# 10 BÀI TOÁN OXY TRỌNG TÂM CHO KỲ THI THPTQG NĂM 2016. GV: LÊ VĂN TUẤN-MOON.VN

**ĐÂY LÀ 10 BÀI TOÁN TRỌNG TÂM NHẤT HY VONG SAU 10 BÀI NÀY CÁC E CÓ THỂ TỰ ĐỊNH HƯỚNG VÀ GIẢI HÀNG TRIỆU CON OXY NHÉ!**

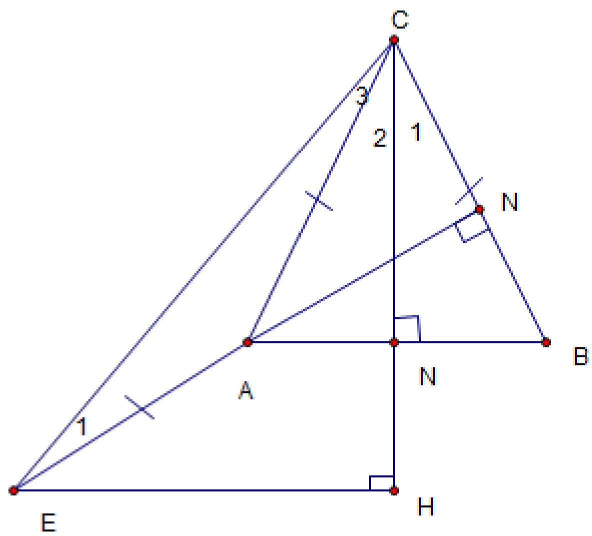
---------*Tất cả chúng ta đều có cuộc đời riêng để theo đuổi, giấc mơ riêng để dệt nên, và tất cả chúng ta đều có sức mạnh để biến mơ ước trở thành hiện thực, miễn là chúng ta giữ vững niềm tin*-----------.

**BÀI TOÁN 1: [ BÀI TOÁN VIẾT PT TẠO GÓC]**

**[ SGD Hà Tĩnh-2016 Lần 1 ]:** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy* cho tam giác *ABC* cân tại *C* có các điểm *M*,*N* lần lượt là chân đường cao hạ từ *A* và *C* của tam giác *ABC*. Trên tia đối của tia *AM* lấy điểm *E* sao cho $AE = AC$. Biết tam giác *ABC* có diện tích bằng 8, đường thẳng *CN* có phương trình $y-1=0$, điểm $E(-1;7)$. Điểm *C* có hoành độ dương , điểm *A* có toạ độ nguyên. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác *ABC*.

***Lời giải:***

**PHÂN TÍCH:** Đề bài cho *CN* và điểm *E* do vậy nên nghĩ đến viết phương trình đường thẳng nào đó qua *E* và tạo với *CN* một góc. ( Chỉ còn mỗi hướng đó thôi )




**Cách 1:** Xét tam giác *CEN* có $\widehat{C}+\widehat{E_1}=90^0$

Mặt khác $\begin{cases}\widehat{C_3}=\widehat{E_1}\\ \widehat{C_1}=\widehat{C_2}\end{cases}$

Do đó $\widehat{C_2}+\widehat{C_3}=\dfrac{1}{2}\left(\widehat{C_1}+\widehat{C_2}+\widehat{C_3}+\widehat{E_1}\right)=45^0$.

Viết *AE* qua *E* tạo với *CN* góc 45 độ

**Cách 2:** $EH = EC\sin 45^0 \Leftrightarrow d(E;CH)=\dfrac{EA}{\sqrt{2}}$

Khi đó: $EC = d(E;CH).\sqrt{2}=6\sqrt{2}$. Gọi $C(t;1)$ ta có: $EC^2=(t+1)^2+36=72 \Rightarrow C(5;1)$

Điểm A thuộc trung trực của *EC* là $x-y+2=0$. Gọi $A(u;u+2)\Rightarrow AB: x=u \Rightarrow N(u;1)$

ta có: $S_{ABC}=AN.CN=|u+1|.|u-5|=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u^2-4u-5=8\\ u^2-4u-5=-8\end{array}\right. \Rightarrow A(1;3); A(3;5)$

Với $A(1;3)\Rightarrow N(1;1)\Rightarrow B(1;-1)$

Với $A(3;5)\Rightarrow N(3;1)\Rightarrow B(3;-3)$

**Tương tự ::[Chuyên Sư Phạm 2016].** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình vuông *ABCD*. Gọi *M* là trung điểm của *AB*, *N* là giao điểm của *CM* với *AD*. Đường thẳng vuông góc với *CM* tại *C* cắt đường thẳng *AB* tại *P*. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *M* trên *NP*.Biết điểm $M(3;6)$ và phương trình đường thẳng *AH* là: $x-y+6=0$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông *ABCD*.

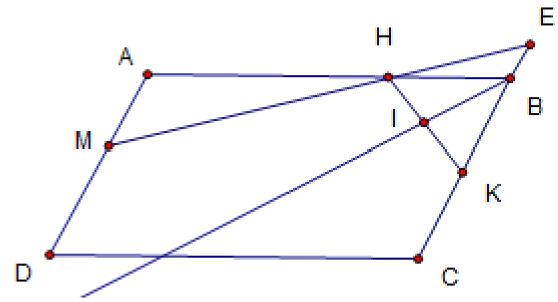
**BÀI TOÁN 2: [ BÀI TOÁN SD YẾU TỐ ĐỐI XỨNG]**Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* cho hình bình hành *ABCD* , phân giác góc $\widehat{ABC}$ có phương trình $x-y=0$, điểm $H(2;-2)$ thuộc cạnh *AB* sao cho

$HA=2HB$, biết đường thẳng $AD$ đi qua điểm $M(1;-7)$ và diện tích hình bình hành $ABCD$ bằng $48$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

***Lời giải:***

Lấy $K$ đối xứng với $H$ qua phân giác trong góc $B$:

Phương trình $HK$ là $x+y=0 \Rightarrow$ trung điểm $I$ của $HK$ có toạ độ là: $I(0;0) \Rightarrow K(-2;2)$. **( đối xứng trục )**




Nối $MH$ cắt $BC$ tại $E$ ta có: $\frac{HE}{HM}=\frac{HB}{HA}=\frac{1}{2}$.

Do vậy $\overrightarrow{HM}=-2\overrightarrow{HE} \Leftrightarrow \begin{cases}-1=-2(x_E-2)\\ -5=-2(y_E+2)\end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$

**( đây là đối xứng qua điểm )**

Khi đó phương trình đường thẳng qua $BC$ là: $3x+y+4=0 \Rightarrow B(-1;-1) \Rightarrow AB: x+3y+4=0$.

Lại có: $\overrightarrow{HA}=-2\overrightarrow{HB} \Rightarrow A(8;-4) \Rightarrow AB=3\sqrt{10}$ .Mặt khác $S_{ABCD}=d(C;AB).AB \Rightarrow d(C;AB)=\frac{16}{\sqrt{10}}$.

Gọi $C(t;-3t-4) \Rightarrow d(C;AB)=\frac{|t+3(-3t-4)+4|}{\sqrt{10}}=\frac{16}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |8t+8|=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-3\end{array}\right.$

Với $t=1 \Rightarrow C(1;-7)$ ( loại vì khi đó $A,C$ nằm cùng phía với phân giác trong góc $B$ )

Với $t=-3 \Rightarrow C(-3;5) \Rightarrow D(6;2)$.

Vậy $A(8;-4); B(-1;-1); C(3;-5); D(6;2)$.

**TƯƠNG TỰ:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho hình bình hành $ABCD$ có $AD=2AB$, điểm $A(-4;-2)$, đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ có phương trình là $d: 2x+y=0$, biết đường thẳng $CD$ đi qua điểm $K(3;-6)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

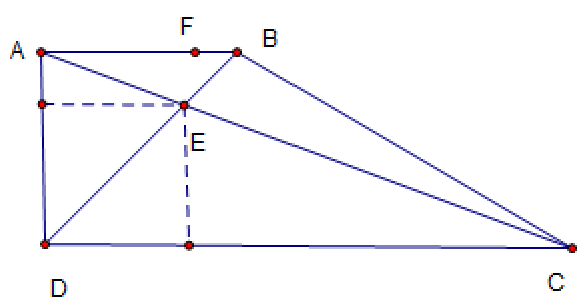
**BÀI TOÁN 3: [ GẮN HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ]**

**[ Chuyên ĐH Vinh lần 2_2016]:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho hình thang vuông tại $A$ và $D$ có $AB=AD=\frac{1}{3}CD$. Giao điểm của $AC$ và $BD$ là $E(3;-3)$, điểm $F(5;-9)$ thuộc cạnh $AB$ sao cho $AF=5FB$. Tìm $D$ biết $A$ có tung độ âm.

***Lời giải:***

Bài toán này tiếp tục là bài toán có thể gắn hệ trục bởi vì khi đặt $AB=12a$ chúng ta có thể tính được tất cả các cạnh còn lại, ngoài ra đây là một hình thang vuông tại $A$ và $D$. Chú ý các bạn nên đặt cạnh hợp lý, ở đây theo TaLet ta có: $\frac{EA}{EC}=\frac{AB}{CD}=\frac{1}{3}$. Do đó nên đặt cạnh $AD$ là số chia hết cho 4, mặt khác $AF=5FB$ nên chúng ta nên đặt cạnh $AB$ là số chia hết cho 6. Do vậy chúng ta nên đặt $AB=AD=12a$.

Đặt $AB=12a$. Chọn hệ trục toạ độ với $D \equiv O(0;0)$, $DC$ trùng với tia $Ox$ và $DA$ trùng với tia $Oy$ ta có: $A(0;12a); C(36a;0); F(10a;12a)$ và $B(12a;12a)$ suy ra $E(9a;9a)$. Hoặc Ta có:




$AC: x+3y-36a=0;\ BD: x-y=0$

$\Rightarrow E = AC \cap BD = (9a;9a)$.

Khi đó: $EF^2 = EF^2 \Leftrightarrow 10a^2 = 40 \Leftrightarrow a = 2$.

Gọi $A(x;y)$ ta có $\begin{cases} AF^2 = AF^2 = (x-5)^2 + (y+9)^2 = 100a^2 = 400 \\ AE^2 = AE^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2 = 90a^2 = 360 \end{cases}$

Khi đó $A(-15;-9)$ do $y_A < 0$. Lại có: $\overrightarrow{AF} = 5\overrightarrow{FB} \Rightarrow B(9;-9)$; $AB: y = -9$; $AD: x = -15$

$BE$: $x + y = 0 \Rightarrow D(-15;15)$.

**CÁCH 2:** Ta có: $\overrightarrow{EF}(a;3a); \overrightarrow{AC}(36a;-12a) \Rightarrow \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AC} = 0$ suy ra $EF \perp AC$

**TƯƠNG TỰ: Thanh Chương- Nghệ An năm 2016**.Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I$. Các điểm $G\left(\frac{10}{3};\frac{11}{3}\right); E\left(3;-\frac{2}{3}\right)$ lần lượt là trọng tâm của tam giác $ABI$ và tam giác $ADC$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết tung độ đỉnh $A$ là số nguyên.

**BÀI TOÁN 4:[ BÀI TOÁN 3 ĐIỂM – TẠO THÀNH TAM GIÁC CÂN]**

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$ cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ nội tiếp đường tròn $(C)$ có $A(5;3)$. Gọi $E$ là một điểm nằm trên cung nhỏ $AC$ của $(C)$. Trên tia đối của tia $EB$ lấy điểm $D(12;4)$ sao cho $ED = EC$. Biết điểm $B$ và $E$ lần lượt thuộc các đường thẳng $x + y + 2 = 0$ và $x - 3y - 2 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh $B,C$

***Lời giải:***

**Phân tích bài toán:** Để bài cho 2 điểm $A(5;3); D(12;4)$ và 2 điểm $B,E$ có thể toạ độ hoá được. Vậy chúng ta có thể suy nghĩ xem liệu rằng 3 điểm $A$, $D$, $E$ có tạo thành tam giác vuông hoặc cân hay không. Tương tự liệu rằng 3 điểm $A,D,B$ có tạo thành tam giác vuông hoặc cân hay không.

Vẽ hình thật chuẩn xác chúng ta nhận ra rằng $AB = AC = AD$.

Suy luận ngược một chút: Chúng ta thấy rằng nếu $AB = AC = AD$ khi đó 2 tam giác $AEC$ và $AED$ bằng nhau bằng nhau theo trường hợp cạnh- cạnh-cạnh.

Do đó chúng ta sẽ đi chứng minh $\Delta AEC = \Delta AED$. Giả thiết bài toán ta đã có 2 tam giác này có $EC = ED$ và có $AE$ là cạnh chung. Bây giờ chúng ta sẽ đi chứng minh 2 góc xen giữa là $\widehat{AED} = \widehat{AEC}$ để chứng minh 2 tam giác trên đồng dạng theo trường hợp cạnh góc cạnh.

**Thật vậy:** Ta có: $\widehat{AEC} = 180^0 - \widehat{ABC}$ ( tính chất tứ giác nội tiếp ).

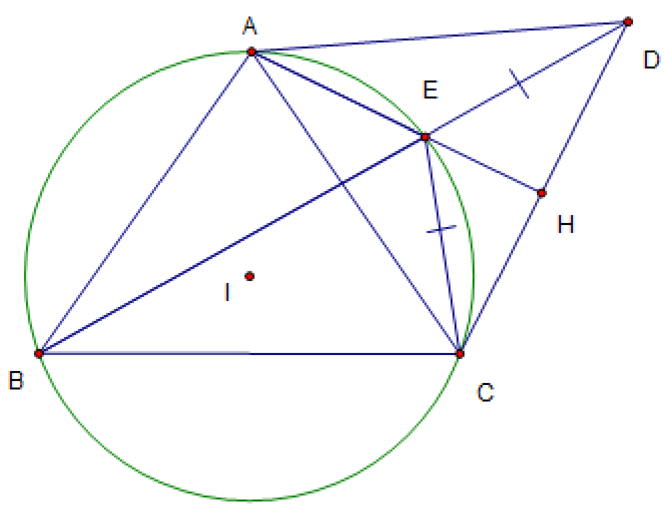
Mặt khác $\widehat{AED} = 180^0 - \widehat{AEB} = 180^0 - \widehat{ACB}$ ( do $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$ ). Lại có tam giác $ABC$ cân nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ do đó chúng ta chứng minh được $\widehat{AED} = \widehat{AEC}$.

Gọi $B(t;-t-2)$ ta có: $AB = AD$ ( vì cùng bằng $AC$) Do 2 tam giác $AEC$ và $AED$ bằng nhau. Khi đó $(t-5)^2 + (t+5)^2 = 50 \Leftrightarrow t = 0$

Suy ra $B(0;-2) \Rightarrow BD: x - 2y - 4 = 0$ Khi đó $E(8;2)$. $CD: 3x - y - 32 = 0$

Khi đó $H(11;1); C(10;2)$

Vậy $B(0;-2); C(10;2)$



**BÀI TOÁN 4[ BÀI TOÁN 3 ĐIỂM TẠO TAM GIÁC VUÔNG]**

Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy* cho hình thang vuông *ABCD* vuông tại $A(1;1)$ và *B*. Trên cạnh *AB* lấy điểm *M* sao cho $BM = 2AM$, điểm $N(1;4)$ là hình chiếu của *M* trên đường thẳng *CD*. Tìm toạ độ các đỉnh *B,C,D* biết *CM* vuông góc với *DM* và điểm *B* thuộc đường thẳng $x+y-2=0$.

***Lời giải:***

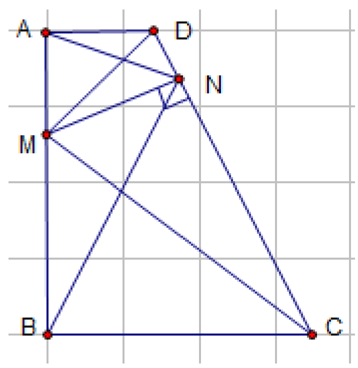
**PHÂN TÍCH:** Đây là một bài toán 3 điểm điển hình. Để bài cho 3 điểm *A,N* và điểm *B* thuộc đường thẳng $x+y-2=0$. Ta sẽ nối 3 điểm nay xem liệu rằng tam giác này có phải tam giác vuông hoặc tam giác cân hay không. Khi đã phán đoán được về tính chất trong hình này các bạn sẽ định hướng chứng minh nhé.

**Hướng 1:** Chứng minh $\widehat{ANM}+\widehat{MNB}=90^0$.

**Hướng 2**: Chứng minh $\widehat{AND}+\widehat{CNB}=90^0$.

**Hướng 3:** Chứng minh $\widehat{NAB}+\widehat{NBA}=90^0$.

Cả 3 hướng chứng minh trên đều được nhé. Tác giả sẽ chứng minh theo hướng 1 phần còn lại dành cho bạn đọc.




Xét các tứ giác nội tiếp *ADNM* và *MNCD* ta có $\begin{cases}\widehat{ANM}=\widehat{MDA}\\ \widehat{MNB}=\widehat{ACB}\end{cases}$.

Mặt khác $\widehat{MDA}+\widehat{MCB}=90^0 \Rightarrow \widehat{ANB}=90^0$ hay $AN \perp BN$.

Phương trình đường thẳng *BN* là: $y=4 \Rightarrow B(-2;4)$.

Lại có: $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AM} \Rightarrow \begin{cases}-3=3(x_M-1)\\ 3=3(y_M-1)\end{cases} \Rightarrow M(0;2)$.

Phương trình đường thẳng $CD$ qua *N* và vuông góc với *MN* là: $x+2y-9=0$

Phương trình các cạnh: $AD: x-y=0; BC: x-y+6=0$

Từ đó suy ra: $D(3;3);C(-1;5)$

Vậy $B(-2;4);C(-1;5);D(3;3)$ là toạ độ các đỉnh cần tìm.

**BÀI TOÁN 5[ BÀI TOÁN 3 TẠO THÀNH TAM GIÁC VUÔNG CÂN]** Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy* cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A* nội tiếp đường tròn $(C)$. Trên cung nhỏ *AB* của đường tròn $(C)$ lấy điểm *M*, trên cạnh $CM$ lấy điểm *N* sao cho $BM = CN$, điểm *P* thuộc đường thẳng *AC*. Biết $M(4;4);N(0;2);P(-2;2)$ và điểm *A* có hoành độ nhỏ hơn 2. Tìm toạ độ các điểm *A,B,C*.

***Lời giải***

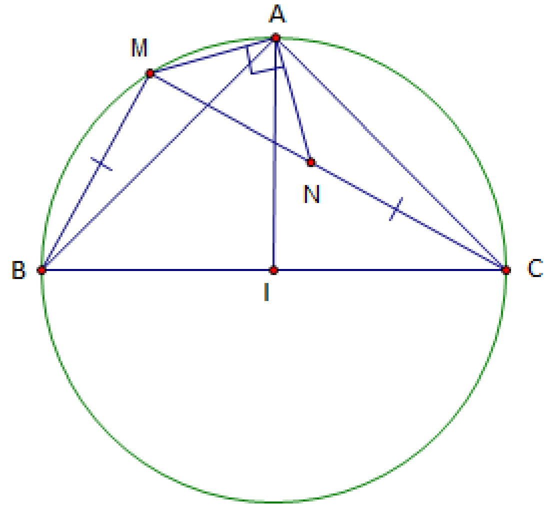
**PHÂN TÍCH:** Đây là bài toán 3 điểm liên quan đến 3 điểm *A,M,N*. Ở đây chúng ta nên ít quan tâm đến điểm *P*. Vì *P* là một điểm bất kỳ trên đường thẳng *AC*.

Nhận thấy rằng $AM = AN$. Suy luận ngược một chút chúng ta nhận ra rằng khi $AM = AN$ thì 2 tam giác $\Delta AMN = \Delta ANC$ $(c.c.c)$. Giả thiết bài toán ta thấy rằng $BM = CN$ và $AB = AC$. Bây giờ chúng ta sẽ đi chứng minh $\widehat{MBA}=\widehat{NCM}$ ( điều đó là hoàn toàn đúng vì hai góc này cùng chắn cung $\overset{\frown}{AM}$ )

Nhớ góc 45 nhé một góc các bạn rất hay quên trong tam giác vuông cân và hình vuông. Chúng ta sẽ còn gặp rất nhiều bài toán chứ yếu tố góc 45 ở những phần sau.

Ta có: $\Delta AMN = \Delta ANC$ $(c.g.c)$ do đó $AM = AN$.

Mặt khác $\widehat{AMN} = \widehat{ABC} = 45^0$ nên tam giác $AMN$ vuông cân tại $A$. Do $AM = AN$ nên $A$ thuộc trung trực của $MN$ có phương trình $2x + y - 7 = 0$. Gọi $A(t;7-2t)$




Khi đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow (t-4)t + (3-2t)(5-2t) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow A(1;5) \\ t = 3 \Rightarrow A(3;1)\ (loai) \end{array}\right.$.

Với $A(1;5)$ ta có: $AC: x - y + 4 = 0$, $AB: x + y - 6 = 0$.

$MN: x - 2y + 4 = 0; MB: 2x + y - 12 = 0$

Do đó $B(6;0); C(-4;0)$

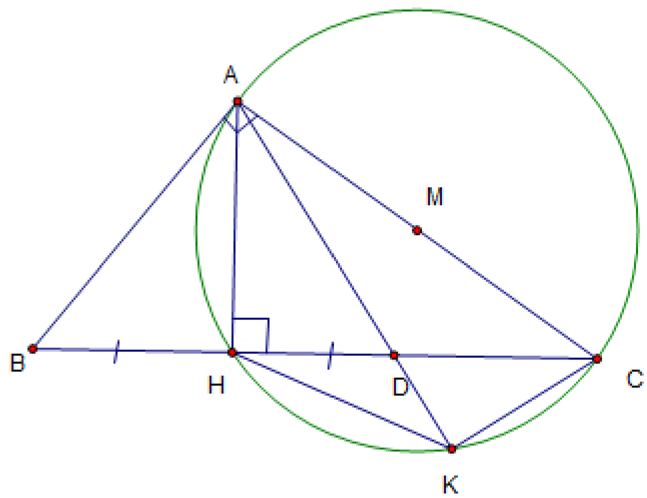
**BÀI TOÁN 5[ BÀI TOÁN VIẾT PT ĐƯỜNG THẲNG QUA 1 ĐIỂM VÀ VUÔNG GÓC VỚI ĐƯỜNG THẲNG ĐÃ CHO]**

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ $Oxy$ cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ trên cạnh $BC$, $D$ là điểm đối xứng của $B$ qua $H$; $K$ là hình chiếu của $C$ trên cạnh $AD$. Giả sử $H(-5;-5); K(9;-3)$ và trung điểm của $AC$ thuộc đường thẳng $x - y + 10 = 0$. Tìm toạ độ điểm $A$.

***Lời giải:***

Gọi $M$ là trung điểm của $AC$ ta có: $M(t;10+t)$

Dễ thấy $MH = MK = \frac{1}{2}AC$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nữa cạnh ấy- Đây là bài toán 3 điểm )




Khi đó ta có

$(t+5)^2 + (15+t)^2 = (t-9)^2 + (13+t)^2$.

$\Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow M(0;10)$.

Lại có: $\begin{cases} \widehat{HKA} = \widehat{HCA} \\ \widehat{HCA} = \widehat{BAH} = \widehat{HAD} \end{cases}$ (tính chất về góc chắn cung và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung ).

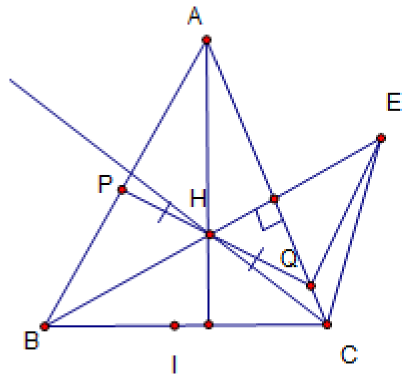
Khi đó $\widehat{HKA} = \widehat{HAK}$ hay tam giác $HAK$ cân tại $H$ ta có $AH = HK$. Lại có $MA = MK$ do đó $MH$ là đường trung trực của $AK$ hay $A$ và $K$ đối xứng nhau qua đường thẳng $MH$. Viết $HM$ qua $M$ và vuông góc với $AK$ từ đó tìm được $A(-15;5)$.

Vậy $A(-15;5)$ là điểm cần tìm.

**[Tương tự]** Trong mặt phẳng toạ độ cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$ điểm $C\left(4;\frac{-3}{2}\right)$. Đường cao xuất phát từ đỉnh $A$ có phương trình là : $2x - y - 4 = 0$. Đường thẳng đi qua $H$ cắt các đường thẳng $AB,AC$ lần lượt tại $P$ và $Q$ thoả mãn $HP = HQ$ và có phương trình là: $2x - 3y - 4 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh $A,B$.

***Lời giải:***

Lấy điểm $E$ trên $BH$ sao cho $HB = HE$ khi đó tứ giác $PEQB$ là hình bình hành ta có: $Q$ là trực tâm suy ra $CE \perp PQ$.




Điểm $H(2;0)$. $BC: x+2y-1=0$.

Phương tình đường thẳng $CE: 3x+2y-9=0$.

Gọi $B(1-2u;u); E\left(v;\dfrac{9-3v}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1-2u+v=4 \\ u+\dfrac{9-3v}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow B(1;0); E(3;0)$

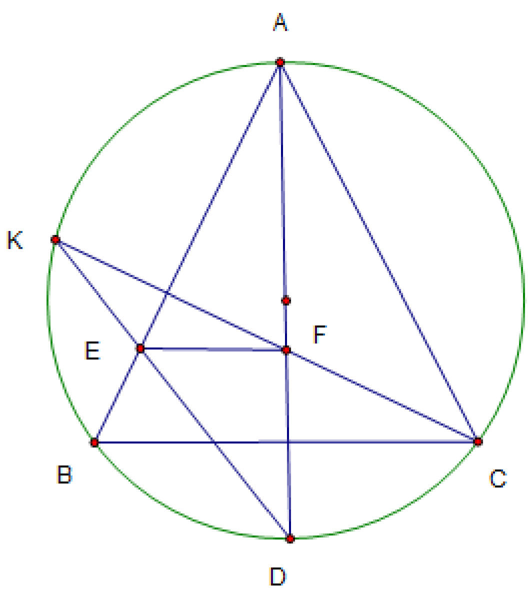
**Đáp số:** $B(1;0)$ suy ra *A*.

**BÀI TOÁN 6[ BÀI TOÁN VIẾT PT ĐƯỜNG THẲNG QUA 1 ĐIỂM VÀ SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG ĐÃ CHO]** Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy* cho tam giác *ABC* cân tại *A* nội tiếp đường tròn $(C)$ đường kính *AD*. Gọi $E(2;5)$ là một điểm thuộc cạnh *AB*. Đường thẳng *DE* cắt đường tròn $(C)$ tại điểm thứ 2 là *K*. Biết phương trình các đường thẳng *BC* và *CK* lần lượt là $x-y=0$ và $3x-y+4=0$. Tìm toạ độ các điểm *A*,*B*,*C*.

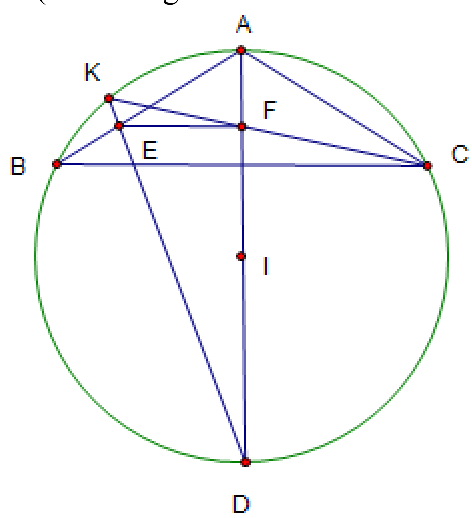
***Lời giải:***

Phân tích bài toán: Đề bài cho điểm $E(2;5)$ và hai đường thẳng *BC* và *CK* ta phải tư duy theo hướng.

Liệu rằng qua điểm *E* này có một đường thẳng nào chúng ta có thể viết mà song song với *BC* hoặc *CK* hay có một đường thẳng nào qua *E* vuông góc với *BC* hoặc vuông góc với *CK* hay không.
Khi đó chúng ta sẽ vẽ 2 đến 3 hình và nhận ra điều đặc biệt là cả 2 hình này ta thấy có một đường rất đặc biệt đi qua *E* và song song với *AD* đó chính là đường thẳng *EF* ( với *F* là giao điểm của *KC* và *AD* )




**Hình 1:** nhận thấy $EF//BC$




**Hình 2:** nhận thấy $EF//BC$

Khi đã nhận ra rằng $EF//BC$ ta sẽ đi định hướng chứng minh rằng điều đó là đúng:

**Hướng 1:** Chứng minh tứ giác $AKEF$ là tứ giác nội tiếp khi đó $\widehat{AFE} = 180^0 - \widehat{AKE} = 90^0 \Rightarrow EF//BC$.

**Hướng 2:** Chứng minh góc $\widehat{KFE} = \widehat{KCB}$ ( 2 góc ở vị trí đồng vị ).

**Hướng 3:** Chứng minh góc $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ ( 2 góc ở vị trí đồng vị ).

Giả sử *KC* cắt *AD* tại *F*. Ta có: *EF* song song với *BC* vì cùng vuông góc với đường thẳng *AD*.

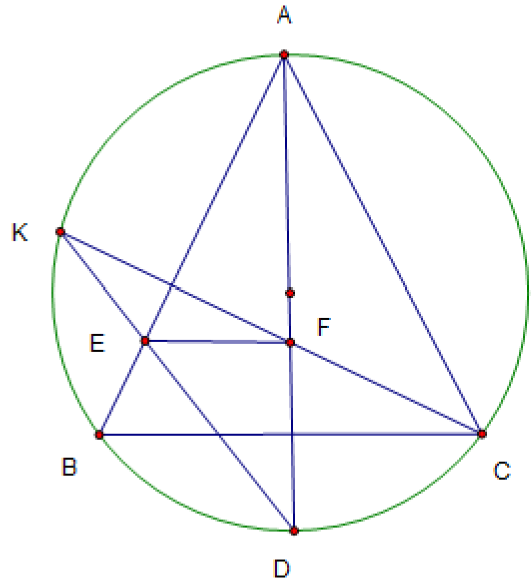
Ta có: $\widehat{DKC} = \widehat{DAC} = \widehat{EAF} \Rightarrow$ tứ giác *AKEF* nội tiếp do đó $\widehat{AFE} = 180 - \widehat{AKE} = 90^0$. Khi đó $EF \perp AD$ Suy ra $EF // BC$.

Ta có: $C(-2;-2) = AC \cap BC$

Khi đó $EF: x - y + 3 = 0 \Rightarrow F\left(\frac{-1}{2};\frac{5}{2}\right)$

Khi đó: $AD: x + y - 2 = 0 \Rightarrow B(4;4) \Rightarrow A(-8;10)$

Vậy $A(-8;10); B(4;4); C(-2-2)$ là các điểm cần tìm.




**BÀI TOÁN 7[ BÀI TOÁN 3 ĐIỂM THẲNG HÀNG]:** Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy* cho tam giác *ABC* cân tại *A* nội tiếp đường tròn $(C)$. Gọi *K* là một điểm trên cung nhỏ *AB*. Gọi $E(2;12); F(2;6)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* lên *BK* và *CK*. Biết trung điểm của *BC* thuộc trục hoành và đường thẳng *BC* đi qua điểm $M(7;5)$. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác *ABC*.

***Lời giải:***

**PHÂN TÍCH:** Bài toán cho ta điểm *E,F* và điểm *H* thuộc trục hoành như vậy bài toán liên quan đến 3 điểm này. Thực ra còn điểm $M(7;5)$ tuy nhiên điểm này di động trên đường thẳng *BC* nên ta sẽ không quan tâm nhiều đến nó. Vẽ hình chính xác một chút ( vẽ khoảng 3 hình với kích thước khác nhau) chúng ta nhận ra 3 điểm *E,F,H* là 3 điểm thẳng hàng. Định hướng chứng minh: Chứng minh $\widehat{EFK} = \widehat{CFH}$ ( nếu 2 góc này bằng nhau thì 3 điểm *E,F,H* sẽ thẳng hàng )

Chuyển góc: $\widehat{EFK} = \widehat{EAK}$ ( do tứ giác *AEKF* nội tiếp ), mặt khác $\widehat{CFH} = \widehat{CAH}$ ( do tứ giác *AFHC* nội tiếp ). Lại có: $\widehat{KAE} = 90^0 - \widehat{EKA}; \widehat{HAC} = 90^0 - \widehat{ACH}$ . Mặt khác $\widehat{AKE} = \widehat{ACH}$ ( do tứ giác *AKBC* nội tiếp ) Do vậy $\widehat{EFK} = \widehat{CFH}$

Ta có: $EF: x = 2 \Rightarrow H(2;0)$

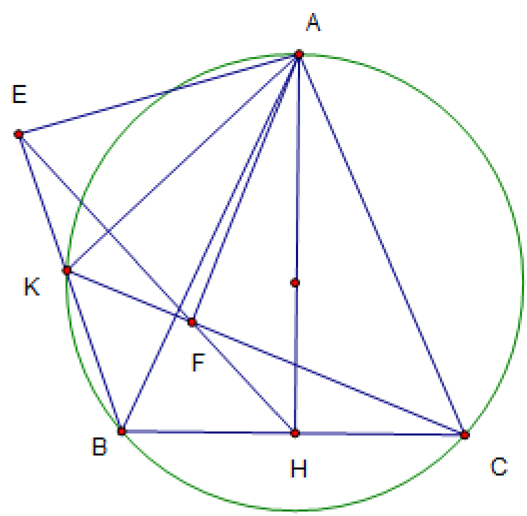
Suy ra $BC: x - y - 2 = 0$ .

Khi đó $AH: x + y - 2 = 0$ .

Lại có $\widehat{AKE} = \widehat{ACH} = \widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ nên 2 tam giác *AKE* và *AKF* là 2 tam giác bằng nhau nên $KE = KF; AE = AF$ suy ra *AK* là trung trực của *EF* khi đó $AK: y = 9$

$\Rightarrow A(-7;9)$

Suy ra $CK: 3x - y = 0 \Rightarrow C(-1;-3)$ nên $B(5;3)$



**Câu 2:[ Tương tự câu 1].** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$ cho hình thang cân $ABCD$ có $AB//CD$. Gọi $E\left(\frac{27}{5};\frac{9}{5}\right); F(3;3)$ là chân đường cao hạ từ $B$ lần lượt xuống các đường thẳng $AC$ và $AD$. Biết đường thẳng qua $B$ và vuông góc với $CD$ có phương trình là $x+y-4=0$ và điểm $D$ thuộc đường thẳng $3x-y=0$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình thang

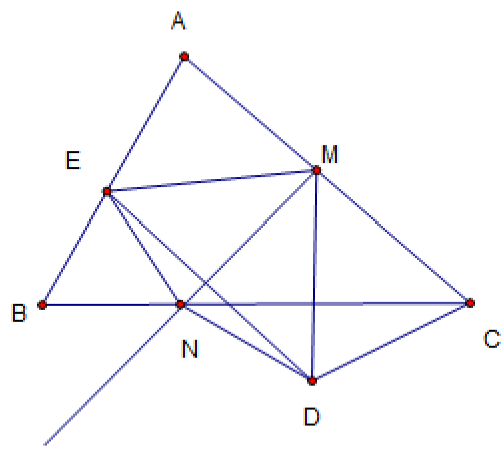
**BÀI TOÁN 8[ BÀI TOÁN 4 ĐIỂM THUỘC CÙNG 1 ĐƯỜNG TRÒN]:** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$ cho tam giác $ABC$ gọi $E$ là trung điểm của $AB$, trên $AC$ và $BC$ lần lượt lấy các điểm $M,N$ sao cho $AM=ME, BN=NE$. Gọi $D$ là điểm đối xứng của $E$ qua $MN$. Biết rằng $M(1;5); N(4;4); D(6;0)$, điểm $C$ thuộc đường thẳng $x-y-2=0$ và có hoành độ dương. Tìm toạ độ các đỉnh $A,B,C$.

***Lời giải:***

Phân tích bài toán: Bài toán cho 4 điểm có toạ độ và điểm $C$ có thể toạ độ hoá. Đương nhiên các bạn có thể tư duy theo hướng của bài toán trên. Tuy nhiên sau khi vẽ hình ta thấy khả năng có 3 điểm tạo thành tam giác vuông hay cân là không khả thi.

Nhìn theo một hướng khác, bài toán này có 4 điểm. Vậy liệu rằng có đường tròn nào đi qua 4 điểm này hay không. Lại vẽ hình thật chính xác và nhận thấy 4 điểm này tạo thành một tứ giác nội tiếp trong một đường tròn. Khi đó ta sẽ viết được đường tròn ngoại tiếp tam giác $MND$ sau đó cho điểm $C$ thuộc đường tròn vừa viết được.

Tuy nhiên để chứng minh tứ giác $MNDC$ là tứ giác nội tiếp có rất nhiều cách định hướng chứng minh nhưng các bạn nên định hướng làm sao đó để chúng ta sử dụng được giả thiết của bài toán đó là $AM=ME, BN=NE$ khi đó $\widehat{EBN}=\widehat{NEB}$ và $\widehat{MAE}=\widehat{MEA}$.




Ta có : $\widehat{NDM}=\widehat{NEM}$ ( tính chất đối xứng )

$\widehat{NEM}=180^0-\widehat{AEM}-\widehat{NEB}=180^0-\widehat{A}-\widehat{B}=\widehat{C}$.

Do vậy 4 điểm $DNMC$ nội tiếp trong một đường tròn.

Ta có: $MN: x+3y-16=0; DE: 3x-y-18=0$

Trung điểm của $DE$ là $I(7;3)\Rightarrow E(8;6)$.

PT đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MNDC$ đi qua 3 điểm $M(1;5); N(4;4); D(6;0)$ là : $(x-1)^2+y^2=25\ (T)$

Gọi $C(t;t-2)$ ta có: $(t-1)^2+(t-2)^2=25 \Leftrightarrow C(5;3)$.

Khi đó $MC: x+2y-11=0; BC: x+y-8=0$.

Gọi $A(11-2a;a); B(b;8-b)$: $\begin{cases}11-2a+b=16\\ a+8-b=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-9\\ b=13\end{cases}$. Do đó $A(29;-9); B(13;-5); C(5;3)$ là các điểm cần tìm.

**Tương tự: [Trích đề thi thử trường THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - Lần 1 – 2015]**

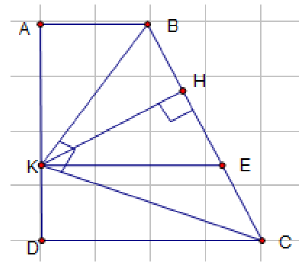
Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho hình bình hành $ABCD$ có góc $\widehat{ABC}$ nhọn, đỉnh $A(-2;-1)$. Gọi $H,K,E$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A$ trên các đường thẳng $BC, BD, CD$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $HKE$ là $(C): x^2+y^2+x+4y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh $B,C,D$ biết $H$ có hoành độ âm, $C$ có hoành độ dương và nằm trên đường thẳng $x-y-3=0$.

Gợi ý: Chứng minh 4 điểm *H, K, E, I* nằm trên cùng đường tròn. ( với *I* là giao điểm của *AC* và *BD*)

**BÀI TOÁN 9[ BÀI TOÁN CÓ NỘI DUNG TÍNH TOÁN]:**

**Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* cho hình thang vuông *ABCD* có đường cao $AD=3\sqrt{2}$ , phương trình đường thẳng *BC* là: $2x-y-9=0$. Gọi $K(3;2)$ là điểm thuộc cạnh *AD* sao cho $AK=2DK$ và tam giác *BKC* vuông tại *K* . Viết phương trình các cạnh *AB* và *AD* biết *B* có tung độ dương.

***Lời giải:***

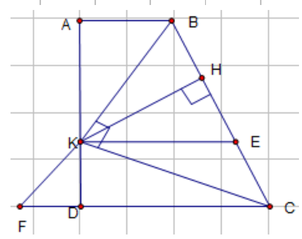



**Cách 1:** Ta có: $AK=2\sqrt{2};DK=\sqrt{2}$. Gọi *H* là hình chiếu của *K* lên *BC.*

Mặt khác $\widehat{AKB}=\widehat{KCD}=a$ ( do cùng phụ với góc *DKC* )

Do đó : $\sin^2 a+\cos^2 a=1\Leftrightarrow\left(\frac{KD}{KC}\right)^2+\left(\frac{AK}{KB}\right)^2=1\Leftrightarrow\frac{2}{KC^2}+\frac{8}{KB^2}=1$

Lại có : $\frac{1}{KB^2}+\frac{1}{KC^2}=\frac{1}{KH^2}=\frac{1}{d^2(K;BC)}=\frac{1}{5}\Rightarrow KB=KC=\sqrt{10}$.




**Cách 2 :** *KB* cắt *CD* tại *F* ta có : $\frac{KF}{KB}=\frac{KD}{KA}=\frac{1}{2}\Rightarrow KF=\frac{1}{2}KB$

Xét tam giác vuông *KFC* có đường cao *KD* ta có :

$\frac{1}{KF^2}+\frac{1}{KC^2}=\frac{1}{KD^2}\Leftrightarrow\frac{1}{KC^2}+\frac{4}{KC^2}=\frac{1}{2}$.

Kết hợp $\frac{1}{KB^2}+\frac{1}{KC^2}=\frac{1}{KH^2}=\frac{1}{d^2(K;BC)}=\frac{1}{5}\Rightarrow KB=KC=\sqrt{10}$

Khi đó : Gọi $B(t;2t-9)$ ta có $KB^2=(t-3)^2+(2t-11)^2=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=6\\t=4\ (loai)\end{array}\right.$

Vậy $B(6;3);C(4;-1)$. Gọi $E(x;y)$ là điểm thõa mãn $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$ ta có: $\begin{cases}x-6=2(4-x)\\y-3=2(-1-y)\end{cases}$

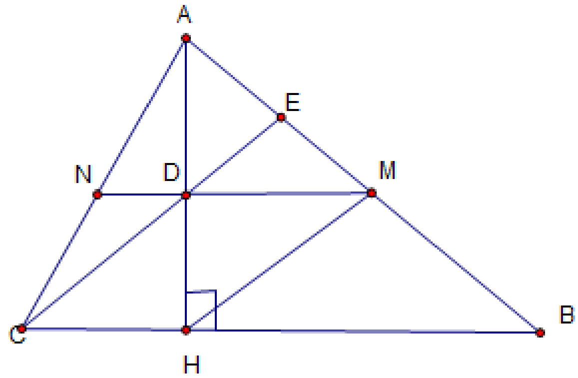
$\Leftrightarrow E\left(\frac{14}{3};\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\overrightarrow{KE}\left(\frac{5}{3};\frac{-5}{3}\right)$

Khi đó phương trình đường thẳng $AB:x+y-9=0;AD:x-y-1=0$.

**BÀI TOÁN 10[ BÀI TOÁN SỬ DỤNG VECTO GIẢI OXY]:**

**Câu 1:** Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* cho tam giác *ABC* có $B(4;6)$, gọi *H* là điểm thuộc cạnh *BC* sao cho $HB=2HC$ và *AH* vuông góc với *BC, E* là điểm thuộc cạnh *AB* sao cho $AB=4AE$, đường thẳng *CE* cắt đường cao *AH* tại $D(0;3)$. Biết trung điểm của *AC* thuộc đường thẳng $2x+y-1=0$ tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC.*

***Lời giải:***




Gọi $M$ là trung điểm của $AB$, **$D$ là trung điểm $AH$**.

Theo định lý Ta let ta có: $HM//CE$ ( do $\frac{BM}{ME}=\frac{CH}{HC}=2$ )

Khi đó $HM//DE$ suy ra $DE$ là đường trung bình của tam giác $AHM$ suy ra $D$ là trung trực của $AH$.

Gọi $N(t;1-2t)$ là trung điểm của $AC$ ta có:

$$2\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow\begin{cases}2(t-0)=0-x_M\\2(1-2t-3)=3-y_M\end{cases}\Rightarrow M(-2t;4t+7)$$

Khi đó $A(-4t-4;8t+8)$

Giải $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DN}=0\Leftrightarrow(4t+4)t+(-8t-5)(-2t-2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=\frac{-1}{2}\end{array}\right.$

Với $t=-1\Rightarrow A(0;0),N(-1;3);C(-2;6)$

Với $t=-\frac{1}{2}\Rightarrow N\left(-\frac{1}{2};2\right);A(-2;4);C(1;0)$.

**[ Tương tự ]** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$ cho tam giác $ABC$ có trọng tâm là $G$ thuộc đường thẳng $x-y-2=0$, điểm $A(-3;-3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là $I(2;-3)$, biết đường thẳng $BC$ đi qua điểm $F(-2;4)$. Tìm toạ độ các đỉnh $B,C$ của tam giác $ABC$ biết $G$ có hoành độ dương.

**Gợi ý :** Sử dụng $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{MF}=0$ ( với $M$ là trung điểm của $BC$ )