TP6: TÍCH PHÂN HÀM SỐ ĐẶC BIỆT

Câu 1. Cho hàm số *f(x)* liên tục trên R và $f(x)+f(-x)=\cos^4 x$ với mọi $x\in R$.

Tính: $I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

• *Đặt* $x=-t \Rightarrow \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t)(-dt) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$

$\Rightarrow 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x)+f(-x)\right]dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 xdx \Rightarrow I=\frac{3\pi}{16}$

Chú ý: $\cos^4 x = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$.

Câu 2. Cho hàm số *f(x)* liên tục trên R và $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, với mọi $x\in R$.

Tính: $I=\int_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$.

• *Ta có :* $I=\int_{-3\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-3\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ *(1)*

+ *Tính :* $I_1=\int_{-3\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx$. *Đặt* $x=-t\Rightarrow dx=-dt \Rightarrow I_1=\int_{0}^{3\frac{\pi}{2}} f(-t)dt = \int_{0}^{3\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$

Thay vào (1) ta được: $I=\int_{0}^{3\frac{\pi}{2}} \left[f(-x)+f(x)\right]dx = \int_{0}^{3\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\left(1+\cos 2x\right)} = 2\int_{0}^{3\frac{\pi}{2}} \left|\cos x\right|dx$

$=2\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \cos xdx\right] = 2\left[\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right] = 6$

Câu 3. $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx$

• $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+x^2}\sin x dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin x dx = I_1 - I_2$

+ *Tính* $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+x^2}\sin x dx$. *Sử dụng cách tính tích phân của hàm số lẻ, ta tính được* $I_1 = 0$.

+ *Tính* $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin x dx$. *Dùng pp tích phân từng phần, ta tính được:* $I_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}\pi + \sqrt{2}$

Suy ra: $I = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi - \sqrt{2}$.

Câu 4. $I = \int_2^5 \frac{e^x(3x-2)+\sqrt{x-1}}{e^x(x-1)+\sqrt{x-1}}dx$

• $I = \int_2^5 \frac{e^x(3x-2)+\sqrt{x-1}}{e^x(x-1)+\sqrt{x-1}}dx = \int_2^5 \frac{e^x(x-1)+\sqrt{x-1}+e^x(2x-1)}{e^x(x-1)+\sqrt{x-1}}dx = \int_2^5 dx + \int_2^5 \frac{e^x(2x-1)}{e^x(x-1)+\sqrt{x-1}}dx$

$= x\Big|_2^5 + \int_2^5 \frac{e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}(e^x\sqrt{x-1}+1)}dx = 3 + \int_2^5 \frac{e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}(e^x\sqrt{x-1}+1)}dx$

Đặt $t = e^x\sqrt{x-1}+1 \Rightarrow dt = \frac{e^x(2x-1)}{2\sqrt{x-1}}dx$

$\Rightarrow I = 3 + \int_{e^2+1}^{2e^5+1} \frac{2}{t}dt \Rightarrow I = 3 + 2\ln|t|\Big|_{e^2+1}^{2e^5+1} = 3 + 2\ln\left|\frac{2e^5+1}{e^2+1}\right|$

Câu 5. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$.

• $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos x}.\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$. *Đặt* $\begin{cases} u = \dfrac{x}{\cos x} \\ dv = \dfrac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}dx \\ v = \dfrac{-1}{x\sin x+\cos x} \end{cases}$

$\Rightarrow I = -\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}dx = \frac{4-\pi}{4+\pi}$.

Chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp và các em học sinh đã đọc tập tài liệu này.

transitung_tv@yahoo.com