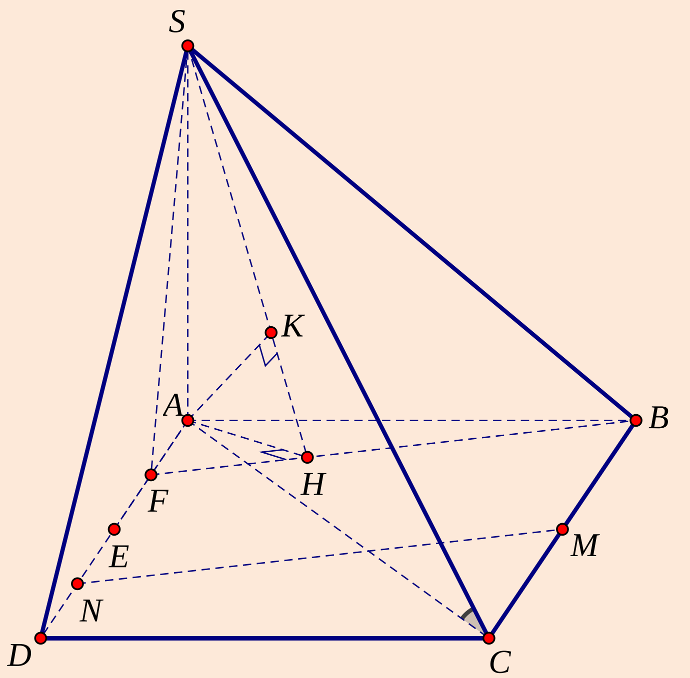
HÌNH KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ NĂM 2016

BÀI 1 (THPT SỐ 3 BẢO THẮNG – LÀO CAI).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 4a , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 60^0, M là trung điểm của BC , N là điểm thuộc cạnh AD sao cho DN = a . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MN.

Lời giải.



▪ Ta có SA ⊥ (ABCD) ⇒ AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABCD). Suy ra góc giữa cạnh SC và mặt phẳng (ABCD) là góc SCA.

Tam giác ABC vuông tại B, theo định lý Pytago ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 32a^2 \Rightarrow AC = 4a\sqrt{2} \Rightarrow SA = AC.\tan 60^0 = 4a\sqrt{6}$$

$$S_{\square ABCD} = 4a.4a = 16a^2 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.16a^2.4a\sqrt{6} = \frac{64a^3\sqrt{6}}{3} \text{ (đvtt)}$$

▪ Gọi E là trung điểm của đoạn AD , F là trung điểm của AE

⇒ BF // MN nên $MN // (SBF) \Rightarrow d(MN,SB) = d\left(MN,(SBF)\right) = d\left(N,(SBF)\right)$

Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ $AH \perp BF, H \in BF$, trong mặt phẳng (SAH) kẻ $AK \perp SH, K \in SH$

. Ta có $\begin{cases} BF \perp AH \\ BF \perp SA \end{cases} \Rightarrow BF \perp (SAH) \Rightarrow BF \perp AK$. Do $\begin{cases} AK \perp SH \\ AK \perp BF \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBF)$

$\Rightarrow d\left(A,(SBF)\right) = AK$

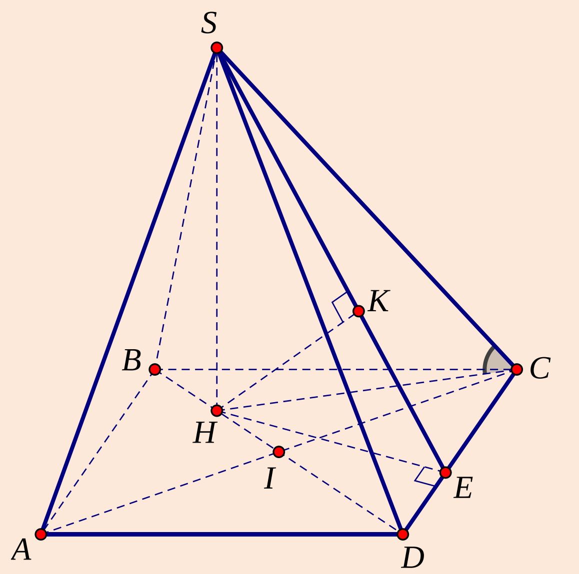
Lại có : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{17}{16a^2}$ và $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{103}{96a^2} \Rightarrow AK = \frac{4a\sqrt{618}}{103}$

$$\frac{d\left(N,(SBF)\right)}{d\left(A,(SBF)\right)} = \frac{NF}{AF} = 2 \Rightarrow d\left(N,(SBF)\right) = \frac{8a\sqrt{618}}{103}.$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{64a^3\sqrt{6}}{3}$ và $d(MN,SB) = \dfrac{8a\sqrt{618}}{103}$.

BÀI 2 (THPT BÌNH MINH – NINH BÌNH).
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I và có cạnh bằng a, góc BAD bằng 60^0. Gọi H là trung điểm của IB và SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Tính thể tích của khối chóp $S.AHCD$ và tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.



▪ Ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow HC$ là hình chiếu vuông góc của SC trên (ABCD)$\Rightarrow \angle(SC,(ABCD)) = \angle SCH = 45^0$

Theo giả thiết $\angle BAD = 60^0 \Rightarrow \Delta BAD$ đều $\Rightarrow BD = a\,; HD = \dfrac{3}{4}a; AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

và $AC = 2AI = a\sqrt{3}$
Xét $\triangle SHC$ vuông cân tại H, theo định lý Pitago ta

có: $SH = HC = \sqrt{IC^2 + HI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}a$.

Vậy $V_{S.AHCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{AHCD} = \dfrac{1}{3}SH.\dfrac{1}{2}AC.HD = \dfrac{\sqrt{39}}{32}a^3$

▪ Trong $(ABCD)$ kẻ $HE \perp CD$ và trong (SHE) kẻ $HK \perp SE$ (1). Ta có:

$$\begin{cases} CD \perp HE \\ CD \perp SH\ (SH \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHE) \Rightarrow CD \perp HK\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $HK \perp (SCD) \Rightarrow d(H,(SCD)) = HK$

Xét $\triangle HED$ vuông tại E, ta có $HE = HD.\sin 60^0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a$

Xét $\triangle SHE$ vuông tại H, ta có $HK = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{3\sqrt{39}}{4\sqrt{79}}a$

Mà $\frac{d(B,(SCD))}{d(H,(SCD))} = \frac{BD}{HD} = \frac{4}{3} \Rightarrow d(B,(SCD)) = \frac{4}{3}d(H,(SCD)) = \frac{4}{3}HK = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{79}}a$

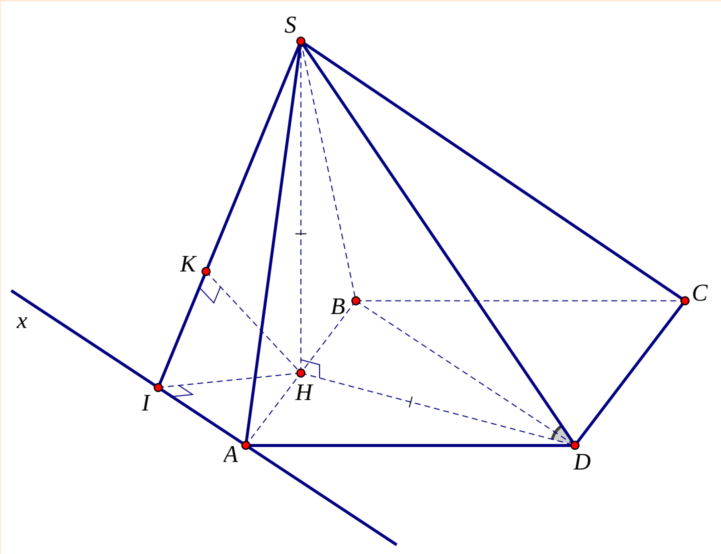
Do $AB//(SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = d(B,(SCD)) = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{79}}a$.

Kết luận: $V_{S.AHCD} = \frac{\sqrt{39}}{32}a^3$; $d(A,(SCD)) = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{79}}a$.

BÀI 3 (THPT BỐ HẠ).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Biết đường thẳng SD tạo với mặt đáy một góc 45^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

Lời giải.



Gọi hình chiếu của S trên AB là H.

Ta có $SH \perp AB, (SAB) \cap (ABCD) = AB, (SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$SH \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa SD và (ABCD) là $SDH = 45^0$.

Khi đó tam giác SHD vuông cân tại H, suy ra $SH = HD = 2a$,

Khi đó thể tích lăng trụ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt)

Kẻ Ax//BD nên BD//(SAx) mà $SA \subset$ (SAx)

$\Rightarrow d(\text{BD}, \text{SA}) = d(\text{BD}, (\text{SAx})) = d(\text{B}, (\text{SAx})) = 2d(\text{H}, (\text{SAx}))$

Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của H trên Ax và SI

Chứng minh được $HK \perp$ (SAx)

Tính được $HK = \frac{2a\sqrt{93}}{31}$. $\Rightarrow d(\text{BD}, \text{SA}) = 2d(\text{H}, (\text{SAx})) = 2\,\text{HK} = \frac{4a\sqrt{93}}{31}$

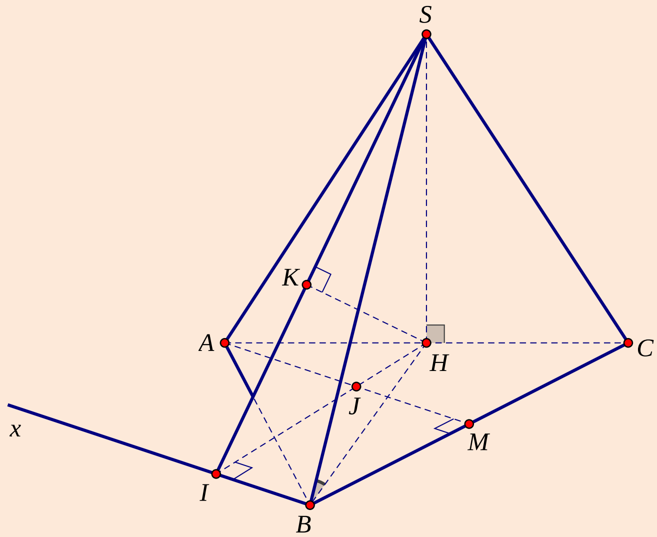
Đặt $AD = x (x > 0) \Rightarrow AB = 3x, AN = 2x, \text{NB} = x, DN = x\sqrt{5}, BD = x\sqrt{10}$

Xét tam giác BDN có $\cos BDN = \frac{BD^2 + DN^2 - NB^2}{2BD.DN} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$.

BÀI 4 (TRUNG TÂM GDTX-HN CAM RANH (LẦN 1) – KHÁNH HÒA).

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác SAC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, SB tạo với đáy một góc 30^0. M là trung điểm cạnh BC. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm cạnh AC, ta có: $\begin{cases}(SAC)\perp(ABC)\\(SAC)\cap(ABC)=AC\end{cases}\Rightarrow SH\perp$ (BAC)

Theo đề bài: $\left(SB;(ABC)\right)=SBH=30^0$;

$\text{BH}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow SH=BH.\tan 30^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{a}{2}$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt).

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ (đvtt).

Kẻ tia Bx song song với AM

(SBx) // AM $\Rightarrow$ d(SB;(ABM)) = d(AM;(SBx))

Kẻ HI $\perp$ Bx; $HI\cap AM=\{J\}$; (SHI) $\perp$ (SBx), (SHI) $\cap$ (HBx) = SI.

Kẻ HK $\perp$ SI, suy ra d(H;(SBx)) = HK.

Tam giác vuông SHI: $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{HI^2}+\dfrac{1}{HS^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{52}{9a^2}\Rightarrow \text{HK}=\dfrac{3a}{\sqrt{52}}$.

Vì HK=$\dfrac{3}{2}$ IJ $\Rightarrow$ d(SB;AM) = d(J;(SBx)) = $IJ=\dfrac{2}{3}HK=\dfrac{a}{\sqrt{13}}=\dfrac{a\sqrt{13}}{13}$.

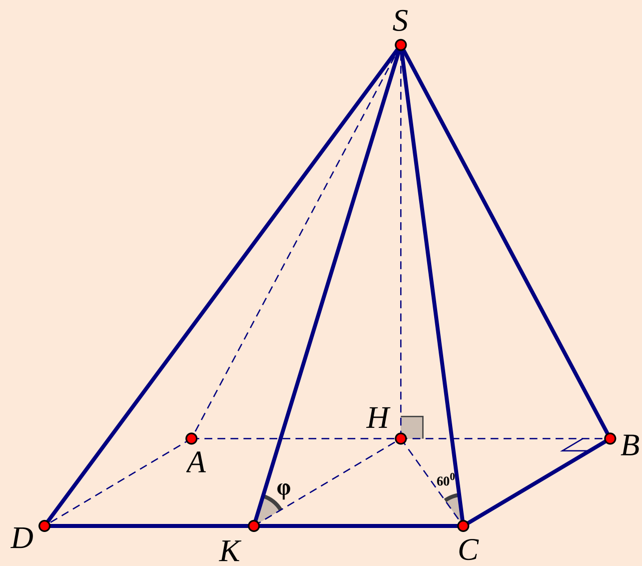
BÀI 5 (TRUNG TÂM GDTX-HN CAM RANH (LẦN 2) – KHÁNH HÒA).

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABCD), cạnh bên SC hợp với mặt phẳng đáy một góc 60^0.

1. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a

2. Tính góc hợp bởi giữa mặt bên (SCD) với đáy.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB. Kẻ SH $\perp$ AB. Do (SAB) $\perp$ (ABCD)

Nên SH là đường cao của khối chóp S.ABCD

$\Rightarrow$ HC là hình chiếu vuông góc của SC trên mp(ABCD)

$\Rightarrow \angle(SC;(ABCD)) = \angle SCH$

ΔHBC vuông tại B: HC= $\sqrt{BC^2+HB^2} = \sqrt{a^2+(\frac{a}{2})^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

ΔSHC vuông tại H : $SH = HC\tan(\angle SHC) = (\frac{a\sqrt{5}}{2})\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}(a^2)(\frac{a\sqrt{15}}{2}) = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ (đvtt)

Ta có SC=SD ($\Delta SBC = \Delta SAD$).Gọi K là trung điểm CD

$\Rightarrow \begin{cases} SK \perp CD \\ HK \perp CD \end{cases} \Rightarrow$ SKH là góc g ΔHBC vuông tại B: HC= $\sqrt{BC^2+HB^2} = \sqrt{a^2+(\frac{a}{2})^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ iữa

hai mặt phẳng (SCD) và mặt đáy(ABCD)

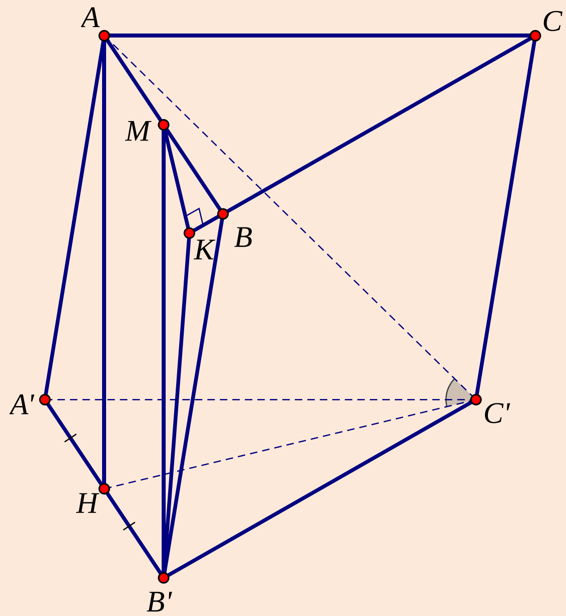
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD)

ΔSHK vuông tại H: $\tan\varphi = \frac{SH}{HK} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Từ đó suy ra φ?

BÀI 6 (THPT CHUYÊN BẮC GIANG – BẮC GIANG).

Cho hình lăng trụ ABC.A′B′C′ có AB = a, BC = 2a, ABC = 120^0. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (A′B′C′) trùng với trung điểm cạnh A′B′, góc giữa đường thẳng AC′ và mặt phẳng (A′B′C′) bằng 60^0 . Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A′B′C′ và góc giữa hai mặt phẳng (BCC′B′) và (ABC).

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của A′B′, vì AH ⊥ (A′B′C′) nên góc giữa AC′ và (A′B′C′) là $\left(AC',HC'\right)=AC'H=60^0$.

Ta có: $A'B'=AB=a,\ B'C'=BC=2a,\ B'H=\dfrac{A'B'}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Áp dụng định lí cosin vào tam giác HB′C′ ta có:

$$HC'^2=HB'^2+B'C'^2-2HB'.B'C'.\cos120^0=\frac{21a^2}{4}\Rightarrow HC'=\frac{a\sqrt{21}}{2}$$

$\Delta AHC'$ vuông tại H: $AH=HC'.\tan60^0=\dfrac{3a\sqrt{7}}{2}$

Diện tích ΔABC: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.BC.\sin120^0=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích lăng trụ: $V_{ABC.A'B'C'}=AH.S_{\Delta ABC}=\dfrac{3a^3\sqrt{21}}{4}$.

Gọi M là trung điểm AB. Vẽ MK ⊥ BC tại K.

Ta có: AHB′M là hình chữ nhật. suy ra B′M ⊥ (ABC) ⇒ BC ⊥ B′M ⇒ BC ⊥ (B′MK).

Suy ra BC ⊥ B′K.

Vậy góc giữa (BCC′B′) và (ABC) là α = (MK; KB′) $=MKB'$

Ta có: $B'M=AH=\dfrac{3a\sqrt{7}}{2}$.

ΔMKB vuông tại K: $MK=MB.\sin60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

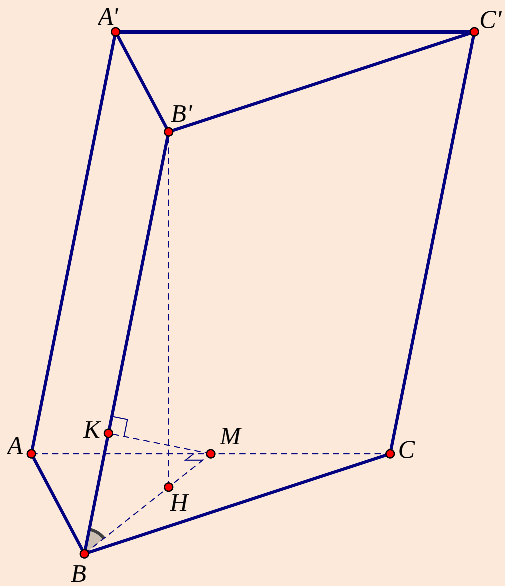
$\Delta MKB'$ vuông tại M: $\tan\alpha=\dfrac{B'M}{MK}=2\sqrt{21}$

Vậy góc giữa (BCC′B′) và (ABC) là $\alpha=\arctan2\sqrt{21}$.

BÀI 7 (THPT CHUYÊN BẮC NINH).

Cho hình lăng trụ ABC.A′B′C′ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, B′A = B′C = B′C, góc giữa cạnh bên BB′ và (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A′B′C′ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC, BB′.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B′ trên mặt phẳng (ABC).

Góc giữa B′B vằ mặt phẳng (ABC) là $B'BH = 60^0$

Vì $B'A = B'B = B'C$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.

Gọi M là trung điểm AC. Vì ABC là tam giác đều nên $BM \perp AC$ và H là trọng tâm ΔABC.

Xét tam giác vuông AMB ta có:

$$BM = AB.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \frac{2}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Tam giác BB′H vuông tại H: $B'H = BH.\tan 60^0 = a$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = BH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Kẻ MK vuông góc với BB′ tại K.

Vì $AC \perp B'H$, $AC \perp BM$ nên $AC \perp (B'BM) \Rightarrow AC \perp MK$.

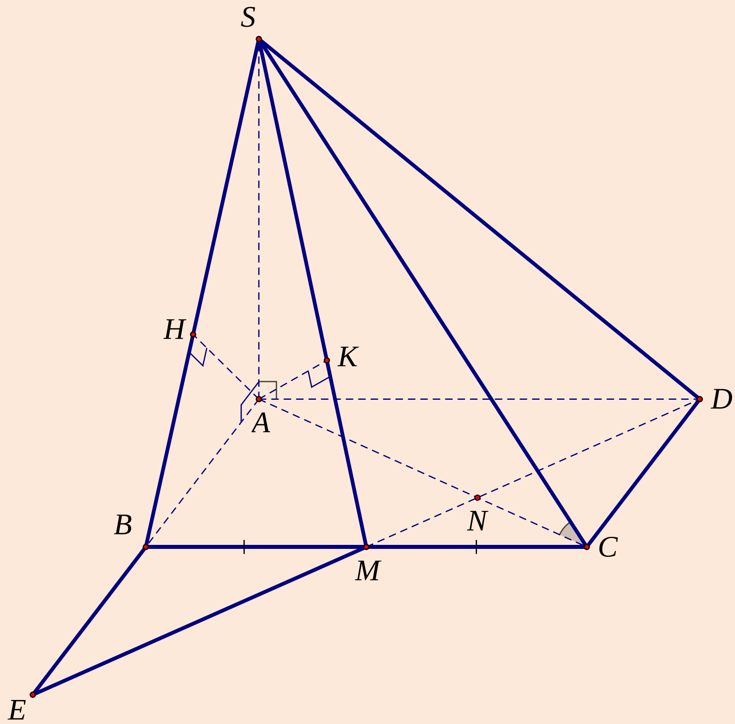
$$\Rightarrow \begin{cases} MK \perp AC \\ MK \perp BB' \end{cases} \Rightarrow MK = d(AC, BB').$$

Tam giác MKB vuông tại K: $MK = BM.sin60^0 = \frac{3a}{4} = d(AC, BB')$.

BÀI 8 (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy ABCD. Cạnh bên SC tạo với đáy ABCD một góc α và $\tan\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$. Gọi M là trung điểm BC, N là giao điểm của DM với AC, H là hình chiếu của A trên SB. Tính thể tích hình chóp S.ABMN và khoảng cách từ điểm H tới mặt phẳng (SDM).

Lời giải.



Vì A là hình chiếu vuông góc của S trên (ABCD) nên góc giữa SC và mặt phẳng (ABCD) là $(SC;CA) = SCA = \alpha$.

Tam giác ADC vuông tại D: $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = a\sqrt{5}$

Tam giác SAC vuông tại A: $SA = AC.\tan\alpha = a\sqrt{2}$

ΔABM và ΔMCD vuông cân nên $MA = MD = a\sqrt{2}$

Theo định lý Pitago đảo, ta có ΔAMD vuông tại M.

Vì MC // AD nên $\dfrac{MN}{ND} = \dfrac{MC}{AD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{1}{3}MD = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

Ta có: $S_{\Delta BMN} = S_{\Delta ABM} + S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}AB.BM + \dfrac{1}{2}AM.MN = \dfrac{5a^2}{6}$

Tính thể tích khối chóp: $V_{S.ABMN} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABMN} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{2}.\dfrac{5a^2}{6} = \dfrac{5a^3\sqrt{2}}{18}$

Vẽ $AK \perp SM$ tại K. Vì $DM \perp AM$, $DM \perp SA$ nên $DM \perp (SAM) \Rightarrow DM \perp AK$

Suy ra $AK \perp (SDM)$

Hai tam giác vuông AHS và AHB đồng dạng (g.g) nên

$\dfrac{SH}{HA} = \dfrac{HA}{HB} = \dfrac{SA}{AB} \Rightarrow \dfrac{HS}{HA}.\dfrac{HA}{HB} = \left(\dfrac{SA}{AB}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{HS}{HB} = 2 \Rightarrow \text{HS} = \dfrac{2}{3}SB$

Mà $S \in (SDM)$ nên $d = d(H;(SDM)) = \dfrac{2}{3}d(B;(SDM))$

Gọi giao AD và DM là E. Vì BM // AD nên $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{BM}{AD} = \dfrac{1}{2}$

Mà $E \in (SDM)$ nên $d(B;(SDM)) = \dfrac{1}{2}d(A;(SDM)) \Rightarrow d = \dfrac{1}{3}d(A;(SDM)) = \dfrac{1}{3}AK$

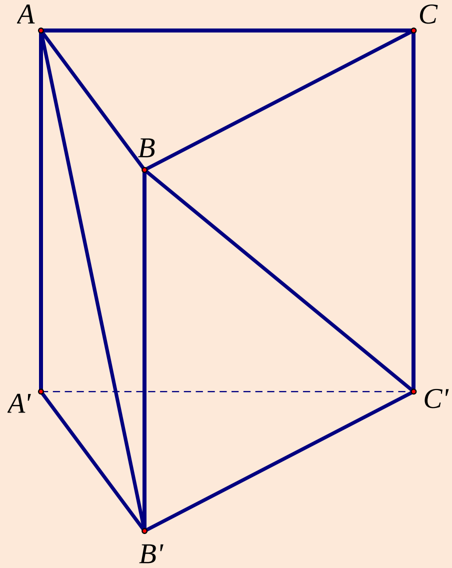
Tam giác SAM vuông tại A nên $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AK = a$

Vậy khoảng cách từ H đến (SDM) là $\dfrac{a}{3}$.

BÀI 9 (THPT CHUYÊN KHTN – HÀ NỘI (LẦN 2)).

Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A′B′C′ có AB = 2a, góc giữa AB′ và BC′ bằng 60^0 . Tính thể tích của lăng trụ.

Lời giải.



Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.2a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a^2$. Đặt BB′ = x .

Mặt khác ta lại có: $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C}$

$\Rightarrow cos\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC}}{AB'.BC} = \frac{x^2 - 2a^2}{4a^2 + x^2}$

Với $\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC}\right) = 60^0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x^2 - 2a^2}{4a^2 + x^2} \Rightarrow x = 2a\sqrt{2}$

$\Rightarrow V = 2\sqrt{2}a.\sqrt{3}a^2 = 2\sqrt{6}a^3$.

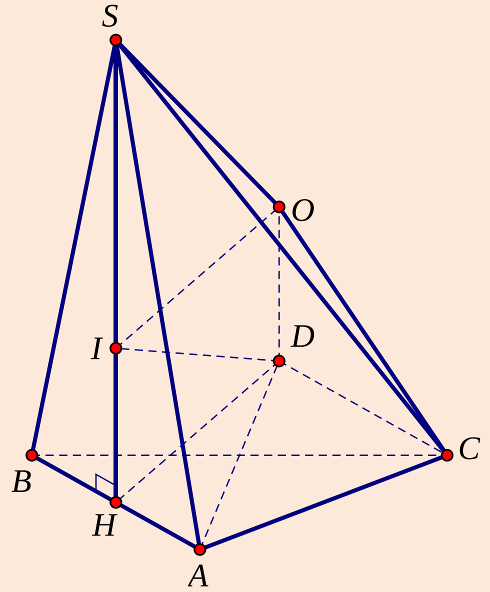
Với $\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC}\right) = 120^0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại).

Vậy $V = 2\sqrt{6}a^3$ (đvtt).

BÀI 10 (THPT CHUYÊN KHTN – HÀ NỘI (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân tại A trong đó $AB = AC = a, BAC = 120^o$; mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB thì H là chân đường cao hạ từ đỉnh S của hình chóp. Ta có:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.a.a.\sin 120^0 = \frac{a^3}{8}$$

Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC thì D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có tam giác DAB đều và do đó. $DH \perp AB$. Suy ra $DH \perp (SAB)$.

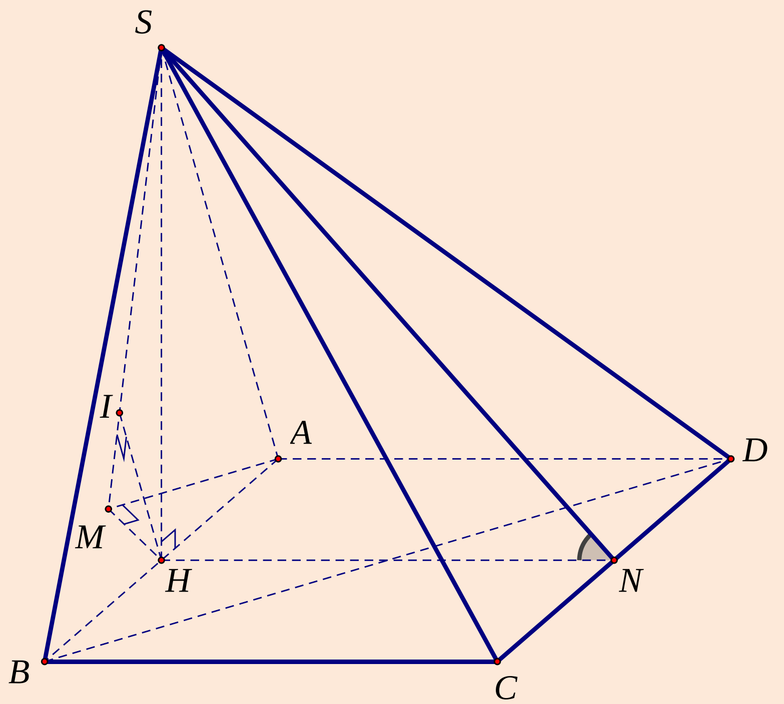
Từ D, dựng đường thẳng Δ song song với đường thẳng SH thì Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp đáy. Gọi I là tâm tam giác đều SAB và trong mặt phẳng (SHD), dựng đường thẳng d đi qua I và song song với DH thì d là trục của đường tròn ngoại tiếp mặt cầu (SAB). Gọi $O = \Delta \cap d$ thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC. Ta có:

$$R = OC = \sqrt{OD^2 + DC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}.$$

BÀI 11 (THPT CHUYÊN LÀO CAI (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 2a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của cạnh AB. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (ABCD) bằng 60^o. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm CD

Ta có SH ⊥ (ABCD) nên (SHN) ⊥ (ABCD)

HN // BC ⇒ HN ⊥ CD. Mà SH ⊥ CD nên CD ⊥ (SHN)

Mà CD ⊂ (SCD) nên (SCD) ⊥ (SHN)

Vậy mặt phẳng (SHN) cùng vuông góc với (ABCD) và (SCD)

(SHN) ∩ (ABCD) = HN; (SHN) ∩ (SCD) = SN

⇒ Góc giữa (SCD) và (ABCD) là $SNH = 60^0$

Vì HNCB là hình chữ nhật nên MN = BC $= 2a$.

Tam giác SMN vuông tại M: $SM = MN.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SM.S_{\square ABCD} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.(2a)^2 = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt)

▪ Tính khoảng cách:

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BD. H là hình chiếu vuông góc của M trên d.

Vẽ MI ⊥ SH tại I.

Vì AH ⊂ (SAH) nên BD // (SAH)

Do đó d(BD; SA) = d(BD; (SAH)) = d(B; (SAH)) = $2.d\left(M;(SAH)\right)$.

Vì SM ⊥ AH, MH ⊥ AH nên (SMH) ⊥ AH.

Suy ra MI ⊥ AH. Mà MI ⊥ SH nên MI ⊥ (SAH).

Suy ra d(M; (SAH)) = MI.

Tam giác AHM vuông cân tại H nên $MH = \frac{MA}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Tam giác SMH vuông tại M:

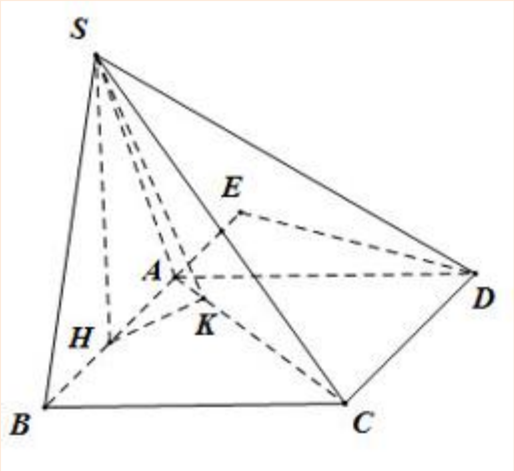
$\frac{1}{MI^2} = \frac{1}{MH^2} + \frac{1}{MS^2} \Rightarrow MI = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$

$\Rightarrow d\left(SA;BD\right) = 2MI = \frac{4a\sqrt{3}}{5}$.

BÀI 12 (THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN (LẦN 1) – ĐÀ NẴNG).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$ .Gọi H là trung điểm cạnh AB; tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABCD) bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng CH và SD.

Lời giải.



Vì H là trung điểm cạnh đáy AB của tam giác cân SAB nên SH $\perp$ AB. Mà (SAB) $\perp$ (ABCD) nên SH $\perp$ (ABCD).

Vẽ HK $\perp$ AC tại K. Vì AC $\perp$ HK, AC $\perp$ SH nên AC $\perp$ (SHK).

Suy AC $\perp$ SK.

Vì $AC = (SAC) \cap (ABCD)$ và AC $\perp$ SK, AC $\perp$ HK nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABCD) là $(SK;HK) = SKH = 60^0$

H là trung điểm AB nên $AH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$

ABCD là hình chữ nhật nên AC = BD $= \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{3}$

Có $\Delta AHK \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KH}{BC} = \dfrac{AH}{AC}$

Tam giác SHK vuông tại H:

$SH = HK.\tan 60^0 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH.S_{\square ABCD} = \dfrac{1}{3} SH.AB.AD = \dfrac{a^3}{3}$ (đvtt)

Gọi E là điểm đối xứng với H qua A. Vẽ HF $\perp$ DE tại F, HI $\perp$ SF tại I.

Vì DE $\perp$ HF, DE $\perp$ SH nên DE $\perp$ (SHF) $\Rightarrow$ DE $\perp$ HI. Mà HI $\perp$ SF nên HI $\perp$ (SED)

Vì $HE = CD = a$, HE // CD nên HEDC là hình bình hành.

Suy ra DE // CH $\Rightarrow$ CH // (SDE). Mà SD $\subset$ (SDE) nên khoảng cách giữa CH và SD bằng $d(CH;SD) = d(CH;(SDE)) = d(H;(SDE)) = HI$.

Tam giác DEA vuông tại A nên $DE = \sqrt{AE^2 + AD^2} = \dfrac{3a}{2}$

Ta có: $\Delta HFE \backsim \Delta DAE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{HF}{DA} = \dfrac{HE}{DE} \Rightarrow HF = \dfrac{HE.DA}{DE} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

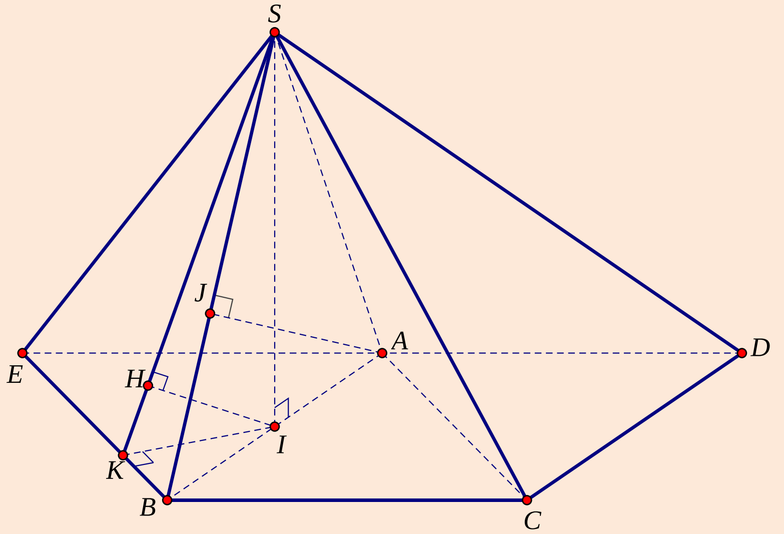
Tam giác SHF vuông tại H nên: $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HF^2} \Rightarrow HI = \dfrac{a\sqrt{26}}{13}$

Vậy $d(CH;SD) = \dfrac{a\sqrt{26}}{13}$.

BÀI 13 (THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN – KHÁNH HÒA)

Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a, ΔSAB cân tại S và nằm trong mặt vuông góc đáy. Khoảng cách từ D đến (SBC) bằng $\frac{2a}{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AC theo a.

Lời giải.



Vì ΔSAB cân tại S và nằm trong mặt vuông góc mặt đáy nên khi gọi SI là đường cao của ΔSAB $\Rightarrow$ SI $\perp$ (ABCD).

Vì AD | | BC $\Rightarrow$ AD | | (SAB) nên khoảng cách từ D đến (SBC) cũng là khoảng cách từ A đến (ABCD) .Hạ AJ $\perp$ SB thì AJ $\perp$ (ABCD).

Đặt SI = h. Ta có : AJ.SB = SI.AB trong đó : AJ = $\frac{2a}{3}$; SB = $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$ $\Rightarrow$ h = $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow$ V = $\frac{2\sqrt{5}}{15}$ a^3.

Qua B kẻ đường thẳng | | AC cắt DA tại E. Khi đó BCAE là hình bình hành:

Suy ra d(SB, AC) = d(AC,(SBE)) = d (A,(SBE)).

Vì I là trung điểm AB nên :d(A,(SBE)) = 2d(I,(SBE)). Hạ IK $\perp$ BE thì theo định lý 3 đường vuông góc $\Rightarrow$ SK $\perp$ BE. Hạ IH $\perp$ SK $\Rightarrow$ IH $\perp$(SBE).

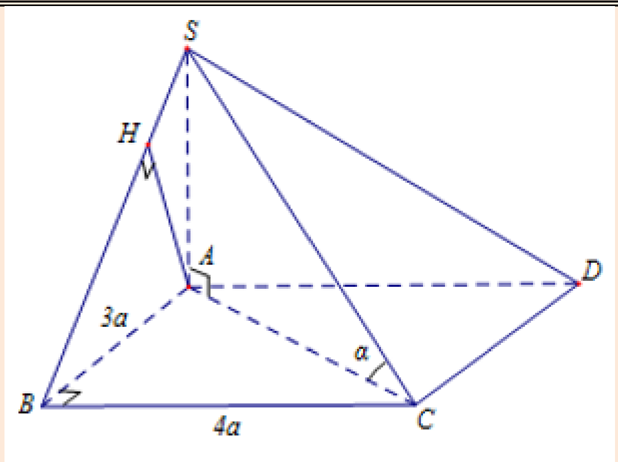
Mà d(A,BE) = 2S(ABC)/AC = $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Vậy IK = $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

BÀI 14 (THPT CHUYÊN NGUYỄN ĐÌNH CHIỂU (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Biết SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), SC hợp với mặt phẳng (ABCD) một góc α với $\tan\alpha = \frac{4}{5}$, AB = 3a và BC = 4a. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải.



▪ Vì SA là đường cao của hình chóp S.ABCD nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABCD). Suy ra góc giữa SC và (ABCD) là góc giữa hai đường thẳng SC và AC và bằng góc $SCA = \alpha$.

Xét Δ ABD vuông tại B, ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$.

Xét ΔSAC vuông tại A, ta có: $SA = AC.\tan\alpha = 5a.\frac{4}{5} = 4a$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{\square ABCD} = \frac{1}{3}.4a.3a.4a = 16a^3$ (đvtt).

▪ Ta có AD // BC nên AD // (SBC). Suy ra $d\left(D;(SBC)\right) = d\left(A;(SBC)\right)$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Leftrightarrow BC \perp (SAB)$. Lại có $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

$(SBC) \cap (SAB) = SB$. Từ A kẻ AH $\perp$ SB. Khi đó $d\left(D;(SBC)\right) = d\left(A;(SBC)\right) = AH$.

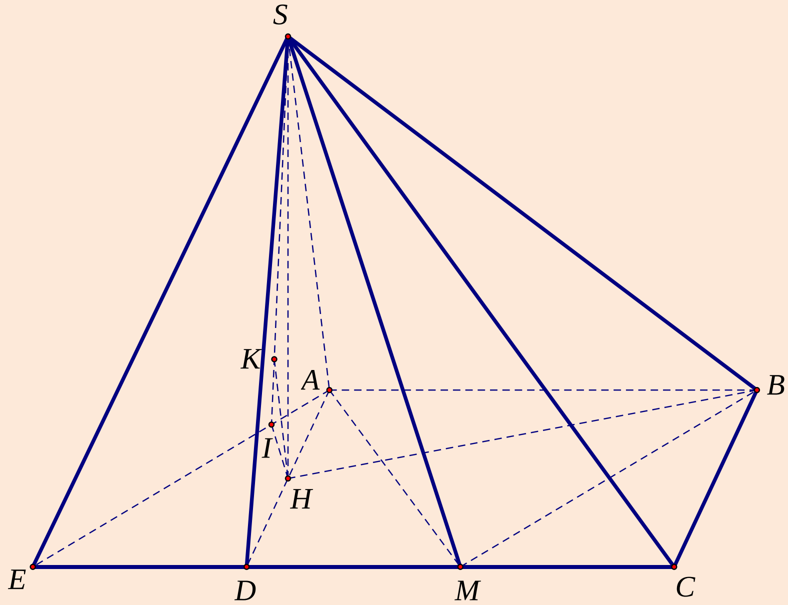
Xét ΔSAB vuông tại A, ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{(4a)^2} = \frac{25}{144a^2} \Rightarrow$ AH $= \frac{12a}{5}$.

Vậy $d\left(D;(SBC)\right) = d\left(A;(SBC)\right) = AH = \frac{12a}{5}$.

BÀI 15 (THPT CHUYÊN NGUYỄN HUỆ (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm của AD, góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của DC. Tính thể tích khối chóp S.ABM và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của cạnh AD.

Vì HB là hình chiếu của SB lên đáy ABCD nên $\left(SB;(\mathrm{ABCD})\right) = SBH = 60^0$.

Trong tam giác SBH có SH $=$ BH.tan$\,60^0 = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

Vậy $V_{SABM} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{12}$ (đvtt)

▪ Dựng hình bình hành ABME

Vì BM // (SAE) $\Rightarrow$ d(SA,BM) $=$ d(M,(SAE)) $=$ 2d(D,(SAE)) $=$ 4d(H,(SAE)).

Kẻ HI $\perp$ AE; HK $\perp$ SI, (I $\in$ AE, K$\in$ SI).

Chứng minh HK $\perp$ (SAE)$\Rightarrow$ d(H,(SAE)) $=$ HK.

▪ Vì Δ AHI $\backsim$ Δ ADE $\Rightarrow$ HI $= \dfrac{\mathrm{DE}.AH}{AE} = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$

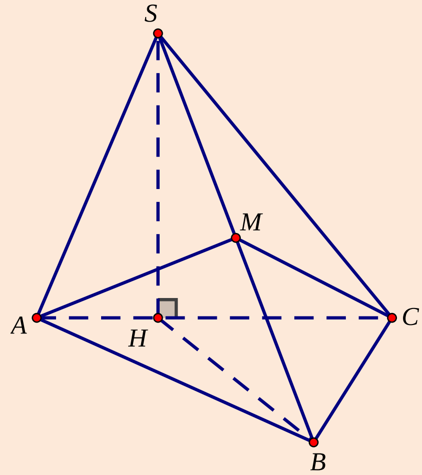
Trong tam giác SHI có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HI^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{304}{15a^2} \Rightarrow$ HK $= \dfrac{a\sqrt{15}}{4\sqrt{19}}$.

Vậy d(SA,BM) $= \dfrac{a\sqrt{15}}{\sqrt{19}}$.

BÀI 16 (THPT CHUYÊN NGUYỄN HUỆ (LẦN 2)).

Cho hình chóp S.ABC có mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = AB = a$, $AC = 2a$ và $ASC = ABC = 90^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

Lời giải.



▪ Kẻ SH vuông góc với AC (H $\in$ AC) $\Rightarrow$ SH $\perp$ (ABC)

$\Rightarrow SC = BC = a\sqrt{3},\ SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2},\ S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \dfrac{a^3}{4}$

▪ Gọi M là trung điểm của SB và φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

Ta có: $SA = AB = a,\ SC = BC = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow AM \perp SB$ và $CM \perp SB$

$\Rightarrow cos\varphi = \left|cos\,AMC\right|$

▪ $\Delta SAC = \Delta BAC \Rightarrow SH = BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

AM là trung tuyến ΔSAB nên: $AM^2 = \dfrac{2AS^2 + 2AB^2 - SB^2}{4} = \dfrac{10a^2}{16} \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$

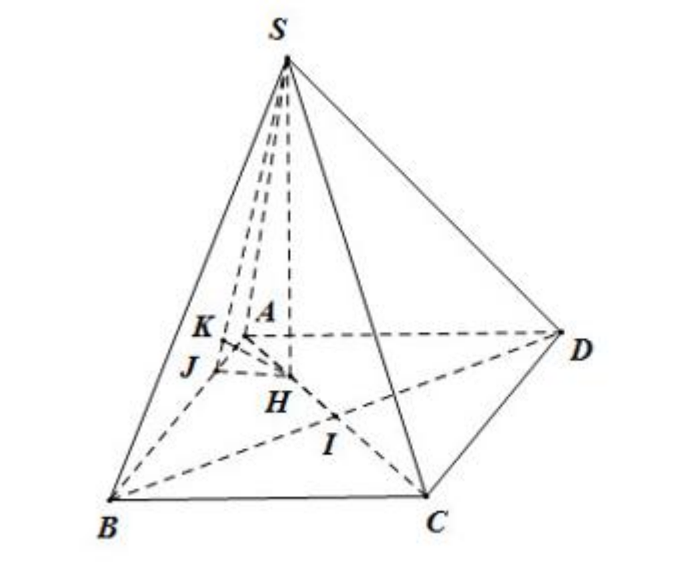
Tương tự: $CM = \dfrac{a\sqrt{42}}{4} \Rightarrow cos\,AMC = \dfrac{AM^2 + CM^2 - AC^2}{2.AM.CM} = -\dfrac{\sqrt{105}}{35}$

Vậy: $cos\varphi = \dfrac{\sqrt{105}}{35}$

BÀI 17 (THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU – NGHỆ AN).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AB = 2a, BD = AC $\sqrt{3}$ và I là giao điểm của AC và BD; tam giác SAB cân tại A; hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của AI. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB với CD.

Lời giải.



Vì ABCD là hình thoi nên I là trung điểm AC và BD. Suy ra $BD = AC\sqrt{3} \Rightarrow \text{BI} = \text{AI}\sqrt{3}$.

Xét ΔABI vuông tại I, ta có: $AB^2 = AI^2 + BI^2 = AI^2 + 3AI^2 = 4AI^2 \Rightarrow AI = \frac{AB}{2} = \frac{2a}{2} = a$.

Suy ra $AH = \frac{AI}{2} = \frac{a}{2}$.

Tam giác SAB cân tại A nên $SA = AB = 2a$.

Tam giác SHA vuông tại H nên: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Vì ABCD là hình thoi nên $S_{\square ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}AC^2.\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$

Thể tích hình chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{\square ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{2}.2a^2\sqrt{3} = a^3\sqrt{5}$ (đvtt)

Vì ABCD là hình thoi nên CD // AB, mà AB $\subset$ (SAB) nên CD // (SAB)

Suy ra $d(SB;CD) = d(CD;(SAB)) = d(C;(SAB)) = 4d(H;(SAB))$

(Vì A $\in$ (SAB) và $CA = 4HA$)

Vẽ HJ $\perp$ AB tại J, HK $\perp$ SJ tại K.

AB $\perp$ HJ, AB $\perp$ SH $\Rightarrow$ AB $\perp$ (SHJ)

$\Rightarrow$ AB $\perp$ HK. Mà HK $\perp$ HJ nên HK $\perp$ (SAB). Suy ra $d(SB;CD) = 4HK$.

Ta có: $\Delta AHJ \backsim \Delta ABI$ (g.g) $\Rightarrow \frac{HJ}{BI} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow HJ = \frac{BI.AH}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

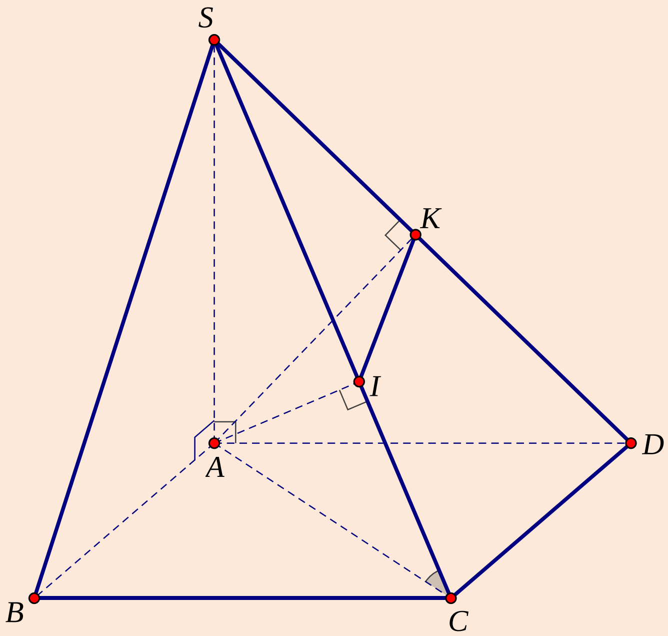
Tam giác SHJ vuông tại H nên: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HJ^2} + \frac{1}{SH^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{35}}{14}$

Vậy $d(SB;CD) = \frac{2a\sqrt{35}}{7}$

BÀI 18 (THPT CHUYÊN PHÚ YÊN (LẦN 1) – PHÚ YÊN).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, cạnh SC tạo với đáy góc 30^0. Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên SD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AK, SC.

Lời giải.



▪ Tính thể tích:

Vì SA vuông góc với đáy nên góc giữa SC và (ABCD) là $\angle SCA = 30^0$

ABCD là hình chữ nhật, tam giác ABD vuông tại A nên:

$AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{3}$

Tam giác SAC vuông tại A: $SA = AC.\tan 30^0 = a$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{\square ABCD} = \frac{1}{3}a.a.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ (đvtt)

▪ Tính khoảng cách:

Vẽ AI ⊥ SC tại I.

Vì SA ⊥ CD, AD ⊥ CD nên (SAD) ⊥ CD

Suy ra AK ⊥ CD. Mà AK ⊥ SD nên AK ⊥ (SCD)

Suy ra AK ⊥ IK và AK ⊥ SC.

AK ⊥ SC, AI ⊥ SC nên (AKI) ⊥ SC ⇒ SC ⊥ IK.

IK là đoạn vuông góc chung của AK và SC $\Rightarrow d\left(AK, SC\right) = IK$.

Tam giác SAD vuông tại A: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AK^2 = \frac{2a}{3}$

Tam giác SAC vuông tại A: $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AI^2 = \frac{3a^2}{4}$

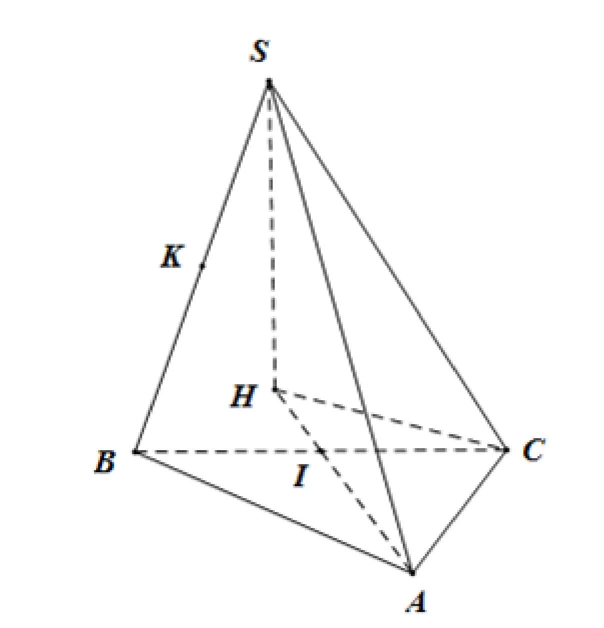
Tam giác AIK vuông tại K: $IK = \sqrt{AI^2 - AK^2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Vậy $d\left(AK, SC\right) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

BÀI 19 (THPT CHUYÊN QUỐC HỌC – HUẾ (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A, AB = a$\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là H thỏa mãn: $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH}$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ trung điểm K của SB đến mặt phẳng (SAH).

Lời giải.



Vì H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) nên góc giữa SC và (ABC) là:

$$\alpha = \angle\left(SC, HC\right) = \angle SCH = 60^0.$$

Tam giác ABC vuông cân ở A có I là trung điểm cạnh huyền BC nên AI $\perp$ BC và:

$$BC = AB\sqrt{2} = 2a;\ IB = IC = IA = \frac{BC}{2} = a.$$

Vì $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH} \Rightarrow IH = \frac{IA}{2} = \frac{a}{2}$.

Tam giác HIC vuông tại I: $HC = \sqrt{IH^2 + IC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Tam giác SHC vuông tại H: $SH = SC.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{2}.\frac{1}{2}.\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$

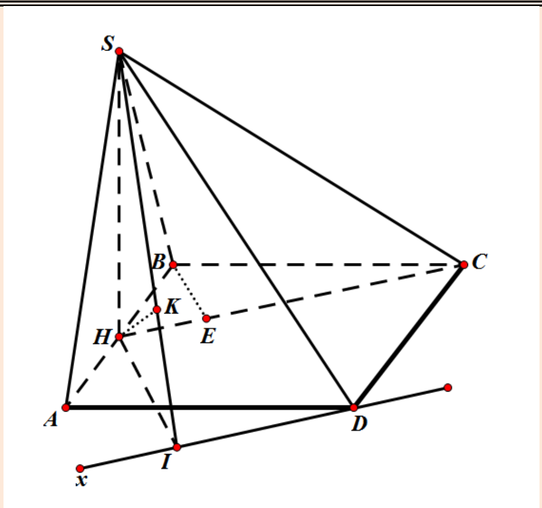
Vì BI $\perp$ AH, BI $\perp$ SH nên BI $\perp$ (SAH).

Mặt khác: $S \in \left(SAH\right);\ KS = \frac{BS}{2} \Rightarrow d\left(K,\left(SAH\right)\right) = \frac{1}{2}d\left(B,\left(SAH\right)\right) = \frac{BI}{2} = \frac{a}{2}$.

BÀI 20 (THPT CHUYÊN SƠN LA – SƠN LA (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật có AB = a, BC = 2a. H là trung điểm cạnh AB, SH vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Tính thể tích hình chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng HC và SD.

Lời giải.



SH $\perp$(ABCD). Tam giác SHA vuông tại H.

$$SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = a$$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SH = \frac{2a^3}{3}$ (đvTT).

Kẻ đường thẳng Dx || HC, kẻ HI$\perp$ID (I thuộc Dx),

kẻ HK$\perp$SI (K thuộc SI). Khi đó HK $\perp$(SID), HC||(SID).

d(HC,SD) = d(HC,(SID)) = d(H,(SID)) = HK.

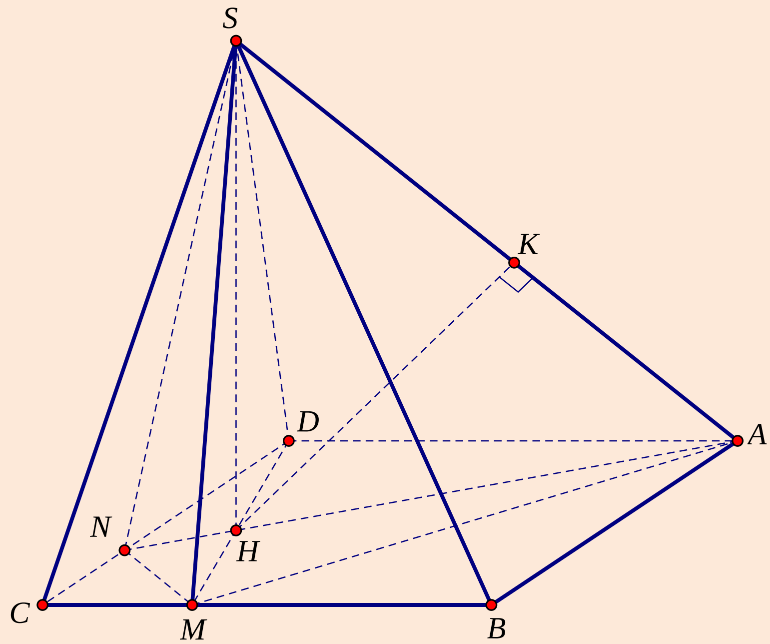
HI = d(D,HC) = 2d(B,HC) = 2BE = $\frac{4a}{\sqrt{17}}$. (BE$\perp$HC tại E)

Trong tam giác vuông SHI có $HK = \frac{4a\sqrt{33}}{33}$.

BÀI 21 (THPT CHUYÊN ĐH SƯ PHẠM HÀ NỘI (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Điểm M thuộc cạnh BC và điểm N thuộc cạnh CD sao cho $CM = DN = \frac{a}{3}$. Gọi H là giao điểm của AN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$, hãy tính thể tích khối chóp S.AMN và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SA.

Lời giải.



Ta có $S_{\triangle AMN} = S_{\square ABCD} - \left(S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ADN} + S_{\triangle CMN}\right) = \frac{7a^2}{18}$

Khi đó $V_{S.AMN} = \frac{1}{3}.SH.S_{\triangle AMN} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{54}$

Ta có: $\Delta AND = \Delta DCM$ (c.g.c) $\angle DAN = \angle CDM$. Mặt khác: $\angle DAN + \angle DNA = 90^0$.
$\angle CDM + \angle DNA = 90^0 \Rightarrow AN \perp DM$.

Suy ra DM $\perp$ (SAH). Kẻ HK vuông góc với SA thì HK là khoảng cách giữa SA và DM.

Trong tam giác vuông AND, ta có: $AN = \sqrt{DA^2 + DN^2} = \frac{a\sqrt{10}}{3} \Rightarrow AH = \frac{AD^2}{AN} = \frac{3a\sqrt{10}}{10}$.

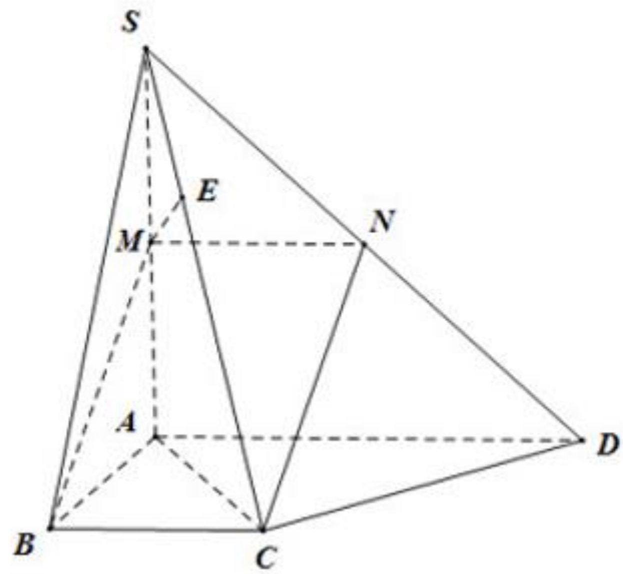
Trong tam giác vuông SHA, ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HS^2} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$

Vậy $d\left(SA, DM\right) = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$.

BÀI 22 (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH (LẦN 3)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông ở A và B, AB = BC $= a$, AD $= 2a$, SA vuông góc với đáy, SA $= 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD. Chứng minh tứ giác BCNM là hình chữ nhật. Tính thể tích hình chóp S.BCNM và khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau BM và CD.

Lời giải.



Ta có MN là đường trung bình của Δ SAD nên MN // AD và MN = a

Mà AD // BC (do ABCD là hình thang) nên MN // BC và MN = BC = a.

Suy ra BCNM là hình bình hành.

Mặt khác BC ⊥ AB, BC ⊥ SA (do SA ⊥ (ABCD)) nên BC ⊥ (SAB). Suy ra BC ⊥ BM

Suy ra BCNM là hình chữ nhật.

Vẽ CK ⊥ AD tại K thì ABCK là hình vuông, suy ra CK = a.

Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{6}SA.AB.BC = \frac{a^3}{3}$

$V_{S.ACD} = \frac{1}{3}SA.S_{ACD} = \frac{1}{6}SA.AD.CK = \frac{2a^3}{3}$

Theo định lý tỷ lệ thể tích: $\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}; \frac{V_{S.MCN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{4}$

Do đó thể tích khối chóp: $V_{S.BCNM} = V_{S.MBC} + V_{S.MCN} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} + \frac{1}{4}V_{S.ACD} = \frac{a^3}{3}$

Kẻ $ME \perp SC (E \in SC)$

Vì BCNM là hình chữ nhật nên BM // NC

$\Rightarrow BM // mp(SCD) \Rightarrow d(BM,CD) = d(BM,(SCD)) = d(M,(SCD))$

Vì SA vuông góc với đáy nên $SA \perp CD$

Mặt khác $AC \perp CD$ (do tam giác ACD vuông cân ở C) nên CD ⊥ (SAC)

Vì $\begin{cases} ME \perp CD \\ ME \perp SC \end{cases} \Rightarrow ME \perp mp(SCD)$

$\Rightarrow d(M, mp(SCD)) = ME$

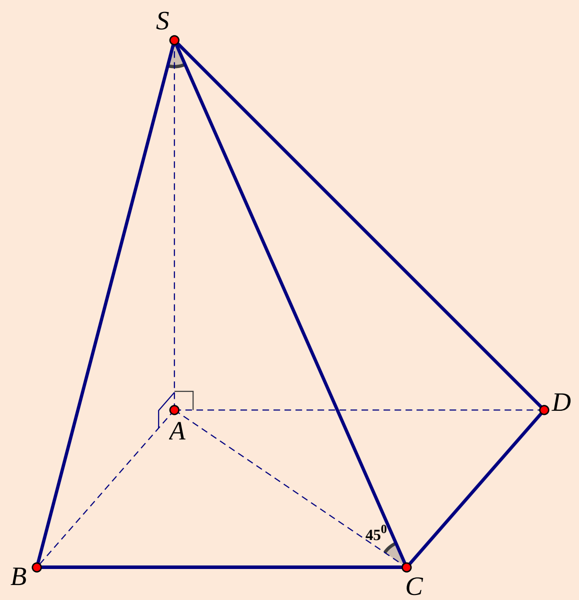
Có $\Delta SME \backsim \Delta SCA \ (g.g) \Rightarrow \frac{ME}{AC} = \frac{SM}{SC} \Rightarrow ME = \frac{AC.SM}{SC} = \frac{\sqrt{2}a.a}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{\sqrt{2}a^2}{\sqrt{4a^2 + 2a^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow d(BM, CD) = \frac{a}{\sqrt{3}}$

BÀI 23 (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 45^0 và tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30^0. Biết độ dài cạnh AB = $\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD.

Lời giải.



Vì SA ⊥ (ABCD) , C ∈ (ABCD) nên góc giữa SA và đáy là $(SC; AC) = \widehat{SCA} = 45°$ (do góc SCA nhọn)

Ta có SA ⊥ BC, BA ⊥ BC (do ABCD là hình chữ nhật) ⇒ BC ⊥ (SAB)

Mà S ∈ (SAB) nên góc giữa SC và (SAB) là $(SC; SB) = \widehat{BSC} = 30°$ (do góc BSC nhọn)

Tam giác SAC vuông cân ở A, đặt

$AC = SA = x \Rightarrow SC = x\sqrt{2}$

Tam giác SBC vuông ở B:

$BC = SC.\sin 30^\circ = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$

Tam giác ABC vuông ở B:

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$

$\Rightarrow SA = \sqrt{6}; BC = \sqrt{3}$

Thể tích khối chóp:

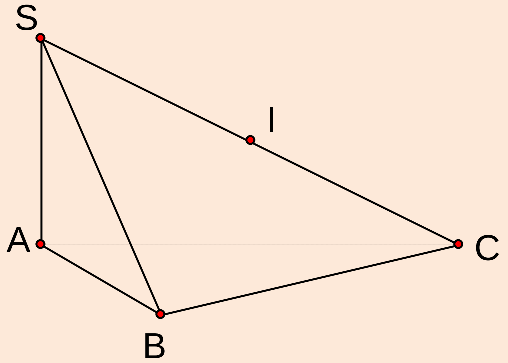
$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} SA.AB.BC = \sqrt{6}$ (đvtt)

BÀI 24 (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC (LẦN 1)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD = \dfrac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD.

Lời giải.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), ABC = 90^0, AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA = 2a$. Chứng minh trung điểm I của cạnh SC là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và tính diện tích mặt cầu đó theo a.



Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Mặt khác theo giả thiết $AB \perp BC$, nên $BC \perp (SAB)$ và do đó $BC \perp SB$

Ta có tam giác SBC vuông đỉnh B; tam giác SAB vuông đỉnh A nên

$IA = IB = \dfrac{SC}{2} = IS = IC$ (*)

Vậy điểm I cách đều bốn đỉnh của hình chóp, do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.ABC$

Từ (*) ta có bán kính của mặt cầu là $R = \frac{SC}{2}$

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}a \Rightarrow R = a\sqrt{2}$

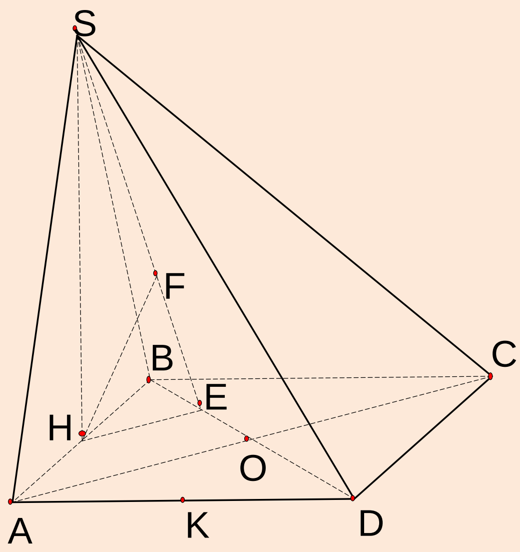
Diện tích mặt cầu là $4\pi R^2 = 8\pi a^2$

BÀI 25 (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC (LẦN 1)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD = \frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD.

Lời giải.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD = \frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD.



Từ giả thiết ta có SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$ và $SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{SD^2 - (AH^2 + AD^2)} = \sqrt{(\frac{3a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2 - a^2} = a$

Diện tích của hình vuông $ABCD$ là a^2, $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a.a^2 = \frac{a^3}{3}$

Từ giả thiết ta có $HK // BD \Rightarrow HK // (SBD)$

Do vậy: $d(HK, SD) = d(H, (SBD))$ (1)

Gọi E là hình chiếu vuông góc của H lên BD, F là hình chiếu vuông góc của H lên SE

Ta có $BD \perp SH, BD \perp HE \Rightarrow BD \perp (SHE) \Rightarrow BD \perp HF$ mà $HF \perp SE$ nên suy ra $HF \perp (SBD) \Rightarrow HF = d(H, (SBD))$ (2)

+) $HE = HB.\sin HBE = \frac{a}{2}.\sin 45^0 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

+) Xét tam giác vuông SHE có:

$$HF.SE = SH.HE \Rightarrow HF = \frac{SH.HE}{SE} = \frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{(\frac{a\sqrt{2}}{4})^2 + a^2}} = \frac{a}{3} \quad (3)$$

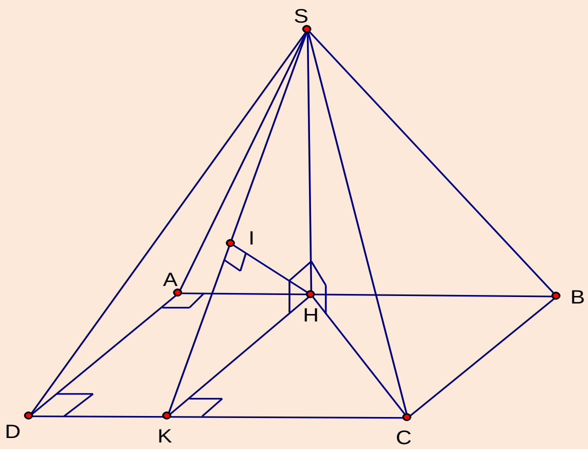
+) Từ (1), (2), (3) ta có $d(HK, SD) = \frac{a}{3}$.

BÀI 26 (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC (LẦN 2)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 4. Mặt bên (SAB) nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là điểm H thuộc đoạn AB sao cho $BH = 2AH$. Góc giữa SC và mặt phẳng đáy là 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.

Ta có: $HB = \frac{8}{3} \Rightarrow HC = \sqrt{4^2 + \frac{64}{9}} = \frac{4\sqrt{13}}{3} \Rightarrow SH = \frac{4\sqrt{13}}{3}.\tan 60^0 = \frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$



$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}4^2.\frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \frac{64\sqrt{13}}{3\sqrt{3}}$

Kẻ HK song song AD $(K \in CD) \Rightarrow DC \perp (SHK) \Rightarrow mp(SCD) \perp mp(SHK)$

Kẻ HI vuông góc với SK $\Rightarrow HI \perp mp(SCD) \Rightarrow d(H,(SCD)) = HI$

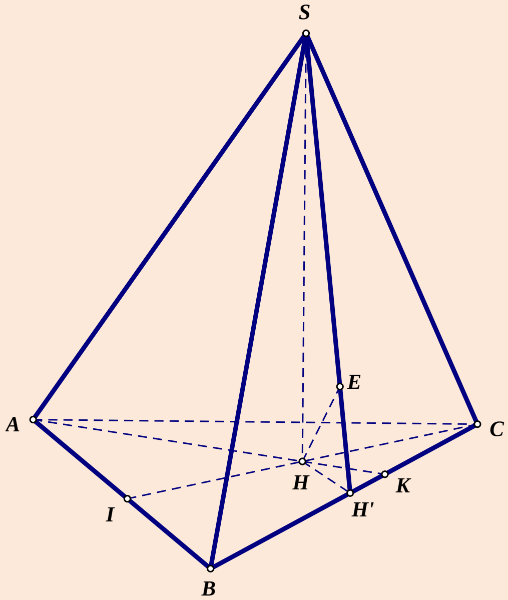
Trong ΔSHK ta có: $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{3}{4^2.13} + \frac{1}{4^2} = \frac{16}{13.4^2} \Rightarrow HI = \sqrt{13}$

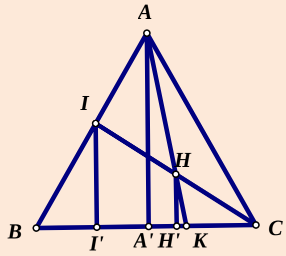
$\Rightarrow d(H,(SCD)) = \sqrt{13}$.

BÀI 27 (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC (LẦN 3)).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a Gọi I là trung điểm cạnh AB .Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của CI, góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải.





Ta có $CI = \sqrt{AC^2 - AI^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó $AH = \sqrt{AI^2 + IH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$, suy ra $SH = AH.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{21}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{7}}{16}$

Gọi A', H', I' lần lượt là hình chiếu của A, H, I trên BC; E là hình chiếu của H trên SH'

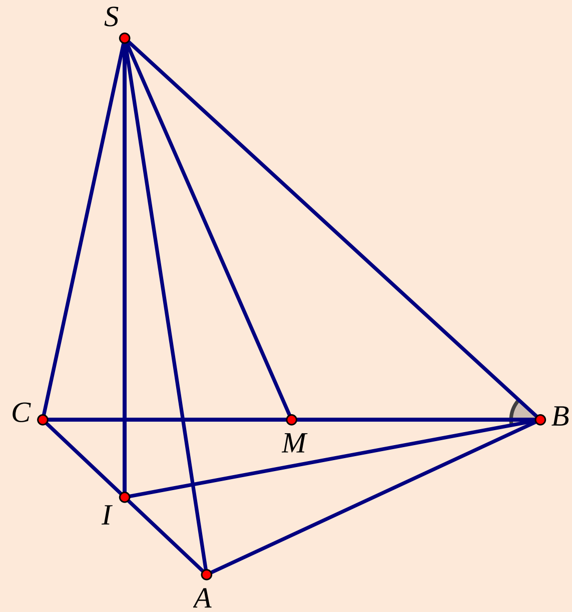
thì $HE \perp (SBC) \Rightarrow d\left(H;(SBC)\right) = HE$. Ta có $HH' = \frac{1}{2}II' = \frac{1}{4}AA' = \frac{a\sqrt{3}}{8}$

Từ $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HH'^2}$, suy ra $HE = \frac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}$. Vậy $d\left(H;(SBC)\right) = \frac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}$.

BÀI 28 (THPT CHUYÊN HẠ LONG (LẦN 2)).

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên SAC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC), đường thẳng SB tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. M là trung điểm cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM, AC.

Lời giải.



▪ Gọi I là trung điểm của AC. Vì tam giác SAC cân tại S nên SI $\perp$ AC, (SAC) nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên SI là đường cao của hình chóp.

Ta có BI là hình chiếu của SB nên (ABC), do đó góc giữa SB và (ABC) bằng góc giữa SB và BI và bằng $SBI = 60^0$.

Xét tam giác vuông SIB vuông tại I, ta có: SI $= BI.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SI.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{3a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ (đvtt).

▪

$V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}, d\left(AM, SC\right) = \frac{3a\sqrt{13}}{26}$

BÀI 29 (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – GIA LAI (LẦN 1)).

Cho hình chop S.ABC, có đáy là tam giác vuông cân tại A. AB=AC=a, trên cạnh BC lấy điểm H sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. SH vuông góc với mặt phẳng (ABC). Góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chop S.ABC và khoảng cách giữa AB và SC.

Lời giải.

$V = \frac{a^3\sqrt{30}}{24}; d\left(AB; SC\right) = \frac{a\sqrt{130}}{13}$

BÀI 30 (THPT CHUYÊN LÀO CAI (LẦN 2)).

Cho khối chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có các cạnh $AB = 2a$; $AD = a$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a}{2}$, cạnh AC cắt MD tại H . Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a$. Tính thể tích khối chóp S.HCD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC theo a.

Lời giải.

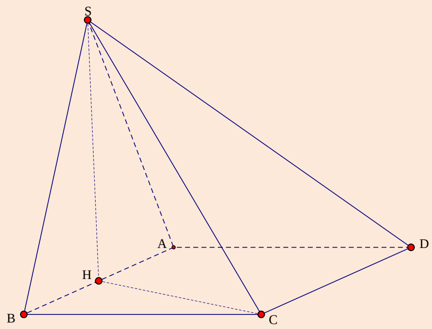
$$V_{SHCD} = \frac{4a^3}{15}; d\left(SD; AC\right) = \frac{2a}{3}$$

BÀI 31 (THPT CHUYÊN LONG AN – LONG AN).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = 2a, BC = a . Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AB; Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và góc giữa hai đường thẳng SB và AC.

Lời giải.

Lí luận góc giữa SC và (ABCD) là góc . Tính được:



Tính được:

,

BÀI 32 (THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH – YÊN BÁI).

Cho hình chóp S.ABC có AB = AC = a, $ABC = 30^0$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 60^0 . Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ABC đến mặt phẳng (SBC) theo a.

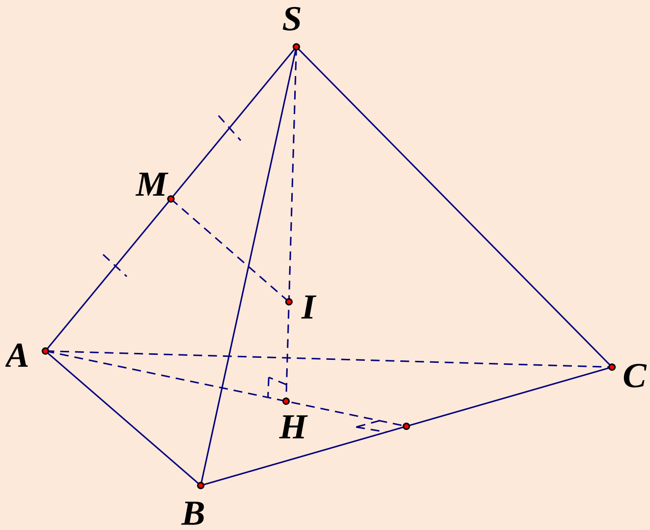
Lời giải.

$$V = \frac{a^3}{8}, d\left(G, \left(SBC\right)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{12}$$

BÀI 32 (THPT ĐA PHÚC – HÀ NỘI (LẦN 1)).

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a.

Lời giải.



+) Từ giả thiết suy ra tam giác ABC đều cạnh a và SH⊥(ABC) với H là tâm của tam giác đều ABC => AH = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và SH là đường cao của hình chóp S.ABC

Từ giả thiết => SA = $a\sqrt{3}$ => trong tam giác vuông SAH vuông tại H có

$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$.

+) Diện tích tam giác ABC bằng: $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

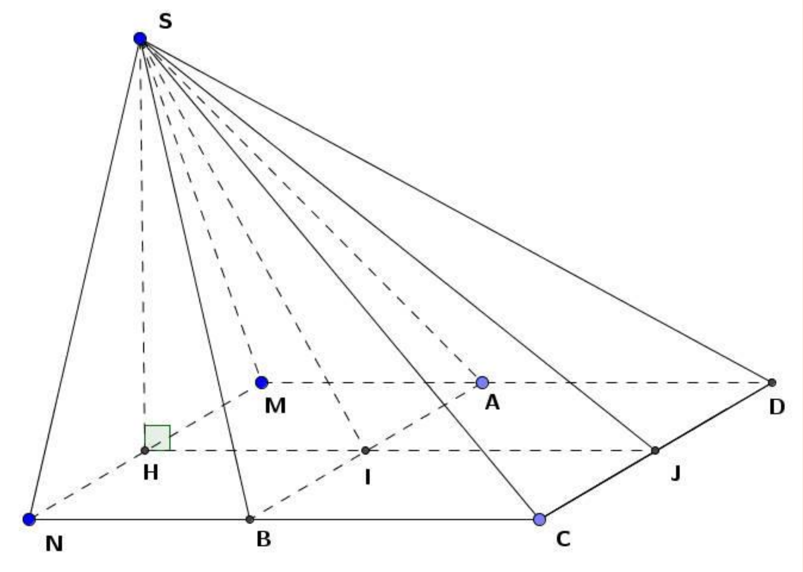
+) SH là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, trong mặt phẳng (SAH) kẻ đường trung trực của cạnh SA cắt SH tại I => I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC có bán kính R = IS. Hai tam giác vuông SMI và SHA đồng dạng => $SI = \frac{SM.SA}{SH} = \frac{3\sqrt{6}}{8}a$

+) Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = \frac{27}{8}\pi a^2$.

BÀI 33 (THPT ĐA PHÚC – HÀ NỘI (LẦN 2)).

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a,* mặt bên *SAB* là tam giác đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* và cosin của góc giữa hai mặt phẳng *(SAD)* và *(SBC).*

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của AB; J là trung điểm của CD từ giả thiết ta có $IJ = a$; $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

và $SJ = \sqrt{SC^2 - JC^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác SIJ ta có

$$\cos\left(SIJ\right) = \frac{IJ^2 + IS^2 - SJ^2}{2.IJ.IS} = \frac{a^2 + \frac{3a^2}{4} - \frac{11a^2}{4}}{2.a.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = -\frac{a^2}{a^2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0$$

Suy ra, tam giác SIJ là tam giác có SIJ tù.

Từ giả thiết tam giác SAB đều và tam giác SCD là cân đỉnh S. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABCD), ta có H thuộc IJ và I nằm giữa HJ tức là tam giác vuông SHI có $H = 90^0$; góc I nhọn và $\cos\hat{I} = \cos SIH = -\cos SIJ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (SIJ và SIH kề bù) $\Rightarrow$ $\sin SIH = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác SHI ta có $SH = SI\sin SIH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Từ giả thiết giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) là đường thẳng d qua S và song song với AD. Qua H kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt DA và CB kéo dài tại M, N. Theo định lý ba đường vuông góc ta có

$SN \perp BC, SM \perp AD \Rightarrow SM \perp d; SN \perp d \Rightarrow MSN$ là góc giữa hai mặt phẳng. (SBC) và (SAD), $MN = AB = a$.

Xét tam giác HSM vuông tại H có

$$SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}, HM = \frac{a}{2} \Rightarrow SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SN$$

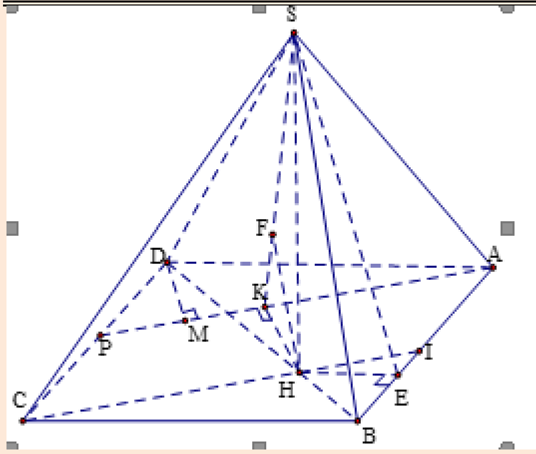
Theo định lý cosin cho tam giác SMN cân tại S có

$$\cos MSN = \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM.SN} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - a^2}{2\frac{3a^2}{4}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{1}{3}.$$

BÀI 34 (THPT BÌNH PHƯỚC – BÌNH PHƯỚC (LẦN 1)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi I là trung điểm AB, H là giao điểm của BD với IC. Các mặt phẳng (SBD) và (SIC) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SAB) và ($ABCD$) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và IC.

Lời giải.



Ta có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}$, trong đó $S_{ABCD}=a^2$

Do (SIC),(SBD) cùng vuông với đáy suy ra $SH\perp(ABCD)$

Dựng $HE\perp AB\Rightarrow(SHE)\perp AB$, suy ra SEH là góc giữa (SAB) và (ABCD) $\Rightarrow SEH=60^0$

Ta có $SH=HE.\tan 60^0=\sqrt{3}HE$

$\frac{HE}{CB}=\frac{HI}{IC}=\frac{1}{3}\Rightarrow HE=\frac{a}{3}$

$\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.a^2=\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$

Gọi P là trung điểm của CD, suy ra AP song song vớiCI

$\Rightarrow d(SA,CI)=d(CI,(SAP))=d(H,(SAP))$

Dựng $HK\perp AP$, suy ra $(SHK)\perp(SAP)$

Dựng $HF\perp SK\Rightarrow HF\perp(SPA)\Rightarrow d(H,(SPA))=HF$

Do ΔSHK vuông tại H$\Rightarrow\frac{1}{HF^2}=\frac{1}{HK^2}+\frac{1}{HS^2}$ (1)

Dựng $DM\perp AP$, ta thấy $DM=HK$ $\Rightarrow\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{DM^2}=\frac{1}{DP^2}+\frac{1}{DA^2}$

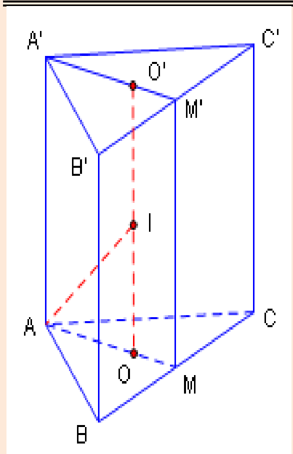
Thay vào (1) ta có $\Rightarrow\frac{1}{HF^2}=\frac{1}{DP^2}+\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{HS^2}=\frac{4}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a^2}=\frac{8}{a^2}\Rightarrow HF=\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Vậy $d(SA,CI)=\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

BÀI 35 (THPT BÌNH PHƯỚC – BÌNH PHƯỚC (LẦN 1)).

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cà các cạnh đều bằng a .Tính thể tích của hình lăng trụ và diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ theo a.

Lời giải.



Thể tích lăng trụ là:

$$V = AA'.S_{ABC} = a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

Gọi O , O′ lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC , $\Delta A'B'C'$ khi đó tâm của mặt cầu (S) ngoại tiếp hình lăng trụ đều ABC.A′B′C′ là trung điểm I của OO′. Mặt cầu này có bán kính là:

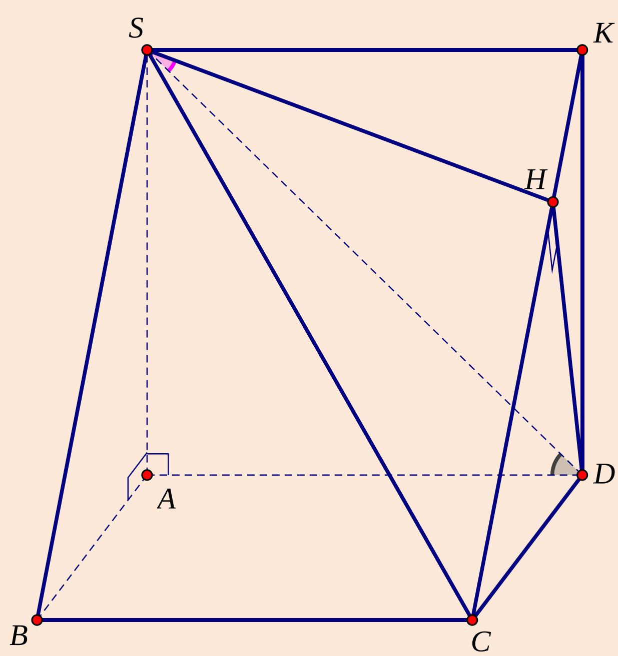
$$R = IA = \sqrt{AO^2 + OI^2} = \sqrt{(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

suy ra diện tích mặt cầu (S) là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi(\frac{a\sqrt{21}}{6})^2 = \frac{7\pi a^2}{3}$

BÀI 36 (THPT BÌNH PHƯỚC – BÌNH PHƯỚC (LẦN 2)).

Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt đáy (ABCD), đáy ABCD là hình chữ nhật có AD = 3a, AC = 5a, góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC).

Lời giải.



- Tính thể tích

+) Ta có: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 4a$

+) Mà $\left((SCD),(ABCD)\right) = SDA = 45^0$

nên SA = AD = 3a

Do đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = 12a^3$ (đvtt)

- Tính góc…

+) Dựng điểm K sao cho $\overrightarrow{SK} = \overrightarrow{AD}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của

D lên CK, khi đó: $DK \perp (SBC)$. Do đó: $\left(SD,(SBC)\right) = DSH$

+) Mặt khác $DH = \dfrac{DC.DK}{KC} = \dfrac{12a}{5}$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 3a\sqrt{2}$

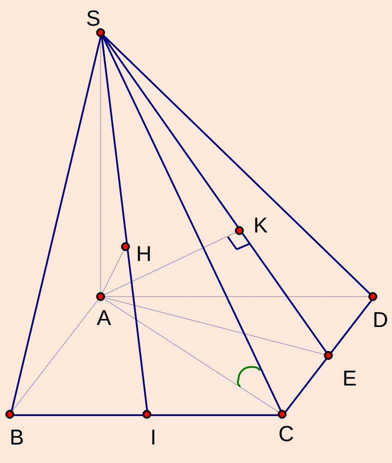
$$SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \frac{3a\sqrt{34}}{5}$$

Do đó: $\left(SD,(SBC)\right) = DSH = \arccos\dfrac{SH}{SD} = \arccos\dfrac{\sqrt{17}}{5} \approx 34^0 27'$

BÀI 37 (THPT BÌNH PHƯỚC – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\angle ABC = 60^0$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc 60^0. Gọi I là trung điểm BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên SI. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm H đế mặt phẳng (SCD) theo a.

Lời giải.



Do $\angle ABC = 60^0$ nên tam giác ABC đều, suy ra $S_{ABCD} = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $AC = a$

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \angle SCA = 60^0$

$\Rightarrow SA = AC.\tan 60^0 = a\sqrt{3} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{2}$.

Ta có $\dfrac{HS}{IS} = \dfrac{HS.IS}{IS^2} = \dfrac{AS^2}{IS^2} = \dfrac{AS^2}{IA^2 + AS^2} = \dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow d\left(H,(SCD)\right)=\frac{4}{5}d\left(I,(SCD)\right)=\frac{2}{5}d\left(B,(SCD)\right)=\frac{2}{5}d\left(A,(SCD)\right)$ (vì I là trung điểm BC và AB//(SBC))

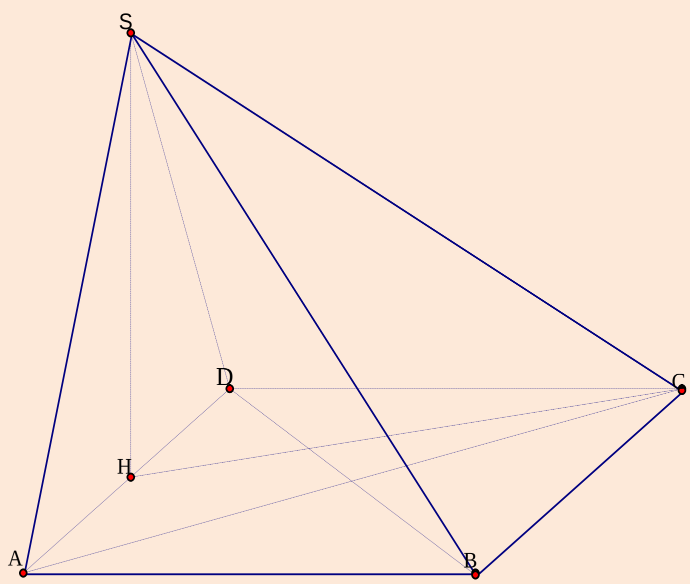
Gọi E là trung điểm CD, K là hình chiếu của A lên SE, ta có
$AE\perp DC\Rightarrow DC\perp(SAE)\Rightarrow DC\perp(SAE)\Rightarrow AH\perp(SCD)$

Suy ra $d\left(H,(SCD)\right)=\frac{2}{5}d\left(A,(SCD)\right)=\frac{2}{5}AK=\frac{2}{5}\frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\frac{2a\sqrt{15}}{25}$.

BÀI 38 (THPT BÌNH PHƯỚC – BÌNH PHƯỚC (LẦN 4)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD, SB theo a.

Lời giải.



Gọi H là chân đường cao hạ từ S của tam giác đều SAD

Suy ra:

$$SH=\frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } SH\perp(ABCD)$$

Trong tam giác vuông HSC có $HC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\cos HDC=\frac{DH^2+DC^2-CH^2}{2DH.DC}=\frac{\frac{a^2}{4}+a^2-\frac{3a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}.a}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow HDC=60^0$

Suy ra $S_{ABCD}=DA.DC.\sin ADC=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}a^3$$

Ta có ΔADC đều cạnh a $\Rightarrow CH \perp AD \Rightarrow CH \perp BC$

hay $BC \perp (SHC) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow \Delta CSB$ vuông tại C

Lại có $V_{D.SBC} = V_{S.BCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}.\frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}d\left(D;(SBC)\right).S_{\Delta SBC} = \frac{a^3}{8} \Leftrightarrow d\left(D;(SBC)\right) = \frac{3a^3}{8.S_{\Delta SBC}}$

$\Rightarrow d\left(D;(SBC)\right) = \frac{3a^3}{8.\frac{1}{2}CS.CB} = \frac{3a^3}{4.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$

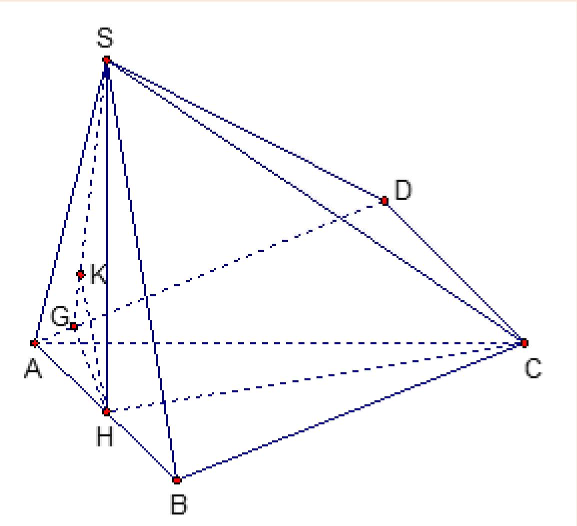
Vậy $d\left(AD;SB\right) = d\left(D;(SBC)\right) = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$

BÀI 39 (THPT BÌNH PHƯỚC – BÌNH PHƯỚC (LẦN 5)).

Cho hình chóp S.ABC có tam giác SAB đều cạnh a, tam giác ABC cân tại C. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB; góc hợp bởi cạnh SC và mặt đáy là 30^0.

1. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.
2. Tính khoảng cách của hai đường thẳng SA và BC.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm cạnh AB ta có SH là đường cao của hình chóp S.ABC và CH là đường cao tam giác ABC. Từ giả thiết ta được $SCH = 30^0$. Tam giác SHC vuông tại H nên $\frac{SH}{CH} = \tan 30^0 \Rightarrow CH = SH\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$

Vậy, thể tích khối chóp S.ABC là:

$V = \frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}AB.CH = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ (đvtt)

Dựng hình bình hành ABCD, khi đó

$d\left(BC,SA\right) = d\left(BC,(SAD)\right) = d\left(B,(SAD)\right) = 2d\left(H,(SAD)\right)$

Gọi G, K lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng AD và SG ta có:

$$\left.\begin{matrix} AD \perp HG \\ AD \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \perp (SHG) \Rightarrow HK \perp AD$$

mà $HK \perp SG$ nên $HK \perp (SAD)$ hay $d\left(H,(SAD)\right) = HK$

Tam giác SHG vuông tại H nên

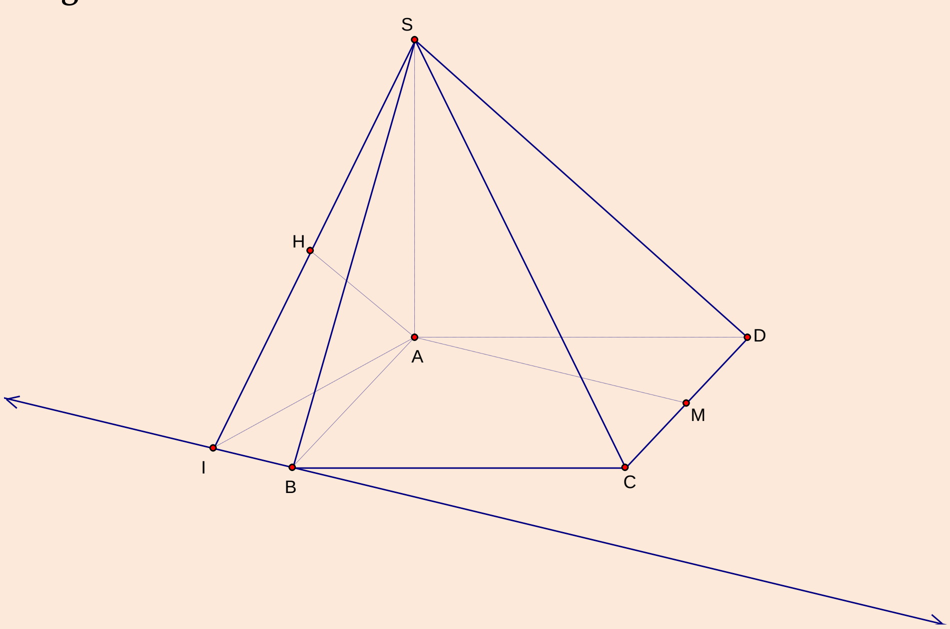
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HG^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{52}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$$

Vậy, $d\left(BC, SA\right) = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$

BÀI 40 (THPT HÙNG VƯƠNG – BÌNH PHƯỚC (LẦN 1)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng $ABCD$, SD hợp với mặt phẳng $ABCD$ góc bằng 45^0. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM.

Lời giải.



$S_{ABCD} = a^2$; $SA = a$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}a^3$

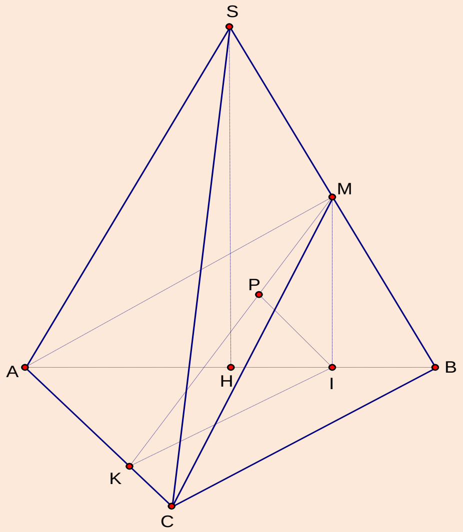
Qua B dựng đường thẳng d song song với AM; Dựng I, H, Chứng minh được $AH \perp (SBI)$

$d\left(AM, SB\right) = \dfrac{2}{3}a$

BÀI 41 (THPT HÙNG VƯƠNG – BÌNH PHƯỚC (LẦN 2)).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng ABC là trung điểm H của cạnh AB, biết rằng $SH = 2a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng MAC, trong đó M là trung điểm của cạnh SB.

Lời giải.



$S_{ABC} = \frac{1}{2}CA.CB = \frac{1}{2}a^2$

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a^2.2a = \frac{a^3}{3}$

Dựng được IP, chứng minh được $IP \perp (MAC)$

Tính đúng $d\left(B,(MAC)\right) = \frac{4}{5}a$

BÀI 42 (THPT ĐỒNG XOÀI (LẦN 1)).

Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác vuông cân tại *B*, *BA* = *a*. Tam giác *SAC* đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mp*(ABC)*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *SA, BC*. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *AC, MN* theo *a*.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AC, do ΔSAC đều nên $SI \perp (ABC)$. $\mathrm{SI} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Ta có $S_{ABC} = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SI.S_{ABC} = a^3\frac{\sqrt{6}}{12}$

Gọi H là trung điểm AI suy ra MH//SI $\Rightarrow MH \perp (ABC)$, J là trung điểm AB, K là hình chiếu vuông góc của H lên MJ tức là $HK \perp MJ$ (1).

Ta có

$JN \perp BI$, mà $BI//HJ \Rightarrow JN \perp HJ\ (2)$

$SI//MH$, mà $SI \perp JN \Rightarrow JN \perp MH\ (3)$

Từ $\begin{matrix} (2),(3) \Rightarrow JN \perp (MHJ) \supset HK \Rightarrow HK \perp JN\,(4) \\ (1),(4) \Rightarrow HK \perp (MNJ) \end{matrix}$

Do đó $d(AC,MN) = d(H \in AC, MN) = d(H,(MJN)) = HK$

$= \dfrac{MH.HJ}{\sqrt{MH^2 + HJ^2}} = = \dfrac{a\sqrt{96}}{32}$

BÀI 43 (THPT ĐỒNG XOÀI (LẦN 2)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh 2a, mặt bên (SAB) nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABCD), tam giác SAB vuông tại S, SA = a Hãy tính thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, SC theo a.

Lời giải.

+ Trong mp(SAB), dựng SH $\perp$ AB, do (SAB) $\perp$ (ABCD) $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SH$ là chiều cao khối chóp

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}B.h$

+ B= dt ABCD= 4a^2

+ h = SH

$SB = \sqrt{AB^2 - SA^2} = a\sqrt{3}$

$h = SH = \dfrac{SB.SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = 2a^3\sqrt{3}$

Tính d(AB,SC)

Vì AB// DC nên d (AB, SC) = d(AB, (SDC) = d (A, (SDC)

$= \dfrac{3V_{A.SDC}}{dtSDC} = \dfrac{3.\frac{1}{2}.V_{S.ABCD}}{dtSDC}$

Tính dt SDC=?

Tam giác SAD vuông tại A nên $SD = a\sqrt{5}$

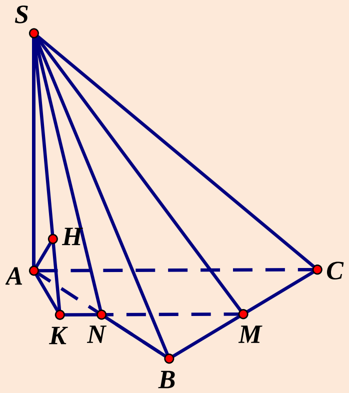
Tam giác SBC vuông tại B nên $SC = a\sqrt{7}$, DC= 2a

$\Rightarrow S_{\Delta SDC} = \dfrac{\sqrt{19}}{2}a^2$ nên $d(A,(SDC)) = \dfrac{6a\sqrt{57}}{19}$

BÀI 44 (THPT ĐỒNG XOÀI (LẦN 3)).

Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác đều cạnh *a*, *SA* vuông góc với đáy và *SB* tạo với đáy một góc 60^0. *M* là trung điểm *BC*. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *SM*, *AC* theo *a*.

Lời giải.



+ Do ABC là tam giác đều cạnh a nên $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Do $SA\perp(ABC)$ nên góc giữa SB với đáy là $SBA=60^0$

$SA=AB\tan SBA=a\tan 60^0=a\sqrt{3}$

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}a\sqrt{3}=\frac{a^3}{4}$

+ Gọi N là trung điểm AB, ta được AC // (SMN)

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của A lên MN và SK, ta có: $AH\perp SK; MK\perp(SAK)\Rightarrow MK\perp AH$ nên $AH\perp(SMN)\Rightarrow AH=d\left(A;(SMN)\right)=d\left(AC,SM\right)$

$KNA=NAC=60^0$

$AK=AN\sin KNA=\frac{a}{2}\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AK^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{16}{3a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{17}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{51}}{17}$. Vậy $d\left(AC,SM\right)=\frac{a\sqrt{51}}{17}$

BÀI 45 (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG – BÌNH PHƯỚC (LẦN 1)).

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. M, N lần lượt là trung điểm cạnh SD và DC. Tính theo a thể tích khối chóp M.ABC và khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (MAB).

Lời giải.

$V_{M.ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}\left(dvtt\right)$

$d\left(N,(MAB)\right)=2d\left(O,(MAB)\right)=\frac{a}{2}$

BÀI 46 (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG – BÌNH PHƯỚC (LẦN 2)).

Cho hình chóp $S.ABCD, SA$ ^ $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại C và D, $AD=CD=2BC=a$, góc giữa SA và (SCD) bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB theo a.

Lời giải.

Kiểm tra cách xác định góc giữa đường thẳng và mp, giữa 2 mặt phẳng.

$$\boxed{\left((SBC),(SCD)\right)=60^0,\ \cos\left((SBC),(SCD)\right)=\frac{1}{2}}$$

BÀI 46 (THPT NGUYỄN HỮU CẢNH – BÌNH PHƯỚC (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa cạnh bên SC và đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SA.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB-Lập luận $SH\perp(ABC)$ -Tính được $SH=a\sqrt{15}$

Tính được $V_{S.ABC}=\dfrac{4a^3\sqrt{15}}{3}$

Qua A vẽ đường thẳng $\Delta//BD$, gọi E là hình chiếu của H lên Δ, K là hình chiếu H lên SE

Chứng minh được:d(BD,SA)=d(BD,(S, Δ))=2d(H, (S, Δ))=2HK

Tam giác EAH vuông cân tại E, $HE=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

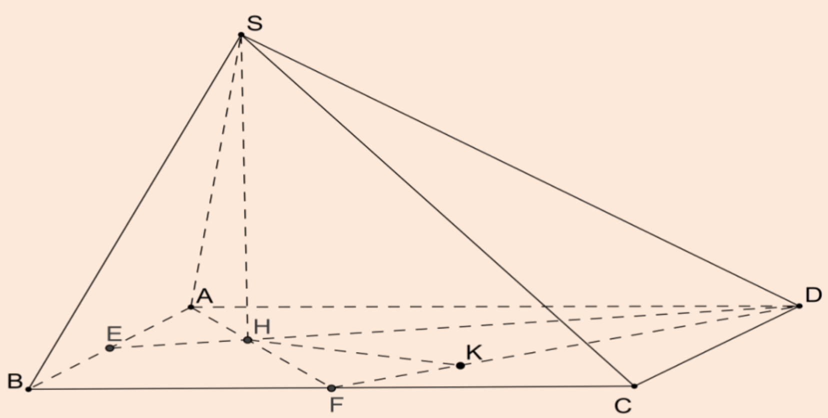
$$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HE^2}=\frac{31}{15a^2}\Rightarrow HK=\sqrt{\frac{15}{31}}a$$

$$\Rightarrow d(BD,SA)=2\sqrt{\frac{15}{31}}a$$

BÀI 47 (THPT NGUYỄN HỮU CẢNH – BÌNH PHƯỚC (LẦN 2)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. E,F lần lượt là trung điểm của AB và BC, H là giao điểm của AF và DE. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SH, DF.

Lời giải.



Do $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên $S_{ABCD}=4a^2$.

$SH\perp(ABCD)\Rightarrow HA$ là hình chiếu vuông góc của SA trên mp$(ABCD)$

$\Rightarrow SAH=60^0\Rightarrow SH=AH\sqrt{3}$

$\Delta ABF=\Delta DAE\left(c.g.c\right)\Rightarrow BAF=ADE$

Mà: $AED + ADE = 90^0$ Nên $BAF + AED = 90^0 \Rightarrow AHE = 90^0 \Rightarrow DE \perp AF$

Trong ΔADE có: $AH.DE = AD.AE \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.4a^2 = \dfrac{8a^3\sqrt{15}}{15}$ (đvtt)

Trong mp $(ABCD)$ kẻ $HK \perp DF$ tại K. $\Rightarrow d(SH, DF) = HK$.

Trong ΔADE có: $DH.DE = DA^2 \Rightarrow DH = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$ Có : $DF = a\sqrt{5}$

Trong ΔDHF có: $HF^2 = DF^2 - DH^2 = 5a^2 - \dfrac{16a^2}{5} = \dfrac{9a^2}{5} \Rightarrow HF = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow HK = \dfrac{HF.HD}{DF} = \dfrac{12a\sqrt{5}}{25}$ Vậy $d(SH, DF) = \dfrac{12a\sqrt{5}}{25}$

BÀI 48 (THPT NGUYỄN HỮU CẢNH – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $ASC = 90^0$ và hình chiếu của S lên $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC sao cho $AH = \dfrac{AC}{4}$. Tính theo a thể tích của khối chóp và khoảng cách giữa đường thẳng CD với mặt phẳng (SAB).

Lời giải.

$AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $CH = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$

ΔSAC vuông tại S: $SH^2 = AH.CH = \dfrac{3a^2}{8}$, $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$

$CD \,//\, (SAB) \Rightarrow d(CD;(SAB)) = d(C;(SAB)) = 4d(H;(SAB))$

Trong $(ABCD)$, kẻ $HK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow (SAB) \perp (SHK)$

Trong (SHK), kẻ $HI \perp SK \Rightarrow HI \perp (SAB)$

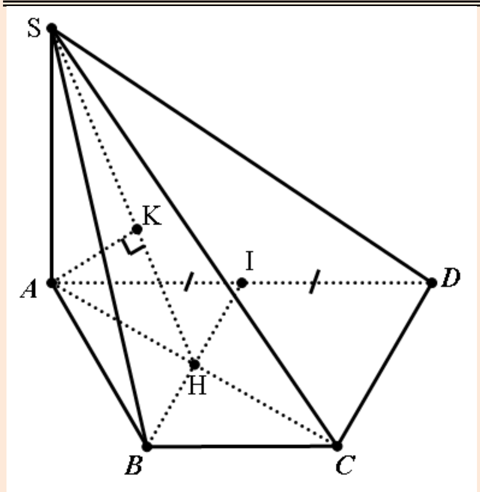
$HK = \dfrac{a}{4}$, $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{8}{3a^2} = \dfrac{56}{3a^2} \Rightarrow HI^2 = \dfrac{3a^2}{56}$

$d(CD;(SAB)) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$

BÀI 49 (THPT HÀ HUY TẬP – KHÁNH HÒA (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn AD ; các đường thẳng SA, AC và CD đôi một vuông góc với nhau; biết $SA = AC = CD = a\sqrt{2}$ và $AD = 2BC$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm AD.

ΔACD vuông cân tại C $\Rightarrow CI \perp AD; CI = AI$

Tứ giác ABCI là hình bình hành $\left(AI//BC; AI = BC = \frac{1}{2}AD\right)$

$\Rightarrow$ tứ giác ABCI là hình vuông.

$\Rightarrow AB = a; AD = 2BC = 2a$ và tứ giác ABCD là hình thang vuông tại A và B.

$S_{ABCD} = \frac{(AD+BC).AB}{2} = \frac{3a^2}{2}$. Chứng minh: $SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Chứng tỏ: $d(SB,CD) = d(CD,(SBI)) = d(C,(SBI)) = d(A,(SBI))$

Gọi H là giao điểm của BI và AC ; kẻ $AK \perp SH (K \in SH)$

Chứng tỏ $d(A,(SBI)) = AK$

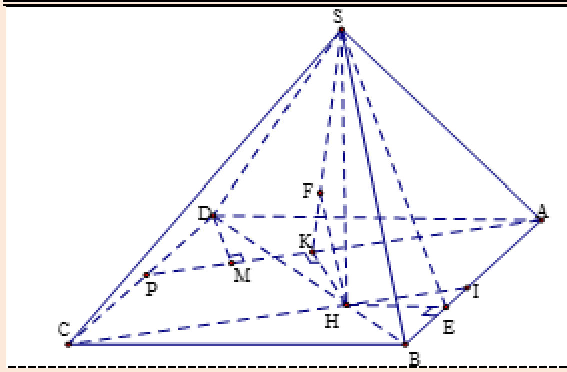
Tính $AK = \frac{a\sqrt{10}}{5}$

Vậy $d(SB,CD) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$

BÀI 50 (THPT HÀ HUY TẬP – KHÁNH HÒA (LẦN 2)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi I là trung điểm AB, H là giao điểm của BD với IC. Các mặt phẳng (SBD) và (SIC) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SAB) và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và IC.

Lời giải.



Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD}$, $S_{ABCD} = a^2$

Do (SIC),(SBD) cùng vuông với đáy suy ra $SH \perp (ABCD)$

Dựng $HE \perp AB \Rightarrow (SHE) \perp AB$, suy ra SEH là góc giữa (SAB) và (ABCD) $\Rightarrow SEH = 60^0$

Ta có $SH = HE.\tan 60^0 = \sqrt{3}HE$

$\frac{HE}{CB} = \frac{HI}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow HE = \frac{a}{3} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.a^2 = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$

Gọi P là trung điểm của CD, suy ra AP song song vớiCI

$\Rightarrow d(SA, CI) = d(CI, (SAP)) = d(H, (SAP))$

Dựng $HK \perp AP$, suy ra $(SHK) \perp (SAP)$

Dựng $HF \perp SK \Rightarrow HF \perp (SPA) \Rightarrow d(H, (SPA)) = HF$

Do ΔSHK vuông tại H $\Rightarrow \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2}$ (1)

Dựng $DM \perp AP$, ta thấy $DM = HK$ $\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{DM^2} = \frac{1}{DP^2} + \frac{1}{DA^2}$

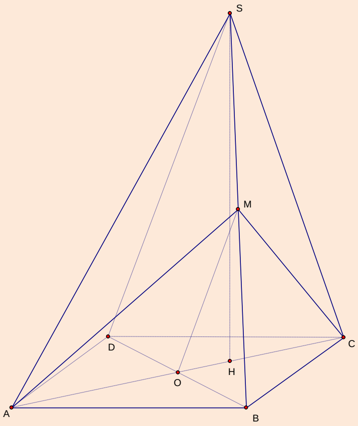
Thay vào (1) ta có $\Rightarrow \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{DP^2} + \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^2} = \frac{8}{a^2} \Rightarrow HF = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Vậy $d(SA, CI) = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

BÀI 51 (THPT ANH SƠN II – NGHỆ AN (LẦN 1)).

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2\sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của điểm *S* trên mp(*ABCD*) trùng với trọng tâm tam giác *BCD*. Đường thẳng *SA* tạo với mp(*ABCD*) một góc 45^0. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *AC* và *SD* theo a.

Lời giải.



*Gọi H là trọng tâm tam giác BCD. Theo giả thiết ta có $SH \perp (ABCD)$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có $CH = \frac{2}{3}CO = \frac{1}{3}AC = a \Rightarrow AH = AC - HC = 2a$. Cạnh SA tạo với đáy góc 45^0, suy ra $\widehat{SAH} = 45^0$, SH = AH =2a. Diện tích đáy $S_{ABCD} = AB.AD = a.2\sqrt{2}a = 2\sqrt{2}a^2$.

Vậy thể tích khối chóp S.ABCD là $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.2\sqrt{2}a^2.2a = \frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

*Gọi M là trung điểm SB thì mp(ACM) chứa AC và song song với SD.

Do đó d(SD ;AC)= d(SD ; (ACM))= d(D ; (ACM)).

Chọn hệ tọa độ Oxyz, với A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; $2\sqrt{2}a$; 0),

$C(a;2\sqrt{2}a;0), S(\frac{2a}{3};\frac{4\sqrt{2}a}{3};2a), M(\frac{5a}{6};\frac{2\sqrt{2}a}{3};a)$. Từ đó viết phương trình mp(ACM) là

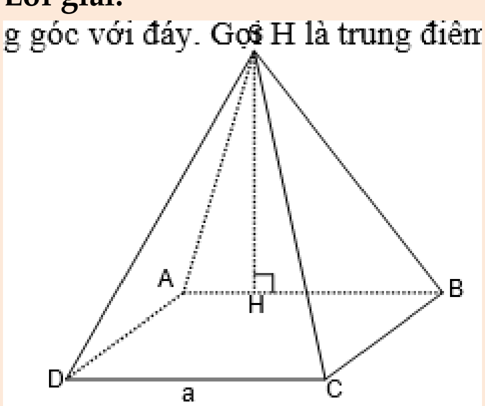
$2\sqrt{2}x - y - \sqrt{2}z = 0$. Vậy $d(SD, AC) = d(D,(ACM)) = \frac{|-2\sqrt{2}a|}{\sqrt{8+1+2}} = \frac{2\sqrt{22}a}{11}$.

Chú ý: Cách 2. Dùng phương pháp hình học thuần túy, quy về KC từ một điểm đến một mặt phẳng

BÀI 52 (THPT ĐOÀN THỊ ĐIỂM – KHÁNH HÒA).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB. Tính thể tích hình chóp S.ABCD.

Lời giải.



Ta có: (SAB) $\perp$(ABCD)

(SAB) $\cap$ (ABCD) = AB

SH $\subset$ (SAB)

SH $\perp$ AB (là đường cao của ΔSAB đều)

Suy ra: SH $\perp$ (ABCD)

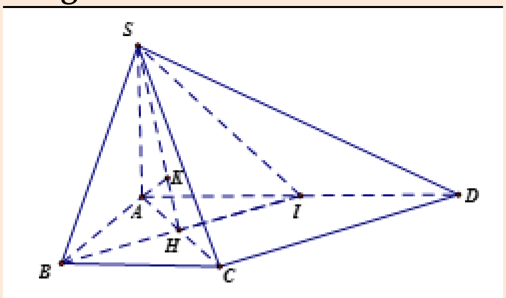
Tính SH = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì ΔSAB đều cạnh a) ;$S_{ABCD} = a^2$

Tính $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

BÀI 53 (THPT ĐOÀN THƯỢNG – HẢI DƯƠNG (LẦN 1)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AD và $AD = 2BC$, SA vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$), tam giác ACD vuông tại C và $SA = AC = a\sqrt{3}$, $CD = a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

Lời giải.



Tam giác ACD vuông tại C suy ra

$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 4a^2 \Rightarrow AD = 2a,\ BC = a$

Kẻ $CE \perp AD \Rightarrow \frac{1}{CE^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{CD^2}$

$\Rightarrow CE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó $S_{ABCD} = \frac{(AD+BC).CE}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Vậy $V_{SABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.a\sqrt{3} = \frac{3}{4}a^3$.

Gọi I là trung điểm của AD thi BCDI là hình bình hành $\Rightarrow$ CD // BI $\Rightarrow$ CD // (SBI) $\Rightarrow$ d(SB, CD) = d(CD, (SBI)) = d(D, (SBI)) = d(A; (SBI))

(Do I là trung điểm AD)

Gọi H = AC $\cap$ BI. $CD // BI, AC \perp CD \Rightarrow AC \perp BI \Rightarrow BI \perp (SAC)$. Kẻ AK $\perp$ SH tại K. Kết hợp với AK $\perp$ BI $\Rightarrow$ AK $\perp$ (SBI) $\Rightarrow$ d(A, (SBI)) = AK.

I là trung điểm của AD suy ra H là trung điểm của AC $\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

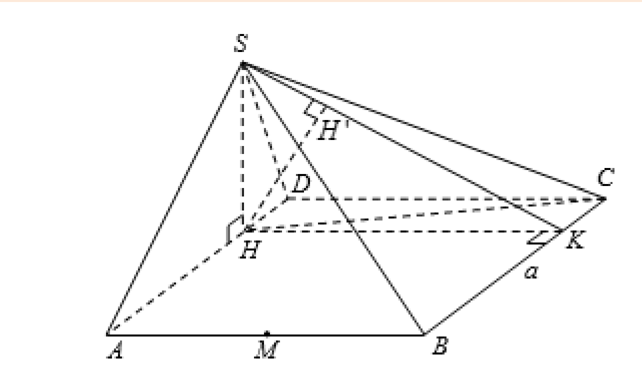
Tam giác SAH vuông tại A $\Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

$\Rightarrow$ d(CD; SB) = AK = $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

BÀI 54 (THCS, THPT ĐÔNG DU – ĐẮK LẮC (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc cạnh AD sao cho HA=3HD. Gọi M là trung điểm của AB. Biết rằng $SA = 2a\sqrt{3}$ và đường thẳng SC tạo với đáy một góc 30^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải.



Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SCH = \left(SC, (ABCD)\right) = 30^0$.

Trong tam giác vuông SAD ta có $SA^2 = AH.AD$

$\Leftrightarrow 12a^2 = \frac{3}{4}AD^2 \Rightarrow AD = 4a; HA = 3a; HD = a \Rightarrow SH = \sqrt{HA.HD} = a\sqrt{3} \Rightarrow HC = SH.\cot 30^0 = 3a$

$\Rightarrow CD = \sqrt{HC^2 - HD^2} = 2\sqrt{2}a.$

Suy ra $S_{ABCD} = AD.CD = 8\sqrt{2}a^2$. Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$.

Vì M là trung điểm AB và AH // (SBC) nên

$$d\left(M, (SBC)\right) = \frac{1}{2}d\left(A,(SBC)\right) = \frac{1}{2}d\left(H, (SBC)\right). \quad (1)$$

Kẻ $HK \perp BC$ tại K, $HH' \perp SK$ tại H'. Vì $BC \perp (SHK)$ nên

$BC \perp HH' \Rightarrow HH' \perp (SBC)$. (2)

Trong tam giác vuông SHK ta có

$\frac{1}{HH'^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{11}{24a^2} \Rightarrow HH' = \frac{2\sqrt{6}a}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{66}}{11}a.$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $d\left(M, (SBC)\right) = \frac{\sqrt{66}}{11}a.$

BÀI 55 (THCS, THPT ĐÔNG DU – ĐẮK LẮC (LẦN 2)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 45^0 và $SC = 2a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$ theo a.

Lời giải.

+ Vẽ hình đúng, nêu được công thức thể tích $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA$

và tính đúng $SA = AC = 2a$.

+ Tính đúng $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$, $S_{ABCD} = AB.BC = a^2\sqrt{3}$

và ĐS đúng $V = \frac{a^3 2\sqrt{3}}{3}$.

+ Gọi H là hình chiếu của A lên SD. CM được $AH \perp (SCD)$.

Từ đây khẳng định được $d\left(B,(SCD)\right) = d\left(A,(SCD)\right)$=AH

+ Tính được AH theo công thức $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2}$

BÀI 56 (THPT ĐỒNG GIA – HẢI DƯƠNG (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, AB = a và BC = a $\sqrt{3}$. Gọi BH là đường cao của tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng BH và SC, biết SH ⊥ (ABC) và góc giữa SB với mặt phẳng (ABC) bằng 60^0.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{HB^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow HB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa SB và (ABC) là $\widehat{SBH} = 60^0$.

Suy ra SH = HB.tan60^0 = $\frac{3a}{2}$.

Diện tích đáy: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $HB \perp (SAC)$ (Vì (SAC) $\perp (ABC), HB \perp AC$). Trong mp(SAC), dựng HK $\perp SC$.

Khi đó HK là đường vuông góc chung của HB và SC, hay d(HB; SC) = HK.

Ta có HC = $\sqrt{BC^2 - HB^2} = \frac{3a}{2}$.

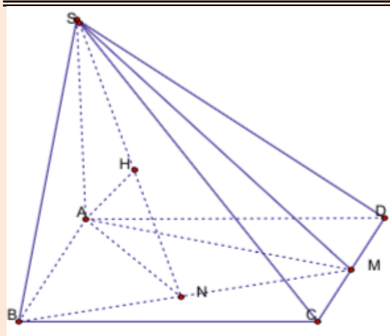
Khi đó $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HC^2} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy d(HB; SC) = $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$

BÀI 57 (THPT ĐỒNG XOÀI – BÌNH PHƯỚC (LẦN 2)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB=a, AD=2a, SA ^ $(ABCD)$ và SA=a. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM) với M là trung điểm của CD.

Lời giải.



Ta có $S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2$ Do đó: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{2a^3}{3}(dvtt)$

Dựng AN ^ BM (N thuộc BM) và AH ^ SN (H thuộc SN)

Ta có: BM^ AN, BM^ SA suy ra: BM^ AH. Và AH^ BM, AH^ SN suy ra: AH ^ (SBM). Do đó d(A,(SBM))=AH

Ta có:

$S_{ABM} = S_{ABCD} - 2S_{ADM} = a^2$

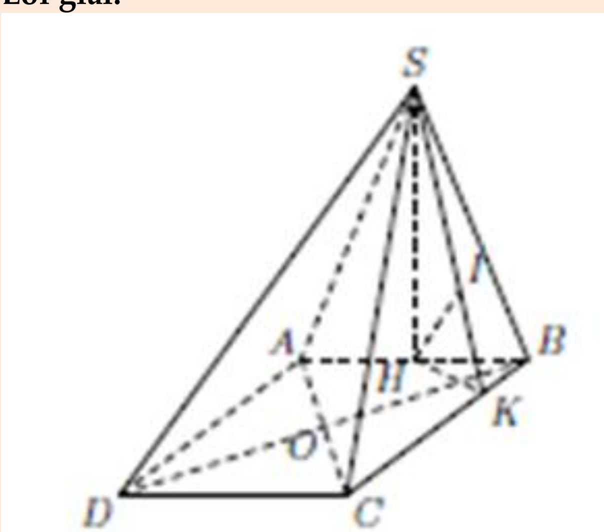
$S_{ABM} = \frac{1}{2}AN.BM = a^2$ Þ $AN = \frac{2a^2}{BM} = \frac{4a}{\sqrt{17}}$

Trong tam giác vuông SAN có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{SA^2}$ Þ $AH = \frac{4a}{\sqrt{33}} = d(A,(SBM))$

BÀI 58 (THPT ĐỒNG HẬU – VĨNH PHÚC (LẦN 2)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mp(ABCD). Biết AC = 2a, BD = 4a. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB, tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$, *suy ra* $SH \perp (ABCD)$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có $OA = a, OB = 2a \Rightarrow AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = a\sqrt{5}$

Tam giác SAB đều cạnh $a\sqrt{5}$ nên đường cao $SH = a\sqrt{5}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

Đáy ABCD là hình thoi nên có diện tích $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}.2a.4a = 4a^2$

Vậy thể tích của khối chóp S.ABCD là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$

Ta có $AD//BC \Rightarrow AD//(SBC)$

Do đó $d(AD;SC) = d(AD;(SBC)) = d(A;(SBC)) = 2d(H;(SBC))$.

Gọi K là hình chiếu của H trên BC, ta có $BC \perp HK$ và $BC \perp SH$ nên $BC \perp (SHK)$

Gọi I là hình chiếu của H trên SK, ta có $HI \perp SK$ và $HI \perp BC$ nên $HI \perp (SBC)$.

Từ đó suy ra $d(AD;SC) = 2d(H;(SBC)) = 2HI$

Ta có $HK = \frac{2S_{\Delta HBC}}{BC} = \frac{S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{S_{\Delta ABCD}}{2BC} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

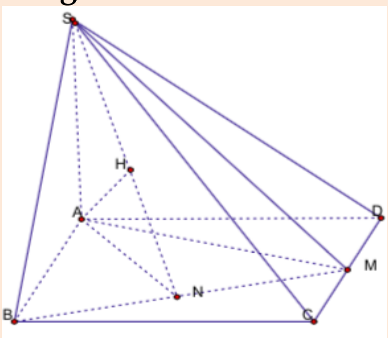
Tam giác SHK vuông tại H nên $HI = \frac{HS.HK}{\sqrt{HS^2 + HK^2}} = \frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{91}}$

Vậy $d(AD;SC) = 2HI = \frac{4a\sqrt{15}}{\sqrt{91}}$

BÀI 59 (THPT ĐỨC THỌ – HÀ TĨNH).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBM) với M là trung điểm của CD.

Lời giải.



Ta có $S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2$

Do đó: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{2a^3}{3}(dvtt)$

Ta có d(D,(SBM)=d(C,(SBM)= 1/2 d(A,(SBM))

Dựng AN ^ BM (N thuộc BM) và AH ^ SN

(H thuộc SN)

Ta có: BM^ AN, BM^ SA suy ra: BM^ AH. Và AH^ BM, AH^ SN suy ra: AH ^ (SBM). Do đó d(A,(SBM))=AH

Ta có: $S_{ABM} = S_{ABCD} - 2S_{ADM} = a^2; S_{ABM} = \frac{1}{2}AN.BM = a^2 \Rightarrow AN = \frac{2a^2}{BM} = \frac{4a}{\sqrt{17}}$

Trong tam giác vuông SAN có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = \frac{4a}{\sqrt{33}}$

Suy ra $\text{d}(D,(SBM)) = \frac{2a}{\sqrt{33}}$

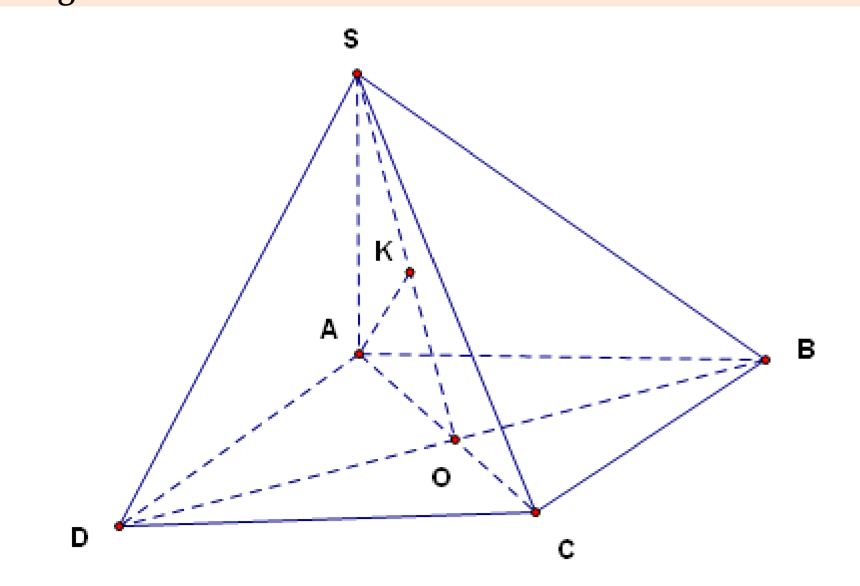
BÀI 60 (TRUNG TÂM GDTX CAM LÂM – KHÁNH HÒA (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a, góc B bằng 60^0, SA vuông góc mp (ABCD), SA = $\frac{a}{2}$, gọi K là chân đường vuông góc hạ từ A xuống SO .

1) Tính thể tích của khối chóp S.ABCD

2) Chứng minh AK vuông góc mặt phẳng (SBD)

Lời giải.



Lí luận được Δ ABC đều

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt)

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (đvdt)

Ghi được công thức : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$. SA

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvtt)

Chứng minh được : AK $\perp$ SO

BD$\perp$ (SAO)

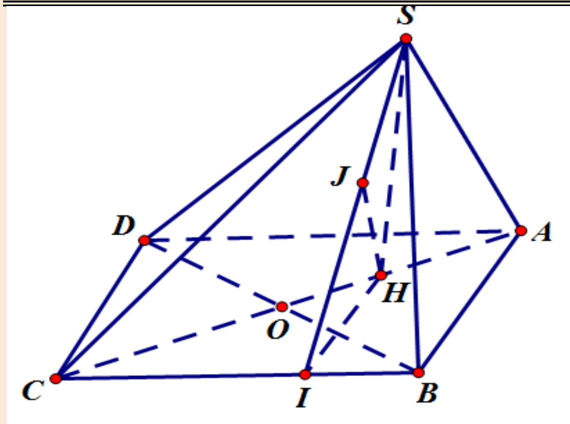
$\Rightarrow$ AK $\perp$ BD

$\boxed{\Rightarrow \text{AK} \perp \text{(SBD)}}$

BÀI 61 (TRUNG TÂM GDTX CAM LÂM – KHÁNH HÒA (LẦN 2)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, tam giác SAC vuông tại S có $SA = a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a; tính cosin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC).

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của S lên AC thì SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có $AC = AB\sqrt{2} = 2a$, tam giác SAC vuông tại S nên ta tính được $SC = a\sqrt{3},\ SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Gọi α là góc giữa SD và mặt phẳng (SBC). Kẻ HI song song với AB (I thuộc BC), HJ vuông góc SI (J thuộc SI), suy ra $HJ \perp (SBC)$.

Tam giác SHA vuông tại H có $SA = a, SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $AH = \dfrac{a}{2}$.

Suy ra $CH = \dfrac{3a}{2}; HI = \dfrac{3}{4}AB = \dfrac{3\sqrt{2}a}{4} \Rightarrow HJ = \dfrac{HI.HS}{\sqrt{HI^2 + HS^2}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}a$

Suy ra $d\left(D;(SBC)\right) = d\left(A;(SBC)\right) = \dfrac{AC}{HC}d\left(H;(SBC)\right) = \dfrac{4}{3}.HJ = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$

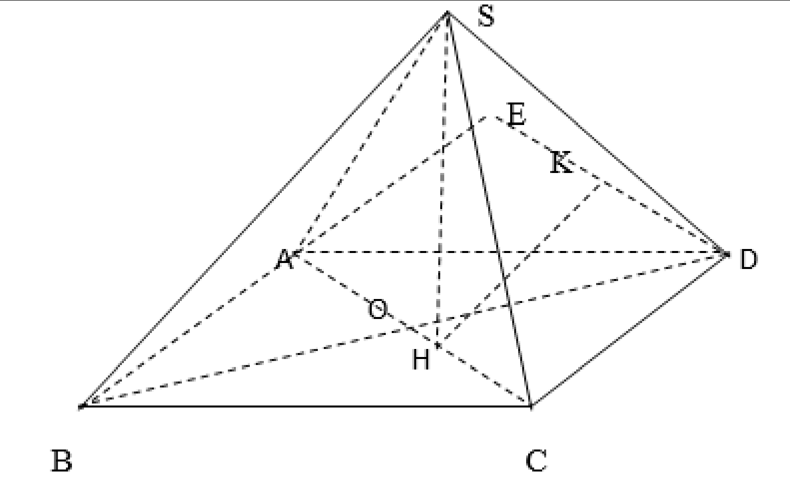
Lại có $SD = \sqrt{SH^2 + HO^2 + OD^2} = a\sqrt{2}$ (O là giao điểm của AC và BD),

suy ra $\sin\alpha = \dfrac{d\left(D;(SBC)\right)}{SD} = \sqrt{\dfrac{2}{5}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

BÀI 62 (TRUNG TÂM GDTX & HN NHA TRANG (LẦN 1)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2\sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng ($ABCD$) trùng với trọng tâm tam giác BCD. Đường thẳng SA tạo với mặt phẳng ($ABCD$) một góc 45^0. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD theo a.

Lời giải.



Gọi H là trọng tâm tam giác BCD. Theo gt $SH \perp (ABCD)$

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow CH = \frac{2}{3}CO = \frac{1}{3}AC = a \Rightarrow AH = AC - HC = 2a$

SA tạo với đáy góc 45^0 suy ra $SAH = 45^0 \Rightarrow SH = AH = 2a$

$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}a.2\sqrt{2}a.2a = \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$

Gọi E là điểm trên AB kêó dài mà AE=a thì DE//AC, nên AC//mp(SDE)

Suy ra d(AC, SD) = d(AC, (SDE))

Dựng HK $\perp$ DE thì SK $\perp$ DE, từ diện tích tam giác ODC

ta tính được HK= $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$

Trong tam giác vuông SHK; Dựng HI $\perp$ SK thì HI $\perp$ (SDE)

Nên HI là khoảng cách từ H đến (SDE)

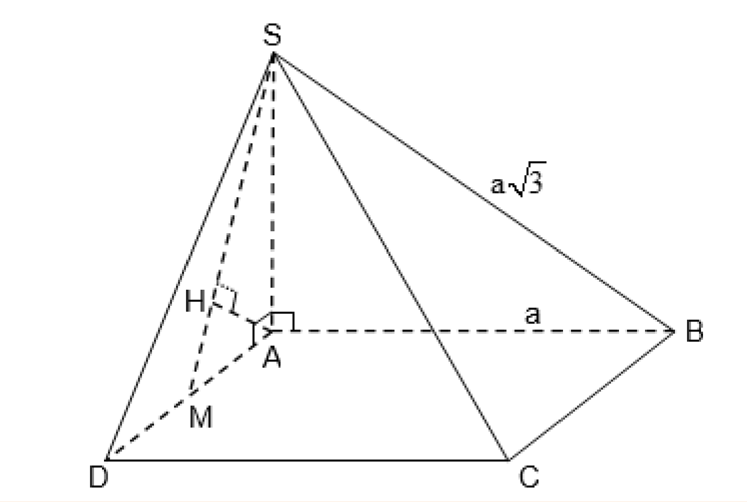
$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{11}{8a^2}$

=>d(AC, SD) = d(AC, (SDE))=HI=$\frac{2a\sqrt{2}}{11}$

BÀI 62 (TRUNG TÂM GDTX & HN NHA TRANG (LẦN 2)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD), SB = $a\sqrt{3}$, gọi M là trung điểm AD. Tính theo a thể tích khối chóp SABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AB.

Lời giải.



+ Tính được $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = a^2$

+ $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3.\sqrt{2}}{3}$

+ Kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$) (1)

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$, mà $AD \perp AB \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AH$

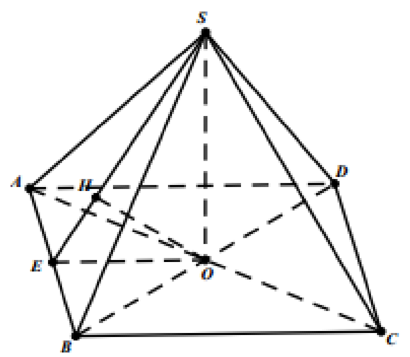
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ d(SM, AB) = AH

+ $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{2a^2}{9} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{3} = d(SM,AB)$

BÀI 63 (THPT HÀN THUYÊN – BẮC NINH).

Cho hình chóp đều *S.ABCD*, có đáy ABCD là hình vuông cạnh *a*. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0 Tính diện tích tam giác SAC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD .

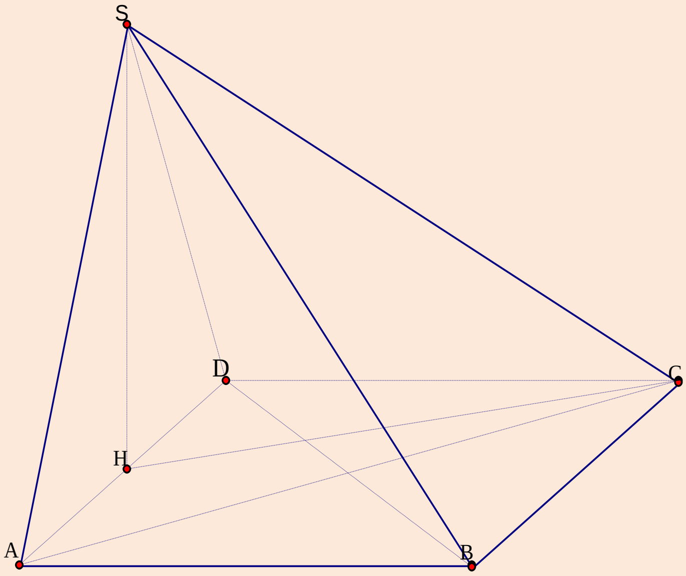
Lời giải.

	Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SA, ABCD) = SAO = 60^0$ $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	**0,25**
	$SO = AO \tan SAO = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} = a\frac{\sqrt{6}}{2}$. $S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}SO.AC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.	**0,25**
Do $AB//CD \Rightarrow d(SA,CD) = d(CD,(SAB)) = d(C,(SAB)) = 2d(O,(SAB))$		**0,25**
Gọi E là trung điểm của AB, H là hình chiếu của O trên SE. Ta có $OH \perp (SAB)$ $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{6a^2} = \frac{14}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{42}}{14} \Rightarrow d(SA,CD) = \frac{a\sqrt{42}}{7}$.		**0,25**

BÀI 64 (THPT HẬU LỘC 2 – THANH HÓA (LẦN 1)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD, SB theo a.

Lời giải.



Gọi H là chân đường cao hạ từ S của tam giác đều SAD

Suy ra:

$$SH=\frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } SH\perp(ABCD)$$

Trong tam giác vuông HSC có $HC=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\cos HDC=\frac{DH^2+DC^2-CH^2}{2DH.DC}=\frac{\frac{a^2}{4}+a^2-\frac{3a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}.a}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow HDC=60^0$

Suy ra $S_{ABCD}=DA.DC.\sin ADC=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}a^3$$

Ta có ΔADC đều cạnh a $\Rightarrow CH\perp AD\Rightarrow CH\perp BC$

hay $BC\perp(SHC)\Rightarrow BC\perp SC\Rightarrow\Delta CSB$ vuông tại C

Lại có $V_{D.SBC}=V_{S.BCD}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a^3}{4}=\dfrac{a^3}{8}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}d\left(D;(SBC)\right).S_{\Delta SBC}=\frac{a^3}{8}\Leftrightarrow d\left(D;(SBC)\right)=\frac{3a^3}{8.S_{\Delta SBC}}$$

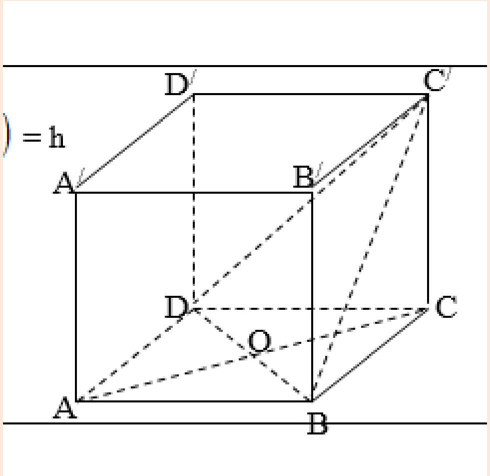
$$\Rightarrow d\left(D;(SBC)\right)=\frac{3a^3}{8.\frac{1}{2}CS.CB}=\frac{3a^3}{4.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a}=\frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Vậy $d\left(AD;SB\right)=d\left(D;(SBC)\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.$

BÀI 65 (THPT HOÀNG HOA THÁM (LẦN 1)).

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A/B/C/D/ có đáy ABCD là hình vuông với AB = 1 và AA/ = a. Tính thể tích khối tứ diện BDB/C/. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DC/ và AC.

Lời giải.



$V_{BDC'B'} = V_{D.BB'C'}$

$V_{BDC'B'} = \frac{1}{3}DC.S_{\Delta BB'C'} = \frac{1}{3}.1.\frac{a}{2} = \frac{a}{6}$

$DC' // AB' \subset (ACB')$, suy ra :

$d(DC', AC) = d(DC', (ACB')) = d(D, (ACB'))$ = h

$V_{DACB'} = \frac{a}{6}$

$h = \frac{3V_{DACB'}}{S_{ACB'}}$

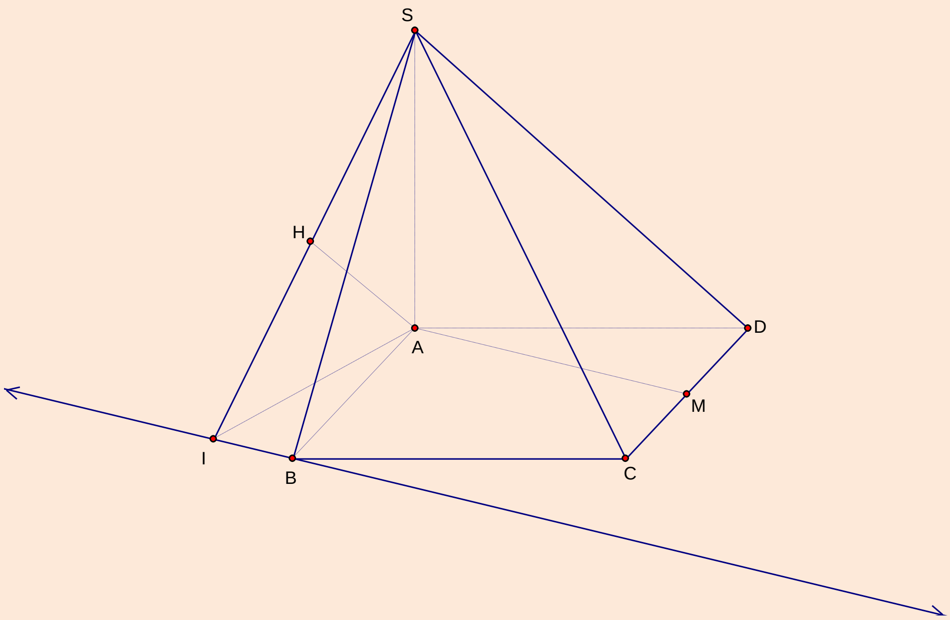
gọi O là giao của AC và BD, tam giác ACB/ cân tại B/ , suy ra $S_{ACB'} = \frac{\sqrt{2a^2+1}}{2}$. Do đó h =

$\frac{a}{\sqrt{2a^2+1}}$

BÀI 66 (THPT HOÀNG HOA THÁM (LẦN 2)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng $ABCD$, SD hợp với mặt phẳng $ABCD$ góc bằng 45^0. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM

Lời giải.



$S_{ABCD} = a^2$; $SA = a$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^3$

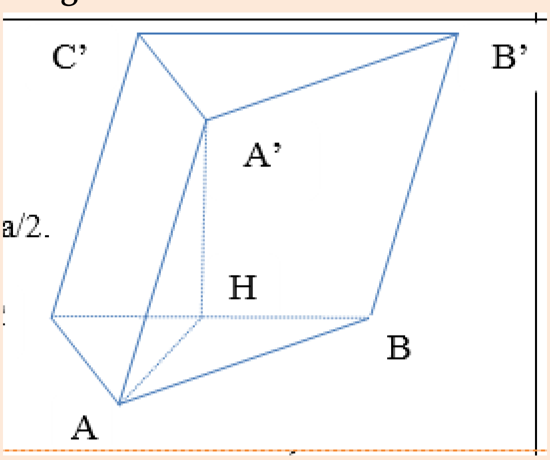
Qua B dựng đường thẳng d song song với AM; Dựng I, H, Chứng minh được $AH \perp (SBI)$

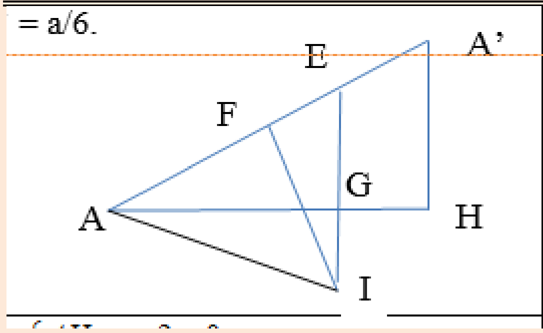
$d(AM, SB) = \frac{2}{3}a$

BÀI 67 (THPT HỒNG LĨNH).

Cho hình lăng trụ ABC.A′B′C′ có đáy là tam giác đều có cạnh bằng a, cạnh bên tạo với đáy góc 30^0. Biết hình chiếu vuông góc của A′ trên (ABC) trùng với trung điểm cạnh BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A′B′C′ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện A′ABC.

Lời giải.





+Gọi H là trung điểm BC

=> A'H ⊥ (ABC)

=> góc A'AH bằng 30^0.

Ta có:AH = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; A'H = AH.tan30^0 = a/2.

$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

V = $S_{ABC}.A'H = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

+ Gọi G là tâm của tam giác ABC, qua G kẻ đt (d) // A'H cắt AA' tại E

+ Gọi F là trung điểm AA', trong mp(AA'H) kẻ đt trung trực của AA' cắt (d) tại I => I là tâm m/c ngoại tiếp tứ diện A'ABC và bán kính R = IA.

Ta có: Góc AEI bằng 60^0, EF =1/6.AA' = a/6.

IF = EF.tan60^0 = $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

R = $\sqrt{AF^2 + FI^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

BÀI 68 (THPT HỒNG QUANG – HẢI DƯƠNG (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M là trung điểm CD, SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) với H là giao điểm của AC với BM. Góc giữa (SCD) và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM theo a.

Lời giải.

$$V_{SACD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}; d\left(A,\left(SCD\right)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

BÀI 69 (THPT HỒNG QUANG – HẢI DƯƠNG (LẦN 2)).

Cho hình chóp .S ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $ABC = 60^0$, cạnh bên $SC = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là trung điểm cạnh AB. Gọi M là điểm thuộc cạnh CD sao cho $MC = 2MD$. Tính theo a thể tích của khối chóp .S ABCD và tính côsin của góc giữa hai đường thẳng AM và SB.

Lời giải.

$V_{SACD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}; \cos(AM, SB) = \frac{\sqrt{35}}{70}$

BÀI 70 (THPT HÙNG VƯƠNG – BÌNH PHƯỚC (LẦN 2)).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng ABC là trung điểm H của cạnh AB, biết rằng $SH = 2a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng MAC, trong đó M là trung điểm của cạnh SB.

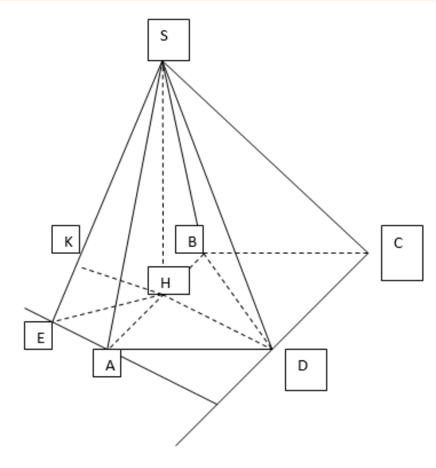
Lời giải.

$V_{S.ABC} = \frac{a^3}{3}; \ d\left(B,\left(MAC\right)\right) = \frac{4}{5}a$

BÀI 71 (THPT KẺ SẶT – HẢI DƯƠNG (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa cạnh bên SC và đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SA.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB-Lập luận $SH \perp (ABC)$ -Tính được $SH = a\sqrt{15}$

Tính được $V_{S.ABCD} = \frac{4a^3\sqrt{15}}{3}$

Qua A vẽ đường thẳng $\Delta // BD$, gọi E là hình chiếu của H lên Δ, K là hình chiếu H lên SE

Chứng minh được:d(BD,SA)=d(BD,(S, Δ))=2d(H, (S, Δ))=2HK

Tam giác EAH vuông cân tại E, $HE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{31}{15a^2} \Rightarrow HK = \sqrt{\frac{15}{31}}a$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow d(BD, SA) = 2\sqrt{\frac{15}{31}}a$

BÀI 72 (THPT KHÁNH SƠN – KHÁNH HÒA (LẦN 2)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $BC=\sqrt{3}AB=\sqrt{3}a$, hai mặt phẳng $(SAC),(SBD)$ cùng vuông góc với đáy. Điểm $I\in SC$ sao cho $SC=3IC$, đường thẳng qua I và song song với SB cắt BC tại M. Tính thể tích khối chóp $I.AMC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AI,SB theo a biết $AI\perp SC$.

Lời giải.

Do $S_{AMC}=\frac{1}{2}CA.CM.\sin\angle ACM=\frac{1}{2}CA.\frac{CB}{3}.\sin\angle ACM=\frac{1}{3}S_{CAB}$

Suy ra $S_{AMC}=\frac{S_{ABCD}}{6}$.

- Do $AI\perp SC$ nên hai tam giác $\Delta SOC,\ \Delta AIC$ đồng dạng. Do đó

$\frac{SC}{OC}=\frac{AC}{IC}\Rightarrow SC=a\sqrt{6}\Rightarrow SO=a\sqrt{6}$

- Qua I kẻ đường thẳng song song với SO cắt AC tại điểm $H\Rightarrow IH=\frac{1}{3}SO$. Từ đó suy ra

$V_{I.AMC}=a^3\frac{\sqrt{15}}{54}$.

Chỉ ra $d(SB,AI)=d(SB,(IAM))=d(B,(IAM))=2d(C,(IAM))$

Chỉ ra $V_{I.AMC}=V_{C.IAM}=\frac{1}{3}S_{IAM}.d(C,(IAM))\Rightarrow d(C,(IAM))=\frac{3V_{I.AMC}}{S_{IAM}}$.

Tính được

$IM=\frac{SB}{3}=\frac{SC}{3}$

$AM=\sqrt{AB^2-AM^2}$

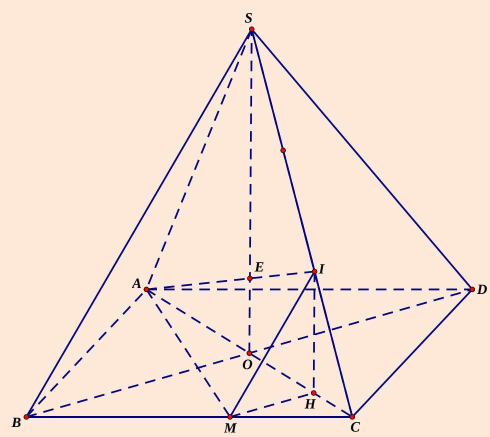
$AI=\sqrt{AC^2-IC^2}$

$\Rightarrow\cos\angle IAM=\frac{3\sqrt{70}}{28}$

$\Rightarrow\sin\angle IAM=\frac{\sqrt{154}}{28}$

$\Rightarrow d(C,(IAM))=\frac{2a}{\sqrt{33}}$.

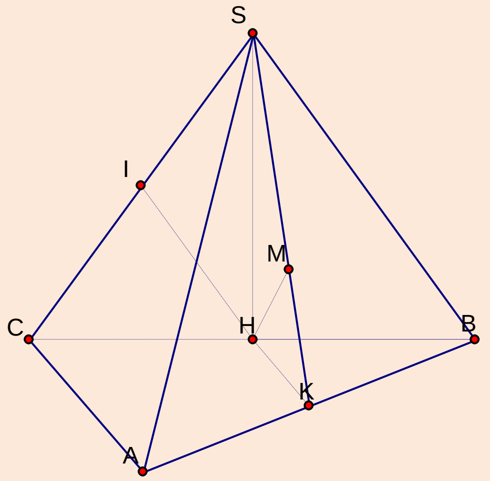
$\Rightarrow d(SB,IA)=\frac{4a}{\sqrt{33}}$



BÀI 73 (THPT KHÁNH SƠN – KHÁNH HÒA (LẦN 1)).

Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB=AC=a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

Lời giải.



Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow HK \perp AB\,(1)$

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow AB \perp SK$

Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa SK và HK và bằng $SKH = 60^\circ$

Ta có $SH = HK\tan SKH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}AB.AC.SH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Vì $IH//SB$ nên $IH//(SAB)$. Do đó $d\left(I,(SAB)\right) = d\left(H,(SAB)\right)$

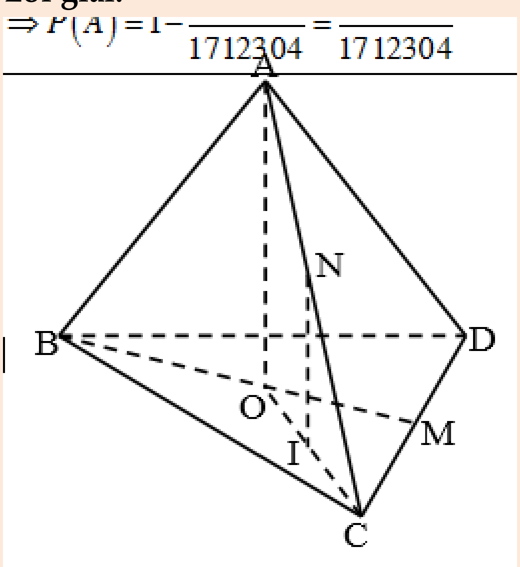
Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại M $\Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d\left(H,(SAB)\right) = HM$

Ta có $\dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d\left(I,(SAB)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

BÀI 74 (THPT KHÓA CHÂU (LẦN 1)).

Cho hình chóp đều A.BCD có $AB = a\sqrt{3}; BC = a$. Gọi M là trung điểm của CD. Tính thể tích khối chóp A.BCD theo a và khoảng cách giữa hai đường thẳng BM, AD.

Lời giải.



Gọi O là tâm tam giác đều BCD cạnh a.

Do A.BCD là chóp đều nên $AO \perp (BCD) \Rightarrow$ AO là đường cao của hình chóp.

Có $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}BC.BD.\sin 60^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong ΔAOB có: $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$

$V_{A.BCD} = \frac{1}{3}AO.S_{\Delta BCD} = \frac{a^3\sqrt{18}}{18}(đvtt)$

Gọi N, I, J lần lượt là trung điểm của AC, CO, OM.

Có: $AD // MN \Rightarrow AD // (BMN) \Rightarrow d(BM;AD) = d(AD;(BMN))$

$= d(D;(BMN)) = d(C;(BMN)) = 2d(I;(BMN))$

lại có: $\left.\begin{matrix} BM \perp IJ \\ BM \perp NI \end{matrix}\right\} \Rightarrow BM \perp (IJN) \Rightarrow (BMN) \perp (IJN)$ theo giao tuyến NJ.

Trong mp(IJN) kẻ $IK \perp NJ \Rightarrow IK \perp (BMN) \Rightarrow d(I;(BMN)) = IK$

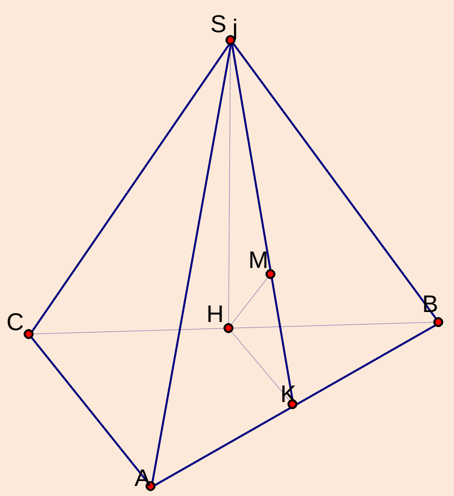
* Xét ΔIJN có: $\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IJ^2} + \frac{1}{IN^2} = \frac{16}{a^2} + \frac{3}{2a^2} = \frac{35}{2a^2} \Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{70}}{35}$

Vậy $d(BM;AD) = 2d(I;(BMN)) = \frac{2a\sqrt{70}}{35}$

BÀI 75 (THPT KINH MÔN – HẢI DƯƠNG (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại A, AB = AC = a, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC và tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

Lời giải.



Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow HK \perp AB$ (1)

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow AB \perp SK$

Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa SK và HK và bằng $SKH = 60^\circ$

Ta có $SH = HK\tan SKH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC vuông cân: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.AC.SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Vì $IH // SB$ nên $IH // (SAB)$. Do đó $d(I,(SAB)) = d(H,(SAB))$

Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại M $\Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d(H,(SAB)) = HM$

Ta có $\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d(I,(SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

BÀI 76 (THPT LẠC LONG QUÂN – KHÁNH HÒA (LẦN 1)).

Cho tam giác đều ABC cạnh a và tam giác cân SAB đỉnh S không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, AC, biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là 60^0, $SA = \frac{a\sqrt{21}}{6}$, SC<HC. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa HK và mặt phẳng (SBC) theo a.

Lời giải.

Thể tích S.ABC là: $V_{S.ABC} = V_{S.ACH} + V_{S.BCH} = \frac{AH.S_{SCH}}{3} + \frac{BH.S_{SCH}}{3} = \frac{AB.S_{SCH}}{3}$

Tam giác đều ABC cạnh a có đường cao $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{21a^2}{36} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Diện tích tam giác SHC là:

$$S_{\Delta SHC} = \frac{1}{2}SH.CH.\sin\widehat{SHC} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin 60^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

H,K là trung điểm của AB, AC nên HK là đường trung bình của tam giác ABC

⇨ HK//BC => HK//(SBC) nên $d(HK,(SBC)) = d(H,(SBC)) = \frac{3V_{S.HBC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{3V_{S.ABC}}{2S_{\Delta SBC}}$

Theo định lí Côsin trong tam giác SHC ta có:

$SC = \sqrt{SH^2 + CH^2 - 2SH.CH.\cos 60^0} = \frac{a\sqrt{21}}{6} = SB$ nên ΔSBC cân tại S.

Gọi I là trung điểm BC

$$\Rightarrow SI = \sqrt{SC^2 - CI^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SI.BC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow d(HK,(SBC)) = \frac{3a}{8}$$

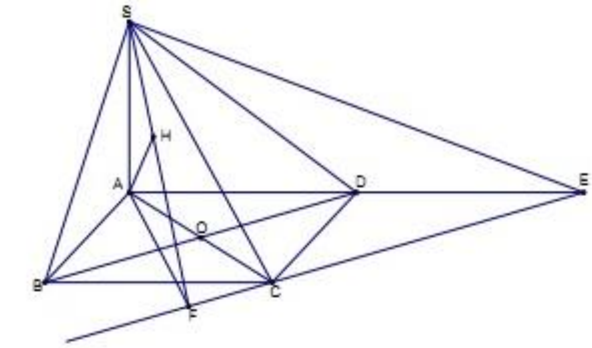
BÀI 77 (THPT LẠC LONG QUÂN – KHÁNH HÒA (LẦN 2)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy . Biết tam giác SAB cân và góc giữa SD và mặt đáy bằng 30^0.

a. Thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC

lời giải.



a.Do $SA \perp (ABCD)$ và ΔSAB cân nên $AB = SA = a\sqrt{3}$

Góc giữa SD với mặt đáy là góc $\widehat{SDA} = 30^0$

Trong tam giác SAD có $tan30^0 = \frac{SA}{AD} => AD = \frac{SA}{tan30^0} = 3a$

$=> S_{ABCD} = AB.AD = 3a.a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}a^2$

$=> V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.3\sqrt{3}a^2 = 3a^3$

b. Qua C kẻ đường thẳng song song với BD, cắt AD tại E.

Do BD // CE => BD // (SCE)

$=> d(BD,SC) = d(BD,(SCE)) = d(O,(SCE)) = \frac{1}{2}.d(A,(SCE))$

Kẻ AF ⊥ CE, F ∈ CE => CE ⊥ (SAF)

Kẻ AH ⊥ SF, H ∈ SF =>AH ⊥ CE =>AH ⊥ (SCE)

=>d(A, (SCE))= AH

Có AE = 2AD = 6a, $CE = BD = 2\sqrt{3}a$

$$S_{ACE} = \frac{1}{2}AE.CD = \frac{1}{2}AF.CE => AF = \frac{AE.CD}{CE} = \frac{6a.a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = 3a$$

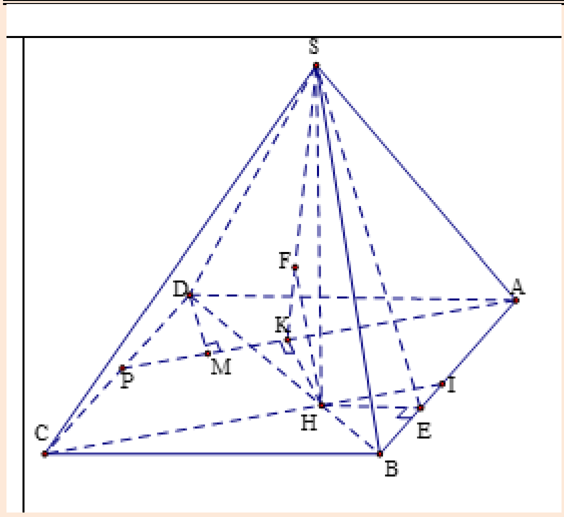
Trong tam giác SAF có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{SA^2} => AH = \frac{3a}{2}$

Vậy $d(BD,SC) = \frac{1}{2}d(A,(SCE)) = \frac{1}{2}AH = \frac{3a}{4}$

BÀI 78 (THPT LAM KINH (LẦN 1)).

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. Gọi *I* là trung điểm *AB*, *H* là giao điểm của *BD* với *IC*. Các mặt phẳng (*SBD*) và (*SIC*) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (*SAB*) và (*ABCD*) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *SA* và *IC*.

Lời giải.



Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD}$, trong đó $S_{ABCD} = a^2$

Do (SIC),(SBD) cùng vuông với đáy suy ra $SH \perp (ABCD)$

Dựng $HE \perp AB \Rightarrow (SHE) \perp AB$, suy ra SEH là góc giữa (SAB) và (ABCD) $\Rightarrow SEH = 60^0$

Ta có $SH = HE.\tan 60^0 = \sqrt{3}HE$

$\frac{HE}{CB} = \frac{HI}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow HE = \frac{a}{3}$

$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.a^2 = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$

Gọi P là trung điểm của CD, suy ra AP song song vớiCI

$\Rightarrow d(SA,CI) = d(CI,(SAP)) = d(H,(SAP))$

Dựng $HK \perp AP$, suy ra $(SHK) \perp (SAP)$

Dựng $HF \perp SK \Rightarrow HF \perp (SPA) \Rightarrow d(H,(SPA)) = HF$

Do ΔSHK vuông tại H$\Rightarrow \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2}$ (1)

Dựng $DM \perp AP$, ta thấy $DM = HK$ $\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{DM^2} = \frac{1}{DP^2} + \frac{1}{DA^2}$

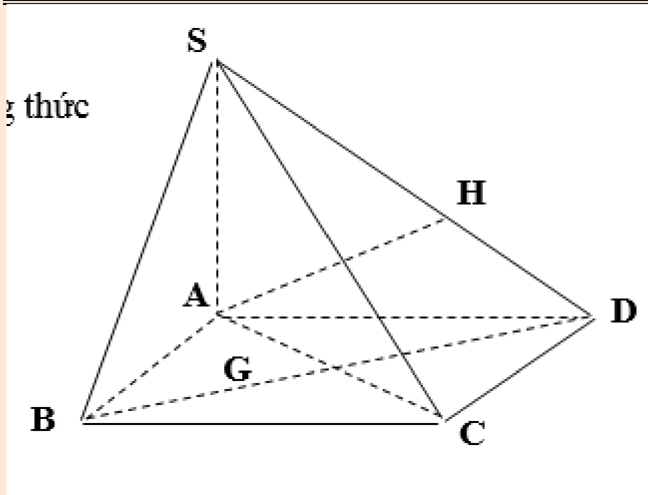
Thay vào (1) ta có $\Rightarrow \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{DP^2} + \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^2} = \frac{8}{a^2} \Rightarrow HF = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Vậy $d(SA,CI) = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

BÀI 79 (THPT LÊ LỢI – THANH HÓA (LẦN 2)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $SA \perp mp(ABCD)$, SC tạo với $mp(ABCD)$ một góc 45^0 và $SC = 2a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ABC đến mp(SCD) theo a.

Lời giải.



* Vẽ hình đúng, nêu được công thức

thể tích $V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SA$

và tính được $SA = AC = 2a$.

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$,

$S_{ABCD} = AB.BC = a^2\sqrt{3}$

Từ đó: $V = \frac{a^3 2\sqrt{3}}{3}$.

* G là trọng tâm tam giác ABC nên $\frac{GD}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(G,(SCD)) = \frac{2}{3}.d(B,(SCD))$

+ Gọi H là hình chiếu của A lên SD thì $AH \perp (SCD)$.

Vì $AB//mp(SCD)$ nên $d\left(B,(SCD)\right) = d\left(A,(SCD)\right)$=AH

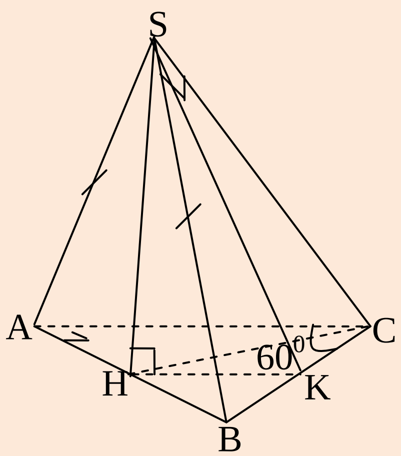
+ Trong ΔSAD có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$

$\Rightarrow d(G,(SCD)) = \frac{2}{3}.d(B,(SCD))$=$\frac{4a\sqrt{21}}{21}$

BÀI 80 (THPT LÊ LỢI – THANH HÓA (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại A, BC = 2a, Góc $ACB = 60^0$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mp(ABC), tam giác SAB cân tại S, tam giác SBC vuông tại S. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm A tới mp(SBC).

Lời giải.



a) Gọi H là trung điểm của cạnh AB, từ gt có $SH \perp (ABC)$. $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.SH$. Tam giác ABC vuông tại A có: $AB = 2a\sin 60^0 = \sqrt{3}a; AC = 2a\cos 60^0 = a$

Nên $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

Gọi K là trung điểm của cạnh BC thì

$SK = \frac{1}{2} BC = a; HK = \frac{1}{2} AC = a\cos 60^0 = \frac{1}{2} a$

$SH^2 = SK^2 - KH^2 = \frac{3}{4} a^2$

$\Rightarrow SH = \frac{\sqrt{3}}{2} a$. Suy ra $V_{S.ABC} = \frac{1}{4} a^3$.

b) Ta có $SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} a$

$HC^2 = AC^2 + AH^2 = a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$

$SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{7a^2}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} a$

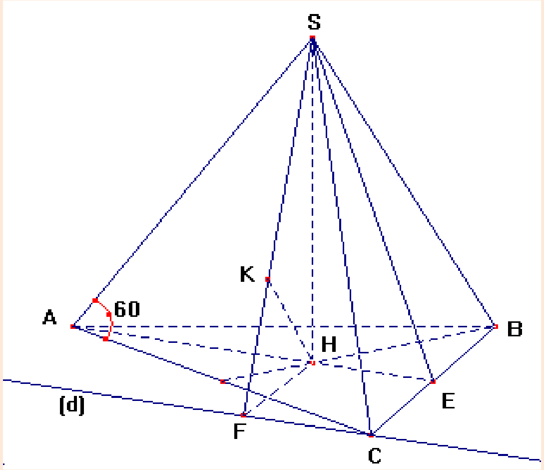
$S_{SBC} = \frac{1}{2} SB.SC = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{6}}{2} a.\frac{\sqrt{10}}{2} a = \frac{\sqrt{15}}{4} a^2$

Vậy $d(A;(SBC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{SBC}} = \frac{\frac{3}{4}a^3}{\frac{\sqrt{15}}{4}a^2} = \frac{3}{\sqrt{15}} a$

BÀI 81 (THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN – KHÁNH HÒA).

Cho hình chóp đều S.ABC có các cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên với mặt đáy là 60^0. Gọi E là trung điểm của BC. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng AE và SC.

Lời giải.



Gọi H là chân đường cao và E là trung điểm của BC. Do S.ABC là hình chóp đều nên H là tâm của tam giác đều ABC. Suy ra $\left(SA,\left(ABC\right)\right)=SAH=60^0$.

$AH=\frac{2}{3}AE=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow SH=AH.\tan 60^0=a$. $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$\Rightarrow V=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvtt)

Trong mp(ABC), qua C kẻ đường thẳng (d) song song với AE và gọi F, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên (d) và SF. Ta có $CF\perp SH$, $CF\perp HF$, $CH\perp\left(SHF\right)\Rightarrow HK\perp CF$. Mặt khác $HK\perp SF$ $\Rightarrow HK\perp\left(SCF\right)\Rightarrow d\left(H,(SCF)\right)=HK$

$AE//\left(SCF\right)\Rightarrow d\left(AE,SC\right)=d\left(AE,\left(SCF\right)\right)=d\left(H,(SCF)\right)=HK$

$HF=EC=\frac{a}{2}$. Ta có :

$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HS^2}+\frac{1}{HF^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{5}{a^2}\Rightarrow HK=\frac{a\sqrt{5}}{5}$

Vậy $d\left(AE,SC\right)=\frac{a\sqrt{5}}{5}$

BÀI 82 (THPT LƯƠNG THẾ VINH (LẦN 2)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, tam giác SAC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB=BC=a,\ AD=2a,\ SA=2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

Lời giải.

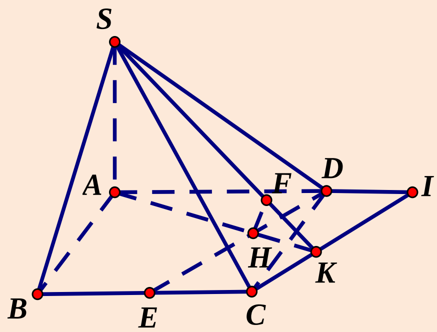
$V=\frac{a^3\sqrt{14}}{4}$; $d(AD,SB)=d(AD,(SBC))=d(A,(SBC))=2d(I,(SBC))$, với I là trung điểm AC

Kẻ $IK\perp BC, IH\perp SK\Rightarrow IH\perp(SBC)\Rightarrow d(I,(SBC)=2IH$. Kết quả: $d(AD,SB)=\frac{a\sqrt{210}}{15}$

BÀI 83 (THPT LƯƠNG TÀI 2 – BẮC NINH (LẦN 3)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45^0. Gọi E là trung điểm BC. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC theo a.

Lời giải.



$SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên (ABCD) $\Rightarrow SCA = 45^0$

ΔSAC vuông cân tại A $\Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

***Tính d(DE,SC)**

Dựng CI // DE, suy ra DE // (SCI).

Dựng $AK \perp CI$ cắt DE tại H và cắt CI tại K

Trong (SAK) dựng $HF \perp SK$, do $CI \perp (SAK) \Rightarrow HF \perp (SCI)$

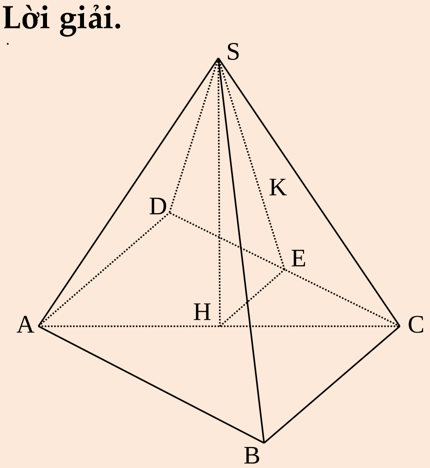
$AK = \frac{CD.AI}{CI} = \frac{3a}{\sqrt{5}}, HK = \frac{1}{3}AK = \frac{a}{\sqrt{5}}$

Khi đó $d(DE,SC) = d(H,(SCI)) = HF = \frac{SA.HK}{SK} = \frac{a\sqrt{38}}{19}$

BÀI 84 (THPT LÝ THÁI TỔ – BẮC NINH (LẦN 1)).

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AB = 2, AC = 4$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của đoạn thẳng AC. Cạnh bên SA tạo với mặt đáy một góc 60^o. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Lời giải.



SH vuông góc (ABC) $\Rightarrow$ góc giữa SA và (ABC) là: $SAH = 60^o$

$\Rightarrow SH = AH.\tan SAH = 2\sqrt{3}$

ΔABC vuông tại B $\Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = 2\sqrt{3}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.2\sqrt{3}.2\sqrt{3} = 4.$

Dựng hình chữ nhật ABCD $\Rightarrow AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$

$\Rightarrow d(AB,SC) = d(AB,(SCD)) = d(A,(SCD)) = 2d(H,(SCD))$ (do $AC = 2HC$)

Trong (ABCD), gọi E là trung điểm CD $\Rightarrow HE \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHE)$

Trong (SHE), kẻ $HK \perp SE$ ($K \in SE$) $\Rightarrow HK \perp (SCD) \Rightarrow d(H,(SCD)) = HK$

Ta có: $HE = \frac{1}{2}AD = \sqrt{3}$

ΔSHE vuông tại E $\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12} \Rightarrow HK = \frac{2\sqrt{15}}{5}$

Vậy $d(AB,SC) = 2HK = \frac{4\sqrt{15}}{5}\cdot$

BÀI 85 (THPT LÝ THƯỜNG KIỆT – BÌNH THUẬN (LẦN 1)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa SD và mặt đáy bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC,SD.

Lời giải.

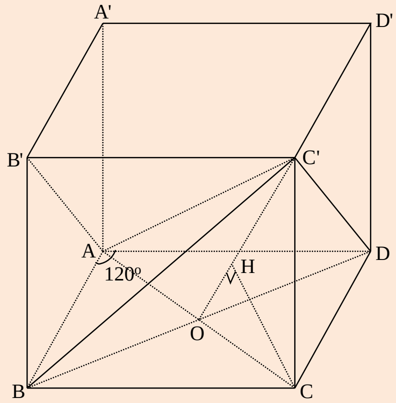
*) $\frac{a^3}{3}$

*) Gọi I là trung điểm SB $\Rightarrow SD \parallel (IAC) \Rightarrow d(SD,AC) = d(D,(IAC)) = \frac{3V_{IACD}}{S_{IAC}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

BÀI 86 (THPT LÝ THÁI TỔ – BẮC NINH (LẦN 2)).

Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $BAD = 120^o$ và $AC' = a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BD theo a.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình thoi ABCD.

Do hình thoi ABCD có $BAD = 120^o$

$\Rightarrow$ $\Delta ABC, \Delta ACD$ đều.

$\Rightarrow AC = a.$

Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Mà $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng.

$\Rightarrow \Delta ACC'$ vuông tại C $\Rightarrow CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a.$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = CC'.S_{ABCD} = 2a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = a^3\sqrt{3}.$

Tứ giác $AB'C'D$ là hình bình hành $\Rightarrow AB' // C'D \Rightarrow AB' // (BC'D).$

$\Rightarrow d(AB', BD) = d(AB', (BC'D)) = d(A, (BC'D)) = d(C, (BC'D)).$

Vì $BD \perp AC, BD \perp CC' \Rightarrow BD \perp (OCC') \Rightarrow (BC'D) \perp (OCC').$

Trong (OCC'), kẻ $CH \perp OC'$ $(H \in OC').$

$\Rightarrow CH \perp (BC'D) \Rightarrow d(C, (BC'D)) = CH$

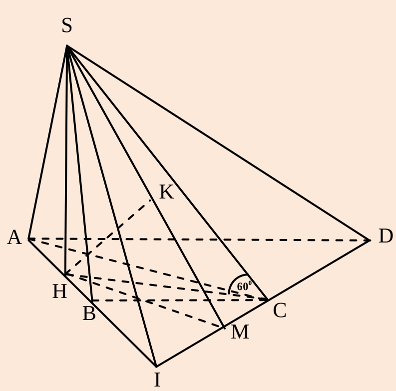
$\Delta OCC'$ vuông tại C $\Rightarrow \dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{CO^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} \Rightarrow CH = \dfrac{2a}{\sqrt{17}}$

Vậy $d(AB', BD) = \dfrac{2a}{\sqrt{17}} \cdot$

BÀI 87 (THPT LÝ MARIE CURIE – HÀ NỘI).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$ và $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên đáy là trung điểm H của đoạn AB. Cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.



- $SH \perp (ABCD) \Rightarrow hc_{(ABCD)}SC = HC$

$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, HC) = SCH = 60^0$

- $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AD + BC)AB = \dfrac{3a^2}{2}$
- $HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$,

  $SH = HC\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$
- $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$ (đvtt)
- Vẽ $HM \perp DC$ tại M $\Rightarrow DC \perp (SHM)$

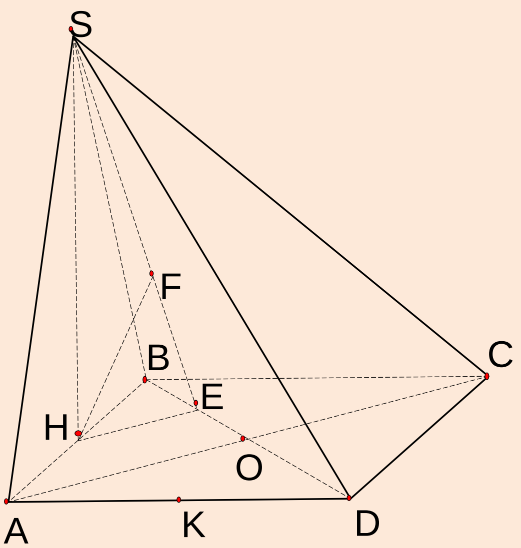
  Vẽ $HK \perp SM$ tại K $\Rightarrow HK \perp (SCD) \Rightarrow HK = d(H, (SCD))$
- Gọi $I = AB \cap DC$
- BC là đường trung bình của tam giác AID $\Rightarrow$ B là trung điểm AI.
- Ta có $AC \perp CD$

- $HM//AC \Rightarrow \dfrac{HM}{AC} = \dfrac{IH}{IA} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow HM = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$
- $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HM^2} \Rightarrow d(H,(SCD)) = HK = \dfrac{3a\sqrt{65}}{26}$.

BÀI 88 (THPT MINHH CHÂU – HƯNG YÊN (LẦN 2)).

Cho hình chóp có đáy là hình vuông cạnh *a*, . Hình chiếu vuông góc *H* của đỉnh *S* lên mặt phẳng (*ABCD*) là trung điểm của đoạn. Gọi là trung điểm của đoạn . Tính theo *a* thể tích khối chóp và khoảng cách giữa hai đường thẳng và .

Lời giải.



Từ giả thiết ta có là đường cao của hình chóp *S.ABCD* và

Diện tích của hình vuông *ABCD* là ,

Từ giả thiết ta có

Do vậy: (1)

Gọi *E* là hình chiếu vuông góc của *H* lên *BD*, F là hình chiếu vuông góc của *H* lên *SE*

Ta có mà nên suy ra

(2)

+)

+) Xét tam giác vuông *SHE* có:

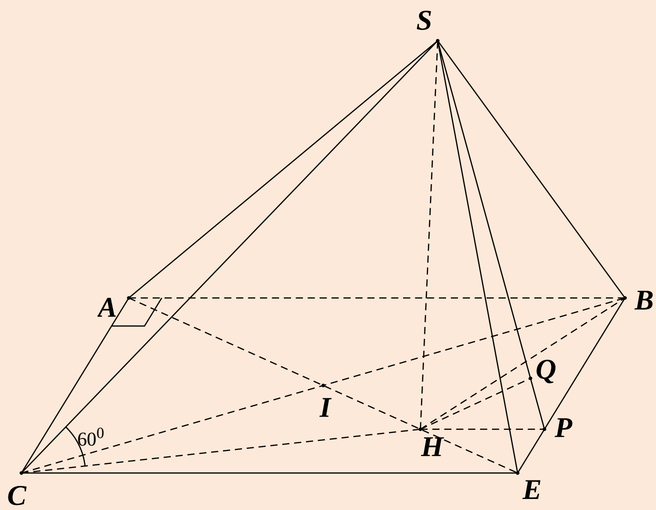
(3)

+) Từ (1), (2), (3) ta có .

BÀI 89 (THPT MINHH CHÂU – HƯNG YÊN (LẦN 3)).

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH}$, góc giữa SC và mặt đáy (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH} \Rightarrow$ H thuộc tia đối của tia IA và IA = 2IH

BC = AB$\sqrt{2}$ $= 2a$; AI = a ; IH = $\dfrac{IA}{2} = \dfrac{a}{2}$

AH = AI + IH = $\dfrac{3a}{2}$

Ta có $HC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Vì $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SC;(\widehat{ABC})) = \widehat{SCH} = 60^0$; $SH = HC\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2\,\frac{a\sqrt{15}}{2} = \frac{a^3\sqrt{15}}{6} \text{ (đvtt)}$$

Trong mặt phẳng (ABC) dựng hình vuông ABEC.

Khi đó AC//BE nên AC//(SBE)

Từ đó suy ra $d\left(AC;SB\right) = d\left(AC;(SBE)\right) = d\left(A;\left(SBE\right)\right) = 4d\left(E;\left(ABE\right)\right)$

Kẻ $HP \perp BE\left(P \in BE\right), HQ \perp SP\left(Q \in SP\right)$;

Khi đó $\begin{cases} BE \perp SH \\ BE \perp HP \end{cases} \Rightarrow BE \perp \left(SHP\right) \Rightarrow BE \perp HQ$

$$\begin{cases} HQ \perp BE \\ HQ \perp SP \end{cases} \Rightarrow HQ \perp \left(SBE\right) \Rightarrow d\left(H;\left(SBE\right)\right) = HQ$$

$HP = \frac{1}{4}AB = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

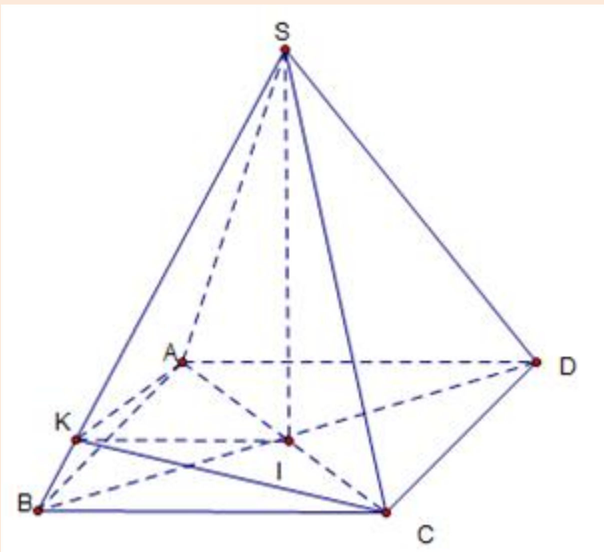
$\triangle SHP$ vuông tại H, $HQ \perp SP$ nên $HQ = \sqrt{\frac{SH^2.HP^2}{SH^2 + HP^2}} = \frac{a\sqrt{465}}{62}$

Vậy $d\left(AC;SB\right) = \frac{2a\sqrt{465}}{31}$ (đvđd)

BÀI 90 (TRANG HỌC TRỰC TUYẾN MOON.VN (ĐỀ SỐ 4)).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh $a\sqrt{3}$, đường chéo AC = 2a . Biết rằng hai mặt phẳng (SAC) và SBD) cùng vuông góc với đáy, và SC = $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a, và chứng minh hai mặt phẳng (SAB), (SBC) vuông góc với nhau.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm 2 đường chéo ta có: $IA \perp IB$

Do vậy $IB = \sqrt{AB^2 - IA^2} = a\sqrt{2}$

Khi đó: $S_{ABCD} = AC.IB = 2a.a\sqrt{2} = 2a^2\sqrt{2}$

Lại có: $SI = \sqrt{SC^2 - IC^2} = a\sqrt{2}$

Do vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \frac{4}{3}a^3$.

Dựng $CK \perp SB$ lại có $SB \perp AC \Rightarrow SB \perp (ACK)$

Khi đó: $IK \perp SB$ và $IK = \frac{SI.IB}{\sqrt{SI^2 + IB^2}} = a = \frac{1}{2}AC$

Do đó tam giác AKC vuông tại K hay $CK \perp AK$

Suy ra $CK \perp (SAB)$ hay $(SAB) \perp (SBC)$

BÀI 91 (TRANG HỌC TRỰC TUYẾN MOON.VN (ĐỀ SỐ 5)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $a\sqrt{3}$, đường chéo $AC = 2a$, biết rằng hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và chứng minh hai mặt phẳng $(SAB),(SBC)$ vuông góc với nhau.

Lời giải.

$V_{SABCD} = \frac{4}{3}a^3$

Dựng CK vuông góc với SB lại có SB vuông với AC nên SB vuông (ACK)

Khi đó $IK \perp SB \Rightarrow IK = \frac{SI.IB}{\sqrt{SI^2 + IB^2}} = a = \frac{1}{2}AC$ (I là giao điểm 2 đường chéo)

Do đó tam giác ACK vuông tại K hay CK vuông với AK nên $(SAB) \perp (SBC)$

BÀI 92 (TRANG HỌC TRỰC TUYẾN MOON.VN (ĐỀ SỐ 6)).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân, hai đáy là BC và AD, biết đường cao của khối chóp là $SH = a$, với H là trung điểm AD. Cho biết $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và khoảng cách từ H tới (SCD)

Lời giải.

$V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}; d\left(H;(SCD)\right) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

BÀI 93 (THPT NGUYỄN CHÍ THANH – KHÁNH HÒA (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD). Biết $SD = 2a\sqrt{3}$ và góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 30^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB. Suy ra $SH \perp (ABCD)$

và $\widehat{SCH} = 30^0$.

Ta có: $\Delta SHC = \Delta SHD \Rightarrow SC = SD = 2a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SHC vuông tại H ta có:

$SH = SC.\sin SCH = SC.\sin 30^0 = a\sqrt{3}$

$HC = SC.\cos SCH = SC.\cos 30^0 = 3a$

Vì tam giác SAB đều mà $SH = a\sqrt{3}$ nên $AB = 2a$. Suy ra

$BC = \sqrt{HC^2 - BH^2} = 2a\sqrt{2}$. Do đó, $S_{ABCD} = AB.BC = 4a^2\sqrt{2}$.

Vậy, $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$.

Vì $BA = 2HA$ nên $d\left(B,(SAC)\right) = 2d\left(H,(SAC)\right)$

Gọi I là hình chiếu của H lên AC và K là hình chiếu của H lên SI. Ta có:

$AC \perp HI$ và $AC \perp SH$ nên $AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$. Mà, ta lại có: $HK \perp SI$.

Do đó: $HK \perp (SAC)$.

Vì hai tam giác SIA và SBC đồng dạng nên $\frac{HI}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow HI = \frac{AH.BC}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

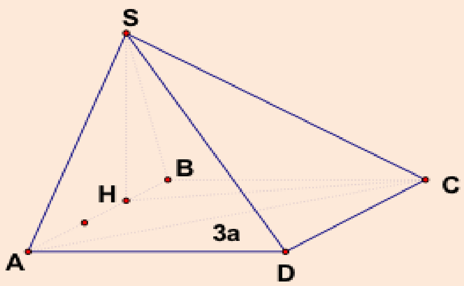
Suy ra, $HK = \frac{HS.HI}{\sqrt{HS^2 + HI^2}} = \frac{a\sqrt{66}}{11}$.

Vậy , $d\left(B,\left(SAC\right)\right) = 2d\left(H,\left(SAC\right)\right) = 2HK = \frac{2a\sqrt{66}}{11}$

BÀI 94 (THPT NGUYỄN CHÍ THANH – KHÁNH HÒA (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABC, ABC là tam giác đều cạnh bằng 3a, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho AH = 2HB.Góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy bằng 45^0. Tính th ểtích khối chóp S.ABC theo a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.

Lời giải.



$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC}$; $S_{ABC} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{4}$;

Áp dụng định lí Cosin cho tam giác BCH $\Rightarrow HC = a\sqrt{7}$

Tam giác SHC cân tại H $\Rightarrow SH = HC = a\sqrt{7}$; $V_{S.ABC} = \frac{3a^3\sqrt{21}}{4}$

Lấy điểm D sao cho t ứgiác ABCD là hình thoi $\Rightarrow BC // AD$

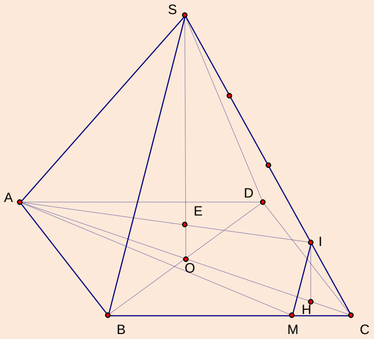
$d_{(BC,SA)} = d_{(BC,(SAD))} = d_{(C,(SAD))} = \frac{3V_{S.ACD}}{S_{SAD}}$; $V_{S.ACD} = V_{S.ABC} = \frac{3a^3\sqrt{21}}{4}$

$S_{SAD} = \frac{3a^2\sqrt{10}}{2}$; $d_{(BC,SA)} = \frac{3a\sqrt{210}}{20}$

BÀI 95 (TRƯỜNG CAO ĐẲNG NGHỀ NHA TRANG (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Điểm I thuộc đoạn SC sao cho $SC = 3IC$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và SB biết AI vuông góc với SC.

Lời giải.



+) Gọi $O = AC \cap BD$, Vì $(SAC) \perp (ABCD), (SBD) \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a \Rightarrow OC = a.$$

Do $AI \perp SC \Rightarrow \Delta SOC \,\&\, \Delta AIC$ đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{CI}{CO} = \dfrac{CA}{CS} \Leftrightarrow SC = a\sqrt{6}$

+) $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = a\sqrt{5}, S_{ABCD} = a.a\sqrt{3} = \sqrt{3}a^2 \Rightarrow V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = a^3\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

+) Qua I kẻ đường thẳng song song với SB cắt BC tại M $\Rightarrow SB \,//\, (AIM)$

$$\Rightarrow d(SB, AI) = d(SB,(AIM)) = d(B,(AIM)) = \frac{3V_{I.ABM}}{S_{\Delta AMI}}.$$

Hạ $IH \perp (ABCD) \Rightarrow IH = \dfrac{SO}{3} = a\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $S_{\Delta ABM} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V_{I.ABM} = \dfrac{1}{3}IH.S_{\Delta ABM} = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{27}$

+) Ta có : $IM = \dfrac{SB}{3} = \dfrac{SC}{3} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}; AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = a\sqrt{\dfrac{7}{3}}, AI = \sqrt{AC^2 - CI^2} = a\sqrt{\dfrac{10}{3}}$

$$\Rightarrow \cos MAI = \frac{3\sqrt{70}}{28} \Rightarrow \sin MAI = \frac{\sqrt{154}}{28} \Rightarrow S_{AMI} = \frac{1}{2}AM.AI\sin MAI = a^2\frac{\sqrt{55}}{12}$$

$$\Rightarrow d(B,(AIM)) = \frac{3V_{I.ABM}}{S_{\Delta AMI}} = \frac{4a}{\sqrt{33}} \Rightarrow d(SB, AI) = \frac{4a}{\sqrt{33}}$$

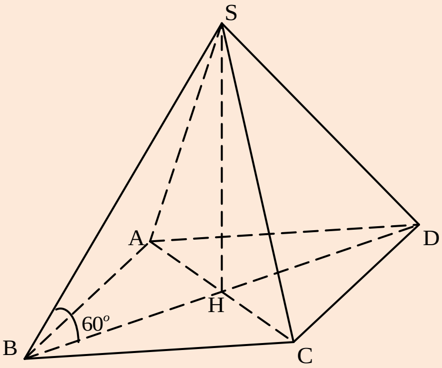
BÀI 96 (TRƯỜNG CAO ĐẲNG NGHỀ NHA TRANG (LẦN 2))

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Cạnh bên tạo với mặt đáy một góc 60^0.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SA, CD.

Lời giải.



Gọi H là tâm của đa giác đáy thì SH vuông góc với mp(ABCD), BH là hình chiếu của SH lên mp(ABCD).

Góc giữa cạnh bên SB với mp(ABCD) là $SBH = 60^o$

$BH = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. $SH = BH\tan 60^o = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$S_{ABCD} = a^2$; thể tích $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Ta có AB//CD nên $d\left[SA, CD\right] = d\left[CD, (SAB)\right] = d\left[C, (SAB)\right] = h$

Và $V_{S.ABC} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{24}$ (1)

$SB = \frac{BH}{\cos 60^o} = a\sqrt{2}$. Gọi N là trung điểm AB thì $BN = \frac{1}{2}a$ suy ra $SN = \frac{\sqrt{7}}{2}a$

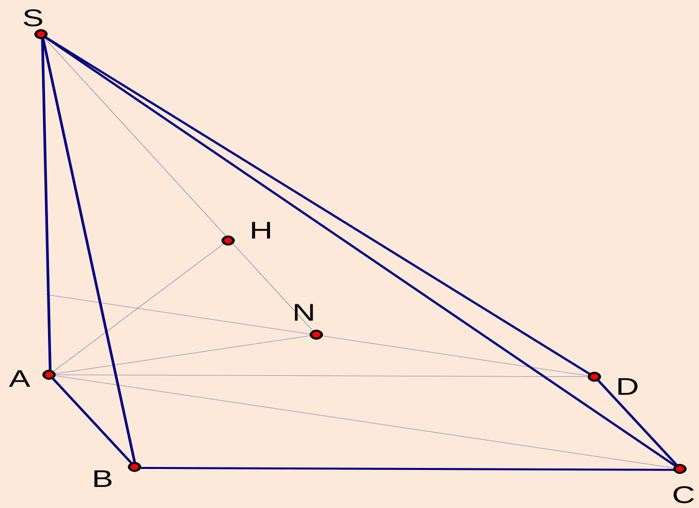
Diện tích tam giác SAB: $S_{SAB} = \frac{1}{2}SN.AB = \frac{\sqrt{7}}{4}a^2$ Suy ra $V_{C.SAB} = \frac{1}{3}S_{SAB}.h = \frac{\sqrt{7}}{12}a^2.h$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $h = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{42}}{14}$

BÀI 97 (TRƯỜNG TRUNG CẤP NGHỀ NINH HÒA (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA vuông góc với mặt đáy, góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy bằng 30^o. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa SD, AC.

Lời giải.



*Tính thể tích:

Ta có góc SBA là góc giữa SB và (ABCD) bằng 30^0

Ta có $SA = AB.\tan 30^0 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.4a^2 = \frac{8a^3\sqrt{3}}{9}$

* Tính khoảng cách:

Kẻ đường thẳng d qua D và song song vớiAC

Gọi N là hình chiếu vuông góc của A trên d

H là hình chiếu vuông góc của A trên SN

Ta có $\begin{matrix} SA \perp DN \\ NA \perp DN \end{matrix}$ suy ra $DN \perp (SAN) \Rightarrow AH \perp DN$

Do đó $d\left(SD, AC\right) = d\left(A;\left(SDN\right)\right) = AH$

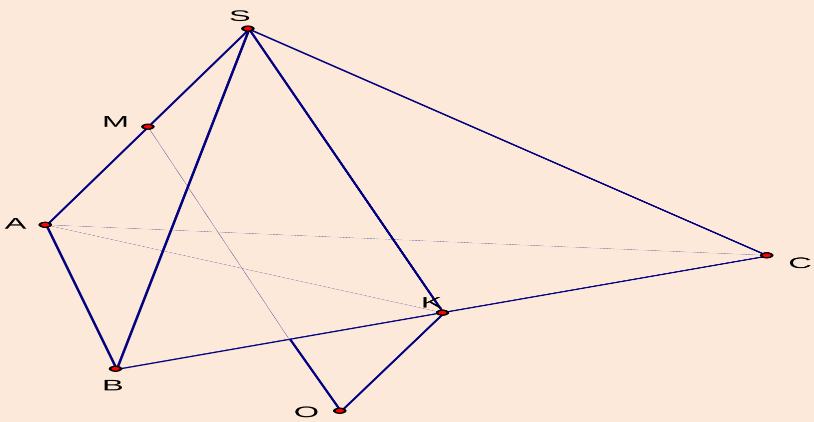
Tam giác SAN vuông tại A có đường cao AH nên

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{a^2}$ suy ra $d(SD, AC) = AH = a$

BÀI 98 (TRƯỜNG TRUNG CẤP NGHỀ NINH HÒA (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABC có các cạnh bên SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và SA=a, SB=2a, SC=3a. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và xác định tâm, bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Lời giải.



*Tính thể tích $V_{SABC} = \frac{1}{3}SA.S_{SBC} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}SB.SC = \frac{1}{6}a.2a.3a = a^3$ (đvtt)

* Tìm tâm và bán kính

Gọi M, K lần lượt là trung điểm của SA và BC.

Kẻ Kt // SA suy ra Kt $\perp$ (SBC)

Kẻ Mx // SK suy ra Mx $\perp$ SA

Kt cắt Mx tại O. Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.ABC

Bán kính R=OS

Có $SO^2 = OK^2 + SK^2$ mà $OK = SM = \frac{a}{2}$

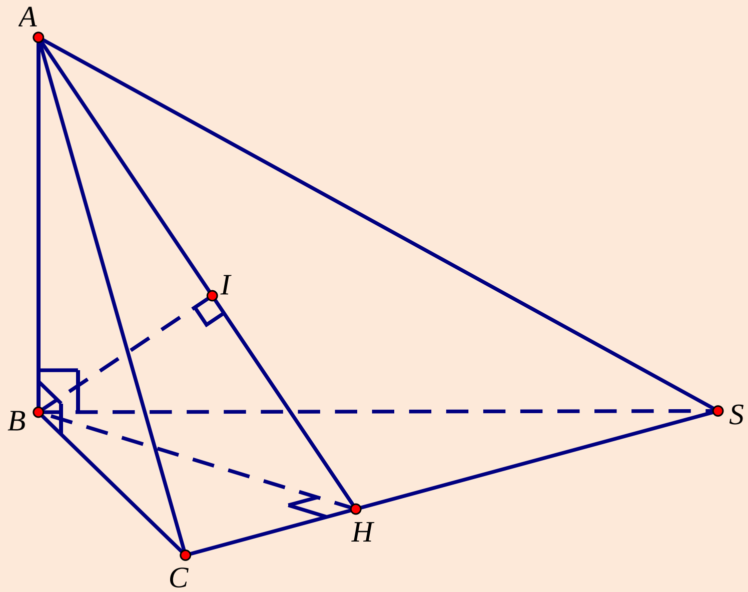
$SK = \frac{BC}{2} \Rightarrow SO^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2 + 9a^2}{4} = \frac{14a^2}{4}$

$\Rightarrow R = \frac{a\sqrt{14}}{2}$

BÀI 99 (THPT NGÔ SĨ LIÊN – BẮC GIANG (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, BA $=3a$, BC $=4a$ và AB vuông góc với mặt phẳng (SBC). Biết SB $=2a\sqrt{3}$ và góc $\widehat{SBC}=30^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Lời giải.



▪ Ta có AB vuông góc (SBC) (gt) nên $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}AB.S_{SBC}$

Từ giả thiết ta có: $S_{SBC}=\frac{1}{2}BC.BS.\sin 30^0=\frac{1}{2}.4a.2a\sqrt{3}.\frac{1}{2}=2a^2\sqrt{3}\ (dvdt)$

Khi đó $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.3a.2a^2\sqrt{3}=2a^3\sqrt{3}\ (dvtt)$.

▪ Hạ BH ⊥ SC (H ∈ SC) ta chứng minh được SC ⊥ (ABH)

Hạ BI ⊥ AH (I ∈ AH)

Từ hai kết quả trên suy ra BI ⊥ (SAC) ⇒ BI = d(B;(SAC))

Dựa vào tam giác vuông ABH tính được BI $=\frac{6a\sqrt{7}}{7}$.

BÀI 100 (THPT NGỌC TẢO)

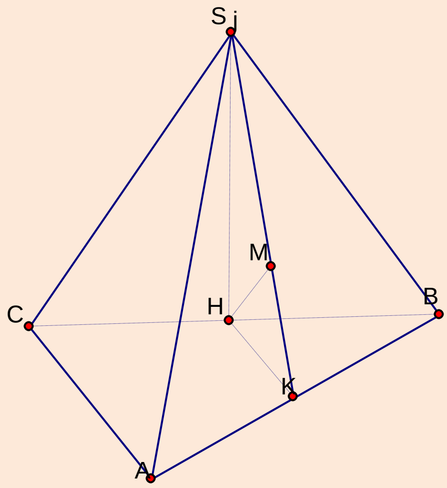
Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, $SD=\frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng (*ABCD*) là trung điểm của cạnh *AB*. Tính theo *a* thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (*SBD*).

Lời giải.

BÀI 101 (THPT NGUYỄN BÌNH – QUẢNG NINH)

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại A, AB = AC = a, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC và tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

Lời giải.



Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow HK \perp AB\,(1)$

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow AB \perp SK$

Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa SK và HK và bằng $\widehat{SKH} = 60^\circ$

Ta có $SH = HK \tan \widehat{SKH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2} AB.AC.SH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Vì $IH // SB$ nên $IH // (SAB)$. Do đó $d\left(I,(SAB)\right) = d\left(H,(SAB)\right)$

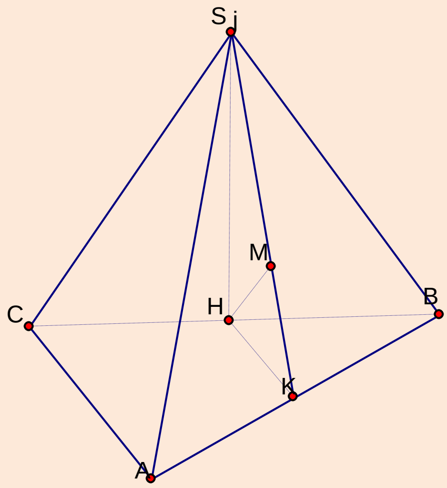
Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại M $\Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d\left(H,(SAB)\right) = HM$

Ta có $\dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d\left(I,(SAB)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

BÀI 102 (THPT NGUYỄN HUỆ – KHÁNH HÒA (LẦN 2))

Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = AC = a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

Lời giải.



Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow HK \perp AB\,(1)$

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow AB \perp SK$

Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa SK và HK và bằng $\widehat{SKH} = 60^\circ$

Ta có $SH = HK \tan \widehat{SKH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2} AB.AC.SH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Vì $IH // SB$ nên $IH // (SAB)$. Do đó $d\left(I,(SAB)\right) = d\left(H,(SAB)\right)$

Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại M $\Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d\left(H,(SAB)\right) = HM$

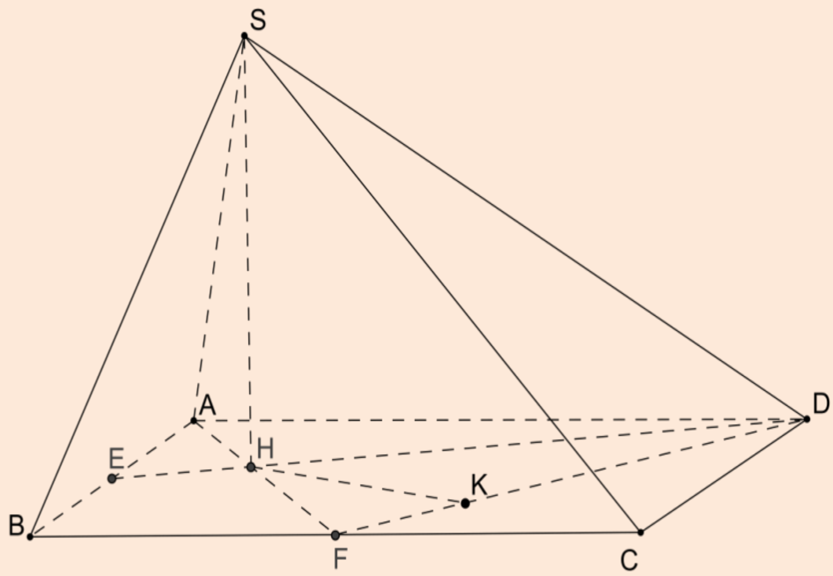
Ta có $\dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d\left(I,(SAB)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

BÀI 103 (THPT NGUYỄN HUỆ – KHÁNH HÒA (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 2a. E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC, H là giao điểm của AF và DE. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SH, DF.

Lời giải.



Do $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên $S_{ABCD} = 4a^2$.

$SH \perp (ABCD) \Rightarrow HA$ là hình chiếu vuông góc của SA trên mp$\left(ABCD\right)$

$\Rightarrow SAH = 60^0 \Rightarrow SH = AH\sqrt{3}$

$\Delta ABF = \Delta DAE\left(c.g.c\right) \Rightarrow BAF = ADE$

Mà: $AED + ADE = 90^0$ Nên $BAF + AED = 90^0 \Rightarrow AHE = 90^0 \Rightarrow DE \perp AF$

Trong ΔADE có: $AH.DE = AD.AE \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.4a^2 = \dfrac{8a^3\sqrt{15}}{15}$ (đvtt)

Trong mp $\left(ABCD\right)$ kẻ $HK \perp DF$ tại K. $\Rightarrow d\left(SH, DF\right) = HK$.

Trong ΔADE có: $DH.DE = DA^2 \Rightarrow DH = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$ Có : $DF = a\sqrt{5}$

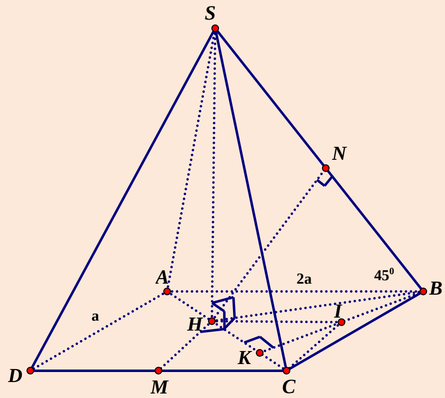
Trong ΔDHF có: $HF^2 = DF^2 - DH^2 = 5a^2 - \dfrac{16a^2}{5} = \dfrac{9a^2}{5} \Rightarrow HF = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$

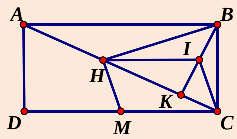
$\Rightarrow HK = \dfrac{HF.HD}{DF} = \dfrac{12a\sqrt{5}}{25}$ Vậy $d\left(SH, DF\right) = \dfrac{12a\sqrt{5}}{25}$

BÀI 104 (THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIÊU (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$, K là hình chiếu vuông góc của B lên đường chéo AC, các điểm H, M lần lượt là trung điểm của AK và DC, SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MH.

Lời giải.





Do $SH\perp(ABCD)$ nên HB là hình chiếu của SB lên $(ABCD)$

Suy ra $\left[SB;(\text{ABCD})\right]=\left(SB;HB\right)=SBH=45^0\ \Rightarrow SH=BH$

Xét tam giác vuông ABC ta có: $AC=a\sqrt{5}$, $HK=\dfrac{1}{2}AK=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$, $BK=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

Xét tam giác vuông BKH ta có

$$BH^2=BK^2+HK^2=\frac{4a^2}{5}+\frac{4a^2}{5}=\frac{8a^2}{5}\Rightarrow SH=BH=\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2a\sqrt{10}}{5}$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}AB.AD.SH=\frac{1}{3}.2a.a.\frac{2a\sqrt{10}}{5}=\frac{4a^3\sqrt{10}}{15}.$$

Gọi I là trung điểm của BK, suy ra tứ giác $HICM$ là hình bình hành

Suy ra: $HI\perp BC\ \Rightarrow\ I$ là trực tâm tam giác $BHC\ \Rightarrow CI\perp HB\ \Rightarrow MH\perp HB$

Mà HB là hình chiếu của SB lên $(ABCD)$ nên $MH\perp SB$.

Trong (SHB), kẻ $HN\perp SB\ \ (N\in SB)$, ta có:

$$\begin{cases}MH\perp HB\\ MH\perp SH\end{cases}\Rightarrow MH\perp HN$$

Suy ra HN là đoạn vuông góc chung của SB và MH. Suy ra: $d\left(SB,MH\right)=HN$

Xét tam giác vuông SHB ta có: $HN=\dfrac{1}{2}SB=\dfrac{1}{2}HB.\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\sqrt{2}=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

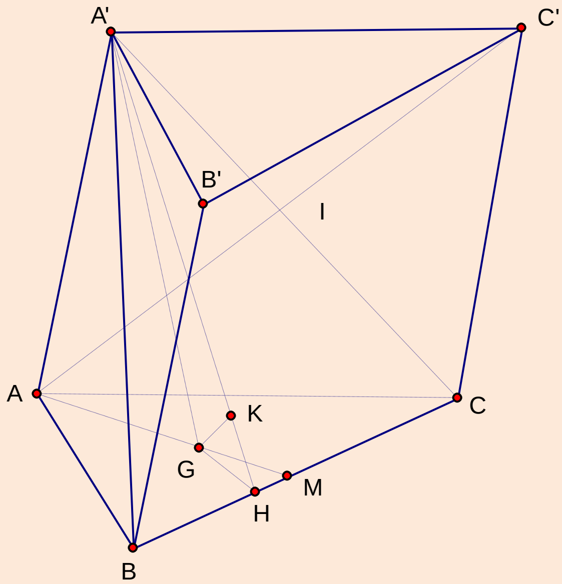
Vậy $d\left(SB,MH\right)=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

BÀI 105 (THPT NGUYỄN SIÊU (LẦN 1))

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ biết $AB=a$, $AC=2a$ và $BAC=60^0$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC, góc giữa AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a:

1. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
2. Khoảng cách từ C′ đến mặt phẳng $(A'BC)$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC, thì $G \in AM$, $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$

$A'G \perp (ABC)$, $\widehat{A'AG} = 60^0$

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Theo đính lí cosin và công thức trung tuyến ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^0 = 3a^2$

$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

$AG = \frac{a\sqrt{7}}{3} \Rightarrow A'G = AG\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

Thể tích $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'G = \frac{a^3\sqrt{7}}{2}$

Gọi $I = AC' \cap A'C$ suy ra I là trung điểm của AC′

Từ đó $d(C',(A'BC)) = d(A,(A'BC)) = 3d(G,(A'BC))$ $(do\ AM = 3GM)$

Trong (ABC) kẻ $GH \perp BC$ tại H

Trong (A′GH) kẻ $GK \perp A'H$ tại K

Ta có $GK \perp (A'BC) \Rightarrow d(G,(A'BC)) = GK$

Ta có $S_{GBC} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ ma $S_{GBC} = \frac{1}{2}GH.BC$

Suy ra $GH = \frac{2S_{GBC}}{BC} = \frac{a}{3}$

Theo hệ hức lương cho tam giác vuông

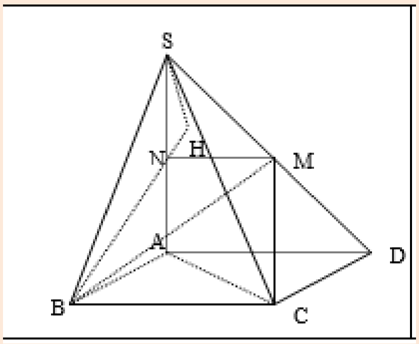
$\frac{1}{GK^2} = \frac{1}{A'G^2} + \frac{1}{GH^2} = \frac{3}{7a^2} + \frac{9}{a^2} = \frac{66}{7a^2} \Rightarrow GK = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{66}}$

Vậy $d(C',(A'BC)) = 3GK = \frac{3a\sqrt{7}}{\sqrt{66}}$

BÀI 106 (THPT NGUYỄN TRÃI - KONTUM (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật có AB= a , BC= $a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mp(ABCD), góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy (ABCD) bằng 60^0, M là trung điểm của cạnh SD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ đỉnh S đến mp(BCM).

Lời giải.



* Vì SA $\perp$ (ABCD) nên AC là hình chiếu của SC trên mp(ABCD) => góc giữa SC và (ABCD) là góc SCA = 60^0.

* $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4a^2 \Rightarrow AC = 2a$

SA = AC.tan60^0 = 2a$\sqrt{3}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = 2a^3$

* Mp(BCM) cắt SA tại N => MN // AD // BC

Dựng SH $\perp$ BN tại N, ta có:

BC $\perp$ AB và BC $\perp$ SA => BC $\perp$ (SAB)

=> BC $\perp$ SH, và vì SH $\perp$ BN nên SH $\perp$ (BCM) => SH = d(S,(BCM))

* $BN^2 = BA^2 + AN^2 = 4a^2 \Rightarrow BN = 2a$

Hai tam giác vuông NAB và NHS đồng dạng nên :

$\frac{AB}{SH} = \frac{BN}{SN} \Rightarrow SH = \frac{AB.SN}{BN} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy : d(S,(BCM)) = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

BÀI 107 (THCS & THPT NGUYỄN VIẾT XUÂN – PHÚ YÊN (LẦN 1))

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm cạnh AB, góc giữa đường thẳng A'C và mặt đáy bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACC'A').

Lời giải.

+ Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $A'H \perp (ABC)$ và $(A'C,(ABC)) = A'CH = 60^0$. Do đó

$A'H = CH.\tan 60^0 = \frac{3a}{2}$

Thể tích của khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

+ Gọi I là hình chiếu vuông góc của của H trên AC; K là hình chiếu vuông góc của H trên A'I. Suy ra $HK = d(H,(ACC'A'))$

Ta có $HI = AH.\sin IAH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HA'^2} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{13}}{26}$

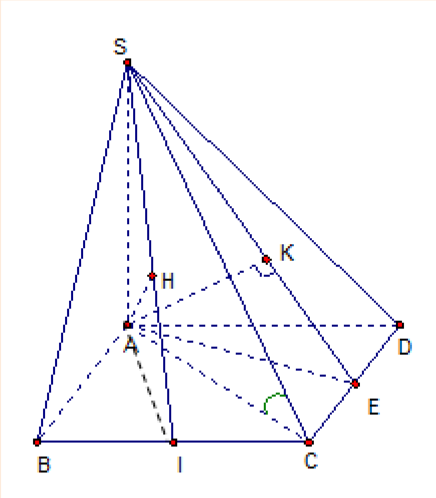
Do đó $d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)=2d\left(H,\left(ACC'A'\right)\right)=2HK=\dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$

BÀI 107 (THPT NHƯ XUÂN – THANH HÓA (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60^0$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc 60^0. Gọi I là trung điểm BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên SI.

1. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.
2. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD) theo a.

Lời giải.



a) Do $\widehat{ABC}=60^0$ nên tam giác ABC đều, suy ra $S_{ABCD}=a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $AC=a$

Mặt khác $SA\perp(ABCD)\Rightarrow \widehat{SCA}=60^0$

$\Rightarrow SA=AC.\tan 60^0=a\sqrt{3}\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{a^3}{2}$.

b) Ta có $\dfrac{HS}{IS}=\dfrac{HS.IS}{IS^2}=\dfrac{AS^2}{IS^2}=\dfrac{AS^2}{IA^2+AS^2}=\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow d\left(H,(SCD)\right)=\dfrac{4}{5}d\left(I,(SCD)\right)=\dfrac{2}{5}d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{2}{5}d\left(A,(SCD)\right)$ (vì I là trung điểm BC và AB//(SCD))

Gọi E là trung điểm CD, K là hình chiếu của A lên SE, ta có

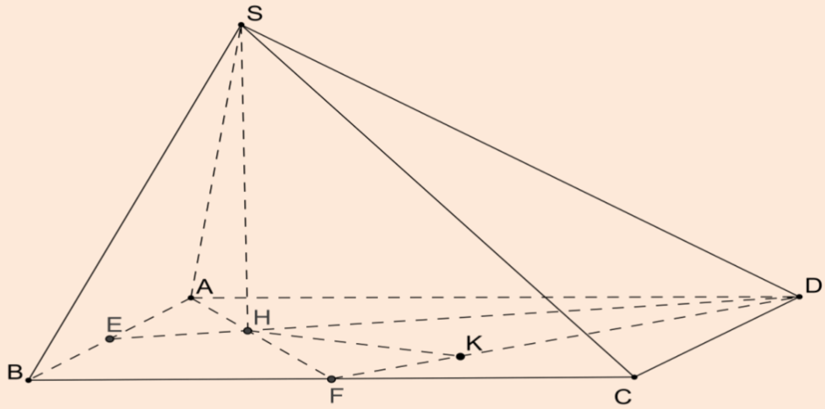
$AE\perp DC\Rightarrow DC\perp(SAE)\Rightarrow AK\perp(SCD)$

Suy ra $d\left(H,(SCD)\right)=\dfrac{2}{5}d\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{2}{5}AK=\dfrac{2}{5}\dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\dfrac{2a\sqrt{15}}{25}$.

BÀI 108 (THPT N.TRANG 2)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. E,F lần lượt là trung điểm của AB và BC, H là giao điểm của AF và DE. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SH, DF.

Lời giải.



Do $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên $S_{ABCD} = 4a^2$.

$SH \perp (ABCD) \Rightarrow HA$ là hình chiếu vuông góc của SA trên mp$\left(ABCD\right)$

$\Rightarrow SAH = 60^0 \Rightarrow SH = AH\sqrt{3}$

$\Delta ABF = \Delta DAE\left(c.g.c\right) \Rightarrow BAF = ADE$

Mà: $AED + ADE = 90^0$ Nên $BAF + AED = 90^0 \Rightarrow AHE = 90^0 \Rightarrow DE \perp AF$

Trong ΔADE có: $AH.DE = AD.AE \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.4a^2 = \dfrac{8a^3\sqrt{15}}{15}$ (đvtt)

Trong mp $\left(ABCD\right)$ kẻ $HK \perp DF$ tại K. $\Rightarrow d\left(SH, DF\right) = HK$.

Trong ΔADE có: $DH.DE = DA^2 \Rightarrow DH = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$ Có : $DF = a\sqrt{5}$

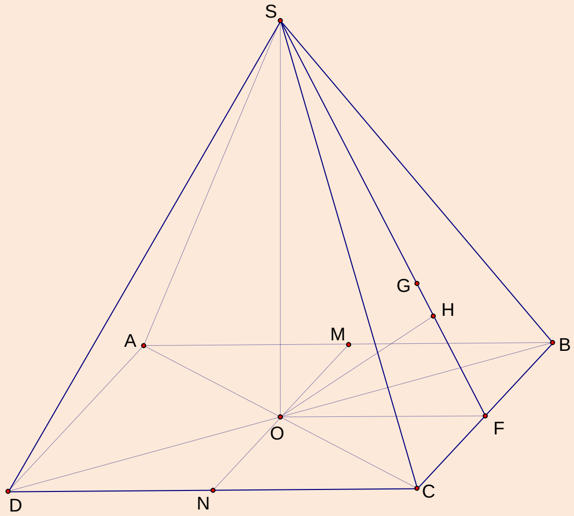
Trong ΔDHF có: $HF^2 = DF^2 - DH^2 = 5a^2 - \dfrac{16a^2}{5} = \dfrac{9a^2}{5} \Rightarrow HF = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow HK = \dfrac{HF.HD}{DF} = \dfrac{12a\sqrt{5}}{25}$ Vậy $d\left(SH, DF\right) = \dfrac{12a\sqrt{5}}{25}$

BÀI 109 (THPT PHAN BỘI CHÂU – KHÁNH HÒA (LẦN 1))

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\left(1;0;0\right); B(0;-2;3)$ và $C(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa A, B sao cho khoảng cách từ C tới (P) bằng $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên từ giả thuyết suy ra $SO \perp (ABCD)$.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow OC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$

$S_{ABCD} = 2a^2$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{3}$ (đvtt)

Lấy F là trung điểm của $BC \Rightarrow OF \perp BC \Rightarrow BC \perp (SOF)$

Trong mặt phẳng (SOF), kẽ $OH \perp SF \Rightarrow OH \perp (SBC)$

Ta có: $MN // BC \Rightarrow MN // (SBC)$

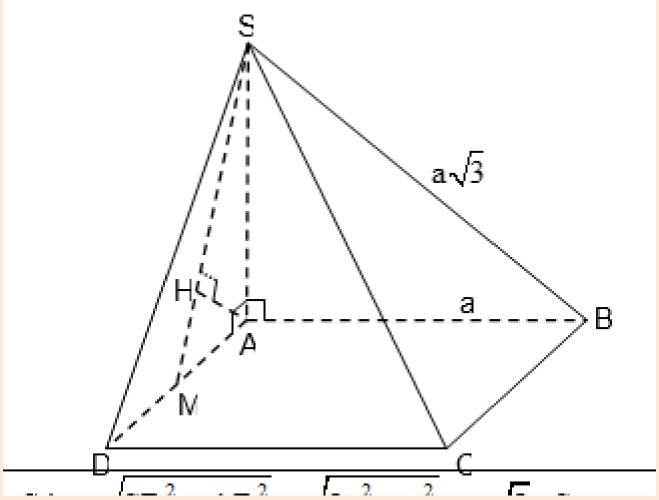
$d(MN,SG) = d(MN,(SBC)) = d(O,(SBC)) = OH$

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OF^2} + \dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{165}}{15}$. Vậy $d\left(MN,SG\right) = \dfrac{a\sqrt{165}}{15}$

BÀI 110 (THPT PHAN BỘI CHÂU – KHÁNH HÒA (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD), SB = $a\sqrt{3}$, gọi M là trung điểm AD. Tính theo a thể tích khối chóp SABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AB.

Lời giải.



+ Tính được $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = a^2$

+ $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3.\sqrt{2}}{3}$

+ Kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$) (1)

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$, mà $AD \perp AB \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AH$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ d(SM, AB) = AH

+ $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{2a^2}{9} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{3} = d(SM,AB)$

BÀI 111 (THPT PHẠM VĂN ĐỒNG – PHÚ YÊN)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy là trung điểm của AB. Biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$; góc giữa SD và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

Lời giải.

▪ Ta có: $AD = a\sqrt{2}$, $HD = \frac{3a}{2}$, $SH = DH.\tan 60^0$; $S_{ABCD} = a^2\sqrt{2}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

▪ Gọi K, I lần lượt là hình của H trên BD và SK.

Ta có: $HK = BH.\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$

Trong tam giác vuông SHK ta có: $HI = \frac{HK.SH}{\sqrt{HK^2 + SH^2}} = 3a\sqrt{\frac{3}{166}}$

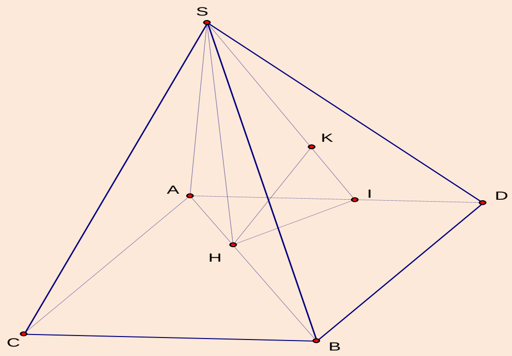
▪ $d\left(C;(SBD)\right) = d\left(A;(SBD)\right) = 2HI = 6a\sqrt{\frac{3}{166}}$.

BÀI 112 (THPT PHAN THÚC TRỰC – NGHỆN AN (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh 3a, hình chiếu của S lên mặt phẳng

(ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho AB = 3AH. Góc tạo bởi SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Lời giải.



Diện tích đáy là: dt(ΔABC) = $\frac{1}{2}$ AB.AC.Sin60^0 = $\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}$

Vì SH $\perp (ABC)$ nên góc tạo bởi SA và (ABC) là: $\angle SAH = 60^0 \Rightarrow SH = AH.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp S.ABC là: V= $\frac{1}{3}SH.dt(\Delta ABC) = \frac{9a^3}{4}$

Kẻ $AD \| BC$ thì d(SA,BC)=d(BC,(SAD))=d(B,(SAD))=3d(H,(SAD)) Vì AB=3AH

Kẻ $HI \perp AD$ và $HK \perp SI$,do $AD \perp SH$ nên $AD \perp (SHI) \Rightarrow AD \perp HK$ Suy ra:

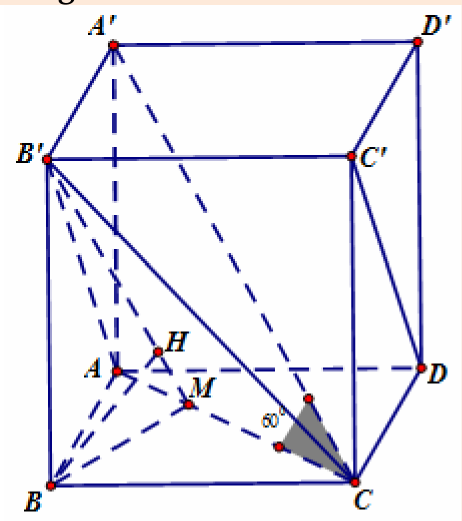
d(H,(SAD)) = HK. Ta có: HI = AH.sin$60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Trong tam giác SHI , ta có:

$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. Vậy $d(SA, BC) = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$

BÀI 113 (THPT PHÙ CỪ - HƯNG YÊN (LẦN 1)

Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Biết góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $B'C$ và $C'D$ theo a.

Lời giải.



Do $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên $A'A \perp (ABCD)$.

Suy ra góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $A'CA = 60^0$

Có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow A'A = AC.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$

ABCD là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD} = AB.AD = a^2\sqrt{3}$

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $\boxed{V = A'A.S_{ABCD} = 6a^3}$

Do C′D//AB′ nên C′D//(AB′C)

Suy ra $d(C'D, B'C) = d(C'D, (AB'C)) = d(C', (AB'C)) = d(B, (AB'C))$

Do BC′ giao với mp(AB′C) tại trung điểm của BC′ (vì BCC′B′ là hình chữ nhật)

Kẻ $BM \perp AC \Rightarrow AC \perp (BB'M) \Rightarrow (AB'C) \perp (BB'M)$ theo giao tuyến B′M

Kẻ $BH \perp B'M \Rightarrow BH \perp (AB'C)$ hay $d(B, (AB'C)) = BH$

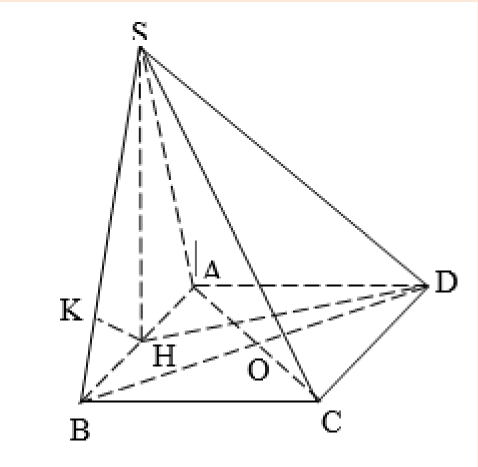
Có $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{B'B^2} + \dfrac{1}{BM^2} = \dfrac{1}{B'B^2} + \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{17}{12a^2} \Rightarrow BH = \dfrac{2a\sqrt{51}}{17}$

Vậy $\boxed{d(C'D, B'C) = \dfrac{2a\sqrt{51}}{17}}$

BÀI 114 (THPT PHÚ RIỀNG – BÌNH PHƯỚC (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, góc giữa đường thẳng SC với mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ O đến mặt phẳng SCD (O là tâm hình vuông ABCD).

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB, do tam giác SAB cân tại S nên $SH \perp AB$

Theo đề ra $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

Do đó HC là hình chiếu vuông góc của SC trên mp(ABCD)

suy ra $(SC, (ABCD)) = (SC, HC) = SCH = 60^0$

Xét tam giác BHC vuông tại H có $CH = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Xét tam giác vuông tại H có SH=AC.tan$60^0 = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

Diện tích hình vuông ABCD là : $S_{ABCD} = a^2$

suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ (đvtt)

Ta có $OH//BC \Rightarrow OH//(SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = d(H,(SBC))$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên cạnh SB, ta có $HK \perp SB$ (1)

mặt khác $BC \perp HK$ (do $BC \perp (SAB)$ (2)

từ (1) và (2) suy ra $HK \perp (SAB) \Rightarrow d\left(H,\left(SAB\right)\right) = HK$

Xét tam giác $HK = \frac{SH.BH}{\sqrt{SH^2 + BH^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{2}.\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{15a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{15}}{8}$.

BÀI 115 (THPT PHÚ RIỀNG – BÌNH PHƯỚC (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy là trung điểm của AB, góc giữa cạnh bên SC và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SA.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB. Có $SH \perp (ABC)$, tính được $SH = a\sqrt{15}$

Tính được $V_{S.ABC} = \frac{4a^3\sqrt{15}}{3}$

Qua A vẽ đường thẳng $\Delta//BD$, gọi E là hình chiếu của H lên Δ, K là hình chiếu H lên SE

Chứng minh được:d(BD,SA)=d(BD,(S,Δ))=2d(H, (S,Δ))=2HK

Tam giác EAH vuông cân tại E, $HE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

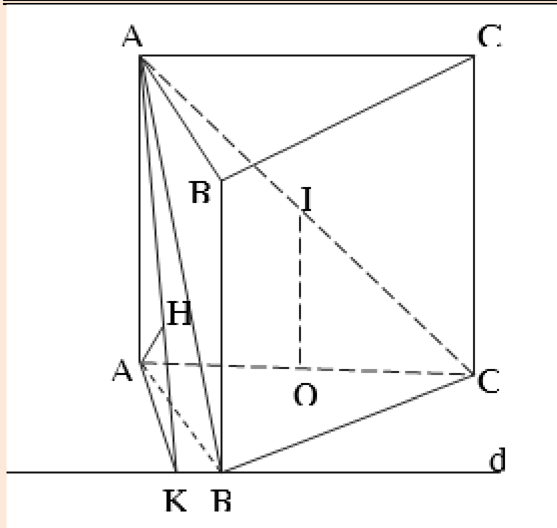
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{31}{15a^2} \Rightarrow HK = \sqrt{\frac{15}{31}}a$$

$$\Rightarrow d(BD,SA) = 2\sqrt{\frac{15}{31}}a$$

BÀI 116 (THPT PHÚ RIỀNG – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3))

Cho lăng trụ đứng $ACB.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$, $AC = a\sqrt{5}$, góc giữa hai mặt phẳng (A’BC) và mp(ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ACB.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $A'B$.

Lời giải.



Ta có: $(ABC)\cap(A'BC)=BC\ \ AB\perp BC;\quad A'B\perp BC(do\ BC\perp(AA'B'B))$

$\Rightarrow((ABC),(A'BC))=(AB,A'B)=ABA'=60^0$

Xét tam giác A'AB có SA=AB.tan60^0=$a\sqrt{3}$

Xét tam giác ABC có $BC=\sqrt{AC^2-AB}=\sqrt{5a^2-a^2}=2a$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.BC=a^2$

Thể tich khối lăng trụ $V=A'A.S_{\Delta ABC}=a\sqrt{3}.a^2=\sqrt{3}a^3$ (đvtt)

Kẻ đt (d) đi qua B song song với AC, kẻ $AK\perp(d)$ tại K, kẻ $AH\perp A'K$ tại H. khi đó ta có: $AC//(A'BK)\Rightarrow d(AC,A'B)=d(AC,(A'BK))$

Ta có: $BK\perp AB, BK\perp A'A\Rightarrow BK\perp(A'AB)\Rightarrow BK\perp AH$

Lại có: $AH\perp A'K$

$\Rightarrow d(A,(A'AB))=AH$

Dể thấy $KBA=BAC\Rightarrow\frac{AK}{AB}=\frac{BC}{AC}\Rightarrow AK=\frac{AB.BC}{AC}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

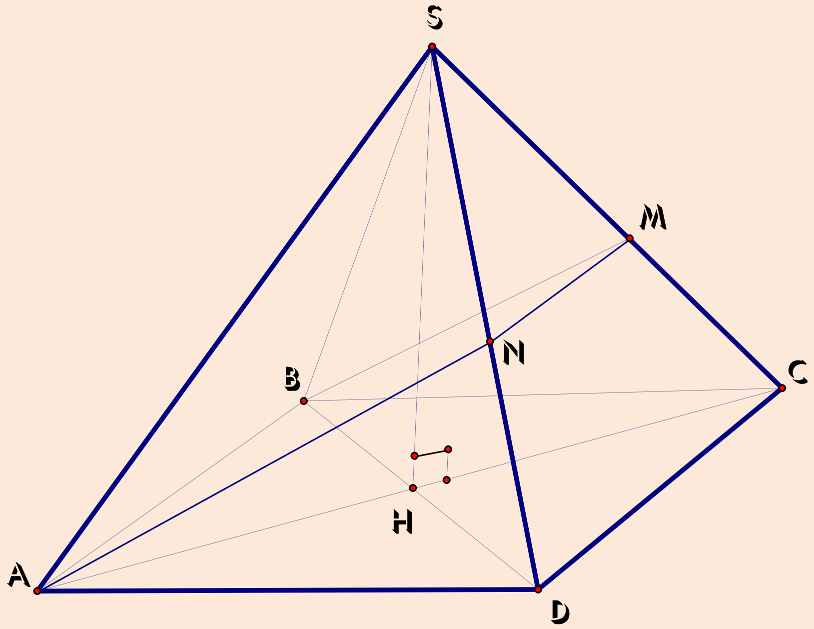
Xét tam giác A'AB có $AH=\frac{A'A.AK}{\sqrt{A'A^2+AK^2}}=\frac{3a\sqrt{35}}{21}$

Vậy $d(AC,A'B)=AH=\frac{3a\sqrt{35}}{21}$.

BÀI 117 (THPT PHÚ XUYÊN B)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy, cạnh bên cùng bằng a. Gọi M là trung điểm của SC. Tính thể tích của hình chóp S.ABCD và khoảng cách từ S đến mp(ABM) theo a.

Lời giải.



) Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH$ Vì S.ABCD là hình chóp tứ giác đều có các cạnh bên bằng nhau và $SH \perp (ABCD)$. Ta có $S_{ABCD} = a^2$

Xét tam giác SAC vuông tại S nên SH là trung tuyến và là đường cao của tam giác nên ta có

$SH = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}(AC^2 = 2a^2)$

Vậy: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$□

) Vì M là trung điểm SC nên mp(ABM) cắt SD tại N là trung điểm SD.

Ta có $V_{S.ABMN} = V_{S.ABN} + V_{S.BMN}$

Mặt khác $\Delta BCD = \Delta ABD \Rightarrow V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$

Xét tỉ số $\frac{V_{S.ABN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA.SB.SN}{SA.SB.SD} = \frac{1}{2}$ (vì N là trung điểm SD)

$\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BCD}} = \frac{SB.SM.SN}{SB.SC.SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$V_{S.ABMN} = V_{S.ABN} + V_{S.BMN} = \frac{1}{2}V_{S.ABD} + \frac{1}{4}V_{S.BCD}$

$= \frac{1}{4}V_{S.ABDC} + \frac{1}{8}V_{S.ABCD} = \frac{3}{8}V_{S.ABCD} = \frac{3}{8}.\frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{16}$□

Mà ABMN là hình thang cân có AB = a ;

$$MN = \frac{a}{2}; AN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow đ\,cao\,MK = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{11}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{ABMN} = \frac{a + \frac{a}{2}}{2}.\frac{a\sqrt{11}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{11}}{16}\ .$$

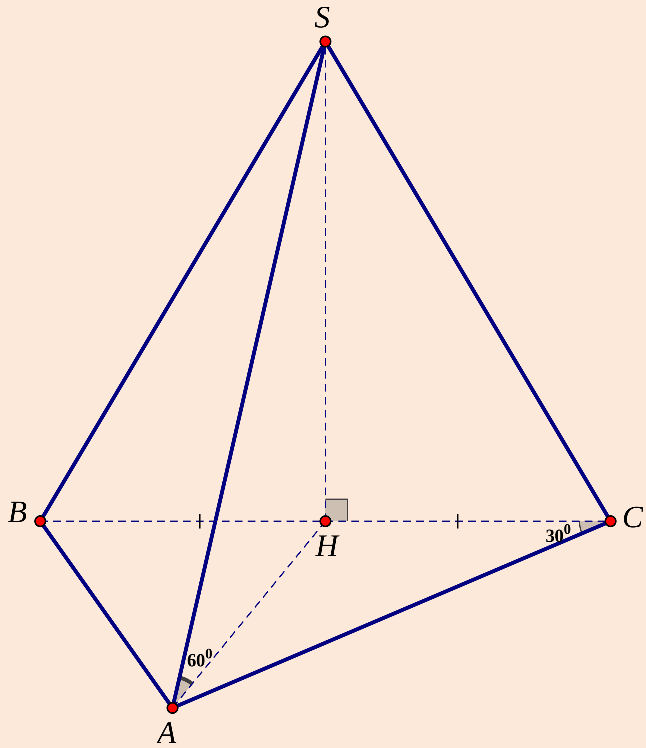
Mà $V_{S.ABMN} = \frac{1}{3}S_{ABMN}.d \Rightarrow d = \frac{3V_{S.ABMN}}{S_{ABMN}}$

$$d_{(S,(ABM))} = d = \frac{\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}}{\frac{3a^2\sqrt{11}}{16}} = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$$

BÀI 118 (THPT QUANG HÀ – VĨNH PHÚC (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, BC = a$ và góc $ACB = 30^0$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm cạnh BC. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$, biết rằng SA tạo với đáy một góc 60^0.

Lời giải.



Trong tam giác ABC vuông tại A, ta có:

$AB = BC.\sin 30^0 = a.\frac{1}{2} = \frac{a}{2}$, $AC = BC.cos30^0 = a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

Gọi H là trung điểm của BC. Ta có: $AH = \frac{a}{2}$ và $SH \perp (ABC)$.

AH là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC) nên góc (SA; (ABC))= (SA, AH) = $\angle SAH = 60^0$.

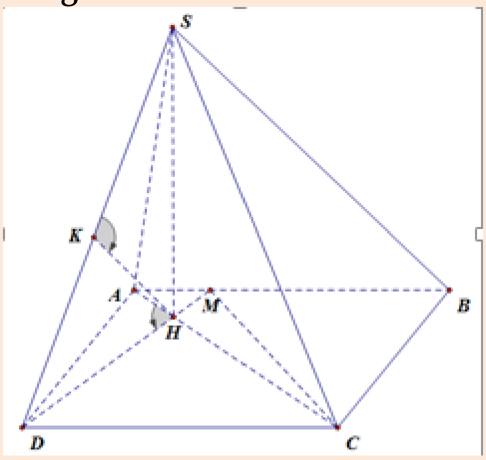
Suy ra: SH = $\tan 60^0.AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{16}$.

BÀI 119 (THPT QUỐC OAI – HÀ NỘI (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a; AD = a$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a}{2}$, H là giao điểm của AC và MD. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a$. Tính thể tích khối chóp $S.ADCM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC theo a.

Lời giải.



Ta có:

$$S_{ADCM} = S_{ABCD} - S_{BCM} = 2a^2 - \frac{3a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

$$\Rightarrow V_{S.ADCM} = \frac{1}{3}S_{ADCM}.SH = \frac{5a^3}{12}$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ADCM$ là $\frac{5a^3}{12}$ (đvdt).

Ta có:

$$\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}^2$$

$$= \frac{a}{2}.2a + 0 - 0 - a^2 = 0 \Rightarrow DM \perp AC$$

Mặt khác $SH \perp AC$ nên $(SHD) \perp AC$.

Trong (SHD), kẻ $HK \perp SD$. Do $(SHD) \perp AC$ nên $HK \perp AC$.

Vậy HK là đoạn vuông góc chung của SD và AC nên $d(SD; AC) = HK$.

Vì $AM \parallel CD$ nên $\Delta AMH \sim \Delta CDH \Rightarrow HD = 4HM = \frac{4}{5}DM = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Xét tam giác vuông SHD có HK là đường cao:

$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HD^2} + \frac{1}{HS^2} \Rightarrow HK = \frac{2a}{3}.$$

Vậy khoảng cách giữa SD và AC là $d(SD; AC) = HK = \frac{2a}{3}$.

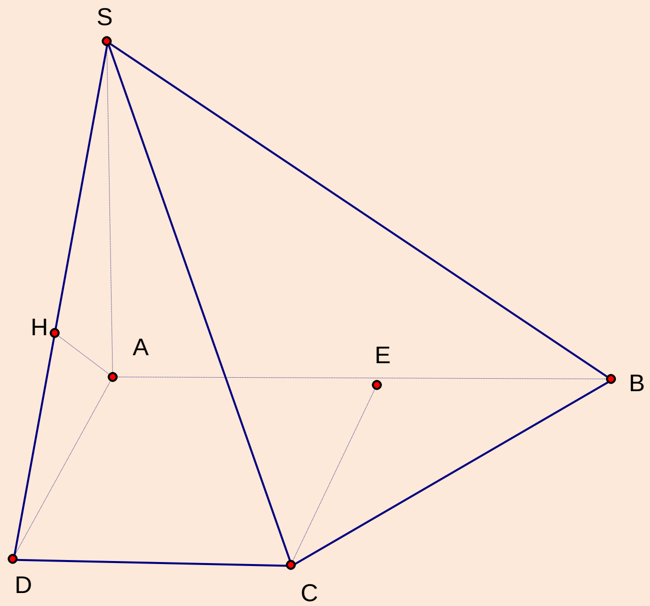
BÀI 120 (THPT QUỲNH LƯU 1 – NGHỆ AN (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A,D, SA vuông góc với đáy . SA = AD= a ,AB = 2a .

1. Tính thể tích khối chóp S.ABC .

2. Tính khoảng cách giữa AB và SC .

Lời giải.



SA vuông góc với mp đáy nên SA là đường cao của khối chóp , SA = a

Trong mặt phẳng đáy từ C kẻ CE // DA , E thuộc AB suy ra CE vuông góc với AB và CE = DA = a là đường cao của tam giác CAB

Diện tích tam giác là S = $\frac{1}{2}$CE.AB = a^2

Thể tích khối chóp S.ABC là V = $\frac{1}{3}a^3$

Tính khoảng cách giữa AB và SC

Ta có AB//DC nên d(AB,SC) = d(AB, SDC) . Trong mặt phẳng (SAD)từ A kẻ AH vuông góc với SD (1) , H thuộc SD

Ta có DC vuông góc với AD , DC vuông góc SA nên DC vuông góc với mp(SAD) suy ra DC vuông góc AH (2) .

Từ (1) và (2) suy ra AH vuông góc với (SDC)

AH = d(AB, SDC) = d(AB , SC)

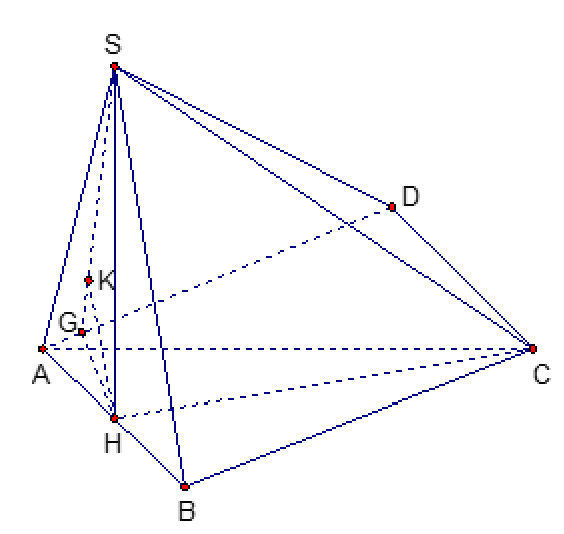
Trong tam giác vuông SAD ta có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{2}{a^2} \Rightarrow$ AH = $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

BÀI 121 (THPT QUỲNH LƯU 3 – NGHỆ AN (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABC có tam giác SAB đều cạnh a, tam giác ABC cân tại C. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB; góc hợp bởi cạnh SC và mặt đáy là 30^0.

1. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.
2. Tính khoảng cách của hai đường thẳng SA và BC.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm cạnh AB ta có SH là đường cao của hình chóp S.ABC và CH là đường cao tam giác ABC. Từ giả thiết ta được $SCH = 30^0$. Tam giác SHC vuông tại H nên $\frac{SH}{CH} = \tan 30^0 \Rightarrow CH = SH\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$ Vây, thể tích khối chóp S.ABC là:

$V = \frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}AB.CH = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ (đvtt)

Dựng hình bình hành ABCD, khi đó

$d\left(BC, SA\right) = d\left(BC, (SAD)\right) = d\left(B, (SAD)\right) = 2d\left(H, (SAD)\right)$

Gọi G, K lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng AD và SG ta có:

$\left.\begin{matrix} AD \perp HG \\ AD \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \perp (SHG) \Rightarrow HK \perp AD$

mà $HK \perp SG$ nên $HK \perp (SAD)$ hay $d\left(H, (SAD)\right) = HK$

Tam giác SHG vuông tại H nên

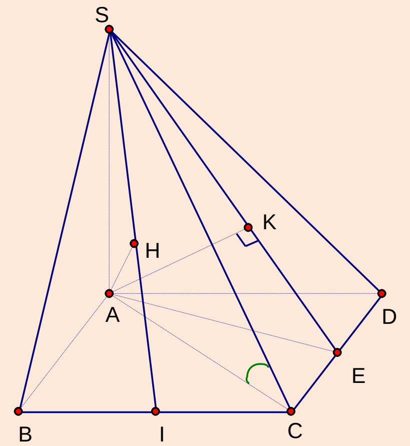
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HG^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{52}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$$

Vậy, $d\left(BC, SA\right) = \frac{3a}{\sqrt{13}}$.

BÀI 122 (THPT SỐ 1 BẢO YÊN – LÀO CAI)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\angle ABC = 60^0$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc 60^0. Gọi I là trung điểm BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên SI. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD) theo a.

Lời giải.



Do $\angle ABC = 60^0$ nên tam giác ABC đều, suy ra $S_{ABCD} = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $AC = a$

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \angle SCA = 60^0 \Rightarrow SA = AC.\tan 60^0 = a\sqrt{3} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{2}$.

Ta có $\dfrac{HS}{IS} = \dfrac{HS.IS}{IS^2} = \dfrac{AS^2}{IS^2} = \dfrac{AS^2}{IA^2 + AS^2} = \dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow d\left(H,(SCD)\right) = \dfrac{4}{5}d\left(I,(SCD)\right) = \dfrac{2}{5}d\left(B,(SCD)\right) = \dfrac{2}{5}d\left(A,(SCD)\right)$

(vì I là trung điểm BC và AB//(SBC))

Gọi E là trung điểm CD, K là hình chiếu của A lên SE, ta có

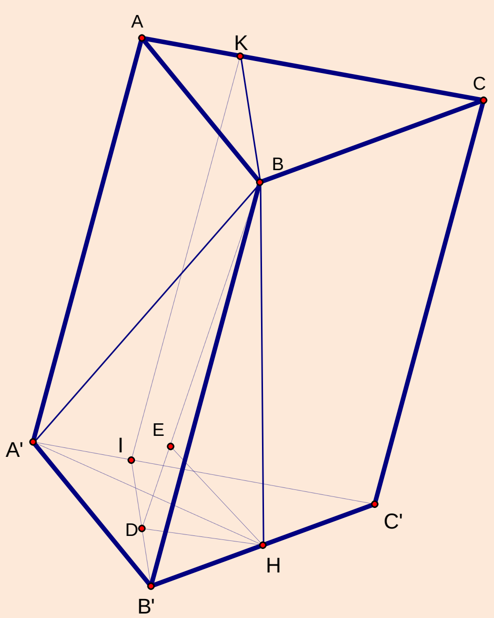
$AE \perp DC \Rightarrow DC \perp (SAE) \Rightarrow DC \perp AK \Rightarrow AK \perp (SCD)$

Suy ra $d\left(H,(SCD)\right) = \dfrac{2}{5}d\left(A,(SCD)\right) = \dfrac{2}{5}AK = \dfrac{2}{5}\dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{2a\sqrt{15}}{25}$.

BÀI 123 (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG (LẦN 1))

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có đáy là một tam giác đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm H của cạnh $B'C'$, K là điểm trên cạnh AC sao cho $CK=2AK$ và $BA' = 2a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và BK theo a.

Lời giải.



Vì $BH \perp (A'B'C')$ nên tam giác $A'BH$ vuông tại H

Tính được $A'H = a\sqrt{3},\ BH = 3a$

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{A'B'C'}.BH = \dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4}.3a = 3\sqrt{3}.a^3$ (đvtt)

Qua K kẻ đường thẳng song song với CC′ cắt A′C′ tại I. Ta có $CC' // (KBB'I)$ nên $d(CC',KB) = d(C',(KBB'I)) = 2\,d(H,(KBB'I))$.

Dựng $HD \perp B'I$. Khi đó $IB' \perp (BDH)$ suy ra $(KBB'I) \perp (BDH)$

Dựng $HE \perp BD$ suy ra $HE \perp (KBB'I)$.

Tính được $B'I = \dfrac{a\sqrt{28}}{3}, HD = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}, HE = \dfrac{3a}{\sqrt{22}}$.

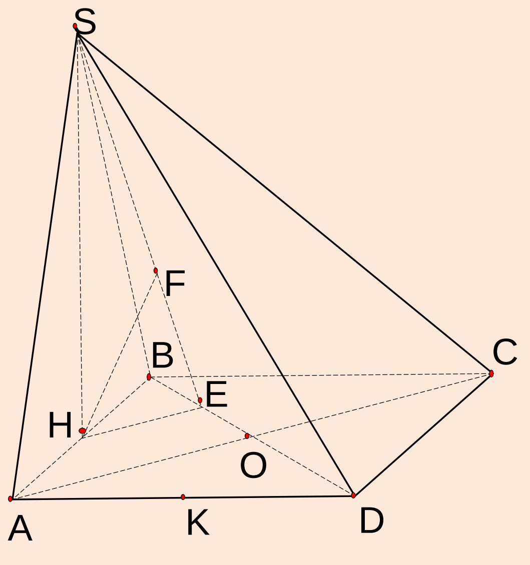
$\Rightarrow d(H;(KBB'I)) = HE = \dfrac{3a}{\sqrt{22}}$.

Vậy $d(CC',KB) = \dfrac{3a\sqrt{22}}{11}$.

BÀI 124 (SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD = \dfrac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD.

Lời giải.



Từ giả thiết ta có SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$ và

$SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{SD^2 - (AH^2 + AD^2)} = \sqrt{(\frac{3a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2 - a^2} = a$

Diện tích của hình vuông $ABCD$ là a^2, $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a.a^2 = \dfrac{a^3}{3}$

Từ giả thiết ta có $HK // BD \Rightarrow HK // (SBD)$

Do vậy: $d(HK,SD)=d(H,(SBD))$ (1)

Gọi E là hình chiếu vuông góc của H lên BD, F là hình chiếu vuông góc của H lên SE

Ta có $BD\perp SH, BD\perp HE \Rightarrow BD\perp (SHE) \Rightarrow BD\perp HF$ mà $HF\perp SE$ nên suy ra

$HF\perp (SBD) \Rightarrow HF = d(H,(SBD))$ (2)

+) $HE = HB.\sin HBE = \frac{a}{2}.\sin 45^0 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

+) Xét tam giác vuông SHE có:

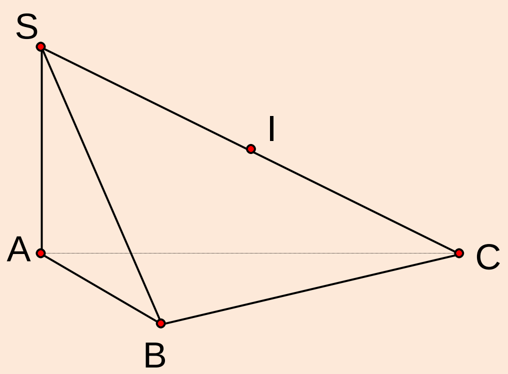
$$HF.SE = SH.HE \Rightarrow HF = \frac{SH.HE}{SE} = \frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{(\frac{a\sqrt{2}}{4})^2 + a^2}} = \frac{a}{3} \quad (3)$$

+) Từ (1), (2), (3) ta có $d(HK,SD)=\frac{a}{3}$.

BÀI 125 (SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp (ABC), ABC = 90^0, AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA = 2a$. Chứng minh trung điểm I của cạnh SC là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và tính diện tích mặt cầu đó theo a.

Lời giải.



Vì $SA\perp (ABC) \Rightarrow SA\perp BC$

Mặt khác theo giả thiết $AB\perp BC$, nên $BC\perp (SAB)$ và do đó $BC\perp SB$

Ta có tam giác SBC vuông đỉnh B; tam giác SAB vuông đỉnh A nên

$IA = IB = \frac{SC}{2} = IS = IC$ (*)

Vậy điểm I cách đều bốn đỉnh của hình chóp, do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.ABC$

Từ (*) ta có bán kính của mặt cầu là $R = \frac{SC}{2}$

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$

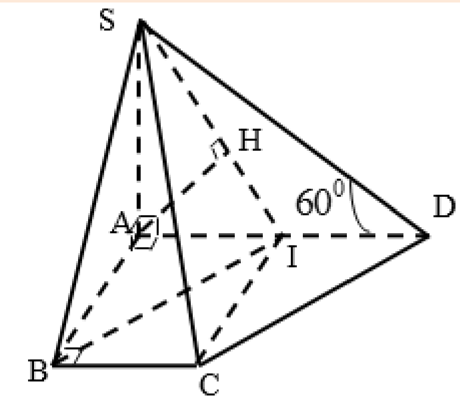
$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}a \Rightarrow R = a\sqrt{2}$

Diện tích mặt cầu là $4\pi R^2 = 8\pi a^2$

BÀI 126 (THPT TRẦN CAO VÂN – KHÁNH HÒA)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2a$, $AB = BC = a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), góc giữa đường thẳng SD với mặt phẳng (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD theo a và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

Lời giải.



$SDA = (SD, (ABCD)) = 60^0$

Suy ra: $SA = 2a\sqrt{3}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SA.\frac{(AD+BC).AB}{2} = a^3\sqrt{3}$

Gọi I là trung điểm của AD

$\Rightarrow CD // BI \subset (SBI)$

$\Rightarrow d(SB, CD) = d(D, (SBI)) = d(A, (SBI))$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SI

Chứng minh được: $d(A, (SBI)) = AH$

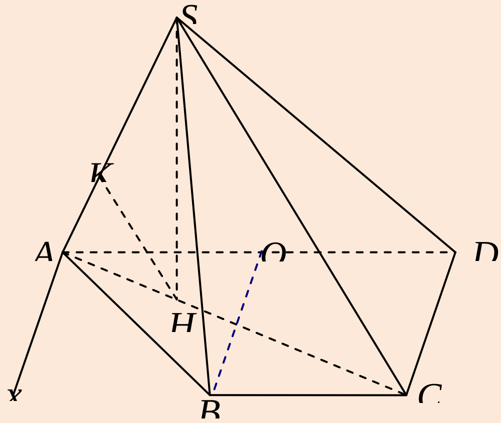
Trong ΔSAI vuông tại A, có:

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{12a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{13}{12a^2}$. Suy ra: $AH = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$

BÀI 127 (SỞ GD&ĐT THANH HÓA (LẦN 1))

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang cân, *AD* là đáy lớn, $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. Hình chiếu vuông góc của *S* lên mặt phẳng (*ABCD*) là điểm *H* thuộc đoạn thẳng *AC* sao cho $HC = 2HA$. Góc giữa hai mặt phẳng (*SCD*) và (*ABCD*) bằng 60^0. Tính theo *a* thể tích của khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *SA* và *CD*.

Lời giải.



$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow HC = \frac{2}{3}AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$SH = HC.\tan 60^0 = 2a$

Gọi O là trung điểm của AD, khi đó $S_{ABCD} = 3S_{AOB} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD}$

$= \frac{1}{3}.2a.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ (đvtt).

Kẻ đường thẳng Ax song song với CD, gọi (P) là mặt phẳng chứa SA và Ax, khi đó $AC//(P)$ .Suy ra $d(CD;SA) = d(CD,(P)) = d(C,(P)) = 3d(H,(P))$ (Do $CA = 3HA$).

Ta có $AC \perp CD$ nên $HA \perp Ax$ mà $SH \perp Ax$ suy ra $Ax \perp (SAH)$.

Từ H kẻ $HK \perp SA$ ($K \in SA$), khi đó $Ax \perp HK \Rightarrow HK \perp (P)$ nên $HK = d(H,(P))$.

$AH = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{13}{4a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{13}}{13}$

Vậy $d(SA,CD) = \frac{6a\sqrt{13}}{13}$ (đvđd)

BÀI 128 (SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH)

Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi cạnh a, góc ACB = 60 , mặt phẳng (A'BD) tạo với đáy một góc 60^0 . Tính theo a thể tích khối hộp và khoảng cách giữa hai đường thẳng CD', BD.

Lời giải.

$V = \frac{3a^3}{4}$ $d\left(\text{CD}',\text{DB}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

BÀI 129 (SỞ GD&ĐT HẢI PHÒNG)

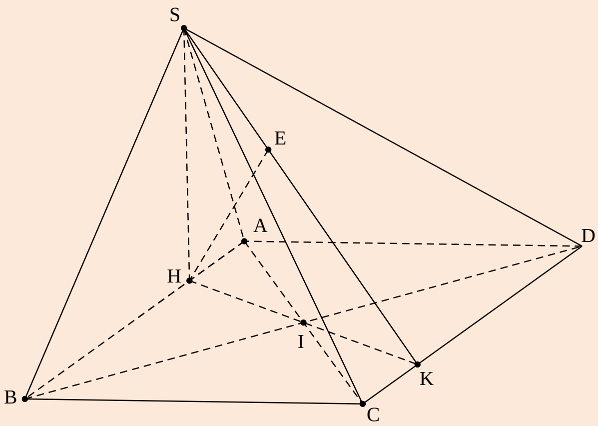
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O và SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Trên cạnh SB lấy điểm M sao cho MB=2MS . Gọi N là trung điểm của CD, góc giữa SN và mặt phẳng (ABCD) bằng 60^0 . Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và cosin góc giữa MN với mặt phẳng (ABCD).

Lời giải.

BÀI 130 (THPT SÔNG LÔ (LẦN 2))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, $BAD=120^\circ$. Mặt bên SAB là tam giác vuông tại S; $SA=a$, $SB=a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm I đến (SCD) theo a.

Lời giải.



Ta có $AB^2=SA^2+SB^2 \Rightarrow AB=2a.$

$$S_{ABCD}=AB.AD.\sin 120^\circ=2a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=2a^2\sqrt{3}.$$

Kẻ $SH\perp AB$ $(H\in AB)$. Do $(SAB)\perp(ABCD)$ nên $SH\perp(ABCD)$.

$$\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2\sqrt{3}=a^3.$

Ta có $AH=\sqrt{SA^2-SH^2}=\frac{a}{2}$. Kẻ $IP\perp AB$ $(P\in AB)\Rightarrow AP=AI.\sin 30^\circ=\frac{a}{2}.$

Do đó $H\equiv P\Rightarrow HI\perp AB$. Gọi K là giao điểm của HI và CD, ta có $HK=2IH=a\sqrt{3}$

Nhận xét $\frac{d(I;(SCD))}{d(H;(SCD))}=\frac{IK}{HK}=\frac{1}{2}\Rightarrow d(I;(SCD))=\frac{1}{2}d(H;(SCD)).$

Ta có $\begin{cases}CD\perp SH\\ CD\perp HK\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SHK)\Rightarrow(SHK)\perp(SCD).$

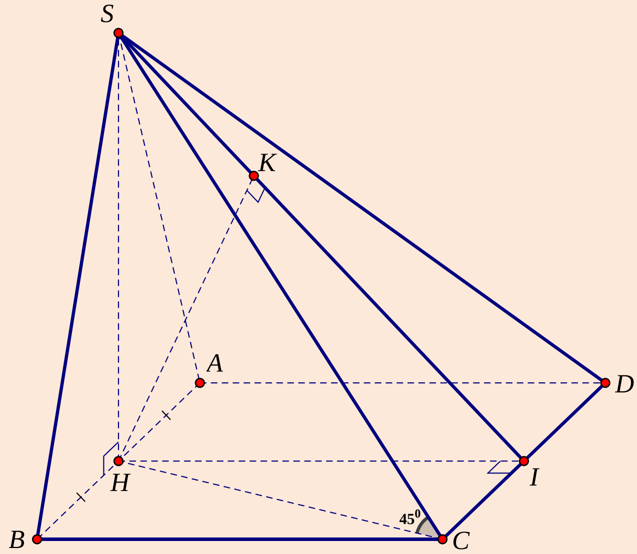
Kẻ $HE\perp SK$ $(E\in SK)\Rightarrow HE\perp(SCD)\Rightarrow d(H;(SCD))=HE\Rightarrow d(I;(SCD))=\frac{1}{2}HE.$

$$\frac{1}{HE^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HK^2}\Rightarrow HE=a\sqrt{\frac{3}{5}}.$$ Vậy $d(I;(SCD))=\frac{a\sqrt{15}}{10}.$

BÀI 131 (THPT TAM ĐẢO – VĨNH PHÚC (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với cạnh $AB=2a, AD=a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của AB, SC tạo với đáy một góc bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SCD).

Lời giải.



▪ Vì SH là đường cao của hình chóp S.ABCD nên HC là hình chiếu của SC trên (ABCD). Do đó góc giữa (SC;(ABCD)) bằng góc giữa (HC;SC) và bằng $\widehat{SCH} = 45^0$.

Xét ΔBHC vuông tại B, ta có: $HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Xét ΔSHC vuông tại H, ta có: $SH = HC.\tan 45^0 = a\sqrt{2}.1 = a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{\square ABCD} = \frac{1}{3}.\mathrm{SH}.\mathrm{AB}.\mathrm{AD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.2a.a = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$ (đvtt).

▪ Vì AB // CD nên $d\left(A;\left(SCD\right)\right) = d\left(H;\left(SCD\right)\right)$.

Kẻ HI $\perp$ CD (I là trung điểm của CD), suy ra ta có: $\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SH \end{cases} \Leftrightarrow CD \perp \left(SHI\right)$

Kẻ HK $\perp$ SI, suy ra ta có: $\begin{cases} SI \perp HK \\ CD \perp HK \subset \left(SHI\right) \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{HK} \perp \left(SCD\right)$

Vậy $d\left(A;\left(SCD\right)\right) = d\left(H;\left(SCD\right)\right) = HK$

Xét ΔSHI vuông tại H, ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow \mathrm{HK} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Kết luận: $V_{S.ABCD} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$, $d\left(A;\left(SCD\right)\right) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

BÀI 132 (THPT TRẦN BÌNH TRỌNG – KHÁNH HÒA (ĐỀ 1))

Cho hình chóp SABCD có đáy là hình chữ nhật, AB= a, AD= 2a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh SB và đáy là 45°.

a/ Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

b/ Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD.

Lời giải.

a/ Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Chỉ ra góc SBA bằng 45° và tính được SA= a.

$V_{\mathrm{SABCD}} = \frac{1}{3}SA.\mathrm{dt(ABCD)} = \frac{1}{3}.a.2a^2 = \frac{1}{3}a^3$

b/ Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD.

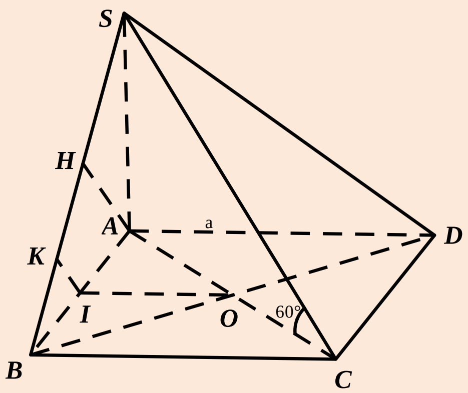
Chứng minh được các góc SBC = góc SDC = góc SAC = 90° suy ra các đỉnh của hình chóp nằm trên mặt cầu đường kính SC.

R= SC/2= $\sqrt{SA^2+AC^2}=a\sqrt{6} => V_{KCau}=\frac{4}{3}pi.R^3=8\sqrt{6}pi.a^3$.

BÀI 133 (THPT TRẦN BÌNH TRỌNG – KHÁNH HÒA (ĐỀ 2))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy, góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC), trong đó O là giao điểm của AC và BD.

Lời giải.



Lập luận suy ra $SA\perp(ABCD), SCA=60^0$, $SA=a\sqrt{6}$.

$V=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{1}{3}a^2.a\sqrt{6}=\frac{1}{3}a^3\sqrt{6}$ (đvtt)

Gọi I là trung điểm của AB, kẻ AH vuông góc SA, OI//BC. Dựng IK//AH

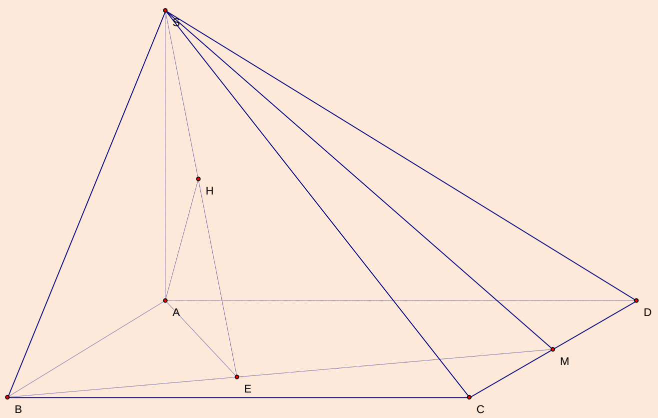
Suy ra IK vuông góc (SBC).

Tính được $IK=\frac{1}{2}AH=\frac{a\sqrt{42}}{14}$.

BÀI 134 (THPT THẠCH THÀNH I – THANH HÓA (LẦN 3))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=2a,$ $SA\perp(ABCD), SA=a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBM), với M là trung điểm của cạnh CD.

Lời giải.



$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a.a.2a=\frac{2a^3}{3}$.

Kẻ $AE\perp BM, AH\perp SE$. Suy ra $AH\perp(SBM)$.

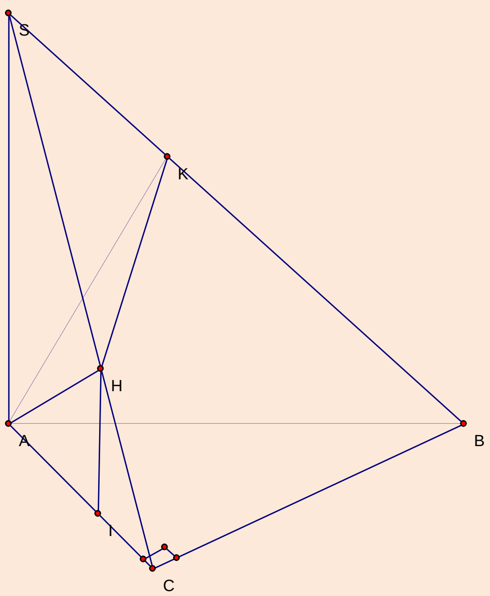
$AE = \dfrac{2.S_{ABM}}{BM} = \dfrac{2a^2}{\sqrt{4a^2 + \dfrac{a^2}{4}}} = \dfrac{4a}{\sqrt{17}}$;

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{17}{16a^2} = \dfrac{33}{16a^2} \Rightarrow d(A,(SBM)) = AH = \dfrac{4a}{\sqrt{33}}$

BÀI 135 (THPT THẠCH THÀNH I – THANH HÓA (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SA bằng $2a$, tam giác ABC vuông ở C có $AB = 2a$, $CAB = 30^\circ$. Gọi H là hình chiếu vuông của A trên SC. Tính theo a thể tích của khối chóp $H.ABC$. Tính cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng $(SAB),(SBC)$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAC), kẻ HI song song với SA thì $HI \perp (ABC)$.

Ta có $CA = AB\cos 30^\circ = a\sqrt{3}$. Do đó $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}.2a.a\sqrt{3}.\sin 30^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\dfrac{HI}{SA} = \dfrac{HC}{SC} = \dfrac{HC.SC}{SC^2} = \dfrac{AC^2}{SC^2} = \dfrac{AC^2}{SA^2 + AC^2} = \dfrac{3a^2}{4a^2 + 3a^2} = \dfrac{3}{7} \Rightarrow HI = \dfrac{6}{7}a$.

Vậy $V_{H.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.HI = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{6}{7}a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{7}$.

(Cách khác: $V_{H.ABC} = V_{B.AHC} = \dfrac{1}{3}S_{AHC}.BC$)

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Ta có $AH \perp SC, AH \perp CB$ (do $CB \perp (SAC)$), suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SB$.

Lại có: $SB \perp AK$, suy ra $SB \perp (AHK)$. Vậy góc giữa giữa hai mặt phẳng $(SAB),(SBC)$ là HKA.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{7}{12a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a.2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$;

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{1}{2a^2} \Rightarrow AK = a\sqrt{2}$.

Tam giác HKA vuông tại H (vì $AH \perp (SBC), (SBC) \supset HK$).

$$\sin HKA = \frac{AH}{AK} = \frac{\frac{a.2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \cos HKA = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

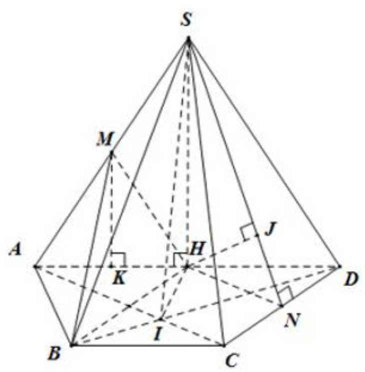
BÀI 136 (THPT THĂNG LONG –HÀ NỘI (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 2a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M là trung điểm SA, I là giao điểm của AC và BD

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD. Tính thể tích khối tứ diện MBCD.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BM.

Lời giải.



a) Gọi H là trung điểm của AD. Vì tam giác SAD đều nên SH ⊥ AD.

Mà (SAD) ⊥ (ABCD) nên SH ⊥ (ABCD)

Tam giác SAD đều nên: $SH = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Diện tích hình thang vuông ABCD: $S_{ABCD} = \frac{AB.(AD+BC)}{2} = \frac{a(a+2a)}{2} = \frac{3a^2}{2}$

Thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Gọi K là trung điểm AH, MK là đường trung bình của tam giác SAH nên MK // AH và $MK = \frac{SH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra MK ⊥ (BCD)

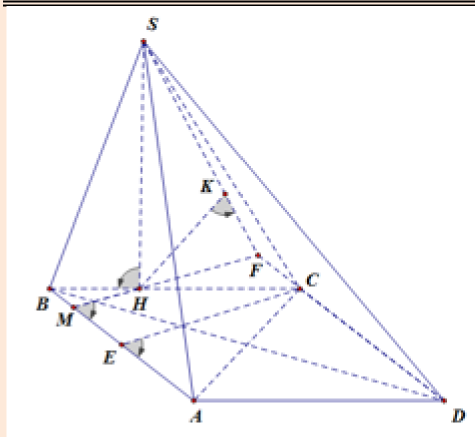
Vì AD // BC nên $S_{BCD} = S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^2}{2}$

Thể tích khối tứ diện: $V_{MBCD} = \frac{1}{3}MK.S_{BCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

BÀI 137 (THPT THANH CHƯƠNG I – NGHỆ AN (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh BC sao cho $HC = 2HB$, góc giữa SA và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

Lời giải.



Áp dụng định lý cosin trong tam giác AHB có:

$$AH^2 = HB^2 + AB^2 - 2HB.AB.\cos 60^0 = \frac{7a^2}{9} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SAH} = 45^0$.

Tam giác SAH vuông cân tại H nên $SH = AH = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Thể tích của khối chóp S.ABC là $V = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.AH = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{36}$.

Gọi E là trung điểm của AB, D là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCD.

Ta có: $AB \parallel CD \Rightarrow d\left(AB, SC\right) = d\left(AB, SCD\right) = d\left(B, SCD\right) = \dfrac{3}{2}d\left(H, SCD\right)$.

Trong mặt phẳng (ABC), qua H kẻ đường thẳng song song với CE, cắt đường thẳng CD tại F và AB tại M thì tứ giác CEMF là hình chữ nhật. Kẻ HK vuông góc với SF tại K.

$CD \perp \left(SFM\right) \Rightarrow CD \perp HK$,

$$\left.\begin{matrix} CD \perp HK \\ SF \perp HK \end{matrix}\right\} \Rightarrow HK \perp \left(SCD\right).$$

Ta có: $HF = \dfrac{2}{3}MF = \dfrac{2}{3}CE = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

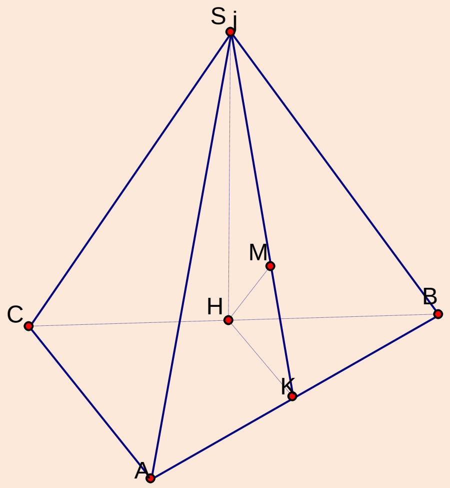
Tam giác SHF vuông tại H: $\dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{FH^2} = \dfrac{1}{HK^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{210}}{30}$

Do đó: $d\left(AB, SC\right) = \dfrac{3}{2}d\left(H, SCD\right)\dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{210}}{20}$.

BÀI 138 (THPT THANH CHƯƠNG III – NGHỆ AN (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = AC = a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $\left(SAB\right)$ theo a.

Lời giải.



Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow HK \perp AB\,(1)$

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow AB \perp SK$

Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa SK và HK và bằng $\widehat{SKH} = 60^\circ$

Ta có $SH = HK \tan \widehat{SKH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2} AB.AC.SH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Vì $IH // SB$ nên $IH // (SAB)$. Do đó $d\left(I,(SAB)\right) = d\left(H,(SAB)\right)$

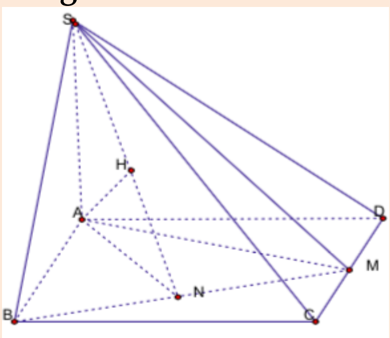
Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại M $\Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d\left(H,(SAB)\right) = HM$

Ta có $\dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d\left(I,(SAB)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

BÀI 139 (THPT THỐNG NHẤT – THANH HÓA (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBM) với M là trung điểm của CD biết góc giữa SC và mặt phẳng chứa đáy là α với $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Lời giải.



Ta có hình chiếu của SC trên mặt phẳng đáy là AC vậy góc SCA là góc giữa SC và mặt phẳng đáy $\Rightarrow SA = AC \tan\alpha = a$

Ta có $S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2$

Do đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{2a^3}{3}(dvtt)$

Ta có d(D,(SBM)=d(C,(SBM)= $\frac{1}{2}$d(A,(SBM))

Dựng AN ^ BM (N thuộc BM) và AH ^ SN
(H thuộc SN)

Ta có: BM^ AN, BM^ SA suy ra: BM^ AH. Và AH^ BM, AH^ SN suy ra: AH ^ (SBM). Do đó d(A,(SBM))=AH

Ta có: $S_{ABM} = S_{ABCD} - 2S_{ADM} = a^2; S_{ABM} = \frac{1}{2}AN.BM = a^2 \Rightarrow AN = \frac{2a^2}{BM} = \frac{4a}{\sqrt{17}}$

Trong tam giác vuông SAN có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = \frac{4a}{\sqrt{33}}$

Suy ra $d(D,(SBM)) = \frac{2a}{\sqrt{33}}$

BÀI 140 (THPT BÌNH GIANG – HẢI DƯƠNG (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, SC = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD, SB.

Lời giải.

BÀI 141 (THPT CHUYÊN BÌNH LONG – BÌNH PHƯỚC (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi ; hai đường chéo AC = $2\sqrt{3}a$, BD = 2a và cắt nhau tại O; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Lời giải.

Từ giả thiết AC = $2a\sqrt{3}$; BD = 2a và AC ,BD vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường chéo.Ta có tam giác ABO vuông tại O và AO = $a\sqrt{3}$; BO = a , do đó $\widehat{ABD} = 60^0$

Hay tam giác ABD đều.

Từ giả thiết hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) nên giao tuyến của chúng là SO $\perp$ (ABCD).

Do tam giác ABD đều nên với H là trung điểm của AB, K là trung điểm của HB ta có

$DH \perp AB$ và DH = $a\sqrt{3}$; OK // DH và $OK = \frac{1}{2}DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ OK $\perp$ AB $\Rightarrow$ AB $\perp$ (SOK)

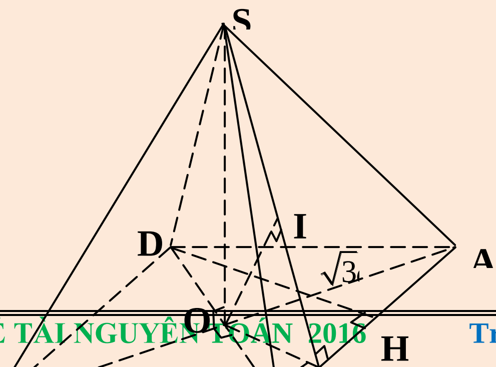
Gọi I là hình chiếu của O lên SK ta có OI $\perp$ SK; AB $\perp$ OI $\Rightarrow$ OI $\perp$ (SAB) , hay OI là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

Tam giác SOK vuông tại O, OI là đường cao $\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$

Diện tích đáy $S_{ABCD} = 4S_{\Delta ABO} = 2.OA.OB = 2\sqrt{3}a^2$;

đường cao của hình chóp $SO = \frac{a}{2}$.

Thể tích khối chóp S.ABCD:

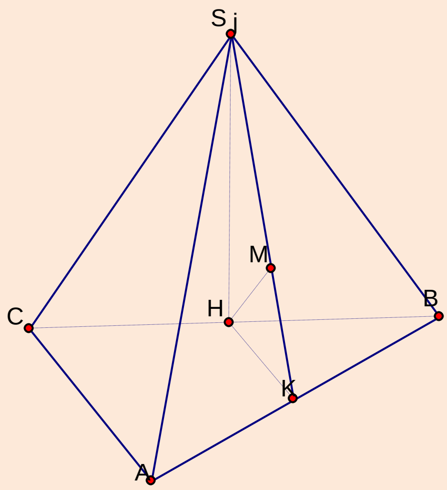


$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$

BÀI 142 (THPT CHUYÊN BÌNH LONG – BÌNH PHƯỚC (LẦN 2))

Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = AC = a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

Lời giải.



Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow HK \perp AB\,(1)$

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow AB \perp SK$

Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa SK và HK và bằng $SKH = 60^\circ$

Ta có $SH = HK \tan SKH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.AC.SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Vì $IH // SB$ nên $IH // (SAB)$. Do đó $d(I,(SAB)) = d(H,(SAB))$

Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại M $\Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d(H,(SAB)) = HM$

Ta có $\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d(I,(SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

BÀI 143 (THPT CHUYÊN BÌNH LONG – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3))

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O*, cạnh *a*, *BD=a*. Trên cạnh *AB* lấy điểm *M* sao cho *BM=2AM*. Biết hai mặt phẳng *(SAC)* và *(SDM)* cùng vuông góc với mặt phẳng *(ABCD)* và mặt bên *(SAB)* tạo với mặt đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* theo a và cosin của góc tạo bới hai đường thẳng *OM* và *SA*.

Lời giải.

Gọi $H = AC \cap DM$, Vì $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SDM) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Từ H kẻ HK vuông góc với AB $SK \perp AB \Rightarrow \angle SKH = 60^0$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD)

Do AM // CD nên suy ra: $\dfrac{HA}{HC} = \dfrac{AM}{CD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow AH = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{AO}{2}$

Mà tam giác ABD đều, AO là đường cao

$AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow HK = AH\sin \text{HAK} = \dfrac{a\sqrt{3}}{8} \Rightarrow SH = HK.\tan 60^0 = \dfrac{3a}{8}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{8}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$

Ta có $\cos(OM;\text{SA}) = \dfrac{\left|\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{SA}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{SA}\right|}$, Mà ta có:

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{SA} = \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{AH}\right) = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{2}AO^2 - AM.AH.\cos 30^0$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \dfrac{a}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2}{4}$

Vậy $\cos(OM;SA) = \dfrac{\dfrac{a^2}{4}}{\dfrac{a\sqrt{13}}{6}.\dfrac{a\sqrt{21}}{8}} = \dfrac{12}{\sqrt{273}}$

BÀI 144 (THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN – ĐÀ NẴNG (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a,\ AD = a\sqrt{2}$ .Gọi H là trung điểm cạnh AB; tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng CH và SD.

Lời giải.

Vì H là trung điểm của cạnh đáy AB của tam giác SAB cân nên $SH \perp AB$. Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Vẽ $HK \perp AC$ tại K. Vì $AC \perp HK; AC \perp SH$ nên $AC \perp (SHK)$.

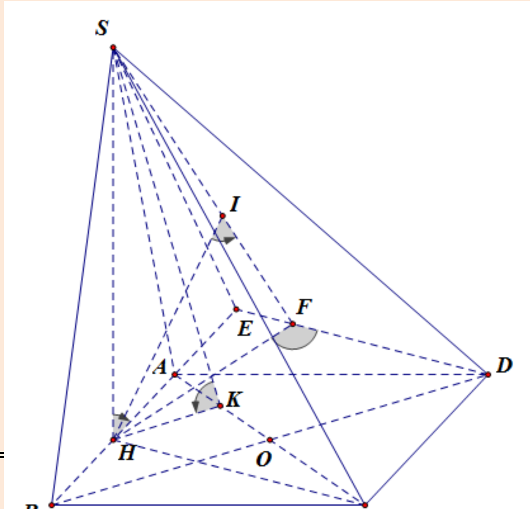
Suy ra: $AC \perp HK$

Vì $\left.\begin{array}{l}(SAC) \cap (ABCD) = AC \\ SK \subset (SAC); SK \perp AC \\ HK \subset (ABCD); HK \perp AC\end{array}\right\} \Leftrightarrow ((SAC);(ABCD)) = (SK;HK) \Leftrightarrow SKH = 60^0$

H là trung điểm của AB nên $HA = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Tứ giác ABCD là hình chữ nhật nên $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{3}.$

Có: $\Delta AHK \sim \Delta ACB\ (g - g) \Rightarrow \dfrac{HK}{BC} = \dfrac{AH}{AC}$



$\Rightarrow HK = \dfrac{AH.BC}{AC} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

Tam giác SHK vuông tại H nên $SH = HK.\tan 60^0 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{\sqrt{2}}.a.a\sqrt{2} = \dfrac{a^3}{3}$ (đvtt)

Gọi E là điểm đối xứng với H qua A. Vẽ $HF \perp DE$ tại F, $HI \perp SF$ tại I.

Vì $\left.\begin{array}{l} DE \perp HF \\ DE \perp SH \end{array}\right\}$ nên $DE \perp (SHF) \Rightarrow DE \perp HI$, mà $HI \perp SF$ nên $HI \perp (SED)$.

Vì $HE = CD = a, HE \parallel CD$ nên tứ giác HEDC là hình bình hành.

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow DE \parallel CH \\ Do\ \ DE \subset (SDE); CH \not\subset (SDE) \end{array}\right\} \Rightarrow CH \parallel (SDE)$

Do đó: $d_{(CH,SD)} = d_{(CH,(SDE))} = d_{(H,(SDE))} = HI$

Tam giác DEA vuông ở A nên: $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \dfrac{3a}{2}$

Ta có: $\Delta HFE \sim \Delta DAE\ \ (g-g)\ \Rightarrow \dfrac{HF}{DA} = \dfrac{HE}{DE} \Rightarrow HF = \dfrac{HE.DA}{DE} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Tam giác SHF vuông tại H nên: $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HF^2} \Rightarrow HI = \dfrac{a\sqrt{26}}{13}$

Vậy $d_{(CH,SD)} = HI = \dfrac{a\sqrt{26}}{13}$.

BÀI 145 (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG – BÌNH PHƯỚC (LẦN 6))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa cạnh SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0, cạnh $AC = a$. M và N lần lượt là trung điểm cạnh SA và BC. Tính theo a thể tích khối chóp $S.BCD$ và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SND).

Lời giải.

$V = \dfrac{1}{3}SH.S_{BCD}$ (H là trung điểm của AB)

Tam giác ABC đều nên:

$HC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = HC\tan 60^0 = \dfrac{3a}{2}$

$S_{BCD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$

$\dfrac{d(\mathrm{M,SDN})}{d(\mathrm{A,SDN})} = \dfrac{1}{2}; \dfrac{d(\mathrm{A},DNS)}{d(\mathrm{H,ADN})} = \dfrac{AI}{HI} = \dfrac{4}{3}$ (I là giao điểm của AB,DN)

$d(\mathrm{H;SDN}) = \dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}}$ ttrong đó K hình chiếu của H lên DN

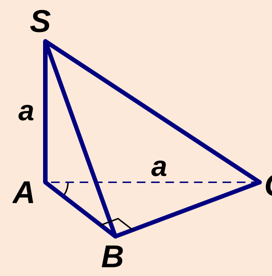
$HK = \dfrac{2S_{DHN}}{DN} = \dfrac{3\sqrt{21}}{28}a$.

$d(\mathrm{M},\mathrm{SDN}) = \frac{\sqrt{93}}{31}a$.

BÀI 146 (THPT HÙNG VƯƠNG – BÌNH PHƯỚC (LẦN 2))

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B, $\widehat{BAC} = 30^0$, $SA = AC = a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải.



Theo giả thiết, $SA \perp AB$, $BC \perp AB$, $BC \perp SA$

Suy ra, $BC \perp (SAB)$ và như vậy $BC \perp SB$

• Ta có, $AB = AC.\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BC = AC.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

• $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA\cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

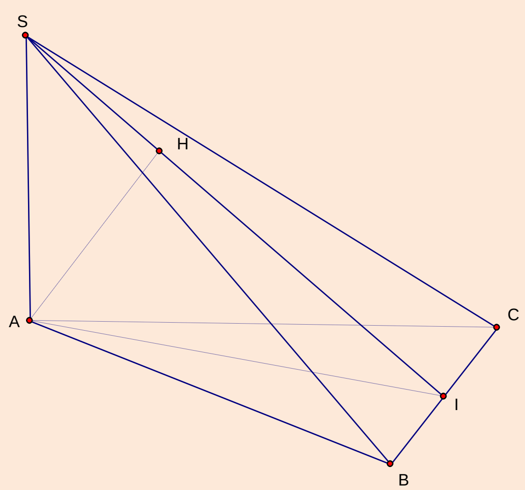
• $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SB.BC = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{7}}{8}$

• $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}d(A,(SBC)).S_{\Delta SBC} \Rightarrow d(A,(SBC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}} = 3\cdot\frac{a^3\sqrt{3}}{24}\cdot\frac{8}{a^2\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

BÀI 147 (THPT LÊ HỒNG PHONG)

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), mặt phẳng(SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60^0.Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải.



$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Gọi I là trung điểm BC có BC vuông góc cả AI và SI nên $\widehat{SIA} = 60^0$

$SA = AI.\tan 60^0 = \frac{3a}{2}$

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Vẽ đường cao AH của tam giác ASI có $AH\perp BC\to AH\perp(SBC)\to AH=d\left[A;(SBC)\right]$

$AH=AI.\sin 60^0=\frac{3a}{4}$

BÀI 148 (THPT LỘC NINH – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa cạnh bên SC và đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SA.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB-Lập luận $SH\perp(ABC)$ -Tính được $SH=a\sqrt{15}$

Tính được $V_{S.ABC}=\frac{4a^3\sqrt{15}}{3}$

Qua A vẽ đường thẳng $\Delta//BD$,gọi E là hình chiếu của H lên Δ ,K là hình chiếu H lên SE

Chứng minh được:d(BD,SA)=d(BD,(S, Δ))=2d(H, (S, Δ))=2HK

Tam giác EAH vuông cân tại E, $HE=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

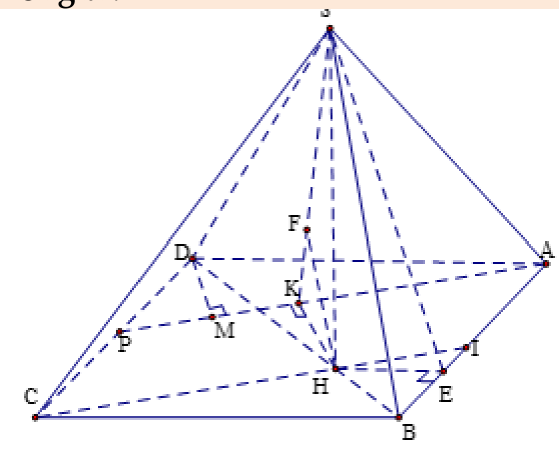
$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HE^2}=\frac{31}{15a^2}\Rightarrow HK=\sqrt{\frac{15}{31}}a$

$\Rightarrow d(BD,SA)=2\sqrt{\frac{15}{31}}a$

BÀI 149 (THPT LỘC NINH – BÌNH PHƯỚC (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi I là trung điểm AB, H là giao điểm của BD với IC. Các mặt phẳng (SBD) và (SIC) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SAB) và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và IC.

Lời giải.



Do (SIC),(SBD) cùng vuông với đáy suy ra $\text{SH}\perp(\text{ABCD})$

Dựng $\text{HE}\perp\text{AB}\Rightarrow(\text{SHE})\perp\text{AB}$, suy ra SEH là góc giữa (SAB) và (ABCD) $\Rightarrow\text{SEH}=60^0$

Ta có $\text{SH}=\text{HE}.\tan 60^0=\sqrt{3}\text{HE}$

$$\frac{HE}{CB}=\frac{HI}{IC}=\frac{1}{3}\Rightarrow HE=\frac{a}{3}\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$S_{ABCD}=a^2$

Suy ra $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.a^2=\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$

Gọi P là trung điểm của CD, suy ra AP song song vớiCI

$$\Rightarrow d(SA,CI)=d(CI,(SAP))=d(H,(SAP))$$

Dựng $HK\perp AP$, suy ra $(SHK)\perp(SAP)$

Dựng $HF\perp SK\Rightarrow HF\perp(SPA)\Rightarrow d(H,(SPA))=HF$

Do ΔSHK vuông tại H $\Rightarrow\frac{1}{HF^2}=\frac{1}{HK^2}+\frac{1}{HS^2}$ (1)

Dựng $DM\perp AP$, ta thấy $DM=HK$ $\Rightarrow\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{DM^2}=\frac{1}{DP^2}+\frac{1}{DA^2}$

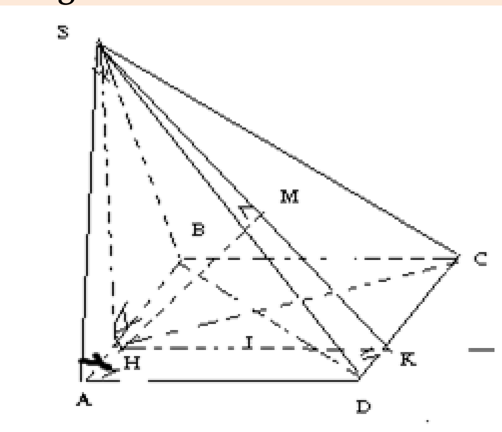
Thay vào (1) ta có $\Rightarrow\frac{1}{HF^2}=\frac{1}{DP^2}+\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{HS^2}=\frac{4}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a^2}=\frac{8}{a^2}\Rightarrow HF=\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Vậy $d(SA,CI)=\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

BÀI 150 (THPT LỘC NINH – BÌNH PHƯỚC (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông canh a. Mặt bên SAB là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng AB là điểm H thuộc đoạn AB sao cho BH= 2AH. Goi I là giao điểm của HC và BD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.



$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}$, SH²=HA.HB=2a²/9 $\Rightarrow SH=\frac{a}{3}\sqrt{2}$ $V_{S.ABCD}=\frac{a}{9}\sqrt{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$

$\frac{d(I,(SCD))}{d(H,(SCD))}=\frac{IC}{HC}$ và $\frac{IC}{IH}=\frac{CD}{BH}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{IC}{CH}=\frac{3}{5}$ và CH²=BH²+BC²=$\frac{13}{9}a^2$

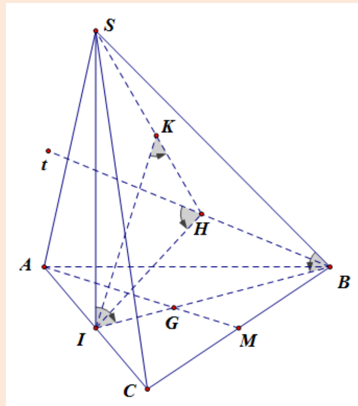
$\frac{1}{HM^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HK^2}=\frac{11}{2a^2}\Rightarrow HM=\frac{a\sqrt{22}}{11}$

$d(I,(SCD))=\frac{3a\sqrt{22}}{55}$

BÀI 151 (THPT LÝ THƯỜNG KIỆT – BÌNH THUẬN (LẦN 2))

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác SAC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, SB hợp với đáy góc 30^0. Gọi M là trung điểm đoạn BC. Tính thể tích khối chóp $S.ABM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM theo a.

Lời giải.



Gọi $\{G\} = AM \cap BI$ nên G là trọng tâm của ΔABC.

Dựng $Bt \parallel AM$. Dễ dàng chỉ ra được:

$AM \parallel (SBt) \Rightarrow d_{(AM,SB)} = d_{(AM,(SBt))} = d_{(G,(SBt))}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên Bt, K là hình chiếu vuông góc của I trên SH. Ta chứng minh được

$IK \perp (SBt) \Rightarrow d_{(I,(SBt))} = IK$

Xét ΔIBH, tính độ dài $IH = BI.\sin 60^0 = \dfrac{3a}{4}$

Xét ΔSIH, tính độ dài $IK = \dfrac{3a}{2\sqrt{13}}$

Do I, G B thẳng hàng nên

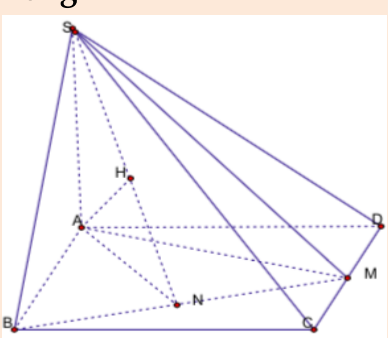
$$\frac{d_{(G,(SBt))}}{d_{(I,(SBt))}} = \frac{BG}{BI} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow d_{(G,(SBt))} = \frac{2}{3}.d_{(I,(SBt))} = \frac{2}{3}.IK = \frac{a\sqrt{13}}{13}$$

Do đó, ta có: $d_{(AM,SB)} = d_{(G,(SBt))} \dfrac{a\sqrt{13}}{13}$.

BÀI 152 (THPT NGUYỄN DU – BÌNH PHƯỚC (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBM) với M là trung điểm của CD.

Lời giải.



Ta có $S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2$

Do đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{2a^3}{3}(dvtt)$

Ta có d(D,(SBM)=d(C,(SBM)= 1/2 d(A,(SBM))

Dựng AN ^ BM (N thuộc BM) và AH ^ SN

(H thuộc SN)

Ta có: BM^ AN, BM^ SA suy ra: BM^ AH. Và AH^ BM, AH^ SN suy ra: AH ^ (SBM). Do đó d(A,(SBM))=AH

Ta có: $S_{ABM} = S_{ABCD} - 2S_{ADM} = a^2; S_{ABM} = \frac{1}{2}AN.BM = a^2 \Rightarrow AN = \frac{2a^2}{BM} = \frac{4a}{\sqrt{17}}$

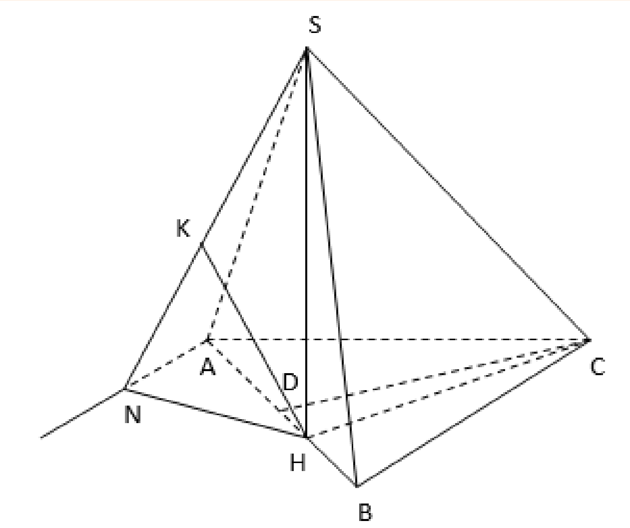
Trong tam giác vuông SAN có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = \frac{4a}{\sqrt{33}}$

Suy ra $d(D,(SBM) = \frac{2a}{\sqrt{33}}$

BÀI 153 (THPT NGUYỄN DU – BÌNH PHƯỚC (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Lời giải.



Góc SCH là góc giữa SC và mặt phẳng (ABC)

→ góc SCH = 60°.

Gọi D là trung điểm của cạnh AB. Suy ra DA = DB = a/2.

Mặt khác HA = 2HB → HA = 2a/3 và HB = a/3.

Do đó HD = a/2 – a/3 = a/6.

CD vuông góc với AB (do ΔABC đều)

$CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; CH = \sqrt{CD^2 + HD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$

$SH = CH.\tan 60° = \frac{a\sqrt{21}}{3}$

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{21}}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$

Qua A kẻ đường thẳng d // BC; kẻ HN vuông góc với d tại N; kẻ HK vuông góc với SN tại K.

Khi đó AN vuông góc với HN, SA → AN vuông góc với (SHN) → AN vuông góc với HK

Suy ra HK vuông góc với (SAN)

do BC // (SAN) → d(BC, SA) = d(B, (SAN)) = $\frac{AB}{AH}$ d(H, (SAN)) = (3/2).HK.

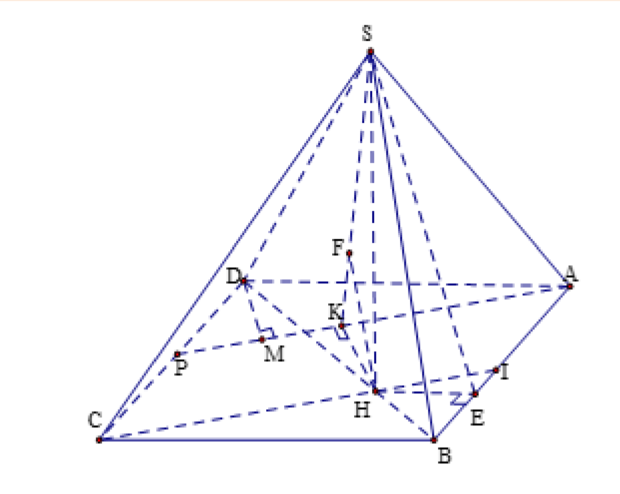
Ta có HN = AH sin HAN = (2a/3).sin 60° = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ → $HK = \frac{SH.HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$

Vậy d(BC, SA) = $\dfrac{a\sqrt{42}}{8}$

BÀI 154 (THPT NGUYỄN DU – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3, ĐỀ 01))

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. Gọi *I* là trung điểm *AB*, *H* là giao điểm của *BD* với *IC*. Các mặt phẳng (*SBD*) và (*SIC*) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (*SAB*) và (*ABCD*) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *SA* và *IC*.

Lời giải.



Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD}$, trong đó $S_{ABCD} = a^2$

Do (SIC),(SBD) cùng vuông với đáy suy ra $SH \perp (ABCD)$

Dựng $HE \perp AB \Rightarrow (SHE) \perp AB$, suy ra SEH là góc giữa (SAB) và (ABCD) $\Rightarrow SEH = 60^0$

Ta có $SH = HE.\tan 60^0 = \sqrt{3}HE$

$\dfrac{HE}{CB} = \dfrac{HI}{IC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow HE = \dfrac{a}{3}$

$\Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.a^2 = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$

Gọi P là trung điểm của CD, suy ra AP song song vớiCI

$\Rightarrow d(SA,CI) = d(CI,(SAP)) = d(H,(SAP))$

Dựng $HK \perp AP$, suy ra $(SHK) \perp (SAP)$

Dựng $HF \perp SK \Rightarrow HF \perp (SPA) \Rightarrow d(H,(SPA)) = HF$

Do ΔSHK vuông tại H$\Rightarrow \dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{HS^2}$ (1)

Dựng $DM \perp AP$, ta thấy $DM = HK$ $\Rightarrow \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{DM^2} = \dfrac{1}{DP^2} + \dfrac{1}{DA^2}$

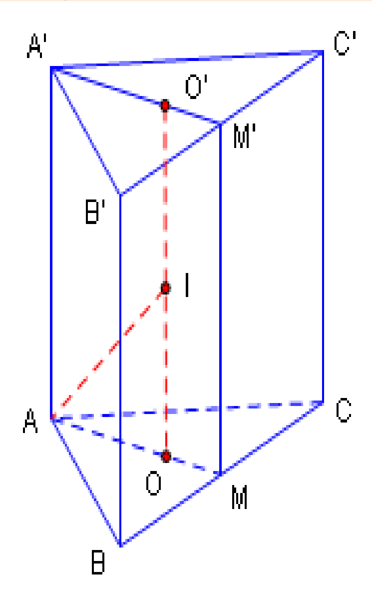
Thay vào (1) ta có $\Rightarrow \dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{1}{DP^2} + \dfrac{1}{DA^2} + \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{3}{a^2} = \dfrac{8}{a^2} \Rightarrow HF = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

Vậy $d(SA,CI) = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

BÀI 155 (THPT NGUYỄN DU – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3, ĐỀ 01))

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cà các cạnh đều bằng a .Tính thể tích của hình lăng trụ và diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ theo a.

Lời giải.



Thể tích lăng trụ là:

$$V = AA'.S_{ABC} = a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

Gọi O , O′ lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC , $\Delta A'B'C'$ khi đó tâm của mặt cầu (S) ngoại tiếp hình lăng trụ đều ABC.A′B′C′ là trung điểm I của OO′. Mặt cầu này có bán kính là:

$$R = IA = \sqrt{AO^2 + OI^2} = \sqrt{(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

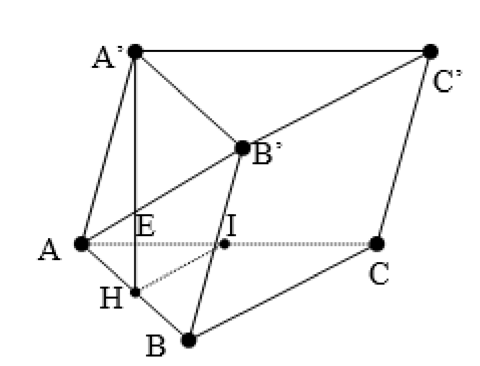
suy ra diện tích mặt cầu (S) là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi(\frac{a\sqrt{21}}{6})^2 = \frac{7\pi a^2}{3}$

BÀI 156 (THPT NGUYỄN DU – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3, ĐỀ 02))

Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A′B′C′, có đáy ABC là tam giác vuông cân ở B và AB = a. Hình chiếu vuông góc của A′ lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết diện tích mặt bên ABB′A′ bằng $3a^2$.

1. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.
2. Tính khoảng cách từ điểm B đến mp(ACB′).

Lời giải.



Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}a^2$$

Theo gt ta có: $A'H.AB = 3a^2 \Rightarrow A'H = 3a$

Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

$$V = S.A'H = \frac{3}{2}a^3$$

$d\left(B;\left(ACB'\right)\right) = 2d\left(H;\left(ACB'\right)\right) = 2HK$

Với K là trực tâm tam giác AEI và

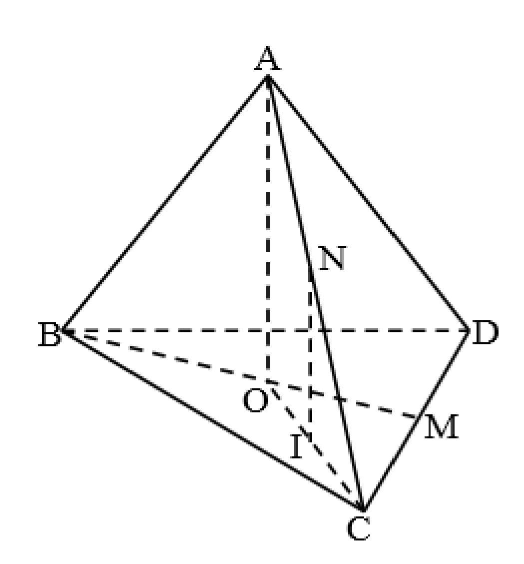
$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{9}{a^2} \Rightarrow HK = \frac{a}{3}$

Vậy $d\left(B;\left(ACB'\right)\right) = 2HK = \frac{2a}{3}$.

BÀI 157 (THPT NGUYỄN DU – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3, ĐỀ 03))

Cho hình chóp đều A.BCD có $AB = a\sqrt{3}; BC = a$. Gọi M là trung điểm của CD. Tính thể tích khối chóp A.BCD theo a và khoảng cách giữa hai đường thẳng BM, AD.

Lời giải.



Gọi O là tâm tam giác đều BCD cạnh a.

Do A.BCD là chóp đều nên $AO \perp \left(BCD\right) \Rightarrow$ AO là đường cao của hình chóp.

Có $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}BC.BD.\sin 60^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong ΔAOB có: $AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$

$V_{A.BCD}=\dfrac{1}{3}AO.S_{\Delta BCD}=\dfrac{a^3\sqrt{18}}{18}\left(đvtt\right)$

Gọi N, I, J lần lượt là trung điểm của AC, CO, OM.

Có: $AD//MN\Rightarrow AD//\left(BMN\right)\Rightarrow d\left(BM;AD\right)=d\left(AD;\left(BMN\right)\right)$

$=d\left(D;\left(BMN\right)\right)=d\left(C;\left(BMN\right)\right)=2d\left(I;\left(BMN\right)\right)$

lại có: $\left.\begin{matrix}BM\perp IJ\\ BM\perp NI\end{matrix}\right\}\Rightarrow BM\perp\left(IJN\right)\Rightarrow\left(BMN\right)\perp\left(IJN\right)$ theo giao tuyến NJ.

Trong mp(IJN) kẻ $IK\perp NJ\Rightarrow IK\perp\left(BMN\right)\Rightarrow d\left(I;\left(BMN\right)\right)=IK$

* Xét ΔIJN có: $\dfrac{1}{IK^2}=\dfrac{1}{IJ^2}+\dfrac{1}{IN^2}=\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{3}{2a^2}=\dfrac{35}{2a^2}\Rightarrow IK=\dfrac{a\sqrt{70}}{35}$

Vậy $d\left(BM;AD\right)=2d\left(I;\left(BMN\right)\right)=\dfrac{2a\sqrt{70}}{35}$

BÀI 158 (THPT NGUYỄN DU – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3, ĐỀ 04))

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A’B’C’, có đáy (ABC) là tam giác vuông tại B có AB=a, BC=2a. Cạnh A’C hợp với đáy một góc 30^0. Gọi M là trung điểm của CC’. Tính thể tích khối chóp M.ABB’A’ và khoảng cách từ A đến mp(MA’B’) theo a.

Lời giải.

BÀI 159 (THPT NGUYỄN DU – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3, ĐỀ 05))

Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác vuông tại B có AB = a, BC = a$\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), SA = 2a. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB và SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

Lời giải.

Đặt $V_1=V_{S.AMN}$; $V_2=V_{A..BCNM}$; $V=V_{S.ABC}$; $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{1}{2}$ *(1)*

$AM=\dfrac{2}{\sqrt{5}}a;\ SM=\dfrac{4a}{\sqrt{5}}\Rightarrow\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{4}{5}\qquad\Rightarrow\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow\dfrac{V_2}{V}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow V_2=\dfrac{3}{5}V$ *(2)*

$V=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=\dfrac{a^3.\sqrt{3}}{3}\ \Rightarrow V_2=\dfrac{a^3.\sqrt{3}}{5}$

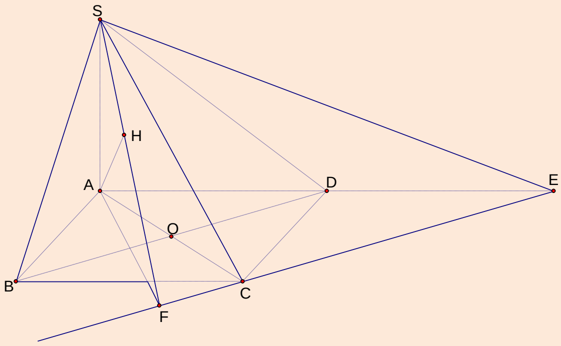
BÀI 160 (THPT NGUYỄN DU – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3, ĐỀ 06))

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $SA=a\sqrt{3}$ và *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết tam giác *SAB* cân và góc giữa *SD* với mặt đáy bằng 30^0.

1. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* theo *a*.

2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *BD* và *SC*.

Lời giải.



Do $SA \perp (ABCD)$ và ΔSAB cân nên $AB = SA = a\sqrt{3}$

Góc giữa SD với mặt đáy là góc $SDA = 30^0$

Trong tam giác SAD có

$$\tan 30^0 = \frac{SA}{AD} \Rightarrow AD = \frac{SA}{\tan 30^0} = 3a$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AB.AD = 3a.a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}a^2$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.3\sqrt{3}a^2 = 3a^3$$

b. Qua C kẻ đường thẳng song song với BD, cắt AD tại E.

Do $BD//CE \Rightarrow BD//(SCE)$

$$\Rightarrow d(BD, SC) = d(BD,(SCE)) = d(O,(SCE)) = \frac{1}{2}d(A,(SCE))$$

Kẻ $\text{AF} \perp CE, F \in CE \Rightarrow CE \perp (\text{SAF})$

Kẻ $AH \perp SF, H \in SF \Rightarrow AH \perp CE \Rightarrow AH \perp (SCE)$

$$\Rightarrow d(A,(SCE)) = AH$$

Có $AE = 2AD = 6a, CE = BD = 2\sqrt{3}a$

$$S_{ACE} = \frac{1}{2}AE.CD = \frac{1}{2}\text{AF.CE} \Rightarrow \text{AF} = \frac{AE.CD}{CE} = \frac{6a.a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = 3a$$

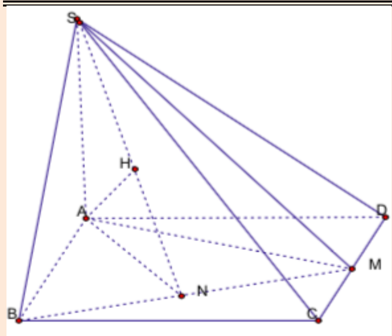
Trong tam giác SAF có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{2}$ Vậy

$$d(BD, SC) = \frac{1}{2}d(A,(SCE)) = \frac{1}{2}AH =$$

BÀI 161 (THPT NGUYỄN DU – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3, ĐỀ 07))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBM) với M là trung điểm của CD.

Lời giải.



Ta có $S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2$

Do đó: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{2a^3}{3}(dvtt)$

Ta có d(D,(SBM)=d(C,(SBM)= 1/2 d(A,(SBM))

Dựng AN ^ BM (N thuộc BM) và AH ^ SN

(H thuộc SN)

Ta có: BM^ AN, BM^ SA suy ra: BM^ AH. Và AH^ BM, AH^ SN suy ra: AH ^ (SBM). Do đó d(A,(SBM))=AH

Ta có: $S_{ABM} = S_{ABCD} - 2S_{ADM} = a^2; S_{ABM} = \frac{1}{2}AN.BM = a^2 \Rightarrow AN = \frac{2a^2}{BM} = \frac{4a}{\sqrt{17}}$

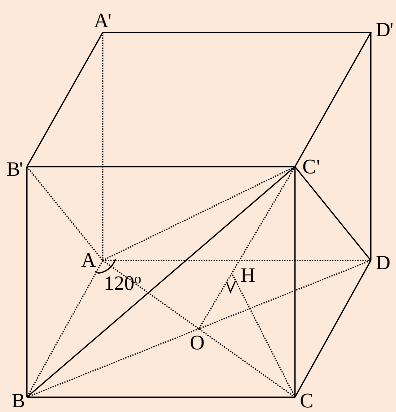
Trong tam giác vuông SAN có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = \frac{4a}{\sqrt{33}}$

Suy ra $d(D,(SBM)) = \frac{2a}{\sqrt{33}}$

BÀI 162 (THPT NGUYỄN DU – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3, ĐỀ 08))

Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $BAD = 120^o$ và $AC' = a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BD theo a.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình thoi ABCD.

Do hình thoi ABCD có $BAD = 120^o$

$\Rightarrow$ $\Delta ABC, \Delta ACD$ đều.

$\Rightarrow AC = a.$

Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Mà $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng.

$\Rightarrow \Delta ACC'$ vuông tại C $\Rightarrow CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a.$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = CC'.S_{ABCD} = 2a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = a^3\sqrt{3}.$

Tứ giác $AB'C'D$ là hình bình hành $\Rightarrow AB'//C'D \Rightarrow AB'//(BC'D).$

$\Rightarrow d(AB',BD) = d(AB',(BC'D)) = d(A,(BC'D)) = d(C,(BC'D)).$

Vì $BD \perp AC, BD \perp CC' \Rightarrow BD \perp (OCC') \Rightarrow (BC'D) \perp (OCC').$

Trong (OCC'), kẻ $CH \perp OC'$ $(H \in OC').$

$\Rightarrow CH \perp (BC'D) \Rightarrow d(C,(BC'D)) = CH$

$\Delta OCC'$ vuông tại C $\Rightarrow \dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{CO^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} \Rightarrow CH = \dfrac{2a}{\sqrt{17}}$

Vậy $d(AB',BD) = \dfrac{2a}{\sqrt{17}} \cdot$

BÀI 163 (THPT NGUYỄN DU – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3, ĐỀ 09))

Hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình bình hành *ABCD*. *M* là trung điểm của cạnh *SD, G* là trọng tâm của tam giác *ACD*.

a. Tìm giao tuyến của *mp(AMG)* và *mp(SCD)*?

b. Tìm giao điểm *I* của đường thẳng *BM* và *mp(SAC)* ? Tính tỉ số $\dfrac{IB}{IM}$?

Lời giải.

. Chỉ ra M là một điểm chung của mp(AMG) và mp(SCD)

Trong (ACD), đường AG cắt CD tại K => K là điểm chung thứ 2 của mp(AMG) và mp(SCD)

Vì M và K phân biệt => MG là giao tuyến của mp(AMG) và mp(SCD)

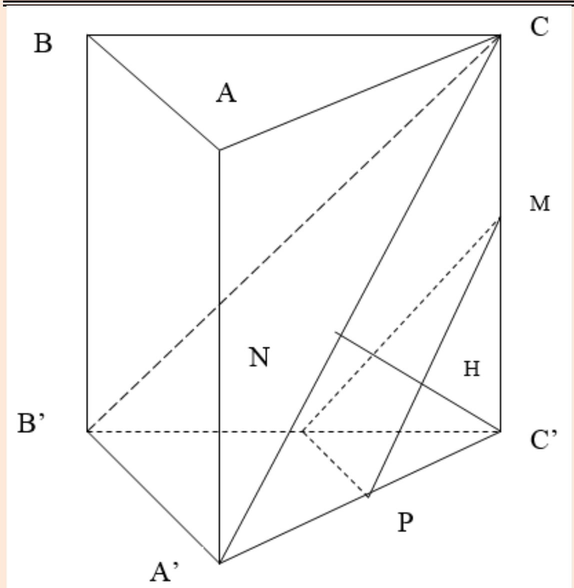
b. Gọi O là giao điểm của AC và BD

- Chỉ ra BM và SO cát nhau tại I trong (BCD)
- Chỉ ra I là giao điểm của BM và (SAC)
- Chie ra I là trọng tâm tam giác SBD=> tỉ số = 2.

BÀI 164 (THPT NGUYỄN DU – BÌNH PHƯỚC (LẦN 3, ĐỀ 10))

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$, mặt bên $BCC'B'$ là hình vuông, M, N lần lượt là trung điểm của CC' và $B'C'$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B'$ và MN .

Lời giải.



Ta có BC= BB′=2a

$.V_{ABC.A'B'C'} = BB'.S_{\Delta ABC} = 2a.\frac{1}{2}a.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$

gọi P là trung điểm của A′C′ mp(CA′B′) //mp(PMN) nên suy ra khoảng cách d(A′B′;MN)= d(A′B′;(MNP))= d(A′;(MNP))= d(C′;(MNP))= C′H (H là hình chiếu vuông góc của C′ lên mp(MNP)

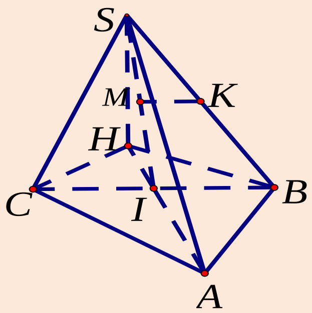
Cm được H thuộc cạnh PM áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MPC′

$$C'H = \frac{C'M.C'P}{\sqrt{C'P^2 + C'M^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

BÀI 165 (THPT NGUYỄN VĂN TRỖI)

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2\sqrt{2}a$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng (ABC) thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH}$. Góc giữa SC và mặt đáy (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ trung điểm K của SB đến mặt phẳng (SAH).

Lời giải.



Ta có $HC = \sqrt{IC^2 + HI^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.

$SC,(ABC) = SCH = 60^0$. Xét ΔSHC có $SH = HC.\tan 60^0 = a\sqrt{15}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 4a^2$. Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \frac{4\sqrt{15}a^3}{3}$

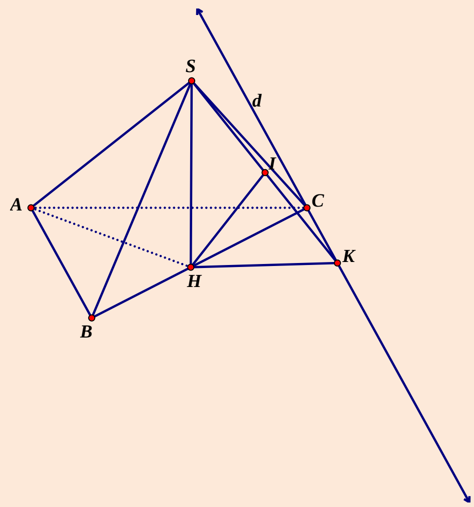
$BI \perp (SAH) \Rightarrow d(B;(SAH)) = BI = a$ .Gọi M là trung điểm SI .

Ta có $MK // BI \Rightarrow MK \perp (SAH) \Rightarrow d(K,(SAH)) = MK = \dfrac{a}{2}$

BÀI 166 (THPT THANH HOA – BÌNH PHƯỚC (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, AB = a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Lời giải.



Ta có:

$SH \perp (ABC) \Rightarrow \left(SA,(ABC)\right) = SAH = 60^0$

Thể tích khối chóp S.ABC:

Ta có: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC}.SH$ (*)

Mà: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} AB.AC = \dfrac{a^2}{2}$

Ta có: $AH = \dfrac{1}{2} BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$SH = AH.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

$(*) \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC}.SH = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Khoảng cách giữa AB và SC

Qua C vẽ đường thẳng d song song với AB

Dựng HK vuông góc với d tại K

Dựng HI vuông góc với SK tại I, ta có:

$\begin{cases} HI \perp SK \\ HI \perp d \end{cases} \Rightarrow HI \perp (SC,d)$

Ta có:

$d(AB,SC)=d(AB,(SC,d))=d(B,(SC,d))=2d(H,(SC,d))=2HI$

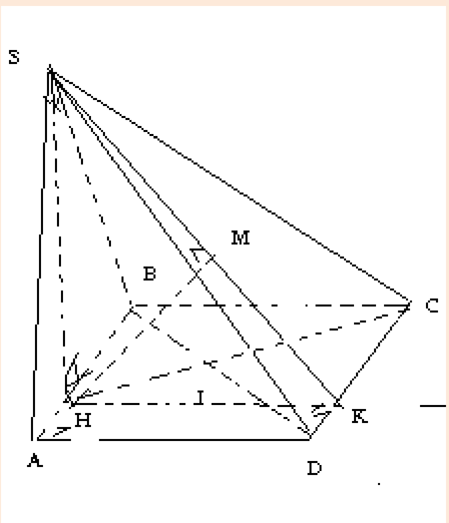
Ta có: $\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HK^2}\Rightarrow IH=\dfrac{a\sqrt{42}}{14}$

Vậy: $d(AB,SC)=2IH=\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$

BÀI 167 (THPT THANH HOA – BÌNH PHƯỚC (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông canh a. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng AB là điểm H thuộc đoạn AB sao cho BH= 2AH. Goi I là giao điểm của HC và BD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SCD) theo a.

Lời giải.



$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}$

Ta có $SH^2=HA.HB=2a^2/9\Rightarrow SH=\dfrac{a}{3}\sqrt{2}$

$V_{S.ABCD}=\dfrac{a}{9}\sqrt{2}.a^2=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$ (đvtt)

$\dfrac{d(I,(SCD))}{d(H,(SCD))}=\dfrac{IC}{HC}$ và $\dfrac{IC}{IH}=\dfrac{CD}{BH}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\dfrac{IC}{CH}=\dfrac{3}{5}$

và $CH^2=BH^2+BC^2=\dfrac{13}{9}a^2$

$\dfrac{1}{HM^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{11}{2a^2}\Rightarrow HM=\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$

$d(I,(SCD))=\dfrac{3a\sqrt{22}}{55}$

BÀI 168 (THPT ANH SƠN II –NGHỆ AN (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2\sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của điểm S trên $mp(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác BCD. Đường thẳng

SA tạo với $mp(ABCD)$ một góc 45^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD theo a.

Lời giải.

$V_{SABCD} = \frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$ $\qquad d\left(SD, BC\right) = \frac{2\sqrt{22}a}{11}$

BÀI 169 (THPT AN LÃO 2 – BÌNH ĐỊNH)

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = a$, mặt $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30^0 và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải.

$V = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

BÀI 170 (THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU)

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và mặt bên (BB'C'C) là hình vuông. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA', BC'.

Lời giải.

$V = a^3\sqrt{3}; d\left(A'A, BC'\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

BÀI 171 (THPT CHUYÊN NGUYỄN ĐÌNH CHIỂU – TP HCM (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đấy $ABCD$ là hình chữ nhất. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, SC hợp với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, một góc α với $\tan\alpha = \frac{4}{5}$, $AB = 3a$ và $BC = 4a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$.

Lời giải.

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = 16a^3; \ d\left(D,\left(SBC\right)\right) = \frac{12a}{5}$

BÀI 172 (THPT CÙ HY CẬN – HÀ TĨNH (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), góc giữa SC với mặt phẳng (ABCD) bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của CD, N là hình chiếu vuông góc của D trên SM. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBC) theo a.

Lời giải.

$V_{SABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ $\qquad d\left(N,(SBC)\right) = \frac{2a\sqrt{42}}{29}$

BÀI 173 (THPT ĐỘI CẤN (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết tam giác SAB cân và góc giữa SD với mặt đáy bằng 30^0.

a. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

Lời giải.

a. $V_{SABCD} = 3a^3$ b. $d(BD, SC) = \dfrac{3a}{4}$

BÀI 174 (THPT HÀN THUYÊN – BẮC NINH (LẦN 2))

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2a$, Hình chiếu vuông góc của B xuống mặt đáy (A′B′C′) là trung điểm H của cạnh A′B′ . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và tính khoảng cách từ C′ đến mặt phẳng (A′BC) .Biết góc giữa đường thẳng BC′ và mặt phẳng (A′B′C′) bằng 45^0

Lời giải.

$V_{ABC.A'B'C'} = 2a^3\sqrt{5}$ $d\left(C', (A'BC)\right) = \dfrac{a\sqrt{30}}{6}$

BÀI 175 (THPT LÊ LỢI (LẦN 2))

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A’B’C’, có đáy (ABC) là tam giác vuông tại B có AB=a, BC=2a. Cạnh A’C hợp với đáy một góc 30^0. Gọi M là trung điểm của CC’. Tính thể tích khối chóp M.ABB’A’ và khoảng cách từ A đến mp(MA’B’) theo a.

Lời giải.

BÀI 176 (THPT MAI THÚC LOAN –HÀ TĨNH (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng *a*, góc giữa canh bên SD và mặt đáy (ABCD) bằng 45^0. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy (ABCD) là điểm H thuộc đoạn BD sao cho HD = 2HB, gọi M là trung điểm AB. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CM.

Lời giải.

BÀI 177 (THPT NGHÈN – HÀ TĨNH (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, góc tạo bởi SB và mặt đáy bằng 60^0, I là trung điểm cạnh BC, H là hình chiếu của A lên SI. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đến mặt phẳng (ABH).

Lời giải.

$V = \dfrac{a^3}{4}$ $d\left(G, (\text{ABC})\right) = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$

BÀI 178 (THPT NGUYỄN KHUYẾN – TP HCM (LẦN 3))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi với $SA = AB = a$, góc $BAD = 120^0$, các mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo a thể tích của khối tứ diện $SABC$ và góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD).

Lời giải.

$V_{SACD}=\frac{a^3}{8};\left(SB,\left(SCD\right)\right)\approx 39^0$

BÀI 179 (THPT NGUYỄN SĨ SÁCH – NGHỆ AN (LẦN 2))

Cho lăng trụ đứng ABCD.A′B′C′D′, đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB=a;\ AD=a\sqrt{3}$. Biết góc giữa đường thẳng A′C và mặt phẳng (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ ABCD.A′B′C′D′ và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau B′C và C′D theo a.

Lời giải.

$V_{ABCD.A'B'C'D'}=6a^3;\ d\left(C'D;B'C\right)=\frac{2a\sqrt{51}}{17}$

BÀI 180 (THPT NGUYỄN THỊ MINH KHAI – HÀ TĨNH (LẦN 1))

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC=a, BC=2a, ACB=120^0$ và đường thẳng $A'C$ tạo với $mp(ABB'A')$ một góc 30^0. Gọi M là trung điểm BB'. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ đỉnh A' đến $mp(ACM)$ theo a.

Lời giải.

$V_{ABC.A'B'C'}=\frac{a^3\sqrt{105}}{14}$ $\qquad d(A',(ACM))=\frac{2a\sqrt{1335}}{89}$

BÀI 181 (THPT TAM ĐẢO (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với cạnh AB=2a, AD=a. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của AB, SC tạo với đáy một góc bằng 45^0 . Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SCD)

Lời giải.

$V=\frac{2\sqrt{2}a^3}{3};d\left(A,\left(SDC\right)\right)=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

BÀI 182 (THPT THỪA LƯU – THỪA THIÊN HUẾ (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn là AD; các đường thẳng SA, AC và CD đôi một vuông góc với nhau $SA=AC=CD=a\sqrt{2}; AD=2BC$. Tính thể tích của khối chop S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

Lời giải.

$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2};\ d\left(CD;SB\right)=\frac{a\sqrt{10}}{5}$

BÀI 183 (THPT TRẦN HƯNG ĐẠO - ĐĂKNÔNG)

Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), SA = 8a, tam giác ABC đều cạnh bằng 4a; M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SB và BC. Tính theo a thể tích hình chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AMN).

Lời giải.

$V=\frac{32\sqrt{3}a^3}{3};d\left(B,\left(AMN\right)\right)=\frac{8a\sqrt{17}}{17}$

BÀI 184 (THPT TRUNG GIÃ (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, AD = 3BC = $3\sqrt{3}a, AB = 2\sqrt{2}a$, tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ABCD và góc tạo bởi đường thẳng SA với mặt phẳng (SCD).

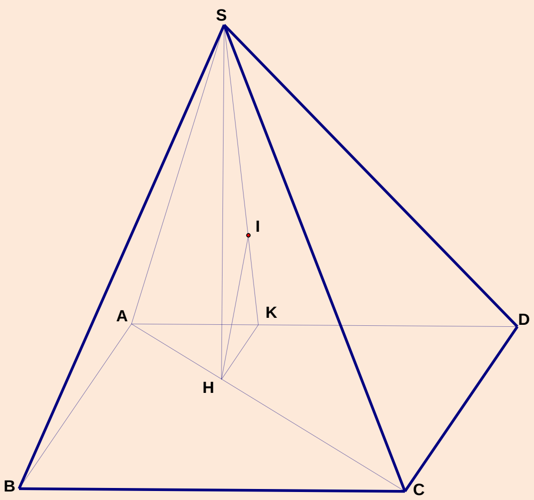
Lời giải.

$8a^3; a\sqrt{6}$

BÀI 185 (THPT ISCHOOL NHA TRANG – KHÁNH HÒA (ĐỀ 1))

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông, *BD* = 2*a*; tam giác *SAC* vuông tại *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*), $SC = a\sqrt{3}$. Tính theo *a* thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách từ điểm *C* đến mặt phẳng (*SAD*).

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên AC, ta có SH ⊥ AC mà (SAC) ⊥ (ABCD), (SAC) ∩ (ABCD) = AC do đó SH ⊥ (ABCD). Tam giác SAC vuông tại S suy ra

$$SA = \sqrt{AC^2 - SC^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a \quad \Rightarrow \quad SH = \frac{SA.SC}{AC} = \frac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Hình vuông ABCD có BD = 2a suy ra AB = a$\sqrt{2}$

Thể tích khối chóp S.ABCD là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.2a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên AD, I là hình chiếu vuông góc của H trên SK, ta có $\begin{cases} AD \perp HK \\ AD \perp SH \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SHK) \Rightarrow AD \perp HI$ mà HI ⊥ SK suy ra HI ⊥ (SAD), do đó $HI = d(H,(SAD))$.

$AH.AC = SA^2 \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{SA^2}{AC^2} = \frac{a^2}{4a^2} = \frac{1}{4}$ suy ra $d(C,(SAD)) = 4d(H,(SAD)) = 4HI$

Ta có HK // CD suy ra $HK = \frac{CD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

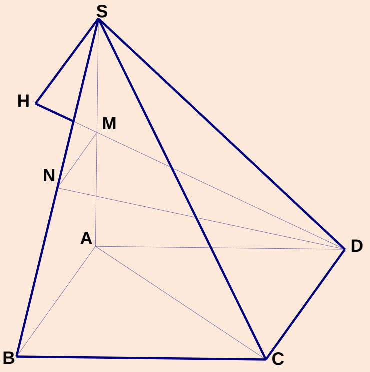
Tam giác SHK vuông tại H nên $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{8}{a^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

Vậy khoảng cách từ C đến (SAD) là $d(C,(SAD)) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

BÀI 186 (THPT ISCHOOL NHA TRANG – KHÁNH HÒA (ĐỀ 2))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA và SB. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ S đến mặt phẳng (DMN).

Lời giải.



Ta có SA ⊥ (ABCD) ⇒ AC là hình chiếu vuông góc của SC trên (ABCD) ⇒ $\widehat{SCA} = 60^0$

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = a\sqrt{5}; \quad SA = AC\tan 60^0 = a\sqrt{15}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}AB.AD.SA = \frac{2\sqrt{15}a^3}{3}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên DM , ta có AB ⊥ (SAD) mà MN // AB ⇒ MN ⊥ (SAD) ⇒ MN ⊥ SH ⇒ SH ⊥ (DMN) ⇒ SH = d(S, (DMN)).

ΔSHM ~ ΔDAM $\Rightarrow \frac{SH}{DA} = \frac{SM}{DM} \Rightarrow SH = \frac{SA.DA}{2DM} = \frac{SA.DA}{2\sqrt{AD^2 + AM^2}} = \frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{31}}$.

Vậy d(S,(DMN)) = $\frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{31}}$.

BÀI 187 (THPT VIỆT TRÌ (LẦN 1))

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}$, mặt bên $BCC'B'$ là hình vuông, M, N lần lượt là trung điểm của CC' và $B'C'$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B'$ và MN .

Lời giải.

$V_{ABC.A'B'C'} = a^3\sqrt{3} \;\; d\left(A'B', MN\right) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

BÀI 188 (THPT THUẬN CHÂU – SƠN LA (LẦN 2))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD, SB theo a.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ ta có H là trung điểm AD.

$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SHC vuông tại H ta có

$HC = \sqrt{SC^2 - SH^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{2} - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$

Xét tam giác DHC ; $DH = \frac{a}{2}$

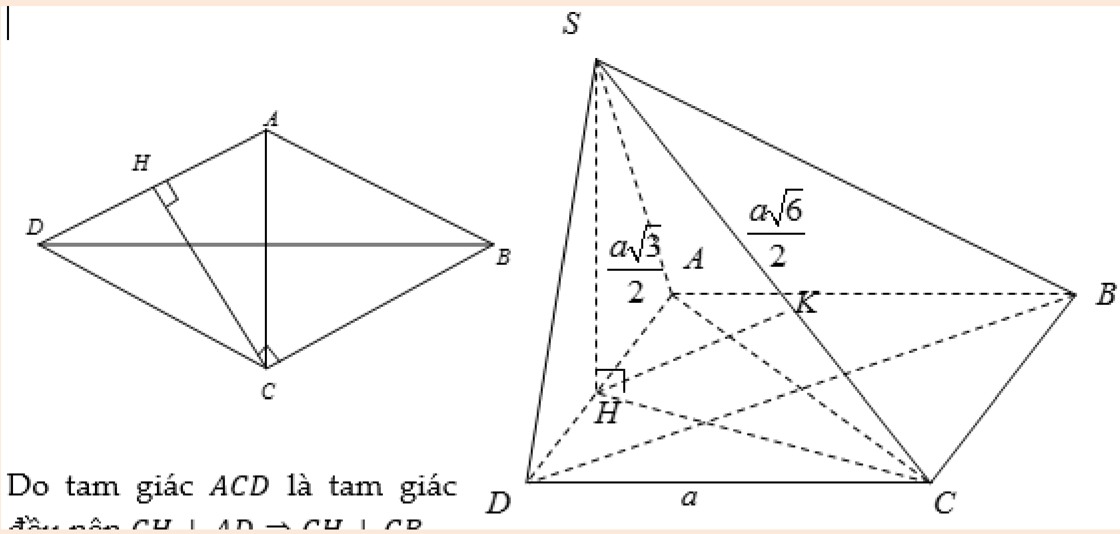
$$\cos\widehat{HDC} = \frac{DH^2 + DC^2 - HC^2}{2DH.DC} = \frac{\dfrac{a^2}{4} + a^2 - \dfrac{3a^2}{4}}{\dfrac{2a}{2}a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HDC} = 60^0$$

Suy ra tam giác ADC đều cạnh a, suy ra $S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là :

$V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{4}$

$d(AD, SB) = d(AD, (SBC)) = d(H, (SBC))$



Do tam giác ACD là tam giác đều nên $CH \perp AD \Rightarrow CH \perp CB$

$\begin{cases} BC \perp CH \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHC)$

Trong mặt phẳng (SHC) kẻ $HK \perp SC$ tại K ta có

$\begin{cases} HK \perp SC \\ HK \perp BC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$

Do đó : $d(AD, SB) = HK.$

Xét tam giác SHC vuông tại H

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HC^2} = \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{8}{3a^2} \Rightarrow HK^2 = \frac{3a^2}{8} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Vậy: $d(AD, SB) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

(Có thể tính $HK = \frac{1}{2}SC$)

(Có thể tính khoảng cách cần tìm theo công thức thể tích).

BÀI 189 (THPT THUẬN THÀNH 1 – BẮC NINH (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB=a , AD= 2a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBM) với M là trung điểm của CD biết góc giữa SC và mặt phẳng chứa đáy là α với $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

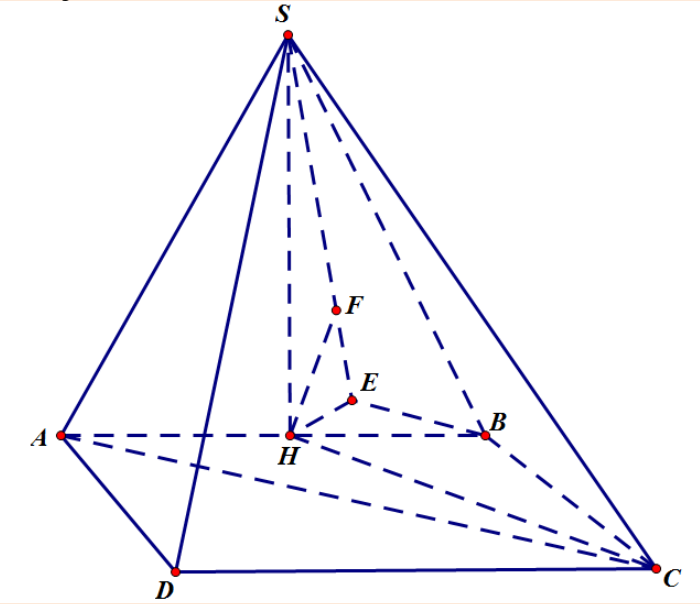
Lời giải.

$V = \frac{2a^3}{3}$ $\quad\quad d\left(D,(SBM)\right) = \frac{2a\sqrt{33}}{33}$

BÀI 190 (THPT THUẬN THÀNH 1 – BẮC NINH (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = 2a, AD = a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của AB. SC tạo với đáy một góc 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC.

Lời giải.



HC là hình chiếu của SC trên mp(ABCD) nên góc giữa SC và mp(ABCD) là $\widehat{SCH}$.

Từ gt suy ra $\widehat{SCH} = 45^0$

Suy ra SH = HC = $a\sqrt{2}$.

$S_{ABCD} = 2a^2$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ (đvtt).

Kẻ đt d đi qua B và song song với AC. Gọi E là hình chiếu của H trên đt d.

Suy ra AC // (SBE)

$\Rightarrow d(SB, AC) = d\left(AC,(SBE)\right) = d\left(A,(SBE)\right) = 2d\left(H,(SBE)\right)$

(Vì AB = 2HB)

Gọi F là hình chiếu của H trên SE.

Khi đó: $BE \perp (SHE), HF \perp (SBE)$

Suy ra d(H, (SBE)) = HF.

$HE = HB.\sin\widehat{EBH} = HB.\sin\widehat{BAC} = HB.\frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{11}{2a^2} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Vậy $d(SB, AC) = \dfrac{2a\sqrt{22}}{11}$.

BÀI 191 (THPT TĨNH GIA 1 – THANH HÓA (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và góc $BAD = 60^0$; Các mặt phẳng (SAD) và (SAB) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD); Góc tạo bởi SC với mp(ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng NC và SD với N là điểm năm trên cạnh AD sao cho $DN = 2AN$.

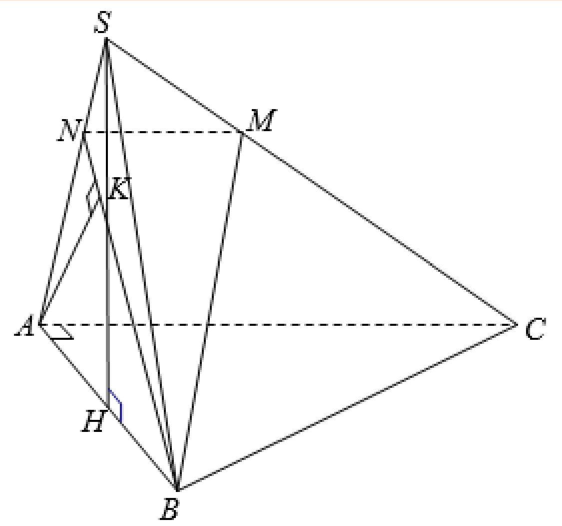
Lời giải.

$V_{SABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}; d\left(CN, SD\right) = 2a\sqrt{\dfrac{3}{79}}$.

BÀI 192 (THPT TÔ VĂN ƠN (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC), gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $MC = 2SM$. Biết $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$. Do $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$

Do SAB là tam giác đều cạnh a nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{6}SH.AB.AC = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Từ M kẻ đường thẳng song song với AC cắt SA tại $N \Rightarrow AC // MN \Rightarrow AC // (BMN)$

Ta có $AC \perp AB \Rightarrow AC \perp (SAB)$ mà $MN // AC \Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (BMN)$

Từ A kẻ $AK \perp BN (K \in BN)$ $\Rightarrow AK \perp (BMN)$

$\Rightarrow AK = d(A, (BMN)) = d(AC, BM)$

Do $\dfrac{MC}{SC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{AN}{SA} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow S_{ABN} = \dfrac{2}{3}S_{SAB} = \dfrac{2}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$

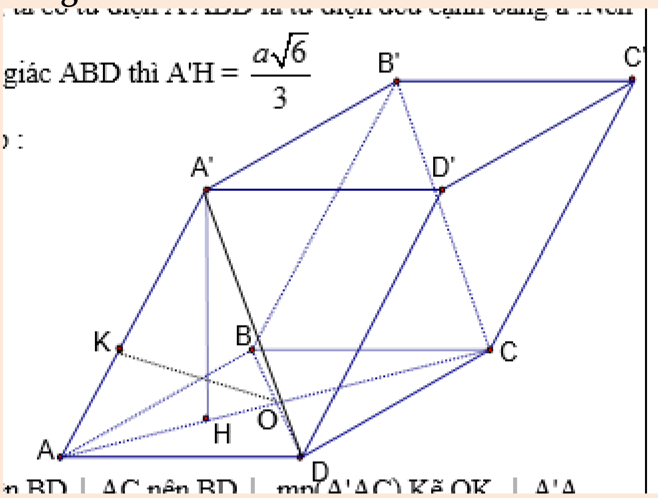
$BN^2 = AN^2 + AB^2 - 2AN.AB\cos 60^0 = \frac{7a^2}{9} \Rightarrow BN = \frac{a\sqrt{7}}{3}$, $AK = \frac{2S_{ABN}}{BN} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d(AC, BM) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

BÀI 193 (THPT TÔ VĂN ƠN (LẦN 2))

Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' có các cạnh đều bằng a và $BAD = BAA' = A'AD = 60^0$.Tính thể tích hình hộp và khoảng cách từ B' đến mặt phẳng (A'AC).

Lời giải.



+ Từ giả thiết bài toán , ta có tứ diện A'ABD là tứ diện đều cạnh bằng a .Nên gọi H là trọng tâm tam giác ABD thì A'H = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

+ Thể tích của hình hộp :

V = A'H .2.S_{ABD} = $\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

+ Ta có : BD$\perp$ A'H nên BD$\perp$AC nên BD$\perp$ mp(A'AC).Kẽ OK $\perp$A'A

Thì khoảng cách giữa A'A và BD là d(A'A;BD) = OK ; (O = AC $\cap$BD)

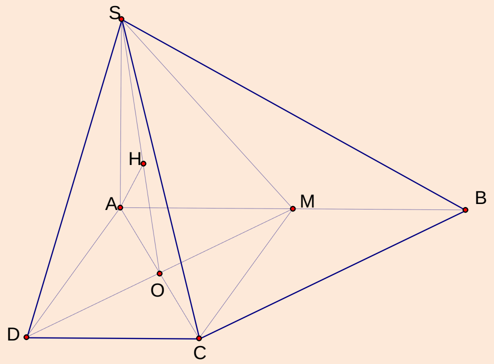
+ Tam giác A'OA cân tại O nên OA' = OA = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

+ d(A'A;BD) = OK =. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$

BÀI 194 (THPT TÔN ĐỨC THẮNG (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang vuông tại A và D. SA vuông góc với đáy, AD=DC=a,AB=2a. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 60^o . Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa BC và SD.

Lời giải.



$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{DC}).\mathrm{AD} = \frac{3a^2}{2}$

$SA \perp (\mathrm{ABCD})$ nên hình chiếu của SB là AB

$\Rightarrow (\mathrm{SB},(\mathrm{ABCD})) = (\mathrm{SB},\mathrm{AB}) = SBA = 60^O$

Xét tam giác vuông SAB:

$\tan SBA = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB.\tan SBA = 2a\sqrt{3}$

$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.\frac{3a^2}{2}.2a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$

Gọi M là trung đểm AB

$\left.\begin{array}{l} MB//DC \\ MB = DC \end{array}\right\} \Rightarrow$ DCBM là hình bình hành

$BC//DM \subset (\mathrm{SDM})$

$\Rightarrow \mathrm{BC}//(\mathrm{SDM})$

$\Rightarrow d(\mathrm{BC},\mathrm{SB}) = d(\mathrm{BC},(\mathrm{SDM})) = \mathrm{d}(\mathrm{C},(\mathrm{SDM}))$

Gọi $O = AC \cap DM$

$\left.\begin{array}{l} AM//DC \\ AM = DC = AD \\ DAM = 90^O \end{array}\right\} \Rightarrow$ ADCM là hình vuông

$\frac{d(\mathrm{C},(\mathrm{SDM}))}{d(\mathrm{A},(\mathrm{SDM}))} = \frac{OC}{OA} = 1 \Rightarrow d(\mathrm{C},(\mathrm{SDM})) = d(\mathrm{A},(\mathrm{SDM}))$

Kẻ $AH \perp SO$

$\left.\begin{array}{l} DM \perp AC \subset (\mathrm{SAC}) \\ DM \perp SA \subset (\mathrm{SAC}) \end{array}\right\} \Rightarrow DM \perp (\mathrm{SAC}) \Rightarrow \mathrm{DM} \perp \mathrm{AH}$

$\left.\begin{array}{l} AH \perp SO \subset (\mathrm{SDM}) \\ AH \perp DM \subset (\mathrm{SDM}) \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (\mathrm{SDM})$

$\Rightarrow d(\mathrm{A},(\mathrm{SDM})) = AH$

$AC = a\sqrt{2}$

$AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét tam giác SAO vuông tại A:

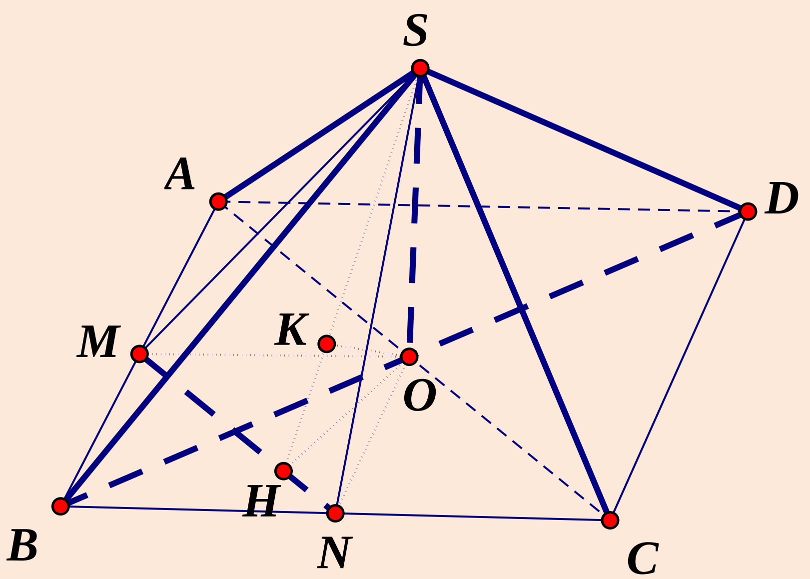
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AO^2}=\frac{1}{12a^2}+\frac{1}{\frac{a^2}{2}}=\frac{25}{12a^2}$$

$$\Rightarrow AH^2=\frac{12a^2}{25}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{12}}{5}$$

BÀI 195 (THPT TÔN ĐỨC THẮNG (LẦN 2))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mp$(ABCD)$ trùng với giao điểm O của hai đường chéo AC và BD. Biết $SA=a\sqrt{2}, AC=2a, SM=\frac{\sqrt{5}}{2}a$, với M là trung điểm cạnh AB. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC.

Lời giải.



Từ giả thiết $SO\perp(ABCD)\Rightarrow SO\perp AC,\ OA=a,\ SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=a$

$\Delta OSM\perp O: OM=\sqrt{SM^2-SO^2}=\frac{1}{2}a$

Ta có $\Delta ABC\perp B: BC=2MO=a, AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{3}a$

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}AB.BC.SO=\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$

Gọi N trung điểm BC $\Rightarrow MN//AC\Rightarrow d(SM,AC)=d(AC,(SMN))=d(O,(SMN))$

$\Delta OMN\perp O$: $\Delta OMN\perp O: OH\perp MN, SO\perp MN\Rightarrow MN\perp(SOH)$

$\Delta SOH\perp O: OK\perp SH\Rightarrow OK\perp(SMN)\Rightarrow OK=d(O,(SMN))$

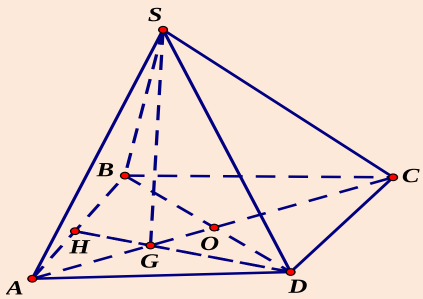
$\Delta OMN\perp O$: $ON=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a, OM=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}, OH\perp MN\Rightarrow OH=\frac{\sqrt{3}}{4}a$

$\Delta SOH\perp O: d(SM,AC)=OK=\frac{OS.OH}{\sqrt{OS^2+OH^2}}=\frac{\sqrt{57}}{19}a$

BÀI 196 (THPT TRẦN CAO VÂN - KHÁNH HÒA (LẦN 1))

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a, $\widehat{BAD}=60^0$. Hình chiếu của đỉnh S lên (ABCD) là trọng tâm G của tam giác ABD. Cạnh bên SC tạo với đáy (ABCD) một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp SABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

Lời giải.



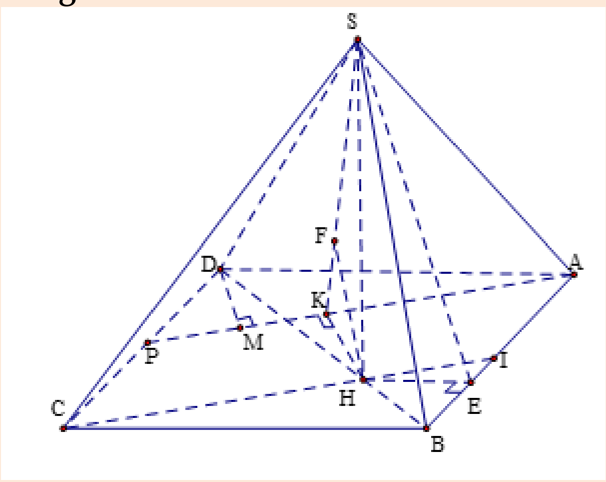
$S_{ABCD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ $\quad SG=2a \quad$ $V_{SABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Chứng minh $AB\perp SD$ và $d\left(AB;SD\right)=d\left(H;SD\right)=\dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$

BÀI 197 (THPT TRẦN PHÚ – HÀ TĨNH (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi I là trung điểm AB, H là giao điểm của BD với IC. Các mặt phẳng (SBD) và (SIC) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SAB) và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và IC.

Lời giải.



Ta có $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}$, $S_{ABCD}=a^2$

Do (SIC),(SBD) cùng vuông với đáy suy ra $SH\perp(ABCD)$

Dựng $HE\perp AB\Rightarrow\left(SHE\right)\perp AB$, suy ra $\widehat{SEH}$ là góc giữa (SAB) và (ABCD) $\Rightarrow\widehat{SEH}=60^0$

Ta có $SH=HE.\tan 60^0=\sqrt{3}HE$

$\dfrac{HE}{CB}=\dfrac{HI}{IC}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow HE=\dfrac{a}{3}\Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a^2=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$

Gọi P là trung điểm của CD, suy ra AP song song vớiCI

$\Rightarrow d\left(SA, CI\right) = d\left(CI, \left(SAP\right)\right) = d\left(H, \left(SAP\right)\right)$

Dựng $HK \perp AP$, suy ra $\left(SHK\right) \perp \left(SAP\right)$

Dựng $HF \perp SK \Rightarrow HF \perp \left(SPA\right) \Rightarrow d\left(H, \left(SPA\right)\right) = HF$

Do ΔSHK vuông tại H $\Rightarrow \dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{HS^2}$ (1)

Dựng $DM \perp AP$, ta thấy $DM = HK$ $\Rightarrow \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{DM^2} = \dfrac{1}{DP^2} + \dfrac{1}{DA^2}$

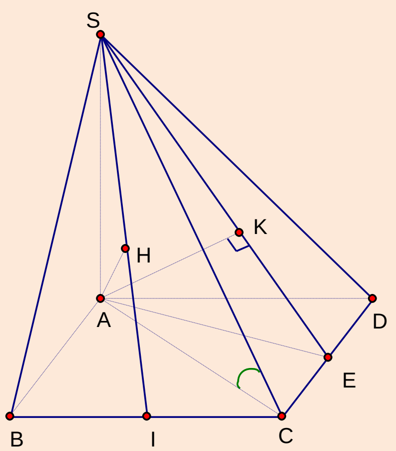
Thay vào (1) ta có $\Rightarrow \dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{1}{DP^2} + \dfrac{1}{DA^2} + \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{3}{a^2} = \dfrac{8}{a^2} \Rightarrow HF = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

Vậy $d\left(SA, CI\right) = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

BÀI 198 (THPT TRẦN PHÚ – HÀ TĨNH (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\angle ABC = 60^0$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc 60^0. Gọi I là trung điểm BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên SI. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD) theo a.

Lời giải.



Do $\angle ABC = 60^0$ nên tam giác ABC đều, suy ra $S_{ABCD} = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $AC = a$

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \angle SCA = 60^0$

$\Rightarrow SA = AC.\tan 60^0 = a\sqrt{3} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{2}$.

Ta có $\dfrac{HS}{IS} = \dfrac{HS.IS}{IS^2} = \dfrac{AS^2}{IS^2} = \dfrac{AS^2}{IA^2 + AS^2} = \dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow d\left(H, \left(SCD\right)\right) = \dfrac{4}{5}d\left(I, \left(SCD\right)\right) = \dfrac{2}{5}d\left(B, \left(SCD\right)\right) = \dfrac{2}{5}d\left(A, \left(SCD\right)\right)$ (vì I là trung điểm BC và AB//(SBC))

Gọi E là trung điểm CD, K là hình chiếu của A lên SE, ta có

$AE \perp DC \Rightarrow DC \perp (SAE) \Rightarrow DC \perp (SAE) \Rightarrow AH \perp (SCD)$

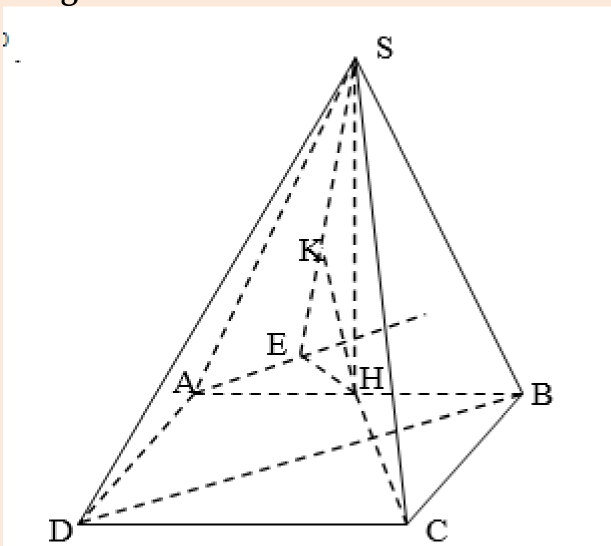
Suy ra

$d\left(H,(SCD)\right)=\frac{2}{5}d\left(A,(SCD)\right)=\frac{2}{5}AK=\frac{2}{5}\frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\frac{2a\sqrt{15}}{25}$.

BÀI 199 (THPT TRẦN QUANG KHẢI (LẦN 3))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, tam giác SAB cân tại S và SC tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SA theo a.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB. Do SAB cân tại S, suy ra SH ⊥ AB,
mặt khác (SAB) ⊥ (ABCD)
nên SH ⊥ (ABCD) và $\widehat{SCH}=60^0$.

Ta có $SH=CH.\tan 60^0=\sqrt{CB^2+BH^2}.\tan 60^0=a\sqrt{15}$.

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{15}.4a^2=\boxed{\frac{4\sqrt{15}}{3}a^3}$

Qua A vẽ đường thẳng Δ song song với BD. Gọi E là hình chiếu vuông góc của H lên Δ và K là hình chiếu của H lên SE, khi đó Δ ⊥ (SHE) ⇒ Δ ⊥ HK suy ra HK ⊥ (S, Δ).
Mặt khác, do BD//(S, Δ) nên ta có

$d\left(BD;SA\right)=d\left(BD;(S,\Delta)\right)=d\left(B;(S,\Delta)\right)=2d(H;(S,\Delta))=2HK$

Ta có $\widehat{EAH}=\widehat{DBA}=45^0$ nên tam giác EAH vuông cân tại E, suy ra

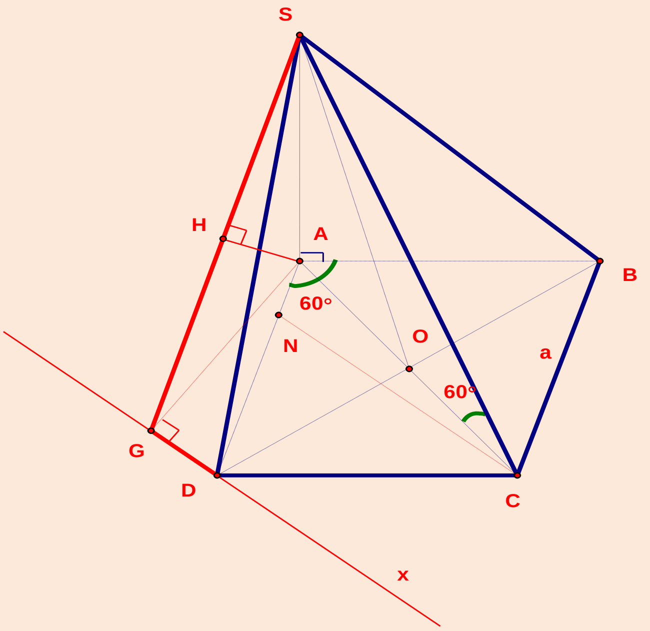
$HE=\frac{AH}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}\Rightarrow HK=\frac{HE.HS}{\sqrt{HE^2+HS^2}}=\sqrt{\frac{15}{31}}a.$

Vậy: $d\left(BD;SA\right)=\boxed{\frac{2\sqrt{465}}{31}a}$

BÀI 200 (THPT TRẦN QUÝ CÁP – KHÁNH HÒA (ĐỀ 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và góc $\widehat{BAD}=60^0$. Các mp(SAD) và (SAB) cùng vuông góc (ABCD). Góc tạo bởi SC và (ABCD) = 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng NC và SD với N là điểm nằm trên cạnh AD sao cho $DN=2AN$.

Lời giải.



+ $Ta\ có: SA \perp (ABCD)$

+ Xác định được góc $ABC = 60^0$

+ Tính được $AC = a\sqrt{3}$, $BD = a$

+ Tính được $SA = AC.\tan 60^0 = 3a$

+ $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{2}3a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

+ Kẻ $Dx // CN \Rightarrow CN // (SDx)$

+ Kẻ $AG \perp Dx, AH \perp SG \Rightarrow AH \perp (SDG)$

+ $d(CN, SD) = d(CN, (SDG)) = d(N, (SDG)) = \frac{2}{3}d(A, (SDG)) = \frac{2}{3}AH$

+ Tính được $CN = \frac{a\sqrt{19}}{3}$

+ Tính được $AG = 3d(A, CN) = 3\frac{AN.AC.\sin 60^0}{CN} = \frac{3a}{2}\sqrt{\frac{3}{19}}$

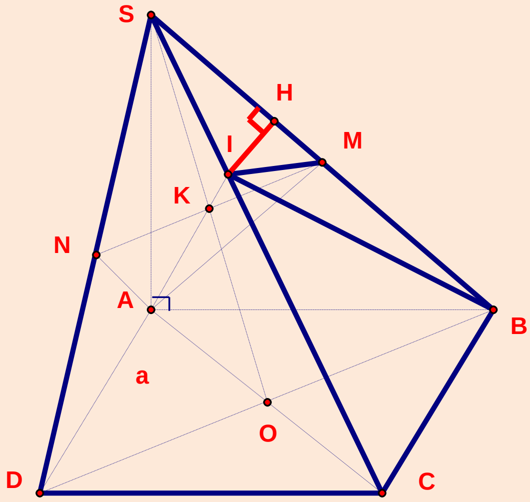
$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AG^2} \Rightarrow AH = 3a\sqrt{\frac{3}{79}}$

+ Suy ra: $d(CN, SD) = 2a\sqrt{\frac{3}{79}}$

BÀI 201 (THPT TRẦN QUÝ CÁP – KHÁNH HÒA (ĐỀ 2))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và SA=a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD; I là giao điểm của SD và mặt phẳng (AMN). Chứng minh SD vuông góc với AI và tính thể tích khối chóp MBAI.

Lời giải.



Gọi $O = BD \cap CA; K = SO \cap MN; I = AK \cap SC$

Ta có: $BC \perp SA, BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$ (1)

Hơn nữa: SA =AB nên $AM \perp SB$ (đường trung tuyến cũng là đường cao) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow AM \perp SC$ (3)

Tương tự ta có $AN \perp SC$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $SC \perp (AMN) \Rightarrow AI \perp SC$

Kẻ IH song song với BC cắt SB tại H. Khi đó IH vuông góc với (AMB).

Vậy $V_{ABMI} = \frac{1}{3} IH.S_{\Delta ABM}$

Ta có $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} a.a = \frac{a^2}{4}$ (đvdt)

Hơn nữa:

$$\frac{IH}{BC} = \frac{SI}{SC} = \frac{SI.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{a^2}{a^2 + 2a^2} = \frac{1}{3}$$

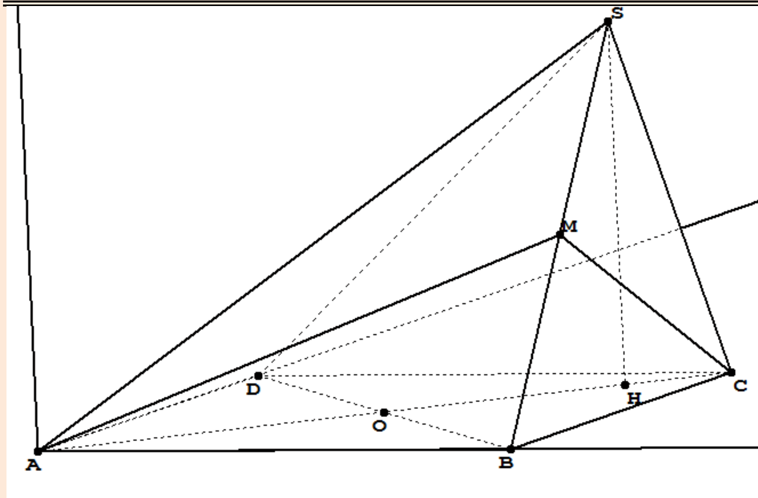
$$\Rightarrow IH = \frac{1}{3} BC = \frac{1}{3} a$$

Vậy $V_{ABMI} = \frac{1}{3} \frac{a^2}{4} \frac{a}{3} = \frac{a^3}{36}$ (đvtt)

BÀI 202 (THPT TRẦN VĂN DƯ – QUẢNG NAM (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2\sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của điểm S trên $mp(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác BCD. Đường thẳng SA tạo với $mp(ABCD)$ một góc 45^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD theo a.

Lời giải.



$(SA,(ABCD)) = (SA, \text{AH}) = SAH = 45^0$

$\Rightarrow SH = AH = 2a$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \frac{4\sqrt{2}}{3} a^3$

* Gọi M là trung điểm của SB.

Ta có : $d(SD;AC) = d(SD;(ACM)) = d(D;(ACM))$

Chọn mặt phẳng $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có :

$A(0;0;0), b(a;0;0), D(0;2\sqrt{2}a;0), S\left(\frac{2a}{3};\frac{4\sqrt{2}a}{3};2a\right), C(a;2\sqrt{2}a;0), M\left(\frac{5a}{6};\frac{2\sqrt{2}a}{3};a\right)$

Mặt phẳng (ACM) qua A có VTPT $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}\right] = (2\sqrt{2}a^2; -a^2; -\sqrt{2}a^2)$

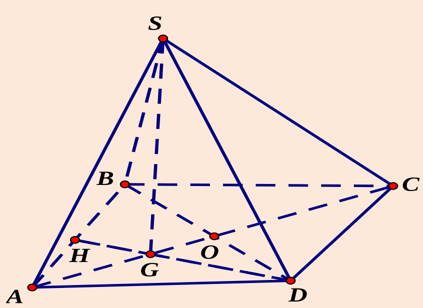
Nên : $(ACM): 2\sqrt{2}x - y - \sqrt{2}z = 0$

$\Rightarrow d(SD;AC) = d(D;(ACM)) = \frac{2\sqrt{22}a}{11}$

BÀI 203 (THPT TRẦN CAO VÂN – KHÁNH HÒA)

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a, $BAD = 60^0$. Hình chiếu của đỉnh S lên (ABCD) là trọng tâm G của tam giác ABD. Cạnh bên SC tạo với đáy (ABCD) một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp SABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

Lời giải.



$S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ $\quad SG = 2a$ $\quad V_{SABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Chứng minh $AB \perp SD$ và $d\left(AB;SD\right) = d\left(H;SD\right) = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$

BÀI 204 (THPT TRẦN ĐẠI NGHĨA)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh 2a, mặt bên (SAB) nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABCD), tam giác SAB vuông tại S, SA = a Hãy tính thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, SC theo a

Lời giải.

+ Trong mp(SAB), dựng SH $\perp$ AB, do (SAB) $\perp$ (ABCD) $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SH$ là chiều cao khối chóp

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}B.h$

+ B= dt ABCD= 4a^2

+ h = SH

$SB = \sqrt{AB^2 - SA^2}$

$= a\sqrt{3}$

$h = SH = \frac{SB.SA}{AB}$

$= \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = 2a^3\sqrt{3}$

d(AB,SC)

Vì AB// DC nên d (AB, SC)= d(AB, (SDC))

= d (A, (SDC)

$= \frac{3V_{A.SDC}}{dtSDC}$

$= \frac{3.\frac{1}{2}.V_{S.ABCD}}{dtSDC}$

dt SDC=?

tgSAD vuông tại A nên $SD = a\sqrt{5}$

tgSBC vuông tại B nên $SC = a\sqrt{7}$, DC= 2a

$\Rightarrow dtSDC = \frac{\sqrt{19}}{2}a^2$

nên $d(A,(SDC)) = \frac{6a\sqrt{57}}{19}$

BÀI 205 (THPT TRẦN NHÂN TÔNG – QUẢNG NINH (LẦN 1))

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật.Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết rằng $AB = a,\ BC = 3a$ và góc giữa SC với (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp SABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng CE và SB trong đó E là trung điểm của SD.

Lời giải.

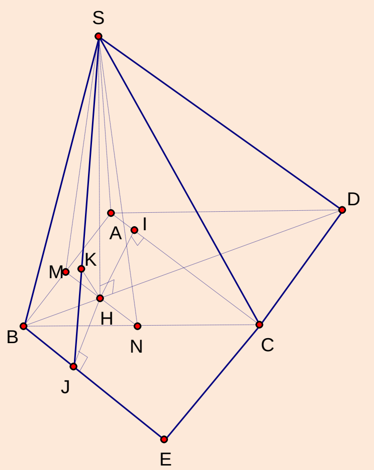
$V_{SABCD} = 2a^3; d\left(CE;SB\right) = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{17}}$

BÀI 206 (THPT TRẦN PHÚ – VĨNH PHÚC)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $SB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AB = a$, $AD = 2a$, $\angle ABC=120^0$.

M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC, tam giác SMN cân tại S, $SB \perp SD$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC.

Lời giải.



Do $\angle ABC = 120^0 \Rightarrow \angle BAD = 60^0$

Xét tam giác ABD: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 60^0 = 3a^2$

Xét tam giác SBD vuông tại S: $SD = \sqrt{BD^2 - SB^2} = \dfrac{3a}{2}$. , ta có $\cos\angle SBD = \dfrac{SB}{BD} = \dfrac{1}{2}$

Gọi H là trung điểm của MN, MN là đường TB của tam giác ABC $\Rightarrow BH = \dfrac{1}{4}BD = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Ta có $SH^2 = SB^2 + BH^2 - 2SB.BH.\cos\angle SBH = \dfrac{9a^2}{16}$

Ta thấy $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SD^2} \Rightarrow SH \perp BD$

Tam giác SMN cân tại S $\Rightarrow SH \perp MN$

Suy ra $SH \perp (ABCD)$

Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.\text{dt(ABCD)} = \dfrac{1}{3}SH.2\,\text{dt(BCD)} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Dựng HBH ACEB $\Rightarrow (SBE)//AC \Rightarrow d(AC,SB) = d(O,(SBE)) = 2\,\text{d(H,(SBE))}$

Qua H kẻ $IJ \perp BE(J \in BE, I \in AC) \Rightarrow HJ = \dfrac{1}{2}IJ$

Ta có $IJ.AC = 2dt(BCD)$

Mà $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2 - 2BC.AB.\cos 120^0} = a\sqrt{7}$, $2dt(BCD) = a^2\sqrt{3}$ nên $IJ = \dfrac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow HJ = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$

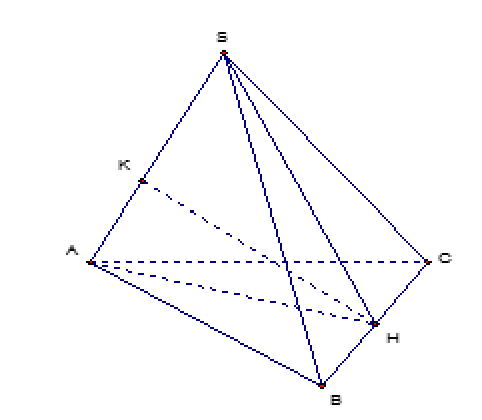
$HK \perp SJ(K \in SJ) \Rightarrow d(H,(SBE)) = HK$, $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HJ^2} \Rightarrow HK = \frac{3a}{10}$

Vậy $d(AC,SB) = \frac{3a}{5}$

BÀI 207 (THPT TRẦN THỊ TÂM – QUẢNG TRỊ)

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, SA = a. Chân đường vuông góc hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC. Tính thể tích chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SA theo a.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm cạnh BC. Ta có SH là đường cao của khối chóp S.ABC

Xét ΔSHA(vuông tại H), $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$,

$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích chóp S.ABC: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

* Từ H hạ đường vuông góc xuống SA tại K. Ta có HK ⊥ SA, HK ⊥BC => HK là khoảng cách giữa BC và SA

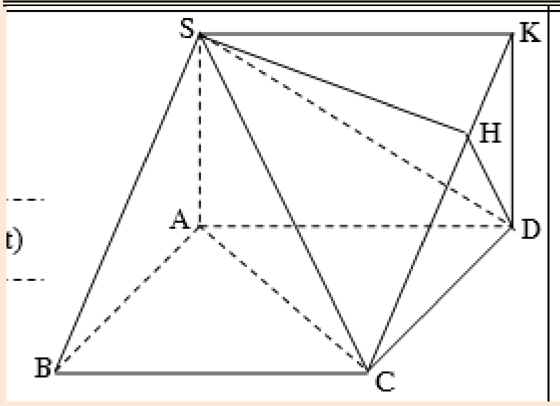
$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HA^2} = \frac{16}{3a^2}$ =>HK=$\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SA bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

BÀI 208 (THPT TRIỆU SƠN 1 – THANH HÓA (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt đáy (ABCD), đáy ABCD là hình chữ nhật có AD = 3a, AC = 5a, góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC).

Lời giải.



- Tính thể tích

+) Ta có: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 4a$

+) Mà $\left((SCD),(ABCD)\right) = SDA = 45^0$

nên SA = AD = 3a

Do đó: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = 12a^3$ (đvtt)

- Tính góc…

+) Dựng điểm K sao cho $\overrightarrow{SK} = \overrightarrow{AD}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của

D lên CK, khi đó: $DK \perp (SBC)$. Do đó: $\left(SD,(SBC)\right) = DSH$

+) Mặt khác $DH = \frac{DC.DK}{KC} = \frac{12a}{5}$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 3a\sqrt{2}$

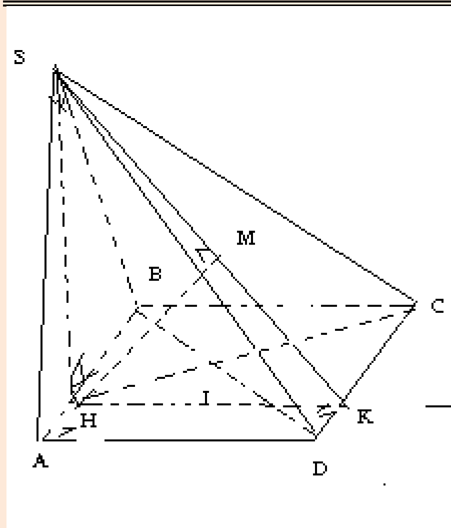
$$SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \frac{3a\sqrt{34}}{5}$$

Do đó: $\left(SD,(SBC)\right) = DSH = \arccos\frac{SH}{SD} = \arccos\frac{\sqrt{17}}{5} \approx 34^0 27'$

BÀI 209 (THPT DL LÊ THÁNH TÔN)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông canh a. Mặt bên SAB là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng AB là điểm H thuộc đoạn AB sao cho BH= 2AH. Goi I là giao điểm của HC và BD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.



$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH.S_{ABCD}$

Ta có $SH^2=HA.HB=2a^2/9 \Rightarrow SH = \frac{a}{3}\sqrt{2}$ $V_{S.ABCD} = \frac{a}{9}\sqrt{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$ (đvtt)

$\frac{d(I,(SCD))}{d(H,(SCD))} = \frac{IC}{HC}$ và $\frac{IC}{IH} = \frac{CD}{BH} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{IC}{CH} = \frac{3}{5}$ và $CH^2=BH^2+BC^2=\frac{13}{9}a^2$

$\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{11}{2a^2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{22}}{11}$

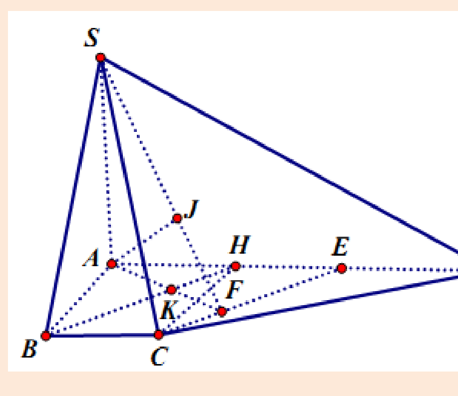
$d(I,(SCD)) = \frac{3a\sqrt{22}}{55}$.

BÀI 210 (THPT CHUYÊN BIÊN HÒA)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B. Các mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho $AB = 2a$, $AD > a$, $SA = BC = a$, $CD = 2a\sqrt{5}$. Gọi H là điểm nằm trên đoạn AD sao cho $AH = a$. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa 2 đường thẳng BH và SC theo a.

Lời giải.

Do (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy nên $SA \perp (ABCD)$.



AHCB là hình bình hành $\Rightarrow CH = AB = 2a$

$HD = \sqrt{CD^2 - CH^2} = 4a \Rightarrow AD = 5a$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+5a).2a = 6a^2$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = 2a^3$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ CE // BH $(E \in AD)$, ta có:

$d_{(BH,SC)} = d_{(BH,(SCE))} = d_{(H,(SCE))} = \frac{1}{2} d_{(A,(SCE))}$

Kẻ $AF \perp CE,\ AJ \perp SF \Rightarrow AJ \perp (SCE)$

$d_{(A,(SCE))} = AJ$

Gọi K là giao điểm của BH và AF

$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AK = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow AF = \frac{4a}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AF^2} \Rightarrow AJ = \frac{4a}{\sqrt{21}}$

$d_{(BH,SC)} = \frac{1}{2} d_{(A,(SCE))} = \frac{2a}{\sqrt{21}}$

BÀI 211 (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy là $60°$, M là trung điểm cạnh SD. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm S đến (BCM).

Lời giải.

BÀI 212 (THPT ĐĂKMIL - ĐĂKNÔNG)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc 60^0 . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA và SB. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ S đến mặt phẳng (DMN).

Lời giải.

$V = \frac{2\sqrt{15}a^3}{3}; d\left(S,(DMN)\right) = \frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{31}}$

BÀI 213 (THPT ĐÀO DUY TỪ)

Cho hình chop S.ABC D có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Trân cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM.

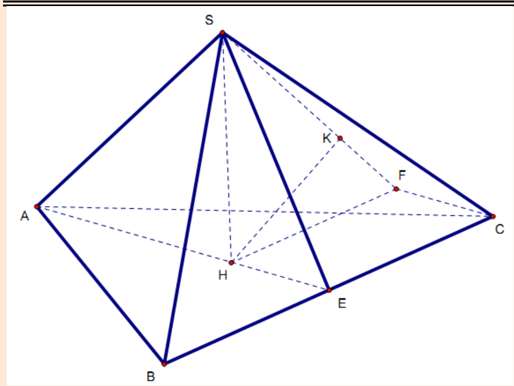
Lời giải.

$V = \frac{10a^3\sqrt{3}}{27}$

BÀI 214 (THPT CHUYÊN BIÊN HÒA – PHÚ THỌ (LẦN 1))

Cho hình chóp đều S.ABC có các cạnh bằng a, góc giữa cạnh bên với mặt đáy là $60°$; gọi E là trung điểm của BC. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng AE và SC.

Lời giải.



$\left(SA;\left(ABCD\right)\right) = SAE = 60°$

$AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}; HE = \frac{a\sqrt{3}}{6}; AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}; SH = a$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AE.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Dựng hình chữ nhật $HECF \Rightarrow CF \perp (SHF)$.

Hạ $HK \perp SF \Rightarrow HK \perp (SCF)$.

$d_{(AE,SC)} = d_{(AE,(SCF))} = d_{(H,(SCF))} = HK = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

BÀI 215 (THPT NGUYỄN SĨ SÁCH (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật AB = a, $A = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABCD) là trọng tâm tam giác ABC. Đường thẳng SD tạo với đáy ABCD một góc 45^0 . Tính thể tích khối chóp S.ABCD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và MN theo a biết M , N lần lượt là trung điểm AB và AD.

Lời giải.

$V = \frac{2\sqrt{6}a^3}{9}; d\left(MN,SC\right) = a$

BÀI 216 (THPT QUỲNH LƯU 2)

Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B cạnh AC=2a góc $\angle BAC = 30^0$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính thể tích khối chóp SABC và khoảng cách giữa đường thẳng SB và AC.

Lời giải.

$V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} d\left(AB,SC\right) = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

BÀI 217 (THPT TRIỆU SƠN 1 – THANH HÓA (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt đáy (ABCD), đáy ABCD là hình chữ nhật có AD = 3a, AC = 5a, góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC).

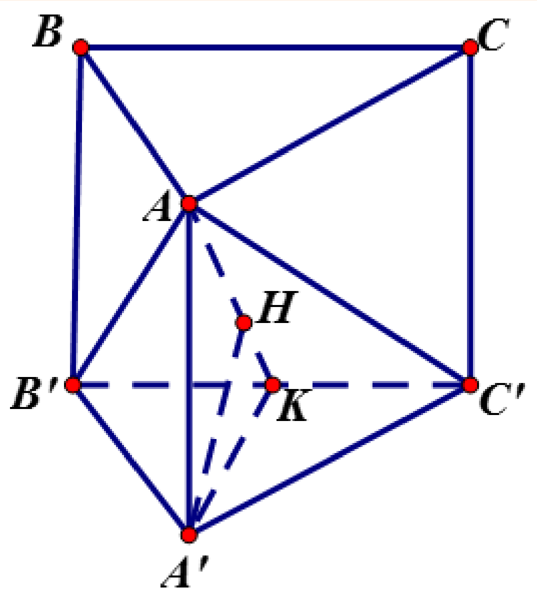
Lời giải.

$V_{S.ABCD} = 12a^3 \quad ; \; cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{5}$

BÀI 218 (TT GDTX&HN VẠN NINH – KHÁNH HÒA (LẦN 1))

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $AB = AC = 2a$, $BAC = 120^0$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc 60^0. Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ theo a.

Lời giải.



Xác định góc giữa $(AB'C')$ và mặt đáy là $AKA' \Rightarrow AKA' = 60^0$ (với K là trung điểm của $B'C'$)

Tính $A'K = \dfrac{1}{2}A'C' = a \Rightarrow AA' = A'K.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

Tính $S_{A'B'C'} = a^2\sqrt{3} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 3a^3$

Chứng minh: $(AA'K) \perp (AB'C')$

Trong mặt phẳng $(AA'K)$ dựng $A'H$ vuông góc với $AK \Rightarrow A'H \perp (AB'C')$

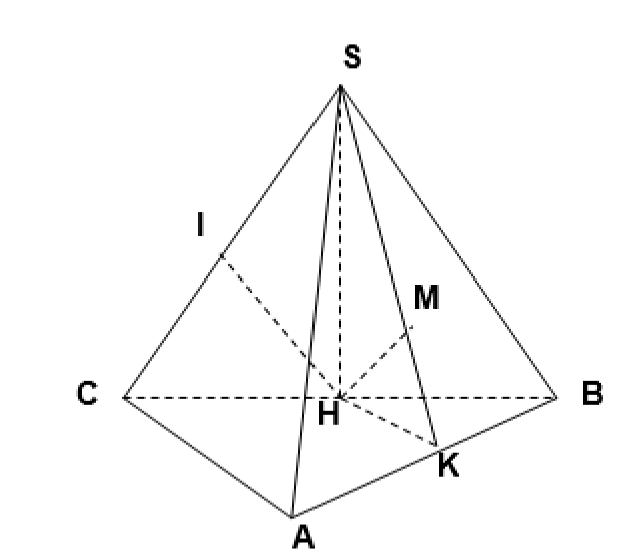
$\Rightarrow d(A';(AB'C')) = A'H$

Tính: $A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ Vậy $d(A';(AB'C')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

BÀI 219 (TT GDTX&HN VẠN NINH – KHÁNH HÒA (LẦN 1))

Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = AC = a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

Lời giải.



Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow HK \perp AB\,(1)$

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow AB \perp SK$

Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa SK và HK và bằng $SKH = 60^\circ$

Ta có $SH = HK \tan SKH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}AB.AC.SH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Vì $IH//SB$ nên $IH//(SAB)$. Do đó $d(I,(SAB)) = d(H,(SAB))$

Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại M $\Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d(H,(SAB)) = HM$

Ta có $\dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d(I,(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

BÀI 220 (THPT VIỆT TRÌ – PHÚ THỌ (LẦN 2))

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$, tam giác ABC cân tại A, $BC = 2a\sqrt{2}$, $\cos(ACB) = \dfrac{1}{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$, xác định tâm và tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải.

sinC= $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan C = 2\sqrt{2}; CM = a\sqrt{2}; AM = CM.\tan C = 4a$

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = 4a^2\sqrt{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{8a^3\sqrt{2}}{3}}$$

sinA=sin2C = 2sinC.cosC = $2\dfrac{1}{3}\dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

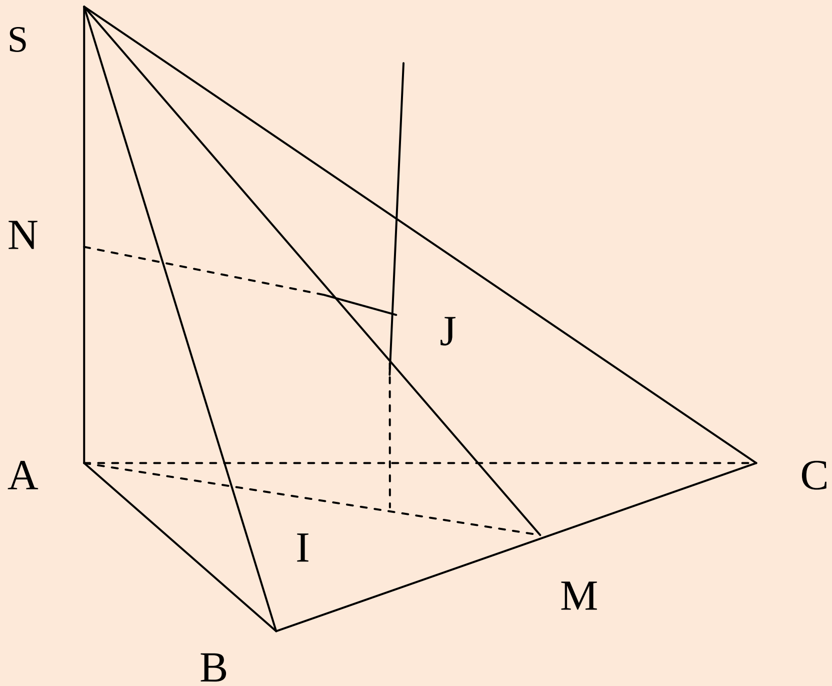
theo định lý sin trong tam giác ABC ta có $2R = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{9a}{4}$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có IA=R .Dựng ngoại tiếp tam giác ABC. Mặt phẳng trung trực SA cắt trục đường tròn tại J khi đó J chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp SABC

Gọi r là bán kính mặt cầu ngoại tiếp SABC khi đó

$$r = JA = JB = JS = JC = \sqrt{IA^2 + AN^2} = \frac{a\sqrt{97}}{4}$$

Diện tích mặt cầu cần tính là

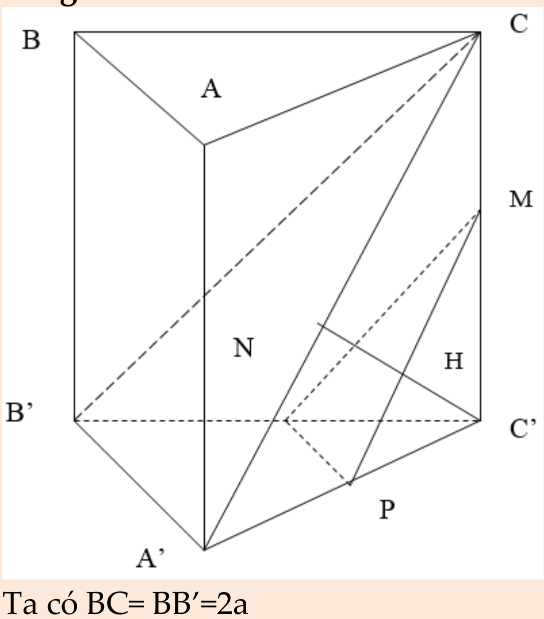


$$\boxed{S = 4\pi.r^2 = \frac{97\pi.a^2}{4}}$$

BÀI 221 (THPT VIỆT TRÌ – PHÚ THỌ (LẦN 1))

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$, mặt bên $BCC'B'$ là hình vuông, M, N lần lượt là trung điểm của CC' và $B'C'$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B'$ và MN .

Lời giải.



Ta có BC= BB′=2a

$.V_{ABC.A'B'C'} = BB'.S_{\Delta ABC} = 2a.\frac{1}{2}a.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$

gọi P là trung điểm của A'C' mp(CA'B') //mp(PMN) nên suy ra khoảng cách d(A'B';MN)= d(A'B';(MNP))= d(A';(MNP))= d(C';(MNP))= C'H (H là hình chiếu vuông góc của C' lên mp(MNP)

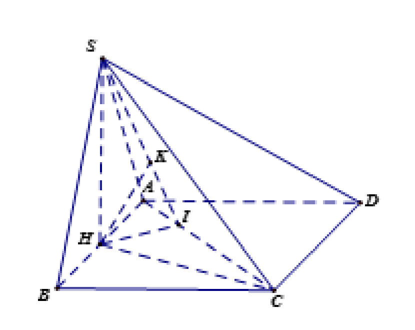
Cm được H thuộc cạnh PM áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MPC'

$$C'H = \frac{C'M.C'P}{\sqrt{C'P^2 + C'M^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

BÀI 222 (THPT XUÂN TRƯỜNG – NAM ĐỊNH (LẦN 1))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD). Biết $SD = 2a\sqrt{3}$ và góc tạo bởi đường thẳng SC với mặt phẳng (ABCD) bằng 30^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB. Suy ra $SH \perp (ABCD)$

và $SCH = 30^0$.

Ta có: $\Delta SHC = \Delta SHD \Rightarrow SC = SD = 2a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SHC vuông tại H ta có:

$SH = SC.\sin SCH = SC.\sin 30^0 = a\sqrt{3}$

$HC = SC.\cos SCH = SC.\cos 30^0 = 3a$

Vì tam giác SAB đều mà $SH = a\sqrt{3}$ nên $AB = 2a$. Suy ra

$BC = \sqrt{HC^2 - BH^2} = 2a\sqrt{2}$. Do đó, $S_{ABCD} = AB.BC = 4a^2\sqrt{2}$.

Vậy, $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$.

Vì $BA = 2HA$ nên $d\left(B,(SAC)\right) = 2d\left(H,(SAC)\right)$

Gọi I là hình chiếu của H lên AC và K là hình chiếu của H lên SI. Ta có:

$AC \perp HI$ và $AC \perp SH$ nên $AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$. Mà, ta lại có: $HK \perp SI$.

Do đó: $HK \perp (SAC)$.

Vì hai tam giác SIA và SBC đồng dạng nên $\frac{HI}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow HI = \frac{AH.BC}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra, $HK = \frac{HS.HI}{\sqrt{HS^2 + HI^2}} = \frac{a\sqrt{66}}{11}$.

Vậy , $d\left(B,\left(SAC\right)\right)=2d\left(H,\left(SAC\right)\right)=2HK=\dfrac{2a\sqrt{66}}{11}$.

BÀI 223 (THPT YÊN LẠC – VĨNH PHÚC (LẦN 1))

Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu H của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đường thẳng $B'C'$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ theo a.

Lời giải.

$V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$; $d(\mathrm{AA'};\mathrm{B'C'})=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

BÀI 224 (THPT YÊN MỸ - HƯNG YÊN)

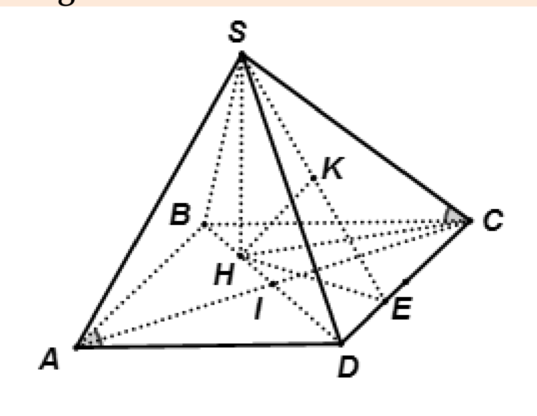
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I và có cạnh bằng a, góc $BAD=60^0$. Gọi H là trung điểm của IB và SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ biết $SH=\dfrac{a\sqrt{13}}{4}$.

1. Hãy tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

2. Gọi M là trung điểm của SB , N thuộc SC sao cho SC = 3SN . Tính tỉ số thể tích khối chóp $S.AMN$ và khối chóp S.ABCD.

3. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.



a) Ta có $SH\perp(ABCD)\Rightarrow SH$ là đường cao của chóp S.ABCD

Theo giả thiết hình thoi ABCD có

góc A = 60^0 suy ra tam giác BAD đều $BD=a\Rightarrow S_{ABCD}=2S_{ABD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{\sqrt{39}}{24}a^3$

$b)\quad \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{1}{6}$

$$\frac{V_{SABC}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12}$$

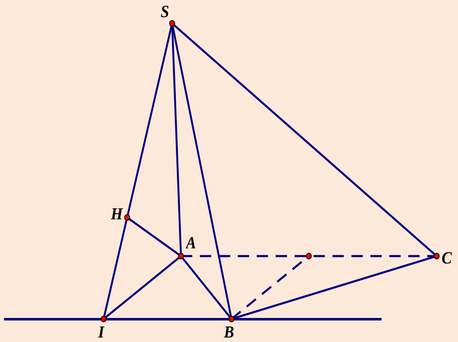
BÀI 225 (THPT YÊN PHONG SỐ 2 – BẮC NINH (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0.

1) Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB theo a.

Lời giải.



+ Nêu được góc $SBA = 60^0$

Tính SA = $a\sqrt{3}$

+ Thể tích khối S.ABC là

$V = \frac{1}{3}dt(ABC).SA = \frac{a^3}{4}$ (đvtt)

2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB theo a.

+ Gọi d là đt qua B và song song với AC. I là hình chiếu vuông góc của A trên d, H là hình chiếu vuông góc của A trên SI

+ Chứng minh được AH $\perp$ (SBI)

+ Tính đúng AH = $\frac{a\sqrt{15}}{5}$

+ Kết luận d(AC, SB) = $\frac{a\sqrt{15}}{5}$

BÀI 226 (THPT YÊN LẠC – VĨNH PHÚC (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm G của tam giác ABC, góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30^0. Tính theo a thể tích khối chop S.ABCD và cosin của góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SAB).

Lời giải.

$V_{SABCD} = \dfrac{5\sqrt{15}a^3}{27}; \cos\left(AC;(SAB)\right) = \dfrac{\sqrt{11}}{4}$

BÀI 227 (THPT YÊN THẾ – VĨNH PHÚC (LẦN 2))

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân (BC//AD). Biết đường cao SH bằng a, với H là trung điểm của AD, $AB = BC = CD = 2a$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD theo a.

Lời giải.

$V_{SABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}; d\left(AD; SB\right) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

BÀI 228 (THPT YÊN THẾ – VĨNH PHÚC (LẦN 3))

Trong không gian cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Tính diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay khi quay đường gấp khúc BCDA quanh trục là đường thẳng chứa cạnh AB và thể tích khối trụ đó.

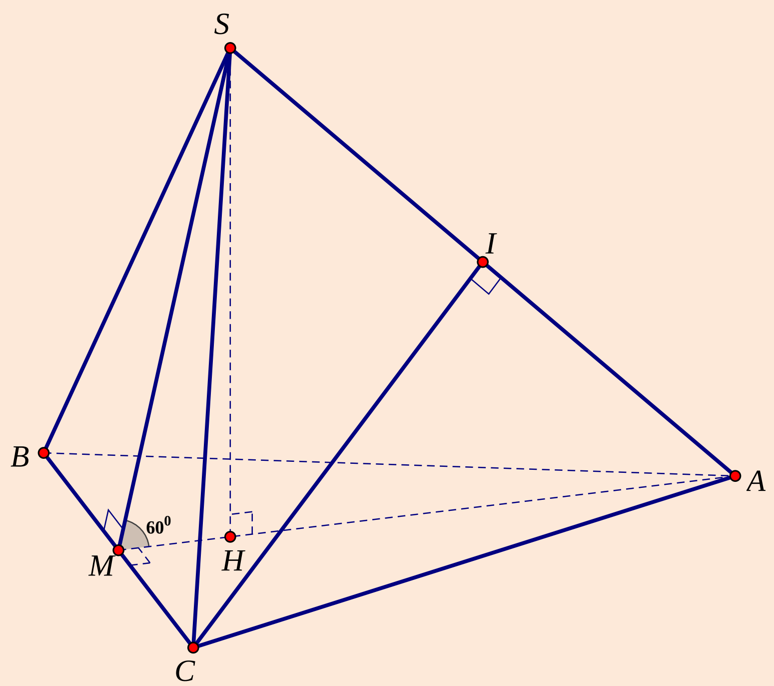
Lời giải.

$S_{xq} = 2\pi a^2; V = \dfrac{\pi a^3}{3}$

BT 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt ABC và SBC là những tam giác đều cạnh a. Góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 60^o. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Đáp số: $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$ (*đvtt*) và $d(B;(SAC)) = \dfrac{3V_{B.SAC}}{S_{\Delta SAC}} = \dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAC}} = \dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải.



Ta có ΔABC và ΔSBC lần lượt là các tam giác đều tại A và S. Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM \perp BC, SM \perp BC$.

Suy ra ta có $\angle\left((SBC),(ABC)\right) = \angle\left(SM, AM\right) = \angle SMA = 60^0$.

Tam giác SHM vuông tại H, ta có: $SH = SM.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}.\frac{3a}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ (đvtt)

Xét tam gác SMA ta có: $SM = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\angle SMA = 60^0$. Suy ra tam giác SAM là tam giác đều. Suy ra $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{IA} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ (với I là trung điểm của SA)

Xét tam giác CIA vuông tại I: $CI = \sqrt{CA^2 - IA^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$

$S_{\Delta SCA} = \frac{1}{2}.CI.SA = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$

$$d\left(B;\left(SAC\right)\right) = \frac{3V_{B.SAC}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{3.\frac{a^3\sqrt{3}}{16}}{\frac{a^2\sqrt{39}}{16}} = \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$$

ĐÂY CHỈ LÀ BẢN GIẢI THÔ – VÌ THỜI GIAN QUÁ NGẮN NGỦI NÊN BỘ TÀI LIỆU CHƯA HOÀN THIỆN CHI TIẾT HƠN – ĐÓN CHỜ GIAI ĐOẠN TIẾP THEO… TOBE CONTINES……

- CHIA SẺ VÌ CỘNG ĐỒNG -