100 HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAY THƯỜNG GẶP 2015 -2016

Bài 1 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12 & (1) \\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} & (2) \end{cases}$ (x, y ∈ R) ***(ĐH khối A – 2014)***

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} 2\le y\le 12 \\ 12-x^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\le y\le 12 \\ -2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3} \end{cases}$

Cách 1:

Đặt $a=\sqrt{12-y}, a\ge 0 \Rightarrow y=12-a^2$

PT (1) $\Leftrightarrow xa+\sqrt{(12-a^2)(12-x^2)}=12$

$\Leftrightarrow \sqrt{12^2-12x^2-12a^2+x^2a^2}=12-xa$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xa\le 12 \\ 12^2-12x^2-12a^2+x^2a^2=12^2-2.12.xa+x^2a^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xa\le 12 \\ 12x^2-2.12xa+12a^2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xa\le 12 \\ (x-a)^2=0 \end{cases}$

Ta có $(x-a)^2=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{12-y}$ (*)

Thế (*) vào (2) được : $(12-y)\sqrt{12-y}-8\sqrt{12-y}-1=2\sqrt{y-2}$

$\Leftrightarrow (4-y)\sqrt{12-y}=2\sqrt{y-2}+1$

$\Leftrightarrow \quad (3-y)\sqrt{12-y}+\sqrt{12-y}-3+2-2\sqrt{y-2}=0$

$\Leftrightarrow (3-y)\sqrt{12-y}+\dfrac{3-y}{\sqrt{12-y}+3}+\dfrac{2(3-y)}{1+\sqrt{y-2}}=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \\ \sqrt{12-y}+\dfrac{1}{\sqrt{12-y}+3}+\dfrac{2}{1+\sqrt{y-2}}=0\,(\text{voâ nghieäm}) \end{array}\right.$

Vậy $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

Cách 2:

Ta có $x\sqrt{12-y}+\sqrt{(12-x^2)y}\le\sqrt{\left(x^2+12-x^2\right)\left(12-y+y\right)}=12$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{12-y^2}}=\dfrac{\sqrt{12-y}}{\sqrt{y}}\Leftrightarrow x\sqrt{y}=\sqrt{(12-y)(12-x^2)}$ (3)

Khi đó (1) tương đương với (3)

(3) $\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2y=144-12x^2-12y+x^2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 12y=144-12x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ y=12-x^2\end{cases}$ (4)

Thế (4) vào (2) ta có

(2) $\Leftrightarrow x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}\Leftrightarrow x^3-8x-1-2\sqrt{10-x^2}=0$

$\Leftrightarrow x^3-8x-3+2\left(1-\sqrt{10-x^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x^2+3x+1\right)+2.\dfrac{1-(10-x^2)}{1+\sqrt{10-x^2}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x^2+3x+1\right)+2.\dfrac{9-x^2}{1+\sqrt{10-x^2}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left[x^2+3x+1+\dfrac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x^2+3x+1+\dfrac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}=0\ \text{(voâ nghieäm vì x}\ge 0)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=3$

Vậy $\begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}$

Cách 3:

Đặt $\vec{a}=\left(x;\sqrt{12-x^2}\right);\vec{b}=\left(\sqrt{12-y};\sqrt{y}\right)$

$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\sqrt{12}$

(1) $\Leftrightarrow \vec{a}^2+\vec{b}^2=2\vec{a}.\vec{b}$

$\Leftrightarrow \vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow x=\sqrt{12-y}$

(2) $\Leftrightarrow x^3-8x-3=2\sqrt{10-x^2}-2$

$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x^2+3x+1\right)=2\dfrac{\left(3-x\right)\left(3+x\right)}{\sqrt{10-x^2}+1}$

$\Leftrightarrow x=y=3$

$\left(x^2+3x+1\right)\left(\sqrt{10-x^2}+1\right)-2\left(3+x\right)=0$

Đặt $f\left(x\right)=\left(x^2+3x+1\right)\left(\sqrt{10-x^2}+1\right)-2\left(3+x\right)$

$f'(x) < 0\,\forall x > 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hpt trên: (3;3)

<u>Bài 2</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y}\\ 2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3}\end{cases}$ **(ĐH khối B – 2014)**

<u>Giải</u>

Điều kiện: $\begin{cases}y \ge 0\\ x \ge 2y\\ 4x-5y \ge 3\end{cases}$

Phương trình thứ nhất viết lại thành

$$(1-y)\sqrt{x-y}-(1-y)+(x-y-1)=(x-y-1)\sqrt{y}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(1-y)(\text{x}-\text{y}-1)}{\sqrt{x-y}+1}=(x-y-1)\frac{y-1}{\sqrt{y}+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\ x=y+1\end{array}\right.$$

TH1 : $y=1$ thay xuống (2) ta có

$$9-3x=2\sqrt{x-2}-\sqrt{4x-8} \Leftrightarrow x=3\,(TM)$$

TH2 : $x=y+1$ thay xuống (2) ta có

$$2y^2+3y-2=2\sqrt{1-y}-\sqrt{1-y}$$
$$\Leftrightarrow 2y^2+3y-2-\sqrt{1-y}=0$$
$$\Leftrightarrow 2(y^2+y-1)+(y-\sqrt{1-y})=0$$
$$\Leftrightarrow (y^2+y-1)\left(2+\frac{1}{y+\sqrt{1-y}}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}(TM)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(3;1),(\frac{\sqrt{5}+1}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2})$.

<u>Bài 3</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y(x^2+2x+2)=x(y^2+6)\\ (y-1)(x^2+2x+7)=(x+1)(y^2+1)\end{cases}$

<u>Giải</u>

ĐK: $x,y \in R$

Đặt $\begin{cases}a=x+1\\ b=y\end{cases}$, ta có hệ trở thành: $\begin{cases}b(a^2+1)=(a-1)(b^2+6)\\ (b-1)(a^2+6)=a(b^2+1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)(b^2+6)=b(a^2+1)\ (*)\\ (b-1)(a^2+6)=a(b^2+1)(**)\end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình rồi thu gọn ta có:

$$(a-b)(a+b-2ab+7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\ a+b-2ab+7=0\end{array}\right.$$

❖ Trường hợp 1: $a = b$ thay vào phương trình (*) ta có:

$$(a-1)(a^2+6) = a(a^2+1) \Leftrightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 3 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow$$ hệ có 2 nghiệm (x; y) là:

❖ Trường hợp 2: $a + b - 2ab + 7 = 0$

Trừ vế theo vế hai phương trình (*) và (**) rồi rút gọn ta có: $\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Vậy ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a + b - 2ab + 7 = 0 \\ \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Đây là hệ đối xứng loại I, giải hệ ta có các nghiệm: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}; \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}; \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}; \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

Từ đó ta có các nghiệm (x; y) là: $(1;2),(2;3),(1;3),(2;2)$.

Kết luận: Hệ phương trình có 4 nghiệm là: $(1;2),(2;3),(1;3),(2;2)$.

Bài 4 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 12x - y^3 + 6y^2 - 16 = 0 \\ 4x^2 + 2\sqrt{4 - x^2} - 5\sqrt{4y - y^2} + 6 = 0 \end{cases}$

Giải

ĐK: $x \in [-2;2], y \in [0;4]$

Ta có $PT(1) \Leftrightarrow (x+2)^3 - 6(x+2) = y^3 - 6y^2$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 6t, t \in [0;4]$ ta có $f'(t) = 3t^2 - 12t = 3t(t-4) \le 0, \forall t \in [0;4] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[0;4]$. Mà phương trình (1) có dạng: $f(x+2) = f(y) \Leftrightarrow y = x + 2$ thay vào phương trình (2) ta có: $4x^2 + 6 = 3\sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow x = 0$ từ đó ta có y = 2.

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm (0; 2).

Bài 5 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2\sqrt{y+1} = 3 \\ x^3 - 4x^2\sqrt{y+1} - 9x - 8y = -52 - 4xy \end{cases}$.

Giải

ĐK: $y \ge -1$.

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ x^3 - 4x^2\sqrt{y+1} + 4xy + 4x - 13x - 8y + 52 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ x(x - 2\sqrt{y+1})^2 - 13x - 8y + 52 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ -x - 2y + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ \sqrt{y+1} = 5 - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ y \le 5 \\ y^2 - 11y + 24 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ y \le 5 \\ \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$.

<u>Bài 6</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{y - 2x + \sqrt{y} - x}{\sqrt{xy}} + 1 = 0 \\ \sqrt{1 - xy} + x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

ĐK: $x > 0; y > 0; xy \le 1$

$(1) \Leftrightarrow y - 2x + \sqrt{y} - \sqrt{x} + \sqrt{xy} = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y} + 2\sqrt{x} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = x$ thay vào (2), ta được: $\sqrt{1 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$

KL: hệ pt có tập nghiệm: $S = \left\{\left(1;1\right)\right\}$

<u>Bài 7</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2\left(x^3 + y^3\right)}{xy} - \dfrac{3\left(x^2 + y^2\right)}{\sqrt{xy}} + 5\left(x + y\right) = 8\sqrt{xy} \\ \sqrt{5x - 1} + \sqrt{2 - y} = \dfrac{5x + y}{2} \end{cases}$

ĐK: $x \ge \dfrac{1}{5}; 0 < y \le 2$

Đặt $u = x + y, u > 0; v = \sqrt{xy}, v > 0$ khi đó

$(1) \Leftrightarrow 2u^3 - 3u^2v - uv^2 - 2v^3 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{u}{v} - 2\right)\left(2\left(\dfrac{u}{v}\right)^2 + \dfrac{u}{v} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{u}{v} = 2 \Leftrightarrow u = 2v$

$\Rightarrow x+y=2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=y$ thay vào (2), ta được:

$$\sqrt{5x-1}+\sqrt{2-x}=3x \Leftrightarrow \frac{5x-5}{\sqrt{5x-1}+2}+\frac{1-x}{\sqrt{2-x}+1}=3x-3 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}-\frac{1}{\sqrt{2-x}+1}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1 \\ \dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{2-x}+1}-3=0 \;\; VN \text{ vì } \dfrac{1}{5}\le x\le 2 \end{array}\right.$$

KL: tập nghiệm của hệ pt là: $S=\left\{(1;1)\right\}$

Bài 8 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x^3+x+1}{y^2}+(2x+1)\left(1-\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{x^2}{y^2}(3y-1)-\dfrac{(x-y)^2}{x-y} \\ \dfrac{x^3-x^2-1}{y^2}+\dfrac{4}{y}-1=0 \end{cases}$

ĐK: $y\ne 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^3+(x-y)^2+(x-y)+1=0 \\ x^3-x^2-1+4y-y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y+1)\left((x-y)^2+1\right)=0 \\ x^3-x^2-1+4y-y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

KL: $S=\left\{(1;2)\right\}$

Bài 9 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{4x^2+3xy-7y^2}+4\left(x^2+5xy-6y^2\right)=\sqrt{3x^2-2xy-y^2} \\ 3x^2+10xy+34y^2=47 \end{cases}$

ĐK: $\begin{cases} 3x^2-2xy-y^2\ge 0 \\ 4x^2+3xy-7y^2\ge 0 \end{cases}$

Chuyển vế nhân liên hợp ở phương trình (1), ta được:

$$\left(x^2+5xy-6y^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+3xy-7y^2}+\sqrt{3x^2-2xy-y^2}}+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \quad (n) \\ x=-6y \qquad\quad (n) \end{array}\right.$$

Với $x=y$ thay vào (2), ta được: $x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=-1 \Rightarrow y=-1 \end{array}\right.$

Với $x=-6y$ thay vào (2), ta được: $82y^2=47 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{\dfrac{47}{82}} \Rightarrow x=-6\sqrt{\dfrac{47}{82}} \\ y=-\sqrt{\dfrac{47}{82}} \Rightarrow x=6\sqrt{\dfrac{47}{82}} \end{array}\right.$

KL: $S=\left\{(1;1),(-1;-1),\left(\sqrt{\dfrac{47}{82}};-6\sqrt{\dfrac{47}{82}}\right);\left(-\sqrt{\dfrac{47}{82}};6\sqrt{\dfrac{47}{82}}\right)\right\}$

Bài 10 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+3xy-3(x-y)=0 \\ x^4+9y(x^2+y)-5x^2=0 \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3y=3x-3xy \\ (x^2+3y)^2+3x^2y-5x^2=0 \end{cases}$

Thay (1) vào (2), ta được: $x^2(9y^2-15y+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ y=\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=1 \\ y=\dfrac{4}{3} \Rightarrow x^2+x+4=0 \qquad\qquad VN \end{array}\right.$

KL: $S=\left\{(0;0);\left(1;\dfrac{1}{3}\right)\right\}$

Bài 11 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+2)^2+4(y-1)^2=4xy+13 \\ \sqrt{\dfrac{x^2-xy-2y^2}{x-y}}+\sqrt{x+y}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-y^2}} \end{cases}$

ĐK: $\begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \\ x-2y\geq 0 \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4xy+4y^2+4x-8y-5=0 \\ (x+y)\sqrt{x-2y}+(x+y)\sqrt{x-y}=2 \end{cases}$

Ta có PT $(1) \Leftrightarrow (x-2y)^2+4(x-2y)-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2y=1 \\ x-2y=-5 \quad (l) \end{array}\right.$

Với $x=2y+1$ thay vào (2), ta được:

$(3y+1)\sqrt{y+1}=1-3y \Rightarrow 9y^3+6y^2+13y=0 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow x=1$ thỏa mãn

KL: $S=\{(1;0)\}$

Bài 12 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2-5)\sqrt{x^2-2y}+x^2+3=2y\left(\sqrt{x^2-2y}+1\right) \\ x^2+3y=6 \end{cases}$

ĐK: $x\geq 2y$

Ta có $(2) \Leftrightarrow x^2=6-3y$ thay vào (1) ta được: $(1-5y)\sqrt{6-5y}=5y-9 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ thỏa mãn

KL: $S=\left\{\left(\sqrt{3};1\right);\left(-\sqrt{3};1\right)\right\}$

Bài 13 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(y-1)\dfrac{x^2-y}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{y-1}}=2\\ \left(x^2+4y\right)\sqrt{x^2-1}+6=5\sqrt{x^2-1}\left(1+\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y-1\right)}\right)\end{cases}$

ĐK: $\begin{cases}x\le -1\vee x\ge 1\\ y\ge 1\\ \sqrt{x^2-1}+\sqrt{y-1}\ne 0\end{cases}$

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt{x^2-1}, a\ge 0\\ b=\sqrt{y-1}, b\ge 0\end{cases}$, ta được: $\begin{cases}b^2\left(a-b\right)=2\\ a^3+4ab^2-5a^2b=6\end{cases}$

Nhân chéo hai phương trình giải hệ đẳng cấp ta đươc tập nghiệm: $S=\left\{\left(\sqrt{10};2\right);\left(-\sqrt{10};2\right)\right\}$

Bài 14 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}-20y^3-3y^2+3xy+x-y=0\\ x^2+y^2-3y=1\end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}-20y^3-y\left(3y-1\right)+x\left(3y+1\right)=0\\ x^2+y^2=3y+1\end{cases}$.

Thế (2) vào (1), ta được phương trình thuần nhất bậc 3

KL: $S\left\{\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{-3}{5};\dfrac{-1}{5}\right)\right\}$

Bài 15 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x-3y+\sqrt{x^2+3y^2}=0\\ \sqrt{2y-1}+2x^2-y^2-3x+1=0\end{cases}$

ĐK: $y\ge\dfrac{1}{2}$

Ta có PT $(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3y^2}=3y-x\Leftrightarrow\begin{cases}3y\ge x\\ 6y^2-6xy=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y\ge x\\ \left[\begin{array}{l}y=0\quad (l)\\ x=y\end{array}\right.\end{cases}$

Với $x=y$ thay vào (2), ta được:

$\sqrt{2y-1}=-y^2+3y-1\Rightarrow y^4-6y^3+11y^2-8y+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\Rightarrow x=1\\ y=2+\sqrt{2}\quad (l)\\ y=2-\sqrt{2}\Rightarrow x=2-\sqrt{2}\end{array}\right.$

KL: $S=\left\{(1;1);\left(2-\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right)\right\}$

<u>Bài 16</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{3\left(x^4+y^4\right)+2x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ xy^2+3y^2+4x=8 \end{cases}$

ĐK: $x.y\neq 0$

Ta có PT $(1)\Leftrightarrow\left(x^2-y^2\right)^2\left(\dfrac{x^4-x^2y^2+y^4}{x^2y^2\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=0\Leftrightarrow x^2=y^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-y \end{array}\right.$

- Với $x=y$ thay vào (2), ta được: $x=1\Rightarrow y=1$
- Với $x=-y$ thay vào (2), ta được: $y=-1\Rightarrow x=1$

KL: $S=\left\{(1;1);(1;-1)\right\}$

<u>Bài 17</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0 \\ \sqrt{x^3+xy+6y}-\sqrt{y^3+x^2-1}=2 \end{cases}$

ĐK: $\begin{cases} x^3+xy+6y\geq 0 \\ y^3+x^2-1\geq 0 \end{cases}$

Ta có PT $(1)\Leftrightarrow 10x^2-2x(y+19)+5y^2-6y+41=0$.

Tính $\Delta'_x=-49(y-1)^2\geq 0\Leftrightarrow y=1$ thay vào (1) được $x=2$ thỏa hệ phương trình

KL: $S=\left\{(2;1)\right\}$

<u>Bài 18</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3-x^2y+xy^2-2xy-x+y=0 \\ \sqrt{x-y}=x^3-2x^2+y+2 \end{cases}$

ĐK: $x\geq y$

Ta có PT $(1)\Leftrightarrow(x-y-1)\left(x^2+y^2+x-y\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ x^2+y^2+x-y=0 \end{array}\right.$

- $y=x-1$ thay vào (2), ta được: $x^3-2x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=-1 \\ x=1\Rightarrow y=0 \end{array}\right.$
- $x^2+y^2+x-y=0\Leftrightarrow x=y=0\ \ (\text{vì } x-y\geq 0)$ thay vào hệ không thỏa

KL: $S\left\{(1;0);(0;-1)\right\}$

Bài 19 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2+8x^2=3-\left(1+3\sqrt[3]{y^2-1}\right)\sqrt[3]{y^2-1} \\ 4-3\sqrt[3]{\left(y^2-1\right)^2}-2\sqrt[3]{y^2-1}=12x^2+y^2-\sqrt{1-4x^2} \end{cases}$

ĐK: $\dfrac{-1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}$

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt[3]{y^2-1} \\ b=\sqrt{1-4x^2}, b\ge 0 \end{cases}$, ta có: $\begin{cases} a^3+3a^2+2a-3b^2-b=0 \\ a^3+3a^2+a-2b^2=0 \end{cases}\Rightarrow a=b^2+b$ thay vào (1), ta được:

$\left(b^2+b\right)^3+3\left(b^2+b\right)^2+2\left(b^2+b\right)-3b^2-b=0\Leftrightarrow b=0\Rightarrow a=0$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} \sqrt{1-4x^2}=0 \\ \sqrt[3]{y^2-1}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\pm\dfrac{1}{2} \\ y=\pm 1 \end{cases}$

KL: $S=\left\{\left(\dfrac{1}{2};1\right);\left(\dfrac{1}{2};-1\right);\left(-\dfrac{1}{2};1\right);\left(-\dfrac{1}{2};-1\right)\right\}$

Bài 20 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^6-24y^3+\left(2y-x^2\right)\left(9x^2+18y-11\right)=0 \\ 1+\sqrt[3]{2\sqrt{2y}+1}=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+6y-1} \end{cases}$

ĐK: $y\ge 0$

Ta có PT $(1)\Leftrightarrow\left(x^2-2y\right)\left(3x^4+6x^2y-9x^2+12y^2-18y+1\right)=0$

Với $x^2=2y$ thay vào (2), ta được:

$$1+\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt{x}+\sqrt[3]{4x-1}\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{2}{\sqrt[3]{(4x-1)^2}+\sqrt[3]{4x-1}\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$

KL: $S=\left\{\left(1;\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

Bài 21 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+xy=\dfrac{2\left(x-y\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{2}{\sqrt{xy}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x+y=4 \end{cases}$

ĐK: $x>0;y>0$

Ta có PT $(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}+xy\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{x}-\sqrt{y}=xy\Rightarrow x+y=x^2y^2+2\sqrt{xy}$ thay vào (2) ta được:

$\left(\sqrt{xy}-1\right)\left(xy\sqrt{xy}+xy+\sqrt{xy}+4\right)=0\Leftrightarrow xy=1$

Khi đó ta có: $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ y=\dfrac{3\mp\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

KL: thay vào hệ ta có tập nghiệm: $S=\left\{\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

<u>Bài 22</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+2\sqrt{\dfrac{x-1}{y-1}}+\dfrac{4}{y-1}-\dfrac{4}{\sqrt{y-1}}+\sqrt{x-1}=0 \\ (y-1)(x-1)\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-1}-\dfrac{y-1}{2}=2 \end{cases}$

ĐK: $x\ge 1; y>1$

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{x-1}, a\ge 0 \\ b=\sqrt{y-1}, b>0 \end{cases}$. Ta có $(1)\Leftrightarrow (b-2)^2+a^2b^2+2ab+ab^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=0 \\ \sqrt{y-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ thỏa hệ phương trình

KL: $S=\{(1;5)\}$

<u>Bài 23</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x+3\sqrt{y}}{4y+\sqrt{2x+y}}=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x-4y-8}}-\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$

ĐK: $\begin{cases} y>1 \\ 2x+y\ge 0 \\ 3x-4y\ne 8 \end{cases}$

Ta có $(1)\Leftrightarrow (x-4y)\left(1-\dfrac{2}{3\sqrt{y}+\sqrt{2x+y}}\right)=0 \Leftrightarrow x=4y$ thay vào (2), ta được:

$\dfrac{1}{2\sqrt[3]{y-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{1}{2}a^2-a^2=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow (a-1)(2a^2+a+1)=0\Leftrightarrow a=1$ $\left(a=\dfrac{1}{\sqrt[6]{y-1}}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[6]{y-1}}=1\Leftrightarrow y=2\Rightarrow x=8$

KL: $S=\{(8;2)\}$

<u>Bài 24</u> Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x-1}(1-2y)-y+2=0 \\ y\left(y+\sqrt{x-1}\right)+x-4=0 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

<u>Giải</u>

Điều kiện: $x\ge 1$.

Đặt $t=\sqrt{x-1},\ t\ge 0.$ Khi đó $x=t^2+1$ và hệ trở thành

$$\begin{cases} t(1-2y)-y+2=0 \\ y(y+t)+t^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-y-2ty+2=0 \\ y^2+ty+t^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-y)-2ty+2=0 \\ (t-y)^2+3ty-3=0 \end{cases}$$

Suy ra $2(t-y)^2+3(t-y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-y=0 \\ t-y=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=t \\ y=t+\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

❖ Với $y=t,$ ta có $-2t^2+2=0 \Leftrightarrow t=1.$ Suy ra $x=2,\ y=1.$

❖ Với $y=t+\dfrac{3}{2},$ ta có $-\dfrac{3}{2}-2t\left(t+\dfrac{3}{2}\right)+2=0 \Leftrightarrow 4t^2+6t-1=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{4}.$

Suy ra $x=\dfrac{19-3\sqrt{13}}{8},\ y=\dfrac{3+\sqrt{13}}{4}.$

Vậy nghiệm $(x;y)$ của hệ là

<u>Bài 25</u> Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (x+2)\sqrt{x^2+4x+7}+y\sqrt{y^2+3}+x+y+2=0 \\ \sqrt{x^2+y+1}=x-y+1 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện: $x^2+y+1\ge 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{(x+2)^2+3}+x+2=-y\sqrt{(-y)^2+3}-y$

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{t^2+3}+t$ Có $f'(t)=\sqrt{t^2+3}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}+1>0\ \forall t$

$\Rightarrow$ Hàm số f(t) đồng biến trên R $\Rightarrow$ Phương trình (1) $\Leftrightarrow x+2=-y$

Thay vào (2) ta có

$$\sqrt{x^2-x-1}=2x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{3}{2} \\ x^2-x-1=4x^2+12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{3}{2} \\ x^2-x-1=4x^2+12x+9 \end{cases}$$

:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{3}{2} \\ 3x^2+13x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\dfrac{10}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=-1 \quad \text{(tmdk)}$$

Vậy hệ có nghiệm (x;y) = (-1;-1).

<u>Bài 26</u> Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (53-5x)\sqrt{10-x}+(5y-48)\sqrt{9-y}=0 \\ \sqrt{2x-y+6}+x^2=\sqrt{-2x+y+11}+2x+66 \end{cases} \left(\forall x,y\in\mathbb{R}\right)\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$

<u>Giải</u>

ĐK: $\begin{cases}10-x\ge 0\\9-y\ge 0\\2x-y+6\ge 0\\-2x+y+11\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 10\\y\le 9\\2x-y+6\ge 0\\-2x+y+11\ge 0\end{cases}$

Từ PT(1) ta có $\left[5\left(10-x\right)+3\right]\sqrt{10-x}=\left[5\left(9-y\right)+3\right]\sqrt{9-y},\left(3\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\left(5t^2+3\right)t$ trên khoảng $t\in\left[0;+\infty\right)$ có $f^{/}\left(t\right)=15t^2+3>0,\forall t\ge 0$ hàm số đồng biến .Từ (3) ta có $f\left(\sqrt{10-x}\right)=f\left(\sqrt{9-y}\right)\Leftrightarrow\sqrt{10-x}=\sqrt{9-y}\Leftrightarrow y=x-1,\left(4\right)$ Thay (4) vào (2) ta được $\sqrt{x+7}-\sqrt{10-x}+x^2-2x-66=0\,(5)$ ĐK: $x\in\left[-7;10\right]$

Giải (5) ta được

$$\left(\sqrt{x+7}-4\right)+\left(1-\sqrt{10-x}\right)+x^2-2x-63=0\Leftrightarrow\frac{x-9}{\sqrt{x+7}+4}+\frac{x-9}{1+\sqrt{10-x}}+\left(x-9\right)\left(x+7\right)=0$$

$$\left(x-9\right)\left[\frac{1}{\sqrt{x+7}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{10-x}}+\left(x+7\right)\right]=0\Leftrightarrow x=9,y=8$$

Vậy Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(9;8\right)$

<u>Bài 27</u> Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-x}}-\dfrac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{y}}+x+y=1\\\sqrt{1-x}+\sqrt{4+y}=2\sqrt{2}\end{cases}$

<u>Giải</u>

ĐK: $0\le x;y\le 1$

PT(1) $\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-x}}+x=\dfrac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{1-(1-y)}}+1-y$ (*)

xét h/s $f(t)=\dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{1-t}}+t$; có $f^{'}(t)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}(1+\sqrt{1-t})+\dfrac{1}{2\sqrt{1-t}}.\sqrt{t}}{(1+\sqrt{1-t})^2}+1>0\quad,\forall t\in(1;+\infty)$

vì (*) $\Leftrightarrow f(x)=f(1-y)\Leftrightarrow x=1-y$, thế vào pt(2) ta được :

$\sqrt{1-x}+\sqrt{5-x}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow 6-2x+2\sqrt{5-6x+x^2}=8$

$\Leftrightarrow\sqrt{5-6x+x^2}=x+1\Leftrightarrow 5-6x+x^2=(x+1)^2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$ (tmđk)

vậy hệ pt có nghiệm là $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

<u>Bài 28</u> Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}27x^3y^3+7y^3=8\\9x^2y+y^2=6x\end{cases}$

<u>Giải</u>

Nhận xét $y\ne 0,$ nhân hai vế phương trình thứ hai với $7y$, trừ đi phương trình thứ nhất, được

$$(3xy)^3-7(3xy)^2+14(3xy)-8=0$$

Từ đó tìm được hoặc $3xy = 1$ hoặc $3xy = 2$ hoặc $3xy = 4$

Với $3xy = 1$, thay vào phương trình thứ nhất, được y=1 do đó $x = \frac{1}{3}$

Với $3xy = 2$, thay vào phương trình thứ nhất, được y=0 (loại)

Với $3xy = 4$, thay vào phương trình thứ nhất, được y=-2 do đó $x = -\frac{2}{3}$

<u>Bài 29</u> Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2(x^3 - y^3) = 4(2x + y)$

Từ phương trình (2) thay $4 = x^2 + 3y^2$ vào phương trình trên và rút gọn ta được:

$$x^2y + 6xy^2 + 5y^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x = -y \\ x = -5y \end{array}\right.$$

TH1 : $y = 0$ thay vào hệ ta được $\begin{cases} x^3 = 4x \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow$ nghiệm $(x;y) = (\pm 2;0)$

TH2 : $x = -y \Leftrightarrow y = -x$ thay vào hệ ta được : $\begin{cases} 2x^3 = 2x \\ 4x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$

Hệ có nghiệm $(x;y) = (1;-1); (-1;1)$

TH3 : $x = -5y$ thay vào hệ ta có nghiệm $(x;y) = (\frac{5}{\sqrt{7}};\frac{-1}{\sqrt{7}}); (\frac{-5}{\sqrt{7}};\frac{1}{\sqrt{7}})$

Vậy hệ đã cho có 6 nghiệm.

<u>Bài 30</u> Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (y-2).\sqrt{x+2} - x.\sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x+1}.(\sqrt{y}+1) = (y-3).(1+\sqrt{x^2+y-3x}) \end{cases}$ $(x;\ y \in R)$.

<u>Giải</u>

ĐK: $\begin{cases} x \geq -1; y \geq 0 \\ x^2 + y - 3x \geq 0 \end{cases}$

PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+2}.y - x.\sqrt{y} - 2\sqrt{x+2} = 0$

có $\Delta_y = x^2 + 8(x+2) = (x+4)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{y} = \dfrac{2x+4}{2\sqrt{x+2}} \\ \sqrt{y} = \dfrac{-2}{4\sqrt{x+2}} (< 0) \Rightarrow loai \end{array}\right.$

với $\sqrt{y} = \frac{2x+4}{2\sqrt{x+2}} \Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow y = x + 2$, thế vào (1) ta được

$\sqrt{x+1}(\sqrt{x+2}+1) = (x-1)(1+\sqrt{x^2-2x+2}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}.(\sqrt{x+2}+1) = (x-1).\left(\sqrt{(x-1)^2+1}\right)$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)=t\sqrt{t^2+1}+t$, có $f'(t)=\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}+1>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến.

Vì PT (*) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x+1})=f(x-1)\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x-1\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x+1=(x-1)^2 \end{cases}\Leftrightarrow x=3$

Với x = 3 $\Rightarrow y=5$ (thỏa mãn). Vậy hệ có nghiệm (x; y) = (3; 5).

Bài 31 Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2+1=2x+2y \\ (2x-y)y=1+2y \end{cases}$

Giải

Lấy (1) + (2) vế theo vế ta được:

$$x^2+2xy+1=1+2x+4y\Leftrightarrow x(x+2y)=2(x+2y)\Leftrightarrow (x-2)(x+2y)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x+2y=0 \end{array}\right.$$

Trường hợp x=2 thay vào (2) ta có y = 1

Trường hợp x+2y = 0 thay vào (2) ta được phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm x = 2; y = 1.

Bài 32 Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} xy(y+1)+y^2+1=4y \\ xy^2(x+2)+\dfrac{1}{y^2}+y^2=5 \end{cases}$

Giải

Điều kiện $y\ne 0$

$$(I)\Leftrightarrow \begin{cases} x(y+1)+y+\dfrac{1}{y}=4 \\ y^2(x^2+2x+1)+\dfrac{1}{y^2}=5 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y(x+1)+\dfrac{1}{y}+x=4 \\ y^2(x+1)^2+\dfrac{1}{y^2}=5 \end{cases}$$

Đặt $u=y(x+1)+\dfrac{1}{y};v=x+1$ ta có hệ

$$\begin{cases} u+v=5 \\ u^2-2v=5 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} v=5-u \\ u^2+2u-15=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u=-5 \\ v=10 \end{cases}\vee \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}$$

$$hay \begin{cases} y(x+1)+\dfrac{1}{y}=-5 \\ x+1=10 \end{cases}\vee \begin{cases} y(x+1)+\dfrac{1}{y}=3 \\ x+1=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2+5y+1=0 \\ x=9 \end{cases}\vee \begin{cases} 2y^2-3y+1=0 \\ x=1 \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\wedge y=1 \\ x=1\wedge y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có các nghiệm (1;1) và (1; 1/2).

Bài 33 Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1 \\ x^2+y^2+\dfrac{4x}{y}=22 \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $x \neq 0$, $y \neq 0$. và $x^2 + y^2 - 1 \neq 0$.

Đặt $u = x^2 + y^2 - 1$ và $v = \frac{x}{y}$ Hệ phương trình (I) trở thành $\begin{cases} \frac{3}{u} + \frac{2}{v} = 1 \\ u = 21 - 4v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v^2 - 13v + 21 = 0 \\ u = 21 - 4v \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 9 \\ v = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 7 \\ v = \frac{7}{2} \end{cases}$ + Với $\begin{cases} u = 9 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$ Với $\begin{cases} u = 7 \\ v = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14\sqrt{\frac{2}{53}} \\ y = 4\sqrt{\frac{2}{53}} \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} x = -14\sqrt{\frac{2}{53}} \\ y = -4\sqrt{\frac{2}{53}} \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm (3;1), (-3;-1), $\left(14\sqrt{\frac{2}{53}}; 4\sqrt{\frac{2}{53}}\right)$ và $\left(-14\sqrt{\frac{2}{53}}; -4\sqrt{\frac{2}{53}}\right)$.

<u>Bài 34</u> Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 1 - x^3 \\ (x-1)^4 = y \end{cases}$ (I) .

Điều kiện: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Ta có (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - (x-1)^2 = 1 - x^3 \\ (x-1)^4 = y \end{cases}$

Từ phương trình : $\sqrt{x-1} - (x-1)^2 = 1 - x^3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = -x^3 + x^2 - 2x + 2$ (1)

Ta thấy hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ là hàm đồng biến trên $[1; +\infty)$

Xét hàm số $g(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 2$. Miền xác định: $D = [1; +\infty)$

Đạo hàm $g'(x) = -3x^2 + 2x - 2 < 0 \quad \forall x \in D$. Suy ra hàm số nghich biến trên D.

Từ (1) ta thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình và đó là nghiệm duy nhất.

Vậy hệ có nghiệm $(1;0)$.

<u>Bài 35</u> Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{3 + x^2} + 2\sqrt{x} = 3 + \sqrt{y} \\ \sqrt{3 + y^2} + 2\sqrt{y} = 3 + \sqrt{x} \end{cases}$ (II). Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Ta có (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3 + x^2} + 2\sqrt{x} = 3 + \sqrt{y} \\ 3 + \sqrt{x} = \sqrt{3 + y^2} + 2\sqrt{y} \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta có: $\sqrt{3 + x^2} + 3\sqrt{x} + 3 = \sqrt{3 + y^2} + 3\sqrt{y} + 3$ (2)

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{3 + t^2} + 3\sqrt{t} + 3$. Miền xác định: $D = [1; +\infty)$

Đạo hàm: $f^{/}(t)=\dfrac{t}{\sqrt{3+t^2}}+\dfrac{3}{2\sqrt{t}}+1>0\ \ \forall x\in D$. Suy ra hàm số đồng biến trên D.

Từ (*) ta có $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

Lúc đó: $\sqrt{3+x^2}+\sqrt{x}=3$ (3)

+ VT (3) là hàm số hàm đồng biến trên D.

+ VP (3) là hàm hằng trên D.

Ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình (3) (thỏa điều kiện)

Suy ra phương trình có nghiệm $x=1$ là nghiệm duy nhất.

Vậy hệ có nghiệm $(1;1)$

<u>Bài 36</u> Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2y^3+2.x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y & (1)\\ y+1=2x^2+2xy\sqrt{1+x} & (2)\end{cases}$

ĐK : $1\geq x\geq -1$

Từ (1) ta có : $2.y^3+2(x-1)\sqrt{1-x}+2\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y$ (thêm vào vế trái $2\sqrt{1-x}$)

$\Leftrightarrow 2y^3+y=2(\sqrt{1-x})^3+\sqrt{1-x}$

Xét hàm số *f(t) = 2.t*^{3}*+t có f'(t) = 6t*^{2} *+ 1 >0* suy ra hàm số đồng biến

Suy ra y$=\sqrt{1-x}$ thế vào (2), ta có $\sqrt{1-x}+1=2x^2+2x\sqrt{1-x^2}$ *(3)*

Vì $1\geq x\geq -1$ nên đặt *x = cos(t) với t* $\subset[0;\pi]$ sau đó thế vào phương trình *(3)* là ra kết quả.

<u>Bài 37</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{1}{5} & (1)\\ 4x^2+3x-\dfrac{57}{25}=-y(3x+1) & (2)\end{cases}$

<u>Giải</u>

ĐK: $x,y\in R$

Nhân 2 vế phương trình (1) với 25 và nhân 2 vế phương trình (2) với 50 ta có:

Hệ phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}25x^2+25y^2=5\\ 200x^2+150x-114=-50y(3x+1)\end{cases}$

Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ ta có:

$225x^2+25y^2+25+150xy+150x+50y=144$

$\Leftrightarrow(15x+5y+5)^2=144\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}15x+5y+5=12\\ 15x+5y+5=-12\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}15x+5y=7\\ 15x+5y=-17\end{array}\right.$

❖ Với $15x+5y=7$ kết hợp với (1) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}15x+5y=7\\ x^2+y^2=\dfrac{1}{5}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 7 - 15x \\ 25x^2 + 25y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 7 - 15x \\ 25x^2 + (7 - 15x)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 7 - 15x \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{11}{25} \\ x = \dfrac{2}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{11}{25} \\ y = \dfrac{2}{25} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases} \end{array}\right.$

❖ Với $15x + 5y = -17$ kết hợp với (1) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 15x + 5y = -17 \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -17 - 15x \\ 25x^2 + 25y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -17 - 15x \\ 25x^2 + (-17 - 15x)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 7 - 15x \\ x \in \phi \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Kết luận: Hệ phương trình có hai nghiệm là: $\begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases}; \begin{cases} x = \dfrac{11}{25} \\ y = \dfrac{2}{25} \end{cases}.$

<u>Bài 38</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x + y} - \sqrt{3x + 2y} = -1 \ (1) \\ \sqrt{x + y} + x - y = 0 \qquad (2) \end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện : $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 3x + 2y \geq 0 \end{cases}$

Hệ Phương trình tương đương

$\begin{cases} \sqrt{x + y} + 1 = \sqrt{3x + 2y} \\ \sqrt{x + y} = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2\sqrt{x + y} + 1 = 3x + 2y \\ \sqrt{x + y} = y - x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x + y} = 2x - y \\ \sqrt{x + y} = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(y - x) = 2x - y \\ \sqrt{x + y} = y - x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ \sqrt{x + y} = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ \sqrt{5x - 1} = 3x - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ x \ge \dfrac{1}{3} \\ 5x - 1 = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ x \ge \dfrac{1}{3} \\ 9x^2 - 11x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ x \ge \dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{2}{9} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Kết luận : Hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

<u>Bài 39</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{2x^2 - y^2} = y^2 - 2x^2 + 3 \quad (1) \\ x^3 - 2y^3 = y - 2x \quad (2) \end{cases}$

<u>Giải</u>

ĐK: $2x^2 - y^2 \ge 0$

Đặt : $t = \sqrt{2x^2 - y^2}\ (t \ge 0)$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - y^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - y^2 = 1$$

Khi đó hệ phương trình tương đương $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ x^3 - 2y^3 = y - 2x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ x^3 - 2y^3 = (y - 2x)(2x^2 - y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ 5x^3 - 2x^2y - 2xy^2 - y^3 = 0\ (3) \end{cases}$$

Th 1: $y = 0$

Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} 2x^2 = 1 \\ 5x^3 = 0 \end{cases}$ (vô lí)

Vậy cặp (x , 0) không là nghiệm của hệ

TH2 : Chia hai vế (3) cho y^3 ta có hệ phương trình tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ 5\left(\dfrac{x}{y}\right)^3 - 2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\dfrac{x}{y}\right) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{array}\right.$$

Kết luận : Hệ phương trình có nghiệm $S = \{(1;1), (-1;-1)\}$

<u>Bài 40</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6xy - \dfrac{1}{(x-y)^2} + \dfrac{9}{8} = 0 \\ 2y - \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{5}{4} = 0 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện: $x - y \neq 0$

Hệ phương trình biến đổi tương đương

$$\begin{cases} 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - \dfrac{1}{(x-y)^2} + \dfrac{9}{8} = 0 \\ (x+y) - (x-y) - \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{5}{4} = 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = x - y + \dfrac{1}{x-y} \end{cases}$

Ta có hệ tương đương $\begin{cases} 2a^2 - b^2 + 2 + \dfrac{9}{8} = 0 \\ a - b + \dfrac{5}{4} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - b^2 = -\dfrac{25}{8} \\ a - b = \dfrac{-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(b - \dfrac{5}{4}\right)^2 - b^2 = \dfrac{-25}{8} \\ a = b - \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{4} \\ b = \dfrac{-5}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y) = \left(\dfrac{7}{8}; \dfrac{3}{8}\right), \left(\dfrac{13}{8}; \dfrac{-3}{8}\right)$

<u>Bài 41</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y + 1) = 25(y+1) \\ x^2 + xy + 2y^2 + x - 8y = 9 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y + 1) = 25(y+1) \\ x^2 + y^2 + x(y+1) + (y+1)^2 - 10(y+1) = 0 \end{cases}$$

Nhận xét $y+1=0$ không là nghiệm hệ phương trình

Chia hai vế phương trình một và hai cho $y+1$ ta có $\begin{cases} \dfrac{\left(x^2+y^2\right)\left(x+y+1\right)}{y+1}=25 \\ \dfrac{x^2+y^2}{y+1}+\left(x+y+1\right)=10 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a=\dfrac{x^2+y^2}{y+1} \\ b=x+y+1 \end{cases}$

Khi đó ta có $\begin{cases} a.b=25 \\ a+b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5\left(y+1\right) \\ x+y+1=10 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(3;1\right),\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{11}{2}\right)$

<u>Bài 42</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x^2+x\right)y^2-4y^2+y+1=0 \\ x^3y^3+x^2y^2-4y^3+xy+1=0 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Nhận xét $y=0$ không là nghiệm hệ phương trình

Chia hai vế phương trình một cho y^2 và hai y^3

$$\begin{cases} \left(x^2+x\right)-4+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{y}=0 \\ x^3+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{y^3}-4=0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a=x+\dfrac{1}{y} \\ b=\dfrac{x}{y} \end{cases}$

Hệ phương trình biến đổi tương đương ta có :

$$\begin{cases} a^2+a-2b=4 \\ a^3-2ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2b=4-a \\ a\left(4-a\right)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$

<u>Bài 43</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-y}+\dfrac{5y}{x+y^2}=4 \\ 5x+y+\dfrac{x^2-5y^2}{xy}=5 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Hệ phương trinh tương đương:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x^2-y}+\dfrac{5y}{x+y^2}=4\\ 5x+y+\dfrac{x}{y}-5\dfrac{y}{x}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{x^2-y}+\dfrac{5y}{x+y^2}=4\\ 5\dfrac{x^2-y}{x}+\dfrac{y^2+x}{y}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{x^2-y}+\dfrac{5y}{x+y^2}=4\\ \dfrac{x^2-y}{x}+\dfrac{y^2+x}{5y}=1\end{cases}$$

Đặt $\begin{cases}a=\dfrac{x}{x^2-y}\\ b=\dfrac{5y}{x^2+y}\end{cases}$ khi đó ta có $\begin{cases}a+b=4\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4\\ ab=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=2\end{cases}$

Hệ có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

<u>Bài 44</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+3=2\sqrt{(3y-x)(y+1)}\\ \sqrt{3y-2}-\sqrt{\dfrac{x+5}{2}}=xy-2y-2\end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện ta có $y\ge\dfrac{2}{3};x\ge-3;3y\ge x$

Phương trình (1) tương đương $(x+3)^2=4(3y-x)(y+1)$

$\Leftrightarrow x^2+2(5+2y)x-12y^2-12y+9=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-6y-9\\ x=2y-1\end{array}\right.$

Với $x=-6y-9$

$x\ge-3\Rightarrow-6y-9\ge-3\Leftrightarrow y\le-1$ Suy ra phương trình vô nghiệm

Với $x=2y-1$thay vào phương trình (2) ta có

$\sqrt{3y-2}-\sqrt{y+2}=2y^2-3y-2\Leftrightarrow\dfrac{2(y-2)}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}}=(2y+1)(y-2)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\\ \dfrac{2}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}}=2y-1(vn)\end{array}\right.$ Vì $\dfrac{2}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{2}};2y+1\ge\dfrac{7}{3}$

Vậy hệ có nghiệm (3 ;2)

<u>Bài 45</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{2y^2-7y+10-x(y+3)}+\sqrt{y+1}=x+1\\ \sqrt{y+1}+\dfrac{3}{x+1}=x+2y\end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện $2y^2-7y+10-x(y+3)\ge0;y+1\ge0;x+1>0$

Ta có $\begin{cases}\sqrt{2y^2-7y+10-x(y+3)}=x+1-\sqrt{y+1}\\ (x+1)\sqrt{y+1}+3=(x+2y)(x+1)\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y^2 - 7y + 10 - x(y+3) = (x+1)^2 - 2(x+1)\sqrt{y+1} + y + 1 \\ (x+1)\sqrt{y+1} = (x+2y)(x+1) - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 7y + 10 - x(y+3) = (x+1)^2 - 2(x+1)(x+2y) + 7 \\ (x+1)\sqrt{y+1} = (x+1)(x+2y) - 3 \end{cases}$$

Phương trình (*) tương đương $2y^2 - 4y + 2 + 3xy + x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{array}\right.$

Với y $= 1 - x$ thay vào phương trình (2) ta được

$(x+1)\sqrt{2-x} = -1 + x - x^2$ (VN)

Với x = 2 – 2y thay vào phương trình (2) ta được phương trình đơn giản ẩn y.
Từ đó có nghiệm của hệ.

<u>Bài 46</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + x + \sqrt{x+2} = 2y^2 + y + \sqrt{2y+1} \quad (1) \\ x^2 + 2y^2 - 2x + y - 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$

<u>Giải</u>

Lấy (1) – (2)

Ta có $x^2 + 3x + 2 + \sqrt{x+2} = 4y^2 + 2y + \sqrt{2y+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+1) + \sqrt{x+2} = 4y^2 + 2y + \sqrt{2y+1}$

Xét hàm số : $f(t) = t^2 + t + \sqrt{t+1}$

$f'(t) = 2t + 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy

$2(t+1) + \dfrac{1}{4\sqrt{t+1}} + \dfrac{1}{4\sqrt{t+1}} - 1 \geq \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$

Suy ra $f'(t) > 0$

Vậy $f(t)$ là hàm đồng biến

Suy ra $x + 1 = 2y$

Thay $x = 2y - 1$ vào phương trình (2) ta có $(2y-1)^2 + 2y^2 - 2(2y-1) + y - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 6y^2 - 7y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = \dfrac{1}{6} \Rightarrow x = \dfrac{-2}{3} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm $S = \left\{(1;2), \left(\dfrac{-2}{3}; \dfrac{1}{6}\right)\right\}$

<u>Bài 47</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 \\ \sqrt[3]{x+2} + 2\sqrt{y+2} = 5 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện $x \le 2; y \ge \frac{1}{2}$

Phương trình (1) tương đương : $(2-x)\sqrt{2-x} + \sqrt{2-x} = (2y-1)\sqrt{2y-1} + \sqrt{2y-1}$

$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2-x}\right) = f\left(\sqrt{2y-1}\right).$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ sauy ra hàm số $f(t)$ đơn điệu tăng .

Từ đó suy ra $f\left(\sqrt{2-x}\right) = f\left(\sqrt{2y-1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow x = 3-2y$ thay vào phương trình (2)

Ta có $\sqrt[3]{5-2y} + 2\sqrt{y+2} = 5$ (*)

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{5-2y} \\ v = \sqrt{y+2} \ (v \ge 0) \end{cases}$

(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} u + 2v = 5 \\ u^3 + 2v^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 1; v = 2 \\ u = \dfrac{-3-\sqrt{65}}{4}; v = \dfrac{23+\sqrt{65}}{8} \\ u = \dfrac{\sqrt{65}-3}{4}; v = \dfrac{23-\sqrt{65}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \dfrac{233+23\sqrt{65}}{32} \\ y = \dfrac{233-23\sqrt{65}}{32} \end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm

$$S = \left\{(-1;2), \left(\frac{23\sqrt{65}-185}{16}; \frac{233-23\sqrt{65}}{32}\right), \left(\frac{-23\sqrt{65}-185}{16}; \frac{233+23\sqrt{65}}{32}\right)\right\}$$

<u>Bài 48</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Với $x = 0$ thay vào hệ phương trình ta có $\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{-3}{4} \end{cases}$ (mâu thuẫn)

Chia hai vế phương trình (1) cho x^3 ta có $2\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 2x + x^3 \Leftrightarrow f\left(\frac{y}{x}\right) = f(x)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0$ sauy ra hàm số $f(t)$ đơn điệu tăng .

Từ đó suy ra $\frac{y}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = y\,(y > 0)$ Thay vào phương trình (2) ta có

$(x+2)\sqrt{x^2+1} = (x+1)^2$.(*)

Đặt $\begin{cases} u = x \\ v = \sqrt{x^2+1} \ (v \ge 0) \end{cases}$

(*) $\Leftrightarrow (u+2)v = v^2 + 2u \Leftrightarrow v^2 - uv - 2v + 2u = 0 \Leftrightarrow (v-u)(v-2) = 0 \Leftrightarrow v = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Vậy hệ có nghiệm $S=\left\{\left(-\sqrt{3};3\right),\left(\sqrt{3};3\right)\right\}$.

<u>Bài 49</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(4x^2+1\right)x+\left(y-3\right)\sqrt{5-2y}=0\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện : $\begin{cases}x\le\dfrac{3}{4}\\ y\le\dfrac{5}{2}\end{cases}$

Phương trình (1) biến đổi ta có $8x^3+2x=\left(6-2y\right)\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\left(2x\right)^3+2x=\left(\sqrt{5-2y}\right)^3+\sqrt{5-2y}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t$ ta có $f'\left(t\right)=3t^2+1>0$ suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đơn điệu tăng .

Từ đó suy ra $\Leftrightarrow f\left(2x\right)=f\left(\sqrt{5-2y}\right)\Leftrightarrow\ 2x=\sqrt{5-2y}\ \Leftrightarrow y=\dfrac{5-4x^2}{2}\left(x\ge0\right)$

Thay vào Phuong trinh (2) ta có

$4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0$. Với $x\in\left[0;\dfrac{3}{4}\right]$. Nhận xét $x=0\ ;x=\dfrac{3}{4}$ đều không là nghiệm

$g\left(x\right)=4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7$ Khi đó $g'\left(x\right)=4x\left(4x^2-3\right)-\dfrac{4}{\sqrt{3-4x}}<0$ với $x\in\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$

Ta có $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2};y=2$ là nghiệm duy nhất của hệ.

<u>Bài 50</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(y+1\right)^2+y\sqrt{y^2+1}=x+\dfrac{3}{2}\\ x+\sqrt{x^2-2x+5}=1+2\sqrt{2x-4y+2}\end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện $2x-4y+2\ge0$

Phương trình (1) tương đương

$2x-4y+2=\left(y^2+1\right)+2y\sqrt{y^2+1}+y^2\Leftrightarrow 2x-4y+2=\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2$ (*)

Thay vào phương trình (2) ta có

$x-1+\sqrt{\left(x-1\right)^2+1}=2\sqrt{\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2}\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2+1}=y+\sqrt{y^2+1}$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$. Khi dó $f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0$ suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đơn điệu tăng .

Từ đó suy ra $f\left(\frac{x-1}{2}\right)=f\left(y\right) f\left(\frac{x-1}{2}\right)=f\left(y\right)\Leftrightarrow\frac{x-1}{2}=y\Leftrightarrow x=2y+1$ thay vào phương trinh (*)ta được

$$\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{y^2+1}=2-y\\ \sqrt{y^2+1}=-2-y\end{array}\right.\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$$

Vậy hệ có nghiệm $\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

Bài 51 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4}\\ x^2-y^2-3x+3y+1=0\end{cases}$

Giải

Cộng hai phương trình ta có

$$x^2-2x+1+\sqrt{x^2-2x+5}=y^2+\sqrt{y^2+4}$$
$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}=y^2+\sqrt{y^2+4}$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t+\sqrt{t+4}\ \left(t\geq 0\right)$ Khi đó $f'\left(t\right)=1+\frac{1}{2\sqrt{t+4}}>0$ suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đơn điệu tăng .

Từ đó suy ra $f\left(\left(x-1\right)^2\right)=f\left(y^2\right)\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=y^2\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x-1\\ y=1-x\end{array}\right.$

Với $y=x-1$ thay vào phuong trình hai ta có

$$x^2-\left(x^2-2x+1\right)-3x+3\left(x-1\right)+1=0\ \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{-1}{2}$$

Với $y=1-x$ thay vào phương trình hai ta có

$$x^2-\left(x^2-2x+1\right)-3x+3\left(1-x\right)+1=0\ x=\frac{3}{4}\Rightarrow y=\frac{1}{4}$$

Bài 52 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2\left(4x+1\right)+2y^2\left(2y+1\right)=y+32\\ x^2+y^2-x+y=\frac{1}{2}\end{cases}$

Giải

Xét phương trình thứ hai của hệ : $x^2-x+y^2+y-\frac{1}{2}=0$

Phương trình có nghiệm khi $\Delta=1-4y^2-4y+2=3-4y-4y^2\geq 0$

$$\Leftrightarrow\frac{-3}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}$$

Phương trình thứ hai của hệ biến đổi theo biến y

$$y^2+y+x^2-x-\frac{1}{2}=0$$

Phương trình có nghiệm khi

$\Delta = 1 - 4x^2 + 4x + 2 = 3 + 4x - 4x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}$

Phương trình thứ nhất ta có

$8x^3 + 2x^2 = -4y^3 - 2y^2 + y + 32$

Xét hàm số

$f(x) = 8x^3 + 2x^2$ Khi đó $f'(x) = 24x^2 + 4x$ với $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{-1}{6} \end{array}\right.$

Ta có $f(0) = 0; f\left(\dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}; f\left(\dfrac{-1}{6}\right) = \dfrac{1}{54}; f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{63}{2}$

Xét hàm số

$g(y) = -4y^3 - 2y^2 + y + 32$ khi đó $g'(y) = -12y^2 - 4y + 1$ với $g'(y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{6} \\ y = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$

Ta có $g\left(\dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{63}{2}; g\left(\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1733}{54}; g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{63}{2}; g\left(\dfrac{-3}{2}\right) = \dfrac{79}{2}$

Vậy hệ phương trình có hai cặp nghiệm $\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}\right); \left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{-1}{2}\right)$

<u>Bài 53</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2\sqrt{y+1} = 3 \\ x^3 - 4x^2\sqrt{y+1} - 9x - 8y = -52 - 4xy \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$

<u>Giải</u>

ĐK: $y \geq -1$.

$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ x^3 - 4x^2\sqrt{y+1} + 4xy + 4x - 13x - 8y + 52 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ x(x - 2\sqrt{y+1})^2 - 13x - 8y + 52 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ -x - 2y + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ \sqrt{y+1} = 5 - y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ y \le 5 \\ y^2 - 11y + 24 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ y \le 5 \\ \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm là (7,3).

<u>Bài 54</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2\left(x+y\right) = 0 \\ xy\left(x^2+y^2\right) + 2 = \left(x+y\right)^2 \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$

<u>Giải</u>

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ ta có

$xy(x+y)^2 - 2x^2y^2 + 2 = (x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)^2(xy-1) - 2(xy-1)(xy+1) = 0$

$\Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2-2) = 0$

+) $xy = 1$, thay vào phương trình thứ nhất và rút gọn ta được:

$$3x^2y - 6xy^2 + 3y^3 = 0 \Leftrightarrow y(x-y)^2 = 0.$$

Vì xy = 1 nên $y \ne 0$, do đó x = y. Do đó x = y =1 hoặc x = y = -1.

+) $x^2 + y^2 = 0.$ thay vào phương trình thứ nhất và rút gọn ta được:

$x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - 2y^3 = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(x-y)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = y \end{array}\right.$

Từ đó giải được các nghiệm

$(1;1), (-1,-1), (2\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{2}{5}}), (-2\sqrt{\frac{2}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{5}})$

<u>Bài 55</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 3y + \sqrt{y^2 + 4} \;\; (1) \\ x^2 - y^2 - 3x + 3y + 1 = 0 \;\; (2) \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$

<u>Giải</u>

Từ (1): $\dfrac{x^2 - y^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 4}} = 3y - x$, thay (2) vào ta được

$(x - 3y)(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 4}} + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 3y$

Với x = 3y thay vào (2) giải được: $(x, y) = (\frac{3}{2}; \frac{1}{2}); (\frac{3}{4}; \frac{1}{4})$

Bài 56 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+y^4+1=25y^2-2x^2 & (1)\\ x^2+y^2+1=y(18-x^2) & (2)\end{cases}$

Giải

Dễ thấy với $y=0$ hệ pt vô nghiệm

Xét $y\neq 0$.Chia (1) cho y^2, chia (2) cho y ta được hệ

$$\begin{cases} \frac{x^4}{y^2}+y^2+\frac{1}{y^2}+2\frac{x^2}{y^2}=25\\ \frac{x^2}{y}+y+\frac{1}{y}+x^2=18\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{x^2+1}{y}+y)^2-2(x^2+1)=25\\ \frac{x^2+1}{y}+y+x^2=18\end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a=\frac{x^2+1}{y}+y\\ b=x^2\end{cases}$ ta được hệ $\begin{cases} a^2-2b=27\\ a+b=18\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=7\\ b=11\end{cases}\\ \begin{cases} a=-9\\ b=27\end{cases}\end{array}\right.$

+ Với $\begin{cases} a=7\\ b=11\end{cases}$ ta giải ra được $\begin{cases} x^2=11\\ y=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2=11\\ y=4\end{cases}$

+ Với $\begin{cases} a=-9\\ b=27\end{cases}$ vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $\begin{cases} x^2=11\\ y=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2=11\\ y=4\end{cases}$

Bài 57 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8x^3-y^3=65\\ 2(2+3y)x^2+(1-3x)y^2-4xy=-5.\end{cases}$

Giải

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y)(4x^2+2xy+y^2)=65\\ 4x^2-4xy+y^2+6x^2y-3xy^2=-5.\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y)[(2x-y)^2+6xy]=65\\ (2x-y)[3xy+(2x-y)]=-5.\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y)^3+6xy(2x-y)=65\\ 2.(2x-y)^2+6xy(2x-y)=-10\end{cases}\Rightarrow (2x-y)^3-2(2x-y)^2+75=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-y=5\\ (2x-y)^2+3(2x-y)+15=0\end{array}\right.$

Thay y = 2x – 5 vào (1) ta có $8x^3-(2x-5)^3=65\Leftrightarrow 6x^2-15x+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2; y=-1\\ x=\frac{1}{2}; y=-4\end{array}\right.$

Vậy hệ có 2 nghiệm $(2;-1);(\frac{1}{2};-4)$.

Bài 58 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y-x=\sqrt{2(x-1)^2+2} \\ 2(y-x)+1=\dfrac{1}{x-1} \end{cases}$

Giải

ĐK: $x\neq 1$

Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 2y-x=\sqrt{2(x-1)^2+2} \\ 2y-x-(x-1)=\dfrac{1}{x-1} \end{cases}$$

Đặt

$\begin{cases} a=2y-x \\ b=x-1 \end{cases}$. Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a=\sqrt{2b^2+2} \\ a-b=\dfrac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2+1=b\sqrt{2b^2+2} \\ a-b=\dfrac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=-1 (L) \\ b=1 \end{array}\right. \\ a-b=\dfrac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=2$

Vậy hệ phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=y=2$.

Bài 59 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (xy+1)^3=2y^3(9-5xy) \\ xy(5y-1)=1+3y \end{cases}$

Giải

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ

Xét $y\neq 0$ hệ đã cho được biến đổi thành

$$\begin{cases} \left(\dfrac{xy+1}{y}\right)^3=2(9-5xy) \\ x(5y-1)=\dfrac{1+3y}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+\dfrac{1}{y})^3=2(9-5xy) \\ x+\dfrac{1}{y}+3-5xy=0 \end{cases}$$

Đặt $a=x+\dfrac{1}{y}, b=9-5xy$ ta được hệ $\begin{cases} a^3=2b \\ a+b-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$ ta có hệ $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=2 \\ 9-5xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x=y=1$

Bài 60 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y+1}+1=4\left(x+y\right)^2+\sqrt{3}\sqrt{x+y} \\ 2x-y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Giải

ĐK: $x+y\geq 0$.

$pt(1)\Leftrightarrow \sqrt{x+y+1}-\sqrt{3(x+y)}=4(x+y)^2-1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+2y-1}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{3(x+y)}}+(2x+2y-1)(2x+2y+1)=0$

$\Leftrightarrow (2x+2y-1)(\dfrac{1}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{3(x+y)}}+2(x+y)+1)=0$

$\Leftrightarrow 2x+2y-1=0$

Từ đó ta có hệ

$\begin{cases} 2x+2y-1=0 \\ 2x-y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ x=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$

Bài 61 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^3+\left(9-y\right)x^2-3xy=1 \\ x^2+9x-2y=3. \end{cases}$

Giải

$hpt\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+3x\right)\left(3x-y\right)=1 \\ x^2+3x+2\left(3x-y\right)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x=1 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2+3x=2 \\ 3x-y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Nếu $\begin{cases} x^2+3x=1 \\ 3x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2} \\ y=\dfrac{-11+3\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2} \\ y=\dfrac{-11-3\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

Nếu $\begin{cases} x^2+3x=2 \\ 3x-y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{-10+3\sqrt{17}}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{-10-3\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

Bài 62 Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2 \quad (1) \\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=x^2+8 \quad (2) \end{cases}$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Giải

ĐK: $x \ge -2, y \le \frac{16}{3}$

(1) $\Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+1)^3 \Leftrightarrow y = x-2$ Thay y = x - 2 vao (2) được

$$4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2 + 8 \Leftrightarrow \frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} = (x-2)(x+2) + \frac{3(x-2)}{\sqrt{22-3x}+4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \frac{-4}{\sqrt{x+2}+2} + (x+2) + \frac{3}{\sqrt{22-3x}+4} = 0(*) \end{array}\right.$$

Xét f(x) = VT(*) trên $\left[-2; \frac{21}{3}\right]$, có f'(x) > 0 nên hàm số đồng biến. suy ra $x = -1$ là nghiệm duy nhất của (*)

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(2;0), (-1;-3)$.

<u>Bài 63</u> Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 12 \\ y\sqrt{x^2 - y^2} = 12 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

<u>Giải</u>

Điều kiện: $|x| \ge |y|$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 - y^2}; u \ge 0 \\ v = x + y \end{cases}$; $x = -y$ không thỏa hệ nên xét $x \ne -y$ ta có $y = \frac{1}{2}\left(v - \frac{u^2}{v}\right)$.

Hệ phương trình đã cho có dạng:

$$\begin{cases} u + v = 12 \\ \frac{u}{2}\left(v - \frac{u^2}{v}\right) = 12 \end{cases}$$

Đến đây sử dụng phương pháp rút thế ta dễ dàng tìm ra kết quả bài toán.

<u>Bài 64</u> Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)^2 + x + y = y^2 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 = -y^2 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

<u>Giải</u>

Hệ tương đương $\begin{cases} x^2 + y + x(1-2y) = 0 & (1) \\ (x^2 + y)^2 + 3x^2(1-2y) = 0 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) được $\left(x(1-2y)\right)^2 + 3x^2(1-2y) = 0 \Leftrightarrow 2x^2(1-2y)(2-y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{array}\right.$

Với x = 0 suy ra y = 0

Với $1 - 2y = 0$ thay vào (1) suy ra $x^2 = -y = \frac{-1}{2}$ (Vô lí)

Với y = 2 suy ra x = 1 hoặc x = 2

Hệ có 3 nghiệm (0; 0), (1; 2), (2; 2).

Bài 65 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 5y + 3 + 6\sqrt{y^2 - 7x + 4} = 0 \\ y(y - x + 2) = 3x + 3 \end{cases}$ $(x, y \in R)$. $(x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Phương trình thứ (2) $\Leftrightarrow y^2 + (2 - x)y - 3x - 3 = 0$ được xem là phương trình bậc hai theo ẩn y có $\Delta = (x + 4)^2$

Phương trình có hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{x - 2 - x - 4}{2} = -3 \\ y = \dfrac{x - 2 + x + 4}{2} = x + 1 \end{array}\right.$ Thay y = -3 vào pt thứ nhất ta được pt vô nghiệm

Thay $y = x + 1$ vào pt thứ nhất ta được: $x^2 - 5x - 2 + 6\sqrt{x^2 - 5x + 5} = 0$ (3)

Giải (3): đặt $\sqrt{x^2 - 5x + 5} = t$, điều kiện $t \geq 0$ $\quad (3) \Leftrightarrow t^2 + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & (tm) \\ t = -7 & (ktm) \end{array}\right.$

Với t=1 $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 5} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 5 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy, hệ phương trình có 2 nghiệm là: $(1;2)$ và (4;5)

Bài 66 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 5y - 2 = 0 \\ \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x - y} = 2xy - x^2 + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 + 1} + \sqrt{y} \end{cases}$ $(x, y \in R)$.

Giải

Từ phương trình (2) ta có đ/k : $x \geq y, y \geq 0$ $\sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{y} - y^2 = \sqrt{(x - y)^2 + 1} - \sqrt{x - y} - (x - y)^2$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 + 1} - \sqrt{t} - t^2$ liên tuc $[0; +\infty)$ có $f'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} - \dfrac{1}{.2\sqrt{t}} - 2t$

$= t\left(\dfrac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} - 2\right) - \dfrac{1}{2\sqrt{t}} < 0 \ \forall t > 0$ Suy ra hàm số nghịch biến $(0; +\infty)$ nên

$f(y) = f(x - y) \Leftrightarrow x = 2y$

Thay vào (1) ta có $(y - 2)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4$. Vậy hệ có nghiệm (x ;y) = (4 ; 2).

Bài 67 Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x - 1} + 4(2x + 1) = \sqrt{y - 1} + 3y \\ (x + y)(2x - y) + 4 = -6x - 3y \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{3}; y \geq 1$

$(2) \Leftrightarrow -y^2 + (x + 3)y + 2x^2 + 6x + 4 = 0; \quad \Delta = (3x + 5)^2$ Vậy ta có: $\left[\begin{array}{l} y + x + 1 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{array}\right.$

$y+x+1=0$ vô nghiệm vì $x\ge\dfrac{1}{3};y\ge1$

$2x-y+4=0\Leftrightarrow y=2x+4$, thay vào (1) ta có: $\begin{array}{l}\sqrt{3x-1}+4(2x+1)=\sqrt{2x+3}+3(2x+4)\\ \Leftrightarrow 2(3x-1)+\sqrt{3x-1}=2(2x+3)+\sqrt{2x+3}\end{array}\quad(*)$

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{3x-1}=\sqrt{2x+3}\Leftrightarrow x=4\Rightarrow y=12$ .Kết luận: $(x,y)=(4;12)$.

<u>Bài 68</u> Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+xy+y^2=3\\ \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{31}{7}\end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện của phương trình $x\ne-y$

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=3\\ \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{31}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+xy+y^2=3 & (1)\\ 7(x^5+y^5)=31(x^3+y^3) & (2)\end{cases}$$

Lấy (2) nhân 3 kết hợp với (1) ta được phương trình đồng bậc

$21(x^5+y^5)=31(x^2+xy+y^2)(x^3+y^3)\Leftrightarrow 10x^5+31x^4y+31x^3y^2+31xy^4+10y^4=0\ (3)$.

Rõ ràng $x=y=0$ không phải là nghiệm hệ phương trình. Đặt $x=ty$ thay vào (3) ta được:

$y^5(10t^5+31t^4+31t^3+31t+10)=0\ \Leftrightarrow 10t^5+31t^4+31t^3+31t+10=0$

$\Leftrightarrow(t+1)(10t^4+21t^3+10t^2+21t+10)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t+1=0\\ 10t^4+21t^3+10t^2+21t+10=0\end{array}\right.$

Với $t+1=0\Leftrightarrow t=-1$ hay $x=-y\Leftrightarrow x+y=0$ (loại).

Với $10t^4+21t^3+10t^2+21t+10=0\ (3)$. Vì $t=0$ không phải là nghiệm của phương trình (3) chia hai vế phương trình cho t^2 ta được: $10\left(t^2+\dfrac{1}{t^2}\right)+21\left(t+\dfrac{1}{t}\right)+10=0$,

Đặt $u=t+\dfrac{1}{t}\Rightarrow|u|\ge2;\ u^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}+2\Rightarrow t^2+\dfrac{1}{t^2}=u^2-2$. Khi đó (3) trở thành

$10u^2+21u-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\dfrac{2}{5}\,loai\\ u=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$

Với $u=-\dfrac{5}{2}$ ta có $t+\dfrac{1}{t}=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2t^2+5t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\ t=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Với $t=-2$ ta có $x=-2y$ thế vào (1) ta có $3y^2=3\Leftrightarrow y^2=1\Leftrightarrow y=\pm1$ tương ứng $x=\mp2$.

Với $t=-\dfrac{1}{2}$ ta có $y=-2x$ thế vào (1) ta có $3x^2=3\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$ tương ứng $y=\mp2$.

Vậy hệ đã cho có bốn nghiệm là $(1;-2)$, $(-1;2)$, $(2;-1)$, $(-2;1)$.

<u>Bài 69</u> Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3y - y^4 = 7 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 9 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} y\left(x^3 - y^3\right) = 7 & (1) \\ y\left(x + y\right)^2 = 9 & (2) \end{cases}$

Từ hệ suy ra $x.\text{y} \neq 0$; $x \neq \pm\text{y}$, $\text{y} > 0$.

Lấy phương trình (1) lũy thừa ba, phương trình (2) lũy thừa bốn. Lấy hai phương trình thu được chia cho nhau ta thu được phương trình đồng bậc: $\dfrac{y^3\left(x^3 - y^3\right)^3}{y^4\left(x + y\right)^8} = \dfrac{7^3}{9^4}$.

Đặt $x = ty$ ta được phương trình: $\dfrac{\left(t^3 - 1\right)^3}{\left(t + 1\right)^8} = \dfrac{7^3}{9^4}$ (3). Từ phương trình này suy ra $t > 1$.

Xét $f\left(t\right) = \dfrac{\left(t^3 - 1\right)^3}{\left(t + 1\right)^8}$; $\forall \text{t} > 1$.

$$\text{f}'\left(t\right) = \frac{9t^2\left(t^3 - 1\right)^2\left(t + 1\right)^8 - 8\left(t + 1\right)^7\left(t^3 - 1\right)^3}{\left(t + 1\right)^8} = \frac{\left(t^3 - 1\right)^2\left(t + 1\right)^7\left(9t^3 + 9t^2 - 8t^3 + 8\right)}{\left(t + 1\right)^8}$$

$$= \frac{\left(t^3 - 1\right)^2\left(t + 1\right)^7\left(t^3 + 9t^2 + 8\right)}{\left(t + 1\right)^8} > 0 \ \forall t > 1$$

Vậy f(t) đồng biến với mọi $t > 1$. Nhận thấy $t = 2$ là nghiệm của (3). Vậy $t = 2$ là nghiệm duy nhất.

Với $t = 2$ ta có $x = 2y$ thế vào (1) ta được $y^4 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ (vì $y > 0$) suy ra $x = 2$.

Vậy hệ có nghiệm là $\left(2;1\right)$.

<u>Bài 70</u> Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{y}} = 2 & (1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{x}} = 2 & (2) \end{cases}$

ĐK: $x \geq \dfrac{1}{2}, y \geq \dfrac{1}{2}$.

Trừ vế hai pt ta được $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{y}} - \sqrt{2 - \dfrac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{xy}} + \frac{2 - \frac{1}{y} - \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2 - \frac{1}{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}}} = 0 \Leftrightarrow \frac{y - x}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)} + \frac{y - x}{xy\left(\sqrt{2 - \frac{1}{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}}\right)} = 0$$

❖ **TH 1.** $y - x = 0 \Leftrightarrow y = x$ thế vào (1) ta được $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{x}} = 2$

Đặt $t=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $t>0$ ta được

$$\sqrt{2-t^2}=2-t\Leftrightarrow\begin{cases}2-t\ge 0\\ 2-t^2=4-4t+t^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\le 2\\ t^2-2t+1=0\end{cases}\Leftrightarrow t=1\Rightarrow x=1 \text{ và } y=1$$

❖ **TH 2**. $\dfrac{1}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\dfrac{1}{xy\left(\sqrt{2-\dfrac{1}{y}}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x}}\right)}=0$. TH này vô nghiệm do ĐK.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1; 1).

<u>Bài 71</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+2y^2+2=\dfrac{8}{y}\\ 3x^2+3y^2+5=8\left(\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{x}\right)\end{cases}$

Điều kiện: $x.y\ne 0$

Quy đồng rồi thế (1) vào (2), ta được:

$$3x^3y+3xy^3+5xy=2x\left(x^2y+2y^2+2y\right)+y\left(x^2y+2y^2+2y\right)$$

$\Leftrightarrow\left(x-2y\right)\left(x^2+xy+y^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=2y$ thay vào (1), ta được:

$$4y^3+2y^2+2y-8=0\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=2$$

KL: $S=\left\{\left(2;1\right)\right\}$.

<u>Bài 72</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2}\\ 8xy^3+2y^3+1\ge 4x^2+2\sqrt{1+(2x-y)^2}\end{cases}$

<u>Giải</u>

$$VP(1)=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(xy-\frac{1}{2}\right)^2}\le\frac{1}{2}\Rightarrow VT(1)=y^6+y^3+2x^2\le\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2y^6+2y^3+4x^2\le 1 \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$8xy^3+2y^3+2\ge 2y^6+2y^3+4x^2+4x^2+2\sqrt{1+(2x-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow 8xy^3+2\ge 2y^6+8x^2+2\sqrt{1+(2x-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4xy^3+1\ge y^6+4x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{1+(2x-y)^2}\ge y^6-4xy^3+4x^2=(y^3-2x)^2 \qquad (4)$$

$VT(4)\le 0, VP(4)\ge 0$. Do đó:

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^3 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Thử lại chỉ có: $(x;y) = (-\dfrac{1}{2};-1)$ thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y) = (-\dfrac{1}{2};-1)$.

<u>Bài 73</u> Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}+x} + y^2 = 0 & (1) \\ \dfrac{x^2}{y^2} + 2\sqrt{x^2+1} + y^2 = 3 & (2) \end{cases}$

<u>Giải</u>

Từ PT (1) ta có: $x + y(\sqrt{x^2+1} - x) + y^2 = 0$ do $y \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} + y + \sqrt{x^2+1} - x = 0 \quad (3)$$

Từ (2) & (3) ta có: $\left(\dfrac{x}{y} + y\right)^2 - 2\left(\dfrac{x}{y} + y\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} + y = -1 \\ \dfrac{x}{y} + y = 3 \end{array}\right.$

Thay vào (3) giải ra ta có nghiệm $(0;-1)$

<u>Bài 74</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - 2y + \sqrt{2x+y+2xy+1} = 1 \\ \sqrt[3]{3y+1} = 8x^3 - 2y - 1 \\ x > 0 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Ta có (1) $\Leftrightarrow$ $(2x+1) - 2(y+1) + \sqrt{(2x+1)(y+1)} = 0$

ĐK: (2x + 1)(y + 1) $\geq$ 0

Mà x > 0 $\Rightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ y+1 \geq 0 \end{cases}$

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{y+1}\right)\left(\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{y+1}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} - \sqrt{y+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2x$$

Thay vào (2): $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1$

$$\Leftrightarrow (6x+1) + \sqrt[3]{6x+1} = (2x)^3 + 2x \qquad (3)$$

Hàm số $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên R

(3) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1} = 2x \quad \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \dfrac{1}{2}$

Nhận xét: x >1 không là nghiệm của phương trình

Xét $0 < x \le 1$: Đặt $x = \cos\alpha$ với $0 \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Do $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{9}$

Vậy hệ có nghiệm: $\left(\cos\dfrac{\pi}{9}; 2\cos\dfrac{\pi}{9}\right)$

<u>Bài 75</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)^4 + 3 = 4(x+y) \\ \dfrac{x^4 - y^4}{64} + \dfrac{9(x^2-y^2)}{32} + \dfrac{7(x-y)}{8} + 3\ln\left(\dfrac{x-3}{y-3}\right) = 0 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Theo BĐT Cauchy ta có $(x+y)^4 + 1 + 1 + 1 \ge 4\sqrt[4]{(x+y)^4.1.1.1} = 4|x+y| \ge 4(x+y)$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x + y = 1$ (*).

Từ đó kết hợp với điều kiện: $\dfrac{x-3}{y-3} > 0 \Rightarrow -2 < x, y < 3$.

PT thứ hai của hệ $\Leftrightarrow \dfrac{x^4}{64} + \dfrac{9x^2}{32} + \dfrac{7x}{8} + 3\ln(3-x) = \dfrac{y^4}{64} + \dfrac{9y^2}{32} + \dfrac{7y}{8} + 3\ln(3-y)$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^4}{64} + \dfrac{9x^2}{32} + \dfrac{7x}{8} + 3\ln(3-x)$ (với x < 3)

$$f'(x) = \frac{x^3}{16} + \frac{9x}{16} + \frac{7}{8} + \frac{3}{x-3} = \frac{(x^3+9x+14)(x-3)+48}{16(x-3)}$$

$$= \frac{x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 13x + 6}{16(x-3)} = \frac{(x-1)^2(x^2-x+6)}{16(x-3)} \le 0 \qquad (\text{vì } x < 3).$$

Suy hàm số nghịch biến trên (-2; 3), vậy f(x) = f(y) $\Leftrightarrow x = y$ (**).

Từ (*), (**) có $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Bài 76 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-2) = 6\ln\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}}\right) \\ x^5y - 3xy - 1 = 0 \end{cases}$

Giải

Từ $(x-y)(x^2+xy+y^2-2) = 6\ln\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}}\right)$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x + 6\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right) = y^3 - 2y + 6\ln\left(y+\sqrt{y^2+9}\right) \qquad (1)$

Xét $f(t) = t^3 - 2t + 6\ln\left(t+\sqrt{t^2+9}\right) \quad t \in \mathbb{R}$

$f'(t) = 3t^2 - 2 + \dfrac{6}{\sqrt{t^2+9}} = 3\left(t^2 + \dfrac{2}{\sqrt{t^2+9}} - \dfrac{2}{3}\right)$

Ta có $t^2 + \dfrac{2}{\sqrt{t^2+9}} - \dfrac{2}{3} = t^2 + 9 + \dfrac{2}{\sqrt{t^2+9}} - \dfrac{29}{3} = \dfrac{t^2+9}{27} + \dfrac{1}{\sqrt{t^2+9}} + \dfrac{1}{\sqrt{t^2+9}} + \dfrac{26}{27}(t^2+9) - \dfrac{29}{3}$

$$\ge 1 + \frac{26}{27}(t^2+9) - \frac{29}{3} \ge 1 + \frac{26}{3} = \frac{29}{3} - \frac{29}{3} = 0$$

Suy ra $f'(t) \ge 0 \quad \forall t \Rightarrow$ hàm số đồng biến và liên tục trên R

Mà (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Thay vào phương trình còn lại của hệ ta có $x^6 - 3x^2 - 1 = 0 \ (2)$

Đặt $x^2 = u \ (u \ge 0)$ suy ra $u^3 - 3u = 1 \quad (3)$

Xét $g(u) = u^3 - 3u - 1 \quad$ với $u \ge 0$

$g'(u) = 3u^2 - 3$ có $g'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \pm 1$

Ta có bảng biến thiên của hàm số:

u		-1		0		1		2	
g'(u)	+	0	-		-	0	+		
g(u)				-1	↘	-33	↗	1	+∞

Căn cứ vào BBT phương trình (3) có nghiệm duy nhất thuộc (0; 2)

Đặt $u = 2\cos\alpha \quad$ với $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Khi đó (3) trở thành: $\cos 3\alpha = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{9}}$

Vậy hệ có nghiệm $\left(\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}};\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}\right)$; $\left(-\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}};-\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}\right)$

Bài 77 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{x^2+y}+2^{x+y^2}=8 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases}$

Giải

Ta có: $\begin{cases} x+y\ge\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=2 \\ x^2+y^2\ge\frac{1}{2}\left(x+y\right)^2=2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+x+y\ge 4$

Theo BĐT Cauchy ta có: $2^{x^2+y}+2^{y^2+x}\ge 2\sqrt{2^{x^2+y^2+x+y}}\ge 2.\sqrt{2^4}=8$

PT $\Leftrightarrow$ dấu " = " xảy ra. Từ đó ta có x = y = 1.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1; 1).

Bài 78 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-8y^3=2xy(1-2y) \\ \sqrt{x^3+4x}=1+\dfrac{\left(2y+1\right)^2}{3} \end{cases}$

Giải

ĐK: từ PT (2) ,suy ra x> 0

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow x(x-2y)=4y^2(2y-x)\Leftrightarrow(x-2y)(x+4y^2)=0\Leftrightarrow x=2y$ (vì $x+4y^2>0$)

Thay vào phương trình (2) có $3\sqrt{x^3+4x}=x^2+2x+4$ (*)

Ap dụng bất dẳng thức Cauchy tacó

$$\frac{x^2+4}{4}\ge x\Rightarrow x^2+2x+4=\frac{x^2+4}{4}+\frac{3}{4}(x^2+4)+2x\ge x+\frac{3}{4}(x^2+4x)+2x=$$

$$=\frac{3}{2}(\frac{x^2+4}{2}+2x)\ge\frac{3}{2}.2\sqrt{x^3+4x}=3\sqrt{x^3+4x}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi x = 2. Hệ phương trình có nghiệm (2,1)

(Chú ý :Cách khác : Bình phương 2 vế của pt (*) $\Leftrightarrow(x-2)^2(x^2-x+4)=0$ *)*

Bài 79 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy^2+4y^2+8=x(x+2) \\ x+y+3=3\sqrt{2y-1} \end{cases}$ $(x,y\in R)$

Giải

$(1)\Leftrightarrow\left(x+4\right)\left(y^2-x+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=y^2+2 \end{array}\right.$

Với $x=-4$ thay vào pt (2) ta được $y=10+3\sqrt{10}$

Với $x=y^2+2$ thế vào pt (2) ta được $y^2+y+5=3\sqrt{2y-1}$ (*)

Ta có $y^2+y+5=2y-1+(y^2-y+1)+5>2y-1+5\ge 2\sqrt{5(2y-1)}\ge 3\sqrt{2y-1}$

Do đó pt (*) vô nghiệm.

KL: Nghiệm của hệ $x=-4$, $y=10+3\sqrt{10}$.

Bài 80 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$

Giải

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 2(4x + y)(1) \\ x^2 - 3y^2 = 6(2) \end{cases}$

$\Rightarrow x^3 + x^2y - 12xy^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3y \\ x = -4y \end{array}\right.$

Thay cả 3 trường hợp x vào $(2) \Rightarrow$ Hệ có các nghiệm là:

$(3;1)$, $(-3; -1)$, $(-4\sqrt{\frac{6}{13}};\sqrt{\frac{6}{13}}),(4\sqrt{\frac{6}{13}};-\sqrt{\frac{6}{13}})$

Bài 81 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8(x + y) - 3xy = 2y^2 + x^2 \\ 4\sqrt{2 - x} + \sqrt{3 - y} = 2x^2 - y^2 + 5 \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \le 2 \\ y \le 3 \end{cases}$, phương trình $(1) \Leftrightarrow (x + y)(x + 2y - 8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + 2y = 8 \end{array}\right.$.

Với $x + 2y = 8$

Ta có : $\begin{cases} x \le 2 \\ y \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ 2y \le 6 \end{cases} \Rightarrow x + 2y \le 8$

Khi đó: $x + 2y = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ không thỏa hệ.

Với $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$ thay vào phương trình (2)

Ta có PT $(2) \Leftrightarrow 4\sqrt{2 - x} + \sqrt{3 + x} = x^2 + 5$

Điều kiện: $-3 \le x \le 2$

Ta có $(2) \Leftrightarrow 4\left(\sqrt{2 - x} - 1\right) + \left(\sqrt{3 + x} - 2\right) = x^2 - 1 \Leftrightarrow 4\frac{1 - x}{\sqrt{2 - x} + 1} + \frac{x - 1}{\sqrt{3 + x} + 2} = (x - 1)(x + 1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{2 - x} + 1} - \dfrac{1}{\sqrt{3 + x} + 2} + x + 1 = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

Xét phương trình (*), đặt $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{2 - x} + 1} - \dfrac{1}{\sqrt{3 + x} + 2} + x + 1$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2 - x}\left(\sqrt{2 - x} + 1\right)^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{3 + x}\left(\sqrt{3 + x} + 2\right)^2} + 1 > 0; \forall x \in (-3;2)$

Mặt khác $f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$, suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[-3;2]$.

Ta có: $f(-2) = 0$, suy ra (*) có nghiệm duy nhất $x = -2 \Rightarrow y = 2$.

Kết hợp điều kiện, hệ có hai nghiệm $(1;-1),(-2;2)$.

Bài 82 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3(y^2+y)(1+\sqrt{x-2})=x+2\sqrt{x-2}+1\\2y^2+2y+\sqrt{x-2}=2\end{cases}$

Giải

ĐK: $x\geq 2$. Ta có

$$\begin{cases}3(y^2+y)(1+\sqrt{x-2})=x+2\sqrt{x-2}+1\\2y^2+2y+\sqrt{x-2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(y^2+y)(1+\sqrt{x-2})=(x-2+2\sqrt{x-2}+1)+2\\2(y^2+y)+1+\sqrt{x-2}=3\end{cases}$$

Đặt $\begin{cases}a=y^2+y\\b=1+\sqrt{x-2}\end{cases}$ ta được $\begin{cases}3ab=b^2+2\\2a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3-2a\\10a^2-21a+11=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=1\\a=\dfrac{11}{10},b=\dfrac{4}{5}\end{array}\right.$

Với *a=b=1* suy ra hệ có hai nghiệm là : $\left[\begin{array}{l}x=2,y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\x=2,y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ Vì $b=1+\sqrt{x-2}\geq 1\Rightarrow b=\dfrac{4}{5}$ không thỏa mãn. Vậy hệ chỉ có 2 nghiệm như trên.

Bài 83 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x-2y+\sqrt{(2x+1)(y+1)}=1\\\sqrt[3]{3y+2}=8x^3-2y-2\end{cases}$, với $x\geq 0$ và $x,y\in R$.

Giải

Điều kiện: $(2x+1)(y+1)\geq 0$,

Phương trình $(1)\Leftrightarrow(2x+1)-2(y+1)+\sqrt{(2x+1)(y+1)}=0$. Từ giả thiết $x\geq 0$ ta có $2x+1>0\Rightarrow y+1\geq 0$. Đặt $a=\sqrt{2x+1},b=\sqrt{y+1}$ ta có (1) trở thành: $a^2-2b^2+ab=0$

$\Leftrightarrow(a^2-b^2)+(ab-b^2)=0\Leftrightarrow(a-b)(a+2b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a+2b=0\,(l)\end{array}\right.$

Với $a=b$ ta có: $2x+1=y+1\Leftrightarrow y=2x$ thay vào phương trình (2) ta có:

$\sqrt[3]{6x+2}=8x^3-4x-2\Leftrightarrow(6x+2)+\sqrt[3]{6x+2}=(2x)^3+2x$, (*).

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in R\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên R

Do đó $PT(*)\Leftrightarrow\sqrt[3]{6x+2}=2x\Leftrightarrow 8x^3-6x-2=0$

$\Leftrightarrow 2(x-1)(4x^2+4x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\quad(n)\\x=-\dfrac{1}{2}\,(l)\end{array}\right.$. Với $x=1\Rightarrow y=2$

Bài 84 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}5x^5y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0\,(1)\\xy\left({}^2+y^2\right)+2=(x+y)^2\quad(2)\end{cases}$.

Giải

Từ (2) ta có : $(xy-1)(x^2+y^2-2)=0\Rightarrow xy=1\vee x^2+y^2=2$

- Với xy = 1; từ (1) suy ra : $y^4-2y^2+1=0\Leftrightarrow y=\pm 1$. Vậy hệ có nghiệm (x;y)=(1;1),(-1;-1).
- Với : $x^2+y^2=2\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 3y(x^2+y^2)-4xy^2+2x^2y-2(x+y)=0$

$$\Leftrightarrow 6y-4xy^2+2x^2y-2\left(x+y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-xy\right)\left(2y-x\right)=0 \to xy=1 \vee x=2y$$

Xét : xy = 1 . Đã giải ở trên

Với : x = 2y , thay vào $x^2+y^2=2 \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right),\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$

Vậy hệ có nghiệm : (x;y)=(1;1),(-1;-1), $\left(\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right),\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$

<u>Bài 85</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2\left(y+1\right)=6y-2 & \left(1\right) \\ x^4y^2+2x^2y^2+y\left(x^2+1\right)=12y^2-1 & \left(2\right) \end{cases}$.

<u>Giải</u>

Điều kiện : $y \neq 0; y \neq -1$

Khi đó : $\left(1\right) \Leftrightarrow x^2y\left(y+1\right)=6y^2-2y \Rightarrow x^2-2=\frac{4y-4}{y+1}; x^2+3=\frac{9y+1}{y+1}$.

Thay vào (2) , ta có : $x^4y^2+x^2y^2+y+6y^2-2y=12y^2-1 \Leftrightarrow \left(x^2-2\right)\left(x^2+3\right)y^2-y+1=0$

$$\Leftrightarrow \frac{4\left(y-1\right)\left(9y+1\right)y^2}{\left(y+1\right)^2}=y-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ 4\left(9y+1\right)y^2=\left(y+1\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \to x=\pm\sqrt{2} \\ y=\frac{1}{3} \to x=0 \end{array}\right.$$

<u>Bài 86</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+2y+x=4xy \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}=3 \end{cases}$.

<u>Giải</u>

Điều kiện : $x \neq 0, y \neq 0$. Chia hai vế phương trình (1) cho xy , thêm 1 vào hai vế của phương trình (2) và nhóm chuyển về dạng tích $\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=4 \end{cases}$

Đặt : $u=x+\frac{1}{x}; v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \Rightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=4 \end{cases} \Leftrightarrow u=v=4$.

Đến đậy bài toán trở thành đơn giản.

<u>Bài 87</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y \\ y+\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x \end{cases}$.

<u>Giải</u>

Cộng hai vế phương trình của hệ vế với vế ta có :

$\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=x^2+y^2$. Ta có : x = y = 0 là một nghiệm của hệ .

Ta có : $\sqrt[3]{x^2-2x+9}=\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2+8}\geq 2\Rightarrow VT\leq xy+xy=2xy$. Khi đó : $VP=x^2+y^2\geq 2xy$.
Cho nên dấu bằng chỉ xảy ra khi : x = y = 1. Vậy hệ có hai nghiệm : (x; y)=(0;0); (1;1).

<u>Bài 88</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(1+x\right)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)=1+y^7\\ \left(1+y\right)\left(1+y^2\right)\left(1+y^4\right)=1+x^7\end{cases}$.

<u>Giải</u>

Dễ thấy : x = y = 0 hoặc x = y = -1 là nghiệm của hệ
Xét : x > 0
Ta có: $1+y^7=\left(1+x\right)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7>1+x^7\Rightarrow y>x$
Ta có: $1+x^7=\left(1+y\right)\left(1+y^2\right)\left(1+y^4\right)=1+y+y^2+y^3+y^4+y^5+y^6+y^7>1+y^7\Rightarrow x>y$
Vậy hệ vô nghiệm . Tương tự khi y>0 hệ cũng vô nghiệm
Xét : x < -1 $\Rightarrow 1+x^7<0\Rightarrow y<-1$
Ta có : $1+\left(x+x^2\right)+\left(x^3+x^4\right)+\left(x^5+x^6\right)+x^7>1+x^7\Rightarrow y>x$. Tương tự khi $y<-1$ ta có $x>y$
Hệ cũng vô nghiệm
Xét trường hợp $-1<x<0$. Hệ cũng vô nghiệm .
Kết luận : Hệ có nghiệm : $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(-1;-1\right)$.

<u>Bài 89</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{3x}(1+\dfrac{1}{x+y})=2 & (1)\\ \sqrt{7y}(1-\dfrac{1}{x+y})=4\sqrt{2} & (2)\end{cases}$.

<u>Giải</u>

ĐK $x\geq 0,y\geq 0$. Dễ thấy $x=0$ hoặc $y=0$ không thõa mãn hệ. Với x > 0, y > 0 ta có :

$$\begin{cases}1+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{\sqrt{3x}}\\ 1-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\\ \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{x+y}=\frac{1}{3x}-\frac{8}{7y}\text{(nhân vế với vế)}$$

$\Rightarrow 21xy=(7y-24x)(x+y)\Rightarrow 24x^2+38xy-7y^2=0\Rightarrow y=6x$ (vì *x, y* dương).

Thay vào phương trình (1) ta được $\dfrac{1}{7x}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}.\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}}=7\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\pm\dfrac{2}{\sqrt{21}}\right)$.

Từ đó dễ dàng suy ra *x* và *y*.

<u>Bài 90</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+3xy^2=-49 & (1)\\ x^2-8xy+y^2=8y-17x & (2)\end{cases}$.

<u>Giải</u>

Với hệ này, cả hai ẩn và ở hai phương trình đều khó có thể rút ẩn này theo ẩn kia. Tuy nhiên, nếu rút y^2 từ (2) và thế vào (1) thì ta được một phương trình mà ẩn *y* chỉ có bậc 1:

$$x^3+3x(-x^2+8xy+8y-17x)=-49\Leftrightarrow 24xy(x+1)=2x^3+2x^2+49x^2-49\quad(3)$$

Nếu *x*=0 thì (1) vô lí.
Nếu *x*=-1 thì hệ trở thành $y^2=16\Rightarrow y=\pm 4$.

Nếu $x\neq -1\ \&\ x\neq 0$ thì từ (3) suy ra $y=\dfrac{2x^2+49x-49}{24x}$. Thế trở lại phương trình (2) ta được

$$x^2-8x.\frac{2x^2+49x-49}{24x}+\left(\frac{2x^2+49x-49}{24x}\right)^2=\frac{2x^2+49x-49}{3x}-17x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3}+\left(\frac{2x^2+49x-49}{24x}\right)^2=\frac{-49}{3x}\Leftrightarrow 192x^4+(2x^2+49x-49)^2=-49.192x$$

$$\Leftrightarrow 196x^4+196x^3+2205x^2+4606x+2401=0\Leftrightarrow 196x^3+2205x+2401=0$$

$$\Leftrightarrow 196x^3+196+2205x+2205=0\Leftrightarrow 196x^2-196x+2401=0$$

Phương trình cuối cùng vô nghiệm, chứng tỏ hệ chỉ có hai nghiệm (-1;4) và (-1;-4).

<u>Bài 91</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6 & (1)\\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 & (2)\end{cases}$.

<u>Giải</u>

ĐK: $x\ge -\frac{5}{4}$. Nếu $y=0$ thì từ phương trình (1) ta suy ra $x=0$, thế vào phương trình (2) ta thấy không thỏa mãn, vậy y khác 0.

Đặt $x=ky$ ta được (1) trở thành :

$k^5y^5+ky^5=y^{10}+y^6\Leftrightarrow k^5+k=y^5+y$ (3). Xét hàm số $f(t)=t^5+t$ trên $\mathbb{R}$, ta có $f'(t)=5t^4+1>0\forall t\in\mathbb{R}$. Do đó *f(t)* là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, vậy

$(3)\Leftrightarrow f(k)=f(y)\Leftrightarrow k=y\Rightarrow x=y^2$. Thế vào (2) ta được

$$\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}=6\Leftrightarrow 5x+13+2\sqrt{4x^2+37x+40}=36\Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2+37x+40}=23-5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}23-5x\ge 0\\ 16x^2+148x+160=25x^2-230x+529\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x\le 23\\ 9x^2-378x+369=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=41\end{array}\right.$$

Suy ra $x=1$ và do đó $y=\pm 1$.

<u>Bài 92</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt[4]{y^2-2y+2}=2\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{y+3}=3\end{cases}$.

<u>Giải</u>

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-2x+2\ge 0\\ y^2-2y+2\ge 0\\ x\ge 0\\ y+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge -3\end{cases}$

Mà: $\begin{cases}x^2-2x+2=(x+1)^2+1\ge 1\\ y^2-2y+2=(y-1)^2+1\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+2}\ge 1\\ \sqrt[4]{y^2-2y+2}\ge 1\end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt[4]{y^2-2y+2}\ge 2$

Vậy (1) có nghiệm x = y = 1 thỏa (2).

<u>Bài 93</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2y-2x^2-2y^2+5y-2=0\\ \sqrt{y^2+1}+\sqrt{x-y}=2xy-x^2+\sqrt{x^2-2xy+y^2+1}+\sqrt{y}\end{cases}$.

<u>Giải</u>

ĐK: $x-y\ge 0;y\ge 0\Leftrightarrow x\ge y\ge 0$

Từ (2) : $\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x-y}-y^2=-y^2+2xy-x^2+\sqrt{(x-y)^2+1}+\sqrt{y} \Leftrightarrow$

$\sqrt{y^2+1}-\sqrt{y}-y^2=+\sqrt{(x-y)^2+1}-\sqrt{x-y}-(x-y)^2$

Xét hàm số :

$f(t)=\sqrt{t^2+1}-\sqrt{t}-t^2 \quad (t\ge 0)\Rightarrow f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}-\frac{1}{2\sqrt{t}}-2t=t\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}-2\right)-\frac{1}{2\sqrt{t}}<0$

(Vì : $\sqrt{t^2+1}\ge 1\Rightarrow 0\le \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\le 1\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}-2<0$ với mọi t>0)

Như vậy hệ có nghiệm chỉ xảy ra khi : $y=x-y$ hay x = 2y .

Thay vào (1) : $(2y)^2y-2(2y)^2-2y^2+5y-2=0\Leftrightarrow 4y^3-10y^2+5y-2=0$

$\Leftrightarrow (y-2)(4y^2-2y+1)=0\Leftrightarrow y=2$ vì : $4y^2-2y+1=0$ vô nghiệm .

Vậy hệ có nghiệm : (x; y) = (4; 2).

Bài 94 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{x^2+1}-4^{8y^2+\frac{1}{2}}=3\left(2\sqrt{y}-\sqrt{x}\right) (1) \\ 2^{(x+y)^2}+\frac{3}{2}\sqrt{x+y}=\frac{7}{2} \qquad (2) \end{cases}$.

Giải

Điều kiện : $x,y\ge 0$

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow 2.2^{(\sqrt{x})^4}+3\sqrt{x}=2.2^{(2\sqrt{y})^4}+3\left(2\sqrt{y}\right)$

Xét hàm số : $f(t)=2.t^4+3t\,(t\ge 0)\Rightarrow f'(t)=8t^3+3>0$. Chứng tỏ f(t) luôn đồng biến .

Do vậy để phương trình (1) có nghiệm chỉ khi : $\sqrt{x}=2\sqrt{y}\Leftrightarrow x=4y \quad (*)$

Thay vào (2) : $2^{(\sqrt{5y})^4}+\frac{3}{2}\left(\sqrt{5y}\right)=\frac{7}{2}$. Xét hàm số : f(t)=$2^{t^4}+\frac{3}{2}t\Rightarrow f'(t)=4t^3.2^{t^4}+\frac{3}{2}>0$.

Nhận xét : f(1) = 2 + $\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$. Suy ra t = 1 là nghiệm duy nhất .

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ \sqrt{5y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{5} \\ x=\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=\left(\frac{4}{5};\frac{1}{5}\right)$

Bài 95 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2 \qquad (1) \\ 27x^6=x^3-8y+2 \qquad (2) \end{cases}$

Giải

Ta có PT (1)$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{(-2y)^2+4}+(-2y)$

Hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+4}+t$ đồng biến trên R nên $(1)\Leftrightarrow x=-2y$

Thế vào PT (2) ta có:

$$27x^6 = x^3 + 4x + 3$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 = \sqrt[3]{x^3 + 4x + 3}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = x^3 + 4x + 3 + \sqrt[3]{x^3 + 4x + 3} \qquad (3)$$

Lại xét : $g(t) = t^3 + t$, đồng biến trên R nên:

$$(3) \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{x^3 + 4x + 2}$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

<u>Bài 96</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2+1} + y = 4 + \sqrt{x+4} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

<u>Giải</u>

Điều kiện: $-4 \le x \le 1; y \in \mathbb{R}$.

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2\sqrt{1-x} - 2x\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x} \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(1-x)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$, ta có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy

(1) $\Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2 = 1 - x \end{cases}$

Thế vào (2) ta được $\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 4 + \sqrt{x+4}$ (3). Xét hàm số

$g(x) = \sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{x+4}$, liên tục trên [-4;1], ta có

$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+4}} < 0\ \forall x \in (-4;1) \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên [-4;1]. Lại có $g(-3) = 4$ nên $x = -3$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3).

Với $x = -3$ suy ra $y = 2$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2. \end{cases}$

<u>Bài 97</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 \, (1) \\ xy + x + 1 = x^2 \qquad (2) \end{cases}$

<u>Giải</u>

Nhận xét x = 0 không thỏa mãn phương trình (2) nên ta có thể suy ra $y + 1 = \frac{x^2 - 1}{x}$ (3)

Thay (3) vào (1) ta được

$$x^2 \cdot \frac{x^2-1}{x}\left(x + \frac{x^2-1}{x}\right) = 3x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(2x^2-1) = (x-1)(3x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^3+2x^2-4x)=0 \Leftrightarrow 2x(x-1)^2(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Loại nghiệm x = 0, vậy phương trình có hai nghiệm: $(1;\ -1)$,$\left(-2;\ -\dfrac{5}{2}\right)$.

<u>Bài 98</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2y+y^3=2x^4+x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2\left(y-x^2\right)+y^3-\left(x^2\right)^3=0 \\ \left(x+2\right)\sqrt{y+1}=\left(x+1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(y-x^2\right)\left(2x^2+y^2+yx^2+x^4\right)=0 \\ \left(x+2\right)\sqrt{y+1}=\left(x+1\right)^2 \end{cases}$

Trường hợp 1: y $=x^2$, thay vào (2) :

$\left(x+2\right)\sqrt{x^2+1}=\left(x^2+1+2x\right) \Leftrightarrow t^2-\left(x+2\right)t+2x=0 \Rightarrow t=2; t=x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+1}=2 \Rightarrow x^2=3 \leftrightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ \sqrt{x^2+1}=x \Rightarrow x\in\varnothing \end{array}\right. .$$

Trường hợp 2: $2x^2+y^2+yx^2+x^4=0 \Leftrightarrow y^2+\text{yx}^2+\left(2x^2+x^4\right)=0$

$\Rightarrow \Delta_y=x^4-4\left(2x^2+x^4\right)=-3x^4-8x^2<0 \vee x\in R \to \Delta_y<0$

$\Rightarrow f(,y)=2x^2+y^2+yx^2+x^4>0 \vee x,y$. Phương trình vô nghiệm .

Do đó hệ có hai nghiệm : (x;y)=$\left(-\sqrt{3};3\right),\left(\sqrt{3};3\right)$

<u>Chú ý:</u> *Ta còn có cách giải khác*

Phương trình (1) khi x = 0 và y = 0 không là nghiệm do không thỏa mãn (2).

Chia 2 vế phương trình (1) cho $x^3\neq 0 \Rightarrow \left(1\right) \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{y}{x}\right)+\left(\dfrac{y}{x}\right)^3=2x+x^3$

Xét hàm số : $f\left(t\right)=2t+t^3 \Rightarrow f'\left(t\right)=2+3t^2>0\forall t\in R$. Chứng tỏ hàm số f(t) đồng biến . Để phương trình có nghiệm thì chỉ xảy ra khi : $\dfrac{y}{x}=x \Leftrightarrow y=x^2$. Đến đây ta giải như ở phần trên.

<u>Bài 99</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\left(-y+\sqrt{1+\left(-y\right)^2}\right) \\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1 \end{cases}$. (nhân liên hợp)

Xét hàm số : $f(t)=t+\sqrt{1+t^2} \Rightarrow f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\dfrac{\left|t\right|+t}{\sqrt{1+t^2}}\geq 0\forall t\in R$

Chứng tỏ hàm số đồng biến . Để $f\left(x\right)=f\left(-y\right)$ chỉ xảy ra $x=-y$ (*)

Thay vào phương trình (2) :

$$x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+6x+1}-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{25}{4}x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\\ \sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\end{array}\right.$$

❖ Trường hợp : $\sqrt{2x^2+6x+1}=3x \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ 2x^2+6x+1=9x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ 7x^2-6x-1=0\end{cases} \Rightarrow x=1;y=-1$

❖ Trường hợp : $\sqrt{2x^2+6x+1}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ 2x^2+6x+1=4x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ 2x^2-6x-1=0\end{cases}$

$\Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{11}}{2};y=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$. Vậy hệ có hai nghiệm : (x; y) = (1;-1),($\frac{3-\sqrt{11}}{2};\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$)

<u>Bài 100</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(8x-3)\sqrt{2x-1}-y-4y^3=0 \quad (1)\\ 4x^2-8x+2y^3+y^2-2y+3=0 (2)\end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện : $x\ge\frac{1}{2}$.

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow (8x-3)\sqrt{2x-1}=y+4y^3 \,(*)$

Đặt $t=\sqrt{2x-1}\Rightarrow 2x=t^2+1 \Leftrightarrow (8x-3)\sqrt{2x-1}=\left[4(t^2+1)-3\right]t=(4t^2+1)t=4t^3+t$

Do đó (*) : $4t^3+t=4y^3+y$

Xét hàm số : f(u) = $4u^3+u \Rightarrow f'(u)=12u^2+1>0\forall u\in R$. Chứng tỏ hàm số đồng biến . Do đó phương trình có nghiệm khi : f(t) = f(y) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=y \Leftrightarrow 2x=y^2+1(**)$

Thay vào (2) : $(y^2+1)^2-4(y^2+1)+2y^3+y^2-2y+3=0 \Leftrightarrow y^4+2y^3-y^2-2y=0$

$\Leftrightarrow y(y^3+2y^2-y-2)=0 \Leftrightarrow y(y-1)(y^2+3y+2)=0 \Leftrightarrow y(y-1)(y+2)(y+1)=0$

Vậy : $\begin{cases}y=0\\ 2x=y^2+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ x=\frac{1}{2}\end{cases} \to (x;y)=\left(\frac{1}{2};0\right)$, $\begin{cases}y=0\\ 2x=y^2+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases} \to (x;y)=(1;1)$

$\begin{cases}y=-1\\ 2x=y^2+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ x=1\end{cases} \to (x;y)=(1;0)$, $\begin{cases}y=-2\\ 2x=y^2+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2\\ x=\frac{5}{2}\end{cases} \to (x;y)=\left(\frac{5}{2};-2\right)$.

<u>Hết</u>