"Truy ngược dấu các biểu thức liên hợp để giải phương trình vô tỷ"

Mở đầu :

Để giải pt vô tỷ bằng phương pháp nhân liên hợp , thông thường ta biến đổi phương trình về dạng (ax+b).A(x)=0 hoặc $\left(ax^2+bx+c\right).A(x)=0$ trong *đó A(x)>0* $\forall x \in D$*(hoặc* A(x)<0, $\forall x \in D$).

Tuy nhiên trong nhiều bài toán để chứng minh A(x)>0 $\forall x \in D$ *chúng ta cần kết hợp với phương pháp đánh giá để giải quyết trọn vẹn nó , nguyên nhân là sau khi thực hiện phép biến đổ liên hợp đại lượng A(x) chứa các biểu thức có dấu ngược nhau .*

Từ đó ta nảy sinh ý tưởng truy ngược dấu các biểu thức trong đại lượng A(x) để đưa về cùng một dấu và làm cho đại lượng A(x) này hiển nhiên dương (hoặc hiển nhiên âm) với mọi x thuộc tập xác định

Ví dụ 1 : Giải phương trình $2x^3+3x^2-17x-26=2\sqrt{x+1}$

Điều kiện $x \geq -1$ pt đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-2\right)+2x^3+3x^2-18x-27=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}\right)+(x-3)\left(2x^2+9x+9\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}+2x^2+9x+9\right)=0$$

Do $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}+2x^2+9x+9=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}+(x+3)(2x+3)>0, \forall x \geq -1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x=3

Nhận xét :

- *Thông thường với biến đổi* $2x^3+3x^2-17x-30+2\left(2-\sqrt{x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(2x^2+9x+10-\frac{2}{\sqrt{x+1}+2}\right)=0$. *Ta cần kết hợp phương pháp đánh giá để xử lý phương trình* $2x^2+9x+10=\frac{2}{\sqrt{x+1}+2}$

- *Khi ta thay thế cách nhóm* $2-\sqrt{x+1}$ *bằng cách nhóm* $\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-2\right)$ *sẽ đưa phương trình đã cho về dạng* $(x-3)\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}+2x^2+9x+9\right)=0$, *lúc này biểu thức* *A(x)=* $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}+2x^2+9x+9$ *hiển nhiên dương với mọi* $x\geq -1$.

Bài tập tương tự :

1) Giải phương trình $x^2+2x+7=\sqrt{2x-3}$
2) Giải phương trình $x^3+x^2+2x+3=\sqrt{2x+3}$
3) Giải phương trình $x^3+x-3+\sqrt{2-x}=0$

Ví dụ 2 : Giải phương trình $2x^2-5x-1=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ (TH&TT)

Phân tích .

- *Trước hết ta nhận định rằng phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x=3 . nếu chúng ta sử dụng phương pháp nhân liên hợp một cách thông thường , dấu trước các biểu thức trong các nhóm liên hợp là ngược nhau với* $x\in[2;4]$ *, điều đó có thể dẫn đến việc phải kết hợp với phương pháp đánh giá để giải quyết trọn vẹn phương trình này . Xuất phát từ vấn đề đó , ta sẽ tìm cách nhóm các biểu thức sao cho sau khi nhân liên hợp phương trình sẽ có dang (x-3).f(x) =0, mà trong đó f(x)>0 ,* $\forall x\in[2;4]$
- *Ta nhận thấy* $1-\sqrt{4-x}=\dfrac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}$ *và* $\dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}}>0\forall x\in[2;4]$ *, trong lúc đó* $1-\sqrt{x-2}=\dfrac{-(x-3)}{1+\sqrt{x-2}}$ *và* $\dfrac{-1}{1+\sqrt{x-2}}<0\forall x\in[2;4]$, *từ đó ta truy vấn ngược lại dấu cả phép biến đổi này bằng cách biến đổi thành :*

$\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}-1\right)=\dfrac{(x-3)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}$ *lúc này ta đảm bảo được*

$\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}\geq 0,\forall x\in[2;4]$

Lời giải

Điều kiện $2 \le x \le 4$ .phương trình đã cho tương đương với

$$\left(1-\sqrt{4-x}\right)+\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}-1\right)+2x^2-6x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}+\frac{(x-3)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+2x(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=3$$

$$do\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+2x>0\forall x\in[2;4]$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x=3.

-***Nhận xét*** *: cách giải thông thường là biến đổi phương trình về dạng*

$(x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}-2x-1\right)=0$ *sau đó thực hiện đánh giá đối với phương trình* $\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}-2x-1=0$ *, như vậy sẽ khó khăn hơn nhiều ☺*

Bài tập tương tự :

1) Giải phương trình $4x+1=\sqrt{2-x}+2\sqrt{3x+1}$

2) Giải phương trình $x^2+4x=2\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}$

3) Giải phương trình $\left(x^2+1\right)(x-1)+2\sqrt{5-x}+\sqrt[3]{2x-1}=5$

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}=x^2-1$

Điều kiện $x \ge 1$ phương trình đã cho tương đương với

$$4\sqrt[3]{x+6}+4\sqrt{x-1}=4x^2-4$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\sqrt[3]{x+6}\left(\sqrt[3]{(x+6)^2}-4\right)+4x^2-5x-6=0$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-1}\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+\sqrt[3]{x+6}\frac{(x-2)(x+14)}{\sqrt[3]{(x+6)^4}+16+4\sqrt[3]{(x+6)^2}}+(x-2)(4x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{\sqrt[3]{x+6}(x+14)}{\sqrt[3]{(x+6)^4}+16+4\sqrt[3]{(x+6)^2}}+4x+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

$$do\ \frac{4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{\sqrt[3]{x+6}(x+14)}{\sqrt[3]{(x+6)^4}+16+4\sqrt[3]{(x+6)^2}}+4x+3>0\forall x\geq 1$$

Vậy pt đã cho có nghiệm duy nhất x=2

-Nhận xét

Ở thí dụ trên ta thay đổi cách nhóm $\left(1-\sqrt{x-1}\right)$ *bằng cách nhóm* $\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-1\right)$ *và cách nhóm* $\left(2-\sqrt[3]{x+6}\right)$ *bằng cách nhóm* $\sqrt[3]{x+6}\left(\sqrt[3]{(x+6)^2}-4\right)$ *để truy ngược dấu biểu thức liên hợp .*

Bài tập tương tự

1) Giải phương trình $10x+2=\sqrt{4x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$

2) Giải phương trình $x^2+3x-8=\sqrt{2x-3}+\sqrt[3]{x-1}$

3) Giải phương trình $x^2+4x+1=\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+5}$

$$x^2+14x+1=\sqrt[3]{2x+1}+2\sqrt{9x+4}-2\sqrt{4-x}$$

$$15x+6=\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{11x+4}$$

$$6(x-1)\sqrt{x+1}+\left(x^2+2\right)\left(\sqrt{x-1}-3\right)=x\left(x^2+2\right)(TH\ \&\ TT-T4/419)$$

$$(x+6)\sqrt{x+2}+1=\sqrt[3]{3x+7}$$

$$\sqrt{x^2+9x-1}+x\sqrt{11-3x}=2x+3$$

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)\left(x^2-3x+5\right)}=2x$$

Ví dụ 4. Giải phương trình $5x+3=(x+1)\left(2\sqrt{x^2+3}-x^2\right)+\sqrt[3]{3x^2+5}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)+\left(x+1-\sqrt[3]{3x^2+5}\right)+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x^2+3}\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{x^3+3x-4}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{3x^2+5}+\sqrt[3]{(3x^2+5)^2}}+(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{x^2+x+4}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{3x^2+5}+\sqrt[3]{(3x^2+5)^2}}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

$$Do\ \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{x^2+x+4}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{3x^2+5}+\sqrt[3]{(3x^2+5)^2}}+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x=1

-Nhận xét :

Với $x\in\mathbb{R}$ *thì dấu của biểu thức (x+1) chưa xác định , vì vậy khi chọn đại lượng để nhóm với* $-2(x+1)\sqrt{x^2+3}$ *thì ngoài việc xuất hiện nhân tử (x-1) ta cũng cần làm xuất hiện* $(x+1)^2$

Bài tập tương tự

1) Giải phương trình $2x^3+x^2+x-1=x\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt[3]{2x+2}$
2) Giải phương trình $3x-4+\sqrt{2x+3}=(1-x)\left(x^2-2\sqrt{x^2+3}\right)$
3) Giải phương trình $x^3-5x^2+13x-6=(x-2)\sqrt{x^2-3x+3}+2\sqrt{3x+1}$

Ví dụ 5 : Giải phương trình $(x+1)\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7}=x^2+7x+12$

- ***Phân tích***
- *Trước hết ta nhận định phương trình có nghiệm duy nhất x=2. Nếu ta sử dụng phương pháp nhân liên hợp một cách thong thường , dấu trước các biểu thức là ngược nhau nên có thể dẫn đến việc phải kết hợp với phương pháp đánh giá . Ta sẽ tìm cách khắc phục vấn đề này bằng cách tìm nhóm các biểu thức với nhau sao cho phương trình được đưa về dạng (x-2).f(x)>0,* $\forall x\geq -2$.

- *Để ý rằng , với điều kiện* $x \ge -2$ *thì ta chưa khẳng định được dấu của nhị thức (x+1) vì vậy khi thực hiện phép nhân liên hợp đối với* $(x+1)\sqrt{x+2}$ *, ta cần tạo ra nhân tử* $(x+1)^2(x-2)$ *hay ta cần tìm m,n sao cho :*

$mx+n-\sqrt{x+2}=0$ *khi x=-1 ;x=2 ,tức ta có hệ :* $\begin{cases} -m+n=1 \\ 2m+n=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{1}{3} \\ n=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

Từ đó nhân cả 2 vế của phương trình với 3 cho ta :

$3x^2+21x+36-3(x+1)\sqrt{x+2}-3(x+6)\sqrt{x+7}=0$

Tiến hành việc nhóm nhân tử cho biểu thức $3(x+1)\sqrt{x+2}$ *và* $3(x+6)\sqrt{x+7}$ *,ta sẽ được :*

$(x+1)\left(x+4-3\sqrt{x+2}\right)+(x+6)\sqrt{x+7}\left(\sqrt{x+7}-3\right)+x^2+3x-10=0$

Lời giải

Điều kiện $x \ge -2$. Phương trình đã cho tương đương với :

$(x+1)\left(x+4-3\sqrt{x+2}\right)+(x+6)\sqrt{x+7}\left(\sqrt{x+7}-3\right)+x^2+3x-10=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2(x-2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+(x+6)\sqrt{x+7}\frac{(x-2)}{\sqrt{x+7}+3}+(x-2)(x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{(x+1)^2}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{(x+6)\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}+3}+(x+5)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

$$Do\,\frac{(x+1)^2}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{(x+6)\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}+3}+(x+5)>0\,\forall x\ge -2$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất *x=2*

Bài tập tương tự

1) Giải phương trình $3x^2+14x+13=(x+1)\sqrt{4x+5}+2(x+5)\sqrt{x+3}$
2) Giải phương trình $5x^2+(3x+1)\sqrt{2-x}=17x+28+3(x-13)\sqrt{2x-1}$
3) Giải phương trình $2\left(8x^2+7x+1\right)=(x+1)\sqrt{2x+3}+2(3x+1)\sqrt{4x+2}$

Ví dụ 6: Giải phương trình:

$$(x+2)\sqrt{x+1}-(4x+5)\sqrt{2x+3}=-6x-23$$

Điều kiện $x \ge -1$ đặt $\sqrt{x+1}=t\,(t\ge 0)$

Phương trình đã cho trở thành

$$t^3+6t^2+t+17=\left(4t^2+1\right)\sqrt{2t^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(4t^2+1\right)\left(\sqrt{2t^2+1}-t-1\right)+(t-2)\left(3t^2+4t+8\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(4t^2+1\right)\frac{t^2-2t}{\sqrt{2t^2+1}+t+1}+(t-2)\left(3t^2+4t+8\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\left(\frac{4t^3+t}{\sqrt{2t^2+1}+t+1}+3t^2+4t+8\right)=0$$

$$\Leftrightarrow t=2$$

$$Do\,\frac{4t^3+t}{\sqrt{2t^2+1}+t+1}+3t^2+4t+8>0,\forall t\ge 0$$

Với t=2 ,thay trở lại ta tìm được x=3.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là x=3

- ***Nhận xét.***

Thông thường khi sử dụng phép biến đổi truy ngược sẽ làm xuất hiện những biểu thức không chứa căn có số mũ cao . Trong trường hợp số mũ cao nhất của biểu thức không chứa căn thức bé hơn số mũ cao nhất của biểu thức chứa căn thức , ta sử dụng phép đặt ẩn phụ để thay đổi vai trò của chúng .

Bài Tập tương tự :

1) *Giải phương trình* $x-3+(x+1)\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x+2}=0$

2) *Giải phương trình* $(8x+13)\sqrt{4x+7}=12x+35+2(x+2)\sqrt{2x+3}$

3) *Giải phương trình* $4x+12=(3x+8)\sqrt{x+6}-(4x+13)\sqrt{x+2}$

** ***Bình luận*** :

+) Khi giải một phương trình vô tỷ bằng phương pháp nhân liên hợp ta thường gặp rất nhiều khó khăn ở công đoạn xử lý phương trình A(x)=0 bởi nó phụ thuộc vào nhiều sự tinh tế của người giải toán trong quá trình so sánh các đại lượng có trong biểu thức A(x) . Để giải quyết vấn đề này , tat hay thế những cách nhóm nhân tử thong thường bằng những cách nhóm truy ngược dấu của biểu thức liên hợp . ☺

+) Khi biến đổi truy ngược chúng ta luôn phải chú ý đến điều kiện có nghĩa của phương trình vô tỷ ban đầu để đảm bảo dấu của các đại lượng trong biểu thức A(x) là cùng dương hoặc cùng âm.

+) Ta cần chú ý đến hệ số bậc cao nhất của các biểu thức chứa căn và biểu thức không chứa căn , nếu dấu của chúng ngược nhau ta sẽ sử dụng phép truy ngược biểu thức liên hợp để biến đổi .

+) Trong phương pháp sử dụng lượng liên hợp để giải phương trình vô tỷ , việc đoán biết được nghiệm và số nghiệm của phương trình rất quan trọng . Tuy nhiên nếu sử dụng sự hỗ trợ của máy tính bỏ túi CaSiO-FX 570ES vấn đề này hoàn toàn được giải quyết .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8 \left(TH\,\&\,TT-T11/396\right)$

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x \left(TH\,\&\,TT-T4/388\right)$

Bài 3. Giải phương trình $x^2+14x+1=\sqrt[3]{2x+1}+2\sqrt{9x+4}-2\sqrt{4-x}$

Bài 4. Giải phương trình $15x+6=\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{11x+4}$

Bài 5. Giải phương trình

$$6(x-1)\sqrt{x+1}+\left(x^2+2\right)\left(\sqrt{x-1}-3\right)=x\left(x^2+2\right)\left(TH\,\&\,TT-T4/419\right)$$

Bài 6. Giải phương trình $(x+6)\sqrt{x+2}+1=\sqrt[3]{3x+7}$

Bài 7. Giải phương trình $\sqrt{x^2+9x-1}+x\sqrt{11-3x}=2x+3$ ***(Cuộc thi 45 năm TH&TT)***

Bài 8. Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)}=2x$

Trích từ tài liệu **Truy ngược dấu** của tác giả Hương Nguyễn (C1K36)