

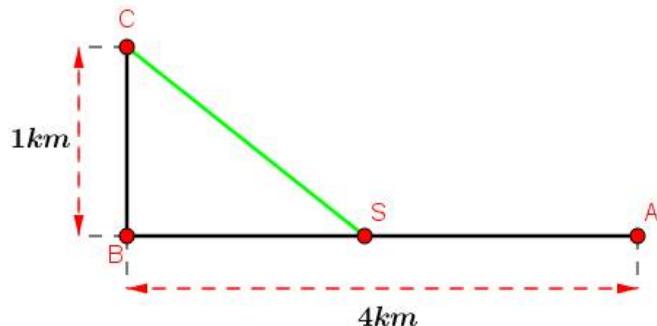
# TỔNG ÔN: BÀI TOÁN THỰC TIỄN 2017

## Chủ đề 1. LIÊN QUAN ĐI CHUYỂN – QUĂNG ĐƯỜNG ĐI

### Câu 1. NHO QUAN A

Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C. khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1 km. Khoảng cách từ B đến A là 4. Mỗi km dây điện đặt dưới nước là mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất.

- A.  $\frac{15}{4}$  km      B.  $\frac{13}{4}$  km      C.  $\frac{10}{4}$       D.  $\frac{19}{4}$



#### Hướng dẫn giải

Trước tiên, ta xây dựng hàm số  $f(x)$  là hàm số tính tổng chi phí sử dụng.

Đặt  $BS = x$  thì ta được:  $SA = 4 - x$ ,  $CS = \sqrt{x^2 + 1}$ . Theo đề bài, mỗi km dây điện đặt dưới nước mất 5000USD, còn đặt dưới đất mất 3000USD, như vậy ta có hàm số  $f(x)$  được xác định như sau:

$$f(x) = 3000(4-x) + 5000\sqrt{x^2 + 1} \quad \text{với } x \in [0;4]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  để có được số tiền ít nhất cần sử dụng và từ đó xác định được vị trí điểm S.

$$f'(x) = -3000 + 5000 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -3000 + 5000 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow -3000\sqrt{x^2 + 1} + 5000x = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 1} = 5x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 = 9 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{3}{4} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;4]$ .

Ta có:  $f(0) = 17000$ ,  $f\left(\frac{3}{4}\right) = 16000$ ,  $f(4) = 20615,52813$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  là 16000 và tại  $x = \frac{3}{4}$ . Khi đó chi phí là thấp nhất và điểm S nằm cách A một đoạn  $SA = 4 - x = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$ .

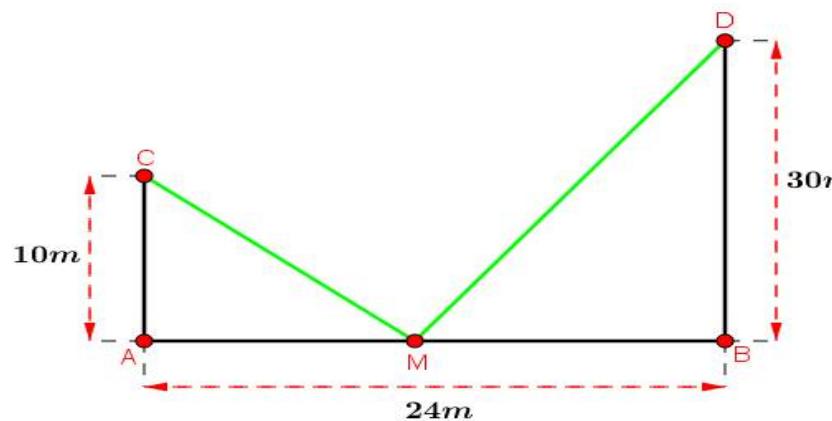
Vậy đáp án là **B**.

## Câu 2. THTT SỐ 673

Có hai chiếc cọc cao 10m và 30m lần lượt đặt tại hai vị trí A, B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng 24m.

Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giang dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc (như hình vẽ). Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?

- A.  $AM = 6m, BM = 18m$ .      B.  $AM = 7m, BM = 17m$ .  
 C.  $AM = 4m, BM = 20m$ .      D.  $AM = 12m, BM = 12m$ .



Hướng dẫn giải :

Đặt  $AM = x (0 < x < 24) \Rightarrow BM = 24 - x$ .

Ta có

$$CM = \sqrt{CA^2 + AM^2} = \sqrt{x^2 + 100}$$

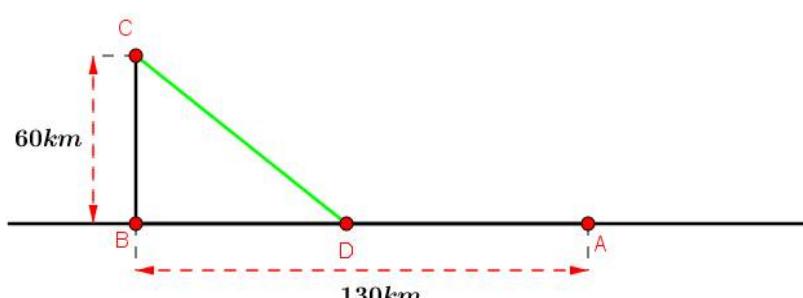
$$MD = \sqrt{MB^2 + BD^2} = \sqrt{(24-x)^2 + 900} . \text{Suy ra tổng độ dài hai sợi dây là :}$$

$$CM + MD = \sqrt{(24-x)^2 + 900} + \sqrt{x^2 + 100} = f(x), (0 < x < 24)$$

Khảo sát hàm ta được:  $x = 6(m) \Rightarrow BM = 18(m)$ . Chọn A.

## Câu 3. ĐỒNG QUAN 1

Một kho hàng được đặt tại vị trí A trên bến cảng cần được chuyển tới kho C trên một đảo, biết rằng khoảng cách ngắn nhất từ kho C đến bờ biển AB



bằng độ dài  $CB = 60\text{ km}$  và khoảng cách giữa 2 điểm  $A, B$  là  $AB = 130\text{ km}$ . Chi phí để vận chuyển toàn bộ kho hàng bằng đường bộ là 300.000 đồng/km, trong khi đó chi phí vận chuyển hàng bằng đường thủy là 500.000 đồng/km. Hỏi phải chọn điểm trung chuyển hàng D (giữa đường bộ và đường thủy) cách kho A một khoảng bằng bao nhiêu thì tổng chi phí vận chuyển hàng từ kho A đến kho C là ít nhất?

- A.  $45\text{ km}$
- B.  $65\text{ km}$
- C.  $85\text{ km}$
- D.  $105\text{ km}$

### Hướng dẫn giải

Đặt  $BD = x (0 < x < 130) \Rightarrow AD = 130 - x$ . Ta có  $CD = \sqrt{DB^2 + DC^2} = \sqrt{x^2 + 3600}$

Chi phí vận chuyển hàng là:  $f(x) = 3000.(130 - x) + 5000\sqrt{x^2 + 3600}$

Khảo sát hàm ta được:  $x = 45(\text{km}) \Rightarrow AD = 85(\text{km})$ . Chọn C.

#### Câu 4. (THPT NGUYỄN VĂN CỪ)

Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là  $400\text{ km}$ . Vận tốc dòng nước là  $10\text{ km/h}$ . Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là  $v (\text{km/h})$  thì năng lượng tiêu hao của cá trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $E(v) = cv^3 t$ , trong đó  $c$  là một hằng số,  $E$  được tính bằng jun. Tìm vận tốc của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

- A.  $12(\text{km/h})$
- B.  $15(\text{km/h})$
- C.  $18(\text{km/h})$
- D.  $20(\text{km/h})$

### Hướng dẫn giải:

Thời gian cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là  $400\text{ km}$  là:  $\frac{400}{v-10}$

Suy ra công thức  $E(v) = cv^3 t = c \frac{400v^3}{v-10}$

Ta thay thế 4 đáp án của đề vào ta được bảng sau:

A. $12(\text{km/h})$	$E = 28800c$
B. $15(\text{km/h})$	$E = 18800c$

C. $18(km/h)$	$E = 16200c$
D. $20(km/h)$	$E = 16000c$

Chọn đáp án D.

**Câu 5. (PTDTNT VÂN CANH)** Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là  $200km$ . Vận tốc của dòng nước là  $8km/h$ . Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là  $v(km/h)$  thì năng lượng tiêu hao của cá trong  $t$  giờ được cho bởi công thức:

$E(v) = cv^3t$  (trong đó  $c$  là một hằng số,  $E$  được tính bằng *jun*). Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất

- A.  $12 km/h$       B.  $9 km/h$       C.  $10 km/h$       D.  $15 km/h$

**Hướng dẫn giải:**

Thời gian cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là  $200km$  là:  $\frac{200}{v-8}$

Suy ra công thức  $E(v) = cv^3t = c \frac{200v^3}{v-8}$

Ta thay thế 4 đáp án của đề vào ta được bảng sau:

A. $12(km/h)$	$E = 86400c$
B. $9(km/h)$	$E = 345600c$
C. $10(km/h)$	$E = 100000c$
D. $15(km/h)$	$E = 16000c$

Chọn đáp án D.

**Câu 6. (SƠ NAM ĐỊNH)** Một ô tô đang chạy với vận tốc  $36km/h$  thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc  $a(t) = 1 + \frac{t}{3}(m/s^2)$ . Tính quãng đường mà ô tô đi được sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

- A.  $90m$ .      B.  $246m$ .      C.  $58m$ .      D.  $100m$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Đổi  $36km/h = 10m/s$ .

Khi ô tô chuyển động nhanh dần đều với gia tốc  $a(t) = 1 + \frac{t}{3} (m/s^2)$

$$\Rightarrow \text{Vận tốc của ô tô khi đó là } v = \int a(t) dt = \int \left(1 + \frac{t}{3}\right) dt = t + \frac{t^2}{3} + C (m/s)$$

Khi ô tô bắt đầu tăng tốc thì  $v(0) = 10 \Leftrightarrow 0 + \frac{0^2}{3} + C = 10 \Leftrightarrow C = 10$ .

$$\Rightarrow v = t + \frac{t^2}{3} + 10 (m/s)$$

Vậy quãng đường ô tô đi được sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc là

$$s = \int_0^6 \left( t + \frac{t^2}{3} + 10 \right) dt = 90 \text{ m.}$$

**Câu 7. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ LẦN 8)** Một vùng đất hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 25 \text{ km}$ ,  $BC = 20 \text{ km}$  và  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$ . Một người cưỡi ngựa xuất phát từ  $A$  đi đến  $C$  bằng cách đi thẳng từ  $A$  đến một điểm  $X$  thuộc đoạn  $MN$  rồi lại đi thẳng từ  $X$  đến  $C$ . Vận tốc của ngựa khi đi trên phần  $ABNM$  là  $15 \text{ km/h}$ , vận tốc của ngựa khi đi trên phần  $MNCD$  là  $30 \text{ km/h}$ . Thời gian ít nhất để ngựa di chuyển từ  $A$  đến  $C$  là mấy giờ?

- A.**  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ .      **B.**  $\frac{\sqrt{41}}{4}$ .      **C.**  $\frac{4+\sqrt{29}}{6}$ .      **D.**  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

Gọi  $MX = x \text{ (km)}$  với  $0 \leq x \leq 25$

Quãng đường  $AX = \sqrt{x^2 + 10^2}$

$\Rightarrow$  thời gian tương ứng  $\frac{\sqrt{x^2 + 100}}{15} \text{ (h)}$

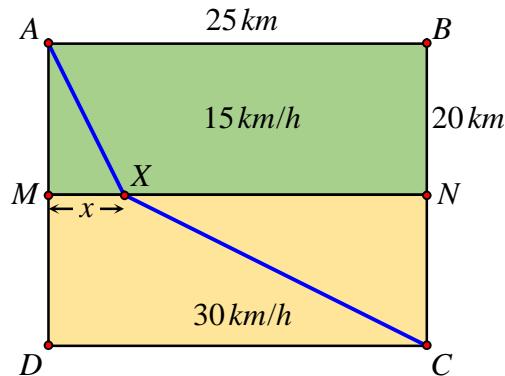
Quãng đường  $CX = \sqrt{(25-x)^2 + 10^2}$

thời gian tương ứng  $\frac{\sqrt{(25-x)^2 + 100}}{30} \text{ (h)}$

Tổng thời gian  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{15} + \frac{\sqrt{(25-x)^2 + 100}}{30}$  với  $x \in [0; 25]$ , tìm giá trị nhỏ nhất  $f(x)$

$$f'(x) = \frac{x}{15\sqrt{x^2 + 100}} + \frac{x-25}{30\sqrt{(25-x)^2 + 100}}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Tính các giá trị  $f(0) = \frac{4+\sqrt{29}}{6} \approx 1,56$ ,  $f(25) = \frac{1+\sqrt{29}}{3} \approx 2,13$ ,  $f(5) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \approx 1,49$



Vậy hàm số đạt GTNN bằng  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$  tại  $x=5$

**Câu 8.** (SỞ HẢI PHÒNG) Bạn An ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới vận tốc chuyển động của máy bay là  $v(t)=3t^2+5$  ( $m/s$ ). Quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

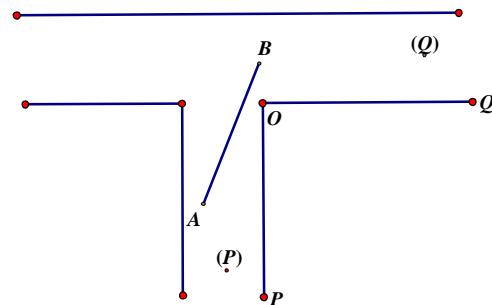
- A. 996m.      B. 876m.      C. 966m.      D. 1086m.

### Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Quãng đường cần tìm là } \int_4^{10} (3t^2 + 5) dt = (t^3 + 5t) \Big|_4^{10} = 966.$$

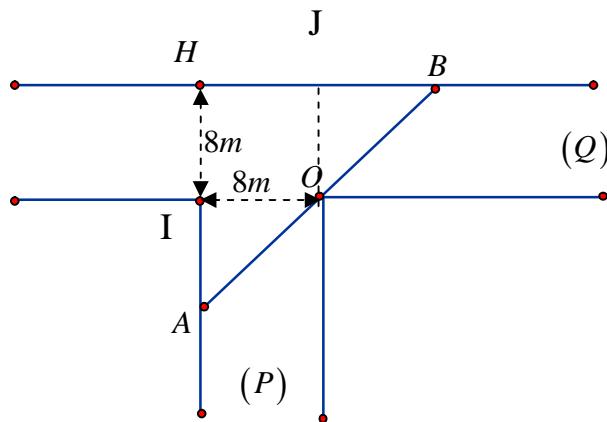
**Câu 9.** (SỞ BẮC GIANG) Mương nước ( $P$ ) thông với mương nước ( $Q$ ), bờ của mương nước ( $P$ ) vuông góc với bờ của mương nước ( $Q$ ). Chiều rộng của hai mương bằng nhau và bằng 8m. Một thanh gỗ  $AB$ , thiết diện nhỏ không đáng kể trôi từ mương ( $P$ ) sang mương ( $Q$ ). Độ dài lớn nhất của thanh  $AB$  (lấy gần đúng đến chữ số phần trăm) sao cho  $AB$  khi trôi không bị vướng là



- A. 22,63m.      B. 22,61m.      C. 23,26m.      D. 23,62m.

### Hướng dẫn giải

Chọn A.



Thanh gỗ trôi qua được khi thanh gỗ chạm điểm  $O$  thì  $OA \leq OB$ .

Vậy  $AB_{max}$  khi  $OA = OB$  ( $A$  nằm trên bờ mương ( $P$ ),  $B$  nằm trên bờ mương ( $Q$ )). Do hai mương có chiều rộng bằng nhau nên tam giác  $HAB$  vuông cân tại  $H$ . Khi đó  $AB = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2} \approx 22,627$ .

**Câu 10. (SỞ QUẢNG NINH)** Một vận động viên đua xe  $F$  đang chạy với vận tốc  $10\text{ (m/s)}$  thì anh ta tăng tốc với gia tốc  $a(t) = 6t\text{ (m/s}^2)$ , trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng tốc. Hỏi quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian  $10\text{ (s)}$  kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu?

- A.**  $1100\text{ m.}$       **B.**  $100\text{ m.}$       **C.**  $1010\text{ m.}$       **D.**  $1110\text{ m.}$

### Hướng dẫn giải

#### Chọn A

$$\text{Ta có } v(t) = \int a(t) dt = \int 6t dt = 3t^2 + C; v(0) = 10 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 + C = 10 \Rightarrow C = 10 \Rightarrow v(t) = 3t^2 + 10$$

Quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian  $10\text{ (s)}$  kể từ lúc bắt đầu tăng tốc

$$s = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} (3t^2 + 10) dt = 1100\text{ m.}$$

**Câu 11. (SỞ VŨNG TÀU)** Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = 30 - 2t\text{ (m/s)}$ . Hỏi trong  $5\text{s}$  trước khi dừng hẳn, vật di chuyển được bao nhiêu mét?

- A.**  $50\text{m.}$       **B.**  $225\text{m.}$       **C.**  $125\text{m.}$       **D.**  $25\text{m.}$

### Hướng dẫn giải:

#### Chọn D.

Khi vật dừng lại thì có vận tốc bằng  $0$  nên thời gian từ lúc bắt đầu giảm tốc và giữ nguyên giá tốc đến lúc dừng hẳn là:  $v(t) = 30 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 15\text{ (s)}$ .

$$\text{Do đó, quãng đường vật di chuyển được ở } 5\text{s} \text{ cuối là: } S = \int_{10}^{15} (30 - 2t) dt = 25\text{m.}$$

**Câu 12. (SỞ VŨNG TÀU)** Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = 30 - 2t\text{ (m/s)}$ . Hỏi trong  $5\text{s}$  trước khi dừng hẳn, vật di chuyển được bao nhiêu mét?

- A.**  $50\text{m.}$       **B.**  $225\text{m.}$       **C.**  $125\text{m.}$       **D.**  $25\text{m.}$

### Hướng dẫn giải:

#### Chọn D.

Khi vật dừng lại thì có vận tốc bằng  $0$  nên thời gian từ lúc bắt đầu giảm tốc và giữ nguyên giá tốc đến lúc dừng hẳn là:  $v(t) = 30 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 15\text{ (s)}$ .

$$\text{Do đó, quãng đường vật di chuyển được ở } 5\text{s} \text{ cuối là: } S = \int_{10}^{15} (30 - 2t) dt = 25\text{m.}$$

**Câu 13. (GIA LỘC)** Một chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ , với  $t$  (giây) là khoảng thời gian từ

lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian  $10$  giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

- A.**  $54\text{ (m/s).}$       **B.**  $216\text{ (m/s).}$       **C.**  $30\text{ (m/s).}$       **D.**  $400\text{ (m/s).}$

**Hướng dẫn giải****Chọn A.**

$$v(t) = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 18t \text{ và } a(t) = v'(t) = -3t + 18$$

Cho  $v'(t) = 0 \Rightarrow t = 6$

Khi đó:  $v(0) = 0$ ,  $v(10) = 30$  và  $v(6) = 54$ .

Vậy: Vận tốc lớn nhất của vật là  $54 \text{ (m/s)}$  tại thời điểm  $t = 6$ .

**Câu 14. (CHUYÊN TUYÊN QUANG)** Một ôtô đang chạy thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -12t + 24 \text{ (m/s)}$ , trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A.  $18 \text{ m}$ .      B.  $15 \text{ m}$ .      C.  $20 \text{ m}$ .      D.  $24 \text{ m}$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn D.**

Ta có:  $v(t) = -12t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ . Quãng đường ôtô di chuyển từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn là:  $S = \int_0^2 (-12t + 24) dt = 24$ .

**Câu 15. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN)** Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với giá tốc phụ thuộc vào thời gian  $t(s)$  là  $a(t) = 2t - 7 \text{ (m/s}^2\text{)}$ . Biết vận tốc đầu bằng  $10 \text{ (m/s)}$ . Hỏi trong 6 giây đầu tiên, thời điểm nào chất điểm ở xa nhất về phía bên phải?

- A.  $5(s)$ .      B.  $6(s)$ .      C.  $1(s)$ .      D.  $2(s)$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn D**

Vận tốc của chất điểm:  $v(t) = \int a(t) dt = t^2 - 7t + C$

Do vận tốc đầu bằng  $10 \text{ (m/s)}$  nên  $v(0) = 10 \Rightarrow C = 10 \Rightarrow v(t) = t^2 - 7t + 10$

Quãng đường chất điểm đi được sau  $t(s)$ :  $s(t) = \int_0^t a(t) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 10t$

Yêu cầu bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của  $s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 10t$ ,  $t \in [0; 6]$

$s'(t) = t^2 - 7t + 10$ ,  $s'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2; t = 5$

Ta có  $s(0) = 0$ ;  $s(2) = \frac{26}{3}$ ;  $s(5) = \frac{25}{6}$ ;  $s(6) = 6$

Vậy  $t = 2(s)$  thì chất điểm ở xa nhất về phía bên phải.

**Câu 16. (THANH CHƯƠNG)** Cá hồi Thái Bình Dương đến mùa sinh sản chúng thường bơi từ biển đến thường nguồn con sông để đẻ trứng trên sỏi đá rồi chết. Khi nghiên cứu một con cá hồi sinh sản người ta phát hiện ra quy luật nó chuyển động trong nước yên lặng là  $s = -\frac{t^2}{10} + 4t$ , với  $t$  (giờ) là khoảng thời gian tính từ lúc cá bắt đầu chuyển động và  $s$  (km) là quãng đường cá bơi được trong khoảng thời gian đó. Nếu thả con cá hồi đó vào một dòng sông có vận tốc dòng nước chảy là 2 (km/h). Tính khoảng cách xa nhất mà con cá hồi đó có thể bơi ngược dòng nước đến nơi đẻ trứng.

- A. 8 km.      B. 30 km.      C. 20 km.      D. 10 km.

### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

Vận tốc con cá khi bơi trong nước yên lặng là  $v(t) = s'(t) = -\frac{t}{5} + 4$  (km/h).

Gọi vận tốc và quãng đường con cá khi bơi ngược dòng lần lượt là  $V(t); S(t)$ .

$$V(t) = v(t) - v_{nuoc} = -\frac{t}{5} + 2 \text{ (km/h)}.$$

$$S(t) = \int V(t) dt = -\frac{t^2}{10} + 2t + C.$$

Khi  $t = 0$  thì  $S(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ .

Khi đến nơi đẻ trứng thì vận tốc bằng 0 nên  $V(t) = -\frac{t}{5} + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 10$  (h).

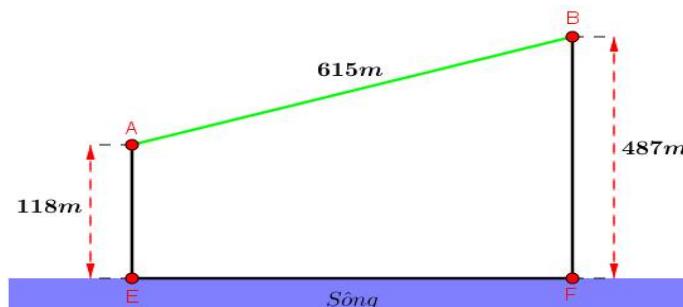
Khoảng cách xa nhất mà con cá hồi đó có thể bơi ngược dòng nước đến nơi đẻ trứng:

$$S(10) = -\frac{10^2}{10} + 2 \cdot 10 = 10 \text{ (km)}.$$

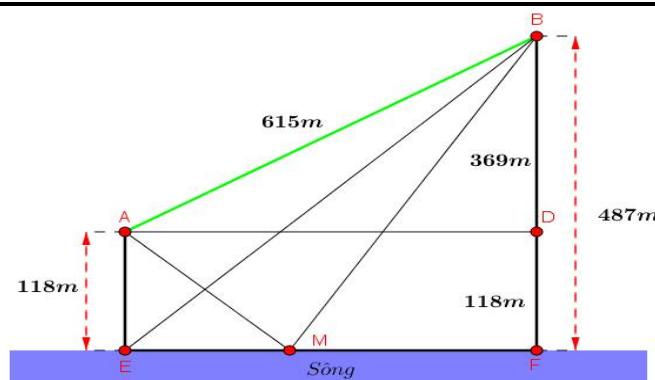
### Câu 17. HÀ NỘI – AMSTERDAM

Cho hai vị trí  $A, B$  cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ  $A$  và từ  $B$  đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Một người đi từ  $A$  đến bờ sông để lấy nước mang về  $B$ . Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là:

- A. 569,5 m      B. 671,4 m      C. 779,8 m      D. 741,2 m



### Hướng dẫn giải



Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B.

dễ dàng tính được  $BD = 369$ ,  $EF = 492$ . Ta đặt  $EM = x$ , khi đó ta được:

$$MF = 492 - x, AM = \sqrt{x^2 + 118^2}, BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}.$$

Như vậy ta có hàm số  $f(x)$  được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \text{ với } x \in [0; 492]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} \\ &\Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2[(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \text{ hay } x = -\frac{58056}{369} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \end{aligned}$$

Hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 492]$ . So sánh các giá trị của  $f(0)$ ,  $f\left(\frac{58056}{605}\right)$ ,

$f(492)$  ta có giá trị nhỏ nhất là  $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 779,8m$

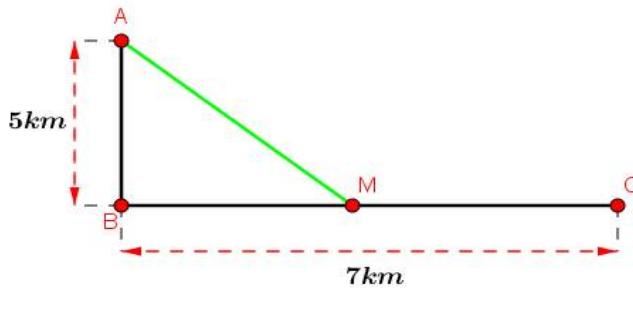
Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ 779,8m. Vậy đáp án là **C**.

### Câu 18. (PHÚ XUYÊN)

Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng AB 5 km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km / h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km / h (xem hình vẽ ở dưới đây). Tính độ dài đoạn BM để người đó đến kho nhanh nhất.

A.  $\frac{\sqrt{74}}{4}$ .

B.  $\frac{29}{12}$ .



C.  $\sqrt{29}$ .

D.  $2\sqrt{5}$ .

#### Hướng dẫn giải

Trước tiên, ta xây dựng hàm số  $f(x)$  là hàm số tính thời gian người canh hải đăng phải đi. Đặt  $BM = x$  thì ta được:  $MC = 7 - x$ ,  $AM = \sqrt{x^2 + 25}$ . Theo đề bài, Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h, như vậy ta có hàm số  $f(x)$  được xác định như sau:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6} = \frac{3\sqrt{x^2 + 25} - 2x + 14}{12} \text{ với } x \in [0; 7]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  để có được thời gian ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x) = \frac{1}{12} \left( \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 2 \right).$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2\sqrt{x^2 + 25} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 25} = 3x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 = 100 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{5} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 7]$  và ta có:

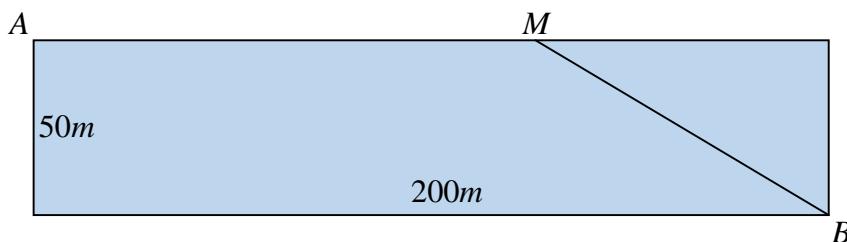
$$f(0) = \frac{29}{12}, f(2\sqrt{5}) = \frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}, f(7) = \frac{\sqrt{74}}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  là  $\frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}$  tại  $x = 2\sqrt{5}$ . Khi đó thời gian đi là ít nhất và điểm M nằm cách B một đoạn  $BM = x = 2\sqrt{5}$ .

**Câu 19. (SỞ HẢI PHÒNG)** Một chất diêm chuyển động theo phương trình  $S = -t^3 + 9t^2 + t + 10$  trong đó  $t$  tính bằng ( $s$ ) và  $S$  tính bằng ( $m$ ). Thời gian vận tốc của chất diêm đạt giá trị lớn nhất là:

- A.  $t = 2s$       B.  $t = 3s$       C.  $t = 6s$       D.  $t = 5s$

**Câu 20. (HÀ HUY TẬP)** Có một bể bơi hình chữ nhật rộng  $50m$ , dài  $200m$ . Một vận động viên chạy phối hợp với bơi như sau: Xuất phát từ điểm  $A$ , chạy đến điểm  $M$  và bơi từ điểm  $M$  đến điểm  $B$  (như hình vẽ). Hỏi nên chọn điểm  $M$  cách  $A$  gần bằng bao nhiêu mét để đến  $B$  nhanh nhất (làm tròn đến hàng đơn vị)? Biết vận tốc chạy  $4,8m/s$ , vận tốc bơi  $2,4m/s$ .



- A.  $AM \approx 171m$ .      B.  $AM \approx 182m$ .      C.  $AM \approx 179m$ .      D.  $AM \approx 181m$ .

**Câu 21. (ĐỀ MINH HỌA LẦN 2)** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$  với  $t$  (giây) là

khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và  $y(-2) = 22$  (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A.  $216 (m/s)$ .      B.  $30 (m/s)$ .      C.  $400 (m/s)$ .      D.  $54 (m/s)$ .

### HƯỚNG DẪN GIẢI

**Chọn D.**

Vận tốc tại thời điểm  $t$  là  $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$ .

Do đó vận tốc lớn nhất của vật đạt được khi  $v'(t) = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6$ .

**Câu 22. (CHUYÊN VĨNH PHÚC)** Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường  $s$  (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian  $t$  (phút), hàm số đó là  $s = 6t^2 - t^3$ . Thời điểm  $t$  (giây) mà tại đó vận tốc  $v$  (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là:

- A.  $t = 3s$ .      B.  $t = 6s$ .      C.  $t = 2s$ .      D.  $t = 4s$ .

**Câu 23. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI)** Một vật chuyển động với vận tốc  $10m/s$  thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian  $t$  là  $a(t) = 3t + t^2$ . Tính quãng đường vật đi được trong khoảng  $10s$  kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

- A.  $\frac{3400}{3}km$ .      B.  $\frac{4300}{3}km$ .      C.  $\frac{130}{3}km$ .      D.  $130km$ .

**Câu 24. (QUĂNG XƯƠNG)** Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức  $v(t) = 5t + 1$ , thời gian tính theo đơn vị giây, quãng đường vật đi được tính theo đơn vị mét. Quãng đường vật đó đi được trong 10 giây đầu tiên là:

- A. 15m .      B. 620m .      C. 51m .      D. 260m .

**Chọn D**

$$S = \int_0^{10} (5t+1) dt = 260 \text{ (m)}$$

**Câu 25. (CHUYÊN THÁI BÌNH)** Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc  $v(t) = 160 - 10t \text{ (m/s)}$ . Tìm quãng đường  $S$  mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm  $t = 0 \text{ (s)}$  đến thời điểm vật dừng lại.

- A.  $S = 2560\text{m}$ .      B.  $S = 1280\text{m}$ .      C.  $S = 2480\text{m}$ .      D.  $S = 3840\text{m}$ .

**Chọn B.**

Ta có, vật dừng lại khi  $v(t) = 0 \Leftrightarrow 160 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 16 \text{ (s)}$ .

Khi đó, quãng đường  $S$  mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm  $t = 0 \text{ (s)}$  đến thời điểm vật dừng lại là  $S = \int_0^{16} (160 - 10t) dt = 1280 \text{ (m)}$ .

**Câu 26. (HỒNG QUANG)** Một chiếc xe bắt đầu khởi hành nhanh dần đều với vận tốc  $v(t) = 3t \text{ (m/s)}$  trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ khi xe bắt đầu chuyển động. Sau khi khởi hành được 5 giây thì chiếc xe giữ nguyên vận tốc và chuyển động thẳng đều. Tính quãng đường chiếc xe đi được sau 10 giây.

- A. 150 m      B. 75 m      C. 2812,5 m      D. 112,5 m

**Câu 27. (NGÔ SĨ LIÊN)** Một vật chuyển động theo quy luật  $s(t) = 6t^2 - 2t^3$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng 6 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

- A. 6 m/s .      B. 4 m/s .      C. 3m/s .      D. 5m/s .

**Chọn A.**

Vận tốc của vật là:  $v(t) = s'(t) = -6t^2 + 12t = -6(t-1)^2 + 6 \leq 6$ .

Vận tốc lớn nhất của vật là 6 m/s.

**Câu 28. (NGÔ SĨ LIÊN)** Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào ngăn đường ở phía trước cách 45m (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào) vì vậy, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -5t + 20 \text{ (m/s)}$ , trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn cách bao nhiêu mét (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào)?

- A. 5 m .      B. 4 m .      C. 6 m .      D. 3 m .

**Chọn A.**

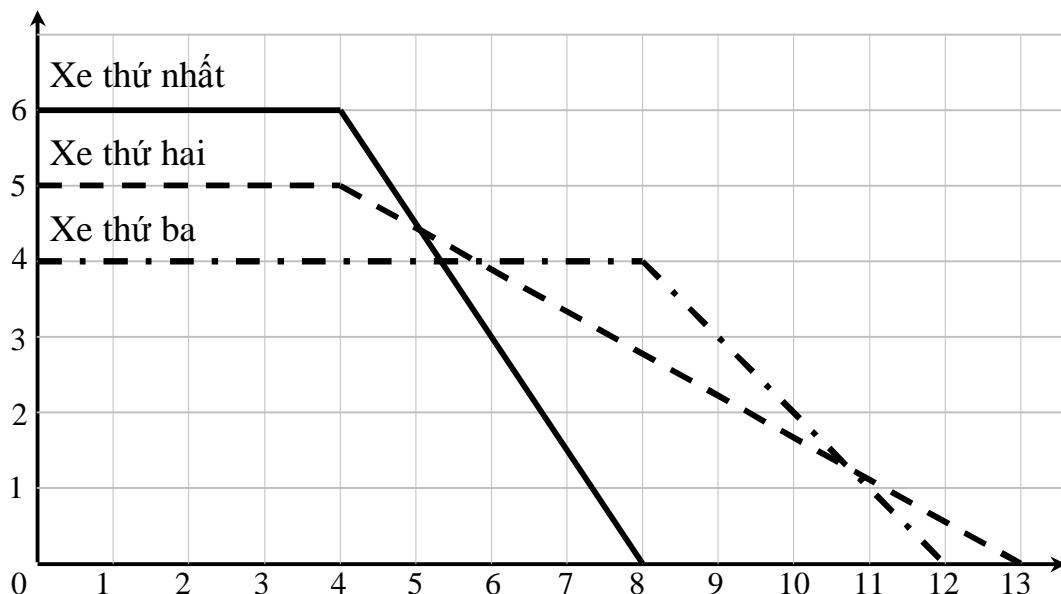
Xe đang chạy với vận tốc  $v = 20 \text{ m/s}$  tương ứng với thời điểm  $t = 0 \text{ (s)}$

Xe dừng lại tương ứng với thời điểm  $t = 4 \text{ (s)}$ .

Quãng đường xe đã đi là  $S = \int_0^4 (-5t + 20) dt = \left( -\frac{5}{2}t^2 + 20t \right) \Big|_0^4 = 40(m)$ .

Vậy ô tô cách hàng rào một đoạn  $45 - 40 = 5(m)$ .

**Câu 29.** (CHUYÊN KHTN) Tại một thời điểm  $t$  trước lúc đỗ xe ở trạm dừng nghỉ, ba xe đang chuyển động đều với vận tốc lần lượt là  $60km/h; 50km/h$  và  $40km/h$ . Xe thứ nhất đi thêm 4 phút thì bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 8; xe thứ hai đi thêm 4 phút, bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 13, xe thứ hai đi thêm 8 phút, bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 12. Đồ thị biểu diễn vận tốc ba xe theo thời gian như sau: (đơn vị trực tung x  $10km/h$ , đơn vị trực hoành là phút).



Giả sử tại thời điểm  $t$  trên, ba xe đang cách trạm lần lượt là  $d_1, d_2, d_3$ . So sánh các khoảng cách này.

- A.  $d_1 < d_2 < d_3$ .      B.  $d_2 < d_3 < d_1$ .      C.  $d_3 < d_1 < d_2$ .      D.  $d_1 < d_3 < d_2$ .

**Chọn D.**

$$d_1 = 60.4 + \int_0^4 (60 - 15t) dt = 360; d_2 = 50.4 + \int_0^9 \left( 50 - \frac{50}{9}t \right) dt = 445$$

$$d_3 = 40.8 + \int_0^8 (40 - 10t) dt = 400$$

**Câu 30.** (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU) Một ôtô đang chạy với vận tốc  $19m/s$  thì người lái hãm phanh, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -38t + 19(m/s)$ , trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A.  $4,75m$ .      B.  $4,5m$ .      C.  $4,25m$ .      D.  $5m$ .

**Chọn A.**

Ta có thời gian ôtô bắt đầu hãm phanh đến khi dừng hẳn là:  $-38t + 19 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}(s)$ . Trong khoảng thời gian này ôtô di chuyển một đoạn đường :

$$s = \int_0^{\frac{1}{2}} (-38t + 19) dt = \left( -19t^2 + 19t \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{19}{4} (m) = 4,75 (m).$$

**Câu 31. (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH)** Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật  $v(t) = 10t - t^2$ , trong đó  $t$  (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động,  $v(t)$  được tính theo đơn vị mét/phút ( $m/p$ ). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc  $v$  của khí cầu là  
**A.**  $v = 5 (m/p)$ .      **B.**  $v = 7 (m/p)$ .      **C.**  $v = 9 (m/p)$ .      **D.**  $v = 3 (m/p)$ .

**Đáp án:** **C.**

Gọi thời điểm khí cầu bắt đầu chuyển động là  $t = 0$ , thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là  $t_1$ .

Quãng đường khí cầu đi được từ thời điểm  $t = 0$  đến thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là  $t_1$  là

$$\int_0^{t_1} (10t - t^2) dt = 5t_1^2 - \frac{t_1^3}{3} = 162$$

$$\Leftrightarrow t \approx -4,93 \vee t \approx 10,93 \vee t = 9$$

Do  $v(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 10$  nên chọn  $t = 9$ .

Vậy khi bắt đầu tiếp đất vận tốc  $v$  của khí cầu là  $v(9) = 10 \cdot 9 - 9^2 = 9 (m/p)$

**Câu 32. (TRUNG GIÃ)** Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc  $v = 30 (m/s)$  thì đột ngột thay đổi gia tốc  $a(t) = 4 - t (m/s^2)$ . Tính quãng đường di được của chất điểm kể từ thời điểm thay đổi gia tốc đến thời điểm vận tốc lớn nhất.

- A.**  $\frac{848}{3} (m)$ .      **B.**  $\frac{424}{3} (m)$ .      **C.**  $\frac{128}{3} (m)$ .      **D.**  $\frac{64}{3} (m)$ .

**Câu 33. (CÔNG NHIỆP)** Một vật chuyển động với gia tốc  $a(t) = -20(1+2t)^{-2} (m/s^2)$ . Khi  $t=0$  thì vận tốc của vật là  $30 (m/s)$ . Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây ( $m$  là mét,  $s$  là giây).

- A.**  $46 m$ .      **B.**  $48 m$ .      **C.**  $47 m$ .      **D.**  $49 m$ .

**Câu 34. (CHUYÊN BIÊN HÒA)** Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc  $v_0 = 15 m/s$  thì tăng vận tốc với gia tốc  $a(t) = t^2 + 4t (m/s^2)$ . Tính quãng đường chất điểm đó di được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

- A.**  $68,25 m$ .      **B.**  $70,25 m$ .      **C.**  $69,75 m$ .      **D.**  $67,25 m$ .

**Giải**

**Chọn C.**

$$v(t) = \int (t^2 + 4t) dt = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + C. \text{ Mà } v(0) = 15 \Rightarrow C = 15 \text{ nên } v(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 15$$

$$S(t) = \int_0^3 \left( \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 15 \right) dt = \left( \frac{1}{12}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + 15t \right) \Big|_0^3 = \frac{279}{4} = 69,75(m).$$

**Câu 35. (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG)** Một viên đạn được bắn theo phuong thang đứng với vận tốc ban đầu  $29,4\text{ m/s}$ . Gia tốc trọng trường là  $9,8\text{ m/s}^2$ . Tính quãng đường  $S$  viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất.

- A.  $S = 88,2\text{ m}$ .      B.  $S = 88,5\text{ m}$ .      C.  $S = 88\text{ m}$ .      D.  $S = 89\text{ m}$ .

### Hướng dẫn giải

#### Chọn A.

Ta có công thức liên hệ giữa vận tốc, gia tốc và quãng đường đi được là  $v^2 - v_0^2 = 2as$  nên quãng đường đi được từ lúc bắn lên đến khi dừng lại là  $v^2 - v_0^2 = s$ .

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - 29,4^2}{-2 \cdot 9,8} = 44,1$$

Quãng đường đi được từ lúc bắn đến khi chạm đất là  $S = 44,1 \cdot 2 = 88,2\text{ m}$ .

**Câu 36. (NGÔ GIA TỰ)** Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường  $s(\text{mét})$  đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian  $t$  ( $\text{giây}$ ), hàm số đó là  $s = 6t^2 - t^3$ . Thời điểm  $t$  ( $\text{giây}$ ) mà tại đó vận tốc  $v$  ( $\text{m/s}$ ) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

- A.  $t = 4\text{ s}$ .      B.  $t = 2\text{ s}$ .      C.  $t = 6\text{ s}$ .      D.  $t = 8\text{ s}$ .

### Hướng dẫn giải

#### Chọn B.

- Hàm số vận tốc là  $v = s'(t) = -3t^2 + 12t$ , có GTLN là  $v_{\max} = 12$  tại  $t = 2$

**Câu 37. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU)** Một ôtô đang chạy đều với vận tốc  $15\text{ m/s}$  thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ôtô chuyển động chậm dần đều với gia tốc  $-a\text{ m/s}^2$ . Biết ôtô chuyển động thêm được  $20\text{ m}$  thì dừng hẳn. Hỏi  $a$  thuộc khoảng nào dưới đây.

- A.  $(3;4)$ .      B.  $(4;5)$ .      C.  $(5;6)$ .      D.  $(6;7)$ .

### Hướng dẫn giải

#### Chọn C.

Gọi  $x(t)$  là hàm biểu diễn quãng đường,  $v(t)$  là hàm vận tốc.

$$\text{Ta có: } v(t) - v(0) = \int_0^t (-a) dt = -at \Rightarrow v(t) = -at + 15.$$

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (-at + 15) dt = -\frac{1}{2}at^2 + 15t$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + 15t$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} v(t) = 0 \\ x(t) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -at + 15 = 0 \\ -\frac{1}{2}at^2 + 15t = 20 \end{cases} \Rightarrow -\frac{15}{2}t + 15t = 20 \Rightarrow t = \frac{8}{3} \Rightarrow a = \frac{45}{8}.$$

**Câu 38. (TRẦN HƯNG ĐẠO)** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $S = -2t^3 + 18t^2 + 2t + 1$ , trong đó  $t$  tính bằng giây ( $s$ ) và  $S$  tính bằng mét ( $m$ ). Tại thời điểm bài thi vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất?

- A.  $t = 5s$ .      B.  $t = 6s$ .      C.  $t = 3s$ .      D.  $t = 1s$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Ta có:  $v(t) = S' = -6t^2 + 36t + 1$  và  $v'(t) = -12t + 36$ , cho  $v'(t) = 0 \Rightarrow t = 3$

Lập BBT suy ra  $t = 3s$  thì vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng  $55 m/s$ .

**Câu 39. (NGUYỄN KHUYẾN)** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$ , với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Khi đó vận tốc  $v(m/s)$  của chuyển động đạt giá trị lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên bằng

- A.  $17 m/s$ .      B.  $36 m/s$ .      C.  $26 m/s$ .      D.  $29 m/s$ .

**Chọn D.**

Vận tốc của chất điểm là  $v = s' = -3t^2 + 12t + 17 = -3(t-2)^2 + 29 \leq 29$ .

Vậy vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất bằng 29 khi  $t = 2$ .

**Câu 40. (SỞ HÀ NỘI)** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc  $v_1(t) = 7t(m/s)$ . Đến được 5(s), người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc  $a = -70(m/s^2)$ . Tính quãng đường  $S$  (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- A.  $S = 95,70(m)$ .      B.  $S = 96,25(m)$ .      C.  $S = 87,50(m)$ .      D.  $S = 94,00(m)$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn B.**

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi dừng phanh:

$$S_1 = \int_0^5 v_1(t) dt = \int_0^5 7t dt = 7 \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 87,5(m).$$

Vận tốc  $v_2(t)$  (m/s) của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thoả mãn

$$v_2(t) = \int (-70) dt = -70t + C, v_2(5) = v_1(5) = 35 \Rightarrow C = 385. \text{ Vậy } v_2(t) = -70t + 385.$$

Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với  $t$  thoả mãn  $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5,5(s)$ .

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn:

$$S_2 = \int_5^{5,5} v_1(t) dt = \int_5^{5,5} (-70t + 385) dt = 8,75(m).$$

Quãng đường cần tính  $S = S_1 + S_2 = 96,25(m)$ .

**Câu 41. (TT DIỆU HIỀN)** Một ô tô đang chạy với vận tốc  $10m/s$  thì người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = 10 - 5t$  m/s với  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường đi được của ô tô từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn.

- A.  $10m$ .      B.  $20m$ .      C.  $2m$ .      D.  $0,2m$ .

### Hướng dẫn giải

Quãng đường xe đi được sau khi đạp phanh là  $s = \int_0^2 (10 - 5t) dt = 10$ .

**Câu 42. (HAI BÀ TRƯNG)** Một chất điểm chuyển động trên trục  $Ox$  với vận tốc thay đổi theo thời gian  $v(t) = 3t^2 - 6t$  (m/s). Tính quãng đường chất điểm đó đi được từ thời điểm  $t_1 = 0$  (s),  $t_2 = 4$  (s).

- A.  $16$ .      B.  $24$ .      C.  $8$ .      D.  $12$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

Quãng đường chất điểm đi được là:  $S = \int_0^4 v(t) dt = \int_0^4 (3t^2 - 6t) dt = (t^3 - 3t^2) \Big|_0^4 = 16$ .

**Câu 43. (TIỀN LÃNG)** Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng  $480$  nghìn đồng trên  $1$  giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi  $v = 10$  ( $km/giờ$ ) thì phần thứ hai bằng  $30$  nghìn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên  $1 km$  đường sông là nhỏ nhất (kết quả làm tròn đến số nguyên).

- A.  $10$  ( $km/giờ$ ).      B.  $25$  ( $km/giờ$ ).      C.  $15$  ( $km/giờ$ ).      D.  $20$  ( $km/giờ$ ).

### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

Gọi  $x(km/h)$  là vận tốc của tàu,  $x > 0$

Thời gian tàu chạy quãng đường  $1km$  là:  $\frac{1}{x}$  (giờ)

+) Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là:  $\frac{1}{x} \cdot 480 = \frac{480}{x}$ . (ngàn đồng)

+) Hàm chi phí cho phần thứ hai là  $p = kx^3$  (ngàn đồng/giờ)

Mà khi  $x = 10 \Rightarrow p = 30 \Rightarrow k = 0,03$ . Nên  $p = 0,03x^3$  (ngàn đồng/giờ)

Do đó chi phí phần 2 để chạy  $1 km$  là:  $\frac{1}{x} \cdot 0,03x^3 = 0,03x^2$ . (ngàn đồng)

Vậy tổng chi phí:  $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^2 = \frac{240}{x} + \frac{240}{x} + 0,03x^2 \geq 3\sqrt[3]{1728} = 36$ .

Dấu " $=$ " xảy ra khi  $x = 20$

**Câu 44. (TIỀN LÃNG)** Một vật di chuyển với vận tốc  $a(t) = -20(1+2t)^{-2} \text{ (m/s}^2\text{)}$ . Khi  $t=0$  thì vận tốc của vật bằng  $30 \text{ m/s}$ . Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

- A.  $48 \text{ m.}$       B.  $68 \text{ m.}$       C.  $108 \text{ m.}$       D.  $8 \text{ m.}$

### Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

Gọi  $v(t) \text{ (m/s)}$ ,  $s(t) \text{ (m)}$  lần lượt là vận tốc và quãng đường của chuyển động, khi đó ta có  $a(t) = v'(t)$ ,  $v(t) = s'(t)$  hay  $v(t) = \int a(t) dt$ ,  $s(t) = \int v(t) dt$

$$v(t) = \int (-20(1+2t)^{-2}) dt = \frac{-20}{2} \frac{(1+2t)^{-1}}{-1} + C = \frac{10}{1+2t} + C$$

Vì khi  $t=0$  thì vận tốc của vật bằng  $30 \text{ m/s}$  nên  $v(0) = \frac{10}{1+2.0} + C = 30 \Rightarrow C = 20$ .

$$\text{Do đó } v(t) = \frac{10}{1+2t} + 20.$$

Quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây là

$$s = \int_0^2 \left( \frac{10}{1+2t} + 20 \right) dt = \left( 5 \ln |1+2t| + 20t \right) \Big|_0^2 = 5 \ln 5 + 40 \approx 48,0471896$$

**Câu 45. (GIA LỘC)** Một chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ , với  $t$  (giây) là khoảng thời gian từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật di được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

- A.  $54 \text{ (m/s).}$       B.  $216 \text{ (m/s).}$       C.  $30 \text{ (m/s).}$       D.  $400 \text{ (m/s).}$

### Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

$$v(t) = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 18t \text{ và } a(t) = v'(t) = -3t + 18$$

Cho  $v'(t) = 0 \Rightarrow t = 6$

Khi đó:  $v(0) = 0$ ,  $v(10) = 30$  và  $v(6) = 54$ .

Vậy: Vận tốc lớn nhất của vật là  $54 \text{ (m/s)}$  tại thời điểm  $t = 6$ .

# TỔNG ÔN: BÀI TOÁN THỰC TIỄN 2017

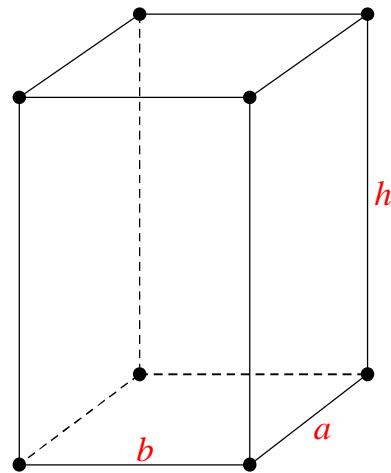
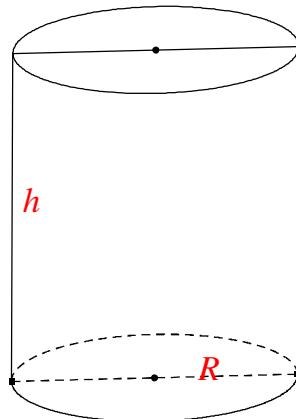
## Chủ đề 2. LIÊN QUAN CẮT – GHÉP CÁC KHỐI HÌNH

**Câu 1.** (Chuyên Thái Bình) Một nhà sản xuất sữa có hai phương án làm hộp sữa. Hộp sữa có dạng khối hộp chữ nhật hoặc hộp sữa có dạng khối trụ. Nhà sản xuất muốn chi phí bao bì càng thấp càng tốt (tức diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất), nhưng vẫn phải chứa được một thể tích xác định là  $V$  cho trước. Khi đó diện tích toàn phần của hộp sữa bé nhất trong hai phương án là

- A.  $\sqrt[3]{2\pi V^2}$ .      B.  $6\sqrt[3]{V^2}$ .      C.  $3\sqrt[3]{6V^2}$ .      D.  $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D**



Trường hợp 1: Hộp sữa hình trụ

$$\text{Thể tích không đổi } V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}, S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho bộ ba số dương  $2\pi R^2, \frac{V}{R}, \frac{V}{R}$

$$\text{Ta có } S_{tp} = 2\pi R^2 + \frac{V}{R} + \frac{V}{R} \geq 3\sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{V}{R} \cdot \frac{V}{R}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2} \quad (*)$$

Trường hợp 2: Hộp sữa hình hộp chữ nhật

Thể tích không đổi

$$V = abh \Rightarrow h = \frac{V}{ab}; S_{tp} = 2ab + 2(a+b)h = 2ab + 2a \cdot \frac{V}{ab} + 2b \cdot \frac{V}{ab} = 2 \left( ab + \frac{V}{b} + \frac{V}{a} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cau chy cho bộ ba số dương  $ab; \frac{V}{a}; \frac{V}{b}$

$$\text{Ta có } S_{tp} \geq 2.3\sqrt[3]{ab \cdot \frac{V}{a} \cdot \frac{V}{b}} = 6\sqrt[3]{V^2} \text{ (**)}$$

Xét hai kết quả ta thấy (\*) nhỏ hơn

Vậy diện tích toàn phần của hộp sữa bé nhất là  $S_{tp} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$  (đvdt)

**Câu 2.** (CHUYÊN BIÊN HÒA) Một cốc nước có dạng hình trụ chiều cao là  $15cm$ , đường kính đáy là  $6cm$ , lượng nước ban đầu trong cốc cao  $10cm$ . Thả vào cốc nước 5 viên bi hình cầu có cùng đường kính là  $2cm$ . Hỏi sau khi thả 5 viên bi, mực nước trong cốc cách miệng cốc bao nhiêu cm? (Kết quả làm tròn sau dấu phẩy 2 chữ số).

- A.  $4,81cm$ .      B.  $4,25cm$ .      C.  $4,26cm$ .      D.  $3,52cm$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

$$r = 3$$

$$V_{coc\ nuoc} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 15 \cdot 3^2 = 135\pi \text{ .}$$

Thể tích  $V_1$  của cốc nước sau khi thả 5 viên bi :

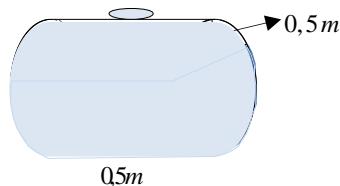
$$V_1 = \pi \cdot 10 \cdot 3^2 + 5 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = \frac{290\pi}{3} \text{ .}$$

$$\text{Thể tích của phần còn trống : } V_2 = V - V_1 = 135\pi - \frac{290\pi}{3} = \frac{115\pi}{3} \text{ .}$$

Gọi  $h_1$  là khoảng cách từ mực nước trong cốc đến miệng cốc .

$$\pi \cdot 3^2 \cdot h_1 = \frac{115\pi}{3} \Rightarrow h_1 = \frac{115}{27} \approx 4,26cm \text{ .}$$

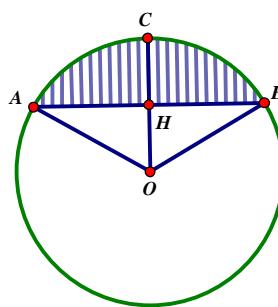
**Câu 3.** (CHUYÊN LÊ KHIẾT) Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là  $5m$ , có bán kính đáy  $1m$ , với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với  $0,5m$  của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị  $m^3$ )



- A.  $12,637m^3$ .      B.  $114,923m^3$ .      C.  $11,781m^3$ .      D.  $8,307m^3$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn A**



Nhận xét  $OH = CH = 0,5 = \frac{R}{2} = \frac{OB}{2}$  suy ra  $\Delta OHB$  là tam giác nửa đều

$$\Rightarrow \widehat{HOB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$$

Suy ra diện tích hình quạt  $OAB$  là:  $S = \frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{1}{3}\pi$

Mặt khác:  $S_{\Delta AOB} = 2S_{\Delta HOB} = S_{\Delta BOC} = \frac{OB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$  ( $\Delta BOC$  đều)

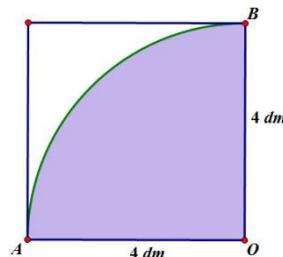
Vậy diện tích hình viên phân cung  $AB$  là  $\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$

Suy ra thể tích dầu được rút ra:  $V_1 = 5 \cdot \left( \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

Thể tích dầu ban đầu:  $V = 5\pi \cdot 1^2 = 5\pi$

Vậy thể tích còn lại:  $V_2 = V - V_1 \approx 12,637 m^3$ .

**Câu 4.** (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG) Từ miếng tôn hình vuông cạnh bằng 4 dm, người ta cắt ra hình quạt tâm  $O$  bán kính  $OA = 4$  dm (xem hình) để cuộn lại thành một chiếc phễu hình nón (khi đó  $OA$  trùng với  $OB$ ). Chiều cao của chiếc phễu có số đo gần đúng (làm tròn đến 3 chữ số thập phân) là



- A. 3,872 dm .      B. 3,874 dm .      C. 3,871 dm .      D. 3,873 dm .

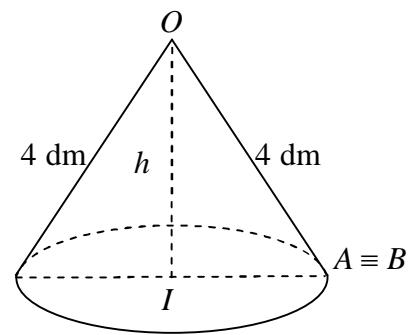
**Hướng dẫn giải:**

**Chọn D.**

Ta có cung  $AB$  có độ dài bằng  $\frac{\pi}{2} \cdot 4 = 2\pi$ .

Dựa vào đề bài ta thấy có thể tạo thành hình nón đỉnh  $O$ , đường sinh  $OA$ .

Để cuộn lại thành một chiếc phễu hình nón (khi đó  $OA$  trùng với  $OB$ ) thì chu vi  $C$  đường tròn đáy bằng độ dài cung  $AB$  bằng  $2\pi$ . Khi đó bán kính đáy là  $C = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ .



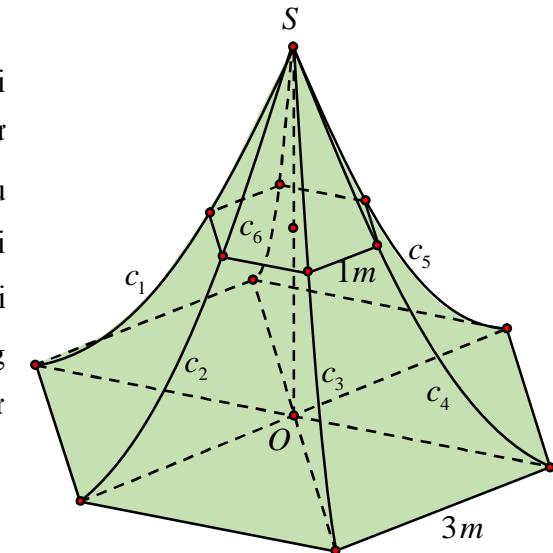
Xét tam giác  $OIA$  vuông tại  $I$  có  $OA = 4 \text{ dm}$ ,  $IA = R = 1 \text{ dm}$ .

$$h = OI \text{ trong đó } OI^2 = OA^2 - IA^2 = 4^2 - 1^2 = 15 \Rightarrow OI = \sqrt{15} \approx 3,873.$$

Vậy  $h \approx 3,873$ .

**Câu 5. (QUỐC HỌC HUẾ)** Người ta dựng một cái lều vải ( $H$ ) có dạng hình “chóp lục giác đều” như hình vẽ bên. Đáy của ( $H$ ) là một hình lục giác đều cạnh  $3 \text{ m}$ . Chiều cao  $SO = 6 \text{ m}$  ( $SO$  vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của ( $H$ ) là các sợi dây  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với  $SO$ . Giả sử giao tuyến (nếu có) của ( $H$ ) với mặt phẳng ( $P$ ) vuông góc với  $SO$  là một lục giác đều và khi ( $P$ ) qua trung điểm của  $SO$  thì lục giác đều có cạnh  $1 \text{ m}$ . Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều ( $H$ ) đó.

- A.  $\frac{135\sqrt{3}}{5} (\text{m}^3)$ .      B.  $\frac{96\sqrt{3}}{5} (\text{m}^3)$ .  
 C.  $\frac{135\sqrt{3}}{4} (\text{m}^3)$ .      D.  $\frac{135\sqrt{3}}{8} (\text{m}^3)$ .



### Hướng dẫn giải

#### Chọn D.

Đặt **hệ** trục tọa độ như hình vẽ, ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có tọa độ lần lượt là  $A(0;6)$ ,  $B(1;3)$ ,  $C(3;0)$  nên

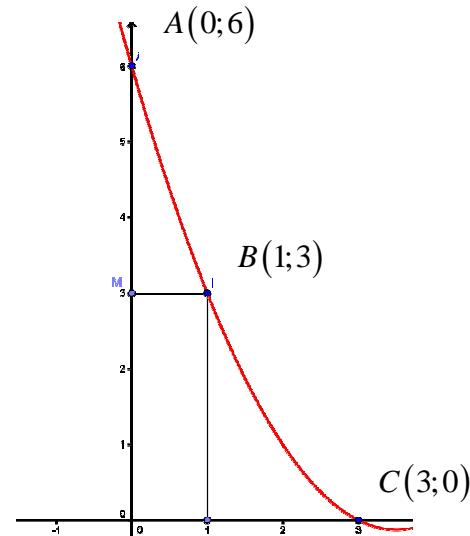
$$\text{có phương trình là } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$$

Theo **hình** vẽ ta có cạnh của “**thiết diện lục giác**” là  $BM$ .

Nếu ta đặt  $t = OM$  thì  $BM = \frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}$  (chú ý là ta phải lấy giá trị có dấu “–” trước dấu căn và cho  $B$  chạy từ  $C$  đến  $A$ ).

Khi đó, diện **tích** của “**thiết diện lục giác**” bằng

$$S(t) = 6 \cdot \frac{BM^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( \frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}} \right)^2 \text{ với } t \in [0;6].$$



Vậy thể tích của “túp lều” theo đề bài là:  $V = \int_0^6 S(t) dt = \int_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( \frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}} \right)^2 dt = \dots = \frac{135\sqrt{3}}{8}$

Cho khối chóp  $O.ABC$  có ba cạnh  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  đôi một vuông góc với nhau. Biết  $OA = 1$ ,

**Câu 6. (SỞ QUẢNG NAM)** Một cái thùng đựng nước được tạo thành từ việc cắt mặt xung quanh của

một hình nón bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón. Miệng thùng là đường tròn có bán kính bằng hai lần bán kính mặt đáy của thùng. Bên trong thùng có một cái phễu dạng hình nón có đáy là đáy của thùng, có đỉnh là tâm của miệng thùng và có chiều cao bằng 20 cm (xem hình minh họa). Biết rằng đồ  $4.000 \text{ cm}^3$  nước vào thùng thì đầy thùng (nước không chảy được vào bên trong phễu), tính bán kính đáy  $r$  của phễu (giá trị gần đúng của  $r$  làm tròn đến hàng phần trăm)

- A.**  $r = 9,77 \text{ cm}$ .      **B.**  $r = 7,98 \text{ cm}$ .      **C.**  $r = 5,64 \text{ cm}$ .      **D.**  $r = 5,22 \text{ cm}$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

**Cách 1:**

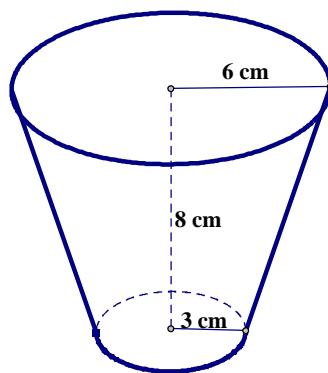
$$\begin{aligned} V_{thung} &= \frac{1}{3}h \cdot \left( S_{mieng} + S_{day} + \sqrt{S_{mieng} \cdot S_{day}} \right) \\ &= \frac{1}{3}h \cdot \left( \pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} \right) \\ &= \frac{1}{3}h \cdot \left( \pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr \right) \\ &= \frac{1}{3}h \cdot \left( \pi \cdot (2r)^2 + \pi r^2 + \pi \cdot 2r \cdot r \right) \\ &= \frac{1}{3}h \cdot (7\pi r^2) = \frac{7}{3}h \cdot \pi \cdot r^2 \end{aligned}$$

$$V_{pheu} = \frac{1}{3}h \cdot S_{day} = \frac{1}{3}h \cdot \pi \cdot r^2$$

Theo giả thuyết

$$\begin{aligned} V_{thung} - V_{pheu} &= 4000 \Leftrightarrow \frac{7}{3}h \cdot \pi \cdot r^2 - \frac{1}{3}h \cdot \pi \cdot r^2 = 4000 \\ &\Leftrightarrow 2h \cdot \pi \cdot r^2 = 4000 \\ &\Leftrightarrow r^2 = \frac{4000}{2 \cdot h \cdot \pi} = \frac{4000}{2 \cdot 20 \cdot \pi} = \frac{100}{\pi} \\ &\Rightarrow r \approx 5,64 \text{ cm} \end{aligned}$$

**Câu 7. (VÕ NGUYÊN GIÁP)** Có một chiếc cốc có dạng như hình vẽ, biết chiều cao của chiếc cốc là 8cm , bán kính đáy cốc là 3cm , bán kính miệng cốc là 6cm . Tính thể tích  $V$  của chiếc cốc.



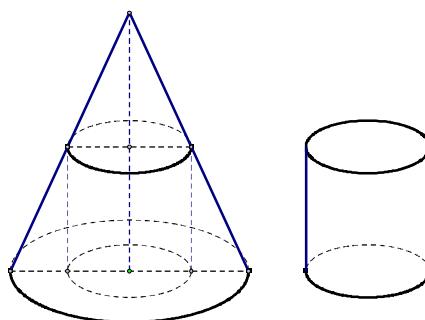
- A.  $72\pi(cm^3)$ .      B.  $48\pi(cm^3)$ .      C.  $48(cm^3)$ .      D.  $36\pi(cm^3)$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn C.**

Áp dụng công thức tính thể tích hình nón cùt

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + R.r) = \frac{8\pi}{3} (6^2 + 3^2 + 18) = 168\pi(cm^3)$$

**Câu 8. (VÕ NGUYÊN GIÁP)** Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng  $r = 2m$ , chiều cao  $h = 6m$ . Bác thợ mộc ché tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi  $V$  là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi ché tác. Tính  $V$ .



- A.  $V = \frac{32\pi}{9}(m^3)$ .      B.  $V = \frac{32\pi}{3}(m^3)$ .      C.  $V = \frac{32}{3}(m^3)$ .      D.  $V = \frac{32\pi}{9}(m^2)$ .

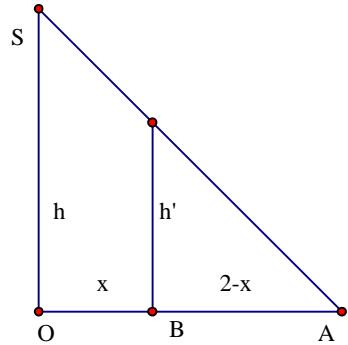
**Hướng dẫn giải****Chọn D.**

Giả sử khối trụ có bán kính đáy và đường cao lần lượt là  $r$ ,  $h'$  ( $0 < x < 2; 0 < h' < 6$ )

$$\text{Ta có: } \frac{h'}{6} = \frac{2-x}{2} \Leftrightarrow h' = 6 - 3x$$

Thể tích khối trụ:  $V = \pi x^2 h' = \pi x^2 (6 - 3x) = 6\pi x^2 - 3\pi x^3$

$$V'(x) = 12\pi x - 9\pi x^2, V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{3}$$



Khi đó ta có thể suy ra được với  $x = \frac{4}{3}$  thì  $V$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $V = \frac{32\pi}{9}(m^2)$

**Câu 9. (CHUYÊN SƠN LA)** Từ một nguyên liệu cho trước, một công ty muốn thiết kế bì đựng sữa với thể tích  $100ml^3$ . Bao bì được thiết kế bởi một trong hai mô hình là: hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông và hình trụ. Hỏi thiết kế theo mô hình nào tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

A. Hình hộp chữ nhật có cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy.  
B. Hình trụ có chiều cao gấp hai lần bán kính đáy.

- C. Hình trụ có chiều cao bằng bán kính đáy.  
D. Hình hộp chữ nhật có cạnh bên bằng cạnh đáy.

### Hướng dẫn giải

#### **Chọn B.**

Gọi:  $R$  là bán kính đáy hình trụ

$l$  là chiều cao hình trụ

Khi đó hình trụ có thể tích là:  $V = \pi R^2 l = 100ml$

Diện tích toàn phần của hình trụ là:  $S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = \pi Rl + \pi Rl + 2\pi R^2$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số không âm:  $2\pi R^2, \pi Rl, \pi Rl$  ta có:

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi Rl + 2\pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{\pi Rl \cdot \pi Rl \cdot 2\pi R^2} = 3\sqrt[3]{2\pi \cdot \pi R^2 l \cdot \pi R^2 l} = 3\sqrt[3]{2\pi \cdot 100 \cdot 100} \approx 119.27 \quad (1)$$

Dấu " $=$ " xảy ra  $\Leftrightarrow \pi Rl = \pi Rl = 2\pi R^2 \Leftrightarrow l = 2R$

Gọi  $a$  là độ dài cạnh đáy hình hộp chữ nhật

Gọi  $h$  là chiều cao hình hộp chữ nhật

Khi đó thể tích hình hộp chữ nhật là:  $V = a^2 \cdot h = 100m^3$

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là:  $S_{tp} = 2a^2 + 4a \cdot h = 2a^2 + 2a \cdot h + 2a \cdot h$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số không âm là:  $2a^2, 2a \cdot h, 2a \cdot h$

$$\text{Ta có: } S_{tp} = 2a^2 + 2a \cdot h + 2a \cdot h \geq 3\sqrt[3]{2a^2 \cdot 2a \cdot h \cdot 2a \cdot h} \geq 3\sqrt[3]{8a^2 h \cdot a^2 h} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{100^2} \approx 129.27 \quad (2)$$

Dấu " $=$ " xảy ra  $\Leftrightarrow 2ah = 2ah = 2a^2 \Leftrightarrow h = a$

Từ (1), (2)  $\Rightarrow$  Thiết kế hộp sữa hình trụ có chiều cao gấp hai lần bán kính đáy thì tốn ít nguyên vật liệu nhất.

**Câu 10. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ LẦN 8)** Giá trị lớn nhất của thể tích khối nón nội tiếp trong khối cầu có bán kính  $R$  là

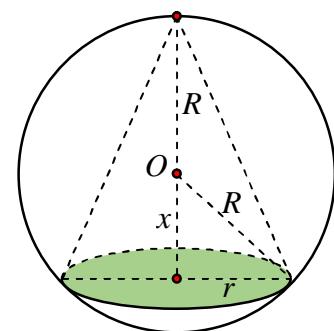
- A.  $\frac{1}{3}\pi R^3$ .      B.  $\frac{4}{3}\pi R^3$ .      C.  $\frac{4\sqrt{2}}{9}\pi R^3$ .      D.  $\frac{32}{81}\pi R^3$ .

### Hướng dẫn giải:

#### **Chọn D.**

Rõ ràng trong hai khối nón cùng bán kính đáy nội tiếp trong một khối cầu thì khối nón có chiều cao lớn hơn thì thể tích lớn hơn, nên ta chỉ xét khối nón có chiều cao lớn hơn trong hai khối nón đó.

Giả sử rằng khối nón có đáy là hình tròn ( $C$ ) bán kính  $r$ . Gọi  $x$  với  $0 \leq x < R$  là khoảng cách giữa tâm khối cầu đến đáy



khối nón. Khi đó chiều cao lớn nhất của khối nón nội tiếp khối cầu với đáy là hình tròn ( $C$ ) sẽ là  $h = R + x$ . Khi đó bán kính đáy nón là  $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ , suy ra thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(R+x)(R^2-x^2) = \frac{1}{3}\pi(R+x)(R+x)(R-x) = \frac{1}{6}\pi(R+x)(R+x)(2R-2x)$$

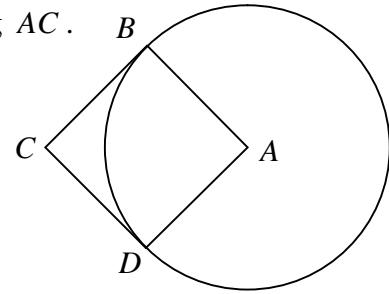
$$\text{Áp dụng BĐT Cô-si ta có } V \leq \frac{1}{6}\pi \frac{(R+x+R+x+2R-2x)^3}{27} = \frac{32\pi R^3}{81}$$

**Câu 11. (SỞ THANH HÓA)** Cho hình hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có độ dài đường chéo  $AC' = \sqrt{18}$ . Gọi  $S$  là diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật này. Tìm giá trị lớn nhất của  $S$ .

- A.  $S_{\max} = 36\sqrt{3}$ .      B.  $S_{\max} = 18\sqrt{3}$ .      C.  $S_{\max} = 18$ .      D.  $S_{\max} = 36$ .

**Câu 12. (SỞ THANH HÓA)** Trong mặt phẳng ( $P$ ) cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng 7 và hình tròn ( $C$ ) có tâm  $A$ , đường kính bằng 14 (*hình vẽ bên*). Tính thể tích  $V$  của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục là đường thẳng  $AC$ .

- A.  $V = \frac{343(4+3\sqrt{2})\pi}{6}$ .      B.  $V = \frac{343(7+\sqrt{2})\pi}{6}$ .  
 C.  $V = \frac{343(12+\sqrt{2})\pi}{6}$ .      D.  $V = \frac{343(6+\sqrt{2})\pi}{6}$ .



**Câu 13. (Lương Thế Vinh)** Kim tự tháp Cheops (có dạng hình chóp) là kim tự tháp cao nhất ở Ai Cập. Chiều cao của kim tự tháp này là  $144m$ , đáy của kim tự tháp là hình vuông có cạnh dài  $230m$ . Các lối đi và phòng bên trong chiếm  $30\%$  thể tích của kim tự tháp. Biết một lần vận chuyển gồm 10 xe, mỗi xe chở 6 tấn đá, và khối lượng riêng của đá bằng  $2,5 \cdot 10^3 kg/m^3$ . Số lần vận chuyển đá để xây đủ dựng kim tự tháp là:

- A. 740600 .      B. 76040 .      C. 7406 .      D. 74060 .

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D.

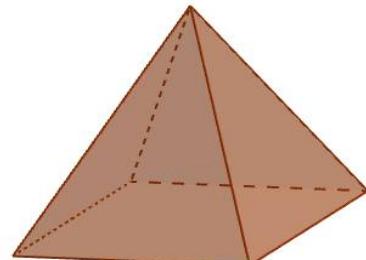
Gọi cạnh của hình chóp là  $a = 230$ , chiều cao  $h = 144$

$$\text{Thể tích kim tự tháp : } V = \frac{1}{3}ha^2 = 2539200m^3$$

Thể tích khối đá cần vận chuyển  $0.7V = 1777440m^3$ .

Gọi  $x$  là số lần vận chuyển. Để đủ đá xây dựng kim tự tháp thì

**Câu 14. (Lương Thế Vinh)** Hai quả bóng hình cầu có kích thước khác nhau được đặt ở hai góc của một căn nhà hình hộp chữ nhật. Mỗi quả bóng tiếp xúc với hai bức



tường và nền của căn nhà đó. Trên bề mặt của mỗi quả bóng, tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường quả bóng tiếp xúc và đến nền nhà lần lượt là 9, 10, 13. Tổng độ dài đường kính của hai quả bóng đó là:

- A. 64.      B. 34.      C. 32.      D. 16.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn A.

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  gắn với góc tường và các trục là các cạnh góc nhọn. Do hai quả cầu đều tiếp xúc với các bức tường và nền nhà nên tương ứng tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ, vậy tâm cầu sẽ có tọa độ là  $I(a;a;a)$  với  $a > 0$  và có bán kính  $R = a$ .

Do tồn tại một điểm trên quả bóng có khoảng cách đến các bức tường và nền nhà lần lượt là 9, 10, 11 nên nói cách khác điểm  $A(9;10;13)$  thuộc mặt cầu. Từ đó ta có phương trình:

$$(9-a)^2 + (10-a)^2 + (13-a)^2 = a^2$$

Giải phương trình ta được nghiệm  $a = 7$  hoặc  $a = 25$

Vậy có 2 mặt cầu thoả mãn bài toán và tổng độ dài đường kính là  $2(7+25) = 64$ .

$$\frac{x \cdot 10.6000}{2,5 \cdot 10^3} = 1777440 \Rightarrow x = 74060$$

**Câu 15. (QUẢNG XƯƠNG 1)** Thiết diện qua trục của hình trụ là một hình chữ nhật có chu vi là  $12(cm)$ . Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ đó là:

- A.  $32\pi(cm^3)$ .      B.  $8\pi(cm^3)$ .      C.  $16\pi(cm^3)$ .      D.  $64\pi(cm^3)$ .

### Hướng dẫn giải.

#### Chọn B.

Gọi  $r$  là bán kính hình trụ, chiều cao  $h$

Ta có:  $2r + h = 6 \Rightarrow h = 6 - 2r, (0 < r < 3)$

$$\text{Khi đó: } V = \pi r^2 h = \pi r^2 (6 - 2r) \leq \left[ \frac{r + r + 6 - 2r}{3} \right]^3 = 8\pi$$

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là  $8\pi(cm^3)$

**Câu 16. (QUẢNG XƯƠNG 1)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ ,  $SA = SB = SC = a$ . Thể tích lớn nhất của khối chóp  $S.ABCD$  là

- A.  $\frac{3a^3}{8}$ .      B.  $\frac{a^3}{2}$ .      C.  $\frac{a^3}{8}$ .      D.  $\frac{a^3}{4}$ .

### Hướng dẫn giải.

**Chọn D.**

Kẻ  $SH \perp (ABCD)$  tại  $H \Rightarrow H$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ . Mà  $\Delta ABC$  cân tại  $B$  và  $AC \perp BD \Rightarrow H \in BD$ . Gọi  $O$  là giao điểm  $AC$  và  $BD$ .

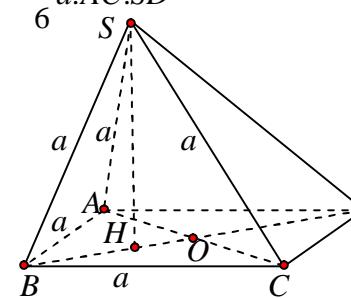
Ta có:  $OB^2 = AB^2 - OA^2 = a^2 - (SA^2 - SO^2) = SO^2 \Rightarrow SO = OB = OD \Rightarrow \Delta SBD$  vuông tại  $S$ .

$$\Rightarrow SH \cdot BD = SB \cdot SD \Rightarrow V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{6} SB \cdot SD \cdot AC = \frac{1}{6} a \cdot AC \cdot SD$$

Lại có  $SD = \sqrt{BD^2 - SB^2} = \sqrt{BD^2 - a^2}$ .

$$\text{Mà } AC = 2OA = 2\sqrt{AB^2 - OB^2} = 2\sqrt{a^2 - \frac{BD^2}{4}} = \sqrt{4a^2 - BD^2}.$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} a \cdot \sqrt{4a^2 - BD^2} \cdot \sqrt{BD^2 - a^2} \leq \frac{a}{6} \cdot \frac{(4a^2 - BD^2) + (BD^2 - a^2)}{2} = \frac{a^3}{4}.$$



**Câu 17. (CHUYÊN KHTN)** Trong các hình hộp nội tiếp mặt cầu tâm  $I$ , bán kính  $R$ , hình hộp có thể tích lớn nhất bằng

- A.  $\frac{8}{3}R^3$ .      B.  $\frac{8}{3\sqrt{3}}R^3$ .      C.  $\frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{3}}R^3$ .      D.  $\sqrt{8}R^3$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn B.**

Gọi  $a, b, c$  lần lượt là ba kích thước của hình hộp chữ nhật.

Thể tích của khối hộp là  $V = abc$

$$\text{Ta có } abc \leq \left( \frac{a+b+c}{3} \right)^3$$

Mà  $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3(2R)^2$  (đường chéo của hình hộp là đường kính mặt cầu)

$$\Rightarrow a+b+c \leq 2\sqrt{3}R$$

$$\text{Do đó } abc \leq \left( \frac{2\sqrt{3}R}{3} \right)^3 = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}.$$

**Câu 18. (CHUYÊN KHTN)** Xét các hình chóp  $S.ABC$  có cạnh  $SA = SB = SC = AB = BC = a$ . Giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp  $S.ABC$  bằng ?

- A.  $\frac{a^3}{12}$ .      B.  $\frac{a^3}{8}$ .      C.  $\frac{a^3}{4}$ .      D.  $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ .

## Hướng dẫn giải

## Chọn B.

Kẻ  $SH \perp (ABC)$  tại  $H \Rightarrow \begin{cases} HA^2 = SA^2 - SH^2 \\ HB^2 = SB^2 - SH^2 \\ HC^2 = SC^2 - SH^2 \end{cases}$

Mà  $SA = SB = SC = a \Rightarrow HA = HB = HC \Rightarrow H$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .

Tam giác  $ABC$  cân tại  $B$ , gọi  $P = BH \cap AC \Rightarrow BP \perp AC$  và  $PA = PC = \frac{AC}{2}$ .

Kẻ  $HK \perp AB$  ( $K \in AB$ )  $\Rightarrow KA = KB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ .

Ta có  $\Delta BKH \sim \Delta BPA \Rightarrow BH = \frac{BK \cdot BA}{BP} = \frac{a^2}{2BP}$ .

Đặt  $BP = x > 0 \Rightarrow BH = \frac{a^2}{2x} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{4x^2}} = \frac{a\sqrt{4x^2 - a^2}}{2x}$ .

Cạnh  $AC = 2AP = 2\sqrt{AB^2 - BP^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$ .

Do đó  $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot \frac{1}{2} BP \cdot AC = \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{4x^2 - a^2}}{2x} \cdot x \cdot 2\sqrt{a^2 - x^2}$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{12} a\sqrt{4x^2 - a^2} \cdot 2\sqrt{a^2 - x^2} \leq \frac{1}{12} a \cdot \frac{(4x^2 - a^2) + 4(a^2 - x^2)}{2} = \frac{a^3}{8}$$

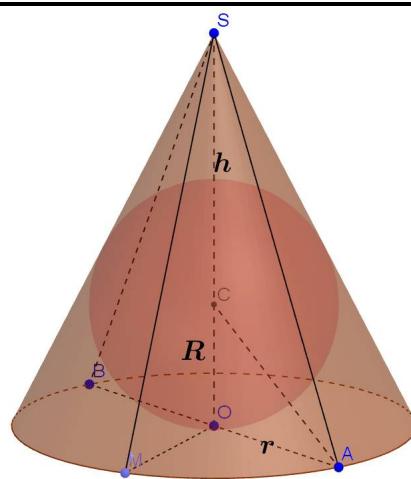
Dấu " $=$ " xảy ra  $\Leftrightarrow 4x^2 - a^2 = 4(a^2 - x^2) \Leftrightarrow 8x^2 = 5a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{\frac{5}{8}}$  ( $x > 0$ ).

**Câu 19. (HÀ HUY TẬP)** Gọi  $r$  và  $h$  lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu  $V_1$ ,  $V_2$  lần lượt là thể tích của hình nón và thể tích của khối cầu nội tiếp hình nón. Giá trị bé nhất của tỉ số  $\frac{V_1}{V_2}$  là

A.  $\frac{5}{4}$ .      B.  $\frac{4}{3}$ .      C. 3.      D. 2.

## Chọn D.

## Hướng dẫn giải



Ta có: Thể tích khối nón là  $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .

Xét mặt cắt qua tâm  $SAB$ , kẻ tia phân giác của góc  $\widehat{SBO}$ , cắt  $SO$  tại  $I$ .

$$\text{Ta có: } \frac{IO}{IS} = \frac{OB}{SB} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \Rightarrow IS = IO \cdot \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{r}$$

Mặt khác:  $IO + IS = h$

Do đó ta có bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp là  $R = IO = \frac{rh}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$

Thể tích khối cầu là  $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{r^3 h^3}{\left(r + \sqrt{h^2 + r^2}\right)^3}$ .

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(r + \sqrt{r^2 + h^2}\right)^3}{4rh^2} = \frac{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}\right)^3}{4\frac{h^2}{r^2}}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} \quad (t \geq 1) \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{(1+t)^3}{4(t^2 - 1)} = \frac{(t+1)^2}{4(t-1)}$$

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{(t+1)^2}{t-1}, \text{ Điều kiện: } t \geq 1, \quad f'(t) = \frac{t^2 - 2t - 3}{(t-1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3, \quad f(3) = 8$$

$$\text{BBT} \Rightarrow f(t) \geq 8 \forall t \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} \geq 2$$

**Câu 20. (HÀ HUY TẬP)** Một công ty dự kiến làm một đường ống thoát nước thải hình trụ dài 1km, đường kính trong của ống (không kể lớp bê tông) bằng 1m; độ dày của lớp bê tông bằng 10cm. Biết rằng cứ một khối bê tông phải dùng 10 bao xi măng. Số bao xi măng công ty phải dùng để xây dựng đường ống thoát nước gần đúng với số nào nhất?

- A. 3456 bao.      B. 3450 bao.      C. 4000 bao.      D. 3000 bao.

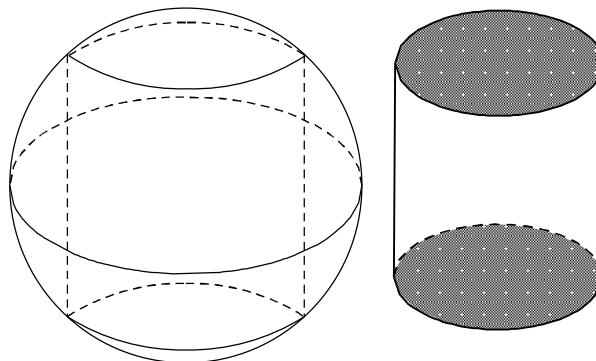
Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

Thể tích khối bê tông cần làm đường ống là:  $V = \pi 1000(0,6^2 - 0,5^2) = 110\pi \text{ m}^3$

Số bao xi măng phải dùng là:  $110\pi \cdot 10 \approx 3456$  bao.

**Câu 21. (HÀ HUY TẬP)** Một khối đá có hình là một khối cầu có bán kính  $R$ , người thợ thợ thủ công mỹ nghệ cần cắt và gọt viên đá đó thành một viên đá cảnh có hình dạng là một khối trụ. Tính thể tích lớn nhất có thể của viên đá cảnh sau khi đã hoàn thiện.

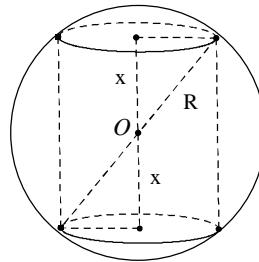


- A.  $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{3}$       B.  $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$       C.  $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{6}$       D.  $\frac{3\sqrt{3}\pi R^3}{12}$

Hướng dẫn giải

**Chọn B.**

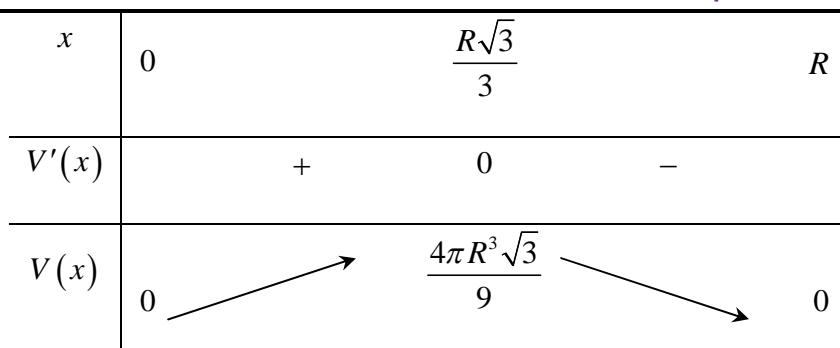
Giả sử  $2x$  là chiều cao hình trụ ( $0 < x < R$ ) (xem hình vẽ)



Bán kính của khối trụ là  $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ . Thể tích khối trụ là:  $V = \pi(R^2 - x^2)2x$ .

Xét hàm số  $V(x) = \pi(R^2 - x^2)2x$ ,  $0 < x < R$ , có  $V'(x) = 2\pi(R^2 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ .

Bảng biến thiên:



Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao của khối trụ là  $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$ ;

$$V_{\max} = \frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{9}.$$

**Câu 22. (PHÚ XUYÊN)** Cho hình trụ có diện tích toàn phần  $6\pi$ . Kích thước của khối trụ bằng bao nhiêu để thể tích của nó đạt giá trị lớn nhất?

- A.  $r=1, h=2$ .      B.  $r=2, h=1$ .      C.  $r=1, h=1$ .      D.  $r=2, h=2$ .

### Hướng dẫn giải

#### Chọn A.

$$S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 6\pi \Leftrightarrow h = \frac{3-r^2}{r} \text{ với } r \in (0;3)$$

$$V = \pi r^2 h = \pi(3r - r^3)$$

$$\text{Đặt } f(r) = 3r - r^3; f'(r) = 3 - 3r^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1$$

Suy ra:  $\max f(r) = 2$  khi  $r = 1 \Rightarrow h = 2$ .

**Câu 23. (SỞ HẢI PHÒNG)** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{ABC} = 45^\circ$ ,  $\widehat{ACB} = 30^\circ$ ,  $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Quay tam giác quanh cạnh  $BC$ , ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

- A.  $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{24}$ .      B.  $V = \frac{\pi\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{72}$ .      C.  $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{3}$ .      D.  $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{8}$ .

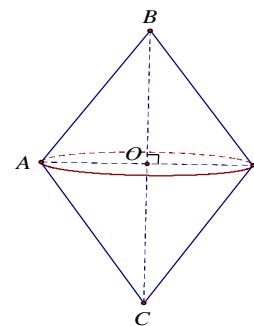
### Hướng dẫn giải

#### CHỌN A.

Ta có  $\widehat{BAC} = 105^\circ$ . Theo định lý sin trong tam giác

$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} \text{ nên } BC = \frac{AB \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có  $AO = BO = \frac{1}{2}$ .



Thể tích khói tròn xoay tạo thành là:  $V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 BO + \frac{1}{3}\pi R^2 CO$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2 BC = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{24}$$

**Câu 24. (SỞ HẢI PHÒNG)** Trong tất cả các hình nón nội tiếp trong hình cầu có thể tích bằng  $36\pi$ , tìm bán kính  $r$  của hình nón có diện tích xung quanh lớn nhất.

- A.  $r = \frac{3}{2}$ .      B.  $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .      C.  $r = 2\sqrt{2}$ .      D.  $r = 3$ .

Hướng dẫn giải

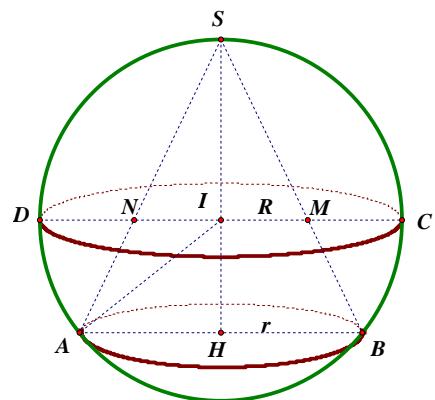
### CHỌN C

Gọi bán kính và thể tích của hình cầu là  $R$  và  $V_c$

Theo giả thiết  $V_c = 36\pi \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R = 3$

Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \pi \cdot r \cdot SA = \pi \cdot r \cdot \sqrt{SH^2 + r^2} \quad (1)$$



Mà  $\begin{cases} SH = SI + IH = R + IH = 3 + IH \\ IH = \sqrt{IA^2 - HA^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{9 - r^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow SH = 3 + \sqrt{9 - r^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow S_{xq} = \pi \cdot r \cdot \sqrt{(3 + \sqrt{9 - r^2})^2 + r^2}$

$$\Leftrightarrow S_{xq} = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 (3 + \sqrt{9 - r^2})^2 + r^4}$$

Đặt  $t = \sqrt{9 - r^2} \Leftrightarrow r^2 = 9 - t^2$ . Với  $0 < t \leq 3$  (3)

$$\Rightarrow S_{xq} = \pi \cdot \sqrt{(9-t)^2 \left(3 + \sqrt{9 - (9-t)^2}\right)^2 + (9-t)^4} = \pi \cdot \sqrt{-6t^3 - 18t^2 + 54t + 162}$$

Xét hàm số  $f(t) = -6t^3 - 18t^2 + 54t + 162 \Rightarrow f'(t) = -18t^2 - 36t + 54$

$$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -3 \vee t = 1$$

Bảng biến thiên

$t$	$-\infty$	$-3$	$0$	$1$	$3$	$+\infty$
$f'(t)$		0	+	0	-	
$f(t)$				$8\sqrt{3}$		108

Vậy  $\text{Max } f(t) = 8\sqrt{3}$  tại  $t=1 \Leftrightarrow \text{Max } S_{xq} = \pi 8\sqrt{3}$  tại  $t=1$

Kết hợp (3)  $\Rightarrow r = 2\sqrt{2}$ .

**Chú ý:** Để tìm GTLN của  $S_{xq} = \pi \cdot \sqrt{r^2 \left(3 + \sqrt{9 - r^2}\right)^2 + r^4}$  với  $0 < r \leq 3$  ta có thể dùng Table.

**Câu 25. (SỞ HẢI PHÒNG)** Một cốc nước có dạng hình trụ đựng nước chiều cao 12cm, đường kính đáy 4cm, lượng nước trong cốc cao 8cm. Thả vào cốc nước 3 viên bi có cùng đường kính 2cm. Hỏi nước dâng cao cách miệng cốc bao nhiêu xăng-ti-mét?

- A. 4cm .      B. 2cm .      C. 3cm .      D. 1cm .

#### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Thể tích 3 viên bi có cùng đường kính 2cm là  $V_b = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi = 4\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Sau khi bỏ 3 viên bi vào nước thì thể tích 3 viên bi chiếm chỗ nước có thể tích là  $V_b = 4\pi \text{ (cm}^3\text{)}$  nên nước sẽ dâng và chiếm thể tích là  $V_b$ .

Do đó mực nước sẽ dâng cao thêm một đoạn là  $h_t = \frac{V_b}{2^2 \cdot \pi} = \frac{4\pi}{4\pi} = 1 \text{ (cm)}$

Vậy mực nước cách miệng cốc là  $12 - 8 - 1 = 3 \text{ (cm)}$ .

**Câu 26. (CHUYÊN LÀO CAI)** Hình bên cho ta hình ảnh của một đồng hồ cát với các kích thước kèm theo  $OA = OB$ . Khi đó tỉ số tổng thể tích của hai hình nón ( $V_n$ ) và thể tích hình trụ ( $V_t$ ) bằng:

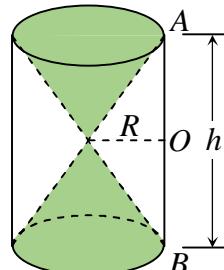
- A.  $\frac{1}{4}$  .      B.  $\frac{2}{5}$  .      C.  $\frac{1}{2}$  .      D.  $\frac{1}{3}$  .

#### Hướng dẫn giải

**Chọn D**

Thể tích của mỗi khối nón là  $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \pi R^2 = \frac{\pi R^2 h}{6}$

Tổng thể tích của hai khối nón là  $V_n = 2 \cdot \frac{\pi R^2 h}{6} = \frac{\pi R^2 h}{3}$



Thể tích của khối trụ là  $V_t = \pi R^2 h$ . Vậy  $\frac{V_n}{V_t} = \frac{1}{3}$

**Câu 27. (CHUYÊN LÀO CAD)** Một hình chóp tứ giác đều có tổng độ dài của đường cao và bốn cạnh đáy là 33. Hỏi độ dài cạnh bên ngắn nhất là bao nhiêu?

- A.  $\frac{\sqrt{33}}{17}$ .      B.  $\sqrt{33}$ .      C.  $11\sqrt{3}$ .      D.  $\frac{\sqrt{33}}{2}$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn B.**

Gọi độ dài cạnh đáy là  $x$ , đường cao là  $h$ , cạnh bên là  $y$

Ta có  $4x + h = 33 \Rightarrow h = 33 - 4x (0 < x < \frac{33}{4})$ .

Độ dài cạnh bên là  $y = \sqrt{\frac{x^2}{2} + h^2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x^2}{2} + (33 - 4x)^2}$

Độ dài cạnh bên nhỏ nhất khi hàm số:

$f(x) = \frac{x^2}{2} + (33 - 4x) (0 < x < \frac{33}{4})$  đạt giá trị nhỏ nhất.

Khảo sát hàm số  $f(x)$  ta có: Giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt tại  $x = 8$

Vậy cạnh bên nhỏ nhất bằng  $\sqrt{33}$  khi cạnh đáy  $x = 8$ .

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh bằng  $a$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Thể

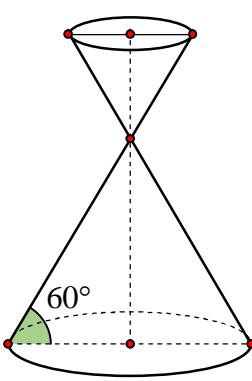
**Câu 28. (CHUYÊN LÀO CAD)** Cho một đồng hồ cát như hình bên dưới (gồm 2 hình nón chung đỉnh ghép lại), trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc  $60^\circ$  như hình bên. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là  $30cm$  và tổng thể tích của đồng hồ là  $1000\pi cm^3$ . Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới, khi đó tỉ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần dưới là bao nhiêu?

- A.  $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ .

- B.  $\frac{1}{8}$ .

- C.  $\frac{1}{64}$ .

- D.  $\frac{1}{27}$ .



### Hướng dẫn giải

**Chọn B**

Gọi  $h, h', r, r'$  ( $h \geq \frac{30}{2} = 15$ ) lần lượt là chiều cao, bán kính của hình nón phía dưới và phía trên của đồng hồ. Ta có:  $r = \frac{h}{\tan 60^\circ} = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ;  $h' = 30 - h$ ;  $r' = \frac{h'}{\sqrt{3}} = \frac{30-h}{\sqrt{3}}$ . Khi đó: thể tích của đồng hồ:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r' h' = \frac{1}{3}\pi \left( \left( \frac{h}{\sqrt{3}} \right)^2 h + \left( \frac{30-h}{\sqrt{3}} \right)^2 (30-h) \right) \\ &= \frac{1}{3}\pi \left( \frac{h^3 + 27000 - 2700h + 90h^2 - h^3}{3} \right) = \frac{1}{9}\pi (90h^2 - 2700h + 27000) = 1000\pi \\ \Rightarrow h^2 - 30h + 200 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h = 20 \\ h = 10 (< 15) \end{cases} \Leftrightarrow h = 20 \Rightarrow h' = 10 \end{aligned}$$

Do 2 hình nón đồng dạng nên  $\frac{V_1}{V_2} = \left( \frac{h'}{h} \right)^3 = \frac{1}{8}$ .

**Câu 29. (CHUYÊN ĐHSP)** Cần xé một khúc gỗ hình trụ có đường kính  $d = 40 \text{ cm}$  và chiều dài  $h = 3 \text{ m}$  thành một cái xà hình hộp chữ nhật có cùng chiều dài. Lượng gỗ bỏ đi tối thiểu xấp xỉ là

- A.  $1,4 \text{ m}^3$ .      B.  $0,014 \text{ m}^3$ .      C.  $0,14 \text{ m}^3$ .      D.  $0,4 \text{ m}^3$ .

Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Lượng gỗ bỏ đi tối thiểu  $\Leftrightarrow$  thể tích cái xà lớn nhất

$\Leftrightarrow$  diện tích đáy của cái xà lớn nhất.

$\Leftrightarrow$  đáy là hình vuông nội tiếp đường tròn đáy.

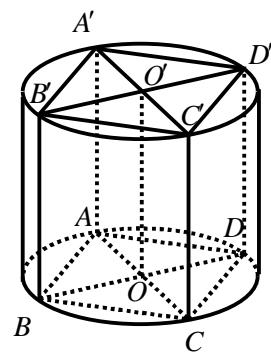
Hình vuông này có đường chéo bằng đường kính đường tròn đáy.

$$V_{tru} = \pi R^2 h = \pi \left( \frac{0,4}{2} \right)^2 \cdot 3; S_{hh} = \frac{1}{2} (0,4)^2.$$

$$V_{hh} = S_{hh} \cdot h = \frac{1}{2} (0,4)^2 \cdot 3; V_{go bo di} = V_{tru} - V_{hh} \approx 0,14 \text{ m}^3.$$

**Câu 30. (CHUYÊN ĐHSP)** Một đồng cát hình nón cụt có chiều cao  $h = 60 \text{ cm}$ , bán kính đáy lớn  $R_1 = 1 \text{ m}$ , bán kính đáy nhỏ  $R_2 = 50 \text{ cm}$ . Thể tích đồng cát xấp xỉ

- A.  $0,11 \text{ m}^3$ .      B.  $0,1 \text{ m}^3$ .      C.  $1,1 \text{ m}^3$ .      D.  $11 \text{ m}^3$ .



## Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$h = 0,6 \text{ m} ; R_1 = 1\text{m} ; R_2 = 0,5 \text{ m} .$$

$$B = \pi R_1^2 = \pi(m^2), B' = \pi R_2^2 = 0, 25\pi(m^2).$$

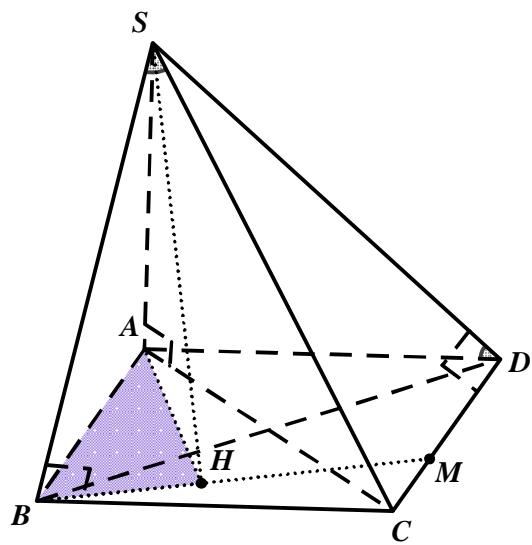
$$V = \frac{h}{3} \left( B + B' + \sqrt{BB'} \right) = \frac{0,6}{3} \left( \pi + 0,25\pi + \sqrt{\pi \cdot 0,25\pi} \right) \cong 1.099557429.$$

**Câu 31. (TT ĐIỆU HIỂN)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa  $SC$  với mặt phẳng  $(SAB)$  bằng  $30^\circ$ . Gọi  $M$  là điểm di động trên cạnh  $CD$  và  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $S$  trên đường thẳng  $BM$ . Khi điểm  $M$  di động trên cạnh  $CD$  thì thể tích của khối chóp  $S.ABH$  đạt giá trị lớn nhất bằng:

- A.**  $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ .      **B.**  $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ .      **C.**  $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ .      **D.**  $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ .

## Hướng dẫn giải

## Chọn D



Góc giữa  $SC$  và  $(SBC)$  là  $\widehat{CSB} \Rightarrow \widehat{CSB} = 30^0$

$$\text{Ta có } \tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} \Rightarrow SB = a\sqrt{3}; SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$$

Đặt  $CM = x, (0 \leq x \leq a) \Rightarrow DM = a - x,$

Ta có  $\begin{cases} BM \perp SH \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAH) \Rightarrow BM \perp AH$

Ta

có

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} BC \cdot CM = \frac{1}{2} ax, S_{ADM} = \frac{1}{2} AD \cdot DM = \frac{1}{2} a(a-x); S_{ABM} = S_{ABCD} - S_{AMC} - S_{ADM} = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Ta có } S_{ABM} = \frac{1}{2} AH \cdot BM \Rightarrow AH = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}; BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Thể tích của khối chóp  $S.ABH$  là

$$V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABH} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} BH \cdot AH = \frac{1}{6} a \sqrt{2} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} a^4 \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} \quad (*)$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2}, x \in [0; a]$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2}; f'(x) = 0 \Rightarrow x = a$$

Trên đoạn  $[0; a]$  ta có  $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0; a]$ 

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } V \text{ tại } x = a \Rightarrow V_{max} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

$$\text{Cách 2: Từ } (*) V = \frac{\sqrt{2}}{6} a^4 \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{6} a^4 \cdot \frac{1}{2a} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}. \text{ Dấu } = \text{ khi } x = a.$$

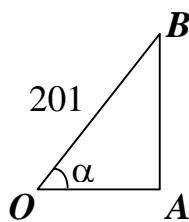
**Cách 3:** Để thấy  $H$  nhìn  $AB$  dưới góc vuông nên  $V_{S.ABH}$  lớn nhất khi  $S_{ABH}$  lớn nhất khi và chỉ khi  $H \equiv O$  (tâm của hình vuông)  $\Leftrightarrow x = a$ . Từ đó có kết quả.

**Câu 32. (TT ĐIỆU HIỀN)** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $OAB$  vuông ở  $A$  thuộc trực hoành, điểm  $B$  nằm trong góc phần tư thứ nhất và  $OB = 2017$ ,  $\widehat{AOB} = \alpha$ ,  $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ . Khi quay tam giác  $OAB$  quanh trực  $Ox$  ta được một khối nón tròn xoay. Thể tích của khối nón đó lớn nhất khi:

- A.  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .      B.  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ .      D.  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A**



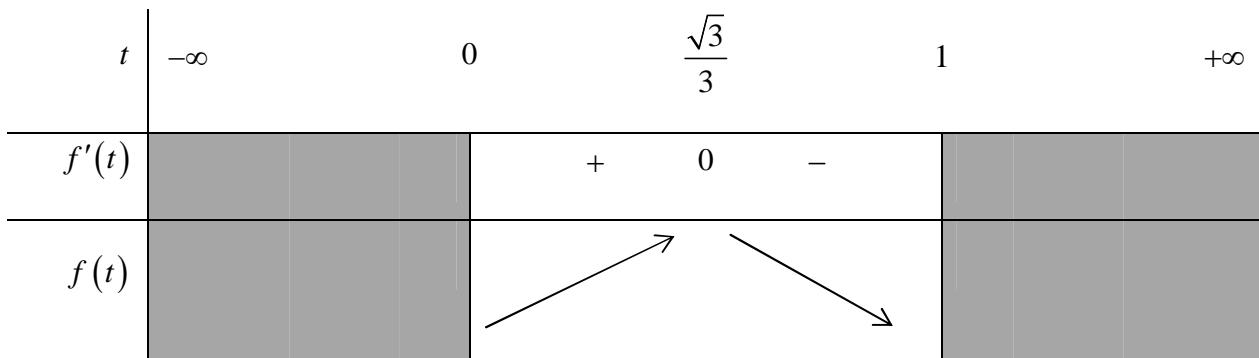
Khi xoay tam giác  $OAB$  quanh trục  $Ox$  tạo thành hình nón có đường cao là  $OA = 2017 \cdot \cos \alpha$  và bán kính đáy là  $AB = OB \cdot \sin \alpha = 2017 \cdot \sin \alpha$ .

$$\begin{aligned} \text{Thể tích khói nón bằng: } V &= \frac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \cdot OA = \frac{1}{3}\pi (2017 \cdot \sin \alpha)^2 \cdot 2017 \cdot \cos \alpha \\ &= \frac{1}{3}\pi 2017^3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Xét hàm số  $f(t) = (1 - t^2)t$  với  $t = \cos x; t \in (0; 1)$  do  $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

$$\text{Ta có: } f'(t) = -3t^2 + 1$$

Ta có bảng biến thiên:



Vậy thể tích khói nón lớn nhất khi  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$  hay  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 33. (SỞ QUẢNG NINH)** Tính diện tích vải cần có để may một cái mũ có hình dạng và kích thước (cùng đơn vị đo) được cho bởi hình vẽ bên (không kể riềng, mép)

- A.  $350\pi$ .      B.  $400\pi$ .  
C.  $450\pi$ .      D.  $500\pi$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Dựa vào hình vẽ ta cần tính diện tích của hai phần:

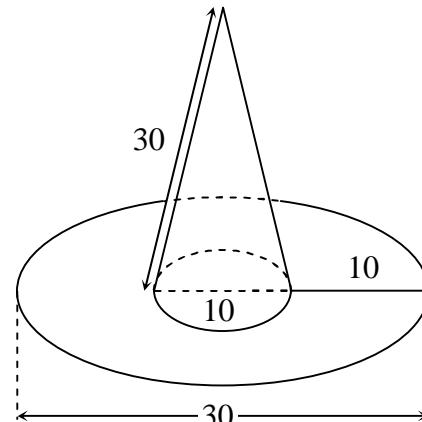
Phần I: Diện tích phần giới hạn bởi hai đường tròn có đường kính là 30 và 10.

$$S_1 = S_{d=30} - S_{d=10} = \pi \cdot 15^2 - \pi \cdot 5^2 = 200\pi.$$

Phần II: Diện tích hình nón có đường kính hình tròn đáy là 10 và đường sinh là 30.

$$S_2 = \pi \cdot 5 \cdot 30 = 150\pi.$$

Vậy diện tích vải cần là  $S = S_1 + S_2 = 350\pi$ .



**Câu 34. (SỞ VŨNG TÀU)** Một người có một dải duy băng độ dài 180(cm). Người đó cần bọc dải duy băng đó đi quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà người này dùng 20(cm) để thắt nơ trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải duy băng đó có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

- A.  $\frac{54000}{27}(cm^3)$ .      B.  $\frac{64000}{27}(cm^3)$ .      C.  $\frac{54000}{81}(cm^3)$ .      D.  $\frac{64000}{81}(cm^3)$ .

**Hướng dẫn giải:****Chọn B.**

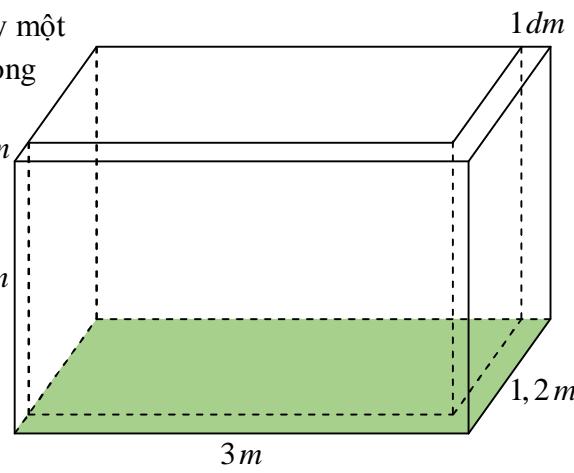
Gọi  $r, h$  ( $0 < h < 40, 0 < r < 20$ ) là bán kính và đường cao của hình trụ.

Ta có  $8r + 4h = 180 - 20 = 160$  (cm)  $\Rightarrow h = 40 - 2r$

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 (40 - 2r) \leq \pi \left( \frac{r + r + 40 - 2r}{3} \right)^3 = \frac{64000\pi}{27} \text{ (cm}^3\text{)} \text{ khi } r = \frac{40}{3} \text{ (cm).}$$

**Câu 35. (CHUYÊN TUYÊN QUANG)** Người ta muốn xây một

bê chúa nước dạng khối hộp chữ nhật trong một phòng tắm. Biết chiều dài, chiều rộng, chiều cao của khối hộp đó lần lượt là 3m; 1,2m; 1,8m 1dm (người ta chỉ xây hai mặt thành bê như hình vẽ bên). Biết mỗi viên gạch có chiều dài 20cm, chiều rộng 10cm, chiều cao 5cm. Hỏi 1,8dm người ta sử dụng ít nhất bao nhiêu viên gạch để xây bê đó và thể tích thực của bê chúa bao nhiêu lít nước? (Giả sử lượng xi măng và cát không đáng kể).



A. 738 viên, 5742 lít.

B. 730 viên, 5742 lít.

C. 738 viên, 5740 lít.

D. 730 viên, 5740 lít.

**Hướng dẫn giải****Chọn A.**

Thể tích của bê là  $V = 18.11.29 = 5742$  (l).

Thể tích của 1 viên gạch là  $1\text{dm}^3$ , thể tích cần xây dựng là  $(30+11).18 = 738\text{dm}^3$ , suy ra số viên ít nhất cần dùng là 738 viên.

**Câu 36. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN)** Một chiếc hộp hình trụ được dùng để chứa 1 lít dầu. Kích thước hình trụ thỏa điều kiện gì để chi phí về kim loại dùng để sản xuất vỏ hộp là tối thiểu.

- |  |   |
|--|---|
| A. Chiều cao gấp hai lần đường kính đáy. | B. Chiều cao gấp ba lần đường kính đáy. |
| C. Chiều cao gấp hai lần bán kính đáy.   | D. Chiều cao gấp ba lần bán kính đáy.   |

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Gọi bán kính đáy và chiều cao của chiếc hộp hình trụ lần lượt là  $R, h$  điều kiện  $R, h > 0$ .

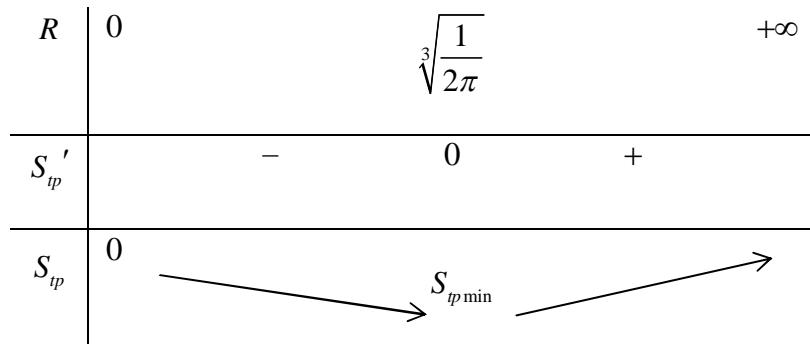
Chi phí sản xuất hộp phụ thuộc vào diện tích bề mặt của vỏ hộp phải sử dụng. Chi phí nhỏ nhất khi diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

Theo giả thiết thể tích chiếc hộp hình trụ bằng 1 lít nên ta có:  $\pi R^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$

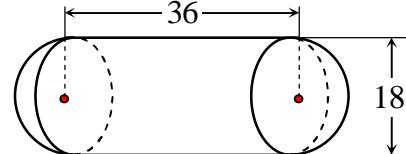
$$\Rightarrow S_{tp} = 2\pi R \cdot \frac{1}{\pi R^2} + 2\pi R^2 = \frac{2}{R} + 2\pi R^2$$

$$S_{tp}' = -\frac{2}{R^2} + 4\pi R = \frac{4\pi R^3 - 2}{R^2}, \text{ Cho } S_{tp}' = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$



$$\text{Vậy } S_{tp} \text{ nhỏ nhất khi } R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \Rightarrow h = \frac{1}{\pi R^2} \Rightarrow \frac{h}{R} = \frac{1}{\pi R^3} = \frac{1}{\pi \cdot \frac{1}{2\pi}} = 2 \Rightarrow h = 2R$$

**Câu 37. (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIÊU)** Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ như hình vẽ bên. Các kích thước được ghi (cùng đơn vị dm). Tính thể tích của bồn chứa.



- A.  $\pi \frac{4^3}{3^3}$ .      B.  $\pi \frac{4^2}{3^5}$ .  
 C.  $\pi 4^5 \cdot 3^2$ .      D.  $\pi 4^2 \cdot 3^5$ .

Hướng dẫn giải:

**Chọn D.**

Gọi  $V_1$  là thể tích hình trụ có đường cao 36 (dm) và bán kính đường tròn đáy 9 (dm).

$V_2$  là thể tích nửa hình cầu có bán kính 9 (dm).

Ta có  $V_1 = \pi \cdot 9^2 \cdot 36 = 2916\pi$  (dm<sup>3</sup>) và  $V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot 9^3 = 486\pi$  (cm<sup>3</sup>).

Do đó  $V = V_1 + 2V_2 = 3888\pi$  (dm<sup>3</sup>) =  $4^2\pi \cdot 3^5$  (dm<sup>3</sup>).

**Câu 38. (THANH CHƯƠNG )** Một khối gỗ hình trụ có chiều cao 2m, người ta xé bớt phần vỏ của khối gỗ đó theo bốn mặt phẳng song song với trục để tạo thành một khối gỗ hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất bằng 1m<sup>3</sup>. Tính đường kính của khối gỗ hình trụ đã cho

- A. 100 cm .      B. 60 cm .      C. 120 cm .      D. 50 cm .

### Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

Ta có diện tích mặt của khối gỗ hình hộp nằm ở hai đầu là  $S = \frac{1}{2}$ .

Mặt này là hình vuông (vì trong tất cả các hình chữ nhật nội tiếp một hình tròn thì hình vuông có diện tích lớn nhất), có cạnh là  $a = \sqrt{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  .

Đường kính của khối gỗ hình trụ chính là đường chéo của mặt hình vuông.

Do đó đường kính là  $d = R\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1m = 100cm$

**Câu 39. (CHU VĂN AN)** Một que kem ốc quế gồm hai phần: phần kem có dạng hình cầu, phần ốc quế có dạng hình nón. Giả sử hình cầu và hình nón có bán kính bằng nhau; biết rằng nếu kem tan chảy hết thì sẽ làm đầy phần ốc quế. Biết thể tích phần kem sau khi tan chảy chỉ bằng 75% thể tích kem đóng ban đầu. Gọi  $h$  và  $r$  lần lượt là chiều cao và bán kính của phần ốc quế.

Tính tỉ số  $\frac{h}{r}$ .

- A.  $\frac{h}{r} = 3$  .      B.  $\frac{h}{r} = 2$  .      C.  $\frac{h}{r} = \frac{4}{3}$  .      D.  $\frac{h}{r} = \frac{16}{3}$  .

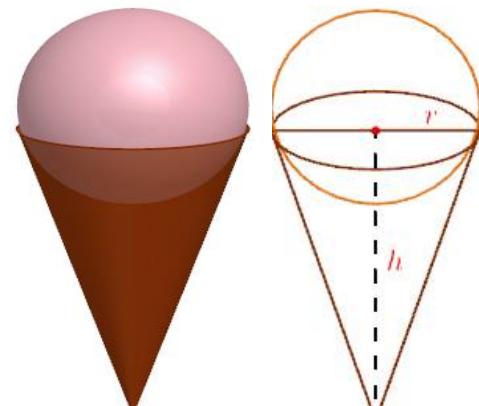
### Hướng dẫn giải

**Chọn: A**

+ Thể tích khối cầu (thể tích kem ban đầu)  $V_c = \frac{4}{3}\pi r^3$ .

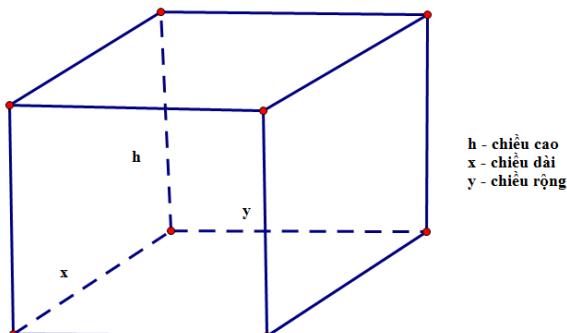
+ Thể tích khối nón (phần ốc quế)  $V_N = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .

+ Theo đề:  $V_N = \frac{3}{4}V_c \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \Leftrightarrow \frac{h}{r} = 3$



**Câu 40. (THẦY HIẾU LIVE )** Cần phải xây dựng một hố ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 3 (m<sup>3</sup>) (Hình 10.1). Tỉ số giữa chiều cao của hố (h) và chiều

rộng của đáy ( $y$ ) bằng 4. Biết rằng hố ga chỉ có các mặt bên và mặt đáy (không có nắp). Chiều dài của đáy ( $x$ ) **gần nhất với giá trị** nào ở dưới đây để người thợ tốn ít nguyên vật liệu để xây hố ga. ( $x, y, h > 0$ )



(Hình 10.1)

A. 1

**B. 1,5**

C. 2

D. 2,5

**Câu 41. (THẦY HIẾU LIVE)** Một miếng tôn hình chữ nhật có chiều dài 98cm, chiều rộng 30cm được uốn lại thành mặt xung quanh của một thùng đựng nước. Biết rằng chỗ mối ghép mắt 2cm. Thùng đựng được bao nhiêu lít nước:

A. 20 lít

**B. 22 lít**

C. 25 lít

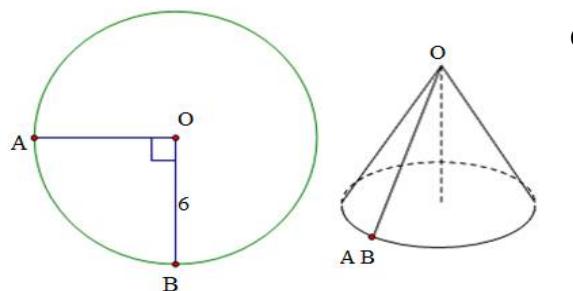
D. 30 lít

**Câu 42. (TUY PHƯỚC)** Cho hình tròn có bán kính là

Cắt bỏ  $\frac{1}{4}$  hình

tròn giữa 2 bán kính  $OA, OB$ , rồi ghép 2 bán kính đó lại sao cho thành một hình nón (như hình vẽ).

Thể tích khối nón tương ứng đó là :

A.  $\frac{81\pi\sqrt{7}}{8}$ .B.  $\frac{9\pi\sqrt{7}}{8}$ .C.  $\frac{81\pi\sqrt{7}}{4}$ .D.  $\frac{9\pi\sqrt{7}}{2}$ .

**Câu 43. (KIM LIÊN)** Một lon sữa hình trụ tròn xoay có chiều cao 10cm và đường kính đáy là 6cm. Nhà sản xuất muốn tiết kiệm chi phí cho nguyên liệu sản xuất vỏ lon mà không làm thay đổi thể tích của lon sữa đó nên đã hạ chiều cao của lon sữa hình trụ trong xoay xuống còn 8cm. Tính bán kính đáy  $R$  của lon sữa mới.

A.  $R = \frac{\sqrt{45}}{2} \text{ cm.}$ B.  $R = \sqrt{45} \text{ cm.}$ C.  $R = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ cm.}$ 

D.

**Câu 44. (SỞ HẢI PHÒNG)** Một khối lập phương có cạnh 1m. Người ta sơn đỏ tất cả các mặt của khối lập phương rồi cắt khối lập phương bằng các mặt phẳng song song với các mặt của khối lập phương để được 1000 khối lập phương nhỏ có cạnh 10cm. Hỏi các khối lập phương thu được sau khi cắt có bao nhiêu khối lập phương có đúng 2 mặt được sơn đỏ?

A. 64

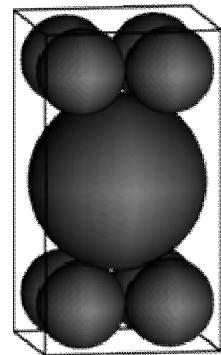
B. 81

C. 100

D. 96

**Câu 45. (NINH GIANG)** Một hình hộp chữ nhật kích thước  $6 \times 6 \times h$  chứa một khối cầu lớn có bán kính bằng 3 và 8 khối cầu nhỏ bán kính bằng  $\frac{3}{2}$ . Biết rằng các khối cầu đều tiếp xúc nhau và tiếp xúc với các mặt của hình hộp (như hình vẽ). Thể tích của hình hộp là

- A.  $64 + 32\sqrt{7}$ .      B.  $108 + 36\sqrt{7}$ .  
 C.  $108 + 108\sqrt{7}$ .      D.  $32 + 32\sqrt{7}$ .



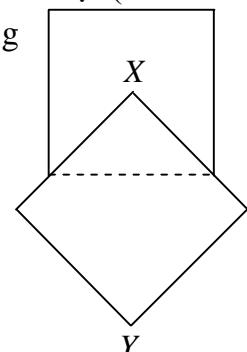
**Câu 46. (ĐỀ MINH HỌA LẦN 2)** Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh  $X$  của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích  $V$  của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục  $XY$ .

A.  $V = \frac{125(1+\sqrt{2})\pi}{6}$ .

B.  $V = \frac{125(5+2\sqrt{2})\pi}{12}$ .

C.  $V = \frac{125(5+4\sqrt{2})\pi}{24}$ .

D.  $V = \frac{125(2+\sqrt{2})\pi}{4}$ .



### HƯỚNG DẪN GIẢI

**Chọn C.**

- *Cách 1:*

Khối tròn xoay gồm 3 phần:

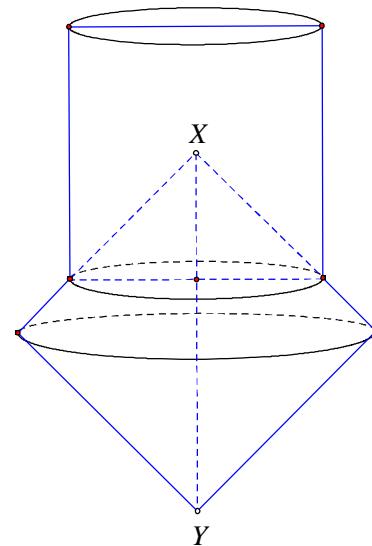
Phần 1: khối trụ có chiều cao bằng 5, bán kính đáy bằng  $\frac{5}{2}$  có thể tích  $V_1 = \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 5 = \frac{125\pi}{4}$ .

Phần 2: khối nón có chiều cao và bán kính đáy bằng  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$  có thể tích

$$V_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{125\pi\sqrt{2}}{12}$$

Phần 3: khối nón cùt có thể tích là

$$V_3 = \frac{1}{3} \pi \times \frac{5(\sqrt{2}-1)}{2} \times \left( \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5}{2} \right) = \frac{125(2\sqrt{2}-1)\pi}{24}.$$



Vậy thể tích khối tròn xoay là

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{125\pi}{4} + \frac{125\pi\sqrt{2}}{12} + \frac{125(2\sqrt{2}-1)\pi}{24} = \frac{125(5+4\sqrt{2})\pi}{24}.$$

• *Cách 2 :*

Thể tích hình trụ được tạo thành từ hình vuông  $ABCD$  là

$$V_T = \pi R^2 h = \frac{125\pi}{4}$$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ hình vuông  $X$

$$V_{2N} = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{125\pi\sqrt{2}}{6}$$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ tam giác  $XDC$  là

$$V_{N'} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{125\pi}{24}$$

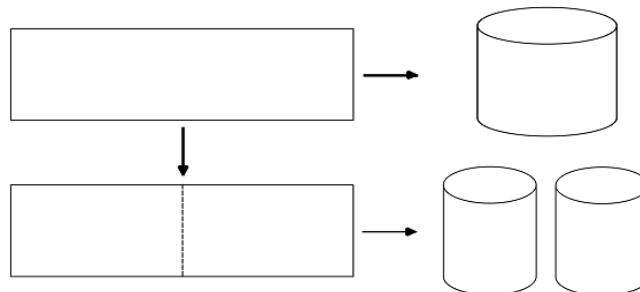
$$\text{Thể tích cần tìm } V = V_T + V_{2N} - V_{N'} = 125\pi \frac{5+4\sqrt{2}}{24}.$$

**Câu 47. (HẢI HẬU)** Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước  $100cm \times 200cm$ , người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng  $100cm$ , theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

\* *Cách 1:* Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

\* *Cách 2:* Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu  $V_1$  là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và  $V_2$  là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số  $\frac{V_2}{V_1}$



A.  $\frac{V_2}{V_1} = 4.$

B.  $\frac{V_2}{V_1} = 1.$

C.  $\frac{V_2}{V_1} = 2.$

D.  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}.$

**Câu 48. (CHUYÊN VĨNH PHÚC)** Người ta xếp 9 viên bi có cùng bán kính  $r$  vào một cái bình

hình trụ sao cho tất cả các viên bi đều tiếp xúc với đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với 8 viên bi xung quanh mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của bình hình trụ. Khi đó diện tích đáy của cái bình hình trụ là:

- A.  $16\pi r^2$ .      B.  $9\pi r^2$ .      C.  $36\pi r^2$ .      D.  $18\pi r^2$ .

### HƯỚNG DẪN GIẢI

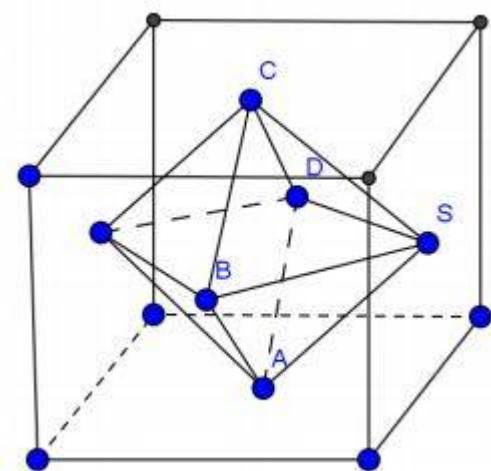
#### Đáp án B.

Cách giải: + Tính bán kính của diện tích đáy hình trụ:  $R = r + 2r = 3R$ .

Diện tích đáy:  $\pi R^2 = \pi (3r)^3 = 9\pi r^2$ .

**Câu 49. (CHUYÊN VĨNH PHÚC)** Người ta gọt một khối lập phương gỗ để lấy khối tám mặt đều tiếp nó (tức là khối có các đỉnh là các tâm của các mặt khối lập phương). Biết các cạnh của khối lập phương bằng  $a$ . Hãy tính thể tích của khối tám mặt đều đó:

- A.  $\frac{a^3}{4}$ .      B.  $\frac{a^3}{6}$ .  
 C.  $\frac{a^3}{12}$ .      D.  $\frac{a^3}{8}$ .



### HƯỚNG DẪN GIẢI

#### Đáp án B.

Dựng được hình như hình bên.

- + Thấy được thể tích khối cần tính bằng 2 lần thể tích của hình chóp S.ABCD.
- + Nhiệm vụ bây giờ đi tìm thể tích của S.ABCD.
- + ABCD là hình vuông có tâm O đồng thời chính là hình chiếu của S lên mặt đáy.

$SO = \frac{a}{2}$ ;  $BD =$  cạnh của hình lập phương  $= a$ . Suy ra các cạnh của hình vuông

$$ABCD = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) a^3 = \frac{a^3}{12}.$$

$$V_{khối\ da\ dien} = 2V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{6}.$$

**Câu 50. (CHUYÊN VĨNH PHÚC)** Người ta xếp 9 viên bi có cùng bán kính  $r$  vào một cái bình

hình trụ sao cho tất cả các viên bi đều tiếp xúc với đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với 8 viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của bình hình trụ. Khi đó diện tích đáy của cái bình hình trụ là:

- A.  $36pr^2$ .      B.  $16pr^2$ .      C.  $18pr^2$ .      D.  $9pr^2$ .

**Câu 51. (CHUYÊN VĨNH PHÚC)** Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng  $1dm^3$  và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy của hình trụ phải bằng bao nhiêu?

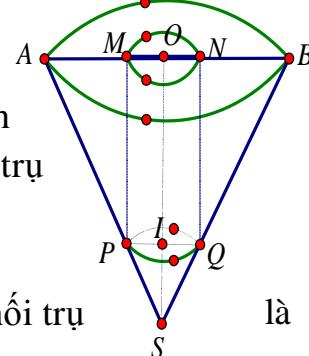
- A.  $\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} dm$ .      B.  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} dm$ .      C.  $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} dm$ .      D.  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} dm$ .

**Câu 52. (QUẢNG XƯƠNG )** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  và nửa đường tròn đường kính  $AB$  như hình vẽ. Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Biết  $AB = 4$ ;  $AD = 6$ . Thể tích  $V$  của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên quanh trục  $IJ$  là:

- A.  $V = \frac{56}{3}\pi$ .      B.  $V = \frac{104}{3}\pi$ .      C.  $V = \frac{40}{3}\pi$ .      D.  $V = \frac{88}{3}\pi$ .

**Chọn D**

Khi xoay mô hình quanh trục  $IJ$  thì nửa đường tròn tạo thành nửa mặt cầu có  $R = 2$ ; hình chữ nhật  $ABCD$  tạo thành hình trụ có  $r = 2; h = 6$ .

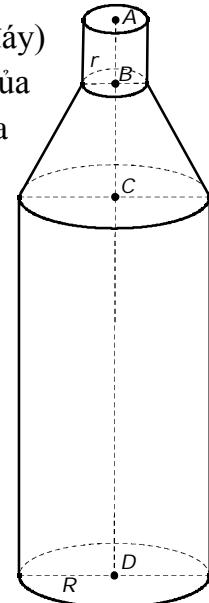


$\Rightarrow$  Thể tích nửa khói cầu là  $V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{16\pi}{3}$ .      Thể tích khói trụ là  $V_2 = \pi r^2 h = 24\pi$

$$\Rightarrow V = V_1 + V_2 = \frac{88\pi}{3}$$

**Câu 53. (QUẢNG XƯƠNG )** Một bình đựng nước dạng hình nón (không đáy) đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khói trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là  $\frac{16\pi}{9} dm^3$ . Biết rằng một mặt của khói trụ nằm trên mặt trên của hình nón, các điểm trên đường tròn đáy còn lại đều thuộc các đường sinh của hình nón (như hình vẽ) và khói trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Diện tích xung quanh  $S_{xq}$  của bình nước là:

- A.  $S_{xq} = \frac{9\pi\sqrt{10}}{2} dm^2$ .      B.  $S_{xq} = 4\pi\sqrt{10} dm^2$ .



C.  $S_{xq} = 4\pi dm^2$ .      D.  $S_{xq} = \frac{3\pi}{2} dm^2$ .

### Chọn B

Xét hình nón :  $h = SO = 3r$  ,  $r = OB$ ,  $l = SA$  . Xét hình trụ :  $h_1 = 2r = NQ$  ,  $r_1 = ON = QI$

$$\Delta S Q I \sim \Delta S B O \Rightarrow \frac{QI}{BO} = \frac{SI}{SO} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{r}{3} \Rightarrow \text{Thể tích khối trụ là :}$$

$$V_t = \pi r_1^2 h_1 = \frac{2\pi r^3}{9} = \frac{16\pi}{9} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = 4\pi\sqrt{10} dm^2$$

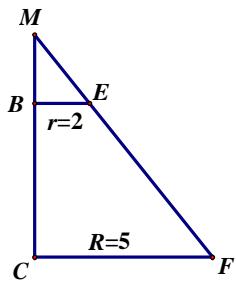
**Câu 54. (SỞ BẮC NINH)** Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình bên. Biết bán kính đáy bằng  $R = 5cm$ , bán kính cỗ  $r = 2cm$ ,  $AB = 3cm$ ,  $BC = 6cm$ ,  $CD = 16cm$ . Thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó bằng

- A.  $495\pi(cm^3)$ .      B.  $462\pi(cm^3)$ .      C.  $490\pi(cm^3)$ .      D.  $412\pi(cm^3)$ .

### Hướng dẫn giải

Thể tích khối trụ có đường cao  $CD$  :  $V_1 = \pi R^2 \cdot CD = 400\pi(cm^3)$ .

Thể tích khối trụ có đường cao  $AB$  :  $V_2 = \pi r^2 \cdot AB = 12\pi(cm^3)$ .



$$\text{Ta có } \frac{MC}{MB} = \frac{CF}{BE} = \frac{5}{2} \Rightarrow MB = 4$$

$$\text{Thể tích phần giới hạn giữa } BC : V_3 = \frac{\pi}{3} (R^2 \cdot MC - r^2 \cdot MB) = 78\pi(cm^3).$$

$$\text{Suy ra: } V = V_1 + V_2 + V_3 = 490\pi(cm^3).$$

Chọn C

**Câu 55. (CHUYÊN THÁI BÌNH)** Xét một hộp bóng bàn có dạng hình hộp chữ nhật. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng bàn được xếp theo chiều dọc, các quả bóng bàn có kích thước như nhau. Phần không gian còn trống trong hộp chiếm:

- A. 65,09% .      B. 47,64% .      C. 82,55% .      D. 83,3% .

**Chọn B.**

Gọi đường kính quả bóng bàn là  $d$ . Khi đó kích thước của hình hộp chữ nhật là  $d, d, 3d$ .

Vậy thể tích của hình hộp chữ nhật là  $V_1 = d \cdot d \cdot 3d = 3d^3$

Thể tích của ba quả bóng bàn:  $V_2 = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = 4\pi \frac{d^3}{8} = \frac{\pi d^3}{2}$ .

Thể tích phần không gian còn trống:  $V_3 = V_1 - V_2$

Phần không gian còn trống trong hộp chiếm:  $\frac{V_3}{V_1} = \frac{3d^3 - \frac{\pi d^3}{2}}{3d^3} = \frac{3 - \frac{\pi}{2}}{3} \approx 47,64\%$ .

**Câu 56. (CHUYÊN THÁI BÌNH)** Một quả bóng bàn và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao.

Người ta đặt quả bóng lên chiếc chén thấy phần ở ngoài của quả bóng có chiều cao bằng  $\frac{3}{4}$  chiều cao của nó. Gọi  $V_1$ ,  $V_2$  lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, khi đó:

- A.  $9V_1 = 8V_2$  .      B.  $3V_1 = 2V_2$  .      C.  $16V_1 = 9V_2$  .      D.  $27V_1 = 8V_2$  .

**Chọn A.**

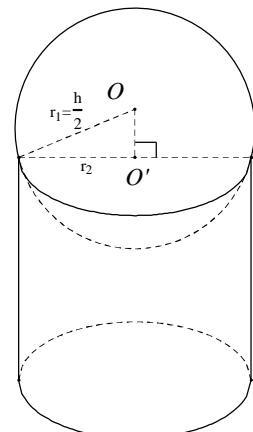
Gọi  $r_1$  là bán kính quả bóng,  $r_2$  là bán kính chiếc chén,  $h$  là chiều cao chiếc chén.

Theo giả thiết ta có  $h = 2r_1 \Rightarrow r_1 = 2h$  và  $OO' = \frac{r_1}{2} = \frac{h}{4}$ .

Ta có  $r_2^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}h^2$ .

Thể tích của quả bóng là  $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi h^3$

và thể tích của chén nước là  $V_2 = B.h = \pi r_2^2 h = \frac{3}{16}\pi h^3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{9}$ .

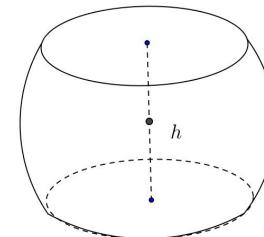


**Câu 57. (HỒNG QUANG)** Một chiếc cốc hình trụ có chiều cao  $4R$ , bán kính đáy  $R$ . Đặt vào trong cốc 2 quả bóng hình cầu có bán kính  $R$ . Gọi  $V_1$  là phần không gian mà 2 quả bóng chiếm chỗ và  $V_2$  là phần không gian còn lại trong cốc. Tính tỉ số  $\frac{V_1}{V_2}$ .

- A.  $\frac{3}{2}$       B. 2      C. 1      D. .

**Câu 58. (HỒNG QUANG)** Coi cái trống trường là vật thể giới hạn bởi một  $R = 0,5\text{ m}$  và hai mặt phẳng song song cách đều tâm (như hình vẽ). Biết chiều cao của trống là  $h = 0,8\text{ m}$ . Tính thể tích của cái trống.

- A.  $\frac{472}{3}\pi (\text{m}^3)$       B.  $\frac{375}{59} (\text{m}^3)$



C.  $\frac{59}{375}\pi (m^3)$

D.  $\frac{472000}{3} (m^3)$

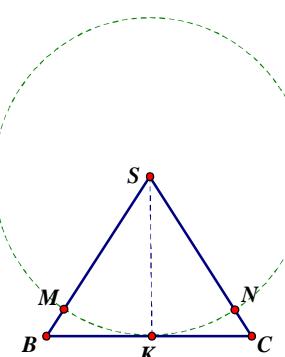
**Câu 59. (ĐỨC THỌ)** Một tấm tôn hình tam giác đều  $SBC$  có độ dài cạnh bằng 3;  $K$  là trung điểm  $BC$ . Người ta dùng compha có tâm là  $S$ , bán kính  $SK$  vạch một cung tròn  $MN$ . Lấy phần hình quạt gò thành hình nón không có mặt đáy với đỉnh là  $S$ , cung  $MN$  thành đường tròn đáy của hình nón (hình vẽ). Tính thể tích khối nón trên.

A.  $\frac{\pi\sqrt{105}}{64}$ .

B.  $\frac{3\pi}{32}$ .

C.  $\frac{3\pi\sqrt{3}}{32}$ .

D.  $\frac{\pi\sqrt{141}}{64}$ .



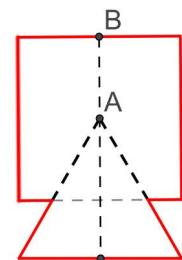
**Câu 60. (NGÔ SĨ LIÊN)** Cho tam giác đều và hình vuông cùng có cạnh bằng 4 được xếp chồng lên nhau sao cho một đỉnh của tam giác đều trùng với tâm của hình vuông, trực của tam giác đều trùng với trực của hình vuông (như hình vẽ). Thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi hình đã cho khi quay quanh trục  $AB$  là

A.  $\frac{136\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$ .

B.  $\frac{48\pi + 7\pi\sqrt{3}}{3}$ .

C.  $\frac{128\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$ .

D.  $\frac{144\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$ .

**Chọn D**

Khi xoay quanh trục  $AB$  thì :

- Phân hình vuông phía trên trở thành lăng trụ có bán kính  $R = 2$ , chiều cao  $h = 4$   
 $\rightarrow V_1 = \pi R^2 \cdot h = 16\pi$

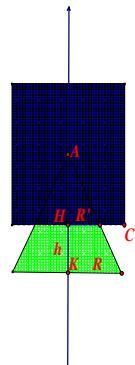
Phân dưới trở thành hình nón cụt với

$$h = HK = AK - AH = 2\sqrt{3} - 2 = 2(\sqrt{3} - 1); R = 2$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{AH}{AK} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow R' = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Áp dụng } V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R'^2 + RR') = \dots = \left( \frac{24\sqrt{3} - 8}{9} \right) \pi$$

$$\text{Vậy } V = V_1 + V_2 = \left( \frac{24\sqrt{3} + 136}{9} \right) \pi. \text{ Đáp án là } \text{câu D}$$



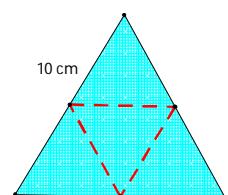
**Câu 61. (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU)** Người ta cắt miếng bìa hình tam giác cạnh bằng  $10\text{cm}$  như hình bên và gấp theo các đường kẻ, sau đó dán các mép lại để được hình tứ diện đều. Tính thể tích của khối tứ diện tạo thành.

A.  $V = \frac{250\sqrt{2}}{12} \text{ cm}^3$ .

B.  $V = 250\sqrt{2} \text{ cm}^3$ .

C.  $V = \frac{125\sqrt{2}}{12} \text{ cm}^3$ .

D.  $V = \frac{1000\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$ .



**Chọn C.**

Tứ diện đều tạo thành là tứ diện đều  $ABCD$  có tất cả các cạnh bằng  $5\text{cm}$ .

$$\text{Diện tích đáy là } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2.$$

$$\text{Đường cao } AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{6}}{3}, \text{ với } H \text{ là tâm đáy.}$$

$$\text{Thể tích } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{3} = \frac{125\sqrt{2}}{12}.$$

**Ghi nhớ:** Thể tích khối tứ diện đều cạnh  $a$  là  $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

**Câu 62. (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIÊU)** Một cái tục lăn sơn nước  $23\text{ cm}^3$ 

Đường kính của đường tròn đáy là  $5\text{cm}$ , chiều dài lăn là  $23\text{cm}$  (hình vòng thi trực lăn tạo nên sân phẳng một diện tích là



- A.  $1725\pi \text{ cm}^2$ .      B.  $3450\pi \text{ cm}^2$ .  
C.  $1725\pi \text{ cm}^2$ .      D.  $862,5\pi \text{ cm}^2$ .

**Chọn B.**

Diện tích xung quanh của mặt trụ là  $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi \cdot 5 \cdot 23 = 230\pi \text{ cm}^2$ .

Sau khi lăn 15 vòng thì diện tích phần sơn được là:  $S = 230\pi \cdot 15 = 3450\pi \text{ cm}^2$ .

**Câu 63. (LÊ HỒNG PHONG)** Người ta bỏ 5 quả bóng bàn cùng kích thước vào một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng 5 lần đường kính của quả bóng bàn. Gọi  $S_1$  là tổng diện tích của 5 quả bóng bàn,  $S_2$  là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số  $\frac{S_1}{S_2}$  là :

- A. 2.      B.  $\frac{6}{5}$ .      C. 1.      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Chọn C.**

Gọi bán kính của quả bóng bàn là  $R$  ( $R > 0$ )

Ta có chiều cao  $h$  của hình trụ bằng 5 lần đường kính của quả bóng bàn nghĩa là :

$$h = 5 \cdot 2R = 10R$$

$$\text{Khi đó : } S_1 = 5 \cdot 4\pi \cdot R^2 = 20\pi R^2$$

$$\text{Và } S_2 = 2\pi R \cdot h = 2\pi R \cdot 10R = 20\pi R^2$$

$$\text{Vậy : } \frac{S_1}{S_2} = 1.$$

**Câu 64. (PHẠM VĂN ĐỒNG)** Cho đường tròn nội tiếp hình vuông cạnh  $a$  (như hình vẽ bên). Gọi  $S$  là hình phẳng giới hạn bởi đường tròn và hình vuông (phẳng nằm bên ngoài đường tròn và bên trong hình vuông). Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay  $S$  quanh trục  $MN$ .

- A.  $V = \frac{\pi a^3}{6}$ .      B.  $V = \frac{\pi a^3}{12}$

C.  $V = \frac{\pi a^3}{3}$

D.  $V = \pi a^3$

**Câu 65. (LƯƠNG TÂM)** Tính thể tích của khối đa diện ở hình bên

A.  $750\text{cm}^3$

B.  $625\text{cm}^3$

C.  $125\text{cm}^3$

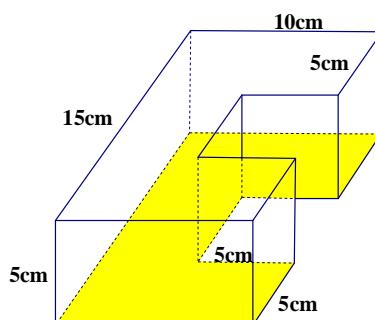
D.  $875\text{cm}^3$

**Giải**

Gọi V là thể tích cần tìm

$$\text{Ta có : } V = 5.10.15 - 5.5.5 = 625 \text{ cm}^3$$

**Chọn (B)**



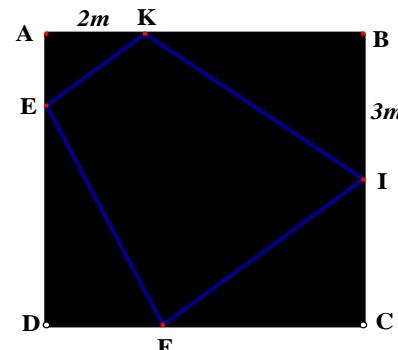
**Câu 66. (CẨM BÌNH)** Một tấm nhôm hình vuông cạnh  $6\text{ m}$  cân đối có khối lượng  $7200\text{ g}$ . Người ta muốn cắt ra một tấm hình thang (như hình vẽ). Khối lượng nhỏ nhất của tấm nhôm cắt ra gần với số nào sau đây nhất ?

A.  $3497\text{ g}$ .

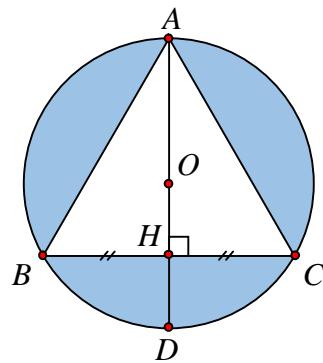
B.  $3498\text{ g}$ .

C.  $3600\text{ g}$ .

D.  $3499\text{ g}$ .



**Câu 67. (SỞ BÌNH PHƯỚC )** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$  và nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ ,  $AD$  là đường kính của đường tròn tâm  $O$ . Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho phần tô đậm (hình vẽ bên) quay quanh đường thẳng  $AD$  bằng



A.  $\frac{23\pi a^3 \sqrt{3}}{126}$ .

B.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$ .

C.  $\frac{20\pi a^3 \sqrt{3}}{217}$ .

D.  $\frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{27}$ .

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn A.**

Khi quay tam giác  $ABC$  quanh trục  $AD$  được khối nón có thể tích

$$\text{là: } N = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot HC^2 \cdot AH = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{24}$$

Khi quay đường tròn tâm  $O$  quanh trục  $AD$  được khối cầu có thể tích là:

$$V = \frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{4}{3}\pi.AO^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$$

$$\text{Thể tích khối tròn xoay cần tìm: } V - N = \frac{23\sqrt{3}\pi a^3}{216}$$

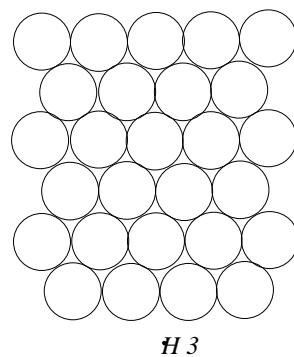
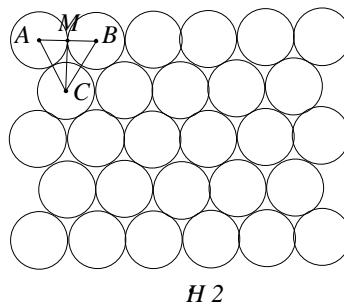
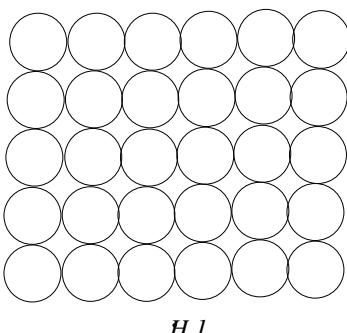
**Câu 68. (CHUYÊN BIÊN HÒA)** Một viên phán bảng có dạng một khối trụ với bán kính đáy bằng  $0,5\text{cm}$ , chiều dài  $6\text{cm}$ . Người ta làm một hình hộp chữ nhật bằng carton đựng các viên phán đó với kích thước  $6\text{cm} \times 5\text{cm} \times 6\text{cm}$ . Hỏi cần ít nhất bao nhiêu hộp kích thước như trên để xếp 460 viên phán?

- A.** 17.      **B.** 15.      **C.** 16.      **D.** 18.

Giải

Chon C.

Có 3 cách xếp phần theo hình vẽ dưới đây:



- ✓ Nếu xếp theo hình  $H1$ : vì đường kính viên phán là  $2.0,5 = 1\text{cm}$  nên mỗi hộp xếp được tối đa số viên phán là:  $6.5 = 30$ .
  - ✓ Nếu xếp theo hình  $H2$ : hàng 6 viên xen kẽ hàng 5 viên. Gọi số hàng xếp được là  $n+1, n \in \mathbb{Z}_+$ .

Ta có  $\Delta ABC$  đều cạnh bằng 1  $\Rightarrow CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Ta phải có  $2.0,5 + n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 5 \Rightarrow n \leq \frac{8}{\sqrt{3}}$   $\Rightarrow$  xếp tối đa được 5 hàng  $\Rightarrow$  mỗi hộp xếp được tối đa số viên phẩn là:  $3.6 + 2.5 = 28$ .

✓ Nếu xếp theo hình  $H3$ : hàng 5 viên xen kẽ hàng 4 viên. Gọi số hàng xếp được là  $m+1, m \in \mathbb{Z}_+$ .

Ta phải có  $2.0,5 + m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 6 \Rightarrow m \leq \frac{10}{\sqrt{3}}$   $\Rightarrow$  xếp tối đa được 6 hàng  $\Rightarrow$  nên mỗi hộp xếp được tối đa số viên phán là:  $3.5 + 3.4 = 27$ .

Vậy, xếp theo hình  $H1$  thì xếp được nhiều phần nhất, nên cần ít hộp nhất.

Ta có  $460 : 30 \approx 15,3 \Rightarrow$  cần ít nhất 16 hộp để xếp hết 460 viên phẩn.

**Câu 69. (CHUYÊN HƯNG YÊN)** Một cái nồi nấu nước người ta làm dạng hình trụ, chiều cao của nồi là  $60\text{cm}$ , diện tích đáy  $900\pi\text{cm}^2$ . Hỏi người ta cần miếng kim loại hình chữ nhật có kích thước là bao nhiêu để làm thân nồi đó? (bỏ qua kích thước các mép gấp).

- A.** Chiều dài  $180\text{cm}$ , chiều rộng  $60\text{cm}$ .      **B.** Chiều dài  $60\pi\text{cm}$ , chiều rộng  $60\text{cm}$ .

C. Chiều dài  $900\text{cm}$ , chiều rộng  $60\text{cm}$ .D. Chiều dài  $30\pi\text{cm}$ , chiều rộng  $60\text{cm}$ .**Hướng dẫn giải****Chọn D.**Gọi  $r$  là bán kính đáy. Diện tích đáy là  $S = \pi r^2 = 900\pi\text{cm}^2 \Rightarrow r = 30\text{cm}$ .Chu vi đáy  $C = 2\pi r = 60\pi\text{cm}$  cũng là chiều dài của miếng**Câu 70. (CHUYÊN HƯNG YÊN)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ , $\widehat{BAC} = \alpha$ . Gọi  $B'$ ,  $C'$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $SB$ ,  $SC$ . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $A.BCC'B'$  theo  $b$ ,  $c$ ,  $\alpha$ .

A.  $R = 2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$ .

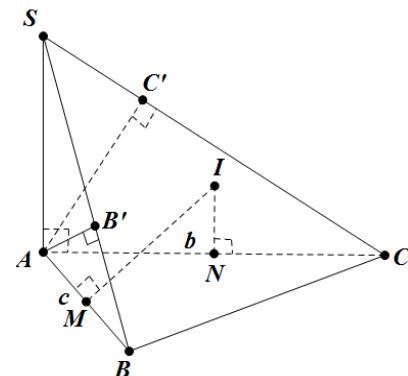
B.  $R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{\sin 2\alpha}$ .

C.  $R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}$ .

D.  $R = \frac{2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{\sin \alpha}$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn C.**Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ .Tam giác  $ABB'$  vuông tại  $B'$  nên  $M$  chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABB'$ , suy ra trực tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABB'$  chính là đường trung trực  $\Delta$  của  $AB$  (xét trong mp  $(ABC)$ ).Tam giác  $ACC'$  vuông tại  $C'$  nên  $N$  chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ACC'$ , suy ra trực tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ACC'$  chính là đường trung trực  $\Delta_1$  của  $AC$  (xét trong mp  $(ABC)$ ).Gọi  $I = \Delta \cap \Delta_1$  thì  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  và  $I$  cách đều các điểm  $A, B, C, B', C'$  nên  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp  $ABCB'C'$ .Gọi  $R$  là bán kính mặt cầu ngoại tiếp  $ABCB'C'$  thì  $R$  chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Ta có  $R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot S_{\Delta ABC}} = \frac{c \cdot b \cdot BC}{4 \cdot \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}$ .

**Câu 71. (TRẦN HƯNG ĐẠO)** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3a$ ,  $AC = 4a$ . Khi tam giác  $ABC$  quay quanh đường thẳng  $BC$  ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay đó.

A.  $V = \pi a^3$ .

B.  $V = \frac{96\pi a^3}{5}$ .

C.  $V = 3\pi a^3$ .

D.  $V = \frac{48\pi a^3}{5}$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn A.**Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $BC$ . Gọi  $V_1, V_2$  lần lượt là thể tích khối nón do tam giác  $CAH$  và  $BAH$  sinh ra khi quay quanh trục  $BC$ .

Ta có:  $AH = \frac{12a}{5}$ ;  $CH = \frac{16a}{5}$ ;  $BH = \frac{9a}{5}$ .

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12a}{5}\right)^2 \frac{16a}{5} = \frac{768\pi a^3}{125}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12a}{5}\right)^2 \frac{9a}{5} = \frac{432\pi a^3}{125}$$

$$\text{Vậy } V = V_1 + V_2 = \frac{48\pi a^3}{5}$$

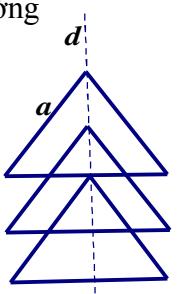
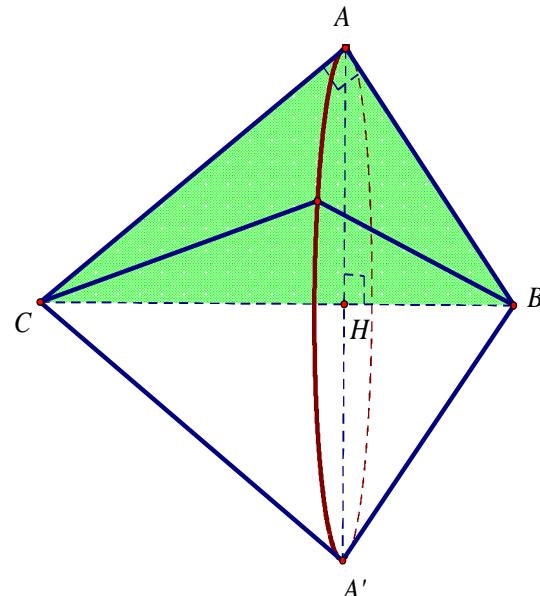
**Câu 72. (BẮC YÊN THÀNH)** Cho ba hình tam giác đều cạnh bằng  $a$  chồng lên nhau như hình vẽ (cạnh đáy của tam giác trên đi qua các trung điểm hai cạnh bên của tam giác dưới). Tính theo  $a$  thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay chúng xung quanh đường thẳng  $d$ .

A.  $\frac{13\sqrt{3}\pi a^3}{96}$ .

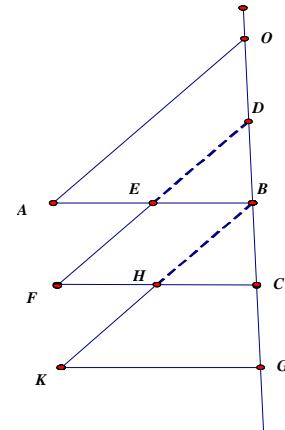
B.  $\frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}$ .

C.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$ .

D.  $\frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{8}$ .



**Chọn B.** Nếu ba hình tam giác không chồng lên nhau thì thể tích của khối tròn



là  $V_1 = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{8}$

$$\text{Thể tích phần bị chồng lên là } V_2 = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{96} \Rightarrow \text{Thể tích cần tính là } V = V_1 - V_2 = \frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}$$

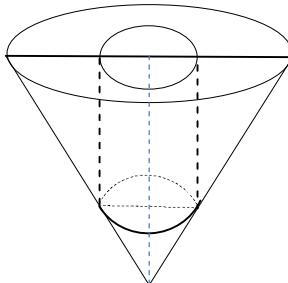
Hoặc làm như sau:

Đặt  $V_1; V_2; V_3; V_4$  lần lượt là thể tích: khối nón sinh bởi tam giác  $OAB$  quay quanh  $OB$ , khối tròn xoay sinh bởi hình  $BCFE; GCHK$ , khối nón sinh bởi tam giác  $DEB$  khi quay quanh  $BC$ . Khi đó: Thể tích khối cần tìm là:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 3V_1 - 2V_4 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{16} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}.$$

**Câu 73. (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG)** Một bình đựng nước dạng hình nón (không có nắp đáy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào bình đó

một khối trụ và đo được thể tích nước trào ra ngoài là  $\frac{16\pi}{9} (dm^3)$ . Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của hình nón và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón (như hình vẽ dưới). Tính bán kính đáy  $R$  của bình nước.



- A.  $R = 3(dm)$ .      B.  $R = 4(dm)$ .      C.  $R = 2(dm)$ .      D.  $R = 5(dm)$ .

#### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Gọi  $h, h'$  lần lượt là chiều cao của khối nón và khối trụ.

$R, r$  lần lượt là bán kính của khối nón và khối trụ.

Theo đề ta có:  $h = 3R, h' = 2R$ .

$$\text{Xét tam giác } SOA \text{ ta có: } \frac{r}{R} = \frac{IM}{OA} = \frac{SI}{SO} = \frac{h-h'}{h} = \frac{3R-2R}{3R} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{3}R. \text{ Ta lại có: } V_{\text{trô}} = \pi r^2 h' = \pi \cdot \frac{R^2}{9} \cdot 2R = \frac{2\pi R^3}{9} = \frac{16\pi}{9}$$

$$\Rightarrow R^3 = 8 \Leftrightarrow R = 2 \text{ dm.}$$

**Câu 74. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU)** Một chiếc xô hình nón cùt đựng hóa chất ở phòng thí nghiệm có chiều cao  $20cm$ , đường kính hai đáy lần lượt là  $10cm$  và  $20cm$ . Cô giáo giao cho bạn An sơn mặt ngoài của xô (trừ đáy). Tính diện tích bạn An phải sơn (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

- A.  $1942,97cm^2$ .      B.  $561,25cm^2$ .      C.  $971,48cm^2$ .      D.  $2107,44cm^2$ .

#### Hướng dẫn giải

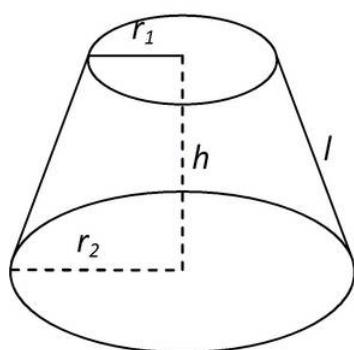
**Chọn C.**

$$\text{Ta có: } S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)l$$

$$\text{Với } r_1 = 5, r_2 = 10$$

$$l = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2} = \sqrt{20^2 + (10-5)^2} = 5\sqrt{17}$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = \pi(5+10)5\sqrt{17} = 75\sqrt{17}\pi \approx 971,48$$



**Câu 75. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU)** Một cốc nước hình trụ có chiều cao  $9cm$ , đường kính  $6cm$ . Mặt đáy phẳng và dày  $1cm$ , thành cốc dày  $0,2cm$ . Đổ vào cốc  $120ml$  nước sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính  $2cm$ . Hỏi mặt nước trong cốc cách mép cốc bao nhiêu  $cm$ . (Làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

- A.  $3,67cm$ .      B.  $2,67cm$ .      C.  $3,28cm$ .      D.  $2,28cm$ .

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D.

Thành cốc dày  $0,2cm$  nên bán kính đáy trụ bằng  $2,8cm$ . Đáy cốc dày  $1cm$  nên chiều cao hình trụ bằng  $8cm$ . Thể tích khối trụ là  $V = \pi \cdot (2,8)^2 \cdot 8 = 197,04 (cm^3)$ .

Đổ  $120ml$  vào cốc, thể tích còn lại là  $197,04 - 120 = 77,04 (cm^3)$ .

Thả 5 viên bi vào cốc, thể tích 5 viên bi bằng  $V_{bi} = 5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = 20,94 (cm^3)$ .

Thể tích cốc còn lại  $77,04 - 20,94 = 56,1 (cm^3)$ .

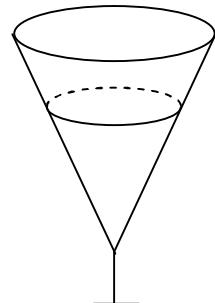
Ta có  $56,1 = h' \cdot \pi \cdot (2,8)^2 \Rightarrow h' = 2,28 cm$ .

**Cách khác:** Dùng tỉ số thể tích

$$\frac{V_{Tr}}{V_{nuoc} + V_{bi}} = \frac{h_{coc}}{h_{nuoc+bi}} \Leftrightarrow \frac{8 \cdot (2,8)^2 \cdot \pi}{120 + 5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi} = \frac{8}{h_{nuoc+bi}} \Rightarrow h_{nuoc+bi} = 5,72$$

Chiều cao còn lại của trụ là  $8 - 5,72 = 2,28$ .

Vậy mặt nước trong cốc cách mép cốc là  $2,28cm$ .



**Câu 76. (LÝ TỰ TRỌNG)** Một cái ly có dạng hình nón được rót nước vào với chiều cao mực nước bằng  $\frac{2}{3}$  chiều cao hình nón. Hỏi nếu bịch kính miệng ly rồi úp ngược ly xuống thì tỷ số chiều cao mực nước và chiều cao hình nón xấp xỉ bằng bao nhiêu?

- A. 0,33.      B. 0,11.      C. 0,21.      D. 0,08

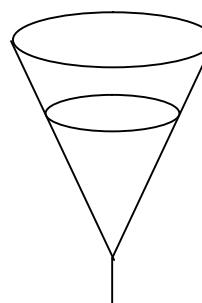
#### Chọn B.

.

Gọi chiều cao và bán kính đường tròn đáy của cái ly lần lượt là  $h$  và  $R$ .

Khi để cốc theo chiều xuôi thì lượng nước trong cốc là hình nón có chiều cao và

bán kính đường tròn đáy lần lượt là  $\frac{2h}{3}$  và  $\frac{2R}{3}$ .



Do đó thể tích lượng nước trong bình là  $\frac{8V}{27} \Rightarrow$  Phần không chứa nước chiếm

$$\frac{19}{27}V.$$

Khi úp ngược ly lại thì phần thể tích nước trong ly không đổi và lúc đó phần không chứa nước là hình nón và ta gọi  $h'$  và  $R'$  lần lượt là chiều cao và bán kính đường tròn đáy của phần hình nón không chứa nước đó.

Ta có  $\frac{R'}{R} = \frac{h'}{h}$  và phần thể tích hình nón không chứa nước là  $\frac{19}{27}V$

$$\Rightarrow \frac{h'}{3} \cdot \pi R'^2 = \frac{19}{27} \cdot \frac{h}{3} \cdot \pi R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \frac{19}{27} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{\sqrt[3]{19}}{3}.$$

Do đó tỷ lệ chiều cao của phần chứa nước và chiều cao của cái ly trong trường hợp úp ngược ly là  $1 - \frac{h'}{h} = \frac{3 - \sqrt[3]{19}}{3}$ .

**Câu 77. (LANG GIANG)** Một ngôi biệt thự nhỏ có 10 cây cột nhà hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao bằng  $4,2m$ . Trong đó có 4 cây cột trước đại sảnh có đường kính bằng  $40cm$ , 6 cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính bằng  $26cm$ . Chủ nhà dùng loại sơn giả đá để sơn 10 cây cột đó. Nếu giá của một loại sơn giả đá là  $380.000đ/m^2$  (kể cả phần thi công) thì người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn cột 10 cây cột nhà đó? (đơn vị đồng)?

- A. 15.845.000.      B. 13.627.000.      C. 16.459.000.      D. 14.647.000.

#### Hướng dẫn giải

##### Chọn A.

Diện tích xung quanh 4 cây cột trước đại sảnh có đường kính bằng  $40cm$ :  $S_1 = 4(2\pi \cdot 0,2 \cdot 4,2)$ .

Diện tích xung quanh 6 cây cột trước cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính bằng  $26cm$ :

$$S_2 = 6(2\pi \cdot 0,13 \cdot 4,2).$$

Số tiền để sơn mười cây cột nhà là  $(S_1 + S_2) \cdot 380.000 = \approx 15.845.000$ .

**Câu 78. (TRẦN HƯNG ĐẠO)** Người ta cần đổ một ống thoát nước hình trụ với chiều cao  $200cm$ , độ dày của thành ống là  $15cm$ , đường kính của ống là  $80cm$ . Lượng bê tông cần phải đổ là

- A.  $0,195\pi m^3$ .      B.  $0,18\pi m^3$ .      C.  $0,14\pi m^3$ .      D.  $\pi m^3$ .

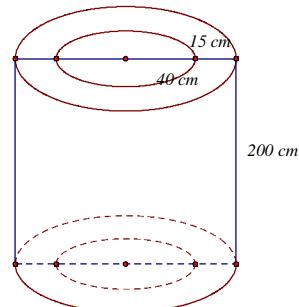
#### Hướng dẫn giải

##### Chọn A.

Gọi  $V_1, V_2$  lần lượt là thể tích của khối trụ bên ngoài và bên trong

Do đó lượng bê tông cần phải đổ là:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \cdot 40^2 \cdot 200 - \pi \cdot 25^2 \cdot 200 = 195000\pi cm^3 = 0,195\pi m^3$$

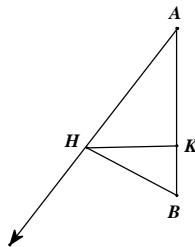


**Câu 79. (NGUYỄN KHUYẾN)** Cho đoạn thẳng  $AB$  có độ dài bằng  $2a$ , vẽ tia  $Ax$  về phía điểm  $B$  sao cho điểm  $B$  luôn cách tia  $Ax$  một đoạn bằng  $a$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $B$  lên tia, khi tam giác  $AHB$  quay quanh trục  $AB$  thì đường gấp khúc  $AHB$  vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng :

- A.  $\frac{(2+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$       B.  $\frac{(3+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$       C.  $\frac{(1+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$       D.  $\frac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$

## Hướng dẫn giải

## Chọn B.



Khi quay quanh tam giác  $AHB$  thì đường gấp khúc  $AHB$  vẽ lên một mặt tròn xoay. Diện tích mặt tròn xoay này bằng tổng diện tích xung quanh hai hình nón đường sinh  $AH$  và  $BH$ .

$$\text{Ta có } AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = a\sqrt{3}$$

$$HK = \frac{AH \cdot BH}{AB} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Diện tích xung quanh hình nón có đường sinh  $AH$  là  $S_1 = \pi \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^2\pi}{2}$

Diện tích xung quanh hình nón có đường sinh  $BH$  là  $S_2 = \pi \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}a^2\pi}{2}$

Diện tích mặt tròn xoay cần tìm là  $S = S_1 + S_2 = \frac{(3+\sqrt{3})a^2\pi}{2}$ .

**Câu 80. (NGUYỄN KHUYẾN)** Cho một cây nến hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao và độ dài cạnh đáy lần lượt là 15 cm và 5 cm. Người ta xếp cây nến trên vào trong một hộp có dạng hình hộp chữ nhật sao cho cây nến nằm khít trong hộp. Thể tích của chiếc hộp đó bằng:

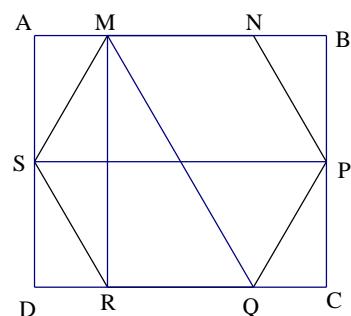
- A.** 1500 ml.      **B.**  $600\sqrt{6}$  ml.      **C.** 1800 ml.      **D.**  $750\sqrt{3}$  ml.

## Chọn D.

Ta có  $AB = 10\text{cm}$ ,  $AD = 5\sqrt{3}\text{cm}$

$$S_{ABCD} = 50\sqrt{3}$$

$$V = S_{ABCD} \cdot h = 750\sqrt{3}$$



**Câu 81. (AN LÃO)** Người ta cần lợp tôn cho mái nhà như hình vẽ. Biết mái trước, mái sau là các hình thang cân  $ABCD, ABEF$ ; hai đầu hồi là hai tam giác cân  $ADE, BCF$  tại  $A$  và  $B$ . Hình chiếu vuông góc của  $A$  trên mặt phẳng  $(CDEF)$  là  $H$ . Biết  $AB = 16m, CD = FE = 20m, AH = 1,73m, ED = CF = 6m$ . Tính tổng diện tích  $S$  của mái nhà (diện tích của hai mái trước, sau và hai đầu hồi).

- A.  $S \approx 281m^2$       B.  $S \approx 78m^2$       C.  $S \approx 141m^2$       D.  $S \approx 261m^2$

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Xét hình thang cân  $AKIB$  :  $KH = \frac{KI - AB}{2} = 2$

$$\Rightarrow AK = \sqrt{HK^2 + AH^2} = \sqrt{1,73^2 + 2^2} \approx 2,64441 \Rightarrow S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot ED = 3 \cdot 2,64441 = 7,93323$$

Ta có :  $ED \perp AK, ED \perp AH \Rightarrow ED \perp (AKH) \Rightarrow ED \perp HK$

Kẻ  $HJ \in ED \Rightarrow FE \perp (JAH) \Rightarrow JA \perp FE$

$$\Rightarrow S_{AEFB} = \frac{AB + FE}{2} \cdot JA = \frac{16 + 20}{2} \cdot \sqrt{3^2 + 1,73^2} = 62,33538$$

$$\Rightarrow S = 2(S_{ADE} + S_{AEFB}) \approx 141m^2.$$

**Câu 82. (NGÔ QUYỀN)** Người ta cần lợp tôn cho một mái nhà như hình vẽ. Biết mái trước, mái sau là các hình thang cân  $ABCD, ABEF$ ; hai đầu nối là hai tam giác cân  $ADF, BCE$  tại  $A$  và  $B$ ;  $I$  là hình chiếu của  $A$  trên  $(CDFE)$ ;  $AB = 6m, CD = EF = 12m, AI = 1,73m, FD = CE = 6m$ . Tính tổng diện tích  $S$  của mái nhà (diện tích của hai mái trước, sau và hai đầu hòi).

**A.**  $S \approx 83,12m^2$ .

**B.**  $S \approx 62,4m^2$ .

**C.**  $S \approx 72m^2$ .

**D.**  $S \approx 93,5m^2$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn A.**

Gọi  $S_1$  là diện tích của hai mái trước,  $S_2$  là diện tích của hai đầu hòi.

$$GI = \frac{GH - AB}{2} = 3$$

$$AG = \sqrt{AI^2 + GI^2} = \sqrt{3^2 + 1,73^2}$$

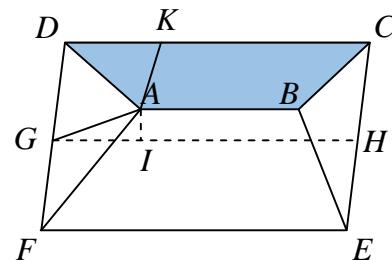
$$\text{Vậy } S_2 = 2S_{\triangle ADF} = 2 \cdot \frac{1}{2} AG \cdot DF = \sqrt{3^2 + 1,73^2} \cdot 6 \approx 20,78$$

$$\text{Từ đó } AD = \sqrt{AG^2 + GD^2} = \sqrt{3^2 + 1,73^2 + 3^2}$$

$$\text{Từ đó chiều cao của hình thang: } AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{3^2 + 1,73^2}.$$

$$\text{Suy ra: } S_1 = 2S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot AK = 18 \sqrt{3^2 + 1,73^2} \approx 62,34$$

$$\text{Vậy: } S = S_1 + S_2 = 24 \sqrt{3^2 + 1,73^2} \approx 83,11384m^2.$$



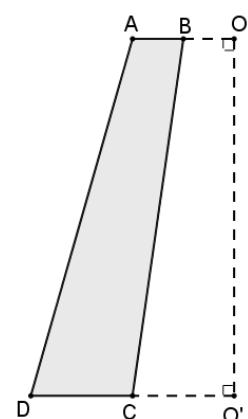
**Câu 83. (NGÔ QUYỀN)** Thể tích  $V$  của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang  $ABCD$  quanh trục  $OO'$ , biết  $OO' = 80, O'D = 24, O'C = 12, OA = 12, OB = 6$ .

**A.**  $V = 43200\pi$ .

**B.**  $V = 21600\pi$ .

**C.**  $V = 20160\pi$ .

**D.**  $V = 45000\pi$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn C.**

Công thức tính thể tích khối nón cùt  $V = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$ .

Trong đó  $h$  là độ dài đường cao,  $R_1; R_2$  lần lượt là bán kính hai đáy.

Gọi  $V_1$  là thể tích khối nón cùt khi quay hình thang  $AOO'D$  quanh trục  $OO'$ .

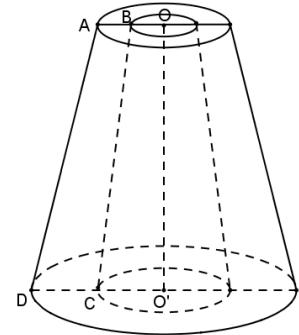
Gọi  $V_2$  là thể tích khối nón cùt khi quay hình thang  $BOO'C$  quanh trục  $OO'$ .

Khi đó  $V = V_1 - V_2$ .

$$\text{Ta có } V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot OO' \cdot (O'D^2 + OA^2 + O'D \cdot OA) = 26880\pi$$

$$\text{và } V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot OO' \cdot (O'C^2 + OB^2 + O'C \cdot OB) = 6720\pi.$$

$$\text{Vậy } V = V_1 - V_2 = 26880\pi - 6720\pi = 20160\pi.$$



**Câu 84. (TT ĐIỆU HIỀN)** Một thùng xách nước hình trụ có chiều cao  $4dm$ , đường kính đáy  $2dm$ .

Người ta dùng các thùng này để xách nước đổ vào một cái bể hình lập phương cạnh  $1,5m$ . Giả sử mỗi lần xách đều đầy nước trong thùng và khi đổ  $100$  thùng thì được  $90\%$  thể tích bể. Hỏi ban đầu số lít nước có trong bể **gần với giá trị nào sau đây?**

- A. 3038.      B. 3375.      C. 1257.      D. 1781.

#### Hướng dẫn giải

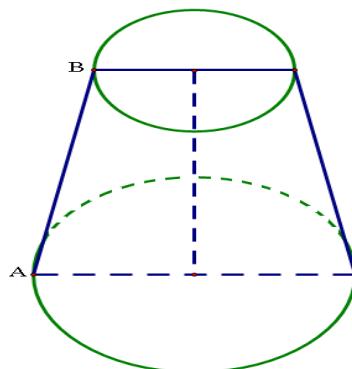
**Chọn D.**

$$\text{Thể tích thùng: } V_1 = S_d \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 0,4 = 0,004\pi(m^3)$$

$$\text{Thể tích bể hình lập phương: } V = 1,5^3 = 3,375(m^3)$$

$$\text{Thể tích nước có sẵn trong bể lúc đầu: } V_2 = 90\% \cdot V - 100V_1 \approx 1,781(m^3) \approx 1781(l)$$

**Câu 85. (NGUYỄN TRÃI)** Có một cái cốc làm bằng giấy, được úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của chiếc cốc là  $20cm$ , bán kính đáy cốc là  $4cm$ , bán kính miệng cốc là  $5cm$ . Một con kiến đang đứng ở điểm  $A$  của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh thân cốc để lên đến đáy cốc ở điểm  $B$ . Quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình gần đúng nhất với kết quả nào dưới đây?

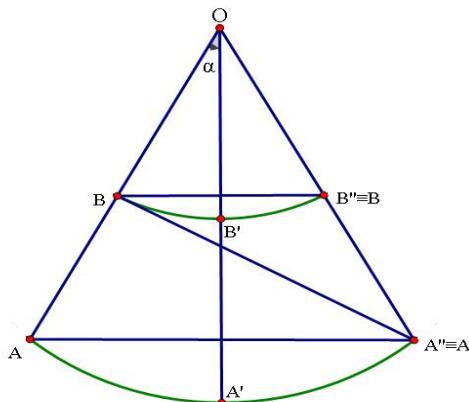


- A.  $59,98cm$       B.  $59,93cm$       C.  $58,67cm$       D.  $58,80cm$ .

#### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

Đặt  $b, a, h$  lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc,  $\alpha$  là góc kí hiệu như trên hình vẽ. Ta “trải” hai lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ  $BB'' = 4\pi b$  và cung lớn  $AA'' = 4\pi a$ .



Độ dài ngắn nhất của đường đi của con kiến là độ dài “đoạn thẳng BA”. Áp dụng định lí hàm số cosin ta được:

$$l = AB = \sqrt{BO^2 + OA''^2 - 2BO \cdot OA'' \cdot \cos 2\alpha} \quad (1).$$

$$B''A'' = AB = \sqrt{(a-b)^2 + h^2}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4\pi a}{4\pi b} = \frac{l(\widehat{BB''})}{l(\widehat{AA''})} = \frac{OA}{OB} = \frac{OB + AB}{OB} = 1 + \frac{AB}{2\pi b} = 1 + \frac{AB \cdot \alpha}{2\pi b}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi(a-b)}{AB} = \frac{2\pi(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + h^2}} \quad (a). \quad \frac{AB}{OB} = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b} \Rightarrow OB = \frac{b\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{a-b} \quad (b).$$

$$OA'' = OB + BA = \frac{b\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{a-b} + \sqrt{(a-b)^2 + h^2} \quad (c).$$

Thay (a), (b), (c) vào (1) ta tìm được  $l \approx 58,79609\text{cm} \approx 58,80$ .

**Ghi chú.** Để tồn tại lời giải trên thì đoạn BA” phải không cắt cung  $\widehat{BB''}$  tại điểm nào khác B, tức là BA” nằm dưới tiếp tuyến của  $\widehat{BB''}$  tại **B**. Điều này tương đương với  $2\alpha < \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ . Tuy nhiên, trong lời giải của thí sinh không yêu cầu phải trình bày điều kiện này (và đề bài cũng đã cho thỏa mãn yêu cầu đó).

**Câu 86. (NGUYỄN TRÃI)** Một cốc nước có dạng hình trụ đựng nước chiều cao  $12\text{cm}$ , đường kính đáy  $4\text{cm}$ , lượng nước trong cốc cao  $8\text{cm}$ . Thả vào cốc nước 4 viên bi có cùng đường kính  $2\text{cm}$ . Hỏi nước dâng cao cách mép cốc bao nhiêu xăng-ti-mét? (làm tròn sau dấu phẩy 2 chữ số thập phân, bỏ qua độ dày của cốc)

- A.  $2,67\text{cm}$ .      B.  $2,75\text{cm}$ .      C.  $2,25\text{cm}$ .      D.  $2,33\text{cm}$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Lượng nước dâng lên chính là tổng thể tích của 4 viên bi thả vào bằng  $V_b = 4 \cdot \frac{4}{3}\pi r_b^3 = \frac{16\pi}{3}\text{cm}^3$ .

Dễ thấy phần nước dâng lên là hình trụ có đáy bằng với đáy cốc nước và thể tích là  $\frac{16\pi}{3}\text{cm}^3$ .

Chiều cao của phần nước dâng lên là  $h_d$  thỏa mãn:  $\frac{16\pi}{3} = \pi r^2 h_d$  nên  $h_d = \frac{4}{3}$  cm.

Vậy nước dâng cao cách mép cốc là  $12 - 8 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,67$  cm.

**Câu 87. (Lê Hồng Phong)** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có độ dài hai đáy  $AB = 2a$ ,  $DC = 4a$ , đường cao  $AD = 2a$ . Quay hình thang  $ABCD$  quanh đường thẳng  $AB$  thu được khối tròn xoay ( $H$ ). Tính thể tích  $V$  của khối ( $H$ ).

A.  $V = 8\pi a^3$ .

B.  $V = \frac{20\pi a^3}{3}$ .

C.  $V = 16\pi a^3$ .

D.  $V = \frac{40\pi a^3}{3}$ .

**Hướng dẫn giải**

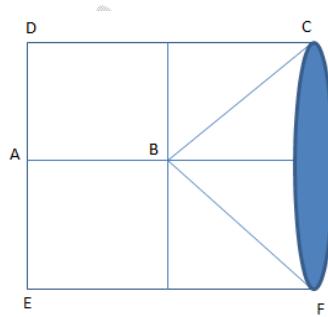
**Chọn D.**

Gọi  $V_1$  là thể tích khối trụ khi quay hình chữ nhật  $DCFE$  quanh trục  $AB$

Gọi  $V_2$  là thể tích khối nón. Khi quay  $\Delta BCF$  quanh trục  $AB$

$V$  là thể tích của khối ( $H$ ) cần tìm

$$V = V_1 - V_2 = \pi(2a)^2 \cdot 4a - \frac{1}{3}\pi(2a)^2 \cdot 2a = \frac{40\pi a^3}{3}$$



**Câu 88. (CHUYÊN ĐH HUẾ)** Cho tứ diện  $S.ABC$  có đáy

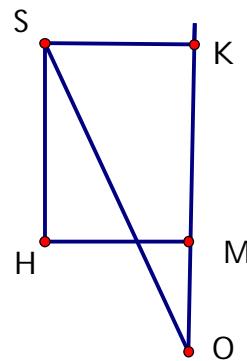
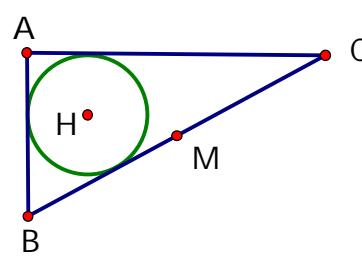
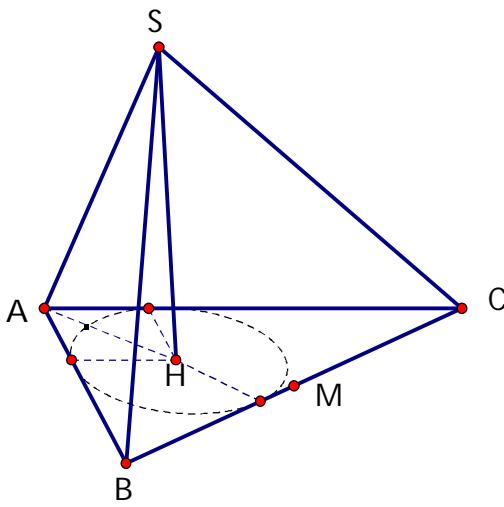
$ABC$  là tam giác vuông tại  $A$  với  $AB = 3a$ ,

$AC = 4a$ . Hình chiếu  $H$  của  $S$  trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Biết  $SA = 2a$ , bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$  là

A.  $R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{4}$ .      B.  $R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{2}$ .      C.  $R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{8}$ .      D.  $R = a \cdot \sqrt{118}$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**



Gọi  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Tính được  $r = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC + BC} = a$ .

Tính được  $AH = a\sqrt{2}$  và  $MH = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

Tam giác  $SAH$  vuông tại  $H$  suy ra  $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$ .

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $\Delta$  là trực đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Gọi  $O$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp  $S.ABC$ . Suy ra  $O \in \Delta$ .

Ta có:

$$OC^2 = OS^2 \Leftrightarrow OM^2 + MC^2 = SK^2 + OK^2.$$

$$\Leftrightarrow OM^2 + \frac{25a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} + (OM + a\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow OM = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$$

Suy ra  $R = OC = \frac{\sqrt{118}}{4}a$ .

**Câu 89. (PHAN ĐÌNH PHÙNG)** Trên cùng một mặt phẳng, cho mô hình gồm một hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $2a$  và đường tròn có đường kính  $AB$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Diện tích toàn phần của khối tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên xung quanh trục  $MN$  là

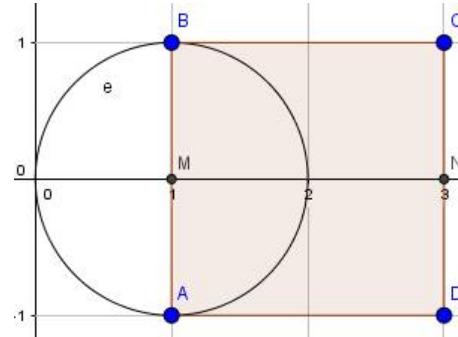
- A.  $V = 10\pi a^2$ .      B.  $V = 7\pi a^2$ .      C.  $V = 9\pi a^2$ .      D.  $V = 8\pi a^2$ .

**Hướng dẫn giải.**

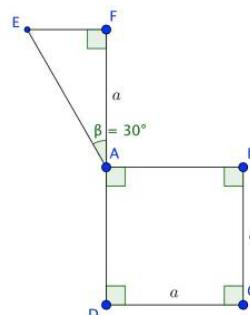
**Chọn B.**

Chọn tọa độ như hình vẽ. Diện tích toàn phần gồm 1 nửa mặt cầu và mặt xung quanh kết hợp một đáy của hình

$$\text{trụ. } S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot a^2 + \pi \cdot a^2 + 2\pi \cdot a \cdot 2a = 7\pi a^2.$$



**Câu 90. (CHUYÊN QUANG TRUNG)** Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ) quanh trục  $DF$



- A.  $\frac{10\pi a^3}{9}$ .      B.  $\frac{10\pi a^3}{7}$ .      C.  $\frac{5\pi a^3}{2}$ .      D.  $\frac{\pi a^3}{3}$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có  $EF = AF \cdot \tan \beta = a \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Khi quay quanh trục  $DF$ , tam giác  $AEF$  tạo ra một hình nón có thể tích

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot EF^2 \cdot AF = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{9}$$

Khi quay quanh trục  $DF$ , hình vuông  $ABCD$  tạo ra một hình trụ có thể tích

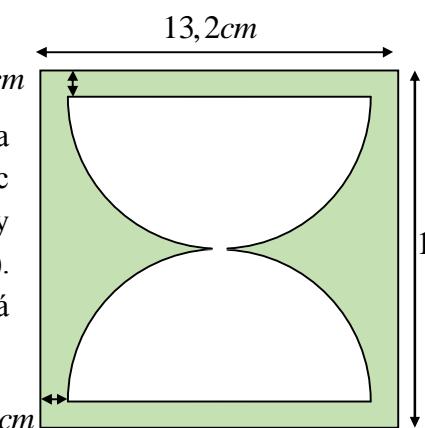
$$V_2 = \pi \cdot DC^2 \cdot BC = \pi \cdot a^2 \cdot a = \pi a^3$$

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ) quanh trục  $DF$  là

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi a^3}{9} + \pi a^3 = \frac{10}{9}\pi a^3$$

- Câu 91. (ĐẠI HỌC VINH)** Một xưởng sản xuất muôn tạo ra những chiếc đồng hồ cát thủy tinh có dạng hình trụ, phần chứa cát là hai nửa hình cầu bằng nhau. Hình vẽ bên với kích thước đã cho là bản thiết kế thiết diện qua trục của chiếc đồng hồ này (phần giới hạn bởi hình trụ và phần hai nửa hình cầu chứa cát). Khi đó, lượng thủy tinh làm chiếc đồng hồ cát gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau

- A.  $1070,8 \text{ cm}^3$ .      B.  $602,2 \text{ cm}^3$ .  
C.  $711,6 \text{ cm}^3$ .      D.  $6021,3 \text{ cm}^3$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn A.**

Ta có thể tích của khối trụ là  $V_1 = \pi \cdot 13,2 \cdot 6,6^2 \approx 1806,4$ .

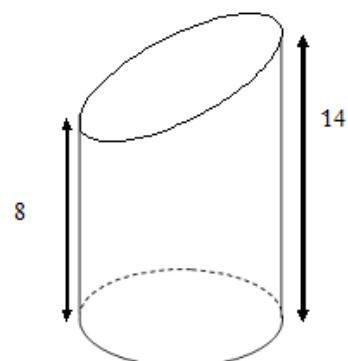
Đường kính hình cầu là  $13,2 - 2 \cdot 1 = 11,2 \text{ cm}$ , suy ra thể tích của hai nửa khối cầu là

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5,6^3 \approx 735,619$$

Vậy lượng thủy tinh làm chiếc đồng hồ cát gần nhất với giá trị  $1070,8 \text{ cm}^3$ .

- Câu 92. (CHUYÊN KHTN)** Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối ( $H$ ) như hình vẽ bên. Biết rằng thiết diện là một hình elip có độ dài trục lớn bằng 8, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất tới mặt đáy lần lượt là 8 và 14 (xem hình vẽ). Tính thể tích của ( $H$ ).

- A.  $V_{(H)} = 192\pi$ .      B.  $V_{(H)} = 275\pi$ .  
C.  $V_{(H)} = 704\pi$ .      D.  $V_{(H)} = 176\pi$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn D.**

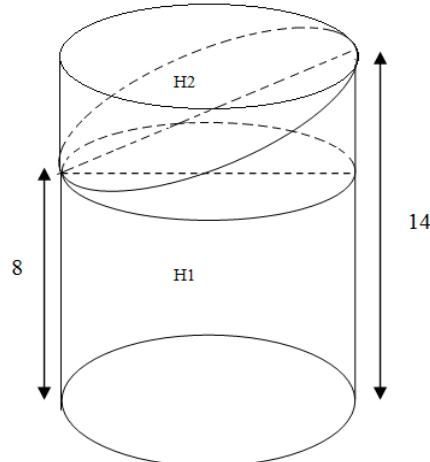
Đường kính đáy của khối trụ là  $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

Bán kính đáy của khối trụ là  $R = 4$

Thể tích của khối trụ  $H_1$  là  $V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot h_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi$ .

Thể tích của khối trụ  $H_2$  là  $V_2 = \pi \cdot R^2 \cdot h_2 = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 96\pi$ .

Thể tích của  $H$  là  $V = V_1 + \frac{1}{2}V_2 = 128\pi + \frac{1}{2} \cdot 96\pi = 176\pi$ .



**Câu 93. (CHUYÊN KHTN)** Cho một mặt cầu bán kính bằng 1.

Xét các hình chóp tam giác đều ngoại tiếp mặt cầu trên.  
Hỏi thể tích nhỏ nhất của chúng là bao nhiêu?

- A.  $\min V = 8\sqrt{3}$ .      B.  $\min V = 4\sqrt{3}$ .      C.  $\min V = 9\sqrt{3}$ .      D.  $\min V = 16\sqrt{3}$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

Gọi cạnh đáy của hình chóp là  $a$

Ta có  $\Delta SIJ \sim \Delta SMH$

$$\Rightarrow \frac{SI}{SM} = \frac{IJ}{MH} \Rightarrow MH(SH - IH) = IJ\sqrt{SH^2 - HM^2}$$

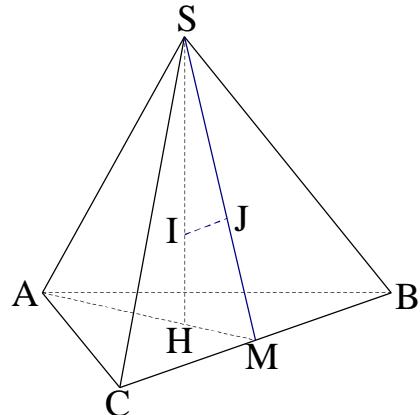
$$\Rightarrow MH^2(SH - 1)^2 = SH^2 - HM^2$$

$$\Rightarrow (a^2 - 12)SH^2 - 2a^2SH = 0$$

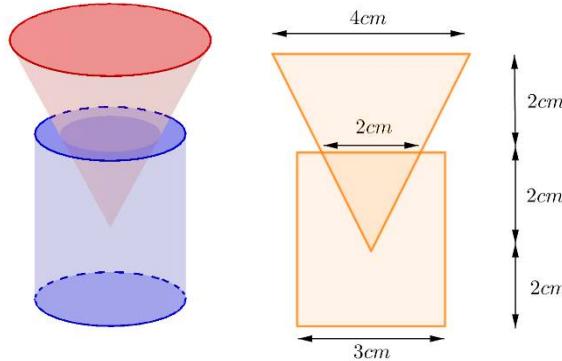
$$\Rightarrow SH = \frac{2a^2}{a^2 - 12} (a^2 \neq 12)$$

$$S = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2a^4}{a^2 - 12} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a^2} - \frac{12}{a^4}}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{a^2} - \frac{12}{a^4} \leq \frac{1}{48} \Rightarrow S \geq 8\sqrt{3}$$



**Câu 94. (CHUYÊN KHTN)** Một nút chai thủy tinh là một khối tròn xoay ( $H$ ), một mặt phẳng chứa trực của ( $H$ ) cắt ( $H$ ) theo một thiết diện như trong hình vẽ bên. Tính thể tích của ( $H$ ) (đơn vị  $cm^3$ ).



A.  $V_{(H)} = 23\pi$ .

B.  $V_{(H)} = 13\pi$ .

C.  $V_{(H)} = \frac{41\pi}{3}$ .

D.  $V_{(H)} = 17\pi$ .

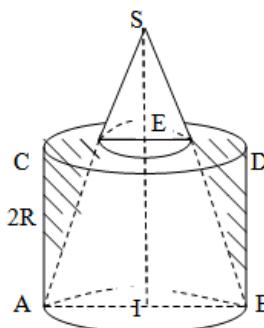
**Hướng dẫn giải:**

**Chọn đáp án C.**

Thể tích khối trụ là  $V_{tru} = Bh = \pi 1.5^2 \cdot 4 = 9\pi$ . Thể tích khối nón là  $V_{non} = \frac{1}{3}\pi 2^2 \cdot 4 = \frac{16\pi}{3}$ .

Thể tích phần giao là:  $V_{p.giao} = \frac{1}{3}\pi 1^2 \cdot 2 = \frac{2\pi}{3}$ . Vậy  $V_{(H)} = 9\pi + \frac{16\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{41\pi}{3}$ .

**Câu 95. (CHUYÊN BẮC GIANG)** Cho hình nón có độ dài đường kính đáy là  $2R$ , độ dài đường sinh là  $R\sqrt{17}$  và hình trụ có chiều cao và đường kính đáy đều bằng  $2R$ , lồng vào nhau như hình vẽ.



Tính thể tích phần khối trụ không giao với khối nón

A.  $\frac{5}{12}\pi R^3$ .

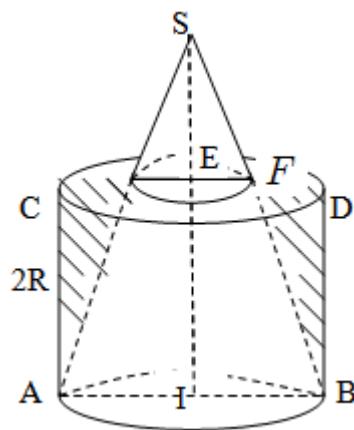
B.  $\frac{1}{3}\pi R^3$ .

C.  $\frac{4}{3}\pi R^3$ .

D.  $\frac{5}{6}\pi R^3$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**



Ta có  $SI = \sqrt{SB^2 - IB^2} = \sqrt{17R^2 - R^2} = 4R \Rightarrow SE = 2R, EF = \frac{R}{2}$ .

Thể tích khối nón lớn (có đường cao  $SI$ ) là  $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 4R = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

Thể tích khối nón nhỏ (có đường cao  $SE$ ) là  $V_2 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot 2R = \frac{1}{6}\pi R^3$

Thể tích phần khối giao nhau giữa khối nón và khối trụ là  $V_3 = V_1 - V_2 = \frac{7}{6}\pi R^3$ .

Thể tích khối trụ là  $V_4 = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$ .

Vậy thể tích phần khói trụ không giao với khói nón là  $V = V_4 - V_3 = \frac{5}{6}\pi R^3$ .

**Câu 96. (TIỀN LÃNG)** Một ngôi biệt thự có 10 cây cột nhà hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao bằng  $4,2m$ . Trong đó, 4 cây cột trước đại sảnh có đường kính bằng  $40cm$ , 6 cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính bằng  $26cm$ . Chủ nhà dùng loại sơn giả đá để sơn 10 cây cột đó. Nếu giá của một loại sơn giả đá là  $380.000 đ/m^2$  (kể cả phần thi công) thì người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn cột 10 cây cột nhà đó (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng)?

- A. 16.468.000.      B. 31.688.000.      C. 15.835.000.      D. 15.844.000.

### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

Diện tích xung quanh 1 cây cột trước đại sảnh là  $S_1 = 2\pi \cdot 0,2 \cdot 4,2 = 1,68\pi (m^2)$ .

Diện tích xung quanh 1 cây cột đường kính  $26cm$  là:  $S_2 = 2\pi \cdot 0,13 \cdot 4,2 = 1,092\pi (m^2)$

Vậy số tiền cần là  $T = (4S_1 + 6S_2) \cdot 380.000 \approx 15.844.182$

**Câu 97. (TT ĐIỆU HIỀN)** Một quả bóng bàn được đặt tiếp xúc với tất cả các mặt của một cái hộp hình lập phương. Tỉ số thể tích của phần không gian nằm trong hộp đó nhưng nằm ngoài quả bóng bàn và thể tích hộp là:

- A.  $\frac{8-\pi}{8}$ .      B.  $\frac{2}{3}$ .      C.  $\frac{6-\pi}{6}$ .      D.  $\frac{3}{4}$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn C**

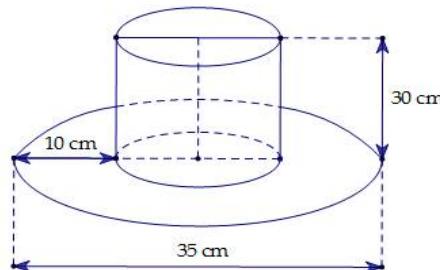
Giả sử hình lập phương có cạnh bằng  $a$ . Khi đó, quả bóng bàn có bán kính bằng  $\frac{a}{2}$ .

Thể tích khối lập phương  $V_1 = a^3$ , thể tích khối cầu  $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{a^3}{8} = \frac{\pi a^3}{6}$ .

Tỉ số cần tìm là  $\frac{V_1 - V_2}{V_1} = 1 - \frac{\pi}{6}$ .

**Câu 98. (TT ĐIỆU HIỀN)** Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không cần viền, mép, phần thừa)

- A.  $700\pi (cm^2)$ .  
 B.  $754,25\pi (cm^2)$ .  
 C.  $750,25\pi (cm^2)$ .  
 D.  $756,25\pi (cm^2)$ .



### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

Diện tích vành nón và đỉnh nón là diện tích hình tròn đường kính  $35cm$ :

$$S_1 = \left(\frac{35}{2}\right)^2 \pi = 306,25\pi (cm^2)$$

Diện tích thân nón là diện tích của hình trụ có bán kính đáy bằng  $5\text{cm}$  và chiều cao bằng  $30\text{cm}$

$$\text{là: } S_2 = \frac{15}{2} \cdot 2\pi \cdot 30 = 450\pi (\text{cm}^2)$$

$$\text{Vậy tổng diện tích vải cần để làm nón cái mũ là: } S = S_1 + S_2 = 756,25\pi (\text{cm}^2)$$

**Câu 99. (TT DIỆU HIỀN)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành và có thể tích là  $V$ . Điểm  $P$  là trung điểm của  $SC$ , một mặt phẳng qua  $AP$  cắt hai cạnh  $SD$  và  $SB$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Gọi  $V_1$  là thể tích của khối chóp  $S.AMPN$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $\frac{V_1}{V}$ ?

- A.  $\frac{1}{8}$ .      B.  $\frac{2}{3}$ .      C.  $\frac{3}{8}$ .      D.  $\frac{1}{3}$ .

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D.

Gọi  $O$  là tâm của hình bình hành  $ABCD$ .  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAC$ .

Ta có  $M, G, N$  thẳng hàng. Do  $ABCD$  là hình bình hành nên  $V_{S.ADC} = V_{S.ABC} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$ .

Theo công thức tỉ số thể tích ta có:  $\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} \Leftrightarrow \frac{V_{S.AMP}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \frac{SM}{SD} \Leftrightarrow \frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4} \frac{SM}{SD}$

Tương tự

$$\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} \Leftrightarrow \frac{V_{S.ANP}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \frac{SN}{SB} \Leftrightarrow \frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4} \frac{SN}{SB}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4} \left( \frac{SM}{SD} + \frac{SN}{SB} \right) \Rightarrow \frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4} \left( \frac{SM}{SD} + \frac{SN}{SB} \right)$$

$$\text{Hay } \frac{V_1}{V} = \frac{1}{4} \left( \frac{SM}{SD} + \frac{SN}{SB} \right)$$

$$\text{Ta chứng minh } \frac{SD}{SM} + \frac{SB}{SN} = 3.$$

Thật vậy, qua  $B, D$  kẻ các đường song song với  $MN$  cắt  $SO$  lần lượt tại  $E, F$ .

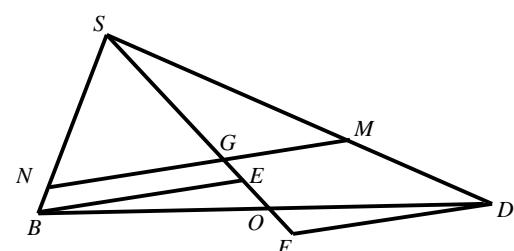
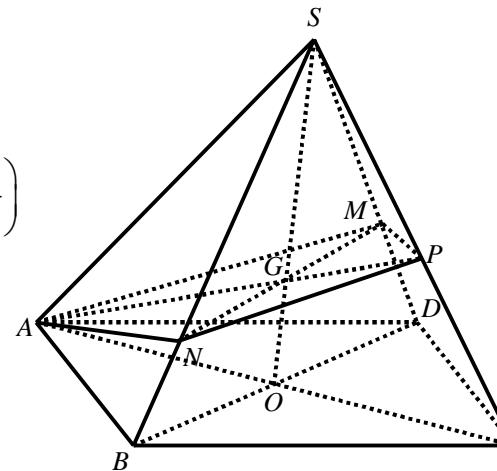
$$\text{Ta có: } \frac{SD}{SM} = \frac{SF}{SG}; \frac{SB}{SN} = \frac{SE}{SG} \Rightarrow \frac{SD}{SM} + \frac{SB}{SN} = \frac{SE + SF}{SG}$$

$$\Rightarrow \frac{SD}{SM} + \frac{SB}{SN} = \frac{2SO}{SG} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

$$\text{Đặt } \frac{SD}{SM} = x; \frac{SB}{SN} = y. \text{ Ta có } x + y = 3$$

$$\text{Mặt khác } \frac{V_1}{V} = \frac{1}{4} \left( \frac{SM}{SD} + \frac{SN}{SB} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{x+y}{4xy} = \frac{3}{4xy} \geq \frac{3}{(x+y)^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V} \text{ nhỏ nhất bằng } \frac{1}{3}.$$



# TỔNG ÔN: BÀI TOÁN THỰC TIỄN 2017

## Chủ đề 3. LÃI SUẤT NGÂN HÀNG – TRẢ GÓP

**Câu 1.** (CHUYÊN BIÊN HÒA) Đầu năm 2016, anh Hùng có xe công nông trị giá 100 triệu đồng. Biết mỗi tháng thì xe công nông hao mòn mất 0,4% giá trị, đồng thời làm ra được 6 triệu đồng ( số tiền làm ra mỗi tháng là không đổi ). Hỏi sau một năm, tổng số tiền ( bao gồm giá tiền xe công nông và tổng số tiền anh Hùng làm ra ) anh Hùng có là bao nhiêu?

- A. 172 triệu.
- B. 72 triệu.
- C. 167,3042 triệu.
- D. 104,907 triệu.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn C

Sau một năm số tiền anh Hùng làm ra là  $6 \cdot 12 = 72$  triệu đồng

Sau một năm giá trị xe công nông còn  $100(1 - 0,4\%)^{12} \approx 95,3042$  triệu đồng

Vậy sau một năm số tiền anh Hùng có là 167,3042 triệu đồng

**Câu 2.** (CHUYÊN LAM SƠN) Một tỉnh A đưa ra nghị quyết về giảm biên chế cán bộ công chức, viên chức hưởng lương từ ngân sách nhà nước trong giai đoạn 2015–2021 (6 năm) là 10,6% so với số lượng hiện có năm 2015 theo phương thức “ra 2 vào 1” (tức là khi giảm đối tượng hưởng lương từ ngân sách nhà nước 2 người thì được tuyển mới 1 người). Giả sử tỉ lệ giảm và tuyển dụng mới hàng năm so với năm trước đó là như nhau. Tính tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm (làm tròn đến 0,01% ).

- A. 1,13% .
- B. 1,72% .
- C. 2,02% .
- D. 1,85% .

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D.

Gọi  $x$  ( $x \in \mathbb{N}^*$ ) là số cán bộ công chức tỉnh A năm 2015.

Gọi  $r$  là tỉ lệ giảm hàng năm.

Số người mất việc năm thứ nhất là:  $x \cdot r$ .

Số người còn lại sau năm thứ nhất là:  $x - x \cdot r = x(1 - r)$ .

Tương tự, số người mất việc sau năm thứ hai là:  $x(1 - r)r$ .

Số người còn lại sau năm thứ hai là:  $x(1-r) - x(1-r) \cdot r = x(1-r)^2$ .

$\Rightarrow$  Số người mất việc sau năm thứ sáu là:  $x(1-r)^5 \cdot r$ .

Tổng số người mất việc là:  $x \cdot r + x \cdot (1-r) \cdot r + x \cdot (1-r)^2 \cdot r + \dots + x \cdot (1-r)^5 \cdot r = 10,6\% x$

$$\Leftrightarrow r + (1-r)r + (1-r)^2r + \dots + (1-r)^5r = 0,106$$

$$\Leftrightarrow \frac{r[1-(1-r)^6]}{1-(1-r)} = 0,106 \Rightarrow r \approx 0,0185.$$

Vì tỉ lệ giảm hàng năm bằng với tỉ lệ tuyển dụng mới nên tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm là 1,85%.

**Câu 3. (CHUYÊN LÊ KHIẾT)** Bác B gửi tiết kiệm số tiền ban đầu là 50 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất 0,72% tháng. Sau một năm bác B rút cả vốn lẫn lãi và gửi theo kỳ hạn 6 tháng với lãi suất 0,78% tháng. Sau khi gửi đúng một kỳ hạn 6 tháng do gia đình có việc bác gửi thêm 3 tháng nữa thì phải rút tiền trước hạn cả gốc lẫn lãi được số tiền là 57.694.945,55 đồng (chưa làm tròn). Biết rằng khi rút tiền trước hạn lãi suất được tính theo lãi suất không kỳ hạn, tức tính theo hàng tháng. Trong số 3 tháng bác gửi thêm lãi suất là

- A. 0,55% .      B. 0,3% .      C. 0,4% .      D. 0,5% .

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn C**

Số tiền bác B rút ra sau năm đầu:  $T_1 = 50.000.000 * (1 + 0,0072 * 3)^4$

Số tiền bác B rút ra sau sáu tháng tiếp theo:  $T_2 = T_1 * (1 + 0,0078 * 6)$

Số tiền bác B rút ra sau ba tháng tiếp theo:  $T_3 = T_2 * (1 + r)^3 = 57.694.945,55$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{57.694.945,55}{T_2}} - 1 \approx 0,004 = 0,4\%$$

**Câu 4. (CHUYÊN NGOẠI NGỮ)** Một người muốn có 2 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách mỗi năm gửi vào ngân hàng số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 8% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng số tiền hàng năm là bao nhiêu (với giả thiết lãi suất không thay đổi), số tiền được làm tròn đến đơn vị nghìn đồng?

- A. 252.436.000 .      B. 272.631.000 .      C. 252.435.000 .      D. 272.630.000 .

**Hướng dẫn giải****Chọn A.**

Gọi  $T_n$  là số tiền vốn lăn lai sau  $n$  tháng,  $a$  là số tiền hàng tháng gửi vào ngân hàng và  $r(\%)$  là lãi suất kép. Ta có

$$T_1 = a \cdot (1+r),$$

$$T_2 = (a + T_1)(1+r) = (a + a(r+1))(1+r) = a(1+r) + a(1+r)^2$$

$$T_3 = (a + T_2)(1+r) = a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3$$

....

$$T_6 = a \left( (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^6 \right) = a \cdot S_6$$

$S_6$  là tổng cấp số nhân lùi vô hạn với dãy  $(u_n) = 1+r = 1,08; q = 1,08$ .

$$S_6 = \frac{u_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{1,08(1-1,08^6)}{1-1,08}$$

Theo đề ra  $a = \frac{T_6}{S_6} = \frac{2 \cdot 10^9}{\frac{1,08(1-1,08^6)}{1-1,08}} = 252435900,4$ . Quy tròn đến phần nghìn

**Câu 5. (SỞ NAM ĐỊNH)** Anh Nam vay tiền ngân hàng 1 tỷ đồng theo phương thức trả góp (chịu lãi số tiền chưa trả) với lãi suất 0,5%/ tháng. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh Nam trả 30 triệu đồng. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh Nam trả hết nợ?

- A. 35 tháng.      B. 36 tháng.      C. 37 tháng.      D. 38 tháng.

**Hướng dẫn giải****Chọn C**

Gọi  $a$  là số tiền vay,  $r$  là lãi,  $m$  là số tiền hàng tháng trả.

Số tiền nợ sau tháng thứ nhất là:  $N_1 = a(1+r) - m$ .

$$\begin{aligned} \text{Số tiền nợ sau tháng thứ hai là: } N_2 &= [a(1+r) - m] + [a(1+r) - m]r - m \\ &= a(1+r)^2 - m[(1+r) + 1] \end{aligned}$$

....

$$\text{Số tiền nợ sau } n \text{ tháng là: } N_n = a(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Sau  $n$  tháng anh Nam trả hết nợ:  $N_n = a(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0$ .

$$\Leftrightarrow 1000(1+0,005)^n - 30 \frac{(1+0,005)^n - 1}{0,0005} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 36,55$$

Vậy 37 tháng thì anh Nam trả hết nợ.

**Câu 6. (QUỐC HỌC HUẾ)** Bạn Nam là sinh viên của một trường Đại học, muốn vay tiền ngân hàng với lãi suất ưu đãi trang trải kinh phí học tập hàng năm. Đầu mỗi năm học, bạn ấy vay ngân hàng số tiền 10 triệu đồng với lãi suất là 4%. Tính số tiền mà Nam nợ ngân hàng sau 4 năm, biết rằng trong 4 năm đó, ngân hàng không thay đổi lãi suất (kết quả làm tròn đến nghìn đồng).

- A. 46794000 đồng. B. 44163000 đồng. C. 42465000 đồng. D. 41600000 đồng.

### Hướng dẫn giải

**Chọn B.**

Tổng số tiền bạn Nam vay (gốc và lãi) sau 4 năm là:

$$\begin{aligned} A &= 10^6(1+0,04)^4 + 10^6(1+0,04)^3 + 10^6(1+0,04)^2 + 10^6(1+0,04) \\ &= 10^6(1+0,04)[1 + (1+0,04) + (1+0,04)^2 + (1+0,04)^3] \\ &= 10^6(1+0,04) \cdot \frac{1 - (1+0,04)^4}{1 - (1+0,04)} = 44163256 \end{aligned}$$

Nên  $A = 44163000$  đồng

**Câu 7. (SỞ QUẢNG NAM)** Một kỹ sư được nhận lương khởi điểm là 8.000.000 đồng/tháng. Cứ sau hai năm lương mỗi tháng của kỹ sư đó được tăng thêm 10% so với mức lương hiện tại. Tính tổng số tiền  $T$  (đồng) kỹ sư đó nhận được sau 6 năm làm việc.

- A. 633.600.000 . B. 635.520.000 . C. 696.960.000 . D. 766.656.000 .

### Hướng dẫn giải

**Chọn B.**

Lương 2 năm đầu tiên của công nhân đó nhận được là  $T_1 = 8 \cdot 10^6 \cdot 24 = 192 \cdot 10^6$  (đồng)

Theo công thức tính lãi kép, lương 2 năm tiếp theo công nhân đó nhận được :  $T_2 = 24 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot (1+10\%)^1 = 212,2 \cdot 10^6$  (đồng)

Lương 2 năm cuối cùng công nhân đó nhận được :

$$T_3 = 24 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot (1+10\%)^2 = 232,32 \cdot 10^6 (\text{đồng})$$

Tổng số tiền  $T$  (đồng) kỹ sư đó nhận được sau 6 năm làm việc:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 635,520,000 (\text{đồng}).$$

**Câu 8. (VÕ NGUYÊN GIÁP)** Anh Hưng đi làm được lĩnh lương khởi điểm 4.000.000 đồng/tháng. Cứ 3 năm, lương của anh Hưng lại được tăng thêm 7% /1 tháng. Hỏi sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được tất cả bao nhiêu tiền? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).

**A.** 1.287.968.000 đồng

**B.** 1.931.953.000 đồng.

**C.** 2.575.937.000 đồng.

**D.** 3.219.921.000 đồng.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn C.

Gọi  $a$  là số tiền lương khởi điểm,  $r$  là lương được tăng thêm.

+ Số tiền lương trong ba năm đầu tiên:  $36a$

+ Số tiền lương trong ba năm kế tiếp:  $36[a + a.r] = 36a(1 + r)^1$

+ Số tiền lương trong ba năm kế tiếp:  $36a(1 + r)^2$

...

+ Số tiền lương trong ba năm cuối:  $36a(1 + r)^{11}$ .

Vậy sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được:

$$\left[1 + (1 + r)^1 + (1 + r)^2 + (1 + r)^3 + \dots + (1 + r)^{11}\right].a.36 = 2.575.936983 \approx 2.575.937.000 \text{ đồng.}$$

**Câu 9. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ LẦN 8)** Một người vay ngân hàng 200.000.000 đồng theo hình thức trả góp hàng tháng trong 48 tháng. Lãi suất ngân hàng cố định 0,8% / tháng. Mỗi tháng người đó phải trả (lần đầu tiên phải trả là 1 tháng sau khi vay) số tiền gốc là số tiền vay ban đầu chia cho 48 và số tiền lãi sinh ra từ số tiền gốc còn nợ ngân hàng. Tổng số tiền lãi người đó đã trả trong toàn bộ quá trình nợ là bao nhiêu?

**A.** 38.400.000 đồng. **B.** 10.451.777 đồng. **C.** 76.800.000 đồng. **D.** 39.200.000 đồng.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D.

Để thuận tiện trong trình bày, tất cả các số tiền dưới đây được tính theo đơn vị triệu đồng.

$$\text{Số tiền phải trả tháng thứ 1: } \frac{200}{48} + 200.0,8\% .$$

Số tiền phải trả tháng thứ 2:

$$\frac{200}{48} + \left(200 - \frac{200}{48}\right) \cdot 0,8\% = \frac{200}{48} + 47 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% .$$

Số tiền phải trả tháng thứ 3:

$$\frac{200}{48} + \left(200 - 2 \cdot \frac{200}{48}\right) \cdot 0,8\% = \frac{200}{48} + 46 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% .$$

Số tiền phải trả tháng thứ 48

$$\frac{200}{48} + \left(200 - 47 \cdot \frac{200}{48}\right) \cdot 0,8\% = \frac{200}{48} + 1 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% .$$

Suy ra tổng số tiền lãi phải trả là:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% + 2 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% + \dots + 47 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% + 200 \cdot 0,8\% \\ &= \frac{200}{48} \cdot 0,8\% (1+2+\dots+48) = \frac{200}{48} \cdot 0,8\% \cdot \frac{48(1+48)}{2} = 39,2 \end{aligned}$$

**Câu 10. (PHÚ XUYÊN )** Một người đem gửi tiền tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 1% một tháng. Biết rằng cứ sau mỗi quý (3 tháng) thì lãi sẽ được cộng dồn vào vốn gốc. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu năm thì người đó nhận lại được số tiền bao gồm cả vốn lẫn lãi gấp ba lần số tiền ban đầu

- A. 8.                    B. 9.                    C. 10.                    D. 11.

### Hướng dẫn giải

**Chọn C**

Gọi  $a$  là số tiền người đó gửi ban đầu

Số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi sau  $N$  năm là  $T = a(1+0,03)^{\frac{N}{4}}$

$$\frac{T}{a} = 3 \Leftrightarrow (1+0,03)^{\frac{N}{4}} = 3 \Leftrightarrow 4N \cdot \ln 1,03 = \ln 3 \Rightarrow N = \frac{\ln 3}{4 \ln 1,03} \approx 9,29$$

**Câu 11. (SỞ HẢI PHÒNG )** Một người vay ngân hàng một tỷ đồng theo phương thức trả góp để mua nhà. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất người đó trả 40 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,65% mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu người đó trả hết số tiền trên?

- A. 29 tháng.            B. 27 tháng.            C. 26 tháng.            D. 28 tháng.

### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

Gọi  $A$  là số tiền vay,  $a$  là số tiền gửi hàng tháng  $r$  là lãi suất mỗi tháng.

Đến cuối tháng thứ  $n$  thì số tiền còn nợ là:

$$T = A(1+r)^n - a \left[ (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + 1 \right] = A(1+r)^n - \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}$$

Hết nợ đồng nghĩa  $T = 0 \Leftrightarrow A(1+r)^n - \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a - Ar}{r}(1+r)^n = \frac{a}{r} \Leftrightarrow n = \log_{1+r} \frac{a}{a - Ar}$$

Áp dụng với  $A = 1$  (tỷ),  $a = 0,04$  (tỷ),  $r = 0,0065$  ta được  $n \approx 27,37$ .

Vậy cần trả 28 tháng.

**Câu 12. (TT ĐIỆU HIỀN)** Một người gửi ngân hàng 100 triệu theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,5% một tháng. Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu?

- A.** 46 tháng.      **B.** 45 tháng.      **C.** 44 tháng.      **D.** 47 tháng.

**Hướng dẫn giải:**

Chọn B.

Sau 1 tháng, người đó nhận được  $100 + 100 \cdot 0,005$  (triệu đồng) = 100.1,005¹ triệu đồng.

Sau 2 tháng, người đó nhận được:

$$100 \cdot 1,005 + 100 \cdot 1,005 \cdot 0,005 = 100 \cdot 1,005(1 + 0,005) = 100 \cdot (1,005)^2 \text{ triệu đồng}$$

Sau  $n$  tháng, người đó nhận được:  $100 \cdot (1,005)^n$  triệu đồng.

Theo đề:  $100 \cdot (1,005)^n > 125 \Leftrightarrow n > \log_{1,005} 1,25 = 44,7$  tháng.

Vậy sau 45 tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng.

**Câu 13. (TT ĐIỆU HIỀN)** Năm 2014, một người đã tiết kiệm được  $x$  triệu đồng và dùng số tiền đó để mua nhà nhưng trên thực tế người đó phải cần 1,55x triệu đồng. Người đó quyết định gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất là 6,9% / năm theo hình thức lãi kép và không rút trước kỳ hạn. Hỏi năm nào người đó mua được căn nhà đó (giả sử rằng giá bán căn nhà đó không thay đổi).

- A.** Năm 2019.      **B.** Năm 2020.      **C.** Năm 2021.      **D.** Năm 2022.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C**

Số tiền người gửi tiết kiệm sau  $n$  năm là  $x(1+6,9\%)^n$

Ta cần tìm  $n$  để  $x(1+6,9\%)^n = 1,55x \Leftrightarrow (1+6,9\%)^n = 1,55 \Leftrightarrow n \approx 6,56\dots$

Do đó, người gửi tiết kiệm cần gửi trọn 7 kỳ hạn, tức là 7 năm.

Vậy đến năm 2021 người đó sẽ có đủ tiền cần thiết.

**Câu 14. (CHUYÊN TUYÊN QUANG)** Ông A vay ngân hàng 220 triệu đồng và trả góp trong vòng 1 năm với lãi suất 1,15% mỗi tháng. Sau đúng 1 tháng kể từ ngày vay, ông sẽ hoàn nợ cho ngân hàng với số tiền hoàn nợ mỗi tháng là như nhau, hỏi mỗi tháng ông A sẽ phải trả bao nhiêu tiền cho ngân hàng, biết lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

- A.  $\frac{220.(1,0115)^{12} \cdot 0,0115}{(1,0115)^{12} - 1}$  (triệu đồng).      B.  $\frac{220.(1,0115)^{12}}{(1,0115)^{12} - 1}$  (triệu đồng).
- C.  $\frac{55.(1,0115)^{12} \cdot 0,0115}{3}$  (triệu đồng).      D.  $\frac{220.(1,0115)^{12}}{3}$  (triệu đồng).

**Hướng dẫn giải.****Chọn A.**

$$\text{Mỗi tháng ông A sẽ phải trả bao nhiêu tiền cho ngân hàng } x = \frac{a(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$$

$$= \frac{220(1+1,15\%)^{12} \cdot 1,15\%}{(1+1,15\%)^{12} - 1} = \frac{220.(1,0115)^{12} \cdot 0,0115}{(1,0115)^{12} - 1} \text{ với } a = 200, r = 1,15\%, n = 12$$

Chứng minh công thức tổng quát: **Trả góp ngân hàng hoặc mua đồ trả góp.**

Ta xét bài toán tổng quát sau: Một người vay số tiền là  $a$  đồng, kì hạn 1 tháng với lãi suất cho số tiền chưa trả là  $r\%$  một tháng (*hình thức này gọi là tính lãi trên dư nợ giảm dần nghĩa là tính lãi trên số tiền mà người vay còn nợ ở thời điểm hiện tại*), số tháng vay là  $n$  tháng, sau đúng một tháng kể từ ngày vay, người này bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau, số tiền đều đặn trả vào ngân hàng là  $x$  đồng. Tìm công thức tính  $x$ ? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian vay.

**Chứng minh**

Gọi  $P_n$  là số tiền còn lại sau tháng thứ  $n$ .

**Sau tháng thứ nhất** số tiền gốc và lãi là:  $a + ar = a(1 + r) = ad$  với  $d = 1 + r$

Trả  $x$  đồng thì số tiền còn lại sau **tháng thứ nhất** là:  $P_1 = ad - x = ad - x \frac{d-1}{d-1}$

**Sau tháng thứ hai** số tiền gốc và lãi là:  $ad - x + (ad - x)r = (ad - x)(1 + r) = (ad - x)d$

Trả  $x$  đồng thì số tiền còn lại sau **tháng thứ 2** là:

$$P_2 = (ad - x)d - x = ad^2 - xd - x = ad^2 - x(d+1) = ad^2 - x \frac{d^2 - 1}{d-1}$$

**Sau tháng thứ ba** số tiền gốc và lãi là:

$$ad^2 - x(d+1) + [ad^2 - x(d+1)]r = [ad^2 - x(d+1)](1+r) = [ad^2 - x(d+1)]d$$

Trả  $x$  đồng thì số tiền còn lại sau **tháng thứ 3** là:

$$P_3 = [ad^2 - x(d+1)]d - x = ad^3 - xd^2 - xd - x = ad^3 - x(d^2 + d + 1) = ad^3 - x \frac{d^3 - 1}{d-1}$$

.....

Số tiền còn lại sau **tháng thứ  $n$**  là:  $P_n = ad^n - x \frac{d^n - 1}{d-1} \Leftrightarrow P_n = a(1+r)^n - x \frac{(1+r)^n - 1}{r}$  (5a)

với  $[d = 1 + r]$

Do sau tháng thứ  $n$  người vay tiền đã trả hết số tiền đã vay ta có

$$P_n = 0 \Leftrightarrow ad^n - x \frac{d^n - 1}{d-1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{ad^n(d-1)}{d^n - 1} \Leftrightarrow x = \frac{a(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$$

**Câu 15. (QUỐC HỌC QUY NHƠN)** Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất 0,5% một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó và tiền lãi của tháng sau đó). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng?

- A. 47 tháng.      B. 46 tháng.      C. 45 tháng.      D. 44 tháng.

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

- Số tiền cả vốn lẫn lãi người gửi có sau  $n$  tháng là  $S = 100(1 + 0,005)^n = 100 \cdot 1,005^n$  (triệu đồng)  $\Rightarrow 1,005^n = \frac{S}{100} \Rightarrow n = \log_{1,005} \frac{S}{100}$ .

- Để có số tiền  $S = 125$  (triệu đồng) thì phải sau thời gian

$$n = \log_{1,005} \frac{S}{100} = \log_{1,005} \frac{125}{100} \approx 44,74 \text{ (tháng)}$$

- Vậy: sau ít nhất 45 tháng người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng.

**Câu 16. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN)** Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất là 12% một năm. Sau  $n$  năm ông Nam rút toàn bộ số tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm số nguyên dương  $n$  nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi)

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

Gọi  $T_n$  là tiền vốn lấp lãi sau  $t$  tháng,  $a$  là số tiền ban đầu

Tháng 1 ( $t=1$ ):  $T_1 = a(1+r)$

Tháng 2 ( $t=2$ ):  $T_2 = a(1+r)^2$

.....

Tháng  $n$  ( $t=n$ ):  $T_n = a(1+r)^t$

$$T_n = a(1+r)^t \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{T_n}{a}}{\ln(1+r)} = \frac{\ln \frac{140}{100}}{\ln(1+1\%)} \approx 33,815 \text{ (tháng)}$$

Để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu thì  $n > \frac{t}{12} \approx 2,818$

Vậy  $n=3$ .

**Câu 17. (Nguyễn Hữu Quang)** Tỉ lệ lạm phát hàng năm của một quốc gia trong 10 năm là 5%. Năm 2012, chi phí tiền xăng cho một ô tô là 24,95 USD. Hỏi năm 2017, chi phí tiền xăng cho ô tô đó là bao nhiêu?

A. 33,44 USD      B. 31,84 USD      C. 32,44 USD      D. 31,19 USD.

**Câu 18. (PHAN BỘI CHÂU)** Ông Minh gửi tiết kiệm vào ngân hàng số tiền tỷ đồng sau 1 năm với lãi suất 0,7% một tháng, theo phương thức lãi đơn. Hỏi sau 1 năm ông Minh thu được số tiền cả gốc và lãi được tính theo công thức nào?

A.  $10^9 + 12 \cdot 10^8 \cdot 7\%$ .      B.  $12 \cdot 10^8 \cdot 7\%$ .      C.  $10^9 (1 + 7 \cdot 10^{-1}\%)^{12}$ . D.

$12 \cdot 10^9 (1 + 7 \cdot 10^{-1}\%)$ .

**Câu 19. (PHÙ CÁT)** Để đầu tư cho con, một người đã gửi tiết kiệm 500 triệu đồng với lãi suất 7.5% / năm theo thể thức lãi kép. Biết rằng lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi. Số tiền người đó nhận được sau 18 năm là:

- A. 1.837.902.044.      B. 1.637.902.044.      C. 2.837.902.044.      D. 3.837.902.044.

**Câu 20. (TAM QUAN)** Một người đầu tư vào 25 tờ trái phiếu mỗi tờ có mệnh giá là 2 triệu đồng với lãi suất  $r\%/\text{nam}$  trong vòng 5 năm. Sau 5 năm người đó có được số tiền cả gốc lẫn lãi là gần 73,5 triệu đồng. Hỏi lãi suất  $r$  của tờ trái phiếu đó là bao nhiêu phần trăm một năm.

- A. 7.      B. 8.      C. 9.      D. 10.

**Câu 21. (TUY PHƯỚC)** Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 5% một quý với

hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 50 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Tính tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi?

- A.  $\approx 176,676$  triệu đồng.      B.  $\approx 177,676$  triệu đồng.

- C.  $\approx 178,676$  triệu đồng.      D.  $\approx 179,676$  triệu đồng.

**Câu 22. (VÂN CANH)** Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4% năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn, hỏi sau bao

nhiều tháng người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu (lấy giá trị quy tròn) ?

- A. 96.      B. 97.      C. 98.      D. 99.

**Câu 23. (SỞ HẢI PHÒNG)** Một bác nông dân vừa bán một con trâu được số tiền là 20.000.000 (đồng). Do chưa cần dùng đến số tiền nên bác nông dân mang toàn bộ số tiền đó đi gửi tiết kiệm ngân hàng loại kỳ hạn 6 tháng với lãi suất kép là 8.5% một năm. Hỏi sau 5 năm 8 tháng bác nông dân nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi (làm tròn đến hàng đơn vị)? Biết rằng bác nông dân đó không rút vốn cũng như lãi trong tất cả các định kì trước và nếu rút trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo loại không kì hạn 0.01% một ngày (1 tháng tính 30 ngày).

- A. 30803311      B. 31803311      C. 32833110      D. 33083311

**Câu 24. (NINH GIANG)** Ông B đến siêu thị điện máy để mua một cái laptop với giá 16,5 triệu đồng theo hình thức trả góp với lãi suất 1,5% /tháng. Để mua trả góp ông B phải trả trước 20% số tiền, số tiền còn lại ông sẽ trả dần trong thời gian 8 tháng kể từ ngày mua, mỗi lần trả cách nhau 1 tháng. Số tiền mỗi tháng ông B phải trả là như nhau và tiền lãi được tính theo nợ gốc còn lại ở cuối mỗi tháng. Hỏi, nếu ông B mua theo hình thức trả góp như trên thì số tiền phải trả nhiều hơn so với giá

niêm yết là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không đổi trong thời gian ông B hoàn nợ. (làm tròn đến chữ số hàng nghìn)

- A.** 1.628.000 đồng. **B.** 2.125.000 đồng. **C.** 907.000 đồng. **D.** 906.000 đồng.

**Câu 25. (HÀ HUY TẬP)** Một công nhân thử việc (lương 4.000.000đ/tháng), người đó muốn tiết kiệm tiền để mua xe máy bằng cách mỗi tháng người đó trích một khoản tiền lương nhất định gửi vào ngân hàng. Người đó quyết định sẽ gửi tiết kiệm trong 20 tháng theo hình thức lãi kép, với lãi suất 0,7%/tháng. Giả sử người đó cần 25.000.000đ vừa đủ để mua xe máy (với lãi suất không thay đổi trong quá trình gửi). Hỏi số tiền người đó gửi vào ngân hàng mỗi tháng gần bằng bao nhiêu? (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng).

- A.** 1.226.238đ. **B.** 1.168.904đ. **C.** 1.234.822đ. **D.** 1.160.778đ.

**Câu 26. (HẢI HẬU)** Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1% / tháng. Gửi được hai năm sáu tháng người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Số tiền người đó rút được là

- A.**  $101 \cdot [(1,01)^{30} - 1]$  (triệu đồng). **B.**  $100 \cdot [(1,01)^{30} - 1]$  (triệu đồng).  
**C.**  $101 \cdot [(1,01)^{29} - 1]$  (triệu đồng). **D.**  $100 \cdot [(1,01)^{29} - 1]$  (triệu đồng).

**Câu 27. (CHUYÊN VĨNH PHÚC)** Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1% trên tháng. Gửi được hai năm 3 tháng người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Số tiền người đó được rút là

- A.**  $101 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$  triệu đồng. **B.**  $101 \cdot [(1,01)^{26} - 1]$  triệu đồng.  
**C.**  $100 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$  triệu đồng. **D.**  $100 \cdot [(1,01)^{26} - 1]$  triệu đồng.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Đáp án A.

Phương pháp: Quy bài toán về tính tổng cấp số nhân, rồi áp dụng công thức tính tổng cấp số nhân:

Dãy  $U_1; U_2; U_3; \dots; U_n$  được gọi là 1 CSN có công bội q nếu:  $U_k = U_{k-1}q$ .

Tổng n số hạng đầu tiên:  $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ .

+ Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân.

Cách giải: + Gọi số tiền người đó gửi hàng tháng là  $a = 1$  triệu.

+ Đầu tháng 1: người đó có a.

Cuối tháng 1: người đó có  $a(1+0,01) = a \cdot 1,01$ .

+ Đầu tháng 2 người đó có:  $a + a \cdot 1,01$ .

Cuối tháng 2 người đó có:  $1,01(a + a \cdot 1,01) = a(1,01 + 1,01^2)$ .

+ Đầu tháng 3 người đó có:  $a(1 + 1,01 + 1,01^2)$ .

Cuối tháng 3 người đó có:  $a(1 + 1,01 + 1,01^2) \cdot 1,01 = a(1 + 1,01^2 + 1,01^3)$ .

....

+ Đến cuối tháng thứ 27 người đó có:  $a(1 + 1,01 + 1,01^2 + \dots + 1,01^{27})$ .

Ta cần tính tổng:  $a(1 + 1,01 + 1,01^2 + \dots + 1,01^{27})$ .

Áp dụng công thức cấp số nhân trên với công bội là 1,01 ta được  $\frac{1 - 1,01^{27}}{1 - 0,01} = 100 \cdot (1,01^{27} - 1)$  triệu đồng.

**Câu 28. (CHUYÊN VĨNH PHÚC)** Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 2 triệu đồng, với lãi suất kép 2% trên tháng. Gửi được ba năm bốn tháng người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Số tiền người đó rút được là

A.  $\frac{100}{103} \cdot [(2,02)^{39} - 1]$  (triệu đồng).      B.  $\frac{102}{103} \cdot [(2,02)^{40} - 1]$  (triệu đồng).

C.  $\frac{100}{103} \cdot [(2,02)^{40} - 1]$  (triệu đồng).      D.  $\frac{102}{103} \cdot [(2,02)^{39} - 1]$  (triệu đồng).

**Câu 29. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI)** Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền  $T$  theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Biết sau 15 tháng người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền  $T$  gần với số tiền nào nhất trong các số sau?

A. 535.000.      B. 635.000.      C. 613.000.      D. 643.000.

**Câu 30. (LƯƠNG ĐẮC BẰNG)** Một người gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được số tiền lãi là

A. 70,128 triệu đồng.      B. 50,7 triệu đồng.      C. 20,128 triệu đồng.      D. 3,5 triệu đồng.

**Câu 31. (QUẢNG XƯƠNG )** Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học A nhưng vì do không đủ nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm

vay 3.000.000 đồng để nộp học phí với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học bạn Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền  $T$  (không đổi) cùng với lãi suất 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. Số tiền  $T$  hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là:

- A.** 232518 đồng .    **B.** 309604 đồng.    **C.** 215456 đồng.    **D.** 232289 đồng.

### Chọn D

Vậy sau 4 năm bạn Hùng nợ ngân hàng số tiền là:

$$s = 3000000 \left[ (1+3\%)^4 + (1+3\%)^3 + (1+3\%)^2 + (1+3\%) \right] = 12927407,43$$

Lúc này ta coi như bạn Hùng nợ ngân hàng khoản tiền ban đầu là 12.927.407,43 đồng,

số tiền này bắt đầu được tính lãi và được trả góp trong 5 năm.

Ta có công thức:

$$\Rightarrow T = \frac{N(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1} = \frac{12927407,4(1+0,0025)^{60} \cdot 0,0025}{(1+0,0025)^{60} - 1} \approx 232289$$

**Câu 32. (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIÊU)** Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 6,5% / năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi khoảng bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

- A.** 11 năm.    **B.** 9 năm.    **C.** 8 năm.    **D.** 12 năm.

### Chọn A.

Gọi là  $x$  số tiền gửi ban đầu.

Giả sử sau  $n$  năm số tiền vốn và lãi là  $2x$ .

Ta có  $2x \approx x \cdot (1,065)^n \Leftrightarrow (1,065)^n \approx 2 \Leftrightarrow n \approx \log_2 1,065 \Leftrightarrow n \approx 11$ .

**Câu 33. (TRUNG GIÃ)** Ông X gửi tiết kiệm 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất không đổi 0,5% một tháng. Do nhu cầu cần chi tiêu, cứ mỗi tháng sau đó, ông rút ra 1 triệu đồng từ số tiền của mình. Hỏi cứ như vậy thì tháng cuối cùng, ông X rút nốt được bao nhiêu tiền?

- A.** 4879 đồng.    **B.** 975781 đồng.    **C.** 4903 đồng.    **D.** 970926 đồng.

**Câu 34. (CHUYÊN ĐHSP)** Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó và tiền lãi của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu .

- A.** 45 tháng.    **B.** 47 tháng.    **C.** 44 tháng.    **D.** 46 tháng .

**HƯỚNG DẪN GIẢI****Chọn A.**

Áp dụng công thức lãi kép gửi 1 lần:  $N = A(1+r)^n$ , Với  $A = 100.10^6$  và  $r = 0,5\%$ .

Theo đề bài ta tìm n bé nhất sao cho:  $10^8 (1+0,5\%)^n > 125.10^6$

$$\Leftrightarrow (1+0,5\%)^n > \frac{5}{4} \Leftrightarrow n > \log_{\frac{201}{200}} \frac{5}{4} \approx 44,74$$

**Câu 35. (LƯƠNG TÂM)** Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng trong thời gian 10 năm với lãi suất 5% năm. Hỏi người đó nhận được số tiền nhiều hơn hay ít hơn bao nhiêu nếu ngân hàng trả lãi suất  $\frac{5}{12}\%$  tháng ?

- A.** Nhiều hơn.      **B.** Ít hơn.      **C.** Không thay đổi. **D.** Không tính được.

**Giải**

Gọi a là tiền gửi tiết kiệm ban đầu, r là lãi suất, sau một tháng sẽ là:  $a(1 + r)$

Sau n tháng số tiền cả gốc lãi là:  $T = a(1 + r)^n$

Số tiền sau 10 năm với lãi suất 5% một năm :

$$10\ 000\ 000(1+5\%)^{10} = 16\ 288\ 946,27 \text{ đ}$$

Số tiền nhận sau 10 năm (120 tháng) với lãi suất  $\frac{5}{12}\%$  tháng :

$$10\ 000\ 000 \left(1 + \frac{5}{12}\%\right)^{120} = 16470094,98 \text{ đ}$$

Vậy số tiền gửi theo lãi suất  $\frac{5}{12}\%$  tháng nhiều hơn : 1 811 486,7069 đ. **Chọn (A)**

**Câu 36. (ĐOÀN THƯỢNG)** Ông A gửi 200 triệu đồng vào ngân hàng Vietinbank. Lãi suất hàng năm không thay đổi là 7,5% /năm và được tính theo kì hạn là một năm. Nếu ông A hàng năm không rút lãi thì sau 5 năm số tiền ông A nhận được cả vốn và tiền lãi là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng ngàn)

- A.** 287126000 đồng    **B.** 267094000 đồng    **C.** 248459000 đồng    **D.** 231125000 đồng

**Câu 37. (TRẦN HƯNG ĐẠO)** Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng A với số tiền là 100 triệu đồng với lãi suất mỗi quý (3 tháng) là 2,1%. Số tiền lãi được cộng vào vốn sau mỗi quý. Sau 2 năm người đó vẫn tiếp tục gửi tiết kiệm số tiền thu được từ trên nhưng với lãi suất 1,1% mỗi tháng. Số tiền lãi được cộng vào vốn sau mỗi tháng. Hỏi sau 3

năm kể từ ngày gửi tiết kiệm vào ngân hàng A người đó thu được số tiền gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A.** 134,65 triệu đồng. **B.** 130,1 triệu đồng. **C.** 156,25 triệu đồng. **D.** 140,2 triệu đồng.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn A.

Ta có 2 năm có 8 quý.

Tổng số tiền người đó thu được sau 3 năm:  $100000000 \times (1,021)^8 \times (1,011)^{12} \approx 134654169$  đồng.

**Câu 38. (BẮC YÊN THÀNH)** Ông A gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7% trên năm, biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. sau thời gian 10 năm nếu không rút lãi lần nào thì số tiền mà ông A nhận được tính cả gốc lẫn lãi là

- A.**  $10^8 \cdot (1+0,07)^{10}$ .    **B.**  $10^8 \cdot 0,07^{10}$ .    **C.**  $10^8 \cdot (1+0,7)^{10}$ .    **D.**  $10^8 \cdot (1+0,007)^{10}$ .

#### Chọn A.

Theo công thức lãi kép  $C = A(1+r)^N$  với giả thiết  $A = 100.000.000 = 10^8$ ;  $r = 7\% = 0,07$  và  $N = 10$ .

Vậy số tiền nhận được ...  $10^8 \cdot (1+0,07)^{10}$ , nên chọn A.

**Câu 39. (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG)** Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một năm với lãi suất là 12% một năm. Sau  $n$  năm ông Nam rút toàn bộ tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm  $n$  nguyên dương nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được hơn 40 triệu đồng. (Giả sử rằng lãi suất hàng năm không thay đổi).

- A.** 5.    **B.** 2.    **C.** 4.    **D.** 3.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D

Số tiền thu được cả gốc lẫn lãi sau  $n$  năm là

$$C = 100(1+0,12)^n$$

Số tiền lãi thu được sau  $n$  năm là

$$L = 100(1+0,12)^n - 100$$

$$L > 40 \Leftrightarrow 100(1+0,12)^n - 100 > 40 \Leftrightarrow 1,12^n > \frac{7}{5} \Leftrightarrow n > \log_{1,12} \frac{7}{5} \approx 2,97.$$

**Câu 40. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU)** Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 1 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm thì ông An được tăng lương 40% .

Hỏi sau tròn 20 năm đi làm tổng tiền lương ông An nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)?

- A. 726,74 triệu.      B. 71674 triệu.      C. 858,72 triệu.      D. 768,37 triệu.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Mức lương 3 năm đầu: 1 triệu	Tổng lương 3 năm đầu: $36 \cdot 1$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^2$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^2$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^3$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^3$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^4$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^4$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^5$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^5$
Mức lương 2 năm tiếp theo: $1 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^6$	Tổng lương 2 năm tiếp theo: $24 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^6$

Tổng lương sau tròn 20 năm là

$$\begin{aligned} S &= 36 \left[ 1 + \left(1 + \frac{2}{5}\right) + \left(1 + \frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{2}{5}\right)^5 \right] + 24 \left(1 + \frac{2}{5}\right)^6 \\ &= 36 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{2}{5}\right)^6}{1 - \left(1 + \frac{2}{5}\right)} + 24 \left(1 + \frac{2}{5}\right)^6 \approx 768,37 \end{aligned}$$

**Câu 41. (LÝ TỰ TRỌNG)** Giả sử vào cuối năm thì một đơn vị tiền tệ mất 10% giá trị so với đầu năm. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất sao cho sau  $n$  năm, đơn vị tiền tệ sẽ mất đi ít nhất 90% giá trị của nó?

- A. 16      B. 18.      C. 20.      D. 22.

**Chọn D.**

Gọi  $x (x > 0)$  là giá trị tiền tệ lúc ban đầu. Theo đề bài thì sau 1 năm, giá trị tiền tệ sẽ còn  $0,9x$ . Cuối năm 1 còn  $0,9x$

Cuối năm 2 còn  $0,9 \cdot 0,9x = 0,9^2 x$

...

Cuối năm  $n$  còn  $0,9^n x$

Ycbt  $\Leftrightarrow 0,9^n x = 0,1x \Rightarrow n \approx 21,58$ . Vì  $n$  nguyên dương nên  $n = 22$ .

**Câu 42. (TRẦN HƯNG ĐẠO)** Bạn Hùng trúng tuyển vào đại học nhưng vì không đủ nộp tiền học phí Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm 3.000.000 đồng để nộp học với lãi suất 3% /năm. Sau khi tốt nghiệp đại học Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,25% /tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T mà Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến hàng đơn vị) là

- A. 232518 đồng.      B. 309604 đồng.      C. 215456 đồng.      D. 232289 đồng.

### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

+ Tính tổng số tiền mà Hùng nợ sau 4 năm học:

$$\text{Sau 1 năm số tiền Hùng nợ là: } 3 + 3r = 3(1+r)$$

$$\text{Sau 2 năm số tiền Hùng nợ là: } 3(1+r)^2 + 3(1+r)$$

Tương tự: Sau 4 năm số tiền Hùng nợ là:

$$3(1+r)^4 + 3(1+r)^3 + 3(1+r)^2 + 3(1+r) = 12927407,43 = A$$

+ Tính số tiền T mà Hùng phải trả trong 1 tháng:

$$\text{Sau 1 tháng số tiền còn nợ là: } A + Ar - T = A(1+r) - T.$$

$$\text{Sau 2 tháng số tiền còn nợ là: } A(1+r) - T + (A(1+r) - T).r - T = A(1+r)^2 - T(1+r) - T$$

Tương tự sau 60 tháng số tiền còn nợ là:  

$$A(1+r)^{60} - T(1+r)^{59} - T(1+r)^{58} - \dots - T(1+r) - T.$$

Hùng trả hết nợ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & A(1+r)^{60} - T(1+r)^{59} - T(1+r)^{58} - \dots - T(1+r) - T = 0 \\ \Leftrightarrow & A(1+r)^{60} - T \left[ (1+r)^{59} + (1+r)^{58} + \dots + (1+r) + 1 \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & A(1+r)^{60} - T \frac{(1+r)^{60} - 1}{1+r - 1} = 0 \\ \Leftrightarrow & A(1+r)^{60} - T \frac{(1+r)^{60} - 1}{r} = 0 \\ \Leftrightarrow & T = \frac{Ar(1+r)^{60}}{(1+r)^{60} - 1} \\ \Leftrightarrow & T \approx 232.289 \end{aligned}$$

**Câu 43. (SỞ HÀ NỘI)** Ông Việt dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu  $x$  (triệu đồng,  $x \in \mathbb{N}$ ) ông Việt gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy trị giá 30 triệu đồng.

- A. 140 triệu đồng. B. 154 triệu đồng. C. 145 triệu đồng. D. 150 triệu đồng.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn C.

Áp dụng công thức lãi kép :  $P_n = x(1+r)^n$ , trong đó

$P_n$  là tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) sau  $n$  kì.

$x$  là vốn gốc.

$r$  là lãi suất mỗi kì.

Ta cũng tính được số tiền lãi thu được sau  $n$  kì là :

$$P_n - x = x(1+r)^n - x = x[(1+r)^n - 1] \quad (*)$$

Áp dụng công thức (\*) với  $n = 3, r = 6,5\%$ , số tiền lãi là 30 triệu đồng.

$$\text{Ta được } 30 = x[(1+6,5\%)^3 - 1] \Rightarrow x \approx 144,27$$

Số tiền tối thiểu là 145 triệu đồng.

**Câu 44. (TT ĐIỆU HIỀN)** Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 200 triệu đồng, với lãi suất 12% năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: sau một tháng bắt đầu từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 10 tháng kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, tổng số tiền lãi  $m$  mà ông A phải trả cho ngân hàng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong suốt thời gian ông A hoàn nợ.

A.  $m = \frac{20 \cdot (1,01)^{10}}{(1,01)^{10} - 1}$  (triệu đồng).

B.  $m = \frac{200 \cdot (1,12)^{10}}{10}$  (triệu đồng).

C.  $m = \frac{20 \cdot (1,01)^{10}}{(1,01)^{10} - 1} - 200$  (triệu đồng).

D.  $m = \frac{10 \cdot (1,12)^{10}}{(1,12)^{10} - 1} - 200$  (triệu đồng).

### Hướng dẫn giải

#### Chọn C.

Đặt  $T = 200$  triệu,  $M$  là số tiền phải trả hàng tháng mà ông A trả cho ngân hàng

Lãi suất 12% trên năm tương ứng 1% trên tháng, tức là  $r = 0,01$ .

Số tiền gốc sau 1 tháng là:  $T + T \cdot r - M = T(1+r) - M$

Số tiền gốc sau 2 tháng là:  $T(1+r)^2 - M[(1+r)+1]$

.....

Số tiền gốc sau 10 tháng là:  $T(1+r)^{10} - M[(1+r)^9 + (1+r)^8 + \dots + (1+r)+1] = 0$

$$\text{Do đó } M = \frac{T(1+r)^{10}}{(1+r)^9 + (1+r)^8 + \dots + (1+r)+1}$$

$$= \frac{T \cdot (1+r)^{10} \cdot r}{(1+r)^{10} - 1} = \frac{200 \cdot (1+0,01)^{10} \cdot 0,01}{(1+0,01)^{10} - 1} = \frac{2 \cdot (1,01)^{10}}{(1,01)^{10} - 1} \text{ (triệu đồng)}$$

$\Rightarrow$  Tổng số tiền lãi phải trả cho ngân hàng là:  $m = 10M = \frac{20 \cdot (1,01)^{10}}{(1,01)^{10} - 1} - 200$  (triệu đồng)

**Câu 45. (TT ĐIỀU HIỀN)** Thầy Đông gửi 5 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,7% /tháng. Chưa đầy một năm thì lãi suất tăng lên thành 1,15% /tháng. Tiếp theo, sáu tháng sau lãi suất chỉ còn 0,9% /tháng. Thầy Đông tiếp tục gửi thêm một số tháng nữa rồi rút cả vốn lẫn lãi được 5787710,707 đồng. Hỏi thầy Đông đã gửi tổng thời gian bao nhiêu tháng?

- A. 18 tháng.      B. 17 tháng.      C. 16 tháng.      D. 15 tháng.

### Hướng dẫn giải

Gọi  $a$  là số tháng mà thầy Đông gửi tiền với lãi suất 0,7%.

Gọi  $b$  là số tháng mà thầy Đông gửi tiền với lãi suất 0,9%.

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$5000000(1+0,7\%)^a \cdot (1+1,15\%)^b \cdot (1+0,9\%)^b = 5787710,707 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow (1+0,7\%)^a \cdot (1+0,9\%)^b = 1,080790424$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < a < \log_{1,007} 1,080790424 \\ 0 < b < \log_{1,009} 1,080790424 \\ a, b \in N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{1,009} 1,080790424 < a+b < \log_{1,007} 1,080790424 \Rightarrow 9 \leq a+b \leq 11$$

Với  $a+b=9$ , thử  $a,b \in N$  ta thấy (\*) không thoả mãn.

Với  $a+b=10$ , thử  $a,b \in N$  ta được  $a=6; b=4$  thoả mãn (\*).

Với  $a+b=11$ , thử  $a,b \in N$  ta thấy (\*) không thoả mãn.

Vậy thầy Đông gợi ý tổng thời gian là 16 tháng.

**Chọn đáp án C.**

**Câu 46. (AN LÃO)** Ngày 01 tháng 01 năm 2017, ông An đem 800 triệu đồng gửi vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01 tháng 01 năm 2018, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi

**A.**  $800.(1,005)^{11} - 72$  (triệu đồng).      **B.**  $1200 - 400.(1,005)^{12}$  (triệu đồng).

**C.**  $800.(1,005)^{12} - 72$  (triệu đồng).      **D.**  $1200 - 400.(1,005)^{11}$  (triệu đồng).

### Hướng dẫn giải.

**Chọn B.**

Từ ngày 01 tháng 01 năm 2017 đến ngày 01 tháng 01 năm 2018, ông An gửi được tròn 12 tháng.

Gọi  $a$  là số tiền ban đầu,  $r$  là lãi suất hàng tháng,  $n$  là số tháng gửi,  $x$  là số tiền rút ra hàng tháng,  $P_n$  là số tiền còn lại sau  $n$  tháng.

Khi gửi được tròn 1 tháng, sau khi rút số tiền là  $x$ , số tiền còn lại là:

$$P_1 = a + ar - x = a(r+1) - x = ad - x, d = r + 1$$

Khi gửi được tròn 2 tháng, sau khi rút số tiền là  $x$ , số tiền còn lại là:

$$P_2 = P_1 + P_1 \cdot r - x = ad^2 - x(d+1) = ad^2 - x \cdot \frac{d^2 - 1}{d - 1}.$$

Khi gửi được tròn 3 tháng, sau khi rút số tiền là  $x$ , số tiền còn lại là:

$$P_3 = P_2 + P_2 \cdot r - x = ad^3 - x(d^2 + d + 1) = ad^3 - x \cdot \frac{d^3 - 1}{d - 1}$$

Tương tự, khi gửi được tròn  $n$  tháng, sau khi rút số tiền là  $x$ , số tiền còn lại là:

$$P_n = ad^n - x \cdot \frac{d^n - 1}{d - 1}.$$

Áp dụng với  $a = 800$  triệu,  $r = 0,5\%$ ,  $n = 12$ ,  $x = 6$  triệu, số tiền còn lại của ông An là:

$$P_{12} = 800 \cdot (1,005)^{12} - 6 \cdot \frac{1,005^{12} - 1}{0,005} = 800 \cdot (1,005)^{12} - 1200 \cdot (1,005^{12} - 1) = 1200 - 400 \cdot 1,005^{12}$$

(triệu đồng).

**Câu 47. (NGÔ QUYỀN)** Ngày 01 tháng 6 năm 2016 ông An đem một tỉ đồng gửi vào ngân hàng với lãi suất  $0.5\%$  một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng ông đến ngân hàng rút 4 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01 tháng 6 năm 2017, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi.

- A.  $200 \cdot (1.005)^{12} + 800$  (triệu đồng).      B.  $1000 \cdot (1.005)^{12} - 48$  (triệu đồng).  
 C.  $200 \cdot (1.005)^{11} + 800$  (triệu đồng).      D.  $1000 \cdot (1.005)^{11} - 48$  (triệu đồng).

### Hướng dẫn giải

**Chọn B.**

Số tiền gửi ban đầu là 1000 (triệu đồng)

Số tiền tiết kiệm của ông An sau tháng thứ  $n$  là:  $1000 \cdot (1+0.005)^n$  (triệu đồng).

Kể từ ngày gửi cứ tròn mỗi tháng ông đến ngân hàng rút 4 triệu, vậy số tiền của ông An sau 12 tháng là  $1000 \cdot (1.005)^{12} - 48$  (triệu đồng).

**Câu 48. (HAI BÀ TRUNG)** Một người lần đầu gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất  $3\%$  của một quý và lãi từng quý sẽ được nhập vào vốn (hình thức lãi kép). Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai sẽ gần với kết quả nào sau đây?

- A. 232 triệu.      B. 262 triệu.      C. 313 triệu.      D. 219 triệu.

### Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

Công thức tính lãi suất kép là  $A = a(1+r)^n$ .

Trong đó  $a$  là số tiền gửi vào ban đầu,  $r$  là lãi suất của một kì hạn (có thể là tháng; quý; năm),  $n$  là kì hạn.

Sau 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai thì 100 triệu gửi lần đầu được gửi là 18 tháng, tương ứng với 6 quý. Khi đó số tiền thu được cả gốc và lãi của 100 triệu gửi lần đầu là

$$A_1 = 100 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^6 \text{ (triệu).}$$

Sau 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai thì 100 triệu gửi lần hai được gửi là 12 tháng, tương ứng với 4 quý. Khi đó số tiền thu được cả gốc và lãi của 100 triệu gửi lần hai là

$$A_2 = 100 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^4 \text{ (triệu).}$$

Vậy tổng số tiền người đó nhận được 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai là

$$A = A_1 + A_2 = 100 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^6 + 100 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^4 \approx 232 \text{ triệu.}$$

**Câu 49. (TT ĐIỆU HIỀN)** Thầy Đông gửi tổng cộng 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng tiền lãi đạt được ở hai ngân hàng là 27 507 768,13 đồng (chưa làm tròn). Hỏi số tiền Thầy Đông gửi lần lượt ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

- A. 140 triệu và 180 triệu.
- B. 120 triệu và 200 triệu.
- C. 200 triệu và 120 triệu.
- D. 180 triệu và 140 triệu.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn A.

Gọi số tiền Thầy Đông gửi ở hai ngân hàng X và Y lần lượt là  $x, y$  (triệu)

Theo giả thiết  $x + y = 320 \cdot 10^6$  (1)

- Tổng số tiền cả vốn lẫn lãi nhận được ở ngân hàng X sau 15 tháng (5 quý) là  

$$A = x \left(1 + 0,021\right)^5 = x \left(1,021\right)^5$$

$$\Rightarrow \text{Số lãi sau 15 tháng là } r_A = x \left(1,021\right)^5 - x = x \left[ \left(1,021\right)^5 - 1 \right]$$

- Tổng số tiền cả vốn lẫn lãi nhận được ở ngân hàng Y sau 9 tháng là  

$$B = y \left(1 + 0,0073\right)^9 = y \left(1,0073\right)^9$$

$$\Rightarrow \text{Số lãi sau } 9 \text{ tháng là } r_B = y(1,0073)^9 - y = y[(1,0073)^9 - 1]$$

$$\text{Theo giả thiết } x[(1,021)^5 - 1] + y[(1,0073)^9 - 1] = 27\ 507\ 768,13 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} x \approx 140 \\ y \approx 180 \end{cases}$$

**Câu 50. (PHAN ĐÌNH PHÙNG)** Một người gửi tiền tiết kiệm 200 triệu đồng vào một ngân hàng với kỳ hạn một năm và lãi suất 8,25% một năm, theo thể thức lãi kép. Sau 3 năm tổng số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được là (*làm tròn đến hàng nghìn*)

- A. 124,750 triệu đồng.      B. 253,696 triệu đồng.  
 C. 250,236 triệu đồng.      D. 224,750 triệu đồng.

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn B.**

Số tiền người gửi nhận được sau 3 năm cả gốc lẫn lãi là  
 $S_3 = 200(1+8,25\%)^3 = 253,696$  triệu đồng.

**Câu 51. (CHUYÊN QUANG TRUNG)** Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 20 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? (Giả sử lãi suất không thay đổi)

- A. 4 năm 1 quý      B. 4 năm 2 quý      C. 4 năm 3 quý      D. 5 năm
- Hướng dẫn giải**

**Chọn A**

Số tiền của người ấy sau  $n$  kỳ hạn là  $T = 15 \left(1 + \frac{1,65}{100}\right)^n$ .

Theo đề bài, ta có  $15 \left(1 + \frac{1,65}{100}\right)^n > 20 \Leftrightarrow n > \log_{1+\frac{1,65}{100}} \frac{4}{3} \approx 17,56$

**Câu 52. (TIỀN LÃNG)** Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, ông An đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 800 triệu đồng với lãi suất  $x\% / năm$ , điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, ông An đã thanh toán hợp đồng ngân hàng số tiền là 1.058 triệu đồng. Hỏi lãi suất trong hợp đồng giữa ông An và ngân hàng là bao nhiêu?

- A. 13% / năm .      B. 14% / năm .      C. 12% / năm .      D. 15% / năm .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Công thức tính tiền vay lãi kép  $T_n = a(1+x)^n$ .

Trong đó  $a$ : số tiền vay ban đầu,  $x$ : lãi suất  $x\% / năm$ ,  $n$ : số năm  $\Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{T_n}{a}} - 1$

Vậy  $x = \sqrt{\frac{1058}{800}} - 1 = 0,15$  tức là  $15\% / năm$

**Câu 53. (TT ĐIỆU HIỀN)** Một người có số tiền là 20.000.000 đồng đem gửi tiết kiệm loại kỳ hạn 6 tháng vào ngân hàng với lãi suất 8,5% / năm. Vậy sau thời gian 5 năm 8 tháng, người đó nhận được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu (số tiền được làm tròn đến 100 đồng). Biết rằng người đó không rút cả vốn lẫn lãi tất cả các định kỳ trước và nếu rút trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo loại không kỳ hạn 0,01% một ngày. (1 tháng tính 30 ngày).

- A.** 31.802.700 đồng. **B.** 30.802.700 đồng. **C.** 32.802.700 đồng. **D.** 33.802.700 đồng.

**Hướng dẫn giải****Chọn A.**

Lãi suất 8,5% / năm tương ứng với  $\frac{8,5}{2}\% / 6$  tháng.

Đổi 5 năm 8 tháng bằng  $11 \times 6$  tháng + 2 tháng. Áp dụng công thức tính lãi suất  $P_n = P(1+r)^n$

Số tiền được lĩnh sau 5 năm 6 tháng là  $P_{11} = 20.000.000 \left(1 + \frac{8,5}{200}\right)^{11} = 31.613.071,66$  đồng.

Do hai tháng còn lại rút trước hạn nên lãi suất là 0,01% một ngày.

Suy ra số tiền được lĩnh là  $T = P_{11} + P_{11} \cdot \frac{0,01}{100} \cdot 60 \approx 31.802.700$  đồng.

# TỔNG ÔN: BÀI TOÁN THỰC TIỄN 2017

## Chủ đề 4. BÀI TOÁN TĂNG TRƯỞNG

**Câu 1.** (Lương Thé Vinh) Số lượng của một loài vi khuẩn sau  $t$  (giờ) được xác định bởi công thức  $Q(t) = Q_0 \cdot e^{0.195t}$ , trong đó  $Q_0$  là số lượng vi khuẩn ban đầu. Nếu số lượng vi khuẩn ban đầu là 5000 con thì sau bao nhiêu giờ, số lượng vi khuẩn có 100.000 con?

- A. 20 .      B. 24 .      C. 15,36 .      D. 3,55 .

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Từ giả thiết ta suy ra  $Q(t) = 5000 \cdot e^{0.195t}$ . Để số lượng vi khuẩn là 100.000 con thì

$$Q(t) = 5000 \cdot e^{0.195t} = 100.000 \Leftrightarrow e^{0.195t} = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{0.195} \ln 20 \approx 15.36(h).$$

**Câu 2.** (QUẢNG XƯƠNG 1) Theo số liệu của Tổng cục thống kê, năm 2016 dân số Việt Nam ước tính khoảng 94.444.200 người. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,07% . Cho biết sự tăng dân số được tính theo công thức  $S = A \cdot e^{Nr}$  (trong đó  $A$  là dân số của năm lấy làm mốc tính,  $S$  là dân số sau  $N$  năm,  $r$  là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người

- A. 2040 .      B. 2037 .      C. 2038 .      D. 2039 .

### Hướng dẫn giải.

**Chọn D**

Gọi  $n$  là số năm để dân số đạt mức 120 triệu người tính mốc từ năm 2016

$$\text{Ta có: } 120.000.000 = 94.444.200e^{n \cdot 0.0107} \Rightarrow n \approx \frac{\ln 1,27}{0,0107} \approx 22.34.$$

Vậy trong năm thứ 23 (tức là năm 2016 + 23 = 2039) thì dân số đạt mức 120 triệu người

**Câu 3.** (HÀ HUY TẬP) Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7% . Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức  $S = A \cdot e^{Nr}$  (trong đó  $A$  : là dân số của năm lấy làm mốc tính,  $S$  là dân số sau  $N$  năm,  $r$  là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người

- A. 2020 .      B. 2022 .      C. 2026 .      D. 2025 .

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

$$\text{Ta có } S = A \cdot e^{Nr} \Leftrightarrow N = \frac{1}{r} \ln \frac{S}{A}.$$

Để dân số nước ta ở mức 120 triệu người thì cần số năm

$$N = \frac{1}{r} \ln \frac{S}{A} = \frac{100}{1,7} \cdot \ln \frac{120000000}{78685800} \approx 25 \text{ (năm)}.$$

Vậy thì đến năm 2026 dân số nước ta ở mức 120 triệu người

**Câu 4. (HÀ HUY TẬP)** Sự tăng trưởng của loại vi khuẩn tuân theo công thức  $S = A \cdot e^{rt}$ , trong đó  $A$  là số lượng vi khuẩn ban đầu,  $r$  là tỉ lệ tăng trưởng ( $r > 0$ ),  $t$  là thời gian tăng trưởng (tính theo đơn vị là giờ). Biết số vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Thời gian để vi khuẩn tăng gấp đôi số ban đầu gần đúng nhất với kết quả nào trong các kết quả sau đây.

- A.** 3 giờ 20 phút.      **B.** 3 giờ 9 phút.      **C.** 3 giờ 40 phút.      **D.** 3 giờ 2 phút.

Hướng dẫn giải

**Chọn B.**

$$\text{Ta có : } 300 = 100 \cdot e^{5r} \Leftrightarrow e^{5r} = 3 \Leftrightarrow 5r = \ln 3 \Leftrightarrow r = \frac{\ln 3}{5}$$

Gọi thời gian cần tìm là  $t$ .

$$\text{Theo yêu cầu bài toán, ta có : } 200 = 100 \cdot e^{rt} \Leftrightarrow e^{rt} = 2 \Leftrightarrow rt = \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{5 \cdot \ln 2}{\ln 3} \approx 3,15(h)$$

Vậy  $t = 3$  giờ 9 phút

**Câu 5. (SỞ BẮC GIANG)** Thang đo Richte được Charles Francis đề xuất và sử dụng lần đầu tiên vào năm 1935 để sắp xếp các số đo độ chấn động của các cơn động đất với đơn vị Richte. Công thức tính độ chấn động như sau:  $M_L = \log A - \log A_0$ ,  $M_L$  là độ chấn động,  $A$  là biên độ tối đa được đo bằng địa chấn kế và  $A_0$  là biên độ chuẩn. Hỏi theo thang độ Richte, cùng với một biên độ chuẩn thì biên độ tối đa của một trận động đất 7 độ Richte sẽ lớn gấp mấy lần biên độ tối đa của một trận động đất 5 độ Richte?

- A.** 2.      **B.** 20.      **C.** 100.      **D.**  $10^{\frac{5}{7}}$ .

Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Với trận động đất 7 độ Richte ta có biểu thức

$$7 = M_L = \log A - \log A_0 = \log \frac{A}{A_0} \Rightarrow \frac{A}{A_0} = 10^7 \Rightarrow A = A_0 \cdot 10^7.$$

Tương tự ta suy ra được  $A' = A_0 \cdot 10^5$ .

$$\text{Từ đó ta tính được tỉ lệ } \frac{A}{A'} = \frac{A_0 \cdot 10^7}{A_0 \cdot 10^5} = 100.$$

**Câu 6. (TT ĐIỆU HIỀN)** Ngày 1/7/2016, dân số Việt Nam khoảng 91,7 triệu người. Nếu tỉ lệ tăng dân số Việt Nam hàng năm là 1,2% và tỉ lệ này ổn định 10 năm liên tiếp thì ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam bao nhiêu triệu người?

- A. 104,3 triệu người. B. 105,3 triệu người. C. 103,3 triệu người. D. 106,3 triệu người.

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Theo công thức  $S = A \cdot e^{ni} = 91,7 \cdot e^{10 \cdot 0,012} = 103,3$  triệu người.

**Chú ý:** Dân số thế giới được ước tính theo công thức  $S = A \cdot e^{ni}$ : Trong đó  $A$  : Dân số của năm lấy làm mốc tính.

$S$  : Dân số sau  $n$  năm.

$i$  : Tỉ lệ tăng dân số hằng năm.

- Câu 7. (SỞ QUẢNG NINH)** Một loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận một lượng nhỏ Carbon 14 (một đơn vị của Carbon). Khi cây đó chết đi thì hiện tượng quang hợp cũng sẽ ngưng và nó sẽ không nhận Carbon 14 nữa. Lượng Carbon 14 của nó sẽ phân hủy chậm chạp và chuyển hóa thành Nitơ 14. Gọi  $P(t)$  là số phần trăm Carbon 14 còn lại trong một bộ phận của cây sinh trưởng  $t$  năm trước đây thì  $P(t)$  được cho bởi công thức  $P(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}}\%$ . Phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc gỗ, người ta thấy lượng Carbon 14 còn lại trong gỗ là 65,21%. Hãy xác định số tuổi của công trình kiến trúc đó.

- A. 3574 (năm). B. 3754 (năm). C. 3475 (năm). **D. 3547 (năm).**

### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

Ta có  $100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}} = 65,21 \Leftrightarrow \frac{t}{5750} = \log_{0,5} \frac{65,21}{100} \Leftrightarrow t = 5750 \cdot \log_{0,5} \frac{65,21}{100} \Leftrightarrow t = 3547$ .

- Câu 8. (Chuyên Thái Bình)** Biết chu kỳ bán hủy của chất phóng xạ plutoni  $Pu^{239}$  là 24360 năm (tức là một lượng  $Pu^{239}$  sau 24360 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức  $S = Ae^{-rt}$ , trong đó  $A$  là lượng chất phóng xạ ban đầu,  $r$  là tỉ lệ phân hủy hàng năm ( $r < 0$ ),  $t$  là thời gian phân hủy,  $S$  là lượng còn lại sau thời gian phân hủy  $t$ . Hỏi 10 gam  $Pu^{239}$  sau khoảng bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn 1 gam?

- A. 82230 (năm). B. 82232 (năm). C. 82238 (năm). **D. 82235 (năm).**

### Hướng dẫn giải.

**Chọn D**

-  $Pu^{239}$  có chu kỳ bán hủy là 24360 năm, do đó ta có:

$$5 = 10 \cdot e^{r \cdot 24360} \Rightarrow r = \frac{\ln 5 - \ln 10}{24360} \approx -0,000028.$$

- Vậy sự phân hủy của  $Pu^{239}$  được tính theo công thức  $S = A \cdot e^{\frac{\ln 5 - \ln 10}{24360}t}$ .

$$\text{- Theo đề: } 1 = 10 \cdot e^{\frac{\ln 5 - \ln 10}{24360}t} \Rightarrow t = \frac{-\ln 10}{\ln 5 - \ln 10} \approx \frac{-\ln 10}{-0,000028} \approx 82235 \text{ (năm)}.$$

**Chú ý:** Theo đáp án gốc là D (SGK). **Tuy nhiên:** nếu không làm tròn  $r$  thì kết quả  $1 = 10 \cdot e^{\frac{\ln 5 - \ln 10}{24360}t} \Rightarrow t = \frac{-\ln 10}{\ln 5 - \ln 10} \approx 80922 \Rightarrow$  Kết quả gần A nhất.

**Câu 9. (QUỐC HỌC QUY NHƠN)** Một đám vi trùng tại ngày thứ  $t$  có số lượng  $N(t)$ , biết rằng

$N'(t) = \frac{7000}{t+2}$  và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Hỏi sau 10 ngày, đám vi trùng có bao nhiêu con (làm tròn số đến hàng đơn vị)?

- A. 322542 con.      B. 332542 con.      C. 302542 con.      D. 312542 con.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D.

$$N(t) = \int N'(t) dt = \int \frac{7000}{t+2} dt = 7000 \cdot \ln|t+2| + C.$$

$$N(0) = 7000 \ln 2 + C \Rightarrow 7000 \ln 2 + C = 300000 \Rightarrow C = 300000 - 7000 \ln 2.$$

$$N(10) = 7000 \ln(10+2) + C = 7000 \ln(10+2) + 300000 - 7000 \ln 2 \approx 312542,3163.$$

**Câu 10. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN)** Khi ánh sáng đi qua một môi trường (chẳng hạn như không khí, nước, sương mù, ...) cường độ sẽ giảm dần theo quãng đường truyền  $x$ , theo công thức  $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$ , trong đó  $I_0$  là cường độ của ánh sáng khi bắt đầu truyền vào môi trường và  $\mu$  là hệ số hấp thu của môi trường đó. Biết rằng nước biển có hệ số hấp thu  $\mu = 1,4$  và người ta tính được rằng khi đi từ độ sâu 2 m xuống đến độ sâu 20 m thì cường độ ánh sáng giảm  $l \cdot 10^{10}$  lần. Số nguyên nào sau đây gần với  $l$  nhất?

- A. 8.      B. 9.      C. 10.      D. 90.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn B.

Ta có

- Ở độ sâu 2 m:  $I(2) = I_0 e^{-2,8}$
- Ở độ sâu 20 m:  $I(20) = I_0 e^{-28}$

$$\text{Theo giả thiết } I(20) = l \cdot 10^{10} \cdot I(2) \Leftrightarrow e^{-28} = l \cdot 10^{10} \cdot e^{-2,8}$$

$$\Leftrightarrow l = 10^{-10} \cdot e^{25,2} \approx 8,79.$$

**Câu 11. (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIÊU )** Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau  $t$  tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức  $M(t) = 75 - 20 \ln(t+1), t \geq 0$  (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10% .

- A. Sau khoảng 24 tháng.      B. Sau khoảng 22 tháng.  
 C. Sau khoảng 23 tháng.      D. Sau khoảng 25 tháng.

### Hướng dẫn giải:

#### Chọn D.

Ta có  $75 - 20 \ln(t+1) \leq 10$

$\Leftrightarrow \ln(t+1) \geq 3,25 \Leftrightarrow t \geq 24,79$ . Khoảng 25 tháng.

**Câu 12. (CHU VĂN AN)** Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức  $Q(t) = Q_0 \cdot (1 - e^{-t\sqrt{2}})$  với  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giờ và  $Q_0$  là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin cho đến khi điện thoại đạt được 90% dung lượng pin tối đa (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

- A.  $t \approx 1,65$  giờ.      B.  $t \approx 1,61$  giờ.      C.  $t \approx 1,63$  giờ.      D.  $t \approx 1,50$  giờ.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn C

Theo bài ta có

$$Q_0 \cdot (1 - e^{-t\sqrt{2}}) = 0,9 \cdot Q_0 \Leftrightarrow 1 - e^{-t\sqrt{2}} = 0,9 \Leftrightarrow e^{-t\sqrt{2}} = 0,1$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,1)}{\sqrt{2}} \approx 1,63.$$

**Câu 13. (THẦY HIẾU LIVE )** Cường độ một trận động đất  $M$  (richter) được cho bởi công thức  $M = \log A - \log A_0$ , với  $A$  là biên độ rung chấn tối đa và  $A_0$  là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là

- A. 11      B. 2.075      C. 33.2      D. 8.9

**Câu 14. (LẠC HỒNG)** Một khu rừng có trữ lượng gỗ  $4 \cdot 10^5 m^3$ . Biết tốc độ sinh trưởng của khu rừng đó là 4% trên năm. Hỏi sau năm năm khu rừng đó sẽ có bao nhiêu  $m^3$  gỗ. (Lấy chính xác đến sau hai chữ số thập phân)

- A.  $4,47 \cdot 10^5 m^3$ .      B.  $4,57 \cdot 10^5 m^3$ .      C.  $4,67 \cdot 10^5 m^3$ .      D.  $4,87 \cdot 10^5 m^3$ .

**Câu 15. (KIM LIÊN)** Dân số thế giới được ước tính theo công thức  $S = A \cdot e^{r \cdot N}$  trong đó:  $A$  là dân số của năm lấy mốc tính,  $S$  là dân số sau  $N$  năm,  $r$  là tỷ lệ tăng dân số hằng năm. Cho biết năm 2001, dân số Việt Nam có khoảng 78.685.000 người và tỷ lệ tăng dân số hằng năm là 1,7% một năm. Như vậy, nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm không đổi thì đến năm nào dân số nước ta ở mức khoảng 120 triệu người?

- A. 2020.      B. 2026.      C. 2022.      D. 2024.

**Câu 16. (ĐỀ MINH HỌA LẦN 2)** Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức  $s(t) = s(0) \cdot 2^t$ , trong đó  $s(0)$  là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu,  $s(t)$  là số lượng vi khuẩn A có sau  $t$  phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

- A. 48 phút.      B. 19 phút.      C. 7 phút.      D. 12 phút.

### HƯỚNG DẪN GIẢI

**Chọn C.**

Ta có:  $s(3) = s(0).2^3 \Rightarrow s(0) = \frac{s(3)}{2^3} = 78125$ ;  $s(t) = s(0).2^t \Rightarrow 2^t = \frac{s(t)}{s(0)} = 128 \Rightarrow t = 7$ .

**Câu 17. (YÊN LẠC)** Một loại virus có số lượng cá thể tăng trưởng mũ với tốc độ  $x\% / h$ , tức là cứ sau 1 giờ thì số lượng của chúng tăng lên  $x\%$ . Người ta thả vào ống nghiệm 20 cá thể, sau 53 giờ số lượng cá thể virus đếm được trong ống nghiệm là 1,2 triệu. Tìm  $x$ ? (tính chính xác đến hàng phần trăm)

- A.  $x \approx 13,17\%$  .      B.  $x \approx 23,07\%$  .      C.  $x \approx 7,32\%$  .      D.  $x \approx 71,13\%$  .

**Câu 18. (SỞ BẮC NINH)** Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức  $S = Ae^{Nr}$  (trong đó  $A$  là dân số của năm lấy làm mốc tính,  $S$  là dân số sau  $N$  năm,  $r$  là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1.038.229 người tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm giữ nguyên thì đầu năm 2025 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

- A.  $(1.424.300; 1.424.400)$ .      B.  $(1.424.000; 1.424.100)$ .  
 C.  $(1.424.200; 1.424.300)$ .      D.  $(1.424.100; 1.424.200)$ .

**Hướng dẫn giải**

Gọi  $S_1$  là dân số năm 2015, ta có  $S_1 = 1.153.600$ ,  $N = 5$ ,  $A = 1.038.229$

$$\text{Ta có: } S_1 = Ae^{Nr} \Rightarrow e^{Nr} = \frac{S_1}{A} \Rightarrow r = \frac{\ln \frac{S_1}{A}}{N}$$

Gọi  $S_2$  là dân số đầu năm 2025, ta có  $S_2 = A \cdot e^{15r} = 1.038.229 \cdot e^{15 \cdot \frac{\ln \frac{S_1}{A}}{5}} \approx 1.424.227,71$

**Chọn đáp án C**

**Câu 19. (CHUYÊN THÁI BÌNH)** Một bể nước có dung tích 1000 lít. Người ta mở vòi cho nước chảy vào bể, ban đầu bể cạn nước. Trong giờ đầu vận tốc nước chảy vào bể là 1 lít/1phút. Trong các giờ tiếp theo vận tốc nước chảy giờ sau gấp đôi giờ liền trước. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu thì bể đầy nước (kết quả gần đúng nhất).

- A. 3,14 giờ.      B. 4,64 giờ.      C. 4,14 giờ.      D. 3,64 giờ.

**Chọn C.**

Trong giờ đầu tiên, vòi nước chảy được  $60 \cdot 1 = 60$  lít nước.

Giờ thứ 2 vòi chảy với vận tốc 2 lít/1phút nên vòi chảy được  $60 \cdot 2 = 120$  lít nước.

Giờ thứ 3 vòi chảy với vận tốc 4 lít/1phút nên vòi chảy được  $60 \cdot 4 = 240$  lít nước.  
 Giờ thứ 4 vòi chảy với vận tốc 8 lít/1phút nên vòi chảy được  $60 \cdot 8 = 480$  lít nước.

Trong 4 giờ đầu tiên, vòi chảy được:  $60 + 120 + 240 + 480 = 900$  lít nước.

Vậy trong giờ thứ 5 vòi phải chảy lượng nước là  $1000 - 900 = 100$  lít nước.

Số phút chảy trong giờ thứ 5 là  $100 : 16 = 6,25$  phút

Đổi  $6,25 : 60 \approx 0,1$  giờ

Vậy thời gian chảy đầy bể là khoảng 4,1 giờ.

**Câu 20. (HỒNG QUANG)** Dân số tỉnh Hải Dương năm 2013 là 1,748 triệu người với tỉ lệ tăng dân số hàng năm là  $r = 1,04\%$ . Hỏi, đến năm nào thì dân số tỉnh Hải Dương đạt 3 triệu người? (Giả sử tỉ lệ tăng dân số không thay đổi).

- A. 2065      B. 2067      C. 2066      D. 2030

**Câu 21. (ĐỨC THỌ)** E. coli là vi khuẩn đường ruột gây tiêu chảy, đau bụng dữ dội. Cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn E. coli tăng gấp đôi. Ban đầu, chỉ có 40 vi khuẩn E. coli trong đường ruột. Hỏi sau bao lâu, số lượng vi khuẩn E. coli là 671088640 con?

- A. 48 giờ.      B. 24 giờ.      C. 12 giờ.      D. 88 giờ.

**Câu 22. (NGÔ SĨ LIÊN)** Biết thể tích khí  $CO_2$  năm 1998 là  $V(m^3)$ . 10 năm tiếp theo, thể tích  $CO_2$  tăng  $a\%$ , 10 năm tiếp theo nữa, thể tích  $CO_2$  tăng  $n\%$ . Thể tích khí  $CO_2$  năm 2016 là

- A.  $V_{2016} = V \cdot \frac{(100+a)^{10} \cdot (100+n)^8}{10^{36}} (m^3)$ .      B.  $V_{2016} = V \cdot (1+a+n)^{18} (m^3)$ .
- C.  $V_{2016} = V \cdot \frac{((100+a)(100+n))^{10}}{10^{20}} (m^3)$ .      D.  $V_{2016} = V + V \cdot (1+a+n)^{18} (m^3)$ .

**Chọn A.**

Ta có:

$$\text{Sau 10 năm thể tích khí } CO_2 \text{ là } V_{2008} = V \left(1 + \frac{a}{100}\right)^{10} = V \frac{(100+a)^{10}}{10^{20}}$$

Do đó, 8 năm tiếp theo thể tích khí  $CO_2$  là

$$\begin{aligned} V_{2016} &= V_{2008} \left(1 + \frac{n}{100}\right)^8 = V \frac{(100+a)^{10}}{10^{20}} \left(1 + \frac{n}{100}\right)^8 \\ &= V \frac{(100+a)^{10}}{10^{20}} \frac{(100+n)^8}{10^{16}} = V \frac{(100+a)^{10} \cdot (100+n)^8}{10^{36}} \end{aligned}$$

**Câu 23. (CHUYÊN KHTN)** Tại Dân số thế giới được ước tính theo công thức  $S = Ae^{ni}$  trong đó  $A$  là dân số của năm lấy làm mốc,  $S$  là dân số sau  $n$  năm,  $i$  là tỷ lệ tăng dân số hằng năm. Theo thống kê dân số thế giới tính đến tháng 01/2017, dân số Việt Nam có 94,970,597 người và có tỉ lệ tăng dân số là 1,03%. Nếu tỷ lệ tăng dân số không đổi thì đến năm 2020 dân số nước ta có bao nhiêu triệu người, chọn đáp án gần nhất.

- A. 98 triệu người.      B. 100 triệu người.      C. 102 triệu người.      D. 104 triệu người.

**Chọn A.**

Áp dụng công thức với  $A = 94,970,597$ ,  $n = 3$ ,  $i = 1,03\%$  ta được  $S \approx 98$  triệu người.

**Câu 24. (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH)** Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể

dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần số lượng đã có và tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Sau bao nhiêu ngày bèo sẽ phủ kín mặt hồ?

- A.  $7 \times \log_3 25$ .      B.  $3^{\frac{25}{7}}$ .      C.  $7 \times \frac{24}{3}$ .      D.  $7 \times \log_3 24$ .

**Đáp án: A.**

Theo đề bài số lượng bèo ban đầu chiếm 0,04 diện tích mặt hồ.

Sau 7 ngày số lượng bèo là  $0,04 \times 3^1$  diện tích mặt hồ.

Sau 14 ngày số lượng bèo là  $0,04 \times 3^2$  diện tích mặt hồ.

...

Sau  $7 \times n$  ngày số lượng bèo là  $0,04 \times 3^n$  diện tích mặt hồ.

Để bèo phủ kín mặt hồ thì  $0,04 \times 3^n = 1 \Leftrightarrow 3^n = 25 \Leftrightarrow n = \log_3 25$ .

Vậy sau  $7 \times \log_3 25$  ngày thì bèo vừa phủ kín mặt hồ

**Câu 25. (PHAN ĐÌNH PHÙNG)** Số lượng của một loài vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức  $S(t) = Ae^{rt}$ , trong đó  $A$  là số lượng vi khuẩn ban đầu,  $S(t)$  là số lượng vi khuẩn có sau  $t$  (phút),  $r$  là tỷ lệ tăng trưởng ( $r > 0$ ),  $t$  (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 5 giờ có 1500 con. Hỏi sao bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt 121500 con?

- A. 35 (giờ).      B. 45 (giờ).      C. 25 (giờ).      D. 15 (giờ).

**Chọn C.**

Ta có  $A = 1500$ , 5 giờ = 300 phút.

$$\text{Sau 5 giờ, số vi khuẩn là } S(300) = 500 \cdot e^{300r} = 1500 \Rightarrow r = \frac{\ln 300}{3}$$

Gọi  $t_0$  (phút) là khoảng thời gian, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt 121500 con. Ta có  $121500 = 500 \cdot e^{rt_0}$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{\ln 243}{r} = \frac{300 \ln 243}{\ln 3} = 1500 \text{ (phút)}$$

$$= 25 \text{ (giờ)}.$$

**Câu 26. (PHAN ĐÌNH PHÙNG)** Áp suất không khí  $P$  (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) tại độ cao  $x$  (đo bằng mét) so với mực nước biển được tính theo công thức  $P = P_0 e^{-lx}$ , trong đó  $P_0 = 760$  mmHg là áp suất không khí ở mực nước biển,  $l$  là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 mét thì áp suất không khí là 672,71 mmHg. Hỏi áp suất ở đỉnh Fansipan cao mét là bao nhiêu?

- A. 22,24 mmHg.      B. 519,58 mmHg.      C. 517,94 mmHg.      D. 530,23 mmHg.

**Chọn D.**

Ở độ cao 1000 mét áp suất không khí là  $672,71 \text{ mmHg}$

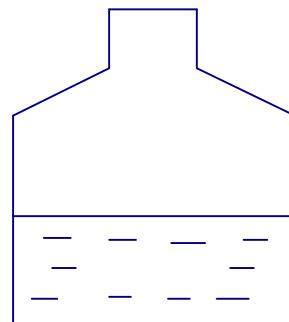
$$\text{Nên } 672,71 = 760e^{1000l}$$

$$\Leftrightarrow e^{1000l} = \frac{672,71}{760}$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{1}{1000} \ln \frac{672,71}{760}$$

$$\text{Áp suất ở đỉnh Fanxipan } P = 760e^{3143l} = 760e^{3143 \cdot \frac{1}{1000} \ln \frac{672,71}{760}} \approx 717,94$$

- Câu 27. (PHẠM VĂN ĐỒNG)** Khoảng 200 năm trước, hai nhà khoa E.Clapeyron đã thấy rằng áp suất  $p$  của hơi nước (tính bằng mm) khoảng trống phía trên mặt nước chứa trong một bình kín (hình bên)  $p = a \cdot 10^{\frac{k}{t+273}}$ , trong đó  $t$  là nhiệt độ C của nước,  $a$  và  $k$  là những hằng số và khi nhiệt độ của nước là  $100^\circ\text{C}$  thì áp suất của hơi nước là 760mm nước khi nhiệt độ của nước là  $40^\circ\text{C}$  (tính chính xác đến hàng phần第一位).  
**A.**  $\approx 50,5 \text{ mmHg}$ .      **B.**  $\approx 52,5 \text{ mmHg}$ .      **C.**  $\approx 55,5 \text{ mmHg}$ .



- Câu 28. (PHẠM VĂN ĐỒNG)** Số nguyên tố dạng  $M_p = 2^p - 1$ , trong đó  $p$  là một số nguyên tố được gọi là số nguyên tố Mec-xen (M.Mersenne, 1588-1648, người Pháp). Năm 1876, E.Lucas phát hiện ra  $M_{127}$ . Hỏi nếu viết  $M_{127}$  trong hệ thập phân thì  $M_{127}$  có bao nhiêu chữ số?

- A.** 38.      **B.** 39.      **C.** 40.      **D.** 41.

- Câu 29. (PHẨ LẠI)** Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức  $S = Ae^{rt}$ , trong đó  $A$  là số lượng vi khuẩn ban đầu,  $r$  là tỉ lệ tăng trưởng ( $r > 0$ ),  $t$  là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi sau bao lâu số lượng vi khuẩn ban đầu tăng lên gấp 10 lần?

- A.** 6 giờ 29 phút.      **B.** 8 giờ 29 phút.      **C.** 10 giờ 29 phút      **D.** 7 giờ 29 phút

- Câu 30. (LẠNG GIANG)** Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn theo công thức  $S = Ae^{rt}$  trong đó  $A$  là số lượng vi khuẩn ban đầu,  $r$  là tỉ lệ tăng trưởng ( $r > 0$ ),  $t$  là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Khi đó sau thời gian bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần so với số lượng ban đầu

- A.**  $t = \frac{3}{\log 5}$  (giờ).      **B.**  $t = \frac{3 \ln 5}{\ln 10}$  (giờ).      **C.**  $t = \frac{5}{\log 3}$  (giờ).      **D.**  $t = \frac{5 \ln 3}{\ln 10}$  (giờ).

- Câu 31. (LÝ THÁI TỐ)** Giả sử cứ sau một năm diện tích rừng của nước ta giảm  $x$  phần trăm diện tích hiện có. Hỏi sau 4 năm diện tích rừng của nước ta sẽ là bao nhiêu lần diện tích hiện nay?

- A.**  $1 - \frac{4x}{100}$ .      **B.**  $1 - \frac{x^4}{100}$ .      **C.**  $\left(1 - \frac{x}{100}\right)^4$ .      **D.**  $1 - \left(\frac{x}{100}\right)^4$ .

### Hướng dẫn giải

#### Chọn C

Gọi  $S_0$  là diện tích rừng hiện tại.

Sau  $n$  năm, diện tích rừng sẽ là  $S = S_0 \left(1 - \frac{x}{100}\right)^n$ .

Do đó, sau 4 năm diện tích rừng sẽ là  $\left(1 - \frac{x}{100}\right)^4$  lần diện tích rừng hiện tại.

**Câu 32. (CHUYÊN ĐHSP)** Chuyện kể rằng: Ngày xưa, có ông vua hứa sẽ thưởng cho một vị quan món quà mà vị quan được chọn. Vị quan tâu: “Hạ thần chỉ xin Bệ Hạ thưởng cho một số hạt thóc thôi ạ! Cụ thể như sau: Bàn cờ vua có 64 ô thì với ô thứ nhất xin nhận 1 hạt, ô thứ 2 thì gấp đôi ô đầu, ô thứ 3 lại gấp đôi ô thứ 2, ... ô sau nhận số hạt thóc gấp đôi phần thưởng dành cho ô liền trước”. Giá trị nhỏ nhất của  $n$  để tổng số hạt thóc mà vị quan từ  $n$  ô đầu tiên (từ ô thứ nhất đến ô thứ  $n$ ) lớn hơn 1 triệu là

- A. 18.      B. 19.      C. 20.      D. 21.

**Chọn C.**

Bài toán dùng tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân.

$$\text{Ta có: } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + \dots + 1 \cdot 2^{n-1} = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$S_n = 2^n - 1 > 10^6 \Leftrightarrow n > \log_2(10^6 + 1) \approx 19.93$ . Vậy n nhỏ nhất thỏa yêu cầu bài là 20.

**Câu 33. (CHUYÊN ĐHSP)** Ngày 1/7/2016, dân số Việt Nam khoảng 91,7 triệu người. Nếu tỉ lệ tăng dân số Việt Nam hàng năm là 1,2% và tỉ lệ này ổn định trong 10 năm liên tiếp thì ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

- A. 106,3 triệu người.    B. 104,3 triệu người.    C. 105,3 triệu người.    D. 103,3 triệu người.

**Chọn D.**

Ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam khoảng  $A \cdot e^{r \cdot t} = 91,7 \cdot e^{1,2 \cdot 10} = 103,39$ .

**Câu 34. (SỞ BÌNH PHƯỚC )** Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức  $S = A \cdot e^{rt}$ , trong đó  $A$  là số lượng vi khuẩn ban đầu,  $r$  là tỉ lệ tăng trưởng,  $t$  là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ?

- A. 1000.    B. 850.    C. 800.    D. 900.

### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loại vi khuẩn này.

$$\text{Từ giả thiết ta có: } 300 = 100 \cdot e^{5r} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 300 - \ln 100}{5} = \frac{\ln 3}{5}$$

Tức tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là  $r = \frac{\ln 3}{5}$  mỗi giờ.

Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có  $100 \cdot e^{10 \cdot \frac{\ln 3}{5}} = 900$  con.

**Câu 35. (CHUYÊN BIÊN HÒA)** Một người thả 1 lá bèo vào một cái ao, sau 12 giờ thì bèo sinh sôi phủ kín mặt ao. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín  $\frac{1}{5}$  mặt ao, biết rằng sau mỗi giờ thì lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi.

- A.  $12 - \log 5$  (giờ).      B.  $\frac{12}{5}$  (giờ).      C.  $12 - \log 2$  (giờ).      D.  $12 + \ln 5$  (giờ).

### Giải

**Chọn A.**

Ta gọi  $u_i$  là số lá bèo ở giờ thứ  $i$ .

Ta có  $u_0 = 1 = 10^0, u_1 = 10, u_2 = 10^2, \dots, u_{12} = 10^{12}$ .

Ta có số lá bèo để phủ kín  $\frac{1}{5}$  mặt hồ là  $\frac{1}{5} \cdot 10^{12} \Rightarrow$  thời gian mà số lá bèo phủ kín  $\frac{1}{5}$  mặt hồ là

$12 - \log 5$ .

**Câu 36. (CHUYÊN HƯNG YÊN)** Số nguyên tố dạng  $M_p = 2^p - 1$ , trong đó  $p$  là một số nguyên tố, được gọi là số nguyên tố Mec-xen (M.Mersenne, 1588 – 1648, người Pháp). Số  $M_{6972593}$  được phát hiện năm 1999. Hỏi rằng nếu viết số đó trong hệ thập phân thì có bao nhiêu chữ số?

- A. 6972592 chữ số.      B. 2098961 chữ số.      C. 6972593 chữ số.      D. 2098960 chữ số.

### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

$M_{6972593}$  có số chữ số bằng số  $2^{6972593}$  và là  
 $[6972593 \cdot \log 2] + 1 = [6972593 \cdot 0,3010] + 1 = 2098960$  số.

**Câu 37. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU)** Một nguồn âm đang hướng đặt tại điểm  $O$  có công suất truyền âm không đổi. Mức cường độ âm tại điểm  $M$  cách  $O$  một khoảng  $R$  được tính bởi công thức  $L_M = \log \frac{k}{R^2}$  (Ben) với  $k$  là hằng số. Biết điểm  $O$  thuộc đoạn thẳng  $AB$  và mức cường độ âm tại  $A$  và  $B$  lần lượt là  $L_A = 3$  (Ben) và  $L_B = 5$  (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm  $AB$  (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

- A. 3,59 (Ben).      B. 3,06 (Ben).      C. 3,69 (Ben).      D. 4 (Ben).

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Ta có:  $L_A < L_B \Rightarrow OA > OB$ .

Gọi  $I$  là trung điểm  $AB$ . Ta có:

$$L_A = \log \frac{k}{OA^2} \Rightarrow \frac{k}{OA^2} = 10^{L_A} \Rightarrow OA = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_A}}$$

$$L_B = \log \frac{k}{OB^2} \Rightarrow \frac{k}{OB^2} = 10^{L_B} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_B}}$$

$$L_I = \log \frac{k}{OI^2} \Rightarrow \frac{k}{OI^2} = 10^{L_I} \Rightarrow OI = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_I}}$$

$$\text{Ta có: } OI = \frac{1}{2}(OA - OB) \Rightarrow \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_I}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_A}} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_B}} \right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}^{L_I}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{10}^{L_A}} - \frac{1}{\sqrt{10}^{L_B}} \right)$$

$$\Rightarrow L_I = -2 \log \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{10}^{L_A}} - \frac{1}{\sqrt{10}^{L_B}} \right) \right] \Rightarrow L_I \approx 3,69 .$$

**Câu 38. (LẠNG GIANG)** Một lon nước soda  $80^{\circ}F$  được đưa vào một máy làm lạnh chứa đá tại  $32^{\circ}F$ . Nhiệt độ của soda ở phút thứ  $t$  được tính theo định luật Newton bởi công thức  $T(t) = 32 + 48.(0.9)^t$ . Phải làm mát soda trong bao lâu để nhiệt độ là  $50^{\circ}F$ ?

- A. 1,56.      B. 9,3.      C. 2.      D. 4.

### Hướng dẫn giải

**Chọn B.**

- Gọi  $t_o$  là thời điểm nhiệt độ lon nước  $80^{\circ}F \Rightarrow T(t_o) = 32 + 48.(0.9)^{t_o} = 80$  (1)

Gọi  $t_1$  là thời điểm nhiệt độ lon nước  $50^{\circ}F \Rightarrow T(t_1) = 32 + 48.(0.9)^{t_o} = 50$  (2)

- (1)  $\Leftrightarrow (0.9)^{t_o} = 1 \Leftrightarrow t_o = 0$

$$(2) \Leftrightarrow (0.9)^{t_1} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow t_1 = \log_{0.9} \frac{3}{8} \approx 9,3$$

**Câu 39. (TT DIỆU HIỀN)** Trung tâm luyện thi Đại học Diệu Hiền muốn gửi số tiền  $M$  vào ngân hàng và dùng số tiền thu được (cả lãi và tiền gốc) để trao 10 suất học bổng hàng tháng cho học sinh nghèo ở TP. Cần Thơ, mỗi suất 1 triệu đồng. Biết lãi suất ngân hàng là  $1\% /tháng$ , và Trung tâm Diệu Hiền bắt đầu trao học bổng sau một tháng gửi tiền. Để đủ tiền trao học bổng cho học sinh trong 10 tháng, trung tâm cần gửi vào ngân hàng số tiền  $M$  ít nhất là:

- A. 108500000 đồng.    B. 119100000 đồng.    C. 94800000 đồng.    D. 120000000 đồng.

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Gọi  $M$  (triệu). Lãi suất là  $a$

Số tiền sau tháng thứ nhất và đã phát học bổng là  $M(1+a) - 10$

Số tiền sau tháng thứ hai và đã phát học bổng là

$$(M(1+a) - 10)(1+a) - 10 = M(1+a)^2 - 10(1+a) - 10$$

Số tiền sau tháng thứ ba và đã phát học bổng là

$$\left( M(1+a)^2 - 10(1+a) - 10 \right)(1+a) - 10 = M(1+a)^3 - 10[(1+a)^2 + (1+a) + 1]$$

.....

Số tiền sau tháng thứ 10 và đã phát học bổng là

$$M(1+a)^{10} - 10[(1+a)^9 + \dots + (1+a) + 1] = M(1+a)^{10} - 10 \cdot \frac{(1+a)^{10} - 1}{a}$$

Theo yêu cầu đề bài

$$M(1+a)^{10} - 10 \cdot \frac{(1+a)^{10} - 1}{a} = 0 \Leftrightarrow M = \frac{10[(1+a)^{10} - 1]}{a(1+a)^{10}}$$

Thay  $a = 1\%$ . Ta tìm được  $M = 94713045 \approx 94800000$

**Câu 40. (TT ĐIỆU HIỂN)** Cường độ của một trận động đất được đo bằng độ Richter. Độ Richter được tính bằng công thức  $M = \log A - \log A_0$ , trong đó  $A$  là biên độ rung tối đa đo được bằng địa chấn kế và là biên độ chuẩn (hằng số). Vào ngày 3-12-2016, một trận động đất cường độ 2,4 độ Richter xảy ra ở khu vực huyện Bắc Trà My, tỉnh Quảng Nam; còn ngày 16-10-2016 xảy ra một trận động đất cường độ 3,1 độ Richter ở khu vực huyện Phước Sơn, tỉnh Quảng Nam. Biết rằng biên độ chuẩn được dùng chung cho cả tỉnh Quảng Nam, hỏi biên độ tối đa của trận động đất Phước Sơn ngày 16-10 gấp khoảng mấy lần biên độ tối đa của trận động đất Bắc Trà My ngày 3-12?

- A.** 7 lần.      **B.** 5 lần.      **C.** 4 lần.      **D.** 3 lần.

### Hướng dẫn giải

Gọi  $A_1$  là biên độ rung tối đa ở Phước Sơn.

Gọi  $A_2$  là biên độ rung tối đa ở Trà My.

$$M_1 = \log A_1 - \log A_0 = 3,1 \quad (1).$$

$$M_2 = \log A_2 - \log A_0 = 2,4 \quad (2).$$

Lấy (1)–(2):  $\log A_1 - \log A_2 = 0,7 \Leftrightarrow \log \frac{A_2}{A_1} = 0,7 \Leftrightarrow \frac{A_2}{A_1} = 10^{0,7}$

### Vậy đáp án B.

**Câu 41. (NGUYỄN TRÃI)** Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức  $S = A \cdot e^{Nr}$  (trong đó  $A$  là dân số của năm lấy làm mốc tính,  $S$  là dân số sau  $N$  năm,  $r$  là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 150 triệu người?

- A.** 2035.      **B.** 2030.      **C.** 2038.      **D.** 2042.

**Hướng dẫn giải****Chọn C.**

Theo giả thiết ta có phương trình  $150.000.000 = 78.685.800.e^{0.017N} \Leftrightarrow N \approx 37.95$  (năm)  
Tức là đến năm 2038 dân số nước ta ở mức 150 triệu người.

**Câu 42. (Lê Hồng Phong)** Huyện A có 300 nghìn người. Với mức tăng dân số bình quân 1,2% /năm thì sau  $n$  năm dân số sẽ vượt lên 330 nghìn người. Hỏi  $n$  nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- A.** 8 năm.      **B.** 9 năm.      **C.** 7 năm.      **D.** 10 năm.

**Hướng dẫn giải****Chọn A.**

Số dân của huyện A sau  $n$  năm là  $x = 300.000(1+0,012)^n$ .

$$x > 330.000 \Leftrightarrow 300.000(1+0,012)^n > 330.000 \Leftrightarrow n > \log_{1,012} \frac{33}{30} \Leftrightarrow n > 7,99.$$

**Câu 43. (ĐẠI HỌC VINH)** Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức hợp tác và phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng khi nhiệt độ trái đất tăng thêm  $2^{\circ}\text{C}$  thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%, còn khi nhiệt độ trái đất tăng thêm  $5^{\circ}\text{C}$  thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10% .



Biết rằng nếu nhiệt độ trái đất tăng thêm  $t^{\circ}\text{C}$ , tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm  $f(t)\%$  thì  $f(t) = k.a^t$  (trong đó  $a, k$  là các hằng số dương). Nhiệt độ trái đất tăng thêm bao nhiêu độ C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 20% ?

- A.**  $9,3^{\circ}\text{C}$ .      **B.**  $7,6^{\circ}\text{C}$ .      **C.**  $6,7^{\circ}\text{C}$ .      **D.**  $8,4^{\circ}\text{C}$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn C.**

Theo đề bài ta có:  $\begin{cases} k.a^2 = 3\% \\ k.a^5 = 10\% \end{cases} \quad (1)$ . Cần tìm  $t$  thỏa mãn  $k.a^t = 20\%$ .

$$\begin{aligned} \text{Từ } (1) \Rightarrow k = \frac{3\%}{a^2} \quad \text{và} \quad a = \sqrt[3]{\frac{10}{3}}. \quad \text{Khi đó} \quad k.a^t = 20\% \Rightarrow \frac{3\%}{a^2}.a^t = 20\% \Rightarrow a^{t-2} = \frac{20}{3} \\ \Rightarrow t = 2 + \log_{\sqrt[3]{\frac{10}{3}}} \frac{20}{3} \Rightarrow t \approx 6,7. \end{aligned}$$

**Câu 44. (CHUYÊN BẮC GIANG)** Sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức  $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ , trong đó  $m_0$  là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm  $t=0$ ),  $m(t)$

là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm  $t$  và  $T$  là chu kỳ bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Biết chu kỳ bán rã của chất phóng xạ  $Po^{210}$  là 138 ngày đêm. Hỏi 0,168 gam  $Po^{210}$  sau 414 ngày đêm sẽ còn lại bao nhiêu gam?

- A.** 0,021.      **B.** 0,056.      **C.** 0,045.      **D.** 0,102.

Hướng dẫn giải.

**Chọn A.**

Với  $t = 414, T = 138, m_0 = 0,168 \text{ g}$ .

$$\text{Áp dụng công thức ta được } m(414) = 0,168 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{414}{138}} = 0,021.$$

# TỔNG ÔN: BÀI TOÁN THỰC TIỄN

## Chủ đề 5. BÀI TOÁN TỐI ƯU CHI PHÍ SẢN XUẤT

**Câu 1.** (CHUYÊN BIÊN HÒA) Một công ty kinh doanh nghiên cứu thị trường trước khi tung ra sản phẩm và nhận thấy để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại A và B thì mất lần lượt là 2000 USD và 4000 USD. Nếu sản xuất được  $x$  sản phẩm loại A và  $y$  sản phẩm loại B thì lợi nhuận mà công ty thu được là  $L(x, y) = 8000x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$  USD. Giả sử chi phí để sản xuất hai loại sản phẩm A, B là 40000 USD. Gọi  $x_0, y_0$  lần lượt là số sản phẩm loại A, B để lợi nhuận lớn nhất. Tính  $x_0^2 + y_0^2$ .

- A. 8119.      B. 100.      C. 3637.      D. 17319.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Gọi  $x, y$  lần lượt là số sản phẩm loại A, B.

Theo đề bài ta có:  $x \cdot 2000 + y \cdot 4000 = 40000 \Leftrightarrow x + 2y = 20 \Leftrightarrow x = 20 - 2y$ .

Ta có  $L = 8000(20 - 2y)^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$ .

Xét hàm  $y = (20 - 2y)^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$ . Tập xác định  $D = (0; 10)$ .

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{2}{3}(20 - 2y)^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}(20 - 2y)^{\frac{1}{3}} = (20 - 2y)^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}(20 - 2y)\right) \\ &= (20 - 2y)^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{5}{3}y + 10\right). \end{aligned}$$

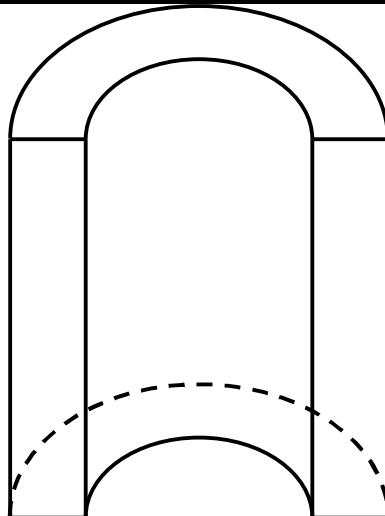
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \notin D \\ y = 6 \in D \end{cases}.$$

Nhận xét:  $(20 - 2y)^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}} > 0$  nên dấu của  $y'$  là dấu của biểu thức  $-\frac{5}{3}y + 10$ .

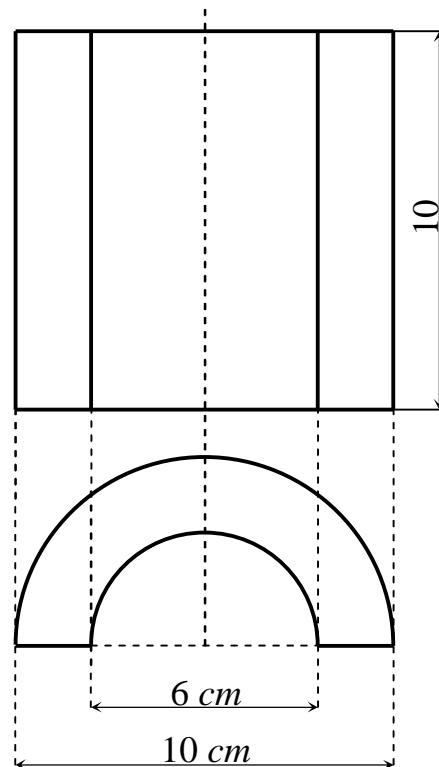
Do đó hàm số đạt giá trị lớn nhất khi  $y = 6 \Rightarrow x = 8$ .

Vậy  $x_0^2 + y_0^2 = 6^2 + 8^2 = 100$ .

**Câu 2.** (CHUYÊN LAM SƠN) Một chi tiết máy có hình dạng như hình vẽ 1, các kích thước được thể hiện trên hình vẽ 2 (hình chiếu bằng và hình chiếu đứng).



Hình vẽ 1



Hình vẽ 2

Người ta mạ toàn phần chi tiết này bằng một loại hợp kim chống gỉ. Để mạ  $1m^2$  bề mặt cần số tiền 150000 đồng. Số tiền nhỏ nhất có thể dùng để mạ 10000 chi tiết máy là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị nghìn đồng).

- A. 48238 (nghìn đồng).
- B. 51238 (nghìn đồng).
- C. 51239 (nghìn đồng).
- D. 37102 (nghìn đồng).

#### Hướng dẫn giải:

##### Chọn C

Gọi  $S_1, S_2$  lần lượt là diện tích nửa hình trụ trong và ngoài của chi tiết.  $S_3, S_4$  là diện tích hình vành khăn và diện tích bề mặt trước của chi tiết. Ta có:

$$S_1 = \pi R_1 l = \pi \cdot 3 \cdot 10 = 30\pi, S_2 = \pi R_2 l = \pi \cdot 5 \cdot 10 = 50\pi, S_3 = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = 16\pi, S_4 = 2 \cdot 10 \cdot 2 = 40.$$

Khi đó, diện tích bề mặt của một chi tiết máy là  $S = 96\pi + 40 (cm^2)$

Số tiền nhỏ nhất cần dùng để mạ 10000 chi tiết máy là:  

$$\frac{96\pi + 40}{10000} \cdot 150000 \cdot 10000 \approx 51238934 (\text{đồng}).$$

**Câu 3. (CHUYÊN LÊ KHIẾT)** Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần

tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.00 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muôn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu đồng một tháng?



## Hướng dẫn giải:

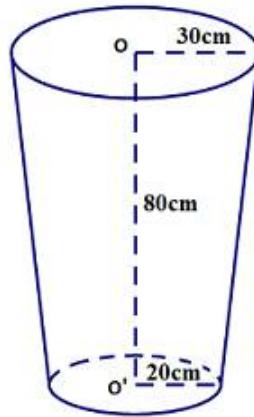
Chọn A

Số tiền thuê căn hộ:  $y = (150 - 5x)(2.000.000 + 100.000x)$ , ( $x \in N$ ).

$$y' = -1.000.000x + 5.000.000 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy  $y_{\max} = 2.500.000 \Leftrightarrow x = 5$ .

**Câu 4.** (**CHUYÊN NGOẠI NGỮ**) Học sinh A sử dụng 1 xô đựng nước có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ, trong đó đáy xô là hình tròn có bán kính 20 cm, miệng xô là đường tròn bán kính 30 cm, chiều cao xô là 80 cm. Mỗi tháng A dùng hết 10 xô nước. Hỏi A phải trả bao nhiêu tiền nước mỗi tháng, biết giá nước là 20000 đồng/1 m<sup>3</sup> (số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?

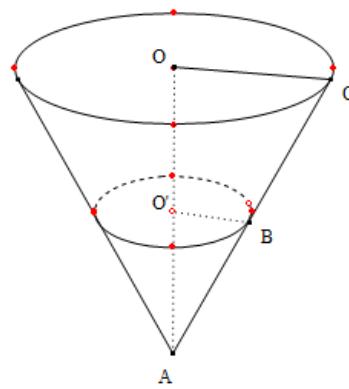





## Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta xét hình nón đỉnh  $A$ , đường cao  $h > 80$  cm đáy là đường tròn tâm  $O$ , bán kính bằng  $30$  cm. Mặt phẳng  $(\alpha)$  cách mặt đáy  $80$  cm cắt hình nón theo giao tuyến là đường tròn tâm  $O'$  có bán kính bằng  $20$  cm. Mặt phẳng  $(\alpha)$  chia hình nón thành 2 phần. Phần  $II$  là phần không chứa đỉnh  $A$  (Như hình vẽ)



$$\text{Ta có } \frac{O'B}{OC} = \frac{AO'}{AO} \Leftrightarrow \frac{AO'}{AO' + O'O} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AO' = 160 \text{ cm}$$

$$\text{Thể tích hình nón } V = \frac{1}{3} AO \cdot \pi \cdot 30^2 = 72000\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Thể tích phần I là } V_1 = \frac{1}{3} AO' \cdot \pi \cdot 20^2 = \frac{64000}{3}\pi \text{ cm}^3$$

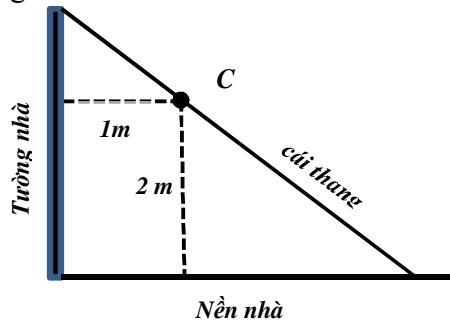
$$\text{Vậy thể tích cái xô là thể tích phần II là } V_2 = V - V_1 = \frac{152000}{3}\pi \text{ cm}^3 = \frac{19}{375}\pi \text{ (m}^3\text{)}$$

$$\text{Vậy số tiền phải trả là } T = \frac{19\pi}{375} \cdot 10.20000 \approx 31835 \text{ đồng.}$$

**Câu 5. (VÕ NGUYÊN GIÁP)** Ông An cần sản xuất một cái thang để trèo qua một bức tường nhà. Ông muốn cái thang phải luôn được đặt qua vị trí C, biết rằng điểm C cao 2m so với nền nhà và điểm C cách tường nhà 1m (như hình vẽ bên).

Giả sử kinh phí để sản xuất thang là 300.000 đồng/1 mét dài. Hỏi ông An cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất thang? ( Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).

- A. 2.350.000 đồng.
- B. 3.125.000 đồng.
- C. 1.249.000 đồng.
- D. 600.000 đồng.



#### Hướng dẫn giải

#### Chọn C.

Đặt  $BC = x$ .

Ta có:  $\Delta BCE \sim \Delta CDF$ .

$$\Leftrightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{CE}{DF} \Leftrightarrow \frac{x}{CD} = \frac{1}{\sqrt{CD^2 - 4}}.$$

$$\Leftrightarrow x^2(CD^2 - 4) = CD^2.$$

$$\Leftrightarrow CD^2 = \frac{4x^2}{x^2 - 1} \Leftrightarrow CD = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Vậy chi phí sản xuất thang là :

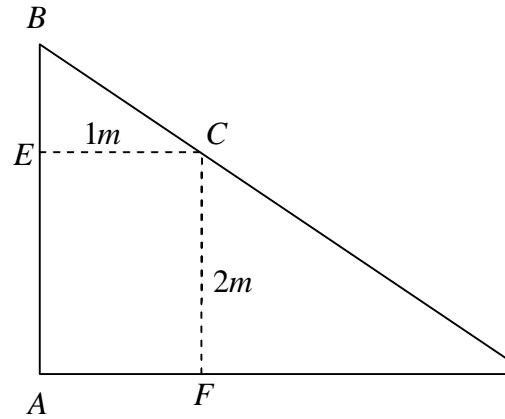
$$f(x) = \left( x + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \cdot 3.10^5 \text{ với } x > 1.$$

$$f'(x) = 3.10^5 \left( 1 + \frac{2\sqrt{x^2 - 1} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} \right) = 3.10^5 \left( 1 + \frac{-2}{(\sqrt{x^2 - 1})^3} \right).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - 1)^3} = 2 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^3 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt[3]{4} + 1.$$

$$\text{Hay } x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{4} + 1}.$$

Khi đó chi phí sản xuất thang là 1.249.000 đồng.



**Câu 6. (CHUYÊN SƠN LA)** Số sản phẩm của một hãng đầu DVD sản xuất được trong 1 ngày là giá trị của hàm số:  $f(m, n) = m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}}$ , trong đó là  $m$  số lượng nhân viên và  $n$  là số lượng lao động chính. Mỗi ngày hãng phải sản xuất được ít nhất 40 sản phẩm để đáp ứng nhu cầu khách hàng. Biết rằng mỗi ngày hãng đó phải trả lương cho một nhân viên là 6 USD và cho một lao động chính là 24 USD. Tìm giá trị nhỏ nhất chi phí trong 1 ngày của hãng sản xuất này.

- A. 720 USD.      B. 600 USD.      C. 560 USD.      D. 1720 USD.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn A.

Vì mỗi ngày hãng phải sản xuất được ít nhất 40 sản phẩm nên  $f(m, n) \geq 40 \Leftrightarrow m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}} \geq 40 \Leftrightarrow m^2 \cdot n \geq 40^3$ . Chi phí phải trả trong 1 ngày của hãng là  $6m + 24n = 6(m + 4n) = 6\left(\frac{m}{2} + \frac{m}{2} + 4n\right) \geq 6 \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{m}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot 4n} = 18\sqrt[3]{m^2 \cdot n} \geq 18\sqrt[3]{40^3} = 18 \cdot 40 = 720$ .

**Câu 7. (QUẢNG XƯƠNG 1)** Một xe buýt của hãng xe A có sức chứa tối đa là 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở  $x$  hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là  $20\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$  (nghìn đồng). Khẳng định đúng là:

- A. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 3.200.000 (đồng).
- B. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 45 hành khách.
- C. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 2.700.000 (đồng).
- D. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 50 hành khách.

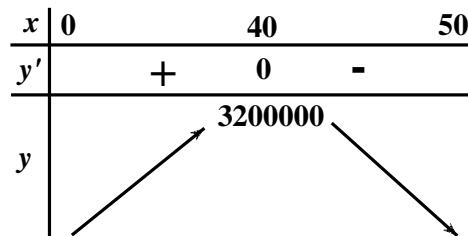
### Hướng dẫn giải.

#### Chọn A.

Số tiền của chuyến xe buýt chở  $x$  hành khách là

$$f(x) = 20x \cdot \left(3 - \frac{x}{40}\right)^2 = 20 \left(9x - \frac{3x^2}{20} + \frac{x^3}{1600}\right) \quad (0 < x \leq 50)$$

$$f'(x) = 20 \left(9 - \frac{3x}{10} + \frac{3x^2}{1600}\right) \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ x = 120 \end{cases}$$



Vậy: một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng: 3.200.000 (đồng)

**Câu 8. (SỞ QUẢNG NINH)** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức  $G(x) = 0,024x^2(30-x)$ , trong đó  $x$  là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp ( $x$  được tính bằng mg). Tìm lượng thuốc để tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất.

- A. 20 mg.      B. 0,5 mg.      C. 2,8 mg      D. 15 mg.

### Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

Bài toán đi tìm  $x \in [0;30]$  để  $G(x)$  đạt giá trị lớn nhất.

$$G(x) = 0,024x^2(30-x) = -\frac{3}{125}x^3 + \frac{18}{25}x^2$$

$$\Rightarrow G'(x) = -\frac{9}{125}x^2 + \frac{36}{25}x$$

$$G'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \in (0;30) \end{cases}$$

Ta có:  $G(20) = 96$ ;  $G(30) = 0$ ;  $G(0) = 0$ .

Vậy  $G(x)$  đạt giá trị lớn nhất 96 khi  $x = 20$ .

**Câu 9. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN)** Mỗi chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Một chuyến xe buýt chở  $x$  hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là  $\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$  (USD). Khẳng định nào sau đây đúng

- A. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng 160 (USD).  
 B. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng 135 (USD).  
 C. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 60 hành khách.  
 D. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 45 hành khách.

### Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

Số tiền thu được là:  $y = x \left(3 - \frac{x}{40}\right)^2 \Rightarrow y' = 9 - \frac{3}{10}x + \frac{3x^2}{1600} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ x = 120 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 60$   
 $\Rightarrow y_{\max} = 160 \Leftrightarrow x = 40$

**Câu 10. (AN LÃO)** Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muôn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng.

- A. 2.225.000      B. 2.100.000      C. 2.200.000      D. 2.250.000

**Câu 11. (LỰC NGÂN)** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức  $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ , trong đó  $x > 0$  (miligam) là liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng:

- A. 20mg .      B. 30mg .      C. 15mg .      D. Đáp án khác.

**Câu 12. (CÔNG NHIỆP)** Người ta tiến hành mạ vàng chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật có nắp. Thể tích của hộp là  $1000 \text{ cm}^3$ , chiều cao của hộp là  $10 \text{ cm}$ . Biết rằng đơn giá mạ vàng là  $10.000 \text{ đ/cm}^2$ . Gọi  $x$  (triệu đồng) là tổng số tiền bỏ ra khi mạ vàng cả mặt bên trong và mặt bên ngoài chiếc hộp. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $x$ .

- A. 12 triệu.      B. 6 triệu.      C. 8 triệu.      D. 4 triệu.

**Câu 13. (CHUYÊN HÙNG YÊN)** Chi phí cho xuất bản  $x$  cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi  $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$ ,  $C(x)$  được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số  $M(x) = \frac{T(x)}{x}$  với  $T(x)$  là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho  $x$  cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản  $x$  cuốn. Khi chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí  $M(x)$  thấp nhất, tính chi phí cho mỗi cuốn tạp chí đó.

- A. 20.000 đồng.      B. 22.000 đồng.      C. 15.000 đồng.      D. 10.000 đồng.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn B.

Ta có  $T(x) = C(x) \cdot 10000 + 4000x = x^2 + 2000x + 100000000$  (đồng).

$$\text{Suy ra } M(x) = \frac{T(x)}{x} = \frac{x^2 + 2000x + 100000000}{x} = x + 2000 + \frac{100000000}{x} \text{ (đồng).}$$

$$\text{Lại có } M(x) = x + 2000 + \frac{100000000}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{100000000}{x}} + 2000 = 22000 \text{ (đồng)}$$

**Câu 14. (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG)** Một chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở  $x$  hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là  $\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$  (USD).

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 45 hành khách.  
 B. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng 135 (USD).  
 C. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 60 hành khách.  
 D. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng 160 (USD).

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D

Số tiền thu được khi có  $x$  khách là

$$f(x) = x \left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \left(3 - \frac{x}{40}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{40} \left(3 - \frac{x}{40}\right)x = \left(3 - \frac{x}{40}\right) \left(3 - \frac{x}{40} - \frac{x}{20}\right) = \left(3 - \frac{x}{40}\right) \left(3 - \frac{3x}{40}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(3 - \frac{x}{40}\right) \left(3 - \frac{3x}{40}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 120 \\ x = 40 \end{cases}$$

$$f(40) = 160$$

$$f(60) = 135$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [0; 60]} f(x) = f(40) = 160 .$$

**Câu 15. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU)** Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở  $A$  đến một hòn đảo ở  $C$  như hình vẽ. Khoảng cách từ  $C$  đến  $B$  là 1 km. Bờ biển chạy thẳng từ  $A$  đến  $B$  với khoảng cách là 4 km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 40 triệu đồng, còn trên đất liền là 20 triệu đồng. Tính tổng chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc trên(làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

**A.** 106,25 triệu đồng.

**B.** 120 triệu đồng.

**C.** 164,92 triệu đồng.

**D.** 114,64 triệu đồng.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D.

Gọi  $M$  là điểm trên đoạn  $AB$  để lắp đặt đường dây điện ra biển nối với điểm  $C$ .

$$\text{Đặt } BM = x \Rightarrow AM = 4 - x \Rightarrow CM = \sqrt{1 + (4 - x)^2} = \sqrt{17 - 8x + x^2}, x \in [0; 4]$$

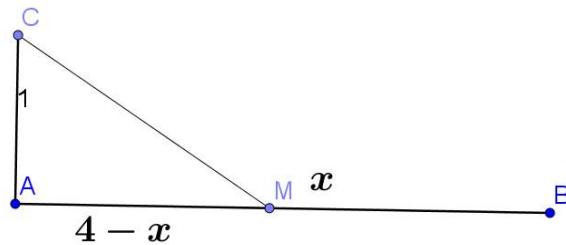
Khi đó tổng chi phí lắp đặt là:  $y = x \cdot 20 + 40\sqrt{x^2 - 8x + 17}$  đơn vị là triệu đồng.

$$y' = 20 + 40 \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}} = 20 \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 17} + 2(x-4)}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}} .$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 8x + 17} = 2(4 - x) \Leftrightarrow x = \frac{12 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta có } y\left(\frac{12 - \sqrt{3}}{2}\right) = 80 + 20\sqrt{3} \approx 114,64; y(0) = 40\sqrt{17} \approx 164,92; y(4) = 120 .$$

Vậy ta chọn đáp án D.



**Câu 16. (LANG GIANG)** Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 50000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ty đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong 1 tháng là bao nhiêu?

- A. 115 250 000.      B. 101 250 000.      C. 100 000 000.      D. 100 250 000.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn B.

Gọi  $x$  (đồng/tháng) ( $x > 0$ ) là giá cho thuê mới.

$\Rightarrow$  Số căn hộ bị bỏ trống là  $\frac{x}{50\ 000}$  căn hộ

$\Rightarrow$  Số tiền công ty thuê được  $T(x) = (2\ 000\ 000 + x) \left( 50 - \frac{x}{50\ 000} \right)$

Khảo sát hàm số  $T(x)$  trên  $(0; +\infty)$

$$\Rightarrow T'(x) = 10 - \frac{x}{25\ 000} \Rightarrow T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 250\ 000.$$

Bảng biến thiên

$x$	0	250.000	$+\infty$
$T'(x)$	+	0	-
$T(x)$		101 250 000	

Vậy thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong 1 tháng là:  $T = 101\ 250\ 000$ .

**Câu 17. (SỞ VĨNH PHÚC)** Số sản phẩm của một hằng đầu DVD sản xuất được trong 1 ngày là giá trị của hàm số:  $f(m, n) = m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}}$ , trong đó  $m$  là số lượng nhân viên và  $n$  là số lượng lao động chính. Mỗi ngày hằng phải sản xuất được ít nhất 40 sản phẩm để đáp ứng nhu cầu khách hàng. Biết rằng mỗi ngày hằng đó phải trả lương cho một nhân viên là 6 USD và cho một lao động chính là 24 USD. Tìm giá trị nhỏ nhất chi phí trong 1 ngày của hằng sản xuất này.

- A. 1720 USD.      B. 720 USD.      C. 560 USD.      D. 600 USD.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn B.

Ta có giả thiết:  $m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}} \geq 40 \Leftrightarrow m^2n \geq 64000$  với  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Tổng số tiền phải chi trong một ngày là:  $6m + 24n = 3m + 3m + 24n \geq 3\sqrt[3]{216m^2n} \geq 720$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi  $3m = 24n \Leftrightarrow m = 8n$

Do đó,  $m^2n \geq 64000 \Leftrightarrow 64n^3 \geq 64000 \Leftrightarrow n \geq 10$

Ta chọn  $n = 10 \Rightarrow m = 80$ .

Vậy chi phí thấp nhất để trả cho 80 nhân viên và 10 lao động chính để sản xuất đạt yêu cầu là 720 USD

**Câu 18. (SỞ HÀ NỘI)** Một công ty dự kiến chi 1 tỉ đồng để sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ có dung tích 5 lít. Biết rằng chi phí để làm mặt xung quanh của thùng đó là  $100,000 \text{ đ}/m^2$ , chi phí để làm mặt đáy là  $120,000 \text{ đ}/m^2$ . Hãy tính số thùng sơn tối đa mà công ty đó sản xuất (giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể).

- A. 57582 thùng.      B. 58135 thùng.      C. 18209 thùng.      D. 12525 thùng.

### Hướng dẫn giải

**Chọn B.**

Gọi chiều cao hình trụ là  $h$  ( $h > 0$ ) (m).

Bán kính đáy hình trụ là  $x$  ( $x > 0$ ) (m).

Thể tích khối trụ là:  $V = \pi x^2 h = \frac{5}{1000} \Rightarrow h = \frac{5}{1000\pi x^2}$  (m).

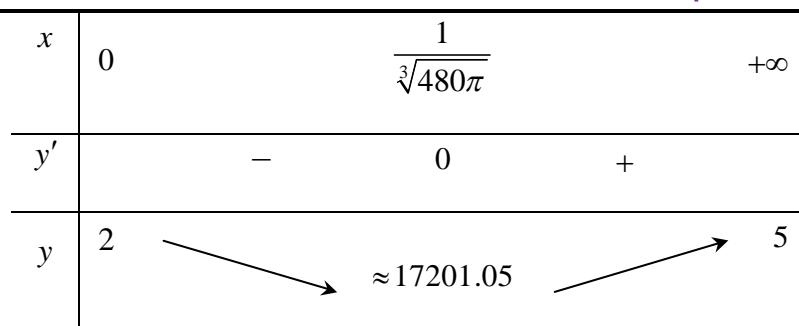
Diện tích mặt xung quanh là:  $S_{xq} = 2\pi x h = \frac{1}{100x}$ .

Diện tích hai đáy là:  $S_d = 2\pi x^2$

Số tiền cần thiết để sản xuất một thùng sơn là:  $f(x) = \frac{1000}{x} + 240000\pi x^2$  ( $x > 0$ )

Ta có:  $f'(x) = \frac{-1000}{x^2} + 480000\pi x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{480\pi}}$ .

Bảng biến thiên:



Vậy với số tiền 1 tỉ đồng thì công ty có thể sản xuất tối đa là :  $\frac{10^9}{17201.05} \approx 58135$  thùng.

- Câu 19. (TT ĐIỆU HIỀN)** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức  $G(x) = 0,025x^2(30-x)$ . Trong đó  $x$  là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (đơn vị miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.  
**A. 15 mg .      B. 20 mg .      C. 25 mg .      D. 30 mg .**

#### Hướng dẫn giải

**Chọn B**

$$G(x) = 0,025x^2(30-x) \Rightarrow G'(x) = 0,025(-3x^2 + 60x)$$

$$G'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=20 \end{cases}. \text{ Khi đó } \min_{x \in [0;30]} G(x) = G(20) = 100.$$

- Câu 20. (TT ĐIỆU HIỀN)** Một hộ kinh doanh có 50 phòng cho thuê. Nếu cho thuê mỗi phòng với giá là 2 triệu đồng/1 tháng thì các phòng đều được thuê hết. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng thêm 100.000 đồng/tháng, thì sẽ có 2 phòng bị bỏ trống. Hỏi chủ hộ kinh doanh nên tăng mỗi phòng bao nhiêu để có tổng thu nhập mỗi tháng cao nhất?

- A. 500.000đ .      B. 200.000đ .      C. 300.000đ .      D. 250.000đ .**

#### Hướng dẫn giải

Tổng số tiền khi không tăng là:  $T_0 = 50.2 = 100$  triệu.

Tổng số tiền khi tăng lên 100.000 đồng/tháng là  $T_1 = 48.2 + 48.0,1 = (50 - 2.1) \left( 2 + \frac{1}{10} \right)$

Tổng số tiền khi tăng lên 200.000 đồng/tháng là  $T_2 = 46.2 + 46.0,2 = (50 - 2.2) \left( 2 + \frac{2}{10} \right)$

Tổng số tiền khi tăng lên 300.000 đồng/tháng là  $T_3 = 44.2 + 44.0,3 = (50 - 2.3) \left( 2 + \frac{3}{10} \right)$

Tổng số tiền khi tăng lên  $k$ 00.000 đồng/tháng là  $T_k = 46.2 + 46.0,k = (50 - 2k) \left( 2 + \frac{k}{10} \right)$

Xét hàm số  $f(x) = (50 - 2x) \left( 2 + \frac{x}{10} \right)$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất khi:  $x = \frac{5}{2}$ .

### Vậy đáp án D.

**Câu 21. (AN LÃO)** Một cửa hàng cà phê sắp khai trương đang nghiên cứu thị trường để định giá bán cho mỗi cốc cà phê. Sau khi nghiên cứu, người quản lý thấy rằng nếu bán với giá 20.000 đồng một cốc thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được 2000 cốc, còn từ mức giá 20.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì sẽ bán ít đi 100 cốc. Biết chi phí nguyên vật liệu để pha một cốc cà phê không thay đổi là 18.000 đồng. Hỏi cửa hàng phải bán mỗi cốc cà phê với giá bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất?

- A. 25.000 đồng.      B. 22.000 đồng.      C. 31.000 đồng.      D. 29.000 đồng.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D.

**Cách 1:** Gọi số tiền tăng là  $x$  (nghìn đồng)

Lợi nhuận thu được tính theo hàm số sau:

$$\begin{aligned} f(x) &= (20+x)(2-0,1x) - 18(2-0,1x) = (2-0,1x)(2+x) \\ &= -0,1x^2 + 1,8x + 4 = -0,1(x-9)^2 + \frac{121}{10} \leq \frac{121}{10}. \end{aligned}$$

Vậy lợi nhuận cao nhất là  $\frac{121}{10} \times 1000^2 = 12.100.000$  (đồng) khi bán với giá  $20000 + 9 \times 1000 = 29.000$  (đồng)

**Cách 2:** + Gọi  $x (x \geq 20.000)$  là giá một cốc cà phê,  $(0 < y \leq 2.000)$  là số cốc cà phê bán trong một tháng.

+ Vì nếu bán với giá 20.000 đồng một cốc thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được 2000 cốc, còn từ mức giá 20.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì sẽ bán ít đi 100 cốc nên ta có

$$\frac{x-20000}{y-2000} = \frac{21000-20000}{1900-2000} \Leftrightarrow \frac{x-20000}{y-2000} = -10 \Leftrightarrow x = 40000 - 10y$$

+ Ta lại có lợi nhuận là:  $L = xy - 18000y = (40000 - 10y)y - 18000y = 22000y - 10y^2$   
 $L' = 22000 - 20y; L' = 0 \Leftrightarrow y = 1100(tm) \Rightarrow x = 29.000(tm)$

**Cách 3:** Thủ tục giá trị.

**Câu 22. (NGÔ QUYỀN)** Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất?

- A. 42.000 đồng.      B. 40.000 đồng.      C. 43.000 đồng.      D. 39.000 đồng.

**Hướng dẫn giải****Chọn D.**

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là  $x$  (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng  $x$  (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm  $100x$  chiếc. Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là:  $3000 - 100x$  chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là:  $12 + x$  (nghìn đồng). Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:  $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$  (nghìn đồng).

Xét hàm số  $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$  trên  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Ta có: } f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000 = -100(x - 9)^2 + 44100 \leq 44100.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x = 9$ .

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

**Câu 23. (NGUYỄN TRÃI)** Người ta xây một bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng  $\frac{500}{3} m^3$ . Đây bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là  $600.000 \text{ đồng}/m^2$ . Hãy xác định kích thước của bể sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là

- A. 85 triệu đồng.      B. 90 triệu đồng.      C. 75 triệu đồng.      D. 86 triệu đồng.

**Hướng dẫn giải****Chọn B.**

**Cách 1:** dùng phương pháp hàm số.

Gọi  $x(m)$  là chiều rộng của đáy bể, khi đó chiều dài của đáy bể là  $2x(m)$  và  $h(m)$  là chiều cao bể. Bể có thể tích bằng  $\frac{500}{3} m^3 \Leftrightarrow 2x^2h = \frac{500}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2}$ .

$$\text{Diện tích cần xây là: } S = 2(xh + 2xh) + 2x^2 = 6x \frac{250}{3x^2} + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2.$$

$$\text{Xét hàm } S(x) = \frac{500}{x} + 2x^2, (x > 0) \Rightarrow S'(x) = \frac{-500}{x^2} + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Lập bảng biến thiên suy ra  $S_{\min} = S(5) = 150$ .

Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích xây dựng là nhỏ nhất và bằng  $S_{\min} = 150$ .

Vậy giá thuê nhân công thấp nhất là:  $150 \cdot 600000 = 90000000$  đồng.

**Cách 2:** Dùng bất đẳng thức Cauchy.

$$S = \frac{500}{x} + 2x^2 = \frac{250}{x} + \frac{250}{x} + 2x^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{250}{x} \cdot \frac{250}{x} \cdot 2x^2} = 150.$$

**Câu 24. (NGUYỄN TRÃI)** Một chủ hộ kinh doanh có 32 phòng trọ cho thuê. Biết giá cho thuê mỗi tháng là  $2.000.000đ/1$  phòng trọ, thì không có phòng trống. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng trọ lên  $200.000đ/1$  tháng, thì sẽ có 2 phòng bị bỏ trống. Hỏi chủ hộ kinh doanh sẽ cho thuê với giá là bao nhiêu để có thu nhập mỗi tháng cao nhất?

- A.  $2.600.000đ$ .      B.  $2.400.000đ$ .      C.  $2.000.000đ$ .      D.  $2.200.000đ$ .

### Hướng dẫn giải:

**Chọn A.**

Gọi  $n$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ) là số lần tăng giá thêm  $200.000đ$ .

Hàm số chỉ thu nhập của tháng là:

$$f(n) = (2000000 + n \cdot 200000)(32 - n \cdot 2) = -400000n^2 + 2400000n + 64000000$$

là hàm bậc 2 theo  $n$ , có hệ số  $a < 0$

Vậy  $f(n)$  đạt giá trị lớn nhất khi  $n = -\frac{b}{2a} = \frac{-2400000}{2(-400000)} = 3$ .

Kiểm tra lại, ta thấy

$$\left. \begin{array}{l} *f(3) = 67.600.000 \\ *f(0) = 64.000.000 \end{array} \right\} \Rightarrow f(3) > f(0)$$

Vậy chủ hộ sẽ cho thuê với giá  $2.000.000 + 3 \times 200.000 = 2.600.000đ$

# TỔNG ÔN: BÀI TOÁN THỰC TIỄN

## Chủ đề 6. BÀI TOÁN THỰC TẾ MIN MAX

**Câu 1.** (CHUYÊN LAM SON) Người ta dự định thiết kế một cống ngầm thoát nước qua đường có chiều dài  $30\text{ m}$ , thiết diện thẳng của cống có diện tích để thoát nước là  $4\text{ m}^2$  (gồm hai phần nửa hình tròn và hình chữ nhật) như hình minh họa, phần đáy cống, thành cống và nắp cống (tô đậm như hình vẽ) được sử dụng vật liệu bê tông. Tính bán kính  $R$  (tính gần đúng với đơn vị  $\text{m}$ , sai số không quá  $0,01$ ) của nửa hình tròn để khi thi công tốn ít vật liệu nhất?

- A.  $1,15\text{ m}$ .      B.  $1,52\text{ m}$ .  
 C.  $1,02\text{ m}$ .      D.  $1,06\text{ m}$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B**

$$\text{ta có } S = 4 = 2Rh + \frac{\pi R^2}{2}$$

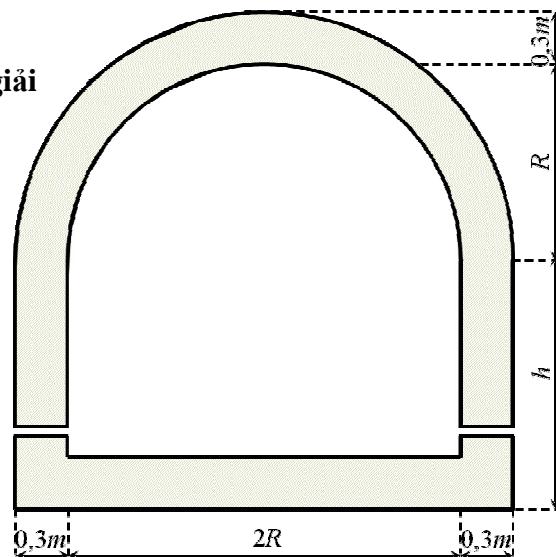
$$\Leftrightarrow h = \frac{1}{2R} \left( 4 - \frac{\pi R^2}{2} \right) = \frac{2}{R} - \frac{\pi R}{4}$$

$$P = 2R + 2h + \pi R = 2R + \frac{4}{R} + \frac{\pi R}{2}$$

$$P' = 2 - \frac{4}{R^2} + \frac{\pi}{2}$$

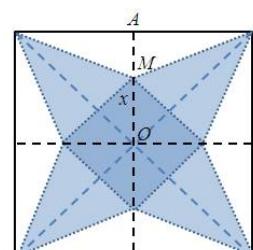
$$P' = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{8}{4 + \pi}}$$

Bán kính  $R \approx 1,52(\text{m})$ .



**Câu 2.** (CHUYÊN LÊ KHIẾT) Cắt một miếng giấy hình vuông ở hình 1 và xếp thành một hình chóp tứ giác đều như hình 2. Biết cạnh hình vuông bằng  $20\text{cm}$ ,  $OM = x(\text{cm})$ . Tìm  $x$  để hình chóp đều ấy có thể tích lớn nhất?

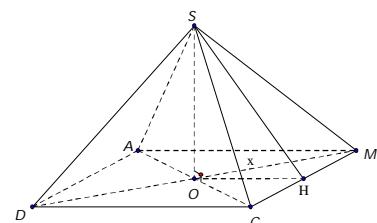
- A.  $x = 9\text{cm}$ .      B.  $x = 8\text{cm}$ .  
 C.  $x = 6\text{cm}$ .      D.  $x = 7\text{cm}$ .



**Hướng dẫn giải**

**Chọn B**

Ta có:  $OM = x \Rightarrow AC = 2x$ ,  $AM = \sqrt{2}x$ .



Suy ra:  $OH = \frac{x}{\sqrt{2}}$ ,  $MH = \frac{x}{\sqrt{2}}$ ,  $SH = 10\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}$ .

$$SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{20(10-x)}$$

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{\text{đáy}} = \frac{1}{3} \sqrt{20(10-x)} \cdot 2x^2 = \frac{\sqrt{20}}{3} \sqrt{40-4x} \cdot x^2$$

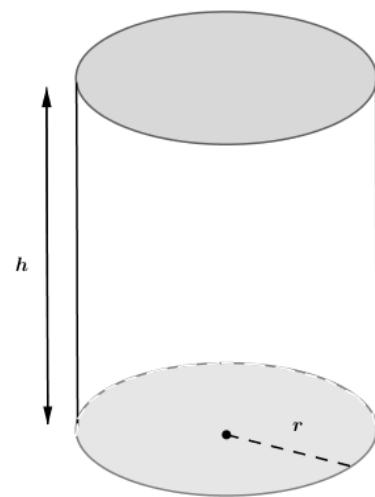
$$\Leftrightarrow V = \frac{\sqrt{20}}{3} \sqrt{(40-4x) \cdot x \cdot x \cdot x} \leq \frac{\sqrt{20}}{3} \sqrt{\left(\frac{40-4x+x+x+x+x}{5}\right)^5} = \frac{\sqrt{20}}{3} \cdot 2^{\frac{15}{2}}$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi  $40-4x=x \Leftrightarrow x=8$ .

- Câu 3.** (CHUYÊN NGOẠI NGỮ) Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích  $V$  nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của thùng là  $h$  và bán kính đáy là  $r$ . Tính tỉ số  $\frac{h}{r}$  sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất?.

A.  $\frac{h}{r} = 2$ .      B.  $\frac{h}{r} = 3\sqrt{2}$ .

C.  $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$ .      D.  $\frac{h}{r} = 6$ .



### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

Không mất tính tổng quát, giả sử thể tích của hình trụ là  $V = 1$  và giá cho mỗi đơn vị diện tích bằng 1.

Theo bài ta có  $h = \frac{1}{\pi r^2} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{1}{\pi r^3}$ .

Diện tích xung quanh của hình trụ là  $S_1 = 2\pi r \cdot h = 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^3} = \frac{2}{r}$ .

Diện tích mặt đáy  $S_2 = \pi r^2$ .

Suy ra giá vật liệu để làm hình trụ là  $f = \frac{2}{r} \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2\pi r^2 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + 6\pi r^2 \geq 3\sqrt[3]{12\pi}$ .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{1}{r} = 6\pi r^2 \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{6\pi}$ . Suy ra  $\frac{h}{r} = \frac{1}{\pi r^3} = \frac{1}{\pi \frac{1}{6\pi}} = 6$ .

**Câu 4.** (CHUYÊN LÊ KHIẾT) Một xưởng làm cơ khí nhận làm những chiếc thùng phi với thể tích theo yêu cầu là  $2000\pi$  lít mỗi chiếc. Hỏi bán kính đáy và chiều cao của thùng lần lượt bằng bao nhiêu để tiết kiệm vật liệu nhất?

- A. 1m và 2m.      B. 2dm và 1dm.      C. 2m và 1m.      D. 1dm và 2dm.

Hướng dẫn giải

**Chọn A**

Gọi  $R, h$  lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của thùng.

Gọi  $V, S_{tp}$  lần lượt là thể tích và diện tích toàn phần của thùng.

$$V = 2000\pi \text{ lít} = 2000\pi \text{ dm}^3 = 2\pi \text{ m}^3.$$

$$V = \pi R^2 h = 2\pi \Rightarrow h = \frac{2}{R^2}$$

$$S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R \frac{2}{R^2} = 2\left(\pi R^2 + \frac{2\pi}{R}\right) = 2\left(\pi R^2 + \frac{\pi}{R} + \frac{\pi}{R}\right) \geq 2\sqrt[3]{\pi R^2 \cdot \frac{\pi}{R} \cdot \frac{\pi}{R}} = 2\pi.$$

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì  $S_{tp}$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow \pi R^2 = \frac{\pi}{R} \Leftrightarrow R = 1 \Rightarrow h = 2$ .

**Câu 5.** (SỞ NAM ĐỊNH) Người ta định xây dựng một trạm biến áp 110 KV tại ô đất  $C$  cạnh đường quốc lộ  $MN$  để cấp điện cho hai khu công nghiệp  $A$  và  $B$  như hình vẽ.

Hai khu công nghiệp  $A$  và  $B$  cách quốc lộ lần lượt là  $AM = 3\text{km}$ ,  $BN = 6\text{km}$ . Biết rằng quốc lộ  $MN$  có độ dài  $12\text{km}$ . Hỏi phải đặt trạm biến áp cách khu công nghiệp  $A$  bao nhiêu km để tổng chiều dài đường dây cấp điện cho hai khu công nghiệp  $A$  và  $B$  là ngắn nhất.

- A.  $3\sqrt{5}\text{km}$ .      B.  $5\text{km}$ .      C.  $3\text{km}$ .      D.  $\sqrt{34}\text{km}$ .

Hướng dẫn giải

**Chọn B.**

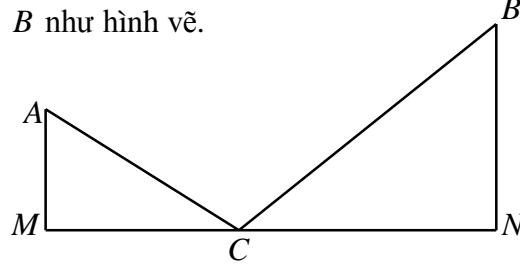
Gọi  $AC = x$

$$\text{Ta có: } MC = \sqrt{x^2 - 9}; CN = 12 - \sqrt{x^2 - 9}$$

$$\text{Khi đó } BC = \sqrt{(12 - \sqrt{x^2 - 9})^2 - 36}.$$

$$\text{Khi đó: } AC + CB == f(x) = x + \sqrt{(12 - \sqrt{x^2 - 9})^2 - 36}$$

Khảo sát  $f(x)$  ngắn nhất khi  $x = 5$ .



**Câu 6.** (SỞ QUẢNG NAM) Một häng được phảm cần một số lọ đựng thuốc dạng hình trụ với dung tích  $16\pi \text{ cm}^3$ . Tính bán kính đáy  $R$  của lọ để ít tốn nguyên liệu sản xuất lọ nhất

A.  $R = 2 \text{ cm}$ .

B.  $R = 1,6 \text{ cm}$ .

C.  $R = \pi \text{ cm}$ .

D.  $R = \frac{16}{\pi} \text{ cm}$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn A.**

Ta có  $V = \pi R^2 h = 16\pi \Rightarrow h = \frac{16}{R^2}$ .

Để ít tốn nguyên liệu nhất thì diện tích toàn phần của lọ phải nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } S_{\text{tp}} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + \frac{32\pi}{R^2} = 2\pi R^2 + \frac{16\pi}{R} + \frac{16\pi}{R} \geq 3\sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{16\pi}{R} \cdot \frac{16\pi}{R}} = 24\pi.$$

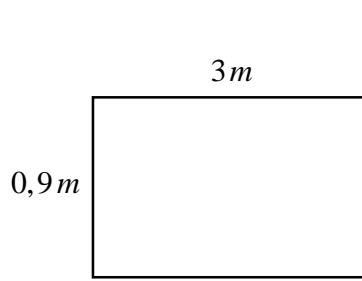
Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow 2\pi R^2 = \frac{16\pi}{R} \Leftrightarrow R = 2(\text{cm})$ .

**Câu 7. (SỞ THANH HÓA)** Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{\ln^2 x}{x}$  trên đoạn  $[1; e^3]$  là

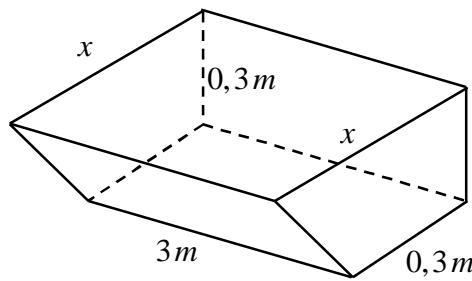
$$M = \frac{m}{e^n}, \text{ trong đó } m, n \text{ là các số tự nhiên. Tính } S = m^2 + 2n^3.$$

A.  $S = 135$ .      B.  $S = 24$ .      C.  $S = 22$ .      D.  $S = 32$ .

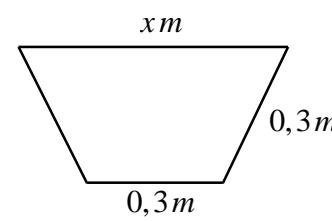
**Câu 8. (Lương Thế Vinh)** Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước  $0,9m \times 3m$  người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối (bị cắt bởi mặt phẳng song song với hai mặt đáy) là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ có chiều cao bằng chiều dài của tấm tôn. Hỏi  $x(m)$  bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



(a) Tấm



(b) Máng



(c) Mặt cắt

A.  $x = 0,5m$ .

B.  $x = 0,65m$ .

C.  $x = 0,4m$ .

D.  $x = 0,6m$ .

**Hướng dẫn giải.****Chọn D.**

Gọi  $h$  là chiều cao của lăng trụ

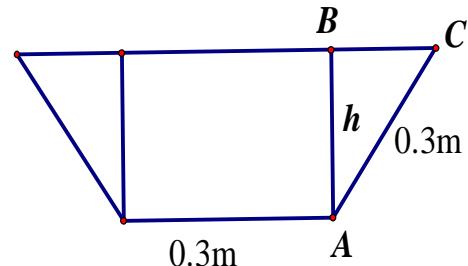
Vì chiều cao lăng trụ bằng chiều dài tấm tôn nên thể tích máng xối lớn nhất khi diện tích hình thang cân (mặt cắt) lớn nhất

$$\text{Ta có } S = \frac{h}{2}(x+0,3)$$

$$BC = \frac{x-0,3}{2} (x > 0,3)$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{(0,3)^2 - \frac{(x-0,3)^2}{4}}$$

$$\text{ĐK: } (0,3)^2 - \frac{(x-0,3)^2}{4} > 0; (0,3 < x < 0,9)$$



Khi đó:

$$S = \frac{1}{4}(x+0,3)\sqrt{4.(0,3)^2 - (x-0,3)^2}$$

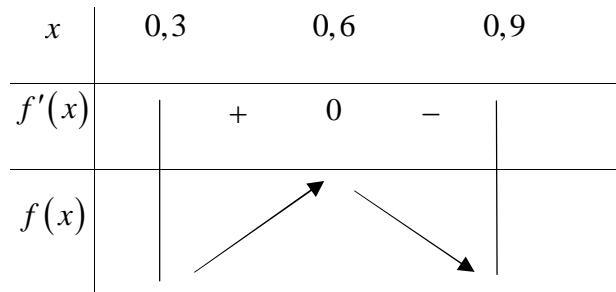
Xét hàm số

$$f(x) = (x+0,3)\sqrt{4.(0,3)^2 - (x-0,3)^2}; (0,3 < x < 0,9)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{4.(0,3)^2 - (x-0,3)^2} + (x+0,3) \frac{-2(x-0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2 - (x-0,3)^2}}$$

$$= \frac{4.(0,3)^2 - (x-0,3)^2 - (x+0,3)(x-0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2 - (x-0,3)^2}} = \frac{0,36 - 2x(x-0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2 - (x-0,3)^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 0,3x + 0,18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,3 \\ x = 0,6 \end{cases}$$



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $f(x)$  lớn nhất khi  $x = 0,6$

Vậy thể tích máng xối lớn nhất khi  $x = 0,6m$ .

**Câu 9. (SỞ HẢI PHÒNG)** Một sợi dây kim loại dài  $0,9m$  được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành tam giác đều, đoạn thứ hai được uốn thành hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Tìm độ dài cạnh của tam giác đều (tính theo đơn vị  $cm$ ) sao cho tổng diện tích của tam giác và hình chữ nhật là nhỏ nhất.

- A.  $\frac{60}{2-\sqrt{3}}$ .      B.  $\frac{60}{\sqrt{3}+2}$ .      C.  $\frac{30}{1+\sqrt{3}}$ .      D.  $\frac{240}{\sqrt{3}+8}$ .

Hướng dẫn giải

**Chọn B.**

Gọi  $a, b$  lần lượt là độ dài cạnh tam giác đều và chiều rộng hình chữ nhật.

$$\text{Khi đó } 3a + 6b = 90 \text{ (cm)} \Rightarrow b = \frac{30-a}{2} \text{ (cm).}$$

$$S = S_{\Delta} + S_{\square} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 2b^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 2\left(\frac{30-a}{2}\right)^2 = \frac{(2+\sqrt{3})a^2 - 120a + 1800}{4}.$$

Để  $S$  nhỏ nhất thì  $f(a) = (2+\sqrt{3})a^2 - 120a + 1800$  nhỏ nhất với  $a \in (0; 30)$ .

$$f'(a) = 2(2+\sqrt{3})a - 120, f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{60}{2+\sqrt{3}} \in (0; 30).$$

$$\text{Ta có } f(0) = 1800, f(30) = 900\sqrt{3}, f\left(\frac{60}{2+\sqrt{3}}\right) = 3600\sqrt{3} - 5400.$$

$$\text{Nên } \min_{a \in (0; 30)} f(a) = f\left(\frac{60}{2+\sqrt{3}}\right) = 3600\sqrt{3} - 5400.$$

Vậy  $a = \frac{60}{2+\sqrt{3}}$  thì  $S$  nhỏ nhất.

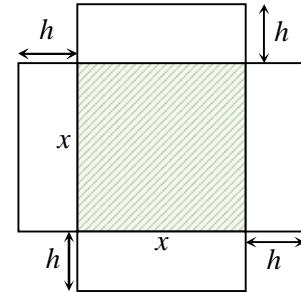
**Câu 10. (CHUYÊN TUYÊN QUANG)** Một bác thợ gò hàn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật (không nắp) bằng tôn thép tích  $665,5 \text{ dm}^3$ . Chiếc thùng này có đáy là hình vuông cạnh  $x(\text{dm})$ , chiều cao  $h(\text{dm})$ . Để làm chiếc thùng, bác thợ phải cắt một miếng tôn như hình vẽ. Tìm  $x$  để bác thợ sử dụng ít nguyên liệu nhất.

A.  $10,5(\text{dm})$ .

B.  $12(\text{dm})$ .

C.  $11(\text{dm})$ .

D.  $9(\text{dm})$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn C.**

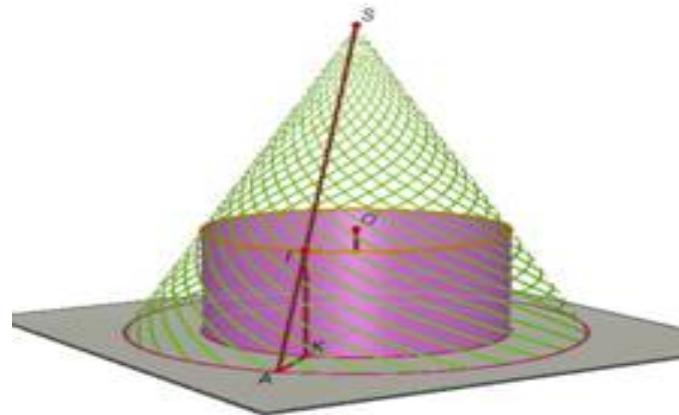
$$\text{Ta có thể tích hình hộp là: } V = x^2h = 665,5 \Rightarrow h = \frac{665,5}{x^2}$$

$$\text{Diện tích toàn phần là } S = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{2662}{x} \Rightarrow S' = 2x - \frac{2662}{x^2}; S' = 0 \Leftrightarrow x = 11$$

Lập bảng biến thiên ta thấy khi  $x = 11$  thì  $S$  đạt giá trị nhỏ nhất

Vậy để sử dụng ít nguyên liệu nhất thì bác thợ xây phải cắt một miếng tôn có đáy là hình vuông cạnh  $11(\text{dm})$ .

**Câu 11. (TAM QUAN)** Cho có định một khối nón, một khối trụ nội tiếp trong khối nón theo quy cách: một mặt đáy của khối trụ nằm trên mặt đáy khối nón, mặt đáy còn lại của khối trụ nằm trên mặt nón của khối nón. Xác định tỉ số bán kính đáy của 2 khối để thể tích khối trụ là lớn nhất



- A.  $r = \frac{2}{3}R$ .      B.  $r = \frac{R}{2}$ .      C.  $R = \frac{2\pi}{3}r$ .      D.  $R = \frac{\pi}{2}r$ .

**Câu 12. (KIM LIÊN)** Khi một kim loại được làm nóng đến  $600^{\circ}C$ , độ bền kéo của nó giảm đi 50%. Sau khi kim loại vượt qua ngưỡng  $600^{\circ}C$ , nếu kim loại tăng thêm  $5^{\circ}C$  thì độ bền kéo của nó giảm đi 35% hiện có. Biết kim loại này có độ bền kéo là  $280M Pa$  dưới  $600^{\circ}C$  và được sử dụng trong việc xây dựng các lò công nghiệp. Nếu mức an toàn tối thiểu độ bền kéo của vật liệu này là  $38M Pa$ , thì nhiệt độ an toàn tối đa của lò công nghiệp bằng bao nhiêu, tính theo độ Celsius?

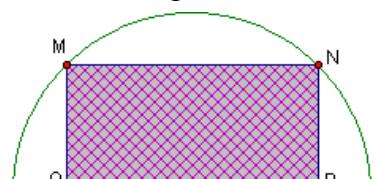
- A. 615.      B. 610.      C. 620.      D. 605.

**Câu 13. (SỞ HẢI PHÒNG)** Từ một nguyên vật liệu cho trước, một công ty muốn thiết kế bao bì để đựng sữa với thể tích  $1dm^3$ . Bao bì được thiết kế bởi một trong hai mô hình sau: hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông hoặc hình trụ. Hỏi thiết kế theo mô hình nào sẽ tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất? Và thiết kế mô hình đó theo kích thước như thế nào?

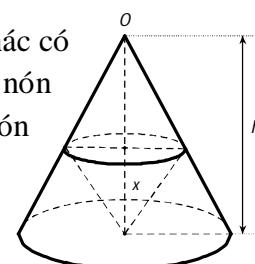
- A. Hình trụ và chiều cao bằng đường kính đáy  
B. Hình trụ và chiều cao bằng bán kính đáy  
C. Hình hộp chữ nhật và cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy  
D. Hình hộp chữ nhật và cạnh bên bằng cạnh đáy

**Câu 14. (SỞ HẢI PHÒNG)** Từ một miếng tôn hình bán nguyệt có bán kính  $R = 3$ , người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (xem hình) có diện tích lớn nhất. Diện tích tôn hình chữ nhật là:

- A.  $6\sqrt{3}$       B.  $6\sqrt{2}$   
C. 7      D. 9



**Câu 15. (SỞ HẢI PHÒNG)** Cho khối nón đỉnh  $O$ , chiều cao là  $h$ . Một khối nón khác có đỉnh là tâm  $I$  của đáy và đáy là một thiết diện song song với đáy của hình nón đã cho. Để thể tích của khối nón đỉnh  $I$  lớn nhất thì chiều cao của khối nón này bằng bao nhiêu?



A.  $\frac{h}{2}$

B.  $\frac{h}{3}$

C.  $\frac{2h}{3}$

D.  $\frac{h\sqrt{3}}{3}$

**Câu 16. (NINH GIANG)** Một sợi dây thép có chiều dài là  $8m$ , được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai được uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất:

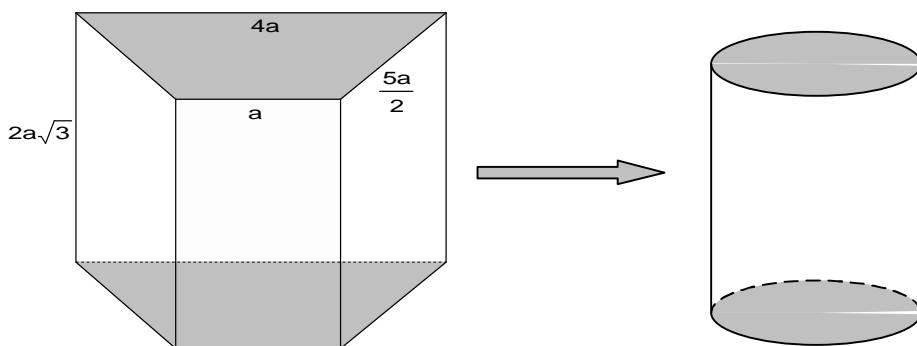
A.  $\frac{24}{9+4\sqrt{3}} m.$

B.  $\frac{24\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} m.$

C.  $\frac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} m.$

D.  $\frac{12}{4+\sqrt{3}} m.$

**Câu 17. (HÀ HUY TẬP)** Một khúc gỗ có dạng hình lăng trụ đứng với đáy là hình thang cân, đáy nhỏ bằng  $a$ , đáy lớn bằng  $4a$ , cạnh bên bằng  $\frac{5a}{2}$ ; có chiều cao bằng  $2a\sqrt{3}$ . Người ta chế tác khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình trụ (hình vẽ dưới đây). Thể tích  $V$  lớn nhất của khúc gỗ sau khi được chế tác là bao nhiêu?



A.  $V = \frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{3}.$

B.  $V = \frac{2\pi a^3 \sqrt{3}}{3}.$

C.  $V = 4\pi a^3 \sqrt{3}.$

D.  $V = 2\pi a^3 \sqrt{3}.$

**Câu 18. (HÀ HUY TẬP)** Cho hình nón có bán kính  $x$ , chiều cao  $y$  nội tiếp mặt cầu bán kính  $R = \frac{a}{2}$ .

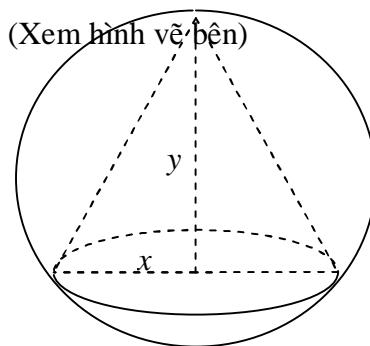
Xác định  $x, y$  sao cho khối nón có thể tích lớn nhất? (Xem hình vẽ bên)

A.  $x = \frac{2a\sqrt{2}}{3}, y = \frac{4a}{3}.$

B.  $x = y = \frac{a}{2}.$

C.  $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}, y = \frac{2a}{3}.$

D.  $x = y = \frac{2a}{3}.$



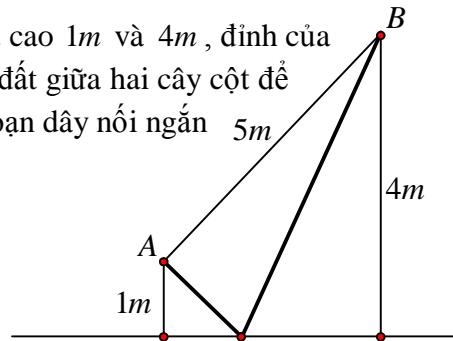
**Câu 19. (HẢI HẬU)** Có hai cây cột dựng đứng trên mặt đất lần lượt cao  $1m$  và  $4m$ , đỉnh của 2 cây cột cách nhau  $5m$ . Người ta chọn một vị trí trên mặt đất giữa hai cây cột để giăng dây nối đến hai đỉnh cột như hình bên dưới sao cho đoạn dây nối ngắn nhất. Tính độ dài dây ngắn nhất đó.

A.  $\sqrt{41}.$

B.  $\sqrt{37}.$

C.  $\sqrt{39}.$

D.  $\sqrt{29}.$



**Câu 20. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI)** Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4m được đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn ảnh). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Tính khoảng cách từ vị trí đó đến màn ảnh.

A. 1,8m .

B. 1,4m .

C.  $\frac{84}{193}m$ .

D. 2,4m .

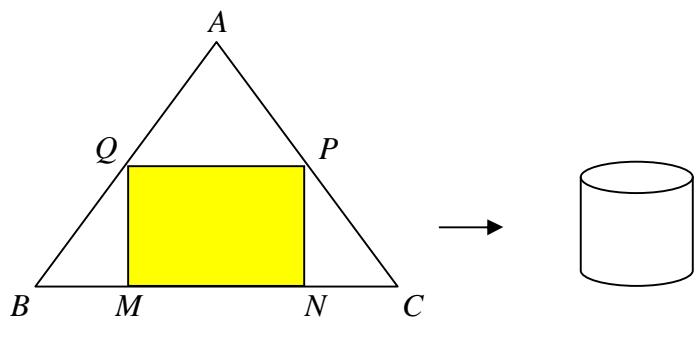
**Câu 21. (LƯƠNG ĐẮC BẰNG)** Bạn A muôn làm một chiếc thùng hình trụ không đáy từ nguyên liệu là mảnh tôn hình tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng 90 (cm). Bạn muôn cắt mảnh tôn hình chữ nhật  $MNPQ$  từ mảnh tôn nguyên liệu (với  $M, N$  thuộc cạnh  $BC$ ;  $P$  và  $Q$  tương ứng thuộc cạnh  $AC$  và  $AB$ ) để tạo thành hình trụ có chiều cao bằng  $MQ$ . Thể tích lớn nhất của chiếc thùng mà bạn A có thể làm được là:

A.  $\frac{91125}{4\pi}(cm^3)$ .

B.  $\frac{91125}{2\pi}(cm^3)$ .

C.  $\frac{108000\sqrt{3}}{\pi}(cm^3)$ .

D.  $\frac{13500\sqrt{3}}{\pi}(cm^3)$ .

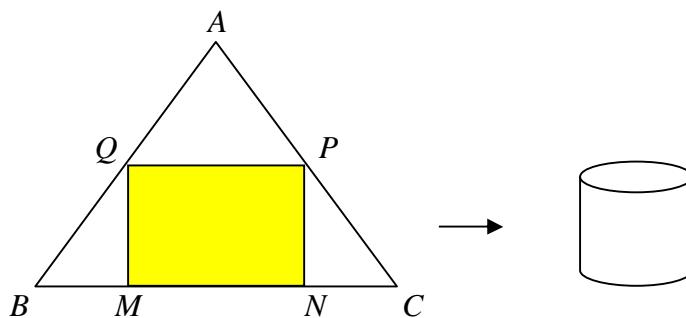


**HD:** Gọi I là trung điểm BC. Suy ra I là trung điểm MN

$$\text{Đặt } MN=x \quad (0 < x < 90); \Rightarrow \frac{MQ}{AI} = \frac{BM}{BI} \Rightarrow MQ = \frac{\sqrt{3}}{2}(90-x)$$

$$\text{Gọi R là bán kính của trụ} \Rightarrow R = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow V_T = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2}(90-x) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi}(-x^3 + 90x^2)$$

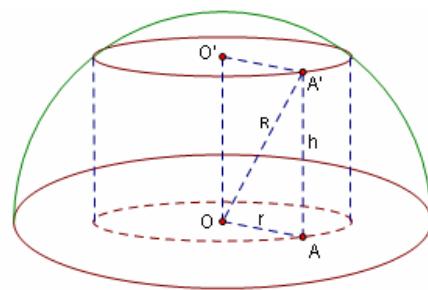
$$\text{Xét } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi}(-x^3 + 90x^2) \text{ với } 0 < x < 90. \text{ Khi đó: } \max_{x \in (0,90)} f(x) = \frac{13500\sqrt{3}}{\pi} \text{ khi } x=60.$$



**Câu 22. (QUẢNG XƯƠNG )** Khi cắt mặt cầu  $S(O, R)$  bởi một mặt kính, ta được hai nửa mặt cầu và hình tròn lớn của mặt kính đó gọi là mặt đáy của mỗi nửa mặt cầu. Một hình trụ gọi là nội tiếp nửa mặt cầu  $S(O, R)$  nếu một đáy của hình trụ nằm trong đáy của nửa mặt cầu, còn đường tròn đáy kia là giao tuyến của hình trụ với nửa mặt cầu. Biết  $R=1$ , tính bán kính đáy  $r$  và chiều cao  $h$  của hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu  $S(O, R)$  để khối trụ có thể tích lớn nhất.

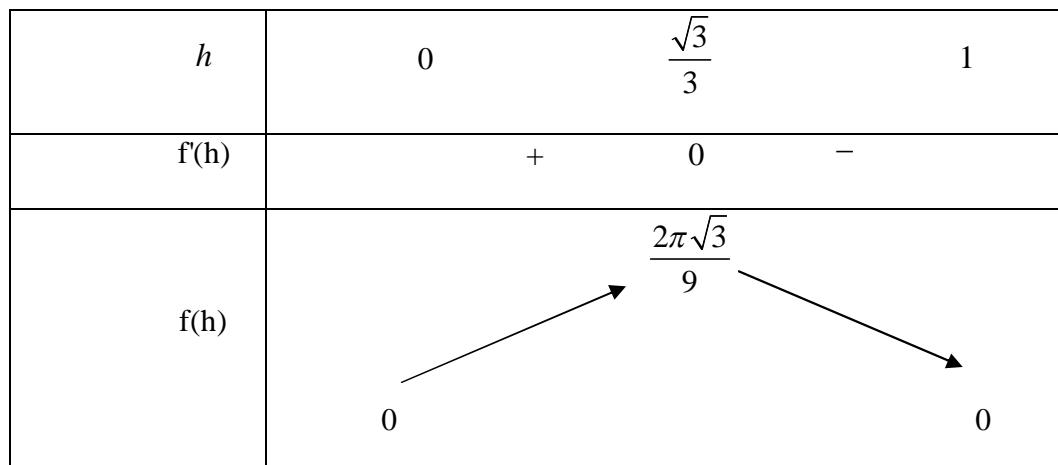
- A.  $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $h = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .      B.  $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ,  $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .      D.  $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $h = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

**Chọn C.**



Hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu, nên theo giả thiết đường tròn đáy trên có tâm  $O'$  có hình chiếu của  $O$  xuống mặt đáy ( $O'$ ). Suy ra hình trụ và nửa mặt cầu cùng chung trực đối xứng và tâm của đáy dưới hình trụ trùng với tâm  $O$  của nửa mặt cầu. Ta có:  $h^2 + r^2 = R^2$  ( $0 < h \leq R = 1$ )  $\Rightarrow r^2 = 1 - h^2$

Thể tích khối trụ là:  $V = \pi r^2 h = \pi(1 - h^2)h = f(h) \Rightarrow f'(h) = \pi(1 - 3h^2) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{3}$



Vậy:  $\underset{(0;1]}{Max} V = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$  (đvtt) khi  $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$  và  $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**Câu 23. (SỞ BẮC NINH)** Một công ty chuyên sản xuất gỗ muốn thiết kế các thùng đựng hàng bên trong dạng hình lăng trụ tứ giác đều không nắp, có thể tích là  $62,5dm^3$ . Để tiết kiệm vật liệu làm thùng, người ta cần thiết kế thùng sao cho tổng  $S$  của diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy là nhỏ nhất,  $S$  bằng

- A.  $106,25dm^2$       B.  $75dm^2$       C.  $50\sqrt{5}dm^2$       D.  $125dm^2$

**Hướng dẫn giải**

Gọi  $a$  là độ dài cạnh đáy của hình lăng trụ.

Theo bài ta có chiều cao của lăng trụ là  $\frac{62,5}{a^2}$ . Suy ra

$$S = 4 \cdot \frac{62,5}{a^2} \cdot a + a^2 = \frac{250}{a} + a^2 = \frac{125}{a} + \frac{125}{a} + a^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{125}{a} \cdot \frac{125}{a} \cdot a^2} = 75. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } a = \sqrt[3]{125} = 5. \text{ Vậy } S \text{ là nhỏ nhất bằng } 75.$$

**Câu 24. (SỞ BẮC NINH)** Cho một hình nón ( $N$ ) có đáy là hình tròn tâm  $O$ , đường kính  $2a$  và đường cao  $SO = a$ . Cho điểm  $H$  thay đổi trên đoạn thẳng  $SO$ . Mặt phẳng ( $P$ ) vuông góc với  $SO$  tại  $H$  và cắt hình nón theo đường tròn ( $C$ ). Khối nón có đỉnh là  $O$  và đáy là hình tròn ( $C$ ) có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{2\pi a^3}{81}$ .      B.  $\frac{4\pi a^3}{81}$ .      C.  $\frac{7\pi a^3}{81}$ .      D.  $\frac{8\pi a^3}{81}$ .

**Hướng dẫn giải**

Gọi ( $\alpha$ ) là mặt phẳng qua trực của hình nón ( $N$ ) cắt hình nón ( $N$ ) theo thiết là tam giác SAB, cắt hình nón đỉnh S và có đáy là đường tròn ( $C$ ) theo thiết diện là tam giác SCD, gọi I là giao điểm của SO và CD.

Ta có:  $AB = 2a \Rightarrow OA = a = SO$

Do đó tam giác SOA vuông cân tại S suy ra tam giác SIC vuông cân tại I.

Đặt  $SI = AC = x (0 < x < a) \Rightarrow OI = a - x$

Thể tích khối nón có đỉnh là  $O$  và đáy là hình tròn ( $C$ ) là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot IC^2 \cdot OI = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot (a - x) = \frac{1}{3} \pi (-x^3 + ax^2)$$

$$V'(x) = \frac{1}{3} \pi (-3x^2 + 2ax); V'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2a}{3}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

$x$	0	$\frac{2a}{3}$	$a$
$V'(x)$	0	+	0
$V$		$\frac{4\pi a^3}{81}$	

	0	0
--	---	---

**Chọn đáp án B**

**Câu 25. (CHUYÊN THÁI BÌNH)** Bạn A có một đoạn dây dài  $20m$ . Bạn chia đoạn dây thành hai phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều. Phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

- A.  $\frac{40}{9+4\sqrt{3}}m$ .      B.  $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}m$ .      C.  $\frac{120}{9+4\sqrt{3}}m$ .      D.  $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}m$ .

**Chọn B.**

Bạn A chia sợi dây thành hai phần có độ dài  $x(m)$  và  $20-x(m)$ ,  $0 < x < 20$  (như hình vẽ).

Phần đầu uốn thành tam giác đều có cạnh  $\frac{x}{3}(m)$ , diện tích  $S_1 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{36} (m^2)$

Phần còn lại uốn thành hình vuông có cạnh  $\frac{20-x}{4}(m)$ , diện tích  $S_2 = \left(\frac{20-x}{4}\right)^2 (m^2)$

Tổng diện tích hai hình nhỏ nhất khi  $f(x) = \frac{x^2 \sqrt{3}}{36} + \left(\frac{20-x}{4}\right)^2$  nhỏ nhất trên khoảng  $(0; 20)$ .

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{x\sqrt{3}}{18} - \frac{20-x}{8} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{180}{4\sqrt{3}+9}.$$

Bảng biến thiên:

$x$	0	$\frac{180}{4\sqrt{3}+9}$	20
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta được  $x = \frac{180}{4\sqrt{3}+9}$ .

**Câu 26. (HỒNG QUANG)** Trong hội trại kỉ niệm ngày thành lập Đoàn thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh 26/3, ban tổ chức phát cho mỗi lớp 1 đoạn dây dài  $18 m$  không co dãn để khoanh trên một khoảng đất trống một hình chữ nhật có các cạnh là các đoạn của sợi dây đó. Phần đất để dựng trại chính là

hình chữ nhật được tạo thành. Hỏi, diện tích lớn nhất có thể của phần đất dựng trại là bao nhiêu mét vuông?

A.  $18 \text{ m}^2$

B.  $20,25 \text{ m}^2$ .

C.  $81 \text{ m}^2$

D.  $9 \text{ m}^2$

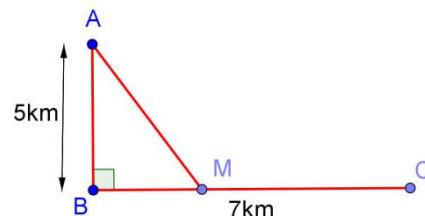
**Câu 27. (NGÔ SĨ LIÊN)** Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ 5km, trên bờ biển có một kho hàng ở vị trí C cách B một khoảng 7km. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến M trên bờ biển với vận tốc  $4\text{km/h}$  rồi đi bộ từ M đến C với vận tốc  $6\text{km/h}$ . Xác định độ dài đoạn BM để người đó đi từ A đến C nhanh nhất.

A.  $3\sqrt{2} \text{ km.}$

B.  $\frac{7}{3} \text{ km.}$

C.  $2\sqrt{5} \text{ km.}$

D.  $\frac{7}{2} \text{ km.}$



**Chọn C.**

Gọi  $BM = x$  ( $\text{km}$ ),  $0 \leq x \leq 7$ . Khi đó:  $AM = \sqrt{25 + x^2}$  và  $MC = 7 - x$

Theo đề bài ta có:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6}$

$$f'(x) = \frac{3x - 2\sqrt{25+x^2}}{4\sqrt{25+x^2}}$$

Cho  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{25+x^2} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$

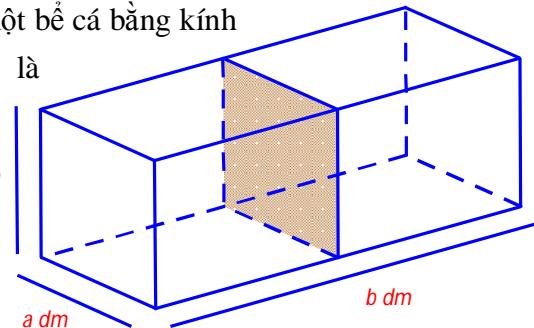
Khi đó:  $f(0) = \frac{29}{12}$ ,  $f(7) = \frac{\sqrt{74}}{4}$  và  $f(2\sqrt{5}) = \frac{14 - \sqrt{5}}{12}$

Vậy  $\min_{x \in [0;7]} f(x) = f(2\sqrt{5}) = \frac{14 - \sqrt{5}}{12}$ .

**Câu 28. (CHUYÊN KHTN)** Tại Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính

không có nắp với thể tích  $72\text{dm}^3$  và chiều cao là  $3\text{dm}$ . Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước  $a, b$  (đơn vị dm) như hình vẽ.

Tính  $a, b$  để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bể dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.



A.  $a = \sqrt{24}, b = \sqrt{24}$ .    B.  $a = 3, b = 8$ .    C.  $a = 3\sqrt{2}, b = 4\sqrt{2}$ .    D.  $a = 4, b = 6$ .

**Chọn D.**

Có:  $V = 72 \Leftrightarrow 3ab = 72 \Leftrightarrow a = \frac{24}{b}$  (1)

Bề cá tồn ít nguyên liệu nhất nghĩa là diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Ta có diện tích toàn phần của bề cá là:  $S_{tp} = 3.3a + ab + 2.b3 = \frac{216}{b} + 6b + 24$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:  $S_{tp} = \frac{216}{b} + 6b + 24 \geq 2\sqrt{\frac{216}{b}.6b} + 24 = 96$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:  $\frac{216}{b} = 6b \Leftrightarrow b = 6 (b > 0)$ . Từ (1), ta suy ra:  $a = 4$ .

**Câu 29. (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIÊU)** Nhà Văn hóa Thanh niên của thành phố X muốn trang trí đèn dây led gần cổng để đón xuân Đinh Dậu 2017 nên đã nhờ bạn Na đến giúp. Ban giám đốc Nhà Văn hóa Thanh niên chỉ cho bạn Na biết chốt chuẩn bị trang trí đã có hai trụ đèn cao áp mạ kẽm đặt cố định ở vị trí  $A$  và  $B$  có độ cao lần lượt là  $10m$  và  $30m$ , khoảng cách giữa hai trụ đèn  $24m$  và cũng yêu cầu bạn Na chọn một cái chốt ở vị trí  $M$  trên mặt đất nằm giữa hai chân trụ đèn để giăng đèn dây Led nối đèn hai đỉnh  $C$  và  $D$  của trụ đèn (như hình vẽ). Hỏi bạn Na phải đặt chốt ở vị trí cách trụ đèn  $B$  trên mặt đất là bao nhiêu để tổng độ dài của hai sợi dây đèn led ngắn nhất.

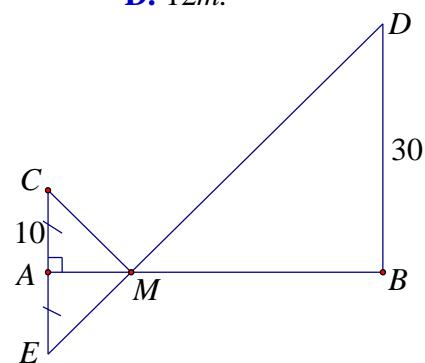
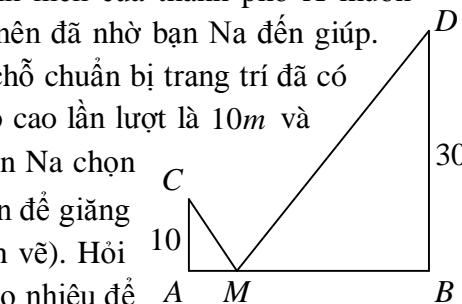
- A.  $20m$ .      B.  $6m$ .      C.  $18m$ .      D.  $12m$ .

**Chọn C.**

Gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $C$  qua  $AB$ .

Gọi  $M = DE \cap AB$ , khi đó bạn Na đặt chốt ở vị trí  $M$  thì tổng độ dài hai sợi dây đèn led ngắn nhất.

Ta có  $\frac{AE}{BD} = \frac{MA}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow MB = 3MA$ ,  
mà  $MB + MA = AB = 24$ , suy ra  $MA = 6$  và  $MB = 18$ .



**Câu 30. (LÝ THÁI TỐ)** Một nhà máy sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đậy với dung tích  $1000 cm^3$ . Bán kính của nắp đậy để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất bằng

- A.  $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} cm$ .      B.  $10\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}} cm$ .      C.  $\frac{500}{\pi} cm$ .      D.  $10\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}} cm$ .

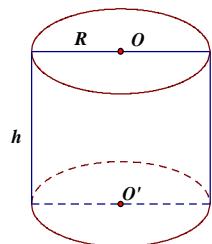
**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Gọi  $h (cm)$  là chiều cao hình trụ và  $R (cm)$  là bán kính nắp đậy.

Ta có:  $V = \pi R^2 h = 1000$ . Suy ra  $h = \frac{1000}{\pi R^2}$ .

Để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần  $S_{tp}$  của hình trụ nhỏ nhất.



Ta có:  $S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{1000}{\pi R^2}$

$$= 2\pi R^2 + \frac{1000}{R} + \frac{1000}{R} \geq 3 \sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{1000}{R} \cdot \frac{1000}{R}} = 3 \sqrt[3]{2\pi \cdot 1000^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $2\pi R^2 = \frac{1000}{R} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ .

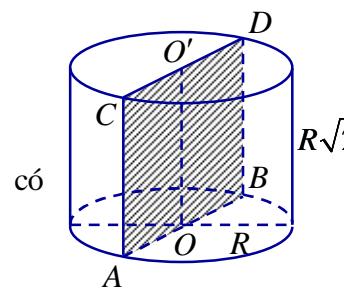
**Câu 31. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU)** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có tông diện tích của tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo  $AC'$  bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

- A. 8.      B.  $8\sqrt{2}$ .      C.  $16\sqrt{2}$ .      D.  $24\sqrt{3}$ .

**Chọn C.**

Gọi chiều dài 3 cạnh của hình hộp chữ nhật lần lượt là:  $a, b, c > 0$

Ta



$$AC'^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 36; S = 2ab + 2bc + 2ca = 36 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 72 \Rightarrow a+b+c = 6\sqrt{2}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{6\sqrt{2}}{3}\right)^3 = 16\sqrt{2}. \text{ Vậy } V_{Max} = 16\sqrt{2}$$

**Câu 32. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU)** Một miếng bìa hình tam giác đều  $ABC$ , cạnh bằng 16. Học sinh Trang cắt một hình chữ nhật  $MNPQ$  từ miếng bìa trên để làm biển trông xe cho lớp trong buổi ngoại khóa (với  $M, N$  thuộc cạnh  $BC$ ;  $P, Q$  lần lượt thuộc cạnh  $AC$  và  $AB$ ). Diện tích hình chữ nhật  $MNPQ$  lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A.  $16\sqrt{3}$ .      B.  $8\sqrt{3}$ .      C.  $32\sqrt{3}$ .      D.  $34\sqrt{3}$ .

**Chọn C.**

✓ Đặt  $MN = x, (0 < x < 16) \Rightarrow BM = \frac{16-x}{2}$

$$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{QM}{BM} \Rightarrow QM = \frac{\sqrt{3}}{2}(16-x)$$

$$\text{Xét hàm số } S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x(16-x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(-x^2 + 16x) \Rightarrow \max S = 32\sqrt{3} \text{ khi } x = 8.$$

**Câu 33. (SỞ BÌNH PHƯỚC)** Một người nuôi cá thì nghiệm trong hồ. Người đó thấy rằng nếu mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng

$P(n) = 480 - 20n$  (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

- A. 12.                    B. 14.                    C. 10.                    D. 18.

Hướng dẫn giải:

**Chọn A.**

**Cách 1:** Thé đáp án:

Số cá trên mỗi đơn vị diện tích	12	14	10	18
Số cân nặng: $(480 - 20n)n$ (gam)	2880	2800	2800	2160

**Cách 2:** Số cân nặng của  $n$  con cá là:

$$f(n) = (480 - 20n)n = -20n^2 + 480n = -20(n-12)^2 + 2880 \leq 2880$$

Vậy giá trị lớn nhất của  $f(n)$  là 2880 đạt được khi  $n = 12$ .

☞ **Chú ý:** hàm  $f$  như một hàm số theo biến số thực, chứ không phải biến số nguyên dương

**Câu 34. (CHUYÊN BIÊN HÒA)** Một nhà máy cần thiết kế một chiếc bể đựng nước hình trụ bằng tôn có nắp, có thể tích là  $64\pi(m^3)$ . Tìm bán kính đáy  $r$  của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nhiên liệu nhất.

- A.  $r = 3(m)$ .                    B.  $r = \sqrt[3]{16}(m)$ .                    C.  $r = \sqrt[3]{32}(m)$ .                    D.  $r = 4(m)$ .

Giải

**Chọn C.**

Gọi hình trụ có chiều cao  $h$ , độ dài đường sinh  $l$ , bán kính đáy  $r$ .

$$\text{Ta có: } V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{64\pi}{\pi r^2} = \frac{64}{r^2} \Rightarrow l = \frac{64}{r^2}$$

Để tốn ít nhiên liệu nhất thì diện tích toàn phần nhỏ nhất.

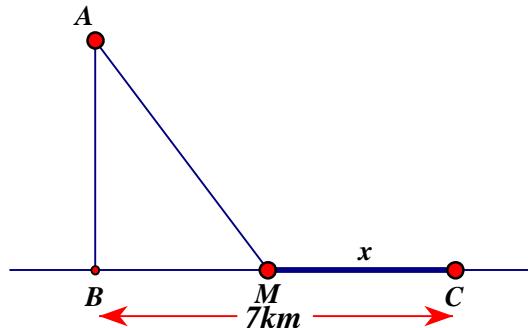
$$\text{Ta có: } S_{tp} = 2S_{day} + S_{xq} = 2\pi r^2 + 2\pi rl = 2\pi r^2 + \frac{128\pi}{r}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(r) = 2\pi r^2 + \frac{128\pi}{r} \text{ với } r > 0.$$

$$\text{Ta có } f'(r) = 4\pi r - \frac{128\pi}{r^2}; f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{32}.$$

Lập bảng biến thiên ta có  $f(r)$  đạt GTNN khi  $r = \sqrt[3]{32}$ .

**Câu 35. (TRẦN HƯNG ĐẠO)** Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí  $A$  cách bờ biển một khoảng  $AB = 4\text{ (km)}$ . Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí  $C$  cách  $B$  một khoảng  $BC = 7\text{ (km)}$ . Người canh hải đăng phải chèo đò từ vị trí  $A$  đến vị trí  $M$  trên bờ biển với vận tốc  $6\text{ (km/h)}$  rồi đi xe đạp từ  $M$  đến  $C$  với vận tốc  $10\text{ (km/h)}$  (hình vẽ bên). Xác định khoảng cách từ  $M$  đến  $C$  để người đó đi từ  $A$  đến  $C$  là nhanh nhất.



- A.  $6\text{ km}$ .      B.  $3\text{ km}$ .      C.  $4\text{ km}$ .      D.  $9\text{ km}$ .

#### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Quãng đường  $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{16 + (7-x)^2} \Rightarrow$  thời gian đi quãng đường  $AM$  là  $\frac{\sqrt{16 + (7-x)^2}}{6}$  (giờ). Quãng đường  $MC = x \Rightarrow$  thời gian đi quãng đường  $MC$  là  $\frac{x}{10}$  (giờ)

Tổng thời gian đi từ  $A$  đến  $C$  là  $y = \frac{1}{6}\sqrt{16 + (7-x)^2} + \frac{1}{10}x$  (với  $0 \leq x \leq 7$ )

Đạo hàm  $y' = \frac{1}{6} \cdot \frac{x-7}{\sqrt{16 + (7-x)^2}} + \frac{1}{10}; y' = 0 \Leftrightarrow 6\sqrt{16 + (7-x)^2} = 10(7-x) \Leftrightarrow x = 4$

Giá trị  $y(0) = \frac{1}{6}\sqrt{65}, y(7) = \frac{41}{30}, y(4) = \frac{17}{15}$

Vậy GTNN là  $y(4) = \frac{17}{15}$ , tức là khoảng cách  $x = 4$  (km).

**Câu 36. (LƯƠNG VĂN CHÁNH)** Người ta muốn dùng vật liệu băng kim loại để gò thành một thùng hình trụ tròn xoay có hai đáy với thể tích  $V$  cho trước (hai đáy cũng dùng chính vật liệu đó). Hãy xác định chiều cao  $h$  và bán kính  $R$  của hình trụ theo  $V$  để tốn ít vật liệu nhất.

- A.  $R = 2h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ .      B.  $R = 2h = 2\sqrt{\frac{V}{2\pi}}$ .      C.  $h = 2R = 2\sqrt{\frac{V}{2\pi}}$ .      D.  $h = 2R = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ .

#### Hướng dẫn giải

Chọn D.

Để vật liệu tốn ít nhất thì diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất.

Ta có:  $S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$ .

Do  $V = \pi R^2 h$  nên  $h = \frac{V}{\pi R^2}$ . Suy ra

$$S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{V}{R} + \frac{V}{R} \geq 3 \sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{V}{R} \cdot \frac{V}{R}} = 3 \sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

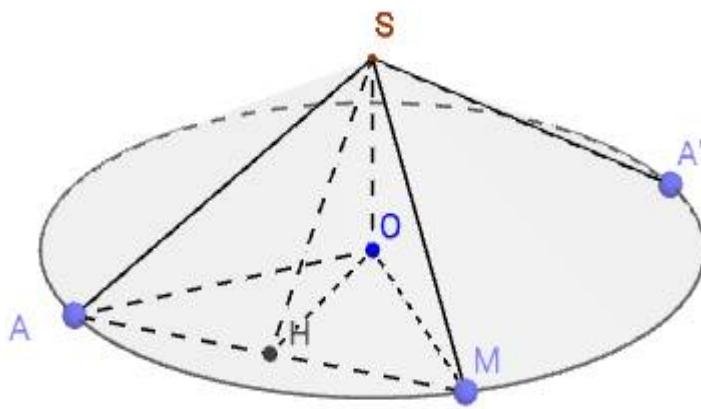
Đẳng thức xảy ra khi  $2\pi R^2 = \frac{V}{R} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ . Khi đó  $h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ .

**Câu 37. (LUÔNG VĂN CHÁNH)** Cho hình nón đỉnh  $S$ , đáy là hình tròn tâm  $O$ , góc ở đỉnh bằng  $120^\circ$ . Trên đường tròn đáy, lấy điểm  $A$  cố định và điểm  $M$  di động. Có bao nhiêu vị trí điểm của điểm  $M$  để diện tích tam giác  $SAM$  đạt giá trị lớn nhất?  $120^\circ$

- A. 2.                    B. 3.                    C. 1.                    D. vô số.

### Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi  $r$  là bán kính đáy của hình nón. Vì góc ở đỉnh  $\widehat{ASA'} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 60^\circ$ .

Suy ra  $SO = OA \cdot \cot \widehat{ASO} = \frac{r}{\sqrt{3}}$ . Gọi  $H$  là trung điểm của  $AM$  và đặt  $x = OH$ .

Ta có:  $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{r^2}{3} + x^2}$ ,  $AM = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ .

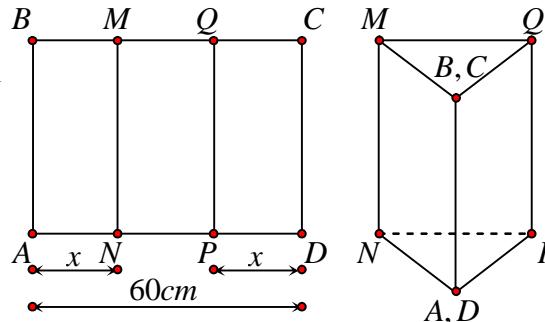
Diện tích tam giác  $\Delta SAM$  bằng

$$s = \frac{1}{2} SH \cdot AM = \sqrt{\frac{r^2}{3} + x^2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \leq \frac{2}{3} r^2.$$

$s_{\max} = \frac{2}{3}r^2$  đạt được khi  $\frac{r^2}{3} + x^2 = r^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{r^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{r}{\sqrt{3}}$ . Tức là  $OH = SO$ .

**Câu 38. (BẮC YÊN THÀNH)** Cho một tấm nhôm hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AD = 60cm$ ,  $AB = 40cm$ . Ta gấp tấm nhôm theo hai cạnh  $MN$  và  $PQ$  vào phía trong cho đến khi  $AB$  và  $DC$  trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Khi đó có thể tạo được khối lăng trụ với thể tích lớn nhất bằng

- A.  $4000\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$       B.  $2000\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$   
 C.  $400\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$       D.  $4000\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$



**Chọn A.**

Đáy của lăng trụ là tam giác cân có cạnh bên bằng  $x$ , cạnh đáy bằng  $60 - 2x$

Đường cao tam giác đó là  $AH = \sqrt{x^2 - \left(\frac{60-2x}{2}\right)^2} = \sqrt{60x-900}$ , với  $H$  là trung điểm  $NP$

Diện tích đáy là

$$S = S_{ANP} = \frac{1}{2}AH \cdot NP = \sqrt{60x-900} \cdot (30-x) = \frac{1}{30}\sqrt{(60x-900)(900-30x)(900-30x)}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{1}{30}\sqrt{\left(\frac{900}{3}\right)^3} = 100\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

Diện tích đáy lớn nhất là  $100\sqrt{3} \text{ cm}^2$  nên thể tích lớn nhất là  $V = 40 \cdot 100\sqrt{3} = 4000\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$ .

**Câu 39. (SỞ HÀ NỘI)** Cho mặt cầu ( $S$ ) bán kính  $R$ . Một hình trụ có chiều cao  $h$  và bán kính đáy  $r$  thay đổi nội tiếp mặt cầu. Tính chiều cao  $h$  theo  $R$  sao cho diện tích xung quanh của hình trụ lớn nhất.

- A.  $h = R\sqrt{2}$ .      B.  $h = R$ .      C.  $h = \frac{R}{2}$ .      D.  $h = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ .

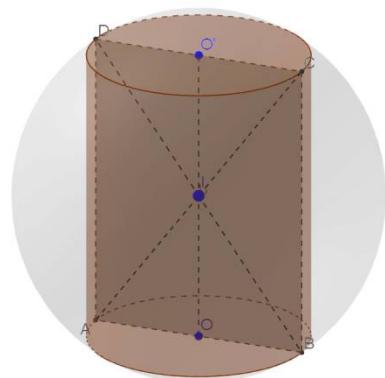
**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Gọi  $O$  và  $O'$  là tâm hai hình tròn đáy của hình trụ, và xét thiết diện  $ABCD$  đi qua trục của hình trụ như hình vẽ trên đây.

Ta có  $OO' = h$ ;  $IA = R$ ,  $AO = r \Rightarrow r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ .

Diện tích xung quanh của hình trụ



$$S = 2\pi rh = \pi h \sqrt{4R^2 - h^2} \leq \pi \frac{h^2 + 4R^2 - h^2}{2}, \quad (\text{dùng BĐT})$$

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Vậy  $S_{\max} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow h^2 = 4R^2 - h^2 \Leftrightarrow h = R\sqrt{2}$ .

**Câu 40. (TT ĐIỆU HIỀN)** Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng  $\frac{500}{3} m^3$ . Đây hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là  $500.000$  đồng/m<sup>2</sup>. Khi đó, kích thước của hồ nước để chi phí thuê nhân công thấp nhất là

- A. Chiều dài  $20$  m, chiều rộng  $10$  m và chiều cao  $\frac{5}{6}m$ .
- B. Chiều dài  $30$  m, chiều rộng  $15$  m và chiều cao  $\frac{10}{27}m$ .
- C. Chiều dài  $20$  m, chiều rộng  $15$  m và chiều cao  $\frac{20}{3}m$ .
- D. Chiều dài  $10$  m, chiều rộng  $5$  m và chiều cao  $\frac{10}{3}m$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn C**

Gọi  $x, y$  lần lượt là chiều rộng và chiều cao của khối hộp ( $x, y > 0$ ).

Diện tích đáy khối hộp  $S = 2x^2$ . Thể tích khối hộp  $V = 2x^2y = \frac{500}{3} \Rightarrow y = \frac{250}{3x^2}$ .

Diện tích xung quanh khối hộp  $S_{xq} = 2xy + 2(2x)y = 6xy$ .

Diện tích cần xây là  $S_{xq} + S = 2x^2 + 6xy = 2x^2 + \frac{500}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{500}{x} \cdot \frac{500}{x}} = 150$ .

Dấu bằng xảy ra khi chỉ khi  $x = 5 \Rightarrow y = \frac{10}{3}$

Vậy chiều dài bằng  $10$ , chiều rộng bằng  $5$ , chiều cao bằng  $\frac{10}{3}$ .

**Câu 41. (TT ĐIỆU HIỀN)** Một người nông dân rào một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là  $10.000 m^2$ . Biết rằng bờ rào ở các cạnh phía bắc và phía nam giá  $1500 / m$ , bờ rào ở các cạnh phía đông và phía tây giá  $6000 / m$ . Để chi phí thấp nhất thì kích thước Đông - Tây, Bắc - Nam của mảnh vườn là:

- A.  $50m, 200m$ .
- B.  $200m, 50m$ .
- C.  $40m, 250m$ .
- D.  $100m, 100m$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn A**

Đặt chiều dài bờ rào Bắc-Nam là  $x(m)$

Đặt chiều dài bờ rào Đông-Tây là  $y(m)$

Ta có  $S = xy = 10000(m^2)$

Số tiền xây bờ rào là  $1500.2x + 6000.2y = 3000(x + 4y) \geq 6000\sqrt{4xy} = 1200000$

Để chi phí thấp nhất khi  $x = 4y \Rightarrow xy = 4y^2 = 10000 \Rightarrow y = 50(m) \Rightarrow x = 200(m)$

**Câu 42. (TT ĐIỆU HIỀN)** Một thùng chứa hình trụ kín, có thể tích  $5000m^3$ . Vật liệu để làm hai đáy có giá  $250000/m^2$ , vật liệu làm phần còn lại có giá  $400000/m^2$ . Để chi phí thấp nhất, chiều cao  $h$  và bán kính đáy của thùng chứa là:

A.  $\left( \frac{25}{\sqrt[3]{2\pi}}, 10\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \right)$ .

B.  $\left( 10\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}, \frac{25}{\sqrt[3]{2\pi}} \right)$ .

C.  $\left( 10\sqrt[3]{4\pi}, \frac{25}{\sqrt[3]{2\pi}} \right)$ .

D.  $\left( \frac{25}{\sqrt[3]{2\pi}}, 10\sqrt[3]{4\pi} \right)$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

$$V = \pi R^2 h = 5000 \Rightarrow h = \frac{5000}{\pi R^2}$$

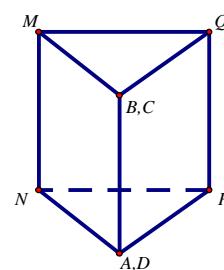
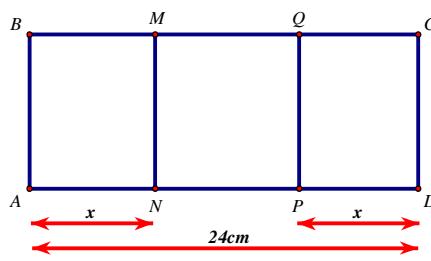
$$S_{tp} = 2\pi Rh \cdot 4 \cdot 10^5 + 2\pi R^2 \cdot 25 \cdot 10^4 = 2\pi \left( \frac{2 \cdot 10^9}{\pi R} + 25 \cdot 10^4 R^2 \right)$$

$$= 2\pi \left( \frac{10^9}{\pi R} + \frac{10^9}{\pi R} + 25 \cdot 10^4 \cdot R^2 \right) \geq 2\pi \cdot 3\sqrt[3]{\frac{25 \cdot 10^{22}}{\pi^2}}$$

$$\Rightarrow \text{Chi phí thấp nhất khi } \frac{10^9}{\pi R} = 25 \cdot 10^4 \cdot R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 10^3}{\pi}} = 10\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{25}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

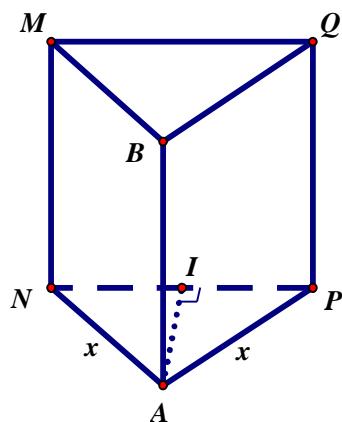
**Câu 43. (HAI BÀ TRUNG)** Cho một tấm nhôm hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AD = 24cm$ . Ta gấp tấm nhôm theo hai cạnh  $MN$  và  $QP$  vào phía trong đến khi  $AB$  và  $CD$  trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Tìm  $x$  để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?



- A.  $x = 9$ .      B.  $x = 8$ .      C.  $x = 10$ .      D.  $x = 6$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**



- Gọi  $I$  là trung điểm  $NP \Rightarrow IA$  đường cao của  $\Delta ANP$  cân tại  $A \Rightarrow AI = \sqrt{x^2 - (12-x)^2} = \sqrt{24(x-6)} \Rightarrow$  diện tích đáy  $S_{ANP} = \frac{1}{2} \cdot NP \cdot AI = (12-x) \cdot \sqrt{24(x-6)}$ , với  $6 \leq x \leq 12 \Rightarrow$  thể tích khối lăng trụ là  $V = S_{ANP} \cdot MN = a \cdot (12-x) \cdot \sqrt{24(x-6)}$  (đặt  $MN = a$ : hằng số dương)

- Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = (12-x) \cdot \sqrt{24(x-6)}$ , ( $6 \leq x \leq 12$ ):

$$+ y' = \left[ -\sqrt{24(x-6)} + \frac{12(12-x)}{\sqrt{24(x-6)}} \right] = \frac{-36x + 288}{\sqrt{24(x-6)}}, y' = 0 \Leftrightarrow x = 8 \in (6;12)$$

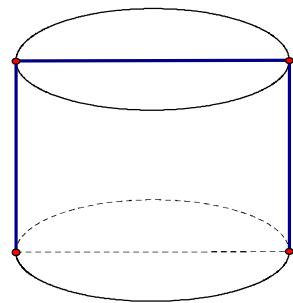
+ Tính giá trị:  $y(8) = 16\sqrt{3}$ ,  $y(6) = 0$ ,  $y(12) = 0$

- Thể tích khối trụ lớn nhất khi  $x = 8$ .

**Câu 44. (PHAN ĐÌNH PHÙNG)** Một đơn vị sản xuất hộp đựng thuôc dung tích  $2 dm^3$  dạng hình trụ có đáy là hình tròn. Nhà sản xuất chọn bán kính đáy của hình hộp gần với số nào để ít tốn vật liệu nhất?

- A.  $1,37dm$ .      B.  $1dm$ .  
C.  $2dm$ .      D.  $0,68dm$ .

**Hướng dẫn giải.**



**Chọn D.**

Ta có  $V = \pi R^2 \cdot h = 2(dm^3)$ .

$$S_{tp} = 2\pi R^2 + \pi Rh + \pi Rh \geq 3\sqrt[3]{2\pi(\pi R^2 h)^2} = 6\sqrt[3]{\pi}$$

$$S_{tp} = 6\sqrt[3]{\pi} \Leftrightarrow 2R = h$$

$$\text{Suy ra: } \pi R^2 \cdot 2R = 2 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 0,68$$

**Câu 45. (CHUYÊN QUANG TRUNG)** Người ta muôn mạ vàng cho bể mặt phia ngoài của một cái hộp dạng hình hộp đứng không nắp (nắp trên), có đáy là một hình vuông. Tìm chiều cao của hộp để lượng vàng phải dùng để mạ là ít nhất, biết lớp mạ ở mọi nơi như nhau, giao giữa các mặt là không đáng kể và thể tích của hộp là  $4 dm^3$

- A. 1 dm.      B. 1,5 dm.      C. 2 dm.      D. 0,5 dm.

**Hướng dẫn giải****Chọn A**

Gọi  $x, y (x, y > 0)$  lần lượt là độ dài cạnh đáy, chiều cao của hình hộp.

$$\text{Thể tích khối hộp là } V = x^2 y \Leftrightarrow 4 = x^2 y \Leftrightarrow y = \frac{4}{x^2}$$

Diện tích cần mạ vàng  $S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{16}{x} = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3\sqrt[3]{64}$  đạt giá trị nhỏ nhất khi chỉ khi  $x = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$

**Câu 46. (CHUYÊN QUANG TRUNG)** Gia đình An xây bể hình trụ có thể tích  $150 m^3$ . Đáy bể làm bằng bê tông giá  $100000 đ/m^2$ . Phần thân làm bằng tôn giá  $90000 đ/m^2$ , nắp bằng nhôm giá  $120000 đ/m^2$ . Hỏi khi chi phí sản suất để bể đạt mức thấp nhất thì tỷ số giữa chiều cao bể và bán kính đáy là bao nhiêu?

- A.  $\frac{22}{9}$ .      B.  $\frac{9}{22}$ .      C.  $\frac{31}{22}$ .      D.  $\frac{21}{32}$ .

**Hướng dẫn giải:****Chọn A**

$$\text{Ta có: } V = 150 \Leftrightarrow \pi R^2 h = 150 \Rightarrow h = \frac{150}{\pi R^2}$$

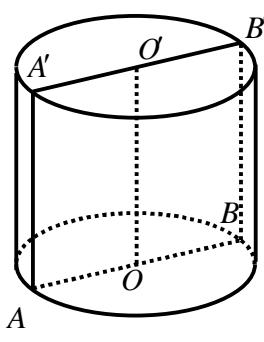
$$\text{Mà ta có: } f(R) = 100000\pi R^2 + 120000\pi R^2 + 180000\pi Rh$$

$$f(R) = 220000\pi R^2 + 180000\pi R \frac{150}{\pi R^2} = 220000\pi R^2 + \frac{27000000}{R}$$

Để chi phí thấp nhất thì hàm số  $f(R)$  đạt giá trị nhỏ nhất với mọi  $R > 0$

$$f'(R) = 440000\pi R - \frac{27000000}{R^2} = \frac{440000\pi R^3 - 27000000}{R^2}, \text{ cho } f'(R) = 0 \Rightarrow R = \frac{30}{\sqrt[3]{440\pi}}$$

Lập BBT, từ BBT suy ra  $\min_{R>0} f(R)$  khi  $R = \frac{30}{\sqrt[3]{440\pi}}$



$$\text{Nên } \frac{h}{R} = \frac{150}{\pi R^3} = \frac{22}{9}$$

**Câu 47. (CHUYÊN BẮC GIANG)** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng  $P(n) = 480 - 20n$  (gam). Tính số con cá phải thả trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất

A. 14.

B. 12.

C. 15.

D. 13.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có  $P(n) = 480 - 20n \Rightarrow$  trọng lượng cá thu được là  $n(480 - 20n)$

Xét hàm  $f(n) = 480n - 20n^2 \Rightarrow \max_R f(n) = 2880 \Leftrightarrow n = 12$

$$\text{Với } I_1 = \int_1^e \left( \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x \right) dx = \left[ \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{16} \right]_1^e = \frac{2e^4 + e^2 - 3}{16}$$

$$I_2 = \int_1^e \left( -\frac{1}{4}x \ln x \right) dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1) \Big|_1^e = -\frac{1}{16} e^2 - \frac{1}{16}$$

$$I_3 = \int_1^e \left( -\frac{1}{16} \frac{\ln x}{x} \right) dx = -\frac{1}{32} \ln^2 x \Big|_1^e = -\frac{1}{32}.$$

**Cách 2.**

Học sinh có thể trực tiếp bấm máy tính tích phân  $S = 2\pi \int_1^e \left| \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right| \sqrt{1 + \left( x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2} \right)} dx$  để có kết quả

**Câu 4. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ LẦN 8)** Cho hàm số  $y = \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2$ . Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng  $\frac{64}{15}$  là

- A.  $\emptyset$ .      B.  $\{\pm 1\}$ .      C.  $\left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm 1 \right\}$ .      D.  $\left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm 1 \right\}$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn B.**

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$

$$y' = 2x^3 - 4m^2x = 2x(x^2 - 2m^2); \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2}m \\ x = -\sqrt{2}m \end{cases}$$

Đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu  $\Leftrightarrow m \neq 0$

Vì  $a = \frac{1}{2} > 0$  nên hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$  suy ra điểm cực đại của đồ thị hàm số là  $A(0; 2)$

Đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại có phương trình là  $d : y = 2$ .

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(C_m)$  và  $d$  là:

$$\frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2|m| \\ x = -2|m| \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là: (chú ý rằng hàm số đã cho là hàm chẵn)

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2|m|}^{2|m|} \left| \frac{x^4}{2} - 2m^2 x^2 \right| dx = 2 \int_0^{2|m|} \left| \frac{x^4}{2} - 2m^2 x^2 \right| dx = 2 \left| \int_0^{2|m|} \left( \frac{x^4}{2} - 2m^2 x^2 \right) dx \right| \\ &= 2 \left| \left[ \frac{x^5}{10} - \frac{2}{3} m^2 x^3 \right] \Big|_0^{2|m|} \right| = \frac{64}{15} |m|^5 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } S = \frac{64}{15} \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

**Câu 5.** (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ LẦN 8) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số  $y = x^2 \sqrt{x^2 + 1}$ , trục  $Ox$  và đường thẳng  $x = 1$  bằng  $\frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{c}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương.

Khi đó giá trị của  $a + b + c$  là

- A. 11.                      B. 12.                      C. 13.                      D. 14.

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

**Cách 1 (dùng máy tính):**

Phương trình hoành độ giao điểm  $x^2 \sqrt{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Diện tích hình phẳng cần tìm là  $S = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx$  vì  $x^2 \sqrt{x^2 + 1} \geq 0, \forall x \in [0; 1]$ .

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{c}$$

**Bước 1:** Bấm máy tính tích phân  $S = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx = 0,4201583875$  (**Lưu D**)

**Bước 2: Cơ sở : Tìm nghiệm nguyên của phương trình**

$D = \frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{c} \Leftrightarrow c = \frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{D}$  (coi  $c = f(x)$ ,  $a = x$ ,  $b \in \mathbb{Z}$  và ta thử các giá trị  $b = \dots -5; -4; \dots 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ )

**Thử với  $b = 1$  :**

**Thử với  $b = 2$  :** Mode + 7

$F(X) = \frac{X\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})}{D};$	Start? <input type="checkbox"/> Math	End? <input type="checkbox"/> Math
Step? <input type="checkbox"/> Math	-9	9

Step? <input type="checkbox"/> Math
1

Kết quả:  $a = 3; c = 8, b = 2$

x <input type="checkbox"/> Math	F(x) <input type="checkbox"/> Math
1.2 <input type="checkbox"/> Math	1.2681 <input type="checkbox"/> Math
1.3 <input type="checkbox"/> Math	1.4634 <input type="checkbox"/> Math
8	

Cách 2 (giải tự luận):

Phương trình hoành độ giao điểm  $x^2\sqrt{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Diện tích hình phẳng cần tìm là  $S = \int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1} dx$  vì  $x^2\sqrt{x^2+1} \geq 0, \forall x \in [0;1]$ .

Đặt  $x = \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt$

Đổi cận  $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Khi đó } S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t \sqrt{1 + \tan^2 t} (1 + \tan^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t \cdot \cos t}{(\cos^2 t)^3} dt$$

Đặt  $u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt$

Đổi cận  $t = 0 \Rightarrow u = 0; t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^2}{(1-u^2)^3} du = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-(1-u^2)}{(1-u^2)^3} du = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{1}{(1-u^2)^3} - \frac{1}{(1-u^2)^2} \right) du$$

$$\text{Ta có } H = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1-u^2)^3} du = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{1-u+1+u}{(1-u)(1+u)} \right)^3 du = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right)^3 du$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{1}{(1+u)^3} + \frac{1}{(1-u)^3} + \frac{3}{1-u^2} \left( \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) \right) du$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{1}{(1+u)^3} + \frac{1}{(1-u)^3} + \frac{6}{(1-u^2)^2} \right) du$$

$$= \left( \frac{-1}{16(1+u)^2} + \frac{1}{16(1-u)^2} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2} du$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2} du$$

Tính  $K = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2} du$

$$K = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2} du = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{1-u+1+u}{(1-u)(1+u)} \right)^2 du = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right)^2 du$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{2}{(1-u)(1+u)} \right) du = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} + \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})$$

$$\text{Vậy } H = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8} = \frac{7\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8}$$

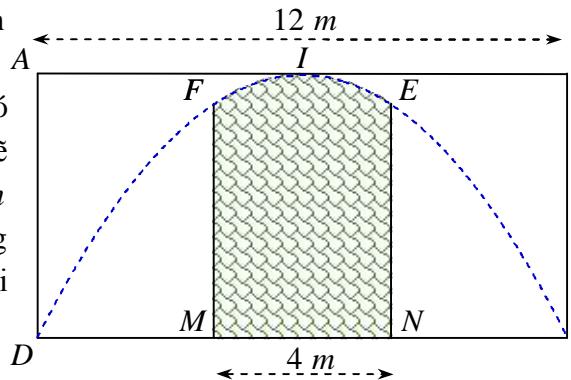
Khi đó  $S = \frac{7\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8} - \frac{1}{6}K$

$$= \frac{7\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8} - \frac{1}{6}(3\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})) = \frac{3\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})}{8}$$

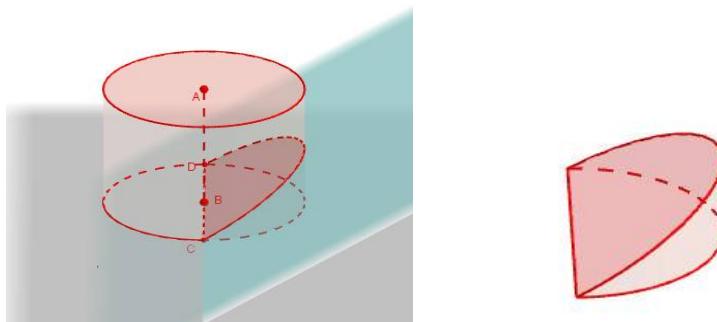
**Câu 6. (SỞ THANH HÓA)** Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình  $MNEIF$  ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật  $ABCD$  có chiều cao  $BC = 6 m$ , chiều dài  $CD = 12 m$  (hình vẽ bên). Cho biết  $MNEF$  là hình chữ nhật có  $MN = 4 m$ ; cung  $EIF$  có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh  $I$  là trung điểm của cạnh  $AB$  và đi qua hai điểm  $C, D$ . Kinh phí làm bức tranh là  $900.000$  đồng/ $m^2$ .

Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?

- A. 20.400.000 đồng. B. 20.600.000 đồng. C. 20.800.000 đồng. D. 21.200.000 đồng.



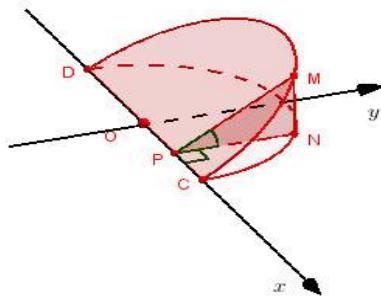
**Câu 7.** (QUẢNG XƯƠNG) Một vật thể bằng gỗ có dạng khối trụ với bán kính đáy bằng  $10\text{ cm}$ . Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng có giao tuyến với đáy là một đường kính của đáy và tạo với đáy góc  $45^\circ$ . Thể tích của khối gỗ bé là



- A.  $\frac{2000}{3}(\text{cm}^3)$ .      B.  $\frac{1000}{3}(\text{cm}^3)$ .      C.  $\frac{2000}{7}(\text{cm}^3)$ .      D.  $\frac{2000}{9}(\text{cm}^3)$ .

**Hướng dẫn giải.**

**Chọn A.**



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó khúc gỗ bé có đáy là nửa hình tròn có phương trình:  
 $y = \sqrt{100 - x^2}$ ,  $x \in [-10, 10]$

Một mặt phẳng cắt vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$ ,  $x \in [-10, 10]$

cắt khúc gỗ bé theo thiết diện có diện tích là  $S(x)$  (xem hình).

Dễ thấy  $NP = y$  và  $MN = NP \tan 45^\circ = y = \sqrt{100 - x^2}$ .

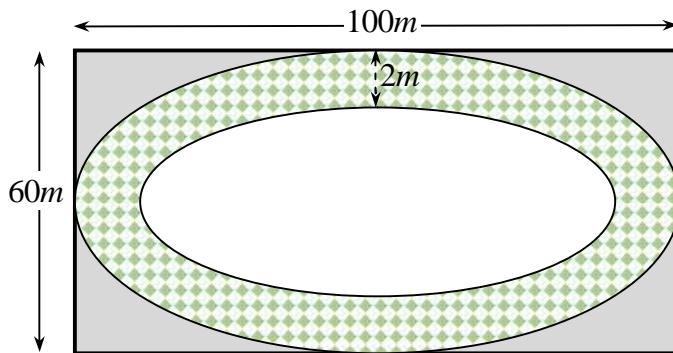
Suy ra  $S(x) = \frac{1}{2}MN \cdot PN = \frac{1}{2}(100 - x^2)$

Khi đó thể tích khúc gỗ bé là:  $V = \int_{-10}^{10} S(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-10}^{10} (100 - x^2) dx = \frac{2000}{3}(\text{cm}^3)$ .

**Câu 8.** (HÀ HUY TẬP) Một sân chơi dành cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài  $50m$  và chiều rộng là  $30m$  người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip và chiều rộng của mặt đường là  $2m$ . Kinh phí để làm

mỗi  $m^2$  làm đường 500.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)

**Câu 9. (HÀ HUY TẬP)** Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 và chiều rộng là 60m người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trực lớn và trực bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là 2m. Kinh phí cho mỗi  $m^2$  làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 293904000.

B. 283904000.

C. 293804000.

D. 283604000.

Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

Xét hệ trục tọa độ  $Oxy$  đặt gốc tọa độ  $O$  vào tâm của hình Elip.

Phương trình Elip của đường viền ngoài của con đường là  $(E_1): \frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{30^2} = 1$ . Phản đồ thị của  $(E_1)$  nằm phía trên trục hoành có phương trình  $y = 30\sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}} = f_1(x)$ .

Phương trình Elip của đường viền trong của con đường là  $(E_2): \frac{x^2}{48^2} + \frac{y^2}{28^2} = 1$ . Phản đồ thị của  $(E_2)$  nằm phía trên trục hoành có phương trình  $y = 28\sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}} = f_2(x)$ .

Gọi  $S_1$  là diện tích của  $(E_1)$  và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số  $y = f_1(x)$ . Gọi  $S_2$  là diện tích của  $(E_2)$  và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số  $y = f_2(x)$ .

Gọi  $S$  là diện tích con đường. Khi đó

$$S = S_1 - S_2 = 2 \int_{-50}^{50} 30\sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}} dx - 2 \int_{-48}^{48} 28\sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}} dx.$$

$$\text{Tích tích phân } I = 2 \int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx, (a, b \in \mathbb{R}^+).$$

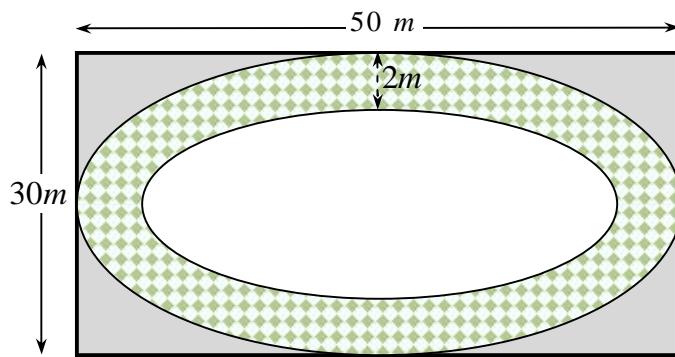
Đặt  $x = a \sin t, \left( -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow dx = a \cos t dt$ .

Đổi cận  $x = -a \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ .

$$\text{Khi đó } I = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ = ab \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi.$$

Do đó  $S = S_1 - S_2 = 50.30\pi - 48.28\pi = 156\pi$ .

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là  $600000.S = 600000.156\pi \approx 294053000$  (đồng).



- A. 119000000.      B. 152000000.      C. 119320000.      D. 125520000.**

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Gọi  $S$  là diện tích của elip  $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ta có  $S = \pi ab$ .

$$\text{Chứng minh } S = \int_{-a}^a b \left( \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) dx = \pi ab$$

Xét hệ trục tọa độ  $Oxy$  sao cho trục hoành và trục tung lần lượt là các trục đối xứng của hình chữ nhật trong đó trục hoành dọc theo chiều dài của hình chữ nhật.

Gọi  $(E_1)$  là elip lớn,  $(E_2)$  là elip nhỏ ta có:

$(E_1): \frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1 \Rightarrow$  Diện tích của nó là  $S_1 = \pi \cdot 25 \cdot 15 = 375\pi.$

$(E_2): \frac{x^2}{23^2} + \frac{y^2}{13^2} = 1 \Rightarrow$  Diện tích của nó là  $S_2 = \pi \cdot 23 \cdot 13 = 299\pi.$

Diện tích con đường là  $375\pi - 299\pi = 76\pi.$

Do đó số tiền đầu tư là  $76\pi * 500.000 \approx 119320000$

**Câu 10. (SỞ BẮC GIANG)** Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây

Người ta đo được đường kính của miệng ly là  $4\text{cm}$  và chiều cao là  $6\text{cm}$ . Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích  $V(\text{cm}^3)$  của vật thể đã cho.

A.  $V = 12\pi.$

B.  $V = 12.$

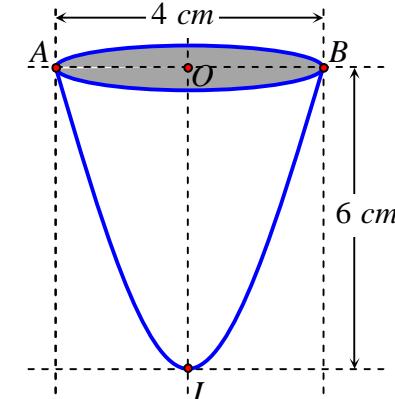
C.  $V = \frac{72}{5}\pi.$

D.  $V = \frac{72}{5}.$

### Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

Chọn gốc tọa độ  $O$  trùng với đỉnh  $I$  của parabol  $(P)$ . Vì parabol  $(P)$  đi qua các điểm  $A(-2; 6), B(2; 6)$  và  $I(0; 0)$  nên parabol  $(P)$  có phương trình  $y = \frac{3}{2}x^2$ .



Ta có  $y = \frac{3}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}y$ . Khi đó thể tích của vật thể đã cho là  $V = \pi \int_0^6 \left( \frac{2}{3}y \right) dy = 12\pi (\text{cm}^3).$

**Câu 11. (TT ĐIỆU HIỀN)** Một đám vi trùng tại ngày thứ  $t$  có số lượng là  $N(t)$ . Biết rằng

$N'(t) = \frac{7000}{t+2}$  và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Sau 10 ngày, đám vi trùng có khoảng bao nhiêu con?

A. 322542 con.

B. 332542 con.

C. 312542 con.

D. 302542 con.

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Ta có:  $N(t) = \int \frac{7000}{t+2} dt = 7000 \ln(t+2) + C$  mà  $N(0) = 300000 \Rightarrow C = 300000 - 7000 \ln 2$

Nên  $N(t) = 7000 \ln(t+2) + 300000 - 7000 \ln 2$

Do đó:  $N(10) = 312542.$

**Câu 12. (SỞ VŨNG TÀU)** Một khối cầu có bán kính bằng  $5\text{ dm}$ , người ta cắt bỏ hai đầu bằng hai mặt phẳng vuông góc với một đường kính của khối cầu và cách tâm khối cầu một khoảng bằng  $4\text{ dm}$  để làm một chiếc lu đựng nước. Thể tích cái lu bằng

A.  $\frac{500\pi}{3} \text{ dm}^3$ .

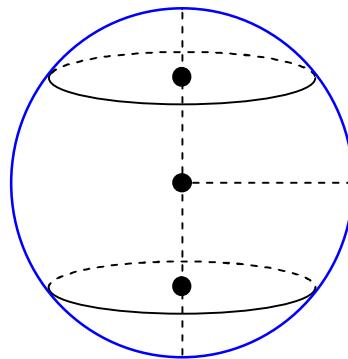
B.  $\frac{2296\pi}{15} \text{ dm}^3$ .

C.  $\frac{952\pi}{27} \text{ dm}^3$ .

D.  $\frac{472\pi}{3} \text{ dm}^3$ .

Hướng dẫn giải:

**Chọn D.**



Hai phần cắt đi có thể tích bằng nhau, mỗi phần là một chỏm cầu có thể tích  
 $V_1 = \pi \int_{d}^{R} (R^2 - x^2) dx = \pi \int_{4}^{5} (25 - x^2) dx = \frac{14\pi}{3}$

$$\text{Vậy thể tích của chiếc lu là } V = V_c - 2V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 - 2 \cdot \frac{14}{3}\pi = \frac{472\pi}{3}$$

**Câu 13. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN)** Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật  $(H)$  có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chéo là  $A(-1;0)$  và  $B(a;\sqrt{a})$ , với  $a > 0$ . Biết rằng đồ thị hàm số  $y = \sqrt{x}$  chia hình  $(H)$  thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm  $a$ .

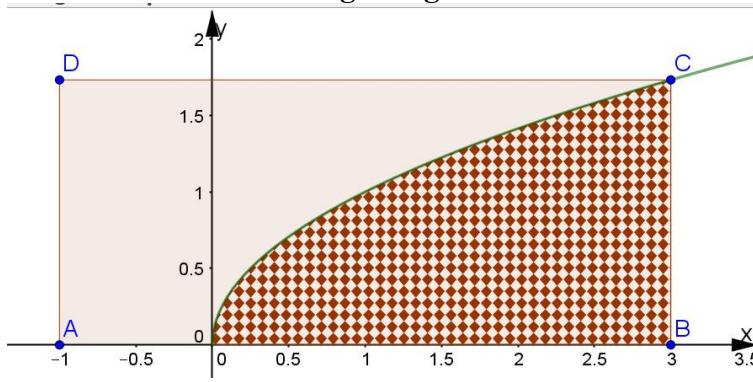
A.  $a = 9$ .

B.  $a = 4$ .

C.  $a = \frac{1}{2}$ .

D.  $a = 3$ .

Hướng dẫn giải



**Chọn D.**

Gọi  $ACBD$  là hình chữ nhật với  $AC$  nằm trên trục  $Ox$ ,  $A(-1;0)$  và  $B(a;\sqrt{a})$

Nhận thấy đồ thị hàm số  $y = \sqrt{x}$  cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 0 và đi qua  $B(a;\sqrt{a})$ . Do đó nó chia hình chữ nhật  $ACBD$  ra làm 2 phần là có diện tích lần lượt là  $S_1, S_2$ .

Gọi  $S_2$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{x}$  và trục  $Ox$ ,  $x=0, x=a$  và  $S_1$  là diện tích phần còn lại. Ta lần lượt tính  $S_1, S_2$ .

Tính diện tích  $S_2 = \int_0^a \sqrt{x} dx$ .

Đặt  $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx$ ; Khi  $x=0 \Rightarrow t=0; x=a \Rightarrow t=\sqrt{a}$ .

$$\text{Do đó } S_2 = \int_0^{\sqrt{a}} 2t^2 dt = \left( \frac{2t^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{a}} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}.$$

Hình chữ nhật  $ACBD$  có  $AC = a+1; AD = \sqrt{a}$  nên

$$S_1 = S_{ACBD} - S_2 = \sqrt{a}(a+1) - \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{a} + \sqrt{a}$$

Do đồ thị hàm số  $y = \sqrt{x}$  chia hình ( $H$ ) thành hai phần có diện tích bằng nhau nên

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{a} + \sqrt{a} \Leftrightarrow a\sqrt{a} = 3\sqrt{a} \Leftrightarrow a = 3 \text{ (Do } a > 0\text{)}$$

**Câu 14. (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIÊU)** Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá  $1(m^2)$  của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. 6.520.000 đồng.      B. 6.320.000 đồng.

C. 6.417.000 đồng.      D. 6.620.000 đồng.

### Hướng dẫn giải

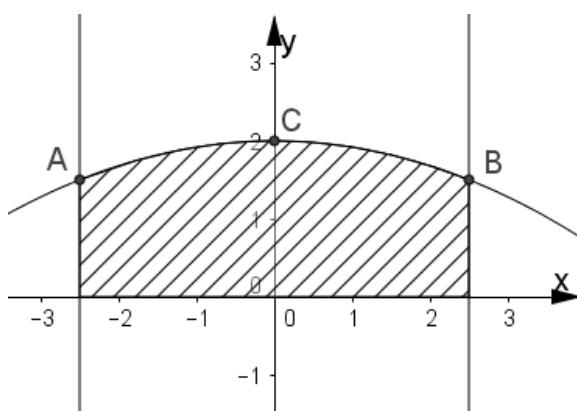
#### Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Trong đó  $A(-2,5;1,5), B(2,5;1,5), C(0;2)$ .

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng  $y = ax^2 + bx + c$ , với  $a; b; c \in \mathbb{R}$ .

Do Parabol đi qua các điểm  $A(-2,5;1,5), B(2,5;1,5), C(0;2)$  nên ta có hệ phương trình



$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình Parabol là  $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$ .

Diện tích  $S$  của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới bởi đồ thị hàm số  $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = -2,5$ ,  $x = 2,5$ .

$$\text{Ta có } S = \int_{-2,5}^{2,5} \left( -\frac{2}{25}x^2 + 2 \right) dx = \left[ -\frac{2}{25} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-2,5}^{2,5} = \frac{55}{6}.$$

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là

$$S.(700.000) = \frac{55}{6} \cdot 700000 \approx 6.417.000 \text{ (đồng)}.$$

**Câu 15. (THANH CHƯƠNG )** Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm  $O$ . Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường parabol có cùng đỉnh  $O$  và đối xứng nhau qua  $O$ . Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm  $A, B, C, D$  tạo thành một hình vuông có cạnh bằng  $4m$  (như hình vẽ). Phần diện tích  $S_1, S_2$  dùng để trồng hoa, phần diện tích  $S_3, S_4$  dùng để trồng cỏ (Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Biết kinh phí trồng hoa là  $150.000$  đồng/ $1m^2$ , kinh phí để trồng cỏ là  $100.000$  đồng/ $1m^2$ . Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn)

- A. 6.060.000 đồng.    B. 5.790.000 đồng.    C. 3.270.000 đồng.    D. 3.000.000 đồng.

### Hướng dẫn giải

#### CHỌN C.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

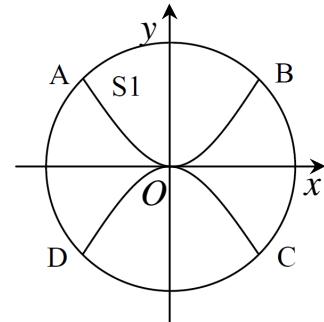
Parabol có hàm số dạng  $y = ax^2 + bx + c$  có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm  $B(2; 2)$  nên có phương trình  $y = \frac{1}{2}x^2$

Đường tròn bồn hoa có tâm là gốc tọa độ và bán kính  $OB = 2\sqrt{2}$  nên có phương trình là  $x^2 + y^2 = 8$ . Do ta chỉ xét nhánh trên của đường tròn nên ta chọn hàm số nhánh trên là  $y = \sqrt{8 - x^2}$ .

$$\text{Vậy diện tích phần } S_1 = \int_{-2}^2 \left( \sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx$$

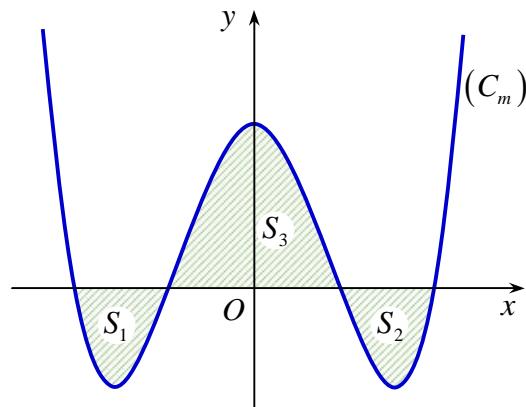
$$\text{Do đó, diện tích trồng hoa sẽ là } S_1 + S_2 = 2 \int_{-2}^2 \left( \sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \approx 15,233\dots$$

Vậy tổng số tiền để trồng bồn hoa là:  
 $15,233 \times 150.000 + \left( \pi (2\sqrt{2})^2 - 15,233 \right) \times 100.000 \approx 3.274.924 \text{ đồng.}$



Làm tròn đến hàng chục nghìn nên ta có kết quả là 3.270.000 đồng.

**Câu 16. (CHU VĂN AN)** Cho hàm số  $y = x^4 - 3x^2 + m$  có đồ thị  $(C_m)$  với  $m$  là tham số thực. Giả sử  $(C_m)$  cắt trục  $Ox$  tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ :



Gọi  $S_1$ ,  $S_2$  và  $S_3$  là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Tìm  $m$  để  $S_1 + S_2 = S_3$ .

- A.  $m = -\frac{5}{2}$ .      B.  $m = -\frac{5}{4}$ .      C.  $m = \frac{5}{2}$ .      D.  $m = \frac{5}{4}$ .

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D

Giả sử  $x = b$  là nghiệm dương lớn nhất của phương trình  $x^4 - 3x^2 + m = 0$ . Khi đó ta có

$$b^4 - 3b^2 + m = 0 \quad (1)$$

Nếu xảy ra  $S_1 + S_2 = S_3$  thì

$$\int_0^b (x^4 - 3x^2 + m) dx = 0 \Rightarrow \frac{b^5}{5} - b^3 + mb = 0 \Rightarrow \frac{b^4}{5} - b^2 + m = 0 \quad (2) \quad (\text{do } b > 0)$$

Từ (1) và (2), trừ vế theo vế ta được  $\frac{4}{5}b^4 - 2b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{5}{2}$  (do  $b > 0$ ).

Thay trở ngược vào (1) ta được  $m = \frac{5}{4}$ . (*đến đây ta đã chọn được đáp án, không cần giải tiếp*)

**Chú ý:** nếu là giải tự luận phải kiểm lại xem phải phương trình  $y = 0$  có 4 nghiệm phân biệt, đồng thời  $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$  là nghiệm dương lớn nhất hay không.

**Câu 17. (CHU VĂN AN)** Cho hai mặt cầu  $(S_1)$ ,  $(S_2)$  có cùng bán kính  $R$  thỏa mãn tính chất: tâm của  $(S_1)$  thuộc  $(S_2)$  và ngược lại. Tính thể tích phần chung  $V$  của hai khối cầu tạo bởi  $(S_1)$  và  $(S_2)$ .

A.  $V = \pi R^3$ .

B.  $V = \frac{\pi R^3}{2}$ .

C.  $V = \frac{5\pi R^3}{12}$ .

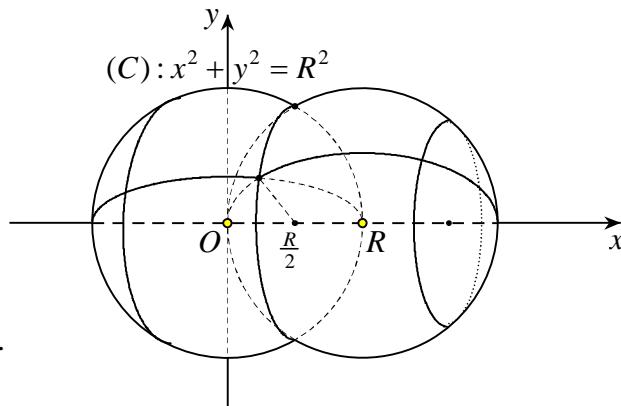
D.  $V = \frac{2\pi R^3}{5}$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn C**Gắn hệ trục  $Oxy$  như hình vẽKhối cầu  $S(O, R)$  chứa một đường tròn lớn là

$$(C): x^2 + y^2 = R^2$$

Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là

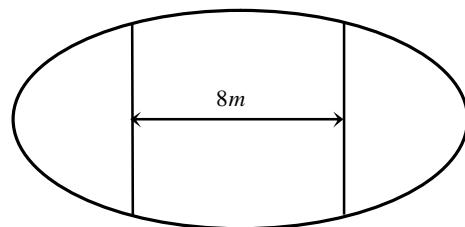
$$V = 2\pi \int_{\frac{R}{2}}^R \left( R^2 - x^2 \right) dx = 2\pi \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^R = \frac{5\pi R^3}{12}.$$

**Câu 18. (THẦY HIẾU LIVE )** Một đám vi trùng tại ngày thứ  $t$  có số lượng là  $N(t)$ . Biết rằng

$N'(t) = \frac{4000}{1+0,5t}$  và lúc đầu đám vi trùng có 250.000 con. Sau 10 ngày số lượng vi trùng là  
 (lấy xấp xỉ hàng đơn vị)

**A. 264334 con****B. 257167 con****C. 258959 con****D. 253584 con****Câu 19. (Lạc Hồng)** Dòng điện xoay chiều chạy trong dây dẫn có tần số góc  $\omega$ . Điện lượng chuyển qua  
 tiết diện thẳng của dây dẫn trong  $\frac{1}{6}$  chu kì dòng điện kể từ lúc dòng điện bằng không là  $Q_1$ .

Cường độ dòng điện cực đại là:

**A.  $6Q_1\omega$ .****B.  $2Q_1\omega$ .****C.  $Q_1\omega$ .****D.  $\frac{1}{2}Q_1\omega$ .****Câu 20. (LÊ QUÝ ĐÔN)** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: Nếu trên  
 mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng :  
 $P(n) = 480 - 20n$ . Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau  
 một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.**A. 12****B. 22****C. 24****D. 26****(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2)** Ông An có một mảnh vườn hình elip  
 có độ dài trục lớn bằng  $16m$  và độ dài trục bé bằng  $10m$ . Ông  
 muốn trồng hoa trên một dải đất rộng  $8m$  và nhận trục bé của  
 elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa  
 là  $100.000$  đồng/ $m^2$ . Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng  
 hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).**A. 7.862.000 đồng.****B. 7.653.000 đồng.****C. 7.128.000 đồng.****D. 7.826.000 đồng.****HƯỚNG DẪN GIẢI**

---

Chon B.

Giả sử elip có phương trình  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , với  $a > b > 0$ .

Từ giả thiết ta có  $2a = 16 \Rightarrow a = 8$  và  $2b = 10 \Rightarrow b = 5$

Vậy phương trình của elip là  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_1) \\ y = \frac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_2) \end{cases}$

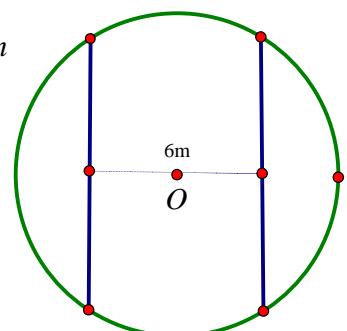
Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường  $(E_1)$ ;  $(E_2)$ ;  $x = -4$ ;  $x = 4$  và diện tích

$$\text{của dải vuờn là } S = 2 \int_{-4}^4 \frac{5}{8} \sqrt{64 - x^2} dx = \frac{5}{2} \int_0^4 \sqrt{64 - x^2} dx$$

Tích tích phân này bằng phép đổi biến  $x = 8 \sin t$ , ta được  $S = 80 \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

Khi đó số tiền là  $T = 80 \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 100000 = 7652891,82 \approx 7.653.000$ .

**Câu 21. (QUẢNG XƯƠNG)** Một mảnh vườn hình tròn tâm  $O$  bán kính  $6m$ . Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng  $6m$  nhận  $O$  làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là  $70000$  đồng/ $m^2$ . Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



## Chọn D

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn , khi đó phương trình đường tròn tâm O là

$x^2 + y^2 = 36$ . Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục  $Ox$  có phương trình  $y = \sqrt{36 - x^2} = f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị  $y = f(x)$  và hai đường thẳng  $x = -3$ ;  $x = 3$

$$\Rightarrow S = 2 \int_{-3}^3 \sqrt{36 - x^2} dx$$

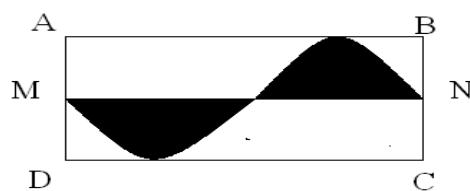
Đặt  $x = 6 \sin t \Rightarrow dx = 6 \cos t dt$ . Đổi cận:  $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$ ;  $x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S = 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 36 \cos^2 t dt = 36 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1) dt = 18(\sin 2t + 2t) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3} + 12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là  $70000.S \approx 4821322$  đồng

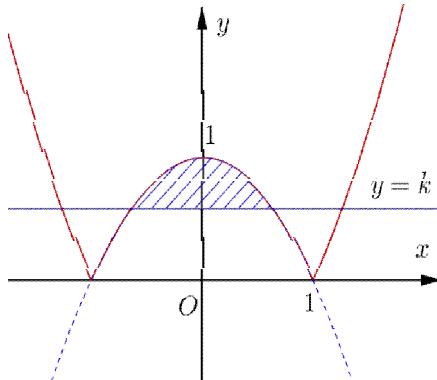
**Câu 22. (ĐÚC THỌ)** Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen được giới hạn bởi cạnh  $AB$ ,  $CD$ , đường trung bình  $MN$  của mảnh đất hình chữ nhật  $ABCD$  và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết  $AB = 2\pi(m)$ ,  $AD = 2(m)$ . Tính diện tích phần còn lại.

- A.  $4\pi - 1$ .      B.  $4(\pi - 1)$ .      C.  $4\pi - 2$ .      D.  $4\pi - 3$ .



**Câu 23. (PHAN ĐÌNH PHÙNG)** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = |x^2 - 1|$  và  $y = k$ ,  $0 < k < 1$ . Tìm  $k$  để diện tích của hình phẳng  $(H)$  gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ bên.

- A.  $k = \sqrt[3]{4}$ .  
B.  $k = \sqrt[3]{2} - 1$ .  
C.  $k = \frac{1}{2}$ .  
D.  $k = \sqrt[3]{4} - 1$ .

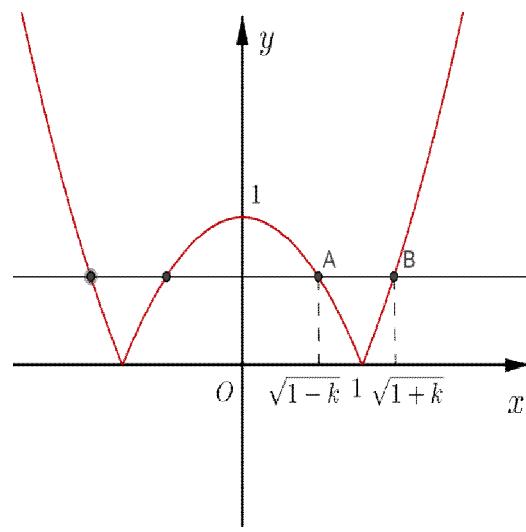


**Chọn D.**

Do đồ thị nhận trục  $Oy$  làm trục đối xứng nên yêu cầu bài toán trở thành:

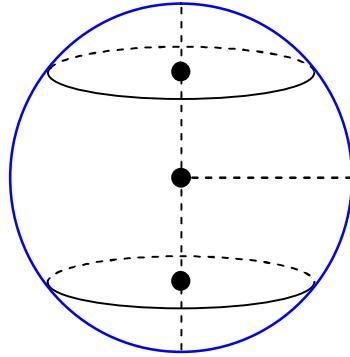
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = 1 - x^2$ ,  $y = k$ ,  $x = 0$  bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

$$y = 1 - x^2, y = x^2 - 1, y = k, x > 0.$$



$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{1-k}} (1-x^2-k) dx = \\ & \int_{\sqrt{1-k}}^1 (k-1+x^2) dx + \int_1^{\sqrt{1+k}} (k-x^2+1) dx. \\ \Leftrightarrow & (1-k)\sqrt{1-k} - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} \\ = & \frac{1}{3}(1-k) - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} + (1-k)\sqrt{1-k} \\ + & (1+k)\sqrt{1+k} - \frac{1}{3}(1+k)\sqrt{1+k} - (1+k) + \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{3}(1+k)\sqrt{1+k} = \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{1+k})^3 = 2 \\ \Leftrightarrow & k = \sqrt[3]{4} - 1. \end{aligned}$$

**Câu 24. (SỞ BÌNH PHƯỚC)** Một khối cầu có bán kính là  $5(dm)$ , người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng  $3(dm)$  để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chưa được.



- A.  $\frac{100}{3}\pi(dm^3)$       B.  $\frac{43}{3}\pi(dm^3)$       C.  $41\pi(dm^3)$       D.  $132\pi(dm^3)$

### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

**Cách 1:** Trên hệ trục tọa độ  $Oxy$ , xét đường tròn  $(C): (x-5)^2 + y^2 = 25$ . Ta thấy nếu cho nửa trên trục  $Ox$  của  $(C)$  quay quanh trục  $Ox$  ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi nửa trên trục  $Ox$  của  $(C)$ , trục  $Ox$ , hai đường thẳng  $x=0, x=2$  quay xung quanh trục  $Ox$  ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài.

Ta có  $(x-5)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{25-(x-5)^2}$

⇒ Nửa trên trục  $Ox$  của  $(C)$  có phương trình  $y = \sqrt{25 - (x-5)^2} = \sqrt{10x - x^2}$

⇒ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho  $(H)$  quay quanh  $Ox$  là:

$$V_1 = \pi \int_0^5 (10x - x^2) dx = \pi \left( 5x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^5 = \frac{52\pi}{3}$$

$$\text{Thể tích khối cầu là: } V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3}$$

$$\text{Thể tích cần tìm: } V = V_2 - 2V_1 = \frac{500\pi}{3} - 2 \cdot \frac{52\pi}{3} = 132\pi \left( dm^3 \right)$$

**Cách 2:** Hai phần cắt đi có thể tích bằng nhau, mỗi phần là một chỏm cầu có thể tích

$$V_1 = \pi \int_d^R (R^2 - x^2) dx = \pi \int_3^5 (25 - x^2) dx = \frac{52\pi}{3}$$

$$\text{Vậy thể tích của chiếc lu là } V = V_c - 2V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 - 2 \cdot \frac{52\pi}{3} = 132\pi$$

**Câu 25. (CHUYÊN BIÊN HÒA)** Parabol  $y = \frac{x^2}{2}$  chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng

$2\sqrt{2}$  thành hai phần có diện tích là  $S_1$  và  $S_2$ , trong đó  $S_1 < S_2$ . Tìm tỉ số  $\frac{S_1}{S_2}$ .

- A.  $\frac{3\pi + 2}{21\pi - 2}$ .      B.  $\frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$ .      C.  $\frac{3\pi + 2}{12\pi}$ .      D.  $\frac{9\pi - 2}{3\pi + 2}$ .

Giải

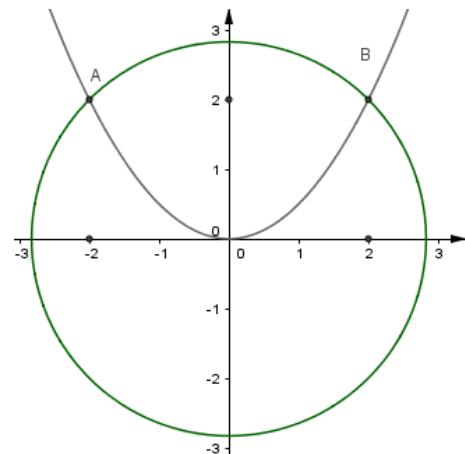
Chọn B.

Diện tích hình tròn là  $S = \pi r^2 = 8\pi$ .

$$\text{Ta có } S_1 = \int_{-2}^2 \left| \sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right| dx = 2\pi + \frac{4}{3}$$

$$\text{Suy ra } S_2 = S - S_1 = 6\pi - \frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}.$$



**Câu 26. (CHUYÊN HƯNG YÊN)** Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hóa có dạng hình parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao 8m và rộng 8m.

A.  $\frac{128}{3}m^2$ .

B.  $\frac{131}{3}m^2$ .

C.  $\frac{28}{3}m^2$ .

D.  $\frac{26}{3}m^2$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn A.**

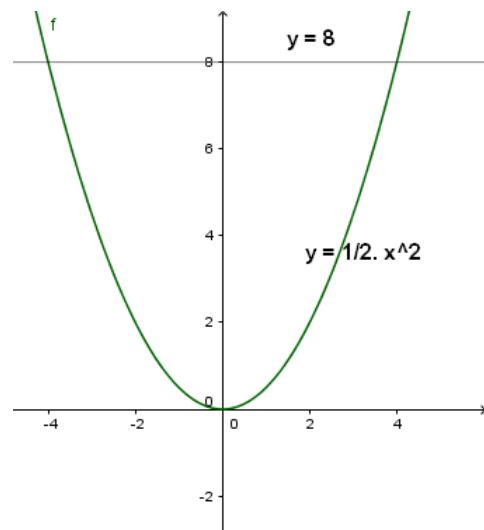
Chọn hệ trục tọa độ  $Oxy$  như hình vẽ. Khi đó, vòm cửa được giới hạn bởi các đường  $y = \frac{1}{2}x^2$ ,  $y = 8$ .

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{2}x^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$$

Diện tích vòm cửa là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^4 \left(8 - \frac{1}{2}x^2\right) dx \\ &= \left(8x - \frac{1}{6}x^3\right) \Big|_{-4}^4 = \frac{128}{3} \end{aligned}$$



**Câu 27. (CHUYÊN HƯNG YÊN)** Cho parabol  $(P): y = x^2 + 1$  và đường thẳng  $d: y = mx + 2$ . Biết rằng tồn tại  $m$  để diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(P)$  và  $d$  đạt giá trị nhỏ nhất, tính diện tích nhỏ nhất đó.

A.  $S = 0$ .

B.  $S = \frac{4}{3}$ .

C.  $S = \frac{2}{3}$ .

D.  $S = 4$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(P)$  và  $d$  là  $x^2 + 1 = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0$  (\*)

Ta có  $\Delta = m^2 + 4 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ . Nên phương trình (\*) luôn có 2 nghiệm phân biệt  $x = a$  và  $x = b$  ( $a < b$ ). Do đó  $(P)$  luôn cắt  $d$  tại 2 điểm phân biệt  $A(a; ma + 2)$  và  $B(b; mb + 2)$ .

Với mọi  $m$ , đường thẳng  $d$  luôn đi qua điểm  $M(0; 2)$ . Mà  $y_{CT} = 1$ .

Suy ra  $mx + 2 \geq x^2 + 1, \forall x \in [a; b]$ .

Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(P)$  và  $d$  là

$$\begin{aligned}
 S &= \int_a^b \left( mx + 2 - (x^2 + 1) \right) dx = \int_a^b \left( mx + 1 - x^2 \right) dx = \left[ \frac{mx}{2} + x - \frac{x^3}{3} \right]_a^b \\
 &= (b-a) \left[ \frac{m}{2}(b+a) + 1 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + ab) \right] = (b-a) \left[ \frac{m}{2}(b+a) + 1 - \frac{1}{3}(a+b)^2 + \frac{1}{3}ab \right] \\
 \Rightarrow S^2 &= (b-a)^2 \left[ \frac{m}{2}(b+a) + 1 - \frac{1}{3}(a+b)^2 + \frac{1}{3}ab \right]^2 \\
 &= \left[ (b+a)^2 - 4ab \right] \left[ \frac{m}{2}(b+a) + 1 - \frac{1}{3}(a+b)^2 + \frac{1}{3}ab \right]^2
 \end{aligned}$$

Vì  $a, b$  là nghiệm của phương trình (\*) nên ta có  $\begin{cases} a+b=m \\ ab=-1 \end{cases}$ .

$$\text{Khi đó } S^2 = (m^2 + 4) \left( \frac{m^2}{6} + \frac{2}{3} \right)^2 \geq 4 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi  $m=0$ . Vậy  $S_{\min} = \frac{4}{3}$ .

**Câu 28. (TRẦN HƯNG ĐẠO)** Khi quan sát một đám vi khuẩn trong phòng thí nghiệm người ta thấy tại ngày thứ  $x$  có số lượng  $N(x)$  con. Biết rằng  $N'(x) = \frac{2017}{x+1}$  và lúc đầu đám vi khuẩn có 30000 con. Hỏi số lượng vi khuẩn sau đúng một tuần gần với số nào sau đây?

- A. 36194.      B. 38417.      C. 35194.      D. 34194.

### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

Ta có:  $\int \frac{2017}{x+1} dx = 2017 \ln|x+1| + C$ . Theo giả thiết  $N(0) = 30000 \Rightarrow C = 30000$ .

Suy ra  $N(x) = 2017 \ln|x+1| + 30000$ .

Vậy số lượng vi khuẩn sau một tuần là  $N(7) = 2017 \ln 8 + 30000 \approx 34194$

**Câu 29. (LẠNG GIANG)** Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số  $B'(t) = \frac{1000}{(1+0,3t)^2}, t \geq 0$ , trong đó  $B(t)$  là số lượng vi khuẩn trên mỗi  $ml$  nước tại ngày thứ  $t$ . Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên một  $ml$  nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi  $ml$  nước. Hỏi vào ngày thứ bao nhiêu thì nước trong hồ không còn an toàn nữa?

- A. 9      B. 10.      C. 11.      D. 12.

### Hướng dẫn giải

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \int B'(t) dt = \int \frac{1000}{(1+0,3t)^2} dt = -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)} + C$$

$$\text{Mà } B(0) = 500 \Leftrightarrow -\frac{10000}{3(1+0,30)} + C = 500 \Leftrightarrow C = \frac{11500}{3}$$

$$\text{Do đó: } B(t) = -\frac{10000}{3(1+0,3t)} + \frac{11500}{3}$$

$$\text{Nước trong hồ vẫn an toàn khi chỉ khi } B(t) < 3000 \Leftrightarrow -\frac{10000}{3(1+0,3t)} + \frac{11500}{3} < 3000 \Leftrightarrow t < 10$$

Vậy kể từ ngày thứ 10, nước hồ không còn an toàn.

**Câu 30. (TRẦN HƯNG ĐẠO)** Một đám vi trùng tại ngày thứ  $t$  có số lượng là  $N(t)$ . Biết rằng

$N'(t) = \frac{4000}{1+0,5t}$  và lúc đầu đám vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng là bao nhiêu?

- A. 258 959 con .      B. 253 584 con .      C. 257 167 con .      D. 264 334 con .

### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

$$\text{Ta có: } N(t) = \int N'(t) dt = \int \frac{4000}{1+0,5t} dt = 8000 \cdot \ln|1+0,5t| + C$$

Mà số lượng vi trùng ban đầu bằng 250000 con nên  $C = 250000$ .

$$\text{Do đó: } N(t) = 8000 \cdot \ln|1+0,5t| + 250000 .$$

Vậy sau 10 ngày số lượng vi trùng bằng:  $N(10) = 8000 \cdot \ln 6 + 250000 = 264334$  con.

**Câu 31. (NGUYỄN KHUYẾN)** Người ta thay nước mới cho một bể bơi dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu  $h_1 = 280 \text{ cm}$ . Giả sử  $h(t) \text{ cm}$  là chiều cao của mực nước bơm được tại thời điểm  $t$  giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao nước tại giây thứ  $t$  là  $h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3}$ . Hỏi sau bao lâu thì nước bơm được  $\frac{3}{4}$  độ sâu của hồ bơi?

- A. 7545,2 s .      B. 7234,8 s .      C. 7200,7 s .      D. 7560,5 s .

**Chọn B.**

Sau  $m$  giây mức nước của bể là:

$$h(m) = \int_0^m h'(t) dt = \int_0^m \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3} dt = \left[ \frac{3\sqrt[3]{(t+3)^4}}{2000} \right]_0^m = \frac{3}{2000} \left[ \sqrt[3]{(m+3)^4} - 3\sqrt[3]{3} \right]$$

Yêu cầu bài toán, ta có:  $\frac{3}{2000} \left[ \sqrt[3]{(m+3)^4} - 3\sqrt[3]{3} \right] = \frac{3}{4} 280$ . Suy ra:

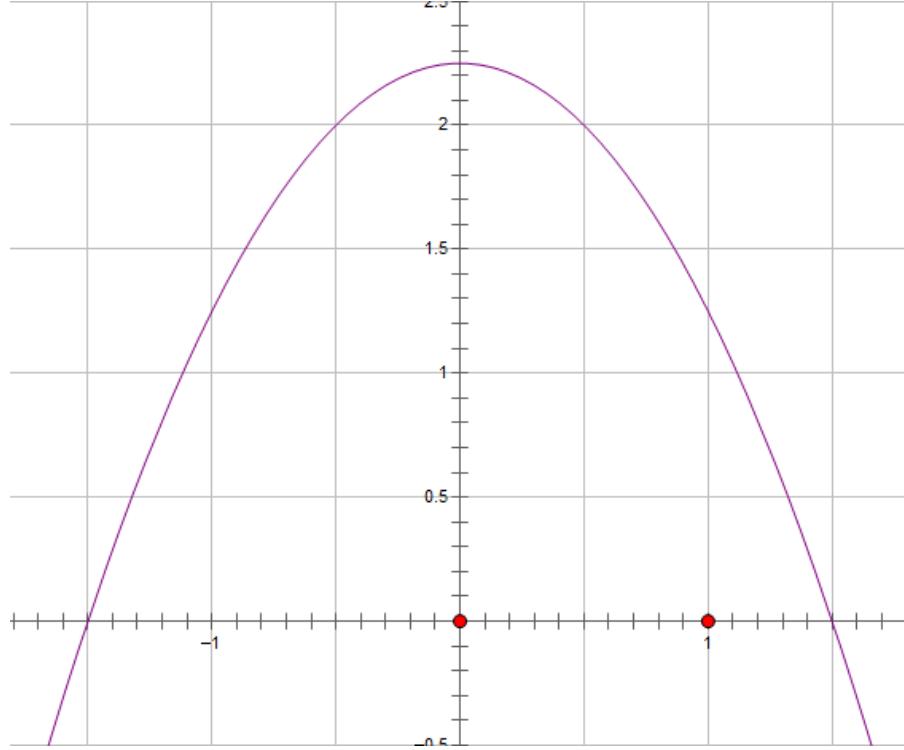
$$\sqrt[3]{(m+3)^4} = 140000 + 3\sqrt[3]{3} \Leftrightarrow m = \sqrt[4]{(140000 + 3\sqrt[3]{3})^3} - 3 = 7234,8.$$

**Câu 32. (TT ĐIỆU HIỀN)** Thầy Tâm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền Thầy Tâm phải trả là:

- A. 12750000 đồng.      B. 3750000 đồng.      C. 6750000 đồng.      D. 33750000 đồng.

### Hướng dẫn giải

**Chọn C**



Chọn hệ trục như hình vẽ. Phương trình Parabol là  $y = -x^2 + \frac{9}{4}$ .

$$\text{Diện tích mái vòm là } S = \left| \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left( -x^2 + \frac{9}{4} \right) dx \right| = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Số tiền cần trả: } \frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000.$$

**Câu 33. (AN LÃO)** Gọi  $V$  là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .  $V$  có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 550.      B. 400.      C. 670.      D. 335.

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Ta có  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2}$ .

Do elip nhận  $Ox$ ,  $Oy$  làm các trục đối xứng nên thể tích  $V$  cần tính bằng 4 lần thể tích hình sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số  $y = \frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2}$ ,  $y = 0$  và các đường thẳng  $x = 0$ ,  $x = 5$  quay xung quanh  $Ox$ .

$$V = 4\pi \int_0^5 \left( \frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2} \right)^2 dx = \frac{640\pi}{3} \approx 670,2.$$

**Câu 34. (TT ĐIỆU HIỀN)** Một hạt proton di chuyển trong điện trường có gia tốc  $a(t) = \frac{-20}{(2t+1)^2} (cm/s^2)$  với  $t$  tính bằng giây. Tìm hàm vận tốc  $v$  theo  $t$ , biết rằng khi  $t = 0$  thì  $v = 30 cm/s$ .

- A.  $\frac{-20}{2t+1} + 30$ .      B.  $\frac{10}{2t+1}$ .      C.  $\frac{10}{2t+1} + 20$ .      D.  $(2t+1)^{-3} + 30$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Dễ thấy  $v(t) = \int \frac{-20}{(2t+1)^2} dt = \frac{10}{2t+1} + C (cm/s)$

Khi  $t = 0$  thì  $v = 30 cm/s \Rightarrow v(0) = \frac{10}{2.0+1} + C = 30 \Leftrightarrow C = 20$

Do đó  $v(t) = \frac{10}{2t+1} + 20 (cm/s)$ .

**Câu 35. (CHUYÊN ĐH HUẾ)** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho  $(E)$  có phương trình  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (0 < b < a)$  và đường tròn  $(C): x^2 + y^2 = 7$ . Biết diện tích elip  $(E)$  gấp 7 lần diện tích hình tròn  $(C)$ . Khi đó

- A.  $ab = 7$ .      B.  $ab = 7\sqrt{7}$ .      C.  $ab = \sqrt{7}$ .      D.  $ab = 49$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0) \Rightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Diện tích  $(E)$  là

$$S_{(E)} = 4 \int_0^a \frac{b\sqrt{a^2 - x^2} dx}{a} = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Đặt  $x = a \sin t$ ,  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = a \cos t dt$ .

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 0$ ;  $x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$S_{(E)} = 4 \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cdot \cos^2 t dt = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \pi ab$$

Mà ta có  $S_{(C)} = \pi \cdot R^2 = 7\pi$ .

Theo giả thiết ta có  $S_{(E)} = 7 \cdot S_{(C)} \Leftrightarrow \pi ab = 49\pi \Leftrightarrow ab = 49$ .

**Câu 36. (PHAN ĐÌNH PHÙNG)** Thể tích  $V$  của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn  $(C): x^2 + (y-3)^2 = 1$  xung quanh trục hoành là

- A.  $V = 6\pi$ .      B.  $V = 6\pi^3$ .      C.  $V = 3\pi^2$ .      D.  $V = 6\pi^2$ .

**Hướng dẫn giải.**

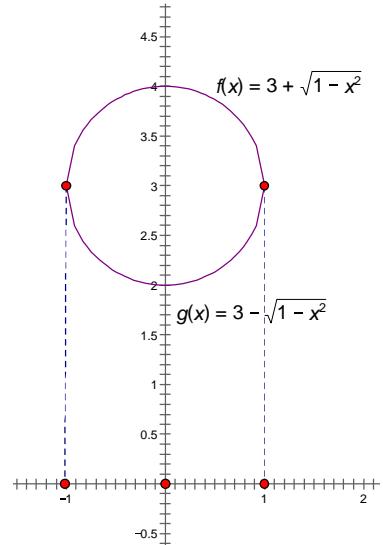
**Chọn D.**

$$x^2 + (y-3)^2 = 1 \Leftrightarrow y = 3 \pm \sqrt{1-x^2}.$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left[ (3 + \sqrt{1-x^2})^2 - (3 - \sqrt{1-x^2})^2 \right] dx = 12\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Đặt  $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$ . Với  $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ .

$$\Rightarrow V = 12\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = 12\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 6\pi^2.$$



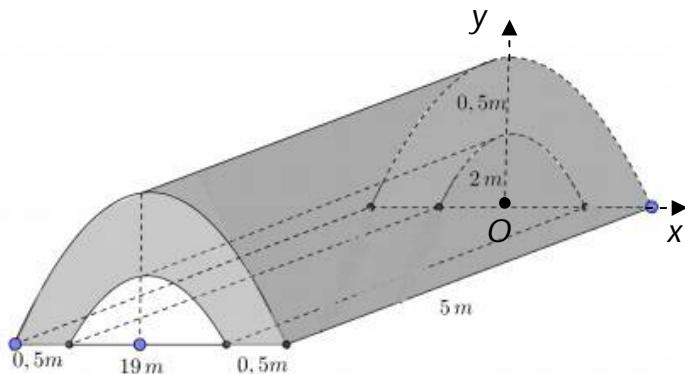
**Câu 37. (CHUYÊN QUANG TRUNG)** Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).

- A.  $19m^3$ .      B.  $21m^3$ .      C.  $18m^3$ .      D.  $40m^3$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Chọn hệ trục  $Oxy$  như hình vẽ.



Ta có

Gọi  $(P_1)$ :  $y = ax^2 + c$  là Parabol đi qua hai điểm  $A\left(\frac{19}{2}; 0\right), B(0; 2)$

Nên ta có hệ phương trình sau:  $\begin{cases} 0 = a \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^2 + c \\ 2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$

Gọi  $(P_2)$ :  $y = ax^2 + c$  là Parabol đi qua hai điểm  $C(10; 0), D\left(0; \frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau:  $\begin{cases} 0 = a \cdot (10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ c = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$

Ta có thể tích của bê tông là:  $V = 5 \cdot 2 \left[ \int_0^{10} \left( -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} \right) dx - \int_0^{\frac{19}{2}} \left( -\frac{8}{361}x^2 + 2 \right) dx \right] = 40m^3$

**Câu 38. (ĐẠI HỌC VINH)** Gọi  $V$  là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$  và  $x = 4$  quanh trục  $Ox$ . Đường thẳng  $x = a$  ( $0 < a < 4$ ) cắt đồ thị hàm  $y = \sqrt{x}$  tại  $M$  (hình vẽ bên). Gọi  $V_1$  là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác  $OMH$  quanh trục  $Ox$ . Biết rằng  $V = 2V_1$ . Khi đó

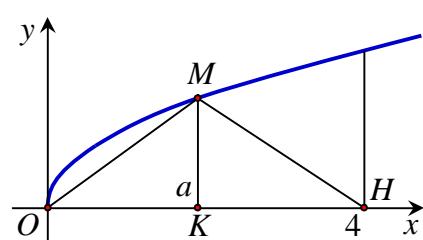
- A.  $a = 2$ .      B.  $a = 2\sqrt{2}$ .      C.  $a = \frac{5}{2}$ .      D.  $a = 3$ .

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có  $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Khi đó  $V = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi$

Ta có  $M(a; \sqrt{a})$



Khi quay tam giác  $OMH$  quanh trục  $Ox$  tạo thành hai hình nón có chung đáy:

- Hình nón  $(N_1)$  có đỉnh là  $O$ , chiều cao  $h_1 = OK = a$ , bán kính đáy  $R = MK = \sqrt{a}$ ;
- Hình nón  $(N_2)$  thứ 2 có đỉnh là  $H$ , chiều cao  $h_2 = HK = 4 - a$ , bán kính đáy  $R = MK = \sqrt{a}$

$$\text{Khi đó } V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi R^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi (\sqrt{a})^2 \cdot a + \frac{1}{3}\pi (\sqrt{a})^2 \cdot (4-a) = \frac{4}{3}\pi a$$

$$\text{Theo đề bài } V = 2V_1 \Leftrightarrow 8\pi = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi a \Rightarrow a = 3.$$

**Câu 39. (ĐẠI HỌC VINH)** Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình trong hệ tọa độ  $Oxy$  là  $16y^2 = x^2(25 - x^2)$  như hình vẽ bên.

Tính diện tích  $S$  của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ  $Oxy$  tương ứng với chiều dài 1 mét.

- A.  $S = \frac{125}{6} (m^2)$       B.  $S = \frac{125}{4} (m^2)$       C.  $S = \frac{250}{3} (m^2)$       D.  $S = \frac{125}{3} (m^2)$

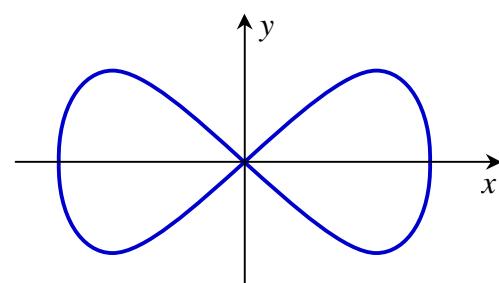
### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

Vì tính đối xứng trục nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ  $Oxy$ .

Từ giả thuyết bài toán, ta có  $y = \pm \frac{1}{4}x\sqrt{25 - x^2}$ .

Góc phần tư thứ nhất  $y = \frac{1}{4}x\sqrt{25 - x^2}; x \in [0; 5]$

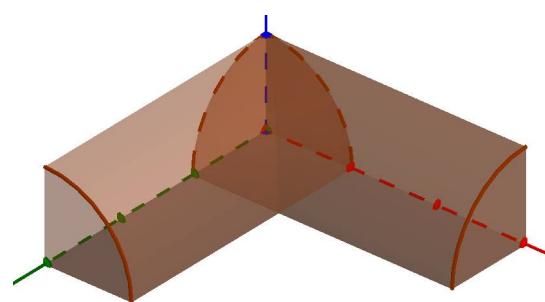


Nên  $S_{(I)} = \frac{1}{4} \int_0^5 x\sqrt{25 - x^2} dx = \frac{125}{12} \Rightarrow S = \frac{125}{3} (m^2)$

**Câu 40. (CHUYÊN KHTN)** Gọi  $(H)$  là phần giao của hai khối  $\frac{1}{4}$  hình trụ có bán kính  $a$ , hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên. Tính thể tích của  $(H)$ .

A.  $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$ .    B.  $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$ .

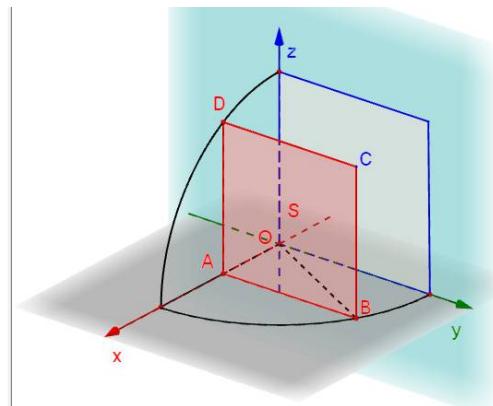
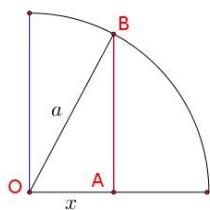
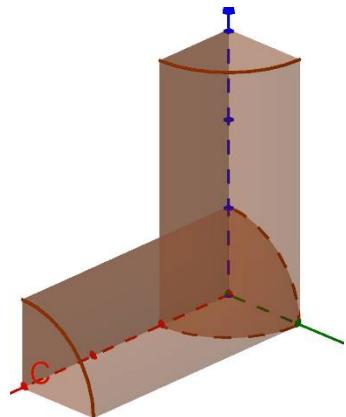
C.  $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$ .    D.  $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$ .



**Hướng dẫn giải:****Chọn đáp án A.**

Ta gọi trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ. Khi đó phần giao ( $H$ ) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm  $O$  bán kính  $a$ , thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  là một hình vuông có diện tích  $S(x) = a^2 - x^2$

$$\text{Thể tích khối } (H) \text{ là } \int_0^a S(x) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2a^3}{3}.$$



**Câu 41. (TT ĐIỆU HIỀN)** Một người làm một cái cỗ xưa có dạng Parabol như hình vẽ. Hãy tính diện tích của cái cỗ?

- A.  $\frac{28}{3}$ .      B.  $\frac{16}{3}$ .      C. 16.      D.  $\frac{32}{3}$ .

**Hướng dẫn giải****Chọn D.**

Phương trình parabol ( $P$ ) có đỉnh  $I(0;4)$  và qua điểm  $(0;2)$  là  $y = -x^2 + 4$

Diện tích cái cỗ chính bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó ta có } S = \int_{-2}^2 | -x^2 + 4 | dx = \left| \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx \right| = \frac{32}{3} (\text{đvdt})$$

