CHUYÊN ĐỀ 1: HÀM SỐ VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

BÀI 1. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Dạng 1: Tiếp tuyến với $(C): y = f(x)$ tại tiếp điểm $M(x_0, y_0) \in (C)$ có phương trình là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Thường đề thi cho một trong ba yếu tố x_0, y_0 hoặc $f'(x_0)$, ta cần tìm hai yếu tố còn lại để thay vào công thức trên.

Chú ý: a/ $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến *tại* điểm có hoành độ là x_0.

b/ *Tiếp tuyến song song* với đt $y = kx + b$ thì $f'(x_0) = k$.

c/ *Tiếp tuyến vuông góc* với đt $y = kx + b$ thì $f'(x_0).k = -1$ hay $f'(x_0) = -\frac{1}{k}$.

Dạng 2. Tiếp tuyến với $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến đi qua (xuất phát từ, kẻ từ) điểm $M(x_M, y_M)$.

Bước 1. Gọi d là đường thẳng qua M và có hệ số góc k $\Rightarrow d: y = k(x - x_M) + y_M$.

Bước 2. Điều kiện tiếp xúc của d và (C) : $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$

Thế (2) vào (1) giải tìm $x \rightarrow$ thế x vào (2) tìm $k \rightarrow$ thế k vào pttt d là xong.

Chú ý: Khi thế (2) vào (1) ta được phương trình, số nghiệm phương trình này bằng số tiếp tuyến đi qua M.

II. BÀI TẬP

Bài 1. Cho $(C): y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại các giao điểm của (C) với trục hoành.

3/ Viết pt tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 2. CMR tiếp tuyến này có hệ số góc nhỏ nhất.

Bài 2. Cho $(C): y = 4x^3 - 6x^2 + 1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua M(-1,-9).

3/ Viết phương trình đường thẳng đi qua N(2,9) và tiếp xúc với (C).

Bài 3. Cho $(C): y = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Viết phương trình tiếp tuyến với (C) xuất phát từ A(0,1/2).

3/ Tìm trên trục tung những điểm M sao cho từ M kẻ đến (C) 2 tiếp tuyến vuông góc và đối xứng qua Oy.

Bài 4. Cho $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x$.

3/ Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $3x - 5y - 4 = 0$.

Bài 5. Cho $(C): y = x^3 - 3x + 1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm những điểm trên (C) sao cho từ đó chỉ kẻ được đúng một tiếp tuyến với (C).

3/ Tìm những điểm trên đường thẳng $x = 2$ sao cho từ đó kẻ được đúng 3 tiếp tuyến với (C).

Bài 6. Cho $(C): y = x^3 + 3x^2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm những điểm trên trục hoành sao cho từ đó kẻ được đúng 3 tiếp tuyến với (C), trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau.

3/ Chứng minh rằng trên (C) tồn tại vô số những cặp điểm mà tại đó tiếp tuyến song song với nhau.

Bài 7. Cho $(C): y = \dfrac{x+2}{x-1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến đi qua giao điểm của TCĐ với trục hoành.

3/ Chứng minh rằng không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua giao điểm 2 đường tiệm cận.

Bài 8. Cho $(C): y = \dfrac{2x}{x+1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm $M \in (C)$ biết rằng tiếp tuyến với (C) tại M cắt Ox, Oy ở A, B và $S_{OAB} = 1/4$.

3/ Tìm những điểm trên trục hoành sao cho từ đó chỉ kẻ được 1 tiếp tuyến với (C).

Bài 9. Cho $(C): y = \dfrac{3x+1}{x+1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tính diện tích tam giác tạo bởi 2 trục tọa độ và tiếp tuyến với (C) tại điểm A(-2,5).

3/ Gọi M là một điểm bất kì trên (C), tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai đường tiệm cận ở A, B. Chứng minh rằng M là trung điểm AB.

Bài 10. Cho $(C): y = \dfrac{x+2}{x-2}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Gọi I là gđiểm hai đường tiệm cận. Tìm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M vuông góc với IM.

3/ Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua A(-6,5).

Bài 11. Cho $(C): y=\dfrac{x+2}{x-1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Cho A(0,a). Tìm a để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về 2 phía trục hoành.

3/ Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến cắt hai trục tọa độ ở A, B và ΔOAB cân ở O.

Bài 12. Cho $(C): y=\dfrac{x+1}{x-1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận. Tìm $M\in(C)$ biết rằng tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai đường tiệm cận ở A, B và

a/ AB ngắn nhất. b/ chu vi tam giác IAB nhỏ nhất.

3/ Viết phương trình tiếp tuyến với (C) sao cho khoảng cách từ tâm đối xứng của (C) đến tiếp tuyến lớn nhất.

Bài 13. Cho $(C): y=\dfrac{2x+1}{x-2}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Gọi $M\in(C)$ và I là giao điểm hai đường tiệm cận, tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai đường tiệm cận ở A, B. Chứng minh rằng diện tích ΔIAB không đổi (không phụ thuộc vào vị trí M trên (C)).

Bài 14. Cho hàm số $(C): y=x^3+3x^2+9x+3$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm k để tồn tại hai tiếp tuyến với (C) có cùng hệ số góc k. Gọi A, B là hai tiếp điểm, hãy viết phương trình đường thẳng AB.

3/ Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 15. Cho $(C): y=\dfrac{x-1}{x+1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Gọi $M\in(C)$ và I là giao điểm hai đường tiệm cận, tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai đường tiệm cận ở A, B. Tìm tọa độ M sao cho diện tích đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB nhỏ nhất.

3/ Tìm những cặp điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến song song với nhau.

Bài 16. Cho $(C): y=2x^3+3x^2-12x-1$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm M trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M đi qua gốc tọa độ.

Bài 17. Cho $(C): y=\dfrac{x-3}{2x-1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Gọi A, B là các giao điểm của (C) với các trục tọa độ. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến vuông góc với AB.

Bài 18. Cho hàm số $y=2x^3-3\left(m+3\right)x^2+18mx-8$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=0$.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành.

Bài 19. Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$ (1) (*m* là tham số).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) với $m = 2$.

2/ Tìm tham số *m* để đồ thị của hàm số (1) có tiếp tuyến tạo với đường thẳng d: $x+y+7=0$ góc α, biết $\cos\alpha = 1/\sqrt{26}$.

3/ Tìm m để đồ thị hàm số (1) tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua $K\left(2,3\right)$.

Bài 20. Cho hàm số $y=3x-x^3$ (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm trên đường thẳng (d): $y=-x$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến phân biệt với (C).

3/ Viết pt tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 0 và CMR tiếp tuyến này có hệ số góc lớn nhất.

Bài 21. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm trên đường thẳng (d): $y = 2$ các điểm mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

Bài 22. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}mx^3+\left(m-1\right)x^2+\left(4-3m\right)x+1$ có đồ thị là (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2/ Tìm các giá trị *m* sao cho trên đồ thị (C_m) tồn tại một điểm duy nhất có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng (d): $x+2y-3=0$.

Bài 23. Cho hàm số $y=\left(|x|+1\right)^2\left(|x|-1\right)^2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Cho điểm $A(a;0)$. Tìm *a* để từ A kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

Bài 24. Cho hàm số $y=x^4-2x^2$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Trên (C) lấy hai điểm phân biệt A và B có hoành độ lần lượt là *a* và *b*. Tìm điều kiện đối với *a* và *b* để hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

Bài 25. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+2}$ (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

Bài 26. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ (1).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2/ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

Bài 27. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A và B thoả mãn OA = 4OB.

3/ Gọi M là 1 điểm bất kì trên (C). CMR tích khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận luôn bằng hằng số.

Bài 28. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất.

Bài 29. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Cho M là điểm bất kì trên (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B. Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận. Tìm toạ độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất.

Bài 30. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt 2 tiệm cận tại A và B với chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 31. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Cho điểm $M\left(x_0,y_0\right)$ thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại M_0 cắt các tiệm cận của (C) tại các điểm A và B. Chứng minh M_o là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Bài 32. Cho $(C): y=\dfrac{x+2}{x-1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ CMR mọi tiếp tuyến của đồ thị (C) đều lập với hai đường tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

Bài 33. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận, Δ là một tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị (C). d là khoảng cách từ I đến Δ. Tìm giá trị lớn nhất của d.

Bài 34. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm I(1; 2) đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

Bài 35. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm trên O*y* tất cả các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (C).

Bài 36. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(2; 4)$, $B(-4; -2)$.

Bài 37. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận, A là điểm trên (C) có hoành độ là a. Tiếp tuyến tại A của (C) cắt hai đường tiệm cận tại P và Q. Chứng tỏ rằng A là trung điểm của PQ và tính diện tích tam giác IPQ.

Bài 38. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc (C) biết tiếp tuyến đó cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho côsin góc $\widehat{ABI}$ bằng $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$, với I là giao 2 tiệm cận.

Bài 39. Cho hàm số $y=x^4-8x^2+7$ (C)

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

2/ Tìm m để đường thẳng $y=mx-9$ tiếp xúc với đồ thị (C).

Bài 40. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x+1}$ (C)

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

2/ Lập pt tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đó qua giao điểm của tiệm cận đứng và Ox.

Bài 41. Cho hàm số $y=-2x^3+6x^2-5$ (C)

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

2/ Lập phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp đó qua điểm $M\left(-1,-13\right)$

Bài 42. Cho hàm số $y=\frac{x^4}{2}-2(x^2-1)$ (C)

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

2/ Viết phương trình các đường thẳng qua $M\left(0,2\right)$ và tiếp xúc với (C).

Bài 43. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+\frac{1}{3}$ (C_m)

1/ Khảo sát hàm số (C_m) khi m=2.

2/ Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng –1. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x\text{-}y=0$.

Bài 44. Cho hàm số: $y=-x^3+(2m+1)x^2-m-1$ (C_m)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m=1$.

2/ Tìm m để đồ thị (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $d: y=2mx-m-1$.

Bài 45. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+(m+1)x+1$ (C_m)

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C_m) khi $m=-1$.

2/ Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm $x=-1$ đi qua điểm $A\left(1,2\right)$.

Bài 46. Cho $\left(C\right): y=\frac{x+2}{2x+3}$

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

2/ Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến cắt các trục tọa độ tại A, B và đường trung trực của AB đi qua gốc tọa độ.

Bài 47. Cho $\left(C_m\right): y=x^3-3\left(m+1\right)x^2+6mx-3m+4$

1/ 1/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C_m) khi $m=1$.

2/ Gọi d là tiếp tuyến với (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 1. Tìm m để d cắt (C_m) tại điểm B khác A sao cho tam giác OAB cân tại O.

Bài 48. Cho $\left(C\right): y=\frac{x-1}{x-2}$. Viết pt tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến cắt 2 đtc ở A, B và $AB=2\sqrt{2}$.

Bài 49. Cho $\left(C\right): y=x^4-2x^2-1$. Tính diện tích tam giác tạo bởi các trục tọa độ và tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.

Bài 50. Cho $(C): y = \dfrac{2x+1}{x-2}$. Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận và $A(-3,1)$. Hãy viết pt tiếp tuyến với (C) biết tt vuông góc với IA.

Bài 51. Cho hàm số $y = \dfrac{-x+1}{2x-1}$. CMR với mọi *m* đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị *(C)* tại hai điểm phân biệt *A* và *B*. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với *(C)* tại *A* và *B*. Tìm *m* để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

BÀI 2. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Cho $(C): y = f(x)$ và $d: y = ax + b$.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là : $f(x) = ax + b$ (*)
- d cắt (C) tại n điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có n nghiệm phân biệt.
- Nghiệm phương trình là hoành độ của giao điểm, còn tung độ được tính bằng cách thế hoành độ vào phương trình đường thẳng.

2/ Đường thẳng d qua M và có hệ số góc k có pt là: $y = k(x - x_M) + y_M$.

3/ Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ ax_0^2 + bx_0 + c \neq 0 \end{cases}$.

4/ Định lý Viet: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$, $|x_1 - x_2| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

5/ Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}|D|$ với $D = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$.

6/ Hai tiếp tuyến với (C) tại A và B song song nếu $f'(x_A) = f'(x_B)$, còn vuông góc nếu $f'(x_A).f'(x_B) = -1$.

II. BÀI TẬP

Bài 52. Cho $(C): y = x^3 - 3x + 2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Gọi d là đường thẳng qua A(3,20) và có hệ số góc m. Tìm m để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

Bài 53. Cho $(C): y = \dfrac{2x+1}{x+2}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm m để $\Delta: y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho

a/ $AB = 2\sqrt{14}$ b/ $S_{OAB} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Bài 54. Cho $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 1

2/ Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

Bài 55. Cho $(C): y = \dfrac{2x-1}{x-1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm m để $\Delta: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho

a/ tam giác OAB vuông tại O. b/ hai tiếp tuyến với (C) tại A, B song song với nhau.

Bài 56. Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 0.

2/ Tìm m để đường thẳng $\Delta: y = -1$ cắt đths tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.

Bài 57. Cho $(C_m): y = x^4 - mx^2 + m$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm cách đều nhau.

Bài 58. Cho $(C): y = x^3 - 3x^2 + 1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm để $\Delta: y = m(x-3) + 1$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt M(3,1), N, P sao cho hai tiếp tuyến với (C) tại N, P vuông góc với nhau.

Bài 59. Cho $(C): y = \dfrac{x+1}{x-1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B đồng thời

a/ A, B cùng thuộc một nhánh của (C). b/ A, B nằm ở 2 nhánh khác nhau.

Bài 60. Cho $(C): y = \dfrac{x+1}{x+2}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ CMR đường thẳng $y = -x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N. Tìm m để MN ngắn nhất.

Bài 61. Cho $(C_m): y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 3

2/ Cho $d: y = x + 4$ và $K(1,3)$. Tìm m để d cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt A(0,4), B, C đồng thời tam giác KBC có diện tích bằng $2\sqrt{10}$.

Bài 62. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 2$ (1)

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$.

2/ Tìm *m* để đường thẳng $d: y = mx + 2$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt *A*(0; 2), *B*, *C* sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại *B* và *C* vuông góc với nhau.

Bài 63. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (C)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Gọi d là đường thẳng đi qua điểm *A(2; 0)* có hệ số góc *k*. Tìm *k* để (*d*) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, M, N sao cho hai tiếp tuyến của (C) tại M và N vuông góc với nhau.

Bài 64. Cho hàm số $y = 3x - x^3$ (C)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Chứng minh rằng khi *m* thay đổi, đường thẳng $d: y = m(x+1)+2$ luôn cắt đồ thị (C) tại một điểm M cố định và tìm *m* để (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt M, N, P sao cho tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau.

Bài 65. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - (m^2-1)$ (1).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 0$.

2/ Tìm các giá trị của *m* để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

Bài 66. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}$ có đồ thị (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -1$.

2/ Tìm *m* để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ lớn hơn 15.

Bài 67. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho khi $m = 0$.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt tạo thành hai đoạn thẳng bằng nhau.

Bài 68. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - 7$ có đồ thị (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đ cho khi $m = 0$.

2/ Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Bài 69. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - mx$ có đồ thị (C_m)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đ cho khi $m = 1$.

2/ Tìm m để (C_m) cắt đường thẳng $d: y = x + 2$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.

Bài 70. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị là (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0)$ với hệ số góc k. Tìm k để d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C và B, C cùng với gốc toạ độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Bài 71. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Viết phương trình đường thẳng qua $E(1,0)$ và cắt (C) tại ba điểm *E, A, B* phân biệt sao cho diện tích tam giác *OAB* bằng $\sqrt{2}$.

Bài 72. Cho hàm số $y = x^3 + mx + 2$ có đồ thị (C_m)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -3$.

2/ Tìm *m* để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Bài 73. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 2$ có đồ thị (C_m)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2/ Tìm *m* để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Bài 74. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ có đồ thị là (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Định *m* để đường thẳng $d: y = mx - 2m - 4$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

Bài 75. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm *m* để đường thẳng $d: y = (2m-1)x - 4m - 1$ cắt đồ thị (C) tại đúng hai điểm phân biệt.

Bài 76. Cho hàm số $y = x^3 - 3m^2x + 2m$ có đồ thị (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2/ Tìm *m* để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại đúng hai điểm phân biệt.

Bài 77. Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ có đồ thị là (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 8$.

2/ Định m để đồ thị (C_m) cắt trục trục hoành tại bốn điểm phân biệt tạo thành các đoạn thẳng bằng nhau.

Bài 78. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ có đồ thị là (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 0$.

2/ Định m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Bài 79. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ có đồ thị là (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 0$.

2/ Tìm *m* để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 3.

Bài 80. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 2m$ *(1)*

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số *(1)* khi $m = 1$.

2/ Chứng minh đồ thị hàm số *(1)* luôn cắt trục *Ox* tại ít nhất hai điểm phân biệt, với mọi $m < 0$.

Bài 81. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$ (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm *m* để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt (*C*) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{5}$.

Bài 82. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+m}$ (1)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=1$.

2/ Tìm các giá trị của tham số *m* sao cho đường thẳng $d: y=x+2$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm *A* và *B* sao cho $AB=2\sqrt{2}$.

Bài 83. Cho $(C): y=\dfrac{2x-1}{x-1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm *m* để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB vuông tại O.

Bài 84. Cho $(C): y=\dfrac{x+2}{x-2}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Chứng minh rằng với mọi giá trị *m* thì trên (C) luôn có cặp điểm A, B nằm về hai nhánh của (C) và thỏa $\begin{cases} x_A-y_A+m=0 \\ x_B-y_B+m=0 \end{cases}$.

Bài 85. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ (1)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2/ Định k để $d: y=kx+3$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm M, N sao cho tam giác OMN vuông góc tại O.

Bài 86. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+4}{1-x}$

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.

2/ Gọi (*d*) là đường thẳng qua $A(1,1)$ và có hệ số góc *k*. Tìm *k* sao cho (*d*) cắt (*C*) tại hai điểm *M, N* và $MN=3\sqrt{10}$.

Bài 87. Cho $(C): y=\dfrac{2x+3}{x-2}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

2/ Tìm m để đường thẳng $d: y=2x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó song song với nhau.

Bài 88. Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2$ (1).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=0$.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $d: y=-x+2$ tại 3 điểm phân biệt $A(0,2), B, C$ sao cho tam giác MBC có diện tích $2\sqrt{2}$, với $M(3;1)$.

Bài 89. Cho hàm số $y=\dfrac{x^4}{2}-3x^2+\dfrac{5}{2}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thi (C) của hàm số.

2/ Cho điểm M thuộc (C) có hoành độ là a. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M, với giá trị của a thì tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M.

Bài 90. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm a và b để đường thẳng (d): $y=ax+b$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua đường thẳng (Δ): $x-2y+3=0$.

Bài 91. Cho hàm số $y=\dfrac{m-x}{x+2}$ có đồ thị là $\left(C_m\right)$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đ cho khi $m=1$.

2/ Tìm *m* để đường thẳng $d: 2x+2y-1=0$ cắt $\left(C_m\right)$tại hai điểm cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích là $S=\dfrac{3}{8}$.

Bài 92. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-2}$ (C)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

2/ Tìm m để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị sao cho khoảng cách giữa 2 điểm đó là nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

BÀI 3. BÀI TOÁN CỰC TRỊ BẬC BA

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Hàm bậc ba có 2 cực trị (CĐ, CT) $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

2/ Nghiệm x_1, x_2 của pt $y'=0$ là hoành độ của các điểm cực trị. Còn tung độ được tính theo 2 cách:

Cách 1: Nếu x_1, x_2 là nghiệm đẹp $\Rightarrow$ thế trực tiếp x_1, x_2 vào hàm số.

Cách 2: Nếu x_1, x_2 là nghiệm xấu $\Rightarrow$ lấy y chia cho y' rồi thế x_1, x_2 vào phần dư.

3/ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị: $\boxed{y = \text{dư}}$ của y chia y'.

II. BÀI TẬP

Bài 93. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{3}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=2$.

2/ Tìm m để hàm số có cực trị x_1, x_2 thỏa điều kiện $x_1+2x_2=1$.

Bài 94. Cho hàm số $y=x^3+2(m-1)x^2+(m^2-4m)x-2(m^2+1)$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=1$.

2/ Tìm m để hàm số có cực trị x_1, x_2 thỏa điều kiện $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

Bài 95. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x-m$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=1$.

2/ Tìm m để hàm số có cực trị x_1, x_2 sao cho $|x_1-x_2|\le 2$.

Bài 96. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-3m(m+2)x-1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 0.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số có cực trị và hoành độ các điểm cực trị đều dương.

Bài 97. Cho hàm số $y=2x^3+9mx^2+12m^2x+1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=-1$.

2/ Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn $x_{cd}^2=x_{ct}$.

Bài 98. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+3(m+2)x-m-6$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 1.

2/ Tìm m để hàm số có cực trị và hai giá trị cực trị cùng dấu.

Bài 99. Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 2.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số có cực trị và hoành độ cực tiểu bé hơn 1.

Bài 100. Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 1.

2/ Định m để đồ thị hàm số có hai cực trị A, B đồng thời

a/ $AB = 2\sqrt{5}$ b/ hai điểm cực trị A, B đối xứng qua đường thẳng $\Delta: x + 8y - 74 = 0$.

Bài 101. Cho $(C_m): y = x^3 + 3x^2 - 3(m-1)x$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 1$.

2/ Tìm m để (C_m) có cực trị. Khi đó, hãy viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m).

Bài 102. Cho $(C_m): y = x^3 - 3x^2 + mx$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 0$.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng qua đường thẳng $\Delta: y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

Bài 103. Cho $(C_m): y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 0.

2/ Chứng rằng (C_m) luôn có 2 điểm cực trị A, B và khoảng cách AB không đổi.

Bài 104. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 0.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị và khoảng cách 2 điểm cực trị ngắn nhất.

Bài 105. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m-1)x^2 - 9mx - 1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 0$.

2/ Tìm m sao cho đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng qua trục tung.

Bài 106. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 0.

2/ Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB vuông tại O.

Bài 107. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2-1)x - 3m^2 - 1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 1.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị này cách đều gốc tọa độ O.

Bài 108. Cho hàm số $y = x^3 - 3ax^2 + b$ với $a, b > 0$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $a = 1, b = 4$.

2/ Tìm a, b biết rằng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB vuông cân tại O.

Bài 109. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 0$.

2/ Định m để đồ thị hàm số có cực trị và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân.

Bài 110. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ có đồ thị là (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 3$.

2/ Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành.

Bài 111. Cho hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - 4$ có đồ thị là (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

2/ Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục tung.

Bài 112. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 3$ có đồ thị là (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 2$.

2/ Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu nằm về cùng một phía đối với trục tung.

Bài 113. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

2/ Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu cách đều đường thẳng $\Delta: y = x + 1$.

Bài 114. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có đồ thị là (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

2/ Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Bài 115. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x + m - 2$ có đồ thị là (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2/ Định *m* để (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $\Delta: y = \frac{1}{2}x$.

Bài 116. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho ứng với $m = 1$.

2/ Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| > \frac{1}{3}$.

Bài 117. Cho hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 0$.

2/ Tìm *m* để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1 = -4x_2$.

Bài 118. Cho hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 0$.

2/ Tìm các giá trị của *m* để các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số có hoành độ là các số dương.

Bài 119. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (1)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2/ Tìm điểm M thuộc đường thẳng d: $y = 3x - 2$ sao tổng khoảng cách từ M tới hai điểm cực trị nhỏ nhất.

Bài 120. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ (1).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 2$.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại, cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

Bài 121. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2-1\right)x - m^3 + m$ (1)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

2/ Tìm m để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O.

Bài 122. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3\left(1-m^2\right)x + m^3 - m^2$ (1)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số (1) có 2 cực trị và viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị đó.

Bài 123. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2/ Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị song song với đường thẳng $d: y = -4x + 3$.

Bài 124. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2/ Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị tạo với đường thẳng $d: x + 4y - 5 = 0$ một góc 45^0.

Bài 125. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ (1)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -4$.

2/ Xác định m để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B sao cho $\widehat{AOB} = 120^0$.

Bài 126. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2-1\right)x - m^3$ (C_m)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -2$.

2/ Chứng minh rằng (C_m) luôn có điểm cực đại và điểm cực tiểu lần lượt chạy trên mỗi đường thẳng cố định.

Bài 127. Cho $(C_m): y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C_m) khi $m = 1$.

2/ Tìm m để hàm số (C_m) đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Bài 128. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+2)x - 1$ (C_m).

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C_m) khi $\mathrm{m} = 0$.

2/ Tìm m để hàm số (C_m) có hai cực trị cùng dấu.

BÀI 4. CỰC TRỊ HÀM TRÙNG PHƯƠNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Hàm trùng phương có 3 cực trị (*chỉ có 1 cực trị*) $\Leftrightarrow y'=0$ có đúng 3 nghiệm (*có đúng 1 nghiệm*).

2/ Nghiệm của pt $y'=0$ là hoành độ của các điểm cực trị. Còn tung độ của các điểm cực trị được tính bằng cách thế trực tiếp x_{ct} vào hàm số.

3/ Ba điểm cực trị của đths luôn tạo thành tam giác cân tại đỉnh nằm trên Oy (có hoành độ bằng 0).

II. BÀI TẬP

Bài 129. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=1$.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số có các điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

Bài 130. Cho hàm số $(C_m): y=x^4-2m^2x^2-1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=1$.

2/ Tìm m để (C_m) có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 32.

Bài 131. Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+m$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=1$.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số có các điểm cực trị tạo thành tam giác có một góc bằng 120^0.

Bài 132. Cho hàm số $(C_m): y=x^4-2m^2x^2+1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=1$.

2/ Tìm m để (C_m) có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

Bài 133. Cho hàm số $y=2x^4-4mx^2+m-1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=1$.

2/ Tìm m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại.

3/ Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu và khoảng cách giữa chúng bằng $2\sqrt{3}$.

Bài 134. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-mx^2+\frac{3}{2}$ (1)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=3$.

2/ Xác định *m* để đồ thị của hàm số (1) có cực tiểu mà không có cực đại.

Bài 135. Cho hàm số $y=x^4+2(m-2)x^2+m^2-5m+5$ (C_m).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số khi $m=1$.

2/ Tìm các giá trị của *m* để đồ thị (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành 1 tam giác vuông cân.

Bài 136. Cho hàm số $y=x^4+2(m-2)x^2+m^2-5m+5$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=1$.

2/ Tìm m để (C_m) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều.

Bài 137. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có đồ thị (C_m) .

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = -2$.

2/ Định m để (C_m) có ba điểm cực trị lập thành một tam giác có một góc bằng 120^0.

Bài 138. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có đồ thị (C_m) .

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

2/ Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

Bài 139. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có đồ thị (C_m) .

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

2/ Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích bằng 4.

Bài 140. Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ (C_m)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C_m) khi $m = 1$.

2/ Tìm m sao cho hàm số (C_m) có 3 cực trị.

Bài 141. Cho $(C_m): y = -x^4 + 2mx^2 + 2m - 1$

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C_m) khi $\mathrm{m} = -1$.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị và khoảng cách từ 2 điểm cực đại gấp đôi khoảng cách từ điểm cực tiểu đến gốc tọa độ.

Bài 142. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (1), m là tham số.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 1.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho OA = BC, O là gốc tọa độ, A là cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

BÀI 5. BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Giả sử cần biện luận nghiệm phương trình: $F(x,m)=0$. Ta biến đổi $F(x,m)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(m)$ với $(C): y=f(x)$ đã vẽ đồ thị và $d: y=g(m)$ là đường thẳng nằm ngang. Dựa vào số giao điểm của d và (C) suy ra số nghiệm phương trình.

Đồ thị chứa trị tuyệt đối

Dạng 1. Từ $(C): y=f(x) \Rightarrow (C'): y=|f(x)|$

- Giữ nguyên phần (C) nằm phía trên Ox.
- Lấy đối xứng qua Ox phần (C) nằm dưới Ox rồi bỏ đi phần (C) dưới Ox.

Dạng 2. Từ $(C): y=f(x) \Rightarrow (C'): y=f(|x|)$.

- Giữ nguyên phần (C) phía bên phải Oy và bỏ đi phần (C) bên trái Oy.
- Lấy đối xứng qua Oy phần (C) vừa giữ lại.

Dạng 3. Từ $(C): y=u\left(x\right).v\left(x\right) \Rightarrow (C'): y=|u\left(x\right)|v\left(x\right)$.

- Giữ nguyên phần (C) ứng với $u\left(x\right)\geq 0$.
- Lấy đối xứng qua Ox phần (C) ứng với $u\left(x\right)<0$ rồi bỏ đi phần (C) ứng với $u\left(x\right)<0$.

II. BÀI TẬP

Bài 143. Cho $(C): y=x^3-3x^2+2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Biện luận số nghiệm phương trình $x^3-3x^2=m^3-3m^2$.

Bài 144. Cho $(C): y=x^3-3x+1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm m để phương trình $x^3-3x+6-2^{-m}=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Bài 145. Cho $(C): y=x^4-x^2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Biện luận theo k số nghiệm phương trình $4x^2(1-x^2)=1-k$.

Bài 146. Cho $(C): y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Biện luận số nghiệm phương trình $e^{3t}-6e^{2t}+9e^{t}=m$

3/ Tìm a để phương trình $\log_2\left(x^3-6x^2+9x\right)=a$ có 3 nghiệm phân biệt.

Bài 147. Cho $(C): y=x^4-4x^2+3$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Định m để phương trình $|x^4-4x^2+3|+2m-1=0$ có 8 nghiệm phân biệt.

Bài 148. Cho $(C): y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$.

Bài 149. Cho $(C): y = 2x^4 - 4x^2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm m để phương trình $x^2|x^2 - 2| = m$ có đúng 6 nghiệm.

Bài 150. Cho $(C): y = x^3 + 3x^2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm m để phương trình $|x^3 + 3x^2| - \log_2 m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 151. Cho $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm m để phương trình $x^2 - 2x - 2 = \dfrac{m}{|x-1|}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 152. Cho $(C): y = \dfrac{x+1}{x-1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 2x + y - 1 = 0$.

3/ Biện luận theo m số nghiệm phương trình $2x^2 - (m+1)x + m + 1 = 0$.

Bài 153. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2/ Biện luận theo tham số k số nghiệm của phương trình $|x^4 - 4x^2 + 3| = 3^k$.

Bài 154. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Biện luận theo *m* số nghiệm của phương trình $\dfrac{|x|+1}{|x|-1} = m$.

Bài 155. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + \dfrac{3}{2}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

2/ Tìm *m* để phương trình sau có đúng 8 nghiệm thực phân biệt $\left|2x^4 - 4x^2 + \dfrac{3}{2}\right| = m^2 - m + \dfrac{1}{2}$.

Bài 156. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (1)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số (1).

2/ Định *m* để phương trình sau có 4 nghiệm thực phân biệt: $|x|^3 - 3|x| = m^3 - 3m$.

Bài 157. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm *m* để phương trình $x^3 - 3x^2 = m^3 - 3m^2$ có ba nghiệm phân biệt.

Bài 158. Cho hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ có đồ thị (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm *m* để phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \log_{1/2} m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Bài 159. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Biện luận theo *m* số nghiệm của phương trình: $x^4 - 2x^2 + 1 + \log_2 m = 0$.

Bài 160. Cho hàm số $y = 8x^4 - 9x^2 + 1$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Dựa vào (C) hãy biện luận số nghiệm của phương trình: $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ với $x \in [0; \pi]$.

BÀI 6. BÀI TOÁN ĐIỂM VÀ KHOẢNG CÁCH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Gọi điểm trên đường: $M \in (C): y = f(x) \Rightarrow M(m, f(m))$.

2/ Khoảng cách từ điểm đến điểm: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

3/ Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0 \Rightarrow d(M, \Delta) = \dfrac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

<u>Đặc biệt:</u> a/ $\Delta: x = a \Rightarrow d(M, \Delta) = |x_M - a|$ b/ $\Delta: y = b \Rightarrow d(M, \Delta) = |y_M - b|$

4/ A, B đối xứng qua M $\Leftrightarrow$ M là trung điểm của AB $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases}$.

5/ A, B cách đều M $\Leftrightarrow MA = MB$.

6/ A, B đối xứng qua đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow \Delta$ là đường trung trực của AB.

7/ A, B cách đều $\Delta \Leftrightarrow d(A, \Delta) = d(B, \Delta)$.

II. BÀI TẬP

Bài 161. Cho $(C): y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

2/ Tìm những điểm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ đó đến hai đường tiệm cận nhỏ nhất.

Bài 162. Cho $(C): y = \dfrac{x+1}{x-2}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm M thuộc (C) sao cho d(M, TCĐ) = 3d(M,TCN).

Bài 163. Cho $(C): y = \dfrac{2x+1}{x+1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm trên mỗi nhánh của (C) một điểm sao cho khoảng cách giữa chúng ngắn nhất.

Bài 164. Cho $(C): y = \dfrac{2x}{x+1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm các điểm trên (C) có tọa độ nguyên. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại các điểm ấy.

Bài 165. Cho $(C): y = \dfrac{x-2}{x-1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm $M \in (C)$ sao cho khoảng cách từ M đến tâm đối xứng của (C) ngắn nhất.

Bài 166. Cho $(C): y = \dfrac{x}{x+1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm $M \in (C)$ sao cho k/c từ M đến đường thẳng $\Delta: 3x+4y=0$ bằng 1.

Bài 167. Cho $(C): y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-\frac{11}{3}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm trên (C) hai điểm phân biệt M, N sao cho M, N đối xứng qua trục tung.

Bài 168. Cho $(C_m): y=x^3-3mx^2+2(m-1)x+1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 1.

2/ Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm phân biệt đối xứng qua gốc tọa độ.

Bài 169. Cho $(C): y=x^4-2x^2+1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm $A, B \in (C)$ sao cho đường thẳng AB song song với Ox và d(CĐ, AB) = 2.

Bài 170. Cho $(C): y=x^3-3x^2+1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm $A, B \in (C)$ sao cho 2 tt với (C) tại A, B song song và AB = $4\sqrt{2}$.

Bài 171. Cho $(C): y=\frac{x+3}{x-1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm $A, B \in (C)$ sao cho A, B đối xứng qua đường thẳng $\Delta: 2x-4y+11=0$.

Bài 172. Cho $(C): y=\frac{2x-4}{x+1}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm $A, B \in (C)$ sao cho A, B đối xứng qua đường thẳng MN với M(-3,0), N(-1,-1).

Bài 173. Cho $(C): y=\frac{2x+1}{x+3}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm $A, B \in (C)$ sao cho A, B đối xứng qua gốc tọa độ.

Bài 174. Cho $(C): y=\frac{2x+1}{1-x}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Gọi Δ là tiếp tuyến với (C) tại A(0,1). Tìm M thuộc (C) với $x_M>1$ sao cho khoảng cách từ M đến Δ ngắn nhất.

Bài 175. Cho $(C): y=\frac{x+1}{1-x}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Gọi M là một điểm bất kì trên (C). CMR tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận không đổi.

Bài 176. Cho $(C): y = \dfrac{x+1}{1-2x}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

2/ Tìm những điểm trên (C) cách đều hai đường tiệm cận.

Bài 177. Cho $(C): y = -x^3 + 3x + 2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua tâm M(–1; 3).

Bài 178. Cho $(C): y = -x^3 + 3x + 2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $d: 2x - y + 2 = 0$.

Bài 179. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) để tiếp tuyến của (C) tại M với đường thẳng đi qua M và giao điểm hai đường tiệm cận có tích các hệ số góc bằng –9.

Bài 180. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm trên (C) những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

Bài 181. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$ (C).

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm các điểm thuộc (C) cách đều 2 tiệm cận.

Bài 182. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm trên (C) hai điểm B, C thuộc hai nhánh sao cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A với $A(2;\ 0)$.

Bài 183. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm điểm $M \in (C)$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1,2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

Bài 184. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x-1}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm những điểm trên đồ thị (C) cách đều hai điểm $A(2;\ 0)$ và $B(0,2)$.

Bài 185. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm trên hai nhánh của đồ thị (C) hai điểm A và B sao cho AB ngắn nhất.

BÀI 7. BÀI TOÁN SỰ BIẾN THIÊN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow y' \geq 0, \quad \forall x \in K$.

2/ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $K \Leftrightarrow y' \leq 0, \quad \forall x \in K$.

Dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc K.

3/ $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$, $\quad ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

4/ $m \geq g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{K} g(x)$; $\quad m \leq g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{K} g(x)$.

II. BÀI TẬP

Bài 186. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 0$.

2/ Tìm m để hàm số nghịch biến trên $(-2, 0)$.

Bài 187. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - m + 2$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 0$.

2/ Tìm m để hàm số đồng biến trên $(0, 3)$.

Bài 188. Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + 2mx + 1$. Tìm m để hàm số đồng biến trên $(3, +\infty)$.

Bài 189. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - mx + 2$. Tìm m để hàm số đồng biến trên $(-3, 2014)$.

Bài 190. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên $(0, +\infty)$.

Bài 191. Cho $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

BÀI 8. BÀI TOÁN ĐIỂM CỐ ĐỊNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho $(C_m): y = f(x,m)$. Gọi (x_0, y_0) là điểm cố định của họ (C_m). Khi đó : $y_0 = f(x_0,m), \quad \forall\, m \quad (*)$

Đưa (*) về một trong 2 dạng sau:

1/ $Am + B = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ 2/ $Am^2 + Bm + C = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$

II. BÀI TẬP

Bài 192. Cho $(C_m): y = x^3 - mx^2 + m - 1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 3.

2/ Tìm các điểm cố định của (C_m). Viết phương trình tiếp tuyến với (C_m) tại các điểm đó.

Bài 193. Cho $(C_m): y = x^4 - mx^2 + m$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 2.

2/ Chứng minh rằng (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định A, B. Tìm m để 2 tiếp tuyến với (C_m) tại A, B vuông góc với nhau.

BÀI 9. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Phương pháp chung: lập bảng biến thiên rồi kết luận.

2/ Đặc biệt: Tìm GTLN, GTNN trên $\left[a,b\right]$:

Bước 1. Giải $y'=0$ tìm $x_1,x_2,...,x_n\in\left[a,b\right]$.

Bước 2. Tính $f(x_1),...,f(x_n),f(a),f(b)$.

Kết luận: $\underset{x\in\left[a,b\right]}{\text{Max}}f(x)=\text{Max}\left\{f(x_1),...,f(x_n),f(a),f(b)\right\}$;

$\underset{x\in\left[a,b\right]}{\text{Min}}f(x)=\text{Min}\left\{f(x_1),...,f(x_n),f(a),f(b)\right\}$

II. BÀI TẬP

Bài 194. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

1/ $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $\left[-1,2\right]$, 2/ $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên $\left[1,e^3\right]$. 3/ $y=x+\sqrt{4-x^2}$.

4/ $y=x\sqrt{1-x^2}$. 5/ $y=x^6+4(1-x^2)^3$ trên $\left[-1,1\right]$. 6/ $y=\sin^3 x-\cos 2x+\sin x+2$.

CHUYÊN ĐỀ 2: TÍCH PHÂN

Bảng nguyên hàm

1/ $\int dx = x + C$

2/ $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3/ $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4/ $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$

5/ $\int e^x dx = e^x + C$

6/ $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

7/ $\int \cos x dx = \sin x + C$

8/ $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9/ $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

10/ $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

11/ $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

12/ $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + C$

13/ $\int \dfrac{dx}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{1}{a-b} \ln\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right| + C$

14/ $\int \dfrac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C$

Chú ý: Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a} F(ax+b) + C$.

BÀI 1. TÍCH PHÂN HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Dạng: $I=\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

1/ Nếu bậc tử $\geq$ bậc mẫu $\Rightarrow$ chia đa thức.

2/ Nếu bậc tử $<$ bậc mẫu $\Rightarrow$ sử dụng thêm bớt, đồng nhất thức, đặt ẩn phụ, …

II. BÀI TẬP

1/ $\int_0^1 \frac{x^3-3x+2}{x+3}dx$ 2/ $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-6x+5}$ 3/ $\int_{-1}^0 \frac{3x^3-3x^2+5x+1}{1-3x}dx$

4/ $\int_{-1}^0 \frac{2x+1}{-x^2+2x-1}dx$ 5/ $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{-x^2+4x-4}dx$ 6/ $\int_1^2 \frac{x+1}{4x^2-4x+1}dx$

7/ $\int_0^1 \frac{4x^2+6x+1}{2x+1}dx$ 8/ $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$ 9/ $\int_0^1 \frac{x^3-x^2+x+1}{2-x}dx$

10/ $\int_{-1}^1 \frac{2x+3}{x^2+2x+5}dx$ 11/ $\int_0^2 \frac{x^2+6x+1}{x+1}dx$ 12/ $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$

13/ $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^3+x}$ 14/ $\int_4^5 \frac{x^3}{x^4-4x^2+3}dx$ 15/ $\int_0^1 \frac{x(x-1)}{x^2-4}dx$

16/ $\int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6}dx$ 17/ $\int_1^4 \frac{dx}{x^2(x+1)}$ 18/ $\int_0^1 \frac{x-5}{x^2-4x+4}dx$

19/ $\int_2^3 \frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}dx$ 20/ $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+10x+1}{x^2+2x+5}dx$ 21/ $\int_0^1 \frac{x(x-1)}{(x+1)(x^2+1)}dx$

22/ $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{-x^3+4x^2-5x+2}dx$ 23/ $\int_3^4 \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$ 24/ $\int_1^2 \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$

25/ $\int_{-1}^0 \frac{4x+3}{x^3-5x^2+8x-4}dx$ 26/ $\int_0^1 \frac{4x+2}{x^2+x+1}dx$ 27/ $\int_0^3 \frac{x^4-1}{x^2+9}dx$

28/ $\int_1^2 \frac{x^6-x^2+x-1}{x^3}dx$ 29/ $\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+x+1}dx$ 30/ $\int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{x^2+1}dx$

31/ $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x^2+3x+1}dx$ 32/ $\int_3^4 \frac{1}{4x-x^3}dx$ 33/ $\int_{-1}^0 \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx$

34/ $\int_{-1}^{0}\frac{3x-4}{-x^3+3x^2-3x+1}dx$ 35/ $\int_{2}^{3}\frac{2x+1}{x^3-x}dx$ 36/ $\int_{1}^{4}\frac{x^2+1}{x^2-2x+4}dx$

37/ $\int_{1}^{3}\frac{x^2+x+3}{x^3+3x}dx$ 38/ $\int_{4}^{5}\frac{x+3}{x^3-6x^2+11x-6}dx$ 39/ $\int_{1}^{2}\frac{x^2-1}{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+3x+1\right)}dx$

40/ $\int_{1}^{3}\frac{x^3+x^2+1}{x^3+1}dx$ 41/ $\int_{1}^{2}\frac{2x+3}{x^3+x^2}dx$ 42/ $\int_{-1}^{0}\frac{x^2+2x+1}{-x^2+4}dx$

43/ $\int_{3}^{4}\frac{2x+1}{x^3+2x^2-x-2}dx$ 44/ $\int_{2}^{3}\frac{x+5}{x^2-x^3}dx$ 45/ $\int_{4}^{5}\frac{x^2+3x+1}{x^3-x^2-4x+4}dx$

BÀI 2. TÍCH PHÂN CHỨA e^x

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Đặt $t=e^x$ và nhớ làm xuất hiện $e^x dx$ trước khi đặt.

II. BÀI TẬP

1/ $\int_{0}^{\ln 2}\frac{e^x dx}{e^x+1}$ 2/ $\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x-1}$ 3/ $\int_{0}^{1}\frac{dx}{e^x(e^x+1)}$

4/ $\int_{0}^{\ln 2}\frac{e^x dx}{e^x+4e^{-x}+4}$ 5/ $\int_{0}^{1}\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$ **6/** $\int_{1}^{e}\frac{xe^x+1}{x\left(e^x+\ln x\right)}dx$

7/ $\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{e^x+1}{e^x+2e^{-x}-3}dx$ 8/ $\int_{\ln 4}^{\ln 7}\frac{2e^x-3}{e^x+3e^{-x}-4}dx$ 9/ $\int_{0}^{1}\frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx$

10/ $\int_{0}^{1}\frac{e^x\left(x+1\right)+x}{e^x+1}dx$ 11/ $\int_{0}^{1}\frac{x^2\left(1+e^x\right)^2+e^x}{1+e^x}dx$ 12/ $\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}$

BÀI 3. TÍCH PHÂN LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ $\int_{a}^{b}\frac{dx}{m\sin x+n\cos x+p}\rightarrow t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ và $\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

2/ $\int_{a}^{b}R(\sin x)\cos x dx\rightarrow t=\sin x$, $\int_{a}^{b}R(\cos x)\sin x dx\rightarrow t=\cos x$

3/ $\int_{a}^{b}R(\tan x)\frac{dx}{\cos^2 x}\rightarrow t=\tan x$, $\int_{a}^{b}R(\cot x)\frac{dx}{\sin^2 x}\rightarrow t=\cot x$

4/ $\int_a^b \sin^m x\cos^n xdx$: nếu m, n chẵn và dương thì hạ bậc; còn m, n chẵn và có 1 số âm thì đặt $t=\tan x$.

5/ $\int_a^b R(\sin 2x)(\sin x\pm\cos x)dx \to t=\sin x\mp\cos x$

Chú ý. Khi đặt $t=\tan x \Rightarrow dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ và $\sin 2x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \cos 2x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

II. BÀI TẬP

1/ $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos^3 xdx$

2/ $\int_0^{\pi/3} \sin^2 x\tan xdx$

3/ $\int_0^{\pi/2} \left(\cos^3 x-1\right)\cos^2 xdx$

4/ $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin 2x}{3+4\sin x-\cos 2x}dx$

5/ $\int_0^{\pi/4} \dfrac{\sin 4xdx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

6/ $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx$

7/ $\int_0^{\pi/2} \sin 2x(1+\sin^2 x)^5 dx$

8/ $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x}{11-7\sin x-\cos^2 x}dx$

9/ $\int_0^{\pi/4} \tan x\left(\cos x+\tan^2 x\right)dx$

10/ $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx$

11/ $\int_0^{\pi/4} \left(\tan^2 x+\dfrac{\sin x}{1+\cos 2x}\right)dx$

12/ $\int_0^{\pi/4} \dfrac{1-2\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^4}dx$

13/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{3-\sin 2x}dx$

14/ $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x+2}dx$

15/ $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\left(1+\sin^3 x\right)dx$

16/ $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$

17/ $\int_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

18/ $\int_0^{\pi/2} \cos x\left(1+\sin^2 2x\right)dx$

19/ $\int_0^{\pi/6} \dfrac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx$

20/ $\int_0^{\pi/4} \dfrac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$

21/ $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \dfrac{\sqrt[3]{\sin^3 x-\sin x}}{\sin^3 x}\cot xdx$

22/ $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \dfrac{\sin x+\cos x}{\left(e^x\sin x+1\right)\sin x}dx$

23/ $\int_0^{\pi/4} \dfrac{\sin^2 x+1}{\cos^4 x}dx$

24/ $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \dfrac{dx}{\sin^4 x\cos^3 x}$

25/ $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin x+7\cos x+6}{4\sin x+3\cos x+5}dx$

26/ $\int_0^{\pi/2} \dfrac{4\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}dx$

27/ $\int_0^{\pi/4} \dfrac{\cos 2x}{(1+\sin x)(1+\cos x)}dx$

28/ $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \dfrac{\cot x}{\sin x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}dx$

29/ $\int_0^{\pi/4} \dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)dx}{\sin 2x+2(1+\sin x+\cos x)}$

30/ $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 2xdx$

31/ $\int_0^{\pi/4} \cos 2x(\sin^4 x+\cos^4 x)dx$ 32/ $\int_0^{\pi/4} \left(x+\sin^2 2x\right)\cos 2xdx$

BÀI 4. TÍCH PHÂN CHỨA CĂN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Đặt $t=$ căn và nhớ khử căn.

2/ Khi gặp tích phân chứa 3 căn sau mà x bên ngoài căn mũ chẵn thì **không được** đặt $t=$ căn.

$$\sqrt{a^2-x^2} \to x=a\sin t, \qquad \sqrt{a^2+x^2} \to x=a\tan t, \qquad \sqrt{x^2-a^2} \to x=\frac{a}{\sin t}.$$

II. BÀI TẬP

1/ $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx$ 2/ $\int_0^1 x^5\sqrt{1+3x^2}dx$ 3/ $\int_{\ln 7}^{\ln 26} \frac{dx}{\sqrt[3]{e^x+1}}$

4/ $\int_1^{\sqrt{5}} \frac{xdx}{2x^2-1+3\sqrt{x^2-1}}$ 5/ $\int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx$ 6/ $\int_0^{\sqrt[4]{7}} \frac{x^3}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}dx$

7/ $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+8\sin x}}dx$ 8/ $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$ 9/ $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$

10/ $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}$ 11/ $\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^3}dx$ 12/ $\int_1^e \frac{dx}{x+x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

13/ $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}}$ 14/ $\int_{-1}^6 \frac{x+3}{\sqrt[3]{x+2}}dx$ 15/ $\int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$

16/ $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x-1}}$ 17/ $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x+4\cos^2 x}}dx$ 18/ $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$

19/ $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ 20/ $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ 21/ $\int_1^{e^{\sqrt{7}}} \frac{\ln x.\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}{x}dx$

22/ $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ 23/ $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ 24/ $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

25/ $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^3+x^5}{\sqrt{x^2+1}}dx$ 26/ $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{3-2\ln x}{x\sqrt{2\ln x+1}}dx$ 27/ $\int_4^9 \frac{2+(x-1)\sqrt{x}}{x^2-4x+3}dx$

28/ $\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$ 29/ $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$ 30/ $\int_1^5 \frac{x^2+1}{2+\sqrt{x-1}}dx$

31/ $\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)\sqrt{4-x^2}}dx$ 32/ $\int_1^{e^3} \frac{2\ln x+1}{x\left(\sqrt{\ln x+1}+1\right)}dx$ 33/ $\int_0^{15/2} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[4]{2x+1}}dx$

34/ $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ 35/ $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

BÀI 5. TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Công thức: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ (*)

2/ Áp dụng: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x).f_2(x)dx$

+ Đặt $\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f_1^{'}(x)dx \\ v = \int f_2(x)dx \end{cases}$ (trên đạo dưới nguyên).

+ Áp dụng công thức (*).

3/ Các dạng thường gặp: $\int_a^b P(x)\sin kxdx$, $\int_a^b P(x)\cos kxdx$, $\int_a^b P(x)e^{kx}dx$, $\int_a^b \frac{P(x)}{\sin^2 kx}dx$, $\int_a^b \frac{P(x)}{\cos^2 kx}dx$, $\int_a^b P(x)\ln^k \alpha(x)dx$, $\int_a^b \frac{\ln^k \alpha(x)}{P(x)}dx$, $\int_a^b e^{\alpha.x}\sin\beta xdx$, $\int_a^b e^{\alpha.x}\cos\beta xdx$.

4/ Cách đặt: Đặt u theo qui tắc: “*Nhất log nhì đa tam lượng tứ mũ*.” Còn lại là dv.

Chú ý. Khi tích phân từng phần 2 lần thì xuất hiện tích phân ban đầu. Khi đó ta chuyển vế để suy ra tích phân cần tính.

II. BÀI TẬP

1/ $\int_1^e \left(2x-\frac{3}{x}\right)\ln xdx$ 2/ $\int_0^{\pi/2} (2x+1)\cos 2xdx$ 3/ $\int_0^{\pi/2} x(2\cos^2 x-1)dx$

4/ $\int_1^2 \frac{x^3+x^2+\ln x}{x^2+2x+1}dx$ 5/ $\int_{-8}^0 x\ln\sqrt{1-x}dx$ 6/ $\int_0^{\pi/3} \frac{x+\sin x}{\cos^2 x}dx$

7/ $\int_0^1 (x+1)^2 e^{2x}dx$ 8/ $\int_{3/4}^{4/3} \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 9/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 xdx$

10/ $\int_{-1}^0 x\ln(x^2-3x+2)dx$ 11/ $\int_1^e x\ln^2 xdx$ 12/ $\int_0^1 \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$

13/ $\int_1^e x\ln^2 x dx$ 14/ $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$ 15/ $\int_{-1}^0 x(e^x+\sqrt[3]{x+1})dx$

16/ $\int_1^e \frac{x^2+1}{x}\ln x dx$ 17/ $\int_0^{\pi/4}\left(\tan^4 x+\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\right)dx$ 18/ $\int_0^1 \frac{x\ln(x+1)}{(1+x^2)^2}dx$

19/ $\int_1^e x^3\ln^2 x dx$ 20/ $\int_0^1 x\ln(x^2+1)dx$ 21/ $\int_0^1 x^3 e^{x^2}dx$

22/ $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin x\ln(\tan x)dx$ 23/ $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}dx$ 24/ $\int_1^{e^2}\sqrt{x}\ln x dx$

25/ $\int_1^e e^x\left(x+e^{-2x}\right)dx$ 26/ $\int_0^{\pi/2}\left(x+\cos^3 x\right)\sin x dx$ 27/ $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{xe^{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

28/ $\int_0^{\sqrt{3}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$ 29/ $\int_0^1 x^2\left(1+\ln(x+1)\right)dx$ 30/ $\int_0^1 (xe^{-x})^2 dx$

31/ $\int_0^{\pi/2} x\left(1+\cos 2x\right)dx$ 32/ $\int_1^2 \frac{2+\ln x}{x^2}dx$ 33/ $\int_0^{\pi/2}(x^2+1)\sin x dx$

34/ $\int_0^{\ln 2} e^x\ln(1+e^x)dx$ 35/ $\int_1^2 e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)dx$ 36/ $\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$

37/ $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 38/ $\int_0^{\pi/4} x\tan^2 x dx$ 39/ $\int_0^{\pi/2} x\left(\sin x+\cos x\right)^2 dx$

40/ $\int_0^{\pi} x\left(\cos x+\sin^5 x\right)dx$ 41/ $\int_0^{\pi/4}\frac{x}{\cos^2 x\left(1+\tan x\right)}dx$ 42/ $\int_0^{\pi/4} e^x\cos^2 x dx$

43/ $\int_{-3}^0 \frac{\ln(1-x)}{(1-x)\sqrt{1-x}}dx$ 44/ $\int_0^1 e^x\sin^2(\pi x)dx$ 45/ $\int_0^{\pi/4} e^{-x}\left(2x+\frac{e^x}{1+\tan^2 x}\right)dx$

46/ $\int_0^{\pi/4}\frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}dx$ 47/ $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\sin 2x dx$ 48/ $\int_0^{\pi/2}\left(4x\tan\frac{x}{2}+x^2\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\right)dx$

49/ $\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos x\ln\left(1-\cos x\right)dx$ 50/ $\int_0^1 \frac{\ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{(x+1)^3}}dx$ 51/ $\int_0^{\pi/4} x\cos^2 x dx$

52/ $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1+\ln(\cos x)}{\sin^2 x}dx$ 53/ $\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin x dx$

BÀI 6. TÍCH PHÂN CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Dạng $I=\int_a^b |f(x)|\,dx$.

2/ Xét dấu $f(x)$ trên $[a,b]$ để bỏ dấu trị tuyệt đối.

II. BÀI TẬP

1/ $\int_0^1 \left|x^2-x\right|dx$

2/ $\int_0^2 |x^2+2x-3|\,dx$

3/ $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$

4/ $\int_{-3}^{2} |x^2-1|\,dx$

5/ $\int_0^2 \left|\left|2x-x^2\right|-1\right|dx$

6/ $\int_1^3 \left(|x^2-4x+3|-8\right)dx$

7/ $\int_0^2 \left|x^2+3x+2\right|dx$

8/ $\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{x^4-x^2-12}dx$

9/ $\int_0^2 \left|x-\left|x^2-2x\right|\right|dx$

10/ $\int_0^1 \left|\frac{x(x-1)}{x^2+1}\right|dx$

11/ $\int_1^4 \left|\frac{x-3}{x^2+x}\right|dx$

12/ $\int_0^3 \frac{|x-2|}{2x+1}dx$

13/ $\int_0^2 \left|2^x-4\right|dx$

14/ $\int_1^e |\ln x-\sqrt{x}|\,dx$

15/ $\int_3^5 \left|\frac{x(x-3)}{x^2-4}\right|dx$

BÀI 7. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x), y=0, x=a, x=b$ là $S=\int_a^b |f(x)|\,dx$.

2/ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x), y=g(x), x=a, x=b$ là $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$.

Chú ý. a/ Nếu đề không cho cận a,b thì ta giải $f(x)=g(x)$ để tìm cận.

b/ Có thể dùng hình vẽ để bỏ dấu | |, hàm số nào có đồ thị nằm trên thì lớn hơn.

II. BÀI TẬP

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau.

1/ $y=\frac{x^3}{3}$, $y=4-\frac{2}{3}x^2$

2/ $y=(e\ \ +1)x$, $y=(1+e^x)x$

3/ $y=0$, $y=\frac{x(x-1)}{x^2+1}$

4/ $y^2-2y+x=0$, $x+y=0$

5/ $y=|x|$, $y=2-x^2$

6/ $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$

7/ $y=x^2$, $y=\sqrt{2-x^2}$

8/ $y=|x^2-4x+3|$, $y=x+3$

BÀI 8. THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi $y=f(x), y=0, x=a, x=b$ khi quay quanh Ox là

$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

2/ Thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi $y=f(x), y=g(x), x=a, x=b$ với $0\le g(x)\le f(x)$, khi quay quanh Ox là $V_x=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx$.

3/ Thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi $x=f(y), x=0, y=c, y=d$ khi quay quanh Oy là

$V_y=\pi\int_c^d f^2(y)dy$.

4/ Thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi $x=f(y), x=g(y), y=c, y=d$ với $0\le g(y)\le f(y)$, khi quay quanh Oy là $V_y=\pi\int_c^d\left[f^2(y)-g^2(y)\right]dy$.

Chú ý. Nếu đề không cho cận thì ta giải phương trình hoành (tung) độ giao điểm để tìm.

II. BÀI TẬP

Bài 1. Tính thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi các đường sau khi quay quanh trục Ox.

1 / $y=x\ln x$, $y=0$, $x=e$

2/ $y=x\sqrt{\ln(1+x^3)}$, $y=0$, $x=1$

3/ $y=\sqrt{1+\sin^4 x+\cos^4 x}, y=0, x=0, x=\pi/4$

4/ $y=4-x^2$, $y=x^2+2$

5/ $y=\sqrt{\sin^6 x+\cos^6 x}$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/2$

6/ $y=2x^2$, $y=2x+4$

7/ $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$

8/ $4y=x^2$, $y=x$

Bài 2. Tính thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi các đường sau khi quay quanh trục Oy.

1/ $y=2x-x^2$, $y=0$

2/ $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$, $y=0$

3/ $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=2$, $x=0$

4/ $y=(x-2)^2$, $y=4$

BÀI 9. TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Đối với các tích phân này chỉ cần đặt $t =$ 2 cận cộng lại rồi trừ cho x là OK.

II. BÀI TẬP

Bài 1. Cho $f(x)$ lẻ và liên tục trên $[-a,a]$. Chứng minh rằng $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Tính $I = \int_{-2}^{2} \frac{x^6 + \tan^3 x}{x^2+1}dx$, $J = \int_{-1}^{1} x^2(\sin x + \sqrt{1-x^2})dx$, $K = \int_{-1}^{1} \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

Bài 2. Cho $f(x)$ chẵn và liên tục trên $[-a,a]$. Chứng minh rằng $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{m^x+1}dx = \int_{0}^{a} f(x)dx.$

Tính $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\left(2^x+1\right)\left(x^2+1\right)}$, $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\,|\sin x|}{2011^x+1}dx$, $K = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\left(e^x+1\right)\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$

Bài 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Chứng minh rằng $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)dx.$

Tính $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan x\right)dx,$ $J = \int_{0}^{1} \frac{\ln\left(1+x\right)}{1+x^2}dx$

Bài 4. Cho hàm số f liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh rằng $\int_{0}^{\pi 2} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\pi/2} f(\cos x)dx.$

Tính $I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx$

Bài 5. Chứng minh rằng $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx.$ Tính $I = \int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{4-\cos^2 x}dx.$

CHUYÊN ĐỀ 3: GIẢI TÍCH TỔ HỢP - XÁC SUẤT

BÀI 1. CÁC BÀI TOÁN ĐẾM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ **Hoán vị** : Có n vật xếp vào n chỗ khác nhau. Mỗi cách xếp được gọi là một hoán vị của n phần tử. Số hoán vị của n phần tử là : $P_n = n!$.

2/ **Chỉnh hợp** : Có n vật khác nhau, chọn ra k vật khác nhau rồi xếp vào k chỗ khác nhau. Mỗi cách xếp được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là : $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

3/ **Tổ hợp** : Có n vật khác nhau, chọn ra k vật khác nhau **không để ý đến thứ tự chọn**. Mỗi cách chọn như vậy được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Số tổ hợp chập k của n phần tử là : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

4/ **Qui tắc cộng** : Một công việc được hoàn thành theo một trong k trường hợp, trong đó :

+ Trường hợp 1 có n_1 cách thực hiện.

+ Trường hợp 2 có n_2 cách thực hiện.

……

+ Trường hợp k có n_k cách thực hiện.

Khi đó có $n_1 + n_2 + ... + n_k$ cách hoàn thành công việc đó.

5/ **Qui tắc nhân** : Nếu một công việc được hoàn thành qua k bước, trong đó :

+ Bước 1 có n_1 cách thực hiện.

+ Bước 2 có n_2 cách thực hiện.

……

+ Bước k có n_k cách thực hiện

Khi đó có $n_1.n_2...n_k$ cách hoàn thành công việc đó.

II. BÀI TẬP

Bài 1. Một tổ học sinh gồm 7 nam và 4 nữ. Giáo viên muốn chọn ra 3 học sinh xếp bàn ghế của lớp trong đó có ít nhất 1 nam sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Bài 2. Có 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 bi để trong đó không có đủ 3 màu.

Bài 3. Có 6 học sinh sẽ được sắp xếp ngồi vào 6 chỗ đã được ghi số thứ tự trên một bàn dài.

1/ Tìm số cách xếp 6 học sinh này ngồi vào bàn.

2/ Tìm số cách xếp 6 học sinh này sao cho 2 học sinh A và B không ngồi cạnh nhau.

Bài 4. Một lớp học có 30 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Có 6 học sinh được chọn ra để lập một tốp ca. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau sao cho:

1/ Nếu phải có ít nhất là 2 nữ. 2/ Nếu phải chọn tùy ý.

Bài 5. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bồng hồng đỏ, người ta chọn ra một bó gồm 7 bông.

1/ Có bao nhiêu cách chọn một bó như thế sao cho có đúng một bông hồng đỏ.

2/ Có bao nhiêu cách chọn một bó như thế sao cho có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông đỏ?

Bài 6. Người ta muốn thành lập một tổ công tác gồm 3 nữ và 4 nam, 3 nữ có thể chọn trong 10 nữ, còn 4 nam có thể chọn trong 7 nam, trong đó có anh Bình và chị An.

1/ Có bao nhiêu cách thành lập tổ?

2/ Có bao nhiêu cách thành lập tổ mà anh Bình và chị An không ở cùng một tổ?

Bài 7. Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lí nam. Lập một đoàn công tác gồm 3 người cần có cả nam lẫn nữ, có cả nhà toán học và nhà vật lí. Hỏi có bao nhiêu cách?

Bài 8. Có 5 tem thư khác nhau và có 6 bì thư cũng khác nhau. Người ta muốn chọn ra 3 tem thư và 3 bì thư, mỗi bì thư dán một tem thư. Có bao nhiêu cách như vậy?

Bài 9. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

Bài 10. Đội thanh niên xung kích của trường phổ thông có 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn ra 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này không thuộc quá 2 lớp. Hỏi có bao nhiêu cách như vậy?

Bài 11. Trong một môn học thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình và 15 câu dễ. Từ 30 câu đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề có 5 câu khác nhau sao cho mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

Bài 12. Cho A={1,2,3,4,5}. Tìm số các số tự nhiên gồm 5 chữ số lấy từ tập A sao cho:

1/ Các chữ số đều khác nhau.

2/ Các chữ số đều khác nhau và chữ số đầu tiên là chữ số 3.

3/ Các chữ số đều khác nhau và không tận cùng bằng chữ số 4.

Bài 13. Với 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt và là

1/ Số lẻ. 2/ Số chẵn.

Bài 14. Với 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số

1/ Phân biệt. 2/ Phân biệt và không bắt đầu bằng chữ số 1. 3/ Phân biệt và không bắt đầu bằng 123.

Bài 15. Từ các số 0,1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau?

Bài 16. Cho 7 số 1,2,3,4,5,6,7. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số phân biệt từ 7 số trên trong đó phải có hai chữ số 1 và 2.

Bài 17. Từ 5 số 0,1,3,5,7 có thể lập được bao nhiêu số mà mỗi số gồm có 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

Bài 18. Cho tập hợp X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Có thể lập được bao nhiêu số n gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ X trong mỗi trường hợp sau

1/ n là số chẵn. 2/ một trong ba chữ số đầu tiên phải bằng 1.

Bài 19. Một bàn dài có 2 dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm có 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi trong mỗi trường hợp sau :

a) Bất kì 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường nhau.

b) Bất kì 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường nhau.

Bài 20. Cho $X = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ có thể lập được bao nhiêu số có 8 chữ số từ X mà chữ số 1 có mặt đúng 3 lần còn các chữ số khác có mặt đúng 1 lần.

Bài 21. Trong một phòng có 2 bàn dài, mỗi bàn có 5 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh gồm 5 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi nếu

a) Các học sinh ngồi tùy ý.

b) Các học sinh nam ngồi 1 bàn, học sinh nữ ngồi 1 bàn.

Bài 22. Từ $X = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ thiết lập các số có 6 chữ số khác nhau. Hỏi trong các số lập được có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau.

Bài 23. Một đội bóng đá có 18 cầu thủ. Cần chọn ra 11 cầu thủ phân vào 11 vị trí trên sân để thi đấu chính thức. Hỏi có mấy cách chọn nếu:

a) Ai cũng có thể chơi ở bất cứ vị trí nào?

b) Chỉ có cầu thủ A làm thủ môn được, các cầu thủ khác chơi ở vị trí nào cũng được?

c) Có 3 cầu thủ chỉ có thể làm thủ môn được, các cầu thủ khác chơi ở vị trí nào cũng được?

Bài 24. Có 10 cuốn sách khác nhau và 7 cây bút máy khác nhau. Cần chọn ra 3 cuốn sách và 3 cây bút máy để tặng cho 3 học sinh, mỗi em một cuốn sách và một cây bút máy. Hỏi có mấy cách ?

Bài 25. Từ 0, 1, 3, 5, 7 có thể lập bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5.

Bài 26. Một phụ nữ có 11 người bạn thân trong đó có 6 nữ. Cô ta định mời ít nhất 3 người trong 11 người đó đến dự tiệc. Hỏi :

a) Có mấy cách mời?

b) Có mấy cách mời để trong buổi tiệc gồm cô ta và các khách mời, số nam nữ bằng nhau.

Bài 27. Có 12 học sinh ưu tú của một trường trung học. Muốn chọn một đoàn đại biểu gồm 5 người (gồm một trưởng đoàn, một thư ký, và ba thành viên) đi dự trại quốc tế. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Bài 28. Một đoàn tàu có 3 toa chở khách; toa I, II, III. Trên sân ga có 4 hành khách chuẩn bị đi tàu. Biết rằng mỗi toa có ít nhất 4 chỗ trống. Hỏi :

a) Có bao nhiêu cách sắp 4 hành khách lên 3 toa.

b) Có bao nhiêu cách sắp 4 hành khách lên tàu để có 1 toa trong đó có 3 trong 4 vị khách.

Bài 29. Một đội xây dựng gồm 10 công nhân, 3 kỹ sư. Để lập 1 tổ công tác cần chọn 1 kỹ sư là tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 3 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Bài 30. Một bộ bài có 52 lá; có 4 loại : cơ, rô, chuồn, bích mỗi loại có 13 lá. Muốn lấy ra 8 lá bài trong đó phải có đúng 1 lá cơ, đúng 3 lá rô và không quá 2 lá bích. Hỏi có mấy cách?

Bài 31. Có 16 học sinh gồm 3 học sinh giỏi, 5 khá, 8 trung bình. Có bao nhiêu cách chia số học sinh thành 2 tổ, mỗi tổ có 8 người, đều có học sinh giỏi và ít nhất 2 học sinh khá .

Bài 32. Một tổ sinh viên có 20 em. Trong đó chỉ có 8 em biết nói tiếng Anh, 7 em biết tiếng Pháp và 5 em chỉ biết tiếng Đức. Cần chọn 1 nhóm đi thực tế gồm 3 em biết tiếng Anh, 4 em biết tiếng Pháp và 2 em biết tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Sử dụng các công thức : $P_n = n! = 1.2....(n-1)n$, $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Chú ý. a/ $n! = (n-k)!(n-k+1)...(n-1)n$, b/ $0! = 1! = 1$.

II. BÀI TẬP

Bài 33. Giải phương trình

1/ $C_{2n}^3 = 20C_n^2$, 2/, $72A_n^1 - A_{n+1}^3 = 72$ 3/ $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = 9n^2 - 14n$,

4/ $P_n A_n^2 + 72 = 6(A_n^2 + 2P_n)$, 5/ $11(5A_n^2 + 10A_n^1) = 12C_{n+3}^4$, 6/ $A_n^3 + C_n^2 = 14C_n^{n-1}$,

7/ $C_{14}^n + C_{14}^{n+2} = 2C_{14}^{n+1}$, 8/ $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3$, 9/ $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$,

10/ $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \dfrac{5}{4}A_{n-2}^2 = 0$, 11/ $\dfrac{5}{C_5^n} - \dfrac{2}{C_6^n} = \dfrac{14}{C_7^n}$,

Bài 34. Giải bất phương trình

1/ $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} \le \dfrac{42}{P_n}$, 2/ $\dfrac{A_{n+1}^{n-2}}{C_{n-1}^2} \le 2P_n$ $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} \le \dfrac{143}{4P_n}$, 3/ $\dfrac{1}{2}A_{2n}^2 - A_n^2 \le \dfrac{6}{n}C_n^3 + 10$,

4/ $\dfrac{195}{4P_n} - \dfrac{A_{n+3}^3}{P_{n+1}} > 0$, 5/ $C_{n+1}^3 \ge 100 + C_{n+1}^{n-1}$, 6/ $2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 < 30$

Bài 35. Tìm x, y

1/ $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$, 2/ $\begin{cases} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 \end{cases}$, 3/ $C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6:5:2$

Bài 36. Sử dụng $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ chứng minh đẳng thức.

1/ $C_n^k = \dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$, 2/ $C_n^m.C_m^k = C_n^k.C_{n-k}^{m-k}$, 3/ $C_{2n}^n + C_{2n}^{n-1} = \dfrac{1}{2}C_{2n+2}^{n+1}$,

4/ $C_n^1 + 2\dfrac{C_n^2}{C_n^1} + 3\dfrac{C_n^3}{C_n^2} + ... + n\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = \dfrac{n(n+1)}{n}$, 5/ $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^k}+\dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\dfrac{1}{C_n^k}$

Bài 37. Sử dụng công thức $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$ chứng minh đẳng thức.

1/ $C_n^{m+1}+C_n^{m-1}+2C_n^m=C_{n+2}^{m+1}$,

2/ $C_n^k+3C_n^{k-1}+3C_n^{k-2}+C_n^{k-3}=C_{n+3}^k$,

3/ $2C_n^k+5C_n^{k+1}+4C_n^{k+2}+C_n^{k+3}=C_{n+2}^{k+2}+C_{n+3}^{k+3}$,

4/ $C_n^k+4C_n^{k-1}+6C_n^{k-2}+4C_n^{k-3}+C_n^{k-4}=C_{n+4}^k$

BÀI 3. NHỊ THỨC NEWTON

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Công thức : $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+...+C_n^ka^{n-k}b^k+...+C_n^nb^n$.

2/ Số hạng tổng quát trong k/t Newton là : $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$.

2/ Hai khai triển cơ bản :

a/ $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$

b/ $(1-x)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-...+(-1)^nC_n^nx^n$

3/ Khi gặp chứng minh đẳng thức mà có chứa:

a/ $kC_n^k\to$ đạo hàm 1 lần, $k(k-1)C_n^k\to$ đạo hàm 2 lần.

b/ $\dfrac{1}{k+1}C_n^k$, $\dfrac{1}{m+k+1}C_n^k\to$ nhân 2 vế với x^m rồi lấy tích phân. Nhớ chọn cặp cận thích hợp nhe!

II. BÀI TẬP

Bài 38. Chứng minh các đẳng thức sau.

1/ $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$,

2/ $C_n^0-C_n^1+C_n^2-...+(-1)^nC_n^n=0$,

3/ $3^nC_n^0+3^{n-1}C_n^1+...+3C_n^{n-1}+C_n^n=4^n$,

4/ $C_n^0+6C_n^1+6^2C_n^2...+6^nC_n^n=7^n$,

5/ $C_{2n}^0-10C_{2n}^1+10^2C_{2n}^2-...+10^{2n}C_{2n}^{2n}=81^n$, 6/ $2^n C_n^0 - 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 + ... + (-1)^n C_n^n = 1$,

7/ $C_{2n}^0 + 3^2 C_{2n}^2 + 3^4 C_{2n}^4 + ... + 3^{2n} C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}(2^{2n} + 1)$

8/ $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}$

9/ $C_{2011}^0 + 3^2 C_{2011}^2 + 3^4 C_{2011}^4 + ... + 3^{2010} C_{2011}^{2010} = 2^{2010}(2^{2011} - 1)$

Bài 39. Chứng minh rằng

1/ $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n2^{n-1}$, 2/

$2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + ... + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$

3/ $2^{n-1}C_n^1 + 2.2^{n-2}C_n^2 + 3.2^{n-3}C_n^3 + ... + nC_n^n = n.3^{n-1}$, 4/ $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - ... + (-1)^n nC_n^n = 0$,

5/ $C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 + ... + n^2 C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$

Bài 40. Giải phương trình

1/ $C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2 C_{2n+1}^3 - 4.2^3 C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1)2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$,

2/ $2C_{2n+1}^2 - 3.2^2 C_{2n+1}^3 + ... - 2n(2n+1)2^{2n-1} C_{2n+1}^{2n+1} = -110$,

Bài 41. Chứng minh rằng

1/ $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$,

2/ $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - ... + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}$,

3/ $\frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{n}{n+1}$,

4/ $2C_n^0 + \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$,

5/ $\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + ... + \frac{1}{3n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$,

7/ $\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$

Bài 42. Tính tổng

1/ $S=\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2-...+\frac{(-1)^n}{n+2}C_n^n$,

2/ $S=C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+...+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$,

3/ $S=\frac{1}{2}C_{19}^0-\frac{1}{3}C_{19}^1+\frac{1}{4}C_{19}^2-...+\frac{1}{20}C_{19}^{18}-\frac{1}{21}C_{19}^{19}$,

Bài 43. Tìm số hạng không chứa x trong các khai triển sau.

1/ $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{15}$, 2/ $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$, 3/ $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$

Bài 44. Tìm số hạng không chứa x trong k/t $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$ biết rằng $C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=79$

Bài 45. Tìm số hạng chứa x^8 trong k/t $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$ biết rằng $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=7(n+3)$.

Bài 46. Biết tổng các hệ số của khai triển $\left(x^2+1\right)^n$ bằng 1024. Tìm số hạng chứa x^{12}.

Bài 47. Cho $\left(2^{\frac{x-1}{2}}+2^{-\frac{x}{3}}\right)^n$, biết $C_n^3=5C_n^1$ và số hạng thứ tư là 20n. Tìm n và x.

Bài 48. Tìm số hạng chứa x^{26} trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$ biết rằng $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$.

Bài 49. Tìm số hạng không chứa x trong $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ biết hiệu của hệ số số hạng thứ 3 và hệ số số hạng thứ 4 bằng 35.

Bài 50. Tìm số hạng hữu tỉ trong các k/t sau 1/ $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^5$, 2/ $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9$

Bài 51. Biết ba hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ lập thành cấp số cộng. Hãy tìm số hạng hữu tỉ.

Bài 52. Tìm x biết số hạng thứ sáu trong k/t $\left(2^{\log_2\sqrt{9^{x-1}+7}}+2^{-\frac{1}{5}\log_2(3^{x-1}+1)}\right)^7$ là 84.

Bài 53. Biết hệ số của số hạng thứ ba trong k/t $\left(x^2\sqrt{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^n$ là 36. Tìm số hạng thứ bảy.

Bài 54. Tìm hệ số của x^9 trong k/t $P(x)=(1+x)^9+(1+x)^{10}....+(1+x)^{14}$.

Bài 55. Tìm số hạng chứa x^3 trong k/t $(x+1)^2(3-x)^{10}$.

Bài 56. Tìm số hạng chứa x^8 trong k/t $(1+x^2-x^3)^8$.

Bài 57. Cho $(1+2x)^n=a_0+a_1x+...+a_nx^n$. Tìm hệ số a_k lớn nhất biết rằng $a_0+\frac{a_1}{2}+...+\frac{a_n}{2^n}=4096$.

Bài 58. Cho $(1+x)^n=a_0+a_1x+...+a_nx^n$. Biết rằng tồn tại số $k \quad (1\le k\le n-1)$ thỏa mãn

$\frac{a_{k-1}}{2}=\frac{a_k}{9}=\frac{a_{k+1}}{24}$. Tìm n.

BÀI 4. XÁC SUẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Xác suất của biến cố A là $P(A)=\frac{m}{n}$, trong đó m là số trường hợp thuận lợi của A và n là số tất cả các trường hợp có thể xảy ra của phép thử.

2/ Qui tắc cộng: Nếu A,B là *hai biến cố xung khắc* (không đồng thời xảy ra) thì $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

3/ Qui tắc nhân: Nếu A,B là *hai biến cố độc lập* (việc xảy ra biến cố này không ảnh hưởng gì đến việc xảy ra biến cố kia) thì $P(A.B)=P(A).P(B)$.

4/ Xác suất của *biến cố đối*: $P(\overline{A})=1-P(A)$.

II. BÀI TẬP

Bài 59. Một đội văn nghệ có 20 người, trong đó có 10 nam và 10 nữ. Cần chọn ra 5 người. Tính xác suất sao cho trong 5 người được chọn sao cho:

1/ Có đúng 2 nam. 2/ Có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ.

Bài 60. Một đội văn nghệ có 15 người, gồm 10 nam và 5 nữ. Cần lập một nhóm đồng ca gồm 8 người. Tính xác suất sao cho trong đó phải có ít nhất 3 nữ.

Bài 61. Một người có 12 cây giống trong đó có 6 cây xoài, 4 cây mít và 2 cây ổi. Người đó muốn chọn 6 cây giống để trồng. Tính xác suất sao cho trong 6 cây được chọn:

a) Mỗi loại có đúng 2 cây.	b) Mỗi loại có ít nhất 1 cây.

Bài 62. Trong 1 hộp có 7 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ và 4 quả cầu vàng, các quả cầu đều khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu trong hộp. Tính xác suất sao cho trong 4 quả cầu chọn ra có đủ 3 màu.

Bài 63. Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

Bài 64. Trong lớp học có 6 bóng đèn, mỗi bóng có xác suất bị cháy là 0,25. Lớp học đủ ánh sáng nếu có ít nhất 4 bóng hỏng. Tính xác suất dể lớp học không đủ ánh sáng

Bài 65. Xạ thủ A bắn 2 viên đạn vào mục tiêu, xác suất bắn trúng của A trong một lần bắn là $7/10$. Xạ thủ B bắn 3 viên đạn vào mục tiêu, xác suất bắn trúng của B trong một lần bắn là $9/10$. Tính xác suất để mục tiêu không trúng đạn.

Bài 66. Trong một tuần lễ vừa qua ở thành phố có 7 tai nạn giao thông. Tính xác suất để mỗi ngày có đúng một tai nạn.

Bài 67. Một công ty cần tuyển 2 nhân viên. Có 6 người nạp đơn trong đó có 4 nữ và 2 nam. Khả năng được tuyển của mỗi người là như nhau.

a) Tính xác suất để cả hai nữ được chọn nếu biết rằng ít nhất một nữ đã được chọn.

b) Giả sử Hoa là một trong 4 nữ. Tính xác suất để Hoa được chọn. Tính xác suất để Hoa được chọn nếu biết rằng ít nhất một nữ đã được chọn.

Bài 68. Có 8 học sinh lớp A, 6 học sinh lớp B, 5 học sinh lớp C. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh. Tính xác suất để 8 học sinh được chọn thuộc vào không quá hai trong 3 lớp.

CHUYÊN ĐỀ 4: SỐ PHỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Dạng đại số: $z = a + bi$ với $a, b \in R$ và $i^2 = -1$, a là phần thực, b là phần ảo.

+ z là số thực khi $b = 0$ và z là số ảo khi $a = 0$.

+ Hai số phức bằng nhau $\Leftrightarrow$ phần thực và phần ảo tương ứng bằng nhau.

+ Số phức liên hợp của $z = a + bi$ là $\overline{z} = a - bi$.

+ Môđun của $z = a + bi$ là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

+ Các phép toán trên số phức như cộng, trừ, nhân, chia hay lũy thừa thực hiện giống như số thực và nhớ $i^2 = -1$.

2/ Dạng lượng giác: $z = a + bi \Leftrightarrow z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}, \sin\varphi = \frac{b}{r}$.

+ Phép nhân: $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$.

+ Phép chia : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

+ Công thức Moivre: $z^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$.

+ Căn bậc n của $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là: $\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right)\right)$, $k = \overline{0, n-1}$.

<u>Chú ý</u>: *Sử dụng máy tính để đưa số phức z về dạng lượng giác:* ***Shift* 2 3** $\rightarrow r\angle\varphi$.

II. BÀI TẬP

Bài 1. Tìm số phức

+ Gọi $z = a + bi,\ a, b \in R \Rightarrow \overline{z}, |z|, z^2, ...$

+ Thay vào $\overline{z}, |z|, z^2, ...$ vào đề bài rồi suy ra $a, b \Rightarrow z$.

Tìm số phức z thỏa mãn các yêu cầu sau.

1/ $|z| + z = 3 + 4i$, 2/ $|z| - 2z = -1 - 8i$, 3/ $z.\overline{z} + 3(z - \overline{z}) = 4 - 3i$, 4/ $z^2 + \overline{z} = 0$

5/ $\begin{cases} |z - 2i| = |z| \\ |z - i| = |z - 1| \end{cases}$, 6/ $\begin{cases} |z - (2+i)| = \sqrt{10} \\ z.\overline{z} = 25 \end{cases}$,

7/ $|z + 1 - 2i| = |\overline{z} + 3 + 4i|$ và $\frac{z - 2i}{\overline{z} + i}$ là số thuần ảo,

8/ $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1$ và $\left|\frac{z-3i}{2+i}\right| = 1$, 9/ $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$ và $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$, 10/ $\overline{z} = (1 + \sqrt{2}i)^2(1 - i)$.

11/ $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$ và số z có môđun lớn nhất (nhỏ nhất).

12/ $|z+1-i|=|z|$ và $z^2+4(\bar{z}-2i)$ là số thực.

13/ $(z+1)(2-\sqrt{3}i)+(\bar{z}+1)(2+\sqrt{3}i)=14$ và $|z|=2$.

Bài 2. Tìm tập hợp số phức

+ Gọi $z=x+yi,\ x,y\in R\Rightarrow \bar{z},|z|,z^2,...$

+ Thay vào $\bar{z},|z|,z^2,...$ vào đề bài rồi suy ra phương trình theo x,y (đường thẳng, đường tròn, elip,…)

Tìm tập hợp các số phức sau trong mặt phẳng phức.

1/ $|2i-2\bar{z}|=|2z-1|$, 2/ $|z-i|=|(1+i)z|$, 3/ $|z+i|=|z+2-3i|$,

4/ $|z-2|^2+|z+2|^2=26$, 5/ $|z+\bar{z}+3|=5$, 6/ $|z-\bar{z}+1-i|=2$,

7/ $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$, 8/ $|z^2-(\bar{z})^2|=4$ 9/ $(2-z)(i+\bar{z})$ là số thực,

10/ $(2-z)(i+\bar{z})$ là số thuần ảo.

Bài 3. Căn bậc hai của số phức

+ Gọi CBH của z là $x+yi,\ x,y\in R$.

+ Giải hệ $\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$ tìm x,y.

Chú ý. Số phức khác 0 luôn có 2 CBH là 2 số đối nhau.

Tìm căn bậc hai của các số phức sau.

a/ $z=-1+4\sqrt{3}i$, b/ $z=4+6\sqrt{5}i$, c/ $z=-1-2\sqrt{6}i$, d/ $z=-8+6i$

Bài 4. Phương trình trên tập số phức

Phương trình : $az^2+bz+c=0$.

+ Tính $\Delta=b^2-4ac$ (bằng máy tính).

+ Tìm CBH của Δ là Δ_1,Δ_2.

+ Kết luận nghiệm : $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\Delta_1}{2a}$ (chỉ chọn 1 CBH thôi nhe!)

1/ Giải các phương trình sau

a/ $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$ b/ $z^2-8(1-i)z+63-16i=0$

c/ $z^2+(1-i)z+4-8i=0$ d/ $z^2+(5i-2)z-14-8i=0$

e/ $z^4+4(1+i)z^2+3+4i=0$ f/ $z^4-z^3+\frac{1}{2}z^2+z+1=0$

2/ Giải hệ phương trình: (thế là xong hà!)

a/ $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + 2i \\ 2z_1 - z_2 = 3 - 4i \end{cases}$ b/ $\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 + i \\ z_1^2 + z_2^2 = 5 - 2i \end{cases}$ c/ $\begin{cases} 2z + w = 4 - 5i \\ z^2 + 5w = 2 - i \end{cases}$

3/ Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$.

Tính $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$ và $Q = \dfrac{(z_1 + z_2)^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}$.

4/ Tính tổng môđun của các nghiệm của phương trình sau : $z^4 - (7 - 6i)z^2 - 8 + 6i = 0$.

5/ Giải phương trình $z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - i)z - 2i = 0$ biết rằng phương trình có nghiệm thuần ảo.

6/ Giải phương trình $2z^3 - (2i + 1)z^2 + (9i - 1)z + 5i = 0$ biết rằng phương trình có 1 nghiệm thực.

7/ Cho u, v là hai số phức thỏa $|u| = |v| = 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{u + v}{1 + uv}$ là một số thực.

Bài 5. Dạng lượng giác của số phức

1/ Viết dạng lượng giác của các số phức sau :

a/ $z = \left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(1 + i\right)$ 2/ $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^2$ b/ $z = \dfrac{1}{2 + 2i}$

2/ Chứng minh $P = \dfrac{(1 - i)^{10}\left(\sqrt{3} + i\right)^5}{\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{10}}$ là một số thực.

3/ Tìm số nguyên dương n thuộc $[1, 10]$ sao cho $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^n$ là một số thực.

4/ Tìm số phức z thỏa mãn $|z| = 4$ và $\dfrac{\sqrt{3} + i}{\bar{z}}$ có một argument là $-\dfrac{\pi}{6}$

5/ Tìm số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z - i\sqrt{3}|$ và $i\,\bar{z}$ có một argument là $\dfrac{\pi}{6}$.

6/ Tìm số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và $\dfrac{\bar{z}}{1 + i}$ có một argument là $-\dfrac{3\pi}{4}$.

7/ Cho số phức z thỏa $z + \dfrac{1}{z} = 1$. Hãy tính $z^{2009} + \dfrac{1}{z^{2009}}$.

8/ Tìm mođun và acgument của các số phức sau:

a/ $z = \dfrac{(2\sqrt{3} - 2i)^{2010}.(1 - i)^{2009}}{(1 + i)^{2008}}$ b/ $z = \dfrac{(-1 + i)^{100}}{(\sqrt{3} - i)^{2010}.(2\sqrt{3} + 2i)^{2009}}$

c/ $z = (1 + i\sqrt{3})^{2009} + (1 - i\sqrt{3})^{2009}$ d/ $z = \dfrac{(1 - i)^{2008}(-\sqrt{3} - i)^{2001}}{(-1 - i\sqrt{3})^{2009}}$

e/ $z = \dfrac{(1 - i)^{10}(\sqrt{3} + i)^5}{(-1 - i\sqrt{3})^{10}}$ f/ $z = \left(\dfrac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}\right)^{2010}$.

CHUYÊN ĐỀ 5: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Công thức lượng giác:

a/ Công thức cơ bản:

$$\sin^2 a+\cos^2 a=1,\quad \tan a=\frac{\sin a}{\cos a},\quad \cot a=\frac{\cos a}{\sin a}$$

$$1+\tan^2 a=\frac{1}{\cos^2 a},\quad 1+\cot^2 a=\frac{1}{\sin^2 a}$$

b/ Công thức nhân đôi:

$$\sin 2a=2\sin a\cos a$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$

$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

c/ Công thức nhân ba:

$$\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$$

$$\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$$

d/ Công thức hạ bậc:

$$\cos^2 a=\frac{1}{2}(1+\cos 2a);\qquad \sin^2 a=\frac{1}{2}(1-\cos 2a);\qquad \sin a.\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$$

$$\cos^3 a=\frac{1}{4}(3\cos a+\cos 3a),\quad \sin^3 a=\frac{1}{4}(3\sin a-\sin 3a)$$

e/ Công thức cộng:

$$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp \sin a\sin b,$$

$$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$$

$$\tan(a\pm b)=\frac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}$$

f/ Công thức tổng thành tích:

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

g/ Công thức tích thành tổng:

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\sin a.\sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

$$\cos a.\sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$$

g/ Đặt $t = \tan\frac{a}{2}$ thì $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

<u>**Một số hằng đẳng thức lượng giác phải thuộc:**</u>

$\sin a \pm \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a \pm \frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad$ $\sin a \pm \cos a = \sqrt{2}\cos\left(a \mp \frac{\pi}{4}\right)$

$1+\sin 2a = \left(\sin a + \cos a\right)^2$, $\qquad$ $1-\sin 2a = \left(\sin a - \cos a\right)^2$

$\sin^3 a + \cos^3 a = \left(\sin a + \cos a\right)\left(1-\sin a\cos a\right)$, $\qquad$ $\sin^3 a - \cos^3 a = \left(\sin a - \cos a\right)\left(1+\sin a\cos a\right)$

$\cos^4 a - \sin^4 a = \cos 2a$ $\qquad$ $\sin^4 a + \cos^4 a = 1-2\sin^2 a\cos^2 a = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2a$

$\sin^6 a + \cos^6 a = 1-3\sin^2 a\cos^2 a = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2a$.

2/ Cung liên kết

a/ Cung đối nhau: <u>**cos đối**</u>

$\cos(-a) = \cos a$

$\sin(-a) = -\sin a$

$\tan(-a) = -\tan a$

$\cot(-a) = -\cot a$

b/ Cung bù nhau: <u>**sin bù**</u>

$\sin(\pi - a) = \sin a$

$\cos(\pi - a) = -\cos a$

$\tan(\pi - a) = -\tan a$

$\cot(\pi - a) = -\cot a$

c/ Cung khác 2π

$\sin(a+2\pi) = \sin a$

$\cos(a+2\pi) = \cos a$

$\tan(a+2\pi) = \tan a$

$\cot(a+2\pi) = \cot a$

d/ Cung khác π : <u>**hơn kém pi tan**</u>

$\sin(\pi + a) = -\sin a$

$\cos(\pi + a) = -\cos a$

$\tan(\pi + a) = \tan a$

$\cot(\pi + a) = \cot a$

e/ Cung phụ nhau: <u>**phụ chéo**</u>

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos a$; $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \sin a$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cot a$; $\quad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \tan a$

3/ Phương trình lượng giác mẫu mực

a/ Phương trình cơ bản

$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right.$ $\qquad$ $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi$

$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi$ $\qquad$ $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$

b/ Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx

- Dạng: $a\sin x + b\cos x = c$.
- Điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2 + b^2 \ge c^2$.
- Cách giải: Chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$ rồi dùng công thức cộng.

b/ Phương trình đẳng cấp bậc 2 đối với sinx và cosx

- Dạng: $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$.
- Nếu $\cos x = 0$. Thế vào phương trình thử nghiệm.
- Nếu $\cos x \ne 0$. Chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 x$ rồi giải phương trình bậc 2 đối với $\tan x$.

c/ Phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với sinx và cosx

- Dạng: $a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = m\sin x + n\cos x$
- Nếu $\cos x = 0$. Thế vào phương trình thử nghiệm.
- Nếu $\cos x \ne 0$. Chia 2 vế phương trình cho $\cos^3 x$ rồi giải phương trình bậc 3 đối với $\tan x$.

d/ Phương trình đối xứng hoặc gần đối xứng đối với sinx và cosx.

- Dạng: $a(\sin x \pm \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$..
- Cách giải: Đặt $t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$, ĐK: $|t| \le \sqrt{2}$.

$\rightarrow t^2 = 1 \pm 2\sin x\cos x = 1 \pm \sin 2x$. Thay vào phương trình rồi giải ra t.

4/ Phương trình lượng giác không mẫu mực:

Sử dụng công thức lượng giác biến đổi đưa về các dạng mẫu mực, phương trình tích hay đặt ẩn phụ. Kinh nghiệm là:

- Biến đổi không được thì đổi biến (đặt ẩn phụ).
- Bậc cao thì tìm cách hạ bậc.
- Tích thì đưa về tổng.
- Tổng thì đưa về tích.
- Gặp ngoặc trong hàm thì phá ngoặc.
- Dùng máy tính đoán nhân tử chung.

II. BÀI TẬP

1/ $(2\sin x - 1)(2\sin 3x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$

2/ $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

3/ $\tan 2x + \sin 2x = \frac{3}{2}\cot x$

4/ $\tan x + 2\cot 2x = \sin 2x$

5/ $\cos^4 x - \cos 2x + 2\sin^6 x = 0$

6/ $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

7/ $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + 3\sin 2x + 6\cos x = 0$

33/ $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

34/ $\cot x - \tan x + 4\sin x = \frac{2}{\sin 2x}$

35/ $2\sqrt{2}\cos^3(x - \pi/4) - 3\cos x - \sin x = 0$

36/ $\frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{5\sin 2x} = \frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{8\sin 2x}$

37/ $4\sin^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})\tan^2 x - \cos^2\frac{x}{2} = 0$

8/ $1+\tan x=2\sin x+\dfrac{1}{\cos x}$

9/ $(2\sin^2 x-1)\tan^2 2x+3(2\cos^2 x-1)=0$

10/ $\sin(3x-\dfrac{\pi}{4})=\sin 2x.\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$

11/ $\cos^2 2x+2(\sin x+\cos\ x)^2-3\sin 2x-3=0$

12/ $\sin 2x+2\cos 2x=1+\sin x-4\cos x$

13/ $2\sin\left(\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{3x}{2}\right)$

14/ $\cos 3x\ +\ \sin 3x\ +\ 4\cos^2 2x\ =\ 5\ +\ 4\sin 2x$

15/ $\tan x+\tan^2 x+\tan^3 x+\cot x+\cot^2 x+\cot^3 x=0$

16/ $2\cos 2x+\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x=2\left(\sin x+\cos x\right)$

17/ $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x+3\sqrt{3}\cos 4x=6\cos 6x$

18/ $\sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x=\cos^3 4x$

19/ $\left(\sin x+\cos x\right)^3-\sqrt{2}\left(\sin 2x+1\right)+\sin x+\cos x-\sqrt{2}=0$

20/ $1+\sin^3 2x+\cos^3 2x=\dfrac{3}{2}\sin 4x$

21/ $\sin\left(\dfrac{5x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

22/ $\sin 2x+\sin x-\dfrac{1}{2\sin x}-\dfrac{1}{\sin 2x}=2\cot 2x$

23/ $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}+\dfrac{4+2\sin 2x}{\sin 2x}-2\sqrt{3}=2(\cot x+1)$

24/ $2(1+\sin x)(\tan^2 x+1)=\dfrac{\cos x-1}{\sin x+\cos x}$

25/ $\cot x-1=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$

26/ $4\sin^3 x+\sin^3(x-\dfrac{\pi}{3})-3\sin x=0$

27/ $\sqrt{2}\cos\left(x+\pi/4\right)\left(1+\sin 2x\right)=\cos x(1+\tan x)$

28/ $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin(x-\dfrac{3\pi}{2})}=4\sin(\dfrac{7\pi}{4}-x)$

29/ $2\sin x\left(1+\cos 2x\right)+\sin 2x=1+\cos 2x$

30/ $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$

38/ $\cos 2x+\cos x\left(2\tan^2 x-1\right)=2$

39/ $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=2$

40/ $\tan(\dfrac{\pi}{2}+x)-3\tan^2 x=\dfrac{\cos 2x-1}{\cos^2 x}$

41/ $\sin(2x-\dfrac{9\pi}{2})-\cos(x-\dfrac{11\pi}{4})=1-\sin 2x$

42/ $\dfrac{\cos 2x-1}{\cos^2 x}=\tan(\dfrac{3\pi}{2}+x)-3\cot^2(\dfrac{7\pi}{2}-x)$

43/ $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3x}{2}\right)=2\sin^3\left(\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$

44/ $8\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}$

45/ $1+\sin 2x-\cos x\sin^2 2x=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

46/ $4\cos x-2\cos 2x-\cos 4x=1$

47/ $\sin^2 x\left(\tan x+1\right)=3\sin x\left(\cos x-\sin x\right)+3$

48/ $\cos x+\cos 3x=1+\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

49/ $2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4\cos x+1=0$

50/ $\dfrac{\cos^2 x.\left(\cos x-1\right)}{\sin x+\cos x}=2\left(1+\sin x\right).$

51/ $5\cos 3\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+3\cos 5\left(x-\dfrac{\pi}{10}\right)\ =\ 0$

52/ $2\cos 6x+2\cos 4x-\sqrt{3}\cos 2x=\sin 2x+\sqrt{3}$

53/ $\dfrac{1}{\tan x+\cot 2x}=\dfrac{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}{\cot x-1}$

54/ $2\cos^2(2x+\dfrac{\pi}{4})=\cot x-\tan x-2$

55/ $\cot^4 x+1=\dfrac{(2-\sin^2 2x)(2\cos^2 x-\cos x)}{2\sin^4 x}$

56/ $5\sin x\ -2\ =\ 3\left(1-\sin x\right)\tan^2 x$

57/ $2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}-x\right)\sin x=1$

31/ $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

32/ $\cot x + \sin x\left(1+\tan x.\tan\left(x/2\right)\right) = 4$

9/ $\cos 2x + \left(1+2\cos x\right)\left(\sin x - \cos x\right) = 0$

0/ $\sin(2x+\frac{17\pi}{2})+16 = 5\sqrt{3}.\sin x\cos x + 20\sin^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12})$

1/ $1+\sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

2/ $\cos^4 x+\sin^4 x+\cos(x-\frac{\pi}{4})\sin(3x-\frac{\pi}{4})-\frac{3}{2}=0$

3/ $4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x = 1+2\cos^2(x-\frac{3\pi}{4})$

4/ $\cos^2 3x\cos 2x - \cos^2 x = 0$

5/ $\sin 3x - 3\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x + 3\cos x - 2 = 0$

6/ $\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\sin x + 1 = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$

7/ $2\cos 3x.\cos x + \sqrt{3}(1+\sin 2x) = 2\sqrt{3}\cos^2(2x+\frac{\pi}{4})$

8/ $\sin 3x+\cos 3x-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos 2x$

9/ $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x = 2\cos x - 1$

0/ $\frac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$

1/ $\sin^3 x+\sin x\cos x+\cos^3 x=1$

2/ $\sin^3 x+\cos^3 x = \sin 2x+\sin x+\cos x$

3/ $5(\sin x+\cos x)+\sin 3x-\cos 3x = 2\sqrt{2}(2+\sin 2x)$

4/ $2(\tan^2 x+\cot^2 x)+5(\tan x+\cot x)+6=0$

5/ $\cot^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}-4(\tan x-\cot x)=0$

6/ $\cos 4x+\cos 2x=\sqrt{3}(\sin 4x+\sin 2x)$

7/ $\cos 2x+5=2(2-\cos x)(\sin x-\cos x)$

8/ $3\cos x+\cos 2x=\cos 3x+2\sin x\sin 2x$

9/ $1+2\cos 2x+\tan x=0$

58/ $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3-\sin x}{2}$

80/ $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).\frac{1+\sin x}{\sin x}=\sqrt{2}.\cos x$

81/ $\left(1+\sin^3 x\right)\cos x+\left(1+\cos^3 x\right)\sin x=1+\sin$

82/ $\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin x-\frac{1}{2}$

83/ $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2=3\cos x+\sin x$

84/ $\sin 2x+\cos x-\frac{1}{2\cos x}-\frac{1}{\sin 2x}+2\cot 2x=$

85/ $2\cos x\left(1-\cos 2x\right)+\sin 2x=1+2\sin x$

86/ $2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x+1=3(\sin x+\sqrt{3}\cos x)$

87/ $\sin x(2-\cos x) = (1-\cos x)^2\left(1+\cos x\right)$

88/ $2\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1$

89/ $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\sin x\sin 2x$

90/ $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$

91/ $2\sin x\sin 3x+(3\sqrt{2}-1)\cos 2x-3=0$

92/ $\sin 2x+2\cos^2 x+\tan x=3$

93/ $6\sin x-2\cos^3 x=5\sin 2x\cos x$

94/ $4\cos^3 x-\sin x-\cos x=0$

95/ $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 5x=\cos 9x$

96/ $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos$

97/ $1+\sin x\cos 2x=\sin x+\cos 2x$

98/ $(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2-5=\cos(\frac{\pi}{6}-x)$

99/ $\tan x+\tan 2x+\tan 3x=\tan x.\tan 2x.\tan 3x$

CHUYÊN ĐỀ
PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN

BÀI 0. BẤM MÁY CASIO

---000---

1) Tính giá trị một biểu thức

Ví dụ 1. $x^4+2\sqrt{x+1}-3x+5$ tại $x=3$, $x=8$.

Ví dụ 2. $2x^5-3\sqrt[3]{x+7}+3\sqrt{5-x}+2x-1$ tại $x=1$.

Ví dụ 3. $x^3y+3x^2y-xy-x+y-1$ tại $x=2, y=1$.

Ví dụ 4. $x\sqrt{y}+3x^2\sqrt{x+2y}-3x+2y+4$ tại $x=1, y=4$.

2) Phân tích đa thức thành nhân tử

Ví dụ 1. x^2-3x+2

Ví dụ 2. $3x^2-x-2$

Ví dụ 3. x^3-4x^2+5x-2

Ví dụ 4. x^3-5x^2+7x-3

Ví dụ 5. $2x^3+x^2+x-1$

Ví dụ 6. $2x^2-xy-y^2$

Ví dụ 7. $2x^2-5xy-3y^2$

Ví dụ 8. $2x^2+y^2-3xy+x+y-6$

Ví dụ 9. $2x^2-y^2+xy-5x+4y-3$

Ví dụ 10. $2x^3-x^2y+2x^2-2xy+y^2-2y$

3) Giải phương trình bậc 4 có nghiệm xấu

Ví dụ 1. $x^4-x^3-7x^2-2x+4=0$

Ví dụ 2. $x^4-3x^3-6x^2+9x+7=0$

Ví dụ 3. $x^4+3x^3-4x^2-11x+5=0$

Ví dụ 4. $x^4-2x^2+4x-2=0$

Ví dụ 5. $x^4-4x^2+8x-4=0$

4) Liệt kê tất cả các nghiệm của một phương trình

Ví dụ 1. $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4$

Ví dụ 2. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{3x-2}$

Ví dụ 3. $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$

Ví dụ 4. $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=\dfrac{x^2+2x}{x^2+1}$

Ví dụ 5. $\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\dfrac{5(x-3)}{\sqrt{2x^2+18}}$

Ví dụ 6. $\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+3}$

BÀI 1. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Dạng 1: $\sqrt{A}=\sqrt{B}\Leftrightarrow\begin{cases}B\ge 0\\A=B\end{cases}$

Dạng 2: $\sqrt{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\ge 0\\A=B^2\end{cases}$

Dạng 3: $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}$. Đặt điều kiện rồi bình phương 2 vế đưa về dạng 2.

Dạng 4: $\sqrt{A}>B\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}B<0\\A\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}B\ge 0\\A>B^2\end{cases}\end{array}\right.$

Dạng 5: $\sqrt{A}<B\Leftrightarrow\begin{cases}B>0\\A\ge 0\\A<B^2\end{cases}$

Dạng 6: $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$. Lập phương 2 vế rồi thế để giải phương trình hệ quả. Nhớ thử lại nghiệm.

Dạng 7: $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}+\sqrt{D}$ với $A+C=B+D$ hoặc $AC=BD$.

Đặt điều kiện rồi đưa về $\sqrt{A}-\sqrt{C}=\sqrt{D}-\sqrt{B}$ sau đó bình phương 2 vế giải phương trình hệ quả. Nhớ thử lại nghiệm.

Chú ý: 1/ *Bất phương trình* chỉ được *bình phương* 2 vế khi cả <u>*hai vế đều không âm*</u>.

2/ Phương trình thì bình phương thoải mái nhưng phải *<u>thử lại nghiệm</u>* và *không dùng dấu "$\Leftrightarrow$".*

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $\sqrt{-x^2+4x-3}=2x-5$.

Ví dụ 2. $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$.

Ví dụ 3. $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$.

Ví dụ 4. $\sqrt{x^2-4x}>x-3$.

Ví dụ 5. $\sqrt{5x+1}-\sqrt{4x-1}\le 3\sqrt{x}$.

Ví dụ 6. $\sqrt{x+11}\ge\sqrt{x-4}+\sqrt{2x-1}$.

Ví dụ 7. $\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{2x-1}=\sqrt[3]{5x+1}$.

III. BÀI TẬP

1) $\sqrt{x^2+3x+4}=3x+1$

2) $x+\sqrt{x^2+x+2}=3$

3) $\sqrt{5x+1}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{14x+7}$

4) $\sqrt{11x+3}-\sqrt{x+1}=4\sqrt{2x-5}$

5) $2\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2\sqrt{2x-1}$

6) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$

7) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$

8) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}$

9) $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+3}=0$

10) $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$

11) $\left(x^2-3x\right)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0$

12) $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}\le\sqrt{4x^2-18x+18}$

13) $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}\le\sqrt{x^2+4x-5}$

14) $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+6x+5}\le\sqrt{2x^2+9x+7}$

15) $\sqrt{3x+8}-\sqrt{3x+5}=\sqrt{5x-4}-\sqrt{5x-7}$

16) $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$

17) $\dfrac{\sqrt{2\left(x^2-16\right)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{7-x}{\sqrt{x-3}}$

18) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x}+\sqrt{x^2+2x-2}$

19) $\sqrt{x^2-4x+3}-2\sqrt{2x^2-3x+1}\geq x-1$

20) $\dfrac{3-2\sqrt{x^2+3x+2}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}}>1$

BÀI 2. ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) **Phương pháp**: Sử dụng các phép biến đổi, tách, ghép thích hợp để đưa phương trình về dạng tích: $AB=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=0\\B=0\end{array}\right.$.

2) **Thường gặp**:

a/ $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ với x_1,x_2 là 2 nghiệm.

b/ $u+v=1+uv\Leftrightarrow(u-1)(1-v)=0$.

c/ $au+bv=ab+uv\Leftrightarrow(u-b)(a-v)=0$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $(x+3)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12$.

Ví dụ 2. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$.

Ví dụ 3. $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$.

Ví dụ 4. $\sqrt{x^2+10x+21}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+7}-6$.

Ví dụ 5. $2x^2-6x+10-5(x-2)\sqrt{x+1}=0$.

III. BÀI TẬP

1) $(x+1)\sqrt{16x+17}=8x^2-15x-23$

2) $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+2}=2x+\sqrt{x+\dfrac{6}{x}+5}$

3) $x-2\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x}=0$

4) $\sqrt{x^2+x+2}=\dfrac{x^2+5x+2}{2x+2}$

5) $4x^2+14x+11=4\sqrt{6x+10}$

6) $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$

7) $\sqrt{x+1}+2(x+1)=x-1+\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x^2}$

8) $4\sqrt{x^2+x+1}=1+5x+4x^2-2x^3-x^4$

9) $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=2x$

10) $\sqrt{x^2-x-2}-2\sqrt{x-2}+2=\sqrt{x+1}$

11) $3x^2+3x+2=(x+6)\sqrt{3x^2-2x-3}$

12) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-x}=1$

13) $x^2+x+2=(3x-2)\sqrt{x+1}$

14) $14\sqrt{x+35}+6\sqrt{x+1}=84+\sqrt{x^2+36x+35}$

15) $\sqrt{x+2}=\dfrac{x+2+2\sqrt{2x+1}}{x+\sqrt{2x+1}}$

BÀI 3. TỔNG KHÔNG ÂM (SOS)

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) Phương pháp: Sử dụng đánh giá cơ bản sau.

Nếu $A\geq 0$ và $B\geq 0$ thì $A+B=0\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$.

2) Thường gặp:

a/ $\sqrt{A}+\sqrt{B}=0\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$

b/ $A^2+B^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$.

Ví dụ 2. $x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11$.

Ví dụ 3. $13\sqrt{x-1}+9\sqrt{x+1}=16x$.

Ví dụ 4. $2\sqrt{x+1}+6\sqrt{9-x^2}+6\sqrt{(x+1)(9-x^2)}+x^3+2x^2-10x-38=0$.

III. BÀI TẬP

1) $x^2-x+6=4\sqrt{1-3x}$
2) $x^4-2x^2\sqrt{x^2-2x+16}+2x^2-6x+20=0$
3) $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2}-8x-5$
4) $4x^2+12+\sqrt{x-1}=4\left(x\sqrt{5x-1}+\sqrt{9-5x}\right)$
5) $2x\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=2x^2+x+2$
6) $x^4-x^2+3x+5-2\sqrt{x+2}=0$
7) $4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}$
8) $4x^2+\sqrt{2x+3}=8x+1$
9) $2x^2-11x+23=4\sqrt{x+1}$
10) $x^4+2006x^3+1006009x^2+x-\sqrt{2x+2007}+1004=0$
11) $\left(x-x^2\right)\left(x^2+3x+2007\right)-2005x\sqrt{4-4x}=30\sqrt[4]{x^2+x-1}+2006$

BÀI 4. ĐẶT ẨN PHỤ HOÀN TOÀN

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) **Phương pháp:** Đặt một ẩn phụ hoặc hai ẩn phụ rồi chuyển phương trình đã cho theo phương trình hoặc hệ phương trình mới mà cách giải đơn giản hơn.
2) **Thường gặp:**

a/ $af(x)+b\sqrt{f(x)}+c=0\to t=\sqrt{f(x)}$.

b/ $\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}+\sqrt{f(x).g(x)}=h(x)\to t=\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}$.

c/ $\alpha\sqrt[n]{a-f(x)}+\beta\sqrt[m]{b+f(x)}=c\to\begin{cases}u=\sqrt[n]{a-f(x)}\\ v=\sqrt[m]{b+f(x)}\end{cases}$

d/ Phương trình đẳng cấp

- $a\sqrt[n]{A^2}+b\sqrt[n]{AB}+c\sqrt[n]{B^2}=0$
- $aA+bB=c\sqrt{AB}$

- $aA+bB=\sqrt{mA^2+nB^2}$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$.

Ví dụ 2. $\sqrt{2x^2+4x+1}=1-x^2-2x$.

Ví dụ 3. $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x}+(x-2)^2<2$.

Ví dụ 4. $\sqrt{x+2}+\sqrt{5-x}+\sqrt{(x+2)(5-x)}=4$.

Ví dụ 5. $2\sqrt{3x+7}-5\sqrt[3]{x-6}=4$.

Ví dụ 6. $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$.

Ví dụ 7. $2x^2-6x+4=3\sqrt{x^3+8}$.

III. BÀI TẬP

1) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$

2) $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x$

3) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$

4) $3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x$

5) $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}\geq 3\sqrt{x}$

6) $\left(x^2+1\right)^2=5-x\sqrt{2x^2+4}$

7) $x^2+2x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3x+1$

8) $\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}=1$

9) $\sqrt[4]{5-x}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{2}$

10) $2\sqrt[4]{(1+x)^2}-3\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{(1-x)^2}=0$

11) $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$

12) $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=x-24$

13) $\left(x^2+2\right)^2+4(x+1)^3+\sqrt{x^2+2x+5}=(2x-1)^2+2$

14) $\sqrt{4x^2+x+6}=4x-2+7\sqrt{x+1}$

15) $6x^2+2x+\sqrt[3]{3x^2+x+4}=10$

16) $2\sqrt[3]{x^2+5x-2}=x(x+5)+2$

17) $3x^2-12x-5\sqrt{10+4x-x^2}+12=0$

18) $2\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{10-x}\right)-\sqrt{30+7x-x^2}=4$

19) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$

20) $x=\left(2004+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$

21) $x^2-2x+4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=0$

22) $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}\le x+\sqrt{x^2-16}-6$

23) $5\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}<2x+\dfrac{1}{2x}+4$

24) $\sqrt{3x^2+x-1}=2\left(\dfrac{7}{2}-x\right)+x-3x^2$

25) $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$

26) $x^2-x=2004\left(\sqrt{1+16032x}+1\right)$

27) $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$

28) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$

29) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}}\ge 1$

30) $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$

31) $x^2+3\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^4-x^2+1}$

32) $\sqrt{1-x}-2x\sqrt{1-x^2}-2x^2+1=0$

33) $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$

34) $3x^2-2x-2=\dfrac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{x^3+3x^2+4x+2}$

35) $\sqrt{3}.x^2 - 3\sqrt{3}x + \sqrt{3} + \sqrt{x^4 + x^2 + 1} = 0$

36) $\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x+1}$

BÀI 5. ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) **Phương pháp:** Đặt một ẩn phụ t nhưng phương trình mới vẫn còn ẩn cũ x. Lúc này ta xem x là hằng số. Thông thường ta được một phương trình bậc hai theo ẩn t và có Δ là một bình phương.

2) **Thường gặp:** $(ax+b)\sqrt{cx^2+dx+e} = mx^2 + nx + p$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$.

Ví dụ 2. $(4x-1)\sqrt{x^3+1} = 2x^3 + 2x + 1$.

Ví dụ 3. $(3x-5)\sqrt{2x^2-3} = 4x^2 - 6x - 4$.

III. BÀI TẬP

1) $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2 + 1$

2) $x^2 + \left(3 - \sqrt{x^2+2}\right) = 1 + 2\sqrt{x^2+2}$

3) $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} = x^2 - 2x - 1$

4) $(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 5x^2 + \frac{3}{2}x - 3$

5) $3\left(\sqrt{2x^2+1} - 1\right) = x\left(1 + 3x + 8\sqrt{2x^2+1}\right)$

6) $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16}$

7) $(3x+2)\sqrt{2x-3} = 2x^2 + 3x - 6$

8) $x^2 + 2(x-1)\sqrt{x^2+x+1} - x + 2 = 0$

9) $4\sqrt{x+1} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2}$

10) $6x^2 - 10x + 5 - (4x-1)\sqrt{6x^2-6x+5} = 0$

BÀI 6. TRỤC CĂN THỨC

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) **Phương pháp:** Dùng máy tính đoán nghiệm rồi sử dụng lượng liên hợp đưa phương trình đã cho về dạng tích.

2) **Thường gặp:**

a/ Nhẩm có 1 nghiệm $x=a$ thì $pt \Leftrightarrow (x-a).g(x)=0$.

b/ Nhẩm có 2 nghiệm $x=a, x=b$ thì $pt \Leftrightarrow \left[x^2-(a+b)x+ab\right].g(x)=0$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-1$.

Ví dụ 2. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$.

Ví dụ 3. $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$.

III. BÀI TẬP

1) $\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}=2x^2-13x+17$

2) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

3) $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5$

4) $5\sqrt{2x+1}+2x=10\sqrt{x-3}+13$

5) $3\left(2+\sqrt{x-2}\right)=2x+\sqrt{x+6}$

6) $x^2-3x-4=\sqrt{x-1}\left(x^2-4x-2\right)$

7) $2x^2-11x+21=3\sqrt[3]{4x-4}$

8) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\ge 2\sqrt{x^2-5x+4}$

9) $\sqrt{x^2+2x+92}\ge x^2+2x+\sqrt{x-1}+1$

10) $\dfrac{4}{\sqrt{x}}+\sqrt{2x+1}\ge\sqrt{2x+17}$

11) $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\ge 2\sqrt{3}$

12) $2\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}+x^2-4\le\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

13) $\sqrt{2x^2+11x+15}+\sqrt{x^2+2x-3}\ge x+6$

14) $\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{x-3} + \dfrac{x+4}{\sqrt{x+12}}$

15) $\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}\right)\left(1 + \sqrt{x^2+2x-3}\right) \geq 4$

16) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \dfrac{x+3}{5}$

17) $\sqrt{x+1} + 1 = 4x^2 + \sqrt{3x}$

18) $\left(\sqrt{x+1} + 1\right)\left(\sqrt{1+x} + 2x - 5\right) = x$

19) $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} - 2x^2 + 7x + 2 = 0$

20) $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} = x^2 - x - 2$

21) $\dfrac{1+3\sqrt{x}}{4x+\sqrt{2+x}} = 1$

22) $\left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{4x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{5x^2+1} - \sqrt{2x^2+1}\right) = 3x^2$

23) $\sqrt[3]{162x^3+2} - \sqrt{27x^2-9x+1} = 1$

24) $\sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-x} = \dfrac{5(x-3)}{\sqrt{2x^2+18}}$

25) $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \dfrac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$

26) $\sqrt{3x^2-6x-5} = \sqrt{(2-x)^5} + \sqrt{(2-x)}\left(2x^2-x-10\right)$

27) $x^3 - 3x + 1 = \sqrt{8-3x^2}$

28) $\sqrt{5x-1} + \sqrt[3]{9-x} = 2x^2 + 3x - 1$

29) $4(x+1)^2 = (2x+10)\left(1-\sqrt{2x+3}\right)^2$

30) $2x^2 = (x+9)\left(2-\sqrt{2x+9}\right)^2$

31) $\sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt{x-3} + \sqrt{x+1} + x = \dfrac{x+3}{x^2-6} + 5$

32) $2\sqrt{x^2-7x+10} = x + \sqrt{x^2-12x+20}$

33) $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}} + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 2$

34) $\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2x-1}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}$

35) $\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{x^2+x+3}=2\left(x+\dfrac{3}{x}\right)$

36) $\dfrac{6x^2}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2}>2x+\sqrt{x-1}+1$

37) $\dfrac{3-2\sqrt{x^2+3x+2}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}}>1$

38) $\dfrac{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2-x^3}}\geq 1$

39) $\dfrac{9x^2}{\left(\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x-1}\right)^2}\leq 4x+5$

40) $\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{8-x}\right)\geq 2x-11$

41) $\sqrt{2x-8}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x}\right)>2x-4$

42) $\left(\sqrt{3x+6}+\sqrt{3x-3}\right)\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-2}\right)\leq 3$

43) $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}-\sqrt{x^2-3x+4}$

BÀI 7. SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) Phương pháp: Sử dụng các định lý sau.

Định lý 1: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D thì

- Phương trình $f(x)=0$ có không quá 1 nghiệm trên D.
- $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v, \forall u,v\in D$.

Định lý 2: Nếu hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên D thì $f(x)>f(a)\Leftrightarrow x>a$.

Nếu hàm số $f(x)$ luôn nghịch biến trên D thì $f(x)>f(a)\Leftrightarrow x<a$.

2) Thường gặp:

a/ $ax^2+bx+c=\sqrt{dx+e}$

b/ $ax^3+bx^2+cx+d=m\sqrt[3]{ex+f}$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $\sqrt{\frac{6}{3-x}}+3\sqrt{\frac{8}{2-x}}=14$.

Ví dụ 2. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}=4$.

Ví dụ 3. $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$.

Ví dụ 4. $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Ví dụ 5. $8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}$.

III. BÀI TẬP

1) $x^2+\sqrt{x-1}=5$

2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}+\sqrt{x+7}+\sqrt{x+16}=14$

3) $x\left(4x^2+1\right)+(x-3)\sqrt{5-2x}=0$

4) $x^3-15x^2+78x-141=5\sqrt[3]{2x-9}$

5) $x^3-6x^2+12x-7=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$

6) $2x^3+x^2-3x+1=2(3x-1)\sqrt{3x-1}$

7) $3\sqrt{3-2x}+\frac{5}{\sqrt{2x-1}}-2x\le 6$

8) $8x^3+2x<(x+2)\sqrt{x+1}$

9) $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}\le 2\sqrt{3}+\sqrt{4-x}$

10) $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}\le 4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$

11) $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$

12) $(x+3)\sqrt{x+1}+(x-3)\sqrt{1-x}+2x=0$

13) $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x$

14) $4x^3+18x^2+27x+14=\sqrt[3]{4x+5}$

15) $x^3+3x^2+4x+2=(3x+2)\sqrt{3x+1}$

16) $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$

17) $\sqrt[3]{3x+4}=x^3+3x^2+x-2$

18) $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)=0$

19) $(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+11}+3x\left(1+\sqrt{9x^2+2}\right)+5x+3=0$

20) $-2x^3+10x^2-17x+8=2x^2\sqrt[3]{5x-x^2}$

21) $3x^3-6x^2-3x-17=3\sqrt[3]{9\left(-3x^2+21x+5\right)}$

22) $x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2=\sqrt[3]{81x-8}$

23) $x^3+3x^2+5x+3=\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+1}$

24) $2(x-2)\left(\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x-2}\right)\geq 3x-1$

25) $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$

26) $(x+2)\sqrt{x+1}>27x^3-27x^2+12x-2$

27) $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2x^2+2x+1}=\dfrac{x^2+x}{\left(x^2+x+1\right)\left(2x^2+2x+1\right)}$

BÀI 8. LƯỢNG GIÁC HÓA

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) **Phương pháp:** Đặt ẩn phụ để đưa phương trình đã cho về phương trình lượng giác đã biết cách giải.

2) **Thường gặp:**

- $\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad$ $x=a\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x=a\cos t,\ t\in[0,\pi]$
- $\sqrt{a^2+x^2}$ $\quad$ $x=a\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ hoặc $x=a\cot t,\ t\in(0,\pi)$
- $\sqrt{x^2-a^2}$ $\quad$ $x=\frac{a}{\sin t},\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$ hoặc $x=\frac{a}{\cos t},\ t\in[0,\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$
- $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ $\quad$ $x=a+(b-a)\sin^2 t$
- $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ $\quad$ $x=a\cos 2t$

Chú ý: Đặt khéo léo sao cho lúc khai căn không có dấu trị tuyệt đối.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $4x^3-3x=\sqrt{1-x^2}$.

Ví dụ 2. $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$.

Ví dụ 3. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{2}$.

III. BÀI TẬP

1) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=2+\sqrt{1-x^2}$

2) $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{2x}=\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$

3) $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{6x^5-20x^3+6x}$

4) $x^3-3x=\sqrt{x+2}$

5) $x^3+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}=x\sqrt{2-2x^2}$

6) $2x^2+\sqrt{x-1}+2x\sqrt{1-x^2}=1$

7) $8x\left(2x^2-1\right)\left(8x^4-8x^2+1\right)=1$

8) $\sqrt{1+x^2}=\dfrac{5}{2\sqrt{1+x^2}}+x$

9) $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{x}{4x^2-1}$

10) $2x+\left(4x^2-1\right)\sqrt{1-x^2}=4x^3+\sqrt{1-x^2}$

11) $\sqrt{\dfrac{1}{2}-x\sqrt{1-x^2}}=1-2x^2$

12) $1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{x^2}$

13) $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$

14) $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$

15) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)=2+\sqrt{1-x^2}$

16) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}+\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}}$

17) $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=x$

18) $1+\frac{3}{\sqrt{x^2-9}}=x$

19) $\frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{2}{x^2+1}=4$

BÀI 9. CÁC BÀI TOÁN CÓ THAM SỐ

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) **Phương pháp:** Cô lập tham số m về một vế rồi dùng ứng dụng của đạo hàm.

2) **Thường gặp:**

a/ $g(m)=f(x)$ có nghiệm $x\in D \Leftrightarrow \min\limits_D f(x)\le g(m)\le \max\limits_D f(x)$. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đường.

b/ $g(m)\ge f(x)$ có nghiệm $x\in D \Leftrightarrow g(m)\ge \min\limits_D f(x)$.

c/ $g(m)\le f(x)$ có nghiệm $x\in D \Leftrightarrow g(m)\le \max\limits_D f(x)$.

d/ $g(m)\ge f(x)$ luôn đúng với mọi $x\in D \Leftrightarrow g(m)\ge \max\limits_D f(x)$.

e/ $g(m)\le f(x)$ luôn đúng với mọi $x\in D \Leftrightarrow g(m)\le \min\limits_D f(x)$.

Chú ý: Bài toán tìm tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất ta thường dựa vào cấu trúc của nghiệm.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm**:** $x+\sqrt{3x^2+1}=m$**.**

Ví dụ 2. Định m để phương trình $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}-\sqrt{4-x^2}=m$ có nghiệm .

Ví dụ 3. Tìm m để bpt sau có nghiệm trên đoạn $[2,3]$: $\sqrt{x^2-4x+5}\ge x^2-4x+m$.

Ví dụ 4. Tìm m để pt sau có nghiệm $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$.

Ví dụ 5. Tìm m để pt sau có nghiệm: $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x})$.

Ví dụ 6. Tìm m để pt sau có nghiệm duy nhất: $\sqrt{1-x^2}+2\sqrt[3]{1-x^2}=m$.

III. BÀI TẬP

1) Định m để phương trình $x^2-6x+m+\sqrt{(x-5)(1-x)}=0$ có nghiệm.
2) Định m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt:

   $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}-2\sqrt{-x^2+6x-8}+m=1$
3) Định m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt:

   $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}+\sqrt{-4x^2+16x-15}+m=0$
4) Tìm m để pt sau có nghiệm: $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}-\sqrt{(x-1)(3-x)}=m$
5) Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $x-m=\sqrt{2x^2+mx-3}$
6) Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $m-\sqrt{x^2-3x+2}=x$
7) Tìm m để pt sau có nghiệm: $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+x+4\sqrt{x-4}=m$
8) Định m để bất phương trình có nghiệm $mx-\sqrt{x-2}\le 2m+1$
9) Tìm m để bpt sau đúng với mọi $x\in\left[-3,8\right]$: $(m+1)\sqrt{(3+x)(8-x)}\le x^2-5x+m$
10) Tìm m để bpt sau có nghiệm: $x+4<m\sqrt{x+2}$
11) Tìm m để bpt sau có nghiệm: $x^3+3x^2-1\le m(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^3$
12) Tìm m để pt sau có nghiệm $m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$
13) Tìm m để các pt sau có 2 nghiệm $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$
14) CMR với $m>0$ thì phương trình sau luôn có hai nghiệm phân biệt $x^2+2x-8=\sqrt{m(x-2)}$
15) Tìm m để pt sau có nghiệm $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$.
16) Tìm m để các pt sau có đúng 2 nghiệm $\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m$.
17) Tìm tham số m để phương trình: $3x^2+2x+3=m(x+1)\sqrt{x^2+1}$ có nghiệm?
18) Tìm tham số m để phương trình: $m\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x)\le 0$ có nghiệm

    $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$.
19) Tìm m để phương trình: $\sqrt[4]{x^2+2x+4}-\sqrt{x+1}=m$ có đúng một nghiệm.
20) Tìm m để phương trình: $m\sqrt{x^3-1}=x^2+2$ có nghiệm thực.
21) Xác định m để phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$ có nghiệm.

22) Tìm m để phương trình: $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left[m\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+16\sqrt[4]{x(x-1)}\right]=1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

23) Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{(4+x)(6-x)}\le x^2-2x+m$ đúng $\forall x\in[-4;6]$.

24) Tìm m để bất phương trình: $x(4-x)+m\left(\sqrt{x^2-4x+5}+2\right)\ge 0$ nghiệm đúng $\forall x\in\left[2;2+\sqrt{3}\right]$.

25) Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{(1+2x)(3-x)}\ge 2x^2-5x-3+m$ đúng $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};3\right]$.

26) Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2}\ge m-\sqrt{x^2-3x+4}$ đúng $\forall x\in[3;+\infty]$.

27) Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{3-x}+m\sqrt{3x-x^2}-3\le 0$ đúng $\forall x\in[0;3]$.

28) Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{x^2+4x+8}-\sqrt{x^2-2x+2}>4m-m^3$ đúng $\forall x\in R$.

29) Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2m\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=m^3$ có nghiệm duy nhất.

30) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $\sqrt{4-x^2}=mx-m+2$ có nghiệm.

HẾT.

CHUYÊN ĐỀ
HỆ PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1. HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI 1

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Dấu hiệu: Đổi chỗ x, y cho nhau thì từng phương trình của hệ không đổi.

2/ Cách giải: Đặt $S = x + y,\ P = xy$, đưa hệ đã cho về hệ theo S, P. Giải hệ này tìm S, P. Khi đó x, y là nghiệm của pt: $X^2 - SX + P = 0$ với ĐK: $\Delta = S^2 - 4P \geq 0$. Có đôi khi phải đặt $u = u(x, y), v = v(x, y)$ và $S = u + v, P = uv$.

Lưu ý: 1/ $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy;\ x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$.

2/ Nếu (x_0, y_0) là nghiệm của hệ thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$

Ví dụ 2. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x + y + 1) + y(y + 1) = 2 \end{cases}$

Ví dụ 3. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ (x + y)(8 + xy) = 2 \end{cases}$

Ví dụ 4. $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x + 1)(y + 1) = 12 \end{cases}$

Ví dụ 5. $\begin{cases} (x^2 + y^2)\left(1 + \dfrac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \\ (x + y)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) = 5 \end{cases}$

III. BÀI TẬP

1) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x(x+2)(2x+y)=9 \\ x^2+4x+y=6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+2xy=2 \\ x^3+y^3=8 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=3 \\ \left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right)=280 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^4+y^4+x^2y^2=21 \end{cases}$

6) $\begin{cases} (x-1)(y-1)=18 \\ x^2+y^2=65 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=481 \\ x^2+xy+y^2=37 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^4+y^4+6x^2y^2=41 \\ xy\left(x^2+y^2\right)=10 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x-y-xy=5 \\ x^2+y^2-xy=7 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2-xy+y^2-2(x+y)=-31 \\ x+xy+y=11 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2+y^2-x+y=2 \\ xy+x-y=-1 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2+x-y+y^2=4 \\ x(x-y+1)+y(y-1)=2 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2+xy+y^2-x+y=6 \\ xy-x+y=-3 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=4 \end{cases}$

15) $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)(x+y)=15 \\ \left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)\left(x^2+y^2\right)=85 \end{cases}$

16) $\begin{cases} (x+y)(1+xy)=18xy \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+x^2y^2\right)=208x^2y^2 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=12 \\ x(x-1)y(y-1)=36 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^3+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2=12 \\ (xy)^2+xy=6 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$

20) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$

21) $\begin{cases} (x+y)(1+\dfrac{1}{xy})=5 \\ (x^2+y^2)(1+\dfrac{1}{x^2y^2})=9 \end{cases}$

22) $\begin{cases} (x+y)(1+\dfrac{1}{xy})=4 \\ (x^3+y^3)(1+\dfrac{1}{x^3y^3})=4 \end{cases}$

23) $\begin{cases} x^2+y^2+x-y=8 \\ xy(x+1)(y-1)=12 \end{cases}$

24) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \\ x+y=5 \end{cases}$

25) $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}$

26) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$

27) $\begin{cases} (x^2 + y^2)xy = 78 \\ x^4 + y^4 = 97 \end{cases}$

28) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$

29) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 2 \\ (x - y)xy = -2 \end{cases}$

30) $\begin{cases} xy^2 - x^2y = -30 \\ x + xy - y = 11 \end{cases}$

31) $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

BÀI 2. HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI 2

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Dấu hiệu: Đổi chỗ x, y cho nhau thì phương trình trở thành phương trình kia của hệ.

2/ Cách giải: Trừ vế với vế, đưa về pt chứa thừa số chung là $x - y$.

Lưu ý: 1/ $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$; $x^3 - y^3 = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$.

2/ Nếu (x_0, y_0) là nghiệm của hệ thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $\begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$.

Ví dụ 2. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$.

Ví dụ 3. $\begin{cases} 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \\ 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \end{cases}$.

Ví dụ 4. $\begin{cases} (x-1)\left(y^2+6\right) = y\left(x^2+1\right) \\ (y-1)\left(x^2+6\right) = x\left(y^2+1\right) \end{cases}$

III. BÀI TẬP

1) $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 = 2y + x \\ y^3 = 2x + y \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 + y^{2010} = y^3 \\ y^3 + x^{2010} = x^3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 3x \\ 2y^2 + xy = 3y \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3 + 7x = y^3 + 7y \\ x^2 + y^2 = x + y + 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \sqrt{x^2+21} = \sqrt{y-1} + y^2 \\ \sqrt{y^2+21} = \sqrt{x-1} + x^2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sqrt{x^2+3} + 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{y^2+3} + 2\sqrt{y} - \sqrt{x} = 3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{x} \\ 2y + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{y} \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x + y = \dfrac{3}{x^2} \\ 2y + x = \dfrac{3}{y^2} \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = x^2 - 2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x - 3y = 4\dfrac{y}{x} \\ y - 3x = 4\dfrac{x}{y} \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x^3 = x^2 + 2y^2 \\ 3y^2 = y^2 + 2x^2 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$

16) $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$

BÀI 3. HỆ ĐẲNG CẤP

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Dấu hiệu: bậc các số hạng trong phương trình bằng nhau hoặc độ lệch bậc 2 phương trình trong hệ bằng nhau.

2/ Cách giải: Xét $x = 0$. Xét $x \neq 0$, đặt $y = kx$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$.

Ví dụ 2. $\begin{cases} 2y\left(x^2-y^2\right)=3x \\ x\left(x^2+y^2\right)=10y \end{cases}$.

Ví dụ 3. $\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y \\ x^2-3=3\left(y^2+1\right) \end{cases}$.

Ví dụ 4. $\begin{cases} x^3-3x^2y-2y=0 \\ x+3y-2y^3=0 \end{cases}$.

III. BÀI TẬP

1) $\begin{cases} y^2-3xy=4 \\ x^2-4xy+y^2=1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x^2-8\text{x}y+4y^2=0 \\ 5x^2-7\text{x}y-6y^2=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3-y^3=7 \\ 2x^2y+3xy^2=16 \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)=9 \\ (x-y)(x^2+y^2)=5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=3 \\ (x+y)(x^2+y^2)=15 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ 4x^4+y^4=4x+y \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x-y)\left(x^2-y^2\right)=3 \\ (x+y)\left(x^2+y^2\right)=15 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x^3+3y=y^3+4x \\ 5\left(1+3y^2\right)=4\left(3x^2+2\right) \end{cases}$

17) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1 \\ x^2+2xy-2y^2=1 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x^2 - x(y-1) + y^2 = 3y \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y \end{cases}$

19) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 16 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \end{cases}$

20) $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 0 \end{cases}$

21) $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$

BÀI 4. PHÂN TÍCH THÀNH NHÂN TỬ

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Phương pháp: Đưa một phương trình về phương trình tích.

2/ Dấu hiệu:

- Hệ có 1 phương trình là **phương trình bậc hai, bậc ba** của 1 ẩn.
- Hệ có 1 **phương trình đẳng cấp**.
- Hệ có 1 **phương trình là hằng đẳng thức**.
- Hệ có 1 **phương trình chứa căn nhân liên hợp được**.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2(x-y) \end{cases}$.

Ví dụ 2. $\begin{cases} x^3 - 4y^3 = 6x^2y - 9xy^2 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$

Ví dụ 3. $\begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 \end{cases}$.

Ví dụ 4. $\begin{cases} x^2 - 3y + 2 + 2\sqrt{x^2y + 2y} = 0 \\ \sqrt{x^2 + 4x - y + 1} + \sqrt[3]{2x-1} = 1 \end{cases}$.

Ví dụ 5. $\begin{cases}(x-y)\left(x^2+xy+y^2+3\right)=3\left(x^2+y^2\right)+2\\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=x^2+8\end{cases}$.

III. BÀI TẬP

1) $\begin{cases}y^2=(x+8)\left(x^2+2\right)\\ y^2-(8+4x)y-5x^2+16x+16=0\end{cases}$

2) $\begin{cases}4x^2+y^4=4-4xy^2\\ x^2-2\left(xy^2+8\right)+y^4=0\end{cases}$

3) $\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0\\ xy\left(x^2+y^2\right)+2=(x+y)^2\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2+2x+(xy-1)^2=2x^2y\\ x^3y^3+3xy^2-7y^3=1\end{cases}$

5) $\begin{cases}\sqrt{x-5}+\sqrt{2y-4}=x-y+1\\ 8\sqrt{y(x-2)}+4-8y=(y-x)^2\end{cases}$

6) $\begin{cases}3y^2+1+2(x+1)y=4y\left(\sqrt{x^2+2y+1}\right)\\ y(y-x)=3-3x\end{cases}$

7) $\begin{cases}x^2-3y=y^2-y-2\\ (x+y)\sqrt{x^2-4x+5}=(2-x)\sqrt{(x+y)^2+1}\end{cases}$

8) $\begin{cases}x^3-3x^2y+4y^3=4(x-2y)^2\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-2y}=3\end{cases}$

9) $\begin{cases}x^2+4y^2=5\\ (x+y-1)\sqrt{y-1}=(y-2)\sqrt{x+y}\end{cases}$

10) $\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1\\ \sqrt{x+y}=x^2-y\end{cases}$

11) $\begin{cases} x+3=2\sqrt{(3y-x)(y+1)} \\ \sqrt{3y-2}-\sqrt{\dfrac{x+5}{2}}=xy-2y-2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} y^4-2xy^2+7y^2=-x^2+7x+8 \\ \sqrt{3y^2+13}-\sqrt{15-2x}=\sqrt{x+1} \end{cases}$

13) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=1+\sqrt{x^2-y^2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ \sqrt{y-1}(x+y-1)=(y-2)\sqrt{x+y} \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^3+2y^2=x^2y+2xy \\ 2\sqrt{x^2-2y-1}+\sqrt[3]{y^3-14}=x-2 \end{cases}$

16) $\begin{cases} y^2-xy+2y-3x-3=0 \\ \sqrt{2x-3}=(y^2+2015)(5-y)+\sqrt{y} \end{cases}$

17) $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y} \\ 2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3} \end{cases}$

18) $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x+y}+x+3y=6+(x+y-4)\sqrt{y} \\ \sqrt{x-2y}-\sqrt{x+1}=\dfrac{5}{x-y-7} \end{cases}$

BÀI 5. SỬ DỤNG PHÉP THẾ

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Rút x **theo** y **hoặc** y **theo** x từ một phương trình rồi thế vào phương trình còn lại. Đôi khi ta **thế cả một biểu thức chứa** x, y hoặc **thế hằng số** từ phương trình này vào phương trình kia.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 3x^3+x^2(7y-3)+x\left(2y^2-7y\right)=2y^2 \end{cases}$.

Ví dụ 2. $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$.

Ví dụ 3. $\begin{cases} \left(2x^2 + y\right)(x + y) + x(2x + 1) = 7 - 2y \\ x(4x + 1) = 7 - 3y \end{cases}$.

III. BÀI TẬP

1) $\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy = x + 7y + 1 \\ x^2y^2 = 10y^2 - 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 - 2xy + 5y = 7 \\ 3x^2 - 2x + y = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3 + 7y = (x + y)^2 + x^2y + 7x + 4 \\ 3x^2 + y^2 + 8y + 4 = 8x \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2(y + 1) = 6y - 2 \\ x^4y^2 + 2x^2y^2 + y\left(x^2 + 1\right) = 12y^2 - 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 + xy + 2x + 2y = 16 \\ (x + y)(4 + xy) = 32 \end{cases}$

9) $\begin{cases} (x - 1)^2 + 6(x - 1)y + 4y^2 = 20 \\ x^2 + (2y + 1)^2 = 2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^3 + 2xy^2 = 5 \\ 2x^2 + xy + y^2 = 4x + y \end{cases}$

11) $\begin{cases} y^2\sqrt{4x - 1} + \sqrt{3} = 5y^2 - \sqrt{12x - 3} \\ 2y^2\sqrt{3 - 2x} = \sqrt{6} \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x\left[(x-y)^2 + 1\right] = y(8y^2 - 3xy + 2) \\ 3x^2 + 4y^3 + 2 = 3y(x+4) \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2 + xy = x + 2 \\ \left(2y^2 + 5\right)x + 13x^2 = 26 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 \\ xy + y + 1 = x^2 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 13y^3 - 3x^2 = 1 \\ y^2 + 4y + 1 = 5x + 4xy \end{cases}$

17) $\begin{cases} xy + 3 = y\sqrt{x^2+3} \\ y^2 + 4x + 2(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2x^2 + 5 \end{cases}$

BÀI 6. ĐẶT ẨN PHỤ

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ **Phương pháp:** Đặt 2 ẩn phụ a,b rồi đưa hệ đã cho về hệ mới theo 2 ẩn a,b dễ giải hơn.

2/ **Dấu hiệu:**

- Hệ đối xứng loại 1.
- Hệ có số hạng lặp lại trong 2 phương trình.
- Hệ có tổng hiệu $x+y, x-y$.

Chú ý: Thông thường phải qua 1 vài biến đổi như **tách, nhóm** hoặc **chia 2 vế với biểu thức khác 0** mới thấy ẩn phụ.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $\begin{cases} x^3 + xy^2 + x^2y + y^3 = 4 \\ (x+y)\left(x^2 + xy + y^2\right) = 6 \end{cases}$.

Ví dụ 2. $\begin{cases} x^2+1+y(x+y)=4y \\ (x^2+1)(x+y-2)=y \end{cases}$.

Ví dụ 3. $\begin{cases} 3(x^2+y^2)+\dfrac{1}{(x-y)^2}=2(10-xy) \\ 2x+\dfrac{1}{x-y}=5 \end{cases}$.

Ví dụ 4. $\begin{cases} x^4-2x=y^4-2y \\ (x^2-y^2)^3=3 \end{cases}$.

III. BÀI TẬP

1) $\begin{cases} x^2+xy-3x+y=0 \\ x^4+3x^2y-5x^2+y^2=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} (2x-1)^2+4(y-1)^2=25 \\ xy(x-1)(y-2)=-6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+xy-3x+y=0 \\ x^4+3x^2y-5x^2+y^2=0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^3(3y+55)=64 \\ xy(y^2+3y+3)=12+51x \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^3y+x^3+xy+x=1 \\ 4x^3y^2+4x^3-8xy-17x=-8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 9y^3(3x^3-1)=-125 \\ 45x^2y+75x=6y^2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x(1+x)+\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{1}{y}+1\right)=4 \\ x^3y^3+x^2y^2+xy+1=4y^3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^3(2+3y)=1 \\ x\left(y^3-2\right)=3 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2(y+1)=6y-2 \\ x^4y^2+2x^2y^2+y\left(x^2+1\right)=12y^2-1 \end{cases}$

12) $\begin{cases} y\left(1+2x^3y\right)=3x^6 \\ 1+4x^6y^2=5x^6 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3 \\ 2xy+y^2+1=8y \end{cases}$

14) $\begin{cases} (x+y-3)^3=4y^3\left(x^2y^2+xy+\dfrac{45}{4}\right) \\ x+4y-3=2xy^2 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x+\sqrt{y-1}=6 \\ \sqrt{x^2+2x+y}+2x\sqrt{y-1}+2\sqrt{y-1}=29 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x^2+xy-3x+y=0 \\ x^4+3x^2y-5x^2+y^2=0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} y^2+x+xy-6y+1=0 \\ xy^3-8y^2+x^2y+x=0 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \left(x^2+x\right)y^2-4y^2+y+1=0 \\ xy+x^2y^2+1-\left(4-x^3\right)y^3=0 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x^2-y^2-6=0 \\ (x+y-1)^2-\dfrac{4}{(x-y)^2}-3=0 \end{cases}$

20) $\begin{cases} x^2+1+y^2+xy=4y \\ x+y-2=\dfrac{y}{x^2+1} \end{cases}$

21) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19(x-y)^2 \\ x^2-xy+y^2=7(x-y) \end{cases}$

22) $\begin{cases} 8\left(x^2+y^2\right)+4xy+\dfrac{5}{(x+y)^2}=13 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1 \end{cases}$

23) $\begin{cases} y^3=x^3\left(9-x^3\right) \\ x^2y+y^2=6x \end{cases}$

24) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3-xy \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=7-\dfrac{3x^2y^2+2}{xy} \end{cases}$

25) $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$

26) $\begin{cases} x+y^2-y\sqrt{x+3y^2}=0 \\ 2y^2-3y-x+1+\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+1}{21}}=0 \end{cases}$

27) $\begin{cases} 4x^2y+y^2+2=7xy \\ 2x^2+2y^2+3y^3=6xy^2 \end{cases}$

28) $\begin{cases} (x-y)^2+x+y=y^2 \\ x^4-4x^2y+3x^2=-y^2 \end{cases}$

29) $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \\ x^2y+x^2+2y-22=0 \end{cases}$

30) $\begin{cases} 4xy+4\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=3 \end{cases}$

31) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+3x-6y^2=1 \\ 2(x-y^2)+y=1 \end{cases}$

32) $\begin{cases} (x+y+3)\sqrt{x-y}+2y+4=0 \\ (x-y)\left(x^2+4\right)=y^2+1 \end{cases}$

33) $\begin{cases} x^2+y^2=xy+x+y \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

34) $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+6}=y+1 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

35) $\begin{cases} x^2-y^2=8x-6y+1 \\ \left(x^2-y^2\right)^2=10(x-y)^2-1 \end{cases}$

36) $\begin{cases} x^2-y^2-6=0 \\ (x+y-1)^2-\dfrac{4}{(x-y)^2}-3=0 \end{cases}$

37) $\begin{cases} (2x-7)(x-y)+3=0 \\ \left(3x^2-4xy+4y^2-7\right)(x-y)^2=1 \end{cases}$

38) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=(x-y)^4 \\ x^2-xy+y^2=x-y \end{cases}$

39) $\begin{cases} (x+6y+3)\sqrt{xy+3y}=y(8y+3x+9) \\ \sqrt{-x^2+8x-24y+417}=(y+3)\sqrt{y-1}+3y+17 \end{cases}$

40) $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y}=16 \\ \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3}=\sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}}-\dfrac{y}{2} \end{cases}$

41) $\begin{cases} xy+x+1=7y \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 \end{cases}$

42) $\begin{cases} \sqrt{xy+x+2}+\sqrt{x^2+x}-4\sqrt{x}=0 \\ xy+x^2+2=x(\sqrt{xy+2}+3) \end{cases}$

43) $\begin{cases} x^4 - 4x^2 + 2y^2 - 6\sqrt{2}y = -9 \\ \sqrt{2}x^2y + x^2 + 2\sqrt{2}y = 22 \end{cases}$

44) $\begin{cases} \sqrt{x+y-2} + \dfrac{2(x-1)}{x+y} = 3 \\ (x+y)\sqrt{x-y+2} = 6\sqrt{x+y-2} \end{cases}$

45) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy - y^2 = 1 \\ y(\sqrt{xy-2y^2} + \sqrt{4y^2-xy}) = 1 \end{cases}$

BÀI 7. SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Phương pháp: Xét một phương trình của hệ để đưa về dạng $f(u) = f(v)$ với f là hàm đơn điệu.

2/ Dấu hiệu:

- Hệ đối xứng loại 2.
- Hệ có 1 phương trình **cô lập được** x, y ra 2 vế.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $\begin{cases} \sqrt{x-2} - \sqrt{3-y} = y^2 - x^2 + 4x - 6y + 5 \\ \sqrt{2x+3} + \sqrt{4y+1} = 6 \end{cases}$.

Ví dụ 2. $\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2+1} + y = 4 + \sqrt{x+4} \end{cases}$.

Ví dụ 3. $\begin{cases} (x+1)\sqrt{x-1} - 4y(2y^2+1) = 0 \\ 2y^2 - 3xy + x + 8 = 0 \end{cases}$.

Ví dụ 4. $\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases}$.

Ví dụ 5. $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 \end{cases}$.

III. BÀI TẬP

1) $\begin{cases}\sqrt{2x^2+7}-2y+1=0\\(3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0\end{cases}$

2) $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\\\left(x^2+y^2\right)^2=4(x-y)+x^4y^4\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4}\\x^2-y^2-3x+3y+1=0\end{cases}$

4) $\begin{cases}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\\x\sqrt{6x+2x^2+1}=4xy+6x+1\end{cases}$

22) $\begin{cases}x^3+2y^2=x^2y+2xy\\2\sqrt{x^2-2y-1}+\sqrt[3]{y^3-14}=x-2\end{cases}$

23) $\begin{cases}x^3+3x-1+\sqrt{2x+1}=y\\y^3+3y-1+\sqrt{2y+1}=x\end{cases}$

5) $\begin{cases}\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4\\\sqrt{2y+3}+\sqrt{4-x}=4\end{cases}$

6) $\begin{cases}x^2-y^2+1=2\left(\sqrt{y}-\sqrt{x+1}-x\right)\\\sqrt{x+1}+\sqrt{y-3}+x-y=2\end{cases}$

7) $\begin{cases}x^3\left(4y^2+1\right)+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=6\\x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1}\end{cases}$

24) $\begin{cases}x^2-12xy+20y^2=0\\\ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y\end{cases}$

8) $\begin{cases}6x^2+y^2-5xy-7x+3y+2=0\\\dfrac{x-y}{3}=\ln(x+2)-\ln(y+2)\end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x^2(4x+1)+2y^2(2y+1)=y+32 \\ x^2+y^2-x+y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^3+y^3=3x^2-6x-3y+4 \\ x^2+y^2-6x+y-10=\sqrt{y+5}-\sqrt{4x+y} \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} (2x+2)\sqrt{2x-1}=y^3+3y \\ y^2-xy+5=5x-6y \end{cases}$

13) $\begin{cases} \sqrt{2x-x^2}=2\sqrt{1-y^2}+2x-1 \\ x^3-3x^2+2+(y^2+2)\sqrt{1-y^2}=0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2y^3+12y^2+25y+18=(2x+9)\sqrt{x+4} \\ \sqrt{3x+1}+3x^2-14x-8=\sqrt{6-4y-y^2} \end{cases}$

15) $\begin{cases} (x+1)\sqrt{x+2}+3\sqrt{x+2}=y^3+3y^2+5y+3 \\ x^3+2x^2+x-7y^2-14y+19=3\sqrt[3]{9(y+1)^2} \end{cases}$

16) $\begin{cases} (23-3x)\sqrt{7-x}=(20-3y)\sqrt{6-y} \\ \sqrt{2x+y+2}-\sqrt{-3x+2y+8}=-3x^2+14x+8 \end{cases}$

17) $\begin{cases} (53-5x)\sqrt{10-x}+(5y-48)\sqrt{9-y}=0 \\ \sqrt{2x-y+6}+x^2-2x-66=\sqrt{y-2x+11} \end{cases}$

18) $\begin{cases} (4x+2)(1+\sqrt{x^2+x+1})+3y(2+\sqrt{9y^2+3})=0 \\ 4x^3-3y+5+3\sqrt{1-3y}=0 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x\sqrt{x^2+y}+y=\sqrt{x^4+x^3}+x \\ x+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{y(x-1)}=\dfrac{9}{2} \end{cases}$

20) $\begin{cases} 4\sqrt{1+2x^2y}-1=3x+2\sqrt{1-2x^2y}+\sqrt{1-x^2} \\ 2x^3y-x^2=\sqrt{x^4+x^2}-2x^3y\sqrt{4y^2+1} \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 \end{cases}$

22) $\begin{cases} 3x^2-2x-5+2x\sqrt{x^2+1}=2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} \\ x^2+2y^2=2x-4y+3 \end{cases}$

23) $\begin{cases} xy+2=y\sqrt{x^2+2} \\ y^2+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=2x^2-4x \end{cases}$

BÀI 8. TRỤC CĂN THỨC

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Sử dụng lượng liên hợp để đưa một phương trình trong hệ về dạng tích.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{y}=\dfrac{x}{1+\sqrt{y}} \\ x^2+y^2+2x-y-2=0 \end{cases}$

Ví dụ 2. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+3y}=5 \\ \sqrt{2y+3}+\sqrt{x+4y+2}=5 \end{cases}$

Ví dụ 3. $\begin{cases} \sqrt{2x+y-1}-\sqrt{x+2y-2}=y-x-1 \\ x^2+y^2-2xy+4x-3y=0 \end{cases}$

Ví dụ 4. $\begin{cases} \sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=4 \end{cases}$

III. BÀI TẬP

1) $\begin{cases} \sqrt{x^2+2(y-1)(x-y)}+\sqrt{xy}=2y \\ x(2x+2y-5)+y(y-3)+3=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x-y}+\sqrt{y-2}+4x-3y=0 \\ \sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}=\dfrac{y^2}{\sqrt{x+xy+1}} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{(x+1)y+(x-y+1)\sqrt{y}}+\sqrt{x+1}=y+\sqrt{y} \\ \sqrt{3x-2}-\sqrt{y}=2x^2-y-2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{x^2+2(y-1)(x-y)}+\sqrt{xy}=2y \\ x(2x+2y-5)+y(y-3)+3=0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+\sqrt{xy}=3y \\ 4\sqrt{(x+2)(y+2x)}=3(x+3) \end{cases}$

6) $\begin{cases} x(x+y)+\sqrt{x+y}=2y^2-\sqrt{2y} \\ x^2y-5x^2+7x+7y-4=6\sqrt[3]{xy-x+1} \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2+2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}=x+y+2xy \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=3x-4y+4 \end{cases}$

8) $\begin{cases} (x+1)\sqrt{y^2+y+2}+(y-1)\sqrt{x^2+x+1}=x+y \\ (x^2+x)\sqrt{x-y+3}=2x^2+x+y+1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} (x-y-1)\sqrt{x}+2=2x-y+(1-x)\sqrt{x-y} \\ \sqrt{x+y+3}=2\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{\dfrac{x+2y+1}{2x+y}}\right) \end{cases}$

10) $\begin{cases} \sqrt{x^2-x-y}=\dfrac{y}{\sqrt[3]{x-y}} \\ 2(x^2+y^2)-3\sqrt{2x-1}=11 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}=\dfrac{y^2}{\sqrt{x+xy+1}} \\ (x-1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x-y}+\sqrt{y-2}+4x-3y \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2+y^2+\sqrt{8x^2-12xy+8y^2}=x+y+2xy \\ (y+1)\sqrt{4x+5}+2(x+5)\sqrt{y+3}=3y^2+14x+13 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x-3\sqrt{x+3}=3\sqrt{y-5}-y \\ \sqrt{x^2+16(y-x)}+y=2\sqrt{xy} \end{cases}$

14) $\begin{cases} y+\sqrt{3y^2-2y+3x^2+6}=3x+\sqrt{7x^2+7}+2 \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} \sqrt{2(x^2+y^2)+2(5x-3y)-4(xy-3)}+\sqrt{x+1}=3\sqrt{y} \\ \sqrt{y^2-4(x+y)+17}-\sqrt{x-y+3}=2 \end{cases}$

16) $\begin{cases}(x-y+2)\sqrt{x+1}=\sqrt{y}\\(4-\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}=3y-2+2\sqrt{1-x}\end{cases}$

17) $\begin{cases}x^2+y^2+2xy-2x+y-9=0\\2x+8+\sqrt{2x+1}=4y^2-3y+\sqrt{2y-1}\end{cases}$

18) $\begin{cases}(x+y)\sqrt{x-y+2}=x+3y+2\\(x-y)\sqrt{x-y+2}=(x+y+1)\sqrt{x+y-2}\end{cases}$

19) $\begin{cases}\sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+3}+x+y=5\\\sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+3}-x-y=2\end{cases}$

20) $\begin{cases}x\sqrt{y^2+6}+y\sqrt{x^2+3}=7xy\\x\sqrt{x^2+3}+y\sqrt{y^2+6}=x^2+y^2+2\end{cases}$

BÀI 9. CỘNG, TRỪ HOẶC NHÂN CÁC PHƯƠNG TRÌNH

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Thực hiện các phép cộng, trừ hoặc nhân theo 2 vế của 2 phương trình trong hệ để được hệ mới đơn giản hơn.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. $\begin{cases}x^3-y^3=35\\2x^2+3y^2=4x-9y\end{cases}$

Ví dụ 2. $\begin{cases}x=2y^3-6y-2\\y=-x^3+3x+4\end{cases}$

Ví dụ 3. $\begin{cases}x(xy+6)=y^3\\y(xy-24)=x^3\end{cases}$

III. BÀI TẬP

1) $\begin{cases}(x-y)\left(x^2+y^2\right)=x^4-1\\(x+y)\left(x^4+y^4\right)=x^4+1\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^2\left(y^2+1\right)=2\\x^2y^2+xy+1=3x^2\end{cases}$

3) $\begin{cases} y(xy-2)=3x^2 \\ y^2+x^2y+2x=0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3+xy=2 \\ y^3+3xy=-3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1}+x+\sqrt{y^2+x+y+1}+y=18 \\ \sqrt{x^2+x+y+1}-x+\sqrt{y^2+x+y+1}-y=2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x^2+\sqrt{2-x}+\sqrt{y-1}-34=x+2xy \\ 2y^2+\sqrt{2-x}+\sqrt{y-1}-34=2y-xy \end{cases}$

7) $\begin{cases} x(xy+6)=y^3 \\ y(xy-24)=x^3 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=2\left(x^2+y^2\right) \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2y}=y^2-x^2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} (x+y)\left(3xy-4\sqrt{x}\right)+2=0 \\ (x+y)\left(3xy+4\sqrt{y}\right)-2=0 \end{cases}$

BÀI 11. HỆ CÓ THAM SỐ

---000---

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Tìm điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất

- Dựa vào cấu trúc của nghiệm.
- Dựa vào tính chất hình học.

2/ Tìm điều kiện để hệ có k nghiệm

- Tìm điều kiện chính xác.
- Sử dụng phương pháp hàm số.

Chú ý:

a/ $g(m)=f(x)$ có nghiệm $x\in D \Leftrightarrow \min\limits_D f(x)\le g(m)\le \max\limits_D f(x)$. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đường.

b/ $g(m)\ge f(x)$ có nghiệm $x\in D \Leftrightarrow g(m)\ge \min\limits_{D} f(x)$.

c/ $g(m)\le f(x)$ có nghiệm $x\in D \Leftrightarrow g(m)\le \max\limits_{D} f(x)$.

d/ $g(m)\ge f(x)$ luôn đúng với mọi $x\in D \Leftrightarrow g(m)\ge \max\limits_{D} f(x)$.

e/ $g(m)\le f(x)$ luôn đúng với mọi $x\in D \Leftrightarrow g(m)\le \min\limits_{D} f(x)$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x+y+xy=m+1 \\ x^2y+xy^2=m \end{cases}$.

Ví dụ 2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} mx+(m+1)y=2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

Ví dụ 3. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=1-3m \end{cases}$

Ví dụ 4. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} 3x^2=y^3-2y^2+my \\ 3y^2=x^3-2x^2+mx \end{cases}$

Ví dụ 5. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=m \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x-2}=m \end{cases}$

Ví dụ 6. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=1 \\ x^2+xy+y^2=m \end{cases}$

Ví dụ 7. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11 \\ x^2+2xy+3y^2=m \end{cases}$

Ví dụ 8. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 2x^3-(y+2)x^2+xy=m \\ x^2+x-y=1-2m \end{cases}$

III. BÀI TẬP

1) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=9 (1) \\ (2m+1)x+my+m-1=0 (2) \end{cases}$. Xác định m để hệ phương trình trên có 2 nghiệm $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ sao cho biểu thức $A=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ đạt giá trị lớn nhất?

2) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+ay-a=0 \\ x^2+y^2-x=0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của a để hệ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

3) Tìm a để hệ: $\begin{cases} x+y\le 2 \\ x+y+\sqrt{2x(y-1)+a}=2 \end{cases}$ có nghiệm?

4) Với những giá trị nào của m thì hệ phương trình: $\begin{cases} 5(x+y)-4xy=4 \\ x+y-xy=1-m \end{cases}$ có nghiệm?

5) Chứng tỏ rằng với mọi giá trị của tham số m, hệ $\begin{cases} x+xy+y=2m+1 \\ xy(x+y)=m^2+m \end{cases}$ luôn có nghiệm. Xác định m để hệ phương trình đó có nghiệm duy nhất?

6) Tìm tham số m để hệ $\begin{cases} x^2-8x+7\le 0 \\ x^2-(2m+1)x+m^2+m\le 0 \end{cases}$ có nghiệm? Xác định m để hệ bất phương trình đó có một nghiệm duy nhất?

7) Tìm tham số m để hệ $\begin{cases} 5x^2+2xy-y^2\ge 3 \\ 2x^2+2xy+y^2\le \dfrac{m}{m-1} \end{cases}$ có nghiệm?

8) Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=8 \\ 2x^2+4xy+5y^2=a^4-4a^3+4a^2-12+\sqrt{105} \end{cases}$$

9) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+2}+\sqrt{y+3}=m \\ x+y=2m-5 \end{cases}$ có nghiệm?

10) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} 2x-y-m=0 \\ x+\sqrt{xy}=1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất?

11) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-5x+4\le 0 \\ 3x^2-mx\sqrt{x}+16=0 \end{cases}$ có nghiệm?

12) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} xy(x+2)(y+2)=5m-6 \\ x^2+y^2+2x+2y=2m \end{cases}$ có nghiệm?

13) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2mxy+(m+1)y^2=m \\ x^2+(m+1)xy+2y^2=2m-1 \end{cases}$ có 4 nghiệm phân biệt?

14) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} 3(x^2+y^2)-2(x+y+xy)=15 \\ x^3+y^3=m \end{cases}$ có nghiệm?

15) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=m \\ x+y-\sqrt{xy}=m \end{cases}$ có nghiệm?

16) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=m \\ x+y=2m+1 \end{cases}$ có nghiệm?

17) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^3+\dfrac{1}{x^3}+y^3+\dfrac{1}{y^3}=15m-10 \end{cases}$ có nghiệm?

18) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+xy=1 \\ x^3y+xy^3=m \end{cases}$ có nghiệm?

19) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=8 \\ xy(x+1)(y+1)=m \end{cases}$ có nghiệm?

20) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+m=y^2 \\ xy^2+m=x^2 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất?

21) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^3=y^2+7x^2-mx \\ y^3=x^2+7y^2-my \end{cases}$ có nghiệm duy nhất?

22) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ x^2+xy-2y^2=m \end{cases}$ có nghiệm?

23) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} xy-y^2=12 \\ x^2-xy=26+m \end{cases}$ có nghiệm?

24) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm?

$$\begin{cases} 4x^3-6x^2+\left(8y^2+14y+15\right)x=12y^3+8y^2+15y \\ \sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{y}=m \end{cases}$$

25) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm?

$$\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x}-2uy\sqrt{2y-1}=0 \\ 3\sqrt{y-1}-m\sqrt{10-2x}=2\sqrt[4]{y^2-1} \end{cases}$$

26) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm?

$$\begin{cases} x^3+6x=3x^2+y^3+3y+4 \\ m\sqrt{x^2+9}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{y-3}-\sqrt{x-3} \end{cases}$$

27) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm?

$$\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2012x \le 2012 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \ge 0 \end{cases}.$$

28) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm?

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + m = 0 \end{cases}$$

29) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm?

$$\begin{cases} 2\sqrt{xy - y} + x + y = 5 \\ \sqrt{5-x} + \sqrt{1-y} = m \end{cases}$$

30) Tìm m để hệ phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt?

$$\begin{cases} x^2y - x^2 + y = 2 \\ m\left(x^2 + y\right) - x^2y = 4 \end{cases}$$

31) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm?

$$\begin{cases} (x-y)\left(x^2 + xy + y^2 + 4\right) + 3\left(x^2 - 2y^2\right) = 9y + 8 \\ \sqrt{11 + 2(2x - y) - y^2} = 2m + \sqrt{5 + 2y - x^2} \end{cases}$$

32) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm?

$$\begin{cases} \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = 1 \\ -x^3 - 3y - 3 \ge m\left(\sqrt{x} - \sqrt{1-y}\right)^3 \end{cases}.$$

CHUYÊN ĐỀ 8: MŨ VÀ LOGARIT

BÀI 1. MŨ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

$a^0 = 1$ $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad a^m.a^n = a^{m+n}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad \left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m = a^{m.n}$ $\quad \left(a.b\right)^n = a^n.b^n$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

II. BÀI TẬP

Bài 1. Đưa về dạng cơ bản

$$a^u = a^v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ u = v \end{array}\right.; \qquad a^u > a^v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a < 1 : u < v \\ a > 1 : u > v \end{array}\right.$$

1/ $2^{x+1}.4^{x-1}.\dfrac{1}{8^{1-x}} = 16^x$

2/ $0,125.4^{2x-3} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$

3/ $8^{\frac{2x+1}{x+1}} = 0,25.\left(\sqrt{2}\right)^{7x}$

4/ $2^{x+2}.5^{x+2} = 2^{3x}.5^{3x}$

5/ $\left(x-3\right)^{3x^2-5x+2} = \left(x^2-6x+9\right)^{x^2+x-4}$

6/ $\left(2+x-x^2\right)^{\sin x} = \left(2+x-x^2\right)^{2-\sqrt{3}\cos x}$

7/ $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$

8/ $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$.

9/ $2^{x^2-3x+3} + 2^{x-1} = 2 + 2^{(x-1)^2}$

10/ $2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2.2^{6-5x} + 1$

11/ $3^{x^2+1} + x^2.3^{x^2} + 12x > 3x^2 + 4x.3^{x^2} + 9$

Bài 2. Phương pháp logarit hóa

1/ $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 500$

2/ $2^{x^2-4}.5^{x-2} = 1$

3/ $3^{x^2-2}.4^{\frac{2x-3}{x}} = 18$

4/ $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+3} + 3^{x+1}$

5/ $x^{\log x} = 1000x^2$

6/ $3^x.8^{\frac{x}{x+1}} = 36$

7/ $x^{\log_2(x+4)} = 32$

Bài 3. Phương pháp đặt ẩn phụ hoàn toàn

1/ $4^{\cot^2 x} + 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} - 3 = 0$

2/ $\left(7+4\sqrt{3}\right)^2 - 3\left(2-\sqrt{3}\right)^x + 2 = 0$

3/ $\left(\sqrt{2}-1\right)^x + \left(\sqrt{2}+1\right)^x - 2\sqrt{2} = 0$

4/ $\left(3+\sqrt{5}\right)^x + 16\left(3-\sqrt{5}\right)^x = 2^{x+3}$

5/ $2^{2x^2+1} - 9.2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0$

6/ $2.4^{x^{2+1}} + 6^{x^2+1} = 9^{x^2+1}$

7/ $2^{3x} - 6.2^x - \dfrac{1}{2^{3(x-1)}} + \dfrac{12}{2^x} = 1$

8/ $125^x + 50^x = 2^{3x+1}$

9/ $9^{x^2+x-1}-10.3^{x^2+x-2}+1=0$

10/ $3.8^x+4.12^x-18^x-2.27^x=0$

11/ $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+3.\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1}=12$

12/ $9^{x^2+x-1}-10.3^{x^2+x-2}+1=0$

13/ $4^{\log_9 x}-6.2^{\log_9 x}+2^{\log_3 27}=0$

14/ $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}=2^{5-x}+9$

15/ $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^x=4\left(2+\sqrt{3}\right)$

16/ $3^{2x+1}=3^{x+2}+\sqrt{1-6.3^x+3^{2(x+1)}}$

17/ $\sqrt{15.2^{x+1}+1}\ge\left|2^x-1\right|+2^{x+1}$

18/ $8.3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+9^{1+\sqrt[4]{x}}>9^{\sqrt{x}}$

Bài 4. Phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn

1/ $3^{2x}-\left(2^x+9\right).3^x+9.2^x=0$

2/ $9^{x^2}+\left(x^2-3\right).3^{x^2}-2x^2+2=0$

3/ $9^x+\left(x-12\right).3^x+11-x=0$

4/ $3.25^{x-2}+\left(3x-10\right).5^{x-2}=x-3$

5/ $9^x+2\left(x-2\right).3^x+2x-5=0$

6/ $3.9^{x-1}+\left(3x-7\right).3^{x-1}+2-x=0$

7/ $9^x+2\left(x-2\right)3^x+2x-5\ge 0$

Bài 5. Phương pháp đặt ẩn phụ đưa về hệ

1/ $2^{2x}-\sqrt{2^x+6}=6$

2/ $8^x+1=2\sqrt[3]{2^{x+1}-1}$

3/ $3^{2x}+\sqrt{3^x+5}=5$

4/ $27^x+2=3\sqrt[3]{3^{x+1}-2}$

Bài 6. Phương pháp hàm số

1/ $x+2.3^{\log_2 x}=3$

2/ $2^{x-1}-2^{x^2-x}=\left(x-1\right)^2$

3/ $2^{x^2-x}-2^{x+8}=8+2x-x^2$

4/ $3^x+x-4=0$

5/ $2^x=3^{\frac{x}{2}}+1$

6/ $9^x=5^x+4^x+2\left(\sqrt{20}\right)^x$

7/ $3.x^{\log_3 x}+\left(\log_3 x-1\right)^2=x^2$

8/ $2^{\log_2(x+3)}=x$

9/ $3^x.2x=3^x+2x+1$

BÀI 2. LOGARIT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ $\log_a u$ có nghĩa khi và chỉ khi $\begin{cases}0<a\ne 1\\ u>0\end{cases}$

2/ $\log_a u=v\Leftrightarrow u=a^v$

3/ Các công thức cơ bản:

$\log_a 1=0$ $\qquad$ $\log_a a=1$ $\qquad$ $\log_a a^u=u$

$a^{\log_a u} = u$ $\qquad \log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$ $\qquad \log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

$\log_a u^\alpha = \alpha.\log_a u$ $\qquad \log_e u = \ln u$ $\qquad \log_{10} u = \log u$

$\log_a u^{2n} = 2n.\log_a |u|$ $\qquad \log_{a^k} u = \frac{1}{k}\log_a u$

4/ Công thức đổi cơ số

$\log_a u = \log_a b.\log_b u$ $\qquad \log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$

Đặc biệt: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

5/ Công thức đặc biệt: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

II. BÀI TẬP

Bài 7. Đưa về phương trình cơ bản

$$\log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v \quad ; \quad \log_a u > \log_a v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a < 1 : u < v \\ a > 1 : u > v \end{array}\right.$$

1/ $2\log_5(3x-1) + 1 = \log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$ 2/ $\log_4(x-1) + \frac{1}{\log_{2x+1} 4} = \frac{1}{2} + \log_2\sqrt{x+2}$

3/ $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$ 4/ $\log_x 2 + 2\log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8$

5/ $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1} - \log_{1/2}(3-x) - \log_8(x-1)^3 = 0$

6/ $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3$

7/ $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$ 8/ $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = \log_2(4x)$

9/ $\log_{(x+3)}\left(3 - \sqrt{x^2 - 2x + 1}\right) = \frac{1}{2}$ 10/ $\log_3\left(4.16^x + 12^x\right) = 2x + 1$.

11/ $2(\log_9 x)^2 = \log_3 x.\log_3\left(\sqrt{2x+1} - 1\right)$ 12/ $\frac{1}{3}\log_2(5-x) + 2\log_8\sqrt{3-x} = 1$

13/ $16\log_{27x^2} x - 3\log_{3x} x^2 = 0$

14/ $\log_2\sqrt{x} + \log_{1/4}\left(x^2 - 2x + 1\right) - \log_4\left(x^2 - 4x + 4\right) - \log_{1/2}(x-1) = 0$

15/ $\log_5\left(-4x^2 + 13x - 5\right) - \log_{25}(3x+1) = 0$

16/ $2 + \log_2(x+1) > 1 - \log_{1/2}(4 - x^2)$.

17/ $\log_3\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-2} > \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x-3)$

Bài 8. Phương pháp đặt ẩn phụ hoàn toàn

1/ $\log_{2x-1}\left(2x^2+x-1\right)+\log_{x+1}\left(2x-1\right)^2=4$ 2/ $\log_2\left(4^x+15.2^x+27\right)+2\log_2\left(\dfrac{1}{4.2^x-3}\right)=0$

3/ $\log_2\left(4^{x+1}+4\right).\log_2\left(4^x+1\right)=\log_{1/\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{1}{8}}$ 4/ $\log_3\left(3^x-1\right).\log_3\left(3^{x+1}-3\right)=6$

5/ $2\left(\log_2 x+1\right)\log_4 x+\log_2\dfrac{1}{4}=0$

Bài 9. Phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn

1/ $\log^2\left(x^2+1\right)+\left(x^2-5\right)\log\left(x^2+1\right)-5x^2=0$ 2/ $\log^2 x-\log x.\log_2\left(4x\right)+2\log_2 x=0$

3/ $\log_2^2 x+\left(x-5\right)\log_2 x-2x+6=0$ 4/ $\log_3^2 x+\left(x-4\right)\log_3 x-x+3=0$

Bài 10. Phương pháp đặt ẩn phụ đưa về hệ

1/ $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)+3\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=2$

2/ $\sqrt{3+\log_2\left(x^2-4x+5\right)}+2\sqrt{5-\log_2\left(x^2-4x+5\right)}=6$

3/ $\log_2^2 x+\sqrt{\log_2 x+1}=1$

Bài 11. Phương pháp hàm số

1/ $\log_2\left(x^2-4\right)+x=\log_2\left(8\left(x+2\right)\right)$ 2/ $\log_{\sqrt[4]{5}}\left(x^2-2x-3\right)=2\log_2\left(x^2-2x-4\right)$

3/ $x^2+3^{\log_2 x}=x^{\log_2 5}$ 4/ $\log_3\left(\sqrt{x^2-3x+2}+2\right)+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x-x^2-1}=2$

5/ $\log_2\left(x+3^{\log_6 x}\right)=\log_6 x$ 6/ $2^{\log_3(x+1)}=x$.

BÀI 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Bài 12. Phương pháp biến đổi rồi thế

1/ $\begin{cases}2^{3x}=5y^2-4y\\ \dfrac{4^x+2^{x+1}}{2^x+2}=y\end{cases}$ 2/ $\begin{cases}4^{x+y}+3.4^{2y}=8\\ x+3y=2-\log_4 3\end{cases}$

3/ $\begin{cases}x-3|y|+2=0\\ \sqrt{27^x}-\sqrt{3^{y^2}.9^x}=0\end{cases}$ 4/ $\begin{cases}\left(\sqrt{x+1}\right).3^y=\dfrac{3\sqrt{4-x}}{x}\\ y+\log_3 x=1\end{cases}$

5/ $\begin{cases}4x^2-y^2=2\\ \log_2\left(2x+y\right)-\log_3\left(2x-y\right)=1\end{cases}$ 6/ $\begin{cases}\log_2\left(x^2+y^2\right)=1+\log_2\left(xy\right)\\ 3^{x^2+y^2-xy}=81\end{cases}$

7/ $\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{2-y}=1\\ 3\log_9\left(9x^2\right)-\log_3 y^3=3\end{cases}$ 8/ $\begin{cases}\log_{1/4}\left(y-x\right)-\log_4\dfrac{1}{y}=1\\ x^2+y^2=25\end{cases}$

9/ $\begin{cases} x-4|y|+3=0 \\ \sqrt{\log_4 x}-\log_2 y=0 \end{cases}$

10/ $\begin{cases} \log_x\left(x^3+2x^2-3x-5y\right)=3 \\ \log_y\left(y^3+2y^2-3y-5x\right)=3 \end{cases}$

11/ $\begin{cases} x^2-4x+y+2=0 \\ 2\log_2(x-2)-\log_{\sqrt{2}}(y)=0 \end{cases}$

12/ $\begin{cases} \log_2\sqrt{x+y}=3\log_8\left(\sqrt{x+y}+2\right) \\ \sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x^2-y^2}=3 \end{cases}$

13/ $\begin{cases} \log_2 x+2\log_2 y=3 \\ x^2+y^4=16 \end{cases}$

14/ $\begin{cases} (x+y).3^{y-x}=\dfrac{5}{27} \\ 3\log_5(x+y)=x-y \end{cases}$

15/ $\begin{cases} 2009^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+2010}{y^2+2010} \\ 3\log_3(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1 \end{cases}$

16/ $\begin{cases} \log_2(3y-1)=x \\ 4^x+2^x=3y^2 \end{cases}$

17/ $\begin{cases} \log_x(6x+4y)=2 \\ \log_y(6y+4x)=2 \end{cases}$

18/ $\begin{cases} x^{\log_3 y}+2y^{\log_3 x}=27 \\ \log_3 y-\log_3 x=1 \end{cases}$

19/ $\begin{cases} \log_2 x+\log_2(x+y)=2+\log_2 3y \\ \sqrt[7]{3^{y(x+y)+x}}=3^y \end{cases}$

20/ $\begin{cases} 9x^2-4y^2=5 \\ \log_5(3x+2y)-\log_3(3x-2y)=1 \end{cases}$

21/ $\begin{cases} x+\log_3 y=3 \\ (2y^2-y+12)3^x=81y \end{cases}$

Bài 13. Phương pháp đặt ẩn phụ

1/ $\begin{cases} 3^{2x+2}+2^{2y+2}=17 \\ 2.3^{x+1}+3.2^y=8 \end{cases}$

2/ $\begin{cases} 4^{2x^2-2}-2^{2x^2+y}+4^y=1 \\ 2^{2y+2}-3.2^{2x^2+y}=16 \end{cases}$

3/ $\begin{cases} 2^{2|x|+1}-3.2^{|x|}=y^2-2 \\ 2y^2-3y=2^{2|x|}-2 \end{cases}$

4/ $\begin{cases} 9^{\log_2(xy)}-3=2.(xy)^{\log_2 3} \\ (x+1)^2+(y+1)^2=1 \end{cases}$

5/ $\begin{cases} 2^{3x+1}+2^{y-2}=3.2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2+1+xy}=\sqrt{x+1} \end{cases}$

6/ $\begin{cases} 2x^2+7xy+6y^2=0 \\ 3^{x+2y+1}-3^{4y+x+1}+3^{3y+x}=0 \end{cases}$

7/ $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=32 \\ \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y) \end{cases}$

8/ $\begin{cases} 2y^{\log_2 x}+\log_2^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=y^2 \\ \log_2(xy-x+y)=2\log_2 x \end{cases}$

9/ $\begin{cases} \log_{x+y}(3x+y)+\log_{3x+y}\left(x^2+2xy+y^2\right)=3 \\ 4^{x+y}+2.4^{\frac{x}{x+y}}=20 \end{cases}$

10/ $\begin{cases} 2\log_3 y=\log_{1/2}^2 x-1 \\ \log_2 y=(\log_2 x-1)\log_2 3 \end{cases}$

11/ $\begin{cases} 4^{-y}.\log_2 x=4 \\ \log_2 x+2^{-2y}=4 \end{cases}$

12/ $\begin{cases} \left(7+4\sqrt{3}\right)^x-2\left(2+\sqrt{3}\right)^y=8 \\ \left(7+4\sqrt{3}\right)^y-2\left(2+\sqrt{3}\right)^x=8 \end{cases}$

13/ $\begin{cases} \log_2 x + 3\sqrt{5-\log_3 y} = 5 \\ 3\sqrt{\log_2 x - 1} - \log_3 y = -1 \end{cases}$

14/ $\begin{cases} 4^{2x^2-2} - 2^{2x^2+y-1} + 4^y = 4 \\ 2^{2y+2} + 3.2^{2x^2+y} = 112 \end{cases}$

Bài 14. Phương pháp hàm số

1/ $\begin{cases} \left(1+4^{x-y}\right).5^{1-x+y} = 1+3^{x-y+2} \\ x^2 - 3y\sqrt{y-\dfrac{1}{x}} = 1-2y \end{cases}$

2/ $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+2} = 3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2} = 3^{x-1}+1 \end{cases}$

3/ $\begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + \left(\sqrt{2y}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2y}+\sqrt{x}\right)^2 \end{cases}$

4/ $\begin{cases} e^{x-y} + e^{x+y} = 2(x+1) \\ e^{x+y} = x-y+1 \end{cases}$

5/ $\begin{cases} x^2 + y = y^2 + x \\ 2^{x+y} - 2^{x-1} = x-y \end{cases}$

6/ $\begin{cases} 3^x - 3^y = y-x \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases}$

7/ $\begin{cases} 2^x + 2x = 3+y \\ 2^y + 2y = 3+x \end{cases}$

8/ $\begin{cases} 2^x - 2^y = (y-x)(xy+2) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

9/ $\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{8y^2+\frac{1}{2}} = 3\left(2\sqrt{y}-\sqrt{x}\right) \\ 2^{(x+y)^2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{x+y} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

10/ $\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+3} = 1+\log_3 y \\ \log_2 \sqrt{y+3} = 1+\log_3 x \end{cases}$

11/ $\begin{cases} x^2 + 3x + \ln(2x+1) = y \\ y^2 + 3y + \ln(2y+1) = x \end{cases}$

12/ $\begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x-y \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \end{cases}$

13/ $\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y-x = 1 \end{cases}$

14/ $\begin{cases} e^x = 2007 - \dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}} \\ e^y = 2007 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$

CHUYÊN ĐỀ 9: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

BÀI 1. TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Mặt phẳng Oxy là mp gồm 2 trục Ox,Oy vuông góc tại O, O là gốc tọa độ, Ox là trục hoành, Oy là trục tung. Hai véc tơ đơn vị $\vec{i},\vec{j}$ của Ox,Oy.

2/ Nếu $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ thì tọa độ của véc tơ $\vec{a}$ là $\vec{a}=(a_1,a_2)$.

3/ Cho $\vec{a}=(a_1,a_2)$ và $\vec{b}=(b_1,b_2)$ thì:

a/ *Hai véc tơ bằng nhau:* $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\end{cases}$

b/ *Cộng trừ 2 véc tơ:* $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1,a_2)\pm(b_1,b_2)=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2)$

c/ *Nhân 1 số với 1 véc tơ:* $k\vec{a}=k(a_1,a_2)=(ka_1,ka_2)$

d/ *Tích vô hướng:* $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

e/ *Mô đun của véc tơ:* $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

f/ *Góc giữa 2 véc tơ:* $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$. Đặc biệt: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.

g/ *Hai véc tơ cùng phương:* $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$

4/ Nếu $\overrightarrow{OM}=x_M\vec{i}+y_M\vec{j}$ thì tọa độ của điểm M là $M(x_M,y_M)$.

5/ Cho $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ và $C(x_C,y_C)$ thì:

a/ *Tọa độ véc tơ:* $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)$

b/ *Khoảng cách giữa 2 điểm A,B:* $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

c/ *Tọa độ trung điểm:* M là trung điểm của $AB\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases}$

d/ *Tọa độ trọng tâm :* G là trọng tâm của tam giác $ABC\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}$

e/ *3 điểm thẳng hàng:* A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$

f/ *Diện tích tam giác:* $dt(ABC)=\dfrac{1}{2}|D|$ với $D=\begin{vmatrix}x_B-x_A & y_B-y_A\\x_C-x_A & y_C-y_A\end{vmatrix}$.

II. BÀI TẬP

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $A(1,2), B(-2,6), C(4,4)$. Tìm D sao cho ABCD là hình bình hành. Tìm giao điểm của 2 đường chéo.

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 điểm $A(-2,-2), B(5,-4)$.

1/ Tìm trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB. CMR 3 điểm này thẳng hàng.

2/ Tìm C sao cho tam giác ABC có trọng tâm là $G(2,0)$.

Bài 3. Chứng minh rằng $A(-1,1), B(1,3)$ và điểm $C(-2,0)$ thẳng hàng.

Bài 4. Cho các điểm $A(-1,2), B(3,4)$ và $C(0,2)$. Tìm các điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Bài 5. Cho các điểm $A(-1,-1), B(3,5)$ và $C(-4,1)$. Gọi D,E lần lượt là chân đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của góc A. Tính AE, AF.

Bài 6. Tính góc giữa các véc tơ sau:

1/ $\vec{a}=(3,2), \vec{b}=(5,-2)$

2/ $\vec{c}=(1,-2), \vec{d}=(2,-4)$.

BÀI 2. ĐƯỜNG THẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Véc tơ đặc trưng của đường thẳng:

- Véc tơ $\vec{n}=(a,b)$ được gọi là vtpt của đt d $\Leftrightarrow \vec{n}\perp d$.
- Véc tơ $\vec{a}=(a_1,a_2)$ được gọi là vtpt của đt d $\Leftrightarrow \vec{a}//d$ hoặc $\vec{a}$ nằm trên d.

Nhận xét: $\vec{a}\perp\vec{n}$.

2/ Phương trình đường thẳng:

- Phương trình tổng quát: $ax+by+c=0$. Khi đó: $\vec{n}=(a,b)$ và $\vec{a}=(-b,a)$ hoặc $\vec{a}=(b,-a)$.
- Đt d qua $M(x_0,y_0)$ và có vtpt $\vec{n}=(a,b)$ thì có pttq: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.
- Đt d qua $M(x_0,y_0)$ và có vtcp $\vec{a}=(a_1,a_2)$ thì có ptts: $\begin{cases}x=x_0+ta_1\\ y=y_0+ta_2\end{cases}$.
- Đt d qua $M(x_0,y_0)$ và có vtcp $\vec{a}=(a_1,a_2)$ thì có ptct: $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}$.
- Đt d qua $M(x_0,y_0)$ và có hệ số góc k có pt: $y=k(x-x_0)+y_0$.
- Đt d qua 2 điểm A,B có pt: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$.
- Đt d qua 2 điểm $A(a,0), B(0,b)$ có pt đoạn chắn: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

3/ Vị trí của hai đường thẳng:

Cho hai đt: $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ và $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$. Khi đó:

- d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$. Tìm giao điểm bằng cách bấm máy giải hệ $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$.
- $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.
- $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

4/ Góc giữa hai đt:

- Góc giữa 2 đt: $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ và $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ được tính bằng:

$$\cos(d_1,d_2)=\frac{|\overrightarrow{n_{d_1}}.\overrightarrow{n_{d_2}}|}{|\overrightarrow{n_{d_1}}||\overrightarrow{n_{d_2}}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

- Nếu $d_1: y=k_1x+b_1$ và $d_2: y=k_2x+b_2$ thì góc tính bởi công thức:

$$\tan(d_1,d_2)=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|.$$

5/ Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng:

Cho $M(x_0,y_0)$ và $d: ax+by+c=0$ thì $d(M,d)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

6/ Vị trí của 2 điểm đối với 1 đường:

Cho 2 điểm M,N và $d: ax+by+c=0$ thì

- M,N cùng phía với $d \Leftrightarrow (ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)>0$.
- M,N khác phía với $d \Leftrightarrow (ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)<0$.

7/ Phương trình đường phân giác tạo bởi hai đường thẳng:

Cho 2 đt: $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ và $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$. Khi đó phương trình đường phân giác tạo bởi d_1 và d_2 là:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

II. BÀI TẬP

Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $A(2,1)$ và $d: 2x+3y+4=0$. Lập phương trình đường thẳng qua A hợp với d một góc $\dfrac{\pi}{4}$.

Bài 8. Trong mặt phẳng Oxy cho $M(-1,0)$ và hai đường thẳng $d_1: x+2y+5=0, d_2: x-2y+3=0$. Viết phương trình đường thẳng d_3 qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho $MA=MB$. Tính diện tích tam giác tạo bởi 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3.

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(3;1)$ và cắt tia Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A với $A(2;-2)$.

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, lập phương trình đường thẳng (d) qua $M(2;1)$ và tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích $S=4$.

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;1)$ và đường thẳng (d): $2x+3y+4=0$. Lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A và tạo với (d) một góc 45^0.

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng (d): $2x-y-2=0$. Lập phương trình đường thẳng (Δ) cách điểm I một khoảng bằng $\sqrt{10}$ và tạo với đường thẳng (d) một góc 45^0.

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường thẳng $d_1: 3x+y+5=0$, $d_2: 3x+y+1=0$ và điểm $I(1;-2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua I cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho $AB=2\sqrt{2}$.

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường thẳng $d_1: x+y+1=0$, $d_2: 2x-y-1=0$. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(1;-1)$ cắt d_1 và d_2 tương ứng tại A và B sao cho $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Bài 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(1;0)$. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M và cắt hai đường thẳng $d_1: x+y+1=0$, $d_2: x-2y+2=0$ lần lượt tại A, B sao cho $MB=3MA$.

Bài 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường thẳng $d_1: x-7y+17=0$, $d_2: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(0,1)$ tạo với d_1, d_2 một tam giác cân tại giao điểm của d_1, d_2.

Bài 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường thẳng $d_1: 2x-y+5=0$, $d_2: 3x+6y-7=0$. Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm $P(2;-1)$ sao cho đường thẳng đó cắt đường thẳng d_1 và d_2 tạo ra một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2.

Bài 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(1;1)$. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M và cắt hai đường thẳng $d_1: 3x-y-5=0$, $d_2: x+y-4=0$ lần lượt tại A, B sao cho $2MA-3MB=0$.

Bài 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(3;1)$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M và cắt tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $(OA+3OB)$ nhỏ nhất.

Bài 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(4;1)$ và cắt tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tổng $OA+OB$ nhỏ nhất.

Bài 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1;2)$ và cắt tia Ox, Oy lần lượt tại A, B khác O sao cho $\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Bài 22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): 3x+y+2=0$ và $(d_2): x-3y+4=0$. Gọi A là giao điểm của d_1, d_2. Viết phương trình đường thẳng đi qua M, cắt hai đường thẳng d_1, d_2 tại hai điểm lần lượt là B, C (B và C khác A) sao cho $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC biết $A(2;-3), B(3;-2)$ có diện tích bằng $\frac{3}{2}$ và trọng tâm G thuộc đường thẳng $\Delta: 3x-y-8=0$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Bài 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-3=0$, và điểm $A(-1;2), B(2;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc d sao cho diện tích tam giác ABC bằng 2.

Bài 25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC biết $A(1;0), B(0;2)$, diện tích tam giác bằng 2 và trung điểm I của AC nằm trên đường thẳng $d: y=x$. Tìm tọa độ điểm C.

Bài 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có trung điểm cạnh AB là $M(-1;2)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là $I(2;-1)$. Đường cao của tam giác kẻ từ A có phương trình $2x+y+1=0$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Bài 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC với $AB=\sqrt{5}$, đỉnh $C(-1;-1)$ đường thẳng AB có phương trình $x+2y-3=0$, trọng tâm của ΔABC thuộc đường thẳng $d: x+y-2=0$. Xác định tọa độ A, B của tam giác ΔABC.

Bài 28. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $G(2;1)$ và hai đường thẳng $d_1: x+2y-7=0$, $d_2: 5x+y-8=0$. Tìm tọa độ điểm $B \in d_1, C \in d_2$ sao cho tam giác ABC nhận G là trọng tâm, biết A là giao điểm của d_1 và d_2.

Bài 29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(2;1)$. Đường cao BH có phương trình là $x-3y-7=0$. Đường trung tuyến CM có phương trình $x+y+1=0$. Xác định tọa độ các đỉnh B, C. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(4;-2)$, phương trình đường cao kẻ từ C và đường trung trực của BC lần lượt là: $x-y+2=0, 3x+4y-2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C.

Bài 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC cân tại $A(-1;4)$ và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta: x-y-4=0$. Xác định tọa độ các điểm B, C, biết diện tích ΔABC bằng 18.

Bài 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(-3;6)$, trực tâm $H(2;1)$, trọng tâm $G\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$. Xác định tọa độ các đỉnh B và C.

Bài 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(3;-4)$, phương trình đường trung trực cạnh BC, đường trung tuyến xuất phát từ C lần lượt là $d_1: x+y-1=0$ và $d_2: 3x-y-9=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của ΔABC.

Bài 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC cân tại $A(6;6)$, đường thẳng d đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình là $x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, biết $E(1;-3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

Bài 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(2;4)$, đường thẳng Δ đi qua trung điểm của cạnh AB và AC có phương trình là $4x-6y+9=0$, trung điểm của cạnh BC nằm trên đường thẳng d có phương trình là $2x-2y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C biết rằng tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{7}{2}$ và đỉnh C có hoành độ lớn hơn 1.

Bài 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $B(3;5)$, phương trình đường cao hạ từ đỉnh A và đường trung tuyến hạ từ đỉnh C lần lượt là $d_1: 2x-5y+3=0$, $d_2: x+y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và C của ΔABC.

Bài 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tìm tọa độ các đỉnh của một tam giác vuông cân, biết một đỉnh là $C(3;-1)$ và phương trình cạnh huyền là $d: 3x-y+2=0$.

Bài 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $B(1;-2)$, đường cao $AH: x-y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, C của ΔABC biết C thuộc đường thẳng $d: 2x+y-1=0$ và diện tích ΔABC bằng 1.

Bài 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC vuông tại $B(2;1)$, điểm B nằm trên trục hoành, điểm C nằm trên trục tung sao cho B, C có tọa độ không âm. Tìm tọa độ B, C sao cho diện tích ΔABC lớn nhất.

Bài 40. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có trọng tâm $G(-2;0)$ và phương trình các cạnh AB, AC theo thứ tự là $4x+y+14=0$, $2x+5y-2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Bài 41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có trực tâm $H(-1;6)$, các điểm $M(2;2)$, $N(1;1)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Bài 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có phân giác trong AD và đường cao CH lần lượt có phương trình $x+y-2=0$ và $x-2y+5=0$. Điểm $M(3;0)$ thuộc đoạn AC thỏa mãn $AB=2AM$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Bài 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC cân tại A, đường thẳng BC có phương trình $x+2y-2=0$. Đường cao kẻ từ B có phương trình $x-y+4=0$, điểm $M(-1;0)$ thuộc đường cao kẻ từ C. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài 44. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x-4y-2=0$, cạnh BC song song với d, phương trình đường cao $BH: x+y+3=0$ và trung điểm cạnh AC là $M(1;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Bài 45. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đường cao $BH: 3x+4y+10=0$, đường phân giác trong góc A là $AD: x-y+1=0$, điểm $M(0;2)$ thuộc AB đồng thời cách C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài 46. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có điểm $M(-1;1)$ là trung điểm của cạnh BC, hai cạnh AB, AC lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: x+y-2=0$ và $d_2: 2x+6y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Bài 47. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC cân có đáy BC, đỉnh A có tọa độ là các số dương, hai điểm B và C nằm trên trục Ox, phương trình cạnh $AB: y=3\sqrt{7}(x-1)$. Biết chu vi ΔABC bằng 18, tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Bài 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(5;2)$. Phương trình đường trung trực cạnh BC, đường trung tuyến CC' lần lượt là $x+y-6=0$ và $2x-y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của ΔABC.

Bài 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, biết tọa độ trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần lượt là $H(2;2)$, $I(1;2)$ và trung điểm $M\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$ của cạnh BC. Hãy tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết $x_B > x_C$.

Bài 50. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC cân tại C, có diện tích bằng 10. Phương trình cạnh $AB: x-2y=0$, điểm $I(4;2)$ là trung điểm của AB, điểm $M\left(4;\frac{9}{2}\right)$ thuộc cạnh BC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết tung độ đỉnh B lớn hơn hoặc bằng 3.

Bài 51. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC vuông tại A, các đỉnh A, B thuộc đường thẳng $d: y=2$, phương trình cạnh $BC: \sqrt{3}x-y+2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng $\sqrt{3}$.

Bài 52. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tìm tọa độ các đỉnh cuartam giác vuông cân ABC, có phương trình hai cạnh $AB: x-2y+1=0$, $AC: 2x+y-3=0$ và cạnh BC chứa đỉnh $I\left(\frac{8}{3};1\right)$.

Bài 53. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC vuông tại A, biết các đỉnh A, B, C lần lượt nằm trên các đường thẳng $d: x+y-5=0, d_1: x+1=0, d_2: y+2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết $BC=5\sqrt{2}$.

Bài 54. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC vuông tại C, biết phương trình đường thẳng $AB: x+y-2=0$, trọng tâm của ΔABC là $G\left(\frac{14}{3};\frac{5}{3}\right)$ và diện tích ΔABC bằng $\frac{65}{2}$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 55. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có phương trình cạnh $AB: x+y-3=0$, phương trình cạnh $AC: 3x+y-7=0$ và trọng tâm $G\left(2;\frac{1}{3}\right)$. Viết phương trình đường tròn đi qua trực tâm H và 2 đỉnh B, C của ΔABC.

Bài 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $d: x-2y+2=0$. Tìm trên d hai điểm B, C sao cho ΔABC vuông tại B và $AB=2BC$.

Bài 57. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC vuông cân, ngoại tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2=2$. Tìm tọa độ 3 đỉnh của ΔABC, biết $A\in Ox$.

Bài 58. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có trung điểm của cạnh BC là điểm $M(3;-1)$, đường thẳng chứa đường cao kẻ từ đỉnh B đi qua $E(-1;-3)$ và đường thẳng chứa cạnh AC đi qua điểm $F(1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC, biết rằng điểm đối xứng của đỉnh A qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là điểm $D(4;-2)$.

Bài 59. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC vuông tại A, biết B và C đối xứng nhau qua gốc tọa độ. Đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$ là $d: x+2y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC biết đường thẳng AC đi qua điểm $K(6;2)$.

Bài 60. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A\left(\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$ và phương trình hai đường phân giác trong $BB': x-2y-1=0$ và $CC': x+3y-1=0$. Chứng minh rằng ΔABC vuông.

Bài 61. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(1;3)$ và hai đường trung tuyến của nó có phương trình là $x-2y+1=0$ và $y-1=0$. Hãy viết phương trình các cạnh của ΔABC.

Bài 62. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $B(-12;1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $d: x+2y-5=0$. $G\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ là trọng tâm của ΔABC. Viết phương trình đường thẳng BC.

Bài 63. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC cân, cạnh đáy BC có phương trình $d_1: x+y+1=0$. Phương trình đường cao kẻ từ B là $d_2: x-2y-2=0$. Điểm $M(2;1)$ thuộc đường cao vẽ từ C. Viết phương trình các cạnh bên của ΔABC. ĐS: $AB: x+2y+2=0,\ AC: 6x+3y+1=0$.

Bài 64. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác có phương trình hai cạnh là $AB: 5x-2y+6=0$ và $AC: 4x+7y-21=0$. Viết phương trình cạnh BC, biết rằng trực tâm của nó trùng với gốc tọa độ.

Bài 65. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình hai cạnh là $AB: x-y-2=0$ và $AC: x+2y-5=0$. Viết phương trình cạnh BC, biết rằng trực tâm của nó trùng với gốc tọa độ. Viết phương trình cạnh BC, biết trọng tâm của tam giác là $G(3;2)$. ĐS: $x-4y+7=0$.

Bài 66. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;7)$ và đường thẳng AB cắt Oy tại E sao cho $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$. Biết rằng tam giác EAC cân tại E và có trọng tâm $G\left(2;\dfrac{13}{3}\right)$. Viết phương trình cạnh BC.

Bài 67. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;2)$, phương trình đường trung tuyến $BM: 2x+y+1=0$ và phân giác trong $CD: x+y-1=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

Bài 68. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là $d_1: x+y+2=0$, phương trình đường cao vẽ từ B là $d_2: 2x-y+1=0$, cạnh AB đi qua $M(1;-1)$. Tìm phương trình cạnh AC. ĐS: $x+2y+7=0$.

Bài 69. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình cạnh AB, BC lần lượt là $x+2y-1$ và $3x-y+5=0$. Viết phương trình cạnh AC biết AC đi qua điểm $M(1;-3)$.

Bài 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(-1;4)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-3;0)$ và trung điểm của cạnh BC là $M(0;-3)$. Viết phương trình đường thẳng AB biết điểm B có hoành độ dương.

Bài 71. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(3;3)$, $B(2;-1)$, $C(11;2)$. Viết phương trình đường thẳng điqua A và chia tam giác ABC thành hai phần có tỉ số diện tích bằng 2.

Bài 72. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 2x+5y+3=0$ và $d_2: 5x-2y-7=0$ cắt nhau tại A và điểm $P(-7;8)$. Viết phương trình đường thẳng d_3 đi qua P tạo với d_1, d_2 thành tam giác cân tại A có diện tích bằng $\frac{29}{2}$.

Bài 73. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Đỉnh $B(1;1)$, đường thẳng $AC: 4x+3y-32=0$. Trên BC lấy điểm M sao cho $BC.BM=75$. Tìm đỉnh C biết bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC bằng $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Bài 74. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng $BC: \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$, các đỉnh A, B nằm trên trục hoành và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 75. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC biết: $B(2;-1)$, đường cao qua A có phương trình $d_1: 3x-4y+27=0$, đường phân giác trong góc C có phương trình $d_2: x+2y-5=0$. Tìm tọa độ điểm A.

Bài 76. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đường cao AH, trung tuyến CM và phân giác trong BD. Biết $H(-4;1)$, $M\left(\frac{17}{5};12\right)$ và BD có phương trình $x+y-5=0$. Tìm tọa độ đỉnh A của tam giác ABC.

Bài 77. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $C(4;3)$, biết phương trình đường phân giác trong AD là $x+2y-5=0$, đường trung tuyến $AM: 4x+13y-10=0$. Tìm tọa độ đỉnh B.

Bài 78. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(1;-2)$, phương trình đường cao $CH: x-y+1=0$, phân giác trong $BN: 2x+y+5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C và tính diện tích ΔABC.

Bài 79. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(1;-3)$, phương trình đường phân giác trong $BD: x+y-2=0$ và phương trình đường trung tuyến $CE: x+8y-7=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

Bài 80. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $B(-1;-3)$, trong tâm $G(4;-2)$, trung trực của AB là $d: 3x+2y-4=0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 81. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC biết phương trình các đường thẳng chứa cạnh AB, BC lần lượt là $4x+3y=4=0$ và $x-y-1=0$. Phân giác trong của A nằm trên đường thẳng $x+2y-6=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài 82. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $B(2;-1)$, đường cao xuất phát từ A và đường phân giác trong góc C lần lượt là $d_1: 3x-4y+27=0,\ d_2: x+2y-5=0$. Viết phương trình các cạnh của ΔABC.

Bài 83. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang vuông $ABCD$ tại A và D, có đáy lớn là CD đường thẳng AD có phương trình là $d_1: 3x-y=0$, đường thẳng BD có phương trình $d_2: x-2y=0$, góc tạo bởi 2 đường thẳng BC và AB bằng 45^0. Viết phương trình đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 24, và điểm B có hoành độ dương.

Bài 84. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ ($AB//CD,\ AB<CD$). Biết $A(0;2), D(-2;-2)$ và giao điểm I của AC và BD nằm trên đường thẳng có phương trình $d: x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang khi $\widehat{AOD}=45^0$.

Bài 85. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=2$ và 2 điểm $A(0;-4),\ B(4;0)$, Tìm tọa độ 2 điểm $C,\ D$ sao cho đường tròn (C) nội tiếp trong hình thang $ABCD$ có đáy là AB và CD.

Bài 86. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ có diện tích bằng 4. Biết $A(1;0),\ B(0;2)$ và giao điểm I của 2 đường chéo nằm trên đường thẳng $y=x$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

Bài 87. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$. Đường thẳng chứa cạnh $AB: x-2y+2=0,\ AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết A có hành độ âm.

Bài 88. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$. Biết $AB=2BC$, dường thẳng AB đi qua điểm $M\left(-\frac{4}{3};1\right)$, đường thẳng BC đi qua điểm $N(0;3)$, đường thẳng AD đi qua điểm $P\left(4;-\frac{1}{3}\right)$, đường thẳng CD đi qua điểm $Q(6;2)$. Viết phương trình các cạnh của hình vuông $ABCD$.

Bài 89. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt đi qua các điểm $M(4;5),\ N(6;5),\ P(5;2),\ Q(2;1)$ và diện tích bằng 16. Viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Bài 90. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình các cạnh là $AB: x-2y-1=0$, đường chéo $BD: x-7y+14=0$ và đường chéo AC đi qua $M(2;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Bài 91. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, tâm I thuộc đường thẳng $d: x-y-3=0$ có hoành độ $x_1=\frac{9}{2}$, trung điểm của một cạnh là giao điểm của d và Ox. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật, biết $y_A>0$.

Bài 92. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Bài 93. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có các đường thẳng AB, AD lần lượt đi qua các điểm $M(2;3)$, $N(-1;2)$. Hãy lập phương trình đường thẳng BC và CD, biết rằng hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ và đường chéo AC bằng $\sqrt{26}$.

Bài 94. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 5 đơn vị, biết tọa độ đỉnh $A(1;5)$, 2 đỉnh B, D nằm trên đường thẳng $d: x-2y+4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

Bài 95. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$, các điểm $A(0;-1)$, $B(2;1)$. Tứ giác $ABCD$ là hình thoi có tâm nằm trên đường thẳng Δ. Tìm tọa độ C, D.

Bài 96. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có $A(1;0)$, đường chéo BD có phương trình $d: x-y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D biết $BD=4\sqrt{2}$.

Bài 97. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ biết phương trình của một đường chéo là $d: 3x-y+7=0$, điểm $B(0;-3)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thoi biết diện tích hình thoi bằng 20.

Bài 98. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(3;3)$ và $AC=2BD$. Điểm $M\left(2;\frac{4}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N\left(3;\frac{13}{3}\right)$ thuộc đường thẳng CD. Viết phương trình đường chéo BD biết đỉnh B có hoành độ nhỏ hơn 3.

Bài 99. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có đường chéo BD nằm trên đường thẳng $\Delta: x-y-2=0$. Điểm $M(4;-4)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh BC, điểm $N(-5;1)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB. Biết $BD=8\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$, biết điểm D có hoành độ âm.

Bài 100. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có phương trình 2 cạnh AB, AD lần lượt là $x+2y-2=0$, $2x+y+1=0$. Điểm $M(1;2)$ thuộc đường thẳng BD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi.

Bài 101. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+1)^2=8$ và điểm A thuộc đường thẳng $d:x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$ biết rằng $BD=2AC$ và hoành độ của điểm A không nhỏ hơn 2.

Bài 102. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$, hai điểm A, B lần lượt nằm trên đường thẳng $d_1:x+y-3=0, d_2:x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

Bài 103. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-3)^2=10$. Xác định tọa độ các đỉnh A, C của hình vuông, biết cạnh AB đi qua điểm $M(-3;-2)$ và A có hoành độ $x_A>0$.

Bài 104. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$. Các đường AB, CD lần lượt đi qua các điểm $M(-4;-1), N(-2;-4)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông đó biết B có hoành độ âm.

Bài 105. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ trong đó A thuộc đường thẳng $d_1:x+y-1=0$ và C, D nằm trên đường thẳng $d_2:2x-y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết hình vuông có diện tích bằng 5.

Bài 106. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $E(1;-1)$ là tâm của một hình vuông, một trong các cạnh của nó có phương trình $d:x-2y+12=0$. Viết phương trình các cạnh cọn lại của hình vuông.

Bài 107. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ biết các điểm $M(2;1); N(4;-2); P(2;0); Q(1;2)$ lần lượt thuộc cạnh AB, BC, CD, AD. Hãy lập các phương trình các cạnh của hình vuông.

Bài 108. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-8x+6y+21=0$ và đường thẳng $d:x+y-1=0$. Xác định tọa độ các đỉnh hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp (C) biết $A\in d$.

Bài 109. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ biết điểm $A(-2;6)$, đỉnh B thuộc đường thẳng $d:x-2y+6=0$. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm trên 2 cạnh BC, CD sao cho $BM=CN$. Xác định tọa độ đỉnh C, biết rằng AM cắt BN tại điểm $I\left(\frac{2}{5};\frac{14}{5}\right)$.

Bài 110. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ trên đoạn AC lấy điểm M sao cho $AC=4AM$ và N là trung điểm cạnh CD. Chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân.

Bài 111. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông có đỉnh $A(-4;5)$ và một đường chéo có phương trình $\Delta: 7x-y+8=0$. Viết phương trình các cạnh của hình vuông.

Bài 112. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $A(4;5)$, đường chéo BD có phương trình $y-3=0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông.

Bài 113. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của BC, phương trình đường thẳng $DM: x-y-2=0$, đỉnh $C(3;-3)$, đỉnh A nằm trên đường thẳng $d: 3x+y-2=0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông.

Bài 114. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;1)$ và đường thẳng $\Delta: 2x+3y+4=0$. Tìm điểm $B \in \Delta$ sao cho đường thẳng AB và Δ hợp với nhau một góc 45^0.

Bài 115. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): x-3y-6=0$ và điểm $N(3;4)$. Tìm tọa độ điểm $M \in (d)$ sao cho tam giác OMN (O là gốc tọa độ) có diện tích bằng $\frac{15}{2}$.

Bài 116. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $(d): x-2y+2=0$. Tìm trên (d) hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và $AB = 2B$.

Bài 117. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): x+y-3=0$, $(d_2): x+y-9=0$ và $A(1;4)$. Tìm điểm $B \in d_1$, $C \in d_2$ sao cho tam giác ABC vuông vân tại A.

Bài 118. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(\Delta): x-2y-2=0$ và hai điểm $A(1;0)$, $B(2;1)$.Tìm điểm $M \in (\Delta)$sao cho $2MA^2 + MB^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 119. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): 2x-y+3=0$ và 2 điểm $A(1;0)$, $B(2;1)$. Tìm M trên (d) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

Bài 120. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đỉnh $C(2;-5)$, và đường thẳng $\Delta: 3x-4y+4=0$. Tìm trên Δ hai điểm A và B đối xứng nhau qua $I\left(2;\frac{5}{2}\right)$ sao cho diện tích ΔABC bằng 15.

Bài 121. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 4 điểm $A(1;0)$, $B(-2;4)$, $C(-1;4)$, $D(3;5)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $\Delta: 3x-y-5=0$ sao cho 2 tam giác MAB, MCD có diện tích bằng nhau.

Bài 122. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình 2 cạnh AB, AC lần lượt là $x+2y-2=0$, $2x+y+1=0$, điểm $M(1;2)$ thuộc BC. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 123. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với A(-1; 2), B(2;0), C(-3;1) Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho diện tích tam giác ABM bằng 1/3 diện tích tam giác ABC.

BÀI 3. ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Phương trình đường tròn

a/ Dạng thu gọn: $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \to$ Tâm $I(a,b)$ và bán kính R.

b/ Dạng khai triển: $(C):x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \to$ Tâm $I(a,b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

2/ Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

Cho $(C):x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ và điểm $M(x_M,y_M)$. Khi đó:

+ *Định nghĩa phương tích*: $P_{M/(C)}=IM^2-R^2$.

+ *Cách tính phương tích:* $P_{M/(C)}=x_M^2+y_M^2-2ax_M-2by_M+c$.

+ *Ý nghĩa phương tích*: $P_{M/(C)}>0$ thì M nằm ngoài (C), $P_{M/(C)}=0$ thì M nằm trên (C), còn $P_{M/(C)}<0$ thì M nằm trong (C).

3/ Trục đẳng phương của 2 đường tròn khác tâm

+ *Định nghĩa*: là đường thẳng chứa tất cả các điểm có cùng phương tích với 2 đường tròn đó.

+ *Cách tìm*: Cho 2 phương trình của 2 đường tròn đó bằng nhau. Tức là:

$(C_1):x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0$ và $(C_2):x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0$ thì trục đẳng phương là:

$$x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2.$$

+ *Hay gặp*: 2 đường tròn cắt nhau tại A,B thì trục đẳng phương là đường thẳng AB.

4/ Vị trí của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường thẳng d.

a/ $d(I,d)>R \Leftrightarrow$ d và (C) không có điểm chung.

b/ $d(I,d)=R \Leftrightarrow$ d và (C) có 1 điểm chung M. Lúc này d gọi là tiếp tuyến với (C) và M gọi là tiếp điểm.

+ *Cách tìm tiếp điểm:* Viết phương trình đường thẳng Δ qua tâm I và vuông góc với d, suy ra tiếp điểm $M=d\cap\Delta$.

c/ $d(I,d)<R \Leftrightarrow$ d và (C) có 2 điểm chung A,B. Lúc này gọi H là trung điểm của AB thì

$IH \perp AB$ và $R^2=\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2+d^2(I,\Delta)$.

5/ Vị trí của hai đường tròn

Cho 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0$ và $(C_2): x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0$ lần lượt có tâm I_1, I_2 và bán kính R_1, R_2. Khi đó:

+ $I_1I_2 > R_1+R_2$: (C_1) và (C_2) không có điểm chung.

+ $I_1I_2 = R_1+R_2$: (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài.

+ $|R_1-R_2| < I_1I_2 < R_1+R_2$: (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.

+ $|R_1-R_2| = I_1I_2$: (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong.

+ $|R_1-R_2| < I_1I_2$: (C_1) và (C_2) đựng nhau.

6/ Tiếp tuyến của đường tròn

a/ *Điều kiện tiếp xúc*: d tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I,d)=R$.

b/ *Tiếp tuyến chung với 2 đường tròn*: d là tiếp tuyến chung với (C_1) và $(C_2) \Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1,d)=R_1 \\ d(I_2,d)=R_2 \end{cases}$.

II. BÀI TẬP

Bài 124. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, lập phương trình đường tròn tiếp xúc với đường thẳng $3x-4y-31=0$ tại A(1,-7) và có bán kính bằng 5.

Bài 125. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(2;3)$, trọng tâm $G(2;0)$. Hai đỉnh B và C lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: x+y+5=0$, $d_2: x+2y-7=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm C và tiếp xúc với đường thẳng BG.

Bài 126. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng $(d): 2x-y-5=0$ và đường tròn $(C'): x^2+y^2-20x+50=0$. Hãy viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm $A, B, C(1;1)$.

Bài 127. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$, $A(2;-3)$, $B(3;-2)$, trọng tâm của ΔABC nằm trên đường thẳng $(d): 3x-y-8=0$. Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C.

Bài 128. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 3 đường thẳng $d_1: 2x+y-3=0$, $d_2: 3x+4y+5=0$, $d_3: 4x+3y+2=0$. Viết phương trình đường tròn đi qua d_1 và tiếp xúc với d_2 và d_3.

Bài 129. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường thẳng $\Delta: x+3y+8=0$, $\Delta': 3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng Δ, đi qua A và tiếp xúc với Δ'.

Bài 130. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường thẳng $\Delta: 4x-3y+3=0$, $\Delta': 3x-4y-31=0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm có tung độ bằng 9 và tiếp xúc với Δ'. Tìm tọa độ tiếp điểm của (C) và Δ'.

Bài 131. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn đi qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với các trục tọa độ.

Bài 132. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): 2x-y-4=0$. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm nằm ở trên đường thẳng (d).

Bài 133. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(\Delta): 3x-4y+8=0$ và hai điểm $A(-1;1)$, $B(3;3)$. Lập phương trình đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với (Δ).

Bài 134. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường thẳng $d: x+2y-3=0$, $\Delta: x+3y-5=0$. Lập phương trình đường tròn có bán kính bằng $\frac{2\sqrt{10}}{5}$, có tâm thuộc d và tiếp xúc với Δ.

Bài 135. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$. Tia Oy cắt (C) tại A. Lập phương trình đường tròn (C') bán kính $R'=2$ và tiếp xúc ngoài với (C) tại A.

Bài 136. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4y-5=0$. Hãy viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua điểm $M\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Bài 137. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Hãy viết phương trình đường tròn (C') tâm $M(5;1)$ biết (C') cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$.

Bài 138. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-2)^2=4$ và điểm $K(3;4)$. Lập phương trình đường tròn (T) tâm K, cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất, với I là tâm của đường tròn (C).

Bài 139. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các đỉnh $A(-2;3)$, $B\left(\frac{1}{4};0\right)$, $C(2;0)$.

Bài 140. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 4x-3y-12=0$ và $d_2: 4x+3y-12=0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn nội tiếp tam giác có 3 cạnh nằm trên d_1, d_2 và trục Oy.

Bài 141. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-3-1=0$ và 2 đường tròn có phương trình $(C_1):(x-3)^2+(y+4)^2=0$, $(C_2):(x+5)^2+(y-4)^2=32$. Viết phương trình đường tròn (C) tâm I thuộc d và tiếp xúc ngoài với $(C_1),(C_2)$.

Bài 142. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d: x+y+m=0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (C) (B,C là tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.

Bài 143. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d: 3x-4y+m=0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến PB, PC tới đường tròn (C) (B,C là tiếp điểm) sao cho tam giác PAB là tam giác đều.

Bài 144. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường tròn $(C): x^2+y^2-18x-6y+65=0$, $(C'): x^2+y^2=9$. Từ điểm M thuộc đường tròn (C) kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn (C'), gọi A,B là các tiếp điểm M, biết độ dài $AB=4,8$.

Bài 145. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=4$. M là điểm di động trên đường thẳng $d: y=x+1$. Chứng minh rằng từ M kẻ được hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới $(C)(T_1,T_2$ là các tiếp điểm) và tìm tọa độ điểm M, biết rằng đường thẳng T_1T_2 đi qua điểm $A(1;-1)$.

Bài 146. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-6x+5=0$. Tìm điểm M thuộc trục tung sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến của (C) mà góc giữa 2 tiếp tuyến đó bằng 60^0.

Bài 147. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4y-2y=0$ và đường thẳng $\Delta: x+2y-12=0$. Tìm điểm M trên Δ sao cho từ M vẽ được với (C) hai tiếp tuyến lập với nhau một góc 60^0.

Bài 148. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-8=0$ và đường thẳng $\Delta: 2x-3y-1=0$. Chứng minh rằng Δ luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B. Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho diện tích tam giác ABM lớn nhất.

Bài 149. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-5=0$ và $A(0;-1)\in(C)$. Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc (C) sao tam giác ABC đều.

Bài 150. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-4)^2=35$ và $A(5;5)$. Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc (C) sao tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 151. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2=4$ và các điểm $A\left(1;-\frac{8}{3}\right)$, $B(3;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao tam giác MAB có diện tích bằng $\frac{20}{3}$.

Bài 152. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2+2x-6y+9=0$ và đường thẳng $d:3x-4y+5=0$. Tìm các điểm $M\in(C)$, $N\in d$ sao cho độ dài MN nhỏ nhất.

Bài 153. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(3;-7)$, $B(9;-5)$, $C(-5;9)$ và $M(-2;-7)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 154. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2+2x=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết góc giữa tiếp tuyến này và trục tung bằng 30^0.

Bài 155. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-6x-2y+5=0$ và đường thẳng $d:3x+y-3=0$. Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C), biết tiếp tuyến đó không đi qua O và hợp với đường thẳng d một góc 45^0.

Bài 156. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=10$ và đường thẳng $d:2x-2y-2=0$. Lập phương trình các tiếp tuyến với đường tròn (C), biết tiếp tuyến đó hợp với đường thẳng d một góc 45^0.

Bài 157. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn $(C_1):x^2+y^2-2x-2y-2=0$, $(C_2):x^2+y^2-8x-2y+16=0$.

Bài 158. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn $(C_1):(x-2)^2+(y-3)^2=2$, $(C_2):(x-1)^2+(y-2)^2=8$. ĐS: $x+y-7=0$.

Bài 159. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường tròn $(C_1):x^2+y^2-2y-3=0$, $(C_2):x^2+y^2-8x-8y+28=0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Bài 160. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường tròn $(C_1):x^2+y^2-4y-5=0$, $(C_2):x^2+y^2-6x+8y+16=0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Bài 161. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$. Tia Oy cắt (C) tại A. Lập phương trình đường tròn (T) có bán kính $R'=2$ sao cho (T) tiếp xúc ngoài với (C) tại A.

Bài 162. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=1$ và phương trình: $x^2+y^2-2(m+1)x+4my-5=0 \quad (C_m)$. Chứng minh rằng phương trình (C_m) là phương trình của đường tròn với mọi m. Tìm m để (C_m) tiếp xúc với (C).

Bài 163. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C_1):(x-1)^2+y^2=\frac{1}{2}$ và $(C_2):(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với (C_1) và cắt (C_2) tại hai điểm M, N sao cho $MN=2\sqrt{2}$.

Bài 164. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+1)^2=25$ và điểm $M(7;3)$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua M cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho $MA=3MB$.

Bài 165. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2)$ và cắt đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=25$ theo một dây cung có độ dài 8.

Bài 166. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-8y-8=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: 3x+y-2=0$ và cắt đường tròn (C) theo một dây cung có độ dài bằng 6.

Bài 167. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x+4)^2+(y-3)^2=25$ và đường thẳng $\Delta: 3x-4y+10=0$. Lập phương trình đường thẳng d biết $d\perp\Delta$ và d cắt (C) tại A, B sao cho $AB=6$.

Bài 168. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y-3=0$ và điểm $M(0;2)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho AB có độ dài ngắn nhất.

Bài 169. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm O, bán kính $R=5$ và điểm $M(2;6)$. Viết phương trình đường thẳng d qua M, cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB có diện tích lớn nhất.

Bài 170. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-6x+2y-6=0$ và điểm $A(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d qua A, cắt (C) tại hai điểm sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó bằng độ dài cạnh hình vuông nội tiếp đường tròn (C).

Bài 171. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2=13$ và $(C_2): (x-6)^2+y^2=25$. Gọi A là giao điểm của (C_1) và (C_2) với $y_A>0$.Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và cắt (C_1), (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

Bài 172. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: mx+4y=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2my+m^2-24=0$ có tâm I. Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 12.

Bài 173. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường tròn $(C): x^2+y^2=1$ và đường thẳng $d: x+y+m=0$. Tìm m để (C) cắt d tại A, B sao cho diện tích tam giác ABO lớn nhất.

Bài 174. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: \sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ có tâm I. Tìm m để d cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Với giá trị nào của m thì cho diện tích tam giác IAB lớn nhất và tính giá trị đó.

Bài 175. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x-6y+9=0$ và điểm $M(1;-8)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác ABI lớn nhất, với I là tâm của đường tròn (C).

Bài 176. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng $\Delta: x+my-2m+3=0$ với m là số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

BÀI 4. ELIP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ *Phương trình chính tắc:* $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2/ *Phương trình tham số:* $(E): \begin{cases} x = a.\cos t \\ y = b.\sin t \end{cases}$.

3/ *Tiêu điểm, tâm sai và đường chuẩn:*

Tiêu điểm $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ với $b^2 = a^2 - c^2$, tâm sai $e = \frac{c}{a}$ và đường chuẩn $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$.

4/ *Bán kính qua tiêu:* $\begin{cases} r_1 = F_1M = a + e.x_M \\ r_2 = F_2M = a - e.x_M \end{cases}$.

5/ *Tiếp tuyến của Elip* $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tại $M(x_0, y_0) \in (E)$ có phương trình là

$$\frac{x_0.x}{a^2} + \frac{y_0.y}{b^2} = 1 \text{ (phân đôi tọa độ).}$$

6/ *Điều kiện tiếp xúc:* đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ khi và chỉ khi $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.

II. BÀI TẬP

Bài 177. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. A, B là các điểm trên (E) sao cho $AF_1 + BF_2 = 8$, với F_1, F_2 là các tiêu điểm. Tính $AF_2 + BF_1$.

Bài 178. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình elip với các tiêu điểm $F_1(-1;1)$, $F_2(5;1)$ và tâm sai $e = 0,6$.

Bài 179. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và $C(0;2)$. Tìm tọa độ các điểm A, B trên (E), biết 2 điểm A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 180. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$. Tìm các điểm $M \in (E)$ sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 120^0$, với F_1, F_2 là các tiêu điểm của (C).

Bài 181. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip có hai tiêu điểm $F_1(\sqrt{3};0)$, $F_2(-\sqrt{3};0)$ và đi qua điểm $A\left(\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)$. Lập phương trình chính tắc của (E) và với mọi điểm M trên (E), hãy tính biểu thức $P = F_1M^2 + F_2M^2 - 3OM^2 - F_1M.F_2M$.

Bài 182. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): 4x^2+16y^2=64$. Gọi F_2 là tiêu điểm bên phải của (E) và M là điểm bất kỳ trên (E). Chứng tỏ rằng tỉ số khoảng cách từ M tới tiêu điểm F_2 và tới đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ có giá trị không đổi.

Bài 183. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): 5x^2+16y^2=80$ và hai điểm $A(5;-1)$, $B(-1;1)$. Một điểm M di động trên (E). Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MAB.

Bài 184. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và hai điểm $A(3;-2)$, $B(-3;2)$. Tìm trên (E) điểm C có hoành độ và tung độ dương sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất.

Bài 185. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt elip tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm AB.

Bài 186. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho M có tọa độ nguyên.

Bài 187. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho tổng hai tọa độ của M có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Bài 188. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$ và $A(3;0)$. Tìm tọa độ các điểm B, C trên (E), biết 2 điểm B, C đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 189. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $d_1: mx-ny=0$, $d_2: nx+my=0$ với $m^2+n^2 \neq 0$. Gọi M, N là giao điểm của d_1 với (E); P, Q là giao điểm của d_2 với (E). Tìm điều kiện đối với m, n để cho diện tích tứ giác $MPNQ$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 190. Cho $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ và điểm M(-2,1). Viết phương trình đường thẳng d qua M và cắt (E) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm của AB.

Bài 191. Cho $(E_1): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và $(E_2): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của $(E_1), (E_2)$.

Bài 192. Cho $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4y+3=0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (E) và (C).

Bài 193. Trong mặt phẳng *Oxy* cho elip $(E):\frac{x^2}{4}+y^2=1$ và điểm *M(3; 2)*. Gọi *MA, MB* là hai tiếp tuyến với (E) kẻ từ *M*. Viết phương trình đường thẳng *AB*.

CHUYÊN ĐỀ 10. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Không gian $Oxyz$ gồm 3 trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc tại O, O là gốc tọa độ, Ox là trục hoành, Oy là trục tung và Oz là trục cao. Ba véc tơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ của Ox, Oy, Oz.

2/ Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì tọa độ của véc tơ $\vec{a}$ là $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

3/ Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ và $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ thì:

a/ *Hai véc tơ bằng nhau:* $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

b/ *Cộng trừ 2 véc tơ:* $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \pm (b_1, b_2, b_3) = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$

c/ *Nhân 1 số với 1 véc tơ:* $k\vec{a} = k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3)$

d/ *Tích vô hướng:* $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

e/ *Mô đun của véc tơ:* $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

f/ *Góc giữa 2 véc tơ:* $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

Đặc biệt: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

g/ *Hai véc tơ cùng phương:* $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

4/ Nếu $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$ thì tọa độ của điểm M là $M(x_M, y_M, z_M)$.

5/ Cho $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ và $C(x_C, y_C, z_C)$ thì:

a/ *Tọa độ véc tơ:* $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

b/ *Khoảng cách giữa 2 điểm A, B:* $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

c/ *Tọa độ trung điểm:* M là trung điểm của $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$

d/ *Tọa độ trọng tâm :* G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$

e/ *Tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$:* $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases}$

f/ *3 điểm thẳng hàng:* A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$

g/ *Tích có hướng:* $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$. Chú ý: $\vec{c} \perp \vec{a}$ và $\vec{c} \perp \vec{b}$

h/ *Diện tích tam giác:* $dt(ABC) = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$

i/ *Thể tích hình hộp tạo bởi 3 vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$:* $V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

j/ *Thể tích tứ diện $ABCD$:* $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

II. BÀI TẬP

Bài 1. Cho các điểm $A(1,2,3), B(2,-2,3), C(0,-4,6)$. Tìm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao điểm của 2 đường chéo.

Bài 2. Chứng minh rằng các điểm $A(3,-1,2), B(1,2,-1), C(-1,1,-3)$ và $D(3,-5,3)$ tạo thành một hình thang.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ với $A(3,-1,6), B(-1,7,-2), C(1,-3,2)$ và $D(5,1,6)$. Hãy tìm tọa độ trọng tâm của tứ diện.

Bài 4. Tìm M trên Oy biết rằng M cách đều hai điểm $A(1,2,-1)$ và $B(-2,0,5)$.

Bài 5. Tính độ dài đường cao OH của tam giác OAB với $A(0,1,-2), B(2,1,3)$.

Bài 6. Tính góc tạo bởi các cặp cạnh đối diện của tứ diện $ABCD$ với $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ và $D(-2,1,-1)$.

BÀI 2. MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Véc tơ đặc trưng của mặt phẳng

- Véc tơ $\vec{n}=(a,b,c)$ được gọi là vtpt của $mp(\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}\perp(\alpha)$.
- Hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là cặp vtcp của $mp(\alpha) \Leftrightarrow$ chúng không cùng phương và song song hoặc nằm trên $mp(\alpha)$.

Nhận xét: $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

2/ Phương trình mặt phẳng

- Phương trình tổng quát của $mp(\alpha): ax+by+cz+d=0 \to$ vtpt $\vec{n}=(a,b,c)$.
- $mp(\alpha)$ đi qua $M(x_0,y_0,z_0)$ và có vtpt $\vec{n}=(a,b,c)$ có phương trình:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+(z-z_0)=0$$

- $mp(\alpha)$ đi qua 3 điểm $A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0,c)$ có phương trình đoạn chắn:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Chú ý: các mặt phẳng tọa độ: $(Oxy): z=0,\ (Oxz): y=0,\ (Oyz): x=0$ (thiếu gì cho đó bằng 0).

3/ Vị trí của 2 mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng: $(\alpha): a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $(\beta): a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Khi đó:

- (α) cắt $(\beta) \Leftrightarrow a_1:b_1:c_1 \neq a_2:b_2:c_2$.
- $(\alpha)\ //\ (\beta) \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$.
- $(\alpha)\ \equiv(\beta) \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$

4/ Góc giữa 2 mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng: $(\alpha): a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $(\beta): a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Công thức tính góc giữa 2 mp đó là: $\cos(\alpha,\beta)=\cos\left(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right)=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$.

5/ Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm $M(x_0,y_0,z_0)$ đến $mp(\alpha): ax+by+cz+d=0$ được tính bởi công thức:

$$d\left(M,(\alpha)\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

6/ Khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song

Là khoảng cách từ 1 điểm bất kỳ trên mp này đến mp kia.

II. BÀI TẬP

Bài 7. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của các đoạn thẳng AB với $A(2,1,3),B(-1,0,1)$. Tìm giao điểm của (P) với các trục tọa độ.

Bài 8. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua các điểm $M(1,0,2),N(-2,3,1)$ và song song với trục Oz.

Bài 9. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;1;3), B(1;-2;1)$ và song song với đường thẳng $d:\{x=-1+t, y=2t, z=-3-2t$.

Bài 11. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho 2 đường thẳng (d_1) và (d_2)có phương trình: $(d_1); \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$, (d_2): $\frac{x-4}{6}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-3}{3}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2)

Bài 12. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với giá của véc tơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$ và tiếp xúc với (S).

Bài 13. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho điểm M(1; –1; 1) và hai đường thẳng $(d_1):\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-3}$ và $(d_2):\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{5}$. Chứng minh rằng điểm M, d_1, d_2 cùng nằm trên một mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng đó.

Bài 14. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho đường thẳng d: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}$ và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2\text{x}-2y-4\text{z}+2=0$. Lập phương trình mặt phẳng (P) song song với *d* và trục *Ox*, đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

Bài 15. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$ và mặt phẳng (*P*): $x+z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (*Q*) đi qua điểm $M(3;1;-1)$ vuông góc với mặt phẳng (*P*) và tiếp xúc với mặt cầu *(S).*

Bài 16. Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=3$.

Bài 17. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{1}$, $\Delta_2:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-3=0$. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S), biết tiếp diện đó song song với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_1.

Bài 18. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho mặt cầu (*S*) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x + 2y - z + 17 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) song song với (α) và cắt (*S*) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng $p=6\pi$.

Bài 19. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) qua O, vuông góc với mặt phẳng (Q): $x+y+z=0$ và cách điểm M(1; 2; –1) một khoảng bằng $\sqrt{2}$.

Bài 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{4}$ và điểm M(0; –2; 0). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M, song song với đường thẳng Δ, đồng thời khoảng cách *d* giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng 4.

Bài 21. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $(d):\{x=t,y=-1+2t,z=1$ và điểm $A(-1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (*d*) sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng 3.

Bài 22. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm $M(-1;1;0),N(0;0;-2),I(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và B, đồng thời khoảng cách từ I đến (P) bằng $\sqrt{3}$.

Bài 23. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD với $A(1;-1;2)$, $B(1;3;0)$, $C(-3;4;1)$, $D(1;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

Bài 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;3)$, $B(0;-1;2)$, $C(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và gốc tọa độ O sao cho khoảng cách từ B đến (P) bằng khoảng cách từ C đến (P).

Bài 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;-1)$, $B(1;1;2)$, $C(-1;2;-2)$ và mặt phẳng (P): $x-2y+2z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P), cắt đường thẳng BC tại I sao cho $IB=2IC$.

Bài 26. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng d_1,d_2 lần lượt có phương trình

$d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$, $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$. Viết phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2.

Bài 27. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1:\{x=1+t, y=2-t, z=1$, $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với d_1 và d_2, sao cho khoảng cách từ d_1 đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ d_2 đến (P).

Bài 28. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;0;3)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$.

Bài 29. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho điểm $A(2;-1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất.

Bài 30. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho điểm A(10; 2; –1) và đường thẳng d có phương trình: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{3}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với d và khoảng cách từ d tới (P) là lớn nhất.

Bài 31. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho đường thẳng (*d*) có phương trình tham số $\{x=-2+t;\ y=-2t;\ z=2+2t$. Gọi Δ là đường thẳng qua điểm A(4;0;–1) song song với (*d*) và I(–2;0;2) là hình chiếu vuông góc của A trên (*d*). Viết phương trình của mặt phẳng chứa Δ và có khoảng cách đến (*d*) là lớn nhất.

Bài 32. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ và điểm $A(2;5;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa *d* sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

Bài 33. Trong không gian toạ độ O*xyz*, cho hai điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) là lớn nhất.

Bài 34. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (α) chứa đường thẳng (Δ): $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ và tạo với mặt phẳng (P) : $2x-2y-z+1=0$ một góc 60^0. Tìm tọa độ giao điểm M của mặt phẳng (α) với trục *Oz*.

Bài 35. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng *(P)* đi qua giao tuyến *d* của hai mặt phẳng $(\alpha):2x-y-1=0$, $(\beta):2x-z=0$ và tạo với mặt phẳng $(Q):x-2y+2z-1=0$ một góc φ mà $\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.

Bài 36. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai điểm $A(-1;2;-3),B(2;-1;-6)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa AB và tạo với mặt phẳng (P) một góc α thoả mãn $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Bài 37. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai mặt phẳng $(P): 5x-2y+5z-1=0$ và $(Q): x-4y-8z+12=0$. Lập phương trình mặt phẳng (R) đi qua điểm M trùng với gốc tọa độ O, vuông góc với mặt phẳng (P) và tạo với mặt phẳng (Q) một góc $\alpha=45^0$.

Bài 38. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai đường thẳng có phương trình: $\Delta_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{3}$ và $\Delta_2: \frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và tạo với Δ_2 một góc $\alpha=30^0$.

Bài 39. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và tạo với các trục O*x*, O*y* các góc tương ứng là 45^0, 30^0.

Bài 40. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng (Q): $x+2y-z+5=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng *d* và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất.

Bài 41. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai điểm $M(-1;-1;3),N(1;0;4)$ và mặt phẳng (Q): $x+2y-z+5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N và tạo với (Q) một góc nhỏ nhất.

Bài 42. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho đường thẳng $d: \{x=1-t, y=-2+t, z=2t$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng *d* và tạo với trục O*y* một góc lớn nhất.

Bài 43. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ và $d_2: \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 sao cho góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là lớn nhất.

Bài 44. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và điểm $A(2;-1;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, song song với *d* và tạo với mặt phẳng (O*xy*) một góc nhỏ nhất.

Bài 45. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng (Q): $2x-y+z+2=0$ và điểm $A(1;1;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A, vuông góc với mặt phẳng (Q) và tạo với trục O*y* một góc lớn nhất.

Bài 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ O*xyz*, cho điểm A(4; 5; 6). Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, cắt các trục tọa độ lần lượt tại I, J, K mà A là trực tâm của tam giác IJK.

Bài 47. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz,* cho A(2; 0; 0) M(1; 1; 1). Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM cắt các trục O*x*, O*y* lần lượt tại B(0; *b*; 0), C(0; 0; *c*) (*b* > 0, *c* > 0). Chứng minh rằng: $b+c=\frac{bc}{2}$. Từ đó, tìm *b, c* để diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

Bài 48. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;4)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+4=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và (Q) cắt hai tia Ox, Oy tại 2 điểm B, C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Bài 49. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;0;0), B(1;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, B và cắt trục O*z* tại M sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{9}{2}$.

Bài 50. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz,* viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$, cắt các tia O*x*, O*y*, O*z* tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện OABC có giá trị nhỏ nhất.

Bài 51. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz,* viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$, cắt các tia O*x*, O*y*, O*z* tại A, B, C sao cho biểu thức $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 52. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz,* viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;5;3)$, cắt các tia O*x*, O*y*, O*z* tại A, B, C sao cho biểu thức $OA+OB+OC$ có giá trị nhỏ nhất.

BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Véc tơ chỉ phương của đường thẳng trong không gian

- Véc tơ $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$ là vtcp của đường thẳng $d \Leftrightarrow \vec{a}//d$ hoặc $\vec{a}\subset d$.

2/ Phương trình đường thẳng trong không gian

- Đt d đi qua $M\left(x_0,y_0,z_0\right)$ và có vtcp $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$ thì ptts là: $d:\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \\ z=z_0+a_3t \end{cases}.$
- Đt d đi qua $M\left(x_0,y_0,z_0\right)$ và có vtcp $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$ thì ptct là: $d:\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$.
- Đt d đi qua điểm A,B có phương trình: $\dfrac{x-x_A}{y_B-y_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$.

3/ Vị trí của 2 đường thẳng

Cho 2 đường thẳng d đi qua M có vtcp $\vec{a}$ và Δ đi qua N có vtcp $\vec{b}$. Khi đó :

- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\overrightarrow{MN}\neq 0 \Leftrightarrow d$ và Δ chéo nhau.
- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\overrightarrow{MN}=0$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương $\Leftrightarrow$ d và Δ cắt nhau.
- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\overrightarrow{MN}=0$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương và hệ $\{d\ ,\ \Delta\}$ vô nghiệm $\Leftrightarrow$ d và Δ song song.
- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\overrightarrow{MN}=0$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương và hệ $\{d\ ,\ \Delta\}$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ d và Δ trùng nhau.

4/ Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng $d:\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$ và mặt phẳng $\left(\alpha\right): Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó

- d cắt $\left(\alpha\right)\Leftrightarrow \vec{n}.\vec{u}\neq 0$. Đặc biệt : $\vec{n}.//\vec{u}$ thì $d\perp\left(\alpha\right)$.
- $d//\left(\alpha\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=0 \\ M\notin\left(\alpha\right)\end{cases}$
- $d\subset\left(\alpha\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=0 \\ M\in\left(\alpha\right)\end{cases}.$

5/ Góc giữa 2 đường thẳng

Cho 2 đường thẳng d có vtcp $\vec{a}$ và đường thẳng (Δ) có vtcp là $\vec{b}$. Khi đó góc tạo bởi d và Δ được tính bởi công thức : $\cos(d,\Delta)=\dfrac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$.

6/ Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d có vtcp $\vec{a}$ và mặt phẳng (α) có vtpt $\vec{n}=(A,B,C)$. Khi đó góc tạo bởi d và (α) được tính bởi công thức : $\sin(d,\alpha)=\dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$.

7/ Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng

Cho đường thẳng d đi qua M có vtcp $\vec{a}$ và điểm A. Khi đó khoảng cách từ A đến d được tính bởi công thức : $d(A,d)=\dfrac{\left|\left[\vec{a},\overrightarrow{MA}\right]\right|}{|\vec{a}|}$.

8/ Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau

Cho 2 đường thẳng chéo nhau d đi qua M có vtcp $\vec{a}$, Δ đi qua N có vtcp $\vec{b}$. Khi đó khoảng cách giữa d và Δ được tính bởi công thức : $d(d,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|}$.

II. BÀI TẬP

Bài 53. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x-y-z-1=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;-2)$, song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d.

Bài 54. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng (d) có phương trình: $\{ x=-t\,; y=-1+2t\,;$ $z=2+t$ và mặt phẳng (P): $2x-y-2z-3=0$.Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trên (P), cắt và vuông góc với (d).

Bài 55. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng (P) : x + y – 2z + 5 = 0 và điểm A (1; -1; 2). Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Bài 56. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(1; 2; 3) và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Ox.

Bài 57. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho điểm M(2; 1; 0) và đường thẳng Δ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. Lập phương trình của đường thẳng *d* đi qua điểm M, cắt và vuông góc với Δ.

Bài 58. Trong không gian với hệ trục toạ độ O*xyz*, cho mặt phẳng (P): x + 2y – 2z + 1 = 0 và hai điểm A(1;7; –1), B(4;2;0). Lập phương trình đường thẳng (D) là hình chiếu vuông góc của đường thẳng AB trên (P).

Bài 59. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, gọi *A, B, C* lần lượt giao điểm của mặt phẳng (P): $6x+2y+3z-6=0$ với *Ox, Oy, Oz*. Lập phương trình đường thẳng *d* đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* đồng thời vuông góc với mặt phẳng (*P*).

Bài 60. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho 3 điểm $A(1;2;-1), B(2;1;1); C(0;1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{2}$. Lập phương trình đường thẳng *Δ* đi qua trực tâm của tam giác ABC, nằm trong mặt phẳng (ABC) và vuông góc với đường thẳng *d.*

Bài 61. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho điểm M(2; 1; 0) và đường thẳng *d* có phương trình $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. Viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm M, cắt và vuông góc với đường thẳng *d* và tìm toạ độ điểm M′ đối xứng với M qua *d*.

Bài 62. Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1;1;-2)$, $B(-1;0;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A, vuông góc với *d* sao cho khoảng cách từ *B* tới Δ là nhỏ nhất.

Bài 63. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;-1;-5)$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua điểm A và cắt đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng *d* là lớn nhất.

Bài 64. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai điểm A(1; 5; 0), B(3; 3; 6) và đường thẳng Δ:$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua điểm B và cắt đường thẳng Δ tại điểm C sao cho diện tích tam giác ABC có giá trị nhỏ nhất.

Bài 65. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng (*P*): *x* + 3*y* + 2*z* + 2 = 0. Lập phương trình đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (*P*), đi qua *M*(2; 2; 4) và cắt đường thẳng (*d*).

Bài 66. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+z-29=0$ và hai điểm $A(4;4;6)$, $B(2;9;3)$. Gọi E, F là hình chiếu của A và B trên (α). Tính độ dài đoạn EF. Tìm phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) đồng thời Δ đi qua giao điểm của AB với (α) và Δ vuông góc với AB.

Bài 67. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho 2 mặt phẳng (P), (Q) và đường thẳng (d) lần lượt có phương trình: $(P): x-2y+z=0,\ (Q): x-3y+3z+1=0,\ (d): \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Lập phương trình đường thẳng Δ nằm trong (*P*) song song với mặt phẳng (*Q*) và cắt đường thẳng (*d*).

Bài 68. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho 3 điểm $A(1;2;-1), B(2;1;1), C(0;1;2)$ và đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{2}$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua trực tâm của tam giác ABC, nằm trong mặt phẳng (ABC) và vuông góc với đường thẳng (*d*).

Bài 69. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (P): $x+2y-z+5=0$, đường thẳng $d: \frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$ và điểm $A(-2;3;4)$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trên (P), đi qua giao điểm của *d* và (P), đồng thời vuông góc với *d*. Tìm điểm M trên Δ sao cho khoảng cách AM ngắn nhất.

Bài 70. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho điểm $A(3;-1;1)$, đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$, mặt phẳng $(P): x-y+z-5=0$. Viết phương trình của đường thẳng *d* đi qua điểm A , nằm trong (P) và hợp với đường thẳng Δ một góc 45^0.

Bài 71. Trong không gian toạ độ O*xyz*, cho đường thẳng *d*: $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x+y+z+2=0$. Gọi M là giao điểm của *d* và (P). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với *d* đồng thời khoảng cách từ M tới Δ bằng $\sqrt{42}$.

Bài 72. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng (α): $x+y-z-1=0$, hai đường thẳng (Δ): $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$, ($\Delta'$): $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$. Viết phương trình đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (α) và cắt (Δ'); (d) và (Δ) chéo nhau mà khoảng cách giữa chúng bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Bài 73. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng: $\Delta_1: \frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ và $\Delta_2: \{x=3+7t, y=1-2t, z=1-3t$.

Bài 74. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và mặt phẳng (α) có phương trình là $\Delta_1: \{x=2+t, y=5+3t, z=t$, $\Delta_2: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{2}$, $(\alpha): x-y+z+2=0$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua giao điểm của Δ_1 với (α) đồng thời cắt Δ_2 và vuông góc với trục O*y*.

Bài 75. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho đường thẳng $d_1: \{x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + 2t$, đường thẳng d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng (P): $2x - y - 1 = 0$ và (Q): $2x + y + 2z - 5 = 0$. Gọi I là giao điểm của d_1, d_2. Viết phương trình đường thẳng d_3 qua điểm A(2; 3; 1), đồng thời cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại B và C sao cho tam giác BIC cân đỉnh I.

Bài 76. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho mặt phẳng (P): $4x - 3y + 11z = 0$ và hai đường thẳng d_1: $\frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$, $\frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$. Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trên (P), đồng thời Δ cắt cả d_1 và d_2.

Bài 77. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho hai mặt phẳng và hai đường thẳng có phương trình (P): $3x + 12y - 3z - 5 = 0$ và (Q): $3x - 4y + 9z + 7 = 0$, (d_1): $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$, ($d_2$): $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với hai mặt phẳng (P), (Q) và cắt (d_1), (d_2).

Bài 78. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz,* cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 3 = 0$ và hai đường thẳng *(d₁), (d₂)* lần lượt có phương trình $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ và $\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-7}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với mặt phẳng (P), cắt (d_1) và (d_2) tại A và B sao cho AB = 3.

Bài 79. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz,* cho mặt phẳng (P): $2x - y + z + 1 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$, $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với (P), vuông góc với d_1 và cắt d_2 tại điểm E có hoành độ bằng 3.

Bài 80. Trong không gian O*xyz*, cho hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $(d_1): \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$, $(d_2): \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$; $(P): x + y - 2z + 5 = 0$. Lập phương trình đường thẳng (*d*) song song với mặt phẳng (*P*) và cắt $(d_1), (d_2)$ lần lượt tại A, B sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

Bài 81. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x+8}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-10}{-1}$ và $(d_2): \{x = t, y = 2 - t, z = -4 + 2t$. Viết phương trình đường thẳng *(d)* song song với trục *Ox* và cắt *(d₁)* tại A, cắt *(d₂)* tại B. Tính AB.

Bài 82. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng $d_1: \{x = -23 + 8t, y = -10 + 4t, z = t$ và $d_2 \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình đường thẳng (*d*) song song với trục *Oz* và cắt cả hai đường thẳng

(d_1), (d_2).

Bài 83. Trong không gian với hệ trục tọa độ O*xyz*, cho bốn điểm A(4;5;6); B(0;0;1); C(0;2;0); D(3;0;0). Chứng minh các đường thẳng AB và CD chéo nhau. Viết phương trình đường thẳng (D) vuông góc với mặt phẳng Oxy và cắt các đường thẳng AB, CD.

Bài 84. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho hai đường thẳng có phương trình: $d_1:\ \{x=-1-2t, y=t, z=1+t$ và $d_2:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$. Xét vị trí tương đối của d_1 và d_2. Viết phương trình đường thẳng *d* qua M trùng với gốc toạ độ O, cắt d_1 và vuông góc với d_2.

Bài 85. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho 2 (d_1) : $\{x=t, y=4+t, z=6+2t$ và (d_2) : $\{x=t', y=3t'-6, z=t'-1$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của điểm I(1; –1; 1) trên (d_2). Tìm phương trình tham số của đường thẳng đi qua K vuông góc với (d_1) và cắt (d_1).

Bài 86. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho điểm M(0;1;1) và 2 đường thẳng (d_1), (d_2) với: (d_1): $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{1}$; (d_2) là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $x+1=0$ và (Q): $x+y-z+2=0$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua M vuông góc (d_1) và cắt (d_2).

Bài 87. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z=0$ và 2 đường thẳng $(d): \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{2}$, $(d'): \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với đường thẳng (*d*) và cắt đường thẳng (*d'*).

Bài 88. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (P): $2x-y+z-1=0$ và hai đường thẳng (d_1): $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$, ($d_2$): $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với mặt phẳng (P), vuông góc với đường thẳng (d_1) và cắt đường thẳng (d_2) tại điểm E có hoành độ bằng 3.

Bài 89. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho hai điểm A(0; 0;–3), B(2; 0;–1) và mặt phẳng (P) có phương trình: $3x-8y+7z+1=0$. Viết phương trình chính tắc đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (P) và d vuông góc với AB tại giao điểm của đường thẳng AB với (P). *ĐS: d:* $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{-2}$

Bài 90. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai đường thẳng d_1: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$; d_2: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ và mặt phẳng (P): $x-y-2z+3=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trên mặt phẳng (P) và cắt hai đường thẳng d_1 , d_2 .

Bài 91. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng

(P): $x+y+z-1=0$ đồng thời cắt cả hai đường thẳng $(d_1):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và $(d_2):\{x=-1+t, y=-1, z=-t$.

Bài 92. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho (P): $2x-y+z+1=0$, (Q): $x-y+2z+3=0$, (R): $x+2y-3z+1=0$ và đường thẳng Δ_1: $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$. Gọi Δ_2 là giao tuyến của (P) và (Q). Viết phương trình đường thẳng (*d*) vuông góc với (R) và cắt cả hai đường thẳng Δ_1, Δ_2.

Bài 93. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho ba đường thẳng có phương trình $d_1:\{x=t, y=4-t, z=-1+2t$, $d_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{-3}$, $d_3:\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết Δ cắt ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $AB=BC$.

Bài 94. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz* , cho đường thẳng (d): $\{x=2+4t, y=3+2t, z=-3+t$ và mặt phẳng (P): $-x+y+2z+5=0$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) nằm trong (P), song song với (d) và cách (d) một khoảng là $\sqrt{14}$.

Bài 95. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho mặt phẳng (P): $x+y-z+1=0$ và đường thẳng *d*: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$. Gọi I là giao điểm của *d* và (P). Viết phương trình của đường thẳng Δ nằm trong (P), vuông góc với *d* sao cho khoảng cách từ I đến Δ bằng $3\sqrt{2}$.

Bài 96. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho mặt phẳng (P): $2x+y-2z+9=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-3}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với (P) và cắt *d* tại một điểm M cách (P) một khoảng bằng 2.

Bài 97. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho mặt phẳng $(P):x+3y-z-1=0$ và các điểm $A(1;0;0)$; $B(0;-2;3)$. Viết phương trình đường thẳng *d* nằm trong (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất (nhỏ nhất).

Bài 98. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-5=0$ và các điểm $A(-3;0;1)$; $B(1;-1;3)$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua A, song song với (P) và cách B một khoảng nhỏ nhất.

Bài 99. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$, hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;1;1)$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua A và cắt đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ B đến *d* là lớn nhất (nhỏ nhất).

Bài 100. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$, hai điểm $A(1;1;0), B(2;1;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với *d*, sao cho khoảng cách từ B đến Δ là lớn nhất.

Bài 101. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình đường thẳng *d* đi qua $A(0;-1;2)$, cắt đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ sao cho khoảng cách giữa *d* và đường thẳng $\Delta_2:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ là lớn nhất.

Bài 102. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho điểm A(3; –1; 1), đường thẳng Δ: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng (P): $x-y+z-5=0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng *d* đi qua A, nằm trong (P) và hợp với đường thẳng Δ một góc 45^0.

Bài 103. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$, cắt các đường thẳng $d_1:\{x=1+t, y=t, z=2+2t$; $d_2:\{x=3-t, y=1+t, z=1-2t$ và tạo với d_1 một góc 30^0.

Bài 104. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình chóp A.OBC, trong đó A(1; 2; 4), B thuộc trục Ox và có hoành độ dương, C thuộc Oy và có tung độ dương. Mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (OBC), $\tan\widehat{OBC}=2$. Viết phương trình tham số của đường thẳng BC.

Bài 105. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(2;-1;1), B(0;1;-2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua giao điểm của đường thẳng *d* với mặt phẳng (OAB), nằm trong mặt phẳng (OAB) và hợp với đường thẳng *d* một góc α sao cho $\cos\alpha=\dfrac{5}{6}$.

Bài 106. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;1;-2)$, vuông góc với đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và tạo với mặt phẳng (P): $2x+y-z+5=0$ một góc $\alpha=30^0$.

Bài 107. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình đường thẳng *d* đi qua $A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(P): 2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ một góc lớn nhất (nhỏ nhất).

Bài 108. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình đường thẳng *d* đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ sao cho góc giữa d và đường thẳng $\Delta_2: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{2}$ là lớn nhất (nhỏ nhất).

Bài 109. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ΔABC với tọa độ đỉnh C(3; 2; 3) và phương trình đường cao AH, phương trình đường phân giác trong BD là: $d_1: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$, $d_2: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$. Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh BC của ΔABC và tính diện tích của ΔABC.

Bài 110. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ΔABC với $A(1;-1;1)$ và hai đường trung tuyến lần lượt có phương trình là $d_1: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-2}{-2}$, $d_2: \{x = 1-t, y = 0, z = 1+t$. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

BÀI 4. MẶT CẦU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Phương trình mặt cầu

a/ Dạng thu gọn: $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \to$ Tâm $I(a,b,c)$ và bán kính R.

b/ Dạng khai triển: $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \to$ Tâm $I(a,b,c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

2/ Vị trí của điểm và mặt cầu

Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và điểm M. Khi đó:

a/ $IM > R \Leftrightarrow M$ nằm ngoài (S).

b/ $IM = R \Leftrightarrow M$ nằm trên (S).

c/ $IM < R \Leftrightarrow M$ nằm trong (S).

3/ Vị trí của mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và $mp(\alpha)$. Khi đó:

a/ $d(I,(\alpha)) > R \Leftrightarrow$ $mp(\alpha)$ và (S) không có điểm chung.

b/ $d(I,(\alpha)) = R \Leftrightarrow$ $mp(\alpha)$ và (S) có 1 điểm chung M. Lúc này $mp(\alpha)$ gọi là tiếp diện với (S) và M gọi là tiếp điểm.

+ Cách tìm tiếp điểm: Viết phương trình đường thẳng Δ qua tâm I và vuông góc với $mp(\alpha)$, suy ra tiếp điểm $M = \Delta \cap (\alpha)$.

c/ $d\left(I,d\right)<R\Leftrightarrow$ $mp\left(\alpha\right)$ và $\left(S\right)$ cắt nhau theo một đường tròn nhỏ $\left(C\right)$ có tâm là hình chiếu của I lên $mp\left(\alpha\right)$ và bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2\left(I,\left(\alpha\right)\right)}$.

4/ Vị trí của đường thẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm I, bán kính R và đường thẳng d. Khi đó:

a/ $d\left(I,d\right)>R\Leftrightarrow d$ và $\left(S\right)$ không có điểm chung.

b/ $d\left(I,d\right)=R\Leftrightarrow d$ và $\left(S\right)$ có 1 điểm chung M. Lúc này d là tiếp tuyến với $\left(S\right)$ và M gọi là tiếp điểm.

+ Cách tìm tiếp điểm: Viết phương trình $mp\left(P\right)$ đi qua I và vuông góc với d, khi đó $M=mp\left(P\right)\cap d$.

c/ $d\left(I,d\right)<R\Leftrightarrow d$ cắt $\left(S\right)$ tại 2 điểm phân biệt A,B. Khi đó: $R^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2+d^2\left(I,d\right)$.

5/ Vị trí của 2 mặt cầu

Cho 2 mặt cầu $\left(S_1\right):x^2+y^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z+d_1=0$ và $\left(S_2\right):x^2+y^2-2a_2x-2b_2y-2c_2z+d_2=0$ lần lượt có tâm I_1,I_2 và bán kính R_1,R_2. Khi đó:

+ $I_1I_2>R_1+R_2$: $\left(S_1\right)$ và $\left(S_2\right)$ không có điểm chung.

+ $I_1I_2=R_1+R_2$: $\left(S_1\right)$ và $\left(S_2\right)$ tiếp xúc ngoài.

+ $\left|R_1-R_2\right|<I_1I_2<R_1+R_2$: $\left(S_1\right)$ và $\left(S_2\right)$ cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn.

+ $\left|R_1-R_2\right|=I_1I_2$: $\left(S_1\right)$ và $\left(S_2\right)$ tiếp xúc trong.

+ $\left|R_1-R_2\right|>I_1I_2$: $\left(S_1\right)$ và $\left(S_2\right)$ đựng nhau.

II. BÀI TẬP

Bài 111. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục *Oy*.

Bài 112. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho hai đường thẳng: (d_1) : $\{x=2t;\ y=t;\ z=4$ và (d_2) : $\{x=3-t;\ y=t;\ z=0$. Chứng minh (d_1) và (d_2) chéo nhau. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2). *ĐS: (S):* $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$.

Bài 113. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai đường thẳng: $d_1:\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{-2}$ và $d_2:\{x=2+t,y=-3+3t,z=t$. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Bài 114. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho đường thẳng (Δ_1) có phương trình $\{x=2t;y=t;z=4$;

(Δ_2) là giao tuyến của 2 mặt phẳng $(\alpha): x+y-3=0$ và $(\beta): 4x+4y+3z-12=0$. Chứng tỏ hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 chéo nhau và viết phương trình mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của Δ_1, Δ_2 làm đường kính.

Bài 115. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A ≡ O, B(3;0;0), D(0;2;0), A'(0;0;1). Viết phương trình mặt cầu tâm C tiếp xúc với AB'.

Bài 116. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz,* cho 4 điểm $A(1;-1;2)$, $B(1;3;2)$, $C(4;3;2)$, $D(4;-1;2)$ và mặt phẳng (*P*) có phương trình: $x+y+z-2=0$. Gọi *A'* là hình chiếu của *A* lên mặt phẳng *Oxy*. Gọi (*S*) là mặt cầu đi qua 4 điểm *A', B, C, D*. Xác định toạ độ tâm và bán kính của đường tròn (*C*) là giao của (*P*) và (*S*).

Bài 117. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho điểm A(1; –2; 3) và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-1}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d. Viết phương trình mặt cầu tâm A, tiếp xúc với d.

Bài 118. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho đường thẳng $d: \frac{x+5}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z}{1}$ và điểm $M(4;1;6)$. Đường thẳng *d* cắt mặt cầu (S), có tâm M, tại hai điểm A, B sao cho $AB=6$. Viết phương trình của mặt cầu (S).

Bài 119. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z-4=0$. Xét vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α). Viết phương trình mặt cầu (S′) đối xứng với mặt cầu (S) qua mặt phẳng (α).

Bài 120. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, lập phương trình mặt cầu (S) biết rằng mặt phẳng Oxy và mặt phẳng (P): $z=2$ lần lượt cắt (S) theo hai đường tròn có bán kính bằng 2 và 8.

Bài 121. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng (P): $2x-y-2z-2=0$ và đường thẳng *d*: $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc *d*, I cách (P) một khoảng bằng 2 và (P) cắt (S) theo một đường tròn (C) có bán kính bằng 3.

Bài 122. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho 2 điểm A(0; 0; 4), B(2; 0; 0) và mặt phẳng (P): $2x+y-z+5=0$. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua O, A, B và có khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{5}{\sqrt{6}}$.

Bài 123. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho các điểm $A(1;3;4), B(1;2;-3), C(6;-1;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z-1=0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng (α) và đi qua ba điểm A, B, C. Tính diện tích hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (α).

Bài 124. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho đường thẳng *d*: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x+y-2z+2=0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng *d* có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (P) và đi qua điểm A(1; –1; 1).

Bài 125. Trong không gian O*xyz,* cho đường thẳng *d*: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x+y-2z+2=0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên *d*, tiếp xúc với mặt phẳng (P) và đi qua điểm A(2; –1; 0).

Bài 126. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho điểm $I(1;2;-2)$, đường thẳng Δ: $2x-2=y+3=z$ và mặt phẳng (P): $2x+2y+z+5=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I sao cho mặt phẳng (P) cắt khối cầu theo thiết diện là hình tròn có chu vi bằng 8π. Từ đó lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và tiếp xúc với (S).

Bài 127. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho đường thẳng $d:\{x=t;\ y=-1;\ z=-t$ và 2 mặt phẳng (P): $x+2y+2z+3=0$ và (Q): $x+2y+2z+7=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng (*d*) và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

Bài 128. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng (P): $x-2y-2z+10=0$, hai đường thẳng (Δ_1): $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$, ($\Delta_2$): $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{4}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc (Δ_1), tiếp xúc với (Δ_2) và mặt phẳng (P).

Bài 129. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho 3 điểm A(3;1;1), B(0;1;4), C(–1;–3;1). Lập phương trình của mặt cầu (S) đi qua A, B, C và có tâm nằm trên mặt phẳng (P): x + y – 2z + 4 = 0.

Bài 130. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hình lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có tam giác *ABC* vuông tại *A*, đỉnh *A* trùng với gốc tọa độ *O*, *B*(1; 2; 0) và tam giác *ABC* có diện tích bằng 5. Gọi *M* là trung điểm của *CC'*. Biết rằng điểm *A'*(0; 0; 2) và điểm *C* có tung độ dương. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *AB'C'M*.

Bài 131. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho tứ diện ABCD với A(2; 1; 0), B(1; 1; 3), C(2;–1; 3), D(1;–1; 0). Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Bài 132. Trong không gian với hệ trục toạ độ O*xyz,* cho mặt phẳng (P): $x+2y+2z-6=0$, gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của (P) với các trục tọa độ O*x*, O*y*, O*z*. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện OABC, tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn (C) là giao tuyến của (P) và (S).

Bài 133. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng (P): 2x – 2y – z – 4 = 0 và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Bài 134. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2). Tính bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.

Bài 135. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai điểm S(0;0;1), A(1;1;0). Hai điểm M(*m*; 0; 0), N(0; *n*; 0) thay đổi sao cho $m+n=1$ và $m>0,\ n>0$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SMN). Từ đó suy ra mặt phẳng (SMN) tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

Bài 136. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai đường thẳng có phương trình $d_1:\{x=t, y=0, z=2-t$, $d_2:\{x=0, y=t, z=2-t$. Viết phương trình mặt cầu (S) bán kính $R=\sqrt{6}$, có tâm nằm trên đường phân giác của góc nhỏ tạo bởi $d_1,\ d_2$ và tiếp xúc với $d_1,\ d_2$.

BÀI 4. CÁC BÀI TOÁN TÌM ĐIỂM THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Bài 137. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho hai điểm A(1;2;3) và B(3;4;1). Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng (P): $x-y+z-1=0$ để ΔMAB là tam giác đều.

Bài 138. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(3;5;4)$, $B(3;1;4)$. Tìm tọa độ điểm *C* thuộc mặt phẳng $(P): x-y-z-1=0$ sao cho tam giác *ABC* cân tại *C* và có diện tích bằng $2\sqrt{17}$.

Bài 139. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho ba điểm *A*(0; 1; 2), *B*(2; –2; 1), *C*(–2; 0; 1). Viết phương trình mặt phẳng (*ABC*) và tìm điểm *M* thuộc mặt phẳng (P): $2x+2y+z-3=0$ sao cho $MA=MB=MC$.

Bài 140. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(0;-2;1), B(2;0;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z+4=0$. Tìm điểm *M* thuộc (P) sao cho *MA*=*MB* và $(ABM)\perp(P)$.

Bài 141. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho A(2;0;0), C(0;4;0), S(0; 0; 4).Tìm tọa độ điểm B trong mp(Oxy) sao cho tứ giác OABC là hình chữ nhật. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm O, B, C, S.

Bài 142. Trong không gian O*xyz* cho hai điểm $A(-1;3;-2),\ B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng (P): $2x-y+z+1=0$. Tìm tọa độ điểm M ∈ (P) sao cho MA + MB nhỏ nhất. *ĐS:* $M(2;2;-3)$.

Bài 143. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai điểm A(1;5;0), B(3;3;6) và đường thẳng Δ có phương trình tham số $\{x=-1+2t;\ y=1-t;\ z=2t$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng Δ, xác định vị trí của điểm M để chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 144. Trong không gian với hệ trục tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng $(P): x-3y+3z-11=0$ và hai điểm $A(3;-4;5)$, $B(3;3;-3)$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất.

Bài 145. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho mặt phẳng (P): $x-2y+2z+8=0$ và các điểm $A(-1;2;3),\ B(3;0;-1)$. Tìm điểm M ∈ (P) sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

Bài 146. Trong không gian với hệ trục tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$ và các điểm $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho MA^2+2MB^2 nhỏ nhất.

Bài 147. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz,* cho tam giác *ABC* với *A*(1; 2; 5), *B*(1; 4; 3), *C*(5; 2; 1) và mặt phẳng (*P*): $x-y-z-3=0$. Gọi *M* là một điểm thay đổi trên mặt phẳng (*P*). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=MA^2+MB^2+MC^2$. Khi đó tìm toạ độ của M.

Bài 148. Trong không gian với hệ trục tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$ và các điểm $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$, $C(0;0;3)$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho $MA^2+3MB^2+2MC^2$ nhỏ nhất.

Bài 149. Trong không gian với hệ trục tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng $(P): x-y+z-1=0$ và các điểm $A(1;2;-1)$, $B(1;0;-1)$, $C(2;1;-2)$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho $MA^2+MB^2-MC^2$ nhỏ nhất.

Bài 150. Trong không gian với hệ trục tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng $(P): x-y+2z=0$ và các điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;1;-2)$, $C(1;-2;1)$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho $MA^2-MB^2-MC^2$ nhỏ nhất.

Bài 151. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho 3 điểm A(3; 1; 1), B(7; 3; 9), C(2; 2; 2) và mặt phẳng (P) có phương trình: $x+y+z-3=0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

Bài 152. Trong không gian với hệ trục tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$ và các điểm $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$, $C(0;0;3)$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

Bài 153. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$ và ba điểm $A(2;1;3), B(0;-6;2), C(1;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị bé nhất.

Bài 154. Trong không gian với hệ trục tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng (P): $3x-3y+2z+37=0$ và các điểm $A(4;1;5), B(3;0;1), C(-1;2;0)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (P) sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất: S = $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$.

Bài 155. Trong không gian với hệ trục tọa độ O*xyz*, cho các điểm $A(0;1;2), B(-1;1;0)$ và mặt phẳng (P): $x-y+z=0$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (P) sao cho ΔMAB vuông cân tại B.

Bài 156. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho các điểm $B(-1;\sqrt{3};0)$, $C(1;\sqrt{3};0)$, $M(0;0;a)$ với $a>0$. Trên trục O*z* lấy điểm N sao cho mặt phẳng (NBC) vuông góc với mặt phẳng (MBC). Tìm *a* để thể tích của khối chóp BCMN nhỏ nhất.

Bài 157. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\{x=-2t, y=t, z=-1-2t$ và mặt phẳng (P): $x+y-z+1=0$. Gọi d' là hình chiếu của *d* trên mặt phẳng (P). Tìm toạ độ điểm H thuộc *d'* sao cho H cách điểm $K(1;1;4)$ một khoảng bằng 5.

Bài 158. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho hai điểm A(1; 4; 2),B(–1; 2; 4) và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$. Tìm toạ độ điểm M trên Δ sao cho: $MA^2+MB^2=28$.

Bài 159. Trong không gian toạ độ *Oxyz*, cho các điểm $A(0;1;0), B(2;2;2), C(-2;3;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Tìm điểm M trên d để thể tích tứ diện MABC bằng 3.

Bài 160. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho điểm M(2; 1; 2) và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$. Tìm trên *d* hai điểm A, B sao cho tam giác ABM đều.

Bài 161. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho điểm A(0; 1; 3) và đường thẳng *d*: $\{x = 1-t, y = 2+2t, z = 3$. Tìm trên *d* hai điểm B, C sao cho tam giác ABC đều.

Bài 162. Trong không gian với hệ toạ O*xyz*, tìm trên O*x* điểm A cách đều đường thẳng (d) : $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng (P) : $2x - y - 2z = 0$.

Bài 163. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng Δ_1 : $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}$; Δ_2 : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

Bài 164. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và $\Delta_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{-1}$. Đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 cắt Δ_1 tại A, cắt Δ_2 tại B. Tính diện tích ΔOAB.

Bài 165. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho ba điểm A(1; 5; 4), B(0; 1; 1), C(1; 2; 1). Tìm tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho độ dài đoạn thẳng CD nhỏ nhất.

Bài 166. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$. Tìm các điểm M thuộc d_1, N thuộc d_2 sao cho đường thẳng MN song song với mặt phẳng (P): $x - y + z + 2012 = 0$ và độ dài đoạn MN bằng $\sqrt{2}$.

Bài 167. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{1}$ và các điểm $A(1;0;0), B(0;1;1), C(0;0;2)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (CAB) bằng 30^0. *ĐS:* $M(0;-2;1)$.

Bài 168. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai đường thẳng có phương trình: $(\Delta_1): \{x = 1+t, y = -1-t, z = 2$ và $(\Delta_2): \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Xác định điểm A trên Δ_1 và điểm B trên Δ_2 sao cho đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

Bài 169. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai điểm A(1; –1; 2), B(3; – 4; –2) và đường thẳng $d:\{x=2+4t, y=-6t, z=-1-8t$. Tìm điểm I trên đường thẳng *d* sao cho IA + IB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 170. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai điểm A(1; 5; 0), B(3; 3; 6) và đường thẳng Δ: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Tìm toạ độ điểm M trên Δ sao cho ΔMAB có diện tích nhỏ nhất.

Bài 171. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho ba điểm $A(5;8;-11)$, $B(3;5;-4)$, $C(2;1;-6)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc đường thẳng *d* sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 172. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz,* cho $(P): x+2y-z+5=0$ điểm *A*(–2; 3; 4) và đường thẳng $(d):\frac{x+3}{2}=y+1=z-3$. Gọi *Δ* là đường thẳng nằm trên (*P*) đi qua giao điểm của (*d*) và (*P*) đồng thời vuông góc với *d*. Tìm trên *Δ* điểm *M* sao cho khoảng cách *AM* ngắn nhất.

Bài 173. Trong không gian O*xyz*, cho hai điểm A(–1; –1; 2), B(–2; –2; 1) và mặt phẳng (P) có phương trình $x+3y-z+2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q). Tìm điểm M thuộc Δ sao cho độ dài đoạn thẳng OM là nhỏ nhất. .

Bài 174. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho hai đường thẳng (d_1): $\frac{x-3}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$, ($d_2$): $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$. Một đường thẳng (Δ) đi qua điểm A(1; 2; 3), cắt đường thẳng (d_1) tại điểm B và cắt đường thẳng (d_2) tại điểm C. Chứng minh rằng điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC.

Bài 175. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $E(2;1;5)$, $F(4;3;9)$. Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (*P*): $2x+y-z+1=0$ và (*Q*): $x-y+2z-7=0$. Tìm điểm *I* thuộc Δ sao cho: $|IE-IF|$ lớn nhất.

Bài 176. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ và hai điểm $A(0;0;3)$, $B(0;3;3)$. Tìm điểm M $\in d$ sao cho:

a) $MA+MB$ nhỏ nhất. b) MA^2+2MB^2 nhỏ nhất. c) $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Bài 177. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ và đường thẳng (d) là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $2x-2y-z+1=0$, (Q): $x+2y-2z-4=0$ và . Tìm *m* để (S) cắt (d) tại 2 điểm M, N sao cho độ dài MN = 8.

Bài 178. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho mặt phẳng (P): $x+y-z+3=0$ và mặt cầu (S):

$x^2+y^2+z^2-6x-8y-2z+23=0$. Tìm trên (S) điểm M sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó hãy viết phương trình mặt cầu (T) có tâm M và cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

Bài 179. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình là $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0, (P): 2x+2y-z+16=0$. Điểm M di động trên (S) và điểm N di động trên (P). Tính độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng MN. Xác định vị trí của M, N tương ứng.

Bài 180. Trong không gian tọa độ O*xyz*, cho điểm $A(0;1;1), B(1;0;-3), C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$. Tìm tọa độ điểm D trên mặt cầu (S) sao cho tứ diện ABCD có thể tích lớn nhất.

Bài 181. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho mặt phẳng (α): $3x+2y-z+4=0$ và hai điểm A(4;0;0), B(0;4;0). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Xác định tọa độ điểm K sao cho KI vuông góc với mặt phẳng (α), đồng thời K cách đều gốc tọa độ O và (α).

Bài 182. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho 4 điểm A(2;4;–1), B(1;4;–1), C(2;4;3), D(2;2;–1). Tìm tọa độ điểm M để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 183. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (P): $x+y+z+3=0$ và điểm A(0; 1; 2). Tìm toạ độ điểm A′ đối xứng với A qua mặt phẳng (P).

Bài 184. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho các điểm $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;3;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2=0$. Tìm toạ độ của điểm M biết rằng M cách đều các điểm A, B, C và mặt phẳng (α).

Bài 185. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hình chóp tam giác đều S.ABC, biết $A(3;0;0), B(0;3;0), C(0;0;3)$. Tìm toạ độ đỉnh S biết thể tích khối chóp S.ABC bằng 36.

Bài 186. Trong không gian với hệ trục toạ độ O*xyz*, cho ba điểm A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3). Tìm toạ độ trực tâm của tam giác ABC.

Bài 187. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho các điểm $A(-1;3;5)$, $B(-4;3;2)$, $C(0;2;1)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

Bài 188. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho các điểm $A(-1;0;1), B(1;2;-1), C(-1;2;3)$. Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. *ĐS:* $I(0;2;1)$.

Bài 189. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz,* cho ba điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(1;1;-2)$. Tìm tọa độ trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 190. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm $A(-1;0;1), B(1;2;-1), C(-1;2;3)$ và *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm *I* và tiếp xúc với mặt phẳng (*Oxz*).

Bài 191. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho tam giác ABC có $A(3;1;0)$, B nằm trên mặt phẳng (O*xy*) và C nằm trên trục O*z*. Tìm toạ độ các điểm B, C sao cho điểm $H(2;1;1)$ là trực tâm của tam giác ABC.

Bài 192. Trong không gian O*xyz*, cho điểm A(3; 2; 3) và hai đường thẳng có phương trình

$d_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$ và $d_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$. Chứng minh đường thẳng d_1, d_2 và điểm A cùng nằm trong một mặt phẳng. Xác định toạ độ các đỉnh B và C của tam giác ABC biết d_1 chứa đường cao BH và d_2 chứa đường trung tuyến CM của tam giác ABC.

Bài 193. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho cho tam giác *ABC* có *A(3;2;3)*, đường cao CH, đường phân giác trong *BM* của góc *B* lần lượt có phương trình là $d_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$, $d_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$. Tính độ dài các cạnh của tam giác của tam giác ABC.

Bài 194. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hình thang cân ABCD với $A(3;-1;-2)$, $B(1;5;1)$, $C(2;3;3)$, trong đó AB là đáy lớn, CD là đáy nhỏ. Tìm toạ độ điểm D.

Bài 195. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hình thoi *ABCD* với $A(-1;2;1)$, $B(2;3;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh C, D và viết phương trình mặt phẳng chứa hình thoi đó biết rằng tâm I của hình thoi thuộc đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ và điểm D có hoành độ âm.

Bài 196. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông, $A(1;0;0)$, $C(-1;2;0)$, $D(-1;0;0)$, $S(0;0;\sqrt{3})$. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của đoạn *SB* và *CD*. Chứng minh rằng hai đường thẳng *AM* và *BN* vuông góc với nhau và xác định tọa độ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ONB*.

Bài 197. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hình vuông *MNPQ* có $M(5;3;-1)$, $P(2;3;-4)$. Tìm toạ độ đỉnh Q biết rằng đỉnh N nằm trong mặt phẳng $(R): x+y-z-6=0$.

Bài 198. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz,* cho hình vuông ABCD, biết $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$ và đỉnh A thuộc mặt phẳng (*Oxy*). Tìm tọa độ điểm *C*.

Bài 199. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz,* cho hình vuông ABCD, biết $A(1;2;0), C(2;3;-4)$. và đỉnh B nằm trên mặt phẳng (Q): $x+2y+z-3=0$. Tìm toạ độ của đỉnh D, biết toạ độ của B là những số nguyên.

CHUYÊN ĐỀ 8. HÌNH HỌC CỔ ĐIỂN

BÀI 1. HÌNH HỌC KHỐI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Sự tương giao

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

- Tìm điểm chung của 2 mặt phẳng.
- Đường thẳng qua hai điểm chung đó là giao tuyến của hai mặt phẳng.

Chú ý: Ta có 2 cách để tìm giao tuyến :

+ Cách 1: tìm 2 điểm chung.

+ Cách 2: tìm 1 điểm chung + phương giao tuyến.

Ta thường sử dụng phối hợp 2 cách khi xác định thiết diện của hình chóp .

b. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P), ta tìm trong (P) một đường thẳng c cắt a tại điểm A nào đó thì A là giao điểm của a và (P) .

Chú ý: Nếu c chưa có sẵn thì ta chọn một mặt phẳng (Q) qua a và lấy c là giao tuyến của (P) và (Q) .

c. Thiết diện

Xác định lần lượt các giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp theo các bước sau:

- Từ điểm chung có sẵn, xác định giao tuyến đầu tiên của (P) với một mặt của hình chóp.
- Cho giao tuyến này cắt các cạnh của mặt đó của hình chóp ta sẽ được các điểm chung mới của (P) với các mặt khác. Từ đó xác định được các giao tuyến mới với các mặt này .
- Tiếp tục như thế cho tới khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện.

2/ Quan hệ song song

a. Chứng minh hai đường thẳng song song

Có thể dùng một trong các cách sau :

- Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng , rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (như tính chất đường trung bình, định lý đảo của định lý Ta-lét ...).
- Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song song với đường thẳng thứ 3 .
- Áp dụng định lý về giao tuyến .

b. Tính góc giữa hai đường thẳng a,b chéo nhau.

- Lấy điểm O nào đó . Qua O dựng a' // a và b' // b. Góc nhọn hoặc góc vuông tạo bởi a',b' gọi là góc giữa a và b .
- Tính góc : Sử dụng tỉ số lượng giác của góc trong tam giác vuông hoặc dùng định lý hàm số côsin trong tam giác thường .

c. Chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P)

- Ta chứng minh d không nằm trong (P) và song song với đường thẳng a chứa trong (P) .

Chú ý : Nếu a không có sẵn trong hình thì ta chọn một mặt phẳng (Q) chứa d và lấy a là giao tuyến của (P) và (Q) .

d. Chứng minh hai mặt phẳng song song

Chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với mặt phẳng kia.

Chú ý : $\begin{cases}(P)//(Q)\\ a\subset(Q)\end{cases}\Rightarrow a//(P).$

3/ Quan hệ vuông góc

a. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Thực hiện các bước sau :

- Chọn trong (P) một đường thẳng d, rồi dựng mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với d (nên chọn d sao cho (Q) dễ dựng).
- Xác định đường thẳng: $c=(P)\cap(Q)$.
- Dựng AH vuông góc với c tại H.

Khi đó: Đường thẳng AH là đường thẳng qua A vuông góc với (P) và độ dài của đoạn AH là khoảng cách từ A đến (P).

Chú ý :

+ Trước khi chọn d và dựng (Q) nên xét xem d và (Q) đ có sẵn trên hình vẽ chưa.

+ Nếu đã có sẵn đường thẳng m vuông góc với (P), khi đó chỉ cần dựng Ax // m thì $Ax\perp(P)$.

+ Nếu AB // (P) thì d(A,(P)) = a(B, (P)).

+ Nếu AB cắt (P) tại I thì d(A,(P) : d(B, (P)) = IA : IB.

b. Ứng dụng của trục đường tròn

- Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm của đường tròn đó được gọi là trục đường tròn.
- Ta có thể dùng tính chất của trục đường tròn để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng và tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.
- Nếu O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M là một điểm cách đều 3 điểm A, B, C thì đường thẳng MO là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; khi đó MO vuông góc với mp(ABC) và MO = d(M,(ABC)).
- Nếu $MA=MB=MC$ và $NA=NB=NC$ trong đó A,B,C là ba điểm không thẳng hàng thì đường thẳng MN là trục đường tròn qua ba điểm A,B,C. Khi đó MN vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm O của đường tròn qua ba điểm A, B, C .

c. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cách xác định góc giữa a và (P) .

- Tìm giao điểm M của a với (P).
- Chọn điểm $A \in a$ và dựng $AH \perp (P),\ (H \in (P))$. Khi đó $\widehat{AMH} = \left(\widehat{a,(P)}\right)$.

d. Góc nhị diện giữa hai mặt phẳng

Khi giải các bài toán liên quan đến số đo nhị diện hay góc giữa hai mặt phẳng thì ta thường xác định góc phẳng của nhị diện. Nếu góc này chưa có sẵn trên hình ta có thể dựng nó theo phương pháp dưới đây .

- Tìm cạnh c của nhị diện (giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa hai mặt của nhị diện)
- Dựng một đoạn thẳng AB có hai đầu mút ở trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với một mặt của nhị diện .
- Chiếu vuông góc A (hay B) trên c thành H. Khi đó, góc AHB là góc phẳng của nhị diện .

<u>Chú ý</u> :

- Nếu đã có một đường thẳng d cắt hai mặt của nhị diện tại A, B và vuông góc với cạnh c của nhị diện thì ta có thể dựng góc phẳng của nhị diện đó như sau: Chiếu vuông góc A (hay B hay một điểm trên AB) trên c thành H . Khi đó góc AHB là góc phẳng của nhị diện .
- Nếu hai đt a , b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q) thì ∠((P), (Q)) = ∠(a, b).
- Nếu hai mặt của nhị diện lần lượt chứa hai tam giác cân MAB và NAB có chung đáy AB thì ∠MIN
- (I là trung điểm AB) là góc phẳng của nhị diện đó .

e. Mặt phẳng vuông góc

Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.

Cách 1: CM mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia .

Cách 2: chứng minh góc giữa hai mặt phẳng có số đo bằng 90 .

Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng .

Cách 1: Chứng minh a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau chứa trong (P) .

Cách 2: Chứng minh a song song với đường thẳng b vuông góc với (P) .

Cách 3: CM a là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC với A, B, C thuộc (P) .

Cách 4: Sử dụng định lý : " Nếu a chứa trong một mặt phẳng (Q) vuông góc với (P) và a vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) thì a vuông góc với (P) " .

Cách 5: Sử dụng định lý : " Nếu a là giao tuyến của hai mặt phẳng cng vuông góc với (P) thì a vuông góc với (P) " .

4/ Công thức lượng

a/ Hình lăng trụ

- Diện tích xung quanh: $S_{xqlangtru} = 2pl$, $S_{xqlangtrudung} = 2ph$ với p :chu vi tiết diện thẳng; l :cạnh bên; h :chiều cao.
- Thể tích: $V_{langtru} = B.h$ với B : diện tích đáy; h : chiều cao.

Đặc biệt: $V_{hopchunhat} = abc$, $V_{lapphuong} = a^3$ với a,b,c : kích thước các cạnh.

b/ Hình chóp

- Hình chóp: $S_{xqchopdeu} = \frac{1}{2}p.d$, $V_{chop} = \frac{1}{3}B.h$ với p : chu vi đáy; d : trung đoạn; B : diện tích đáy.
- Hình chóp cụt: $S_{xqchopcutdeu} = \frac{1}{2}\left(p + p'\right).d$, $V_{chopcut} = \frac{1}{3}\left(B + B' + \sqrt{B.B'}\right).h$ với p' : chu vi đáy nhỏ; B': diện tích đáy nhỏ.

c/ Hình trụ

$S_{xq} = 2\pi Rl$, $V = \pi R^2 h$ với R : bán kính đáy; l : đường sinh; h : chiều cao.

d/ Hình nón

- Hình nón: $S_{xq} = \pi Rl$, $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ với R : bán kính đáy; l : đường sinh; h : đường cao.
- Hình nón cụt: $S_{xq} = \pi\left(R + r\right)l$, $V = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 + r^2 + Rr\right)h$ với R ,r : bán kính đáy lớn, nhỏ.

e/ Hình cầu

$S_{xq} = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ với R : bán kính mặt cầu.

II. BÀI TẬP

Bài 1. Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại A, AD = a, AC = b, AB = c. Tính diện tích S của tam giác BCD theo a, b, c. CMR: $2S \geq \sqrt{abc(a+b+c)}$.

Bài 2. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a. Gọi M, N là trung điểm SB, SC. Tính theo a diện tích ΔAMN, biết (AMN) ⊥ (SBC).

Bài 3. Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’. CMR: AC’ vuông góc mp(A’BD).

Bài 4. Cho hình chóp SABC, các cạnh đều có độ dài bằng 1, O là tâm của tam giác ABC, I là trung điểm của SO. Mặt phẳng (BIC) cắt SA tại M. Tìm tỉ lệ thể tích của tứ diện SBCM và tứ diện SABC.

Bài 5. Cho hình lăng trụ ABCD.$A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a. AA_1 = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi D là trung điểm của BB_1 , M di động trên cạnh AA_1. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MC_1D.

Bài 6. Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc (ABC), AC = AD = 4cm, AB = 3cm, BC = 5cm. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến (BCD).

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có đ.cao AD và AB = 2, AC = 4. Trên đt v.góc với (ABC) tại A lấy điểm S sao cho SA = 6. Gọi E, F là trung điểm của SB, SC và H là h.chiếu của A trên EF. Chứng minh H là trung điểm của SD. Tính cosin của góc giữa 2 mp (ABC) và (ACE). Tính thể tích hình chóp A.BCFE.

Bài 8. Cho hình chóp O.ABC có các cạnh OA = OB = OC = 3cm và v.góc với nhau từng đôi một. Gọi H là h.chiếu của điểm O lên (ABC) và các điểm A', B', C' lần lượt là h.chiếu của H lên (OBC), (OCA), (OAB). Tính thể tích tứ diện HA'B'C'. Gọi S là điểm đ.xứng của H qua O. CM: S.ABC là tứ diện đều.

Bài 9. Cho hình chóp O.ABC có OA = a, OB = b, OC = c vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Tính góc φ giữa (OMN) và (OAB). Tìm điều kiện a, b, c để hình chiếu của O trên (ABC) là trọng tâm tam giác ANP.

Bài 10. Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy. Biết AB = 2, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60°.Tính độ dài SA; kh.cách từ A đến (SBC) và góc phẳng nhị diện [A, SB, C].

Bài 11. Cho hai mphẳng (P) và (Q) v.góc với nhau, giao tuyến là đt (d). Trên (d) lấy 2 điểm A và B với AB = a. Trong (P) lấy điểm C, trong (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng v.góc với (d) và AC = BD = AB. Tính b.kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và khoảng cách từ A đến (BCD) theo a.

Bài 12. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, AB = a, BC = 2a. Cạnh SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M là trung điểm của SC. Tính diện tích tam giác MAB theo a. Tính khoảng cách giữa MB và AC theo a.

Bài 13. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến (SBC) và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Bài 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuương cạnh a, SA = a và vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm CD. Tính diện tích tam giác SBE, khoảng cách từ đỉnh C đến (SBE). Mp(SBE) chia hình chóp thành hai phần, tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Bài 15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh C đến (SBD). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC.

Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, AB = a, AD = b. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M, N là trung điểm cạnh SA, SD. Tính: khoảng cách từ A đến (BCN), kh.cách giữa SB và CN và góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

Bài 17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. SO vuông góc với đáy và SO = $2a\sqrt{3}$, AC = 4a, BD = 2a. Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD tại B', C', D' . Chứng minh tam giác B'C'D' đều. Tính theo a bán kính mặt cầu nội tiếp S.ABCD.

Bài 18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hcn với AB = a, AD = 2a. Đường cao SA = 2a. Trên cạnh CD lấy điểm M, đặt MD = m ($0 \le m \le a$). Tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác SBM lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 19. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi I, K, M, N lần lượt là trung điểm của A'D', BB', CD, BC. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng. Tính kh.cách giữa IK và AD và diện tích tứ giác IKNM.

Bài 20. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Chứng minh A'C vuông góc với (AB'D'). Tính góc giữa (DA'C) và (ABB'A'). Trên cạnh AD',DB lấy lần lượt các điểm M, N sao cho AM=DN=k ($0< k <a\sqrt{2}$). Chứng minh MN song song (A'D'BC). Tìm k để MN nhỏ nhất. Chứng tỏ khi đó MN là đoạn vuông góc chung của AD' và DB.

Bài 21. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy hình thoi cạnh a, $\angle BAD = 60^\circ$. Gọi M, N là trung điểm cạnh AA', CC'. Chứng minh B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Tính AA' theo a để B'MDN là hình vuơng.

Bài 22. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại A. Cho AB = a, AC = b, AA' = c. Mặt phẳng (P) qua B và vuông góc với B'C. Tìm điều kiện của a, b, c để (P) cắt cạnh CC' tại I (I khác với C và C'). Cho (P) cắt CC' tại I: Xác định và tính diện tích của thiết diện.

Bài 23. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ΔABC cân với AB = AC = a và góc BAC = 120^0, cạnh bên BB' = a. Gọi I là trung điểm CC'. Chứng minh rằng tam giác AB'I vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I).

BÀI 2. TỌA ĐỘ HÓA BÀI TOÁN HÌNH KHỐI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bước 1: Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ thích hợp (quan trọng nhất là gốc tọa độ).

- Vẽ mặt đáy trên mặt phẳng và xác định điểm vuông góc ở đáy. Xác định các trục Ox, Oy.
- Oz là trục vuông góc với mặt phẳng đáy. Khi xác định trục Oz cần lưu ý đến các hình có tính chất sau:

  a/ Hình chóp các các cạnh bên bằng nhau hoặc các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau, thì chân đường cao kẻ từ đỉnh là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

  b/ Hình chóp các các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau, thì chân đường cao kẻ từ đỉnh là tâm đường tròn nội tiếp đa giác đáy.

  Hình chóp đa giác đều, hình nón và hình trụ thuộc các dạng a và b ở trên.

  c/ Hình chóp có hai mặt bên vuông góc với đáy thì "cạnh bên giao tuyến" của hai mặt đó sẽ là đường cao của hình chóp.

  Tam diện vuông, lăng trụ đứng thuộc dạng c.

d/ Hình chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì "đường cao của mặt bên " đó sẽ là đường cao của hình chóp.

- Thứ thự các trục theo "Quy tắc bàn tay phải" (tam diện thuận).

Bước 2: Xác định toạ độ các điểm có liên quan.

- Lưu ý tính chất "phương trình khuyết" của các trục và các mặt tọa độ.
- Tọa độ của điểm $M\left(a,b,c\right)$ được xác định qua điểm $M'\left(a,b,0\right)$ là hình chiếu của M lên mặt phẳng Oxy, cao độ c là độ dài đoạn MM' (chú ý đến tính đại số).

Bước 3: Sử dụng các công thức lượng và vị trí tương đối trong hình học không gian $Oxyz$ để giải bài toán đã tọa độ hóa.

Chú ý: i/ Nếu một tam giác có diện tích S thì hình chiếu của nó có diện tích S' bằng tích của S với cosin của góc φ giữa mặt phẳng của tam giác và mặt phẳng chiếu: $S' = S.\cos\varphi$

ii/ Cho khối chóp S.ABC. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lấy ba điểm A', B', C' khác với S, Ta luôn có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}$$

iii/ Trục của đa giác đáy là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác và vuông góc với mp chứa đa giác đó. Tâm mặt cầu ngoại tiếp của một hình chóp là giao điểm của trục đa giác đáy với mp trung trực của một cạnh bên.

II. BÀI TẬP

Bài 24. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, AD = 2a, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, SB tạo với đáy góc 60^o. Tính thể tích hình chóp và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 25. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = 2a, SA = SB = SC = 3a/2. Tính thể tích hình chóp và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 26. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là một tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích của hình chóp và khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD theo a.

Bài 27. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o. Tính thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Bài 28. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Bài 29. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Bài 30. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = AD = 2a, CD = a; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích h.chóp S.ABCD theo a.

Bài 31. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

Bài 32. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

Bài 33. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn (O) và (O'), bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích khối tứ diện OO'AB.

Bài 34. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với SA = 2a, AB = a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH). Tính thể tích của khối chóp S.ABH theo a.

Bài 35. Cho lăng trụ ABCD.$A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình chữ nhật AB = a, AD = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (ABCD) bằng 60^o. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

Bài 36. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

Bài 37. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có BB' = a, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A'ABC theo a.

Bài 38. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, SB = $a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối hình chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thằng SM, DN.

Bài 39. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Bài 40. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình chữ nhật với, AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với mặt đáy (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Bài 41. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^0 < \varphi < 90^0$). Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ. Tính thể tích kh.chóp S.ABCD theo a và φ.

Bài 42. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^o$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh CC'. Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông.

Bài 43. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, AB = a, AC = 2a, hai mp (SAB) và (SAC) vuông góc với đáy, SB tạo với đáy góc 60^o. Tính thể tích hình chóp và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 44. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật AB = a, AD = 2a. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau. Gọi I là giao điểm của AC và BD, mặt bên (SAB) tạo với đáy góc 60^o. Tính thể tích hình chóp, khoảng cách từ I đến mặt bên (SAB) và khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC.

Bài 45. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a. Gọi M, N là trung điểm SB, SC. Tính theo a diện tích ΔAMN, biết (AMN) $\perp$ (SBC).

Bài 46. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân, AB = AC = a, góc $\hat{A} = 120^o$. Các cạnh bên của hình chóp tạo với đáy góc 60^o. Tính thể tích của hình chóp và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp theo a.

Bài 47. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là một tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích của hình chóp, cosin góc phẳng tạo bởi mp(SCD) và mp đáy, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD và thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho theo a.

Bài 48. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' với A'.ABC là một tứ diện đều cạnh a. Tính thể tích hình chóp, và khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và AB theo a.

Bài 49. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy bằng a, khoảng cách giữa hai cạnh không cùng đi qua một đỉnh của hình chóp bằng b. Tính thể tích của hình chóp theo a và b.

Bài 50. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, AB = a, BC = 2a. Cạnh SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M là trung điểm của SC. Tính diện tích ΔMAB theo a. Tính khoảng cách giữa MB và AC theo a.

Bài 51. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a, đcao SH = h. Mp (α) đi qua AB và vgóc với SC. Tìm điều kiện của h theo a để (α) cắt cạnh SC tại K. Tính diện tích ΔABK. Tính h theo a để (α) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Chứng tỏ rằng khi đó tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau.

Bài 52. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a, SA = a và vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm CD. Tính diện tích Δ SBE, khoảng cách từ đỉnh C đến (SBE). Mp(SBE) chia hình chóp thành hai phần, tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Bài 53. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, AB = a, AD = b. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M, N là trung điểm cạnh SA, SD. Tính: khoảng cách từ A đến (BCN), kh.cách giữa SB và CN và góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

Bài 54. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. SO vuông góc với đáy và SO = $2a\sqrt{3}$, AC = 4a, BD = 2a. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD tại B', C', D'. Chứng minh ΔB'C'D' đều. Tính theo a bán kính mặt cầu nội tiếp S.ABCD.

Bài 55. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Chứng minh A'C vuông góc với (AB'D'). Tính góc giữa (DA'C) và (ABB'A'). Trên cạnh AD',DB lấy lần lượt các điểm M, N sao cho AM=DN=k ($0< k <a\sqrt{2}$). Chứng minh MN song song (A'D'BC). Tìm k để MN nhỏ nhất. Chứng tỏ khi đó MN là đoạn vuông góc chung của AD' và DB.

Bài 56. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy hình thoi cạnh a, $\angle BAD = 60^\circ$. Gọi M, N là trung điểm cạnh AA', CC'. Chứng minh B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Tính AA' theo a để B'MDN là hình vuông.

Bài 57. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ΔABC cân với AB = AC = a và góc BAC = 120^0, cạnh bên BB' = a. Gọi I là trung điểm CC'. Chứng minh rằng tam giác AB'I vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I).

Bài 58. Cho khối nón đỉnh S có đường cao SO = h và bán kính đáy R. Điểm M di động trên đoạn SO, mp (P) đi M và song song với đáy, cắt khối nón theo thiết diện (T). Tính độ dài đoạn OM theo h để thể tích khối nón đỉnh O, đáy (T) lớn nhất.

Bài 59. Cho hình cầu (S) đường kính AB = 2R. Qua A và B dựng lần lượt 2 tia tiếp tuyến Au, Bv với (S), M, N là 2 điểm di động lần lượt trên Au, Bv và MN txúc (S). Cm: AM. BN = $2R^2$ và tứ diện ABMN có thể tích không đổi.

Bài 60. Cho hình trụ có bán kính đáy R và đường cao là $R\sqrt{3}$. Trên hai đường tròn đáy lấy lần lượt điểm A và B sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là 30^o. Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ.

Bài 61. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân với cạnh góc vuông bằng a. Một thiết diện khác qua đỉnh hình nón và tạo với đáy góc 60^O. Tính diện tích của thiết diện này theo a.

Bài 62. Cho tứ diện ABCD có AB = CD =2a, BC=CD=DA=DB = 1. Gọi M, N là trung điểm AB, CD. Cm: MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD và tính thể tích tứ diện ABCD theo a, biết 0 < a < $\sqrt{2}/2$.

Bài 63. Cho hình chóp *S.ABC*, đáy *ABC* là tam giác vuông tại *C*, *SA* vuông góc mp(*ABC*). Gọi *H* và *K* là hình chiếu vuông góc của *A* lên *SB* và *SC,* và *HK* và *BC* cắt nhau tại *D*. Chứng minh rằng tam giác *AHK* vuông và đt *AD* tiếp xúc với mặt cầu đường kính *AB*.

Bài 64. Cho hình lăng trụ đứng ABCDA’B’C’D’ có đáy là một hình thoi cạnh a, góc BAD bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của AA’, N là trung điểm của CC’. Tính chiều cao của hình lăng trụ theo a để B’MDN là hình vuông.

Bài 65. Thiết diện qua trục của một khối nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng a. Tính diện tích xung quanh của hình nón. Tính thể tích của khối nón.

Bài 66. Cho hình nón đỉnh S đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho d(O,AB) = a và $\angle SAO = 30^0$, $\angle SAB = 60^0$. Tính độ dài đường sinh và dt xung quanh của hình nón theo a. Tính thể tích của khối nón.

Bài 67. Cho hình chóp S.ABC có đáy ΔABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi O là trung điểm của SC. Chứng minh: OA = OB = OC = SO. Suy ra bốn điểm A, B, C, S cùng nằm trên mặt cầu tâm O bán kính $R = \frac{SC}{2}$. Cho SA = BC = a và $AB = a\sqrt{2}$. Tính bán kính mặt cầu .

Bài 68. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm hình vuông ABCD và K là hình chiếu của B trên SC.Chứng minh ba điểm O, A, K cùng nhìn đoạn SB dưới một góc vuông. Suy ra năm điểm S, D, A, K, B cùng nằm trên mặt cầu đường kính SB. Xác định tâm và bán kính mặt cầu nói trên.

Bài 69. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân, AB=AC = a, SA = SB =SC =2a. Tính thể tích của hình chóp S.ABC và tính bán kính mặt cầu ngoài tiếp hình chóp S.ABC.

Bài 70. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, $AC = a\sqrt{3}$, SAB là một tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích hình chóp S.ABC và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Bài 71. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh A, $\angle BAD = 120^o$, các mặt bên của hình chóp tạo với đáy góc 60^o. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC. Tính thể tích của hình chóp S.ABCD và bán kính mặt cầu tâm G tiếp xúc với các mặt bên. Hình chóp S.ABCD có ngoại tiếp mặt cầu không, tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp S.ABCD (nếu có).

Bài 72. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, BA = 3a, BC = 4a; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết SB $= 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$.Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Bài 73. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông, tam giác A'AC vuông cân, A'C = a. Tính thể tích của khối tứ diện ABB'C' và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

Bài 74. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $\widehat{BAD} = 120^0$, M là trung điểm của cạnh BC và $\widehat{SMA} = 45^0$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

Bài 75. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^0$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

Bài 76. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

Bài 77. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = a, hình chiếu vuông góc của S lên mp(ABCD) là H thuộc AC, AH = 1/4AC. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm SA và tính thể tích khối chóp SMBC.

Bài 78. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

Chuyên Đề: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT & GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ (BIỂU THỨC MỘT BIẾN)

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA: Giả sử hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập hợp D.

- Số M được gọi là GTLN của hàm số $y=f(x)$ trên tập D nếu các điều sau được thỏa mãn

$$\boxed{\begin{cases} \text{i) } f(x)\le M \quad \forall x\in D \\ \text{ii) } \exists x_0\in D: f(x_0)=M \end{cases}}$$

  Ký hiệu: $M=\underset{x\in D}{\mathrm{Max}}\, f(x)$ (x_0 còn được gọi là điểm rơi)

- Số m được gọi là GTNN của hàm số $y=f(x)$ trên tập D nếu các điều sau được thỏa mãn

$$\boxed{\begin{cases} \text{i) } f(x)\ge m \quad \forall x\in D \\ \text{ii) } \exists x_0\in D: f(x_0)=m \end{cases}}$$

  Ký hiệu: $m=\min\limits_{x\in D} f(x)$ (x_0 còn được gọi là điểm rơi)

- **Quy ước:** Ta quy ước rằng khi nói GTLN hay GTNN của hàm số f mà không nói "trên tập D" thì ta hiểu đó là GTLN hay GTNN trên **TẬP XÁC ĐỊNH** của nó.
- Đối với GTLN và GTNN đối với hàm nhiều biến $f(x;y)$ hay $f(x;y;z)$ cũng có định nghĩa tương tự.

2. CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG DÙNG ĐỂ TÌM GTLN & GTNN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN

2.1. Phương pháp 1 : Sử dụng bất đẳng thức (hay phương pháp dùng định nghĩa).

2.2. Phương pháp 2 : Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình (hay phương pháp miền giá trị).

2.3. Phương pháp 3 : Sử dụng đạo hàm (hay phương pháp giải tích).

II. CÁC VÍ DỤ MẪU

1. Phương pháp 1 : Sử dụng bất đẳng thức (hay phương pháp dùng định nghĩa).

Một số kiến thức thường dùng:

a) $f(x)=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}$

b) Bất đẳng thức Cô-si:

- Với hai số a, b không âm $(a,b\geq 0)$ ta luôn có: $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}$

  Dấu "=" xảy ra khi $a=b$
- Với ba số a, b, c không âm $(a,b,c\geq 0)$ ta luôn có: $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$

  Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

c) Một số bất đẳng thức cơ bản thường dùng

1) $a^2+b^2\geq 2ab\Leftrightarrow ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$

2) $(a+b)^2\geq 4ab\Leftrightarrow ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}$

3) $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)\Leftrightarrow a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}$

Ví dụ 1: Tìm GTLN của hàm số $f(x)=-2x^2+8x+1$.

Bài giải

♥ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

♥ Ta có

- $f(x)=-2x^2+8x+1=9-2(x-2)^2\leq 9,\forall x\in D$
- Dấu "=" xảy ra khi $x=2\in D$

♥ Vậy $\max\limits_{x\in D} f(x)=9$.❒

Ví dụ 2: Tìm GTNN của hàm số $f(x)=\sqrt{2x^2-4x+12}$.

Bài giải

♥ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

♥ Ta có

- $f(x)=\sqrt{2x^2-4x+12}=\sqrt{2(x-1)^2+10}\geq\sqrt{10},\forall x\in D$
- Dấu "=" xảy ra khi $x=1\in D$

♥ Vậy $\min\limits_{x\in D} f(x)=\sqrt{10}$.❒

Ví dụ 3: Tìm GTNN của các hàm số $f(x)=x+\frac{2}{x-1}$ với $x\in(1;+\infty)$.

Bài giải

♥ $D=(1;+\infty)$

♥ Theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

- $f(x)=x+\dfrac{2}{x-1}=x-1+\dfrac{2}{x-1}+1\geq 2\sqrt{(x-1).\dfrac{2}{x-1}}+1=2\sqrt{2}+1,\forall x\in(1;+\infty)$
- Dấu "=" xảy ra khi $x-1=\dfrac{2}{x-1}\Leftrightarrow(x-1)^2=2\Leftrightarrow x=1+\sqrt{2}\in D$

♥ Vậy $\min\limits_{x\in D}f(x)=2\sqrt{2}+1$.❒

2. Phương pháp 2 : Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình (hay phương pháp miền giá trị).

Cơ sở lý thuyết của phương pháp: Cho hàm số xác định bởi biểu thức dạng $y=f(x)$

- ***Tập xác định*** của hàm số được định nghĩa là :

$$D=\{\,x\in\mathbb{R}\mid f(x)\ \textbf{có nghĩa}\}$$

- ***Tập giá trị*** của hàm số được định nghĩa là :

$$T=\{\,y\in\mathbb{R}\mid \text{Phương trình } f(x)=y\ \textbf{có nghiệm}\ x\in D\,\}$$

Do đó nếu ta tìm được tập giá trị T của hàm số thì ta có thể tìm được GTLN và GTNN của hàm số đó.

Một số kiến thức thường dùng:

a) Phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta\geq 0$

b) Phương trình $a\cos x+b\sin x=c\ (a,b\neq 0)$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\geq c^2$

Ví dụ 1 : Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+2}{x^2-x+2}$. (1)

Bài giải

♥ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

♥ Xem (1) là phương trình theo ẩn x ta có:

$$y=\frac{x^2+x+2}{x^2-x+2}\Leftrightarrow yx^2-yx+2y=x^2+x+2$$

$$\Leftrightarrow(y-1)x^2-(y+1)x+2y-2=0\qquad(2)\quad(\text{Dạng } ax^2+bx+c=0)$$

+ Trường hợp 1: Với $y=1$ thì (2) có nghiệm $x=0$

+ Trường hợp 2: Với $y\neq 1$ thì (2) có nghiệm $\Leftrightarrow\ \Delta\geq 0$

$$\Leftrightarrow\ -7y^2+18y-7\geq 0\ \Leftrightarrow\ \frac{9-4\sqrt{2}}{7}\leq y\leq\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$$

Suy ra tập giá trị của hàm số là $T=\left[\dfrac{9-4\sqrt{2}}{7};\dfrac{9+4\sqrt{2}}{7}\right]$.

♥ Vậy $\min\limits_{x\in D}y=\dfrac{9-4\sqrt{2}}{7};\max\limits_{x\in D}y=\dfrac{9+4\sqrt{2}}{7}$.❒

Ví dụ 2: Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y=\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}$. (1)

Bài giải

♥ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

♥ Xem (1) là phương trình theo ẩn x ta có:

$(1) \Leftrightarrow 2y + y\cos x = 1 + \sin x \Leftrightarrow y\cos x - \sin x = 1 - 2y$ (2) (dạng $a\cos x + b\sin x = c$)

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow y^2 + (-1)^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{4}{3}$

Suy ra tập giá trị của hàm số là $T = \left[0; \frac{4}{3}\right]$.

♥ Vậy $\min\limits_{x \in D} y = 0$; $\max\limits_{x \in D} y = \frac{4}{3}$.❐

3. Phương pháp 3 : Sử dụng đạo hàm (hay phương pháp giải tích).

Kiến thức có liên quan

- **Điều kiện tồn tại GTLN và GTNN:**
  Định lý: Hàm số ***liên tục*** trên một đoạn $[a;b]$ thì đạt được GTLN và GTNN trên đoạn đó.
- **Phương pháp chung:** Muốn tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên miền D, ta lập **BẢNG BIẾN THIÊN** của hàm số trên D rồi dựa vào BBT suy ra kết quả.
- **Phương pháp riêng:**
  Trong nhiều trường hợp, **có thể tìm GTLN và GTNN của hàm số trên một đoạn mà không cần lập bảng biến thiên của nó**. Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, có thể trừ một số hữu hạn điểm . Nếu $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc $(a;b)$ thì ta có quy tắc tìm GTLN và GTNN của hàm f trên đoạn $[a;b]$ như sau:

  Quy tắc

  1) Tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_m$ thuộc $(a;b)$ mà tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

  2) Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_m), f(a), f(b)$.

  3) So sánh các giá trị tìm được.
    - Số lớn nhất trong các giá trị đó là GTLN của f trên đoạn $[a;b]$.
    - Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là GTNN của f trên đoạn $[a;b]$.

XÉT HÀM TRỰC TIẾP

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$.

Bài giải

♥ $D = [-1;2]$

♥ Ta có: $y' = 6x^2 + 6x - 12$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \notin D \\ x = 1 \in D \end{array}\right.$$

Do $y(-1) = 15$; $y(2) = 6$; $y(1) = -5$ $\Rightarrow \min\limits_{x \in D} y = -5$; $\max\limits_{x \in D} y = 15$

♥ Vậy $\min\limits_{x \in D} y = -5$; $\max\limits_{x \in D} y = 15$.❐

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = e^x\left(x^2 - x - 1\right)$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Bài giải

♥ $D = \left[0;2\right]$

♥ Ta có: $y' = e^x\left(x^2 + x - 2\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \notin D \\ x = 1 \in D \end{array}\right.$$

Do $y\left(0\right) = -1;\ y\left(2\right) = e^2;\ y\left(1\right) = -e \Rightarrow \min\limits_{x\in D} y = -e;\ \max\limits_{x\in D} y = e^2$

♥ Vậy $\min\limits_{x\in D} y = -e;\ \max\limits_{x\in D} y = e^2$.❒

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - \sqrt{4 - x^2}$.

Bài giải

♥ $D = \left[-2;2\right]$

♥ Ta có: $y' = \dfrac{\sqrt{4 - x^2} + x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \in D$$

Do $y\left(-2\right) = -2;\ y\left(2\right) = 2;\ y\left(-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2} \Rightarrow \min\limits_{x\in D} y = -2\sqrt{2};\ \max\limits_{x\in D} y = 2$

♥ Vậy $\min\limits_{x\in D} y = -2\sqrt{2};\ \max\limits_{x\in D} y = 2$.❒

Ví dụ 4: (THPT QG 2015)

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1;3]$.

Đáp án

Ta có $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[1;3]$; $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$.	0,25
Với $x \in [1;3]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.	0,25
Ta có $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = \dfrac{13}{3}$.	0,25
Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ lần lượt là 5 và 4.	0,25

ĐỔI BIẾN (ĐẶT ẨN PHỤ)

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sin^2 x-\cos x+1$.

Bài giải

♥ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

♥ Đặt $t=\cos x$ với $t\in\left[-1;1\right]$, hàm số trở thành: $y=-2t^2-t+3$

Ta có: $y'=-4t-1$; $y'=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{4}\in\left[-1;1\right]$

Do $y\left(-1\right)=2;\ y\left(1\right)=0;\ y\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{25}{8}\ \Rightarrow\ \min\limits_{x\in D} y=0;\ \max\limits_{x\in D} y=\dfrac{25}{8}$

♥ Vậy $\min\limits_{x\in D} y=0;\ \max\limits_{x\in D} y=\dfrac{25}{8}$.❒

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{4(x-1)}$ với $x\in\left[2;4\right]$

Bài 2. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x^2}{36}$ với $x\in\left[0;\sqrt{6}\right]$

Bài 3. Tìm GTNN của các hàm số $y=\dfrac{x^2}{2x^2+3}+\dfrac{2}{1+x}$ với $x\in\left[1;2\right]$

Bài 4. Tìm GTNN của các hàm số $y=(x-1)^3-\sqrt{x^2+2x-6}$ với $x\in\left[2;+\infty\right)$

Bài 5. Tìm GTNN của các hàm số $y=x^2+3x+2\sqrt{1-2x}$ với $x\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$

Bài 6. Tìm GTLN của các hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+3}}-\dfrac{x-2}{6(x+1)}$ với $x\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$

Bài 7. Tìm GTLN của hàm số $y=\dfrac{3x+4x^3}{2\left(1-8x^3\right)}$ với $x\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$

Bài 8. Tìm GTNN của hàm số $y=x^2-\dfrac{8}{x+3}$ với $x\in\left[-1;+\infty\right)$

Bài 9. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=-x^2+4x+\dfrac{2}{x}$ với $x\in\left[3-\sqrt{5};2\right]$

Chuyên đề

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN BẰNG CÁCH KẾT HỢP BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ VÀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Huỳnh Chí Hào
THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp

I. MỞ ĐẦU

Bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của các **biểu thức 3 biến** thường được chọn làm bài khó nhất trong kỳ thi tuyển sinh đại học những năm gần đây. Phương pháp thường sử dụng là **kết hợp bất đẳng thức đại số** và **tính đơn điệu của hàm số** để tìm GTLN và GTNN.

II. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bước 1: Biến đổi biểu thức nhiều biến về biểu thức có thể đặt ẩn phụ để đưa về một biến.
Kỹ thuật biến đổi thường dùng là biến đổi **đồng nhất** hoặc **ước lượng**. **(giảm biến).**

Bước 2: Sử dụng các bất đẳng thức đại số (bất đẳng thức cổ điển, bất đẳng thức phụ) để tìm điều kiện của ẩn phụ. **(thường là điều kiện ĐÚNG).**

Bước 3: Tìm GTLN, GTNN bằng cách sử dụng đạo hàm để **khảo sát tính đơn điệu của hàm một biến**. **(khảo sát hàm của ẩn phụ).**

<u>Lưu ý</u>: Với các **biểu thức đối xứng 3 biến** a,b,c (tức là các biểu thức không thay đổi với mọi hoán vị của ba biến a,b,c) ta có thể đặt một trong các biểu thức sau là ẩn phụ

$$a+b+c; \quad ab+bc+ca; \quad abc; \quad a^2+b^2+c^2$$

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ THƯỜNG DÙNG

TT	Điều kiện của biến	Bất đẳng thức phụ	Điều kiện xảy ra đẳng thức (Điểm rơi)
1	$a,b\in\mathbb{R}$	$ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$ $ab\ge-\dfrac{a^2+b^2}{2}$	$a=b$ $a=-b$
2	$a,b\in\mathbb{R}$	$ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$	$a=b$
3	$a,b\in\mathbb{R}$	$(a+b)^2\le2(a^2+b^2)$ $a^2+b^2\ge\dfrac{1}{2}(a+b)^2$	$a=b$
4	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$	$a=b=c$
5	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$ $3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\ge(ab+bc+ca)^2$	$a=b=c$
6	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)$ $(ab+bc+ca)^2\ge3abc(a+b+c)$ $ab+ba+ca\le\dfrac{(a+b+c)^2}{3}\le a^2+b^2+c^2$	$a=b=c$
7	$a,b\ge0$ và $ab\le1$	$\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\le\dfrac{2}{1+ab}$ (*sử dụng phải CM*)	$a=b$ hoặc $ab=1$
8	$a,b\ge0$ và $ab\ge1$	$\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\ge\dfrac{2}{1+ab}$ (*sử dụng phải CM*)	$a=b$ hoặc $ab=1$
9	$a,b\in\mathbb{R}$ và $0\le a,b\le1$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{1+ab}}$ (*sử dụng phải CM*)	$a=b$
10	$a,b\in\mathbb{R}$ và $ab\ge1$	$\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$ (*sử dụng phải CM*)	$a=b$ hoặc $ab=1$
11	$a,b\ge0$	$\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}\ge\dfrac{1}{1+ab}$ (*sử dụng phải CM*)	$a=b=1$
12	$a,b\ge0$	$a^3+b^3\ge\dfrac{1}{4}(a+b)^3$ (*sử dụng phải CM*) $a^3+b^3\ge ab(a+b)$	$a=b$
13	$a,b>0$	$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge\dfrac{8}{(a+b)^2}$ (*sử dụng phải CM*)	$a=b$

III. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

1. Ba biến đối xứng

Dạng 1: Biến đổi đồng nhất

Ví dụ 1. Cho a,b,c **không âm** thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Tìm **giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P=ab+bc+ca+\dfrac{5}{a+b+c}$.

Hướng dẫn giải

+ P là **biểu thức đối xứng** theo 3 biến a,b,c.
+ Biến đổi P theo biểu thức $a+b+c$.
+ Đặt ẩn phụ $t=a+b+c$ và đánh giá chính xác giá trị của biến t.

Lời giải

B1• Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

Từ đẳng thức $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$, kết hợp với giả thiết $a^2+b^2+c^2=3$.

Ta suy ra:

$$P=\frac{(a+b+c)^2-3}{2}+\frac{5}{a+b+c}$$

Đặt $t=a+b+c$ thì $P=\dfrac{t^2-3}{2}+\dfrac{5}{t}=\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{5}{t}-\dfrac{5}{2}=f(t)$

B2• Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Ta có: $ab+bc+ca=\dfrac{t^2-3}{2}$ mà $0\le ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2=3$ nên

$$0\le\frac{t^2-3}{2}\le 3 \Leftrightarrow 3\le t^2\le 9 \Leftrightarrow \sqrt{3}\le t\le 3 \qquad (1)$$

Dấu “=” ở vế trái của (1) xảy ra khi $a=\sqrt{3};\ b=c=0$ và các hoán vị.

Dấu “=” ở vế trái của (1) xảy ra khi $a=b=c=1$

B3• Tìm GTNN và GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN và GTLN của P.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-5}{2}+\dfrac{5}{t}=\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{5}{t}-\dfrac{5}{2}$ trên đoạn $\left[\sqrt{3},3\right]$

Ta có: $f'(t)=t-\dfrac{5}{t^2}=\dfrac{t^3-5}{t^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{5}\notin\left[\sqrt{3};3\right]$

Bảng biến thiên

t	$\sqrt{3}$		3
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{14}{3}$

Từ bảng biến thiên suy ra: $\frac{5\sqrt{3}}{3} \le f(t) \le \frac{14}{3},\ \forall t \in \left[\sqrt{3};3\right] \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{3} \le P \le \frac{14}{3}$ (2)

Dấu "=" ở VT của (2) xảy ra khi $a = \sqrt{3};\ b = c = 0$ và các hoán vị.

Dấu "=" ở VP của (2) xảy ra khi $a = b = c = 1$

B4 • Kết luận:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ đạt khi $a = \sqrt{3};\ b = c = 0$ và các hoán vị.

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{14}{3}$ đạt khi $a = b = c = 1$ r

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là **các số thực** thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm **giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P = xy + yz + zx + \frac{4}{x+y+z}$.

Hướng dẫn giải

+ Đặt $t = ab + bc + ca$ với $t \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$

+ Xét hàm số $f(t) = t + \frac{4}{t+2}$ với $t \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$

+ Kết quả

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2 đạt khi $a = \pm 1; b = c = 0$ và các hoán vị

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{7}{3}$ đạt khi $a = b = c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ r

Ví dụ 2. Cho các số thực **không âm** x, y, z thỏa mãn $3(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx = 12$.

Tìm **giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x+y+z} + xy + yz + zx$.

Hướng dẫn giải

+ P là **biểu thức đối xứng** theo 3 biến x, y, z.

+ Biến đổi biểu thức P theo $x^2 + y^2 + z^2$.

+ Đặt ẩn phụ $t = x^2 + y^2 + z^2$ và đánh giá chính xác giá trị của biến t.

Lời giải

B1 • Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

Từ giả thiết $3(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx = 12 \Rightarrow xy + yz + zx = 12 - 3(x^2 + y^2 + z^2)$

Do đó: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 + 2\left[12 - 3(x^2 + y^2 + z^2)\right]$

$= 24 - 5(x^2 + y^2 + z^2)$

Nên: $P=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}+xy+yz+zx=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{24-5(x^2+y^2+z^2)}}+12-3(x^2+y^2+z^2)$

Đặt $t=\sqrt{24-5(x^2+y^2+z^2)}$ thì

$$P=\frac{\frac{1}{5}(24-t^2)}{t}+12-3.\frac{24-t^2}{5}=\frac{1}{5}\left(3t^2-t+\frac{24}{t}\right)-\frac{12}{5}=f(t)$$

B2• Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Từ giả thiết $3(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx=12\Rightarrow 3(x^2+y^2+z^2)\le 12\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le 4$

$$\Rightarrow 24-5(x^2+y^2+z^2)\ge 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{24-5(x^2+y^2+z^2)}\ge 2 \qquad (1)$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x=2; y=z=0$ và các hoán vị. Suy ra: $t\ge 2$

Do $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ nên từ giả thuyết ta lại suy ra được

$$12\le 3(x^2+y^2+z^2)+x^2+y^2+z^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge 3$$

$$\Rightarrow 24-5(x^2+y^2+z^2)\le 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{24-5(x^2+y^2+z^2)}\le 3 \qquad (2)$$

Dấu "=" ở (2) xảy ra khi $x=y=z=1$. Suy ra: $t\le 3$

Suy ra: $2\le t\le 3$. Vậy $t\in[2;3]$

B3• Tìm GTNN và GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN và GTLN của P.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{5}\left(3t^2-t+\dfrac{24}{t}\right)-\dfrac{12}{5}$ với $t\in[2;3]$, ta có

$$f'(t)=\frac{1}{5}\left(6t-1-\frac{24}{t^2}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{6t^3-t^2-24}{t^2}\right) \quad \text{(Sử dụng TABLE của MTCT đánh giá)}$$

$$=\frac{1}{5}\left[(t-1)+\left(5t-\frac{24}{t^2}\right)\right]=\frac{1}{5}\left[(t-1)+\left(\frac{5t^3-24}{t^2}\right)\right]>0,\forall t\in[2;3]$$

Bảng biến thiên

t	2	3
$f'(t)$	+	
$f(t)$	2 ↗	4

Từ bảng biến thiên suy ra: $2\le f(t)\le 4$, $\forall t\in[2;3]$ $\Rightarrow 2\le P\le 4$ (3)

Dấu "=" ở VT của (3) xảy ra khi đạt khi $x=2; y=z=0$ và các hoán vị.

Dấu "=" ở VP của (3) xảy ra khi đạt khi $x=y=z=1$.

B4• Kết luận

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2 đạt khi $x=2; y=z=0$ và các hoán vị.

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là 4 đạt khi $x=y=z=1$ r

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2+3}$.

Hướng dẫn giải

+ P là **biểu thức đối xứng** theo 3 biến a,b,c.

+ Biến đổi biểu thức P theo $a^2+b^2+c^2$.

+ Đặt ẩn phụ $t=a^2+b^2+c^2$ và đánh giá chính xác giá trị của biến t.

Lời giải

B1• Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

Ta có: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca=\dfrac{9-(a^2+b^2+c^2)}{2}$

Do đó: $P=a^2+b^2+c^2+\dfrac{9-(a^2+b^2+c^2)}{2(a^2+b^2+c^2+3)}$

Đặt $t=a^2+b^2+c^2$ thì $P=t+\dfrac{9-t}{2t+6}=\dfrac{2t^2+5t+9}{2t+6}=f(t)$

B2• Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Ta có: $(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \ge 3$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x=y=z=1$. Suy ra: $t \ge 3$

Do $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x+y+z=3 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+z^2<(x+y+z)^2=9$

Suy ra: $3 \le t < 9$. Vậy $t \in [3;9)$

B3• Tìm GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN của P.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t^2+5t+9}{2t+6}$ với $t \in [3;9)$, ta có

$$f'(t)=\frac{4\left(t^2+6t+3\right)}{(2t+6)^2}>0, \forall t \in [3;9)$$

Bảng biến thiên

t	3		9
$f'(t)$		+	
$f(t)$		$\nearrow$	9
	$\frac{7}{2}$		

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t)\geq\frac{7}{2},\ \forall t\in\left[3;9\right) \Rightarrow P\geq\frac{7}{2}$ (2)

Dấu "=" ở (2) xảy ra khi $a=b=c=1$.

B4 • Kết luận

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{7}{2}$ đạt khi $a=b=c=1$. **r**

Ví dụ 4. Cho các số thực $x,y,z\in\left[0;2\right]$ thỏa mãn $x+y+z=3$.

Tìm **giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P=\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}-(xy+yz+zx)$.

Hướng dẫn giải

+ P là **biểu thức đối xứng** theo 3 biến x,y,z.
+ Biến đổi biểu thức P theo $xy+yx+zx$.
+ Đặt ẩn phụ $t=xy+yx+zx$ và đánh giá chính xác giá trị của biến t.

Lời giải

B1 • Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

Ta có: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2\left(xy+yz+zx\right) \Rightarrow x^2+y^2+z^2=9-2(xy+yz+zx)$

Ta có: $P=\frac{9-2(xy+yz+zx)}{xy+xy+xz}-(xy+xy+xz)$

Đặt $t=xy+yz+zx$ thì $P=\frac{9-2t}{t}-t=f(t)$

B2 • Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Từ giả thiết $x,y,z\in\left[0;2\right]\Rightarrow(x-2)(y-2)(z-2)\leq 0$

$\Rightarrow xyz-2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)-8\leq 0$

$\Rightarrow 24-5(x^2+y^2+z^2)\geq 4$

$\Rightarrow xy+yz+zx\geq\frac{xyz+4(x+y+z)-8}{2}\geq\frac{12-8}{2}=2$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x=2;y=1,z=0$ và các hoán vị. Suy ra: $t\geq 2$

Do $xy+xz+zx\leq\frac{1}{3}(x+y+z)^2=3$. (2)

Dấu "=" ở (2) xảy ra khi $x=y=z=1$. Suy ra: $t\leq 3$

Suy ra: $2\leq t\leq 3$. Vậy $t\in\left[2;3\right]$

B3 • Tìm GTLN và GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTLN và GTNN của P.

Xét hàm số $f(t)=\frac{9-2t}{t}-t$ với $t\in\left[2;3\right]$, ta có:

$$f'(t)=-\frac{9}{t^2}-1<0,\forall t\in\left[2;3\right]$$

Bảng biến thiên

t	2		3
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-2

Từ bảng biến thiên suy ra: $-2 \le f(t) \le \frac{1}{2}$, $\forall t \in [1;2]$ $\Rightarrow -2 \le P \le \frac{1}{2}$ (2)

Dấu "=" của VT ở (2) xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Dấu "=" của VP ở (2) xảy ra khi $x = 2; y = 1; z = 0$ và các hoán vị.

B4 • Kết luận

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là -2 đạt khi $x = y = z = 1$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{1}{2}$ đạt khi $x = 2; y = 1, z = 0$ và các hoán vị **r**

Ví dụ 5. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P = (xy + yz + 2zx)^2 - \dfrac{8}{(x+y+z)^2 - xy - yz + 2}$.

Hướng dẫn giải

+ Khai triển và thu gọn $(x+y+z)^2 - xy - yz + 2$ sẽ được biểu thức có liên quan đến $xy + yz + 2zx$

+ Đặt ẩn phụ $t = xy + yz + 2zx$ và đánh giá chính xác giá trị của biến t.

Lời giải

B1 • Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

Ta có: $P = (xy + yz + 2zx)^2 - \dfrac{8}{xy + yz + 2zx + 3}$

Đặt $t = xy + yz + 2zx$ thì $P = t^2 - \dfrac{8}{t+3} = f(t)$

B2 • Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Ta có: $(x+y+z)^2 = 1 + 2(xy + yz + zx) \ge 0 \Rightarrow xy + yz + 2zx \ge -\frac{1}{2} + xz \ge -\frac{1}{2} - \frac{x^2 + z^2}{2} = -1 + \frac{y^2}{2} \ge -1$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $y = 0, x = -z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra: $t \ge -1$

B3 • Tìm GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN của P.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - \dfrac{8}{t+3}$ trên nữa khoảng $[-1; +\infty)$

Ta có: $f'(t)=2t+\dfrac{8}{\left(t+3\right)^2}=\dfrac{2t\left(t+3\right)^2+8}{\left(t+3\right)^2}=\dfrac{2t^3+12t^2+18t+8}{\left(t+3\right)^2}=\dfrac{2\left(t+1\right)^2\left(t+4\right)}{\left(t+3\right)^2}$;

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=-1$

Bảng biến thiên

t	-1		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	
$f(t)$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t)\ge -3,\ \forall t\in\left[-1;+\infty\right)\ \Rightarrow P\ge -3$ (2)

Dấu "=" ở (2) xảy ra khi $y=0, x=-z=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

B4• Kết luận

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là -3 đạt khi $y=0, x=-z=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. r

Ví dụ 6. Cho a,b,c là các **số thực dương** thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=\dfrac{1-16abc}{4}$.

Tìm **giá trị lớn nhất** của biểu thức $P=\dfrac{3\sqrt[3]{abc}+4abc}{1+4(a^2+b^2+c^2)}$.

Hướng dẫn giải

+ Đặt $t=\sqrt[3]{abc}$ với $t\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$

+ Xét hàm số $f(t)=\dfrac{3t+4t^3}{2(1-8t^3)}$ với $t\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$

+ Kết quả: Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\dfrac{13}{28}$ đạt khi $a=b=c=\dfrac{1}{4}$ r

Lời giải

B1• Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

Ta có: $P=\dfrac{3\sqrt[3]{abc}+4abc}{1+4(a^2+b^2+c^2)}=\dfrac{3\sqrt[3]{abc}+4abc}{2(1-8xyz)}$

Đặt $t=\sqrt[3]{xyz}$ thì $P=\dfrac{3t+4t^3}{2(1-8t^3)}=f(t)$

B2• Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Từ giả thiết $a^2+b^2+c^2=\dfrac{1-16abc}{4}\Rightarrow 1-16abc=4(a^2+b^2+c^2)\ge 12\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

Suy ra: $1-16t^3 \geq 12t \Leftrightarrow 16t^3+12t-1\leq 0 \Leftrightarrow \left(t-\frac{1}{4}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t\leq \frac{1}{4}$. (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{4}$. Vậy $t\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$

B3 • Tìm GTLN của hàm một biến, từ đó suy ra GTLN của P .

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{3t+4t^3}{2(1-8t^3)}$ với $t\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$, ta có

$$f'(t)=\frac{48t^3+12t^2+3}{2(1-8t^3)^2}=\frac{3(2t+1)(8t^2-2t+1)}{2(1-8t^3)^2}>0, \forall t\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$\frac{1}{4}$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{13}{28}$

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t)\leq\frac{13}{28}$, $t\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right] \Rightarrow P\leq\frac{13}{28}$ (2)

Dấu "=" ở (2) xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{4}$.

B4 • Kết luận

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{13}{28}$ đạt khi $a=b=c=\frac{1}{4}$ **r**

Ví dụ 7. Cho các số thực **không âm** x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=27$.

Tìm **giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P=\frac{1}{2}(x+y+z)^2-\frac{4}{3}\sqrt{(x+y+z)^3}-3(x+y+z)$

Hướng dẫn giải

\+ Đặt $t=x+y+z$ với $t\in\left[3\sqrt{3};9\right]$

\+ Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}-3t$ với $t\in\left[3\sqrt{3};9\right]$

\+ Kết quả:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $-\frac{45}{2}$ đạt khi $x=y=z=3$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{27}{2}-12\sqrt[4]{3}-9\sqrt{3}$ đạt khi $x=3\sqrt{3}, y=z=0$ và các hoán vị.

Lời giải

B1 • Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

Đặt $t=x+y+z$ thì $P=\frac{1}{2}t^2-\frac{4}{3}\sqrt{t^3}-3t=f(t)$

B2 • Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Do $\left(x+y+z\right)^2\le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)=81 \Rightarrow t\le 9$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=3$

Vì $x,y,z\ge 0 \Rightarrow \left(x+y+z\right)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)\ge x^2+y^2+z^2=27$

$\Rightarrow t\ge 3\sqrt{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=3\sqrt{3}, y=z=0$ và các hoán vị.

Vậy $t\in\left[3\sqrt{3};9\right]$

B3 • Tìm GTNN và GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN và GTLN của P.

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{4}{3}\sqrt{t^3}-3t$ với $t\in\left[3\sqrt{3};9\right]$, ta có

$$f'(t)=t-2\sqrt{t}-3=\left(\sqrt{t}-3\right)\left(\sqrt{t}+1\right)\le 0$$

Bảng biến thiên

t	$3\sqrt{3}$		9
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	$\frac{27}{2}-12\sqrt[4]{3}-9\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\frac{45}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra: $\frac{27}{2}-12\sqrt[4]{3}-9\sqrt{3}=f\left(3\sqrt{3}\right)\le f(t)\le f\left(9\right)=-\frac{45}{2}$, $\forall t\in\left[3\sqrt{3};9\right]$

$$\Rightarrow \frac{27}{2}-12\sqrt[4]{3}-9\sqrt{3}\le P\le -\frac{45}{2} \qquad (2)$$

Dấu "=" ở VT của (2) xảy ra khi $x=3\sqrt{3};\ y=z=0$ và các hoán vị.

Dấu "=" ở VP của (2) xảy ra khi $x=y=z=3$

B4 • Kết luận

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $-\frac{45}{2}$ đạt khi $x=y=z=3$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{27}{2}-12\sqrt[4]{3}-9\sqrt{3}$ đạt khi $x=3\sqrt{3}, y=z=0$ và các hoán vị.

Dạng 2: Biến đổi ước lượng (đánh giá)

Ví dụ 8 (*Đề thi THPTQG 2015*). Cho các số thực $a,b,c\in[1,3]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$.

Tìm **giá trị lớn nhất** của biểu thức $P=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\dfrac{1}{2}abc$.

Hướng dẫn giải

- P là **biểu thức đối xứng** theo 3 biến a,b,c.
- Nhớ lại rằng P có thể biểu diễn theo các biểu thức đối xứng cơ bản: $a+b+c$ hoặc abc hoặc $ab+bc+ca$.
- Phân tích dữ kiện $a,b,c\in[1,3]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$, kết hợp với biểu thức P định ra các hướng đi.
- Đặt ẩn phụ hợp lý, tìm điều kiện ẩn phụ để biểu diễn biểu thức P (hoặc ước lượng biểu thức P) thành biểu thức một biến sau đó sử dụng công cụ đạo hàm để giải quyết.

Lời giải

B1• Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

$$P=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2.(ab+bc+ca).abc+72}{ab+bc+ca}-\frac{1}{2}abc$$

$$=\frac{(ab+bc+ca)^2+72}{ab+bc+ca}-\frac{abc}{2} \qquad (1)$$

So sánh abc với $ab+bc+ca$ để ước lượng biểu thức P

Do $a,b,c\in[1,3]$ nên $(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0 \Rightarrow abc\ge ab+bc+ca-(a+b+c)=ab+ba+ca-5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$P\le\frac{(ab+bc+ca)^2+72}{ab+bc+ca}-\frac{ab+ba+ca-5}{2}=\frac{t^2+72}{t}-\frac{t-5}{2} \quad \text{với } t=ab+bc+ca$$

B2• Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

i) Do $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca) \Rightarrow 3t\le 36\Rightarrow t\le 12$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $a=b=c=2$

ii) Vì $a,b,c\in[1,3]$ nên $(3-a)(3-b)(3-c)\ge 0$

$$\Rightarrow 3(ab+bc+ca)\ge abc+9(a+b+c)-27=abc+27 \qquad (2)$$

Do $a,b,c\in[1,3]$ nên $(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0$

$$\Rightarrow abc\ge ab+bc+ca-(a+b+c)+1=ab+ba+ca-5 \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra: $3(ab+bc+ca)\ge ab+bc+ca+22 \Rightarrow 3t\ge t+22 \Rightarrow t\ge 11$ (4)

Dấu "=" ở (4) xảy ra khi $a=1,b=2,c=3$.

Do đó: $11\le t\le 12$. Vậy $t\in[11;12]$.

B3• Tìm GTLN của hàm một biến, từ đó suy ra GTLN của P.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+72}{t}-\dfrac{t-5}{2}=\dfrac{t^2+5t+144}{2t}$ với $t\in[11;12]$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2-144}{2t^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=12$

Bảng biến thiên

t	11	12
$f'(t)$	$-$	0
$f(t)$	$\frac{160}{11}$ ↘	$\frac{29}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t) \le f(11) = \frac{160}{11} \Rightarrow P \le \frac{160}{11}$ (5)

Dấu "=" ở (5) xảy ra khi $a=1, b=2, c=3$

B4 • Kết luận

Giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\frac{160}{11}$ r

Ví dụ 9. Cho a,b,c **không âm** thỏa mãn $a+b+c=1$.
Tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P = 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Hướng dẫn giải

+ Đặt $t = ab+bc+ca$ với $t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$

+ Xét hàm số $f(t) = t^2+3t+2\sqrt{1-2t}$ với $t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$

+ Kết quả: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2 đạt khi $a=1; b=c=0$ và các hoán vị r

Lời giải

B1 • Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

Do $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 1-2(ab+bc+ca)$

và $3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \ge (ab+bc+ca)^2$

Suy ra: $P = 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$\ge (ab+bc+ca)^2+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{1-2(ab+bc+ca)}$ **(ước lượng)**

Đặt $t = ab+bc+ca$ thì $P \ge t^2+3t+2\sqrt{1-2t} = f(t)$

B2 • Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Do $0 \le ab+bc+ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}$. Suy ra $0 \le t \le \frac{1}{3}$ (1)

Dấu "=" ở VT của (1) xảy ra khi $a=1;\ b=c=0$ và các hoán vị.

Dấu "=" ở VP của (1) xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. Vậy $t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$

B3 • Tìm GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN của P.

Xét hàm số $f(t)=t^2+3t+2\sqrt{1-2t}$ với $t\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$, ta có

$$f'(t)=2t+3-\frac{2}{\sqrt{1-2t}}$$ (Sử dụng TABLE của MTCT đánh giá)

Sử dụng đạo hàm cấp hai để xét dấu $f'(t)$

Ta có: $$f''(t)=2-\frac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}}\le 0,\forall t\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$$

Bảng biến thiên của $f'(t)$

t	0		$\frac{1}{3}$
$f''(t)$		$-$	0
$f'(t)$	0	$\searrow$	$\frac{11}{3}-2\sqrt{3}$

Từ bảng biến thiên $f'(t)$ ta suy ra: $f'(t)\ge f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{3}-2\sqrt{3}>0,\forall t\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$

Từ đây ta có bảng biến thiên của $f(t)$ như sau

t	0		$\frac{1}{3}$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	2	$\nearrow$	$\frac{10+6\sqrt{3}}{9}$

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t)\ge f(0)=2,\forall t\in\left[0;\frac{1}{3}\right]\Rightarrow P\ge 2$ (2)

Dấu "=" ở (2) xảy ra khi $a=1;\ b=c=0$ và các hoán vị.

B4 • Kết luận

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2 đạt khi $a=1;b=c=0$ và các hoán vị r

Ví dụ 10. Cho các số thực $x,y,z\in(0;1)$ thỏa mãn $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$.

Tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

Hướng dẫn giải

\+ Đặt $t = x+y+z$ với $t \in (0;3)$

\+ Xét hàm số $f(t) = -\dfrac{4}{27}t^3 + t^2 - 2t + 2$ với $t \in (0;3)$

\+ Kết quả:Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\dfrac{3}{4}$ đạt khi $x = y = z = \dfrac{1}{2}$ r

Lời giải

B1 • Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

Ta có: $xyz = (1-x)(1-y)(1-z) \Leftrightarrow xy + yz + zx = 2xyz - 1 + (x+y+z)$

Suy ra: $P = x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$

$$= (x+y+z)^2 - 2\left[2xyz - 1 + (x+y+z)\right]$$

$$= 2 - 2(x+y+z) + (x+y+z)^2 - 4xyz$$

$$\geq 2 - 2(x+y+z) + (x+y+z)^2 - 4\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \quad (1)$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{1}{2}$

Đặt $t = x+y+z$ thì $P \geq -\dfrac{4}{27}t^3 + t^2 - 2t + 2 = f(t)$

B2 • Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Do $x, y, z \in (0;1) \Rightarrow 0 < t < 3$. Vậy $t \in (0;3)$

B3 • Tìm GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN của P.

Xét hàm số $f(t) = -\dfrac{4}{27}t^3 + t^2 - 2t + 2$ với $t \in (0;3)$, ta có

$$f'(t) = -\frac{4}{9}t^2 + 2t - 2,\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2} \\ t = 3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{3}{2}$		3
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{4},\ \forall t \in (0;3) \Rightarrow P \geq \dfrac{3}{4}$ (2)

Dấu "=" ở (2) xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{1}{2}$

B4 • Kết luận

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\dfrac{3}{4}$ đạt khi $x = y = z = \dfrac{1}{2}$ r

Ví dụ 11. Cho các **số thực dương** x, y, z thỏa mãn $x + y + z \le 1$.

Tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P = 3\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} + \dfrac{5}{(x+5y)(y+5z)(z+5x)}$.

Hướng dẫn giải

+ Đánh giá $P \ge 3(x + y + z) + \dfrac{5}{8(x+y+z)^3}$

+ Đặt $t = x + y + z$ với $t \in (0;1]$

+ Xét hàm số $f(t) = 3t + \dfrac{9}{8t^2}$ với $t \in (0;1]$

+ Kết quả: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\dfrac{29}{8}$ đạt khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ r

Lời giải

B1 • Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

Do $3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \ge \left(x + y + z\right)^2 \Rightarrow \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \ge x + y + z$

Theo Cauchy $(x+5y)(y+5z)(z+5x) \le \left(\dfrac{x+5y+y+5z+z+5x}{3}\right)^3 = 8\left(x+y+z\right)^3$

$$\Rightarrow \frac{5}{(x+5y)(y+5z)(z+5x)} \ge \frac{5}{8(x+y+z)^3}$$

Suy ra: $P \ge 3\left(x+y+z\right) + \dfrac{5}{8\left(x+y+z\right)^3}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$

Đặt $t = x + y + z$ thì $P \ge 3t + \dfrac{5}{8t^3} = f(t)$

B2 • Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Do $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z \le 1$ nên $0 < t \le 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$

Vậy $t \in (0;1]$

B3 • Tìm GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN của P.

Xét hàm số $f(t) = 3t + \dfrac{5}{8t^3}$ với $t \in (0;1]$, ta có

$$f'(t) = \frac{24t^4 - 27}{8t^4} < 0, \forall t \in (0;1]$$

t	0		1
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{29}{8}$

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t) \geq f(1) = \dfrac{29}{8}, \forall t \in (0;1] \Rightarrow P \geq \dfrac{29}{8}$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$

B4 • Kết luận

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\dfrac{29}{8}$ đạt khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ r

Ví dụ 12. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leq 3$.

Tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{x} + \dfrac{9}{(x+y)(y+z)(z+x)+xyz}$.

Hướng dẫn giải

+ Đánh giá $P \geq x + y + z + \dfrac{27}{(x+y+z)^3}$

+ Đặt $t = x + y + z$ với $t \in (0;3]$

+ Xét hàm số $f(t) = 3t + \dfrac{9}{8t^2}$ với $t \in (0;3]$

+ Kết quả: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 4 đạt khi $x = y = z = 1$ r

Lời giải

B1 • Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

Do $\dfrac{x^2}{y} + y + \dfrac{y^2}{z} + z + \dfrac{z^2}{x} + x \geq 2x + 2y + 2z \Rightarrow \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{x} \geq x + y + z$

Theo Cauchy thì $(x+y)(y+z)(z+x) + xyz \leq \left(\dfrac{2(x+y+z)}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$

$$\Rightarrow \frac{9}{(x+y)(y+z)(z+x)+xyz} \geq \frac{9}{\left(\frac{2(x+y+z)}{3}\right)^3 + \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3}$$

Suy ra: $P \geq x + y + z + \dfrac{9}{\left(\frac{2(x+y+z)}{3}\right)^3 + \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3}$

Đặt $t = x + y + z$ thì $P \geq t + \dfrac{9}{\dfrac{8t^3}{27} + \dfrac{t^3}{17}} = t + \dfrac{27}{t^3} = f(t)$

B2 • Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Do $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z \leq 3$ nên $0 < t \leq 3$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$

Vậy $t \in (0;3]$.

B3 • Tìm GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN của P.

Xét hàm số $f(t) = t + \dfrac{27}{t^3}$ với $t \in (0;3]$, ta có

$$f'(t) = \frac{t^4 - 81}{t^4} \leq 0, \forall t \in (0;3]$$

t	0	3
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	$+\infty$ ↘	4

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t) \geq f(3) = 4, \forall t \in (0;3] \Rightarrow P \geq 4$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x = y = z = 1$

B4 • Kết luận

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 4 đạt khi $x = y = z = 1$ r

Ví dụ 13. Cho các **số thực dương** x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$.

Tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{3\sqrt{2}}{x + y + z}$.

Hướng dẫn giải

+ Đánh giá $P \geq xy + yz + zx + \dfrac{9\sqrt{2}}{(xy + yz + zx)^2}$

+ Đặt $t = xy + yz + zx$ với $t \in [3;+\infty)$

+ Xét hàm số $f(t) = t + \dfrac{9\sqrt{2}}{t^2}$ với $t \in [3;+\infty)$

+ Kết quả: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $3 + \sqrt{2}$ đạt khi $x = y = z = 1$ r

Lời giải

B1 • Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

Ta có: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{xy + xz + yz}{xyz} = xy + xz + yz$

Do $\left(xy+xz+yz\right)^2 \geq 3xyz(x+y+z)=3(x+y+z)$

$$\Rightarrow x+y+z \leq \frac{\left(xy+xz+yz\right)^2}{3} \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{x+y+z} \geq \frac{9\sqrt{2}}{\left(xy+xz+yz\right)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$

Suy ra: $P \geq xy+xz+yz+\dfrac{9\sqrt{2}}{\left(xy+xz+yz\right)^2}$

Đặt $t=xy+xz+yz$ thì $P \geq t+\dfrac{9\sqrt{2}}{t^2}=f(t)$

B2 • Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Do $xy+xz+yz \geq 3\sqrt[3]{\left(xyz\right)^2}=3 \Rightarrow t \geq 3$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$

Vậy $t \in \left[3;+\infty\right)$

B3 • Tìm GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN của P.

Xét hàm số $f(t)=t+\dfrac{9\sqrt{2}}{t^2}$ với $t \in \left[3;+\infty\right)$, ta có:

$$f'(t)=1-\frac{18\sqrt{2}}{t^3}=\frac{t^3-18\sqrt{2}}{t^3}>0, \forall t \in \left[3;+\infty\right)$$

Bảng biến thiên

t	3	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	$3+\sqrt{2}$ $\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t) \geq f(3)=3+\sqrt{2}, \forall t \in \left[3;+\infty\right) \Rightarrow P \geq 3+\sqrt{2}$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x=y=z=1$

B4 • Kết luận

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $3+\sqrt{2}$ đạt khi $x=y=z=1$ r

Ví dụ 14. Cho các **số thực dương** x,y,z thỏa mãn $xyz=1$.

Tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P=\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)+\dfrac{72}{\sqrt{x+y+x+1}}$.

Hướng dẫn giải

+ Đánh giá $P \ge (x+y+z)\sqrt{3(x+y+z)} + \dfrac{72}{\sqrt{x+y+z+1}} - 1$

+ Đặt $t = xy + yz + zx$ với $t \in [3;+\infty)$

+ Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{3t} + \dfrac{72}{\sqrt{t+1}} - 1$ với $t \in [3;+\infty)$

+ Kết quả: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 44 đạt khi $x = y = z = 1$ **r**

Lời giải

B1• Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

Ta có: $(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - 1$

Do $(xy+yz+zx)^2 \ge 3xyz(x+y+z) \Rightarrow xy+yz+zx \ge \sqrt{3(x+y+z)}$

Suy ra: $P \ge (x+y+z)\sqrt{3(x+y+z)} + \dfrac{72}{\sqrt{x+y+z+1}} - 1$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$

Đặt $t = xy + xz + yz$ thì $P \ge t\sqrt{3t} + \dfrac{72}{\sqrt{t+1}} - 1 = f(t)$

B2• Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Do $xy + xz + yz \ge 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3 \Rightarrow t \ge 3$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$

Vậy $t \in [3;+\infty)$

B3• Tìm GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN của P.

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{3t} + \dfrac{72}{\sqrt{t+1}} - 1$ với $t \in [3;+\infty)$, ta có:

$$f'(t) = \frac{3\sqrt{3t(t+1)^3} - 72}{2\sqrt{(t+1)^3}} > 0, \forall t \in [3;+\infty)$$

Bảng biến thiên

t	3	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	44 ↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t) \ge f(3) = 44, \forall t \in [3;+\infty) \Rightarrow P \ge 44$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x = y = z = 1$

B4• Kết luận

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 44 đạt khi $x = y = z = 1$ **r**

Ví dụ 15. Cho x, y, z là các số thực **dương** và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm **giá trị lớn nhất** của biểu thức $P = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

Lời giải

B1• Ước lượng biểu thức P về hàm một biến số.

Sử dụng **Cauchy-Schwarz:** $(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$ với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$

và **bất đẳng thức phụ**: $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le \dfrac{2}{\sqrt{1+ab}}$ với $ab \le 1$

Không mất tính tổng quát giả sử $x \ge y \ge z \Rightarrow x \ge 1$ và $yz \le 1$

Ta có: $P = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{1+yz}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{1+yz}}$

$$\le \sqrt{\dfrac{1^2+1^2}{\left(1+x\right)^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{1+x} + 2\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{1+x} + 2\sqrt{1-\dfrac{1}{x+1}}$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Suy ra: $P \le \dfrac{\sqrt{2}}{1+x} + 2\sqrt{1-\dfrac{1}{1+x}}$. Đặt $t = \dfrac{1}{1+x}$ thì $P \le \sqrt{2}t + 2\sqrt{1-t} = f(t)$

B2• Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Do $x \ge 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{1+x} \le \dfrac{1}{2}$. Suy ra: $0 < t \le \dfrac{1}{2}$. Vậy $t \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$

B3• Tìm GTLN của hàm một biến, từ đó suy ra GTLN của P.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{2}t + 2\sqrt{1-t}$ trên nửa khoảng $\left(0; \dfrac{1}{2}\right]$

Ta có: $f'(t) = \dfrac{\sqrt{2-2t}-1}{\sqrt{1-t}} \ge 0, \forall t \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$

Bảng biến thiên

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\dfrac{1}{2}$
$f'(t)$	$+$
$f(t)$	2 $\nearrow$ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t) \le f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $\forall t \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$ $\Rightarrow P \le \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x=y=z=1$.

B4 • Kết luận

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ đạt khi $x=y=z=1$. **r**

2. Ba biến không đối xứng

Ví dụ 16. Cho x,y,z là các số thực **không âm** và thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$.

Tìm **giá trị lớn nhất** của biểu thức $P=\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}$.

Hướng dẫn giải

+ Biểu thức **không có tính đối xứng theo 3 biến**. Tuy nhiên **điều kiện và mẫu số của số hạng thứ 2 trong biểu thức** P **lại có tính đối xứng**, giả thiết gợi lên ý tưởng về các hằng đẳng thức.

+ Cần đánh giá ước lượng hai số hạng thứ nhất và thứ ba trong biểu thức P để được biểu thức đối xứng ba biến. Cụ thể đánh giá các biểu thức $x^2+yz+x+1$ và yz với lưu ý đến việc sử dụng điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$.

Lời giải

B1 • Biến đổi biểu thức P về biểu thức có thể đặt ẩn phụ.

+ Ta có: $x^2+yz+x+1=x(x+y+z+1)+(1-xy-xz+yz)$

và $(x-y-z)^2=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz=2(1-xy-yz+yz)\geq 0$

nên $x^2+yz+x+1\geq x(x+y+z+1)$.

Từ đó suy ra được: $\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}\leq\frac{x}{x+y+z+1}$.

+ Mặt khác:

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2x(y+z)+2yz=2+2yz+2x(y+z)\leq 2+2yz+\left[x^2+(y+z)^2\right]=4(1+yz)$

Suy ra: $\frac{1+yz}{9}\geq\frac{(x+y+z)^2}{36}$

Do đó: $P=\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}\leq\frac{x+y+z}{x+y+z+1}-\frac{(x+y+z)^2}{36}=\frac{t}{t+1}-\frac{t^2}{36}$

với $t=x+y+z$

B2 • Tìm điều kiện ĐÚNG cho biến t.

Vì $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\geq 2$

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\leq 2+(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)=6$

Suy ra: $2\leq t^2\leq 6\Rightarrow\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{6}$. (1)

Dấu "=" ở VP của (1) xảy ra khi $x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{3}$

Dấu "=" ở VT của (1) xảy ra khi $x=y=0, z=\sqrt{2}$ và các hoán vị

Vậy $t \in \left[\sqrt{2};\sqrt{6}\right]$

B3• Tìm GTLN của hàm một biến, từ đó suy ra GTLN của P.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t}{t+1} - \dfrac{t^2}{36}$ với $t \in \left[\sqrt{2};\sqrt{6}\right]$

Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2} - \dfrac{t}{18} = -\dfrac{(t-2)(t^2+4t+9)}{18(t+1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên

t	$\sqrt{2}$		2		$\sqrt{6}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{5}{9}$	$\searrow$	
	$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{1}{18}$				$\dfrac{31}{30} - \dfrac{\sqrt{6}}{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t) \le f(2) = \dfrac{5}{9} \Rightarrow P \le \dfrac{5}{9}$ (*)

Dấu "=" ở (*) xảy ra khi $x = y = 1, z = 0$

B4• Kết luận

Giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\dfrac{5}{9}$ r

Ví dụ 17. Cho x, y, z là các **số thực dương** và thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+xy}} + \dfrac{1}{\sqrt{y^2+xy}} + \dfrac{2\sqrt{3}}{1+z}$.

Hướng dẫn giải

+ Biểu thức thứ 1 và 2 có tính **đối xứng theo hai biến** x, y

+ Sử dụng bất đẳng thức đại số và điều kiện đánh giá hai biểu thức thứ 1 và 2 nhằm đưa về hàm theo biến z

Lời giải

B1• Ước lượng biểu thức P về hàm một biến số.

Theo bất đẳng thứ **Cauchy** ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+xy}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+xy}} \ge \frac{2}{\sqrt[4]{(x^2+xy)(y^2+yx)}} \ge \frac{2}{\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2+xy}{2}}} = \frac{2}{\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}} \ge \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (1)$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x = y$. Kết hợp với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ta được:

$$P \geq \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sqrt{12}}{z+1} = \frac{2}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{\sqrt{12}}{z+1} = f(z)$$

B2 • Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến z.

Do x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$ nên $0<z<1$

Vậy $z \in (0;1)$

B3 • Tìm GTNN của hàm một biến, từ đó suy ra GTNN của P.

Xét hàm số $f(z) = \dfrac{2}{\sqrt{1-z^2}} + \dfrac{\sqrt{12}}{z+1}$ trên khoảng $(0;1)$

Ta có: $f'(z) = \dfrac{2z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}} - \dfrac{\sqrt{12}}{(1+z)^2} = \dfrac{2z(1+z^2) - \sqrt{12}(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}{(1+z^2)(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}$

$$f'(z) = 0 \Leftrightarrow 2z(1+z^2) - \sqrt{12}(1-z^2)\sqrt{1-z^2} = 0 \Leftrightarrow 4z^3 - 8z^2 + 9z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2z-1)(2z^2-4z+3) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

z	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$		$\searrow$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(z) \geq \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$, $\forall z \in (0;1)$ $\Rightarrow P \geq \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ (2)

Dấu "=" ở (2) xảy ra khi $x = y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, z = \dfrac{1}{2}$.

B4 • Kết luận

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ đạt khi $x = y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, z = \dfrac{1}{2}$. r

Ví dụ 18. Cho x, y, z là các số thực **không âm** và thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$.

Tìm **giá trị lớn nhất** của biểu thức $P = \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{2y}{y^2+1} + \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$.

Hướng dẫn giải

\+ Biểu thức thứ 1 và 2 có tính **đối xứng theo hai biến** x, y

\+ Sử dụng bất đẳng thức đại số và điều kiện đánh giá hai biểu thức thứ 1 và 2 nhằm đưa về hàm theo biến z

Lời giải

B1• Ước lượng biểu thức P về hàm một biến số.

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}=\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+x)(y+z)}=\frac{xy+xz+xy+yz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$=\frac{xy+1}{\sqrt{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}}=\frac{xy+1}{\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}}$$

$$=\frac{xy+1}{\sqrt{(xy+1)^2+(x-y)^2}.\sqrt{z^2+1}}\le\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$$

$\Rightarrow \dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{2y}{y^2+1}\le\dfrac{2}{\sqrt{z^2+1}}$. Dấu “=” ở (1) xảy ra khi $x=y$.

Suy ra: $P\le\dfrac{2}{\sqrt{z^2+1}}+\dfrac{z^2-1}{z^2+1}=1+\dfrac{2}{\sqrt{z^2+1}}-\dfrac{2}{z^2+1}$

Đặt $t=\sqrt{z^2+1}$ thì $P\le 1+\dfrac{2}{t}-\dfrac{2}{t^2}=f(t)$

B2• Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Do x,y,z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$ nên $z\ge 0$

Suy ra: $t\ge 1$. Vậy $t\in\left[1;+\infty\right)$

B3• Tìm GTLN của hàm một biến, từ đó suy ra GTLN của P.

Xét hàm số $f(t)=1+\dfrac{2}{t}-\dfrac{2}{t^2}$ trên nữa khoảng $\left[1;+\infty\right)$

Ta có: $f'(t)=-\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{4}{t^3}=\dfrac{-2t+4}{t^3}$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$

Bảng biến thiên

t	1		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t)\le\dfrac{3}{2},\ \forall t\in\left[1;+\infty\right)\ \Rightarrow P\le\dfrac{3}{2}$ (1)

Dấu “=” ở (1) xảy ra khi $x=y=2-\sqrt{3}, z=\sqrt{3}$.

B4• Kết luận

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\dfrac{3}{2}$ đạt khi $x=y=2-\sqrt{3}, z=\sqrt{3}$. **r**

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực **dương** và thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$.

Tìm **giá trị lớn nhất** của biểu thức $P=\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{3z}{\sqrt{z^2+1}}$.

Kết quả: Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\sqrt{10}$ đạt khi $x=y=\sqrt{10}-3; z=3$ r

Ví dụ 19. Cho x,y,z là các số thực **dương** và thỏa mãn $x\ge z$.

Tìm **giá trị lớn nhất** của biểu thức $P=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}}$.

Lời giải

B1• Ước lượng biểu thức P về hàm một biến số.

Ta có: $P=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{y}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{z}}}$

Đặt $a=\frac{y}{x},\ b=\frac{z}{y},\ c=\frac{x}{z}$ thì $abc=1$ và $c\ge 1$. Khi đó: $P=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}$

Vì $abc=1,\ c\ge 1$ nên $ab\le 1$. Suy ra: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+ab}}$ (*chứng minh kết quả nầy*)

Ta được: $P\le\frac{2}{\sqrt{1+ab}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{c}}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}=\frac{2\sqrt{c}+1}{\sqrt{1+c}}=f(c)$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b$

B2• Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến c.

Do $x\ge z\ \Rightarrow c=\frac{x}{z}\ge 1$. Suy ra $c\in[1;+\infty)$

B3• Tìm GTLN của hàm một biến, từ đó suy ra GTLN của P.

Xét hàm số $f(c)=\frac{2\sqrt{c}+1}{\sqrt{1+c}}$ trên nửa khoảng $[1;+\infty)$

Ta có: $f'(c)=\frac{2-\sqrt{c}}{2(1+c)\sqrt{c}.\sqrt{1+c}}$; $f'(c)=0\Leftrightarrow 2-\sqrt{c}=0\Leftrightarrow c=4$

Bảng biến thiên

c	1		4		$+\infty$
$f'(c)$		$+$	0	$-$	
$f(c)$		$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(c) \le f(4) = \sqrt{5}$, $\forall t \in [1;+\infty)$ $\Rightarrow P \le \sqrt{5}$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $a = b = \dfrac{1}{2}, c = 4$ hay $x = 2y = 4z$.

B4 • Kết luận

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\sqrt{5}$ đạt khi $x = 2y = 4z$. **r**

Ví dụ 20. Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn [1;4] và $x \ge y, x \ge z$.

Tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức $P = \dfrac{x}{2x+3y} + \dfrac{y}{z+y} + \dfrac{z}{z+x}$.

Lời giải

B1 • Ước lượng biểu thức P về hàm một biến số.

Biến đổi: $P = \dfrac{1}{2+\dfrac{3y}{x}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{z}{y}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{z}}$. Do $x, y, z \in [1;4]$ và $x \ge y, x \ge z \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{z}, \dfrac{x}{y} > 0 \\ \dfrac{z}{y}.\dfrac{x}{z} = \dfrac{x}{y} \ge 1 \end{cases}$

Sử dụng **bất đẳng thức phụ**: $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} \ge \dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$ với $a > 0,\ b > 0$ và $ab \ge 1$

Suy ra: $P = \dfrac{1}{2+\dfrac{3y}{x}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{z}{y}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{z}} \ge \dfrac{1}{2+\dfrac{3y}{x}} + \dfrac{2}{1+\sqrt{\dfrac{x}{y}}}$. Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{z}{y} = \dfrac{x}{z}$ hoặc $\dfrac{x}{y} = 1$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ thì $P \ge \dfrac{t^2}{2t^2+3} + \dfrac{2}{1+t} = f(t)$

B2 • Tìm điều kiện **ĐÚNG** cho biến t.

Do $x, y, z \in [1;4]$ và $x \ge y, x \ge z \Rightarrow 1 \le \sqrt{\dfrac{x}{y}} \le 2 \Rightarrow 1 \le t \le 2$. Vậy $t \in [1;2]$

B3 • Tìm GTLN của hàm một biến, từ đó suy ra GTLN của P .

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{2t^2+3} + \dfrac{2}{1+t}$ với $t \in [1;2]$, ta có:

$$f'(t) = \frac{-2\left[t^3(4t-3) + 3t(2t-1) + 9\right]}{(2t^2+3)^2(1+t)^2} < 0, \forall t \in [1;2]$$

t	1		2
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	$\dfrac{6}{5}$	$\searrow$	$\dfrac{34}{33}$

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t)\ge f(2)=\dfrac{34}{33},\ \forall t\in[1;2]\ \Rightarrow P\ge\dfrac{34}{33}$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x=4;y=1;z=2$.

B4• Kết luận

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\dfrac{34}{33}$ đạt khi $x=4;y=1;z=2$. r

IV. CÁC BÀI TOÁN CÓ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho x,y,z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=\sqrt{3}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=-2(xy+yz+zx)^3+27x^2y^2z^2-3(x^2+y^2+z^2)+6(xy+yz+zx)$.

Hướng dẫn giải

+ Đánh giá $P\le-(xy+yz+zx)^3+3(xy+yz+zx)$

Giải thích: $xy+yz+zx\ge3\sqrt[3]{xy.yz.zx}=3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\Rightarrow27x^2y^2z^2\le(xy+yz+zx)^2$

$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx\Rightarrow-3(x^2+y^2+z^2)\le-3(xy+yz+zx)$

+ Đặt $t=xy+yz+zx$ với $t\in[0;1]$

Giải thích: $0\le t=xy+yz+zx\le\dfrac{(x+y+z)^2}{3}=1$

+ Lập bảng biến thiên của $f(t)=-t^3+3t$ với $t\in[0;1]$

+ Kết quả: Giá trị lớn nhất của biểu thức P là 2 đạt khi $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ r

Bài 2. Cho x,y,z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $(x+y)^2+2y^2\ge2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=5(x^2+y^2+z^2)-(x+y+\sqrt{2}z)^2-\sqrt{\dfrac{(x+y)^2}{2}+z^2}$.

Hướng dẫn giải

+ Đánh giá $P\ge x^2+y^2+z^2-\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Giải thích: $(x+y+\sqrt{2}z)^2\le4(x^2+y^2+z^2)\Rightarrow-(x+y+\sqrt{2}z)^2\ge-4(x^2+y^2+z^2)$

$\dfrac{(x+y)^2}{2}+z^2\le x^2+y^2+z^2\Rightarrow-\sqrt{\dfrac{(x+y)^2}{2}+z^2}\ge-\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

+ Đặt $t=x^2+y^2+z^2$ với $t\in[1;+\infty)$

Giải thích: $t=x^2+y^2+z^2\ge\dfrac{(x+y)^2}{2}+z^2\ge1$

+ Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t) = t - \sqrt{t}$ với $t \in \left[1; +\infty\right)$

+ Kết quả: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 0 đạt khi $x = y = \dfrac{1}{2}, z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **r**

Bài 3. Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z \le \dfrac{3}{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{y^2 z} + \dfrac{y}{z^2 x} + \dfrac{z}{x^2 y} + \dfrac{x^5}{y} + \dfrac{y^5}{z} + \dfrac{z^5}{x}$.

Hướng dẫn giải

+ Đánh giá $P \ge 3\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{(xyz)^3}} + \sqrt[3]{(xyz)^4}\right)$

Giải thích: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

+ Đặt $t = \sqrt[3]{xyz}$ với $t \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$

Giải thích: $t < t = \sqrt[3]{xyz} \le \dfrac{x + y + z}{3} \le \dfrac{1}{2}$

+ Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t) = t^4 + \dfrac{1}{t^2}$ với $t \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$

+ Kết quả: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\dfrac{195}{16}$ đạt khi $x = y = z = \dfrac{1}{2}$ **r**

Bài 4. Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4\left(x + y + z\right)^2 + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Hướng dẫn giải

+ Đánh giá $P \ge 4\left(x + y + z\right)^2 + \dfrac{27}{x + y + z}$

Giải thích: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng cộng mẫu.

+ Đặt $t = x + y + z$ với $t \in \left(0; +\infty\right)$

+ Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t) = 4t^2 + \dfrac{27}{t}$ với $t \in \left(0; +\infty\right)$

+ Kết quả: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 27. **r**

Bài 5. Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $5\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 6\left(xy + yz + zx\right)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{2\left(x + y + z\right)} - \left(y^2 + z^2\right)$.

Hướng dẫn giải

+ Đánh giá $P \le 2\sqrt{y+z} - \frac{1}{2}\left(y+z\right)^2$

Giải thích: • $5x^2 + \frac{5}{2}\left(y+z\right)^2 \le 5x^2 + 5\left(y^2+z^2\right) = 6\left(xy+yz+zx\right) \le 6x\left(y+z\right) + 6.\frac{1}{4}\left(y+z\right)^2$

$\Rightarrow 5x^2 - 6x\left(y+z\right) + \left(y+z\right)^2 \le 0$ (Vế trái là tam thức bậc hai theo biến x)

$\Rightarrow \frac{y+z}{5} \le x \le y+z \Rightarrow x+y+z \le 2\left(y+z\right)$

• $-\left(y^2+z^2\right) \le -\frac{1}{2}\left(y+z\right)^2$

+ Đặt $t = \sqrt{y+z}$ với $t \in \left[0;+\infty\right)$

+ Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t) = 2t - \frac{1}{2}t^4$ với $t \in \left[0;+\infty\right)$

+ Kết quả: Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{3}{2}$ đạt khi $x=1; y=z=\frac{1}{2}$ r

Bài 6. Cho x,y,z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{16}{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}} + \frac{xy+yz+zx+1}{x+y+z}$.

Hướng dẫn giải

+ Biến đổi $P = \frac{32}{\sqrt{2\left(9-(x^4+y^4+z^4)\right)+4}} + \frac{(x+y+z)^2-1}{2(x+y+z)}$

Đánh giá $P \ge \frac{32}{\sqrt{4(x+y+z)+4}} + \frac{(x+y+z)^2-1}{2(x+y+z)}$

+ Đặt $t = x+y+z$ với $t \in \left[\sqrt{3};3\right]$

+ Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t) = \frac{16}{\sqrt{t+1}} + \frac{t^2-1}{2t}$ với $t \in \left[\sqrt{3};3\right]$

+ Kết quả: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{28}{3}$ đạt khi $x=y=z=1$ r

Bài 7. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^5 + y^5 + z^5 .$$

Hướng dẫn giải

+ Biến đổi $P = \frac{5}{4}\left(2x^3 - x\right)$ với $x \in \left[-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

Giải thích: $x^2 - \frac{1}{2} = yz \le \frac{y^2+z^2}{2} = \frac{1-x^2}{2} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2} \le \frac{1-x^2}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{6}}{3} \le x \le \frac{\sqrt{6}}{3}$

+ Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{5}{4}\left(2x^3 - x\right)$ với $x \in \left[-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

+ Kết quả: Giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{5\sqrt{6}}{36}$ đạt khi $x = \frac{\sqrt{6}}{3}, y - z = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ **r**

"THỬ SỨC VỚI GTLN & GTNN"

(Thời gian làm 1 bài là 60 phút)

Bài 1 (1 điểm). Cho các số thực dương *a*, *b*, *c*. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}-\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}.$$

Bài 2 (1 điểm). Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn : $9\left(a^4+b^4+c^4\right)-25\left(a^2+b^2+c^2\right)+48=0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^2}{b+2c}+\dfrac{b^2}{c+2a}+\dfrac{c^2}{a+2b}$.

Bài 3 (1 điểm). Cho a,b,c là các số thực không đồng thời bằng 0 thỏa mãn:

$$\left(a+b+c\right)^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)}$.

Bài 4 (1 điểm). Cho a,b,c là các số thực dương . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{\left(a+b\right)\sqrt{\left(a+2c\right)\left(b+2c\right)}}$$

Bài 5 (1 điểm). Cho ba số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{24}{13a+12\sqrt{ab}+16\sqrt{bc}}-\frac{3}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Bài 6 (1 điểm). Cho ba số thực *a*, *b*, *c* thỏa $0\le a<b\le c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2a^2+b^2+c^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+\frac{a+b+c}{(a+b)c}+2\sqrt{a+b+c}.$$

Bài 7 (1 điểm). Cho các số thực không âm *a*, *b*, *c* thỏa mãn $c=\min\left\{a,b,c\right\}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{a^2+c^2}+\dfrac{1}{b^2+c^2}+\sqrt{a+b+c}$.

Bài 8 (1 điểm). Cho các số thực dương *a*, *b*, *c* thỏa mãn $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\boldsymbol{P}=\dfrac{7}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2}+\dfrac{121}{14(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca})}$

ĐÁP ÁN

Bài 1. Cho các số thực dương *a*, *b*, *c*.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}} - \dfrac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$.

Đáp án

Áp dụng BĐT Côsi ta có

$$a^2+b^2+c^2+1 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(c+1)^2 \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2,$$

$$(a+1)(b+1)(c+1) \leq \left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3.$$

Suy ra $P \leq \dfrac{2}{a+b+c+1} - \dfrac{54}{(a+b+c+3)^3}$.

Đặt $t = a+b+c+1,\ t > 1$. Khi đó ta có $P \leq \dfrac{2}{t} - \dfrac{54}{(t+2)^3}$.

0,5

Xét hàm $f(t) = \dfrac{2}{t} - \dfrac{54}{(t+2)^3}$ trên $(1;+\infty)$. Ta có

$$f'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{54.3}{(t+2)^4} = 0 \Leftrightarrow 9t = (t+2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4 \end{array}\right.;\ f'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 < t < 4.$$

Suy ra BBT

t	1		4		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

Dựa vào BBT suy ra $P \leq \dfrac{1}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 4 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của *P* là $\dfrac{1}{4}$, đạt được khi $a = b = c = 1$.

0,5

Bài 2. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn : $9\left(a^4+b^4+c^4\right)-25\left(a^2+b^2+c^2\right)+48=0$ (*)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^2}{b+2c}+\dfrac{b^2}{c+2a}+\dfrac{c^2}{a+2b}$.

Đáp án

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 25\left(a^2+b^2+c^2\right)+48=9\left(a^4+b^4+c^4\right)$ kết hợp với đẳng thức $a^4+b^4+c^4\geq\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$, từ đó suy ra: $25\left(a^2+b^2+c^2\right)+48\geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \Leftrightarrow 3\leq a^2+b^2+c^2\leq\frac{16}{3}$	***0.25***
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\dfrac{a^2}{b+2c}+\dfrac{(b+2c)a^2}{9}\geq\dfrac{2a^2}{3}$ $\dfrac{b^2}{c+2a}+\dfrac{(c+2a)b^2}{9}\geq\dfrac{2b^2}{3},\dfrac{c^2}{a+2b}+\dfrac{(a+2b)c^2}{9}\geq\dfrac{2c^2}{3}$. Khi đó $P\geq\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{1}{9}\left[a^2(b+2c)+b^2(c+2a)+c^2(a+2b)\right]$	***0.25***
Mà $a^2c+c^2b+b^2a\leq\dfrac{a^3+a^3+c^3}{3}+\dfrac{c^3+c^3+b^3}{3}+\dfrac{b^3+b^3+c^3}{3}=a^3+b^3+c^3$ Suy ra : $a^2(b+2c)+b^2(c+2a)+c^2(a+2b)\leq a^3+a^2b+a^2c+b^3+b^2c+b^2a$ $+c^3+c^2b+c^2a=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq\left(a^2+b^2+c^2\right)\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$ Từ đó $P\geq\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$	***0.25***
Đặt $t=\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\Rightarrow 3\leq t\leq 4$. Cho nên $P\geq-\frac{1}{27}t^3+\frac{2}{9}t^2=f(t),t\in[3;4]$ Xét hàm số $f(t)=-\frac{1}{27}t^3+\frac{2}{9}t^2,\forall t\in[3;4]\Rightarrow f'(t)=-\frac{t^2}{9}+\frac{4t}{9}=\frac{t(4-t)}{9}\geq 0$ $\forall t\in[3;4]\Rightarrow f(t)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[3;4]$ $\Rightarrow\min\limits_{t\in[3;4]} f(t)=f(3)=2\cdot\frac{3^2}{9}-\frac{3^3}{27}=1\Rightarrow\min P=\min\limits_{t\in[3;4]} f(t)=1\Leftrightarrow a=b=c=1$	***0.25***

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực không đồng thời bằng 0 thỏa mãn:

$$\left(a+b+c\right)^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)}$.

Đáp án

Vì $ab+bc+ca=\frac{1}{2}\left[\left(a+b+c\right)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)\right]\xrightarrow{gt}ab+bc+ca=\frac{1}{4}\left(a+b+c\right)^2$ Do đó $P=\dfrac{4\left(a^3+b^3+c^3\right)}{\left(a+b+c\right)^3}=\dfrac{1}{16}\left[\left(\dfrac{4a}{a+b+c}\right)^3+\left(\dfrac{4b}{a+b+c}\right)^3+\left(\dfrac{4c}{a+b+c}\right)^3\right]$	**0.25**
Đặt $x=\dfrac{4a}{a+b+c},\ y=\dfrac{4b}{a+b+c},\ z=\dfrac{4c}{a+b+c}$ thì $\begin{cases}x+y+z=4\\xy+yz+zx=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=4-x\\yz=x^2-4x+4\end{cases}$ Vì $\left(y+z\right)^2\ge 4yz$ nên $0\le x\le\frac{8}{3}$	**0.25**
Ta có $P=\frac{1}{16}\left(x^3+y^3+z^3\right)=\frac{1}{16}\left(x^3+\left(y+z\right)^3-3yz\left(y+z\right)\right)=\frac{1}{16}\left(3x^3-12x^2+12x+16\right)$ Xét hàm số $f\left(x\right)=3x^3-12x^2+12x+16$ với $x\in\left[0;\frac{8}{3}\right]$	**0.25**
Trên đoạn $\left[0;\frac{8}{3}\right]$ ta tìm được $\min f\left(x\right)=16$, $\max f\left(x\right)=\frac{176}{9}$ Vậy $\min P=1$ chẳng hạn $a=0,b=c\ne 0$. $\max P=\frac{11}{9}$, $b=2a,c=4c$, $a\ne 0$.	**0.25**

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\dfrac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\dfrac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$.

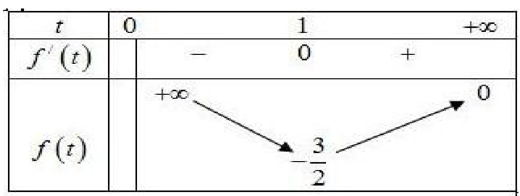
Đáp án

<table>
<tr><td>Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có
$a^2+b^2+c^2+4\ge\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(c+2)^2\ge\frac{1}{4}(a+b+c+2)^2$
$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}\le\frac{1}{2}(a+b)(a+b+4c)=\frac{1}{6}(3a+3b)(a+b+4c)$
$\le\frac{2}{3}(a+b+c)^2$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Suy ra $T\le\dfrac{8}{a+b+c+2}-\dfrac{27}{2(a+b+c)^2}$.
Đặt $a+b+c=t$, $t>0$. Khi đó $T\le\dfrac{8}{t+2}-\dfrac{27}{2.t^2}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Xét hàm số $f(t)=\dfrac{8}{t+2}-\dfrac{27}{2.t^2},\forall t>0$ ta có
$f'(t)=-\dfrac{8}{(t+2)^2}+\dfrac{27}{t^3}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow(t-6)(8t^2+21t+18)=0\Rightarrow t=6,\ f(6)=\dfrac{5}{8}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Bảng biến thiên
<table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td></td><td>6</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(t)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(t)$</td><td></td><td>$\nearrow$</td><td>$\frac{5}{8}$</td><td>$\searrow$</td><td></td></tr>
</table>
Theo bảng biến thiên ta thấy $T\le f(t)\le\frac{5}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=2$
Vậy giá trị lớn nhất của T bằng $\frac{5}{8}$ khi $a=b=c=2$</td><td>0.25</td></tr>
</table>

Bài 5. Cho ba số thực dương a,b,c.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{24}{13a + 12\sqrt{ab} + 16\sqrt{bc}} - \dfrac{3}{\sqrt{a+b+c}}$.

Đáp án

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $13a + 12\sqrt{ab} + 16\sqrt{bc} = 13a + 6\sqrt{a.4b} + 8\sqrt{b.4c} \le 13a + 6.\dfrac{a+4b}{2} + 8.\dfrac{b+4c}{2} = 16(a+b+c)$ $\Rightarrow 13a + 12\sqrt{ab} + 16\sqrt{bc} \le 16(a+b+c)$. Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = 4b = 16c$.	0.25
Suy ra $P \ge \dfrac{3}{2(a+b+c)} - \dfrac{3}{\sqrt{a+b+c}}$. Đặt $t = a+b+c,\ t > 0$. Khi đó ta có: $P \ge \dfrac{3}{2t} - \dfrac{3}{\sqrt{t}}$	0.25
Xét hàm số $f(t) = \dfrac{3}{2t} - \dfrac{3}{\sqrt{t}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $f'(t) = \dfrac{3}{2t\sqrt{t}} - \dfrac{3}{2t^2}$. $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2t\sqrt{t}} - \dfrac{3}{2t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(t) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t) = 0$ BBT. 	0.25
Vậy ta có $P \ge -\dfrac{3}{2}$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ a = 4b = 16c \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{16}{21}; b = \dfrac{4}{21}; c = \dfrac{1}{21}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\dfrac{3}{2}$ khi và chỉ khi $(a,b,c) = \left(\dfrac{16}{21}, \dfrac{4}{21}, \dfrac{1}{21}\right)$.	0.25

Bài 6. Cho ba số thực *a, b, c* thỏa $0 \le a < b \le c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $$P = \frac{2a^2+b^2+c^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} + \frac{a+b+c}{(a+b)c} + 2\sqrt{a+b+c}.$$

Đáp án

<table>
<tr><td>
Ta có:
$P = \frac{2a^2+b^2+c^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} + \frac{a+b+c}{(a+b)c} + 2\sqrt{a+b+c} = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{a^2+c^2} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c} + 2\sqrt{a+b+c}$
Vì $0 \le a < b \le c$ nên: $a^2+b^2 \le ab+b^2 \le \left(\frac{a}{2}+b\right)^2$, dấu bằng xảy ra khi $a=0$.
Tương tự: $a^2+c^2 \le \left(\frac{a}{2}+c\right)^2$, dấu bằng xảy ra khi $a=0$.
Nên: $P \ge \frac{1}{\left(\frac{a}{2}+b\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}+c\right)^2} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c} + 2\sqrt{a+b+c}$, dấu bằng xảy ra khi $a=0$
</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>
Áp dụng các bất đẳng thức: với $x>0, y>0$ ta có:
• $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} \ge \frac{8}{(x+y)^2}$ dấu bằng xảy ra khi $x=y$. (*phải chứng minh*)
• $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$ dấu bằng xảy ra khi $x=y$.
Ta có: $P \ge \frac{8}{(a+b+c)^2} + \frac{4}{a+b+c} + 2\sqrt{a+b+c}$
</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>
Đặt $t=\sqrt{a+b+c}$ với $t>0$.
Xét hàm số $f(t) = \frac{8}{t^4} + \frac{4}{t^2} + 2t$ với $t>0$. Ta có: $f'(t) = -\frac{32}{t^5} - \frac{8}{t^3} + 2 = \frac{2t^5-8t^2-32}{t^5}$
$f'(t)=0 \Leftrightarrow 2t^5-8t^2-32=0 \Leftrightarrow 2(t-2)(t^4+2t^2+4t+8)=0 \Leftrightarrow t=2$
</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>
Bảng biến thiên:
$$\begin{array}{c|ccccc} t & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline f'(t) & & - & 0 & + & \\ \hline f(t) & & \searrow & & \nearrow & +\infty \\ & & & \frac{11}{2} & & \end{array}$$
Suy ra $P \ge \frac{11}{2}$, dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} t=\sqrt{a+b+c}=2 \\ a=0,\ b=c \\ a+b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=c=2 \end{cases}$
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{11}{2}$.
</td><td>0,25</td></tr>
</table>

Bài 7. Cho các số thực không âm *a*, *b*, *c* thỏa mãn $c=\min\{a,b,c\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+c^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\sqrt{a+b+c}\,.$$

Đáp án

♥ Ta có: $a^2+c^2\le a^2+ac\le a^2+ac+\frac{c^2}{4}=\left(a+\frac{c}{2}\right)^2$ **0.25**

Tương tự ta có $b^2+c^2\le\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$

♥ Do đó ta có theo bất đẳng thức Cô-si thì **0.25**

$$\frac{1}{a^2+c^2}+\frac{1}{b^2+c^2}\ge\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}\ge\frac{8}{(a+b+c)^2}$$

Vậy nên ta có

$$P\ge\frac{8}{(a+b+c)^2}+\sqrt{a+b+c}$$

♥ Đặt $t=\sqrt{a+b+c}$ với $t>0$ **0.25**

Xét hàm số $f(t)=\frac{8}{t^4}+t$ trên $(0;+\infty)$. Ta có:

$$f'(t)=1-\frac{32}{t^5}=\frac{t^5-32}{t^5}=0\Leftrightarrow t=2\,.$$

Bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	$\frac{5}{2}$	↗	

♥ Dựa vào BBT suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t)=f(2)=\frac{5}{2}$. Do đó $P\ge\frac{5}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=2\Leftrightarrow a=b=2$ và $c=0$ **0.25**

Vậy giá trị nhỏ nhất của *P* là $\frac{5}{2}$, đạt được khi $a=b=2$ và $c=0$

Bài 8. Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{7}{a^2+b^2+c^2}+\frac{121}{14(ab+bc+ca)}$$

Đáp án

Ta có $1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow ab+bc+ca=\dfrac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2}$.

Do đó $A=\dfrac{7}{a^2+b^2+c^2}-\dfrac{121}{7(1-(a^2+b^2+c^2))}$

0.25

Đặt $t=a^2+b^2+c^2$.

Vì $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$ nên $0<a<1, 0<b<1, 0<c<1$

Suy ra $t=a^2+b^2+c^2<a+b+c=1$

Mặt khác $1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\le 3(a^2+b^2+c^2)$

Suy ra $t=a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{1}{3}$. Vậy $t\in\left[\dfrac{1}{3};1\right)$

0.25

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{7}{t}+\dfrac{121}{7(1-t)}$, $t\in\left[\dfrac{1}{3};1\right)$, $f'(t)=-\dfrac{7}{t^2}+\dfrac{121}{7(1-t)^2}=0\Leftrightarrow t=\dfrac{7}{18}$

BBT

t	$\frac{1}{3}$		$\frac{7}{18}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{324}{7}$	$\nearrow$	

0,25

Suy ra $f(t)\ge\dfrac{324}{7}$, $\forall t\in\left[\dfrac{1}{3};1\right)$. Vậy $A\ge\dfrac{324}{7}$ với mọi a,b,c thỏa điều kiện đề bài. Hơn nữa,

với $a=\dfrac{1}{2};b=\dfrac{1}{3};c=\dfrac{1}{6}$ thì $\begin{cases}a^2+b^2+c^2=\dfrac{7}{18}\\ a+b+c=1\end{cases}$ và $A=\dfrac{324}{7}$

Vậy $\min A=\dfrac{324}{7}$

0,25

----------------------Hết---------------------

Chuyên đề

BẤT ĐẲNG THỨC & CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Huỳnh Chí Hào
THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu

I. BẤT ĐẲNG THỨC

1. Khái niệm bất đẳng thức

1.1 Số thực dương, số thực âm

- Nếu a là số thực dương, ta ký hiệu $a > 0$
- Nếu a là số thực âm, ta ký hiệu $a < 0$
- Nếu a là số thực dương hoặc $a = 0$, ta nói a là số thực không âm, ký hiệu $a \ge 0$
- Nếu a là số thực âm hoặc $a = 0$, ta nói a là số thực không dương, ký hiệu $a \le 0$

Chú ý:

- Với hai số thực a, b chỉ có một trong ba khả năng sau xảy ra:
  $a > b$ hoặc $a < b$ hoặc $a = b$
- Phủ định của mệnh đề "a > 0" là mệnh đề "$a \le 0$"
- Phủ định của mệnh đề "a < 0" là mệnh đề "$a \ge 0$"

Tính chất quan trọng

i) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \ge 0$ (đẳng thức xảy ra khi $x = 0$)

ii) $x^{2k} \ge 0,\ k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$ (đẳng thức xảy ra khi $x = 0$)

iii) $x_1^{2k} + x_2^{2k} + \ldots + x_n^{2k} \ge 0,\ k \in \mathbb{N},\ x_i \in \mathbb{R}$ (đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$)

1.2 Định nghĩa 1

Số thực a gọi là lớn hơn số thực b, ký hiệu a > b nếu $a - b$ là một số dương, tức là $a - b > 0$. Khi đó ta cũng ký hiệu b < a

Ta có: $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

- Nếu $a > b$ hoặc $a = b$, ta viết $\boldsymbol{a \ge b}$. Ta có:
  $a \ge b \Leftrightarrow a - b \ge 0$

1.3 Định nghĩa 2

Giả sử A, B là hai biểu thức (bằng số hoặc chứa biến)

Mệnh đề : " A lớn hơn B ", ký hiệu $A > B$
" A nhỏ hơn B ", ký hiệu $A < B$
" A lớn hơn hay bằng B " ký hiệu $A \ge B$
" A nhỏ hơn hay bằng B " ký hiệu $A \le B$

được gọi là một bất đẳng thức

Quy ước :

- Khi nói về một bất đẳng thức mà không chỉ rõ gì hơn thì ta hiểu rằng đó là một bất đẳng thức đúng.
- **Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng**

1.4 Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

1.4.1 Tính chất 1. $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$ (*Bắc cầu*)

1.4.2 Tính chất 2. $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ (*Cộng hai vế với cùng một số*)

Hệ quả 1. $a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$ (*Trừ hai vế với cùng một số*)

Hệ quả 2. $a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$ (*Chuyển vế*)

1.4.3 Tính chất 3. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$ (*Cộng hai vế hai bđt cùng chiều*)

1.4.4 Tính chất 4. $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc & \text{nếu } c > 0 \\ ac < bc & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$ (*Nhân hai vế với cùng một số*)

Hệ quả 3. $a > b \Leftrightarrow -a < -b$ (*Đổi dấu hai vế*)

Hệ quả 4. $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} & \text{nếu } c > 0 \\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$ (*Chia hai vế với cùng một số*)

1.4.5 Tính chất 5. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$ (*Nhân hai vế hai bđt cùng chiều*)

1.4.6 Tính chất 6. $a > b > 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$ (*Nghịch đảo hai vế*)

1.4.7 Tính chất 7. $a > b > 0, n \in N^* \Rightarrow a^n > b^n$ (*Nâng lũy thừa bậc n*)

1.4.8 Tính chất 8. $a > b > 0, n \in N^* \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ (*Khai căn bậc n*)

Hệ quả 5. Nếu a và b là hai số dương thì :

$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$ (*Bình phương hai vế*)

Nếu a và b là hai số không âm thì :

$a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$ (*Bình phương hai vế*)

2. Bất đẳng thức liên quan đến giá trị tuyệt đối

2.1 Định nghĩa. $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ ($x \in R$)

2.2 Tính chất. $|x| \geq 0$, $|x|^2 = x^2$, $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$

Với mọi $a, b \in R$ ta có :

- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a - b| \leq |a| + |b|$
- $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \geq 0$
- $|a - b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \leq 0$

3. Bất đẳng thức trong tam giác

Nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì :

- a > 0, b > 0, c > 0
- $|b-c| < a < b+c$
- $|c-a| < b < c+a$
- $|a-b| < c < a+b$
- $a > b > c \Leftrightarrow A > B > C$

4. Bất đẳng thức vectơ

Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta có:

- $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$
- $\vec{a}.\vec{b} \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$

5. Các bất đẳng thức cơ bản

5.1. Bất đẳng thức Cauchy (Cô-si) hay AM - GM

- Với hai số a, b không âm $(a, b \ge 0)$ ta luôn có:

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \quad \textbf{hay} \quad a+b \ge 2\sqrt{ab} \quad \textbf{hay} \quad ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$

- Với ba số a, b, c không âm $(a, b, c \ge 0)$ ta luôn có:

$$\boxed{\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc} \quad \textbf{hay} \quad a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \quad \textbf{hay} \quad abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

Tổng quát

Cho n số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có :

$$\boxed{\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} \quad \textbf{hay} \quad a_1+a_2+...+a_n \ge n.\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

5.2. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

- **Đối với hai cặp số thực**

Cho hai cặp số thực $\begin{cases}(a,b)\\(x,y)\end{cases}$, ta có :

$$\boxed{(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ax = by$

- **Đối với hai bộ ba số thực**

Cho hai bộ ba số thực $\begin{cases}(a_1,a_2,a_3)\\(b_1,b_2,b_3)\end{cases}$, ta có :

$$\boxed{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ với quy ước rằng nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0.

Tổng quát

Cho hai bộ n số thực $\begin{cases}(a_1, a_2, ..., a_n)\\(b_1, b_2, ..., b_n)\end{cases}$, ta có :

$$\boxed{(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước rằng nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0.

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức

Cho hai bộ n số thực $(a_1, a_2, ...a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ với $b_1, b_2, ..., b_n > 0$ ta có :

$$\boxed{\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

Dạng thường sử dụng:

- Với $x, y > 0$ và $a, b \in \mathbb{R}$ ta có: $\boxed{\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \ge \frac{\left(a + b\right)^2}{x + y}}$

- Với $x, y, z > 0$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$ ta có: $\boxed{\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \ge \frac{\left(a + b + c\right)^2}{x + y + z}}$

5.3 Một số bất đẳng thức cơ bản thường sử dụng khác

TT	Điều kiện của biến	Bất đẳng thức phụ	Điều kiện xảy ra đẳng thức (Điểm rơi)
1	$a,b\in\mathbb{R}$	$ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$	$a=b$
2	$a,b\in\mathbb{R}$	$ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$	$a=b$
3	$a,b\in\mathbb{R}$	$(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$	$a=b$
4	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$	$a=b$
5	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$	$a=b=c$
6	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$	$a=b=c$
7	$a,b\in\mathbb{R}$ và $ab\ge 1$	$\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\ge\dfrac{2}{1+ab}$	$a=b$ hoặc $ab=1$
8	$a,b>0$	$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\ge 4$ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$	$a=b$
9	$a,b,c>0$	$(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$	$a=b=c$
10	$a,b>0$	$(a+b)^2\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\ge 8$ $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge\dfrac{8}{(a+b)^2}$	$a=b$
11	$a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$	$\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\ge\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}$ **(Bđt Minkowski)**	

Chú ý: Các bất đẳng thức từ 7 đến 11 khi sử dụng phải chứng minh.

6. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Định nghĩa : Giả sử hàm số $y = f(x)$ (biểu thức một biến) xác định trên tập hợp D.

- Số M được gọi là GTLN của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu các điều sau được thỏa mãn

$$\boxed{\begin{cases} \text{i) } f(x) \le M \quad \forall x \in D \\ \text{ii) } \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}}$$

Ký hiệu: $M = \underset{x \in D}{\text{Max}}\, f(x)$ (x$_0$ còn được gọi là điểm rơi)

- Số m được gọi là GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu các điều sau được thỏa mãn

$$\boxed{\begin{cases} \text{i) } f(x) \ge m \quad \forall x \in D \\ \text{ii) } \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}}$$

Ký hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$ (x$_0$ còn được gọi là điểm rơi)

- Đối với GTLN và GTNN đối với biểu thức nhiều biến $f(x;y)$ hay $f(x;y;z)$ cũng có định nghĩa tương tự.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ta thường sử dụng các phương pháp sau

1. Phương pháp 1: Phương pháp biến đổi tương đương

Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh đến một bất đẳng thức đã biết rằng đúng .

Cụ thể khi thực hành

Để chứng minh bất đẳng thức $A_1 \ge B_1$ bằng phương pháp biến đổi tương đương ta thường thực hiện theo sơ đồ như sau:

$$\boxed{A_1 \ge B_1 \Leftrightarrow A_2 \ge B_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_n \ge B_n}$$

Trong đó bất đẳng thức $A_n \ge B_n$ là bất đẳng thức đúng đã biết.

Vậy bất đẳng thức $A_1 \ge B_1$ được chứng minh.

Chú ý

i) Chỉ sử dụng các tính chất cho ta các phép biến đổi tương đương giữa các bất đẳng thức.

ii) Khi thay một biểu thức trong bất đẳng thức bởi một biểu thức khác bằng với nó ta cũng được một bất đẳng thức tương đương.

Ví dụ 1. Chứng minh các bất đẳng thức trong bảng sau

TT	Điều kiện của biến	Bất đẳng thức phụ	Điều kiện xảy ra đẳng thức (Điểm rơi)
1	$a,b\in\mathbb{R}$	$ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$	$a=b$
2	$a,b\in\mathbb{R}$	$ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$	$a=b$
3	$a,b\in\mathbb{R}$	$(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$	$a=b$
4	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$	$a=b$
5	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$	$a=b=c$
6	$a,b,c\in\mathbb{R}$	$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$	$a=b=c$
7	$a,b\in\mathbb{R}$ và $ab\ge 1$	$\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\ge\dfrac{2}{1+ab}$	$a=b$ hoặc $ab=1$

Hướng dẫn giải

a) Các bất đẳng thức từ 1 đến 3 biến đổi về bất đẳng thức tương đương $(a-b)^2\ge 0$

b) Các bất đẳng thức từ 4 đến 6 biến đổi về bất đẳng thức tương đương $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$

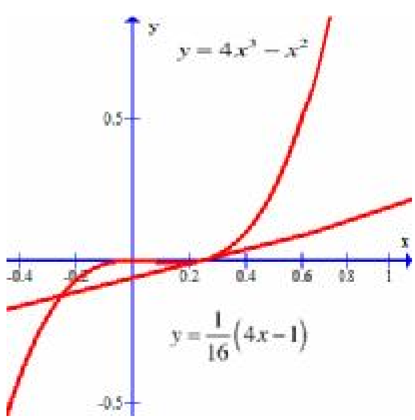
c) Bất đẳng thức 7 biến đổi về bất đẳng thức tương đương $(a-b)^2(ab-1)\ge 0$

Ví dụ 2. Chứng minh các bất đẳng thức sau

1) $4x^3-x^2\ge\dfrac{1}{16}(4x-1),\ \forall x\in(0;1)$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

2) $\dfrac{x}{5+3x^2}\le\dfrac{1}{32}(x+3)$, $\forall x\in[0;4]$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Minh họa hình học



2. Phương pháp 2: Phương pháp tổng hợp (hay phương pháp biến đổi hệ quả)

Xuất phát từ các bất đẳng thức đúng đã biết dùng suy luận toán học để suy ra điều phải chứng minh.

Cụ thể khi thực hành

Để chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$ bằng phương pháp biến đổi tương đương ta thường thực hiện theo sơ đồ như sau:

$$\boxed{X \geq Y \Rightarrow \ldots \Rightarrow A \geq B}$$

Trong đó bất đẳng thức $X \geq Y$ là bất đẳng thức đúng đã biết.
Vậy bất đẳng thức $A \geq B$ được chứng minh.

***Chú ý 1*:** Trong thực tế giải toán ta thường phải phối hợp nhiều mệnh đề đúng (có thể là đẳng thức, bất đẳng thức) để suy ra điều phải chứng minh theo sơ đồ sau:

SƠ ĐỒ 1: Tạo ra một dãy các bất đẳng thức trung gian

$$\boxed{A \geq A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_n \geq B}$$

SƠ ĐỒ 2: Tạo ra các bất đẳng thức bộ phận

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} X_1 \geq Y_1 \\ X_2 \geq Y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n \geq Y_n \end{array}\right\} \Rightarrow A \geq B}$$

Chú ý 2:
i) Đây là phương pháp thường được sử dụng.
ii) Khi sử dụng cần phối hợp các tính chất của bất đẳng thức.
iii) Có thể sử dụng nhiều bất đẳng thức đúng để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. Đối với các bất đẳng thức đúng mà ta sử dụng nếu không có trong chương trình SGK thì nên chứng minh lại.

Ví dụ 2. Chứng minh các bất đẳng thức trong bảng sau

TT	Điều kiện của biến	Bất đẳng thức phụ	Điều kiện xảy ra đẳng thức (Điểm rơi)
8	$a,b>0$	$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$	$a=b$
9	$a,b,c>0$	$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ **hay** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$	$a=b=c$
10	$a,b>0$	$(a+b)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\geq 8$ **hay** $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{8}{(a+b)^2}$	$a=b$
11	$a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$	$\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\geq\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}$ **(Bđt Minkowski)**	

Hướng dẫn giải

a) Các bất đẳng thức từ 8 đến 10 được chứng minh bằng Cauchy, kết hợp với tính chất bất đẳng thức.

b) Bất đẳng thức 11 chứng minh bằng bất đẳng thức vectơ, kết hợp với tọa độ.

III. CÁC BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1. Cho ba số thực a,b,c thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2\le 6$.

Lời giải.

Do $a\in\left[-1;2\right]$ (Đ) $\Rightarrow -1\le a\le 2$ $\Rightarrow (a+1)(a-2)\le 0$ $\Rightarrow a^2-a-2\le 0$ (Đ) (1)

Lập luận tương tự, ta có: $b^2-b-2\le 0$ (2) (Đ)

$c^2-c-2\le 0$ (3) (Đ)

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta có: $a^2+b^2+c^2-(a+b+c)-6\le 0$ (Đ)

Vì $a+b+c=0$ (Đ), nên từ (4) suy ra: $a^2+b^2+c^2\le 6$ (đpcm).

Bài 2. Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$, đặt $t=x+y+z$

Chứng minh rằng: $\sqrt{3}\le t\le 3$.

Lời giải.

Ta có: $\left(x+y+z\right)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ (Đ)

$$\Rightarrow xy+yx+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=\frac{t^2-3}{2}\quad (\text{vì}\quad x^2+y^2+z^2=3)$$ (Đ)

Do $0\le xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2=3$ (Đ) $\Rightarrow 0\le\dfrac{t^2-3}{2}\le 3$ (Đ)

$\Rightarrow 3\le t^2\le 9$ (Đ)

$\Rightarrow \sqrt{3}\le t\le 3$ (đpcm)

Bài 3. Cho các số thực $a,b,c\in\left[1,3\right]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$, đặt $t=ab+bc+ca$

Chứng minh rằng: $11\le t\le 12$. Khi nào đẳng thức xảy ra?

Lời giải.

i) Do $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$$=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]+3(ab+bc+ca)\ge 3(ab+bc+ca)$$

$\Rightarrow 3t\le 36\Rightarrow t\le 12$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $a=b=c=2$

ii) Vì $a,b,c\in\left[1,3\right]$ nên $(3-a)(3-b)(3-c)\ge 0$

$\Rightarrow 3(ab+bc+ca)\ge abc+9(a+b+c)-27=abc+27$ (2)

Do $a,b,c\in\left[1,3\right]$ nên $(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0$

$\Rightarrow abc\ge ab+bc+ca-(a+b+c)+1=ab+ba+ca-5$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $3(ab+bc+ca)\ge ab+bc+ca+22$ $\Rightarrow 3t\ge t+22$ $\Rightarrow t\ge 11$ (4)

Dấu "=" ở (4) xảy ra khi $a=1,b=2,c=3$.

Do đó: $11\le t\le 12$. (đpcm)

Bài 4. Cho các số dương $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$P=\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{3}{2}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Đánh giá biểu thức bằng các **bất đẳng thức phụ**

Lời giải

\+ Áp dụng các **bất đẳng thức phụ** sau:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}\qquad (x,y,z>0)$$

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$$

Ta có:

$$P=\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{9}{3+ab+bc+ca}\ge\frac{9}{3+a^2+b^2+c^2}=\frac{3}{2}.\quad \text{(đpcm)}$$

\+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$

Bài 5. Cho các số dương $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$P=\frac{\sqrt{ab^2c^3}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc^2a^3}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca^2b^3}}{a+b}\le\frac{3}{2}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản để **đánh giá mẫu**.

Lời giải

\+ Áp dụng các **bất đẳng thức phụ** sau:

$$xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2\qquad (1)$$

$$xy+yz+zx\le\frac{1}{3}(x+y+z)^2\qquad (2)$$

\+ Đánh giá các mẫu số của các số hạng của P bằng Cauchy, ta có:

$$P=\frac{\sqrt{ab^2c^3}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc^2a^3}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca^2b^3}}{a+b}\le\frac{\sqrt{ab^2c^3}}{2\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{bc^2a^3}}{2\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ca^2b^3}}{2\sqrt{ab}}\quad \text{(sử dụng Cauchy \textbf{đánh giá mẫu})}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{ab.c^2}+\sqrt{bc.a^2}+\sqrt{ca.b^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{ac}.\sqrt{bc}+\sqrt{ab}.\sqrt{ac}+\sqrt{ab}.\sqrt{bc}\right)$$
$$\le\frac{1}{2}\left(ab+bc+ca\right)$$
$$\le\frac{1}{6}\left(a+b+c\right)^2=\frac{3}{2}\quad\text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\ a=b=c=1$.

Bài 6. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2\qquad(1)$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Sử dụng các bất đẳng thức phụ và Cauchy để đánh giá.

Lời giải

+ Áp dụng các **bất đẳng thức phụ** sau:

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx\qquad\text{(i)}$$
$$\left(x+y+z\right)^2\ge3\left(xy+yz+zx\right)\qquad\text{(ii)}$$

+ Từ đẳng thức $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=9-2(ab+bc+ca)$

+ Khi đó: $(1)\Leftrightarrow 2\left(ab+bc+ca\right)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge9\qquad(2)$

+ **Đánh giá** vế trái của (2) ta được

$$2\left(ab+bc+ca\right)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge2\left(ab+bc+ca\right)+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$
$$=\left(ab+bc+ca\right)+\left(ab+bc+ca\right)+\frac{3}{abc}$$
$$\ge3\sqrt[3]{\left(ab+bc+ca\right)^2\cdot\frac{3}{abc}}$$
$$\ge3\sqrt[3]{3\left(ab^2c+a^2bc+abc^2\right)\cdot\frac{3}{abc}}$$
$$=3\sqrt[3]{3abc\left(a+b+c\right)\cdot\frac{3}{abc}}=3\sqrt[3]{3.3.3}=9.\ \text{(đpcm)}$$

+ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 7. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+a^3+b^3}}{ab}+\frac{\sqrt{1+b^3+c^3}}{bc}+\frac{\sqrt{1+c^3+a^3}}{ca}\ge 3\sqrt{3}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Đánh giá bằng bất đẳng thức **Cauchy** ba số (*do trong biểu thức trên có bậc ba*), với chú ý điểm rơi và điều kiện $abc=1$ ở trên.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

+ **Đánh giá đại diện** biểu thức $\dfrac{\sqrt{1+a^3+b^3}}{ab}$

Theo bất đẳng thức **Cauchy** ta có:

$$1+a^3+b^3\ge 3\sqrt[3]{1.a^3.b^3}=3ab \Rightarrow \sqrt{1+a^3+b^3}\ge\sqrt{3ab}\Rightarrow \frac{\sqrt{1+a^3+b^3}}{ab}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{ab}} \qquad (1)$$

+ **Chứng minh tương tự** ta cũng được:

$$\frac{\sqrt{1+b^3+c^3}}{bc}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{bc}} \qquad (2)$$

$$\frac{\sqrt{1+c^3+a^3}}{ca}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{ca}} \qquad (3)$$

+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$\frac{\sqrt{1+a^3+b^3}}{ab}+\frac{\sqrt{1+b^3+c^3}}{bc}+\frac{\sqrt{1+c^3+a^3}}{ca}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)$$

$$\ge 3\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{1}{\sqrt{bc}}.\frac{1}{\sqrt{ca}}} \quad \text{(theo bđt \textbf{Cauchy})} \qquad (4)$$

$$=3\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{(abc)^2}}}=3\sqrt{3} \quad \text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 8. Chứng minh rằng với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có: $\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x\ge 3^x+4^x+5^x$.

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=0$.

Định hướng: Vận dụng bất đẳng thức **Cauchy** ***xoay vòng cho 2*** số thích hợp.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

+ **Đánh giá đại diện**

Theo bất đẳng thức **Cauchy** ta có: $\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x \ge 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x.\left(\frac{15}{4}\right)^x} \ge 2.3^x$ (1)

+ **Chứng minh tương tự** ta cũng được:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x \ge 2.4^x \qquad (2)$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x \ge 2.5^x \qquad (3)$$

+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$2\left[\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x\right] \ge 2\left(3^x+4^x+5^x\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x \ge 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x.\left(\frac{15}{4}\right)^x} \ge 2.3^x \quad \text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $(1),(2),(3)$ là các đẳng thức $\Leftrightarrow$ $x=0$

Bài 9. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c} \le 1.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{3}{4}$.

Định hướng: Vận dụng bất đẳng thức **Cauchy** dạng cộng mẫu $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$ $\left(x,y>0\right)$ để đánh giá đại diện.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

+ **Đánh giá đại diện**

Sử dụng bất đẳng thức cơ bản: $\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$ $\left(x,y>0\right)$ *(khi sử dụng cần chứng minh)*

Ta có: $\frac{1}{2a+b+c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b+c}\right) \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2a+b+c} \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\right) \qquad (1)$$

+ **Chứng minh tương tự** ta cũng được:

$$\frac{1}{a+2b+c} \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}\right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{a+b+2c} \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right) \quad (3)$$

\+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{4}.4=1 \quad \text{(đpcm)}$$

\+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{3}{4}$.

Bài 10. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $\frac{a^2b}{c}+\frac{b^2c}{a}+\frac{c^2a}{b}=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}+\frac{c^6}{a^3} \ge 3.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Vận dụng bất đẳng thức **Cauchy** ***xoay vòng cho 3 số*** thích hợp, chú ý đến điều kiện.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

\+ **Đánh giá đại diện**

Theo bất đẳng thức **Cauchy** ta có: $\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}+1 \ge \frac{3a^2b^2}{bc}=\frac{3a^2b}{c} \quad (1)$

\+ **Chứng minh tương tự** ta cũng được:

$$\frac{b^6}{c^3}+\frac{c^6}{a^3}+1 \ge \frac{3b^2c}{a} \quad (2)$$

$$\frac{c^6}{a^3}+\frac{a^6}{b^3}+1 \ge \frac{3c^2a}{b} \quad (3)$$

\+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$2\left(\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}+\frac{c^6}{a^3}\right)+3 \ge 3\left(\frac{a^2b}{c}+\frac{b^2c}{a}+\frac{c^2a}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}+\frac{c^6}{a^3} \ge 3 \quad \text{(đpcm)}$$

\+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 11. Cho các số dương $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$P=\frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^3+3}}\geq\frac{3}{2}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Sử dụng các bất đẳng thức Cauchy **ghép cặp** thích hợp.

Lời giải

+ Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy** cho 3 số , **ghép một số hạng** của P với hai số hạng thích hợp ta có:

$$\frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}}+\frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}}+\frac{b^2+3}{16}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^6}{64}}=\frac{3a^2}{4} \qquad (1)$$

$$\frac{b^3}{2\sqrt{c^2+3}}+\frac{b^3}{2\sqrt{c^2+3}}+\frac{c^2+3}{16}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^6}{64}}=\frac{3b^2}{4} \qquad (2)$$

$$\frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}}+\frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}}+\frac{b^2+3}{16}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^6}{64}}=\frac{3a^2}{4} \qquad (3)$$

+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$P+\frac{a^2+b^2+c^2+9}{16}\geq\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}$$

$$\Rightarrow P\geq\frac{11}{16}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{9}{16}=\frac{33}{16}-\frac{9}{16}=\frac{3}{2} \quad \text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$.

Bài 12. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+c+a=4abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geq 3.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Vận dụng bất đẳng thức **Cauchy *xoay vòng cho 3 số*** thích hợp, chú ý đến điều kiện.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

+ **Đánh giá đại diện**

Theo bất đẳng thức **Cauchy** ta có: $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+1\geq\frac{3}{ab}$ (1) *(bậc ba nên chọn 3 số)*

$$\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+1\geq\frac{3}{bc} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{c^3}+1+1\ge\frac{3}{c} \qquad (3)$$

$$\frac{1}{a^3}+1+1\ge\frac{3}{a} \qquad (4)$$

+ **Cộng** (1), (2), (3), (4) vế theo vế ta có:

$$2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)+6\ge3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=3\frac{ab+bc+c+a}{abc}=12 \Rightarrow \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge3 \quad \text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\ a=b=c=1$.

Bài 13. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c\le1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge\sqrt{82}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Định hướng: Có dạng của bất đẳng thức Minkowski, áp dụng các bất đẳng thứ phụ, chú ý điều kiện.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

+ **Sử dụng bất đẳng thức cơ bản:**

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}+\sqrt{c_1^2+c_2^2}\ge\sqrt{\left(a_1+b_1+c_1\right)^2+\left(a_2+b_2+c_2\right)^2} \quad (\textit{khi sử dụng cần chứng minh})$$

Ta có:

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge\sqrt{(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

+ **Biến đổi và đánh giá từng bộ phận**

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2&=81(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-80(a+b+c)^2\\&\ge18(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-80(a+b+c)^2 \quad (\text{theo } \textbf{Cauchy})\\&\ge18.9-80=82 \quad \text{(đpcm)}\end{aligned}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 14. Cho các số dương x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+z}{x+1}\right)^2+\left(\frac{y+2\sqrt{yz}+x}{y+1}\right)^2+\left(\frac{z+2\sqrt{zx}+y}{z+1}\right)^2\le12.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Định hướng:

Đánh giá đại diện biểu thức $\left(\dfrac{x+2\sqrt{xy}+z}{x+1}\right)^2$ bằng cách sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz**.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải

+ Đánh giá đại diện biểu thức $\left(\dfrac{x+2\sqrt{xy}+z}{x+1}\right)^2$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\left(x+2\sqrt{yz}+z\right)^2 = \left(x.1+\sqrt{2x}.\sqrt{2y}+1.z\right)^2 \le \left(x^2+2x+1\right)\left(1+2y+z^2\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+2\sqrt{xy}+z}{x+1}\right)^2 \le 1+2y+z^2 \qquad (1)$$

+ **Chứng minh tương tự** ta cũng được:

$$\left(\frac{y+2\sqrt{yz}+x}{y+1}\right)^2 \le 1+2z+x^2 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{z+2\sqrt{zx}+y}{z+1}\right)^2 \le 1+2x+y^2 \qquad (3)$$

+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+z}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{y+2\sqrt{yz}+x}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{z+2\sqrt{zx}+y}{z+1}\right)^2 \le 3+2(x+y+z)+x^2+y^2+z^2$$

$$\le 6+2\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)} = 12 \quad \text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 15. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $4\left(x+y+z\right) = 3xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2+x+yz} + \frac{1}{2+y+zx} + \frac{1}{2+z+xy} \le \frac{3}{8}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 2$.

Định hướng: Đánh giá đại diện biểu thức $\dfrac{1}{2+x+yz}$ bằng các bất đẳng thức **Cauchy**, thay đổi hình thức của điều kiện $4\left(x+y+z\right)=3xyz \Leftrightarrow \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=\dfrac{3}{4}$

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải

\+ **Đánh giá đại diện** biểu thức $\dfrac{1}{2+x+yz}$

Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy** ta có:

$$3xyz = 4(x+y+z) \geq 4.3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \geq 8$$

Tiếp tục đánh giá $2+x+yz$ ta có:

$$2+x+yz \geq 2\sqrt{2x}+yz \geq 2\sqrt{2\sqrt{2x}.yz} = 2\sqrt{2\sqrt{2xyz}.\sqrt{yz}} \geq 4\sqrt{2}\sqrt[4]{yz}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+x+yz} \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt[4]{yz}} \leq \frac{1}{4}.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{yz}}\right) \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{yz}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{yz}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+x+yz} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{yz}\right) \qquad (1)$$

\+ **Chứng minh tương tự** ta cũng được:

$$\frac{1}{2+y+zx} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{zx}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2+z+xy} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{xy}\right) \qquad (3)$$

\+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$\frac{1}{2+x+yz}+\frac{1}{2+y+zx}+\frac{1}{2+z+xy} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yx}+\frac{1}{xz}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

\+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Bài 16. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x+y=1$. Chứng minh rằng $xy+\dfrac{1}{xy} \geq \dfrac{17}{4}$.

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Định hướng: Đánh giá bằng bất **đẳng thức Cauchy** với chú ý điểm rơi ở trên và điều kiện $x+y=1$.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

+ Theo bất đẳng thức **Cauchy** ta có:

$$xy+\frac{1}{xy}=xy+\frac{1}{16xy}+\frac{15}{16xy}\ge 2\sqrt{xy.\frac{1}{16xy}}+\frac{15}{16\frac{(x+y)^2}{4}}=\frac{17}{4}\quad \text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\ x=y=\frac{1}{2}$.

Bài 17. Cho các số thực dương x,y thỏa mãn điều kiện $5x+4y=23xy$. Chứng minh rằng

$$P=4x+9y+\frac{3}{x}+\frac{7}{2y}\ge\frac{43}{2}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{3}$.

Định hướng: Biến đổi và đánh giá từng bộ phận bằng cách sử dụng bất đẳng thức **Cauchy.**
Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải

Ta có: $5x+4y=23xy\Leftrightarrow\frac{4}{x}+\frac{5}{y}=23$

Khi đó: $P=4x+9y+\frac{3}{x}+\frac{7}{2y}=4x+\frac{1}{x}+9y+\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x}+\frac{5}{y}\right)$

$$=4x+\frac{1}{x}+9y+\frac{1}{y}+\frac{23}{2}$$

Áp dụng bđt Cô-si ta suy ra được

$$P\ge 2\sqrt{4x.\frac{1}{x}}+2\sqrt{9y.\frac{1}{y}}+\frac{23}{2}=4+6+\frac{23}{2}=\frac{43}{2}\quad\text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}4x=\frac{1}{x}\\9y=\frac{1}{y}\\\frac{4}{x}+\frac{5}{y}=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$

Bài 18. Cho các số dương x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+2xy=3\left(x+y+z\right)$. Chứng minh rằng

$$x+y+z+\frac{23}{\sqrt{x+z}}+\frac{23}{\sqrt{y+2}}\ge 29.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=1; y=2; z=3$.

Định hướng: Biến đổi và đánh giá từng bộ phận bằng cách sử dụng bất đẳng thức **Cauchy.**

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải

+ Từ giả thiết ta có $3(x+y+z)=(x+y)^2+z^2 \geq \frac{1}{2}(x+y+z)^2 \Rightarrow 0<x+y+z\leq 6$

+ **Biến đổi và đánh giá từng bộ phận**

Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy** ta có:

$$x+y+z+\frac{23}{\sqrt{x+z}}+\frac{23}{\sqrt{y+2}}=\left((x+z)+\frac{8}{\sqrt{x+z}}+\frac{8}{\sqrt{x+z}}\right)+\left((y+2)+\frac{8}{\sqrt{y+2}}+\frac{8}{\sqrt{y+2}}\right)+$$

$$+7\left(\frac{1}{\sqrt{x+z}}+\frac{1}{\sqrt{y+2}}\right)-2$$

$$\geq 12+12+\frac{14}{\sqrt[4]{(x+z)(y+2)}}-2\geq 22+\frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{x+y+z+2}}\geq 29$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $x=1; y=2; z=3$.

Bài 19. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$P=\frac{1+x}{1-y}+\frac{1+y}{1-z}+\frac{1+z}{1-x}\geq 6.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Định hướng: Đánh giá bằng cách sử dụng bất đẳng thức **Cauchy.**

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải

Vì $x,y,z>0$ và $x+y+z=1$ nên $0<x,y,z<1$. Do đó: $\frac{1+x}{1-y},\frac{1+y}{1-z},\frac{1+z}{1-x}>0$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số trên ta được

$$P\geq 3\sqrt[3]{\frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{(1-x)(1-y)(1-z)}} \qquad (1)$$

Ta có: $1+x=1+(1-y-z)=(1-y)+(1-z)$. Do đó, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số thực dương $(1-y)$ và $(1-z)$, ta được:

$$1+x\geq 2\sqrt{(1-y)(1-z)}$$

Tương tự: $$1+y \ge 2\sqrt{(1-z)(1-x)}$$
$$1+z \ge 2\sqrt{(1-x)(1-y)}$$

Suy ra: $$(1+x)(1+y)(1+z) \ge 8(1-x)(1-y)(1-z) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $P \ge 6$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Bài 20. Cho các số thực $x,y,z \le 0$. Chứng minh rằng
$$\frac{2^x}{2^{x+y}+2^z+1}+\frac{2^y}{2^{y+z}+2^x+1}+\frac{2^z}{2^{z+x}+2^y+1} \le 1. \qquad (1)$$
Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=0$.

Định hướng: Đặt ẩn phụ (đổi biến) và đánh giá đại diện.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải.

+ Đổi biến (đặt ẩn phụ)

Đặt $a=2^x, b=2^y, c=2^z$. Khi đó $a,b,c \in (0,1]$, bất đẳng thức (1) trở thành
$$\frac{a}{ab+c+1}+\frac{b}{bc+a+1}+\frac{c}{ca+b+1} \le 1 \qquad (2)$$

+ **Đánh giá đại diện** biểu thức $\dfrac{a}{ab+c+1}$

Ta có: $ab+1=(1-a)(1-b)+a+b \ge a+b \Rightarrow \dfrac{a}{ab+c+1} \le \dfrac{a}{a+b+c}$ (3)

+ **Chứng minh tương tự** ta cũng được:
$$\frac{b}{bc+a+1} \le \frac{b}{a+b+c} \qquad (4)$$
$$\frac{c}{ca+b+1} \le \frac{c}{a+b+c} \qquad (5)$$

+ **Cộng** (3), (4), (5) vế theo vế ta có:
$$\frac{a}{ab+c+1}+\frac{b}{bc+a+1}+\frac{c}{ca+b+1} \le 1 \quad \text{(đpcm)}$$

+ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$ hay $x=y=z=0$.

Bài 21. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Chứng minh rằng
$$P=\frac{1}{x^3(y^3+z^3)+1}+\frac{1}{y^3(z^3+x^3)+1}+\frac{1}{z^3(x^3+y^3)+1} \le 1.$$
Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Định hướng: Đổi biến (đặt ẩn phụ) và đánh giá đại diện.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải

Vì $xyz=1$ nên $x=\frac{1}{yz}, y=\frac{1}{zx}, z=\frac{1}{xy}$. Do đó:

$$P=\frac{1}{\frac{1}{(yz)^3}\left(y^3+z^3\right)+1}+\frac{1}{\frac{1}{(zx)^3}\left(z^3+x^3\right)+1}+\frac{1}{\frac{1}{(xy)^3}\left(x^3+y^3\right)+1}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{z^3}+\frac{1}{y^3}+1}+\frac{1}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}+1}+\frac{1}{\frac{1}{y^3}+\frac{1}{x^3}+1}$$

Đặt $a=\frac{1}{x};\ b=\frac{1}{y};\ c=\frac{1}{z}$ ta có $a,b,c>0$ và $abc=1$ thì $P=\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}$

Vì $a,b>0$ nên $(a-b)\left(a^2-b^2\right)\geq 0$. Suy ra $a^3+b^3\geq a^2b+ab^2$

Do đó: $a^3+b^3+1\geq a^2b+ab^2+1=a^2b+ab^2+abc=ab(a+b+c)$

Tương tự: $b^3+c^2+1\geq bc(a+b+c)$

$c^3+a^3+1\geq ca(a+b+c)$

Suy ra: $P\leq\frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}=\frac{1}{abc}=1$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=x=1$.

Bài 22. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=xyz$. Chứng minh rằng

$$P=\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}+6\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\geq 3.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=3$.

Định hướng: Đổi biến (đặt ẩn phụ) , biến đổi và đánh giá từng bộ phận.

Lưu ý: luôn nhớ kiểm tra dấu "=" cho các bất đẳng thức thành phần.

Lời giải

Ta có: $xy+yz+zx=xyz\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Đặt $a=\frac{1}{x},\ b=\frac{1}{y},\ c=\frac{1}{z}$ ta có $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Do đó $0<a,b,c<1$

Khi đó: $$P=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+6(ab+bc+ca)$$
$$=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+2(a+b+c)^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2$$
$$=\left(\frac{b^2}{a}-2b+a\right)+\left(\frac{c^2}{b}-2c+b\right)+\left(\frac{a^2}{c}-2a+c\right)-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2+3$$
$$=\frac{(a-b)^2}{a}+\frac{(b-c)^2}{b}+\frac{(c-a)^2}{c}-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2+3$$
$$=\frac{(1-a)(a-b)^2}{a}+\frac{(1-b)(b-c)^2}{b}+\frac{(1-c)(c-a)^2}{c}+3\geq 3 \quad \text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=3$.

Bài 23. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$.

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Định hướng: Sử dụng phương pháp tiếp tuyến để đánh giá.

Lời giải

+ Vì a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng $1\Rightarrow a,b,c\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

+ Biến đổi: $$T=\frac{4}{1-a}+\frac{4}{1-b}+\frac{4}{1-c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{5a-1}{a-a^2}+\frac{5b-1}{b-b^2}+\frac{5c-1}{c-c^2}$$

+ Ta có $\frac{5a-1}{a-a^2}-(18a-3)=\frac{(3a-1)^2(2a-1)}{a-a^2}\leq 0$, $\forall a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Từ đó suy ra : $\frac{5a-1}{a-a^2}\leq 18a-3, \forall a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

+ Ta cũng có 2 bất đẳng thức tương tự:
$$\frac{5b-1}{b-b^2}\leq 18b-3, \forall b\in\left(0;\frac{1}{2}\right) \text{ và } \frac{5c-1}{c-c^2}\leq 18c-3, \forall c\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$$

+ Cộng các bất đẳng thức này lại với nhau ta có :
$$T=\frac{5a-1}{a-a^2}+\frac{5b-1}{b-b^2}+\frac{5c-1}{c-c^2}\leq 18(a+b+c)-9=9.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}\Rightarrow T_{max}=9$ đạt được $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

+ Vậy Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1, thì giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$$ bằng 9 và đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Chú ý: Để có được bất đẳng thức $\frac{5a-1}{a-a^2}\le 18a-3, \forall a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$ ta đã sử dụng **phương pháp tiếp tuyến**

Bài 24. Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=8(a+b+c)+5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Sử dụng phương pháp tiếp tuyến để đánh giá.

Lời giải

+ Nhận xét : $8a+\frac{5}{a}\ge\frac{3a^2+23}{2}$,(1) với mọi $0<a<\sqrt{3}$ dấu bằng khi $a=1$. Thật vậy

$$8a+\frac{5}{a}\ge\frac{3a^2+23}{2}\Leftrightarrow 3a^3-16a^2+23a-10\le 0\Leftrightarrow (a-1)^2(3a-10)\le 0$$ luôn đúng với mọi $0<a<\sqrt{3}$

dấu bằng khi $a=1$

+ Tương tự $8b+\frac{5}{b}\ge\frac{3b^2+23}{2}$,(2) dấu bằng khi $b=1$

$8c+\frac{5}{c}\ge\frac{3c^2+23}{2}$,(3) dấu bằng khi $c=1$

+ **Cộng** (1), (2), (3) vế theo vế ta có:

$$S=8(a+b+c)+5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)+69}{2}=39$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S=39$ đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Chú ý: Để tìm ra bất đẳng thức $8a+\frac{5}{a}\ge\frac{3a^2+23}{2}$ ta sử dụng **phương pháp tiếp tuyến**.

Bài 25. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn : $9\left(a^4+b^4+c^4\right)-25\left(a^2+b^2+c^2\right)+48=0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b}$.

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Định hướng: Sử dụng phương pháp tiếp tuyến để đánh giá.

Lời giải

+ Ta có $14x+2\ge 25x^2-9x^4$ $(*)$, $\forall x>0,\ "="\Leftrightarrow x=1$ thật vậy

$$(*)\Leftrightarrow 9x^4-25x^2+14x+2\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2\left(9x^2+18x+2\right)\ge 0 \text{ luôn đúng .Vậy}$$

$$+\ \begin{cases}14a+2\ge 25a^2-9a^4\\ 14b+2\ge 25b^2-9b^4\\ 14c+2\ge 25c^2-9c^4\end{cases}\Rightarrow 14(a+b+c)+6\ge 25\left(a^2+b^2+c^2\right)-9\left(a^4+b^4+c^4\right)=48$$

$$\Rightarrow a+b+c\ge 3, \text{ dấu bằng } \Leftrightarrow a=b=c=1$$

+ Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schawrz** ta được

$$P=\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b}\ge \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{3}\ge 1$$

+ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $1\Leftrightarrow a=b=c=1$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho ba số thực x, y, z thuộc đoạn $\left[0;2\right]$ và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$

Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2 \le 5$.

Lời giải.

Do $x, y, z \in \left[0,2\right] \Rightarrow (x-2)(y-2)(z-2) \le 0$ (1)

$\Rightarrow \left[xy-2(x+y)+4\right](z-2) \le 0$

$\Rightarrow xyz-(2xy+2yz+2zx)+4(x+y+z)-8 \le 0$ (2)

Mặt khác, vì $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

$\Rightarrow 2xy+2yz+2zx = \left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)$

Nên (2) $\Rightarrow xyz-\left[\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]+4\left(x+y+z\right)-8 \le 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 \le 5-xyz \le 5$ (do $x, y, z \ge 0$) (đpcm) (3)

Đẳng thức xảy ra khi trong ba số x, y, z có một số bằng 0, một số bằng 1, một số bằng 2

Nói cách khác:

Đẳng thức xảy ra khi $x=2, y=1, z=0$ và các hoán vị.

Bài 2. Cho ba số thực x, y, z thuộc đoạn $\left[0;1\right]$

Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2 \le 1+x^2y+y^2z+z^2x$.

Lời giải.

Do $x, y, z \in \left[0,1\right] \Rightarrow (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) \ge 0$ (1)

$\Rightarrow 1-x^2-y^2-z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-x^2y^2z^2 \ge 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 \le 1+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-x^2y^2z^2$ (2)

Mặt khác, vì $x, y, z \in \left[0,1\right]$ nên $x^2y^2 \le x^2y,\ \ y^2z^2 \le y^2z,\ \ z^2x^2 \le z^2x$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra:

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 \le 1+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-x^2y^2z^2 \le 1+x^2y+y^2z+z^2x$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi $x=1, y=z=0$ và các hoán vị.

Bài 3. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$, đặt $t=xy+yz+zx$.

Chứng minh rằng: $-\dfrac{1}{2} \le t \le 1$.

Lời giải.

i) Do $xy+yz+zx \le x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow t \le 1$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra, chẳng hạn khi $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ii) Vì $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx) = 1 + 2(xy+yz+zx) \geq 0$

$$\Rightarrow 1+2t \geq 0 \ \Rightarrow t \geq -\frac{1}{2} \qquad (2)$$

Dấu "=" ở (2) xảy ra, chẳng hạn khi $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}, z = 0$

Do đó: $-\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. (đpcm)

Bài 4. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $3(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx=12$, đặt $t = x^2+y^2+z^2$. Chứng minh rằng: $3 \leq t \leq 4$.

Lời giải.

i) Do $3(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx=12 \ \Rightarrow 3(x^2+y^2+z^2) = 12-(xy+yz+zx) \leq 12$

$$\Rightarrow 3(x^2+y^2+z^2) \leq 12$$

$$\Rightarrow 3t \leq 12 \Rightarrow t \leq 4 \qquad (1)$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra, chẳng hạn khi $x = 2, y = z = 0$

ii) Vì $3(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx=12 \Rightarrow xy+yz+zx = 12-3(x^2+y^2+z^2)$ (2)

Ta lại có: $xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2$ (3)

Từ (2) và (3), suy ra: $12-3(x^2+y^2+z^2) \leq x^2+y^2+z^2$

$$\Rightarrow 12-3t \leq t \Rightarrow t \geq 3 \qquad (4)$$

Dấu "=" ở (4) xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Do đó: $3 \leq t \leq 4$. (đpcm)

Bài 5. Cho các số thực $x, y, z \in [0;2]$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$, đặt $t = xy+yz+zx$. Chứng minh rằng: $2 \leq t \leq 3$.

Lời giải.

i) Do $xy+yz+zx \leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = 3 \ \Rightarrow t \leq 3$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x = y = z = 1$.

ii) Vì $x, y, z \in [0;2] \Rightarrow (x-2)(y-2)(z-2) \leq 0$

$$\Rightarrow xyz - 2(xy+yz+zx) + 4(x+y+z) - 8 \leq 0$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx \geq \frac{xyz+4(x+y+z)-8}{2} \geq \frac{12-8}{2} = 2 \ \Rightarrow t \geq 2 \qquad (2)$$

Dấu "=" ở (2) xảy ra, chẳng hạn khi $x = 2, y = 1, z = 0$

Do đó: $2 \leq t \leq 3$. (đpcm)

Bài 6. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$, đặt $t=x^2+y^2+z^2$.
Chứng minh rằng: $3\le t<9$.

Lời giải.

i) Do $(x+y+z)^2\le 3(x^2+y^2+z^2)\Rightarrow 3t\ge 9\Rightarrow t\ge 3$ (1)

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x=y=z=1$.

ii) Vì $x,y,z>0\Rightarrow x^2+y^2+z^2<(x+y+z)^2\Rightarrow t<9$

Do đó: $3\le t<9$. (đpcm)

Bài 7. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$, đặt $t=xy+yz+2zx$.
Chứng minh rằng: $t\ge -1$.

Lời giải.

Do $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=1+2(xy+yz+zx)\ge 0$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\ge -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow xy+yz+2zx\ge -\frac{1}{2}+xz\ge -\frac{1}{2}-\frac{x^2+z^2}{2}=-1+\frac{y^2}{2}\ge -1 \quad (1)$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra, chẳng hạn khi $x=z=\frac{\sqrt{2}}{2}, y=0$

Do đó: $t\ge -1$. (đpcm)

Bài 8. Cho các số thực a,b,c thoả $\begin{cases}1\le a,b,c\le 3\\ a+b+2c=6\end{cases}$. Chứng minh rằng : $a^3+b^3+5c^3\le 42$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải.

Từ giả thiết ta có: $1\le a\le 3\Rightarrow (a-1)(a-3)\le 0\Rightarrow a^2\le 4a-3\Rightarrow a^3\le 13a-12$

Tương tự: $1\le b\le 3\Rightarrow (b-1)(b-3)\le 0\Rightarrow b^2\le 4b-3\Rightarrow b^3\le 13b-12$

$1\le c\le 2\Rightarrow (c-1)(c-2)\le 0\Rightarrow c^2\le 3a-2\Rightarrow c^3\le 7c-6$

Từ đó $a^3+b^3+5c^3\le 13a-12+13b-12+5(7c-6)\le 13(a+b+2c)+9c-54$
$\le 13.6+9.2-54=42$ (đpcm) . Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1, c=2$.

CÁC BÀI TOÁN "THỬ SỨC VỚI BẤT ĐẲNG THỨC"

(Thời gian làm 1 bài là 60 phút)

Bài 1. (1 điểm)

Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $8^x+8^y+8^z=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{4^x}{3-4^x}+\frac{4^y}{3-4^y}+\frac{4^z}{3-4^z}\ge\frac{3}{2}.$$

Bài 2. (1 điểm)

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{8^{\frac{a}{2}}+8^{\frac{b}{2}}+1}+\frac{1}{8^{\frac{b}{2}}+8^{\frac{c}{2}}+1}+\frac{1}{8^{\frac{c}{2}}+8^{\frac{a}{2}}+1}\le 1.$$

Bài 3. (1 điểm)

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $13x+5y+12z=9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{xy}{2x+y}+\frac{3yz}{2y+z}+\frac{6zx}{2z+x}.$$

Bài 4. (1 điểm)

Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=x^2y^3+y^2z^3+z^2x^3+(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2.$$

Bài 5. (1 điểm)

Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+4a}+\frac{c+a}{c+a+16b}.$$

Bài 6. (1 điểm)

Cho các số thực a,b,c thuộc đoạn $\left[0;1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3+2}{b^2+1}+\frac{b^3+2}{c^2+1}+\frac{c^3+2}{a^2+1}$$

Bài 7. (1 điểm)

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z\le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{x^3}+\frac{2}{y^3}+\frac{2}{z^3}+\frac{1}{x^2-xy+y^2}+\frac{1}{y^2-yz+z^2}+\frac{1}{z^2-zx+x^2}.$$

Bài 8. (1 điểm)

Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2\le 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{(y+2)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}.$$

Bài 9. (1 điểm)

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $4(x+y+z)=3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2+x+yz}+\frac{1}{2+y+zx}+\frac{1}{2+z+xy}$$

Bài 10. (1 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3}{x^2+yz}+\frac{y^3}{y^2+zx}+\frac{z^3}{z^2+xy}$$

Bài 11. (1 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+2xy=3(x+y+z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x+y+z+\frac{20}{\sqrt{x+z}}+\frac{20}{\sqrt{y+2}}$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.
Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $8^x + 8^y + 8^z = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{4^x}{3-4^x} + \frac{4^y}{3-4^y} + \frac{4^z}{3-4^z} \ge \frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 0$.

Định hướng:

+ Đặt ẩn phụ $a = 2^x, b = 2^y, c = 2^z$, chuyển về bài toán sau:

Cho $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 3 \end{cases}$. CMR: $\dfrac{a^2}{3-a^2} + \dfrac{b^2}{3-b^2} + \dfrac{c^2}{3-c^2} \ge \dfrac{3}{2}$

+ Đánh giá đại diện biểu thức, lưu ý đến giả thiết $a^3 + b^3 + c^3 = 3$

Đáp án

1. Đặt $a = 2^x, b = 2^y, c = 2^z \Rightarrow a,b,c > 0$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\dfrac{a^2}{3-a^2} + \dfrac{b^2}{3-b^2} + \dfrac{c^2}{3-c^2} \ge \dfrac{3}{2}$	0,25
$\Leftrightarrow \dfrac{a^3}{a(3-a^2)} + \dfrac{b^3}{b(3-b^2)} + \dfrac{c^3}{c(3-c^2)} \ge \dfrac{3}{2}$	0,25
Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $2[a(3-a^2)]^2 = 2a^2.(3-a^2)(3-a^2) \le \left(\dfrac{2a^2 + 3 - a^2 + 3 - a^2}{3}\right)^3 = 8$ $\Rightarrow a(3-a^2) \le 2 \Rightarrow \dfrac{a^3}{a(3-a^2)} \ge \dfrac{a^3}{2}$.	0,25
Tương tự ta có $\dfrac{b^3}{b(3-b^2)} \ge \dfrac{b^3}{2}; \dfrac{c^3}{c(3-c^2)} \ge \dfrac{c^3}{2}$ Do đó $\dfrac{a^3}{a(3-a^2)} + \dfrac{b^3}{b(3-b^2)} + \dfrac{c^3}{c(3-c^2)} \ge \dfrac{1}{2}(a^3 + b^3 + c^3) = \dfrac{3}{2}$ (đpcm). Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ hay $x = y = z = 0$. ***Chú ý:*** Học sinh có thể khảo sát hàm số $f(t) = t(3-t^2)$ trên $(0; \sqrt[3]{3})$ để chỉ ra $t(3-t^2) \le 2$.	0,25

Bài 2
Cho các số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{8^{\frac{a}{2}}+8^{\frac{b}{2}}+1}+\frac{1}{8^{\frac{b}{2}}+8^{\frac{c}{2}}+1}+\frac{1}{8^{\frac{c}{2}}+8^{\frac{a}{2}}+1}\le 1.$$

Hướng dẫn giải
Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=0$.
Định hướng:

+ Đặt ẩn phụ $x=2^{\frac{a}{2}},y=2^{\frac{b}{2}},z=2^{\frac{c}{2}}$ chuyển về bài toán sau:

Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\xyz=1\end{cases}$. CMR: $\dfrac{1}{x^3+y^3+1}+\dfrac{1}{y^3+z^3+1}+\dfrac{1}{z^3+x^3+1}\le 1$

+ Đánh giá đại diện biểu thức.

Đáp án

Đặt $x=2^{\frac{a}{2}},\ y=2^{\frac{b}{2}},\ z=2^{\frac{c}{2}},\ x,y,z>0.$ Khi đó, ta có $xyz=2^{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}}=1$. BĐT trở thành $\dfrac{1}{x^3+y^3+1}+\dfrac{1}{y^3+z^3+1}+\dfrac{1}{z^3+x^3+1}\le 1.$	0,25
Ta có $x^3+y^3+1 = x^3+y^3+xyz$ $= (x+y)(x^2+y^2-xy)+xyz$ $\ge (x+y)xy+xyz$ $= xy(x+y+z)>0.$	0,25
Suy ra $\dfrac{1}{x^3+y^3+1}\le\dfrac{1}{xy(x+y+z)}=\dfrac{z}{x+y+z}.$ Tương tự, ta có $\dfrac{1}{y^3+z^3+1}\le\dfrac{x}{x+y+z}$ $\dfrac{1}{z^3+x^3+1}\le\dfrac{y}{x+y+z}.$	0,25
Cộng 3 BĐT trên vế theo vế ta được $\dfrac{1}{x^3+y^3+1}+\dfrac{1}{y^3+z^3+1}+\dfrac{1}{z^3+x^3+1}\le 1.$ Dấu đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c=0.$	0,25

Bài 3
Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $13x+5y+12z=9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{xy}{2x+y}+\frac{3yz}{2y+z}+\frac{6zx}{2z+x}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{3}{10}$.

Định hướng:
+ Đánh giá đại diện biểu thức, lưu ý giả thiết $13x+5y+12z=9$

Đáp án

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $\frac{xy}{2x+y}=\frac{xy}{x+x+y}\le\frac{xy}{3\sqrt[3]{xxy}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{xyy}\le\frac{1}{3}\frac{x+y+y}{3}=\frac{1}{9}(x+2y)$. Tương tự ta có $\frac{yz}{2y+z}\le\frac{1}{9}(y+2z)$; $\frac{zx}{2z+x}\le\frac{1}{9}(z+2x)$.	0,5
Suy ra $A\le\frac{1}{9}(x+2y)+\frac{3}{9}(y+2z)+\frac{6}{9}(z+2x)=\frac{1}{9}(13x+5y+12z)=1$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{3}{10}$. Suy ra giá trị lớn nhất của A là 1, đạt khi $x=y=z=\frac{3}{10}$.	0,5

Bài 4
Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$A = x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 + (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2.$$

Hướng dẫn giải
Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.
Định hướng:
+ Đánh giá đại diện biểu thức $x^2y^3 + x + 1$,..
+ Lưu ý đến bất đẳng thức $\left(x+y+z\right)^2 \geq 3\left(xy+yz+zx\right)$.

Đáp án

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $x^2y^3 + x + 1 \geq 3xy,\ \ y^2z^3 + y + 1 \geq 3yz,\ \ z^2x^3 + z + 1 \geq 3zx.$ Khi đó $A = (x^2y^3 + x + 1) + (y^2z^3 + y + 1) + (z^2x^3 + z + 1) + x^2 + y^2 + z^2 - 3(x+y+z)$ $\geq 3(xy+yz+zx) + x^2 + y^2 + z^2 - 3(x+y+z)$ $= (x+y+z)^2 - 3(x+y+z) + 3$ $= (x+y+z)(x+y+z-3) + 3.$	0,5
Từ giả thiết $xy+yz+zx=3$ và $x,\ y,\ z \geq 0$ ta có $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) = 9.$ Suy ra $x+y+z \geq 3$. Do đó $A \geq 3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 3, đạt được khi $x=y=z=1$.	0,5

Bài 5
Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+4a}+\frac{c+a}{c+a+16b}.$$

Hướng dẫn giải
Dự đoán điểm rơi: Khó dự đoán.
Định hướng:
+ Đặt ẩn phụ $x=a+b+c, y=b+c+4a, z=c+a+16b$ chuyển về bài toán sau:

Cho $x,y,z>0$. Tìm GTNN của biểu thức: $P=\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}+4\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{15}\left(\frac{z}{x}+16\frac{x}{z}\right)-\frac{4}{5}$

+ Đánh giá bằng bất đẳng thức **Cauchy**.
Đáp án

Đặt $x=a+b+c,\ y=b+c+4a,\ z=c+a+16b$. Khi đó $x,\ y,\ z>0$ và $$a=\frac{y-x}{3},\ b=\frac{z-x}{15},\ c=\frac{21x-5y-z}{15}.$$ Suy ra $P=\dfrac{\frac{y-x}{3}+\frac{z-x}{15}}{x}+\dfrac{\frac{z-x}{15}+\frac{21x-5y-z}{15}}{y}+\dfrac{\frac{21x-5y-z}{15}+\frac{y-x}{3}}{z}$ $$=\frac{-6x+5y+z}{15x}+\frac{20x-5y}{15y}+\frac{16x-z}{15z}=-\frac{4}{5}+\frac{1}{3}.\frac{y}{x}+\frac{1}{15}.\frac{z}{x}+\frac{4}{3}.\frac{x}{y}+\frac{16}{15}.\frac{x}{z}$$	**0,5**
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}+4\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{15}\left(\frac{z}{x}+16\frac{x}{z}\right)-\frac{4}{5}\geq\frac{4}{3}+\frac{8}{15}-\frac{4}{5}=\frac{16}{15}.$$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}y^2=4x^2\\z^2=16x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x\\z=4x\end{cases}$ $$\Leftrightarrow\begin{cases}b+c+4a=2(a+b+c)\\c+a+16b=4(a+b+c)\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{5}{7}c,\ b=\frac{3}{7}c.$$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{16}{15}$, đạt được khi $a=\frac{5}{7}c,\ b=\frac{3}{7}c.$	**0,5**

Bài 6

Cho các số thực a,b,c thuộc đoạn $\left[0;1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3+2}{b^2+1}+\frac{b^3+2}{c^2+1}+\frac{c^3+2}{a^2+1}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Khó dự đoán.

Định hướng:

+ Đánh giá đại diện, theo hướng khử mẫu.

Đáp án

Vì $a,\ b\in[0;\ 1]$ nên ta có $\frac{a^3+2}{b^2+1}\le\frac{a^2+2}{b^2+1}=(a^2+2)\left(1-\frac{b^2}{b^2+1}\right)=(a^2+2)-(a^2+2).\frac{b^2}{b^2+1}\le$ $\le(a^2+2)-(a^2+2).\frac{b^2}{2}=a^2-b^2+2-\frac{1}{2}a^2b^2.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a,\ b\in\{0,\ 1\}$.	**0,5**
Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\frac{b^3+2}{c^2+1}\le b^2-c^2+2-\frac{1}{2}b^2c^2;\ \frac{c^3+2}{a^2+1}\le c^2-a^2+2-\frac{1}{2}c^2a^2.$ Suy ra $P\le6-\frac{1}{2}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\le6.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a,\ b,\ c\in\{0,\ 1\}$ và $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=0$ hay trong ba số *a*, *b*, *c* có nhiều nhất một số bằng 1, các số còn lại bằng 0. Suy ra giá trị lớn nhất của *P* là 6, đạt được khi trong ba số *a*, *b*, *c* có nhiều nhất một số bằng 1, các số còn lại bằng 0.	**0,5**

Bài 7
Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z\le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{x^3}+\frac{2}{y^3}+\frac{2}{z^3}+\frac{1}{x^2-xy+y^2}+\frac{1}{y^2-yz+z^2}+\frac{1}{z^2-zx+x^2}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Định hướng:

+ Đánh giá đại diện.

+ Lưu ý đến bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$

Đáp án

Ta có $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+1\ge\frac{3}{xy}$; $\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}+1\ge\frac{3}{yz}$; $\frac{1}{z^3}+\frac{1}{x^3}+1\ge\frac{3}{zx}$. Suy ra $\frac{2}{x^3}+\frac{2}{y^3}+\frac{2}{z^3}+3\ge\frac{3}{xy}+\frac{3}{yz}+\frac{3}{zx}$. Suy ra $P+3\ge\frac{3}{xy}+\frac{3}{yz}+\frac{3}{zx}+\frac{1}{x^2-xy+y^2}+\frac{1}{y^2-yz+z^2}+\frac{1}{z^2-zx+x^2}$.	**0,5**
Mặt khác, áp dụng BĐT $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$, với $a,b>0$ ta có $P+3\ge\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{zx}+\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{x^2-xy+y^2}\right)+\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{y^2-yz+z^2}\right)+\left(\frac{1}{zx}+\frac{1}{z^2-zx+x^2}\right)$ $\ge\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{zx}+\frac{4}{x^2+y^2}+\frac{4}{y^2+z^2}+\frac{4}{z^2+x^2}$ $=4\left(\frac{1}{2xy}+\frac{1}{x^2+y^2}\right)+4\left(\frac{1}{2yz}+\frac{1}{y^2+z^2}\right)+4\left(\frac{1}{2zx}+\frac{1}{z^2+x^2}\right)$ $\ge\frac{16}{(x+y)^2}+\frac{16}{(y+z)^2}+\frac{16}{(z+x)^2}\ge 16.\frac{3}{\sqrt[3]{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}}$ $\ge 16.\frac{3.9}{(2x+2y+2z)^2}\ge 16.\frac{3.9}{4.3^2}=12.$ Do đó $P\ge 9$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 9, đạt được khi $x=y=z=1$.	**0,5**

Bài 8

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \le 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^2}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Khó dự đoán.

Định hướng: .

+ Lưu ý đến bất đẳng thức $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \ge \frac{8}{(a+b)^2}$.

Đáp án

Ta có $2x + 4y + 2z \le (x^2+1) + (y^2+4) + (z^2+1) = x^2 + y^2 + z^2 + 6 \le 3y + 6$. Suy ra $2x + y + 2z \le 6$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{y}{2} = z = 1$. Chú ý rằng, với hai số dương a, b áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \ge \frac{8}{(a+b)^2}, \quad (*)$$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.	0,5
Áp dụng (*) ta được $P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(\frac{y}{2}+1)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} \ge \frac{8}{(x+1+\frac{y}{2}+1)^2} + \frac{8}{(z+3)^2}$ $$\ge \frac{64}{(x+\frac{y}{2}+2+z+3)^2} = \frac{64.4}{(2x+y+2z+10)^2} \ge \frac{64.4}{(6+10)^2} = 1.$$ Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1, y = 2, z = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1, đạt khi $x = 1, y = 2, z = 1$.	0,5

Bài 9
Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $4(x+y+z)=3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2+x+yz}+\frac{1}{2+y+zx}+\frac{1}{2+z+xy}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=2$.

Định hướng: .

+ Đánh giá đại diện.

Đáp án

Áp dụng BĐT Côsi ta có $3xyz=4(x+y+z)\ge 4.3\sqrt[3]{xyz}$, nên $xyz\ge 8$. Tiếp tục áp dụng BĐT Côsi ta được $2+x+yz\ge 2\sqrt{2x}+yz\ge 2\sqrt{2\sqrt{2x}.yz}=2\sqrt{2\sqrt{2x}.yz}=2\sqrt{2\sqrt{2xyz}.\sqrt{yz}}\ge 4\sqrt{2}.\sqrt[4]{yz}$. Suy ra $\frac{1}{2+x+yz}\le\frac{1}{4\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt[4]{yz}}\le\frac{1}{4}.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{yz}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{yz}\right)$.	**0,5**
Tương tự ta cũng có $\frac{1}{2+y+zx}\le\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{zx}\right)$, $\frac{1}{2+z+xy}\le\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{xy}\right)$. Do đó $P\le\frac{1}{8}\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{8}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{8}$, đạt được khi $x=y=z=2$.	**0,5**

Bài 10
Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3}{x^2+yz}+\frac{y^3}{y^2+zx}+\frac{z^3}{z^2+xy}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Định hướng: .

+ Đánh giá đại diện $\frac{x^3}{x^2+yz}-x$.

Đáp án

Với x, y, z > 0 ta có: $\frac{x^3}{x^2+yz}-x=-\frac{xyz}{x^2+yz}=-\frac{1}{\frac{x}{yz}+\frac{1}{x}}\geq-\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{yz}\cdot\frac{1}{x}}}=-\frac{\sqrt{yz}}{2}$ $\geq-\frac{y+z}{4}$.	*0, 25*
Tương tự $\frac{y^3}{y^2+zx}-y\geq-\frac{x+z}{4}$, $\frac{z^3}{z^2+xy}-z\geq-\frac{x+y}{4}$.	*0,25*
Suy ra $P\geq\frac{x+y+z}{2}=\frac{1}{2}$.	*0, 25*
Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.	*0, 25*

Bài 11

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 3(x + y + z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + y + z + \frac{20}{\sqrt{x+z}} + \frac{20}{\sqrt{y+2}}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán điểm rơi: Đẳng thức xảy ra khi $x = 1, y = 2, z = 3$.

Định hướng: .

\+ Biến đổi biểu thức và đánh giá bằng **Cauchy** cho 3 biểu thức.

\+ Lưu ý đến điểm rơi và giả thiết.

Đáp án

Từ giả thiết ta có $3(x+y+z) = (x+y)^2 + z^2 \ge \frac{1}{2}(x+y+z)^2$. Suy ra $x + y + z \le 6$.	0,5
Khi đó, áp dụng BĐT Côsi ta có $P = \left((x+z) + \frac{8}{\sqrt{x+z}} + \frac{8}{\sqrt{x+z}}\right) + \left((y+2) + \frac{8}{\sqrt{y+2}} + \frac{8}{\sqrt{y+2}}\right) + 4\left(\frac{1}{\sqrt{x+z}} + \frac{1}{\sqrt{y+2}}\right) - 2$ $\ge 12 + 12 + \frac{8}{\sqrt[4]{(x+z)(y+2)}} - 2 \ge 22 + \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{x+y+z+2}} \ge 26.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 26, đạt được khi $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$.	0,5

--------------------------Hết---------------------