Tài liệu ôn thi THPT Quốc gia

Đoàn Văn Bộ

CHUYÊN ĐỀ: BÀI TOÁN THỰC TẾ

Trường: ....

Họ và tên:...

Lớp: ....

Thành phố Hồ Chí Minh, ngày 02 tháng 06 năm 2016

CHUYÊN ĐỀ BÀI TOÁN THỰC TẾ

LỜI NÓI ĐẦU

Xuất phát từ đề **Dự Bị THPT Quốc Gia Năm 2015**, hôm nay tôi viết chuyên đề **Bài Toán Thực Tế**. Ý tưởng giải bài toán này là dựa vào phần kiến thức **BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN** và **HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN** mà rất nhiều giáo viên ở Trung học phổ thông đã bỏ qua, không dạy các em học sinh. Việc giải một số bài toán kinh tế thường dẫn đến việc xét những hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và giải chúng. Loại bài toán này được nghiên cứu trong một ngành toán học với tên gọi là *Quy hoạch tuyến tính*. Tuy nhiên, đối với cấp bậc trung học phổ thông, ta chỉ xem xét và giải những bài toán đơn giản. Ngoài ra, tôi còn đề cập đến một số bài toán thực tế ở một số lý thuyết phần khác như: **Đạo hàm, Khảo sát hàm số, …** Hy vọng qua chuyên đề này, khi các bạn gặp bài toán này trong đề thi **THPT Quốc gia** các bạn có thể làm được.

Trong quá trình soạn tài liệu này, nếu có gì sai xót mong bạn đọc thông cả. Mọi đóng góp cũng như nhận xét của các bạn xin gửi về địa chỉ: vanbo.dhsp@gmail.com

Tp, Hồ Chí Minh, 01-06-2016

Đoàn Văn Bộ

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là:

$$ax + by \le c \ (1)$$

$$(ax + by < c, ax + by \ge c, ax + by > c)$$

Trong đó a, b, c là các số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

- **Biểu diễn tập nghiệm** của bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình (1) được gọi là miền nghiệm của nó.

Quy tắc thực hành **biểu diễn hình học tập nghiệm** (hay **biểu diễn miền nghiệm**) của bất phương trình $ax + by \le c$ (tương tự với bất phương trình $ax + by \ge c$).

- Bước 1: Trên mặt phẳng tọa độ *Oxy*, vẽ đường thẳng $d: ax + by = c$.
- Bước 2: Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc đường thẳng d.
- Bước 3: Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh $ax_0 + by_0$ với c.
- Bước 4: Kết luận:
  - Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ d chứa M_o là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \le c$.
  - Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ d không chứa M_o là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \le c$.

- **Ví dụ:** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn: $2x + y \le 3$.

Giải

Vẽ đường thẳng $d: 2x + y = 3$.

Lấy gốc tọa độ $O(0;0)$, ta thấy $O \notin d$ và có $2.0 + 0 < 3$ nên nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc tọa độ O là miền nghiệm của bất phương trình đã cho.

Bài tập tương tự: Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

a. $-3x+2y\le 0$ b. $2x+5y\le 12x+8$

II. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn *x,y* mà ta phải đi tìm nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là nghiệm của hê bất phương trình đã cho.

Cũng giống như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể **biểu diễn hình học tập nghiệm** của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ: Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} 3x+y\le 6 \\ x+y\le 4 \\ x,y\ge 0 \end{cases}$

Giải

Vẽ các đường thẳng:

$d_1: 3x+y=6$ $d_2: x+y=4$ $d_3: x=0$ (Trục tung) $d_4: y=0$ (Trục hoành)

Vì $M_0(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ trên nên ta tô đậm các nữa mặt phẳng bờ d_1,d_2,d_3,d_4 không chứa điểm M_0. Miền không tô đậm (hình tứ giác *OCIA* kể cả 4 cạnh AI,IC,CO,OA) trong hình vẽ là miền nghiệm của hệ đã cho. (các bạn tự vẽ hình)

Bài tập tương tự: Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

a. $\begin{cases} 3x+y\ge 9 \\ x\ge y-3 \\ 2y\ge 8-x \\ y\le 6 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}-1\le 0 \\ x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3y}{2}\le 2 \\ x\ge 0 \end{cases}$

Ở trên, tôi đã nhắc qua một số kiến thức để vận dụng vào giải bài toán thực tế. Trước khi vào bài toán, tôi xin nêu ra **phương pháp tìm cực trị của biểu thức $F=ax+by$ trên một miền đa giác**. Có lẽ các bạn sẽ thấy lạ với phương pháp này. Phương pháp này được nếu ra trong sách giáo khoa lớp 10 cơ bản trang 98 phần đọc thêm.

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = ax + by$ (*a, b* là hai số đã cho không đồng thời bằng 0), trong đó *x, y* là các tọa độ của các điểm thuộc miền đa giác $A_1A_2...A_iA_{i+1}...A_n$. Xác định *x, y* để *F* đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải. Ta minh họa cách giải trong trường hợp $n = 5$ tức là xét ngũ giác lồi và xét trường hợp $b > 0$ trường hợp ngược lại tương tự. Giả sử $M_o\left(x_o, y_o\right)$ là điểm thuộc miền đa giác. Qua điểm *M* và mỗi đỉnh của một đa giác, kẻ các đường thẳng song song với đường thẳng $ax + by = 0$.

Khi đó ta có đường thẳng qua *M* có phương trình $ax + by = ax_0 + by_0$ và cắt trục tung tại điểm $N\left(0; \frac{ax_0 + by_0}{b}\right)$. Vì $b > 0$ nên $ax_0 + by_0$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{ax_0 + by_0}{b}$ lớn nhất. Từ đó ta được kết quả bài toán.

Tổng quát hóa:

Ta luôn có thể giả thiết rằng $b > 0$, bởi vì nếu $b < 0$ thì ta có thể nhân hai vế với -1 và bài toán tìm giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) của $F\left(x;\ y\right)$ sẽ trở thành bài toán tìm giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của $-F\left(x;\ y\right) = -ax + b'y$, trong đó $b' = -b > 0$.

Tập các điểm $\left(x; y\right)$ để $F\left(x;\ y\right)$ nhận giá trị *p* là đường thẳng $ax + by = p$; hay $y = -\frac{a}{b}x + \frac{p}{b}$

Đường thẳng này có hệ số góc bằng $-\frac{a}{b}$ và cắt trục tung tại điểm $M\left(0; m\right)$ với $m = \frac{p}{b}$

Ký hiệu đường thẳng này là $\left(d_m\right)$. Vì $b > 0$ nên việc tìm giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) của $P\left(x; y\right) = p$ với $\left(x; y\right)$ miền đa giác quy về việc tìm giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) của $m = \frac{p}{b}$, tức là tìm điểm *M* ở vị trí thấp nhất (hay cao nhất) trên trục tung sao cho đường thẳng $\left(d_m\right)$ có ít nhất một điểm chung với (S).

Từ đó chú ý rằng $\left(d_m\right)$ có hệ số góc bằng $-\frac{a}{b}$ không đổi. Ta đi đến cách làm sau:

Khi tìm giá trị nhỏ nhất của $F\left(x; y\right)$, ta cho đường thẳng $\left(d_m\right)$ chuyển động song song với chính nó từ một vị trí nào đó ở phía dưới miền đa giác và đi lên cho đến khi $\left(d_m\right)$ lần đầu tiên đi qua một điểm $(x_0;\ y_0)$ nào đó của miền đa giác. Khi đó, m đạt giá trị nhỏ nhất và tương ứng với nó là giá trị nhỏ nhất của $F(x;y)$. Đó là $F(x_0;\ y_0) = ax_0 + by_0$.

Khi tìm giá trị lớn nhất của $F(x;y)$, ta cho đường thẳng (d_m) với hệ số góc $-\frac{a}{b}$ chuyển động song song với chính nó từ một vị trí nào đó trên miền đa giác và đi xuống cho đến khi (d_m) lần đầu tiên đi qua một điểm $(x_0;\ y_0)$ nào đó của miền đa giác. Khi đó, m đạt giá trị lớn nhất và tương ứng với nó là giá trị lớn nhất của $F(x;\ y)$. Đó là $F(x_0;y_0) = ax_0 + by_0$.

Vậy giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của biểu thức $F = ax + by$ đạt được tại một trong các đỉnh của một miền đa giác.

Như vậy, tôi đã nhắc xong lý thuyết cần thiết để giải bài toán thực tế. Bây giờ, tôi xin đưa ra một số bài tập áp dụng:

BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

Bài 1. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24g hương liệu, 9 lít nước và 210g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30g đường, 1 lít nước và 1g hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần 10g đường, 1 lít nước và 4g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được số điểm thưởng là lớn nhất?

Đề Dự Bị THPT Quốc Gia Năm 2015

Giải

Đối với những bài toán như thế này, ta phải đọc thật kỹ, xem đề bài yêu cầu làm gì và chuyển bài toán đó về những mô hình toán học mà mình đã học? Ở đây, yêu cầu đề bài: "**cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại**". Như vậy, ta gọi ẩn x, y tương ứng là số lít nước trái cây tương ứng mỗi loại. Mà mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng thì x lít nước cam nhân được $60x$ điểm thưởng; mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng thì y lít nước táo nhận được $80y$ điểm thưởng. Khi đó ta có số điểm thưởng nhận được sau khi pha chế được x, y lít nước trái cây mỗi loại là $60x + 80y$. Ở đây tính số điểm thưởng ta dùng quy tắc **TAM XUẤT** để tính, tương tự với các dữ kiện bài toán khác ta cũng dùng quy tắc này và ta có lời giải bài này như sau:

Gọi x, y lần lượt là số lít nước cam và táo của mỗi đội pha chế $(x, y \geq 0)$. Khi đó số điểm thưởng nhận được của mỗi đội chơi là $F = 60x + 80y$.

Để pha chế x lít nước cam cần $30x$ g đường, x lít nước và x(g) hương liệu. Để pha chế y lít nước cam cần $10y$ g đường, y lít nước và $4y$ (g) hương liệu.

Do đó, ta có:

Số gam đường cần dùng là: $30x + 10y$

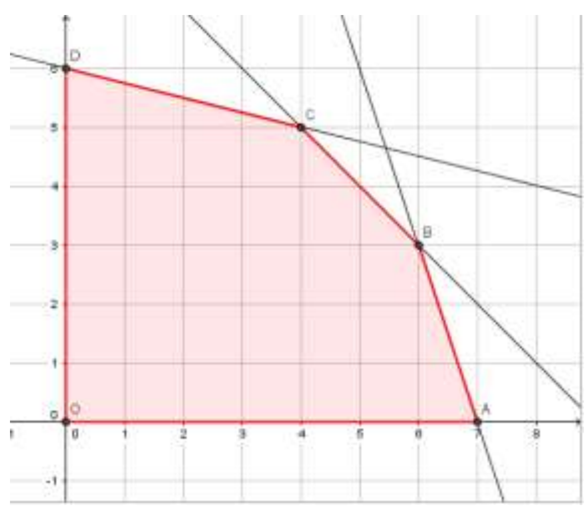
Số lít nước cần dùng là: $x + y$

Số gam hương liệu cần dùng là: $x + 4y$.

Vì trong cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi sử dụng tối đa 24g hương liệu, 9 lít nước và 210g đường nên x, y thỏa mãn hệ bất phương trình: $\begin{cases} 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y \leq 21 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ (*)

Khi đó bài toán trở thành :

Trong các nghiệm của hệ bất phương trình (*), tìm nghiệm $(x = x_o, y = y_o)$ sao cho $F = 60x + 80y$ lớn nhất.



Trong mặt phẳng tọa độ, ta sẽ biểu diễn phần mặt phẳng chứa điểm $M(x, y)$ thỏa mãn $(*)$. Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ giác *OABCD* kể cả miền trong của tam giác (như hình vẽ). Biểu thức $F = 60x + 80y$ đạt giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của ngũ giác *OABCD*.

Tại các đỉnh $O(0;0)$, $A(7;0)$, $B(6;3)$, $C(4;5)$, $D(0;6)$. Ta thấy F đạt giá trị lớn nhất tại $x = 4, y = 5$.

Khi đó $F = 60.4 + 80.5 = 640$.

Vậy cần pha chế 4 lít nước cam và 5 lít nước táo thì số điểm thưởng lớn nhất là 640.

Nhận xét: Bài trên tôi phân tích khá chi tiết, vì vậy những bài sau tôi chỉ đưa ra lời giải và không phân tích nữa. Bởi vì cách giải cũng giống nhau, chỉ cần bạn hiểu là có thể lập được mô hình Toán học. Từ đó có thể giải được bài toán giống như trên.

Bài 2. Một phân xưởng có hai máy đặc chủng M_1, M_2 sản suất hai loại sản phẩm ký hiệu là I và II. Một tấn sản phẩm loại I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại II lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản suất một tấn sản phẩm loại I phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản suất một tấn sản phẩm loại II phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản suất đồng thời hai sản phẩm trên. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ trong một ngày, máy M_2 một ngày chỉ làm việc không quá 4 giờ. Hãy đặt kế khoạch sản suất sao cho tổng số tiền lãi là lớn nhất?

Giải

Gọi x, y lần lượt là số tấn sản phẩm loại I, loại II sản suất trong một ngày $(x, y \geq 0)$. Khi đó số tiền lãi một ngày là $L = 2x + 1,6y$ (triệu đồng) và số giờ làm việc của mỗi ngày của máy M_1 là $3x + y$ và máy M_2 là $x + y$.

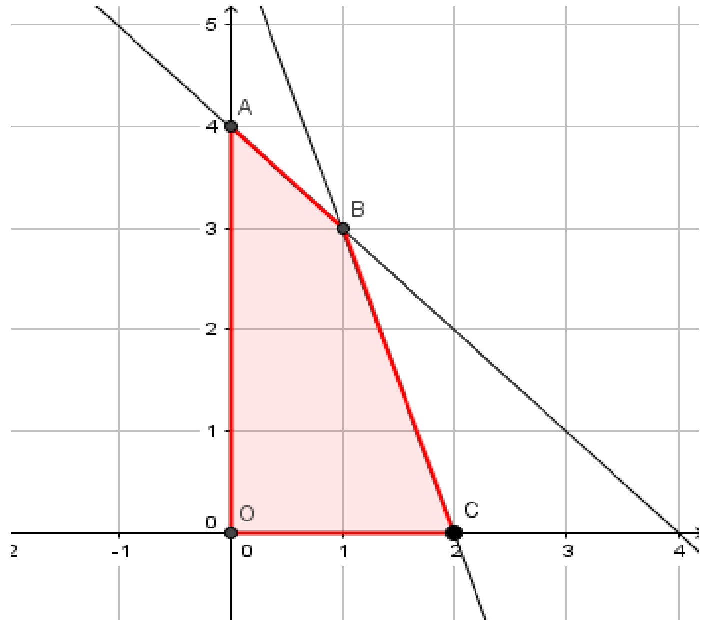
Vì mỗi ngày máy M_1 làm việc không quá 6 giờ và máy M_2 làm việc không quá 4 giờ nên x,y thỏa mãn hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Khi đó bài toán trở thành:

Trong các nghiệm của hệ bất phương trình (*), tìm nghiệm $(x = x_o, y = y_o)$ sao cho $L = 2x + 1,6y$ lớn nhất.

Trong mặt phẳng tọa độ, ta sẽ biểu diễn phần mặt phẳng chứa điểm $M(x,y)$ thỏa mãn $(*)$. Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $OABC$ kể cả miền trong của tứ giác (như hình vẽ). Biểu thức $L=2x+1,6y$ đạt giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $OABC$.



Tại các đỉnh :

$O(0;0), A(0;4), B(1;3), C(2;0)$. Ta thấy

L đạt giá trị lớn nhất tại $x=1, y=3$. Khi đó $L=2.1+1,6.3=6,8$.

Vậy để có lãi suất cao nhất, mỗi ngày cần sản suất 1 tấn sản phẩm loại I, và 3 tấn sản phẩm loại II.

Bài 3. [SGK Đại số & Giải tích 10 nâng cao] Một gia đình cần ít nhất 900g chất prôtein và 400g chất lipit trong thức ăn mỗi ngày. Biết rằng thịt bò chứa 80% prôtein và 20% lipit. Thịt lợn chứa 60% prôtein và 40% lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1600g thịt bò và 1100g thịt lợn, giá tiền 1kg thịt bò là 45 nghìn đồng, 1kg thịt lợn là 35 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để chi phí ít nhất?

Giải

Giả sử gia đình đó mua x (kg) thịt bò và y (kg) thịt lợn $(x,y\ge 0)$. Khi đó chi phí mua x (kg) thịt bò và y (kg) thịt lợn là $T=45x+35y$ (nghìn đồng).

Theo giả thuyết, x và y thỏa mã điều kiện $x\le 1,6; y\le 1,1$.

Khi đó lượng prôtêin có được là $80\%x+60\%y$ và lượng lipit có được là $20\%x+40\%y$.

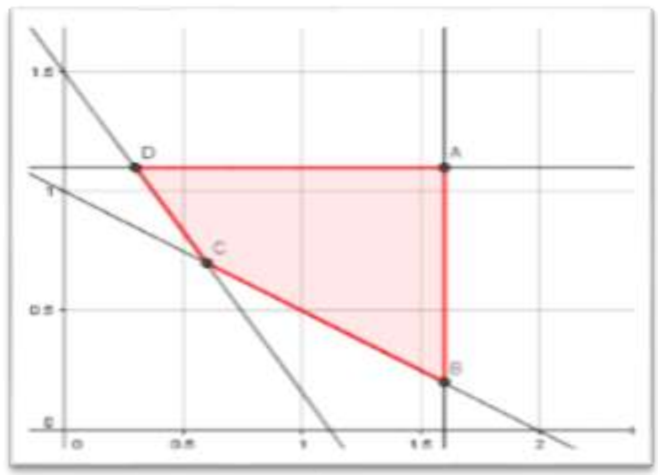
Vì gia đình đó cần ít nhất 0,9kg chất prôtêin và 0,4kg chất lipit trong thức ăn mỗi ngày nên điều kiện tương ứng là $80\%x+60\%y\ge 0,9$ và $20\%x+40\%y\ge 0,4$ hay $4x+3y\ge 4,5$ và $x+2y\ge 2$.

Vậy x, y thỏa mãn hệ bất phương trình: $\begin{cases} 0 \le x \le 1,6 \\ 0 \le y \le 1,1 \\ 4x + 3y \ge 4,5 \\ x + 2y \ge 2 \end{cases}$ (*)

Khi đó bài toán trở thành :

Trong các nghiệm của hệ bất phương trình (*), tìm nghiệm $(x = x_o, y = y_o)$ sao cho $T = 45x + 35y$ nhỏ nhất.

Trong mặt phẳng tọa độ, ta sẽ biểu diễn phần mặt phẳng chứa điểm $M(x, y)$ thỏa mãn $(*)$. Miền nghiệm của hệ (*) là miền bên trong của tứ giác lồi $ABCD$ và cả biên (như hình vẽ)



T đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Ta có:

$A(1,6;1,1), B(1,6;0,2), C(0,6;0,7), D(0,3;1)$

Kiểm tra được $x = 0,6; y = 0,7$ thì $T = 51,5$ (nghìn đồng) là nhỏ nhất.

Vậy gia đình đó mua 0,6kg thịt bò và 0,7kg thịt lợn thì chi phí là ít nhất. Cụ thể là phải chi phí $51,5$ nghìn đồng.

Bài 4. Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140kg chất A và 9kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20kg chất A và 0,6kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được 10kg chất A và 1,5kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất, biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II?

Giải

Gọi x tấn nguyên liệu loại I, y tấn nguyên liệu loại II $(x, y \geq 0)$. Khi đó tổng số tiền mua nguyên liệu là $T = 4x + 3y$ (đồng)

Vì mỗi tấn nguyên liệu loại I có thể chiết xuất được 20kg chất A và 0,6kg chất B, mỗi tấn nguyên liệu loại II có thể chiết xuất được 10kg chất A và 1,5kg chất B nên x, y tấn nguyên liệu I và II có thể chiết xuất được $20x + 10y$ kg chất A và $0,6x + 1,5y$ kg chất B.

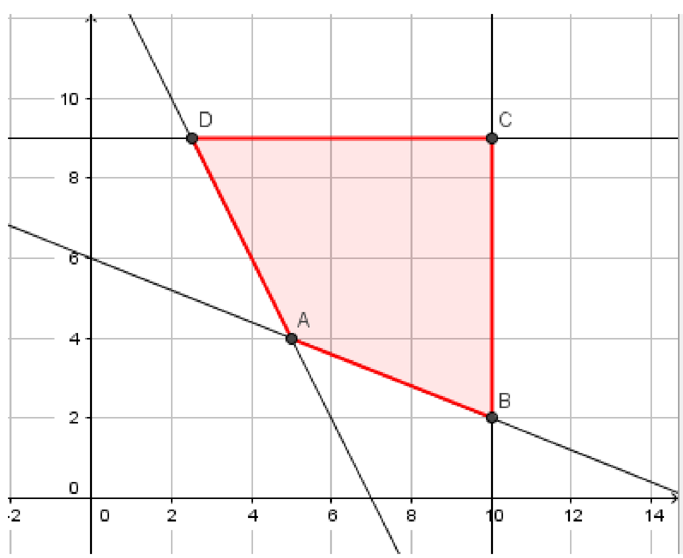
Khi đó theo giả thuyết ta có:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ 20x + 10y \geq 140 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases} \qquad (*)$$

Vậy bài toán trở thành :

Trong các nghiệm của hệ bất phương trình (*), tìm nghiệm $(x = x_o, y = y_o)$ sao cho $T = 4x + 3y$ nhỏ nhất.

Trong mặt phẳng tọa độ, ta sẽ biểu diễn phần mặt phẳng chứa điểm $M(x, y)$ thỏa mãn $(*)$. Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $ABCD$ kể cả miền trong của tứ giác (như hình vẽ). Biểu thức $T = 4x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.



Tại các đỉnh:

$A(5;4), B(10;2), C(10;9), D\left(\frac{5}{2};9\right)$. Ta thấy T đạt giá trị lớn nhất tại $x = 5, y = 4$.

Khi đó $T = 4.5 + 4.4 = 32$.

Vậy để chi phí nhỏ nhất, cần sử dụng 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu II. Khi đó, tổng chi phí là 32 triệu đồng.

Bài 5. [SGK Đại số & Giải tích 10 nâng cao – Bài toán vitamin]

Một nhà khoa học nghiên cứu về tác động phối hợp của vitamin A và vitamin B đối với cơ thể con người. Kết quả như sau: Một người mỗi ngày có thể tiếp nhận được không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B. Một người mỗi ngày cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B. Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày, số đơn vị vitamin B không ít hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A. Giá của 1 đơn vị vitamin A là 9 đồng, giá 1 đơn vị vitamin B là 7,5 đồng. Tìm phương án dùng 2 loại vitamin A và B thỏa mãn các điều kiện trên để số tiền phải trả là ít nhất.

Giải

Gọi x, y lần lượt là số đơn vị vitamin A và B dùng mỗi ngày $(x, y \geq 0)$.

Vì giá của 1 đơn vị vitamin A là 9 đồng, giá 1 đơn vị vitamin B là 7,5 đồng nên số tiền cần phải trả là $C = 9x + 7,5y$.

Theo giả thuyết ta có: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 600 \\ 0 \leq y \leq 500 \\ 400 \leq x + y \leq 1000 \quad (*) \\ \frac{1}{2}x < y \leq 3x \end{cases}$

Khi đó bài toán trở thành :

Trong các nghiệm của hệ bất phương trình (*), tìm nghiệm $(x = x_o, y = y_o)$ sao cho $C = 9x + 7,5y$ nhỏ nhất.

Trong mặt phẳng tọa độ, ta sẽ biểu diễn phần mặt phẳng chứa điểm $M(x, y)$ thỏa mãn $(*)$. Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ giác $ABCDEF$ kể cả miền trong của tứ giác nhưng bỏ đi cạnh BC với $A(100;300)$, $B\left(\frac{800}{3}; \frac{400}{3}\right)$, $C(600;300)$, $D(600;400)$, $E(500;500)$,

$F\left(\frac{500}{3};500\right)$. Biểu thức $C=9x+7,5y$ đạt giá trị nhỏ nhất nhất tại một trong các đỉnh A, D, E, F của ngũ giác $ABCDE$.

Khi đó, ta thấy C đạt giá trị lớn nhất tại $x=100, y=300$. Khi đó $C=9.100+7,5.300=3150$.

Vậy phương án tốt nhất là dùng 100 đơn vị vitamin A và 300 đơn vị vitamin B. Chi phí mỗi ngày là 3150 đồng

Bài 6. [SGK Đại số & Giải tích 10] Có 3 nhóm máy A, B, C dùng để sản suất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản suất ra một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản suất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho tương ứng bảng sau:

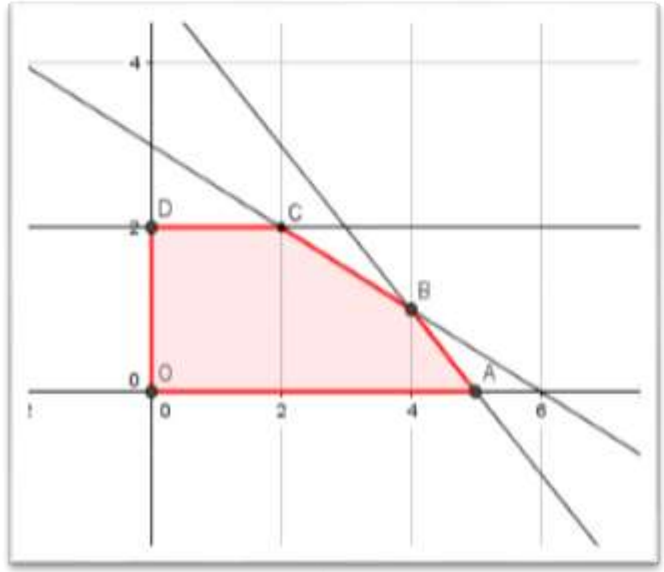
Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản suất ra một đơn vị sản phẩm	
		Loại I	Loại II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Mỗi đơn vị sản phẩm loại I lãi 3 nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm loại II lãi 5 nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản suất hai sản phẩm trên có lãi cao nhất.

Giải

Gọi x, y lần lượt là số đơn vị sản phẩm thuộc loại I và II $(x,y\geq 0)$. Khi đó tổng số tiền lãi của x đơn vị sản phẩm loại I và y đơn vị sản phẩm loại II là $L=3000x+5000y$

Theo gia thuyết, ta có: $\begin{cases}2x+2y\leq 10\\2y\leq 4\\2x+4y\leq 12\\x,y\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\leq 5\\y\leq 2\\x+2y\leq 6\\x,y\geq 0\end{cases}$ (*)



Khi đó bài toán trở thành :

Trong các nghiệm của hệ bất phương trình (*), tìm nghiệm $\left(x = x_o, y = y_o\right)$ sao cho $L = 3000x + 5000y$ lớn nhất.

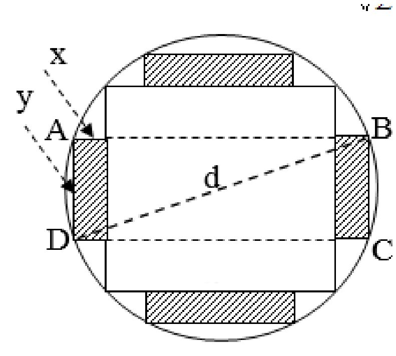
Trong mặt phẳng tọa độ, ta sẽ biểu diễn phần mặt phẳng chứa điểm $M\left(x, y\right)$ thỏa mãn $\left(*\right)$. Miền nghiệm của hệ (*) là miền bên trong của ngũ giác lồi *OABCD* và cả biên (như hình vẽ). *L* đạt giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của ngũ giác *OABCD*.

Ta có $O\left(0;0\right), A\left(5;0\right), B\left(4;1\right), C\left(2;2\right), D\left(0;2\right)$. Kiểm tra được $x = 4; y = 1$ thì $L = 17000$ đồng là lớn nhất.

Vậy kế hoạch tốt nhất là sản suất 4 đơn vị sản phẩm loại I và 1 đơn vị sản phẩm loại II thì tổng số tiền lời là lớn nhất cụ thể là 17000 đồng.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 7. Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10km/h$ thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nhiên liệu trên 1km là nhỏ nhất?



Bài 8. Từ một khúc gỗ hình trụ, cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là nhỏ nhất?

Bài 9. Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 8*a*. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3000000 đồng trên mỗi diện tích *a*, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4000000 đồng trên mỗi diện tích *a*. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên mỗi diện tích bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất khi tổng số công không quá 180?

Bài 10. Một xưởng sản suất hai loại sản phẩm, mỗi kg sản phẩm loại I cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40000 đồng. Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30000 đồng. Xưởng có 200kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Nên sản suất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để mức lời lớn nhất?

Bài 11. Một có sở sản suất dự định sản suất ra hai loại sản phẩm A và B. Các sản phầm này được chế tạo ra từ ba loại nguyên liệu I, II và III. Số lượng đơn vị dự trữ của từng loại nguyên liệu và số lượng đơn vị từng loại nguyên liệu cần để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm mỗi loại được cho tương ứng bảng sau:

Loại nguyên liệu	Nguyên liệu dự trữ	Số đơn vị nguyên liệu cần dùng cho việc sản suất một đơn vị sản phẩm	
		A	B
I	18	2	3
II	30	5	4
III	25	1	6

Mỗi đơn vị sản phẩm loại A lãi 3 trăm nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm loại B lãi 2 trăm nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản suất hai sản phẩm trên có lãi lớn nhất.

Bài 12. Một máy cán thép có thể sản suất hai sản phẩm thép tấm và thép cuộn với công suất cho mỗi loại là (nếu chỉ sản xuất một sản phẩm): thép tấm là 250 tấn/giờ, thép cuộn là 150 tấn/giờ. Lợi nhuận bán sản phẩm là: thép tấm là 25 USD/tấn, thép cuộn là 30 USD/tấn. Theo tiếp thị, một tuần chỉ tiêu thụ được tối đa 5000 tấn thép tấm và 3500 tấn thép cuộn. Biết rằng máy làm việc 40 giờ một tuần. Cần sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu trong một tuần để có lợi nhuận cao nhất.

Bài 13. Một công ty điện tử sản xuất hai kiểu radio trên hai dây chuyền độc lập. Công suất của dây chuyền một là 45 radio/ngày và dây chuyền hai là 70 radio/ngày. Để sản xuất một chiếc radio kiểu một cần 12 linh kiện điện tử E, và một chiếc radio kiểu hai cần 9 linh kiện này. Số linh kiện này được cung cấp mỗi ngày không quá 1000. Tiền lãi khi bán một chiếc radio kiểu 1 là 250.000 (đồng) và kiểu hai là 180.000 (đồng). Hãy lập kế hoạch sản xuất cho lãi nhiều nhất trong ngày.

Tài liệu tham khảo

[1] Sách giáo khoa Đại số 10 cơ bản _ NXB Giáo dục Việt Nam _ Tái bản lần thứ năm _ Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên) – Vũ Tuấn (Chủ biên)

[2] Sách giáo khoa Đại số 10 nâng cao _ NXB Giáo dục Việt Nam _ Tái bản lần thứ năm _ Đoàn Quynh – Nguyễn Huy Đoan…