3. Khoảng cách từ $M\left(x_0;y_0\right)$ đến tiệm cận ngang $y=b$ là $h=\left|y_0-b\right|$.

Chú ý: Những điểm cần tìm thường là hai điểm cực đại, cực tiểu hoặc là giao của một đường thẳng với một đường cong (C) nào đó. Vì vậy trước khi áp dụng công thức, ta cần phải tìm tìm điều kiện tồn tại rồi tìm tọa độ của chúng.

2. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: *Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Hãy tìm trên (C) hai điểm A và B thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách AB ngắn nhất.*

Phương pháp giải:

- ✓ $\left(C\right)$ có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ do tính chất của hàm phân thức, đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng. Nên gọi hai số α,β là hai số dương.
- ✓ Nếu A thuộc nhánh trái thì $x_A<-\dfrac{d}{c}\Rightarrow x_A=-\dfrac{d}{c}-\alpha<-\dfrac{d}{c};\ y_A=f(x_A)$.
- ✓ Nếu B thuộc nhánh phải thì $x_B>-\dfrac{d}{c}\Rightarrow x_B=-\dfrac{d}{c}+\beta>-\dfrac{d}{c};\ y_B=f(x_B)$.
- ✓ Sau đó tính $AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2=\left[\left(a+\beta\right)-\left(a-\alpha\right)\right]^2+\left(y_B-y_A\right)^2$.
- ✓ Áp dụng bất đẳng thức Côsi (Cauchy), ta sẽ tìm ra kết quả.

Bài toán 2: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y=f(x)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) để tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.*

Phương pháp giải:

- ✓ Gọi $M(x;y)$ và tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là d thì $d=|x|+|y|$.
- ✓ Xét các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ khi M nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung.
- ✓ Sau đó xét tổng quát, những điểm M có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục thì loại đi không xét đến.
- ✓ Những điểm còn lại ta đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của đồ thi hàm số dựa vào đạo hàm rồi tìm được giá trị nhỏ nhất của d.

Bài toán 3: *Cho đồ thị (C) có phương trình $y=f(x)$. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng k lần khoảng cách từ M đến trục Oy.*

Phương pháp giải:

Theo đầu bài ta có $|y|=k|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=kx \\ y=-kx \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=kx \\ f(x)=-kx \end{array}\right.$.

Bài toán 4: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$. Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài MI ngắn nhất (với I là giao điểm hai tiệm cận).*

Phương pháp giải:

- ✓ Tiệm cận đứng $x=\dfrac{-d}{c}$; tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$.
- ✓ Ta tìm được tọa độ giao điểm $I\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ của hai tiệm cận.
- ✓ Gọi $M(x_M;y_M)$ là điểm cần tìm. Khi đó:

$$IM^2=\left(x_M+\frac{d}{c}\right)^2+\left(y_M-\frac{a}{c}\right)^2=g(x_M)$$

- ✓ Sử dụng phương pháp tìm GTLN - GTNN cho hàm số g để thu được kết quả.

Bài toán 5: Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y=f(x)$ và đường thẳng $d: Ax+By+C=0$. Tìm điểm I trên (C) sao cho khoảng cách từ I đến d là ngắn nhất.

Phương pháp giải

- ✓ Gọi I thuộc $(C) \Rightarrow I(x_0;y_0);\ y_0=f(x_0)$.
- ✓ Khoảng cách từ I đến d là $g(x_0)=h(I;d)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
- ✓ Khảo sát hàm số $y=g(x)$ để tìm ra điểm I thỏa mãn yêu cầu.

MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi d là khoảng cách từ một điểm M trên (C) đến giao điểm của hai tiệm cận. Giá trị nhỏ nhất có thể có của d là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải:

Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-1;1)$, gọi $M\left(a;\dfrac{a-3}{a+1}\right)\in(C)$ với $a\neq -1$ ta có

$MI^2=(a+1)^2+\left(\dfrac{a-3}{a+1}-1\right)^2=(a+1)^2+\dfrac{16}{(a+1)^2}\geq 8 \Rightarrow MI\geq 2\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Bài toán 2: Cho điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x-7}{x+1}$, biết M có hoàng độ a và khoảng cách từ M đến trục Ox bằng ba lần khoảng cách từ M đến trục Oy. Giá trị có thể có của a là

A. $a=1$ hoặc $a=\dfrac{7}{3}$. **B.** $a=-1$ hoặc $x=\dfrac{7}{3}$.

C. $a=-1$ hoặc $a=-\dfrac{7}{3}$. **D.** $a=1$ hoặc $a=-\dfrac{7}{3}$.

Lời giải:

Theo giả thiết ta có:

$$|y|=3|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3x \\ y=-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-7}{x+1}=3x \\ \dfrac{x-7}{x+1}=-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+2x+7=0 \\ 3x^2+4x-7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{vụ n}^0 \\ x=1 \vee x=-\dfrac{7}{3} \end{array}\right..$$

Nhắc lại: Điểm $M\in(C): y=f(x)$ sao cho khoảng cách từ M tới Ox bằng k lần khoảng cách từ M tới Oy có hoành độ là nghiệm phương trình $|f(x)|=|kx| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=kx \\ f(x)=-kx \end{array}\right.$.

Cách khác:

Gọi $M\left(a;\dfrac{a-7}{a+1}\right)$ với $a\neq -1$. Theo đề ta có: $\left|\dfrac{a-7}{a+1}\right|=3|a|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-\dfrac{7}{3}\end{array}\right.$. **Chọn D.**

Bài toán 3: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi M là một điểm thuộc đồ thị (C) và d là tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C). Giá trị nhỏ nhất của d có thể đạt được là

A. 6. **B.** 10. **C.** 2. **D.** 5

Lời giải:

Gọi $M\left(a;\dfrac{2a-3}{a-2}\right)\in(C)$ với $a\neq 2$, ta có

$d=|a-2|+\left|\dfrac{2a-3}{a-2}-2\right|=|a-2|+\dfrac{1}{|a-2|}\geq 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của d bằng 2. **Chọn C.**

Bài toán 4: Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.là

A. $M_1\left(-1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

B. $M_1\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

C. $M_1\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

D. $M_1\left(-1-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-1-\sqrt{3};-2-\sqrt{3}\right)$

Lời giải:

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in(C)$ với $x_0\neq -1$. Tiếp tuyến tại M có phương trình

$y-\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)$

hay $3x-(x_0+1)^2y+2x_0^2-2x_0-1=0$.

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến

$d=\dfrac{\left|-3-2(x_0+1)^2+2x_0^2-2x_0-1\right|}{\sqrt{9+\left(x_0+1\right)^4}}=\dfrac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}$.

Theo bất đẳng thức Côsi: $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\geq 2\sqrt{9}=6$, vậy $d\leq\sqrt{6}$. Khoảng cách d lớn nhất là $\sqrt{6}$ khi $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow\left(x_0+1\right)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}$.

Vậy: $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$. **Chọn C.**

Bài toán 5: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-3}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

A. 2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải:

Điểm M nằm trên trục Ox: $M(-2;0)\Rightarrow d_M=\left|-2\right|+0=2$

Điểm M nằm trên trục tung: $d_M=0+\left|-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{2}{3}<2$

Xét những điểm M có hoành độ $\left|x\right|>\dfrac{2}{3}\Rightarrow d_M=\left|x\right|+\left|y\right|>\dfrac{2}{3}$.

Xét những điểm M có hoành độ thỏa mãn $\left|x\right|<\dfrac{2}{3};y<-\dfrac{2}{3}\Rightarrow\left|y\right|>\dfrac{2}{3}(*)$

- Trường hợp: $0\le x\le\dfrac{2}{3}$. Do (*) cho nên: $d_M=\left|x\right|+\left|y\right|>\dfrac{2}{3}$
- Trường hợp: $-\dfrac{2}{3}<x<0;-\dfrac{2}{3}<y<0\Rightarrow d_M=-x-1-\dfrac{5}{x-3};d'_M=-1+\dfrac{5}{\left(x-3\right)^2}$

$d'_M=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{5}\\x=3+\sqrt{5}\end{array}\right.$. Khi lập bảng biến thiên,ta thấy hàm số nghịch biến với mọi $x\in\left(-\dfrac{2}{3};0\right)$.

Vậy $\min d_M=d_M(0)=\dfrac{2}{3}$. **Chọn B.**

Bài toán 6: Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-2}\right)\in(C)$ với $a\ne2$.

Ta có $5\left|a-2\right|=\left|\dfrac{a+2}{a-2}-1\right|\Leftrightarrow5\left|a-2\right|=\dfrac{4}{\left|a-2\right|}\Leftrightarrow5\left(a^2-4a+4\right)=4$.

$\Leftrightarrow5a^2-20a+16=0\Leftrightarrow a=\dfrac{10\pm2\sqrt{5}}{5}$

Vậy có hai điểm cần tìm. **Chọn A.**

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Đồ thị của hàm số $y=(m-1)x+3-m$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là

A. $M(0;3)$. **B.** $M(1;2)$. **C.** $M(-1;-2)$. **D.** $M(0;1)$.

Câu 2. Đồ thị của hàm số $y=x^2+2mx-m+1$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là

A. $M(0;1)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **C.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$. **D.** $M(-1;0)$.

Câu 3. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+mx+m$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là

A. $M(-1;2)$. **B.** $M(-1;-4)$. **C.** $M(1;-2)$. **D.** $M(1;-4)$.

Câu 4. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^4-2mx^2+3$ luôn đi qua một điểm M cố định khi m thay đổi, khi đó tọa độ của điểm M là

A. $M(-1;1)$. **B.** $M(1;4)$. **C.** $M(0;-2)$. **D.** $M(0;3)$.

Câu 5. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y=\frac{(m+1)x+m}{x+m}$ $(m\neq 0)$ luôn đi qua một điểm M cố định khi m thay đổi. Tọa độ điểm M khi đó là

A. $M\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $M(0;1)$. **C.** $M(-1;1)$. **D.** $M(0;-1)$.

Câu 6. Hỏi khi m thay đổi đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^3-3mx^2-x+3m$ đi qua bao nhiêu điểm cố định ?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 7. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng bằng 1 là

A. $M(0;1), M(2;3)$. **B.** $M(2;1)$.

C. $M\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $M\left(3;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 8. Hỏi khi m thay đổi đồ thị (C_m) của hàm số $y=(1-2m)x^4+3mx^2-m-1$ đi qua bao nhiêu điểm cố định ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 9. Tọa độ các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ mà có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận của (C) bằng 4 là

A. $(4;3),(-2;1)$. **B.** $(2;5),(0;-1)$.

C. $(2;5),(0;-1),(4;3),(-2;1)$. **D.** $(2;5),(4;3)$.

Câu 10. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{-x+m}$ $(m\neq -2)$ luôn luôn đi qua một điểm $M(x_M;y_M)$ cố định khi m thay đổi, khi đó x_M+y_M bằng

A. -1. **B.** -3. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 11. Cho hàm số $y=-x^3+mx^2-x-4m$ có đồ thị (C_m) và A là điểm cố định có hoành độ âm của (C_m). Giá trị của m để tiếp tuyến tại A của (C_m) vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất là

A. $m=-3$. **B.** $m=-6$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\dfrac{7}{2}$.

Câu 12. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2}{x+2}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-5x^2+6x+3$ có bao nhiêu cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 14. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{3}{2x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ là các số nguyên dương ?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 15. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{4}{3x-2}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 16. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm uốn của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^4}{4}-x^2-1$, thì x_1x_2 có giá trị bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 0. **C.** $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **D.** $\dfrac{-2}{3}$.

Câu 17. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{6}{4x-1}$ số điểm có tọa độ nguyên là

A. 4. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 18. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+10}{x+1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 4. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 6.

Câu 19. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 20. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{5x-2}{3x+1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 21. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{8x+11}{4x+2}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 6. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 22. Tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận của đồ thị hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $M(4;3)$. B. $M(3;5)$. C. $M(1;-3)$. D. $M(0;-1)$.

Câu 23. Số cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+3x^2-2$ đối xứng với nhau qua điểm $I(2;18)$ là

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 24. Trong tất cả các điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{3x+5}{x-1}$, số điểm có hoành độ lớn hơn tung độ là

A. 2. B. 8. C. 6. D. 4.

Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C). Biết tọa độ điểm $M(x_M;y_M)$ có hoành độ dương thuộc đồ thị (C) sao cho MI ngắn nhất. Khi đó giá trị x_M-y_M bằng

A. 0. B. $2\sqrt{3}$.

C. 2. D. -2.

Câu 26. Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+3x-2$ đối xứng nhau qua điểm $I(2;18)$ là

A. $(1;2)$ và $(3;34)$. B. $(3;2)$ và $(1;34)$.

C. $(0;-2)$ và $(4;74)$. D. $(1;2)$ và $(-1;-6)$.

Câu 27. Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-4x^2+9x+4$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ O là

A. $(3;22)$ và $(-3;-22)$. B. $(2;14)$ và $(-2;-14)$.

C. $(1;10)$ và $(-1;-10)$. D. $(0;4)$ và $(4;40)$.

Câu 28. Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y=-\dfrac{1}{2}x$ là

A. $(1;2)$ và $(-2;-10)$. B. $(2;-1)$ và $(-2;1)$.

C. $(1;-2)$ và $(-1;2)$. D. $(1;2)$ và $(-1;-2)$.

Câu 29. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ mà có khoảng cách đến tiệm cận ngang của (C) bằng 1 là

A. $M(3;2)$. B. $M(5;2)$.

C. $M(5;2), M(-1;0)$. **D.** $M\left(4;\frac{5}{2}\right), M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 30. Các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ là

A. $-1 < m < 0$. **B.** $m \neq 0$. **C.** $m > -3$. **D.** $m > 0$.

Câu 31. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi d là khoảng cách từ một điểm M trên (C) đến giao điểm của hai tiệm cận. Giá trị nhỏ nhất có thể có của d là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C). Tiếp tuyến tại một điểm M bất kỳ của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B. Diện tích của tam giác ABI bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 33. Cho điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-7}{x+1}$, biết M có hoàng độ a và khoảng cách từ M đến trục Ox bằng ba lần khoảng cách từ M đến trục Oy. Giá trị có thể có của a là

A. $a = 1$ hoặc $a = \frac{7}{3}$. **B.** $a = -1$ hoặc $x = \frac{7}{3}$.

C. $a = -1$ hoặc $a = -\frac{7}{3}$. **D.** $a = 1$ hoặc $a = -\frac{7}{3}$.

Câu 34. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi M là một điểm thuộc đồ thị (C) và d là tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C). Giá trị nhỏ nhất của d có thể đạt được là

A. 6. **B.** 10. **C.** 2. **D.** 5

Câu 35. Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$ mà chúng đối xứng nhau qua trục tung là

A. $\left(3;-\frac{16}{3}\right)$ và $\left(-3;-\frac{16}{3}\right)$. **B.** $\left(3;\frac{16}{3}\right)$ và $\left(-3;\frac{16}{3}\right)$.

C. $\left(2;\frac{11}{3}\right)$ và $\left(-2;\frac{11}{3}\right)$. **D.** $\left(2;-\frac{11}{3}\right)$ và $\left(-2;-\frac{11}{3}\right)$.

Câu 36. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2+5x+15}{x+3}$ cách đều hai trục tọa độ ?

A. 2. **B.** Có vô số điểm M thỏa yêu cầu.

C. 1. **D.** Không có điểm M thỏa yêu cầu.

Câu 37. Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2}{x^2+2x+2}$ có tọa độ nguyên ?

A. 1. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 38. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - 3(m-1)x^2 - 3mx + 2$ luôn luôn đi qua hai điểm cố định $P\left(x_P; y_P\right)$ và $Q\left(x_Q; y_Q\right)$ khi m thay đổi, khi đó giá trị của $y_P + y_Q$ bằng

A. -1. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 39. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.là

A. $M_1\left(-1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

B. $M_1\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

C. $M_1\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

D. $M_1\left(-1-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-1-\sqrt{3};-2-\sqrt{3}\right)$

Câu 40. Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để trên đồ thị (C_m) của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4mx + 5m}{x-2}$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\setminus\left\{-\dfrac{4}{13}\right\}$.

C. $[1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

Câu 41. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết rằng tiếp tuyến tại một điểm M bất kỳ của (C) luôn cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B. Độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB là

A. 4. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 42. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x-1}$ sao cho M cách đều hai điểm $A(2,0)$ và $B(0,2)$ là

A. $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

C. $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **D.** Không tồn tại điểm M.

Câu 43. Khoảng cách ngắn nhất từ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x-1}$ đến $I(1,4)$ là

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{2\sqrt{2}-2}$.

Câu 44. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai tiệm cận của (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 4.

Câu 45. Gọi A, B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau trên đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x+3}{x-3}$, độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB là

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 46. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^4+mx^2-m+2016$ luôn luôn đi qua hai điểm M và N cố định khi m thay đổi. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là

A. $I(-1;0)$. **B.** $I(1;2016)$. **C.** $I(0;1)$. **D.** $I(0;2017)$.

Câu 47. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-3}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

A. 2. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 48. Cho hàm số $y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 49. Tọa độ cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x+4}{x-2}$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x-2y-6=0$ là

A. $(4;4)$ và $(-1;-1)$. **B.** $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

C. $(0;-2)$ và $(3;7)$. **D.** $(1;-5)$ và $(5;3)$.

Câu 50. Cho hàm số $y=x^4+mx^2-m-1$ có đồ thị (C_m). Tọa độ các điểm cố định của (C_m) là

A. $(-1;0),(1;0)$. **B.** $(1;0),(0;1)$. **C.** $(-2;1),(-2;3)$. **D.** $(2;1),(0;1)$.

Câu 51. Cho hàm số $y=\frac{x^2-5x+2}{2x+2}$ có đồ thị (C). Hỏi trên (C) có bao nhiêu điểm có hoành độ và tung độ là các số tự nhiên.

A. 3. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 52. Cho hàm số $y=-x^4+2mx^2-2m+1$ có đồ thị (C_m). Gọi A là điểm cố định có hoành độ dương của (C_m). Khi tiếp tuyến tại A của (C_m) song song với đường thẳng $d: y=16x$ thì giá trị của m là

A. $m=5$. **B.** $m=4$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\frac{63}{64}$.

Câu 53. Khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ đến đường thẳng $d: y+3x+6=0$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai tiệm cận của (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 55. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ cách đều hai đường tiệm cận của (C) là

A. $M(2;1)$.

B. $M(0;-1), M(4;3)$.

C. $M\left(5;\dfrac{7}{3}\right), M\left(-3;\dfrac{1}{5}\right)$.

D. $M(-2;2)$.

Câu 56. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ cách đều hai trục tọa độ là

A. $M(-1;-1), M(3;3)$.

B. $M(-1;3)$.

C. $M(-1;-1)$.

D. $M(3;3)$.

Câu 57. Tọa độ điểm M có hoành độ nguyên thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có khoảng cách đến đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$ bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là

A. $M(-2;0)$.

B. $M(2;4)$.

C. $M(2;4); M(-2;0)$.

D. $M(2;-2)$.

Câu 58. Cho hàm số $y=(m+2)x^3-3(m-2)x+m+7$ có đồ thị (C_m). Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. (C_m) không đi qua điểm cố định nào.

B. (C_m) có đúng hai điểm cố định.

C. (C_m) có đúng ba điểm cố định.

D. (C_m) có đúng một điểm cố định.

Câu 59. Điều kiện của tham số m để trên đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^3-(3m-1)x^2+2mx+m+1$ có ít nhất hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua trục Oy là

A. $m\le 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m\le -2$.

Câu 60. Đồ thị hàm số $y=2x^3+mx^2-12x-13$ có hai điểm cực trị cách đều trục tung khi và chỉ khi:

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-1; m=-2$. **D.** $m=-2$.

Câu 61. Hỏi trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có bao nhiêu điểm cách đều hai trục tọa độ?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 62. Tọa độ các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$ cách đều hai tiệm cận của (C)

.

A. $M(-1;1); N(-4;-6)$.

B. $M(1;1); N(3;4)$.

C. $M(-1;3); N(-3;3)$.

D. $M(-1;3); N(-3;3)$.

Câu 63. Tọa độ hai điểm trên đồ thị (C) của hàm số $y=-x^3+3x+2$ sao cho hai điểm đó đối xứng nhau qua điểm $M(-1;\ 3)$ là

A. $(-1;0);(1;6)$. **B.** $(1;0);(1;6)$. **C.** $(0;2)$; $(-2;4)$. **D.** $(1;0);(-1;6)$.

Câu 64. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{3-x}{x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 65. Tọa độ tất cả các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất là

A. $(1;1)$.

B. $(1+\sqrt{3};1+\sqrt{3})$.

C. $(1-\sqrt{3};1-\sqrt{3})$.

D. $(2+\sqrt{3};1+\sqrt{3})$ và $(2-\sqrt{3};1-\sqrt{3})$.

Câu 66. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{-3x+1}{x+1}$ nhận điểm nào trong các điểm sau làm tâm đối xứng ?

A. $K(-1;-3)$. **B.** $N(3;-1)$. **C.** $M(-1;\ 3)$. **D.** $I(-3;-1)$.

Câu 67. Tọa độ các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ cách đều tiệm cận đứng và trục hoành là

A. $M(2;1), M(4;3)$.

B. $M(0;-1), M(4;3)$.

C. $M(0;-1), M(3;2)$.

D. $M(2;1), M(3;2)$.

Câu 68. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 69. Cho đồ thị $(C): y=(m-4)x^3-(6m-24)x^2-12mx+7m-18$, tìm đường thẳng mà các điểm cố định của họ đồ thị (C) đều thuộc:

A. $d: y=-48x+10$.

B. $d: y=48x+10$.

C. $d: y=-24x+10$.

D. $d: y=-24x-10$.

Câu 70. Cho đồ thị $(C): y=(m+1)x^3-(2m+1)x-m+1$, tìm đường thẳng mà các điểm cố định của họ đồ thị (C) đều thuộc:

A. $d: y=x+2$ **B.** $d: y=-x+2$ **C.** $d: y=2x+2$ **D.** $d: y=2x-2$

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1B	2C	3B	4D	5B	6C	7A	8B	9C	10C
11A	12A	13A	14D	15C	16D	17D	18D	19A	20B
21D	22A	23B	24A	25A	26A	27C	28D	29C	30D
31D	32A	33D	34C	35B	36C	37C	38B	39C	40D
41D	42C	43C	44B	45A	46D	47B	48D	49B	50A
51B	52A	53D	54C	55B	56A	57C	58C	59B	60B
61C	62B	63C	64D	65D	66D	67B	68A	69A	70A

Câu 1. **Chọn B.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=(m-1)x_0+3-m,\forall m$

$$\Leftrightarrow (x_0-1)m-x_0-y_0+3=0,\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-1=0 \\ -x_0-y_0+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \end{cases} \Rightarrow M(1;2).$$

Phương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định.

Câu 2. **Chọn C.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=x_0^2+2mx_0-m+1$

$$\Leftrightarrow (2x_0-1)m+x_0^2+1-y_0=0,\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0-1=0 \\ x_0^2+1-y_0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{1}{2} \\ y_0=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{4}\right).$$

Phương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định.

Câu 3. **Chọn B.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=x_0^3-3x_0^2+mx_0+m,\forall m$

$$\Leftrightarrow (x_0+1)m+x_0^3-3x_0^2-y_0=0,\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0+1=0 \\ x_0^3-3x_0^2-y_0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=-4 \end{cases} \Rightarrow M(-1;-4)$$

Phương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định.

Câu 4. **Chọn D.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có

$$y_0 = x_0^4 - 2mx_0^2 + 3, \forall m \Leftrightarrow 2x_0^2 m + y_0 - 3 - x_0^4 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 = 0 \\ y_0 - 3 - x_0^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 3 \end{cases} \Rightarrow M(0;3).$$

Phương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định.

Câu 5. **Chọn B.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0 = \dfrac{(m+1)x_0 + m}{x_0 + m}, \forall m \neq 0 \Leftrightarrow x_0 y_0 + m y_0 = m x_0 + x_0 + m, \forall m \neq 0$

$$\Leftrightarrow m(y_0 - x_0 - 1) + x_0 y_0 - x_0 = 0, \forall m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - x_0 - 1 = 0 \\ x_0 y_0 - x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow M(0;1).$$

Phương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định

Câu 6. **Chọn C.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có: $y_0 = x_0^3 - 3mx_0^2 - x_0 + 3m, \forall m$

$$\Leftrightarrow 3(1 - x_0^2)m + x_0^3 - x_0 - y_0 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_0^2 = 0 \\ x_0^3 - x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases}.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm cố định.

Câu 7. **Chọn A.**

Gọi $M\left(a; \dfrac{2a-1}{a-1}\right) \in (C)$ với $a \neq 1$.

Tiệm cận đứng của (C) là $x = 1$.

Ta có $|a-1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array}\right.$. Vậy $M(0;1), M(2;3)$.

Câu 8. **Chọn B.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0 = (1 - 2m)x_0^4 + 3mx_0^2 - m - 1, \forall m$

$$\Leftrightarrow (2x_0^4 - 3x_0^2 + 1)m + y_0 - x_0^4 + 1 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^4 - 3x_0^2 + 1 = 0 \\ y_0 - x_0^4 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_0 = -\dfrac{3}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_0 = -\dfrac{3}{4} \end{cases}.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho đi qua bốn điểm cố định.

Câu 9. **Chọn C.**

Gọi $M\left(a;\frac{2a+1}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\neq 1$.

Tiệm cận đừng và tiệm cận ngang của (C) lần lượt có phương trình $x=1,\ y=2$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng là $h_1=|a-1|$

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang là $h_2=\left|\frac{2a+1}{a-1}-2\right|=\frac{3}{|a-1|}$

Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng 4 nên ta có:

$$h_1+h_2=4\Leftrightarrow|a-1|+\frac{3}{|a-1|}=4\Leftrightarrow|a-1|^2-4|a-1|+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|a-1|=3\\|a-1|=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=4\\a=-2\\a=2\\a=0\end{array}\right..$$

Vậy các điểm cần tìm là: $(2;5),\ (0;-1),\ (4;3),\ (-2;1)$.

Câu 10. **Chọn C.**

Gọi $M(x_M;y_M)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_M=\frac{2x_M^2+(1-m)x_M+1+m}{-x_M+m},\forall m\neq-2$

$$\Leftrightarrow -x_My_M+my_M=2x_M^2+x_M-mx_M+1+m,\forall m\neq-2$$

$$\Leftrightarrow(x_M+y_M-1)m-x_My_M-2x_M^2-x_M-1=0,\forall m\neq-2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_M+y_M-1=0\\-x_My_M-2x_M^2-x_M-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_M=1-x_M\\-x_M(1-x_M)-2x_M^2-x_M-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=-1\\y_M=2\end{cases}\Rightarrow M(-1;2)$$

Vậy $x_M+y_M=1$.

Câu 11. **Chọn A.**

Gọi $A(x_0;y_0)$, $x_0<0$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=-x_0^3+mx_0^2-x_0-4m,\forall m$

$$\Leftrightarrow(x_0^2-4)m-x_0^3-x_0-y_0=0,\forall m\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2-4=0\\-x_0^3-x_0-y_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=-2\\y_0=10\end{cases}\Rightarrow A(-2;10).$$

Lại có $y'=-3x^2+2mx-1\Rightarrow y'(-2)=-4m-13$

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại $A(-2;10)$ có dạng $y=(-4m-13)(x+2)+10$ hay $y=(-4m-13)x-8m-16\ (\Delta)$.

Đường phân giác góc phần tư thứ nhất có phương trình $d:y=x$.

Vì Δ vuông góc với d nên ta có $-4m-13=-1\Leftrightarrow m=-3$.

Câu 12. **Chọn A.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0\in\mathbb{Z}\setminus\{-2\},y_0\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\} \\ \dfrac{2}{x_0+2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x_0+2 \in \{-2;-1;1;2\} \Rightarrow x_0 \in \{-4;-3;-1;0\}$$

Vậy trên đồ thị (C) có bốn điểm có tọa độ nguyên.

Câu 13. Chọn A.

Gọi $A\left(a;a^3-5a^2+6a+3\right), B\left(b;b^3-5b^2+6b+3\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua gốc tọa độ, ta có $\begin{cases} a+b=0 \\ a^3+b^3-5\left(a^2+b^2\right)+6\left(a+b\right)+6=0 \end{cases} \Rightarrow -10a^2+6=0 \Rightarrow a=\pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

Câu 14. Chọn D.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{N}^*, y_0 \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{3}{2x_0-1} \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow 2x_0-1 \in \{1;3\} \Rightarrow x_0 \in \{1;2\}$$

$\Rightarrow M_1(-1;-1),\ M_2(0;-3),\ M_3(1;3)$ và $M_4(2;1)$.

Vậy trên đồ thị (C) có hai điểm có tọa độ là các số nguyên dương.

Câu 15. Chọn C.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{4}{3x_0-2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 3x_0-2 \in \{-4;-2;-1;1;2;4\} \Rightarrow x_0 \in \left\{-\frac{2}{3};0;\frac{1}{3};1;\frac{4}{3};2\right\}$$

Do $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow M_1(0;-2),\ M_2(1;4)$ và $M_3(2;1)$.

Vậy trên đồ thị (C) có ba điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 16. Chọn D.

Ta có $y' = x^3-2x, y''=3x^2-2 \Rightarrow x_1.x_2 = \dfrac{-2}{3}$. Vậy $x_1.x_2 = \dfrac{-2}{3}$.

Câu 17. Chọn D.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{6}{4x_0-1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 4x_0-1 \in \{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\} \Rightarrow x_0 \in \left\{-\frac{5}{4};-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};0;\frac{1}{2};\frac{3}{4};1;\frac{7}{4}\right\}.$$

Do $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow M_1(0;-6)$ và $M_2(1;2)$.

Vậy trên đồ thị (C) có hai điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 18. Chọn D.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 = 1+\dfrac{9}{x_0+1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x_0+1 \in \{-9;-3;-1;1;3;9\} \Rightarrow x_0 \in \{-10;-4;-2;0;2;8\}$$

$\Rightarrow M_1(-10;0), M_2(-4;-2), M_3(-2;-8), M_4(0;10), M_5(2;4)$ và $M_6(8;2)$.

Vậy trên đồ thị (C) có sáu điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 19. **Chọn A.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{5}{2x_0-1}\right) \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 2x_0-1 \in \{-5;-1;1;5\} \Rightarrow x_0 \in \{-2;0;1;3\}$$

✍ $x_0=-2 \Rightarrow y_0=0 \Rightarrow M(-2;0)$ ✍ $x_0=1 \Rightarrow y_0=3 \Rightarrow M(1;3)$

✍ $x_0=0 \Rightarrow y_0=-2 \Rightarrow M(0;-2)$ ✍ $x_0=3 \Rightarrow y_0=1 \Rightarrow M(3;1)$

Vậy trên đồ thị (C) có bốn điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 20. **Chọn B.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 = \dfrac{1}{3}\left(5-\dfrac{11}{3x_0+1}\right) \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 3x_0+1 \in \{-11;-1;1;11\} \Rightarrow x_0 \in \left\{-4;-\dfrac{2}{3};0;\dfrac{10}{3}\right\}$$

✍ $x_0=-4 \Rightarrow y_0=2 \Rightarrow M(-4;2)$

✍ $x_0=0 \Rightarrow y_0=-2 \Rightarrow M(0;-2)$

Vậy trên đồ thị (C) có hai điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 21. **Chọn D.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 = 2+\dfrac{7}{4x_0+2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 4x_0+2 \in \{-7;-1;1;7\} \Rightarrow x_0 \in \left\{-\dfrac{9}{4};-\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{4}\right\}$$

Do $x_0 \in \mathbb{Z}$ nên trên đồ thị (C) không có điểm nào có tọa độ nguyên.

Câu 22. Chọn A

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-2}\right) \in (C)$; $a>0$ và $a \neq 2$, ta có $d=|a-2|+\left|\dfrac{a+2}{a-2}-1\right|=|a-2|+\dfrac{4}{|a-2|} \geq 4$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $|a-2|^2=4 \Leftrightarrow |a-2|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=4 \end{array}\right.$.

Kết luận $M(4;3)$.

Câu 23. **Chọn B.**

Gọi $M(x;y)$ là điểm trên đồ thị (C), gọi N là điểm đối xứng với M qua I, ta có $N(4-x;36-y)$. Vì N thuộc (C), ta có

$$\begin{cases} 36-y=(4-x)^3+3(4-x)^2-2 \\ y=x^3+3x^2-2 \end{cases} \Rightarrow x^3+3x^2-2=-(4-x)^3-3(4-x)^2+38 \Leftrightarrow x=2$$

Vậy có tất cả một cặp điểm thuộc đồ thị (C) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 24. **Chọn A.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0\in\mathbb{Z}, y_0\in\mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}x_0\in\mathbb{Z}\\ y_0=3+\dfrac{8}{x_0-1}\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow x_0-1\in\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}\Rightarrow x_0\in\{-7;-3;-1;0;2;3;5;9\}$$

$\Rightarrow M_1(-7;2), M_2(-3;1), M_3(-1;-1),\ M_4(0;-5), M_5(2;11),\ M_6(3;7), M_7(5;5)$ và $M_8(9;4)$.

Vậy có 2 điểm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 25. **Chọn A.**

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-1}\right)\in(C)$ với $a>0,\ a\neq 1$; tọa độ giao điểm các tiệm cận là $I(1;1)$, ta có

$$MI^2=(a-1)^2+\left(\frac{a+2}{a-1}-1\right)^2=(a-1)^2+\frac{9}{(a-1)^2}\geq 6.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(a-1)^4=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\sqrt{3}+1\\ a=-\sqrt{3}+1\end{array}\right.$. Vì M có hoành độ dương

nên chọn $a=\sqrt{3}+1$, suy ra $M\left(\sqrt{3}+1;\sqrt{3}+1\right)$ nên $x_M-y_M=0$.

Câu 26. **Chọn A.**

Gọi $A(x_A;x_A^3+3x_A-2), B(x_B;x_B^3+3x_B-2)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua $I(2;18)$.

Ta có: $\begin{cases}x_A+x_B=2x_I\\ y_A+y_B=2y_I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A+x_B=4 & (1)\\ x_A^3+3x_A-2+x_B^3+3x_B-2=36 & (2)\end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được $x_A^3+3x_A-2+(4-x_A)^3+3(4-x_A)-2=36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A=1\Rightarrow x_B=3\\ x_A=3\Rightarrow x_B=1\end{array}\right.$.

Vậy cặp điểm cần tìm là $A(1;2)$, $B(3;34)$.

Câu 27. **Chọn C.**

Gọi $A(x_A;x_A^3-4x_A^2+9x_A+4), B(x_B;x_B^3-4x_B^2+9x_B+4)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Ta có $\begin{cases}x_A+x_B=2x_O\\ y_A+y_B=2y_O\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A+x_B=0 & (1)\\ x_A^3-4x_A^2+9x_A+4+x_B^3-4x_B^2+9x_B+4=0 & (2)\end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được

$$x_A^3-4x_A^2+9x_A+4+(-x_A)^3-4(-x_A)^2+9(-x_A)+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A=-1\Rightarrow x_B=1\\ x_A=1\ \ \Rightarrow x_A=-1\end{array}\right..$$

Vậy cặp điểm cần tìm là $A(1;10)$, $B(-1;-10)$.

Câu 28. **Chọn D.**

Gọi $A\left(a;a^3+a\right), B\left(b;b^3+b\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng $d:y=-\dfrac{1}{2}x$ hay $d:x+2y=0$.

Ta có: $\begin{cases} I \in d & (1) \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_d = 0 & (2) \end{cases}$ (với I là trung điểm của AB và $\vec{u}_d(2;-1)$ là vecto chỉ phương của d)

Từ (1) ta có $\frac{a^3+a+b^3+b}{2} = -\frac{1}{2}.\frac{a+b}{2}$

$\Leftrightarrow (a+b)(2a^2-2ab+2b^2+3)=0 \Leftrightarrow a=-b$ (3)

(vì $2a^2-2ab+2b^2+3 = 2\left(a^2-ab+b^2+\frac{3}{2}\right) = 2\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{2}b^2+3>0, \forall a,b$)

Với $\overrightarrow{AB} = \left(b-a;(b-a)(a^2+ab+b^2+2)\right)$, từ (2) ta có

$$2(b-a)-(b-a)(a^2+ab+b^2+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (b-a)(a^2+ab+b^2-1)=0$$
$$\Rightarrow a^2+ab+b^2-1=0 \text{ (4) (Vì } a\neq b\text{)}$$

Thay (3) vào (4) ta được $a^2-a^2+a^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1\Rightarrow b=-1 \\ a=-1\Rightarrow b=1 \end{array}\right.$.

Vậy cặp điểm cần tìm là $A(1;2)$, $B(-1;-2)$.

Câu 29. Chọn C.

Đồ thị hàm số có phương trình tiệm cận ngang là $y=1$

Gọi $M\left(a;\frac{a+1}{a-2}\right)\in(C)$, $a\neq 2$. Ta có $\left|\frac{a+1}{a-2}-1\right|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{3}{a-2}\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=-1 \end{array}\right.$.

Vậy $M(5;2), M(-1;0)$.

Câu 30. Chọn D.

Đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ khi và chỉ khi tồn tại $x_0\neq 0$ sao cho $y(x_0)=-y(-x_0)$ $\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0\neq 0$ sao cho

$x_0^3-3x_0^2+m=-\left[(-x_0)^3-3(-x_0)^2+m\right]$ $\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0\neq 0$ sao cho $3x_0^2=m \Leftrightarrow m>0$.

Câu 31. Chọn D.

Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-1;1)$, gọi $M\left(a;\frac{a-3}{a+1}\right)\in(C)$ với $a\neq -1$ ta có

$$MI^2 = (a+1)^2+\left(\frac{a-3}{a+1}-1\right)^2 = (a+1)^2+\frac{16}{(a+1)^2}\geq 8 \Rightarrow MI\geq 2\sqrt{2}.$$

Câu 32. Chọn A.

Phương pháp tự luận

Tiệm cận $x=1$, $y=1\Rightarrow I(1,1)$. Gọi $M\left(m,\frac{m+1}{m-1}\right)\in(C)$, ta tìm được tọa độ $A\left(1,\frac{m+3}{m-1}\right)$, $B(2m-1,1)$.

Diện tích $S=\frac{1}{2}IA.IB=\frac{1}{2}\left|\frac{m+3}{m-1}-1\right|.\left|2m-1-1\right|=4$.

Phương pháp trắc nghiệm

Cho đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Gọi M là điểm tùy ý thuộc (C). Tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A,B. Gọi I là giao điểm hai tiệm cận. Khi đó diện tích tam giác ABI luôn là hằng số. Cách tính nhanh:

1. Chọn $M(2,3)$ thuộc (C). Viết phương trình tiếp tuyến tại M là $d: y=-2x+7$. Khi đó $A(1,5), B(3,1)$ và $IA=4, IB=2$.
2. Tam giác ABI là tam giác vuông tại I. Diện tích $S_{ABI}=\dfrac{1}{2}IA.\text{IB}=4$.

Câu 33. Chọn D.

Theo giả thiết ta có:

$$|y|=3|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3x \\ y=-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-7}{x+1}=3x \\ \dfrac{x-7}{x+1}=-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+2x+7=0 \\ 3x^2+4x-7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{vụ n}^0 \\ x=1 \vee x=-\dfrac{7}{3} \end{array}\right..$$

Nhắc lại: Điểm $M\in(C): y=f(x)$ sao cho khoảng cách từ M tới Ox bằng k lần khoảng cách từ M tới Oy có hoành độ là nghiệm phương trình

$$|f(x)|=|kx| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=kx \\ f(x)=-kx \end{array}\right..$$

Cách khác:

Gọi $M\left(a;\dfrac{a-7}{a+1}\right)$ với $a\neq -1$. Theo đề ta có: $\left|\dfrac{a-7}{a+1}\right|=3|a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-\dfrac{7}{3} \end{array}\right..$

Câu 34. Chọn C.

Gọi $M\left(a;\dfrac{2a-3}{a-2}\right)\in(C)$ với $a\neq 2$, ta có

$$d=|a-2|+\left|\dfrac{2a-3}{a-2}-2\right|=|a-2|+\dfrac{1}{|a-2|}\geq 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của d bằng 2.

Câu 35. Chọn B.

Phương pháp tự luận

Gọi $A\left(x_A;-\dfrac{1}{3}x_A^3+x_A^2+3x_A-\dfrac{11}{3}\right)$, $B\left(x_B;-\dfrac{1}{3}x_B^3+x_B^2+3x_B-\dfrac{11}{3}\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua trục tung.

Ta có $\begin{cases} x_A+x_B=0 \\ y_A=y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=-x_A & (1) \\ -\dfrac{1}{3}x_A^3+x_A^2+3x_A-\dfrac{11}{3}=-\dfrac{1}{3}x_B^3+x_B^2+3x_B-\dfrac{11}{3} & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$-\frac{1}{3}x_A^3+x_A^2+3x_A-\frac{11}{3}=-\frac{1}{3}(-x_A)^3+(-x_A)^2+3(-x_A)-\frac{11}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A=-3\Rightarrow x_B=3\\x_A=3\quad\Rightarrow x_A=-3\end{array}\right.$$

Vậy có hai cặp điểm cần tìm là $A\left(3;\frac{16}{3}\right)$, $B\left(-3;\frac{16}{3}\right)$.

Phương pháp trắc nghiệm

Kiểm tra điều kiện đối xứng qua trục tung $\begin{cases}x_A+x_B=0\\y_A=y_B\end{cases}$ và kiểm tra điểm có thuộc đồ thị không.

Câu 36. **Chọn C.**

Gọi $M\left(x_M,y_M\right),\left(x_M\neq-3\right)$ thỏa yêu cầu bài toán. Ta có:

$$\begin{cases}y_M=x_M+2+\dfrac{9}{x_M+3}\\y_M=\pm x_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=-\dfrac{15}{2}\\y_M=-\dfrac{15}{2}\end{cases}.$$

Câu 37. **Chọn C.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0\in\mathbb{Z},y_0\in\mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}x_0\in\mathbb{Z}\\\dfrac{2}{x_0^2+2x_0+2}\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow x_0^2+2x_0+2\in\{-2;-1;1;2\}$$

✍ $x_0^2+2x_0+2=-2$ (vô nghiệm) ✍ $x_0^2+2x_0+2=1\Leftrightarrow x_0=-1\Rightarrow y_0=2\Rightarrow M(-1;2)$

✍ $x_0^2+2x_0+2=-1$ (vô nghiệm) ✍ $x_0^2+2x_0+2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\Rightarrow y_0=1\Rightarrow M(0;1)\\x_0=-2\Rightarrow y_0=1\Rightarrow M(-2;1)\end{array}\right.$

Vậy có trên đồ thị (C) có ba điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 38. **Chọn B.**

Gọi $(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=x_0^3-3(m-1)x_0^2-3mx_0+2,\forall m$

$$\Leftrightarrow 3(x_0^2+x_0)m+y_0-x_0^3-3x_0^2-2=0,\forall m\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+x_0=0\\y_0-x_0^3-3x_0^2-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-1\\y_0=4\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x_0=0\\y_0=2\end{cases}.$$

Suy ra $P\left(-1;4\right),Q(0;2)$ hoặc $P\left(0;2\right),Q(-1;4)$ nên $y_P+y_Q=6$.

Câu 39. **Chọn C.**

Gọi $M\left(x_0;\frac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in(C)$ với $x_0\neq-1$. Tiếp tuyến tại M có phương trình

$$y-\frac{2x_0-1}{x_0+1}=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)$$

hay $3x-(x_0+1)^2y+2x_0^2-2x_0-1=0$.

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến

$$d=\frac{\left|-3-2(x_0+1)^2+2x_0^2-2x_0-1\right|}{\sqrt{9+\left(x_0+1\right)^4}}=\frac{6\left|x_0+1\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi: $\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\ge 2\sqrt{9}=6$, vậy $d\le\sqrt{6}$. Khoảng cách d lớn nhất là $\sqrt{6}$ khi $\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow\left(x_0+1\right)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}$.

Vậy: $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

Câu 40. Chọn D.

Đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ khi và chỉ khi tồn tại $x_0\ne 2$ và $x_0\ne 0$ sao cho $y(x_0)=-y(-x_0)$

$\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0\ne 2$ và $x_0\ne 0$ sao cho $\frac{x_0^2-4mx_0+5m}{x_0-2}=-\frac{(-x_0)^2-4m(-x_0)+5m}{(-x_0)-2}$

$\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0\ne 2$ và $x_0\ne 0$ sao cho $(1-2m)x_0^2+5m=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5m(1-2m)<0\\(1-2m).4+5m\ne 0\\(1-2m).0+5m\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<0\\m>\frac{1}{2}\end{array}\right.\\m\ne\frac{4}{3}\end{cases}.$$

Câu 41. Chọn D.

Lấy điểm $M\left(m;2+\frac{1}{m-2}\right)\in\left(C\right)$ với $m\ne 2$. Ta có $y'\left(m\right)=-\frac{1}{\left(m-2\right)^2}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình $d:y=-\frac{1}{\left(m-2\right)^2}\left(x-m\right)+2+\frac{1}{m-2}$.

Giao điểm của d với tiệm cận đứng là $A\left(2;2+\frac{2}{m-2}\right)$.

Giao điểm của d với tiệm cận ngang là $B\left(2m-2;2\right)$.

Ta có $AB^2=4\left[\left(m-2\right)^2+\frac{1}{\left(m-2\right)^2}\right]\ge 8$, suy ra $AB\ge 2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $\left(m-2\right)^2=1$, nghĩa là $m=3$ hoặc $m=-1$.

Câu 42. Chọn C.

Phương trình đường trung trực đoạn AB là $y=x$.

Những điểm thuộc đồ thị cách đều A và B có hoành độ là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x+2}{2x-1}=x\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt5}{2}\\ x=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\end{array}\right..$$

Hai điểm trên đồ thị thỏa yêu cầu bài toán là $\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2},\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right);\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2},\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)$.

Câu 43. Chọn C.

Gọi $M\left(x;y\right)$ thuộc $\left(C\right)$, ta có

$$\overrightarrow{IM}=\left(x-1;y-4\right)\Rightarrow IM^2=\left(x-1\right)^2+\left(x+3+\frac{1}{x-1}-4\right)^2=\underbrace{\left(x-1\right)^2+\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)^2}_{g(x)}.$$

Mà

$$g(x)=\left(x-1\right)^2+\left(x-1\right)^2+\frac{1}{\left(x-1\right)^2}+2=2\left(x-1\right)^2+\frac{1}{\left(x-1\right)^2}+2\ge2+2\sqrt2.$$

$\Rightarrow\min IM=\sqrt{2+2\sqrt2}$. Đạt được khi $2\left(x-1\right)^2=\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}\Leftrightarrow\left(x-1\right)^4=\dfrac12\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ x=1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\end{array}\right.$.

Câu 44. Chọn B.

Phương pháp tự luận

Gọi $M\left(x_M,2-\dfrac{1}{x_M+1}\right)$ thuộc (C). Và MH,MK là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang. Khi đó $MH=\left|x_M+1\right|$ và $MK=\left|\dfrac{1}{x_M+1}\right|$. Do đó

$$MH+MK=\left|x_M+1\right|+\frac{1}{\left|x_M+1\right|}\ge2\ \left(Cauchy\right)$$

Suy ra $MH+MK$ bé nhất khi $\left(x_M+1\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=-2\Rightarrow y_M=3\\ x_M=0\Rightarrow y_M=1\end{array}\right.$

Phương pháp trắc nghiệm

Cho đồ thị hàm số $\left(C\right):y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Gọi M là điểm thuộc đồ thị hàm số, khi đó tổng khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận có độ dài nhỏ nhất là $2\sqrt{\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|}$.

Câu 45. Chọn A.

Gọi A là điểm thuộc thuộc nhánh trái của đồ thị hàm số, nghĩa là $x_A<3\Rightarrow$ với số $\alpha>0$, đặt $x_A=3-\alpha$, suy ra $y_A=1+\dfrac{6}{x_A-3}=1+\dfrac{6}{3-\alpha-3}=1-\dfrac{6}{\alpha}\quad\left(1\right)$.

Tương tự gọi B là điểm thuộc nhánh phải, nghĩa là $x_B > 3 \Rightarrow$ với số $\beta > 0$, đặt

$x_B = 3+\beta$, suy ra $y_B = 1+\dfrac{6}{x_B-3} = 1+\dfrac{6}{3+\beta-3} = 1+\dfrac{6}{\beta} \quad (2)$.

Vậy $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \left[(3+\beta)-(3-\alpha)\right]^2 + \left[\left(1+\dfrac{6}{\beta}\right)-\left(1-\dfrac{6}{\alpha}\right)\right]^2$

$$g(\alpha;\beta) = (\alpha+\beta)^2 + \left(\frac{6}{\alpha}+\frac{6}{\beta}\right)^2 = (\alpha+\beta)^2 + (6)^2(\alpha+\beta)^2\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2$$

$$= \left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right)\left(1+\frac{36}{\alpha^2\beta^2}\right)$$

Dùng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$g(\alpha;\beta) \ge (2\alpha\beta+2\alpha\beta)\left(1+\frac{36}{\alpha^2\beta^2}\right) = 4\alpha\beta + \frac{144}{\alpha\beta} \ge 2\sqrt{4.144} = 48.$$

Vậy $AB \ge \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ 144\alpha\beta = \dfrac{4}{\alpha\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ (\alpha\beta)^2 = \dfrac{1}{36} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{6}$$

Vậy độ dài AB ngắn nhất là $4\sqrt{3}$.

Câu 46. Chọn D.

Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0 = x_0^4 + mx_0^2 - m + 2016, \forall m \Leftrightarrow (x_0^2-1)m + x_0^4 - y_0 + 2016 = 0, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 1 = 0 \\ x_0^4 - y_0 + 2016 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2017 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2017 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(1;2017) \\ N(-1;2017) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} M(-1;2017) \\ N(1;2017) \end{cases}.$$

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là $I(0;2017)$.

Câu 47. Chọn B.

Điểm M nằm trên trục Ox: $M(-2;0) \Rightarrow d_M = |-2| + 0 = 2$

Điểm M nằm trên trục tung: $d_M = 0 + \left|-\dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{2}{3} < 2$

Xét những điểm M có hoành độ $|x| > \dfrac{2}{3} \Rightarrow d_M = |x| + |y| > \dfrac{2}{3}$.

Xét những điểm M có hoành độ thỏa mãn $|x| < \dfrac{2}{3}; y < -\dfrac{2}{3} \Rightarrow |y| > \dfrac{2}{3} (*)$

- Trường hợp: $0 \le x \le \dfrac{2}{3}$. Do (*) cho nên: $d_M = |x| + |y| > \dfrac{2}{3}$
- Trường hợp: $-\dfrac{2}{3} < x < 0; -\dfrac{2}{3} < y < 0 \Rightarrow d_M = -x - 1 - \dfrac{5}{x-3}; d'_M = -1 + \dfrac{5}{(x-3)^2}$

$d'_M = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3-\sqrt{5} \\ x = 3+\sqrt{5} \end{array}\right.$. Khi lập bảng biến thiên,ta thấy hàm số nghịch biến với mọi $x \in \left(-\dfrac{2}{3};0\right)$. Vậy $\min d_M = d_M(0) = \dfrac{2}{3}$.

Câu 48. **Chọn D.**

Điểm $M\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ nằm trên trục Oy. Khoảng cách từ M đến hai trục là $d = \dfrac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ lớn hơn $\dfrac{3}{2} \Rightarrow d = |x| + |y| > \dfrac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ nhỏ hơn $\dfrac{3}{2}$:

- Với $0 < x < \dfrac{3}{2} \Rightarrow y > \dfrac{3}{2} \Rightarrow d = |x| + |y| > \dfrac{3}{2}$
- Với $-\dfrac{3}{2} < x < 0; y > 0 \Rightarrow d = -x + x + 1 + \dfrac{1}{x+2} = 1 + \dfrac{1}{x+2}; d' = -\dfrac{1}{(x+2)^2} < 0$.

Chứng tỏ hàm số nghịch biến. Suy ra $\min d = y(0) = \dfrac{3}{2}$.

Câu 49. **Chọn B.**

Gọi đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = \dfrac{1}{2}x - 3$ suy ra $\Delta: y = -2x + m$.

Giả sử Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình

$$\frac{x+4}{x-2} = -2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \underbrace{2x^2 - (m+3)x + 2m + 4}_{h(x)} = 0 \end{cases}\cdot$$

Điều kiện cần:

Để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2, tức là $\begin{cases} \Delta > 0 \\ h(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m - 23 > 0 \\ -6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 5 - 4\sqrt{3} \\ m > 5 + 4\sqrt{3} \end{array}\right.$ (*).

Điều kiện đủ:

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = 2x_I + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{m+3}{4} \\ y_I = \dfrac{m+3}{2} + m \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{m+3}{4}; \frac{3m+3}{2}\right).$$

Để hai điểm A, B đối xứng nhau qua $d: x - 2y - 6 = 0$ khi $I \in d$

$\Leftrightarrow \dfrac{m+3}{4} - 2.\dfrac{3m+3}{2} - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa điều kiện (*)).

Với $m=-3$ phương trình $h(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=-1 \\ x=1 \Rightarrow y=-5 \end{array}\right.$

Vậy tọa hai điểm cần tìm là $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

Câu 50. **Chọn A.**

Gọi (x,y) là điểm cố định của họ đồ thị $(C_m): y=x^4+mx^2-m-1$, ta có

$$y=x^4+mx^2-m-1, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)m+x^4-1-y=0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ x^4-1-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}; \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy họ đồ thị có hai điểm cố định là $(-1;0),(1;0)$.

Câu 51. **Chọn B.**

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{N}, y_0 \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{N} \\ y_0 = \dfrac{1}{2}\left(x_0-6+\dfrac{8}{x_0+1}\right) \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow x_0+1 \in \{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\} \Rightarrow x_0 \in \{-9;-5;-3;-2;0;1;3$$

Do $x_0 \in \mathbb{N}$ nên

✍ $x_0=0 \Rightarrow y_0=1 \Rightarrow M(0;1)$ ✍ $x_0=1 \Rightarrow y_0=-\dfrac{1}{2}$ (loại)

✍ $x_0=3 \Rightarrow y_0=-\dfrac{1}{2}$ (loại) ✍ $x_0=7 \Rightarrow y_0=1 \Rightarrow M(7;1)$.

Câu 52. **Chọn A.**

Gọi $A(x_0;y_0)$, $x_0>0$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có: $y_0=-x_0^4+2mx_0^2-2m+1, \forall m$

$$\Leftrightarrow 2m(x_0^2-1)+1-x_0^4-y_0=0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2-1=0 \\ 1-x_0^4-y_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=1 \ (x_0>0) \\ y_0=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;0)$$

Lại có $y'=-4x^3+4mx \Rightarrow y'(1)=4m-4$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại điểm $A(1;0)$ có dạng $y=(4m-4)(x-1)$ hay $y=(4m-4)x+4-4m$ (Δ).

Vì Δ song song với d nên $\begin{cases} 4m-4=16 \\ 4-4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow m=5$.

Câu 53. **Chọn D.**

Gọi $M\left(x, x+2+\dfrac{1}{x+2}\right) \in (C)$.

Khoảng cách từ M đến d là $h(M;d)$ cho bởi

$$h(M;d)=\frac{|3x+y+6|}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|3x+6+x+2+\frac{1}{x+2}\right|=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|4(x+2)+\frac{1}{x+2}\right|.$$

- Khi $x+2>0$:

Ta có $4(x+2)+\dfrac{1}{x+2}\ge 4$ dấu bằng xảy ra khi $4(x+2)=\dfrac{1}{x+2}\Leftrightarrow (x+2)^2=\dfrac{1}{4}\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$

Vậy $h(M;d)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

- Khi $x+2<0$

  Ta có $-4(x+2)-\dfrac{1}{(x+2)}\ge 4$

  Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow -4(x+2)=-\dfrac{1}{x+2}\Leftrightarrow (x+2)^2=\dfrac{1}{4}\Rightarrow x=-\dfrac{5}{2}$.

Vậy $h(M;d)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

Câu 54. Chọn C.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+1}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\ne 1$ ta có $d=|a-1|+\left|\dfrac{a+1}{a-1}-1\right|=|a-1|+\dfrac{2}{|a-1|}\ge 2\sqrt{2}$.

Câu 55. Chọn B.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-2}\right)\in(C)$ với $a\ne 2$ ta có $|a-2|=\left|\dfrac{a+2}{a-2}-1\right|\Leftrightarrow |a-2|=\dfrac{4}{|a-2|}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\a=4\end{array}\right.$.

Vậy $M(0;-1),M(4;3)$.

Câu 56. Chọn A.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+3}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\ne 1$ ta có $|a|=\left|\dfrac{a+3}{a-1}\right|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a^2-2a-3=0\\a^2+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-1\\a=3\end{array}\right.$.

Vậy $M(-1;-1),M(3;3)$.

Câu 57. Chọn C.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\ne 1$ ta có

$$\frac{\left|a-\dfrac{a+2}{a-1}+1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \frac{|a^2-a-3|}{|a-1|}=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a^2-2a-2=0\\a^2-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1+\sqrt{3}\\a=1-\sqrt{3}\\a=2\\a=-2\end{array}\right..$$

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu là $M(2;4);M(-2;0)$.

Câu 58. Chọn C.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định của họ đồ thị (C_m), ta có

$y_0=(m+2)x_0^3-3(m-2)x_0+m+7,\forall m$

$\Leftrightarrow (x_0^3-3x_0+1)m+2x_0^3+6x_0+7-y_0=0,\forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_0^3-3x_0+1=0\\2x_0^3+6x_0+7-y_0=0\end{cases}$

Vì hệ có 3 nghiệm phân biệt nên họ đồ thị có 3 điểm cố định.

Câu 59. **Chọn B.**

Gọi $M\left(x,y\right),N\left(-x,y\right)$ là hai điểm thuộc đồ thị $\left(C_m\right)$ đối xứng nhau qua trục tung. Ta có

$x^3-\left(3m-1\right)x^2+2mx+m+1=-x^3-\left(3m-1\right)x^2-2mx+m+1$

$\Leftrightarrow 2x^3+4mx=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-2m\end{array}\right.$.

Vậy $m<0$.

Câu 60. **Chọn B.**

Ta có $y'=6x^2+2mx-12$. Điều kiện $\begin{cases}\Delta'>0\\S=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+72>0\\m=0\end{cases}\Leftrightarrow m=0$. Vậy $m=0$.

Câu 61. **Chọn C.**

Gọi $M\left(a,\dfrac{a+1}{a+2}\right)\in\left(C\right)$ với $a\neq-2$, ta có $|a|=\left|\dfrac{a+1}{a+2}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2+a-1=0\\a^2+3a+1=0\end{array}\right.$

Phương trình có 4 nghiệm nên trên đồ thị có 4 điểm cách đều hai trục tọa độ.

Câu 62. **Chọn B.**

Gọi $M\left(a,\dfrac{3a-5}{a-2}\right)\in\left(C\right)$ với $a\neq2$ ta có $|a-2|=\left|\dfrac{3a-5}{a-2}-3\right|\Leftrightarrow\left(a-2\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=3\end{array}\right.$.

Vậy $M\left(1;1\right);N\left(3;4\right)$.

Câu 63. **Chọn C.**

Gọi $A\left(a,-a^3+3a+2\right),B\left(b,-b^3+3b+2\right)$ **là hai điểm trên** $\left(C\right)$ **đối xứng nhau qua** $M\left(-1;\ 3\right)$, ta có: $\begin{cases}a+b=-2\\-a^3+3a+2-b^3+3b+2=6\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-2\\\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)-3\left(a+b\right)+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-2\\ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-2\end{cases}\vee\begin{cases}a=-2\\b=0\end{cases}$

Câu 64. **Chọn D.**

Ta có $y=\dfrac{3-x}{x-1}=\dfrac{-x+1+2}{x-1}=-1+\dfrac{2}{x-1}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=2\\x-1=-2\\x-1=1\\x-1=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\\x=2\\x=0\end{array}\right.$.

Vậy có 4 điểm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 65. **Chọn D.**

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+1}{a-2}\right)\in\left(C\right)$ với $a\neq2$. Ta có $d=|a-2|+\left|\dfrac{a+1}{a-2}-1\right|=|a-2|+\dfrac{3}{|a-2|}\geq2\sqrt{3}$.

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $\left(a-2\right)^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2+\sqrt{3}\\a=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Vậy hai điểm đó là $\left(2+\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$ và $\left(2-\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right)$

Câu 66. Chọn D.

Tâm đối xứng của đồ thị là giao điểm của hai đường tiệm cận. Vậy điểm cần tìm là $M\left(-1;\ 3\right)$.

Câu 67. Chọn B.

Gọi $M\left(a;\dfrac{2a+1}{a-1}\right)\in\left(C\right)$ với $a\neq 1$.

Ta có $\left|a-1\right|=\left|\dfrac{2a+1}{a-1}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2-2a+1=2a+1\\a^2-2a+1=-2a-1\end{array}\right.\Leftrightarrow a^2-4a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=4\end{array}\right.$

Vậy điểm cần tìm là: $M\left(0;-1\right),M\left(4;3\right)$.

Câu 68. Chọn A.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-2}\right)\in\left(C\right)$ với $a\neq 2$.

Ta có $5\left|a-2\right|=\left|\dfrac{a+2}{a-2}-1\right|\Leftrightarrow 5\left|a-2\right|=\dfrac{4}{\left|a-2\right|}\Leftrightarrow 5\left(a^2-4a+4\right)=4$.

$$\Leftrightarrow 5a^2-20a+16=0\Leftrightarrow a=\frac{10\pm 2\sqrt{5}}{5}$$

Vậy có hai điểm cần tìm.

Câu 69. Chọn A.

$y=(m-4)x^3-(6m-24)x^2-12mx+7m-18$

$\Leftrightarrow\left(x^3-6x^2-12x+7\right)m-\left(4x^3-24x^2+18+y\right)=0$

- Tọa độ điểm cố định của họ đồ thị $\left(C_m\right)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x^3-6x^2-12x+7=0\\4x^3-24x^2+18+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-6x^2-12x+7=0 & \left(*\right)\\y=-48x+10\end{cases}$$

- Để chứng minh họ đồ thị $\left(C_m\right)$ có ba điểm cố định ta cần chứng minh (*) có ba nghiệm phân biệt hay cần chứng minh đồ thị hàm số $f\left(x\right)=x^3-6x^2-12x+7$ có hai giá trị cực trị trái dấu.

Ta có: $f'\left(x\right)=3x^2-12x-12;f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+2\sqrt{2}\\x=2-2\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow$Hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại $x=2+2\sqrt{2};x=2-2\sqrt{2}$.

Vì $f\left(2+2\sqrt{2}\right).f\left(2-2\sqrt{2}\right)=-959<0\Rightarrow$ Phương trình (*) luôn có ba nghiệm phân biệt.

Vậy họ đồ thị $\left(C_m\right)$ luôn đi qua ba điểm cố định và ba điểm đó cùng thuộc đường thẳng $d:y=-48x+10$.

Câu 70. Chọn A.

- Ta có: $y=(m+1)x^3-(2m+1)x-m+1\Leftrightarrow\left(x^3-2x-1\right)m+\left(x^3-x+1-y\right)=0$

- Tọa độ điểm cố định của họ đồ thị $\left(C_m\right)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^3-2x-1=0 \\ x^3-x+1-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x-1=0 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=-1 \end{array}\right. \\ y=x+2 \end{cases}$$

Vậy họ đồ thị $\left(C_m\right)$ luôn đi qua ba điểm cố định và ba điểm đó cùng thuộc đường thẳng $d: y=x+2$