TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Facebook cá nhân : https://www.facebook.com/quang.manngoc

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

GIẢI HPT – PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^{10}+2x^6=y^5+2x^4y \\ \sqrt{x^2+5}+\sqrt{2y+1}=6 \end{cases}$ $(x, y\in\mathbb{R})$

Bài giải:

Điều kiện: $2y+1\geq 0\Rightarrow y\geq -\frac{1}{2}$

- Xét x=0, từ pt đầu suy ra y=0, thay x=y=0 vào pt thứ hai không thỏa mãn (loại)

- Xét $x\neq 0$, chia 2 vế của pt đầu cho $x^5\neq 0$, ta được $x^5+2x=\left(\frac{y}{x}\right)^5+2\left(\frac{y}{x}\right)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^5+2t,\forall t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=5t^4+2>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)=t^5+2t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó (1) $\Leftrightarrow x=\frac{y}{x}\Leftrightarrow y=x^2$. Thay vào pt thứ 2 của hệ ta được: $\sqrt{y+5}+\sqrt{2y+1}=6$ (2)

Xét hàm số $g(y)=\sqrt{y+5}+\sqrt{2y+1},\forall y\geq -\frac{1}{2}$.

Ta có $g'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y+5}}+\frac{1}{\sqrt{2y+1}}>0,\forall y>-\frac{1}{2}$. Vậy g(y) đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Mà g(4)=6 nên (2) $\Leftrightarrow y=4$

Suy ra $y = x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \quad (1) \\ 3y\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) + (4y+2)\left(\sqrt{1 + x + x^2} + 1\right) = 0 \quad (2) \end{cases}$

Bài giải:

Biến đổi PT $(1) \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2 - y + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = x^2 + 1 \end{array}\right.$

x = y thế vào PT (2) ta được:

$$3x\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) + (4x+2)\left(\sqrt{1 + x + x^2} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)\left(\sqrt{(2x+1)^2 + 3} + 2\right) = (-3x)\left(2 + \sqrt{(-3x)^2 + 3}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(2x+1) = f(-3x)$$

Xét $f(t) = t\left(\sqrt{t^2 + 3} + 2\right)$ có $f'(t) > 0, \ \forall t.$

f là hàm số đồng biến nên: $2x + 1 = -3x \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{5} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{5}$

- $y = x^2 + 1$ thế vào

  (2) $3(x^2+1)\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) + \left(4x^2 + 1 + 2\right)\left(\sqrt{1 + x + x^2} + 1\right) = 0$

Vế trái luôn dương, PT vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $\left(-\dfrac{1}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$.

Bài 3: Giải hệ phương trình sau . $\begin{cases} x^3+y^3+3(x+y)=6y(y-2)+14\,(1) \\ 27x^3+27x^2+20x+4=4.\sqrt[3]{y+2x-1}\,(2) \end{cases}$

Bài giải:

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3+3x=-y^3+6y^2-15y+14$

$\Leftrightarrow x^3+3x=(2-y)^3+3(2-y)$

Xét hàm số: $f(t)=t^3+3t$ liên tục trên R.

Ta có $f'(t)=3t^2+3>0$ với $(\forall t\in R)\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên R.

$pt: f(x)=f(2-y)\Leftrightarrow x=2-y\Leftrightarrow y=2-x$

Thế y = 2-x vào phương trình (2) ta được.

$27x^3+2x^2+20x+4=4\sqrt[3]{1+x}\Leftrightarrow (3x+1)^3+4(3x+1)=x+1+4\sqrt[3]{x+1}$

Xét hàm số: $g(t)=t^3+4t$ liên tục trên R.

Ta có $g'(t)=3t^2+4>0\ \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên R.

Suy ra: $g(3x+1)=g(\sqrt[3]{x+1})\Leftrightarrow 3x+1=\sqrt[3]{x+1}\Leftrightarrow 27x^3+27x^2+9x+1=x+1$

$\Leftrightarrow 27x^3+27x^2+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=2 \\ 27x^2+27x+8=0 (vn) \end{array}\right.$
Vậy hệ phương trình có nghiệm (x;y)=(0;2)

Bài 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}+x+5=2y+\sqrt{y-2} \\ \dfrac{(x-8)(y+1)}{x^2-4x+7}=(y-2)\left(\sqrt{x+1}-3\right) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 2 \end{cases}$

Xét phương trình: $\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}+x+5=2y+\sqrt{y-2}$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+1} \geq 0 \\ b=\sqrt{y-2} \geq 0 \end{cases}$ ta được phương trình: $a+ab+x+1=2y-4+b$

$\Leftrightarrow a^2-2b^2+ab+a-b=0 \Leftrightarrow a^2-b^2+ab-b^2+a-b=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b)+b(a-b)+(a-b)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+2b+1)=0 \Leftrightarrow a=b$

Từ phương trình (1) ta có $\sqrt{x+1}=\sqrt{y-2} \Leftrightarrow y=x+3$ thay vào phương trình (2) ta

được
$\dfrac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=(x+1)\left(\sqrt{x+1}-3\right)$ $\Leftrightarrow \dfrac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=\dfrac{(x+1)(x-8)}{\sqrt{x+1}+3}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ \dfrac{x+4}{x^2-4x+7}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}+3} \end{array}\right.$
Tiếp tục giải phương trình $\dfrac{x+4}{x^2-4x+7}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}+3}$ $\Leftrightarrow (x+4)\left(\sqrt{x+1}+3\right)=(x+1)(x^2-4x+7)$ $\Leftrightarrow \left((x+1)+3\right)\left(\sqrt{x+1}+3\right)=\left((x-2)+3\right)(x^2-4x+4+3)$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}^2+3\right)\left(\sqrt{x+1}+3\right)=\left((x-2)^2+3\right)\left((x-2)+3\right)$ Xét hàm số $f(t)=(t^2+3)(t+3)=t^3+3t^2+3t+9, t\geq 0$ $f'(t)=3t^2+3t+3>0, t\geq 0$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ Từ $f\left(\sqrt{x+1}\right)=f\left((x-2)\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=x-2$
Giải phương trình $\sqrt{x+1}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x+1=x^2-4x+4\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x^2-5x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ +) Với $x=8\Rightarrow y=11$ +) Với $x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow y=\frac{11+\sqrt{13}}{2}$ Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là: $(8;11),\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2},\frac{11+\sqrt{13}}{2}\right)$

Bài 5 : Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2 (1)\\ 12y^2-10y+2=2\sqrt[3]{x^3+1} (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Bài giải:

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{(-2y)^2+4}+(-2y)$ (*).

Xét hàm số đặc trưng $f(t)=\sqrt{t^2+4}+t \Rightarrow f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}+1=\dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}>\dfrac{t+|t|}{\sqrt{t^2+4}}\geq 0.$

Suy ra f(t) là hàm số đồng biến trên R. Từ (*) suy ra: $f(x)=f(-2y)\Rightarrow x=-2y$.

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$3x^2+5x+2=2\sqrt[3]{x^3+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3+2(x+1)=(x^3+1)+2\sqrt[3]{x^3+1} \quad (**)$$

Xét hàm số $g(t)=t^3+2t$ ta thấy g(t) đồng biến trên R nên từ (**) suy ra

$x+1=\sqrt[3]{x^3+1}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$. Vậy hệ có hai nghiệm là $(-1;\frac{1}{2});\ (0;0)$.

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (y+1)^2+y\sqrt{y^2+1}=x+\dfrac{3}{2} (1) \\ x+\sqrt{x^2-2x+5}=1+2\sqrt{2x-4y+2} (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Bài giải:

Đk: $2x-4y+2\geq 0$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow 2x-4y+2=\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2$ thế vào PT (2) ta được

---

$$(x-1)+\sqrt{(x-1)^2+4}=2\sqrt{\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2}$$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}=y+\sqrt{y^2+1}$ (*) (vì $\sqrt{y^2+1}+y>|y|+y\geq 0$)

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ trên $\mathbb{R}$

$f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$, do $\sqrt{t^2+1}+t>|t|+t\geq 0,\forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, theo (*) ta có $f\left(\frac{x-1}{2}\right)=f(y)$

$\Rightarrow x=2y+1$

Với $x=2y+1$ thay vào (1) ta có:

$\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2=4\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}+y=2\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}=2-y\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}\Rightarrow x=\frac{5}{2}$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{5}{2};\frac{3}{4}\right)$

Bài 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x-2}.\sqrt{y}+2\sqrt{(y+8)x}=y+4x\\ xy+2x-11+\sqrt{12-x+y}+\sqrt{7-3x}=0\end{cases}$.

Bài giải:

Điều kiện $2\leq x\leq\frac{7}{3}, y\geq 0$

Ta có

$2\sqrt{x-2}.\sqrt{y}=\sqrt{4(x-2)}\sqrt{y}\leq\frac{4x-8+y}{2}$. Dấu "=" xẩy ra khi y=4x–8

$2\sqrt{(y+8)x} = \sqrt{(y+8)4x} \le \dfrac{4x+y+8}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi y=4x–8

Suy ra $2\sqrt{x-2}.\sqrt{y} + 2\sqrt{(y+8)x} \le y + 4x$. Dấu "=" xảy ra khi y=4x–8

Như vậy, pt(1) $\Leftrightarrow y = 4x - 8$. Thế vào pt(2) ta có:

$$4x^2 - 6x - 11 + \sqrt{4+3x} + \sqrt{7-3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^2 - x - 3\right) + \left(\sqrt{4+3x} - x - 1\right) + \left(\sqrt{7-3x} - x + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^2 - x - 3\right) - \frac{\left(x^2 - x - 3\right)}{\sqrt{4+3x} + x + 1} - \frac{\left(x^2 - x - 3\right)}{\sqrt{7-3x} + x - 2} = 0 \quad \left(\text{do } x \in \left[2; \frac{7}{3}\right]\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x - 3\right)\left[4 - \frac{1}{\sqrt{4+3x} + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{7-3x} + x - 2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 3 = 0 \qquad (*) \\ \dfrac{1}{\sqrt{4+3x} + x + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{7-3x} + x - 2} = 4 \ (3) \end{array}\right.$$

$$+\ pt(*) \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

Đối chiếu điều kiện ta có $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

Hệ có nghiệm $\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}; 2\sqrt{13} - 6\right)$

+ Xét pt(3)

$\forall x \in \left[2;\frac{7}{3}\right] \Rightarrow \sqrt{4+3x}+x+1 \geq 3+\sqrt{10} > 6 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4+3x}+x+1} < \frac{1}{6}$

Xét hàm số $\forall x \in \left[2;\frac{7}{3}\right): g(x)=\sqrt{7-3x}+x-2$

$\Rightarrow g'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{7-3x}}+1 = \frac{2\sqrt{7-3x}-3}{2\sqrt{7-3x}} < 0$

$\Rightarrow g(x) \geq g\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{7-3x}+x-2} \leq 3$. Do đó,

$\forall x \in \left[2;\frac{7}{3}\right]: \frac{1}{\sqrt{4+3x}+x+1}+\frac{1}{\sqrt{7-3x}+x-2} \leq \frac{1}{6}+3 < 4$ hay pt(3) vô nghiệm

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};2\sqrt{13}-6\right)$

Bài 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1) \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 & (2) \end{cases}$

Bài giải:

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của hệ, chia cả hai vế của (1) cho x^3 ta được

$(1) \Leftrightarrow 2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3} = 2(2-y)\sqrt{3-2y}$

$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right) = (3-2y)\sqrt{3-2y}+\sqrt{3-2y} \quad (*)$

Xét hàm $f(t)=t^3+t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$(*) \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x}=\sqrt{3-2y} \qquad (3)$

Thế (3) vào (2) ta được $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{15-x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}-3+2-\sqrt[3]{15-x}=0$

$$\Leftrightarrow (x-7)\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}+\frac{1}{4-2\sqrt[3]{x+15}+\left(\sqrt[3]{x+15}\right)^2}}_{>0}\right)=0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(7;\dfrac{111}{98}\right)$.

Bài 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x+y+6}=1-y & (1) \\ 9\sqrt{1+x}+xy\sqrt{9+y^2}=0 & (2) \end{cases}$

Bài giải:

Đk: $\begin{cases} x+y+6\ge 0 \\ x\ge -1 \end{cases}$

+) Nếu $y\ge 0$, để hệ có nghiệm thì $1\ge y\ge 0$.

$$\left.\begin{array}{l} VT(1)=2\sqrt{x+y+6}\ge 2\sqrt{5} \\ VP(1)=1-y\le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow VT(1)>VP(1) \text{ hệ vô nghiệm.}$$

+) Nếu y < 0, từ (2) suy ra x > 0

$$9\sqrt{1+x}+xy\sqrt{9+y^2}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{9+\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2}=(-y)\sqrt{9+(-y)^2}\,(3)$$

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{9+t^2}, t>0; f'(t)=\dfrac{9+2t^2}{\sqrt{9+t^2}}>0 \forall t>0$

$$(3) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)=f(-y) \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}}=-y \Leftrightarrow x=\frac{9}{y^2}$$

Thế vào pt(1) ta có phương trình $2\sqrt{\dfrac{9}{y^2}+y+6}=1-y$ (4). Hàm số $g(y)=2\sqrt{\dfrac{9}{y^2}+y+6}$ đồng biến trên $(-\infty;0)$; hàm số *h(y)* = 1 – *y* nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và phương trình có ngiệm y = –3 nên pt(4) có nghiệm duy nhất y = –3. Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (1; –3).

Bài 10: Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\sqrt{y-1}+2y^2+1=\sqrt{x}+x^2+xy+3y(1)\\ \sqrt{x^2+y}+\sqrt{3}=\sqrt{y^2-3x}+\sqrt{7}(2)\end{cases}$

Bài giải:

Đk: $y\ge 1, x\ge 0, y^2\ge 3x$

Từ pt (2) ta có : $(y-x-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+2y-1+x\right)=0$

Suy ra, y = x + 1

Thay vào pt (1) ta được $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$

Xét hàm số: $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$

Chứng minh hàm số đồng biến

Ta có nghiệm duy nhất x = 2

Vậy nghiệm của hệ là (2;3)

Bài 11: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+3}+\sqrt{xy+x+3y+3}+x+1=2y+\sqrt{y+1}\,(1)\\(x-3)(y+1)=(y-1)(x^2-2x+3)\left(\sqrt{x+1}-2\right)(2)\end{cases}$

Bài giải:

Pt(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)(y+1)}+x-2y+1=\sqrt{y+1}$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x+3}\\b=\sqrt{y+1}\end{cases}(a,b\geq 0)$, (1) trở thành: $a^2-2b^2+ab+a-b=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a+2b+1=0\end{array}\right.$

+ $a+2b+1=0$ vô nghiệm do $a,b\geq 0$

+ Xét a = b $\Rightarrow y=x+2$ thay vào (2) ta được:

$$(x-3)(x+3)=(x+1)(x^2-2\text{x}+3)\left(\sqrt{x+1}-2\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3)=(x+1)(x^2-2\text{x}+3).\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\Rightarrow y=5(tm)\\(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)=(x+1)(x^2-2\text{x}+3)(*)\end{array}\right.$$

(*) $\Leftrightarrow\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2+2\right]\left(\sqrt{x+1}+2\right)=\left[(x-1)+2\right]\left[(x-1)^2+2\right]$

Xét hàm số $f(t)=(t+2)(t^2+2)$, $t\geq 0$ **có** $f'(t)>0\forall t\in\mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ đồng biến mà $f\left(\sqrt{x+1}\right)=f(x-1)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=x-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 5$

Vậy hpt có nghiệm: $(3;5)$

Bài 12: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8\sqrt{2x-1}\left(2x-\sqrt{2x-1}\right) = y\left(y^2-2y+4\right)(1) \\ 4xy + 2\sqrt{(y+2)(y+2x)} = 5y + 12x - 6(2) \end{cases}$

Bài giải:

ĐK: $\begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ (y+2)(y+2x) \ge 0 \end{cases}$. Từ pt (1) $\Rightarrow$ để pt có nghiệm thì $y \ge 0$

PT $(1) \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x-1}\right)^3 - 2\left(2\sqrt{2x-1}\right)^2 + 4\left(2\sqrt{2x-1}\right) = y^3 - 2y^2 + 4y$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 + 4t$ $(t \ge 0)$ có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 4 = 2t^2 + (t-2)^2 > 0$ $\forall t \ge 0$ nên *f(t)* luôn đồng biến

Từ pt (*) $\Rightarrow f\left(2\sqrt{2x-1}\right) = f(y) \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = y$

Thay vào pt (2) ta được pt $y^3 + 2(y+2)\sqrt{y+2} = 3y(y+2)$

Đặt $z = \sqrt{y+2}$ ta được pt $y^3 + 2z^3 = 3yz^2 \Leftrightarrow (y-z)\left(y^2 + yz - 2z^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = -2z & (loại) \\ y = z & (t/m) \end{array}\right.$

Với y = z ta được $y = \sqrt{y+2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$ (t/m)

TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 13: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\left(x^2-y^2\right)+x^2=2\sqrt{\left(x-y^2\right)^3} \\ \sqrt{x+\dfrac{y^2+1}{x}}=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2\left(x-y^2\right)}+x^2+y^2+2}{2x+1} \end{cases} \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Bài giải:

ĐK: $x\ge y^2\ge 0$

Từ PT(1) tìm được $x=\sqrt{x-y^2}\Rightarrow x^2=x-y^2$

Thế vào (2) đưa về pt chỉ có ẩn x

Đưa được về hàm $\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)^3+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=1+\dfrac{2}{x}+\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}}$

Xét hàm $f\left(t\right)=t^3+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ từ đó được pt $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}}$ giải được

$x=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\left(L\right),\ x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\ \left(N\right)$

Nghiệm $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$

Bài 14: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2\right)\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right)=8x^2y^3 & (1) \\ x^2y-x+2=0 & (2) \end{cases}$

Bài giải:

+) Với $y \le 0$ thì $VT(1) > 0, VP(1) \le 0$ $\Rightarrow$ Hệ phương trình chỉ có nghiệm (x;y) với $y > 0$

+) vì $y > 0$ nên từ phương trình (2) của hệ suy ra $x > 2$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - 3x^2y + 2 = 2x^2y\left(\sqrt{4y^2+1} - 1\right)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + 2 = 2x^2y\sqrt{4y^2+1} + x^2y \qquad (3)$$

Thay $2 = x - x^2y$ vào phương trình (3) ta được:

$$\sqrt{x^2+1} + x = 2x^2y\sqrt{4y^2+1} + 2x^2y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} = 2y\sqrt{4y^2+1} + 2y$$

+) xét hàm số: $f(t) = t\sqrt{1+t^2} + t$ với $t > 0$

$$f'(t) = \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} + 1 > 0 \text{ với mọi } t > 0$$

$\Rightarrow$ f(t) là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mà $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2y) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2y \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}$

+) Thay $xy = \frac{1}{2}$ vào phương trình (2) của hệ ta có: $x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{8}$

Thử lại thấy $\begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{1}{8} \end{cases}$ thỏa mãn hệ phương trình đã cho.

Kết luận: Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(4;\frac{1}{8}\right)$

Bài 15:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3+3y^2+y+4x^2-22x+21=(2x+1)\sqrt{2x-1} & (1) \\ 2x^2-11x+9=2y & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Bài giải:

Điều kiện: $x \geq 1/2 (*)$

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) nhân với 2 ta được:

$$y^3+3y^2+y+3=(2x+1)\sqrt{2x-1}-4y \Leftrightarrow y^3+3y^2+5y+3=(2x+1)\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow y^3+3y^2+3y+1+2y+2=(2x-1+2)\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^3+2(y+1)=\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+2\sqrt{2x-1} \quad (3)$$

Xét hàm số: $\mathrm{f}(t)=t^3+2t$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có: $\mathrm{f}(t)=3t^2+2>0$ với $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{f}(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó: $(3) \Rightarrow \mathrm{f}(y+1)=\mathrm{f}\left(\sqrt{2x-1}\right) \Leftrightarrow y+1=\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow y=\sqrt{2x-1}-1$

Thay vào (2) ta được: $2x^2-11x+9=2\sqrt{2x-1}-2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=2x^2-11x+11$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-11x+11 \geq 0 & (**) \\ 4(2x-1)=\left(2x^2-11x+11\right)^2 & (4) \end{cases}$$

$$(4) \Leftrightarrow 8x-4=4x^4+121x^2+121-44x^3+44x^2-242x$$

$$\Leftrightarrow 4x^4-44x^3+165x^2-250x+125=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(4x^3-40x^2+125x-125\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-5)\left(4x^2-20x+25\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & (tm(*),(**)) \\ x=5 & (tm(*),(**)) \\ x=5/2 & (ktm(*),(**)) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=5 \Rightarrow y=2 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)\in\{(1;0),(5;2)\}$

Bài 16: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+x^2y^2-y^2=y^3+x^2y+x^2 \\ 2y^3-\sqrt{5-2x^2}-1 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Bài giải:

Điều kiện: $|x|\le\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x^2-1-y)(x^2+y^2)=0\Leftrightarrow x=y=0$ hoặc $x^2=y+1$

Trường hợp $x=y=0$ thế vào (2) không thoả mãn.

Trường hợp $x^2=y+1$ thế vào (2): $2y^3-\sqrt{3-2y}-1=0$ (3)

Xét hàm $f(t)=2t^3-\sqrt{3-2t}-1; t\in\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]; ma` f(1)=0$

Suy ra phương trình (3) có nghiệm duy nhất: $y=1$. Với $y=1\Rightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ (thoả điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(\sqrt{2};1);(-\sqrt{2};1)$

Bài 17: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+x+\sqrt{x+2}=2y^2+y+\sqrt{2y+1} \\ x^2+2y^2-2x+y-2=0 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Bài giải:

Điều kiện: $x \ge -2, y \ge -\dfrac{1}{2}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $x^2 = -2y + 2x - y + 2$

Thế vào phương trình thứ nhất, ta được

$$x^2 + (-2y^2 + 2x - y + 2) + x + \sqrt{x+2} = 2y^2 + y + \sqrt{2y+1}$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 + \sqrt{x+2} = 4y^2 + 2y + \sqrt{2y+1}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+1) + \sqrt{(x+1)+1} = (2y)^2 + 2y + \sqrt{2y+1} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t + \sqrt{t+1}$ với $t \ge -1$.

Ta có $f'(t) = 2t + 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}; f''(t) = 2 - \dfrac{1}{4\sqrt{(t+1)^3}}; f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{3}{4}$

Suy ra $f'(t) \ge f'\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{2} > 0$ với mọi $t \in (-1; +\infty)$. Do đó hàm f(t) đồng biến trên $[-1; +\infty)$.

Suy ra phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(2y) \Leftrightarrow x + 1 = 2y \Leftrightarrow x = 2y - 1$.

Thế vào pt thứ hai của hệ, ta

được $(2y-1)^2 + 2y^2 - 2(2y-1) + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 6y^2 - 7y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{1}{6} \end{array}\right.$

Suy ra nghiệm (x;y) của hệ là (1;1), $\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{6}\right)$.

Bài 18: Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2\\ 12y^2-10y+2=2\sqrt[3]{x^3+1}\end{cases}$

Bài giải:

Phương trình đầu tiên của hệ tương đương với:

$$x+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{(-2y)^2+4}+(-2y)$$

$\Leftrightarrow f(x)=f(-2y)$ với $y=f(t)=\sqrt{t^2+4+t}$

Ta có $f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{\sqrt{t^2+4}+t}{\sqrt{t^2+4}}>\frac{|t|+t}{\sqrt{t^2+4}}\geq 0,\forall t\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biết trên R.

Từ đó $f(x)=f(-2y)\Leftrightarrow x=-2y$

Facebook cá nhân : https://www.facebook.com/quang.manngoc

Thế $x=-2y$ vào phương trình sau của hệ phương trình đã cho ta được:

$$3x^2+5x+2=2^3\sqrt{x^3+1}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^3+2(x+1)=(x^3+1)+2^3\sqrt{x^3+1}$$ với $y=g(t)=t^3+2t$
$$g(x+1)=g\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)$$

Ta có $g'(t)=3t^2+2>0,\forall t\Rightarrow g(t)$ là hàm số đồng biến trên R. Từ đó:

$$g(x+1)=g\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)$$
$$\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{x^3+1}$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+3x=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow y=2 \\ x=0\Rightarrow y=0 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là:(-1;2),(0;0)

Bài 19: Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2x+2)\sqrt{2x-1}=y^3+3y & (1)\\ y^2-xy+5=5x-6y & (2)\end{cases}$

Bài giải:

- Đk $x\ge\frac{1}{2}$, $(1)\Leftrightarrow(2x-1)\sqrt{2x-1}=y^3+3y\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+3\sqrt{2x-1}=y^3+3y$; xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ *trên* $\mathbb{R}$, *có* $f'(t)=3t^2+3>0\forall t\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$,pt(1) trở thành $f(y)=f\left(\sqrt{2x-1}\right)\Leftrightarrow y=\sqrt{2x-1}$;
- Pt(2) $\Leftrightarrow(y+5)(y-x+1)=0\Leftrightarrow y=-5; y=x-1;$

- Với $y=-5\Rightarrow\sqrt{2x-1}=-5,$ vô nghiệm

Với $y=x-1\Rightarrow\sqrt{2x-1}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ 2x-1=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=2+\sqrt{2}$

Với $x=2+\sqrt{2}\Rightarrow y=1+\sqrt{2}.$ nghiệm của hệ là $(x;y)=\left(2+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$

Bài 20: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{2x+y+5}-\sqrt{3-x-y}=x^3-3x^2-10y+6\\ x^3-6x^2+13x=y^3+y+10\end{cases}$

Bài giải:

Phương trình thứ 2 của hệ được biến đổi thành:

$(x-2)^3+(x-2)=y^3+y(*)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ là hàm số đồng biến trên R. Ta suy ra (*)$\Leftrightarrow y=x-2$

Thế vào phương trình đầu của hệ: $\sqrt{3x+3}-\sqrt{5-2x}=x^3-3x^3-10x+26$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+3}-3\right)+\left(1-\sqrt{5-2x}\right)=x^3-3x^2-10x+24$

$\Leftrightarrow\frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2(x-2)}{1+\sqrt{5-2x}}=(x-2)\left(x^2-x-12\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2}{1+\sqrt{5-2x}}=x^2-x-12(1)\end{array}\right.$

Phương trình (1) vô nghiệm vì với $-1\le x\le\frac{5}{2}$ thì $x^2-x-12<0.$

Từ đó suy ra hệ có nghiệm duy nhất $x=2\quad x=2;y=0$

TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 21: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + xy^2 - 2x^2y - 2y^3 + x - 2y = 0(1) \\ \sqrt[3]{6y+5} = x^3 + 3x^2 + 2y - 3(2) \end{cases}$

Bài giải:

$(1) \Leftrightarrow (x^3 - 2x^2y) + (xy^2 - 2y^3) + (x - 2y) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2y) + y^2(x-2y) + (x-2y) = 0$
$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 1)(x - 2y) = 0 \Leftrightarrow 2y = x$ (Vì $x^2 + y^2 + 1 > 0, \forall x, y \in R$).

Thay vào (2), ta có: $\sqrt[3]{3x+5} = x^3 + 3x^2 + 2y - 3 \Leftrightarrow 3x + 5 + \sqrt[3]{3x+5} = (x+1)^3 + (x+1)$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, \in R \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in R$. Suy ra hàm số f(t) đồng biến trên R.

(*) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{3x+5}\right) = f(x+1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+5} = x+1 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \\ x = -2 \Rightarrow y = -1 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$; (-2;-1).

Bài 22: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3y\sqrt{2+x} + 8\sqrt{2+x} = 10y - 3xy + 12(1) \\ 5y^3\sqrt{2-x} - 8 = 6y^2 + xy^3\sqrt{2-x}(2) \end{cases}$

Bài giải:

$\begin{cases} 3y\sqrt{2+x}+8\sqrt{2+x}=10y-3xy+12(1) \\ 5y^3\sqrt{2-x}-8=6y^2+xy^3\sqrt{2-x}(2) \end{cases}$ Điều kiện: x ∈[-2;2] Nhận xét y = 0 không thỏa mãn phương trình (2) (2) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{2-x}\right)^3+3\sqrt{2-x}=\left(\frac{2}{y}\right)^3+3\left(\frac{2}{y}\right)$ (*)
Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ trên R $\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên R (*) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2-x}\right)=f\left(\frac{2}{y}\right)\Leftrightarrow\sqrt{2-x}=\frac{2}{y}$ thế vào (1) (1) $\Leftrightarrow 3y\sqrt{2+x}+8\sqrt{2}+x=10y-3xy+12 \Leftrightarrow 3\sqrt{2+x}+4\sqrt{2+x}\sqrt{2-x}=10y-3x+6\sqrt{2-x}$ $\Leftrightarrow 3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}+3x-10=0$ (**)
Đặt $\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}=t \Rightarrow t^2=10-3x-4\sqrt{4-x^2}$ Phương trình (**) trở thành $3t-t^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=3 \end{array}\right.$ - với t = 0: $x=\frac{6}{5}; y=\sqrt{5}$ - với t = 3: $\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}=3$ phương trình vô nghiệm, vì vế trái ≤ 2.

Bài 23: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4^{xy}+(xy-2)2^{xy}+xy-3=0 \\ \log_2^2(x-y)+\log_2 x.\log_2 y=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Bài giải:

Điều kiện: x > y > 0

Đặt t = xy > 0, phương trính thứ nhất của hệ trở thành

$4^t+(t-2)2^t+t-3=0 \Leftrightarrow (2^t+1)(2^t+t-3)=0 \Leftrightarrow 2^t+t-3=0$, vì $2^t+1>0$

Vì hàm $f(t)=2^t+t-3$ đồng biến trên R, mà f(1) = 0 nên $2^t+t-3=0 \Leftrightarrow t=1$. Khi đó ta có xy = 1, hay $y=\frac{1}{x}$.

Thế vào pt thứ hai của hệ ta được:

$$\log_2^2\left(x-\frac{1}{x}\right)+\log_2\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \log_2^2\frac{x^2-1}{x}=\log_2^2 x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2\frac{x^2-1}{x}=\log_x x \\ \log_2\frac{x^2-1}{x}=-\log_2 x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2-1}{x}=x \\ \frac{x^2-1}{x}=\frac{1}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=x^2 \\ x^2-1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$$

Suy ra hệ của nghiệm là $x=\sqrt{2}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 24:

Giải hệ phương trình Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2+4xy+y^2+2x+y-2=0 \\ 8\sqrt{1-2x}+y^2-9=0 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Bài giải:

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2+4xy+y^2+2x+y-2=0 \quad (1) \\ 8\sqrt{1-2x}+y^2-9=0 \quad (2) \end{cases}$ Điều kiện: 1-2x $\geq 0 \Leftrightarrow$ x $\leq \frac{1}{2}$. Đặt $t=2x+y$, phương trình (1) trở thành: $$t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \end{array}\right.$$
Nếu t = 1 thì $2x+y=1 \Leftrightarrow 1-2x=y\geq 0$. Thế vào phương trình (2) ta được phương trình $8\sqrt{y}+y^2-9=0$ Đặt $u=\sqrt{y}\geq 0$, phương trình trở thành: $u^4+8u-9=0 \Leftrightarrow (u-1)(u^3+u^2+u+9)=0 \Leftrightarrow u=1$. Khi đó hệ có nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$
Nếu t = -2 thì $2x+y=-2 \Leftrightarrow 1-2x=y+3\geq 0$. Thế vào phương trình (2) ta được phương trình $8\sqrt{y+3}+y^2-9=0 \Leftrightarrow 8\sqrt{y+3}+(y-3)(y+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3 \\ 8+(y-3)\sqrt{y+3}=0 \end{array}\right.$ Với $y=-3$ thì hệ có nghiệm $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-3 \end{cases}$
Xét phương trình $8+(y-3)\sqrt{y+3}=0 \quad (3)$ Đặt $v=\sqrt{y+3}\geq 0$, phương trình (3) trở thành: $v^3-6v+8=0$ Xét hàm số $f(v)=v^3-6v+8$, ta có: $f'(v)=3v^2-6$ và $f'(v)=0 \Leftrightarrow v=\pm\sqrt{2}$ Hàm số $f(v)$ đạt cực đại tại $(-\sqrt{2};8+4\sqrt{2})$, đạt cực tiểu tại $(\sqrt{2};8-4\sqrt{2})$ Vì $f(0)=8>0$ và $8-4\sqrt{2}>0$ nên $f(v)=0$ không có nghiệm $v\geq 0$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-3 \end{cases}$

Bài 25: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^4-(x-2)y^2-x-4=0 \\ x^3+3x^2+4x=2(4y^3+y-1) \end{cases} (x; y\in\mathbb{R})$

Bài giải:

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $(x+1)^3+x+1=(2y)^3+2y$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$

Ta có $f'(t)=3t^2+t, f'(t)>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm f(t) đồng biến trên R. Khi đó phương trình

$(1)\Leftrightarrow f(x+1)=f(2y)\Leftrightarrow x+1=2y\Leftrightarrow x=2y-1$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$y^4-2y^3+3y^2-2y-3=0$

$\Leftrightarrow (y^2-y)^2+2(y^2-y)-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2-y=1 \\ y^2-y=-3 \end{array}\right.\Leftrightarrow y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Suy ra nghiệm (x; y) của hệ là $\left(-\sqrt{5};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(\sqrt{5};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Bài 26: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3\left(4y^2+1\right)+x\sqrt{2y}=3 & (1) \\ 2y+\sqrt{4y^2+1}=x+\sqrt{x^2+1} & (2) \end{cases}$

Bài giải:

Điều kiện: $y \geq 0$

$PT(1) \Leftrightarrow x\left[x^2\left(4y^2+1\right)+\sqrt{2y}\right]=3 \Rightarrow x>0$

Khi đó, $PT(2) \Leftrightarrow 2y+\sqrt{4y^2+1}=x+\sqrt{x^2+1}$ (3)

Xét hàm $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ trên $[0;+\infty)$

Có $f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0 \forall t>0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Khi đó, $PT(3) \Leftrightarrow f(2y)=f(x) \Leftrightarrow 2y=x$

Thay vào phương trình (1) ta được phương trình: $x^5+x^3+x\sqrt{x}=3$

Đặt $t=\sqrt{x}>0$ có hàm số $g(t)=t^{10}+t^6+t^3$ có $g'(t)=10t^9+6t^5+3t^2>0$ do $t>0$

Mà $g(1)=3 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$

Với $x=1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$. Hệ phương phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$

Bài 27: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3+5x^2-2y^2+10x-3y+6=0(1) \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{4-y}=x^3+y^2-4x-2y(2) \end{cases}$

Bài giải:

Điều kiện $x \geq -2; y \leq 4$

$(1) \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 + 10x + 6 = y^3 + 2y^2 + 3y$

$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 2(x+1)^2 + 3(x+1) = y^3 + 2y^2 + 3y$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t^2 + 3t,\quad f'(t) = 3t^2 + 4t + 3 > 0 \quad \forall t \in R$

Suy ra $f(x+1) = f(y) \Rightarrow y = x+1$ thay vào pt (2) ta được

Phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = x^3 + x^2 - 4x - 1$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}\right) - 3 = x^3 + x^2 - 4x - 4 \Leftrightarrow \frac{2\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} - 2\right)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3} = (x+1)(x^2-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left[(x+2)(3-x) - 4\right]}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2\right)} = (x+2)(x^2 - x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(-x^2 + x + 2)}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2\right)} - (x+2)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)\left[x + 2 + \frac{2}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2\right)}\right] = 0$$

$$> 0 \ (vi\ x \geq -2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x; y) = (2;3), \quad (x; y) = (-1; 0)$

Bài 28:

Giải hệ phương trình Giải hệ PT $\begin{cases} xy(x+1)=x^3+y^2+x-y \\ 3y\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4y+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0 \end{cases}, (x, y\in\mathbb{R})$

Bài giải:

ĐKXĐ $\forall x\in\mathbb{R}$

Ta có $xy(x+1)=x^3+y^3+x-y \Leftrightarrow x^3-x^2y+y^2-xy+x-y=0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 0y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=x^2+1 \end{array}\right.$$

Với $y=x^2+1$ thay vào PT thứ 2 ta được

$3(x^2+1)\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x^2+6)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$. Dễ thấy PT vô nghiệm.

Với $y=x$ thay vào PT thứ 2 ta được $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow 3\text{x}\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=-(2x+1)\left(\sqrt{3+(2x+1)^2}+2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=(-2x+1)\left(\sqrt{3+(-2x-1)^2}+2\right)$$

Xét hàm số $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+2}+2\right)$ ta có $f'(t)=\sqrt{t^2+2}+2+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0$ suy ra hàm số đồng biến

Từ đó suy ra $3x=-2x-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$. Vậy HPT có nghiệm $(x;y)=\left(-\dfrac{1}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$

Bài 29: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}+x+5=2y+\sqrt{y-2}\\ \dfrac{(x-8)(y+1)}{x^2-4x+7}=(y-2)\left(\sqrt{x+1}-3\right)\end{cases}$

Bài giải:

Điều kiện $x\ge -1; y\ge 2$

Đặt $\sqrt{x+1}=a;\sqrt{y-2}=b\left(a,b\ge 2\right)$, từ (1) ta có:

$$a+ab+a^2-1+5=2\left(b^2+2\right)+b\Leftrightarrow a-b+ab-b^2+a^2-b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(1+2a+b)=0$$

$\Leftrightarrow a=b$ (do $a,b\ge 0\Rightarrow 1+2a+b>0$)

$$\Rightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{y-2}\Leftrightarrow y=x+3$$

Thế vào (2) ta được:

$$\frac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=(x+1)\left(\sqrt{x+1}-3\right)\Leftrightarrow \frac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=\frac{(x+1)(x-8)}{\sqrt{x+1}+3}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8\\ \dfrac{x+4}{x^2-4x+7}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}+3}(*)\end{array}\right.$$

\+ $x=8\Rightarrow y=11;$

\+ $(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}+3\right)(x+4)=(x+1)\left(x^2-4x+7\right)$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}+3\right)\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2+3\right]=\left[(x-2)+3\right].\left[(x-2)^2+3\right](**)$$

Xét hàm số $f(t)=(t+3)(t^2+3)$ với $t\in\mathbb{R}$ có $f'(t)=3(t+1)^2\ge 0\forall t\in\mathbb{R}$ nên f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $(**)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right)=f(x-2)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x+1=x^2-4x+4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x^2-5x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}(T/M)$

$x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm (x;y) là $(8;11)$ và $\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2};\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\right)$

Bài 30: Giải hệ phương trình $\begin{cases}8x^3+\sqrt{y-2}=y\sqrt{y-2}-2x\\ \left(\sqrt{y-2}-1\right)\sqrt{2x+1}=8x^3-13(y-2)+82x-29\end{cases}$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases}2x+1\ge 0\\ y-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\dfrac{1}{2}\\ y\ge 2\end{cases}$

Phương trình $8x^3+\sqrt{y-2}=y\sqrt{y-2}-2x\Leftrightarrow(2x)^3+(2x)=\left(\sqrt{y-2}\right)^3+\sqrt{y-2}$

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=t^3+t,f'(t)=3t^2+1>0\forall t$

Hàm số f(t) liên tục và đồng biến trên R. Suy ra: $2x=\sqrt{y-2}$

Thế $2x=\sqrt{y-2}$ vào phương trình thứ hai ta được:

$(2x-1)\sqrt{2x+1}=8x^3-52x^2+82x-29$

$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{2x+1}=(2x-1)\left(4x^2-24x+29\right)$

$\Leftrightarrow (2x-1)\left(\sqrt{2x+1}-4x^2+24x-29\right)=0 \Leftrightarrow (2x-1)\left(\sqrt{2x+1}-4x^2+24x-29\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=3 \\ \sqrt{2x+1}-4x^2+24x-29=0 \end{array}\right.$$

Giải phương trình: $\sqrt{2x+1}-4x^2+24x-29=0$

Đặt $t=\sqrt{2x+1}, t\ge 0 \Rightarrow 2x=t^2-1$

Ta được phương trình: $t-\left(t^2-1\right)^2+12\left(t^2-1\right)-29=0 \Leftrightarrow t^4-14t^2-t+42=0$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t+3)\left(t^2-t-7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-3(loai) \\ t=\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}(loai) \\ t=\dfrac{1+\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$$

Với $t=2 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2} \Rightarrow y=11$

Với $t=\dfrac{1+\sqrt{29}}{2} \Rightarrow x=\dfrac{13+\sqrt{29}}{4} \Rightarrow y=\dfrac{103+13\sqrt{29}}{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có3cặp nghiệm: $\left(\dfrac{1}{2};3\right);\left(\dfrac{3}{2};11\right);\left(\dfrac{13+\sqrt{29}}{4};\dfrac{103+13\sqrt{29}}{2}\right)$

Bài 31: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1) \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 & (2) \end{cases}$

Bài giải:

Ta thấy x = 0 không phải là nghiệm của hệ, chia cả hai vế của (1) cho x^3 ta được

$$(1) \Leftrightarrow 2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}=2(2-y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right)=(3-2y)\sqrt{3-2y}+\sqrt{3-2y} \quad (*)$$

Xét hàm $f(t)=t^3+t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(*) \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=\sqrt{3-2y} \qquad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{15-x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}-3+2-\sqrt[3]{15-x}=0$

$$\Leftrightarrow (x-7)\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}+\frac{1}{4-2\sqrt[3]{x+15}+\left(\sqrt[3]{x+15}\right)^2}}_{>0}\right)=0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(7;\frac{111}{98}\right)$

Bài 32: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{y+2}+\sqrt[3]{y-2}=\sqrt{x^3+4}+x \\ \sqrt{(y+4)(2x+12)}-8=x^2+y-\sqrt{(x^2+2)(x^2-y)} \end{cases}$

Bài giải:

+ Đk: $\begin{cases} y\ge -2 \\ x^2\ge y \end{cases}$

+ Từ pt thứ 2 ta có:

$$\sqrt{(y+4)(2y+12)}-8=x^2+y-\sqrt{(x^2+2)(x^2-y)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+8+y-\sqrt{(y+4)(2y+12)}-\sqrt{(x^2+2)(x^2-y)}=0$$

$$\Rightarrow 2(x^2+8+y)-2\sqrt{(y+4)(2y+12)}-2\sqrt{(x^2+2)(x^2-y)}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2y+8}-\sqrt{y+6}\right)^2+\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-y}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{2y+8}=\sqrt{y+6}\\ \sqrt{x^2+2}=\sqrt{x^2-y}\end{cases} \Leftrightarrow y=-2$$

$$\Rightarrow \sqrt{y+2}=0$$

+ Thay vào pt 1 ta được:

$$2\sqrt{y+2}+\sqrt[3]{y-2}=\sqrt{x^3+4}+x$$

$$\Rightarrow \sqrt{y+2}+\sqrt[3]{y-2}=\sqrt{x^3+4}+x \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt[3]{y-2}\right)^3+4}+\sqrt[3]{y-2}=\sqrt{x^3+4}+x$$

+ Xét hàm số: $f_{(t)}=t+\sqrt{t^3+4}\ t\in R$. Ta có:

$$f_{(t)}'=1+\frac{3t^2}{2\sqrt{t^3+4}}>0,(\forall t\in R)\Rightarrow f_{\left(\sqrt[3]{y-2}\right)}=f(x)\Rightarrow \sqrt[3]{y-2}=x$$

+ Vậy ta sẽ có: $\begin{cases}\sqrt{y+2}=0\\ \sqrt[3]{y-2}=x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-\sqrt[3]{4}\\ y=-2\end{cases}(TM)$

Kl: Nghiệm duy nhất của hệ là: $(x:y)=\left(-\sqrt[3]{4};-2\right)$

Bài 33:

Giải hệ phương trình Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+\dfrac{x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 3x^2-8x-3=4(x+1)\sqrt{y+1} \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$

Bài giải:

Điều kiện $\begin{cases} x>-1 \\ y\geq -1 \end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{x^3+x^2+x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}\Leftrightarrow \frac{x^3+x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}}=(y+2)\sqrt{y+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3+\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\left(\sqrt{y+1}\right)^3+\sqrt{y+1}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0\forall t\in\mathbb{R}$ suy f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên $f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)=f\left(\sqrt{y+1}\right)\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{y+1}$. Thay vào (2) ta được

$3x^2-8x-3=4x\sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2=\left(x+2\sqrt{x+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x+1}=x-1 \\ 2\sqrt{x+1}=1-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-6x-3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq \dfrac{1}{3} \\ 9x^2-10x-3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+2\sqrt{3} \\ x=\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9} \end{array}\right.$$

Ta có: $y=\dfrac{x^2}{x+1}-1$

Với $x=3+2\sqrt{3}\Rightarrow y=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}$. Với $x=\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9}\Rightarrow y=-\dfrac{41+7\sqrt{13}}{72}$

Các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện.

Facebook cá nhân : https://www.facebook.com/quang.manngoc

KL: Hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=\left(3+2\sqrt{3};\frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$

& $(x;y)=\left(\frac{5-2\sqrt{13}}{9};-\frac{41+7\sqrt{13}}{72}\right)$

Bài 34: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y-1=\ln\frac{y^2+4y+5}{x^2+2x+2} \\ 6\sqrt[3]{y}+2(y+1)\sqrt{x+2}=2x^2-y+7 \end{cases}$

Bài giải:

Xét hệ $\begin{cases} x-y-1=\ln\frac{y^2+4y+5}{x^2+2x+2}(1) \\ 6\sqrt[3]{y}+2(y+1)\sqrt{x+2}=2x^2-y+7(2) \end{cases}$ (Đ/K: $x\ge -2$)

Ta có: $(1)\Leftrightarrow x+1+\ln(x^2+2x+2)=y+2+\ln(y^2+4y+5)$

$\Leftrightarrow x+1+\ln\left((x+1)^2+1\right)=y+2+\ln\left((y+2)^2+1\right)$ $(*)$

Xét hàm $f(t)=t+\ln(t^2+1), t\in R$. Ta có $f'(t)=1+\frac{2t}{1+t^2}=\frac{(1+t)^2}{1+t^2}\ge 0 \forall t\in R$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=-1$

Nên f(t) đồng biến trên R theo (*) suy ra $f(x+1)=f(y+2)\Leftrightarrow x+1=y+2$

$$\Leftrightarrow x=y+1$$

Thay vào (2) ta được $6\sqrt[3]{x-1}+2x\sqrt{x+2}=2x^2-x+8$ (3)

Xét $x \le 1 \Rightarrow 6\sqrt[3]{x-1}+2x\sqrt{x+2} \le 2\sqrt{3} < 7 < 2x^2-x+8$ nên (3) không có nghiệm trên $(-\infty;1]$
Xét $x>1$, khi đó $6\sqrt[3]{x-1}+2x\sqrt{x+2} \le 2\left(\left(x-1\right)+1+1\right)+x\dfrac{4+\left(x+2\right)}{2}=\dfrac{x^2+10x+4}{2}$ Mà $\dfrac{x^2+10x+4}{2} \le 2x^2-x+8 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\left(x-2\right)^2 \ge 0$. Do đó (3) xảy ra khi và chỉ khi x = 2. Do đó hệ có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(2;1\right)$(thỏa mãn điều kiện)

Bài 35: Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} x+3\sqrt{x-1}+\sqrt{x(x^2-3x+3)}-\sqrt{x^2-6x+6}=2\sqrt[3]{y+2}+\sqrt{y+3}+2 \quad (1) \\ 3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-6x+6}=\sqrt[3]{y+2}+1 \quad (2) \end{cases}$$

Bài giải:

Thế $-\sqrt{x^2-6x+6}=\sqrt[3]{y+2}+1-3\sqrt{x-1}$ vào PT(1) ta được :

$$(x-1)+\sqrt{(x-1)^3+1}=\sqrt[3]{y+2}+\sqrt{y+2+1}$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^3+1} \Rightarrow f'(t)=1+\dfrac{3t^2}{2\sqrt{t^3+1}}>0$ suy ra hàm số đồng biến

Mà $f(x-1)=f(\sqrt[3]{y+2}) \Rightarrow x-1=\sqrt[3]{y+2}$ .Thế vào PT(2) ta được :

$$3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-6x+6}=x$$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} = x + \sqrt{x^2-6x+6}$

$\Leftrightarrow 9(x-1) = 2x^2 - 6x + 6 + 2x\sqrt{x^2-6x+6}$

$\Leftrightarrow (15x - 15 - 2x^2)^2 = 4x^2(x^2-6x+6)$

$\Leftrightarrow (x-5)(x-1)(4x-5) = 0$

Đối chiếu điều kiện $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{4} \Rightarrow y = \dfrac{-127}{64} \\ x = 5 \Rightarrow y = 62 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\left(\dfrac{5}{4}; -\dfrac{127}{64}\right)$ và (5;62)

Bài 36: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (y+1)^2 + y\sqrt{y^2+1} = x + \dfrac{3}{2} \\ x + \sqrt{x^2-2x+5} = 1 + 2\sqrt{2x-4y+2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Bài giải:

ĐK: $x - 2y + 1 \ge 0$

$(1) \Leftrightarrow 2y^2 + 4y + 2 + 2y\sqrt{y^2+1} = 2x + 3 \Leftrightarrow y^2 + 2y\sqrt{y^2+1} + y^2 + 1 = 2x - 4y + 2$

$\Leftrightarrow \left(y + \sqrt{y^2+1}\right)^2 = 2x - 4y + 2$

(2) ta có: $\sqrt{2x-4y+2} = \dfrac{(x-1) + \sqrt{x^2-2x+5}}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)^2} = \dfrac{(x-1)+\sqrt{x^2-2x+5}}{2} \Rightarrow \sqrt{\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)^2} = \dfrac{x-1}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2 + 1}$

Ta có: $\sqrt{y^2+1} + y = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+1} - y}$

$$\sqrt{y^2+1}-y>0 \Rightarrow \sqrt{y^2+1}+y>0 \Rightarrow y+\sqrt{y^2+1}=\frac{x-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}$$

Xét hàm $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$

$$f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0\forall t$$

$$f(y)=f\left(\frac{x-1}{2}\right) \Leftrightarrow 2y=x-1 \text{ thay vào (2) ta có:}$$

$$x+\sqrt{(x-1)^2+4}=1+2\sqrt{2x-2x+2+2} \Leftrightarrow x+\sqrt{(x-1)^2+4}=5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+4}+(x-1)-4=0$$

Đặt $x-1=t$ ta có: $\sqrt{t^2+4}=4-t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-t\ge 0 \\ t^2+4=t^2-8t+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 4 \\ 8t=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 4 \\ t=\frac{3}{2}(TM) \end{cases}$$

Với $t=\frac{3}{2} \Rightarrow x-1=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{4}$

Vậy $(x;y)=\left(\frac{5}{2};\frac{3}{4}\right)$

Bài 37: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}+x+5=2y+\sqrt{y-2} \\ \dfrac{(x-8)(y+1)}{x^2-4x+7}=(y-2)\left(\sqrt{x+1}-3\right) \end{cases}$ $x,y\in\mathbb{R}$

Bài giải:

Đkxđ: $\begin{cases} y \geq 2 \\ x \geq -1 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}=2(y-2)-(x-1)+\sqrt{y-2}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x+1}=a \\ \sqrt{y-2}=b \end{cases}$ a,b ≥ 0

$a+ab=2b^2-a^2+b \Leftrightarrow (1+b)=(b-a)(b+a)+b(1+b)$

$\Leftrightarrow (a-b)(1+b+b+1)=0 \;\; \Leftrightarrow (a-b)(a+2b+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+2b+1=0 \quad \langle do \text{ a,b} \geq 0 \Rightarrow \text{a+2b+1>0} \rangle \end{array}\right.$

Với a = b ta có: $x+1=y-2 \;\; \Leftrightarrow y=x+3$

Thay vào (2) ta có:

$\frac{(x-8)(x+1+3)}{x^2-4x+7}=(x+1)\left(\sqrt{x+1}-3\right) \;\; \Leftrightarrow (x-8)(x+4)=(x+1)\left(\sqrt{x+1}-3\right)\left[x^2-4x+7\right]$

$\Leftrightarrow (x-8)(x+4)=\frac{(x+1)(x-8)\left(x^2-4x+7\right)}{\sqrt{x+1}+3} \Leftrightarrow (x-8)\left[x+4-\frac{(x+1)\left[(x-2)^2+3\right]}{\sqrt{x+1}+3}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ (x+4)\left(\sqrt{x+1}+3\right)=(x+1)\left[(x-2)^2+3\right] \end{array}\right.$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x+1}=a \\ x-2=b \end{cases}$ a ≥ 0

Ta có: $\left(a^2+3\right)\left(a+3\right)=\left(b+3\right)\left(b^2+3\right)$

Xét hàm $f\left(t\right)=\left(t^2+3\right)\left(t+3\right)\quad \forall t\ge 0$

$f'\left(t\right)=2t\left(t+3\right)+t^2+3=2t^2+6t+t^2+3=3t^2+6t+3$

$=3t^2+6t+3=3\left(t+1\right)^2>0\quad \forall t\ge 0$

$\Rightarrow$ f(t) đồng biến $\Rightarrow f\left(a\right)=f\left(b\right)$

$\Rightarrow \sqrt{x+1}=x-2\Leftrightarrow x+1=x^2-4x+4\Leftrightarrow x^2-5x+3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\left(TM\right) \\ x=\dfrac{5-\sqrt{15}}{2}\quad\left(loai\right) \end{array}\right.$$

Vậy với $x=8\Rightarrow y=11$

Với $\quad x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}$

Kết luận: $\left(x;y\right)=\left(8;11\right);\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2};\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\right)$

Bài 38: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^3=y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{9-4y^2}=2x^2+6y^2-7 \end{cases}\left(x,y\in R\right)$

Bài giải:

Điều kiện: $x\le 1; y\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$. Ta có

$(1) \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2\sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$ $\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2\sqrt{1-x}\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$
Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$, ta có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0\ \forall t \in R$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên R. Vậy $(1) \Leftrightarrow f(y) = f\left(\sqrt{1-x}\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2 = 1-x \end{cases}$
Thế vào (2) ta được: $\sqrt{4x+5} = 2x^2 - 6x - 1$
$PT \Leftrightarrow 2\sqrt{4x+5} = 4x^2 - 12x - 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{4x+5}+1\right)^2 = (2x-2)^2$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{4x+5} = 2x-3\ (vn) \\ \sqrt{4x+5} = 1-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1+\sqrt{2}\,(loai) \\ x = 1-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$ Với $x = 1-\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt[4]{2} \\ y = -\sqrt[4]{2} \end{array}\right.$. Vậy hệ có 2 nghiệm

Bài 39: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4y + y^5 = x^{10} + x^6 \\ 4\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1-x} - 3x = 1 + \sqrt{1-y} \end{cases}$

Bài giải:

Điều kiện: $-1 \le x \le 1, y \le 1$

Nếu x = 0 thay vào hệ phương trình ta được $(x;y)=(0;0)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Nếu $x\neq 0$, từ $x^4y+y^5=x^{10}+x^6 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^5+\frac{y}{x}=x^5+x$

Xét $f(t)=t^5+t, t\in R$. Ta có $f'(t)=5t^4+1>0, \forall t\in R$, nên f(t) đồng biến trên R.

Do đó $f(x)=f\left(\frac{y}{x}\right)$. Suy ra $\frac{y}{x}=x \Leftrightarrow y=x^2$

Thay y = x^2 vào phương trình thứ hai ta được $4\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}-3x=1+\sqrt{1-x^2}$ (*)

Đặt $u=\sqrt{1+x}\geq 0, v=\sqrt{1-x}\geq 0$. Ta có $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right) \\ u^2+v^2=2 \end{cases}$

Phương trình (*) trở thành $4u-2v-\frac{3}{2}\left(u^2-v^2\right)=\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)+uv$

$\Leftrightarrow 2u^2+(v-4)u-v^2+2v=0 \Leftrightarrow (2u-v)(u+v-2)=0$

Nếu $v=2u$ thì $\sqrt{1-x}=2\sqrt{1+x} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{5} \Rightarrow y=\frac{9}{25}$

Nếu $v=2-u$ thì $\sqrt{1-x}=2-\sqrt{1+x} \Rightarrow$ pt vô nghiệm

Tóm lại phương trình có các nghiệm là $(x;\mathrm{y})=(0;0);\left(-\frac{3}{5};\frac{9}{25}\right)$

TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 40: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+4y(x-5)-1=4y^2-x+2\sqrt{2y} \\ 4y(x-4)+x=2\sqrt{x-1} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Bài giải:

Điều kiện $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 0 \end{cases}$. Với điều kiện đó

$(1)\Leftrightarrow x^2+4xy-20y-1=4y^2-x+2\sqrt{2y}$

$(2)\Leftrightarrow 4xy=16xy+2\sqrt{x-1}-x$. Thay vào (1) ta có

$x^2+2\sqrt{x-1}=(2y+1)^2+2\sqrt{(2y+1)-1}$

Xét hàm số $u=g(t)=t^2+2\sqrt{t-1}$ với $t\in[1;+\infty)$. Hàm số này luôn đồng biến.

Vì thế $x^2+2\sqrt{x-1}=(2y+1)^2+2\sqrt{(2y+1)-1}\Leftrightarrow x=2y+1\Leftrightarrow x-1=2y$

Thay vào (2) ta được

$2x^2-9x+8=2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 2(x-2)^2=\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=\sqrt{2}x-2\sqrt{2}-1 \\ \sqrt{x-1}=-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}-1 \end{array}\right.$

$\sqrt{x-1}=\sqrt{2}x-2\sqrt{2}-1\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-\left(9+2\sqrt{2}\right)x+10+4\sqrt{2}=0 \\ \sqrt{2}x-2\sqrt{2}-1>0 \end{cases}$

Phương trình bậc hai $2x^2-\left(9+2\sqrt{2x}\right)+10+4\sqrt{2}=0$ có $\Delta=\left(2\sqrt{2}+1\right)^2$ nên có hai nghiệm là $x_1 = \dfrac{5+2\sqrt{2}}{2}$ và $x_2 = 2$. Nghiệm x_2 bị loại vì $\sqrt{2}x_2 - 2\sqrt{2} - 1 < 0$

Hoàn toàn tương tự ta có $\sqrt{x-1} = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{5-2\sqrt{2}}{2}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $\left(\dfrac{5-2\sqrt{2}}{2};\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}\right)$ và $\left(\dfrac{5+2\sqrt{2}}{2};\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}\right)$

Bài 41: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4\left(2x\sqrt{2x-1} - y^3 - 3y^2\right) = 15y + 7 + \sqrt{2x+1} \\ \sqrt{\dfrac{y(y+2)}{2}} + \sqrt{6-x} = 2x^2 + 2y^2 - 15x + 4y + 12 \end{cases}$

Bài giải:

Điều kiện: $1 \le x \le 6$ $(1) \Leftrightarrow \mathrm{f}(y+1) = \mathrm{f}\left(\sqrt{2x-1}\right)$ với $f(t) = 4t^3 + 3t$. Vì f(t) đồng biến nên

$y + 1 = \sqrt{2x-1} \Rightarrow y^2 + 2y = 2x - 2$. Thế vào (2):

$\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} = 2x^2 - 11x + 8 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1} - 2\right) + \left(\sqrt{6-x} - 1\right) = 2x^2 - 11x + 5 \Leftrightarrow \dfrac{x-5}{2+\sqrt{x-1}} + \dfrac{5-x}{1+\sqrt{6-x}} = (x-5)(2x-1)$

$\Leftrightarrow (x-5)A = 0$ với $A = 2x + 1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}} - \dfrac{1}{2+\sqrt{x-1}} > 0$ (do $x \ge 1$) $\rightarrow x = 5, y = 2$.

Bài 42: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3\left(4y^2 + 1\right) + x\sqrt{2y} = 3 & (1) \\ 2y + \sqrt{4y^2 + 1} = x + \sqrt{x^2 + 1} & (2) \end{cases}$

Bài giải:

Điều kiện: $y \geq 0$

$PT(1) \Leftrightarrow x\left[x^2\left(4y^2+1\right)+\sqrt{2y}\right]=3 \Rightarrow x>0$

Khi đó, $PT(2) \Leftrightarrow 2y+\sqrt{4y^2+1}=x+\sqrt{x^2+1}$ (3)

Xé thàm $f\left(t\right)=t+\sqrt{t^2+1}$ trên $\left[0;+\infty\right)$

Có $f'\left(t\right)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0\ \forall t>0 \Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$

Khi đó, $PT(3) \Leftrightarrow f\left(2y\right)=f\left(x\right) \Leftrightarrow 2y=x$

Thay vào phương trình (1) ta được phương trình: $x^5+x^3+x\sqrt{x}=3$

Đặt $t=\sqrt{x}$ > 0 có hàm số $g\left(t\right)=t^{10}+t^6+t^3$ $có$ $g'\left(t\right)=10t^9+6t^5+3t^2>0\ do\, t>0$

Mà $g\left(1\right)=3 => t=1 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$

Với $x=1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$

Bài 43: Giải hệ PT $\begin{cases} xy(x+1)=x^3+y^2+x-y \\ 3y\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4y+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0 \end{cases}, (x,y\in\mathbb{R}).$

Bài giải:

ĐKXĐ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $xy(x+1)=x^3+y^2+x-y \Leftrightarrow x^3-x^2y+y^2-xy+x-y=0$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2-y+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=x^2+1 \end{array}\right.$$

Với $y=x^2+1$ thay vào PT thứ 2 ta được

$3\left(x^2+1\right)\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+\left(4x^2+6\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$. Dễ thấy PT vô nghiệm.

Với $y=x$ thay vào PT thứ 2 ta được $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=-(2x+1)\left(\sqrt{3+(2x+1)^2}+2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=(-2x-1)\left(\sqrt{3+(-2x-1)^2}+2\right)$$

Xét hàm số $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+2}+2\right)$ ta có $f'(t)=\sqrt{t^2+2}+2+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0$ suy ra hàm số đồng biến.

Từ đó suy ra $3x=-2x-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}$. Vậy HPT có nghiệm $(x;y)=\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

Bài 44: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}32x^5-5\sqrt{y-2}=y(y-4)\sqrt{y-2}-2x\\(\sqrt{y-2}-1)\sqrt{2x+1}=8x^3-13(y-2)+82x-29\end{cases}(x,y\in\mathbb{R})$.

Bài giải:

Đặt đk $x\ge -\frac{1}{2}, y\ge 2$

+) $(1)\Leftrightarrow (2x)^5+2x=(y^2-4y)\sqrt{y-2}+5\sqrt{y-2}\Leftrightarrow (2x)^5+2x=\left(\sqrt{y-2}\right)^5+\sqrt{y-2}(3)$

Xét hàm số $f(t)=t^5+t, f'(t)=5t^4+1>0,\forall x\in R$, suy ra hàm số f(t) liên tục trên R. Từ (3) ta có $f(2x)=f(\sqrt{y-2})\Leftrightarrow 2x=\sqrt{y-2}$

Thay $2x=\sqrt{y-2}(x\ge 0)$ vào (2) được

$$(2x-1)\sqrt{2x+1}=8x^3-52x^2+82x-29$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{2x+1}=(2x-1)(4x^2-24x+29)$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(\sqrt{2x+1}-4x^2+24x-29\right)=0$$
$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ \sqrt{2x+1}-4x^2+24x-29=0(4)\end{array}\right.$$

Với x=1/2. Ta có y=3

Facebook cá nhân : https://www.facebook.com/quang.manngoc

$(4) \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1}-2)-(4x^2-24x+27)=0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{2x+1}+2}-(2x-3)(2x-9)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3/2 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+1}+2}(2x-9)=0(5) \end{array}\right.$

Với x=3/2. Ta có y=11

Xét (5). Đặt $t=\sqrt{2x+1}\geq 0 \Rightarrow 2x=t^2-1$. Thay vao (5) được

$t^3+2t-10-21=0 \Leftrightarrow (t+3)(t^2-t-7)=0$. Tìm được $t=\frac{1+\sqrt{29}}{2}$. Từ đó tìm được

$x=\frac{13+\sqrt{29}}{4}, y=\frac{103+13\sqrt{29}}{2}$

Bài 45: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3-y^3+5x^2-2y^2+10x-3y+6=0 \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{4-y}=x^3+y^2-4x-2y \end{cases}$

Bài giải:

Điều kiện $x \geq -2;\ y \leq 4$

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 + 10x + 6 = y^3 + 2y^2 + 3y$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 2(x+1)^2 + 3(x+1) = y^3 + 2y^2 + 3y$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t^2 + 3t,\quad f'(t) = 3t^2 + 4t + 3 > 0\ \ \forall t \in R$

Suy ra f(x+1) = f(y) => y= x+1 thay và pt (2) ta được

Phương trình : $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = x^3 + x^2 - 4x - 1$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}\right) - 3 = x^3 + x^2 - 4x - 4 \Leftrightarrow \frac{2\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} - 2\right)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3} = (x+1)\left(x^2 - 4\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2[(x+2)(3-x) - 4]}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2\right)} = (x+2)(x^2 - x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(-x^2 + x + 2)}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2\right)} - (x+2)\left(x^2 - x - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x - 2\right)\underbrace{\left[x + 2 + \frac{2}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2\right)}\right]}_{>0\ \ (vi\ \ x \geq -2\ )} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ pt có nghiệm (x; y) = (2;3) , (x;y)= (-1; 0)

Bài 46: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{9 - 4y^2} = 2x^2 + 6y^2 - 7 \end{cases}$

Bài giải:

ĐK: $x \le 1$, ta có: $\{2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2.\left(\sqrt{1-x}\right)^3 + \sqrt{1-x} \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x}$ Vì h/s $f(t) = 2t^3 + t$ đồng biến trên R.
Thế vào pt kia ta được pt: $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$ $\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4 = 4x + 5 + 2\sqrt{4x+5} + 1$ $\Leftrightarrow (2x-2)^2 = \left(\sqrt{4x+5} + 1\right)^2$
$\Leftrightarrow 2 - 2x = \sqrt{4x+5} + 1$ vì $x \le 1$
$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$ tmđk.

Bài 47: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (xy-3)\sqrt{y+2} + \sqrt{x} = \sqrt{x^5} + (y-3x)\sqrt{y+2} \\ \sqrt{9x^2+16} - 2\sqrt{2y+8} = 4\sqrt{2-x} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Bài giải:

Đk: $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ y \ge -2 \end{cases}$ (*) .Với đk(*) ta có $(1) \Leftrightarrow (x-1)\left[(y+3)\sqrt{y+2} - (x+1)\sqrt{x}\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ (y+3)\sqrt{y+2} = (x+1)\sqrt{x} \quad (3) \end{array}\right.$
Nội dung

Với x = 1 thay vào (2) ta được: $2\sqrt{2y+8}=1 \Leftrightarrow y=-\frac{31}{8}(loai)$

Ta có: (3) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{y+2}\right)^3+\sqrt{y+2}=(\sqrt{x})^3+\sqrt{x}$ (4). Xét hàm số

$f(t)=t^3+t \Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0;\forall t \Rightarrow$ Hàm số f(t) là hs đồng biến, do đó:

(4) $\Leftrightarrow f(\sqrt{y+2})=f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{y+2}=\sqrt{x} \Leftrightarrow y=x-2$ thay vào pt(2) ta được:

$$4\sqrt{2-x}+2\sqrt{2x+4}=\sqrt{9x^2+16}$$
$$\Leftrightarrow 32-8x+16\sqrt{2(4-x^2)}=9x^2 \Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}-(x^2+8x)=0$$

Đặt: $t=\sqrt{2(4-x^2)}$ $(t\ge 0)$; PT trở thành: $4t^2+16t-(x^2+8x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{x}{2} \\ t=-\frac{x}{2}-4<0(loai) \end{array}\right.$

Hay $\sqrt{2(4-x^2)}=\frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ x^2=\frac{32}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y=\frac{4\sqrt{2}-6}{3}$

Vậy hệ pt có nghiệm (x; y) là: $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{4\sqrt{2}-6}{3}\right)$

PHƯƠNG PHÁP NHÂN LIÊN HỢP

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases}(1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y}\,(1)\\2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3}\,(2)\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge y\ge 0\\x\ge 2y;4x-5y-3\ge 0\end{cases}$

Phương trình (1) trở thành:

$$(1)\Rightarrow(1-y)\left(\sqrt{x-y}\right)+(x-y-1)+(y-1)-(x-y-1)\sqrt{y}=0$$

$$\Rightarrow(1-y)\left(\sqrt{x-y}-1\right)+(x-y-1)\left(1-\sqrt{y}\right)=0$$

$$\Rightarrow(1-y)(x-y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x-y}+1}+\frac{1}{\sqrt{y}+1}\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\x=y+1\end{array}\right.$$

* Với $y=1$

$$(2)\Rightarrow 9-3x=2\sqrt{x-2}-\sqrt{4x-8}\qquad\Rightarrow 9-3x=0\Rightarrow x=3$$

* Với $x=y+1$

$$(2)\Rightarrow 2y^2+3y-2=2\sqrt{1-y}-\sqrt{1-y}\Rightarrow 2y^2+3y-2=\sqrt{1-y}\ \ (3)$$

Điều kiện: $y\le 1$

Cách 1: Phân tích thành nhân tử

$$(3)\Rightarrow 2(1-y)-2y\sqrt{1-y}+(2y+1)\sqrt{1-y}-y(2x+1)=0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{1-y}\left(\sqrt{1-y}-y\right)+(2y+1)\left(\sqrt{1-y}-y\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(2\sqrt{1-y}+2y+1\right)\left(\sqrt{1-y}-y\right)=0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2\sqrt{1-y}+2y+1=0\,(VN)\\ \sqrt{1-y}=y\end{array}\right.\Rightarrow 1-y=y^2$$

$\Rightarrow y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ (vì $y\ge 0$) $\Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Cách 2: Khảo sát hàm số

$(3)\Leftrightarrow 2y^2+y=2\left(\sqrt{1-y}\right)^2+\sqrt{1-y}$

Xét hàm số $f(t)=2t^2+t\,(t\ge 0)$ có $f'(t)=4t+1\ge\forall t>0$. Do đó f(t) đồng biến trên $[0;+\infty)$

Mà $f(y)=f\left(\sqrt{1-y}\right)$ nên $y=\sqrt{1-y}\Rightarrow y^2=1-y\Rightarrow y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ (vì $y\ge 0$) $\Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Sau khi thử lại, ta thấy tất cả các nghiệm của phương trình đều thỏa mãn.

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases};\begin{cases}x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^2=(5x+4)(4-x)\,(1)\\ y^2-5x^2-4xy+16x-8y+16=0\,(2)\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Phương trình (2) tương đương với:

$$(2)\Leftrightarrow(y-5x-5)(y+x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=5x+4\\y=4-x\end{array}\right.$$

* $y=5x+4$

$$(1)\Leftrightarrow(5x+4)^2+(5x+4)(x-4)=0\Leftrightarrow 6x(5x+4)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=4\\x=-\dfrac{4}{5}\Rightarrow y=0\end{array}\right.$$

* $y=4-x;(1)\Leftrightarrow(x-4)^2+(5x+4)(x-4)=0\Leftrightarrow 6x(x-4)=0$

* $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=4\\x=4\Rightarrow y=0\end{array}\right.$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases}x=0\\y=4\end{cases};\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases};\begin{cases}x=-\dfrac{4}{5}\\y=0\end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy+x-2=0(1)\\2x^3-x^2y+x^2+y^2-2xy-y=0(2)\end{cases}$

Bài giải chi tiết

$(2) \Leftrightarrow x^2(2x-y+1)+y(y-2x-1)=0 \Leftrightarrow (x^2-y)(2x-y+1)=0$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-xy+4y+1=0 (1) \\ y\left[7-(x-y)^2\right]=2(x^2+1) (2) \end{cases}$

Bài giải chi tiết

Phương trình (2) tương đương với:

$$(2) \Leftrightarrow y\left[7-(x-y)^2\right]+2(y^2-xy+4y)=0 \Leftrightarrow y\left[15-2(x-y)-(x-y)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow y(x-y-3)(x-y+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=x-3 \\ y=x+5 \end{array}\right.$$

* $y=0;(1) \Leftrightarrow x^2+1=0$ (vô lý)

* $y=x-3;(1) \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-2 \\ x=-2 \Rightarrow y=-5 \end{array}\right.$

* $y=x+5;(1) \Leftrightarrow x^2+9x+46=0$ (phương trình vô nghiệm)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}; \begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5\text{x}^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 (1) \\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 (2) \end{cases}$

Bài giải chi tiết

Phương trình (2) tương đương với:

$$(2) \Leftrightarrow xy\left(x^2+y^2\right)+2=\left(x^2+y^2\right)+2x \Leftrightarrow (xy-1)\left(x^2+y^2-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ x^2+y^2=2 \end{array}\right.$$

* Với $xy=1;(1) \Leftrightarrow 5x^2y-4xy^2+3y^3-2xy(x+y)=0$

$$\Leftrightarrow 3x^2y-6xy^2+3y^3=0 \Leftrightarrow 3y(x-y)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0(loai \text{ vi xy=1}) \\ x=y \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=\pm 1$$

* Với $x^2+y^2=2;(1) \Leftrightarrow 5x^2y-4xy^2+3y^3-\left(x^2+y^2\right)(x+y)=0$

$$\Leftrightarrow -x^3+4x^2y-5xy^2+2y^3=0 \Leftrightarrow (x-y)^2(x-2y)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 5y^2=2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{5}} \\ y=\pm 2\sqrt{\dfrac{2}{5}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{5}} \\ y=\pm 2\sqrt{\dfrac{2}{5}} \end{cases};\begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 1 \end{cases}$

Bài 6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+y-1}-\sqrt{x+2y-2}+x-y+1=0 (1) \\ x^2+y^2-2xy+4x-3y=0 (2) \end{cases}$

Bài giải chi tiết

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x-y+1}{\sqrt{2x+y-1}+\sqrt{x+2y-2}}+(x-y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+y-1}+\sqrt{x+2y-2}}+1\right)=0 \Leftrightarrow y=x+1$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2+(x+1)^2-2x(x+1)-4x-4(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

Bài 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2-x-y}=\dfrac{y}{\sqrt[3]{x-y}} (1) \\ 2(x^2+y^2)-3\sqrt{2x-1}=11 (2) \end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq y \\ x^2-x-y \geq 0 \\ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Nếu $y<0 \Rightarrow \dfrac{y}{\sqrt[3]{x-y}}<0 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-y}<0$ (vô lý). Nên $y \geq 0$

Với $x^2-x-y=0;(1)\Rightarrow\begin{cases}y=0\\x^2-x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\\left[\begin{array}{l}x=0\left(khong\ thoa\ \text{man}\ (2)\right)\\x=1\end{array}\right.\end{cases}$

Với $x^2-x-y>0$, ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt[3]{x-y}=\frac{y}{\sqrt{x^2-x-y}}\Leftrightarrow\sqrt[3]{x-y}-1=\frac{y}{\sqrt{x^2-x-y}}-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-y-1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}+\sqrt[3]{x-y}+1}+\frac{(x+y)(x-y-1)}{\sqrt{x^2-x-y}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y-1)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}+\sqrt[3]{x-y}+1}+\frac{x+y}{\sqrt{x^2-x-y}+1}\right)=0$$

Bài 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}=x+y+2xy\,(1)\\\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=3x-4y+4\,(2)\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge y\\x\ge -y\end{cases}$

Phương trình (1) tương đương với:

$$(1)\Leftrightarrow(x-y)^2+2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)^2+\frac{4\left(2x^2-3xy+2y^2\right)-(x+y)^2}{2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}+x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+\frac{7(x-y)^2}{2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}+x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left(1+\frac{7}{2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}+x+y}\right)=0\Leftrightarrow x=y$$

Khi đó:

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt{2x}=4-x\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 4\\ 2x=x^2-8x+16\end{cases}\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$

Bài 9. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=2y(1)\\ \sqrt{x}+y\sqrt{5}=3(2)\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $x\ge y\ge 0$

Với y = 0 không thỏa mãn hệ phương trình

Với y > 0, ta được:

$$(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{3y}{2}\right)+\left(\sqrt{x^2-y^2}-\frac{y}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-\frac{5}{4}y^2}{\sqrt{x^2+y^2}+\frac{3}{2}y}+\frac{x^2-\frac{5}{4}y^2}{\sqrt{x^2-y^2}+\frac{y}{2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-\frac{5}{4}y^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}+\frac{3}{2}y}+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}+\frac{y}{2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{5}{4}y^2\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}}{2}y$$

Khi đó:

$$(2)\Leftrightarrow\sqrt{x}+2x=3\Leftrightarrow\begin{cases}x=4x^2-12x+9\\ x\le\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=\frac{2}{\sqrt{5}}\text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases}x=1\\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}$

Bài 10. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x-y}+\sqrt{y-2}+4x-3y=0\ (1)\\ \sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}=\frac{y^2}{\sqrt{x+xy+1}}\ (2)\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge -1\\ x^2+x-y>0\\ x+xy+1>0\\ y\ge 2\end{cases}$

Phương trình (2) tương đương với:

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}-y=\frac{y^2}{\sqrt{x+xy+1}}-y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2+xy+y^2\right)\left(x-y+1\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+y^2+xy\right)^2}+y\sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}+y^2}=\frac{y\left(y+1\right)\left(y-x+1\right)}{\sqrt{x+xy+1}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y+1\right)\left[\frac{\left(x^2+xy+y^2\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+y^2+xy\right)^2}+y\sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}+y^2}+\frac{y\left(y+1\right)}{\sqrt{x+xy+1}}\right]=0$$

Do $\dfrac{\left(x^2+xy+y^2\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+y^2+xy\right)^2}+y\sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}+y^2}+\dfrac{y\left(y+1\right)}{\sqrt{x+xy+1}}>0\Rightarrow y=x+1$

Thay vào phương trình (1), ta được:

$$\left(1\right)\Leftrightarrow \left(x-1\right)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}+x-3=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+\left(x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=3$$

Sau khi thử lại ta thấy nghiệm này thỏa mãn đề bài

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

Bài 11. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-3\sqrt{x+3}=3\sqrt{y-5}-y\,(1) \\ \sqrt{x^2+16(y-x)}+y=2\sqrt{xy}\,(2) \end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 5 \end{cases}$

Phương trình (2) tương đương với:

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+16(y-x)}-y=2\left(\sqrt{xy}-y\right)\Leftrightarrow \frac{x^2+16(y-x)-y^2}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+y}=\frac{2y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{x-16}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+y}-\frac{2y}{\sqrt{xy}+y}\right]=0$$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow x-3\sqrt{x+3}=3\sqrt{y-5}-y$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y-5}-\frac{3}{2}\right)^2+x-3\sqrt{x+3}+\frac{11}{4}=0\Leftrightarrow x-3\sqrt{x+3}+\frac{11}{4}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{11}{4}\right)^2\le 9(x+3)\Leftrightarrow -3\le x\le \frac{7+6\sqrt{10}}{4}<16$$

Do đó $\dfrac{x-16}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+y}-\dfrac{2y}{\sqrt{xy}+y}<0 \Rightarrow x=y$

Thế vào (1) ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2x=3\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}\right) \Leftrightarrow 4x^2=9\left(2x-2+2\sqrt{x^2-2x-15}\right)$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{x^2-2x-15}=2x^2-9x+9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-9x+9\ge 0 \\ 81\left(x^2-2x-15\right)=\left(2x^2-9x+9\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=6 \Rightarrow y=6$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}$

Bài 12. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)}=2+\sqrt{y+4} \\ \sqrt{1-y}+\sqrt{x+2}=x^2(y-1)+4x-3 \end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+y^2-xy(x-y)\ge 0 \\ x\ge -2 \\ -4\le y\le 1 \end{cases}$

Từ (2) ta có: $4\text{x}-3=x^2(1-y)+\sqrt{1-y}+\sqrt{x+2}\ge 0 \Rightarrow x\ge \dfrac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{x+2}\ge 0$

Phương trình (1) tương đương với: $\sqrt{x+2}-\sqrt{y+4}+\sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)}-2=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)-(y+4)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+4}}+\frac{x^2+y^2-xy(x-y)-4}{\sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+4}}+\frac{(x-y-2)(x-y-xy+2)}{\sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+4}}+\frac{x-y-xy+2}{\sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)}+2}\right)=0(3)$$

Ta có: $x-y-xy+2=x(1-y)+(1-y)+1=(x+1)(1-y)+1>0$ do $x\geq\frac{3}{4}, y\leq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+4}}+\frac{x-y-xy+2}{\sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)}+2}>0$$

Nên $(3)\Rightarrow x-y-2=0$. Thay vào (2) ta được:

$\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}=x^2(x-3)+4x-3 \Leftrightarrow x^3-3x^2+4x-3-\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=0(4)$

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+4x-3-\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}$ với $x\in\left[\frac{3}{4};3\right]$

Có $f'(x)=3x^2-6x+4-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=3(x-1)^2+1+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}}{2\sqrt{x+2}\sqrt{3-x}}>0$

Do $(x+2)-(3-x)=2x-1>0\forall x\in\left(\frac{3}{4};3\right)\Rightarrow x+2=3-x\Rightarrow\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}$

Bài 13. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x-3y-1+\sqrt{x-1}+\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}\,(1) \\ \left((y+1)^2+3\right)\sqrt{x^2+3}=32x^2-24\,(2) \end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \\ x \geq y \end{cases}$

* Nếu x = 1 thì từ (2) suy ra y =0 thỏa mãn hệ.

* Nếu x > 1 ta có $(1) \Leftrightarrow 3x - 3y - 3 + 2 - 2\sqrt{x-y} + \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 0$

$$\Leftrightarrow 3(x-y-1) + \frac{2(1-x+y)}{1+\sqrt{x-y}} + \frac{x-1-y}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(3 - \frac{2}{1+\sqrt{x-y}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y-1=0 \text{ (Do } 3 - \frac{2}{1+\sqrt{x-y}} \geq 3-2=1\text{)}$$

Thay vào (2) ta được $(x^2+3)\sqrt{x^2+3} = 32x^2 - 24$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3}{x^2}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \frac{32}{x} - \frac{24}{x^3} \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{x^2}\frac{\sqrt{x^2+3}}{3} - 8 = 8\left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x^3} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^3-4x^2+3)\left(x^2+3+2x\sqrt{x^2+3}+4x^2\right)}{x^3\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)} = -\frac{8(x^3-4x^2+3)}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow (x^3-4x^2+3)\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)^2+3x^2}{x^3\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)} + \frac{8}{x^3}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2+3=0 \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$$

(Do x > 1) suy ra $y=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

Kết luận: hệ phương trình có nghiệm $(x,y)=(1;0),\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2};\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

Bài 14. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+1)\sqrt{y^2+y+2}+(y-1)\sqrt{x^2+x+1}=x+y(1)\\(x^2+x)\sqrt{x-y+3}=2x^2+x+y+1(2)\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $x-y+3\geq 0$

$$(2)\Leftrightarrow (x^2+x)\left(\sqrt{x-y+3}-2\right)+x-y-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(\frac{x^2+x}{\sqrt{x-y+3}+2}+1\right)=0\Leftrightarrow x-y-1=0$$

Thay vào (1) ta được: $(x+1)\sqrt{x^2-x+2}+(x-2)\sqrt{x^2+x+1}=2x-1$

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x^2-x+2}\\v=\sqrt{x^2+x+1}\end{cases}(u,v>0)$ ta được $\left(\frac{v^2-u^2+1}{2}+1\right)u+\left(\frac{v^2-u^2+1}{2}-2\right)=v^2-u^2$

$$\Leftrightarrow (v-u)(u+v+1)(u+v-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-1 \\ x=\dfrac{7}{8} \end{array}\right.$$

Từ đó ta được các nghiệm $(x;y)=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),(-1;-2),\left(\frac{7}{8};\frac{-1}{8}\right)$

Bài 15. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{4x-1}+\sqrt{4y-1}+6-\dfrac{8}{2x+1}=8x\,(1) \\ 2y+1+\sqrt{x^2+2y+1}=x+2\sqrt{y^2+2x+1}\,(2) \end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $x,y\geq\frac{1}{4}$

$$(2)\Leftrightarrow 2(y+1)-2\sqrt{y^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2y+1}-(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(y-x)}{y+1+\sqrt{y^2+2x+1}}+\frac{2(y-x)}{\sqrt{x^2+2y+1}+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\left[\frac{4}{y+1+\sqrt{y^2+2x+1}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+2y+1}+x+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=y$$

Thay vào (1) ta có:

$$2\sqrt{4x-1}+6=8x+\frac{8}{2x+1}$$

Dò nghiệm ta được x = ½ là nghiệm kép , ta tìm cách đánh giá như sau :

Áp dụng BĐT Cauchy: khi thay x = ½ vào $\sqrt{4x-1}$ = 1 ,nên ta áp dụng

$$2\sqrt{4x-1}.1\le 4x-1+1=4x \Rightarrow VT\le 4x+6$$

Ta thay x = ½ vào $\frac{8}{2x+1}$ = 4 . nên ta áp dụng $2(2x+1)+\frac{8}{2x+1}\ge 2\sqrt{2(2x+1)\frac{8}{2x+1}}=8$

$VP=(4x-2)+\left[2(2x+1)+\frac{8}{2x+1}\right]\ge(4x-2)+2\sqrt{2(2x+1)\frac{8}{2x+1}}=4x-2+8=4x+6\ge VT$ Dấu

"=" xảy ra khi $x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm $(x,y)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Bài 16. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{xy-1}+\sqrt{x+1}=1+\sqrt{\frac{y+2}{y}}(1)\\ \sqrt{2y}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}=\frac{2}{y}+\frac{1}{3x}(2)\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Facebook cá nhân : https://www.facebook.com/quang.manngoc

Điều kiện: $\begin{cases} y > 0 \\ xy \ge 1 \\ 1 - \dfrac{3}{x} \ge 0 \Rightarrow x > 0 \\ x \ne 0 \\ x \ge -1 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{xy-1} - 1 + \sqrt{x+1} - \sqrt{1+\frac{2}{y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy-2}{\sqrt{xy-1}+1} + \frac{x - \frac{2}{y}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1+\frac{2}{y}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy-2)\left(\frac{1}{\sqrt{xy-1}+1} + \frac{1}{y\sqrt{x+1} + y\sqrt{1+\frac{2}{y}}}\right) = 0 \Leftrightarrow xy - 2 = 0 \Leftrightarrow xy = 2$$

Thay vào (2) ta được: $\sqrt{\dfrac{1}{x}} + \sqrt{1 - \dfrac{3}{x}} = x + \dfrac{1}{3x}$

Áp dụng BĐT Bunhiaiscopki ta có

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)^2 = \left(1\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{x}}\right)^2 \le 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{x}\right) = \frac{4}{3}$$

Suy ra $\sqrt{\dfrac{1}{x}} + \sqrt{1 - \dfrac{3}{x}} \le \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Áp dụng BĐT Cauchy cho các số thực dương ta có: $x+\frac{1}{3x}\geq 2\sqrt{x\frac{1}{3x}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

Nên $x+\frac{1}{3x}\geq \sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x=\frac{1}{3x} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{x}}} \end{cases}$ vô nghiệm.

Kết luận: Vậy hệ đã cho vô nghiệm

Bài 17. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(2y-\sqrt{2y-2x}\right)\sqrt{4xy-2x-4}+8\sqrt{x^3-4}=3x^3\,(1) \\ y+\sqrt{x^2+2y}=x+\sqrt{y^2+2x+2}\,(2) \end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases} 4xy-2x-4\geq 0 \\ y\geq x\geq \sqrt[3]{4} \\ x^2+2y\geq 0 \\ y^2+2x+2\geq 0 \end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow (y+1)-\sqrt{y^2+2x+2}+\sqrt{x^2+2y}-(x+1)=0$

$\Leftrightarrow \frac{2y-2x-1}{(y+1)+\sqrt{y^2+2x+2}}+\frac{2y-2x-1}{\sqrt{x^2+2y}+x+1}=0$

$$\Leftrightarrow (2y-2x-1)\left(\frac{1}{(y+1)+\sqrt{y^2+2x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2y}+x+1}\right)=0$$

$\Leftrightarrow 2y-2x-1=0$ (Do $y \ge x \ge \sqrt[3]{4}$)

Thay vào (2) ta được $2x\sqrt{2x^2-4}+8\sqrt{x^3-4}=3x^3$

Áp dụng BĐT Côsi cho các số dương ta có:

$$3x^3=2\left[4+\left(x^3-4\right)\right]+x\left[2+\left(x^2-2\right)\right]\ge 8\sqrt{x^3-4}+2x\sqrt{2x^2-4}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}4=x^3-4\\2=x^2-2\end{cases}\Leftrightarrow x=2$ (thoả mãn) $\Leftrightarrow y=\dfrac{5}{2}$

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$

Bài 18. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{y-2}+\sqrt{3x^3-5y^2+5y-2}=\dfrac{x^2+x+2y-2}{2}(1)\\3x=y+\sqrt[3]{x^2y-xy^2+y^3}+\sqrt[3]{x^2y}\ \ (2)\end{cases}$

Bài giải chi tiết

$$(2)\Leftrightarrow (x-y)+\left(x-\sqrt[3]{x^2y}\right)+\left(x-\sqrt[3]{x^2y-xy^2+y^3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)+\frac{x^2(x-y)}{x^2+x\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\frac{(x-y)\left(x^2+y^2\right)}{x^2+x\sqrt[3]{x^2y-xy^2+y^3}+\left(\sqrt[3]{x^2y-xy^2+y^3}\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[1+\frac{x^2}{\left(x+\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{2}\right)+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4y^2}}+\frac{x^2+y^2}{\left(x+\frac{\sqrt[3]{x^2y-xy^2+y^3}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x^2y-xy^2+y^3}\right)^2}\right]=0$$

$x=y$. Thay vào (2) ta được: $\sqrt{x-2}+\sqrt{3x^3-5x^2+5x-2}=\dfrac{x^2+3x-2}{2}(3)$

Nhẩm x = 3 là nghiệm kép , ta thay x = 3 vào :

$\sqrt{x-2}=1$; $\sqrt{3x^3-5x^2+5x-2}=\sqrt{(3x-2)(x^2-x+1)}=\sqrt{(7)(7)}$

Áp dụng BĐT Cosi ta có: $\sqrt{x-2}=\sqrt{1(x-2)}\le\dfrac{x-1}{2}(*)$

Và: $\sqrt{3x^3-5x^2+5x-2}=\sqrt{(3x-2)(x^2-x+1)}\le\dfrac{x^2+2x-1}{2}(**)$

Cộng vế theo vế (*) và (**) ta có: $\sqrt{x-2}+\sqrt{3x^3-5x^2+5x-2}\le\dfrac{x^2+3x-2}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}1=x-2\\3x-2=x^2-x+1\end{cases}\Leftrightarrow x=3$

Nên $(3)\Leftrightarrow x=3\Leftrightarrow y=3$

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(3;3)$

Bài 19. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+y}=\sqrt{2x-y}+\dfrac{2y-x}{\sqrt{2x}}(1)\\ 3x^2-2y+2=2\sqrt{x}+4y\sqrt{2x-1}(2)\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\ x+y\ge 0\\ 2x-y\ge 0\end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x+y}-\sqrt{2x-y}=\frac{2y-x}{\sqrt{2x}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2y-x}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2x-y}}=\frac{2y-x}{\sqrt{2x}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2y-x=0\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{2x-y}=\sqrt{2x}\end{array}\right.$$

* Nếu $\sqrt{x+y}+\sqrt{2x-y}=\sqrt{2x}\Leftrightarrow x+2\sqrt{(x+y)(2x-y)}=0$ vô nghiệm do x > 0.

* Nếu $2y=x$ thay vào (2) ta được: $3x^2-x+2=2\sqrt{x}+2x\sqrt{2x-1}$

$$\Leftrightarrow x\left(2x-2\sqrt{2x-1}\right)+x^2-2x+1+x-2\sqrt{x}+1=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2+(x-1)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2=0(3)$$

Ta có: $\begin{cases}x\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2\ge 0\\ (x-1)^2\ge 0\\ \left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0\end{cases}$

Với $x \ge \frac{1}{2}$ nên $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ne 0 \\ \sqrt{2x-1} = 1 \end{array}\right. \\ x = 1 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(1;\frac{1}{2}\right)$

Bài 20. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{xy - \frac{3}{4}} = \frac{2+\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} \\ \sqrt{x^3\left(y^3+8\right)} + 3\sqrt{8x+1} = 4 + 2x^2\left(y+1\right)^2 \end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $x \ge 0, y > 0, xy \ge \frac{3}{4}$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{xy - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{xy-1}{\sqrt{y}\left(\sqrt{xy}+1\right)} + \frac{xy-1}{\sqrt{xy-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy-1)\left(\frac{1}{\sqrt{y}\left(\sqrt{xy}+1\right)} + \frac{1}{\sqrt{xy-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}}\right) = 0 \Leftrightarrow xy = 1$$

Thay vào (2) được: $\sqrt{8x^3+1} + 3\sqrt{8x+1} = 4 + 2\left(x+1\right)^2$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$2\sqrt{8x^3+1}=2\sqrt{(2x+1)(4x^2-2x+1)}\le 2x+1+4x^2-2x+1=4x^2+2$$

$$6\sqrt{8x+1}=2.3.\sqrt{8x+1}\le 9+8x+1=8x+10$$

Suy ra $2\sqrt{8x^3+1}+6\sqrt{8x+1}\le 4x^2+2+8x+10=8+4(x+1)^2$

$$\Rightarrow \sqrt{8x^3+1}+3\sqrt{8x+1}\le 4+2(x+1)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=1\Rightarrow y=1$ thử lại thấy thỏa mãn

Kết luận: Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(1;1)$

Bài 21. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^2-y^2+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}+\sqrt{y-2}\,(1)\\ \sqrt{(x-2)(9-y)}+\sqrt{y(4-y)}=3(x-y)(2)\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-y^2+4\ge 0\\ x\ge 4\\ y\ge 2\end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2-y^2+4}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-4}-\sqrt{y-2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-y^2+4)-4x}{\sqrt{x^2-y^2+4}+2\sqrt{x}}+\frac{(x-4)-(y-2)}{\sqrt{x-4}+\sqrt{y-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y-2)(x+y-2)}{\sqrt{x^2-y^2+4}+2\sqrt{x}}+\frac{x-y-2}{\sqrt{x-4}+\sqrt{y-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)\left(\frac{x+y-2}{\sqrt{x^2-y^2+4}+2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-4}+\sqrt{y-2}}\right)=0\Leftrightarrow x-y-2=0$$

Thay vào (2) ta được $\sqrt{y(9-y)}+\sqrt{y(4-y)}=6$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có:

$$\left(\sqrt{y}.\sqrt{9-y}+\sqrt{4-y}.\sqrt{y}\right)^2\le(y+4-y)(9-y+y)=36\Rightarrow\sqrt{y(9-y)}+\sqrt{y(4-y)}\le 6$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{y}{9-y}=\frac{4-y}{y}\Leftrightarrow y=\frac{36}{13}\Rightarrow x=\frac{62}{13}$ (thỏa mãn)

Kết luận: Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{62}{13};\frac{36}{13}\right)$

Bài 22. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^2+x+y-1}+\sqrt{y}=x+\sqrt{1-x}\,(1)\\ \sqrt{y^2+x}+\frac{1}{y+1}=\frac{x+2y+4}{4}\,(2)\end{cases}$ với $x\ge 0$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases}x^2+x+y-1\ge 0\\ x+y^2\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+y-1}-x+\sqrt{y}-\sqrt{1-x}=0\Leftrightarrow\frac{x+y-1}{\sqrt{x^2+x+y-1}+x}+\frac{y+x-1}{\sqrt{y}+\sqrt{1-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x+y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x+y-1}+x}+\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{1-x}}\right)=0\Leftrightarrow x+y-1=0\ (\text{Do } x\ge 0)$$

Thay vào (2) ta được: $\sqrt{y^2-y-1}+\frac{1}{y+1}=\frac{y+5}{4}$

Ta có: $\sqrt{y^2-y-1}\ge\dfrac{y+1}{2}$ với $y\ge 0$

Thật vậy: $\left(y^2-y-1\right)^2-\left(\dfrac{y+1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{16}(y-1)^2\left(5y^2-2y+5\right)\ge 0$

Suy ra $\sqrt{y^2-y+1}\ge\dfrac{y+1}{2}(3)$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\dfrac{y+1}{4}+\dfrac{1}{y+1}\ge 1(4)$

Cộng vế tương ứng (3), (4) rồi rút gọn ta được: $\sqrt{y^2-y+1}+\dfrac{1}{y+1}\ge\dfrac{y+5}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $y=1\Leftrightarrow x=0$ (Thỏa mãn)

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(0;1)$

Bài 23. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2+y+\sqrt{x-y}=x+xy+y^2\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{x+y}=x^2-1\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 1\\ x-y\ge 0\\ x+y\ge 0\end{cases}$

Từ (1) ta có: $x-y-\sqrt{x-y}-2x^2+xy+y^2=0\Leftrightarrow(x-y)-\sqrt{x-y}-(x-y)(2x+y)=0$

$\Leftrightarrow(x-y)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}-2x-y\right)=0\Leftrightarrow x=y$ (Do $1-\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}-2x-y<1-2x<0$)

Thay vào (2) ta được: $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}=x^2-1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(\sqrt{2x}-2\right)=x^2-4$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x}+2}-(x+2)\right]=0 \Leftrightarrow x=2$

(Do $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x}+2}-(x+2)<1+1-x-2=-x<0$)

Với $x=2 \Rightarrow y=2$ (Thỏa mãn)

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$

Bài 24. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{y+2x-1}+\sqrt{1-y}=y+2\\ x\sqrt{x}=\sqrt{y(x-1)}+\sqrt{x^2-y}\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases}y+2x-1\ge 0\\ y\le 1\\ x\ge 0\\ y(x-1)\ge 0\\ x^2-y\ge 0\end{cases}$

(2) tương đương với $\sqrt{xy-y}+\sqrt{x^2-y}=x\sqrt{x}\,(3)$

Ta có: $\sqrt{xy-y}-\sqrt{x^2-y}=\dfrac{xy-x^2}{\sqrt{xy-y}+\sqrt{x^2-y}}=\dfrac{xy-x^2}{x\sqrt{x}}=\dfrac{y-x}{\sqrt{x}}(4)$

Cộng vế (3) với (4) ta được: $2\sqrt{xy-y}=x\sqrt{x}+\dfrac{y-x}{\sqrt{x}}=\dfrac{x^2-x+y}{\sqrt{x}}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{y\left(x^2-x\right)}=x^2-x+y\Rightarrow 4y\left(x^2-x\right)=\left(x^2-x+y\right)^2\Leftrightarrow\left(x^2-x-y\right)^2=0\Leftrightarrow y=x^2-x$$

Thay vào (1) ta được: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{x^2+x-1}\le\frac{x^2+x-1+1}{2}=\frac{x^2+x}{2}$$

$$\sqrt{-x^2+x+1}\le\frac{-x^2+x+1+1}{2}=\frac{-x^2+x+2}{2}$$

Cộng vế ta được: $x^2-x+2\le\frac{x^2+x}{2}+\frac{-x^2+x+2}{2}=x+1$

$\Rightarrow\left(x-1\right)^2\le 0\Leftrightarrow x=1\Leftrightarrow y=0$ (thỏa mãn)

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x,y\right)=\left(1;0\right)$

Bài 25. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x\sqrt{x}+xy^2+\sqrt{x^2-y}=2\sqrt{x\left(y+1\right)}+y^2\sqrt{y+1}+1 & (1)\\ \sqrt{2y-x+5}+y+1=x+\sqrt{21x-17} & (2)\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 1\\ 2y-x+5\ge 0\\ y\ge -1\end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{y+1}\right)\left(2\sqrt{x}+y^2\right)+\left(\sqrt{x^2-y}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(2\sqrt{x}+y^2\right)\left(x^2-y-1\right)}{x+\sqrt{y+1}}+\frac{x^2-y-1}{\sqrt{x^2-y}+1}=0\Leftrightarrow\left(x^2-y-1\right)\left(\frac{2\sqrt{x}+y^2}{x+\sqrt{y+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-y}+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y+1$$

Thay vào (2) ta được $\sqrt{2x^2-x+3}+x^2-x-\sqrt{21x-17}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-x+3}-(x+1)+x^2-3x+2+(3x-1)-\sqrt{21x-17}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}\right)=0$$

Do $x \ge \frac{17}{21} \Rightarrow x > \frac{1}{3} \Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}>0$

Suy ra phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Kết luận: Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x,y)=(1;0),(2;3)$

Bài 26. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2+8y^2-10x+9y=y\sqrt{6(x+1)}-5 \quad (1) \\ \sqrt{1-x}-\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}=\dfrac{1}{y}\sqrt{x(y^2+1)}+\sqrt{-\dfrac{x(1+y)}{y}} \quad (2) \end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases} 0<x\le 1 \\ -1\le x<0 \end{cases}$

Phương trình (2) tương đương với: $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}-\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}=-\sqrt{\dfrac{y^2+1}{y^2}}+\sqrt{-\dfrac{1+y}{y}}$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}-\sqrt{-\frac{1+y}{y}}\right)-\left(\sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}}+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)=0\Leftrightarrow\frac{\frac{x+y}{xy}}{\sqrt{\frac{1-x}{x}}+\sqrt{-\frac{1+y}{y}}}-\frac{\frac{(x-y)(x+y)}{x^2y^2}}{\sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}}+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{x}}+\sqrt{-\frac{1+y}{y}}}+\frac{x-y}{\sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}}+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}\right)=0\Leftrightarrow x+y=0\Leftrightarrow x=-y$$

Thay vào (2) ta được: $12x^2-19x+5=-x\sqrt{6(x+1)}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x\left(12x^2-19x+5\right)\ge 0\\ \left(12x^2-19x+5\right)^2=x^2(6x+6)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x\left(12x^2-19x+5\right)\ge 0\\ (2x-1)(3x-5)\left(24x^2-25x+5\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\\ x=\frac{25+\sqrt{145}}{48}\Rightarrow y=-\frac{25+\sqrt{145}}{48}\end{array}\right.$$

Kết luận: Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x,y)=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{25+\sqrt{145}}{48};-\frac{25+\sqrt{145}}{48}\right)$

Bài 27. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} & (1)\\ (x+1)\left[y+\sqrt{xy}+x(1-x)\right]=4 & (2)\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $x,y\ge 0$

Nhận thấy $x=y=0$ không thỏa mãn (2) nên ta có $\sqrt{x}+\sqrt{y}=0$

Phương trình (1) tương đương với $\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+\sqrt{x}-y-\sqrt{y}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)-y^2}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)\left(\sqrt{xy}-2+y\right)}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{\sqrt{xy}-2+y}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right]=0\ (3)$$

Ta có phương trình (2) tương đương với $y+\sqrt{xy}=\frac{4}{x+1}+x^2-x$

Ta có: $\frac{4}{x+1}+x^2-x-2=\frac{4+(x+1)\left(x^2-x-2\right)}{x+1}=\frac{(x+2)(x-1)^2}{x+1}\ge 0$ với $x\ge 0$

Suy ra: $\sqrt{xy}-2+y\ge 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{xy}-2+y}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0$

Nên $(3)\Leftrightarrow x=y$ thay vào (2) ta được $(x+1)\left(3x-x^2\right)=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=1 \\ x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}\Rightarrow y=\frac{1+\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$

Kết luận: Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x,y)=(1;1),\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$

Bài 28: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2-x-y}.\sqrt[3]{x-y}=y \\ \sqrt[4]{(x-2)(4-x)}+\sqrt[4]{y-1}+\sqrt[4]{3-y}+6(y+1)\sqrt{3x}=x^3+30 \end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - x - y \ge 0 \\ 2 \le x \le 4 \\ 1 \le y \le 3 \end{cases}$

Phương trình (1) tương đương với: $\left(\sqrt{x^2-x-y}.\sqrt[3]{x-y}-\sqrt{x^2-x-y}\right)+\left(\sqrt{x^2-x-y}-y\right)=0$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-x-y}\left(\sqrt[3]{x-y}-1\right)+\left(\sqrt{x^2-x-y}-y\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-x-y}\left(x-y-1\right)}{\sqrt[3]{\left(x-y\right)^2}+\sqrt[3]{x-y}+1}+\frac{\left(x-y-1\right)\left(x+y\right)}{\sqrt{x^2-x-y}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y-1\right)\left[\frac{\sqrt{x^2-x-y}}{\left(\sqrt[3]{x-y}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{x+y}{\sqrt{x^2-x-y}+y}\right]=0 \Leftrightarrow x=y+1$$

Thay vào (2) ta được: $\sqrt[4]{\left(x-2\right)\left(4-x\right)}+\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}+6x\sqrt{3x}=x^3+30$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\begin{cases} \sqrt[4]{\left(x-2\right)\left(4-x\right)} \le \sqrt{\dfrac{x-2+4-x}{2}}=1 \\ 6x\sqrt{3x}=2\sqrt{27x^3} \le x^3+27 \\ \sqrt[4]{x-2}=1.1.1.\sqrt[4]{x-2} \le \dfrac{1+1+1+x-2}{4}=\dfrac{x+1}{4} \\ \sqrt[4]{4-x}=1.1.1\sqrt[4]{4-x} \le \dfrac{1+1+1+4-x}{4}=\dfrac{7-x}{4} \end{cases}$

Từ các BĐT trên ta được: $\sqrt[4]{\left(x-2\right)\left(4-x\right)}+\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}+6x\sqrt{3x} \le x^3+30$

Dấu bằng xảy ra khi $x=3 \Rightarrow y=2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\left(x,y\right)=\left(3;2\right)$

Bài 29: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)\left(\sqrt{2y+3}+1\right)+\sqrt{x+y+4}+1=0\\ 2x^3+5x^2+4x+1=x(x+y+4)\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases}y\ge -\dfrac{3}{2}\\ x+y+4\ge 0\\ x^2+\dfrac{1}{x}\ge 0\end{cases}$

Phương trình (1) tương đương với: $x-y+1+\sqrt{x+y+4}+(x-y)\sqrt{2y+3}=0$

$$\Leftrightarrow x-y+1+\sqrt{x+y+4}-\sqrt{2y+3}+(x-y+1)\sqrt{2y+3}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1+\frac{x-y+1}{\sqrt{x+y+4}+\sqrt{2y+3}}+(x-y+1)\sqrt{2y+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+y+4}+\sqrt{2y+3}}+\sqrt{2y+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1$$

Thay vào (2) ta được: $2x^3+5x^2+4x+1=x(2x+5)\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}$

$\Leftrightarrow 2x^2+\dfrac{1}{x}+5x+4=(2x+5)\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}} \Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{x}-2x\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}+x^2-5\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}+5x+4=0$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}-x\right)^2-5\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}-x\right)+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}-x=1\\\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}-x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=0\\x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{3}{2}\\x=\frac{-4-3\sqrt{2}}{4}\Rightarrow y=-\frac{3\sqrt{2}}{4}\\x=\frac{-4+3\sqrt{2}}{4}\Rightarrow y=\frac{3\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.$$

Bài 30: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+2y)(x-y-1)+\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}=0 & (1)\\3\sqrt{3x-2}+4\sqrt{2x+y-2}=5\sqrt[3]{x+5y+2}-3 & (2)\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases}2x^2+3xy+4y^2\geq 0\\x\geq\frac{2}{3}\\2x+y\geq 2\end{cases}$

Phương trình (1) tương đương với:

$$(x+2y)(x-y)+\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}-(x+2y)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)(x+2y)+\frac{x(x-y)}{\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}+x+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(x+2y+\frac{x}{\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}+x+2y}\right)=0(3)$$

Từ (2) ta có: $5\sqrt[3]{x+5y+2}\geq 3\Rightarrow\sqrt[3]{x+5y+2}\geq\frac{3}{5}\Rightarrow x+5y+2>0$

Mà $2x+y\ge 2\Rightarrow \left(x+5y+2\right)+\left(2x+y\right)>2\Rightarrow 3\left(x+2y\right)>0\Rightarrow x+2y>0$

Nên $\left(3\right)\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y$ thay vào (2) ta được: $7\sqrt{3x-2}=5\sqrt[3]{6x+2}-3$

Đặt $a=\sqrt[3]{6x+2},b=\sqrt{3x-2}\left(a,b\ge 0\right)$ ta được:

$$\begin{cases}7b=5a-3\\ a^3-2b^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{5a-3}{7}\\ a^3-2\left(\dfrac{5a-3}{7}\right)^2-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$

Bài 31: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2\sqrt{2x^3+4x^2+x^2y^2+2xy^2}+\sqrt{2x^2+xy^2}=\left(2x+4+\sqrt{x+2}\right)y\\ \dfrac{x-2}{y}+\sqrt{x-2}=\sqrt{8-\dfrac{35}{y}+\dfrac{38}{y^2}}+\sqrt{8y-19}\end{cases}$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 2\\ y\ge \dfrac{19}{8}\end{cases}$

Phương trình (1) tương đương với:

$$2\left[\sqrt{2x^3+4x^2+x^2y^2+2xy^2}-\left(xy+2y\right)\right]+\left(\sqrt{2x^2+xy^2}-y\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$\frac{-4\left(y-x\right)\left(x+y\right)\left(x+2\right)}{\sqrt{2x^3+4x^2+x^2y^2+2xy^2}+xy+2y}+\frac{-2\left(y-x\right)\left(y+x\right)}{\sqrt{2x^2+xy^2}+y\sqrt{x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)\left[\frac{4(x+2)}{\sqrt{2x^3+4x^2+x^2y^2+2xy^2}+xy+2y}+\frac{2}{\sqrt{2x^2+xy^2}+y\sqrt{x+2}}\right]=0 \Leftrightarrow x=y$$

Thay vào (2) ta được: $\frac{x-2}{2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{8-\frac{35}{x}+\frac{38}{x^2}}+\sqrt{8x-19}$

$$\Leftrightarrow x-2+x\sqrt{x-2}=\sqrt{8x^2-35x+38}+x\sqrt{8x-19}$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{8x-19}-\sqrt{x-2}\right)+\sqrt{8x^2-35x+38}-(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(7x-17)}{\sqrt{8x-19}+\sqrt{x-2}}+\frac{(x-2)(7x-17)}{\sqrt{8x^2-35x+38}+x-2}=0$$

$$\Leftrightarrow (7x-17)\left(\frac{x}{\sqrt{8x-19}+\sqrt{x-2}}+\frac{x-2}{\sqrt{8x^2-35x+38}+x-2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{17}{7} \text{ (do } x\ge 2\text{)} \Rightarrow y=\frac{17}{7}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(\frac{17}{7};\frac{17}{7}\right)$

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Câu 1 : Giải HPT : $\begin{cases}(x^2+1)y^4+1=2xy^2(y^3-1)\\ xy^2(3xy^4-2)=xy^4(x+2y)+1\end{cases}$

Thế $1=xy^2(3xy^4-2)-xy^4(x+2y)$ vào PT (2) ta được

: $y^4(1+3x^2y^2-4xy)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\\ xy=1\\ xy=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Thấy $y=0$ không phải nghiệm của hệ

Với $xy=1\Rightarrow y^2+y^4+1=2y^4-2y \Leftrightarrow (y^2-y-1)(y^2+y+1)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\Rightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}\\ y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}\end{array}\right.$$

Với $xy=\dfrac{1}{3}\Rightarrow \dfrac{y^2}{9}+y^4+1=\dfrac{2y^4}{3}-\dfrac{2y}{3}\Leftrightarrow \dfrac{y^4}{3}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{2y}{3}+1>0\forall y$

Câu 2: Giải HPT : $\begin{cases} x+y^3=2xy^2 & (1) \\ x^3+y^9=2xy^4 & (2) \end{cases}$

PT(2) $\Leftrightarrow (x+y^3)\left(x^2-xy^3+y^3\right)=2xy^4$

$\Leftrightarrow 2xy^2\left(x^2-xy^3+y^3\right)=2xy^4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ x^2-xy^3+y^6-y^2=0 \quad (*) \end{array}\right.$

(*) $\Leftrightarrow \left(x+y^3\right)^2-3xy^3-y^2=0$

$\Leftrightarrow 4xy^4-3xy^3-y^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ xy=1 \\ xy=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

Với xy=1 $\Rightarrow x=\dfrac{1}{y}$

(1) $\Leftrightarrow y^4-2y^2+1=0 \Leftrightarrow y=\pm1 \Leftrightarrow x=\pm1$

Với $xy=-\dfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \ \mathrm{x}=-\dfrac{1}{4y}$

(1) $\Leftrightarrow 4y^4+2y^2-1=0$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\quad \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}\quad \Rightarrow x=\mp\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{5}-1}}$$

Vậy hệ có nghiệm (x;y) = (0;0), $(\pm1;\pm1)$, $\left(\mp\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{5}-1}};\pm\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}\right)$

Câu 3. Giải HPT : $\begin{cases}6x^4-(x^3-x)y^2-(y+12)x^2+6=0\\5x^4-(x^2-1)^2y^2-11x^2+5=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6(x^2-1)^2=xy^2(x^2-1)+x^2y\\5(x^2-1)^2=x^2+(x^2-1)^2y^2\end{cases}$$

Dễ thấy x=y=0 không phải là nghiệm của hệ.

Ta có: $\begin{cases}6\frac{(x^2-1)^2}{x^2y^2}=\frac{x^2-1}{x}+\frac{1}{y}\\5\frac{(x^2-1)^2}{x^2y^2}=\frac{1}{y^2}+\frac{(x^2-1)^2}{x^2}\end{cases}$ (*)

Đặt $\begin{cases}\frac{x^2-1}{x}=a\\\frac{1}{y}=b\end{cases}$ $(a,b\neq0)$

Hệ trở thành: $\begin{cases} 6a^2b^2 = a + b \\ 5a^2b^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 36a^4b^4 = 2ab + 5a^2b^2 \Leftrightarrow ab = \dfrac{1}{2}$

Với $ab = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x^2 - 1}{xy} = \dfrac{1}{2}$

(*) $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm (x;y) = $\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}; 1\right), \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; 2\right)$

Câu 4 : Giải HPT : $\begin{cases}(4x^2-4xy+4y^2-51)(x-y)^2+3=0\\(2x-7)(x-y)+1=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[3(x-y)^2+(x+y)^2-51\right](x-y)^2+3=0\\\left[(x+y)+(x-y)-7\right](x-y)+1=0\end{cases}$$

Đặt

$$\begin{cases}x+y=a\\x-y=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3b^4+a^2b^2-51b^2+3=0\\(a+b-7)+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{-b^2+7b-1}{b}\\(b^2-4b+1)(2b^2-b+2)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=2+\sqrt{3}\\a=3\end{cases}\\\begin{cases}b=2-\sqrt{3}\\a=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=3\\x-y=2+\sqrt{3}\end{cases}\\\begin{cases}x+y=3\\x-y=2-\sqrt{3}\end{cases}\end{array}\right.$$

Câu 5 : Giải HPT : $\begin{cases}3x^3+5y^3-2xy=6\\2x^3+3y^3+3xy=8\end{cases}$

Rút lần lượt x^3, y^3 theo xy ta được :

$$\begin{cases}x^3=22-21xy\\y^3=13xy-12\end{cases} \Rightarrow x^3y^3=(22-21xy)(13xy-12) \Rightarrow xy=1 \Rightarrow \begin{cases}3x^3+5y^3=8\\2x^3+3y^3=5\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=y=1$$

Đoạn giải PT bậc 3 ẩn xy có 2 nghiệm rất lẻ không biết có phải do đề không ạ…

Câu 6:Giải HPT : $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=2\left(x^2+y^2\right) & (1) \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2y}=y^2-x^2 & (2) \end{cases}$

ĐK: $x, y \neq 0$

$(1)-(2) \quad \Rightarrow \quad y^3+3x^2y=1$

$(1)+(2) \quad \Rightarrow \quad x^3+3xy^2=2$

Ta có hệ mới: $\begin{cases} x^3+3xy^2=2 \\ y^3+3x^2y=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3=3 \\ (x-y)^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt[3]{3} \\ x-y=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \end{cases}$

Câu 7 : Giải HPT : $\begin{cases} x^2+xy+y^2=(x-y)^4 \\ x^2-xy+y^2=x-y \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} = b^4 \\ \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3b^2}{4} = b \end{cases}$

Thế ta được : $b^4 - \dfrac{b^2}{4} - 3b + \dfrac{9b^2}{4} = 0 \Leftrightarrow b^3 + 2b^2 - 3b = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 1 \\ b = -3 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Câu 8: Giải HPT : $\begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{3}{2y} - \dfrac{1}{x} & (1) \\ (x + y)^3 = 5 \end{cases}$

ĐK: $x, y \neq 0$

PT(1) $\Leftrightarrow (x - y)(x + y) = \dfrac{x - y}{xy} + \dfrac{1}{2y}$

Đặt $\begin{cases} x-y=a \\ x+y=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=b-a \\ xy=\dfrac{b^2-a^2}{4} \end{cases}$

Hệ trở thành: $\begin{cases} ab=\dfrac{4a}{b^2-a^2}+\dfrac{1}{b-a} \\ b^3=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b^3a-a^3b=5a+b \\ b^3=5 \end{cases} \Leftrightarrow a^3b+b=0 \quad \Leftrightarrow a=-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt[3]{5} \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt[3]{5}-1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt[3]{5}+1}{2} \end{cases}$

Câu 10: Giải HPT : $\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3 \\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=8 \end{cases}$

ĐK: $x+\dfrac{1}{y}\ge 0,\ \mathrm{x+y}\ge 3,\ \mathrm{y}\ne 0$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}} = a \\ \sqrt{x+y-3} = b \end{cases}$ $\quad a,b \geq 0$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} a+b=3 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=1 \\ x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4-\sqrt{10} \\ y=3+\sqrt{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x=4+\sqrt{10} \\ y=3-\sqrt{10} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=4 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Câu 11: Giải HPT $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-y}+\dfrac{5y}{x+y^2}=4 & (1) \\ 5x+y+\dfrac{x^2-5y^2}{xy}=5 & (2) \end{cases}$

ĐK: $x^2 - y \neq 0,\ x+y^2 \neq 0,\ xy \neq 0$

PT(1) $\Leftrightarrow x^2 - 5y^2 + xy^2 + 5x^2y = 4\left(x^2 - y\right)\left(x + y^2\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} - \frac{5y}{x} + y + 5x = 4\left(x - \frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y} + y\right)$$

Đặt $\begin{cases} y + \dfrac{x}{y} = a \\ x - \dfrac{y}{x} = b \end{cases}$ Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} a + 5b = 5 \\ a + 5b = 4ab \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{2} \\ x - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 2x = 5y \\ 2x^2 - 2y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3(x-y) - 2(x-y)(x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = \dfrac{3}{2} \\ 2x + 2y = 3 \quad (*) \end{array}\right.$$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Câu 12 : Giải HPT : $\begin{cases}\sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5\\ \sqrt{2x+y}+x-y=2\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{2x+y}\\ b=\sqrt{7x+y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x=b^2-a^2\\ 5y=7a^2-2b^2\end{cases}$

Ta có hệ mới :

$$\begin{cases}a+b=5\\ 5a+b^2-a^2-(7a^2-2b^2)=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\ 3(5-a)^2-8a^2+5a=10\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=5-a\\ a=\dfrac{-5+\sqrt{77}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}b=5-a\\ a=\dfrac{-5-\sqrt{77}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$ (Bài này không hiểu sao ra lẻ vậy)

Câu 13: $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1 \\ (1-x)(1+y)=2 \end{cases}$

ĐK: $\sqrt{1-x^2}\geq 0, \sqrt{1-y^2}\geq 0$

PT(1) : $\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)\leq\sqrt{\left(x^2+1-x^2\right)\left(1-y^2+y^2\right)}=1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{1-y^2}=\dfrac{y^2}{1-x^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right.$

Với $x=y$ thay vào PT(2) không thỏa mãn.

Với $x^2+y^2=1$

PT(2) $\Leftrightarrow x-y+xy+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2y^2+2xy+1=1-2xy$

$\Leftrightarrow\begin{cases} xy=0 \\ xy=-4 \end{cases}$ Ta giải được $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ thỏa mãn hệ.

Câu 13 : $\begin{cases} \sqrt{3x-2y}+3\sqrt{8+x-y}=10 \\ \sqrt{8+x-y}-2\sqrt{4-2x+y}=1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{3x-2y}=a \\ \sqrt{8+x-y}=b \end{cases}\Rightarrow\sqrt{4-2x+y}=\sqrt{b^2-a^2-4}$ .Ta có hệ mới :

$$\begin{cases} a+3b=10 \\ b-2\sqrt{b^2-a^2-4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10-3b \\ b-1=2\sqrt{b^2-(10-3b)^2-4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=10-3b \\ b=\dfrac{121+4\sqrt{55}}{33} \end{cases} \\ \begin{cases} a=10-3b \\ b=\dfrac{121-4\sqrt{55}}{33} \end{cases} \end{array}\right.$$

(Lại một bài lẻ khủng khiếp…)

Câu 14 : Giải HPT : $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+6}=y+1 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

PT(1) $\Leftrightarrow x^2+2x+6=y^2+2y+1$ (3)

Lấy $(3)-(2)=2y^2+(x+2)y-2x-12=0 \Leftrightarrow (y-2)(2y+x+6)=0$

Với $y=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Với $x=-2y-6 \Rightarrow (2y+6)^2-(2y+6)y+y^2=7 \Leftrightarrow 3y^2+18y+29>0 \forall y$

Câu 15: Giải HPT $\begin{cases} x^2+1+y(x+y)=4y \\ (x^2+1)(x+y-2)=y \end{cases}$

Thấy $y=0$ không phải là 1 nghiệm của phương trình.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x^2+1}{y}\right)+x+y=4 \\ \left(\dfrac{x^2+1}{y}\right)(x+y-2)=1 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}=a \\ x+y=b \end{cases}$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} a+b=4 \\ a(b-2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases} \end{array}\right.$$

Câu 16:Giải HPT : $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+6}-y=1 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2x-2y+5=0 \\ (x+y)^2=7+xy \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} x-y=a \\ x+y=b \end{cases} \Rightarrow$ xy$=\dfrac{b^2-a^2}{4}$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} ab+2a+5=0 \\ 3b^2+a^2=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{5}{b+2} \\ 3b^2+\dfrac{25}{b^2+4b+4}=28 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{5}{b+2}\\ \left(b^2-2b-3\right)\left(3b^2+18b+29\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-1\\ b=3\end{cases}\\ \begin{cases}a=-5\\ b=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=-1\\ x+y=3\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=-5\\ x+y=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

Câu 17 : Giải HPT : $\begin{cases}(x-1)(y-1)(x+y-2)=6\\ x^2+y^2-2x-2y-3=0\end{cases}$

$$\begin{cases}x-1=a\\ y-1=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ab(a+b)=6\\ a^2+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab(a+b)=6\\ (a+b)^2-2ab=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}36-2a^3b^3-5a^2b^2=0\\ ab(a+b)=6\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}ab=2\\ a+b=3\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=2\\ a=1\end{cases}\\ \begin{cases}b=1\\ a=2\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=1\\ y-1=2\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=2\\ y-1=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Câu 18: $\begin{cases}(x-1)(y-1)(x+y-2)=6\\ x^2+y^2-2x-2y-3=0\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}x-1=a\\ y-1=b\end{cases}$, hệ đã cho trở thành: $\begin{cases}ab(a+b)=6\\ a^2+b^2=5\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2=\dfrac{36}{a^2b^2}\\ a^2+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow ab=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=-2\\ b=-1\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\ b=-2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=2\\ y-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=-2\\ y-1=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=1\\ y-1=2\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=-1\\ y-1=-2\end{cases}\end{array}\right.$$

Câu 19 : Giải HPT : $\begin{cases}2x^2+xy=1\\ \dfrac{9x^2}{2(1-x)^4}=1+\dfrac{3xy}{2(1-x)^2}\end{cases}$

Dễ thấy $x=0$ không phải nghiệm của HPT $\Rightarrow x\neq 0\Rightarrow y=\dfrac{1-2x^2}{x}$. Thế vào PT2 ta

được :

$$\frac{9x^2}{2(1-x)^4}=1+\frac{3(1-2x^2)}{2(1-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2=2(1-x)^4+3(1-2x^2)(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow (2x^2+2x-1)(2x^2-4x+5)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\Rightarrow y=2 \\ x=\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}\Rightarrow y=2 \end{array}\right.$$

Câu 20 : Giải HPT : $\begin{cases} x^3y+x^3+xy+x=1 \\ 4x^3y^2+4x^3-8xy-17x=-8 \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (xy+x)(x^2+1)=1 \\ 4x(xy+x)^2-8xy(x^2+1)-17x=-8 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} xy+x=a\Rightarrow xy=a-x \\ x^2+1=b \end{cases}$

Hệ trở thành : $\begin{cases} ab=1 \\ 4a^2+8b-17=0 \end{cases}$

$\Rightarrow (2a-1)(2a^2+2-8)=0$. Do $0<a=\dfrac{1}{b}\leq 1\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}\Rightarrow b=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy + x = \dfrac{1}{2} \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{-3}{2} \end{cases} \end{array} \right.$$

Câu 21 : Giải HPT : $\begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 \\ x^4 + 3x^2y - 5x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y + xy - 3x = 0 \\ (x^2 + y)^2 + x^2y - 5x^2 = 0 \end{cases}$

Thế $x^2 + y = 3x - xy$ vào PT2 ta được

$$9x^2 + x^2y^2 - 6x^2y + x^2y - 5x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(y^2 - 5y + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = 4 \Rightarrow x^2 + x + 4 = 0 (L) \end{array} \right.$$

Câu 22 : Giải HPT : $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1 \\ x^2+y^2-\dfrac{2x}{y}=4 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x^2+y^2-1=a \\ \dfrac{x}{y}=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}=1 \\ a-2b=3 \end{cases} \Rightarrow$ giải PT bậc nhất cơ bản

Câu 23 : Giải HPT : $\begin{cases} x^2-y^2=\dfrac{3}{2y}-\dfrac{1}{x} \\ (x+y)^3=5 \end{cases}$

PT(1) $\Leftrightarrow (x+y)(x-y)=\dfrac{3x-2y}{2xy}$. Thế PT(2) vào PT(1) ta được :

$$\frac{5(x-y)}{(x+y)^2}=\frac{6x-4y}{4xy}=\frac{5(x-y)-(6x-4y)}{(x+y)^2-4xy}=\frac{-(x+y)}{(x-y)^2}$$

$$\Rightarrow 5(x-y)^3=-(x+y)^3=-5 \Rightarrow x-y=-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=\sqrt[3]{5} \end{cases}$$

Câu 24 : Giải HPT : $\begin{cases} x^4 - 2x = y^4 - y \\ (x^2 - y^2)^3 = 3 \end{cases}$

Đặt : $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$. Đặt kì diệu :

$c^3 = 3 \Rightarrow a^3b^3 = 3 = c^3 \Rightarrow ab = c$ .Khi đó :

$$x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2+y^2) = ab\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

$$= 2x - y = a + b - \frac{a-b}{2} = \frac{a+3b}{2} = \frac{a+c^3b}{2}$$

$$\Rightarrow PT(1) \Leftrightarrow ab\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) = \frac{a+c^3b}{2} \Leftrightarrow c(a^2+b^2) = a + c^3b$$

Ta có hệ mới : $\begin{cases} c(a^2+b^2) = a + c^3b \\ ab = c \Rightarrow b = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

$$\Rightarrow c(a^2 + \frac{c^2}{a^2}) = a + \frac{c^4}{a} \Leftrightarrow (ac-1)(a - \frac{c^3}{a^2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ac = 1 \\ a = c \end{array}\right.$$

Với $a=c$: $\Rightarrow \begin{cases} a=c=\sqrt[3]{3} \\ ab=c\Rightarrow b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt[3]{3} \\ x-y=1 \end{cases}$

Với $ac=1$: $\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ b=c^2=\sqrt[3]{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ x-y=\sqrt[3]{9} \end{cases}$

Câu 25 : Giải HPT : $\begin{cases} \dfrac{2xy+y\sqrt{x^2-y^2}}{14}=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{2}} \\ \sqrt{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3}+\sqrt{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^3}=9 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2}}=a \\ \sqrt{\dfrac{x-y}{2}}=b \end{cases}$ $(a^3+b^3=9\Rightarrow a+b>0;a,b\ge 0)\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=x \\ a^2-b^2=y \end{cases}$. Khi đó

hệ trở thành :

$$\begin{cases} \dfrac{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)+(a^2-b^2)2ab}{14}=a+b \\ a^3+b^3=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)\left[2(a^3-b^3)-14\right]=0 \\ a^3+b^3=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 7 \\ a^3 + b^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 8 \\ b^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Câu 26 : Giải HPT : $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 2 \\ \dfrac{72xy}{x-y} + 29\sqrt[3]{x^2 - y^2} = 4 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$. Hệ trở thành :

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{a+b}{2} + 1} + \sqrt{\dfrac{a-b}{2} + 1} = 2 \\ \dfrac{18(a^2 - b^2)}{b} + 29\sqrt[3]{ab} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a+2)^2 - b^2} = 2 - a \\ \dfrac{18(a^2 - b^2)}{b} + 29\sqrt[3]{ab} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = b^2 \\ 9b^3 - 112b - 128 = \\ a \le 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=4 \\ b=\dfrac{-4}{3} \Rightarrow a=\ldots \Rightarrow x=\ldots; y=\ldots \\ b=\dfrac{-8}{3} \end{array}\right.$$

Câu 26 : Giải HPT : $\begin{cases} x^2y^2+2y^2+4=7xy \\ x^2+2y^2+6y=3xy^2 \end{cases}$

Dễ thấy $y=0$ không phải nghiệm của hệ . Khi đó hệ tương đương :

$$\begin{cases} x^2-\dfrac{7x}{y}+2+\dfrac{4}{y^2}=0 \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2+3\left(\dfrac{2}{y}-x\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{2}{y}-x\right)^2-\dfrac{3x}{y}+2=0 \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2+3\left(\dfrac{2}{y}-x\right)=0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} \dfrac{2}{y}-x=a \\ \dfrac{x}{y}=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-3b+2=0 \\ b^2+3a+2=0 \end{cases} \Rightarrow (a+b)(a-b-3)=0$

Với $a+b=0 \Rightarrow a^2+3a+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \Rightarrow b=1 \\ a=-2 \Rightarrow b=2 \end{array}\right.$

Với $a-b=3 \Rightarrow a^2-3a+11=0$ (Loại)

Câu 27 : Giải HPT : $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3y-1 \\ x^3+x^2y=x^2-x+1 \end{cases}$

Dễ thấy $x=0$ không phải nghiệm của hệ .

$\Rightarrow x.(1)-(2)=0 \Leftrightarrow x^2+xy^2-3xy+1=0$ (3)

Lấy $(3)-(1)$ ta được : $xy^2-y^2-4xy+3y=0$

Xét thấy $x=1$ không phải nghiệm của hệ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\dfrac{4x-3}{x-1} \end{array}\right.$

Với $y=0$ thay vào không thỏa mãn hệ .

Với $y=\dfrac{4x-3}{x-1}$ thay vào (2) ta được :

$$(x^2+x-1)^2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow y=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow y=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Câu 28 : Giải HPT : $\begin{cases} (x+y+3)\sqrt{x-y}+2y+4=0 \\ (x-y)(x^2+4)=y^2+1 \end{cases}$

$$PT(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x-y}+1)(x+y+4-\sqrt{x-y})=0 \Rightarrow \sqrt{x-y}=x+y+4$$

Thế $4=\sqrt{x-y}-x-y$ vào PT(2) ta được :

$$(x-y)(x^2+\sqrt{x-y}-x-y)=y^2+1$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-y-1)+(\sqrt{x-y})^3-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)(x^2+\frac{x-y+\sqrt{x-y}+1}{\sqrt{x-y}+1})=0$$

Ta được hệ mới : $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=\sqrt{x-y}-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

Câu 29 : Giải HPT : $\begin{cases} x^2+2xy+y=0 \\ x^3+3xy+2\sqrt{y+1}(x+\sqrt{x^2y+2})=4 \end{cases}$

Thế $x^2+y=-2xy$ vào PT(2) ta được :

$$-2x^2y-x^2-y+2x\sqrt{y+1}+2\sqrt{y+1}\sqrt{x^2y+2}-4=0$$

$$\Leftrightarrow (x\sqrt{y+1}-1)^2+(\sqrt{x^2y+2}-\sqrt{y+1})^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{y+1}=1 \\ \sqrt{x^2y+2}=\sqrt{y+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(y+1)=1 \\ x^2y+2=y+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y+2=3-x^2 \\ x^2y+2=y+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+y=2 \Rightarrow xy=-1$$

Dễ thấy $x=0$ không phải nghiệm của hệ $\Rightarrow y=\dfrac{-1}{x}\Rightarrow x^2-\dfrac{1}{x}=2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow y=1 \\ x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\Rightarrow y=\dfrac{-2}{\sqrt{5}+1} \\ x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow y=\dfrac{2}{1-\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện $\Rightarrow (x;y)=(-1;1);(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2};\dfrac{-2}{\sqrt{5}+1})$

Câu 30 : Giải HPT : $\begin{cases} (2x-1)\sqrt{x+y}=(6-x-y)\sqrt{2-x} \\ 3x^2-4xy-7y^2=-72 \end{cases}$

Xét thấy $x=2\Rightarrow\sqrt{2-x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x+y}=0\Rightarrow y=-2$ không thỏa PT(2)

$$\Rightarrow \sqrt{x+y},\sqrt{2-x}>0$$

PT(1) $\Leftrightarrow \dfrac{6-(x+y)}{\sqrt{x+y}}=\dfrac{6-(8-4x)}{\sqrt{8-4x}}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{6-t^2}{t}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{-6}{t^2}-1<0$ suy ra hàm số nghịch biến

Mà $f(\sqrt{x+y})=f(\sqrt{8-4x})\Leftrightarrow x+y=8-4x\Leftrightarrow y=8-5x$

Thế vào PT(2) giải PT bậc 2 cơ bản.

Câu 31 : Giải HPT : $\begin{cases} x^2+y^2+2x=3 \\ 2(x^3+y^3)+6x^2=3(x^2+y^2)+5 \end{cases}$

Ta có $2x.(1)-(2)=2y^3-2xy^2+2x^2=3(x^2+y^2)+5-6x$

$$\Leftrightarrow y^2(2y-2x-3)=(x-1)(x-5)$$

Mà

$$y^2=3-x^2-2x=(1-x)(3+x)\Rightarrow (x-1)(x+3)(2y-2x-3)=(x-1)(5-x)$$

Với $x=1\Rightarrow y=0$

Với $(x+3)(2y-2x-3)=(5-x)\Rightarrow y=\dfrac{5-x}{2(x+3)}+x+\dfrac{3}{2}=\dfrac{x^2+4x+7}{x+3}$

Thế vào PT(1) ta được :

$$x^2+2x+\left(\frac{x^2+4x+7}{x+3}\right)^2=3$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x)(x+3)^2+(x^2+4x+7)^2=3(x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2(x^2+6x+11)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=2$$

Câu 32 : Giải HPT : $\begin{cases} x^2+xy+x+3=0 \\ y(x+3)+x+1=2\sqrt{x^2y+2y} \end{cases}$

Lấy $(1)-(2)=x^2+2-3y+2\sqrt{x^2y+2y}=0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+2}-\sqrt{y})(\sqrt{x^2+2}+3\sqrt{y})=0$$

$$\Rightarrow y=x^2+2$$

Thế vào PT(1) ta được : $x^3+x^2+3x+3=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=3$

Câu 33 : Giải HPT : $\begin{cases}(x^2+y^2)(1+\dfrac{1}{x^2y^2})=5\\(xy-1)^2=x^2-y^2+2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+\dfrac{1}{x})^2+(y-\dfrac{1}{y})^2=5\\(x^2+1)(y^2-1)=2xy\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+\dfrac{1}{x})^2+(y-\dfrac{1}{y})^2=5\\(x+\dfrac{1}{x})(y-\dfrac{1}{y})=2\end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=a \\ y-\dfrac{1}{y}=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=5 \\ ab=2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=2 \\ a=1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-2 \\ a=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-1 \\ a=-2 \end{cases} \end{array}\right.$

Xét từng TH giải x, y đơn giản .

Câu 34: Giải HPT : $\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2+9xy=0 \\ (x^2+1)(y^2+1)+10xy=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2+\dfrac{1}{x})(y+2+\dfrac{1}{y})=-9 \\ (x+\dfrac{1}{x})(y+\dfrac{1}{y})=-10 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=a \\ y+\dfrac{1}{y}=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+2)(b+2)=-9 \\ ab=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-3 \\ ab=-10 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=2 \\ a=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-5 \\ a=2 \end{cases} \end{array}\right.$

Do vai trò của x, y là như nhau nên ta xét 1 TH của cặp a, b rồi hoán đổi lại.

Câu 35 : Giải HPT : $\begin{cases}(x+y)\sqrt{x^2+7}+y\sqrt{2y^2+1}=xy+2y^2\\ 2x\sqrt{x^2+7}+(x+y)\sqrt{2y^2+1}=3xy-x^2\end{cases}$

Ta thấy $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ thỏa mãn là một cặp nghiệm của hệ

Xét $x^2+y^2>0$

Dùng định thức ta có :

$$\begin{cases}D=x^2+y^2\\ D_x=2y(x^2+y^2)\\ D_y=-x(x^2+y^2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D}=2y\\ y=\dfrac{D_y}{D}=-x\end{cases}\Leftrightarrow x=-2x\Rightarrow x=y=0 \text{ (Loại)}$$

Kết hợp $\Rightarrow (x;y)=(0;0)$ là nghiệm duy nhất

Câu 36 : Giải HPT : $\begin{cases}(x+y)\sqrt{2xy+5}=4xy-3y+1\\ (x+2y)\sqrt{2xy+5}=6xy+x-7y-6\end{cases}$

Xét hệ mới : $\begin{cases}2.(1)-(2)\\ 3.(1)-2.(2)\end{cases}$

$$\begin{cases} x-y-3=(2xy-5)-x\sqrt{2xy+5} \\ (x-y)\sqrt{2xy+5}=5y-2x+15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-3=(2xy-5)-x\sqrt{2xy+5} \\ (x-y-3)(\sqrt{2xy+5}+5)=3(x-\sqrt{2xy+5}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2xy+5-x\sqrt{2xy+5})(\sqrt{2xy+5}+5)=3(x-\sqrt{2xy+5})$$

$$\Leftrightarrow (x-\sqrt{2xy+5})(2xy+5+5\sqrt{2xy+5}+3)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2xy+5} \\ 2xy+5+5\sqrt{2xy+5}+3=0 \end{array}\right.$$

Có $2xy+5+5\sqrt{2xy+5}+3>0$

$\Leftarrow x=\sqrt{2xy+5} \Rightarrow xy=\dfrac{x^2-5}{2}$ .Thế vào PT(1) ta được

$$x^2+\frac{x^2-5}{2}=2(x^2-5)-\frac{3(x^2-5)}{2x}+1$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-13x+15=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3(L) \\ x=5 \Rightarrow y=2 \\ x=1 \Rightarrow y=-2 \end{array}\right.$$

Câu 37 : Giải HPT : $\begin{cases} y^2+x+xy-6y+1=0 \\ xy^3+x^2y+x-8y^2=0 \end{cases}$

Lấy $(1)-(2)=xy(y^2+x-1)=(3y-1)^2$

Lại có $xy+(x+y^2-1)=2(3y-1)\Rightarrow xy,(y^2+x-1)$ là 2 nghiệm của PT

$X^2-2(3y-1)X+(3y-1)^2=0\Rightarrow X=3y-1$

$$\Rightarrow\begin{cases}xy=3y-1\\x+y^2-1=3y-1\end{cases}$$

Thấy $y=0$ không phải nghiệm của hệ.

Thế $x=\dfrac{3y-1}{y}$ vào PT(2) ta được :

$$\frac{3y-1}{y}+y^2=3y\Leftrightarrow y^3-3y^2+3y-1=0\Rightarrow y=-1\Rightarrow x=4$$

Câu 38 : Giải HPT : $\begin{cases}3x-y+\dfrac{3x+y}{x^2-y^2}=8\\3x+y+\dfrac{3x-y}{x^2-y^2}=7\end{cases}$

Đặt

$$\begin{cases}x+y=a\\x-y=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2b^2a+a^2b+2a+b=8ab\\2a^2b+ab^2+2b+a=7ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a(b^2+1)+b(a^2+1)=8ab\\2b(a^2+1)+a(b^2+1)=7ab\end{cases}$$

($ab\neq 0$)

$$\Rightarrow\frac{2a(b^2+1)+b(a^2+1)}{2b(a^2+1)+a(b^2+1)}=\frac{8}{7}\Rightarrow 2a(b^2+1)=3b(a^2+1)$$

Mà có $3a(b^2+1)+3b(a^2+1)=15ab$

$$\Rightarrow 5a(b^2+1)=15ab \Rightarrow b^2-3b+1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ b=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Với $b=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a^2+1=2a.\dfrac{b^2+1}{3b}=2a \Rightarrow a=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Với $b=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a^2+1=2a.\dfrac{b^2+1}{3b}=2a \Rightarrow a=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

THẦY QUANG BABY

Bài 1 : $2x^2-3x-2=x\sqrt{2x-5}+2(x-2)\sqrt{2x-2}$

Bài 2 : $x\sqrt{2x-5}+2(x-2)\sqrt{2x-2}=x^3-7x^2+24x-29$

Bài 3 : $5x\sqrt{2x+5}-(x-1)\sqrt{3x^2-3}\geq 32x^2+114x+99(1)$

BÀI 2 : $2x^2+\sqrt{5x+6}+\sqrt{7x+11}\geq 4x+9$, Điều kiện : $x\geq -\dfrac{6}{5}$

Bước 1 , dò nghiệm ta được 2 nghiệm : x = 2 , x = -1 .

$$2x^2+\sqrt{5x+6}+\sqrt{7x+11}\geq 4x+9$$
$$\Leftrightarrow 2(x^2-x-2)-\left[x+2-\sqrt{5x+6}\right]-\left[x+3-\sqrt{7x+11}\right]\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-x-2)\left[2-\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}}-\frac{1}{x+3+\sqrt{11x+7}}\right]\geq 0$$

Bước 2 , ta chứng minh biểu thức trong ngoặc luôn dương

Ta đặt : $f(x)=\left[2-\dfrac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}}-\dfrac{1}{x+3+\sqrt{11x+7}}\right]$

Chứng minh $f(x)\geq 0$, bằng việc sử dụng casio , chức năng Table như sau :

Nhập mode , 7 , $g(x)=\dfrac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}}$, start -6/5 , end 5 , step 0,2 thấy g(x) lớn hơn 1,25 , vậy ta tách biểu thức $\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}}\succ 0$, còn lại ta có $\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{x+3+\sqrt{11x+7}}$

Việc còn lại các em biến đổi tương đương thôi .

Facebook cá nhân : https://www.facebook.com/quang.manngoc

Bước 3 : Kết luận : $(x^2-x-2)\left[2-\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}}-\frac{1}{x+3+\sqrt{11x+7}}\right]\geq 0 \Leftrightarrow x^2-x-2\geq 0$

Nghiệm : $-1.25\leq x\leq -1$ hoặc $x>2$

Video hướng dẫn : https://www.youtube.com/watch?v=fGcVf77I-9g

Giải bài 3 : Điều kiện : $\left[\begin{array}{l} x\geq 1 \\ -2.5\leq x\leq -1 \end{array}\right.$

CHÚNG TA GIẢI MỘT BPT CŨNG GIỐNG NHƯ GIẢI MỘT PHƯƠNG TRÌNH , GỒM CÁC BƯỚC SAU :

Bước 1 : Casio ta tìm được nghiệm kép , các em bấm Shift + Cal thì sẽ thầy Eror , nhưng thực tế không phải là vô nghiệm , các e thử nhật : Mode , 7 , f(x) = VT – VP , Start -2,5 , end -1 , step 0,2 . Các em sẽ thấy x = -2 thì f(x) = 0 và không đổi dấu , vậy ta sẽ có f(x) = 0 có nghiệm kép

BƯỚC 1: DÒ NGHIỆM : Dùng casio phát hiện ra nghiệm kép (qua chức năng Table) : x = -2

Tiếp đến chúng ta tạo lien hợp cho các căn : $\sqrt{2x+5}=ax+b$: sử dụng điều kiện để 2 đường tiếp xúc :

$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}$ xét tại điểm có x = - 2 ta có hệ : $\begin{cases} -2a+b=1 \\ a=1 \end{cases}$

Vậy ta có được liên hợp : $\sqrt{2x+5}-(x+3)$, làm hoàn toàn tương tự ta sẽ có : $\sqrt{3x^2-3}+(2x+1)$

$$(1)\Leftrightarrow 5x(\sqrt{2x+5}-x-3)-(x-1)(\sqrt{3x^2-3}+2x+1)\geq 25(x^2+4x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x+4)\left[\frac{5x}{\sqrt{2x+5}+x+3}-\frac{x-1}{\sqrt{3x^2-3}-2x-1}+25\right]\leq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2.f(x)\leq 0$$

$$f(x)=\frac{5x}{\sqrt{2x+5}+x+3}-\frac{5x}{\sqrt{3x^2-3}-2x-1}+25$$

BƯỚC 2 : XỬ LÝ BIỂU THỨC TRONG NGOẶC :

Xét : $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{2x+5}+x+3}-\frac{x-1}{\sqrt{3x^2-3}-2x-1}+25$, ta chứng minh nó luôn dương với mọi x thuộc tập xác định

+)Đầu tiên ta khẳng định rằng : $x\ge 1$ thì $f(x)\ge 0$, chỗ này em cứ dung table , mode 7 , star 1 , end 100 , step 10 xem , sẽ thầy

+)Xét $-2.5\le x\le -1$,dung chức năng table ta thấy $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{2x+5}+x+3}-\frac{x-1}{\sqrt{3x^2-3}-2x-1}+25>0$ (bấm mode 7 , nhập f(x) , start -2,5 , end -2 , step 0,2)

Chọn riêng hàm $g(x)=-\frac{x-1}{\sqrt{3x^2-3}-2x-1}$ (bấm mode 7 , nhập f(x) , start -2,5 , end -2 , step 0,2) thì ta thấy $g(x)\ge -25$, vậy ta sẽ có $\frac{5x}{\sqrt{2x+5}+x+3}+25>0$, cái này các em dễ chứng minh bằng biến đổi tương đương .

Vậy trên tập xác định thì $f(x)\ge 0$, vậy $(1)\Leftrightarrow (x+2)^2\le 0\Leftrightarrow x=-2$

Đáp sô : x = -2