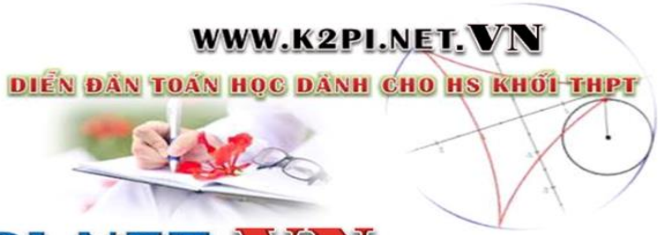
Diễn Đàn Toán THPT K2pi·Net·Vn



WWW.K2PI.NET.VN

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

TỪ DIỄN ĐÀN K2PI·NET·VN

Trần Quốc Việt

Lời Nói Đầu

Kỳ thi THPT Quốc Gia năm 2015 đã vừa qua với nhiều thay đổi lớn trước ngưỡng của đổi mới Giáo Dục. Chúng ta cũng đã được thấy được sự thay đổi đột phá trong đề thi môn Toán nói riêng. Về cấu trúc đề thi đã được phân loại gồm 60% phần dễ đủ cho học sinh thi tốt nghiệp và 40% phần khó và cực khó nhằm phân loại mạnh học sinh để xét tuyển vào các trường Đại học- Cao đẳng. Trong đó nhóm câu phương trình, hệ phương trình không còn dừng lại ở mức độ dễ kiếm điểm như đề thi những năm trước, mức độ khó của nhóm câu này nằm ở con điểm 9 nếu ta chinh phục được nó. Và nói riêng đề thi Toán 2015 thì là một câu phương trình vô tỷ chỉ mới xuất hiện lại đây sau mấy năm trước đó đề thi đều ra hệ phương trình nên xu hướng học sinh bây giờ theo học phương trình vô tỷ khá nhiều. Và đối với những người đam mê Toán luôn muốn phát triển thì họ chả bao giờ ngừng nghỉ học cho dù là nó có liên quan đến thi cử hay không.
Vì vậy mà tiếp nối sự thành công của **TOPIC Phương trình vô tỷ 2014** của thầy Phạm Kim Chung tại **diễn đàn Toán -THPT K2pi.Net.Vn** thì **TOPIC Phương trình vô tỷ 2015** của anh Nguyễn Duy Hồng cũng rất thành công khi quét kỹ hết các dạng toán thường gặp của phương trình vô tỷ,mở ra được cái nhìn chuyên sâu về mọi bài toán giúp được một phần nào đó cho các thí sinh vượt qua được kỳ thi. Nay tôi tổng hợp các bài toán lại thành tài liệu tiếp tục phục vụ việc ôn thi kỳ thi THPT Quốc Gia 2016 tiếp theo. Mong đây sẽ là tài liệu bổ ích cho việc ôn thi của các bạn.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về thành viên **Trần Quốc Việt** tại diễn đàn Toán - THPT **K2pi.Net.vn**, qua gmail: `tranquocvietkyphu@gmail.com` hoặc facebook cá nhân của tôi `https://www.facebook.com/leoricmta`

Hà Tĩnh tháng 10 năm 2015
Người Tổng Hợp
Trần Quốc Việt

Phần I. Tuyển Chọn Các Bài Toán

Bài toán 1

Giải phương trình sau

$$x\sqrt{1+4x^2}+\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{x+3}{4}\sqrt{x^2+6x+13}$$

Lời Giải

Cách 1. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x\sqrt{1+(2x)^2}+(x+1)\sqrt{1+(x+1)^2}=(x+3)\sqrt{1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2} \quad (*)$$

Để ý rằng $f(t)=t\sqrt{1+t^2}$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Với $x\geqslant 1$
Ta có

$$2x\geqslant\frac{x+3}{2}\Rightarrow 2x\sqrt{1+(2x)^2}\geqslant\frac{x+3}{2}\sqrt{1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2}$$

Và

$$x+1\geqslant\frac{x+3}{2}\Rightarrow (x+1)\sqrt{1+(x+1)^2}\geqslant\frac{x+3}{2}\sqrt{1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2}$$

Từ đó suy ra $VT(*)\geqslant VP(*)$, $\forall x\geqslant 1$
Với $x<1$, tương tự ta có $VT(*)<VP(*)$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách 2. Đặt $u=2x, v=x+1, w=\dfrac{x+3}{2}$ ta đưa phương trình về

$$u\sqrt{1+u^2}+v\sqrt{1+v^2}=2w\sqrt{1+w^2}$$

$$\Leftrightarrow u\sqrt{1+u^2}-w\sqrt{1+w^2}=w\sqrt{1+w^2}-v\sqrt{1+v^2}$$

Do $f(t)=t\sqrt{t^2+1}$ là hàm tăng. Giả sử $VT\geq 0$ thế thì $VP\geq 0$ tức là

$$\begin{cases} u\geq w \\ w\geq v \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3x\geq 3 \\ 1\geq x \end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Tương tự với biện luận $VT \leq 0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

$\square$

Bài toán 2

Giải phương trình sau

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{3x-2} = 2x$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện $x \geqslant \frac{1}{2}$

Cách 1.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x - \sqrt{2x-1}\right) + \left(x - \sqrt[3]{3x-2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x+\sqrt{2x-1}} + \frac{(x+2)(x-1)^2}{x^2 + x\sqrt[3]{3x-2} + \sqrt[3]{(3x-2)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \left[\frac{1}{x+\sqrt{2x-1}} + \frac{x+2}{x^2 + x\sqrt[3]{3x-2} + \sqrt[3]{(3x-2)^2}}\right] = 0$$

Do $\dfrac{1}{x+\sqrt{2x-1}} + \dfrac{x+2}{x^2 + x\sqrt[3]{3x-2} + \sqrt[3]{(3x-2)^2}} > 0 \ ; \ \forall x \geq \dfrac{1}{2}$

Nên phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$

Cách 2. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{2}\left(2x - 1 - 2\sqrt{2x-1} + 1\right) + \frac{1}{3}\left(3x - 2 - 3\sqrt[3]{3x-2} + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{2x-1} - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{3x-2} + 2\right)\left(\sqrt[3]{3x-2} - 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = 1 \\ \sqrt[3]{3x-2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

$\square$

Bài toán 3

Giải phương trình sau

$$\sqrt{x-\sqrt{x-3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

Lời Giải

Điều kiện $\begin{cases} x-\sqrt{x-3}\geq 0 \\ x\geq 3 \end{cases}$

Khi đó phương trình tương đương

$$\sqrt{4x^2-4x\sqrt{x-3}}=\sqrt{3}\left(\sqrt{x}+2\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4x\sqrt{x-3}=3x+12\sqrt{x}+12$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4x\sqrt{x-3}+x-3=4x+12\sqrt{x}+9$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{x-3}\right)^2=\left(2\sqrt{x}+3\right)^2$$

Trường hợp 1. Với $2x-\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}+3$

$$2x-\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}+3$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}-2\right)+\sqrt{x-3}-1-2\left(x-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left[\frac{2}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{\sqrt{x-3}+1}-2\right]=0$$

Với $x\geq 3$ Phần trong ngoặc vuông luôn nhỏ hơn 0. Vậy khi đó phương trình có nghiệm $x=4$

Trường hợp 2. Với $2x-\sqrt{x-3}=-2\sqrt{x}-3$

Ta nhận thấy với $x\geq 3$ thì $VT>0$ còn $VP<0$. Do đó phương trình này vô nghiệm

Kết luận. phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4$.

□

Bài toán 4

Giải phương trình sau

$$\sqrt{x^2-2}+2=x+\sqrt{2x-2}$$

Lời Giải

Điều kiện $\begin{cases} 2x-2\geq 0 \\ x^2-2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq\sqrt{2}$

Phương trình tương đương

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2}-\sqrt{2x-2}=x-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2x-2}}=x-2$$

Suy ra $x=2$ hoặc $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2x-2}}=1 \quad (*)$

$$(*)\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{2x-2}$$

Kết hợp với phương trình đã cho ta có $\begin{cases} x-\sqrt{x^2-2}=2-\sqrt{2x-2} \\ x-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{2x-2} \end{cases}$

$$\Rightarrow 2-\sqrt{2x-2}=\sqrt{2x-2} \quad \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

Kết luận. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\dfrac{3}{2}\ ;\ x=2$ □

Bài toán 5

Giải phương trình sau

$$2x^2+x+\sqrt{x^2+3}+2x\sqrt{x^2+3}=9$$

Lời Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)(2x+1)=9$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)\frac{3}{\sqrt{x^2+3}-x}=9$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=3(\sqrt{x^2+3}-x)$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+3}=5x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{1}{5} \\ 8x^2+5x-13=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$

$\square$

Bài toán 6
Giải phương trình sau

$$4+2\sqrt{1-x}=-3x+5\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x^2}$$

Lời Giải

Điều kiện $-1\le x\le 1$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{1+x}=a\ge 0\\ \sqrt{1-x}=b\ge 0\end{cases}$

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$2a^2-a(b+5)-b^2+2b+3=0$$

$$\Leftrightarrow (2a+b-3)(a-b-1)=0$$

Với $2a+b=3$ ta có

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}=3$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{1-x^2}=4-3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le \dfrac{3}{4}\\ 25x^2-24x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=0\ (t/m)\vee x=\frac{24}{25}\ (t/m)$$

Với $a-b-1=0$ ta có:

$$\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x}+1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x}=2x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ 4x^2=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (t/m)$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x=0$ hoặc $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{24}{25}$ $\square$

Bài toán 7
Giải phương trình sau

$$\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$$

Lời Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{7x+1}+\sqrt[3]{8+x-x^2}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{7x+1} \\ b=\sqrt[3]{8+x-x^2} \\ c=\sqrt[3]{x^2-8x-1} \end{cases}$ ta có $a+b+c=\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3}=2$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

$$\Leftrightarrow (2-a)(2-b)(2-c)=0$$

Với $a=2 \quad \Rightarrow x=1$
Với $b=2 \quad \Rightarrow x=0 \quad \vee x=1$
Với $c=2 \quad \Rightarrow x=-1 \quad \vee x=9$
Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{-1;0;1;9\}$

□

Bài toán 8
Giải phương trình sau

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}=\sqrt[4]{\frac{4-x}{3}}+\sqrt[4]{\frac{2+x}{3}}$$

Lời Giải

Điều kiện $0\le x\le 2$

Cách 1. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[4]{x} \\ b=\sqrt[4]{2-x} \\ c=\sqrt[4]{\dfrac{4-x}{3}} \\ d=\sqrt[4]{\dfrac{2+x}{3}} \end{cases}$

Vậy ta có $a^4+b^4=c^4+d^4$ và $0 \le ab \le cd \quad (*)$
Thay vào phương trình ta được

$$a+b=c+d \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=c^2+d^2+2cd$$

$$\Rightarrow a^2+b^2 \ge c^2+d^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $ab=cd$
Mặt khác ta có

$$a^2+b^2 \ge c^2+d^2 \Leftrightarrow a^4+b^4+2a^2b^2 \ge c^4+d^4+2c^2d^2$$

$$\Rightarrow a^4+b^4 \ge c^4+d^4$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a^2b^2=c^2d^2$
Theo $(*)$ ta có phương trình nghiệm đúng khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} ab=cd \\ a^2b^2=c^2d^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Cách 2. Đặt $x=t+1$ ta đưa phương trình về dạng:

$$\sqrt[4]{1+t}+\sqrt[4]{1-t}=\sqrt[4]{\frac{3-t}{3}}+\sqrt[4]{\frac{3+t}{3}}$$

Tiếp tục đặt $t=3w$ phương trình trở thành:

$$\sqrt[4]{1+3w}+\sqrt[4]{1-3w}=\sqrt[4]{1+w}+\sqrt[4]{1-w}$$

Đến đây phương trình có dạng đối xứng, việc xét hàm sẽ đơn giản hơn rất nhiều, thật vậy

Điều kiện $-\frac{1}{3} \le w \le \frac{1}{3}$

Do phương trình có tính đối xứng, nếu w_0 là nghiệm thì $-w_0$ cũng là nghiệm nên ta chỉ cần

giải phương trình trên đoạn $0 \le w \le \frac{1}{3}$

Xét hàm số: $f(s)=\sqrt[4]{1+s}+\sqrt[4]{1-s}$ với $0 \le s \le 1$

Ta có

$$f'(s)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt[4]{(1+s)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(1-s)^3}}\right]<0\ ;\ \forall 0 \le s \le 1$$

Vậy hàm f nghịch biến trên $0 \le s \le \frac{1}{3}$ khi đó phương trình tương đương với

$$f(3w)=f(w) \Leftrightarrow 3w=w \Leftrightarrow 2w=0 \Leftrightarrow w=0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

Cách 3. Nếu ta sử dụng bất đẳng thức sau thì bài toán trở nên gọn nhẹ

Với mọi a, b, c không âm ta có

$$\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c} \leq \sqrt[4]{\frac{a+2b}{3}} + \sqrt[4]{\frac{b+2c}{3}} + \sqrt[4]{\frac{c+2a}{3}}$$

Với bài toán trên ta có phương trình tương đương

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{\frac{4-x}{3}} + \sqrt[4]{\frac{2+x}{3}}$$

Sử dụng bất đẳng thức trên với vế trái ta có ngay nó nhỏ hơn hoặc bằng vế phải

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$

Kết luận. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$

$\square$

Bài toán 9

Giải phương trình sau

$$(x^4 + x^3)(x\sqrt{x+1} + 1) + x^3 + x^2 - 4 = 2\sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

Lời Giải

Điều kiện : $x > 0$ hoặc $x = -1$

TH1. Nếu $x = -1$ thế vào không thỏa nên $x = -1$ không phải là nghiệm.

TH2. Với $x > 0$ thì phương trình đã cho tương đương với

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 4 + (x^5 + x^4)(\sqrt{x+1} - \sqrt{2}) - 2\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} - \sqrt{2}\right) + \sqrt{2}(x^5 + x^4 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\, A = 0$$

Với $A = x^3 + 3x^2 + 4x + 4 + (x^5 + x^4)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}}\right) + \frac{2}{x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} + \sqrt{2}\right)} + \sqrt{2}(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$

Hiển nhiên ta có $A > 0 \quad \forall x > 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$

$\square$

Bài toán 10
Giải phương trình sau

$$\sqrt{2-x+\frac{3}{2-x}}+\sqrt{x+\frac{3}{x}}=4$$

Lời Giải

Điều kiện $x \in (0;2)$

Cách 1. Ta có

$$VT=\sqrt{2-x+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2-x}}+\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}$$

$$\geqslant\sqrt{4\sqrt[4]{\frac{1}{(2-x)^2}}}+\sqrt{4\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}}}=2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2-x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$$

$$\geqslant\frac{4}{\sqrt[8]{(2-x)\,x}}\geqslant\frac{4}{\sqrt[8]{\frac{(2-x+x)^2}{4}}}=VP$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$

Cách 2. Bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$\Leftrightarrow (2-x)+x+3(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x})+2\sqrt{(x+\frac{3}{x})(2-x+\frac{3}{2-x})}=16$$

$$\Leftrightarrow 2+3(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x})+2\sqrt{x(2-x)+\frac{3x}{2-x}+\frac{3(2-x)}{x}+\frac{9}{x(2-x)}}=16$$

Do $2+3(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x})\geq 2+3.\frac{(1+1)^2}{x+(2-x)}=8$

$$\Rightarrow\sqrt{(2-x)x+\frac{3x}{2-x}+\frac{3(2-x)}{x}+\frac{9}{x(2-x)}}\leq 4$$

$$\Leftrightarrow (2-x)x+\frac{3x}{2-x}+\frac{3(2-x)}{x}+\frac{9}{x(2-x)}\leq 16$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-2x+11)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

□

Bài toán 11
Giải phương trình sau

$$\sqrt{2\left(x^2-4x+5\right)}+\left(\frac{3-x}{2}\right)\sqrt{x^3+\frac{3}{x}}=4\sqrt{2-x}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \in (0,2]$
Khi đó

$$VT=\sqrt{2\left[(2-x)^2+1\right]}+\frac{(2-x)+1}{2}\sqrt{x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}$$

$$\geqslant \sqrt{2.2\left(2-x\right)}+\frac{2\sqrt{2-x}}{2}.\sqrt{4\sqrt[4]{x^3.\frac{1}{x}.\frac{1}{x}.\frac{1}{x}}}=4\sqrt{2-x}=VP$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

□

Bài toán 12
Giải phương trình sau

$$x^3-5x^2+4x-5=(1-2x)\sqrt[3]{6x^2-2x+7}$$

Lời Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^3-3x^2+5x-6\right)-\left(2x^2+x-1\right)=(1-2x)\sqrt[3]{6x^2-2x+7}$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+5x-6-(2x-1)(x+1)=(1-2x)\sqrt[3]{6x^2-2x+7}$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+5x-6=(1-2x)\left(\sqrt[3]{6x^2-2x+7}-x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-3x^2+5x-6}{1-2x}=\frac{-\left(x^3-3x^2+5x-6\right)}{f\left(x\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-3x^2+5x-6\right)\left[f(x)+1-2x\right]=0$$

Với $f\left(x\right)=\left(\sqrt[3]{6x^2-2x+7}\right)^2+\left(\sqrt[3]{6x^2-2x+7}\right)(x+1)+(x+1)^2$
Trường hợp 1. Với $x^3-3x^2+5x-6=0 \quad \Leftrightarrow x=2$

Trường hợp 2. Với $f(x)+1-2x=0$ thì ta có

$$f(x)=\left[\sqrt[3]{6x^2-2x+7}+\frac{1}{2}(x+1)\right]^2+\frac{3}{4}(x+1)^2\geq\frac{3}{4}(x+1)^2$$

Do đó ta có

$$f(x)+1-2x\geq\frac{3}{4}(x+1)^2+1-2x=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{5}{3}>0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Suy ra phương trình $f(x)+1-2x=0$ vô nghiệm

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

□

Bài toán 13

Giải phương trình sau

$$\sqrt{4x^2-14x+16}+1=x+\sqrt{x^2-4x+5}$$

<u>Lời Giải</u>

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4(x^2-4x+5)+2(x-1)-2}=(x-1)+\sqrt{x^2-4x+5}$$

Đặt $a=\sqrt{4x^2-4x+5}$ suy ra $a\geq 2$ và $b=x-1$

$$\Rightarrow\sqrt{4a^2+2b-2}=a+b$$

$$\Leftrightarrow 4a^2+2b-2=a^2+2ab+b^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2+(2b-2)-2ab-b^2=0$$

Ta có ngay $a^2-b^2=4-2x=2-2b$

Thế vào trên ta được

$$3a^2+(b^2-a^2)-2ab-b^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\geq 2\\ a(a-b)=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow a=b$$

Với $a=b\quad\Rightarrow x=2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$

□

Bài toán 14
Giải phương trình sau

$$13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$$

Lời Giải

Cách 1. Chia cả hai vế của phương trình cho x^2 ta có

$$13\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}+3\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{16}{x^2}$$

Đến đây đặt $t=\frac{1}{x^2}>0$ ta được

$$13\sqrt{t-1}+9\sqrt{t+1}=16t \quad \Leftrightarrow 13\left(\sqrt{t-1}-\frac{1}{2}\right)^2+9\left(\sqrt{t+1}-\frac{3}{2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{t+1}-\frac{3}{2}=0\\ \sqrt{t-1}-\frac{1}{2}=0\end{cases} \qquad \Rightarrow t=\frac{5}{4} \quad \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Cách 2. Bình phương hai vế của phương trình đã cho ta được

$$x^2\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2=256$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakovsky ta có

$$x^2\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2=x^2\left(\sqrt{13}.\sqrt{13\left(1-x^2\right)}+3\sqrt{3}.\sqrt{3+3x^2}\right)^2$$
$$\leq x^2\left(13+27\right)\left(13-13x^2+3+3x^2\right)=40x^2(16-10x^2)$$
$$=4.10x^2\left(16-10x^2\right)\leq\left(10x^2+16-10x^2\right)^2=256$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2=\frac{4}{5}\Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

Kết luận. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

□

Bài toán 15
Giải phương trình sau

$$x^3+\sqrt{-x^6+3x^4-3x^2+1}=x\sqrt{2-2x^2}$$

Lời Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$
Ta viết lại phương trình thành

$$x^3 + (1 - x^2)\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{2}x\sqrt{1 - x^2}$$

Đặt $x = \cos t$ với $t \in [0; \pi]$ ta chuyển phương trình thành

$$\sin^3 t + \cos^3 t = \sqrt{2}\sin t \cos t \quad \Leftrightarrow (\sin t + \cos t)(1 - \sin t \cos t) = \sqrt{2}\sin t \cos t$$

Đặt $\sin t + \cos t = u \in [-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ ta chuyển tiếp phương trình thành

$$u(1 - \frac{u^2 - 1}{2}) = \sqrt{2}\frac{u^2 - 1}{2} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{2} \\ u = -1 - \sqrt{2} \\ u = 1 - \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Với $u = \sqrt{2}$ thay lại ta có

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2} \iff \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff t = \frac{\pi}{4}$$

Được 1 nghiệm là $x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Với $u = 1 - \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
Vì $t \in [0; \pi]$ nên nghiệm là $t = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$
Giờ ta tính $\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\right) = \cos\frac{3\pi}{4}\cos\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \sin\frac{3\pi}{4}\sin\arcs$
Có $\sin\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ và $\cos\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2} - 1}{2}}$
Thay tất cả lại ta thu được nghiệm thứ hai là $x = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right)$
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right.$

□

Bài toán 16

Giải phương trình sau

$$x + \sqrt{1 + 3x} + \sqrt{1 - x} = \sqrt{1 + 2x} + \sqrt{1 - 2x}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$
Phương trình đã cho tương đương với

$$x + \left(\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x}\right) + \left(\sqrt{1-x} - \sqrt{1-2x}\right) = 0$$

$$x + \frac{x}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1+2x}} + \frac{x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}} = 0$$

$$x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1+2x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$

□

Bài toán 17

Giải phương trình sau

$$2\sqrt{x+\frac{1}{2}} + \sqrt{x^2+5x+6} = \sqrt{5x^2+20x+15}$$

Lời Giải

Điều kiện : $x \geq -\frac{1}{2}$
Khi đó phuong trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x+2} + \sqrt{(x+2)(x+3)} = \sqrt{5x^2+20x+15}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(4x+2)(x+2)(x+3)} = 4x^2+11x+7$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(4x^2+10x+4)(x+3)} = 4x^2+10x+4+x+3$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{4x^2+10x+4} - \sqrt{x+3}\right]^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x^2+10x+4 = x+3 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{65}-9}{8}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt{65}-9}{8}$

□

Bài toán 18

Giải phương trình sau

$$(x^3-3x+1)\sqrt{x^2+21} + x^4 - 3x^2 + x = 21$$

Lời Giải

Phương trình tương đương với

$$(x^3-3x+1)(\sqrt{x^2+21}+x)=21$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x+1=\sqrt{x^2+21}-x$$
$$\Leftrightarrow x^3-2x+1=\sqrt{x^2+21}$$
$$\Leftrightarrow x^3-2x-4=\sqrt{x^2+21}-5$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+2)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+21}+5}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2+2x+2=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ (x^2+2x+2)(\sqrt{x^2+21}+5)=x+2 \quad (*) \end{array}\right.$$

Ta có

$$(x^2+2x+2)(\sqrt{x^2+21}+5)-x-2>5(x^2+2x+2)-x-2=5x^2+9x+8>0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Suy ra $(*)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

□

Bài toán 19

Giải phương trình sau

$$\sqrt{4x-1}+\sqrt[4]{8x-3}=4x^4-3x^2+5x$$

Lời Giải

Điều kiện : $x\geq\dfrac{3}{8}$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có

$$\sqrt{4x-1}=1.\sqrt{4x-1}\leq\frac{1+4x-1}{2}=2x$$

Đẳng thức xảy ra khi $1=\sqrt{4x-1}\quad\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$$\sqrt[4]{8x-3}=1.1.1.\sqrt[4]{8x-3}\leq\frac{1+1+1+8x-3}{4}=2x$$

Đẳng thức xảy ra khi $1 = \sqrt[4]{8x-3} \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$
Do đó từ phương trình đã cho ta suy ra:

$$4x^4 - 3x^2 + 5x \leq 4x$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 - 3x^2 + x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)(2x-1)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{2}$

□

Bài toán 20

Giải phương trình sau

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 6 = 2\sqrt{7-x^2}$$

<u>Lời Giải</u>

Để phương trình có nghiệm thì VT ≥ 0

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 - 5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{5} + 1$$

Điều kjện xác định $7 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow x \leq \sqrt{7}$
Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm

□

Bài toán 21

Giải phương trình sau

$$\sqrt{1+\sqrt{1-4x^2}} - x = x\sqrt{2-\sqrt{1+2\sqrt{1-4x^2}}}$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện $\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 2 - \sqrt{1+2\sqrt{1-4x^2}} \geq 0 \end{cases}$

Đặt $1 + \sqrt{1-4x^2} = a \quad \Rightarrow a \geq 1$

Khi đó $x^2 = \dfrac{2a-a^2}{4} \quad (*)$

Từ phương trình ta có

$$\sqrt{a} = x\left(1+\sqrt{2-\sqrt{2a-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow a = x^2\left(1+\sqrt{2-\sqrt{2a-1}}\right)^2 \quad (**)$$

Thế $(*)$ vào $(**)$ ta được

$$a = \frac{2a-a^2}{4}\left(1+\sqrt{2-\sqrt{2a-1}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 = (2-a)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{2a-1}}\right)^2$$

Do $a \geq 1 \quad \Rightarrow 2-a \leq 1$

Khi đó

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{2a-1}}+1\right)^2 = \frac{4}{2-a} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-\sqrt{2a-1}}+1 \geq 2 \quad \Leftrightarrow \sqrt{2-\sqrt{2a-1}} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{2a-1} \quad \Leftrightarrow a \leq 1 \quad \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

Đối chiếu lại với điều kiện ta thấy chỉ có $x = \dfrac{1}{2}$ thõa mãn

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{2}$

□

Bài toán 22

Giải phương trình sau

$$2x+3+(x+1)\sqrt{x^2+6}+(x+2)\sqrt{x^2+2x+9} = 0$$

Lời Giải

Đặt $a = \sqrt{x^2+6} \;\Rightarrow a \geq \sqrt{6}$ và $b = \sqrt{x^2+2x+9} \;\Rightarrow b \geq \sqrt{8}$

Ta có $a^2 - b^2 = -2x-3$

$$\Rightarrow x = -\frac{a^2-b^2+3}{2}$$

Khi đó phương trình trở thành

$$\Leftrightarrow b^2 - a^2 + a(x+1) + b(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2-a^2+a+2b+(a+b).x=0$$

$$\Leftrightarrow b^2-a^2+a+2b+(a+b)\frac{a^2-b^2+3}{-2}=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)[1+(a+b)(a+b+2)]=0$$

$$\Leftrightarrow a=b \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{3}{2}$

$\square$

Bài toán 23

Giải phương trình sau

$$x^2+x+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}=1+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}+\sqrt[4]{x+2}$$

Lời Giải

Điều kiện : $x \geq -1$

Cộng $x+1$ vào hai vế của phương trình ta được

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)+2}=\left(\sqrt{x+2}\right)^2+\sqrt{\sqrt{x+2}}+\sqrt{\sqrt{x+2}+2} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+\sqrt{t}+\sqrt{t+2}$ với $t>0$ ta có $f(t)$ đồng biến

Mặt khác phương trình $(*)$ có dạng $f(x+1)=f(\sqrt{x+2})$

$$\Rightarrow x+1=\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-1=0$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ hoặc $x=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$ (Loại)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\square$

Bài toán 24

Giải phương trình sau

$$\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2(x^2+x+1)$$

Lời Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxky ta có

$$VT = \sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} + \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} \leq \sqrt{2\left(3x^2 + 2x + 1\right)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} = \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad (1)$$

Mặt khác ta chứng minh được:

$$\sqrt{2\left(3x^2 + 2x + 1\right)} \leq 2\left(x^2 + x + 1\right) \quad (2)$$

Thật vậy

$$(2) \Leftrightarrow (x+1)^2\left(2x^2 + 1\right) \geq 0$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = -1$

Từ (1) và (3) ta có $x = -1$ là nghiệm của phương trình

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$

□

Bài toán 25

Giải phương trình sau

$$x^3 + \frac{\sqrt{68}}{x^3} = \frac{15}{x}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \neq 0$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^6 - 15x^2 + 2\sqrt{17} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + \sqrt{17})(x^4 - \sqrt{17}x^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - \sqrt{17}x^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{17} - 3}{2}} \\ x = \sqrt{\dfrac{\sqrt{17} - 3}{2}} \\ x = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{17} + 3}{2}} \\ x = \sqrt{\dfrac{\sqrt{17} + 3}{2}} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}\pm 3}{2}}$

$\square$

Bài toán 26

Giải phương trình sau

$$x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\right)=\sqrt{2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$$

Lời Giải

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $x > 0$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\sqrt{\frac{x+1}{2}}+\sqrt{\frac{x+3}{2}}=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{2}}+\sqrt{\frac{x+1}{2}+1}=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}$ là hàm đồng biến do đó

$$f\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2}=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$

$\square$

Bài toán 27

Giải phương trình sau

$$3\sqrt[3]{x^2-x+1}+5\sqrt[5]{x^2+x+1}=8$$

Lời Giải

Ta có

$$VT=3\sqrt[3]{x^2-x+1}+5\sqrt[5]{x^2+x+1}=3\sqrt[15]{\left(x^2-x+1\right)^5}+5\sqrt[15]{\left(x^2+x+1\right)^3}$$

$$=\sqrt[15]{\left(x^2-x+1\right)^5}+\sqrt[15]{\left(x^2-x+1\right)^5}+\sqrt[15]{\left(x^2-x+1\right)^5}+\sqrt[15]{\left(x^2+x+1\right)^3}$$

$$+\sqrt[15]{\left(x^2+x+1\right)^3}+\sqrt[15]{\left(x^2+x+1\right)^3}+\sqrt[15]{\left(x^2+x+1\right)^3}+\sqrt[15]{\left(x^2+x+1\right)^3}$$

$$\geq 8\sqrt[8]{\sqrt[15]{(x^2-x+1)^{15}(x^2+x+1)^{15}}} = 8\sqrt[8]{x^4+x^2+1} \geq 8 = VP$$

Vậy phương trình tương đương với $\begin{cases} \sqrt[15]{(x^2-x+1)^5} = \sqrt[15]{(x^2+x+1)^3} \\ x^4+x^2+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $x=0$

Vậy $x=0$ là nghiệm của phương trình

□

Bài toán 28

Giải phương trình sau

$$\sqrt{x^2+16} - 2\sqrt{x^2-3x+4} = \sqrt{x+1} - 1$$

Lời Giải

Điều kiện: $x \geq -1$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x^2+12x}{\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x^2-3x+4}} = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x^2-3x+4} = -3(x-4)\left(\sqrt{x+1}+1\right) (1) \end{array}\right.$$

Với (1) kết hợp với phương trình đầu của hệ ta được:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x^2-3x+4} = -3(x-4)\left(\sqrt{x+1}+1\right) \\ \sqrt{x^2+16}-2\sqrt{x^2-3x+4} = \sqrt{x+1}-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+16} = (13-3x)\sqrt{x+1} - 3x + 11$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2+16}-5\right) + (3x-13)\left(\sqrt{x+1}-2\right) + 9(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+16}+5} + \frac{3x-13}{\sqrt{x+1}+2} + 9\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+16}+5} + \frac{5+9\sqrt{x+1}+3x}{\sqrt{x+1}+2}\right] = 0$$

Do cụm trong dấu ngoặc vuông luôn dương $\forall x \geq -1$ nên ta có $x=3$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$

□

Bài toán 29
Giải phương trình sau

$$\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1$$

Lời Giải

Điều kiện : $x \geq \dfrac{1}{5}$
Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{5x-1}-2+\sqrt[3]{9-x}-2=2x^2+3x-5$$
$$\Leftrightarrow \frac{5(x-1)}{\sqrt{5x-1}+2}-\frac{x-1}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+2\sqrt[3]{9-x}+4}=(x-1)(2x+5)$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}-\frac{1}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+2\sqrt[3]{9-x}+4}-2x-5\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (t/m) \\ \dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+2\sqrt[3]{9-x}+4}-2x-5=0\ (*)\end{array}\right.$$

Giải $(*)$ ta có

$$(*)\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}=\frac{1}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+2\sqrt[3]{9-x}+4}+2x+5\ (**)$$

Với $x \geq \dfrac{1}{5}$ thì

$$VT_{(**)} \leq \frac{5}{2}$$

Lại có:

$$VP_{(**)}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{9-x}+1\right)^2+3}+2x+5>0\ ;\ \forall x \geq \frac{1}{5}$$

Vậy phương trình $(*)$ vô nghiệm!
Kết luận. Vậy phương trình đã cho nghiệm duy nhất $x=1$

□

Bài toán 30
Giải phương trình sau

$$-2x^3+10x^2-17x+8=2x^2\sqrt[3]{5x-x^3}$$

Lời Giải

Ta thấy rằng $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho x^3 ta được

$$-2 + \frac{10}{x} - \frac{17}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{5}{x^2} - 1}$$

Đặt $t = \dfrac{1}{x}$ suy ra

$$8t^3 - 17t^2 + 10t - 2 = 2\sqrt[3]{5t^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow (2t-1)^3 + 2(2t-1) = \left(5t^2 - 1\right) + 2\sqrt[3]{5t^2 - 1} \quad (*)$$

Xét hàm $f(u) = u^3 + 2u$ là hàm đồng biến $\forall u \in \mathbb{R}$
Phương trình $(*)$ có dạng $f(2t-1) = f(\sqrt[3]{5t^2 - 1})$

$$\Rightarrow 2t - 1 = \sqrt[3]{5t^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow (2t-1)^3 = 5t^2 - 1 \Leftrightarrow 8t^2 - 17t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{17 \pm \sqrt{97}}{8} \qquad \Rightarrow x = \frac{8}{17 \pm \sqrt{97}}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{8}{17 \pm \sqrt{97}}$

□

Bài toán 31

Giải phương trình sau

$$\sqrt{1 - x^2}(16x^4 - 12x^2 + 1) = 4x^3 - 3x$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện $|x| \leq 1$
Đến đây ta đặt $x = \cos t$ với $t \in (0; \pi)$

$$\Leftrightarrow |sint|\left(16cos^4t - 12cos^2t + 1\right) = 4cos^3t + 3cost$$

$$\Leftrightarrow |sint|\left[4(2cos^22t - 1)^2 + 2(2cos^2t - 1) - 1\right] = cos3t$$

$$\Leftrightarrow |sint|\left[(4cos^22t - 2) + 2cos2t + 1\right] = cos3t$$

$$\Leftrightarrow |sint|\left(2cos4t + 2cos2t + 1\right) = cos3t$$

$$\Leftrightarrow |sint|\left(4cos3tcost + 1\right) = cos3t \quad (*)$$

Với $t \in (0; \pi)$

$$(*) \ \Leftrightarrow sint(4cos3tcost + 1) = cos3t$$

$$\Leftrightarrow 2cos3tsin2t + sint = cos3t$$

$$\Leftrightarrow (sin5t - sint) + sint = cos3t$$

$$\Leftrightarrow sin5t = cos3t$$

Đến đây thì phương trình $sin5t = cos3t$ là một phương trình lượng giác cơ bản và với $t \in (0; \pi)$

ta tìm được 5 nghiệm $t = \frac{\pi}{4}; t = \frac{\pi}{16}; t = \frac{5\pi}{16}; t = \frac{9\pi}{16}; t = \frac{13\pi}{16}$

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm $S = \{\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\frac{\pi}{16}, \cos\frac{5\pi}{16}, \cos\frac{9\pi}{16}, \cos\frac{13\pi}{16}\}$ □

Bài toán 32

Giải phương trình sau

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+2}}$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện $x \geq -\frac{2}{3}$

Dễ thấy nếu $-\frac{2}{3} \leq x < 0$ thì $VT < 0$ và $VP > 0$.

Do đó: $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 = \sqrt{x+1} + \sqrt{3x+2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x - 1 + x - \sqrt{x+1} + (x+1) - \sqrt{3x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 1) + \frac{x^2 - x - 1}{x + \sqrt{x+1}} + \frac{x^2 - x - 1}{x + 1 + \sqrt{3x+2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)\left(x + 1 + \frac{1}{x + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{x + 1 + \sqrt{3x+2}}\right) = 0$$

Do $x + 1 + \frac{1}{x + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{x + 1 + \sqrt{3x+2}} > 0 \ ; \ \forall x \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \ \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

□

Bài toán 33
Giải phương trình sau
$$9\sqrt{1-x^2}=(2-3\sqrt{x})^2$$

Lời Giải

Cách 1. Đặt $x=\sin a$
Phương trình đã cho ta có

$$\Leftrightarrow 9.\sqrt{1-\sin^2 a}=9\sin a-12\sqrt{\sin a}+4 \quad (*)$$

Xét TH1: $1\geq\cos a\geq 0$ ta có

$$(*)\Rightarrow 9\cos a=9\sin a-12\sqrt{\sin a}+4$$
$$\Leftrightarrow 9(\sin a-\cos a)+4=12\sqrt{\sin a}$$
$$\Leftrightarrow 81(\sin a-\cos a)^2+72.(\sin a-\cos a)+16=144\sin a$$
$$\Leftrightarrow 81.(\sin a+\cos a)^2+72.(\sin a+\cos a)-178=0$$

Xét TH 2: $0>\cos a\geq -1$

$$(*)\quad\Rightarrow -9\cos a=4+9\sin a-12\sqrt{\sin a}$$
$$\Leftrightarrow 12\sqrt{\sin a}=9(\sin a+\cos a)+4$$
$$\Leftrightarrow 81(\sin a+\cos a)^2+72(\sin a+\cos a)+16=144\sin a$$
$$\Leftrightarrow 97+81.2\sin a\cos a=72(\sin a-\cos a)$$
$$\Leftrightarrow 178-81(\sin a-\cos a)^2=72(\sin a-\cos a)$$

Tới đó các bạn tự giải tiếp
Cách 2. Điều kiện $0\leq x\leq 1$
Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{1-x^2}=(\frac{2}{3}-\sqrt{x})^2$$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x}\geq 0 \\ b=\dfrac{2}{3}-\sqrt{x}\leq\dfrac{2}{3}\end{cases}$

Khi đó kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ:

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{2}{3} \\ \sqrt{1-a^4}=b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{2}{3} \\ a^4+b^4=1 \end{cases}$$

Đến đây cũng có nhiều hướng để giải quyết hơn! □

Bài toán 34

Giải phương trình sau

$$\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$$

Lời Giải

Cách 1. Điều kiện $x\ge\sqrt[3]{2}$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt[3]{x^2-1}-(x-1)=\sqrt{x^3-2}-(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1-(x-1)^3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+(x-1)\sqrt[3]{x^2-1}+(x-1)^2}=\frac{x^3-2-(2x-1)^2}{\sqrt{x^3-2}+(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(-x^2+x)}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+(x-1)\sqrt[3]{x^2-1}+(x-1)^2}=\frac{(x-3)(x^2-x+1)}{\sqrt{x^3-2}+(2x-1)}$$

Suy ra $x=3$ hoặc

$$\frac{(-x^2+x)}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+(x-1)\sqrt[3]{x^2-1}+(x-1)^2}=\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^3-2}+(2x-1)}(*)$$

Ta có $VT(*)<0<VP$ với mọi $x\ge\sqrt[3]{2}$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm

Cách 2. Từ $\sqrt{x^3-2}-x=\sqrt[3]{x^2-1}>\dfrac{8}{10}\quad\Rightarrow x>2$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^3-2}-x-\sqrt[3]{x^2-1}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^2-2}}-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}-1$$

$$\Rightarrow f'(x)>\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-2}}-\frac{2.2}{3\sqrt[3]{9}}-1>\frac{3x^2-4\sqrt{x^3-2}}{2\sqrt{x^2-2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)>\frac{9x^4-16x^3+32}{2\sqrt{x^3-2}}>0\quad\forall x>2$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến.

Mà $f(3)=0$ nên x=3

Kết luận Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$

□

Bài toán 35
Giải phương trình sau

$$\frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{3}+\sqrt{3+\sqrt{x}}}+\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{x}}}=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

Lời Giải

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{3+\sqrt{x}}>0 \\ b=-\sqrt{3-\sqrt{x}}<0 \end{cases}$

Ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{a^2}{\sqrt{3}+a}+\dfrac{b^2}{\sqrt{3}+b}=\sqrt{3} \\ a^2+b^2=6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (ab-3)\left(a+b-\sqrt{3}\right)=0 \\ a^2+b^2=6 \end{cases}$$

TH1: $\begin{cases} a^2+b^2=6 \\ ab=3 \end{cases}$
Vô Nghiệm vì a, b trái dấu

TH2: $\begin{cases} a^2+b^2=6 \\ a+b=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\sqrt{3} \\ ab=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a(\sqrt{3}-a)=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{x}}=\frac{3+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{27}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{27}{4}$

□

Bài toán 36
Giải phương trình sau

$$\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2+1}{2x}=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$$

Lời Giải

Điều kiện: $x \neq \{0; 1; -1\}$
Đặt $x = tana$ suy ra $a \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ và $a \neq \{0; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\}$
Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{cosa} + \frac{1}{sin2a} = \frac{2}{sin4a}$$

$$\Leftrightarrow sin4a.(cosa + sin2a) = 2.cosa.sin2a$$

$$\Leftrightarrow 2.sin2a.cos2a.cosa(1 + 2sina) = 2.cosa.sin2a$$

$$\Leftrightarrow cos2a.(1 + 2sina) = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2sin^2a)(1 + 2sina) = 1$$

$$\Leftrightarrow -4sin^3a - 2sin^2a + 2sina = 0$$

$$\Leftrightarrow sina = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình

□

Bài toán 37

Giải phương trình sau

$$x = \sqrt{(2-x)(3-x)} + \sqrt{(3-x)(5-x)} + \sqrt{(5-x)(2-x)}$$

Lời Giải

Điều kiện: $0 < x \leq 2$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2-x} \\ b = \sqrt{3-x} \\ c = \sqrt{5-x} \end{cases} \Rightarrow a, b, c \geq 0$

Khi đó, ta có

$$2 - a^2 = 3 - b^2 = 5 - c^2 = x = ab + bc + ca$$

Suy ra

$$\begin{cases} (a+b)(a+c) = 2 \\ (b+a)(b+c) = 3 \\ (c+a)(c+b) = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(a+c) = \sqrt{2.3.5} = \sqrt{30}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+c = \dfrac{\sqrt{30}}{2} \\ a+c = \dfrac{\sqrt{30}}{3} \\ a+b = \dfrac{\sqrt{30}}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{30}}{60} \Rightarrow x = \frac{239}{120}(t/m)$$

Vậy $x = \dfrac{239}{120}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho

$\square$

Bài toán 38

Giải phương trình sau

$$15x^2 = x + 2\sqrt{x^2+x+1} + 5$$

Lời Giải

Phương trình đã cho suy ra

$$(15x^2 - x - 5)^2 = 4(x^2+x+1)$$

$$\Leftrightarrow (3x^2 - x - 1)(25x^2 + 5x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{10} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{10} \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy chỉ có $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ và $x = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$; $x = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$

□

Bài toán 39

Giải phương trình sau

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+x\sqrt{1-x^2}=x^3\sqrt{1+x^4}$$

Lời Giải

Xét $-1 \le x < 0$ ta có ngay $VP < 0$

Do $\sqrt{1-x} \ge 1$ và $x\sqrt{1-x^2} > -1 \Rightarrow VT > 0$

Vô nghiệm suy ra $x > 0$

Lại có điều kiện $x \le 1$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{1+x} \le x^3\sqrt{x^4+1}$

$$\Leftrightarrow x \ge 1 \quad \Rightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

□

Bài toán 40

Giải phương trình sau

$$\sqrt{4+8x}+\sqrt{12-8x}=1-4x+4x^2$$

Lời Giải

Đặt $f(x) = VT$ ta có $minf(x) = 4$, đạt được tại $x = \dfrac{3}{2}, x = -\dfrac{1}{2}$

Đặt $g(x) = VP$ ta có $maxg(x) = 4$, đạt được tại $x = \dfrac{3}{2}, x = -\dfrac{1}{2}$

Vậy $x = \dfrac{3}{2}, x = -\dfrac{1}{2}$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

Chú ý. Học sinh khi đi thi trình bày cần lập bảng biến thiên để tìm min, max của f(x) và g(x)

trên miền xác định của phương trình!

□

Bài toán 41

Giải phương trình sau

$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$$

Lời Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$
Đặt $x = \cos t$; $t \in [0; \pi]$
Phương trình đã cho trở thành:

$$\sqrt{2}\sin\frac{t}{2} = 2\cos^2 t - 1 + 2\cos t\sin t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\frac{t}{2} = \cos 2t + \sin 2t$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$$

Đến đây đã là phương trình lượng giác cơ bản!

□

Bài toán 42
Giải phương trình sau

$$\sqrt{4-x} + x\sqrt{3x+2} = \sqrt{2(x^3+3x^2+x+3)}$$

Lời Giải

Bình phương 2 vế của phương trình đã cho rồi thu gọn ta được PT sau:

$$\Rightarrow x^2(x-4) - 2x\sqrt{4-x}\sqrt{3x+2} - (3x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x\sqrt{4-x})^2 + 2(x\sqrt{4-x})\sqrt{3x+2} - (3x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x\sqrt{4-x} - \sqrt{3x+2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{4-x} = \sqrt{3x+2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1+\sqrt{2} \\ x = 1-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy chỉ có $x = 2$ và $x = 1+\sqrt{2}$ thõa mãn phương trình

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x = 2$; $x = 1 + \sqrt{2}$

□

Bài toán 43

Giải phương trình sau

$$x\left(1+\sqrt{x^4+1}\right) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{7x^2-6x+1}$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện $x \geq \dfrac{3+\sqrt{2}}{7}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{cases} x \geq \sqrt{2x-1} \\ \sqrt{x^4+1} \geq \sqrt{2}x \end{cases}$$

Cho nên

$$x(1+\sqrt{x^4+1}) \geq \sqrt{2x-1} + \sqrt{2}x^2$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh

$$\sqrt{2}x^2 \geq \sqrt{7x^2-6x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 \geq 7x^2 - 6x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(2x^2+4x-1) \geq 0$$

Đúng cho nên $VT \geq VP$ dấu bằng xảy ra khi $x = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$

□

Bài toán 44

Giải phương trình sau

$$\left(x^3+6x^2\right)\sqrt{x^2+x+1} = \left(x^2-x\right)\sqrt{x^4+x^2+1} + 7\sqrt{x^2+2}$$

<u>Lời Giải</u>

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^3+6x-7)\sqrt{x^2+x+1} = (x^2-x)\sqrt{x^4+x^2+1} + 7\left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+x+1}\right)$$

- Xét $x = 1$ là một nghiệm

• Xét $x \neq 1$, phương trình đã cho tương đương

$$\Leftrightarrow (x^2+7x+7)\sqrt{x^2+x+1} = x\sqrt{x^4+x^2+1} - \frac{7}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+x+1}} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+7 = x\sqrt{x^2+x+1} - \frac{7}{(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+x+1})\sqrt{x^2+x+1}}$$

Nếu $x \leq 0$ thì phương trình trên vô nghiệm.

Nếu $x > 0$ ta dễ dàng chứng minh được $x^2+x+7 > \sqrt{x^4-x^2+x^3} \geq x\sqrt{x^2-x+1}$

Suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$

□

Bài toán 45

Giải phương trình sau

$$\sqrt{x^2+2x\sqrt{x^2+x}} + \sqrt{x^2+x} = 1$$

<u>Lời Giải</u>

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x\sqrt{x^2+x}} = 1 - \sqrt{x^2+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x\sqrt{x^2+x} = 1+x^2+x-2\sqrt{x^2+x} \\ 1-\sqrt{x^2+x} \geq 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2(1+x)\sqrt{x^2+x} = 1+x$$

$$\Leftrightarrow (1+x)(2\sqrt{x^2+x}-1) = 0$$

• Xét $x = -1$ là một nghiệm.

• Xét $2\sqrt{x^2+x} = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$ thỏa mãn điều kiện (1)

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x = 1$; $x = \dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$

□

Bài toán 46

Giải phương trình sau

$$6\left(x^2+1\right) = x + 6\sqrt{x^2-x+1}\sqrt[3]{x^2+x+1}$$

Lời Giải

Nhận thấy

$$\begin{aligned} VP &= x + 6\sqrt[6]{(x^2-x+1)^3(x^2+x+1)^2.1} \\ &\le x + 3(x^2-x+1) + 2(x^2+x+1) + 1 \\ &= 5x^2 + 6 \le 6(x^2+1) = VT \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$

□

Bài toán 47

Giải phương trình sau

$$x + 10\sqrt[3]{12 + 9\sqrt[3]{3-x}} + 9 = \sqrt[3]{3-x}$$

Lời Giải

Với bài toán dạng căn chứa căn này ta sẽ xử lý bằng hàm số và có hai cách đặt như sau

Cách 1. Đặt $9t = -x$ thay vào phương trình ta được

$$9t + \sqrt[3]{9t+3} = 9 + 10\sqrt[3]{12 + 9\sqrt[3]{9t+3}}$$

$$\Leftrightarrow 9t + 10\sqrt[3]{9t+3} = 9\left(1 + \sqrt[3]{9t+3}\right) + 10\sqrt[3]{9\left(1+\sqrt[3]{9t+3}\right) + 3} \quad (*)$$

Xét hàm số $f = 9u + 10\sqrt[3]{9u+3}$ ta có

$$\Rightarrow f' = 9 + \frac{30}{\sqrt[3]{(9t+3)^2}} > 0 \ ; \ \forall t \in R$$

Phương trình $(*)$ có dạng $f(t) = f\left(1 + \sqrt[3]{9t+3}\right)$

$$\Leftrightarrow t = 1 + \sqrt[3]{9t+3} \Leftrightarrow 3t^3 = (t+2)^3$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1 \Rightarrow x = -9\left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1\right)$$

Cách 2. Đặt $t = \sqrt[3]{3-x} \Leftrightarrow x = 3 - t^3$. Lúc đó phương trình đã cho trở thành

$$t^3 + t - 12 = 10\sqrt[3]{12+9t} \Leftrightarrow t^3 + 10t = \left(\sqrt[3]{12+9t}\right)^3 + \sqrt[3]{12+9t} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(u) = u^3 + 10u,\ u \in \mathbb{R}$
Ta có $f'(u) = 3u^2 + 10 > 0,\ \forall u \in \mathbb{R}$.
Do đó hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Với kết quả này thì từ (1) ta có

$$f(t) = f\left(\sqrt[3]{12+9t}\right) \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{12+9t} \Leftrightarrow t^3 - 9t - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 - (\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{9})^2 - 3\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}\right)\left(t^2 + \sqrt[3]{3^2} + \sqrt[9]{9^2} + \sqrt[3]{3}t + \sqrt[3]{9}t - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow \sqrt[3]{3-x} = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow x = 3 - \left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right)^3$$

Chú ý. $x = 3 - \left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right)^3 = -9\left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1\right)$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -9\left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1\right)$

□

Bài toán 48
Giải phương trình sau

$$\sqrt{1+x} + x\sqrt[4]{1-x} = \sqrt[4]{1-x^2}$$

Lời Giải

Điều kiện $-1 \le x \le 1$
Đặt $\sqrt[4]{1-x} = a \quad (a \ge 0)$, $\sqrt[4]{1+x} = b \quad (b \ge 0)$
Phương trình trở thành

$$2b^2 + (b^4 - a^4)a = 2ab$$

$$\Leftrightarrow (b-a)\left[2b + a(b+a)(b^2+a^2)\right] = 0$$

Với $a = b = 0$ thì phương trình vô nghiệm
Với $a = b$ suy ra $x = 0$
Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình

□

Bài toán 49
Giải phương trình sau

$$\sqrt[3]{x^2+x+1}\sqrt{1-x} + \sqrt[3]{x^2-x+1}\sqrt{1+x} = x^2 + 2$$

Lời Giải

Điều kiện $x \in [-1;1]$. Ta có

$$VT = \sqrt[6]{(x^2+x+1)^3.(1-x)^2} + \sqrt[6]{(x^2-x+1)^3.(1+x)^2}$$
$$\leqslant \frac{3.\left(x^2+x+1\right)+2(1-x)+1}{6} + \frac{3.\left(x^2-x+1\right)+2(1+x)+1}{6}$$
$$= x^2+2 = VP$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

□

Bài toán 50

Giải phương trình sau

$$x+\sqrt{2x-1}\sqrt[3]{2x+1} = 3+\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x+4}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình tương đương với

$$(2x-1)+\sqrt{2x-1}\sqrt[3]{(2x-1)+2} = (x+2)+\sqrt{x+2}\sqrt[3]{(x+2)+2} \quad (*)$$

Do $f(t) = t+\sqrt{t}\sqrt[3]{t+2}$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

Phương trình $(*)$ có dạng $f(2x-1) = f(x+2) \Rightarrow 2x-1 = x+2 \Leftrightarrow x=3$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$

□

Bài toán 51

Giải phương trình sau

$$x^3+3x+1 = x^2\sqrt[3]{x^3+4x^2}$$

Lời Giải

Do $x=0$ không là nghiệm nên phương trình tương đương

$$1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3} = \sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+1\right)^3 + \left(\frac{1}{x}+1\right) = \left(\frac{4}{x}+1\right) + \sqrt[3]{1+\frac{4}{x}} \quad (*)$$

Hàm $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và phương trình $(*)$ có dạng $f\left(\frac{1}{x}+1\right) = f\left(\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+1 = \sqrt[3]{1+\frac{4}{x}} \quad \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+1\right)^3 = \frac{4}{x}+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow x = \frac{2}{-3\pm\sqrt{13}}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -\dfrac{2}{3\pm\sqrt{13}}$

□

Bài toán 52

Giải phương trình sau

$$x + \sqrt[4]{x^2+x+1}\sqrt[3]{x^2+x+2} = \sqrt[4]{x^2-x+1}\sqrt[3]{x^2-x+2}$$

<u>Lời Giải</u>

Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+x\right)^2 + \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2+\frac{3}{4}}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 + \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\frac{3}{4}}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\frac{7}{4}}$$

Do hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t + \sqrt[4]{t+\frac{3}{4}}\sqrt[3]{t+\frac{7}{4}}$ là hàm đồng biến trên $[0;+\infty)$ nên

$$\left(\frac{1}{2}+x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}-x\right)^2 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$

□

Bài toán 53

Giải phương trình sau

$$\left(x^4+x^2\right)\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right) = (x+1)\sqrt{x+1}$$

Lời Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$
Nhận xét: Để phương trình có nghiệm thì

$$\sqrt{x+1} \geq \sqrt{1-x} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

Khi đó phương trình tương đương với

$$\sqrt{1-x}[(x^3 - x^2 + 2x + 1)\sqrt{1-x^2} + x^4 + x^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$

$\square$

Bài toán 54
Giải phương trình sau

$$3x^2 + 3x + 1 + x\sqrt{2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x} = (1+\sqrt{3})x^3$$

Lời Giải

Do $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên $x \neq 0$. Phương trình tương đương với

$$\frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 1 + \sqrt{3}$$

Đặt $t = \sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}} > 0$ phương trình thành

$$t^2 - 2 + t = 1 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + t - 3 - \sqrt{3} = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$

$\square$

Bài toán 55
Giải phương trình sau

$$45x^2 + 12x\left(\sqrt{1+6x^2} + \sqrt{1+x^2}\right) + 5 = 0$$

<u>Lời Giải</u>

Nếu $x \geq 0$ thì vế trái dương nên xét $x < 0$, ta có

$$VT = 45x^2 + 5 - 12\left[\frac{\sqrt{9x^2(1+6x^2)}}{3} + \frac{\sqrt{4x^2(1+x^2)}}{2}\right]$$

$$\geq 45x^2 + 5 - 12\left(\frac{15x^2+1}{6} + \frac{5x^2+1}{4}\right) = 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\square$

Bài toán 56
Giải phương trình sau

$$(x+1)\sqrt{2(x^2+1)} + \sqrt{6x^2+18x+12} = \frac{3x^2+7x+10}{2}$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện $x \in (-\infty; -2] \bigcup [-1; +\infty)$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x+1)\sqrt{2(x^2+1)} + 2\sqrt{(3x+3)(2x+4)} = 3x^2 + 7x + 10$$

Ta có

$$2(x+1)\sqrt{2(x^2+1)} + 2\sqrt{(3x+3)(2x+4)}$$
$$\leq (x+1)^2 + 2(x^2+1) + (3x+3) + (2x+4) = 3x^2 + 7x + 10$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$ (TM)

Vậy PT có nghiệm duy nhất: $x = 1$

$\square$

Bài toán 57

Giải phương trình sau

$$6\sqrt[3]{x^4+1}+6\sqrt{x^3+1}=7x^2+12$$

Lời Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$6\sqrt{x^3+1}=3.2.\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}\leq 3x^2+6$$

Từ phương trình ta có ngay

$$7x^2+12\leq 6\sqrt[3]{x^4+1}+3x^2+6$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+3\leq 3\sqrt[3]{x^4+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2(8x^4+9x^2+54)\leq 0$$

$$\Rightarrow x=0$$

Vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

□

Bài toán 58

Giải phương trình sau

$$5x^2+12\sqrt{2-3x}+4\sqrt{1-2x}+34x=12\sqrt{1+2x}+4\sqrt{3x}+7$$

Lời Giải

Điều kiện $0\leq x\leq \dfrac{1}{2}$, ta có

$$\Leftrightarrow 5x^2+34x-7+12\left(\sqrt{2-3x}-\sqrt{1+2x}\right)+4\left(\sqrt{1-2x}-\sqrt{3x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (5x-1)(x+7)+\frac{12(1-5x)}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{1+2x}}+\frac{4(1-5x)}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{3x}}=0$$

$$\Leftrightarrow (5x-1)\left(\frac{12}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{1+2x}}+\frac{4}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{3x}}-x-7\right)=0$$

Dựa vào điều kiện $0 \le x \le \frac{1}{2}$ áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{cases} \left(\sqrt{2-3x}+\sqrt{1+2x}\right)^2 \le 2(3-x) \le 6 \\ \left(\sqrt{1-2x}+\sqrt{3x}\right)^2 \le 2(1-x) \le 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{1+2x}} + \frac{4}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{3x}} \ge 2\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$$

Do đó suy ra

$$\frac{12}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{1+2x}} + \frac{4}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{3x}} - x - 7 \ge 2\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2} - 7 > 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{5}$

□

Bài toán 59

Giải phương trình sau

$$4x^3 + 48\sqrt{1+x} = 3x^2 + 24\sqrt{1-x} + 30x + 24$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện của phương trình: $x \in [-1;1]$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow -4x^3+3x^2+30x = 24(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})+24(\sqrt{1+x}-1)$

$$\Leftrightarrow x(-4x^2+3x+30) = \frac{48x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + \frac{24x}{\sqrt{1+x}+1}$$

- Xét $x = 0$ là một nghiệm.
- Xét $-4x^2+3x+30 = \frac{48}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + \frac{24}{\sqrt{1+x}+1} \quad (*)$

Trong phương trình này, với $x \in [-1;1]$ thì

$$\begin{cases} VT \le \frac{489}{16} < 31 \\ VP \ge \frac{48}{2} + \frac{24}{\sqrt{2}+1} > 33 \end{cases} \Rightarrow VT < VP$$

Vậy nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

□

Bài toán 60

Giải phương trình sau

$$x^3+x^2+x=(x+3)\sqrt{1+\sqrt{1+x}+1}$$

Lời Giải

Điều kiện $x\geq -1$

Dễ dàng thấy để phương trình có nghiệm thì $x>0$. Khi đó ta viết lại phương trình

$$x^3+x^2+x+(x+3)\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)-(x+3)\sqrt{x+1}-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[x^3-(x+1)\sqrt{1+x}\right]+(x^2-x-1)+2\left(x-\sqrt{1+x}\right)+(x+3)\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)=$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{1+x}\right)\left[x^2+x\sqrt{1+x}+1+x\right]+(x^2-x-1)+2(x-\sqrt{1+x})+\frac{(x+3).(x-\sqrt{1+}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{1+x}\right)\left(x^2+x\sqrt{1+x}+3+2x+\sqrt{1+x}+\frac{x+3}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{1+x}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-1=0\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

□

Bài toán 61

Giải phương trình sau

$$\sqrt[7]{x-1-\sqrt{x^2-2x}}+\sqrt[7]{x-1+\sqrt{x^2-2x}}=2$$

Lời Giải

Đặt $a=x-1$, $b=\sqrt{x^2-2x}\geq 0$ thay vào ta có hệ

$$\begin{cases}\sqrt[7]{a-b}+\sqrt[7]{a+b}=2\\ a^2-b^2=1\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta có $\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}\Rightarrow x=2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$

□

Bài toán 62

Giải phương trình sau

$$x^2 + 2x + 3 = (8 - 2x)\sqrt{2\sqrt{2x-1} - 1}$$

Lời Giải

Điều kiện xác định $x \geq \frac{1}{2}$
Điều kiện để có nghiệm $x \leq 4$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{2x-1} \leq x$$
$$\Rightarrow \sqrt{2\sqrt{2x-1} - 1} \leq \sqrt{2x-1} \leq x$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x + 3 \leq (8 - 2x)x$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$

□

Bài toán 63

Giải phương trình sau

$$x^2 - 3x - 2 = (x-1)\sqrt{2x+1}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$
Khi đó phương trình đã cho được viết lại thành

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{2x+1})(2\sqrt{2x+1} - x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+1} = -x\\ 2\sqrt{2x+1} = x+1\end{array}\right.$$

Với $\sqrt{2x+1} = -x$ ta có

$$\sqrt{2x+1} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$$

Với $2\sqrt{2x+1} = x+1$ ta có

$$2\sqrt{2x+1} = x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3-2\sqrt{3} \\ x = 3+2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x = 1-\sqrt{2}$; $x = 3-2\sqrt{3}$; $x = 3+2\sqrt{3}$.

□

Bài toán 64

Giải phương trình sau

$$\sqrt[3]{x^2-1} - \sqrt{x^3-2} + x = 0$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq \sqrt[3]{2}$

Ta có

$$\sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^2-1} - 2) + (x-3) = \sqrt{x^3-2} - 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} + (x-3) = \frac{x^3-27}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

Suy ra $\Leftrightarrow x = 3$ hoặc $\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} + 1 - \dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} = 0 \quad (*)$

Ta có $(*)$ vô nghiệm với mọi $x \geq \sqrt[3]{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$

□

Bài toán 65

Giải phương trình sau

$$\sqrt[4]{x^2+x+1} + \sqrt[4]{x^2-x+1} = 2\sqrt[3]{x^2+1}$$

Lời Giải

Ta có

$$(2\sqrt[3]{x^2+1})^4 = (\sqrt[4]{x^2+x+1} + \sqrt[4]{x^2-x+1})^4$$
$$\leq 8(x^2+x+1+x^2-x+1) = 16(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)(\sqrt[3]{x^2+1}-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$

□

Bài toán 66
Giải phương trình sau

$$\sqrt[11]{x^2+x+1} + \sqrt[11]{x^2-x+1} = 2\sqrt[10]{x^2+1}$$

Lời Giải

Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$(2\sqrt[10]{x^2+1})^{11} = (\sqrt[11]{x^2+x+1} + \sqrt[11]{x^2-x+1})^{11}$$

$$\leq 2^{10}(2x^2+2) = 2^{11}(x^2+1)$$

$$\leftrightarrow x^2 \leq 0$$

$$\leftrightarrow x = 0$$

Tổng quát. $\sqrt[k+1]{x^2+x+1} + \sqrt[k+1]{x^2-x+1} \leq 2\sqrt[k+1]{x^2+1} \leq 2\sqrt[k]{x^2+1}$ với mọi k tự nhiên.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$

□

Bài toán 67
Giải phương trình sau

$$(x^2+1)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right) = 4x$$

Lời Giải

Điều kiện có nghiệm của phương trình $0 < x \leq 1$ Khi đó phương trình tương đương với:

$$x^2+1 = 2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow (x^2+1)^2 = 4(2-2\sqrt{1-x^2})$$

Đặt $x = \sin t$, $t \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ ta được

$$(\sin^2 t + 1)^2 = 8(1 - \cos t) \Leftrightarrow \cos^4 t - 4\cos^2 t + 8\cos t - 4 = 0$$

hay $(\cos^2 t - 2\cos t + 2)(\cos^2 t + 2\cos t - 2) = 0 \Rightarrow \cos t = \sqrt{3} - 1$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$

□

Bài toán 68

Giải phương trình sau

$$6\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right) + 5\sqrt{x^4 + x^2 + 1} = 17$$

Lời Giải

Điều kiện của phương trình: $x \in [-1; 1]$
Phương trình tương đương:

$$3[2\sqrt{1+x} - (2+x)] + 3[2\sqrt{1-x} - (2-x)] + 5(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - 1) = 0$$

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x} + (2+x)} - \frac{3x^2}{2\sqrt{1-x} + (2-x)} + \frac{5x^2(x^2+1)}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + 1} = 0$$

Suy ra $x = 0$ là một nghiệm.
Xét $x \neq 0$, phương trình tương đương

$$\frac{3}{2\sqrt{1+x} + 2 + x} - \frac{3}{2\sqrt{1-x} + 2 - x} = -\frac{x^2+1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + 1}$$

Nếu $x \in [-1; 0)$ thì 2 vế trái dấu nên phương trình trên vô nghiệm.
Nếu $x \in (0; 1]$ thì vế trái là hàm số $f(x)$ nghịch biến và $\dfrac{3}{2\sqrt{2} + 3} - 3 \leq f(x) < 0$
Vế phải cũng là hàm số $g(x)$ nghịch biến và $g(x) < -\dfrac{5}{2}$.
Mà $\dfrac{3}{2\sqrt{2} + 3} - 3 > -\dfrac{5}{2}$ nên phương trình vô nghiệm.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$

□

Bài toán 69

Giải phương trình sau

$$(x^2 + x + 1)\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \left(x^2 + \frac{1}{x} + 2\right)\sqrt{x+1} = 4x\sqrt{2x + \frac{1}{x} + 3}$$

Lời Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq -\dfrac{1}{2} \\ -1 \leq x < 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{x}+2} = a \geq 0 \\ \sqrt{x+1} = b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2x+\dfrac{1}{x}+3} = ab$

Khi đó,phương trình tương đương

$$(x^2+b^2)a + (x^2+a^2)b = 4xab$$

$$\Leftrightarrow (a+b)x^2 - 4x.ab + ab(a+b) = 0 \quad (*)$$

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi (*) có nghiệm,hay $\Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4a^2b^2 - ab(a+b)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow -ab(a-b)^2 \geq 0$$

Do $a, b \geq 0$ nên $\Leftrightarrow (a-b)^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow a = b.$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x}+2} = \sqrt{1+x} \quad \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (T/M)$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

□

Bài toán 70
Giải phương trình sau

$$x^3 + 6x = 4x^2 + (4-2x)\sqrt{x^2-x+4}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq 1$; $x \leq 0$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 + 2(x-2)\sqrt{x^2-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2x + 2 + 2\sqrt{x^2-x}) = 0 \quad (*)$$

Do $x^2 - 2x + 2 + 2\sqrt{x^2-x} = (x-1)^2 + 1 + 2\sqrt{x^2-x} > 0$ nên $(*)$ suy ra $x = 2$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm $x = 2$

□

Bài toán 71

Giải phương trình sau

$$x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

Lời Giải

Điều kiện $x > 0$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[4]{t}$ thì ta có $f(t)$ đồng biến với $t > 0$

Phương trình đã cho có dạng $f(x) = f(\frac{1}{x})$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình

□

Bài toán 72

Giải phương trình sau

$$\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt[3]{\frac{3x}{2x+1}}$$

Lời Giải

Điều kiện $x > 0$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{2x}{x+1}}{\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{x+1}}} + \frac{\frac{1}{x} - \frac{3x}{2x+1}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}}\sqrt[3]{\frac{3x}{2x+1}} + \sqrt[3]{(\frac{2x}{x+1})^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)\left[\frac{1+2x}{x(1+x)\left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{x+1}}\right)} + \frac{1+3x}{x(1+2x)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}}\sqrt[3]{\frac{3x}{2x+1}} + \sqrt[3]{(\frac{2x}{x+1})^2}\right)}\right]$$

Ta có $\forall x > 0$ thì biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương nên $x = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$

$\square$

Bài toán 73

Giải phương trình sau

$$\sqrt{2x+3}\sqrt[3]{5+x} = x^2 + x - 6$$

Lời Giải

Điều kiện:$x \geq -\frac{3}{2}$

Vì $x \geq -\frac{3}{2}$ nên $VP \geq 0$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 2$$

Phương trình đã cho tương đương

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+3}(\sqrt[3]{x+5} - 2) + 2(\sqrt{2x+3} - 3) = x^2 + x - 12$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4} + \frac{4}{\sqrt{2x+3}+3} - x - 4\right] = 0$$

- Trường hợp 1. Với $x = 3$ thõa mãn phương trình
- Trường hợp 2. Xét phương trình còn lại ta có

$$VT \leq \frac{\sqrt{2x+3}}{3} - x + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2x+3}+3} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow VT < \frac{\sqrt{2x+3} - 3x}{3} = \frac{-9x^2 + 2x + 3}{3(\sqrt{2x+3} + 3x)} < 0\ ;\ \forall x \geq 2$$

Suy ra phương trình vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$

$\square$

Bài toán 74

Giải phương trình sau

$$3x^3 - x^2 - x - 1 = \frac{2 - \sqrt{(x^2+1)^3}}{x-1}$$

Lời Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^4 - 4x^3 + \sqrt{(x^2+1)^3} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left[3x^2 - 4x + \frac{(x^2+1)^2 + x^2 + 2}{\sqrt{(x^2+1)^3}+1}\right] = 0$$

- Trường hợp 1. Với $x = 0$ thõa mãn phương trình
- Trường hợp 2. Với $3x^2 - 4x + \dfrac{(x^2+1)^2 + x^2 + 2}{\sqrt{(x^2+1)^3}+1} = 0 \quad (*)$

Ta có

$$\sqrt{(x^2+1)^3} + 1 = (\sqrt{x^2+1}+1)(x^2+1-\sqrt{x^2+1}+1) \leq \left(\frac{x^2+3}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow VT(*) \geq 3x^2 - 4x + \frac{4(x^4+3x^2+3)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{4(x^4+3x^2+3) + (x^2+3)^2(3x^2-4x)}{x^2+3} > 0 \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra phương trình $(*)$ vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm $x = 0$

□

Bài toán 75

Giải phương trình sau

$$\frac{5\sqrt{x+15}}{8} = \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}}{2\sqrt{x}}$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện $x > 0$

Phương trình đã cho tương đương với

$$4\sqrt{x+3} + 4\sqrt{x+8} = 5\sqrt{(x+15)x}$$

$$\Leftrightarrow \left[2\sqrt{x(x+15)} - 4\sqrt{x+3}\right] + \left[3\sqrt{x(x+15)} - 4\sqrt{x+8}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+12)}{2\sqrt{x(x+15)}+4\sqrt{x+3}} + \frac{(x-1)(9x+128)}{3\sqrt{(x+15)x}+4\sqrt{x+8}}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{x+12}{2\sqrt{x(x+15)}+4\sqrt{x+3}} + \frac{9x+128}{3\sqrt{(x+15)x}+4\sqrt{x+8}}\right]$$

Với $x > 0$ nên nghiệm của phương trình $x = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$

$\square$

Bài toán 76

Giải phương trình sau

$$x^2 + 3x + 1 = 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$$

Lời Giải

Đặt $\begin{cases} u = x^2 + x + 1 > 0 \\ v = x^2 - x + 1 > 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2u - v = \sqrt{uv} \\ u, v > 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v$$

Hay $x = 0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$

$\square$

Bài toán 77

Giải phương trình sau

$$2\sqrt{1-x} + \sqrt{6\sqrt{2x\,(1-x)}} = \sqrt{2x}$$

Lời Giải

Điều kiện $0 \leq x \leq 1$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{6\sqrt{2x(1-x)}} = \sqrt{2x} - 2\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x} - 2\sqrt{1-x} \geq 0 \\ 2x - 10\sqrt{2x(1-x)} + 4(1-x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ \sqrt{2x} = (5 \pm \sqrt{21})\sqrt{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{27 + 5\sqrt{21}}{51}$$

Vậy Phương trình đã cho có nghiệm:$x = \dfrac{27 + 5\sqrt{21}}{51}$

$\square$

Bài toán 78
Giải phương trình sau

$$\sqrt{1+x^2}=\frac{5}{2\sqrt{1+x^2}}+x$$

<u>Lời Giải</u>

Phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow 2\left(1+x^2\right)-5-2x\sqrt{1+x^2}=0 \quad (1)$$

Với $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình
Ta xét $x>0$ thì (1) tương đương

$$\Leftrightarrow 2-\frac{3}{x^2}-2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=0$$

Đặt $t=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}>1$ suy ra $5-3t^2-2t=0 \quad \Leftrightarrow t=1$
Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm!
Xét $x<0$ thì (1) tương đương

$$\Leftrightarrow 2-\frac{3}{x^2}+2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=0$$

Đặt $t=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}>1$ suy ra $5-3t^2+2t=0 \quad \Leftrightarrow t=\frac{5}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ t=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\frac{3}{4}$

$\square$

Bài toán 79
Giải phương trình sau

$$x\left(3+\sqrt{\frac{3}{2+\sqrt{\frac{2}{1+x}}}}\right)=4$$

Lời Giải

Để phương trình có nghiệm thì $x > 0$
Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{16}{x^2} - \frac{24}{x} + 9 = \frac{3\sqrt{x+1}}{2\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16(1-x)}{x^2} + \frac{8(x-1)}{x} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}+\sqrt{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{8(x-2)}{x^2} - \frac{1}{(2\sqrt{1+x}+\sqrt{2})(\sqrt{1+x}+\sqrt{2})}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Từ phương trình ban đầu ta có

$$4 = x\left(3 + \sqrt{\frac{3}{2+\sqrt{\frac{2}{1+x}}}}\right) > 3x \quad \Leftrightarrow x < \frac{4}{3} < 2$$

Suy ra phương trình còn lại vô nghiệm
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$

□

Bài toán 80
Giải phương trình sau

$$\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} + \sqrt{(5+2x)(5-2x)} = 5$$

Lời Giải

Cách 1. Điều kiện $-2 \le x \le 2$
Đặt $\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = a$; $\quad (2 \le a \le 2\sqrt{2})$

$$\Rightarrow 4 + 2\sqrt{4-x^2} = a^2 \Leftrightarrow 16 - 4x^2 = (a^2-4)^2$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 = a^4 - 8a^2$$

Thế vào phương trình ban đầu,ta được

$$a + \sqrt{a^4 - 8a^2 + 25} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^4 - 8a^2 + 25} = 5 - a$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 8a^2 + 25 = a^2 - 10a + 25$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 9a^2 + 10a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-2)(a^2+2a-5) = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2 \quad (T/M)$$

Vậy $x = \pm 2$ là nghiệm phương trình đã cho!

Cách 2. Phương trình đã cho tương đương

$$2\sqrt{2+x} + 2\sqrt{2-x} + 2\sqrt{(5+2x)(5-2x)} = 10$$

$$\Leftrightarrow x + 2 - 2\sqrt{2+x} + 2 - x - 2\sqrt{2-x} + 2(3 - \sqrt{(5+2x)(5-2x)}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x+2+2\sqrt{2+x}} + \frac{x^2-4}{2-x+2\sqrt{2-x}} + \frac{8(x^{2)}-4)}{3+\sqrt{(5+2x)(5-2x)}} = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-4)\left[\frac{1}{x+2+2\sqrt{2+x}} + \frac{1}{2-x+2\sqrt{2-x}} + \frac{8}{3+\sqrt{(5+2x)(5-2x)}}\right] = 0$$

Do $\dfrac{1}{x+2+2\sqrt{2+x}} + \dfrac{1}{2-x+2\sqrt{2-x}} + \dfrac{8}{3+\sqrt{(5+2x)(5-2x)}} >;\ \forall x \in [-2;2]$

$$\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow x = \pm 2 \quad (T/M)$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm 2$

□

Bài toán 81

Giải phương trình sau

$$\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} + \sqrt{(5+2x)(5-2x)} = x^2 + 1$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện $x \in [-2;2]$

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2-4)\left[\frac{1}{x+2+2\sqrt{2+x}} + \frac{1}{2-x+2\sqrt{2-x}} + \frac{8}{3+\sqrt{(5+2x)(5-2x)}} + 2\right] = 0$$

Do biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương $\forall x \in [-2;2]$ nên suy ra $x = \pm 2$

□

Bài toán 82
Giải phương trình sau

$$\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+2015=\sqrt{(5+2x)\,(5-2x)}+1007x$$

Lời Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$x+2-2\sqrt{x+2}+2-x-2\sqrt{2-x}+2015(x-2)+2\left[\sqrt{(5-2x)(5+2x)}-3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{x+2}{x+2+2\sqrt{2+x}}+\frac{x+2}{2-x+2\sqrt{2-x}}+2015-\frac{8(x+2)}{\sqrt{(5-2x)(5+2x)}+3}\right]=0$$

Do $\dfrac{x+2}{x+2+2\sqrt{2+x}}+\dfrac{x+2}{2-x+2\sqrt{2-x}}+2015-\dfrac{8(x+2)}{\sqrt{(5-2x)(5+2x)}+3}>0\ \forall x\in[-2;2]$

nên phương trình có nghiệm $x=2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$

□

Bài toán 83
Giải phương trình sau

$$\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(x+\sqrt{x^2-6x+10}-3\right)=2$$

Lời Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(x+\sqrt{x^2-6x+10}-3\right)=2$$

$$\Leftrightarrow (-\frac{x}{2})+\sqrt{(-\frac{x}{2})^2+1}=(x-3)+\sqrt{(x-3)^2+1}\quad(*)$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ ta có

$$f'(t)=\frac{t+\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}>0\quad\forall t\in\mathbb{R}$$

Suy ra $f(t)$ đồng biến $\mathbb{R}$ và phương trình $(*)$ có dạng $f\left(-\dfrac{x}{2}\right)=f\,(x-3)$

$$\Rightarrow -\frac{x}{2}=x-3\quad\Leftrightarrow x=2$$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 2$

$\square$

Bài toán 84

Giải phương trình sau

$$x - 1 = 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{1 + 4x - x^2}$$

Lời Giải

Đặt $t = \sqrt[3]{x}$ thay vào phương trình ta được

$$t^3 - 2t - 1 = \sqrt{1 + 4t^3 - t^6}$$

$$\Leftrightarrow (t+1)\left(t^2 - t - 1\right) = \sqrt{(1 + t - t^2)\left(t^4 + t^3 + 2t^2 - t + 1\right)}$$

Do $\begin{cases} t^4 + t^2 \geq 2\left|t^3\right| \\ t^2 + 1 \geq 2\left|t\right| \end{cases} \Rightarrow t^4 + t^3 + 2t^2 - t + 1 \geq 2\left|t^3\right| + t^3 + 2\left|t\right| - t \geq 0$

Hai dấu đẳng thức không đạt đồng thời tại một giá trị của t nên $t^4 + t^3 + 2t^2 - t + 1 > 0$

Điều kiện để phương trình ẩn t có nghĩa là $1 + t - t^2 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq t \leq \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (*)

Với điều kiện (*) thì $VT = (t+1)\left(t^2 - t - 1\right) \leq 0 \leq VP$.

Vậy phương trình tương đương với $VT = VP = 0$ hay $t + 1 - t^2 = 0$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3$

$\square$

Bài toán 85

Giải phương trình sau

$$x^2 + 4x + 6 = 6\sqrt{2x + 1}\sqrt[3]{1 - x}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \sqrt[3]{1 - x} > 0$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$VT = x^2 + 4x + 6 = 2\sqrt{2x + 1}.3.\sqrt[3]{1 - x} \leq (2x + 2)(3 - x) = -2x^2 + 4x + 6$$

$$\Rightarrow -3x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

□

Bài toán 86

Giải phương trình sau

$$x^2 + x + 6\sqrt{x+2}\sqrt[3]{2x+1} + 6 = 0$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq -2$

Để ý nếu $x \geq -\dfrac{1}{2}$ thì vế trái dương, nên xét $-2 \leq x < -\dfrac{1}{2}$, ta có

$$6\sqrt{x+2}\sqrt[3]{2x+1} = -6\sqrt[6]{1.(x+2)^3(-2x-1)^2}$$
$$\geq -6\frac{1+3(x+2)+2(-2x-1)}{6} = x - 5$$

Do đó $x^2 + x + 6\sqrt{x+2}\sqrt[3]{2x+1} + 6 \geq x^2 + 2x + 1 \geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$

□

Bài toán 87

Giải phương trình sau

$$\sqrt{x+3}\sqrt{3x+6} + \sqrt{x+8}\sqrt{3x+13} + \sqrt{x+15}\sqrt{3x+1} = x + 25$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq -\dfrac{1}{3}$

Phương trình tương với

$$(\sqrt{3x^2+15x+18} - 6) + (\sqrt{3x^2+37x+104} - 12) + (\sqrt{3x^2+46x+15} - x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(3x+18)}{\sqrt{3x^2+15x+18}+6} + \frac{(x-1)(3x+40)}{\sqrt{3x^2+37x+104}+12} + \frac{(x-1)(2x+34)}{\sqrt{3x^2+46x+15}+x+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{3x+18}{\sqrt{3x^2+15x+18}+6} + \frac{3x+40}{\sqrt{3x^2+37x+104}+12} + \frac{2x+34}{\sqrt{3x^2+46x+15}+x+5}\right] =$$

Do biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương $\forall x \geq -\dfrac{1}{3}$ nên phương trình có nghiệm $x = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$

$\square$

Bài toán 88

Giải phương trình sau

$$4x^2 + 7x + 6 = 6(x+1)\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1-x}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq -1$,ta tạm thời đặt $\sqrt{x+1} = a \geq 0$
Ta thấy VT dương nên $\Rightarrow \sqrt[3]{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$
Đặt $\sqrt{x+1} = a \geq 0$, thay vào phương trình ta được

$$4a^4 - a^2 + 3 = 6a^3\sqrt[3]{2-a^2}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$4a^4 - a^2 + 3 = 6a^3\sqrt[3]{1.1(2-a^2)} \leq 2a^3(4-a^2)$$

$$\Leftrightarrow 2a^5 + 4a^4 - 8a^3 - a^2 + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(2a^3 + 8a^2 + 6a + 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \quad (T/M)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$

$\square$

Bài toán 89

Giải phương trình sau

$$\left(x^2 + x + 1\right)\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right) = x\sqrt{1+2x}$$

Lời Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Liên hợp phương trình cho vế trái phương trình ta có

$$2x(x^2 + x + 1) = x\sqrt{2x+1}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$$

Với $x = 0$ thõa mãn phương trình

Với $2(x^2+x+1)=\sqrt{2x+1}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\quad(*)$. Ta có

$$VP(*)\le\sqrt{2x+1}\sqrt{(1+1)(1+x+1-x)}=2\sqrt{2x+1}\le 2x+2$$

$$\Rightarrow 2(x^2+x+1)\le 2x+2$$

$$\Leftrightarrow x^2\le 0\Leftrightarrow x=0$$

Dấu "=" xảy ra ở các bất đẳng thức tại $x=0$.

Vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

□

Bài toán 90

Giải phương trình sau

$$\left(\sqrt{3x^2+x+1}+\sqrt{x+1}\right)^3+2x+1=28x^3$$

Lời Giải

Điều kiện $x\ge -1$

Điều kiện có nghiệm của phương trình là $x>0$ do $VT>0$ nên $VP>0\Rightarrow x>0$

Phương trình đã cho tương đương với

$$27x^3-(\sqrt{3x^2+x+1}+\sqrt{x+1})^3+x^3-2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-\sqrt{3x^2+x+1}-\sqrt{x+1})A+x^3-2x-1=0$$

Với $A=9x^2+3x(\sqrt{3x^2+x+1}+\sqrt{x+1})+(\sqrt{3x^2+x+1}+\sqrt{x+1})^2>0$

$$\Leftrightarrow A\left(\frac{x^2-x-1}{3x+\sqrt{3x^2+x+1}}+\frac{x^2-x-1}{x+\sqrt{x+1}}\right)+(x+2)(x^2-x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left(\frac{A}{3x+\sqrt{3x^2+x+1}}+\frac{A}{x+\sqrt{x+1}}+x+2\right)=0$$

Do $\dfrac{A}{3x+\sqrt{3x^2+x+1}}+\dfrac{A}{x+\sqrt{x+1}}+x+2>0\quad\forall x\ge 0$

Nên phương trình suy ra $x^2-x-1=0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt5}{2}\qquad(Do\quad x>0)$$

Vậy nghiệm phương trình đã cho là $x=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$

□

Bài toán 91
Giải phương trình sau

$$x^2\left(1+\sqrt{x}\right)=\sqrt{5x+3}+\sqrt{1+x\sqrt[3]{2x+1}}$$

Lời Giải

Điều kiện $x\geq 0$
Phương trình tương đương với

$$x(x-\sqrt{x+1})+\sqrt{x+1}(x-\sqrt[3]{2x+1}+x^2\sqrt{x}-\sqrt{5x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow x(\frac{x^2-x-1}{x+\sqrt{x+1}})+\frac{(x+1)(x^2-x-1)\sqrt{x+1}}{x^2+x\sqrt[3]{2x+1}+(\sqrt[3]{2x+1})^2}+\frac{(x^2-x-1)(x^3+x^2+2x+3)}{x^2\sqrt{x}+\sqrt{5x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)A=0$$

Với $A=\dfrac{x}{x+\sqrt{x+1}}+\dfrac{(x+1)\sqrt{x+1}}{x^2+x\sqrt[3]{2x+1}+(\sqrt[3]{2x+1})^2}+\dfrac{x^3+x^2+2x+3}{x^2\sqrt{x}+\sqrt{5x+3}}>0\ \forall x\geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad (Do\quad x\geq 0)$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

□

Bài toán 92
Giải phương trình sau

$$(x+1)\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1\sqrt[3]{2x+1}}=2x^2\sqrt{2x-1}$$

Lời Giải

Điều kiện $x\geq\dfrac{1}{2}$
Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x+1}(x-\sqrt[3]{2x+1})+\sqrt{2x-1}(x^2-x-1)+x(x\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1})=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x^2-x-1)\sqrt{3x+1}}{x^2+x\sqrt[3]{2x+1}+(\sqrt[3]{2x+1})^2}+(x^2-x-1)\sqrt{2x-1}+\frac{x(2x+1)(x^2-x-1)}{x\sqrt{2x-1+\sqrt{3x+1}}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left[\frac{(x+1)\sqrt{3x+1}}{x^2+x\sqrt[3]{2x+1}+(\sqrt[3]{2x+1})^2}+\sqrt{2x-1}+\frac{x(2x+1)}{x\sqrt{2x-1+\sqrt{3x+1}}}\right]=0$$

Do biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương $\forall x \geq \frac{1}{2}$ nên phương trình suy ra

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (Do \quad x \geq \frac{1}{2})$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

□

Bài toán 93

Giải phương trình sau

$$(x+9)\sqrt{x+1} - 8x^3 - 12x^2 - 13x + 3 = 0$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq -1$

Phương trình đã cho tương đương

$$(x+9)(2x - \sqrt{x+1}) + 8x^3 + 10x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - x - 1)[\frac{x+9}{2x+\sqrt{x+1}} + 2x + 3] = 0$$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì $8x^3 + 12x^2 + 13x - 3 \geq 0$

Khi đó, biểu thức trong dấu ngoặc vuông luôn dương

Do đó

$$4x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{17}}{8} \\ x = \frac{1-\sqrt{17}}{8} \end{array}\right.$$

Thử lại nghiệm ta thấy chỉ $x = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$ thõa mãn

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$

□

Bài toán 94

Giải phương trình sau

$$x^2 + 2x = 1 + \sqrt[3]{x^3 + 13\left(x^2 + x + 1\right)\sqrt{x+1}}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq -1$

Do với $x \geq -1$ thì $VP > 0$,để phương trình có nghiệm thì $VT > 0$,hay $x > 0$

Phương trình đã cho tương đương

$$x^2 - x - 1 + 3x - \sqrt[3]{x^3 + 13(x^2 + x + 1)\sqrt{x + 1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 - \frac{26x^3 - 13(x^2 + x + 1)\sqrt{x + 1}}{A} = 0$$

Với $\begin{cases} A = 9x^2 + 3xB + B^2 \\ B = \sqrt[3]{x^3 + 13(x^2 + x + 1)\sqrt{x + 1}} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 + \frac{13x(x^2 - x - 1) + 13(x^2 + x + 1)(x - \sqrt{x + 1})}{A} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 + \frac{13x(x^2 - x - 1) + \dfrac{13(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1)}{x + \sqrt{x + 1}}}{A} = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)\left[1 + \frac{13x + \dfrac{13(x^2 + x + 1)}{x + \sqrt{x + 1}}}{A}\right] = 0$$

Do biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương $\forall x \geq -1$ nên $(*)$ suy ra

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (T/M)$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\square$

Bài toán 95

Giải phương trình sau

$$2x^3 = (x + 1)\left(\sqrt{x + 1} + \sqrt[3]{2x + 1}\right)$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện $x \geq -1$

Phương trình đã cho tương đương

$$2x^3 - (x + 1)\sqrt{x + 1} - (x + 1)\sqrt[3]{2x + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x^2-x-1)}{x+\sqrt{x+1}} + \frac{(x+1)^2(x^2-x-1)}{x^2+x\sqrt[3]{2x+1}+(\sqrt[3]{2x+1})^2} + 2x(x^2-x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{(x+1)}{x+\sqrt{x+1}} + \dfrac{(x+1)^2}{x^2+x\sqrt[3]{2x+1}+(\sqrt[3]{2x+1})^2} + 2x = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2x^2+2x\sqrt{x+1}+x+1}{x+\sqrt{x+1}} + \frac{(x+1)^2}{x^2+x\sqrt[3]{2x+1}+(\sqrt[3]{2x+1})^2} = 0 \quad (VN)$$

Thử lại chỉ có nghiệm $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

□

Bài toán 96

Giải phương trình sau

$$x^3+6x = 3\sqrt[3]{6x^2+4}\sqrt[4]{2x^3+3}+3$$

Lời Giải

Điều kiện có nghiệm của phương trình $\begin{cases} 2x^3+2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$

Phương trình đã cho tương đương

$$x^3-3x^2+3x-3+3x^2+3x-3\sqrt[3]{6x^2+4}\sqrt[4]{2x^3+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-3+3x(x+1-\sqrt[3]{6x^2+4})+3\sqrt[3]{6x^2+4}(x-\sqrt[4]{2x^3+3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3-3x^2+3x-3)\left[1+\frac{3x}{A}+\frac{3(x+1)\sqrt[3]{6x^2+4}}{B}\right] = 0$$

Với $\begin{cases} A = (x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{6x^2+4}+(\sqrt[3]{6x^2+4})^2 \\ B = (x-\sqrt[4]{2x^3+3})(x^2+\sqrt{2x^3+3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x^2+3x-3=0 \quad (*) \\ 1+\dfrac{3x}{A}+\dfrac{3(x+1)\sqrt[3]{6x^2+4}}{B} = 0 \quad (**) \end{array}\right.$$

Ta có $VT(**) > 0 \quad \forall x > 0$ nên $(**)$ vô nghiệm

Từ $(*)$ suy ra $(x-1)^3 = 2 \quad \Leftrightarrow x = 1+\sqrt[3]{2}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1+\sqrt[3]{2}$

□

Bài toán 97
Giải phương trình sau

$$x^2 = 2x + \sqrt{-x^2+2x+2}\sqrt[3]{-x^3+5x+3}$$

Lời Giải

Điều kiện $1-\sqrt{3} \le x \le 1+\sqrt{3}$

Phương trình tương đương với

$$\sqrt[3]{-x^3+5+3}(1-\sqrt{-x^2+2x+2}) + x^2 - 2x - 1 + 1 - \sqrt[3]{-x^3+5+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{-x^3+5+3}\frac{x^2-2x-1}{1+\sqrt{-x^2+2x+2}} + x^2 - 2x - 1 + \frac{(x+2)(x^2-2x-1)}{1+\sqrt[3]{-x^3+5+3}+(\sqrt[3]{-x^3+5+3})^2} =$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x-1)\left[\frac{\sqrt[3]{-x^3+5+3}}{1+\sqrt{-x^2+2x+2}} + 1 + \frac{x+2}{1+\sqrt[3]{-x^3+5+3}+\left(\sqrt[3]{-x^3+5+3}\right)^2}\right] = 0$$

Do biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương $\forall x \in \left[1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\right]$ nên phương trình tương đương

$$\begin{cases} x \in \left[1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\right] \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = 1 \pm \sqrt{2}$

□

Bài toán 98
Giải phương trình sau

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 3\sqrt{-x^2+x+2} + 2\sqrt{x^2+3x+3}$$

Lời Giải

Điều kiện $-1 < x \le 2$

Phương trình tương đương với

$$x^3 + x^2 + x + 1 - 3\sqrt{-x^2+x+2} - 2\sqrt{x^2+3x+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-x-1) + 3(1-\sqrt{-x^2+x+2}) + 2(2x-\sqrt{x^2+3x+3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-x-1) + \frac{3(x^2-x-1)}{1+\sqrt{-x^2+x+2}} + \frac{6(x^2-x-1)}{2x+\sqrt{x^2+3x+3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left[+2+\frac{3}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}+\frac{6}{2x+\sqrt{x^2+3x+3}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x+2+\dfrac{3}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}+\dfrac{6}{2x+\sqrt{x^2+3x+3}}=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

- Xét $x\in(-1,0) \Rightarrow VT(*)<0$ suy ra phương trình vô nghiệm.
- Xét $x\in[0,2] \Rightarrow VT(*)>0$ suy ra phương trình vô nghiệm.

Thử lại chỉ có nghiệm $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình chỉ có duy nhất một nghiệm $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

□

Bài toán 99

Giải phương trình sau

$$x^2+5x+2=\sqrt[4]{14x+16}\sqrt[3]{x^2+x+1}$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện có nghiệm của phương trình $x\ge\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}$

Phương trình tương đương với

$$(x+1)\left(x+2-\sqrt[4]{14x+16}\right)+2x+\sqrt[4]{14x+16}\left(x+1-\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow xA=0$$

Với

$$A=\frac{(x+1)\left(x^3+8x^2+16x+18\right)}{\left(x+2+\sqrt[4]{14x+16}\right)\left[(x+2)^2+\sqrt{14x+16}\right]}+2$$
$$+\frac{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt[4]{14x+16}}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{x^2+x+1}+\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)^2}>0 \quad \forall x\ge\frac{-5+\sqrt{17}}{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

□

Bài toán 100

Giải phương trình sau

$$2\left(x^4+8\right)=7\sqrt{2x^3+3x^2+2x}+7\sqrt{4x^3-3x^2+4x}$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện $x \geq 0$

Phương trình tương đương

$$2x^4 - 42x + 16 = 7(\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 2x} - 3x) + 7(\sqrt{4x^3 - 3x^2 + 4x} - 3x)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 6x + 16) = \frac{14x(x^2 - 3x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 2x} + 3x} + \frac{28x(x^2 - 3x + 1)}{\sqrt{4x^3 - 3x^2 + 4x} + 3x}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad (Do \quad x \geq 0\ ) \\ x^2 + 3x + 8 = \dfrac{7x}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 2x} + 3x} + \dfrac{14x}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 2x} + 3x} \quad (*) \end{array}\right.$$

Ta có $\begin{cases} x \geq 0 \\ VT(*) > 8 \\ VP(*) \leq \dfrac{7x}{3x} + \dfrac{14x}{3x} = 7 \end{cases}$

Suy ra phương trình $(*)$ vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

□

Bài toán 101

Giải phương trình sau

$$x^3 + x = 3 + \sqrt{2x^2 - x + 2}\sqrt{4x^2 - 3x + 4}$$

Lời Giải

Điều kiện có nghiệm của phương trình $x^3 + x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Phương trình tương đương

$$x(x^2 - 3x + 1) + 3x^2 - 3 - \sqrt{(2x^2 - x + 2)(4x^2 - 3x + 4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 1) + \frac{+x^4 + 10x^3 - 37x^2 + 10x + 1}{3(x^2 - 1) + \sqrt{(2x^2 - x + 2)(4x^2 - 3x + 4)}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 1) + \frac{(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 13x + 1)}{3(x^2 - 1) + \sqrt{(2x^2 - x + 2)(4x^2 - 3x + 4)}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)\left[x + \frac{(x^2 + 13x + 1)}{3(x^2 - 1) + \sqrt{(2x^2 - x + 2)(4x^2 - 3x + 4)}}\right] = 0$$

Do biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương $\forall x > 0$ nên phương trình tương đương

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\square$

Bài toán 102

Giải phương trình sau

$$x^2 + x\left(1 + 2\sqrt{1+x}\right) = 2015$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq -1$

Phương trình tương đương $(x + \sqrt{1+x})^2 = 2016$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \sqrt{1+x} = \sqrt{2016} \quad (*) \\ x + \sqrt{1+x} = -\sqrt{2016} \quad (**) \end{array}\right.$$

• Với $x + \sqrt{1+x} = \sqrt{2016}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x} = \sqrt{2016} - x \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq \sqrt{2016} \\ x + 1 = x^2 - 24\sqrt{14}x + 2016 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq \sqrt{2016} \\ x^2 - x(24\sqrt{14}+1) + 2015 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{24\sqrt{14} + 1 - \sqrt{5 + 48\sqrt{14}}}{2}$$

• Với $x + \sqrt{1+x} = -\sqrt{2016}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x} = -x - \sqrt{2016} \quad (VN \ do \ x \geq -1)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{24\sqrt{14} + 1 - \sqrt{5 + 48\sqrt{14}}}{2}$

$\square$

Bài toán 103

Giải phương trình sau

$$x + \sqrt{\sqrt{-x-1} + \sqrt{1 + 2\sqrt{-x-1}}} = \sqrt{-x-1}$$

Lời Giải

Cách 1. Điều kiện $-x - 1 \geq 0$

Đặt $\sqrt{-x-1} = t \geq 0$
Khi đó phương trình tương đương

$$\sqrt{t+\sqrt{2t+1}} = t^2+t+1$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$VT = \sqrt{t+\sqrt{1+2t}} \leq \sqrt{t+\frac{1+2t+1}{2}} = \sqrt{2t+1} \leq t+1 \leq t^2+t+1 = VP$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t=0$ hay $x=-1$
Cách 2. Đặt $\sqrt{-x-1} = t \geq 0$

$$t^2+t+1 = \sqrt{t+\sqrt{2t+1}}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + \frac{t^2+t+1-\sqrt{2t+1}}{t+1+\sqrt{t+\sqrt{2t+1}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + \frac{t^2 + \dfrac{t^2}{t+1+\sqrt{t+\sqrt{2t+1}}}}{t+1+\sqrt{t+\sqrt{2t+1}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2\left[1 + \frac{1 + \dfrac{1}{t+1+\sqrt{t+\sqrt{2t+1}}}}{t+1+\sqrt{t+\sqrt{2t+1}}}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$

$\square$

Bài toán 104
Giải phương trình sau

$$x^2+1 = \sqrt{2x+\sqrt{3x+1}}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$
Bình phương hai vế của phương trình,ta được

$$x^4+2x^2-2x+1 = \sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^4+2x^2-3x\right) + \left(x+1-\sqrt{3x+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\left(x^2+x+3\right)+\frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\left[x^2+x+3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}\right]=0$$

Do $x^2+x+3+\dfrac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}>0\ \ \forall x\geq -\dfrac{1}{3}$ nên phương trình có hai nghiệm $x=0; x=1$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x=0; x=1$

□

Bài toán 105

Giải phương trình sau

$$x\left(4x^3+7x+7\right)=11x^3+\sqrt{3-5x}+5$$

Lời Giải

Điều kiện $x\leq \dfrac{3}{5}$

Ta có

$$x(4x^3+7x+7)=11x^3+5+\sqrt{3-5x}$$
$$\Leftrightarrow 4x^4-11x^3+7x^2+9x-6=\sqrt{3-5x}-(1-2x)$$
$$\Leftrightarrow (4x^2+x-2)(x^2-3x+3)=\frac{-(4x^2+x-2)}{\sqrt{3-5x}+(1-2x)}$$
$$\Leftrightarrow (4x^2+x-2)\left[x^2-3x+3+\frac{1}{\sqrt{3-5x}+(1-2x)}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+x-2=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{8} \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8} \end{array}\right.$$

Thử lại thấy chỉ $x=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{8}$ thỏa mãn

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{8}$

□

Bài toán 106

Giải phương trình sau

$$x+\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x^2+1}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq -4$
Xét
$$\sqrt{x^2+x+4}-x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x=-4 \end{cases} \Rightarrow VN$$
Xét $\sqrt{x^2+x+4}-x \neq 0$ ta có
$$\sqrt{x^2+x+4} \geq |x| \geq x \Rightarrow \sqrt{x^2+x+4}-x \geq 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+x+4}-x > 0$$
Phương trình tương đương với
$$\frac{x+4}{\sqrt{x^2+x+4}-x}+\frac{x+4}{\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt{x+4}=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+4}\left(\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2+x+4}-x}+\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2+1}}+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-4$$
Vậy phương trình đã cho nghiệm duy nhất $x=-4$

□

Bài toán 107
Giải phương trình sau
$$24x^2+89x+\sqrt{4x+6}+81=\sqrt{x^2+2x+3}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$
Phương trình tương đương
$$24x^2+89x+81+\sqrt{4x+6}-\sqrt{x^2+2x+3}=0$$
Xét hàm số $f(x)=24x^2+89x+81+\sqrt{4x+6}-\sqrt{x^2+2x+3}$ với $x \geq -\frac{3}{2}$ ta có
$$f'(x)=48x+89+\frac{2}{\sqrt{4x+6}}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$
$$=24(2x+3)+\frac{2}{\sqrt{4x+6}}+16+\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

Ta có : $\sqrt{x^2+2x+3}-(x+1)=\sqrt{(x+1)^2+2}-(x+1)>0 \quad \Rightarrow f'(x)>0$
Suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến $\forall x \geq -\dfrac{3}{2}$
Nên phương trình đã cho có tốiđa một nghiệm duy nhất.
Mặt khác $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{3}{2}$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{3}{2}$

□

Bài toán 108
Giải phương trình sau

$$(2x+1)(2+\sqrt{4x^2+4x+4})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0$$

Lời Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$2(2x+1)+(2x+1)\sqrt{(2x+1)^2+3}=2.(-3x)+(-3x).\sqrt{(-3x)^2+3}$$

Xét hàm số $f(t)=2t+t\sqrt{t^2+3}$ ta có

$$f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0$$

Hàm số đồng biến suy ra $2x+1=-3x \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{1}{5}$

□

Bài toán 109
Giải phương trình sau trên $\left[-\dfrac{3}{10};+\propto\right)$

$$3(x+1)\sqrt{x+2}+(4x+1)\sqrt{2x+5}=9x^2+4x+1$$

Lời Giải

Điều kiện $x \in \left[-\dfrac{3}{10};+\propto\right)$
Phương trình đã cho tương đương với

$$3(x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(4x+1)\left(\sqrt{2x+5}-3\right)=9x^2-14x-8$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\frac{3(x+1)}{\sqrt{x+2}+2}+(x-2)\frac{2(4x+1)}{\sqrt{2x+5}+3}=(x-2)(9x+4)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \quad (T/M) \\ \dfrac{3(x+1)}{\sqrt{x+2}+2} + \dfrac{2(4x+1)}{\sqrt{2x+5}+3} = 9x+4 \quad (*) \end{array}\right.$$

Giải $(*)$: Với điều kiện $x \in \left[-\dfrac{3}{10}; +\propto\right)$ thì $\begin{cases} x+1>0\ ;\ 4x+\dfrac{3}{2}>0 \\ \sqrt{x+2}+2>3\ \ \sqrt{2x+5}+3>2 \end{cases}$

Khi đó suy ra:

$$\frac{3(x+1)}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{2(4x+1)}{\sqrt{2x+5}+3} = \frac{3(x+1)}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{2(4x+\frac{3}{2})}{\sqrt{2x+5}+3} - \frac{1}{\sqrt{2x+5}+3}$$

$$< \frac{3(x+1)}{3} + \frac{2(4x+\frac{3}{2})}{2} = 5x + \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3(x+1)}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{2(4x+1)}{\sqrt{2x+5}+3} < 5x + \frac{5}{2}\ \forall x \in \left[\frac{-3}{10}; +\propto\right) \ (1)$$

Mặt khác:

$$4x + \frac{3}{2} > 0\ \forall x \in \left[\frac{-3}{10}; +\propto\right) \Rightarrow 9x+4 > 5x + \frac{5}{2}\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{3(x+1)}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{2(4x+1)}{\sqrt{2x+5}+3} < 9x+4\ \forall x \in \left[\frac{-3}{10}; +\propto\right)$$

Vậy phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Kết luận. Phương trình đã cho xét trên $\left[-\dfrac{3}{10}; +\propto\right)$ có nghiệm duy nhất $x = 2$ □

Bài toán 110

Giải phương trình sau

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 9x + 32 = 6\sqrt{3x+3}$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện $x \geq -1$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x + 20 = 3[2\sqrt{3x+3} - (x+4)]$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2+2x+5) = \frac{-3(x-2)^2}{2\sqrt{3x+3}+x+4}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2\left[x^2+2x+5+\frac{3}{2\sqrt{3x+3}+x+4}\right]=0$$

Do $x^2+2x+5+\dfrac{3}{2\sqrt{3x+3}+x+4}>0$; $\forall x\ge -1$ nên phương trình có nghiệm $x=2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$

$\square$

Bài toán 111

Giải phương trình sau

$$x(4x^2+1)-(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+2x+1}=0$$

Lời Giải

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $x>0$

Phương trình tương đương

$$2x(4x^2+1)=\left(2x^2+2x+1+1\right)\sqrt{2x^2+2x+1}\quad(*)$$

Xét hàm số $f(t)=t(t^2+1)$ ta có ngay $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mặt khác phương trình $(*)$ có dạng $f(2x)=f(\sqrt{2x^2+2x+1})$ suy ra

$$2x=\sqrt{2x^2+2x+1}\ \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ 2x^2-2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\quad(T/M)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\square$

Bài toán 112

Giải phương trình sau

$$\sqrt{4x^2+5x+1}=2\sqrt{x^2-x+1}-1$$

Lời Giải

Điều kiện $x\ge -\dfrac{1}{4}$; $x\le -1$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x^2-4x+4}-\sqrt{4x^2+5x+1}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}=-9x+3$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{4x^2-4x+4} = -9x+4 \Leftrightarrow x=0 \quad (T/M)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$

□

Bài toán 113
Giải phương trình sau

$$x^4+12x^3+11x^2+12x+1 = 3(x^2+3x+1)\sqrt{3x(x^2+1)}$$

Lời Giải

Cách 1. Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow x^4-6x^3+11x^2-6x+1 = 3(x^2+3x+1)\sqrt{3x(x^2+1)}-18x^3-18x$$

$$\Leftrightarrow x^4-6x^3+11x^2-6x+1 = 3\sqrt{3x(x^2+1)}[x^2+3x+1-2\sqrt{3x(x^2+1)}]$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+1)^2 = \frac{3\sqrt{3x(x^2+1)}(x^2-3x+1)^2}{x^2+3x+1+2\sqrt{3x(x^2+1)}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+1=0 \quad \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ 1=\dfrac{3\sqrt{3x(x^2+1)}}{x^2+3x+1+2\sqrt{3x(x^2+1)}} \quad (*) \end{array}\right.$$

$$(*) \Rightarrow x^2+3x+1+2\sqrt{3x(x^2+1)} = 3\sqrt{3x(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+1-\sqrt{3x(x^2+1)}=0 \quad (VN)$$

Cách 2. Phương trình đã cho tương đương

$$\Rightarrow \left(x^4+12x^3+11x^2+12x+1\right)^2-27x(x^2+3x+1)^2(x^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-3x+1\right)^2\left[x^2(x^2+3x+3)+\left(4x^2+3x+1\right)+4x^2+1\right]=0$$

Kết luận. Phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

□

Bài toán 114
Giải phương trình sau

$$\sqrt[3]{x^2+3x+3}+\sqrt[3]{2x^2+3x+2}=6x^2+12x+8$$

Lời Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$6x^2+12x+8=\sqrt[3]{x^2+3x+3}+\sqrt[3]{2x^2+3x+2}$$
$$\le \frac{x^2+3x+5}{3}+\frac{2x^2+3x+4}{3}=x^2+2x+3$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2\le 0\Rightarrow x=-1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$

$\square$

Bài toán 115
Giải phương trình sau

$$x\sqrt{12-x}+(11-x)\sqrt{x+1}=25$$

Lời Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$\left(\sqrt{12-x}+\sqrt{x+1}-5\right)\left(2\sqrt{12-x}\sqrt{x+1}+5\sqrt{12-x}+5\sqrt{x+1}+23\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{12-x}+\sqrt{x+1}-5=0$$

Phương trình này giải ra ta được hai nghiệm thõa mãn $x=3,x=8$
Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=3,x=8$

$\square$

Bài toán 116
Giải phương trình sau

$$3x^2-2x+2=(x+2)\sqrt{2x^2+1}+(x-1)\sqrt{2x^2-6x-2}$$

Lời Giải

Điều kiện $x\le \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$; $x\ge \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

+ TH1: Xét $x \geq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$
Khi đó các biểu thức $x+2$; $\sqrt{2x^2+1}$; $x-1$; $\sqrt{2x^2-6x-2}$ không âm
Áp dụng AM- GM ta có

$$(x+2)\sqrt{2x^2+1} \leq \frac{3x^2+4x+5}{2}$$

Và $(x-1)\sqrt{2x^2-6x-2} \leq \frac{3x^2-8x-1}{2}$
Từ đó suy ra

$$(x+2)\sqrt{2x^2+1}+(x-1)\sqrt{2x^2-6x-2} \leq 3x^2-2x+2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x+2=\sqrt{2x^2+1} \\ x-1=\sqrt{2x^2-6x-2} \end{cases} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{7}$

+ TH2: Xét $x \leq \frac{3-\sqrt{13}}{2}$
Khi đó đặt $f(x)=(x+2)\sqrt{2x^2+1}+(x-1)\sqrt{2x^2-6x-2}$; $g(x)=3x^2-2x+2$
Ta có hàm $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến với $x \leq \frac{3-\sqrt{13}}{2}$
Như vậy: $f(x) \leq f\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) < g\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) \leq g(x) \quad \forall x \leq \frac{3-\sqrt{13}}{2}$
Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là $x=2+\sqrt{7}$

□

Bài toán 117
Giải phương trình sau

$$x^2+27x+76=5(x+9)\sqrt{x+3}+(x+1)\sqrt{9x-5}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \geq \frac{5}{9}$
với điều kiện như vậy các biểu thức $(x+9)$, $5\sqrt{x+3}$, $(x+1)$, $\sqrt{9x-5}$ không âm.
Áp dụng AM-GM ta có

$$5(x+9)\sqrt{x+3} \leq \frac{(x+9)^2+25(x+3)}{2}=\frac{x^2}{2}+\frac{43x}{2}+78$$

Và

$$(x+1)\sqrt{9x-5} \leq \frac{(x+1)^2+9x-5}{2}=\frac{x^2}{2}+\frac{11x}{2}-2$$

Từ đó suy ra:

$$5(x+9)\sqrt{x+3}+(x+1)\sqrt{9x-5}\le x^2+27x+76$$

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases}(x+9)=5\sqrt{x+3}\\(x+1)=\sqrt{9x-5}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=6\end{array}\right.$

Thử lại ta thấy x=1 hoặc x=6 là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x=1, x=6$

□

Bài toán 118

Giải phương trình sau

$$(x^2+3)\sqrt{x^2-x+1}=x^3+3x^2-4x+1$$

Lời Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2-x+x+3)\sqrt{x^2-x+1}=(x^2-x)(x+3)+x^2-x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x)[\sqrt{x^2-x+1}-(x+3)]-\sqrt{x^2-x+1}[\sqrt{x^2-x+1}-(x+3)]=0$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{x^2-x+1}-x-3](x^2-x-\sqrt{x^2-x+1})=0$$

• Với $\sqrt{x^2-x+1}-x-3=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+3\ge 0\\x^2-x+1=(x+3)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{8}{7}$$

• Với $x^2-x-\sqrt{x^2-x+1}=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1}>0$

$$\Leftrightarrow t^2-t-1=0\quad\Leftrightarrow t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$$

Thử lại thấy cả ba nghiệm đều thõa mãn

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x=-\dfrac{8}{7}$; $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$

□

Bài toán 119
Giải phương trình sau

$$2x^2+x+1+\sqrt{1-x^2}=x(\sqrt{1-x}+3\sqrt{1+x})$$

Lời Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-\sqrt{x+1})(2x-\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x})=0$$

Phương trình trên giải ra ta có các nghiệm $x=...$

□

Bài toán 120
Giải phương trình sau

$$x^3-3x^2+2x-2-\sqrt{x+1}.\sqrt[3]{3x-1}=0$$

Lời Giải

Cách 1. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3-3x^2+2x-2}{\sqrt{x+1}}-2=\sqrt[3]{3x-1}-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x-3)+2x-2-2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}=\frac{3x-9}{\sqrt[3]{3x-1}^2}+2\sqrt[3]{3x-1}+8$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{x^2+2+\dfrac{1}{4+2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}-\frac{3}{\sqrt[3]{3x-1}^2+2\sqrt[3]{3x-1}+8}\right)=0$$

Chứng minh phần còn lại vô nghiệm

Cách 2. Điều kiện $x\geq -1$

- Trường hợp 1.Với $x\geq 3$ ta có

$$x^3-3x^2+2x-2=\sqrt{x+1}.\sqrt[3]{3x-1}\leq \frac{x+5}{4}.\frac{3x+15}{12}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(48x^2-3x+57)\leq 0 \quad \Leftrightarrow x\leq 3 \quad \Leftrightarrow x=3$$

- Trường hợp 2.Với $-1\leq x\leq 3$ ta có

$$\begin{cases}\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{(x-1)^3+x^2(3-x)}\geq x-1\\ \sqrt{x+1}=\sqrt{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}(x+1)(3-x)}\geq \dfrac{x+1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - 2 \geq \frac{1}{2}(x^2 - 1)$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(2x^2 - x + 1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow x \geq 3 \quad \Leftrightarrow x = 3$$

Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$

□

Bài toán 121

Giải phương trình sau

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)^2 = \frac{4\left(1+\sqrt{1+4x}\right)}{x+\sqrt{x^2+3x+2}+1}$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{4(1+\sqrt{1+4x})}{x+1+\sqrt{(x+1)^2+x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\sqrt{1+\frac{1}{x+1}} = 4x + 4x\sqrt{1+4x} \quad (*)$$

Hàm đặc trưng $f(t) = t + t\sqrt{1+t}$ là hàm đồng biến và phương trình $(*)$ có dạng

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right) = f(4x) \quad \Rightarrow \frac{1}{x+1} = 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2} & (T/M) \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2} & (Loai) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$

□

Bài toán 122

Giải phương trình sau

$$2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} + 3\sqrt[3]{-x+\sqrt{x^2+1}} = 5$$

<u>Lời Giải</u>

Đặt $t = \sqrt[6]{-x + \sqrt{x^2 + 1}} > 0$ thì phương trình đã cho là

$$\frac{2}{t^3} + 3t^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(3t^3 + 6t^2 + 4t + 2) = 0$$

Nghiệm $t = 1$ suy ra

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + 1 \quad \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$

$\square$

Bài toán 123

Giải phương trình sau

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x + 12} = 12(\sqrt{5 - x} + \sqrt{4 - x})$$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện $0 \le x \le 4$

Thấy $x = 4$ là một nghiệm của phương trình

Xét $0 \le x < 4$ thì $VT < 12, \ VP > 12$ suy ra phương trình vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 4$

$\square$

Bài toán 124

Giải phương trình sau

$$9x + 8\sqrt{1 - x} = \sqrt{3x + 1} + \sqrt{-3x^2 + 2x + 1} + 7$$

<u>Lời Giải</u>

Phương trình đã cho tương đương

$$9x - 7 - \sqrt{-3x^2 + 2x + 1} = \sqrt{3x + 1} - 8\sqrt{1 - x}$$

$$\Leftrightarrow 78x^2 - 63x - 15 - 6(3x - 5)\sqrt{-3x^2 + 2x + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - x)(26x + 5) + 2(3x - 5)\sqrt{(1 - x)(3x + 1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 1 \\ \sqrt{1 - x}(26x + 5) + 2(3x - 5)\sqrt{3x + 1} = 0 \end{array}\right.$$

$\square$

Bài toán 125
Giải phương trình sau
$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3}=\frac{1}{x+2}$$

Lời Giải

Phương trình đã cho tương đương
$$(x+2)\sqrt{x+1}-2x-1=\sqrt[3]{2x+1}$$
$$\Leftrightarrow\left[\sqrt{(x+1)^2}+1\right]\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{2x+1}\left[\sqrt[3]{(2x+1)^2}+1\right]$$
Đến đây ta có thể liên hợp hoặc dùng hàm số đơn điệu đều ra được $\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{2x+1}$

Giải phương trình này ta có ba nghiệm $x=0$, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

□

Bài toán 126
Giải phương trình sau
$$\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$$

Lời Giải

Điều kiện $x\geq\dfrac{5}{3}$

Ta có
$$\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{10x+1}-\sqrt{9x+4}=\sqrt{2x-2}-\sqrt{3x-5}$$
$$\Leftrightarrow\frac{x-3}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}=\frac{-x+3}{\sqrt{2x-2}+\sqrt{3x-5}}$$
$$\Leftrightarrow x=3\quad(T/M)$$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$

□

Bài toán 127
Giải phương trình sau
$$\frac{2x^2}{\sqrt{4x-1}}=2x-1-\sqrt{2x^2-4x+1}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \in \left(\frac{1}{4}; 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \bigcup \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$
Từ phương trình suy ra $2x - 1 > 0$
Ta có

$$\frac{2x^2}{\sqrt{4x-1}} = 2x - 1 - \sqrt{2x^2 - 4x + 1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{\sqrt{4x-1}} = \frac{2x^2}{2x - 1 + \sqrt{2x^2 - 4x + 1}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4x-1} = 2x - 1 + \sqrt{2x^2 - 4x + 1} \text{ (vì } x > 0)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4x-1} - (2x-1) = \sqrt{2x^2 - 4x + 1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{-2(2x^2 - 4x + 1)}{\sqrt{4x-1} + (2x-1)} = \sqrt{2x^2 - 4x + 1}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$$

Kết hợp điều kiện suy ra $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

□

Bài toán 128

Giải phương trình sau

$$(1 + \sqrt{x+1})(\sqrt{2x^2 - 2x + 1} + x - 1) = x\sqrt{x}$$

Lời Giải

Điều kiện $x > 0$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + 1} - \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x+1}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + 1} - \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 + 1} - t$ ta có

$$f'(t) = \frac{t - \sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}} = -\frac{1}{\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)\sqrt{t^2+1}} < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Suy ra $f(t)$ nghịch biến và ta có

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

□

Bài toán 129
Giải phương trình sau

$$x^4 + \sqrt{2x^2+2x+3} = 4x^2 + 5x + 3$$

Lời Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)^2(x^2-2x-1) + (\sqrt{2x^2+2x+3)} - x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2(x^2-2x-1) + \frac{x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2+2x+3)} + x + 2} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1-\sqrt{2} \\ x = 1+\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy cả hai nghiệm đều thỏa mãn phương trình
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1-\sqrt{2}\ ;\ \ x = 1+\sqrt{2}$

□

Bài toán 130
Giải phương trình sau

$$\frac{x^2+3x}{x^2+1} = \sqrt{\frac{1-x}{2x}}$$

Lời Giải

Điều kiện $x \in (0;1]$
Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x^2+1}$ với $x \in (0;1]$
Ta có

$$f'(x) = \frac{3(1-x^2)+2x}{(x^2+1)^2} > 0\ ;\ \ \forall x \in (0;1]$$

Vậy $f(x)$ là hàm đồng biến trên $(0;1]$

Tương tự ta xét $g(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{2x}}$ với $x \in (0;1]$
Ta có
$$g'(x) = -\frac{3}{8x^2\sqrt{\dfrac{1-x}{2x}}}\ ;\ \forall x \in (0;1]$$
Vậy $g(x)$ là hàm nghịch biến trên $(0;1]$. Ta lại có
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{1}{3}\right)$$
Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{3}$

$\square$

Bài toán 131
Giải phương trình sau
$$\sqrt{x^2+80} = 3x+4+\sqrt{x^2+3}$$

<u>Lời Giải</u>

Đặt $f(x) = \sqrt{x^2+80} - 3x - 4 - \sqrt{x^2+3}$
Khi đó ta có

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+80}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 3 \\ \bullet\ \sqrt{x^2+80} > \sqrt{x^2+3} \Longrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+80}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \text{ nghịch biến } \forall x \in \mathbb{R}$$

Mà $f(1) = 0$ suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$

$\square$

Bài toán 132
Giải phương trình sau
$$\frac{x^2}{1-\sqrt{x}} = x - 2\sqrt{x} + 2$$

<u>Lời Giải</u>

Cách 1. Đặt $\sqrt{x} = t\ ,\ t \geq 0, t \neq 1$
Phương trình trở thành
$$t^4 + t^3 - 3t^2 + 4t - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(t^2 - t + 1\right)\left(t^2 + 2t - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1 + \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow x = 4 - 2\sqrt{3}$$

Cách 2. Do $x = 0$ không là nghiệm nên phương trình tương đương

$$\frac{1}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 1 + 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Đặt $t = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ rồi giải

Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 4 - 2\sqrt{3}$

□

Bài toán 133

Giải phương trình sau

$$\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{-x^2 + x + 1} = x^2 - x + 2$$

Lời Giải

Ta có

$$\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{-x^2 + x + 1} \leq \frac{x^2 + x}{2} + \frac{-x^2 + x + 2}{2} = x + 1$$

Suy ra

$$x^2 - x + 2 \leq x + 1 \quad \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$

□

Bài toán 134

Giải phương trình sau

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt[3]{x^3 - 14} = x - 2$$

Lời Giải

Cách 1. Điều kiện $x^2 - 2x - 1 \geq 0$ $(*)$

Từ phương trình đã cho ta suy ra

$$x - 2 \geq \sqrt[3]{x^3 - 14}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \geq x^3 - 14$$

$$\Leftrightarrow 6(x^2 - 2x - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \le 0 \ (**)$$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta suy ra

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

Cách 2. Tách nhân liên hợp nhân tử $\sqrt{x^2 - 2x - 1}$ như sau:

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \left[\sqrt[3]{x^3 - 14} - (x-2)\right] = 0$$

Kết luận. Phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{2}$

□

Bài toán 135

Giải phương trình sau

$$\sqrt{x - \frac{1}{2} + \frac{x+1}{4}} = \sqrt{2x - 1 + \frac{(x+1)^2}{8}}$$

Lời Giải

Để cho gọn, đặt $a = \sqrt{\dfrac{2x-1}{2}}, b = \dfrac{x+1}{4}$ thì phương trình trở thành

$$a + b = \sqrt{2a^2 + 2b^2} \quad \Leftrightarrow a = b$$

Hay $x = 7 \pm 2\sqrt{10}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 7 \pm 2\sqrt{10}$

□

Bài toán 136

Giải phương trình sau

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt[3]{7x+1} + \sqrt[4]{15x+1} + \sqrt[5]{31x+1} + \sqrt[6]{63x+1} = 5x^6 + 5$$

Lời Giải

Cách 1. Điều kiện $x \in \left[-\dfrac{1}{63}; +\infty\right)$

- Nếu $x \in \left[-\dfrac{1}{63}; 0\right)$ thì $VT < 5 < VP$ suy ra phương trình vô nghiệm
- Nếu $x \in [0; 1)$ thì

$$VT \ge \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^3} + \sqrt[4]{(x+1)^4} + \sqrt[5]{(x+1)^5} + \sqrt[6]{(x+1)^6} = 5(x+1) \ge VP$$

Nếu $x \in [1; +\infty)$, tương tự ta có $VT \leq 5(x+1) \leq VP$

Từ đó, ta dễ dàng thu được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{0; 1\}$.

Cách 2. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1} + \sqrt[3]{7x+1} + \sqrt[4]{15x+1} + \sqrt[5]{31x+1} + \sqrt[6]{63x+1} - 5x^6 - 5$

Ta có

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{63}; 0\right)$$

Nên ta có $f(x)$ có tối đa hai nghiệm phân biệt

Mặt khác $f(0) = f(1) = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0; x = 1$

Kết luận. Phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0; x = 1$

□

Bài toán 137

Giải phương trình sau

$$(3x+1)\sqrt{x^2+x+2} = 3x^2+3x+2$$

<u>Lời Giải</u>

Phương trình đã cho tương đương

$$(x^2+x+2) - (3x+1)\sqrt{x^2+x+2} + (2x^2+2x) = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+x+2}$. Khi đó phương trình trở thành

$$t^2 - (3x+1)t + (2x^2+2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2x)(t-x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2x \\ t = x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+2} = 2x \\ \sqrt{x^2+x+2} = x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$

□

Bài toán 138

Giải phương trình sau

$$(x^2-3x-6)\sqrt{x^2+3}+4\sqrt{x^3+3x^2+3x+9} = (2x+6)\sqrt{(x+3)}+4x^2-8x-12$$

<u>Lời Giải</u>

Cách 1. Điều kiện $x+3 \geq 0$

Phương trình đã cho tương đương

$$\left[(x^2+3)-3(x+3)\right]\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^3+3x^2+3x+9}-2(x+3)\sqrt{x+3}) = 4x^2-8x-12$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x+3}\right)^2\left(\sqrt{x^2+3}-2\sqrt{x+3}\right)+4\left[\sqrt{x^3+3x^2+3x+9}-2(x+3)\right] = 4($$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x-9)\left[\frac{(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x+3})^2}{\sqrt{x^2+3}+2\sqrt{x+3}}+\frac{4(x+3)}{\sqrt{x^3+3x^2+3x+9}+2(x+3)}-4\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x-9=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{13} \\ \dfrac{(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x+3})^2}{\sqrt{x^2+3}+2\sqrt{x+3}}+\dfrac{4(x+3)}{\sqrt{x^3+3x^2+3x+9}+2(x+3)}=4 \quad (*) \end{array}\right.$$

Phương trình $(*)$ có thêm nghiệm $x=1$,ta có thể dùng đạo hàm để chỉ ra vế trái đồng biến

Cách 2. Đẹp hơn,dùng phương pháp ẩn phụ.

Đặt $\sqrt{x^2+3}=a\geq 0, \sqrt{x+3}=b\geq 0$

Phương trình đã cho trở thành

$$(a^2-2b^2)a+4ab=2b^2+(4a^2-8b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2(a-2b)=4(a+b)(a-2b)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-2b)=4(a-2b)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=4 \\ a=2b \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+3}+\sqrt{x+3}=4 \\ \sqrt{x^2+3}=2\sqrt{x+3} \end{array}\right.$$

Giải các phương ta có nghiệm $x=2\pm\sqrt{13}\ ;\ x=1$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x=2\pm\sqrt{13}\ ;\ x=1$

□

Bài toán 139

Giải phương trình sau

$$2x^2-11x+21=3\sqrt[3]{4x-4}$$

Lời Giải

- Nhận xét $2x^2-11x+21>0\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad \Rightarrow x>1$

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x-3)^2+x+3-3\sqrt[3]{4x-4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2\left[2+\frac{x+15}{(x+3)^2+(x+3)\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt[3]{(4x-4)^2}}\right]=0$$

Do $2+\dfrac{x+15}{(x+3)^2+(x+3)\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt[3]{(4x-4)^2}}>0\quad\forall x>1$ nên phương trình suy ra $x=3$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$

□

Bài toán 140

Giải phương trình sau

$$3x^3+4x^2-1=\sqrt[3]{x^6+2x^3+x^2}$$

Lời Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$3x^3+3x^2-x-1+x^2+x-\sqrt[3]{x^6+2x^3+x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2-1\right)(x+1)\left[1+\frac{x^2}{(x^2+x)^2+(x^2+x)\sqrt[3]{x^6+2x^3+x^2}+\sqrt[3]{(x^6+2x^3+x^2)^2}}\right]=0$$

Do biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương nên phương trình suy ra $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $x=-1$

Thử lại ta thấy thõa mãn

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $x=-1$

□

Bài toán 141

Giải phương trình sau

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$$

Lời Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(2+\sqrt{1-x^2})=2+\sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}>0 \\ (1+\sqrt{1-x^2})(2-2\sqrt{1-x^2})=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 2(1-1+x^2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (T/M)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

□

Bài toán 142

Giải phương trình sau

$$\sqrt[3]{162x^3+2}-\sqrt{27x^2-9x+1}=1$$

<u>Lời Giải</u>

Phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow (3x-1)\left[\frac{2\left(9x^2-3x+1\right)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2\left(9x^2+3x+1\right)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}=\dfrac{3x}{\sqrt[3]{162x^3+2}} \quad (*) \end{array}\right.$$

Đặt $t=\sqrt[3]{162x^3+2}$. Phương trình $(*)$ suy ra

$$2\left(3x+\frac{1}{3x}+1\right)=t+\frac{4}{t}+2$$

$$\Leftrightarrow 3x+\frac{1}{3x}=\frac{t}{2}+\frac{2}{t}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\dfrac{t}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3} \\ 3x=\dfrac{2}{t} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ x=-\sqrt[3]{\dfrac{4}{81}} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Thử lại chỉ có $x=\dfrac{1}{3}$ thõa mãn

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{3}$

$\square$

Bài toán 143

Giải phương trình sau

$$\sqrt[3]{x^2+4} = \sqrt{x-1} + 2x - 3$$

Lời Giải

Điều kiện $x > 1$

Phương trình đã cho tương đương

$$(\sqrt{x-1} - 1) + (x - \sqrt[3]{x^2+4}) + (x+2) = 0$$

$$\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{(x-2)(x^2+x+2)}{x^2 + x\sqrt[3]{x^2+4} + (\sqrt[3]{x^2+4})^2} + (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{x^2+x+2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^2+4} + (\sqrt[3]{x^2+4})^2} + 1\right] = 0$$

Ta nhận thấy phương trình trong ngoặc vuông luôn dương $\forall x > 1$ nên phương trình có nghiệm $x = 2$ thỏa mãn điều kiện

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$

$\square$

Bài toán 144

Giải phương trình sau

$$x - 1 + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{5-4x} = \sqrt{5x^2+3x-1}$$

Lời Giải

Điều kiện $-1 \le x \le \dfrac{5}{4}$

Phương trình đã cho tương đương

$$(4x-5)(x+1)A = 0$$

Với $A = -\dfrac{\dfrac{2}{9}}{\sqrt{x+1} + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}} - \dfrac{\dfrac{1}{9}}{\sqrt{5-4x} - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{5}{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{5x^2+3x-1} + (x+2)}$

Ta có biểu thức $A < 0 \quad \forall x \in \left[-1; \dfrac{5}{4}\right]$

Nên phương trình có hai nghiệm $x = \frac{5}{4}$ và $x = -1$ đều thõa mãn

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x = -1$; $x = \frac{5}{4}$

□

Bài toán 145

Giải phương trình sau

$$x + 2\sqrt{\frac{3x-1}{5}} = 4\sqrt[4]{\frac{x^4+4}{20}}$$

Lời Giải

Ta có

$$2\sqrt{\frac{3x-1}{5}} \leq \frac{3x-1}{5} + 1 = \frac{3x+4}{5}$$

$$\sqrt[4]{\frac{x^4+4}{20}} = \sqrt[4]{\frac{(x^4+4)(16+4)}{400}} \geq \sqrt[4]{\frac{(4x^2+4)^2}{400}} = 2\sqrt{\frac{x^2+1}{20}}$$

Suy ra

$$x + \frac{3x+4}{5} \geq 8\sqrt{\frac{x^2+1}{20}} \Leftrightarrow 8x + 4 \geq 40\sqrt{\frac{x^2+1}{20}}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 \geq 10\sqrt{\frac{x^2+1}{20}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + 4x + 1 \geq 5x^2 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ (x-2)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Thử lại thấy thõa mãn phương trình

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$ □

Phần I. Bài Tập Tự Luyện

Bài Toán 1. Giải phương trình

$$\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x-1=0$$

Bài Toán 2. Giải phương trình

$$3x^2+7x+7=3\left(x+1\right)\sqrt{x^2+2x+5}$$

Bài Toán 3. Giải phương trình

$$x\sqrt[3]{25-x^3}(x+\sqrt[3]{25-x^3})=30$$

Bài Toán 4. Giải phương trình

$$2\sqrt{x+1}+8\sqrt[3]{x+5}=x^2+6x+5$$

Bài Toán 5. Giải phương trình

$$x\sqrt{x^2+2}+\frac{x(x+2)^2-7x}{\sqrt{x^2+4x+6}-3}+2\left(x+\sqrt{x^2+4x+6}\right)=5x$$

Bài Toán 6. Giải phương trình

$$(x+1)\sqrt{x^2+4x-4}+2=\sqrt[3]{x^2+2x+5}+\sqrt{x+3}$$

Bài Toán 7. Giải phương trình

$$(x+1)\sqrt{x^2+2}=\sqrt{x^3+14x^2-12x+9}$$

Bài Toán 8. Giải phương trình

$$x^4+8x=2\sqrt{6x^2-8x+8}+\sqrt{x^6+8x^3+x^2+4}+3$$

Bài Toán 9. Giải phương trình

$$\frac{1}{2x-2\sqrt{x}+2}+\frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}=4$$

Bài Toán 10. Giải phương trình

$$2x+5=\frac{x^4+4x^3+8x^2+16x+32}{x^2\sqrt{x+2}+8}$$

Bài Toán 11. Giải phương trình

$$\left(\sqrt{4x^4-12x^3+9x^2+16}-2x^3+3x\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right)=8$$

Bài Toán 12. Giải phương trình

$$\frac{3x+6}{\sqrt{x+1}}-3=\frac{2\sqrt{x^3+10x^2+18x+9}}{x+2}$$

Bài Toán 13. Giải phương trình

$$x(x-3)\sqrt{4+2(1+x)(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}=2x+10\sqrt{x}-16$$

Bài Toán 14. Giải phương trình

$$\frac{2}{x+5+2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2+\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+4x+3}}+\frac{1}{2+2\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=\frac{1}{2}$$

Bài Toán 15. Giải phương trình

$$\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{x^4-1}{2x^2-1}$$

Bài Toán 16. Giải phương trình

$$2(x+5)\sqrt{3-x}+16\sqrt{x+2}+3x^2-11x-36=0$$

Bài Toán 17. Giải phương trình

$$\frac{1}{1+\sqrt{x^2+3x+1}}+\frac{1}{1+\sqrt{x^2-3x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Bài Toán 18. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}+x=\frac{x+3}{x^2-6}+5$$

Bài Toán 19. Giải phương trình

$$x(2x+7)-4\sqrt{2x^2+9x+10}+10=(3x+2)(2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5})$$

Bài Toán 20. Giải phương trình

$$\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{(x^2-1)}+4}+1=\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

Bài Toán 21. Giải phương trình

$$\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x-1=0$$