Tuyển tập

BỘ BA CÂU PHÂN LOẠI

TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA 201

MÔN TOÁN

* PT, HPT, BPT
* PP tọa độ trong MP
* BĐT, Tìm GTLN, GTNN

DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC

TUYỂN TẬP BỘ BA CÂU PHÂN LOẠI TRONG ĐỀ THI THỬ TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA 2015

Diễn đàn toán học VMF

Ngày 6 tháng 8 năm 2015

Kí hiệu dùng trong sách

BĐT	:	Bất đẳng thức
BPT	:	Bất phương trình
CMR	:	Chứng minh rằng
ĐH	:	Đại học
GDĐT	:	Giáo dục và đào tạo
GTLN	:	Giá trị lớn nhất
GTNN	:	Giá trị nhỏ nhất
PT	:	Phương trình
THPT	:	Trung học phổ thông
THTT	:	Tạp chí Toán học Tuổi trẻ
TP. HCM	:	Thành phố Hồ Chí Minh
VMF	:	Vietnam Mathematics Forum
VP	:	Vế phải
VT	:	Vế trái
VTCP	:	Vectơ chỉ phương
VTPT	:	Vectơ pháp tuyến

LỜI NÓI ĐẦU

Xuất phát từ thực tế kì thi THPT Quốc gia 2015, với các bạn sử dụng kết quả môn Toán để xét tuyển đại học, thì sự cạnh tranh chủ yếu diễn ra ở bộ ba câu phân loại. Bộ ba câu này thường rơi vào các chủ đề *Phương trình - Bất phương trình - Hệ phương trình, Hình học tọa độ phẳng, Bất đẳng thức - Tìm GTLN, GTNN.*

Nhằm mục đích cung cấp thêm cho các bạn chuẩn bị tham gia kì thi THPT Quốc gia 2016 một tài liệu tham khảo hữu ích, các thành viên của Diễn đàn toán học VMF đã cùng nhau biên soạn tài liệu này. Tài liệu bố cục gồm ba phần chính. Phần đầu, chúng tôi tóm tắt một vài lý thuyết cơ bản tương ứng với 3 chủ đề đã nói ở trên để bạn đọc có thể tra cứu dễ dàng khi cần thiết. Phần hai, cũng là nội dung chính của tài liệu, chúng tôi tổng hợp lại bộ ba câu phân loại trong các đề thi thử năm học 2014 - 2015. Phần hướng dẫn, đáp số chúng tôi chủ yếu dựa trên đáp án của đơn vị ra đề, tuy nhiên trong một số bài toán chúng tôi có đưa ra cách tiếp cận khác hoặc chỉ hướng dẫn sơ lược có đáp số nhằm giúp bạn đọc chủ động hơn trong quá trình đọc tài liệu. Chúng tôi nhấn mạnh rằng, cách làm trong tài liệu này chưa hẳn là tốt nhất, bạn đọc cũng không nên quá coi trọng các lời giải mang đậm chất kĩ thuật, khó định hướng tự nhiên.

Nhóm biên soạn tài liệu này gồm có

- Bạn Trần Tuấn Anh, Nguyễn Nguyên Trang - Sinh viên khoa Toán ĐH Sư phạm TP. HCM (Katyusha);
- Bạn Trương Việt Hoàng - THPT Nguyễn Du, Thái Bình (Viet Hoang 99);
- Thầy Châu Ngọc Hùng - Ninh Thuận (hungchng);
- Thầy Nguyễn Công Định - Cà Mau (CD13);
- Thầy Hoàng Ngọc Thế - Hà Nội (E.Galois);
- Thầy Lê Minh An - Nam Định (leminhansp);
- Bạn Trần Trung Kiên - TP. HCM (Ispectorgadget).

Mặc dù chúng tôi đã cùng nhau biên soạn tài liệu này với tất cả sự tận tâm, tinh thần vì cộng đồng vô tư. Nhưng sự tỉ mỉ và cố gắng của chúng tôi chắc chắn chưa thể kiểm soát được hết các sai sót. Vì vậy sự nhiệt tâm từ phía bạn đọc cũng sẽ giúp tài liệu hoàn thiện hơn. Mọi trao đổi hãy chia sẻ với chúng tôi tại Diễn đàn toán học VMF (http://diendantoanhoc.net).

Sau cùng, chúng tôi hi vọng cộng đồng chia sẻ trực tuyến sẽ dành cho chúng tôi sự tôn trọng tối thiểu bằng cách ghi rõ nguồn tài liệu khi chia sẻ. Không dùng tài liệu này để trục lợi cá nhân. Chúng tôi xin cảm ơn!

Nhóm biên tập

Mục lục

I. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

1 Lý thuyết chung

1.1 Hệ tọa độ

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho các điểm: $A\left(x_A; y_A\right), B\left(x_B; y_B\right), C\left(x_C; y_C\right)$.

- Tọa độ vectơ: $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A; y_B - y_A\right)$
- Tọa độ trung điểm J của đoạn thẳng AB, trọng tâm G của tam giác ABC lần lượt là:
$$J\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right); \quad G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

1.2 Phương trình đường thẳng

1.2.1 Vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng:

- Vectơ $\overrightarrow{u}\,(\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0})$ là **vectơ chỉ phương** của đường thẳng d nếu nó có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d.
- Vectơ $\overrightarrow{n}\,(\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0})$ là **vectơ pháp tuyến** của đường thẳng d nếu nó có giá vuông góc với đường thẳng d.
- Đường thẳng $ax + by + c = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (a; b)$.
- Hai đường thẳng song song có cùng vectơ chỉ phương (vectơ pháp tuyến).
- Hai đường thẳng vuông góc có vectơ pháp tuyến của đường thẳng này là vectơ chỉ phương của đường thẳng kia.
- Nếu $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}$ lần lượt là vectơ chỉ phương, vectơ pháp tuyến của đường thẳng d thì $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$. Do đó, nếu $\overrightarrow{u} = (a; b)$ thì $\overrightarrow{n} = (b; -a)$.
- Một đường thẳng có vô số vectơ pháp tuyến, vô số vectơ chỉ phương. Nếu $\overrightarrow{n}$ là một vectơ pháp tuyến (vectơ chỉ phương) của đường thẳng d thì $k\overrightarrow{n}\,(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến, vectơ chỉ phương của d.

1.2.2 Phương trình đường thẳng

- **Phương trình tổng quát** của đường thẳng:
$$ax + by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 > 0) \tag{1}$$
Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và nhận $\overrightarrow{n} = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến có phương trình dạng:
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \tag{2}$$
Đặc biệt: đường thẳng đi qua $(a; 0), (0; b)$ có **phương trình theo đoạn chắn**:
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{3}$$

* Đường thẳng đi qua $M(x_0;y_0)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{n}=(p;q)$ làm vectơ chỉ phương, có **phương trình tham số** là:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \end{cases} \tag{4}$$

Có **phương trình chính tắc** là:

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} \quad (p,q \neq 0) \tag{5}$$

Đặc biệt: đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt $A\left(x_A;y_A\right), B\left(x_B;y_B\right)$ có phương trình dạng:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} \tag{6}$$

- Đường thẳng đi qua $M(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k thì có **phương trình đường thẳng với hệ số góc** dạng:

$$y = k(x-x_0)+y_0 \tag{7}$$

Chú ý:

– Không phải đường thẳng nào cũng có hệ số góc. Các đường thẳng dạng $x=a$ không có hệ số góc. Do vậy, khi giải các bài toán dùng hệ số góc, ta phải xét cả trường hợp đặc biệt này.

– Nếu $\overrightarrow{n}=(a;b),(b\neq 0)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng thì hệ số góc của nó là $k=-\dfrac{a}{b}$.

1.2.3 Vị trí tương đối của 2 điểm và 1 đường thẳng

Cho $A\left(x_A;y_A\right), B\left(x_B;y_B\right)$ và đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$. Khi đó:

- Nếu $\left(ax_A+by_A+c\right)\left(ax_B+by_B+c\right)<0$ thì A,B ở về hai phía khác nhau đối với Δ.
- Nếu $\left(ax_A+by_A+c\right)\left(ax_B+by_B+c\right)>0$ thì A,B ở cùng một phía đối với Δ

1.3 Góc và khoảng cách

- Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ được tính dựa theo công thức:

$$\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}) = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}}{\left|\overrightarrow{v}\right|.\left|\overrightarrow{w}\right|} \tag{8}$$

- Giả sử $\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_2$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của các đường thẳng d_1 và d_2. Khi đó:

$$\cos\widehat{(d_1,d_2)} = \frac{\left|\overrightarrow{n}_1.\overrightarrow{n}_2\right|}{\left|\overrightarrow{n}_1\right|.\left|\overrightarrow{n}_2\right|} \tag{9}$$

- Độ dài vectơ $\overrightarrow{u}=(a;b)$ là:

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{a^2+b^2} \tag{10}$$

- Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ là:

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} \tag{11}$$

- Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left(AB.AC\right)^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2} \tag{12}$$

- Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng $d: ax+by+c=0$ được tính bằng công thức:

$$d_{(M;d)} = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{13}$$

1.4 Phương trình đường tròn

- Đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R có dạng:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{14}$$

- Phương trình:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0, \quad (a^2 + b^2 - c > 0) \tag{15}$$

  cũng là phương trình đường tròn với tâm $I(-a;-b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

- Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại điểm $M(x_0;y_0)$

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0 \tag{16}$$

- Vị trí tương đối của đường thẳng Δ và đường tròn (C) tâm I, bán kính R.
  - Nếu $d_{(I;\Delta)} > R$ thì Δ và (C) không cắt nhau.
  - Nếu $d_{(I;\Delta)} = R$ thì Δ và (C) tiếp xúc tại I' là hình chiếu của I lên d.
  - Nếu $d_{(I;\Delta)} < R$ thì Δ và (C) cắt nhau tại hai điểm M,N. Khi đó trung điểm H của MN là hình chiếu của I lên MN và

$$MN = 2\sqrt{R^2 - d^2_{(I,\Delta)}} \tag{17}$$

1.5 Phương trình Elip

- Elip là tập hợp các điểm M di động thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$ với F_1, F_2 cố định, $F_1F_2 = 2c$, $a > c > 0$ là các số cho trước.

- $F_1(-c;0)$,$F_2(c;0)$ được gọi là **tiêu điểm**, $F_1F_2 = 2c$ được gọi là **tiêu cự**. MF_1, MF_2 là các **bán kính qua tiêu**.

- Các điểm $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ được gọi là các **đỉnh** của elip. Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ được gọi là **trục lớn**, $B_1B_2 = 2b$ được gọi là **trục nhỏ**.

- **Phương trình chính tắc của Elip** có hai tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ là:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{18}$$

  Trong đó $a > b > 0, b^2 = a^2 - c^2$.

- **Tâm sai** $e = \dfrac{c}{a}$.

- Cho elip (E) có phương trình chính tắc (18). Hình chữ nhật $PQRS$ với $P(-a;b)$, $Q(a;b)$, $R(a;-b)$, $S(-a;-b)$ được gọi là **hình chữ nhật cơ sở** của Elip.

- Nếu $M \in (E)$ và M, F_1, F_2 không thẳng hàng thì đường thẳng phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1MF_2}$ chính là tiếp tuyến của (E) tại M.

2 Một số kĩ thuật cơ bản

2.1 Kĩ thuật xác định tọa độ điểm

2.1.1 Dựa vào hệ điểm

Xác định tọa độ điểm M thỏa mãn điều kiện nào đó với hệ các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$. Đối với bài toán này, ta đặt $M(x;y)$ và khai thác giả thiết.

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có trọng tâm $G(1;2)$, trực tâm $H(-1;3)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác.

Lời giải

Giả sử $I(x;y)$. Ta có: $\overrightarrow{GH} = (-2;1); \overrightarrow{GI} = (x-1;y-2)$. Vì $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GI}$ nên:

$$\begin{cases} -2(x-1) = -2 \\ -2(y-2) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy $I\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$.

2.1.2 Xác định tọa độ giao điểm của hai đường

Giao của hai đường thẳng

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $d_1 : ax+by+c=0, d_2 : mx+ny+p=0$ (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ mx+ny+p=0 \end{cases} \tag{19}$$

Giao của đường thẳng và đường tròn

Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$ và đường tròn $(C) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Tọa độ giao điểm (nếu có) của d và (C) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \end{cases} \tag{20}$$

Giao của đường thẳng và Elip

Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\end{cases}$ và elip $(E):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Tọa độ giao điểm của d và (E) (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}\tag{21}$$

Giao của hai đường tròn

Tọa độ giao điểm của hai đường tròn:

$$(C_1):x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0;\quad (C_2):x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0$$

(nếu có) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0\\ x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0\end{cases}\tag{22}$$

Ví dụ 2

Cho hai đường tròn: $(C_1):(x-1)^2+(y-2)^2=25$; $(C_2):\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$. Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của chúng.

Lời giải

Tọa độ giao điểm (nếu có) của hai đường tròn là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y-20=0\\ x^2+y^2-7x+y=0\end{cases}\iff\begin{cases}x-y=4\\ x^2+y^2-7x+y=0\end{cases}\iff\begin{cases}x-y=4\\ \left[\begin{array}{l}x=6\\ x=1\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy hai đường tròn cắt nhau tại $A(6;2), B(1;-3)$.

2.1.3 Điểm thuộc đường

Để tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\end{cases}$ thỏa mãn điều kiện nào đó.

Ta lấy điểm $M(x_0+mt;y_0+nt)$ và áp dụng giả thiết, ta thu được phương trình ẩn t.

Như thế, ta gọi là **tham số hóa** tọa độ điểm M.

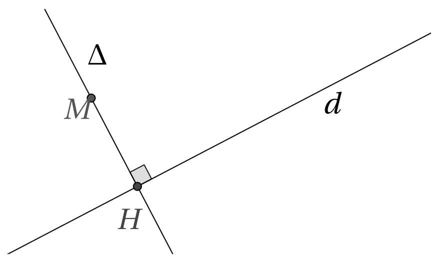
Ví dụ 3

Cho điểm $A(2;-1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d:2x-y-4=0$ sao cho $AM=\sqrt{2}$

Lời giải

Giả sử $M(m;2m-4)$. Ta có: $AM=\sqrt{(m-2)^2+(2m-3)^2}$. Khi đó:
$$AM=\sqrt{2} \iff 5m^2-16m+11=0 \iff \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{11}{5}\end{array}\right.$$
Vậy các điểm cần tìm là $M_1(1;-2)$, $M_2\left(\dfrac{11}{5};\dfrac{2}{5}\right)$.

2.2 Tìm tọa độ hình chiếu của một điểm lên một đường thẳng



Để tìm tọa độ hình chiếu H của M lên đường thẳng d ta có 2 cách:

- Cách 1: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với d. Điểm H chính là giao điểm của d và Δ.
- Cách 2: Tham số hóa tọa độ của $H\in d$ và dựa vào điều kiện $MH\perp d$.

Ví dụ 4

Cho điểm $M(-1;-1)$ và đường thẳng $d: x-y+2=0$.
Tìm tọa độ hình chiếu H của điểm M lên đường thẳng d.

Lời giải

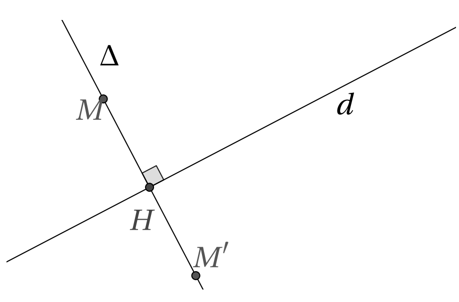
Cách 1
Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với đường thẳng d có phương trình dạng:
$$1.(x+1)+1.(y+1)=0 \iff x+y+2=0$$
Do $H=d\cap\Delta$ nên tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x-y+2=0\\ x+y+2=0\end{cases}$$
Giải hệ ta được $H(-2;0)$.

Cách 2
Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(1;1)$. Giả sử $H(h;h+2)\in d$. Ta có: $\overrightarrow{MH}=(h+1;h+3)$.
$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u}=0 \iff 1.(h+1)+1.(h+3)=0 \iff h=-2$$
Vậy $H(-2;0)$.

2.3 Tìm tọa độ điểm đối xứng của một điểm qua một đường thẳng

Để tìm tọa độ điểm đối xứng M' của M qua đường thẳng d ta có 2 cách:

- Cách 1: Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của M lên d. Do H là trung điểm MM' nên áp dụng công thức tìm tọa độ trung điểm, ta tìm được M
- Cách 2: Giả sử $M'(x;y)$ và H là trung điểm của MM'. Khi đó ta có: $\begin{cases} H\in d\\ \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u}=0\end{cases}$



Ví dụ 5

Tìm tọa độ điểm M' là đối xứng của điểm $M(1;1)$ qua đường thẳng $d: x+y+2=0$.

Lời giải

Cách 1
Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(1;-1)$.
Hình chiếu của M lên đường thẳng d là $H(h;-h-2)\in d$. Ta có: $\overrightarrow{MH}=(h-1;-h-3)$. Do đó:

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u}=0 \iff 1.(h-1)-1.(-h-3)=0 \iff h=-1$$

Vậy $H(-1;-1)$.

Do H là trung điểm của MM' nên: $\begin{cases} x_{M'}=2x_H-x_M=-3 \\ y_{M'}=2y_H-y_M=-3 \end{cases}$.

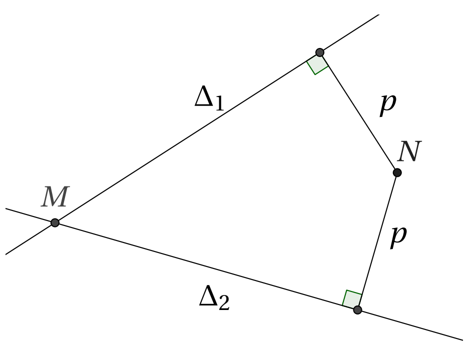
Vậy $M'(-3;-3)$.

Cách 2
Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(1;-1)$.
Giả sử $M'(x;y)$. Khi đó trung điểm MM' là $H\left(\dfrac{x+1}{2};\dfrac{y+1}{2}\right)\in d$ và $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u}=0$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+1}{2}+2=0 \\ 1.(x-1)-1.(y-1)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$$

Vậy $M'(-3;-3)$.

2.4 Viết phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm, cách 1 điểm cho trước một khoảng cho trước



Để viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và cách điểm $N(x_N;y_N)$ một khoảng bằng p ta thường giả sử vectơ pháp tuyến của đường thẳng là $\overrightarrow{n}=(a;b),\quad (a^2+b^2>0)$ và áp dụng công thức tính khoảng cách - công thức (13).

Ví dụ 6

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;3)$ và cách điểm $B(-2;1)$ một khoảng bằng 3.

Lời giải

Giả sử $\overrightarrow{n}=(a;b),(a^2+b^2>0)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng cần tìm. Phương trình đường thẳng có dạng:

$$a(x-1)+b(y-3)=0 \iff ax+by-a-3b=0$$

Khi đó:

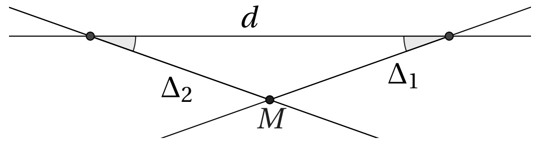
$$d_{(B;\Delta)}=3 \iff \frac{|-2a+b-a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \iff 5a^2-12ab=0 \iff \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\dfrac{12}{5}a \end{array}\right.$$

- $b = 0$, chọn $a = 1$ ta có $\Delta_1 : x - 1 = 0$.
- $b = \dfrac{12}{5}a$, chọn $a = 5, b = 12$ ta có $\Delta_2 : 5x + 12y - 41 = 0$.

Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\Delta_1 : x - 1 = 0; \Delta_2 : 5x + 12y - 41 = 0$.

2.5 Viết phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm, tạo với 1 đường thẳng khác một góc cho trước

Để viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và tạo với đường thẳng d một góc bằng α ta thường giả sử vectơ pháp tuyến của đường thẳng là $\overrightarrow{n} = (a; b), \quad (a^2 + b^2 > 0)$ và áp dụng công thức tính góc - công thức (9).



Ví dụ 7

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(2; 1)$ và tạo với đường thẳng $d : 2x + 3y + 4 = 0$ một góc 45^o.

Lời giải

Giả sử $\overrightarrow{n} = (a; b), (a^2 + b^2 > 0)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng cần tìm. Phương trình đường thẳng có dạng:

$$ax + by - 2a - b = 0$$

Khi đó:

$$\cos\widehat{(d;\Delta)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \frac{|2a + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{4 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff 5a^2 - 24ab - 5b^2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} a = 5b \\ a = -\dfrac{1}{5}b \end{array}\right.$$

- $a = 5b$, chọn $b = 1, a = 5$ ta có $\Delta_1 : 5x + y - 11 = 0$.
- $a = -\dfrac{1}{5}b$, chọn $b = 5, a = -1$ ta có $\Delta_2 : -x + 5y - 3 = 0$.

Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\Delta_1 : 5x + y - 11 = 0; \Delta_2 : -x + 5y - 3 = 0$.

2.6 Viết phương trình đường phân giác trong của một góc

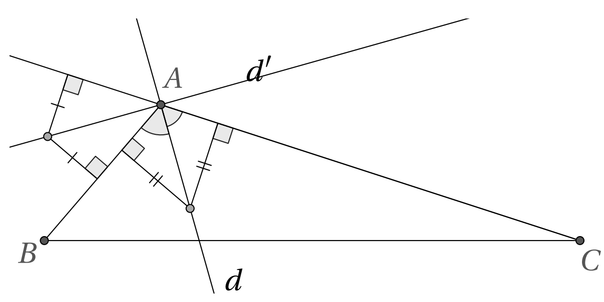
Để viết phương trình đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ ta có nhiều cách. Dưới đây là 3 cách thường sử dụng:

Cách 1:

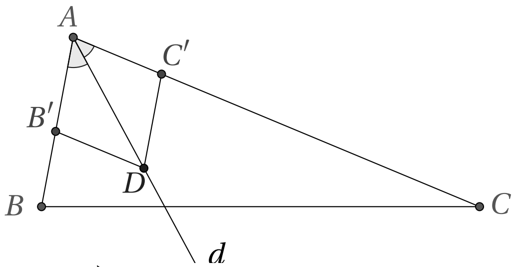
Dựa vào tính chất đường phân giác là tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng $AB : ax + by + c = 0$ và $AC : mx + ny + p = 0$, ta có:

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|mx + ny + p|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

Hai đường thu được là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{ABC}$.



Sau đó, ta cần dựa vào vị trí tương đối của hai điểm B, C với hai đường vừa tìm được để phân biệt phân giác trong, phân giác ngoài. Cụ thể, nếu B, C ở cùng một phía thì đó là phân giác ngoài, ở khác phía thì là phân giác trong.



Cách 2:
Lấy B', C' lần lượt thuộc AB, AC sao cho:

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{AB}.\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{AC}.\overrightarrow{AC}.$$

Giả sử $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$ Khi đó tứ giác $AB'DC'$ là hình thoi (Vì sao?).

Do đó, $\overrightarrow{AD}$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm.

Cách 3:
Giả sử $\vec{u} = (a; b)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm. Ta có:

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = \cos(\overrightarrow{AC}, \vec{u}) \iff \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\overrightarrow{AC}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

Ví dụ 8

Viết phương trình đường phân giác trong góc A của tam giác ABC, biết $A(1;1)$, $B(4;5)$, $C(-4;-11)$.

Lời giải

Cách 1.
Ta có phương trình các cạnh: $AB: 4x-3y-1=0$, $AC: 12x-5y-7=0$.
Phương trình hai đường phân giác góc A là:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{4x-3y-1}{5} = \dfrac{12x-5y-7}{13} \\ \dfrac{4x-3y-1}{5} = -\dfrac{12x-5y-7}{13} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} 4x+7y-11=0 & (d_1) \\ 56x-32y-24=0 & (d_2) \end{array}\right.$$

Ta có:

$$\left(4x_C+7y_C-11\right)\left(4x_B+7y_B-11\right) < 0$$

Do đó B, C khác phía so với (d_1) hay (d_1) là đường phân giác cần tìm.
Cách 2.
Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (3;4); \quad AB = 5; \quad \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-5;-12); \quad AC = 13; \quad \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{13}\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}\right)$$

Ta có: $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \left(\dfrac{14}{65}; -\dfrac{8}{65}\right)$.
Vậy vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm là: $\vec{u} = (7;-4)$. Do đó phương trình đường phân giác cần tìm là:

$$4(x-1)+7(y-1) = 0 \iff 4x+7y-11 = 0$$

Cách 3.
Giả sử $\vec{u} = (a; b)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm. Ta có:

$$\frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\overrightarrow{AC}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} \iff \frac{3a+4b}{5} = \frac{-5a-12b}{13} \iff a = -\frac{7}{4}b$$

Vậy vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm là: $\vec{u} = (7;-4)$. Do đó phương trình đường phân giác cần tìm là:

$$4(x-1)+7(y-1) = 0 \iff 4x+7y-11 = 0$$

2.7 Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm

Để viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm, ta sử dụng phương trình dạng (15) và thay tọa độ ba điểm đó vào, thu được 1 hệ phương trình.

Ví dụ 9

Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết: $A(1;3), B(-1;-1), C(2;0)$.

Lời giải

Giả sử phương trình đường tròn (C) cần tìm có dạng

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0, \quad (a^2+b^2-c>0)$$

Do $A, B, C \in (C)$ nên:

$$\begin{cases} 1+9+2a+6b+c=0 \\ 1+1-2a-2b+c=0 \\ 4+2a+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=-4 \end{cases} \quad \text{(Thỏa mãn)}$$

Vậy $(C): x^2+y^2-2y-4=0$.

2.8 Viết phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm của đường tròn

Cho điểm $A(x_A; y_A)$ nằm ngoài đường tròn (C) tâm I bán kính R. Từ A, kẻ hai tiếp tuyến AT_1, AT_2 tới (C). Hãy viết phương trình đường thẳng T_1, T_2.

Giả sử $T(x;y)$, $I(a;b)$ là tiếp điểm (T là T_1 hoặc T_2). Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} T \in (C) \\ \overrightarrow{AT}.\overrightarrow{IT}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \\ (x-x_A)(x-a)+(y-y_A)(y-b)=0 \end{cases} \tag{23}$$

Trừ từng vế 2 phương trình của (23) ta thu được 1 phương trình đường thẳng. Đó là phương trình cần tìm.

Ví dụ 10

Cho đường tròn (C) có phương trình $(x-4)^2+y^2=4$ và điểm $M(1;-2)$. Tìm tọa độ điểm N thuộc Oy sao cho từ N kẻ được 2 tiếp tuyến NA, NB đến (C) (A, B là tiếp điểm) đồng thời đường thẳng AB đi qua M.

Lời giải

Gọi I và T lần lượt là tâm và tiếp điểm của đường tròn (C) (T là A hoặc B). Ta có:

$$N(0;n), \quad I(4;0), \quad T(x_0;y_0), \quad \overrightarrow{NT}=(x_0;y_0-n), \quad \overrightarrow{IT}=(x_0-4;y_0)$$

Khi đó:

$$\begin{cases} T \in (C) \\ \overrightarrow{NT}.\overrightarrow{IT}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0^2+y_0^2-8x_0+12=0 \\ x_0^2-4x_0+y_0^2-ny_0=0 \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ, ta có: $4x_0-ny_0-12=0$.
Vậy AB có phương trình là: $4x-ny-12=0$.
Vì AB đi qua $M(1;-2)$ nên:

$$4+2n-12=0 \implies n=4$$

Vậy $N(0;4)$.

3 Phương pháp giải toán

3.1 Phương pháp chung

Phương pháp chung để giải quyết bài toán hình học giải tích phẳng gồm các bước sau:

- Vẽ hình, xác định các yếu tố đã biết lên hình
- Khám phá các tính chất khác của hình (nếu cần). Chú ý tìm các đường vuông góc, song song, đồng quy; các đoạn bằng nhau, góc bằng nhau; các góc đặc biệt; quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng, đường tròn, ...
- Xác định các điểm, đường thẳng (theo các kĩ thuật đã học) để thực hiện yêu cầu bài toán.

3.2 Một số hướng khai thác giả thiết

Dưới đây là một số hướng khai thác các giả thiết của đề bài. Dĩ nhiên, tùy vào từng bài cụ thể, ta còn có những hướng sử dụng khác.

1. Phương trình đường thẳng d:
   - Tham số hóa tọa độ của các điểm thuộc d
   - Xét được vị trí tương đối, tìm được giao điểm của d và đường tròn hoặc đường thẳng khác.
   - Viết được phương trình đường thẳng:
     - Song song hoặc vuông góc với d.
     - Các d một khoảng cho trước.
     - Tạo với d một góc cho trước.
   - Lấy đối xứng được qua d. Tìm được hình chiếu của 1 điểm lên d.
   - Xét được vị trí tương đối của hai điểm A, B so với d.
2. Phương trình đường tròn (C)
   - Tìm được tâm và bán kính
   - Xét được vị trí tương đối, tìm được giao điểm của (C) và đường thẳng hoặc đường tròn khác.
3. Điểm G là trọng tâm tam giác ABC.
   - Áp dụng công thức tính tọa độ trọng tâm
   - $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}/$
   - G cùng với trực tâm H, tâm ngoại tiếp I thẳng hàng và $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GI}$.
4. Điểm H là trực tâm của tam giác ABC
   - $AH \perp BC$.
   - $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$, với I là tâm đường tròn ngoại tiếp còn M là trung điểm BC.
   - Điểm đối xứng của H qua AB, AC, BC thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
   - Tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành, với A' là đối xứng của A qua tâm đường tròn ngoại tiếp.

- H cùng với trọng tâm G, tâm ngoại tiếp I thẳng hàng và $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GI}$.

5. Điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

   - $IA = IB = IC = R$
   - I nằm trên đường trung trực các cạnh.
   - I cùng với trọng tâm G, trực tâm H thẳng hàng và $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GI}$.

6. J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

   - J cách đều các cạnh của tam giác.
   - Tìm được bán kính nội tiếp tam giác: $r = d_{(J,AB)}$
   - AJ, BJ, CJ là các đường phân giác trong của các góc trong tam giác.

7. d là đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$.

   - $A, J, K \in d$. Trong đó J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và bàng tiếp cạnh BC.
   - Lấy đối xứng điểm $M \in AB$ qua d ta được $M' \in AC$.
   - $d_{(M,AB)} = d_{(M,AC)}, \quad \forall M \in d$
   - d cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm chính giữa cung BC

8. Tứ giác nội tiếp.

   - Viết được phương trình đường tròn ngoại tiếp.
   - Sử dụng được tính chất: các góc nội tiếp chắn cùng 1 cung thì bằng nhau.
   - Chứng minh được 1 điểm cách đều các điểm khác.

   Các cách chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp:

   (a) Bốn đỉnh cùng cách đều 1 điểm.

   (b) Có hai góc đối diện bù nhau.

   (c) Hai đỉnh cùng nhìn đoạn thẳng (tạo bởi hai đỉnh còn lại) hai góc bằng nhau.

   (d) $MA.MB = MC.MD$, trong đó: $M = AB \cap CD$; hoặc $NA.ND = NC.NB$, với $N = AD \cap BC$.

   (e) $IA.IC = ID.IB$ với I là giao điểm hai đường chéo.

   (f) Tứ giác đó là hình thang cân, hình chữ nhật, hình vuông, ...

3.3 Ví dụ

Ví dụ 11

Cho tam giác ABC có $A(2;2)$ và các phân giác trong góc B, góc C lần lượt là:

$$\Delta_B : x - 3y - 4 = 0, \quad \Delta_C : x + y - 2 = 0$$

Tìm tọa độ B và C.

Phân tích

Khi để bài cho đường phân giác và tọa độ 1 điểm trên cạnh, ta liên tưởng đến việc sử dụng tính đối xứng của đường phân giác. Ta sẽ lấy đối xứng A qua hai đường phân giác.

Lời giải

Gọi $B'(b_1;b_2)$, $C'(c_1;c_2)$ lần lượt là điểm đối xứng của điểm A qua Δ_B và Δ_C. Khi đó B', C' nằm trên BC.
Dễ thấy $\vec{u}=(3;1)$ là 1 vectơ chỉ phương của Δ_B. Gọi I là trung điểm AB', ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB'}\perp\vec{u}\\ I\in\Delta_B\end{cases}. \iff \begin{cases}3.(b_1-2)+1.(b_2-2)=0\\ \dfrac{b_1+2}{2}-3.\dfrac{b_2+2}{2}-4=0\end{cases} \iff \begin{cases}b_1=\dfrac{18}{5}\\ b_2=-\dfrac{14}{5}\end{cases}$$

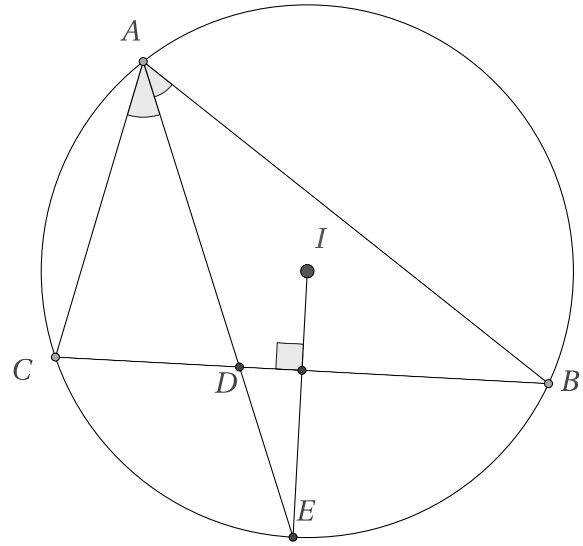
Vậy $B'\left(\dfrac{18}{5};\dfrac{14}{5}\right)$. Tương tự, $C'(0;0)$.
Đường thẳng BC đi qua $(0;0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{C'B'}$ nên có phương trình: $7x-9y=0$.
Từ đó suy ra $C(9;-7)$, $B\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{14}{15}\right)$.

Ví dụ 12

Cho tam giác ABC có điểm $A(2;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1;0)$, chân đường phân giác trong góc A là $D(3;1)$. Tìm tọa độ các điểm B và C.

Phân tích

Đường phân giác lần này lại xuất hiện cùng với đường tròn ngoại tiếp nên ta liên tưởng đến tính chất đường phân giác sẽ cắt đường tròn ngoại tiếp tại điểm chính giữa cung BC.



Lời giải

Đường tròn tâm I bán kính IA: $(x-1)^2+y^2=10$.
Đường thẳng AD: $2x+y-7=0$.
Gọi $E=AD\cap(I)$. Khi đó tọa độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x+y-7=0\\(x-1)^2+y^2=10\end{cases} \iff \begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}$$

Vậy $E(4;-1)$.
Mặt khác:

$$\widehat{CAE}=\widehat{EAB}\implies EC=EB\implies IE\perp BC.$$

Đường thẳng BC đi qua điểm D và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IE}$ nên có phương trình:

$$3x-y-8=0.$$

Tọa độ của B và C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}3x-y-8=0\\(x-1)^2+y^2=10\end{cases} \iff \begin{cases}x=\dfrac{5-\sqrt{3}}{2};y=-\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\\ x=\dfrac{5+\sqrt{3}}{2};y=\dfrac{3\sqrt{3}-1}{2}\end{cases}$$

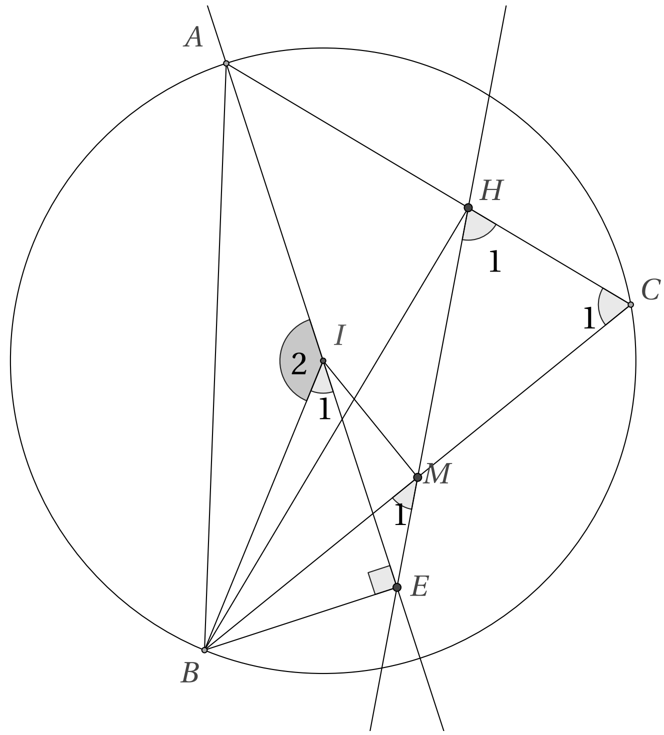
Vậy $B,C\in\left\{\left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\right),\left(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2};\dfrac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)\right\}$.

Có những bài toán đòi hỏi ta tự khám phá các tính chất đặc biệt. Muốn vậy, ta cần vẽ hình thật chính xác. Sau đó thử kiểm tra các tính chất vuông góc, song song, quan hệ liên thuộc, ...

Ví dụ 13

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Điểm $M(2;-1)$ là trung điểm cạnh BC và điểm $E\left(\frac{31}{13};-\frac{1}{13}\right)$ là hình chiếu của B lên AI. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng $AC: 3x+2y-13=0$.

Hướng dẫn



Bằng việc vẽ hình và kiểm tra thử, ta phát hiện ra rằng $EM \cap AC = H$ thì $BH \perp AC$. Ta cần chứng minh điều đó.
Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}\widehat{C_1} &= \frac{1}{2}\widehat{I_2}\\ &= 90^o - \frac{1}{2}\widehat{I_1}\\ &= 90^o - \frac{1}{2}\widehat{M_1}\\ &= 90^o - \frac{1}{2}(180^o - \widehat{C_1} - \widehat{H_1})\\ &= \frac{1}{2}\widehat{C_1} + \frac{1}{2}\widehat{H_1}\end{aligned}$$

Vậy $\widehat{C_1} = \widehat{H_1}$.
Suy ra $BM = MC = MH$, hay H thuộc đường tròn đường kính BC. Suy ra $BH \perp AC$.
Từ đây ta có cách giải:

- Viết phương trình đường thẳng ME
- Tìm tọa độ H
- Viết phương trình BH (đi qua H và vuông với AC.
- Tham số hóa tọa độ của B, C và sử dụng giả thiết M là trung điểm. Tìm được B, C.
- Viết phương trình AI đi qua E và vuông với BE
- Tìm được tọa độ của $A = AI \cap AC$

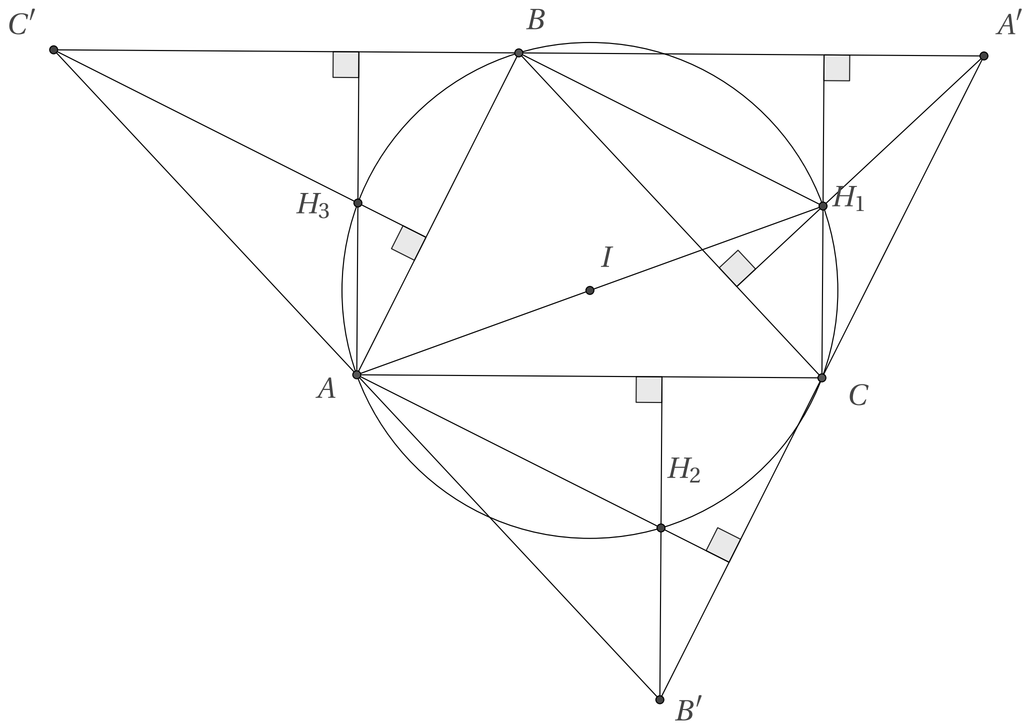
Đáp án: $H\left(\frac{41}{13};\frac{23}{13}\right)$, $BH: 2x-3y-1=0$, $B(-1;-1), C(5;-1), A(1;5)$.

Ví dụ 14

Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' là các điểm sao cho $ABA'C, BCB'A$ và $CAC'B$ là hình bình hành. Biết $H_1(0;-2), H_2(2;-1)$ và $H_3(0;1)$ là trực tâm của các tam giác BCA', CAB' và ABC'. Tìm tọa độ các đỉnh của ABC.

Hướng dẫn

Bằng việc vẽ hình và vẽ thử đường tròn ngoại tiếp tam giác $H_1H_2H_3$ ta nhận ra rằng A, B, C nằm trên đường tròn này.



Ta phải chứng minh điều đó.
Ta có:

$$\begin{cases} BH_1 \perp CA' \\ AB // CA' \end{cases} \Longrightarrow AB \perp BH_1$$
$$\begin{cases} CH_1 \perp BA' \\ AC // BA' \end{cases} \Longrightarrow AC \perp CH_1$$

Do đó B, C nằm trên đường tròn đường kính AH_1. Gọi I là trung điểm AH_1.
Chứng minh tương tự, ta suy ra A, B, C, H_1, H_2, H_3 cùng nằm trên đường tròn tâm I. Hơn nữa, I là trung điểm của AH_1, BH_2, CH_3
Đến đây ta có các bước tiếp theo như sau:

- Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm H_1, H_2, H_3. Tìm được tọa độ của I.
- Áp dụng tính chất trung điểm của I, tìm được A, B, C.

Đáp án: $A(1;1), B(2;-1), C(1;-2)$.

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

1 Trục căn thức

1.1 Trục căn thức để xuất hiện nhân tử chung

1.1.1 Phương pháp

Với một số phương trình ta có thể nhẩm được nghiệm x_0 như vậy phương trình luôn đưa về được dạng tích:

$$\left(x-x_0\right)A(x)=0$$

ta có thể giải phương trình $A(x)=0$ hoặc chứng minh nó vô nghiệm , chú ý điều kiện của nghiệm của phương trình để ta có thể đánh giá

1.1.2 Ví dụ

Ví dụ 15

Giải phương trình:

$$\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}-\sqrt{x^2-3x+4}$$

Hướng dẫn

Ta nhận thấy:

$$\left(3x^2-5x+1\right)-\left(3x^2-3x-3\right)=-2(x-2)$$
$$\left(x^2-2\right)-\left(x^2-3x+4\right)=3(x-2)$$

Ta có thể chuyển vế rồi trục căn thức 2 vế:

$$\frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3\left(x^2-x+1\right)}}=\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$$

Dể dàng nhận thấy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 16

Giải phương trình $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

Hướng dẫn

Để phương trình có nghiệm thì:

$$\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5\geq 0\iff x\geq\frac{5}{3}$$

Ta nhận thấy: $x=2$ là nghiệm của phương trình, như vậy phương trình có thể phân tích về dạng

$(x-2)\,A(x)=0$ để thực hiện được điều đó ta phải nhóm, tách các số hạng như sau:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}\\
\Longleftrightarrow\ &(x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0
\end{aligned}$$

Dễ dàng chứng minh được:

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3<0,\quad \forall x>\frac{5}{3}$$

Ví dụ 17

Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$

Hướng dẫn

Đk $x\geq\sqrt[3]{2}$
Nhận thấy $x=3$ là nghiệm của phương trình, nên ta biến đổi phương trình

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{x^2-1}-2+x-3=\sqrt{x^3-2}-5\\
\Longleftrightarrow\ &(x-3)\left[1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}\right]=\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{\sqrt{x^3-2}+5}
\end{aligned}$$

Ta chứng minh được:

$$1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}=1+\frac{x+3}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}+1\right)^2+3}<2<\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

1.2 Đưa về "hệ tạm"

1.2.1 Phương pháp

Nếu phương trình vô tỉ có dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$ mà $A-B=\alpha C$, ta có thể giải như sau:

$$\frac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=C\implies\sqrt{A}-\sqrt{B}=\alpha$$

khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{A}+\sqrt{B}=C\\ \sqrt{A}-\sqrt{B}=\alpha\end{cases}\implies 2\sqrt{A}=C+\alpha$$

1.2.2 Ví dụ

Ví dụ 18

Giải phương trình:

$$\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$$

Lời giải

Ta thấy:

$$\left(2x^2+x+9\right)-\left(2x^2-x+1\right)=2(x+4)$$

Mặt khác $\forall x \le -4$ không phải là nghiệm của phương trình.
Xét $x > -4$, trục căn thức ta có:

$$\frac{2x+8}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}=x+4 \quad \Longrightarrow \sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2$$

Vậy ta có hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2\\ \sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4\end{cases} \Longrightarrow 2\sqrt{2x^2+x+9}=x+6 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{8}{7}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x=0$ và $x=\dfrac{8}{7}$.

Ví dụ 19

Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x$

Hướng dẫn

Ta thấy:

$$\left(2x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)=x^2+2x$$

(không có dấu hiệu trên).
Ta có thể chia cả hai vế cho x và đặt $t=\dfrac{1}{x}$ thì bài toán trở nên đơn giản hơn.

2 Biến đổi về phương trình tích

2.1 Các biến đổi thường dùng

$$u+v=1+uv \Longleftrightarrow (u-1)(v-1)=0 \tag{24}$$

$$au+bv=ab+vu \Longleftrightarrow \left(u-b\right)(v-a)=0 \tag{25}$$

$$A^k=B^k \Longleftrightarrow A=B \quad (k \quad \text{(lẻ)} \tag{26}$$

$$A^k=B^k \Longleftrightarrow A=\pm B \quad (k \quad \text{(chẵn)} \tag{27}$$

2.2 Ví dụ

Ví dụ 20

Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$

Hướng dẫn

Ta có:

$$PT \Longleftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{x+2}-1\right)=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.$$

Ví dụ 21

Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2+x}$

Hướng dẫn

Dễ thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.
Với $x\neq 0$, chia hai vế cho x, ta được:

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}+\sqrt[3]{x}=1+\sqrt[3]{x+1} \iff \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)=0 \iff x=1$$

Ví dụ 22

Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$

Hướng dẫn

ĐK: $x\geq -1$. Ta có:

$$PT \iff \left(\sqrt{x+3}-2x\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Ví dụ 23

Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+\dfrac{4x}{\sqrt{x+3}}=4\sqrt{x}$

Hướng dẫn

ĐK: $x\geq 0$.
Chia cả hai vế cho $\sqrt{x+3}$, ta có:

$$1+\frac{4x}{x+3}=2\sqrt{\frac{4x}{x+3}} \iff \left(1-\sqrt{\frac{4x}{x+3}}\right)^2=0 \iff x=1$$

Ví dụ 24

Giải phương trình: $\sqrt{\sqrt{3}-x}=x\sqrt{\sqrt{3}+x}$

Hướng dẫn

ĐK: $0\leq x\leq \sqrt{3}$.
Khi đó phương trình đã cho tương đương:

$$x^3+\sqrt{3}x^2+x-\sqrt{3}=0 \iff \left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{10}{3\sqrt{3}} \iff x=\frac{\sqrt[3]{10}-1}{\sqrt{3}}$$

Ví dụ 25

Giải phương trình: $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4$

Hướng dẫn

Đk:$x \geq -3$.
Ta có:

$$PT \iff \left(1+\sqrt{3+x}\right)^2 = 9x^2 \iff \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}+1=3x\\ \sqrt{x+3}+1=-3x\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-5-\sqrt{97}}{18}\end{array}\right.$$

Ví dụ 26

Giải phương trình: $2+3\sqrt[3]{9x^2(x+2)} = 2x+3\sqrt[3]{3x(x+2)^2}$

Hướng dẫn

$$PT \iff \left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{3x}\right)^3 = 0 \iff x=1$$

3 Phương pháp đặt ẩn phụ

3.1 Phương pháp đặt ẩn phụ thông thường

Đối với nhiều phương trình vô tỉ, để giải chúng ta có thể đặt $t = f(x)$ và chú ý điều kiện của t. Nếu phương trình ban đầu trở thành phương trình chứa một biến t quan trọng hơn ta có thể giải được phương trình đó theo t thì việc đặt phụ xem như "hoàn toàn". Nói chung những phương trình mà có thể đặt hoàn toàn $t = f(x)$ thường là những phương trình dễ .

Ví dụ 27

Giải phương trình: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2$

Lời giải

ĐK: $x \geq 1$.
Nhận xét:

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 1$$

Đặt $t = \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}$ thì phương trình có dạng:

$$t+\frac{1}{t} = 2 \iff t=1$$

Từ đó ta có $x=1$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 28

Giải phương trình: $2x^2-6x-1 = \sqrt{4x+5}$

Lời giải

ĐK: $x \geq -\frac{4}{5}$.
Đặt $t = \sqrt{4x+5}(t \geq 0)$ thì $x = \frac{t^2-5}{4}$. Khi đó ta có phương trình sau:

$$\begin{aligned} &2.\frac{t^4-10t^2+25}{16} - \frac{6}{4}(t^2-5) - 1 = t \\ \iff &t^4 - 22t^2 - 8t + 27 = 0 \\ \iff &(t^2+2t-7)(t^2-2t-11) = 0 \end{aligned}$$

Ta tìm được bốn nghiệm là: $t_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}, t_{3,4} = 1 \pm 2\sqrt{3}$.
Do $t \geq 0$ nên chỉ nhận các giá trị $t_1 = -1+2\sqrt{2}, t_3 = 1+2\sqrt{3}$.
Từ đó tìm được các nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1-\sqrt{2}, x = 2+\sqrt{3}$.

Cách 2: Ta có thể bình phương hai vế của phương trình với điều kiện $2x^2-6x-1 \geq 0$
Ta được:

$$x^2(x-3)^2 - (x-1)^2 = 0$$

từ đó ta tìm được nghiệm tương ứng.
Cách 3 Đặt: $2y-3 = \sqrt{4x+5}$ và đưa về hệ đối xứng.

Ví dụ 29

Giải phương trình: $x + \sqrt{5+\sqrt{x-1}} = 6$

Lời giải

ĐK: $1 \leq x \leq 6$
Đặt $y = \sqrt{x-1}$ ta có $0 \leq y \leq \sqrt{5}$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} &y^2 + \sqrt{y+5} = 5 \\ \iff &y^4 - 10y^2 - y + 20 = 0 \\ \iff &(y^2+y-4)(y^2-y-5) = 0 \\ \iff &\left[\begin{array}{ll} y = \frac{1-\sqrt{21}}{2} & \text{(loại)} \\ y = \frac{1+\sqrt{21}}{2} & \text{(loại)} \\ y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} & \\ y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} & \text{(loại)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Từ đó ta tìm được $x = \frac{11-\sqrt{17}}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 30

Giải phương trình: $x = \left(2004+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$

Hướng dẫn

ĐK $0 \le x \le 1$.
Đặt $y = \sqrt{1-\sqrt{x}}$, ta có:

$$2(1-y)^2\left(y^2+y-1002\right)=0 \iff y=1 \iff x=0$$

Ví dụ 31

Giải phương trình: $x^2+2x\sqrt{x-\frac{1}{x}}=3x+1$

Hướng dẫn

Điều kiện: $-1 \le x < 0$.
Chia cả hai vế cho x ta nhận được:

$$x+2\sqrt{x-\frac{1}{x}}=3+\frac{1}{x}$$

Đặt $t = x-\frac{1}{x}$, ta quy được về phương trình bậc hai

Ví dụ 32

Giải phương trình: $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$

Hướng dẫn

Dễ thấy $x=0$ không phải là nghiệm. Chia cả hai vế cho x ta được:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=2$$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}$, Ta có:

$$t^3+t-2=0 \iff t=1 \iff x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

3.2 Đặt ẩn phụ đưa về phương trình thuần nhất bậc 2 đối với 2 biến

Ta nhắc lại cách giải phương trình:

$$u^2+\alpha uv+\beta v^2=0 \tag{28}$$

- Nếu $v \neq 0$, chia cả hai vế cho v^2, phương trình trở thành:
$$\left(\frac{u}{v}\right)^2+\alpha\left(\frac{u}{v}\right)+\beta=0$$

- Nếu $v=0$ thì thử trực tiếp vào phương trình.

Có một số dạng phương trình cũng quy được về (28)

3.2.1 Phương trình dạng: $a.A(x) + bB(x) = c\sqrt{A(x).B(x)}$

Như vậy phương trình $Q(x) = \alpha\sqrt{P(x)}$ có thể giải bằng phương pháp trên nếu:

$$\begin{cases} P(x) = A(x).B(x) \\ Q(x) = aA(x) + bB(x) \end{cases}$$

Lưu ý một số đẳng thức:

$$x^3 + 1 = (x+1)\left(x^2 - x + 1\right) \quad (29)$$

$$x^4 + x^2 + 1 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) \quad (30)$$

$$x^4 + 1 = \left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right) \quad (31)$$

$$4x^4 + 1 = \left(2x^2 - 2x + 1\right)\left(2x^2 + 2x + 1\right) \quad (32)$$

Ví dụ 33

Giải phương trình: $2\left(x^2 + 2\right) = 5\sqrt{x^3 + 1}$

Hướng dẫn

ĐK: $x \geq -1$. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{x^2 - x + 1} \end{cases}$. Phương trình trở thành:

$$2\left(u^2 + v^2\right) = 5uv \iff \left[\begin{array}{l} u = 2v \\ u = \dfrac{v}{2} \end{array}\right.$$

Từ đó, ta tìm được: $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Ví dụ 34

Giải phương trình: $x^2 - 3x + 1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$

Hướng dẫn

Bạn đọc tự giải.

Ví dụ 35

Giải phương trình: $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$

Hướng dẫn

Đk: $x \geq 1$.
Ta cần tìm α, β sao cho:

$$\alpha(x-1) + \beta\left(x^2 + x + 1\right) = 7\sqrt{(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)}$$

Đồng nhất thức ta được:

$$3(x-1) + 2(x + x + 1) = 7\sqrt{(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)}$$

Đặt $\begin{cases} u = x-1 \geq 0 \\ v = x^2+x+1 > 0 \end{cases}$, ta được:

$$3u+2v = 7\sqrt{uv} \iff \left[\begin{array}{l} v = 9u \\ v = \dfrac{u}{4} \end{array}\right.$$

Ta có nghiệm: $x = 4 \pm \sqrt{6}$.

Ví dụ 36

Giải phương trình: $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0$

Hướng dẫn

ĐK: $x \geq -2$.
Đặt $y = \sqrt{x+2}$ ta biến phương trình về dạng phương trình thuần nhất bậc 3 đối với x và y:

$$x^3 - 3x^2 + 2y^3 - 6x = 0 \iff x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -2y \end{array}\right.$$

Ta có nghiệm: $x = 2, x = 2 - 2\sqrt{3}$

3.2.2 Phương trình dạng: $\alpha u + \beta v = \sqrt{mu^2 + nv^2}$

Phương trình cho ở dạng này thường khó "phát hiện" hơn dạng trên, nhưng nếu ta bình phương hai vế thì đưa về được dạng trên.

Ví dụ 37

Giải phương trình: $x^2 + 3\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$

Hướng dẫn

ĐK: $|x| \geq 1$.
Ta đặt: $\begin{cases} u = x^2 \\ v = \sqrt{x^2-1} \end{cases}$. Khi đó phương trình trở thành: $u + 3v = \sqrt{u^2 - v^2}$.

Ví dụ 38

Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2+4x+1}$

Hướng dẫn

ĐK: $x \geq \dfrac{1}{2}$. Bình phương 2 vế ta có:

$$\sqrt{\left(x^2+2x\right)(2x-1)} = x^2+1 \iff \sqrt{\left(x^2+2x\right)(2x-1)} = \left(x^2+2x\right) - (2x-1)$$

Ta có thể đặt: $\begin{cases} u = x^2+2x \\ v = 2x-1 \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$uv = u^2 - v^2 \iff \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}v \\ u = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}v \end{array}\right.$$

Do $u, v \geq 0$ nên $u = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}v \iff x^2 + 2x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(2x-1)$

Ví dụ 39

Giải phương trình: $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

Hướng dẫn

ĐK $x \geq 5$.
Chuyển vế bình phương ta được:

$$2x^2-5x+2=5\sqrt{\left(x^2-x-20\right)(x+1)}$$

Dễ thấy không tồn tại số α, β sao cho:

$$2x^2-5x+2=\alpha\left(x^2-x-20\right)+\beta(x+1)$$

Vậy ta không thể đặt $\begin{cases} u=x^2-x-20 \\ v=x+1 \end{cases}$. Nhưng may mắn ta có:

$$\left(x^2-x-20\right)(x+1)=(x+4)(x-5)(x+1)=(x+4)\left(x^2-4x-5\right)$$

Ta viết lại phương trình:

$$2\left(x^2-4x-5\right)+3(x+4)=5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}$$

Đến đây bài toán được giải quyết .

3.3 Phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Từ những phương trình tích:

$$\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-x+2\right)=0$$
$$\left(\sqrt{2x+3}-x\right)\left(\sqrt{2x+3}-x+2\right)=0$$

Khai triển và rút gọn ta sẽ được những phương trình vô tỉ không tầm thường chút nào, độ khó của phương trình dạng này phụ thuộc vào phương trình tích mà ta xuất phát.
Từ đó chúng ta mới đi tìm cách giải phương trình dạng này. Phương pháp giải được thể hiện qua các ví dụ sau .

Ví dụ 40

Giải phương trình: $x^2+\left(3-\sqrt{x^2+2}\right)x=1+2\sqrt{x^2+2}$

Hướng dẫn

Đặt $t=\sqrt{x^2+2}$, ta có:

$$t^2-(2+x)t-3+3x=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=x-1 \end{array}\right.$$

Ví dụ 41

Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$

Hướng dẫn

Đặt: $t=\sqrt{x^2-2x+3}, t\ge\sqrt{2}$. Khi đó phương trình trở thành:
$$(x+1)\,t=x^2+1 \iff x^2+1-(x+1)\,t=0$$
Bây giờ ta thêm bớt, để được phương trình bậc 2 theo t:
$$x^2-2x+3-(x+1)\,t+2\,(x-1)=0 \iff t^2-(x+1)\,t+2\,(x-1)=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=x-1 \end{array}\right.$$

Ví dụ 42

Giải phương trình: $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$

Hướng dẫn

ĐK: $|x|\le 1$.
Đặt $t=\sqrt{1-x}$, phương trình trở thành
$$4\sqrt{1+x}=3x+2t+t\sqrt{1+x} \qquad (33)$$
Suy ra:
$$3t^2-\left(2+\sqrt{1+x}\right)t+4\left(\sqrt{1+x}-1\right)=0$$
Nhưng không có sự may mắn để giải được phương trình theo t:
$$\Delta=\left(2+\sqrt{1+x}\right)^2-48\left(\sqrt{x+1}-1\right)$$
không có dạng bình phương.
Muốn đạt được mục đích trên thì ta phải tách $3x$ theo $\left(\sqrt{1-x}\right)^2, \left(\sqrt{1+x}\right)^2$. Cụ thể như sau:
$$3x=-(1-x)+2\,(1+x)$$
Thay vào phương trình (33).

Ví dụ 43

Giải phương trình: $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

Hướng dẫn

ĐK: $|x|\le 2$.
Bình phương 2 vế ta có:
$$4\,(2x+4)+16\sqrt{2\left(4-x^2\right)}+16\,(2-x)=9x^2+16$$
Ta đặt: $t=\sqrt{2\left(4-x^2\right)}\ge 0$. Ta được:
$$9x^2-16t-32+8x=0$$
Ta phải tách $9x^2=\alpha 2\left(4-x^2\right)+(9+2\alpha)\,x^2-8\alpha$ sao cho Δ_t có dạng số chính phương.
Nhận xét: Thông thường ta chỉ cần nhóm sao cho hết hệ số tự do thì sẽ đạt được mục đích.

4 Phương pháp đưa về hệ phương trình

4.1 Đặt ẩn phụ đưa về hệ thông thường

Đặt $\begin{cases} u=\alpha\,(x) \\ v=\beta\,(x) \end{cases}$ và tìm mối quan hệ giữa $\alpha\,(x)$ và $\beta\,(x)$ từ đó tìm được hệ theo u, v.

Ví dụ 44

Giải phương trình: $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$

Hướng dẫn

Đặt $y=\sqrt[3]{35-x^3} \implies x^3+y^3=35$.

Khi đó phương trình chuyển về hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$

Giải hệ này ta tìm được nghiệm $(2;3),(3;2)$.

Suy ra nghiệm của phương trình đã cho là $x=2, x=3$.

Ví dụ 45

Giải phương trình: $\sqrt{\sqrt{2}-1-x}+\sqrt[4]{x}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Hướng dẫn

ĐK: $0\le x\le \sqrt{2}-1$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{\sqrt{2}-1-x}=u \\ \sqrt[4]{x}=v \end{cases} \implies \begin{cases} 0\le u\le \sqrt{\sqrt{2}-1} \\ 0\le v\le \sqrt[4]{\sqrt{2}-1} \end{cases}$

Ta đưa về hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ u^2+v^4=\sqrt{2}-1 \end{cases} \iff \begin{cases} u=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-v \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-v\right)^2+v^4=\sqrt{2}-1 \end{cases}$$

Giải phương trình thứ 2:

$$(v^2+1)^2-\left(v+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2=0$$

Từ đó tìm ra rồi thay vào tìm nghiệm của phương trình.

Ví dụ 46

Giải phương trình: $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$

ĐK: $x\ge 1$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x-1}\ge 0 \\ b=\sqrt{5+\sqrt{x-1}}\ge 0 \end{cases}$, ta có:

$$\begin{cases} a^2+b=5 \\ b^2-a=5 \end{cases} \implies (a+b)(a-b+1)=0 \implies a-b+1=0 \implies a=b-1$$

Do đó:

$$\sqrt{x-1}+1=\sqrt{5+\sqrt{x-1}} \iff \sqrt{x-1}=5-x \implies x=\frac{11-\sqrt{17}}{2}$$

Ví dụ 47

Giải phương trình: $\dfrac{6-2x}{\sqrt{5-x}}+\dfrac{6+2x}{\sqrt{5+x}}=\dfrac{8}{3}$

Hướng dẫn

ĐK: $-5<x<5$.
Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{5-x} \\ v=\sqrt{5-y} \end{cases}$, $\left(0<u,v<\sqrt{10}\right)$. Khi đó ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^2+v^2=10 \\ -\dfrac{4}{u}-\dfrac{4}{v}+2(u+z)=\dfrac{8}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} (u+v)^2=10+2uv \\ (u+v)\left(1-\dfrac{2}{uv}\right)=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

4.2 Đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại II

4.2.1 Hệ đối xứng

Ta hãy đi tìm nguồn gốc của những bài toán giải phương trình bằng cách đưa về hệ đối xứng loại II.
Ta xét một hệ phương trình đối xứng loại II sau:

$$\begin{cases} (x+1)^2=y+2 \\ \left(y+1\right)^2=x+2 \end{cases} \tag{34}$$

việc giải hệ này khá đơn giản.
Bây giờ ta sẽ biến hệ thành phương trình. Từ phương trình thứ nhất của (34), ta suy ra:
$$y=\sqrt{x+2}-1$$
Thế vào phương trình còn lại, ta có:
$$(x+1)^2=(\sqrt{x+2}-1)+1 \iff x^2+2x=\sqrt{x+2}$$
Vậy để giải phương trình:
$$x^2+2x=\sqrt{x+2}$$
ta đặt lại như trên và đưa về hệ.
Bằng cách tương tự xét hệ tổng quát dạng bậc 2:
$$\begin{cases} \left(\alpha x+\beta\right)^2=ay+b \\ \left(\alpha y+\beta\right)^2=ax+b \end{cases}$$
Đặt $\alpha y+\beta=\sqrt{ax+b}$, ta có phương trình:
$$\left(\alpha x+\beta\right)^2=\frac{a}{\alpha}\sqrt{ax+b}+b-\frac{\beta}{\alpha}$$
Tương tự cho bậc cao hơn:
$$\left(\alpha x+\beta\right)^n=\frac{a}{\alpha}\sqrt[n]{ax+b}+b-\frac{\beta}{\alpha}$$
Tóm lại phương trình thường cho dưới dạng khai triển ta phải viết về dạng:
$$\left(\alpha x+\beta\right)^n=p\sqrt[n]{a'x+b'}+\gamma$$
và đặt $\alpha y+\beta=\sqrt[n]{ax+b}$ để đưa về hệ, chú ý về dấu của α.
Việc chọn $\alpha;\beta$ thông thường chúng ta chỉ cần viết dưới dạng:
$$\left(\alpha x+\beta\right)^n=p\sqrt[n]{a'x+b'}+\gamma$$
là chọn được.

Ví dụ 48

Giải phương trình: $x^2-2x=2\sqrt{2x-1}$

Hướng dẫn

ĐK: $x\geq\dfrac{1}{2}$. Ta có phương trình được viết lại là:

$$(x-1)^2-1=2\sqrt{2x-1}$$

Đặt $y-1=\sqrt{2x-1}$ thì ta đưa về hệ $\begin{cases}x^2-2x=2(y-1)\\y^2-2y=2(x-1)\end{cases}$.

Trừ hai vế của phương trình ta được $(x-y)(x+y)=0$

Ta tìm được nghiệm của phương trình là: $x=2+\sqrt{2}$.

Ví dụ 49

Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

Hướng dẫn

ĐK: $x\geq-\dfrac{5}{4}$.

Ta biến đổi phương trình như sau:

$$4x^2-12x-2=2\sqrt{4x+5}\iff(2x-3)^2=2\sqrt{4x+5}+11$$

Đặt $\sqrt{4x+5}=2y-3$ ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}(2x-3)^2=4y+5\\(2y-3)^2=4x+5\end{cases}\implies(x-y)(x+y-1)=0\implies\left[\begin{array}{l}x=y\\x+y-1=0\end{array}\right.$$

- Với $x=y$ ta có: $2x-3=\sqrt{4x+5}\implies x=2+\sqrt{3}$.
- Với $x+y-1=0$ ta có: $y=1-x\to x=1-\sqrt{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{1-\sqrt{2};1+\sqrt{3}\}$.

4.2.2 Dạng hệ gần đối xứng

Ta xét hệ sau:

$$\begin{cases}(2x-3)^2=2y+x+1\\(2y-3)^2=3x+1\end{cases}\tag{35}$$

Đây không phải là hệ đối xứng loại II nhưng bằng cách tương tự, ta vẫn xây dựng được phương trình sau:

Ví dụ 50

Giải phương trình: $4x^2+5-13x+\sqrt{3x+1}=0$

Nhận xét: Nếu chúng ta nhóm như những phương trình trước:

$$\left(2x-\frac{13}{4}\right)^2=\sqrt{3x+1}-\frac{33}{4}$$

Đặt $2y-\dfrac{13}{4}=\sqrt{3x+1}$ thì chúng ta không thu được hệ phương trình mà chúng ta có thể giải được.

Để thu được hệ (35) ta đặt: $\alpha y+\beta=\sqrt{3x+1}$ chọn α,β sao cho hệ có thể giải được.
Ta có hệ:

$$\begin{cases}(\alpha y+\beta)^2=3x+1\\ 4x^2-13x+5=-\alpha y-\beta\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha^2y^2+2\alpha\beta y-3x+\beta^2-1=0\\ 4x^2-13x+\alpha y+5+\beta=0\end{cases}$$

Điều kiện của hệ trên có nghiệm là:

$$\frac{\alpha^2}{4}=\frac{2\alpha\beta-3}{\alpha-13}=\frac{\beta^2-1}{5+\beta}$$

Ta chọn được ngay $\alpha=-2;\beta=3$.

Ta có lời giải như sau:

Lời giải

ĐK: $x\geq-\dfrac{1}{3}$

Đặt $\sqrt{3x+1}=-(2y-3),(y\leq\dfrac{3}{2})$. Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}(2x-3)^2=2y+x+1\\ (2y-3)^2=3x+1\end{cases}\Longrightarrow (x-y)(2x+2y-5)=0$$

* Với $x=y$, ta có $x=\dfrac{15-\sqrt{97}}{8}$.

* Với $2x+2y-5=0$ ta có $x=\dfrac{11+\sqrt{73}}{8}$.

Kết luận: tập nghiệm của phương trình là: $\left\{\dfrac{15-\sqrt{97}}{8};\dfrac{11+\sqrt{73}}{8}\right\}$.

Một cách tổng quát. Xét hệ:

$$\begin{cases}f(x)=A.x+B.y+m & (i)\\ f(y)=A'.x+m' & (ii)\end{cases}$$

Để hệ có nghiệm $x=y$ thì: $\begin{cases}A-A'=B\\ m=m'\end{cases}$.

Nếu từ (ii) tìm được hàm ngược $y=g(x)$ thay vào (i) ta được 1 phương trình.
Như vậy để xây dựng phương trình theo lối này ta cần xem xét để có hàm ngược và tìm được và hơn nữa hệ phải giải được.

5 Phương pháp lượng giác hóa

5.1 Một số kiến thức cơ bản

Dấu hiệu	Phép thế	Điều kiện
$\|x\| \le a, \quad (a>0)$	$x = a.\sin\alpha$	$\alpha \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2};\right]$
$a^2x^2+b^2y^2=c^2; \quad (a,b,c>0)$	$\begin{cases} x = \frac{c}{a}.\sin\alpha \\ y = \frac{c}{b}.\cos\alpha \end{cases}$	$\alpha \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a.\tan\alpha \quad \Longrightarrow \sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos\alpha}$	$\alpha \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = \frac{a}{\cos\alpha} \quad \Longrightarrow \sqrt{a^2-x^2} = a\tan\alpha$	$\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$
$\sqrt{1\pm x}; \quad \|x\| \le 1$	$x = \cos 2x$	$\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
$\frac{a\pm b}{1\pm a.b}$	$\begin{cases} a = \tan\alpha \\ b = \tan\beta \end{cases}$	$\alpha;\beta \in \left(\frac{-\pi}{\alpha}; \frac{\pi}{\alpha}\right)$
$a+b+c=abc$	$\begin{cases} a = \tan\alpha \\ b = \tan\beta \\ c = \tan\gamma \end{cases}$	α,β,γ là 3 góc của tam giác

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = k\pi \\ \alpha;\beta;\gamma \neq \frac{k\pi}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma = \tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma \tag{36}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}+k.\pi \\ \alpha;\beta;\gamma \neq \frac{k\pi}{2}+k\pi \end{cases} \Longleftrightarrow \tan\alpha.\tan\beta+\tan\beta.\tan\gamma+\tan\gamma.\tan\alpha = 1 \tag{37}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{4}+k.\pi \\ \alpha;\beta;\gamma \neq \frac{k\pi}{2}+k\pi \end{cases} \Longleftrightarrow (1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)(1+\tan\gamma) = 2(1+\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma) \tag{38}$$

5.2 Xây dựng phương trình vô tỉ bằng phương pháp lượng giác hóa

Từ các phương trình lượng giác đơn giản: $\cos 3t = \sin t$ ta có thể tạo ra được phương trình vô tỉ.
Chú ý: $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ ta có phương trình vô tỉ:

$$4x^3-3x = \sqrt{1-x^2} \tag{39}$$

Nếu thay x bằng $\frac{1}{x}$ ta lại có phương trình:

$$4-3x^2 = x^2\sqrt{x^2-1} \tag{40}$$

Nếu thay x trong phương trình (40) bởi $(x-1)$ ta sẽ có phương trình vô tỉ khó:

$$4x^3-12x^2+9x-1 = \sqrt{2x-x^2} \tag{41}$$

Việc giải phương trình (40) và (41) không đơn giản chút nào ?
Tương tự như vậy từ công thức $\sin 3x, \sin 4x, \ldots$ bạn hãy xây dựng những phương trình vô tỉ theo kiểu lượng giác.

5.3 Một số ví dụ

Ví dụ 51

Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{\dfrac{1-x^2}{3}}$

Hướng dẫn

ĐK: $|x| \le 1$.
Với $x \in [-1;0]$ thì:

$$\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3} \le 0 \quad \text{(vô nghiệm)}$$

Với $x \in [0;1]$ ta đặt: $x=\cos t, t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Khi đó phương trình trở thành:

$$2\sqrt{6}\cos x\left(1+\frac{1}{2}\sin t\right)=2+\sin t \iff \cos t=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Ví dụ 52

Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}+\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$
2. $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$
3. $x^3-3x=\sqrt{x+2}$

Hướng dẫn

1. HD: $\tan x=\sqrt{\dfrac{1+2\cos x}{1-2\cos x}}$.
2. ĐS: $x=\dfrac{1}{2}$.
3. HD: chứng minh $|x|>2$. PT vô nghiệm.

Ví dụ 53

Giải phương trình: $\sqrt[3]{6x+1}=2x$

Lời giải

Lập phương 2 vế ta được:

$$8x^3-6x=1 \iff 4x^3-3x=\frac{1}{2}$$

Với $|x| \le 1$, đặt $x=\cos t, t \in [0;\pi]$.
Khi đó ta được $S=\left\{\cos\dfrac{\pi}{9};\cos\dfrac{5\pi}{9};\cos\dfrac{7\pi}{9}\right\}$.
Mà phương trình bậc 3 có tối đa 3 nghiệm vậy đó cũng chính là tập nghiệm của phương trình.

Ví dụ 54

Giải phương trình: $x^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=1$

Lời giải

ĐK: $|x|>1$.
Ta có thể đặt $x=\frac{1}{\sin t}, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.
Khi đó ta có:

$$\frac{1}{\sin^2 x}(1+\cot t)=1 \iff \left[\begin{array}{l}\cos t=0\\ \sin 2t=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Phương trình có nghiệm: $x=-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Ví dụ 55

Giải phương trình: $\sqrt{x^2+1}=\frac{x^2+1}{2x}+\frac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$

Lời giải

ĐK $x\neq 0, x\neq \pm 1$.
Ta có thể đặt: $x=\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ Khi đó ta có::

$$2\sin t\cos 2t+\cos 2t-1=0 \iff \sin t\left(1-\sin t-2\sin^2 t\right)=0$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6 Phương pháp dùng Bất đẳng thức

Một số phương trình được tạo ra từ dấu bằng của BĐT:

$$\begin{cases}A\geq m\\ B\leq m\end{cases}$$

nếu dấu bằng ở hai BĐT đó cùng đạt được tại x_0 thì x_0 là nghiệm của phương trình $A=B$.
Chẳng hạn:

$$\sqrt{1+2015x}+\sqrt{1-2015x}\leq 2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=0$ và

$$\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\geq 2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=0$. Vậy ta có phương trình:

$$\sqrt{1-2015x}+\sqrt{1+2015x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{1+x}$$

Đôi khi một số phương trình được tạo ra từ ý tưởng:

$$\begin{cases}A\geq f(x)\\ B\leq f(x)\end{cases}$$

Khi đó:

$$A=B \Longleftrightarrow \begin{cases} A=f(x) \\ B=f(x) \end{cases}$$

Chú ý: Khi giải phương trình vô tỷ bằng bất đẳng thức qua các phương trình hệ quả thì đến cuối bài toán phải thế nghiệm vào phương trình đầu để loại nghiệm ngoại lai.
Tóm tắt một vài bất đẳng thức cơ bản thường dùng để giải phương trình vô tỷ.

1. $A^{2n} \geq 0, -A^{2n} \leq 0 \left(n \in N^*\right)$
   Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A=0$

2. $|A| \geq A$.
   Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A \geq 0$.

3. **Bất đẳng thức Cauchy với n số không âm**:
   Nếu $a_1; a_2; ...; a_n$ không âm thì
   $$a_1+a_2+...+a_n \geq n\sqrt[n]{a_1+a_2+...a_n}$$
   Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

4. **Bất đẳng thức Bunhiacopxki** với 2 bộ số $(a_1; a_2; ...; a_n), (b_1; b_2; ..., b_n)$ ta có:
   $$\left(a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n\right)^2 \leq \left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right).\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)$$
   Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi
   $$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$$
   Quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng phải bằng 0.

Ví dụ 56

Giải phương trình: $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}$

Lời giải

ĐK: $x \geq 0$.
Ta có:
$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}\right)^2 \leq \left[\left(2\sqrt{2}\right)^2+x+1\right]\left[\frac{1}{x+1}+\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^2\right]=x+9 \quad \forall x \geq 0$$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:
$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}} \Longleftrightarrow x=\frac{1}{7}$$
Vậy $x=\dfrac{1}{7}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 57

Giải phương trình: $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$

Lời giải

ĐK: $-1 \leq x \leq 1$.
Biến đổi phương trình ta có:
$$x^2\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2=256$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$\left(\sqrt{13}.\sqrt{13}.\sqrt{1-x^2}+3.\sqrt{3}.\sqrt{3}\sqrt{1+x^2}\right)^2 \le (13+27)\left(13-13x^2+3+3x^2\right)=40\left(16-10x^2\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$10x^2\left(16-10x^2\right)\le\left(\frac{16}{2}\right)^2=64$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\sqrt{1-x^2}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3}\\ 10x^2=16-10x^2\end{cases}\iff x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 58

Giải phương trình: $x^{3'}-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$

Hướng dẫn

Ta chứng minh:

$$8\sqrt[4]{4x+4}\le x+13 \text{ và } x^3-3x^2-8x+40\ge 0 \iff (x-3)^2(x+3)\ge x+13$$

7 Phương pháp hàm số

Sử dụng các tính chất của hàm số để giải phương trình là dạng toán khá quen thuộc. Ta có 3 hướng áp dụng sau đây:

1. Thực hiện theo các bước:
   - Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(x)=k$
   - Bước 2: Xét hàm số $y=f(x)$. Chứng minh hàm số này đồng biến hoặc nghịch biến. Giả sử hàm số đồng biến.
   - Bước 3: Nhẩm nghiệm x_0 và nhận xét
     - Với $x>x_0$, ta có $f(x)>f(x_0)=k$ (không thỏa mãn)
     - Với $x<x_0$, ta có $f(x)<f(x_0)=k$ (không thỏa mãn)

     Vậy x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình
2. Hướng 2: thực hiện theo các bước
   - Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(x)=g(x)$.
   - Bước 2: Dùng lập luận khẳng định rằng $f(x)$ và $g(x)$ có những tính chất đơn điệu trái ngược nhau.
   - Bước 3: Xác định x_0 sao cho $f(x_0)=g(x_0)$. Khi đó x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình.
3. Hướng 3: Thực hiện theo các bước:
   - Bước 1: Chuyển phương trình về dạng $f(u)=f(v)$.
   - Bước 2: Xét hàm số $y=f(x)$, dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu.
   - Bước 3: Khi đó $f(u)=f(v)\iff u=v$

Ví dụ 59

Giải phương trình: $(2x+1)\left(2+\sqrt{4x^2+4x+4}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} PT &\iff (2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)=(-3x)\left(2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right)\\ &\iff f(2x+1)=f(-3x)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$, là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $x=-\dfrac{1}{5}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Nhận xét Dựa vào kết quả: Nếu $y=f(t)$ là hàm đơn điệu thì:

$$f(x)=f(t)\iff x=t$$

Ta có thể xây dựng được những phương trình vô tỉ.
Xuất phát từ hàm đơn điệu:

$$y=f(x)=2x^3+x^2+1$$

trên $[0;+\infty)$.
Ta xây dựng phương trình:

$$f(x)=f\left(\sqrt{3x-1}\right)\iff 2x^3+x^2+1=2\left(\sqrt{3x-1}\right)^3+\sqrt{(3x-1)}^2+1$$

Rút gọn ta được phương trình:

$$2x^3+x^2-3x+1=2(3x-1)\sqrt{3x-1}$$

Từ phương trình:

$$f(x+1)=f\left(\sqrt{3x-1}\right)$$

thì bài toán sẽ khó hơn:

$$2x^3+7x^2+5x+4=2(3x-1)\sqrt{(3x-1)}$$

Để giải hai bài toán trên chúng ta có thể làm như sau:
Đặt $y=\sqrt{3x+1}$ khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases}2x^3+7x^2+5x+4=2y^3\\ 3x-1=y^2\end{cases}$$

cộng hai phương trình ta được:

$$2(x+1)^3+(x+1)^2=2y^3+y^2$$

Ví dụ 60

Giải phương trình: $(2x+1)\left(2+\sqrt{4x^2+4x+4}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} PT &\iff (2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)=(-3x)\left(2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right)\\ &\iff f(2x+1)=f(-3x)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$, là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $x=-\dfrac{1}{5}$ là nghiệm duy nhất.

Ví dụ 61

Giải phương trình $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$

Hướng dẫn

Đặt $y=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$, ta có hệ:

$$\begin{cases} x^3-4x^2-5x+6=y \\ 7x^2+9x-4=y^3 \end{cases} \Longrightarrow y^3+y=(x+1)^3+(x+1)$$

Xét hàm số: $f(t)=t^3+t$, là hàm đơn điệu tăng. Ta có:

$$f\left(y\right)=f\left[(x+1)\right] \Longleftrightarrow y=x+1 \Longleftrightarrow (x+1)=\sqrt[3]{7x^2+9x-4} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

III. MỘT SỐ KĨ THUẬT CHỨNG MINH BĐT

Bất đẳng thức là nội dung rất khó và rộng. Trong tài liệu này chúng tôi không có tham vọng thể hiện hết vẻ đẹp của đề tài này, chúng tôi chỉ cố gắng trình bày một số vấn đề mà các em có thể gặp phải ở câu bất đẳng thức trong các đề thi THPT quốc gia.

1 Những BĐT cổ điển thường dùng

1.1 BĐT hai biến

- $a+b \ge 2\sqrt{ab},\ (a,b \ge 0)$
- $a^2+b^2 \ge 2ab$
- $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \ge 4\sqrt{ab},\ (a,b \ge 0)$
- $(a+b)^2 \ge 4ab$
- $a+b \le \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$
- $ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$
- $a^2+b^2 \ge \dfrac{(a+b)^2}{2}$
- $a^3+b^3 \ge ab(a+b),\ (a,b \ge 0)$
- $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b},\ (a,b>0)$
- $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \ge \dfrac{1}{a+b},\ (a,b>0)$

1.2 BĐT ba biến

- $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge \dfrac{9}{a+b+c},\ (a,b,c>0)$
- $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$
- $a^2+b^2+c^2 \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$
- $a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c)$
- $abc \le \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$
- $(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$
- $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge abc(a+b+c)$
- $\dfrac{a^2}{m}+\dfrac{b^2}{n}+\dfrac{c^2}{p} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{m+n+p},\ (m,n,p>0)$

Các bất đẳng thức này đứng gần nhau ta thấy rất đơn giản nhưng chúng ta cần phải biết vận dụng chúng linh hoạt trong nhiều tình huống.

2 Một số kĩ thuật chứng minh BĐT

2.1 Kĩ thuật ghép đối xứng

- Dạng $X+Y+Z \ge A+B+C$.
  Dấu hiệu: $X+Y \ge 2A$. Nếu phát hiện ra dấu hiệu này thì ta xây dựng thêm các bất đẳng thức tương tự sẽ có điều phải chứng minh.

- Dạng $XYZ \ge ABC$.
  Dấu hiệu: $XY \ge A^2$. Nếu phát hiện ra dấu hiệu này thì ta xây dựng thêm các bất đẳng thức tương tự sẽ có điều phải chứng minh.

- Có thể mở rộng thành các dạng tổng quát hơn

$$\left.\begin{array}{l} mX+nY+pZ \ge (m+n+p)\,A \\ mY+nZ+pA \ge (m+n+p)\,B \\ mZ+nX+pY \ge (m+n+p)\,C \end{array}\right\} \Longrightarrow X+Y+Z \ge A+B+C.$$

$$\left.\begin{array}{l} X^m Y^n Z^p \ge A^{m+n+p} \\ Y^m Z^n X^p \ge B^{m+n+p} \\ Z^m X^n Y^p \ge C^{m+n+p} \end{array}\right\} \Longrightarrow XYZ \ge ABC$$

Ví dụ 62

Cho a, b, c là các số dương. CMR

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \ge a+b+c.$$

Hướng dẫn

Chỉ cần thấy và xây dựng thêm bất đẳng thức tương tự với bất đẳng thức $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a} \ge 2b$, sau đó cộng các vế ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 63

Cho các số thực không âm x, y, z thoả mãn $xyz=1$. CMR

$$x^2y+y^2x+z^2x \ge xy+yz+zx.$$

Hướng dẫn

Chỉ cần quan sát thấy $x^2y+x^2y+y^2z \ge 3\sqrt[3]{x^4y^4z}=3xy$ xem như có thể chứng minh được bài toán.

Ví dụ 64

Cho a, b, c là các số không âm. CMR

$$a+b+c \ge \sqrt[4]{ab^3}+\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{ca^3}.$$

Hướng dẫn

Sử dụng đánh giá $a+b+b+b \ge 4\sqrt[4]{ab^3}$.

Ví dụ 65

Cho a, b, c dương. CMR

$$abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Hướng dẫn

Ta có đánh giá

$$(a+b-c)(b+c-a) \le \left(\frac{a+b-c+b+c-a}{2}\right)^2 = b^2.$$

Xây dựng các đánh giá tương tự có đpcm.

Ví dụ 66

Cho a,b,c là các số dương. CMR

$$\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right) \ge (a+b)(b+c)(c+a).$$

Hướng dẫn

Ta chỉ cần chứng minh

$$\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right) \ge (a+b)^2 \iff (ab-1)^2 \ge 0$$

xem như bài toán được giải quyết.

Ví dụ 67

Cho a,b,c là các số dương. CMR

$$(a+b)^3(b+c)^3(c+a)^3 \ge 64abc\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)\left(c^2+ab\right) \ (*).$$

Hướng dẫn

Ta có

$$(*) \iff (a+b)^4(b+c)^4(c+a)^4 \ge 64abc\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)\left(c^2+ab\right)(a+b)(b+c)(c+a),$$

nên ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b)^2(a+c)^2 \ge 4a(b+c)\left(a^2+bc\right).$$

Thật vậy:

$$4a(b+c)\left(a^2+bc\right) = 4(ab+bc)\left(a^2+bc\right) \le \left(ab+bc+a^2+bc\right)^2$$
$$= \left[a(a+b)+c(a+b)\right]^2 = (a+b)^2(a+c)^2.$$

2.2 Kĩ thuật tách ghép

Khi thực hiện việc tách hay ghép vào những biểu thức nào đó thông thường chúng ta chú ý đến các điều cơ bản sau đây.

- Tách hoặc ghép vào những biểu thức tương tự với mẫu số.
- Tách hoặc ghép vào thì phải chú ý trường hợp đẳng thức xảy ra.
- Điều chỉnh những đại lượng tách – ghép sao cho tạo ra những đại lượng tương tự vế còn lại.

Ví dụ 68

Cho a, b, c dương. Chứng minh:

$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)} + \frac{c^2a}{b^3(c+a)} + \frac{a^2b}{c^3(a+b)} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Hướng dẫn

Chúng ta cần quan tâm đến 2 nhận xét sau.

- $\dfrac{b^2c}{a^3(b+c)}$ có bậc là -1 nên thông thường biểu thức ghép vào cũng nên có bậc -1.
- Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ nên $\dfrac{b^2c}{a^3(b+c)}$ được định giá bằng $\dfrac{1}{2a} = \dfrac{1}{2b} = \dfrac{1}{2c}$.

  Như vậy ta có: $\dfrac{b^2c}{a^3(b+c)} + \dfrac{b+c}{4bc} + \dfrac{1}{2b} \geq \dfrac{3}{2a}$. Xây dựng các bất đẳng thức tương tự rồi cộng theo vế ta được

  $$\frac{b^2c}{a^3(b+c)} + \frac{c^2a}{b^3(c+a)} + \frac{a^2b}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{b+c}{bc}+\frac{c+a}{ca}+\frac{a+b}{ab}\right).$$

  Và có điều phải chứng minh.

Ví dụ 69

Cho hai số x, y thoả $2y > x > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{x^3(2y-x)} + x^2 + y^2.$$

Hướng dẫn

Phân tích

$$P = \frac{1}{x^2(2xy-x^2)} + x^2 + \left(y^2 + x^2 - x^2\right) \geq \frac{1}{x^2(2xy-x^2)} + x^2 + \left(2xy - x^2\right) \geq 3.$$

Như vậy GTNN của P bằng 3 khi $x = y = 1$.

Ví dụ 70

Cho các số thực dương a, b, c thoả $abc = 1$. CMR

$$\frac{a^3}{b(c+2)} + \frac{b^3}{c(a+2)} + \frac{c^3}{a(b+2)} \geq 1.$$

Hướng dẫn

Ta có $\dfrac{a^3}{b(c+2)}+\dfrac{c+2}{9}+\dfrac{b}{3}\ge a$ (bạn đọc tự tìm tòi vì sao ta chọn được $\dfrac{c+2}{9}$, $\dfrac{b}{3}$?), xây dựng các bất đẳng thức tương tự và cộng theo vế các bất đẳng thức ta được

$$\frac{a^3}{b(c+2)}+\frac{b^3}{c(a+2)}+\frac{c^3}{a(b+2)}\ge(a+b+c)-\frac{1}{9}(c+2+a+2+b+2)-\frac{1}{3}(a+b+c)\ge 1.$$

Ví dụ 71

Cho a,b,c dương thoả mãn $a+b+c=3abc$. Tìm GTNN của

$$S=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$a+b+c=3abc\iff\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=3$$

Lại có

$$\frac{1}{a^3}+1+1\ge\frac{3}{a}\implies S\ge 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-6$$

Mà

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\ge 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\implies\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3.$$

Nên $S\ge 3$.

2.3 Kỹ thuật dùng BĐT cơ bản

Thông thường những bất đẳng thức không có giả thiết thì ta nên tập trung vào dạng vận dụng BĐT cơ bản (tuy nhiên có giả thiết thì vẫn thực hiện theo kĩ thuật này). Có thể chú ý

- Đánh giá mẫu số: $0<A<B\iff\dfrac{1}{A}>\dfrac{1}{B}$.
- Ngược dấu: $0<A<B\iff M-A>M-B$.
- Một vài phân tích, chẳng hạn: $\dfrac{M}{M+N}=1-\dfrac{N}{M+N}$,...

Ví dụ 72

Cho các số a,b,c dương thoả $a+b+c=3$. CMR

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn

Ta có $ab+bc+ca\le \frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2=3$. Từ đó ta có đánh giá:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le \frac{ab}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}=\frac{ab}{\sqrt{\left(a+c\right)\left(b+c\right)}}\le \frac{ab}{2}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right).$$

Như vậy:

$$\begin{aligned}\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}}&\le \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{b+a}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}+\frac{ca}{c+b}\right)\\&\le \frac{1}{2}\left(\frac{a\left(b+c\right)}{b+c}+\frac{b\left(c+a\right)}{c+a}+\frac{c\left(a+b\right)}{a+b}\right)=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Ví dụ 73

Cho các số dương a,b,c. CMR

$$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\le \frac{a+b+c}{6}.$$

Hướng dẫn

Lưu ý đánh giá sau đây thì chúng ta sẽ chứng minh được bài toán.

$$\frac{9ab}{a+3b+2c}=\frac{9ab}{a+c+b+c+2b}\le ab\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}\right).$$

Ví dụ 74

Cho các số dương a,b,c thoả mãn $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{abc}+\frac{4}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}.$$

Hướng dẫn

Ta có:

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{2abc}+\frac{1}{2abc}+\frac{4}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\\&\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}}\\&=3\sqrt[3]{\frac{1}{abc\left(ab+ac\right)\left(bc+ba\right)\left(ca+bc\right)}}\end{aligned}$$

Áp dụng

$$a^2b^2c^2\le \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^3=\frac{1}{27};\ \left(ab+ac\right)\left(bc+ba\right)\left(ca+cb\right)\le \left(\frac{2\left(ab+bc+ca\right)}{3}\right)^3=\frac{8}{27}.$$

Nên ta có: $P\ge 3\sqrt[3]{3\sqrt{3}.\frac{27}{8}}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 75

Cho a,b,c dương có tổng bằng 3. CMR

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq\frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn

Nếu sử dụng đánh giá $1+b^2\geq 2b$ thì khi thay vào vế trái sẽ ngược dấu. Nên ta sẽ xử lý khéo léo như sau

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\implies\frac{a}{1+b^2}\geq a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Xây dựng tương tự ta có

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq a+b+c-\frac{1}{2}\left(ab+bc+ca\right)\geq 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 76

Cho a,b,c dương. CMR

$$\left(\frac{a}{b+2c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+2b}\right)^2\geq\frac{1}{3}.$$

Hướng dẫn

$$VT\geq\frac{1}{3}\left(\sum\frac{a}{b+2c}\right)=\frac{1}{3}\left(\sum\frac{a^2}{ab+2ac}\right)\geq\frac{1}{3}.\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3\left(ab+bc+ca\right)}\geq\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 77

Cho các số dương x,y,z có tích bằng 1. Tìm GTNN

$$P=\frac{x+y}{x+y+1}+\frac{y+z}{y+z+1}+\frac{z+x}{z+x+1}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{x+y}{x+y+1}=1-\frac{1}{x+y+1}\implies P=3-\left(\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\right)$$

Đặt $x=a^3;y=b^3;z=c^3$

$$\implies P=3-\left(\sum\frac{1}{a^3+b^3+1}\right)\geq 3-\left(\sum\frac{1}{ab\left(a+b\right)+1}\right)=3-\left(\sum\frac{a}{a+b+c}\right)=2.$$

2.4 Kĩ thuật dùng miền xác định của biến số

Đây là kĩ thuật khó, chúng ta cần phải linh hoạt trong việc xây dựng những đánh giá phù hợp với mong muốn. Có thể lưu ý:

- Giả sử $x \in [a;b]$ thì ta có thể xây dựng được: $(x-a)(x-b) \le 0 \iff x^2 \le (a+b)x - ab$ hoặc thành $\frac{ab}{x} \le a+b-x \ (x>0)$,...
- Giả sử $a \le b \le c$ thì ta có thể xây dựng được: $(b-a)(b-c) \le 0 \iff b^2 + ac \le ab + bc$,...

Ví dụ 78

Cho các số dương x, y, z có tổng bằng 3. Tìm GTNN của

$$P = x^2y + y^2z + z^2x + xyz.$$

Hướng dẫn

Giả sử $x \le z \le y$. Ta có:

$$x(x-z)(y-z) \le 0 \iff x^2y + xz^2 \le x^2z + xyz.$$

$$\implies P \le x^2z + y^2z + 2xyz = z(x+y)^2 = \frac{1}{2}.2z(x+y)(x+y) \le 4.$$

Ví dụ 79

Cho $a, b \in [0;2]$. Tìm GTLN của

$$P = \frac{8+6(a+b)+(a+b)^2}{4+2(a+b)+ab}.$$

Hướng dẫn

Từ $a, b \in [0;2] \implies a^2 \le 2a; b^2 \le 2b$.

$$\implies P = \frac{8+6(a+b)+a^2+b^2+2ab}{4+2(a+b)+ab} \le \frac{8+8(a+b)+2ab}{4+2(a+b)+ab} = 2 + \frac{4(a+b)}{4+2(a+b)+ab}.$$

Lại có:

$$(a-2)(b-2) \le 0 \iff ab + 2(a+b) + 4 \le 4(a+b) \implies P \le 3.$$

Ví dụ 80

Cho $a, b, c \in [1;2]$. Chứng minh

$$a^3 + b^3 + c^3 \le 5abc.$$

Hướng dẫn

Giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có:

$$(a-2)\left(a^2+2a-1\right) \leq 0 \iff a^3+2 \leq 5a;$$

$$(b-1)\left(b^2+b+1-5a\right) \leq 0 \iff 5a+b^3 \leq 5ab+1;$$

$$(c-1)\left(c^2+c+1-5ab\right) \leq 0 \iff 5ab+c^3 \leq 5abc+1.$$

Cộng các vế 3 bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.
Hoặc có thể giải cách khác cũng theo miền xác định các biến. Giả sử

$$1 \leq a \leq b \leq c \leq \Longrightarrow (a-b)\left(b^2-c^2\right) \geq 0 \iff b^3 \leq ab^2+bc^2-ac^2 \iff \frac{b^2}{ac} \leq \frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{c}{b}.$$

Mặt khác:

$$\frac{a^2}{bc} \leq \frac{a^2}{ac} = \frac{a}{c};\ \frac{c^2}{ab} \leq \frac{2c}{ab} \leq \frac{2c}{b}.$$

Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh

$$\iff P = \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab} \leq 5 \Longrightarrow P \leq \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

. Lại có

$$b \leq c \leq 2 \leq 2b \Longrightarrow \frac{2b}{c} \geq 1; \frac{c}{b} \geq 1 > \frac{1}{2} \Longrightarrow \left(\frac{2b}{c}-1\right)\left(\frac{c}{b}-\frac{1}{2}\right) \geq 0 \iff \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \leq \frac{5}{2}.$$

Tương tự, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \leq \frac{5}{2}$. Vậy $P \leq 5$. (Điều phải chứng minh)

Ví dụ 81

Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1;3]$ và thoả mãn $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất biểu thức

$$P = \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\frac{1}{2}abc.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$36 = (a+b+c)^2 = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]+3(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca).$$

Mặt khác,

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \iff abc \geq ab+bc+ca-5;$$

$$(3-a)(3-b)(3-c) \geq 0 \iff 3(ab+bc+ca) \geq abc+27$$

Như vậy, đặt $t = ab+bc+ca \Longrightarrow t \in [11;12]$. Khi đó

$$P = \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)+72}{ab+bc+ca}-\frac{abc}{2} = \frac{(ab+bc+ca)^2+72}{ab+bc+ca}-\frac{abc}{2} \leq \frac{t^2+5t+144}{2t}.$$

Việc còn lại chỉ cần khảo sát hàm số trên cho ta GTLN của $P = \frac{160}{11}$.

Ví dụ 82

Cho a, b, c thoả mãn $a \ge 4;\ b \ge 5;\ 6 \le c \le 7;\ a^2+b^2+c^2=90$. Tìm GTNN của

$$S = a+b+c.$$

Hướng dẫn

Từ giả thiết và các điều kiện mở rộng ta có các đánh giá:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \le a < 9 \implies (a-4)(9-a) \ge 0 \iff a \ge \dfrac{a^2+36}{13} \\ 5 \le b < 8 \implies (b-5)(8-b) \ge 0 \iff b \ge \dfrac{b^2+40}{13} \\ 6 \le c \le 7 \implies (c-6)(7-c) \ge 0 \iff c \ge \dfrac{c^2+42}{13} \end{array}\right\} \implies S \ge \frac{a^2+b^2+c^2+118}{13} = 16.$$

2.5 Một số cách biến đổi điều kiện thường gặp

Mục này tập chung vào các ví dụ minh họa cho việc xử lý khéo léo điều kiện của những bài toán bất đẳng thức hoặc tìm GTLN, GTNN có điều kiện.

Ví dụ 83

Cho a,b,c dương và có tổng bằng 1. Tìm GTNN

$$P = \frac{c+ab}{a+b} + \frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ac}{a+c}.$$

Hướng dẫn

Từ giả thiết ta có $c+ab = c(a+b+c)+ab = (c+a)(c+b)$.

$$\implies P = \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} + \frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+c)(b+a)}{a+c}.$$

Dựa vào kĩ thuật ghép đối xứng dễ dàng cho ta kết quả $P \ge a+c+c+b+b+a = 2$.

Ví dụ 84

Cho x,y,z dương thoả mãn $xy+yz+zx = 2xyz$. Tìm GTNN

$$P = \frac{1}{x(2x-1)^2} + \frac{1}{y(2y-1)^2} + \frac{1}{z(2z-1)^2}.$$

Hướng dẫn

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 2$. Đặt $a=\frac{1}{x}; b=\frac{1}{y}; c=\frac{1}{z} \implies a+b+c=2$.
Suy ra

$$P = \sum \frac{a^3}{(2-a)^2}.$$

Lại có $\dfrac{a^3}{(2-a)^2} + \dfrac{2-a}{8} + \dfrac{2-a}{8} \ge \dfrac{3a}{4}$ nên ta dễ dàng tìm được GTNN của P.

Ví dụ 85

Cho a, b, c dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca.$$

Hướng dẫn

Từ giả thiết suy ra $9=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$.
BĐT trở thành

$$a^2+b^2+c^2+2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \geq 9.$$

Lại có $a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a} \geq 3a$, nên ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 86

Cho x, y, z dương thoả mãn $x+y+z=xyz$. Tìm GTNN

$$P=\frac{y}{x\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{y\sqrt{z^2+1}}+\frac{x}{z\sqrt{x^2+1}}.$$

Hướng dẫn

Từ giả thiết

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1 \Longrightarrow ab+bc+ca=1, \ \left(a=\frac{1}{x}; b=\frac{1}{y}; c=\frac{1}{z}\right).$$

$$P=\sum \frac{a}{\sqrt{1+b^2}}=\sum \frac{a}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} \geq \sum \frac{2a}{a+c+2b} \geq \frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}$$

$$=\frac{2(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+ab+bc+ca} \geq \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 87

Cho các số thực x, y, z thoả mãn $x^2+y^2+z^2=5;\ x-y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$A=\frac{x+y-2}{z+2}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$5-z^2=x^2+y^2=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}=\frac{(x+y)^2+(3-z)^2}{2} \Longrightarrow (x+y)^2=1+6z-3z^2.$$

Khi đó

$$A=\frac{\sqrt{1+6z-3z^2}-2}{z+2}.$$

Đến đây chúng ta có thể khảo sát hàm số này theo biến z hoặc sử dụng phương pháp tam thức bậc hai cho ta $-\frac{36}{23} \leq A \leq 0$.

Ví dụ 88

Cho a, b, c dương thoả mãn $(1-a)\left(1-b\right)(1-c)=8abc$. CMR

$$a+b+c\geq 1.$$

Hướng dẫn

Với $a,b,c\geq 1$ BĐT ta có ngay BĐT nên chỉ cần xét $0<a,b,c<1$. Ta có

$$(1-a)\left(1-b\right)(1-c)=8abc \iff \frac{1-a}{a}.\frac{1-b}{b}.\frac{1-c}{c}=8$$

Đặt $x=\frac{1-a}{a};y=\frac{1-b}{b};z=\frac{1-z}{z}$. Khi đó $xyz=8$ và BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\geq 1 \iff x+y+z\geq 6.$$

BĐT này dễ chứng minh được theo $AM-GM$.

2.6 BĐT thuần nhất

Ở đây, để cho đơn giản chúng tôi chỉ đề cập đến bất đẳng thức 3 biến. Phần lý thuyết về "chuẩn hóa" sau đây được trình bày dựa theo bài viết của bạn Nguyễn Hưng trên Diễn đàn toán học.
Biểu thức $P(a,b,c)$ là thuần nhất bậc k nếu và chỉ nếu với mọi số thực t khác 0, ta có

$$P\left(ta,tb,tc\right)=t^kP\left(a,b,c\right)$$

Chẳng hạn: $P=2a^2+ab+c^2$ được gọi là thuần nhất bậc 2.
Một BĐT gọi là thuần nhất nếu cả hai vế của nó đều là những biểu thức thuần nhất.
Xét bất đẳng thức thuần nhất bậc k 3 biến

$$A\left(a,b,c\right)\geq B\left(a,b,c\right)$$

Đặt $S=a+b+c$. Từ đó suy ra $\frac{a}{S}+\frac{b}{S}+\frac{c}{S}=1$. Mặt khác do tính thuần nhất của bất đẳng thức trên nên ta có biến đổi sau

$$A\left(a,b,c\right)\geq B\left(a,b,c\right) \iff \frac{1}{S^k}A\left(a,b,c\right)\geq \frac{1}{S^k}B\left(a,b,c\right) \iff A\left(\frac{a}{S},\frac{b}{S},\frac{c}{S}\right)\geq B\left(\frac{a}{S},\frac{b}{S},\frac{c}{S}\right)$$

Như vậy, thay vì chứng mình với bộ số $(a;b;c)$ thì ta chứng minh bất đẳng thức với bộ số $\left(\frac{a}{S},\frac{b}{S},\frac{c}{S}\right)$ là đủ. Mà đối với bộ số mới này, chúng có tổng là 1. Để cho gọn, người ta ghi "chuẩn hóa: $a+b+c=1$".
Một cách tương tự ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=3$, hoặc $abc=2$ hoặc $ab+bc+ca=1$,... Điều độc đáo và cũng là điều khó nhất của kĩ thuật này là việc chuẩn hóa biểu thức nào cho hợp lý nhất để có chứng minh đơn giản nhất.

Ví dụ 89

Cho a, b, c không âm. CMR

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8.$$

Hướng dẫn

Chuẩn hoá $a+b+c=3$. Như vậy bất đẳng thức ban đầu trở thành:

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\le 8.$$

Khi đó chỉ cần chứng minh được

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}\le \frac{4}{3}(a-1)+\frac{8}{3}\quad (*)$$

thì phép chứng minh hoàn tất. (Vì sao ta tìm được (*)? Điều này được giúp bởi "phương pháp tiếp tuyến" – chúng tôi sẽ đề cập cụ thể phương pháp này phía sau các bài toán bất đẳng thức có liên quan).

Chú ý: Trong kì thi THPT quốc gia không được dùng chuẩn hóa, tuy nhiên chúng ta có thể dùng tư tưởng của chuẩn hóa dưới một cách trình bày sơ cấp như sau.

Đặt $x=\frac{3a}{a+b+c}$; $y=\frac{3b}{a+b+c}$; $z=\frac{3c}{a+b+c}$. Khi đó, $x+y+z=3$ và BĐT trở thành

$$\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2}+\frac{(2y+z+x)^2}{2y^2+(z+x)^2}+\frac{(2z+x+y)^2}{2z^2+(x+y)^2}\le 8.$$

Và ta lại trình bày như trên.

Ví dụ 90

Cho a, b, c không âm. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\le \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}.\quad (*)$$

Hướng dẫn

Chuẩn hóa $ab+bc+ca=3$, suy ra $a+b+c\ge 3$, $abc\le 1$.

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=3(a+b+c)-1\ge 8$$

$$\Longrightarrow \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}\ge 1.\quad \text{(đpcm)}$$

Chú ý: Với tư tưởng của chuẩn hóa, ta có cách trình bày sơ cấp như sau. Đặt

$$x=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{ab+bc+ca}};y=\frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{ab+bc+ca}};z=\frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Khi đó, $xy+yz+zx=3$ và

$$\begin{aligned}(*) \iff & \frac{3^3\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2(c+a)^2}{\left(ab+bc+ca\right)^3}\geq 64\\ \iff & \left[\frac{\sqrt{3}\left(a+b\right)}{\sqrt{ab+bc+ca}}\right]^2\left[\frac{\sqrt{3}\left(b+c\right)}{\sqrt{ab+bc+ca}}\right]^2\left[\frac{\sqrt{3}(c+a)}{\sqrt{ab+bc+ca}}\right]^2\geq 64.\\ \iff & \left(x+y\right)\left(y+z\right)(z+x)\geq 8.\end{aligned}$$

Từ đây ta có thể giải quyết được bài toán. Ví dụ sau đây, để ngắn gọn, chúng tôi sẽ trình bày lời giải bằng phương pháp chuẩn hóa, việc chuyển sang lời giải sơ cấp phù hợp để dành cho bạn đọc.

Ví dụ 91

Cho a,b,c dương. Tìm GTLN

$$Q=\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}.$$

Hướng dẫn

Chuẩn hoá $a+b+c=1$. Ta có:

$$Q=\frac{a(1-a)}{1-2a+2a^2}+\frac{b(1-b)}{1-2b+2b^2}+\frac{c(1-c)}{1-2c+2c^2}$$

Theo $AM-GM$

$$2a(1-a)\leq\left(\frac{2a+1-a}{2}\right)^2=\frac{(a+1)^2}{4}$$

$$\Longrightarrow 1-2a+2a^2=1-2a(1-a)\geq 1-\frac{(a+1)^2}{4}=\frac{(1-a)(a+3)}{4}>0$$

$$\Longrightarrow \frac{a(1-a)}{1-2a+2a^2}\leq\frac{4a(1-a)}{(1-a)(a+3)}=\frac{4}{a+3}=4\left(1-\frac{3}{a+3}\right)$$

$$\Longrightarrow Q\leq 4\left[\left(1-\frac{3}{a+3}\right)+\left(1-\frac{3}{b+3}\right)+\left(1-\frac{3}{c+3}\right)\right]=4\left[3-3\left(\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}\right)\right]$$

Ta có:

$$\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}\geq\frac{9}{a+b+c+9}=\frac{9}{10}$$

$$\Longrightarrow Q\leq 4(3-3.\frac{9}{10})=\frac{6}{5}.$$

Ví dụ 92

Cho các số thực dương a,b,c đôi một khác nhau thỏa mãn $2a\leq c$ và $ab+bc=2c^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}.$$

Hướng dẫn

Ta thấy từ giả thiết và kể cả biểu thức P đều đẳng cấp, nên hướng giải quyết bài toán tốt nhất là thực hiện phép chia cho luỹ thừa của a, b hay c cùng bậc.
Theo giả thiết: $2a \le c$ nên

$$\frac{a}{c} \le \frac{1}{2}\ ;\ ab + bc = 2c^2 \Longleftrightarrow \frac{a}{c}.\frac{b}{c} + \frac{b}{c} = 2 \Longleftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{2c}{b} - 1$$

Vì $\frac{a}{c} \le \frac{1}{2}$ nên $\frac{b}{c} \ge \frac{4}{3}$. Đặt $t = \frac{c}{b}$ thì $0 < t \le \frac{3}{4}$.

$$P = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{a}{c} - \frac{b}{c}} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{b}{c} - 1} + \frac{1}{1 - \frac{a}{c}} = \frac{2t^2 - t}{2t^2 - t - 1} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2(1-t)} = 1 - \frac{2}{2t+1} + \frac{7}{6(1-t)}.$$

Xét hàm số $f(t) = 1 - \frac{2}{2t+1} + \frac{7}{6(1-t)}, t \in \left(0; \frac{3}{4}\right]$. Như vậy $\max P = \frac{27}{5}$.

Ví dụ 93

Cho các số thực a, b, c thoả $a^2 + ab + b^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 - ab - 3b^2.$$

Hướng dẫn

Nếu $b = 0$ thì $P = 3$. Xét trường hợp $b \ne 0$.

$$Q = \frac{P}{3} = \frac{a^2 - ab - 3b^2}{a^2 + ab + b^2} = \frac{t^2 - t - 3}{t^2 + t + 1},\ \left(t = \frac{a}{b}\right).$$

Khảo sát $f(t) = \frac{t^2 - t - 3}{t^2 + t + 1}$ cho ta kết quả $\min P = -3 - 4\sqrt{3}$, $\max P = -3 + 4\sqrt{3}$.

2.7 Kĩ thuật sử dụng hàm số

Bài toán: Chứng minh $F(a; b; c) \ge 0$ (*)

- Dạng 1: Có thể phân tích (*) thành $f(a) + f(b) + f(c) \ge 0$ ta có thể khảo sát hàm đặc trưng.
- Dạng 2: Thường ước lượng $F(a; b; c)$ về một hàm số chỉ phụ thuộc vào một biểu thức, từ đó ta đặt ẩn số phụ là biểu thức đó và khảo sát hàm số này để đạt được mục đích. Trong trường hợp này các em cần phải tìm điều kiện cho ẩn phụ từ giả thiết phải thật chính xác.

Ví dụ 94

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{3 + ab + bc + ca} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

Hướng dẫn

Ta có $\left(ab+bc+ca\right)^2 \geq 3abc\left(a+b+c\right)=9abc>0 \implies ab+bc+ca \geq 3\sqrt{abc}$.
Chứng minh được

$$(1+a)\left(1+b\right)(1+c) \geq \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3, \forall a,b,c>0.$$

Khi đó

$$P \leq \frac{2}{3\left(1+\sqrt{abc}\right)}+\frac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}}=Q\ (1).$$

Đặt $\sqrt[6]{abc}=t$. Vì $a,b,c>0$ nên $0<abc \leq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3=1$.

Xét hàm số

$$Q=\frac{2}{3\left(1+t^3\right)}+\frac{t^2}{1+t^2},\ \mathrm{t}\in\left(0;1\right] \implies Q'\left(t\right)=\frac{2t\left(t-1\right)\left(t^5-1\right)}{\left(1+t^3\right)^2\left(1+t^2\right)^2} \geq 0,\ \forall \mathrm{t}\in\left(0;1\right]$$

Do hàm số đồng biến trên $\left(0;1\right]$ nên $Q=Q\left(t\right) \leq Q\left(1\right)=\dfrac{5}{6}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $P \leq \dfrac{5}{6}$.

Ví dụ 95

Cho 3 số thực x,y,z khác 0 thỏa mãn: $x+y+z=5$ và $x.y.z=1$ .Tìm GTLN của biểu thức:

$$P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{y+z}{yz}=\frac{1}{x}+x\left(5-x\right).$$

Mặt khác: $\left(y+z\right)^2 \geq 4yz \iff (5-x)^2 \geq \dfrac{4}{x} \iff x\in(-\infty;0)\cup[3-2\sqrt{2};4]\cup[3+2\sqrt{2};+\infty)$.
Xét hàm số:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{x}+x\left(5-x\right) \implies f'\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}+5-2\mathrm{x}$$

với $x\in(-\infty;0)\cup[3-2\sqrt{2};4]\cup[3+2\sqrt{2};+\infty)$.
Lập bảng biến thiên và kết luận giá trị lớn nhất của P bằng $1+4\sqrt{2}$ đạt tại: $x=y=1+\sqrt{2}, z=3-2\sqrt{2}$ hay $x=z=1+\sqrt{2}, y=3-2\sqrt{2}$ hoặc $x=y=3-2\sqrt{2},\ z=1+\sqrt{2}$ hay $x=z=3-2\sqrt{2},\ y=1+\sqrt{2}$.

Ví dụ 96

Cho $x,,y,z$ là các số thực dương. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=\frac{2}{x+\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xyz}}-\frac{3}{\sqrt{x+y+z}}$$

Hướng dẫn

Ta có

$$x+\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xyz}=x+\frac{1}{4}\sqrt{2x.8y}+\frac{1}{8}\sqrt[3]{2x.8y.32z}$$
$$\le x+\frac{2x+8y}{8}+\frac{2x+8y+32z}{24}=\frac{32}{24}\left(x+y+z\right)=\frac{4}{3}\left(x+y+z\right).$$

Đặt $t=\sqrt{x+y+z}; t\ge 0 \implies P\ge f\left(t\right)=\frac{3}{2t^2}-\frac{2}{3t}$.

Khảo sát hàm số và ta tìm được $\min P=-\frac{3}{2}$.

Ví dụ 97

Cho $x>0$, $y>0$ thỏa mãn $x^2y+xy^2=x+y+3xy$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=x^2+y^2+\frac{(1+2xy)^2-3}{2xy}$$

Hướng dẫn

Ta có

$$x^2y+xy^2=x+y+3xy \iff xy(x+y)=x+y+3xy \quad (1)$$
$$\implies x+y=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+3\ge\frac{4}{x+y}+3 \implies (x+y)^2-3(x+y)-4\ge 0 \implies x+y\ge 4.$$
$$(1) \iff 1=\frac{1}{xy}+\frac{3}{x+y} \iff 1-\frac{3}{x+y}=\frac{1}{xy}.$$

Nên $P=(x+y)^2+2-\frac{1}{xy}=(x+y)^2+1+\frac{3}{x+y}$.

Đặt $x+y=t\ (t\ge 4) \implies P=t^2+\frac{3}{t}+1=f(t) \implies P=f(t)\ge f(4)=\frac{71}{4}$.

IV. BỘ BA CÂU PHÂN LOẠI TRONG MỘT SỐ ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA 2015

1 Đề minh hoạ THPT 2015

Bài 1. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-2}\geq\sqrt{3(x^2-2x-2)}$.

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác OAB có các đỉnh A,B thuộc đường thẳng $\Delta: 4x+3y-12=0$ và $K(6;6)$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc O. Gọi C là điểm nằm trên Δ sao cho $AC=AO$ và các điểm C,B nằm khác phía nhau so với A. Biết C có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$, tìm tọa độ A,B.

Bài 3. Cho $x\in\mathbb{R}$. Tìm GTNN của:

$$P=\frac{\sqrt{3(2x^2+2x+1)}}{3}+\frac{1}{\sqrt{2x^2+(3-\sqrt{3})x+3}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2+(3+\sqrt{3})x+3}}.$$

2 Đề Sở GD-ĐT Phú Yên

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có M,N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Tìm tọa độ B,M biết $N(0;-2)$, đường thẳng AM có phương trình $x+2y-2=0$ và cạnh hình vuông bằng 4.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 27x^3+3x+(9y-7)\sqrt{6-9y}=0 \\ \frac{1}{3}x^2+y^2+\sqrt{2-3x}-\frac{109}{81}=0 \end{cases}$.

Bài 3. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $P=5^{2x}+5^y$, biết $x\geq 0$, $y\geq 0, x+y=1$.

3 THTT số 453 tháng 04 năm 2015

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy tính diện tích tam giác ABC biết $H(5;5)$, $I(5;4)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và cạnh BC nằm trên đường thẳng $x+y-8=0$.

Bài 2. Giải phương trình $(x-\ln x)\sqrt{2x^2+2}=x+1$.

Bài 3. Cho $0<x<y<z$. Tìm GTNN của

$$P=\frac{x^3z}{y^2(xz+y^2)}+\frac{y^4}{z^2(xz+y^2)}+\frac{z^3+15x^3}{x^2z}.$$

4 THPT Số 3 Bảo Thắng (Lào Cai)

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y} \\ x^3-3x+2=2y^3-y^2 \end{cases}$.

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)$. Điểm $M(6;6) \in AB$ và $N(8;-2) \in BC$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

Bài 3. Cho $x, y, z \in (0;1)$ thỏa mãn $(x^3+y^3)(x+y)=xy(1-x)(1-y)$. Tìm GTLN của:

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+3xy-(x^2+y^2).$$

5 THPT Bố Hạ (Bắc Giang)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(-1;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-3;3)$, chân đường cao kẻ từ đỉnh A là điểm $K(-1;1)$. Tìm tọa độ ABC.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x-3)-y\sqrt{y+3}=-2 \\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y(y+8)} \end{cases}$.

Bài 3. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=9$, $xyz \leq 0$. CMR $2(x+y+z)-xyz \leq 10$.

6 THPT Chu Văn An (Hà Nội)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;1)$ và thỏa mãn điều kiện $\widehat{AIB}=90^o$, chân đường cao kẻ từ A đến BC là $D(-1;-1)$, đường thẳng AC đi qua $M(-1;4)$. Tìm tọa độ A, B biết A có hoành độ dương.

Bài 2. Giải bất phương trình: $3(x^2-2)+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}} > \sqrt{x}(\sqrt{x-1}+3\sqrt{x^2-1})$.

Bài 3. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $2(x+y)+7z=xyz$. Tìm GTNN của $S=2x+y+2z$.

7 THPT chuyên Hà Tĩnh

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có N là trung điểm CD và BN có phương trình $13x-10y+13=0$; điểm $M(-1;2)$ thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AC=4AM$. Gọi H là điểm đối xứng của N qua C. Tìm tọa độ A, B, C, D biết $3AC=2AB$ và $H \in \Delta: 2x-3y=0$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+(y^2-y-1)\sqrt{x^2+2}-y^3+y+2=0 \\ \sqrt[3]{y^2-3}-\sqrt{xy^2-2x-2}+x=0 \end{cases}$.

Bài 3. Cho $a \in [1;2]$. CMR:

$$(2^a+3^a+4^a)(6^a+8^a+12^a) < 24^{a+1}.$$

8 THPT Đặng Thúc Hứa (Nghệ An)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{ABC}$ nhọn, $A(-2;-1)$. Gọi H, K, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BC, BD, CD. Đường tròn $(C): x^2+y^2+x+4y+3=0$ ngoại tiếp tam giác HKE. Tìm tọa độ B, C, D biết H có hoành độ âm, C có hoành độ dương và nằm trên đường thẳng $x-y-3=0$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{y^3(2x-y)}+\sqrt{x^2(5y^2-4x^2)}=4y^2 \\ \sqrt{2-x}+\sqrt{y+1}+2=x+y^2 \end{cases}$.

Bài 3. Cho $a, b, c>0$ thỏa mãn $4(a^3+b^3)+c^3=2(a+b+c)(ac+bc-2)$. Tìm GTLN:

$$P=\frac{2a^2}{3a^2+b^2+2a(c+2)}+\frac{b+c}{a+b+c+2}-\frac{(a+b)^2+c^2}{16}.$$

9 THPT Đông Đậu (Vĩnh Phúc)

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+2y+1}-2x=4(y-1) \\ x^2+4y^2+2xy=7 \end{cases}$.

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng AB: $2x+y-1=0$, phương trình AC :, $3x+4y+6=0$ và điểm $M(1;-3)$ nằm trên BC thỏa mãn $3MB=2MC$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình sau có nghiệm trên $[0;2]$:

$$\sqrt{(m+2)x+m}\geq |x-1|.$$

10 THPT chuyên Hưng Yên

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(-1;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và DC; $K=BN\cap CM$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK, biết BN có phương trình $2x+y-8=0$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 2.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x^2+2y^2}=x+2y+3xy \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x^2+2y^2}=2y-x \end{cases}$.

Bài 3. Cho $x, y, z>0$ thỏa mãn $5(x^2+y^2+z^2)=9(xy+2yz+zx)$. Tìm GTLN của:

$$P=\frac{x}{y^2+z^2}-\frac{1}{(x+y+z)^3}.$$

11 THPT chuyên Lê Hồng Phong (Hồ Chí Minh)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $CD = 2AB$, điểm $C(-1;-1)$, trung điểm của AD là $M(1;-2)$. Tìm tọa độ B, biết diện tích tam giác BCD bằng 8, $AB = 4$ và D có hoành độ dương.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2+9.3^{x^2-2y} = (2+9^{x^2-2y}).5^{2y-x^2+2} \\ 4^x+4 = 4x+4\sqrt{2y-2x+4} \end{cases}$.

Bài 3. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + 1 = z$. Tìm GTNN của:

$$P = \frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z^2+2}{z+xy}.$$

12 THPT Lê Xoay (Vĩnh Phúc)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Đường phân giác trong góc A có phương tình d: $x - y + 2 = 0$, đường cao hạ từ B có phương trình d': $4x + 3y - 1 = 0$. Biết hình chiếu của C lên AB là điểm $H(-1;-1)$. Tìm tọa độ B, C.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+1) = x^3+y^2+x-y \\ 3y(2+\sqrt{9x^2+3}) + (4y+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1) = 0 \end{cases}$.

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 2$. Tìm GTLN của:

$$S = \sqrt{\frac{ab}{ab+2c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+2a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+2b}}.$$

13 THPT Lục Ngạn số 1 (Bắc Giang)

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - x\sqrt{\dfrac{y^2+2}{x}} = 2x-2 \\ \sqrt{y^2+1} + \sqrt[3]{2x-1} = 1 \end{cases}$.

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $A(2;1)$, $B(-1;-3)$ và hai đường thẳng d_1: $x+y+3 = 0$, d_2: $x - 5y - 16 = 0$. Tìm tọa độ $C \in d_1$ và $D \in d_2$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 3. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 3$. Tìm GTLN và GTNN của $P = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

14 THPT Lương Ngọc Quyến (Thái Nguyên)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. $F\left(\dfrac{11}{2};3\right)$ là trung điểm AD. EK: $19x - 8y - 18 = 0$ với E là trung điểm AB, K thuộc cạnh CD sap cho $KD = 3KC$. Tìm tọa độ C biết $x_E < 3$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} |x-2y|+1=\sqrt{x-3y} \\ x(x-4y+1)+y(4y-3)=5 \end{cases}$.

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$. CMR:

$$\frac{a^2+1}{4b^2}+\frac{b^2+1}{4c^2}+\frac{c^2+1}{4a^2} \geq \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

15 THPT Lương Thế Vinh (Hà Nội) lần 2

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, D; diện tích hình thang bằng 6; $CD = 2AB$, $B(0;4)$. Biết $I(3;-1)$, $K(2;2)$ lần lượt nằm trên đường thẳng AD và DC. Viết phương trình đường thẳng AD biết AD không song song với trục tọa độ.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x(x^2-3x+3)}=\sqrt[3]{y+2}+\sqrt{y+3}+1 \\ 3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-6x+6}=\sqrt[3]{y+2}+1 \end{cases}$.

Bài 3. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x - y + 1 \leq 0$. Tìm GTLN của:

$$T=\frac{x+3y^2}{\sqrt{x^2+y^4}}-\frac{2x+y^2}{5x+5y^2}.$$

16 THPT Lương Văn Chánh (Phú Yên)

Bài 1. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y+1-\sqrt{2}=0$ và điểm $A(-1;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) qua A, gốc tọa độ O và tiếp xúc đường thẳng d.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3+3(y-1)(x-y)=2 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{8} \end{cases}$

Bài 3. Giả sử x và y không đồng thời bằng 0. Chứng minh

$$-2\sqrt{2}-2 \leq \frac{x^2-(x-4y)^2}{x^2+4y^2} \leq 2\sqrt{2}-2$$

17 THPT Minh Châu (Hưng Yên)

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có đỉnh $A(-1;4)$, trực tâm H. Đường thẳng AH cắt cạnh BC tại M, đường thẳng CH cắt AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I(2;0)$, đường thẳng BC đi qua điểm $P(1;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác biết đỉnh B thuộc đường thẳng $x+2y-2=0$.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}+\dfrac{1}{x+\sqrt{y(2x-y)}}=\dfrac{2}{y+\sqrt{x(2x-y)}} \\ 2(y-4)\sqrt{2x-y+3}-(x-6)\sqrt{x+y+1}=3(y-2) \end{cases}$

Bài 3. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq 2, b \geq 0, c \geq 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2-4a+5}} - \frac{1}{(a-1)(b+1)(c+1)}$$

18 THPT Nguyễn Trung Thiên (Hà Tĩnh) lần 2

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Viết phương trình các cạnh của hình vuông $ABCD$, biết rằng các đường thẳng AB, CD, BC, AD lần lượt đi qua các điểm $M(2;4)$, $N(2;-4)$, $P(2;2)$, $Q(3;-7)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 7x + 2y + 6 = 0 \\ -7x^3 + 12x^2y - 6xy^2 + y^3 - 2x + 2y = 0 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Bài 3. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 3b \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(b+2)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$$

19 THPT Phủ Cừ (Hưng Yên)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Điểm $N(1;-2)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$ và điểm $M(3;6)$ thuộc đường thẳng chứa cạnh AD. Gọi H là chân hình chiếu vuông góc của A xuông đường thẳng DN. Xác định tọa độ của các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết khoảng cách từ điểm H đến cạnh CD bằng $\frac{12\sqrt{2}}{13}$ và đỉnh A có hoành độ là một số nguyên lớn hơn -2 .

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - y - 1}.\sqrt[3]{x - y - 1} = y + 1 \\ x + y + 1 + \sqrt{2x + y} = \sqrt{5x^2 + 3y^2 + 3x + 7y} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Bài 3. Cho ba số thực không âm x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}} - \frac{4}{(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}} - \frac{5}{(y+z)\sqrt{(y+2x)(z+2x)}}$$

20 THPT Quỳnh Lưu 3 (Nghệ An)

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BD; E, F lần lượt là trung điểm đoạn CD, BH. Biết $A(1;1)$, phương trình đường thẳng BH là $3x - y - 10 = 0$ và điểm E có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2(x+y+6)} = 1-y \\ 9\sqrt{1+x} + xy\sqrt{9+y^2} = 0 \end{cases}$

Bài 3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab \geq 1; c(a+b+c) \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{b+2c}{1+a} + \frac{a+2c}{1+b} + 6\ln(a+b+2c)$$

21 THPT Thanh Chương III (Nghệ An)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của $\widehat{ADB}$ có phương trình $x - y + 2 = 0$, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \sqrt{xy + x - y^2 - y} = 5y + 4 \\ \sqrt{4y^2 - x - 2} + \sqrt{y-1} = x - 1 \end{cases}$

Bài 3. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{ab}{\sqrt{ab+3c}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+3a}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+3b}}$$

22 THPT Thiệu Hóa (Thanh Hóa)

Bài 1.

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông $MNPQ$ nội tiếp đường tròn (C) biết điểm $M(2;0)$.
2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Tìm tọa độ các điểm M trên (E) sao cho $MF_1 = 2MF_2$ (với F_1, F_2 lần lượt là các tiêu điểm bên trái, bên phải của (E)).

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2.4^y + 1 = 2^{1+\sqrt{2x}} + 2\log_2 \dfrac{\sqrt{x}}{y} \\ x^3 + x = (y+1)(xy+1) + x^2 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Bài 3. Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+1}{4b^2} + \frac{b^2+1}{4c^2} + \frac{c^2+1}{4a^2} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

23 THPT Thuận Châu (Sơn La)

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(0;2)$ và hai đường thẳng $d: x+2y=0, \Delta: 4x+3y=0$. Viết phương trình của đường tròn đi qua điểm M, có tâm thuộc đường thẳng d và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn AB bằng $4\sqrt{3}$. Biết tâm đường tròn có tung độ dương.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+12y^2+x+2=8y^3+8y \\ \sqrt{x^2+8y^3}=5x-2y \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{3}{-a+b+c}+\frac{4}{a-b+c}+\frac{5}{a+b-c}$$

Trong đó a, b, c là độ dài của một tam giác thỏa mãn $2c+b=abc$.

24 THPT Tĩnh Gia I (Thanh Hóa)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;0)$ và trung điểm của BC là $I(6;1)$. Đường thẳng AH có phương trình $x+2y-3=0$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC. Xác định tọa độ của cá đỉnh tam giác ABC, biết phương trình đường thẳng DE là $x=2$ và điểm D có tung độ dương.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^2-3y+1+\sqrt{y-1}=x^2+\sqrt{x}+xy \\ \sqrt{2x+y}-\sqrt{-3x+2y+4}+3x^2-14x-8=0 \end{cases}$

Bài 3. Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a}{a^2+1}+\frac{2b}{b^2+1}+\frac{c^2-1}{c^2+1} \leqslant \frac{3}{2}.$$

25 THPT Thanh Chương I (Nghệ An)

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ có đường cao AD. Biết $BC=2AB, M(0;4)$ là trung điểm của BC và phương trình đường thẳng $AD: x-2y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang biết diện tích hình thang là $\frac{54}{5}$ và A, B có tọa độ dương.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3y+1}+\sqrt{5x+4}=3xy-y+3 \\ \sqrt{2(x^2+y^2)}+\sqrt{\dfrac{4(x^2+xy+y^2)}{3}}=2(x+y) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A=\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2}}.$$

26 THPT Cẩm Bình (Hà Tĩnh)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;0)$. Biết $M(1;1), N(4;4)$ lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, AC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + 32x = 9x^2 + 8y + 36 \\ 4\sqrt{x+2} + \sqrt{16-3y} = x^2 + 8 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Bài 3. Cho a, b, c là ba số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{c(c^2+a^2)} + \frac{c^2}{b(b^2+c^2)} + \frac{b^2}{a(a^2+b^2)}.$$

27 THPT Lý Thái Tổ (Bắc Ninh)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$ đi qua trung điểm M của cạnh AD, đường thẳng BM có phương trình $x - y + 2 = 0$, điểm D nằm trên đường thẳng $\Delta: x + y - 9 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ biết đỉnh B có hoành độ âm và đường thẳng AB đi qua $E(-1;2)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2x - 2(x^2 - x)\sqrt{3-2y} = (2y-3)x^2 - 1 \\ \sqrt{2 - \sqrt{3-2y}} = \dfrac{\sqrt[3]{2x^2 + x^3} + x + 2}{2x+1} \end{cases}$

Bài 3. Cho x, y là hai số thỏa mãn: $x, y \geq 1$ và $3(x+y) = 4xy$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^3 + y^3 - 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right).$$

28 THPT Nghèn (Hà Tĩnh)

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy,cho hình vuông $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm AB, BC, biết CM cắt DN tại điểm $\left(\frac{22}{5}; \frac{11}{5}\right)$. Gọi H là trung điểm DI, biết đường thẳng AH cắt CD tại $P\left(\frac{7}{2}; 1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết hoành độ điểm A nhỏ hơn 4.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2 + 5y^2)^2 = 2\sqrt{xy}(6 - x^2 - 5y^2) + 36 \\ \sqrt{5y^4 - x^4} = 6x^2 + 2xy - 6y^2 \end{cases}$

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn: $2(a^2 + b^2 + c^2) = (a+b+c)^2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

29 THPT chuyên Trần Quang Diệu (Đồng Tháp)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$ và đường thẳng $\Delta: x + y + 1 = 0$. Từ điểm A thuộc đường thẳng Δ, kẻ hai đường thẳng lần lượt tiếp xúc với (C) tại B và C. Tìm tọa độ điểm A biết diện tích tam giác ABC bằng 8.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y(2+2\sqrt{4y^2+1}) = x + \sqrt{x^2+1} \\ x^2(4y^2+1) + 2(x^2+1)\sqrt{x} = 6 \end{cases}$

Bài 3. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $c = \min(a, b, c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2+c^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \sqrt{a+b+c}.$$

30 THPT Nguyễn Thị Minh Khai (TP. HCM)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại B, nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 10y - 25 = 0$. I là tâm đường tròn (C). Đường thẳng BI cắt đường tròn (C) tại $M(5;0)$. Đường cao kẻ từ C cắt đường tròn (C) tại $N\left(\frac{-17}{5}; \frac{-6}{5}\right)$. Tìm tạo độ các điểm A, B, C biết điểm A có hoành độ dương.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = y^3 + 3y \\ x^3(3y-7) = 1 - \sqrt{(1+x^2)^3} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Bài 3. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) \le \frac{4}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$$

31 THPT Như Thanh (Thanh Hóa)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ và đường thẳng $d: 3x + 4y - 20 = 0$. Chứng minh rằng d tiếp xúc với (C). Tam giác ABC có đỉnh $A \in (C)$, hai đỉnh $B, C \in d$, trung điểm cạnh $AB \in (C)$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC, biết trực tâm tam giác ABC trùng với tâm đường tròn (C) và B có hoành độ dương.

Bài 2. Giải phương trình: $4\sqrt{5x^3 - 6x^2 + 2} + 4\sqrt{-10x^3 + 8x^2 + 7x - 1} + x - 13 = 0$.

Bài 3. Cho các số $a, b, c \in R, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ và $2(4a^2 + 4b^2 + c^2) = (2a + 2b + c)^2$.
Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{8a^3 + 8b^3 + c^3}{(2a+2b+2c)(4ab+2bc+2ca)}$.

32 THPT Chuyên Hạ Long (Quảng Ninh)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;6), B(1;1), C(6;3)$.
1. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
2. Tìm trên các cạnh AB, BC, CA các điểm K, H, I sao cho chu vi tam giác KHI nhỏ nhất.

Bài 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3y\sqrt{2+x}+8\sqrt{2+x}=10y-3xy+12 \\ 5y^3\sqrt{2-x}-8=6y^2+xy^3\sqrt{2-x} \end{cases}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng: Với mọi ΔABC ta đều có

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\geq\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

,

33 THPT chuyên Vĩnh Phúc - Khối AB

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác cân ABC có đáy BC nằm trên đường thẳng $d: 2x-5y+1=0$, cạnh AB nằm trên đường thẳng $d': 12x-y-23=0$. Viết phương trình đường thẳng AC biết nó đi qua điểm $M(3;1)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}=3(x+y) \\ \sqrt{x+2y+1}+2\sqrt[3]{12x+7y+8}=2xy+x+5 \end{cases}.$$

Bài 3. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=8(a+b+c)+5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

34 THPT chuyên Vĩnh Phúc - Khối D

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(T): x^2+y^2-x-9y+18=0$ và hai điểm $A(4;1), B(3;-1)$. Gọi C, D là hai điểm thuộc (T) sao cho $ABCD$ là một hình bình hành. Viết phương trình đường thẳng CD.

Bài 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-y^3+6x-3y=3x^2+4 \\ x^2+6y+19=2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5y+14} \end{cases}.$$

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(a+b+c)\geq 2\sqrt{3}.$$

35 THPT Hồng Quang (Hải Dương)

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A lần lượt có phương trình là $x-3y=0$ và $x+5y=0$. Đỉnh C nằm trên đường thawgnr $\Delta: x+y-2=0$ và có hoành độ dương. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ C đi qua điểm $E(-2,6)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{y}{x+1}-\dfrac{1+y}{y} \\ \sqrt{8y+9}=(x+1)\sqrt{y}+2 \end{cases}.$$

Bài 3. Cho các số dương x,y,z thỏa mãn $x>y$ và $(x+z)(y+z)=1$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{4}{(x+z)^2}+\dfrac{4}{(y+z)^2}$.

36 THPT Lương Thế Vinh (Hà Nội) lần 1

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 15. Đường thẳng AB có phương trình $x-2y=0$. Trọng tâm của tam giác BCD là điểm $G\left(\dfrac{16}{3};\dfrac{13}{3}\right)$. Tìm tọa độ bốn đỉnh của hình chữ nhật biết điểm B có tung độ lớn hơn 3.

Bài 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^3-3+2\sqrt{y^2+3y}=2x\sqrt{y}+y \\ x^2-\sqrt{y+3}+\sqrt{y}=0 \end{cases}.$$

Bài 3. Cho các số thực a,b không âm và thỏa mãn: $3(a+b)+2(ab+1)\geq 5(a^2+b^2)$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=3\sqrt{a+b}-3(a^2+b^2)+2(a+b)-ab$.

37 THPT Thường Xuân 3 (Thanh Hóa)

Bài 1.
1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;-4)$. Phương trình đường trung trực cạnh BC, đường trung tuyến xuất phát từ C lần lượt là $x+y-1=0$ và $3x-y-9=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C của tam giác ABC.
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2+2x-4y-8=0$ và đường thẳng (Δ) có phương trình: $2x-3y-1=0$. Chứng minh rằng (Δ) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B. Tìm tọa độ điểm M trên đường tròn (C) sao cho diện tích tam giác ABM lớn nhất.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}\geq 5 \\ x^4+8x^2+16mx+16m^2+32m+16=0 \end{cases}.$$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{5-4x}-\sqrt{1+a}}{\sqrt{5-4a}+2\sqrt{1+a}+6}$$

trong đó a là tham số thực và $-1\le a\le \frac{5}{4}$.

38 THPT Tĩnh Gia II (Thanh Hóa)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=5$ tâm O, đường thẳng $(d): 3x-y-2=0$. Tìm tọa độ các điểm A,B trên (d) sao cho $OA=\frac{\sqrt{10}}{5}$ và đoạn OB cắt (C) tại K sao cho $KA=KB$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{y^2-2y+5}=y-3x-3\\ y^2-3y+3=x^2-x\end{cases}$.

Bài 3. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b}\ge\frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}.$$

39 THPT Triệu Sơn 3 (Thanh Hóa)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $H(1;2)$ là hình chiếu vuông góc của A lên BD. Điểm $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ là trung điểm của cạnh BC, phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của ΔADH là $d: 4x+y-4=0$. Viết phương trình cạnh BC.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{x^2+y}+y=\sqrt{x^4+x^3}+x\\ x+\sqrt{y}+\sqrt{x-1}+\sqrt{y(x-1)}=\frac{9}{2}\end{cases}$.

Bài 3. Cho a,b,c thuộc khoảng $(0;1)$ thỏa mãn $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)=1$. Tìm GTNN của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

40 Trung tâm dạy thêm văn hóa (THPT Chuyên Lê Hồng Phong - TP. HCM)

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $CD=3AB$, $C(-3;-3)$, trung điểm của AD là $M(3;1)$. Tìm tọa độ đỉnh B biết $S_{BCD}=18, AB=\sqrt{10}$ và đỉnh D có hoành độ nguyên dương.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-y\sqrt{2-x}+2y^2=2\\ 2\left(\sqrt{x+2}-4y\right)+8\sqrt{y}\sqrt{xy+2y}=34-15x\end{cases}$.

Bài 3. Cho x, y là các số không âm thỏa $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của:

$$P = 5(x^5 + y^5) + x^2y^2\left(5\sqrt{2xy+2} - 4xy + 12\right).$$

41 THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 2

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ tâm I và điểm $M(3;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 - 2x = y^4 - y \\ (x^2 - y^2)^3 = 3 \end{cases}$.

Bài 3. Cho các số a, b, c không âm sao cho tổng hai số bất kì đều dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c} \geq 6.$$

42 THPT Đồng Lộc (Hà Tĩnh)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ có diện tích bằng $\frac{45}{2}$, đáy lớn CD nằm trên đường thẳng $x - 3y - 3 = 0$. Biết hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại $I(2;3)$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC, biết điểm C có hoành độ dương.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3 + 6y^2 + 16y - 3x + 11 = 0 \\ x^3 + 3x^2 + x + 3y + 3 = 0 \end{cases}$.

Bài 3. Cho $0 < a, b, c < \frac{1}{2}$ thỏa mãn $a + 2b + 3c = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(4b+6c-3)} + \frac{2}{b(3c+a-1)} + \frac{9}{c(2a+4b-1)} \geq 54.$$

43 THPT Hậu Lộc 2 (Thanh Hóa)

Bài 1. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P) : x - y + z + 2 = 0$ và điểm $A(1;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P). Viết phương trình mặt cầu đường kính AA'.

Bài 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 2\left(1 + \dfrac{1-y^2}{x}\right) \\ 4y^2 = (y^2 - x^3 + 3x - 2)\left(\sqrt{2-x^2} + 1\right) \end{cases}.$$

Bài 3. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy \geq 1, z \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{z^3+2}{3(xy+1)}$$

44 Đề 44

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(0;2)$ và hai đường thẳng $d_1 : x+2y=0$, $d_2 : 4x+3y=0$. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm M có tâm thuộc đường thẳng d_1 và cắt d_2 tại hai điểm A, B sao cho độ dài đoạn AB bằng $4\sqrt{3}$. Biết tâm đường tròn có tung độ dương.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+12y^2+x+2 = 8y^3+8y \\ \sqrt{x^2+8y^3} = 5x-2y \end{cases}$

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{a+c-b} + \frac{5}{a+b-c}$$

Trong đó a,b,c là độ dài các cạnh của một tam giác thỏa mãn $2a+b = abc$

45 Sở GDĐT Vĩnh Phúc (lần 1)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;0)$ và trung điểm của BC là $I(6;1)$. Đường thẳng AH có phương trình $x+2y-3=0$. Gọi $D; E$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Xác định tọa độ đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng DE có phương trình $x-2=0$ và điểm D có tung độ dương.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+2 = y\sqrt{x^2+2} (1) \\ y^2+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3} = 2x^2-4x (2) \end{cases}$

Bài 3. Cho $x; y; z$ là các số thực dương thỏa mãn: $x+y-x=-1$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+xz)(x+xy)^2}$$

46 Sở GDĐT Vĩnh Long

Bài 1. GIải bất phương trình: $2x+5 > \sqrt{2-x}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+4}\right)$

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình thang $ABCD$ có $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = AD = 2; DC = 4$, đỉnh C nằm trên đường thẳng $d : 3x-y+2=0$. Điểm M nằm trên cạnh AD sao cho $AM = 2MD$ và đường thẳng BM có phương trình là $3x-2y+2=0$. Tìm tọa độ C.

Bài 3. Cho $a;b;c$ là các số thực dương thỏa mãn: $3\left(a^2+b^2+c^2\right)=1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$Q=\sqrt{a^2+b^2+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{b^2+c^2+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{c^2+a^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

47 Sở GDĐT TP. Hồ Chí Minh

Bài 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(\sqrt{y}+1\right)^2+\dfrac{y^2}{x}=y^2+2\sqrt{x-2} & (1) \\ x+\dfrac{x-1}{y}+\dfrac{y}{x}=y^2+y & (2) \end{cases}$

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, Gọi $H(3;-2), I(8;11), K(4;-1)$ lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC. Tìm tọa độ $A;B;C$.

Bài 3. Cho hai số thực $x;y$ thỏa mãn điều kiện $x^4+16y^4+2\left(2xy-5\right)^2=41$. Tìm GTNN-GTLN của biểu thức:

$$P=xy-\frac{3}{x^2+4xy^2+3}$$

48 Sở GDĐT Thanh hóa

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y+x^2+1=2x\sqrt{x^2y+2} & (1) \\ y^3\left(x^6-1\right)+3y\left(x^2-2\right)+3y^2+4=0 & (2) \end{cases}$

Bài 2. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho điểm $E(3;4)$ đường thẳng $d: 2+y-1=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2+4x-2y-4=0$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d và nằm ngoài đường tròn (C). Từ M kẻ tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) $(A, B$ là các tiếp điểm). Gọi (E) là đường tròn tâm E và tiếp xúc với đường thẳng AB. Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn (E) có chu vi lớn nhất.

Bài 3. Cho x;y;z là các số thực thỏa mãn: $-1-2\sqrt{2}<x<-1+2\sqrt{2}; y>0; z>0; x+y+z=-1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\left(x+y\right)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{8-\left(y+z\right)^2}$$

49 Sở GDĐT Quảng Ngãi

Bài 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=2 \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}=4 \end{cases}$

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $AB=3AC$. ĐƯờng phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ có phương trình $x-y=0$. Đường cao BH có phương trình: 3x+y-16=0. Hãy xác định tọa độ A, B, C biết AB đi qua điểm $M(4;10)$

Bài 3. Xét 3 số thực $x; y; z$ thỏa mãn $x^3+y^3+z^3-3xyz=1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=x^2+y^2+z^2$$

50 Sở GDĐT Quảng Nam

Bài 1. Giải phương trình: $2x^3+9x^2-6x(1+2\sqrt{6x-1})+2\sqrt{6x-1}+8=0$

Bài 2. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A, có $B(-2;1)$ và $C(8;1)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính $r=3\sqrt{5}-5$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết $y_I>0$.

Bài 3. Cho 2 số thực dương tùy ý $a; b; c$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{\sqrt{a^3c}}{2\sqrt{b^3a}+3bc}+\frac{\sqrt{b^3a}}{2\sqrt{c^3b}+3ca}+\frac{\sqrt{c^3b}}{2\sqrt{a^3c}+3ab}$$

51 Sở GDĐT Lào Cai

Bài 1. Giải hệ phương trình trên tập số thực: $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+5}=2\sqrt{2y}+x^2 & (1)\\ x+3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4 & (2)\end{cases}$

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn AC. Điểm $M(3;-1)$ là trung điểm của BD, $C(4;-2)$. Điểm $N(-1;-3)$ nằm trên đường thẳng đi qua B và vuông góc với AD. Đường thẳng AD đi qua $P(1;3)$. Tìm tọa độ $A; B; D$

Bài 3. Cho x là số thực thuộc đoạn $\left[-1;\frac{5}{4}\right]$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{\sqrt{5-4x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{5-4x}+2\sqrt{1+x}+6}$$

52 Sở GDĐT Lâm Đồng

Bài 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+6y-4=\sqrt{2(1-y)(x^3+1)} & (1)\\ (3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0 & (2)\end{cases}$

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, $\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$ là tâm hình chữ nhật và $M(3;0)$ là trung điểm của AD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết $y_D<0$

Bài 3. Cho các số thực dương a;b;c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+ab}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ab}}+\frac{2\sqrt{3}}{1+c}$$

53 Sở GDĐT Bình Dương

Bài 1. Giải bất phương trình: $\sqrt{4x+1}+\sqrt{6x+4} \geq 2x^2-2x+3$

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(1;5)$, đường phân giác trong góc A có phương trình $x-1=0$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(\frac{-3}{2};0\right)$ và điểm $M(10;2)$ thuộc đường thẳng BC. Tìm tọa độ $B;C$

Bài 3. Cho $a;b;c$ là 3 số dương thỏa mãn $s^2+b^2+c^2=1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a^4+a^2b^2}+\frac{1}{b^4+a^2b^2}+\frac{32}{(1+c)^3}$$

54 THPT Nguyễn Văn Trỗi

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng $BC: x-y-4=0$. Các điểm $H(2;0), I(3;0)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Hãy lập phương trình cạnh AB, biết điểm B có hoành độ không lớn hơn 3.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3x^2+2=\sqrt{y^3+3y^2} \\ \sqrt{x-3}=\sqrt{y-x+2} \end{cases}$

Bài 3. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}$$

55 THPT Chuyên ĐH Vinh

Bài 1. Giải bất phương trình $x^2+5x<4\left(1+\sqrt{x^3+2x^2-4x}\right)$

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $\widehat{ACD}=\alpha$ với $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, điểm H thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{HB}=-2\overrightarrow{HC}$, K là giao điểm của hai đường thẳng AH và BD. Biết $H\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right)$, $K(1;0)$ và điểm B có hoành độ dương. Tìm tọa độ các điểm A,B,C,D.

Bài 3. Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $0<(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 \leq 2$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=4^x+4^y+4^z+\ln(x^4+y^4+z^4)-\frac{3}{4}(x+y+z)^4$$

56 THPT Thủ Đức (TP Hồ Chí Minh)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có $A(-1;4)$, các đường cao AM, CN và trực tâm H. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I(2;0)$. Đường thẳng BC đi qua $P(1;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết B thuộc đường thẳng $d: x+2y-2=0$ **Bài 2.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x^2+2y^2} = x+2y+3xy \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x^2+2y^2} = 2y-x \end{cases}$

Bài 3. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn
$$5(x^2+y^2+z^2) = 9(xy+2yz+zx)$$
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P = \frac{x}{y^2+z^2} - \frac{1}{(x+y+z)^3}$$

57 THPT Nông Cống 1 (Thanh Hóa) lần 2

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm I có hoành độ dương. (C) đi qua điểm $A(-2;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d_1): x+y+4=0$ tại điểm B.
(C) cắt đường thẳng $(d_2): 3x+4y-16=0$ tại C và D sao cho $ABCD$ là hình thang $(AD//BC)$ có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau. Tìm tọa độ các điểm B, C, D.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+xy+2y^2}+\sqrt{y^2+xy+2x^2} = 2(x+y) \\ (8y-6)\sqrt{x-1} = \left(2+\sqrt{y-2}\right)\left(y+4\sqrt{x-2}+3\right) \end{cases}$

Bài 3. Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn
$$\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}+\sqrt{2y^2+3xy+4x^2}-3(x+y)^2 \le 0$$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P = 2(x^3+y^3)+2(x^2+y^2)-xy+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}$$

58 THPT Nguyễn Trung Thiên lần 1

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm cạnh BC là $M(3;-1)$. Điểm $E(-1;-3)$ nằm trên đường thẳng Δ chứa đường cao đi qua đỉnh B. Đường thẳng AC đi qua $F(1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường kính AD với $D(4;-2)$.

Bài 2. Giải phương trình $(x+2)\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right) = 0$

Bài 3. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P = \frac{x}{(y+z)^2}+\frac{y}{(x+z)^2}+\frac{z}{(x+y)^2}$$

59 THPT Lam Kinh

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích bằng 4. Biết $A(1;0), B(0;2)$ và tâm I của hình bình hành nằm trên đường thẳng $y = x$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases}$

Bài 3. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a\left(\frac{1}{3a+b} + \frac{1}{3a+c} + \frac{1}{2a+b+c}\right) + \frac{b}{3a+c} + \frac{c}{3a+b} < 2$$

60 THPT Cù Huy Cận (Hà Tĩnh)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm A thuộc đường thẳng $d_1 : x - y - 4 = 0$, điểm $C(-7;5)$, M là điểm thuộc BC sao cho $MB = 3MC$, đường thẳng đi qua D và M có phương trình $d_2 : 3x - y + 18 = 0$. Xác định tọa độ đỉnh A, B biết điểm B có tung độ dương.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 = y + 3\sqrt{x+y+3} \\ 6x^2 + 2xy + 2\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right) = 3(x^2 - y - 4)\sqrt[3]{2x^2 + xy + 3x + 2} \end{cases}$

Bài 3. Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $4x^2 + y^2 \le 8$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{(2x+6)^2 + (y+6)^2 + 4xy - 32}{2x + y + 6}$$

61 THPT Đa Phúc (Hà Nội)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $E, F\left(\frac{11}{2};3\right)$ lần lượt là trung điểm AB, AD. Gọi K là điểm thuộc cạnh CD sao cho $KD = 3KC$. Phương trình đường thẳng $EK : 19x - 8y - 18 = 0$. Xác định tọa độ đỉnh C, biết điểm E có hoành độ nhỏ hơn 3.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}} = x + y \\ x\sqrt{2xy + 5x + 3} = 4xy - 5x - 3 \end{cases}$

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt thỏa mãn: $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca > 0 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = 2\left(\sqrt{\frac{2}{(a-b)^2} + \frac{2}{(b-c)^2}} + \frac{1}{|c-a|}\right) + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

62 THPT Lạng Giang I (Bắc Giang)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ B, C. Tìm tọa độ điểm A, biết $E(7;1), F\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right)$, phương trình đường thẳng BC là $x+3y-4=0$ và điểm B có tung độ dương.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (xy+3)^2+(x+y)^2=8 \\ \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Bài 3. Cho các số thực dương x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}}-\frac{8}{(x+2)(y+2)(z+2)}$$

63 THPT Lý Tự Trọng (Khánh Hòa)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2), B(4;1)$ và đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A, B và cắt đường thẳng d tại C, D sao cho $CD=6$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-6x^2+13x=y^3+y+10 \\ \sqrt{2x+y+5}-\sqrt{3-x-y}=x^3-3x^2-10y+6 \end{cases}$

Bài 3. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{4+2\ln(1+x)-y}+\frac{1}{4+2\ln(1+y)-z}+\frac{1}{4+2\ln(1+z)-x}$$

64 THPT Quảng Hà

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $A(2;2)$. Biết điểm $M(6;3)$ thuộc cạnh BC, điểm $N(4;6)$ thuộc cạnh CD. Tìm tọa độ đỉnh C.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+4y^3+(x^4-1)y+4y^2=1 \\ 8y^3+4\sqrt{x^2+1}=x^2+6y+2 \end{cases}$

Bài 3. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z\geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^2}{yz+\sqrt{8+x^3}}+\frac{y^2}{zx+\sqrt{8+y^3}}+\frac{z^2}{xy+\sqrt{8+z^3}}$$

65 THPT Thống nhất

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-2y-\sqrt{xy}=0 \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{2y-1}=1 \end{cases}$

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho các điểm $A(1;0), B(-2;4), C(-1;4), D(3;5)$ và đường thẳng $d: 3x-y-5=0$. Tìm tọa độ điểm M trên d sao cho hai tam giác MAB, MCD có diện tích bằng nhau.

Bài 3. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b^2}{b+c}+\frac{b+c^2}{c+a}+\frac{c+a^2}{a+b}\ge 2$$

66 THPT Hồng Quang (Hải Dương)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A lần lượt có phương trình $x-3y=0$ và $x+5y=0$. Đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$ và có hoành độ dương. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết rằng đường trung tuyến kẻ từ C đi qua điểm $E(-2;6)$

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{y}{x+1}-\dfrac{1+y}{y} \\ \sqrt{8y+9}=(x+1)\sqrt{y}+2 \end{cases}$

Bài 3. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện: $x>y$ và $(x+z)(y+z)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x+z)^2}+\frac{4}{(y+z)^2}$$

67 THPT Sông Lô (Vĩnh Phúc)

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A là $d: 2x+y-3=0$. Đỉnh B thuộc trục hoành, đỉnh C thuộc trục tung và diện tích tam giác ABC bằng 5. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$

Bài 3. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện: $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a}}{2=b\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{2+c\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{c}}{2+a\sqrt{c}}\ge 1$$

68 THPT chuyên Nguyễn Huệ (Quảng Nam) lần 3

Bài 1. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ và $P(2;1)$. Một đường thẳng d đi qua P cắt đường tròn tại A và B. Tiếp tuyến tại A và B của đường tròn cắt nhau tại M. Tìm tọa độ của M biết M thuộc đường tròn $(C_1): x^2+y^2-6x-4y+11=0$

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\sqrt{2y-1}+\sqrt{x-y}=5 \\ y^2+2=xy+y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Bài 3. Với a,b,c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=a^4+b^4+c^4+3(ab+bc+ca)$$

69 THPT chuyên Hùng Vương (Phú Thọ)

Bài 1. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM và đường cao AH lần lượt có phương trình $13x-6y-2=0$, $x-2y-14=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là $I(-6;0)$.

Bài 2. Giải bất phương trình $2x+5\sqrt{x}>11+\dfrac{4}{x-2}$

Bài 3. Giả sử a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}+\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca}-\frac{3}{4}(a+b)^2$$

70 Chuyên Nguyễn Huệ (Quảng Nam)

Bài 1. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho điểm $M(1;2)$ và hai đường thẳng $d_1: x-2y+1=0$ và $d_2: 2x+y+2=0$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt các đường thẳng d_1,d_2 lần lượt tại B,C (B,C không trùng A) sao cho $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2+12y^2+24xy-9(x+2y)\sqrt{2xy}=0 \\ 5x^2-7y^2+xy=15 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Bài 3. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $a+b+ab=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{1+b}+\frac{b^2}{1+a}+\frac{ab}{a+b}$$

71 Chuyên Lê Quý Đôn (Bình Định)

Bài 1. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ ($AD \parallel BC$) có phương trình đường thẳng $AB: x-2y+3=0$ và đường thẳng $AC: y-2=0$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang cân $ABCD$, biết $IB = IA\sqrt{2}$, hoành độ I lớn hơn -3 và $M(-1;3)$ nằm trên đường thẳng BD.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (1-y)(x-3y+3)-x^2=\sqrt{(y-1)^3}.\sqrt{x} \\ \sqrt{x^2-y}+2\sqrt[3]{x^3-4}=2(y-2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Bài 3. Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $2x+3y\le 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=2xy+y+\sqrt{5(x^2+y^2)}-24\sqrt[3]{8(x+y)-(x^2+y^2+3)}$$

72 Chuyên ĐH Vinh lần 3

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{8}{3};0\right)$ và có đường tròn ngoại tiếp là (C) tâm I. Biết rằng các điểm $M(0;1), N(4;1)$ lần lượt đối xứng I qua các đường thẳng AB, AC, đường thẳng BC đi qua điểm $K(2;-1)$. Viết phương trình đường tròn (C)

Bài 2. Giải bất phương trình: $3(x^2-1)\sqrt{2x+1}<2(x^3-x^2)$ (1).

Bài 3. Giả sử x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+z\le 2y$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}-y^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}\right)$$

73 Chuyên Hùng Vương (Gia Lai)

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 16, các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt đi qua các điểm $M(4;5), N(6;5), P(5;2), Q(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-x^2y-y=2x^2-x+2 & (1) \\ y^2+4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=2x^2-4x+12 & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Bài 3. Cho $x;y;z$ là 3 số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2-2(x^2+y^2)-z^2}$$

V. HƯỚNG DẪN VÀ LỜI GIẢI

1 Đề minh họa THPT Quốc gia 2015

Bài 1

Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-2}\geq\sqrt{3(x^2-2x-2)}$.

Hướng dẫn

ĐK: $x\geq 1+\sqrt{3}$.
Bình phương hai vế rút gọn ta được

$$\sqrt{x(x+1)(x-2)}\geq x^2-4x-2 \iff \sqrt{(x^2-2x)(x+1)}\geq (x^2-2x)-2(x+1)$$

Phương trình có dạng $uv=u^2-2v^2 \iff (u+v)(2v-u)>0$ với $u+v>0$, nên ta suy ra được

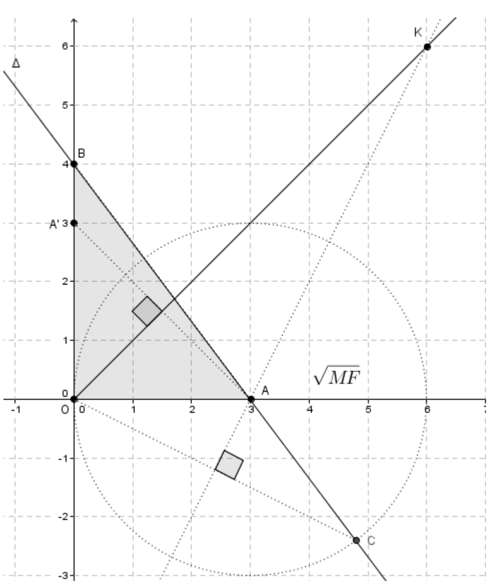
$$\sqrt{x^2-2x}\geq 2\sqrt{x+1} \iff x^2-6x-4\geq 0 \iff x\in[3-\sqrt{13};3+\sqrt{13}].$$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của BPT là $[1+\sqrt{3};3+\sqrt{13}]$.

Bài 2

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác OAB có các đỉnh A,B thuộc đường thẳng $\Delta: 4x+3y-12=0$ và $K(6;6)$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc O. Gọi C là điểm nằm trên Δ sao cho $AC=AO$ và các điểm C,B nằm khác phía nhau so với A. Biết C có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$, tìm tọa độ A,B.

Hướng dẫn



Ta có $x_C=\frac{24}{5}$, $C\in\Delta$ nên ta có tọa độ $C\left(-\frac{12}{5};\frac{24}{5}\right)$.
Do $AO=AC$ nên A nằm trên trung trực d của OC. Với tọa độ O,C đã biết ta tìm được d: $2x-y-6=0$.
Khi đó, $A=\Delta\cap d$ nên $A(3;0)$.
Ta có K là tâm đường tròn bàng tiếp góc O của tam giác OAB nên OK là phân giác góc $\widehat{AOB}$. OK: $x-y=0$.
Gọi A' là điểm đối xứng của A qua OK, ta tìm được $A'(0;3)$ và $A'\in OB$. Do đó đường thẳng OB chính là Oy và ta tìm được $B(0;4)$.

<u>*Nhận xét:*</u> Cách làm này khác với đáp án của Bộ GDĐT. Không cần dùng giả thiết B,C nằm về hai phía khác nhau so với A và giả thiết tâm đường tròn bàng tiếp cũng chỉ dùng tính chất K nằm trên tia phân giác góc O.

Bài 3

Cho $x \in \mathbb{R}$. Tìm GTNN của

$$P = \frac{\sqrt{3(2x^2+2x+1)}}{3} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+(3-\sqrt{3})x+3}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+(3+\sqrt{3})x+3}}.$$

Hướng dẫn

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, với mỗi $x \in \mathbb{R}$ xét $A(x, x+1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Khi đó ta có $P = \frac{OA}{a} + \frac{OB}{b} + \frac{OC}{c}$, trong đó $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$.

Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta có

$$P = \frac{OA.GA}{a.GA} + \frac{OB.GB}{b.GB} + \frac{OC.GC}{c.GC} = \frac{3}{2}\left(\frac{OA.GA}{a.m_a} + \frac{OB.GB}{b.m_b} + \frac{OC.GC}{c.m_c}\right),$$

trong đó m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C của ΔABC.

Theo BĐT $AM-GM$, ta có

$$a.m_a = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{3a^2(2b^2+2c^2-a^2)} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{3a^2+(2b^2+2c^2-a^2)}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}.$$

Bằng cách tương tự ta cũng có $b.m_b \le \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}$ và $c.m_c \le \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}$.

Suy ra

$$P \ge \frac{3\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}(OA.GA + OB.GB + OC.GC).$$

Ta có

$$OA.GA + OB.GB + OC.GC \ge \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{GC}.$$

Mà

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{GC} \\ = & \overrightarrow{OG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ = & \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \end{aligned}$$

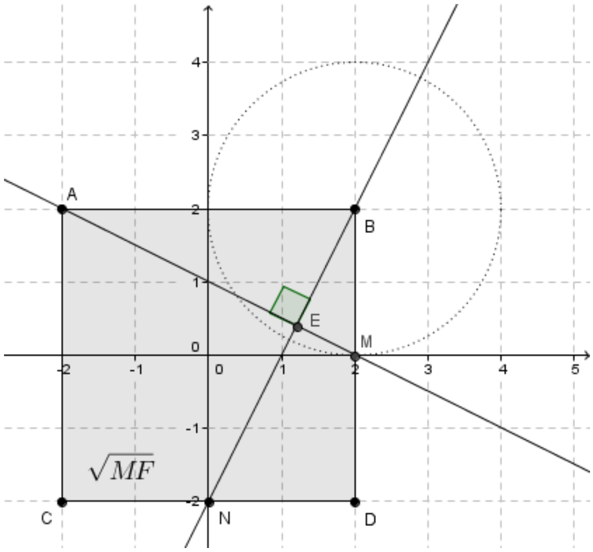
Từ đó $P \ge 3$, đẳng thức xảy ra khi $x = 0$. Vậy $P_{\min} = \sqrt{3}$.

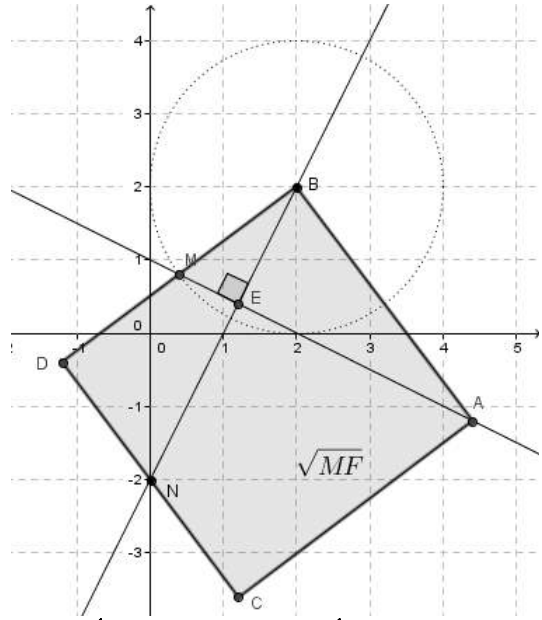
2 Sở GDĐT Phú Yên

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Tìm tọa độ B, M biết $N(0; -2)$, đường thẳng AM có phương trình $x + 2y - 2 = 0$ và cạnh hình vuông bằng 4.

Hướng dẫn





Chìa khóa của bài toán chính là tính chất $AM \perp BN$ (Tính chất này thường xuất hiện trong các đề thi đặc biệt thường xuất hiện với tư cách đáy của một hình chóp).
Trước hết $\Delta ABM \backsim \Delta BEM$ $(g.g)$ với $E = AM \cap BN$. Nên $AM \perp BN$.
Từ đó tìm được BN: $2x - y - 2 = 0$ và $E\left(\frac{6}{5}; \frac{2}{5}\right)$.
Mặt khác ta cũng tính được $BE = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, $EN = \frac{6\sqrt{5}}{5}$. Nên $\overrightarrow{EB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{EN}$, suy ra $B(2;2)$.
Lại có $BM = 2$ nên M thuộc đường tròn (C) tâm B bán kính 2. (C): $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.
$M = AM \cap (C)$ nên ta tìm được 2 điểm M thỏa mãn: $M_1(2;0)$, $M_2\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 27x^3 + 3x + (9y-7)\sqrt{6-9y} = 0 & (1) \\ \frac{1}{3}x^2 + y^2 + \sqrt{2-3x} - \frac{109}{81} = 0 & (2) \end{cases}$.

Hướng dẫn

Quan sát phương trình (1) của hệ ta thấy có thể độc lập thành hai phần, chỉ chứa x và chỉ chứa y. Phần chứa x có bậc 3, phần chứa y có dạng $u\sqrt{u} = (\sqrt{u})^3$ nên ta sẽ nghĩ đến việc dùng phương pháp hàm, với hàm đặc trưng là một hàm bậc 3.

$$(1) \iff (3x)^3 + 3x = (6-9y)\sqrt{6-9y} + 6 - 9y. \quad (*)$$

Dễ thấy hàm $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$(*) \iff f(3x) = f(\sqrt{6-9y}) \iff 3x = \sqrt{6-9y} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{2}{3} - x^2 \end{cases}.$$

Thế vào phương trình (2) ta được $\frac{1}{3}x^2 + \left(\frac{2}{3} - x^2\right)^2 + \sqrt{2-3x} - \frac{109}{81} = 0$.
Vế trái của phương trình trên là hàm đồng biến trên $\left(0; \frac{2}{3}\right)$, lại thử thấy $x = \frac{1}{3}$ là một nghiệm nên hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{9}\right)$.

Bài 3

Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $P = 5^{2x} + 5^{y}$, biết $x \geq 0,\ y \geq 0, x + y = 1$.

Hướng dẫn

Ta có $x + y = 1 \iff y = 1 - x$, nên $P = 5^{2x} + \dfrac{5}{5^{x}}$.

Đặt $t = 5^{x}$ thì $t \in [1;5]$. Xét $f(t) = t^{2} + \dfrac{5}{t}$ với $t \in [1;5]$.

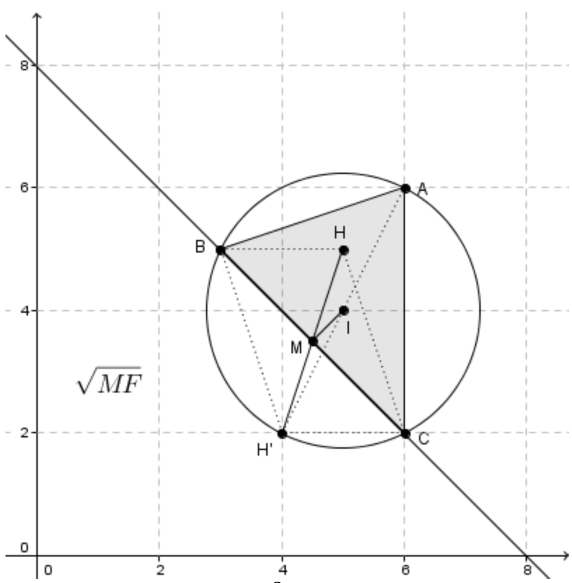
Ta tìm được $P_{\min} = f\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}\right) = 3\sqrt[3]{\dfrac{25}{4}}$, $P_{\max} = f(5) = 26$.

3 THTT Số 453

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy tính diện tích tam giác ABC biết $H(5;5)$, $I(5;4)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và cạnh BC nằm trên đường thẳng $x + y - 8 = 0$.

Hướng dẫn



Đây là một dạng hình rất quen thuộc đối với các bạn lớp 9. Nói như thế để thấy rằng các bạn có kiến thức hình phẳng lớp 9 tốt thì sẽ có lợi thế lớn trong chủ đề này.

Gọi M là hình chiếu của I lên BC, thì $M\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{7}{2}\right)$ và M là trung điểm BC.

Gọi H' là điểm đối xứng của H qua M, thì $H'(2;4)$ và tứ giác $HBH'C$ là hình bình hành.

Do đó $H'C \parallel BH$, mà $BH \perp AC$ nên $\widehat{ACH'} = 90^{o}$, tương tự cũng có $\widehat{ABH'} = 90^{o}$. Suy ra tứ giác $ABH'C$ nội tiếp đường tròn đường kính AH'.

Từ đó I là trung điểm của AH', suy ra $A(6;6)$.

Lại có $BC = 2MC = 2\sqrt{R^{2} - MI^{2}} = 3\sqrt{2}$. Và $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}d(A,BC).BC = 6$.

Nhận xét: Ta có thể lấy điểm phụ H' khác là giao của AH với đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Bài 2

Giải phương trình $(x - \ln x)\sqrt{2x^{2} + 2} = x + 1$.

Hướng dẫn

Đk: $x > 0$. phương trình tương đương với $x - \ln x = \dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$. $\quad (*)$
Bằng cách xét hàm ta sẽ chỉ ra được $(*)$ có $VT \le 1$ và $VP \ge 1$, đẳng thức đều xảy ra khi $x = 1$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 3

Cho $0 < x < y < z$. Tìm GTNN của

$$P = \frac{x^3 z}{y^2(xz+y^2)} + \frac{y^4}{z^2(xz+y^2)} + \frac{z^3+15x^3}{x^2 z}.$$

Hướng dẫn

Đặt $a = \dfrac{x}{y}$, $b = \dfrac{y}{z}$, $c = \dfrac{z}{x}$, suy ra $abc = 1$, $c > 1$ và

$$P = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}} + \frac{\left(\frac{y}{z}\right)^3}{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}} + \left(\frac{z}{x}\right)^2 + \frac{15}{\frac{z}{x}} = \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{a+b} + c^2 + \frac{15}{c}.$$

Ta có $a^3 + b^3 \ge ab(a+b) \implies \dfrac{a^3}{a+b} + \dfrac{b^3}{a+b} \ge ab = \dfrac{1}{c}$. Suy ra $P \ge \dfrac{1}{c} + c^2 + \dfrac{15}{c} = c^2 + \dfrac{16}{c}$.
Xét $f(c) = c^2 + \dfrac{16}{c}$ với $c \in (1; +\infty)$ ta được $f(c) \ge f(2) = 12$.
Vậy $P_{\min} = 12$ khi $z = \sqrt{2}y = 2x$.

4 THPT Số 3 Bảo Thắng (Lào Cai)

Bài 1

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{3y+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x+2y} \\ x^3 - 3x + 2 = 2y^3 - y^2 \end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $\begin{cases} 2x \ge y+1 \\ y \ge -\dfrac{1}{3} \\ x \ge 0 \\ x + 2y \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y \ge -\dfrac{1}{3} \\ x \ge \dfrac{1}{3} \\ x + 2y \ge 0 \end{cases}$.

Ở phương trình (1), quan sát các biểu thức dưới căn (hoặc sử dụng Casio), ta sẽ tìm được mối liên hệ giữa các biến định hướng cho các biến đổi sau

$$\begin{aligned}
(1) &\iff (\sqrt{2x-y-1} - \sqrt{x}) - (\sqrt{x-2y} - \sqrt{3y-1}) = 0 \\
&\iff \frac{x-y-1}{\sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x}} - \frac{x-y-1}{\sqrt{x-2y} + \sqrt{3y-1}} = 0 \\
&\iff \left[\begin{array}{ll} x - y - 1 = 0 & (3) \\ \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x} = \sqrt{x-2y} - \sqrt{3y-1} & (4) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

(3) $\iff y = x - 1$ thế vào (2) ta được phương trình bậc 3 ẩn x có hai nghiệm $x = 1$, $x = 5$. Suy ra nghiệm hệ $(1;0)$ và $(5;4)$.
Với phương trình (4), làm tương tự với (1) ta sẽ có biến đổi

$$(4) \iff (\sqrt{2x-y-1} - \sqrt{x+2y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{3y-1}) = 0$$

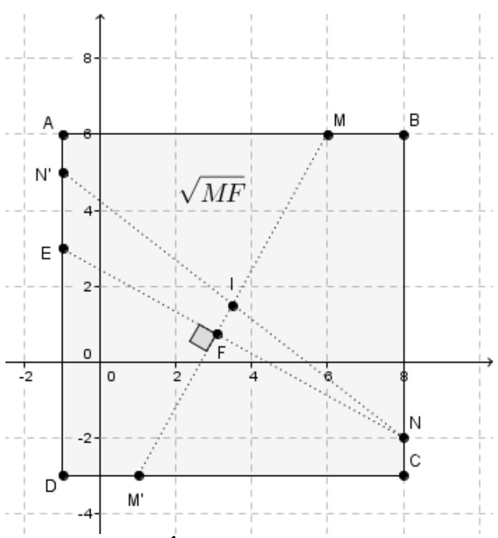
$$\iff \left[\begin{array}{l} x - 3y - 1 = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x+2y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3y-1}} = 0 \quad \textit{(Vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Với $x - 3y - 1 = 0$ thế vào (2) ta cũng sẽ tìm được $x = 1$. Vậy hệ có hai nghiệm $(1;0)$; $(5;4)$.

Bài 2

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Điểm $M(6;6) \in AB$ và $N(8;-2) \in BC$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

Hướng dẫn



Ta tìm được tọa độ $M'(1;-3)$ đối xứng với M qua I, $N'(-1;5)$ đối xứng với N qua I.
Gọi F là hình chiếu của N lên MM', do đã biết tọa độ N, viết được phương trình MM' nên ta tìm được tọa độ $F\left(\dfrac{163}{53};\dfrac{39}{53}\right)$.
Mặt khác, ta lại chứng minh được $NE = MM'$ ($\Delta MM'P = \Delta NEQ$, với P là hình chiếu của M lên CD, Q là hình chiếu của N lên AD.).
Từ đó ta có $\overrightarrow{NF} = \dfrac{NF}{MM'}\overrightarrow{NE}$, do độ dài NF, MM' tính được, tọa độ N, F đã biết nên ta sẽ suy ra tọa độ $E(-1;3)$.
Khi đó ta viết được phương trình AD (qua E, N'); phương trình AB, CD (lần lượt qua M, M' vuông góc với AD) và tìm được tọa độ $A(-1;6)$, $D(-1;-3)$. Do I là trung điểm AC, BD nên cũng tìm được $C(8;-3)$, $B(8;6)$.

Bài 3

Cho $x, y, z \in (0;1)$ thỏa mãn $(x^3 + y^3)(x + y) = xy(1-x)(1-y)$. Tìm GTLN

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + 3xy - (x^2 + y^2).$$

Hướng dẫn

Ta có

$$(x^3 + y^3)(x + y) = xy(1-x)(1-y) \iff \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right)(x + y) = (1-x)(1-y).$$

Mà $\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}\right)(x+y) \geq 4xy$ và $(1-x)(1-y)=1-(x+y)+xy \leq 1-2\sqrt{xy}+xy$.
Suy ra

$$1-2\sqrt{xy}+xy \geq 4xy \iff 0<xy \leq \frac{1}{9}.$$

Mặt khác $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2} \leq \dfrac{2}{1+xy}$ với $x,y \in (0;1)$. Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \sqrt{2\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\right)} \leq \sqrt{2\left(\frac{2}{1+xy}\right)}=\frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

Lại có $3xy-(x^2+y^2)=xy-(x-y)^2 \leq xy$. Suy ra $P \leq \dfrac{2}{\sqrt{1+xy}}+xy$.
Xét $f(t)=\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}+t$ với $t \in \left(0;\dfrac{1}{9}\right]$. Ta tìm được $P_{\max}=f\left(\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{6\sqrt{10}}{10}+\dfrac{1}{9}$.

5 THPT Bố Hạ (Bắc Giang)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(-1;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-3;3)$, chân đường cao kẻ từ đỉnh A là điểm $K(-1;1)$. Tìm tọa độ A,B,C.

Hướng dẫn

Ta có thể viết được phương trình BC (qua K vuông góc với KH) là $y-1=0$. Đến đây bạn đọc có thể tham khảo hướng dẫn giải ở **Đề 3** để tìm ra lời giải.
Ta tìm được $\{A(-1;7),B(1;1),C(-7;1)\}$ hoặc $\{A(-1;7),B(-7;1),C(1;1)\}$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x-3)-y\sqrt{y+3}=-2 \quad (1) \\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y(y+8)} \end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $x \geq 2$; $y \geq 0$
Quan sát (1) ta cũng sẽ định hướng được sẽ sử dụng phương pháp hàm số, với hàm đặc trưng sẽ là một hàm bậc 3.

$$(1) \iff (x-1)^3-3(x-1)=(y+3)\sqrt{y+3}-3\sqrt{y+3}. \quad (*)$$

Dễ thấy hàm $f(t)=t^3-3t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên

$$(*) \iff f(x-1)=f(\sqrt{y+3}) \iff x-1=\sqrt{y+3}$$

Khi đó,

$$(2) \iff 9(x-2)=y^2+8y \iff 9(\sqrt{y+3}-1)=y^2+8y \quad (**)$$

Nhẩm (hoặc sử dụng Casio) tìm được nghiệm $y=1$ nên bằng phương pháp nhân liên hợp ta sẽ biến đổi được như sau

$$(**) \iff (y-1)\left(\frac{9}{\sqrt{x}y+3+2}-y-9\right)=0 \iff y=1.$$

(Vì với $y\geq 0$ thì $\frac{9}{\sqrt{x}y+3+2}-y-9<0$). Vậy hệ có nghiệm $(3;1)$.

Bài 3

Cho $x,y,z\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=9$, $xyz\leq 0$. CMR $2(x+y+z)-xyz\leq 10$.

Hướng dẫn

Không giảm tính tổng quát, giả sử $x\leq y\leq z$, do $xyz\leq 0$ nên $x\leq 0$. Lại có $x^2+y^2+z^2=9$ nên $x^2\leq 9$, suy ra $x\in[-3;0]$.

Mặt khác $yz\leq\left(\frac{y+z}{2}\right)^2\leq\frac{y^2+z^2}{2}$. Do đó

$$\begin{aligned}
& 2(x+y+z)-xyz\\
=\ & 2x+2(y+z)-xyz\\
\leq\ & 2x+2\sqrt{2(y^2+z^2)}-x\cdot\frac{y^2+z^2}{2}\\
=\ & \frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x+2\sqrt{2(9-x^2)}=f(x).
\end{aligned}$$

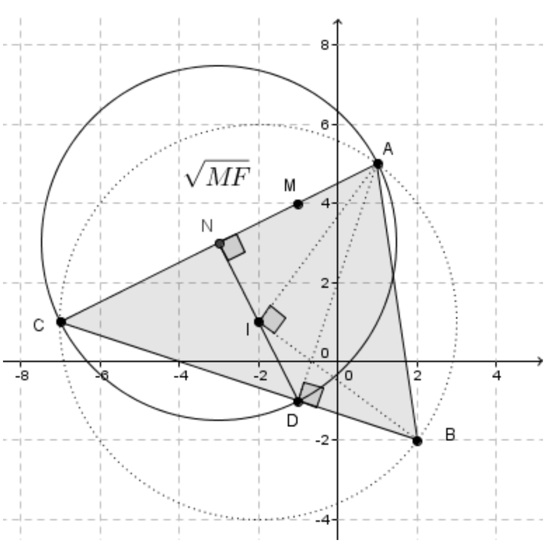
Xét $f(x)$ trên $[-1;0]$ ta sẽ chỉ ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=-1, y=z=2$.

6 THPT Chu Văn An (Hà Nội)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;1)$ và thỏa mãn điều kiện $\widehat{AIB}=90^o$, chân đường cao kẻ từ A đến BC là $D(-1;-1)$, đường thẳng AC đi qua $M(-1;4)$. Tìm tọa độ A,B biết A có hoành độ dương.

Hướng dẫn



Chìa khóa của bài toán là có lẽ là phát hiện ra mối liên hệ giữa 3 giả thiết bài toán đã cho: $DI\perp AC$ ($M\in AC$). Việc định hướng được tính chất này cũng khá tự nhiên, nhưng cần kiến thức hình lớp 9 vững, đây cũng là xu hướng ra đề thường gặp.

Ta có $\widehat{AIB}=90^o$ nên $\widehat{ACB}=45^o$ (Góc nội tiếp bằng $\frac{1}{2}$ góc ở tâm cùng chắn cung). Do đó ΔACD vuông cân tại D, suy ra $DA=DC$, mà $IA=IC$ nên DI là đường trung trực của AC.

Từ đó, $ID\perp AC$ và N là trung điểm AC với N là hình chiếu vuông góc của I lên AC.

Ta tìm được AC: $x-2y+9=0$ (qua M vuông góc với DI) và $N(-3;3)$. Ta cũng viết được phương trình đường tròn (C): $(x+3)^2+(y-3)^2=20$ tâm N bán kính ND. Suy ra $A(1;5)=(C)\cap AC$ (chú ý, hoành độ A dương) và cũng sẽ tìm được $B(2;-2)$.

Bài 2

Giải BPT $3(x^2-2)+\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}>\sqrt{x}(\sqrt{x-1}+3\sqrt{x^2-1})$.

Hướng dẫn

Đk: $x\ge 1$, ta biến đổi phương trình trở thành

$$3(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x})^2+(\sqrt{x^2-x}-1)^2+2\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}+x^2-x-5\right)>0.\quad (*)$$

Xét hàm $f(t)=\dfrac{4\sqrt{2}}{t}+t^2-6$ với $t=\sqrt{x^2-x+1}\ge 1$.
Ta có:

$$f'(t)=2t-\frac{4\sqrt{2}}{t^2}=\frac{2(t^3-2\sqrt{2})}{t^2},\quad f'(t)=0\iff t=\sqrt{2}.$$

Lập bảng biến thiên và ta sẽ chỉ ra được $f(t)\ge 0$ với mọi $t\ge 1$.
Đẳng thức xảy ra khi $t=\sqrt{2}\iff x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Từ đó ta có

$$(*)\iff\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\ne 0\\ \sqrt{x^2-x}-1\ne 0\\ \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}+x^2-x-5\ne 0\end{array}\right.\iff x\ne\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài 3

Xét các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $2(x+y)+7z=xyz$. Tìm GTNN $S=2x+y+2z$.

Hướng dẫn

Ta có $2(x+y)=z(xy-7)$. Do x,y,z là các số dương nên $xy-7>0$, suy ra $z=\dfrac{2(x+y)}{xy-7}$.

Suy ra $S=f(x,y)=2x+y+\dfrac{4(x+y)}{xy-7}$ với điều kiện $x>0,\ y>0,\ xy>7$.
Với mỗi x cố định, xét đạo hàm của $f(x,y)$ theo ẩn y ta được:

$$f'_y(x,y)=1+\frac{4(xy-7)-4x(x+y)}{(xy-7)^2}=1-\frac{28+4x^2}{(xy-7)^2}.$$

Khi đó, $f'_y(x,y)=0\iff x^2y^2-14xy+21-4x^2=0\iff y_o=\dfrac{7}{x}+2\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}$.
Suy ra

$$f(x,y)\ge f(x,y_o)=2x+\frac{11}{x}+4\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}=g(x).$$

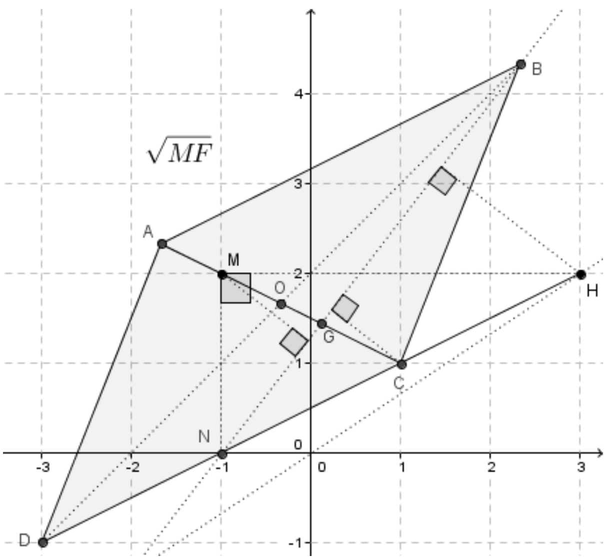
Xét $g(x)$ với $x\in(0;+\infty)$ ta sẽ tìm được $S\ge f(x;y_o)=g(x)\ge 15$.
Vậy $S_{\min}=15$ khi $x=3,\ y=5,\ z=2$.

7 THPT Chuyên Hà Tĩnh

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có N là trung điểm CD và BN có phương trình $13x-10y+13=0$; điểm $M(-1;2)$ thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AC=4AM$. Gọi H là điểm đối xứng của N qua C. Tìm tọa độ A,B,C,D biết $3AC=2AB$ và $H\in\Delta: 2x-3y=0$.

Hướng dẫn



Gọi $G=BN\cap AC$ thì G là trọng tâm tam giác BCD, suy ra $GC=\dfrac{1}{3}AC$. Mà $AC=4AM$ nên $MG=\dfrac{5}{12}AC$, suy ra $CG=\dfrac{4}{5}MG$. Từ đó

$$d(C,BN)=\frac{4}{5}d(M,BN).$$

Lại có $HN=2CN$ nên

$$d(H,BN)=2d(C,BN)=\frac{8}{5}d(M,BN).$$

Mà $d(M,BN)=\dfrac{20}{\sqrt{269}}$ và $H(3t,2t)$ (do $H\in\Delta$). Nên ta sẽ tìm được $t=1,\ t=-\dfrac{45}{19}$.

Để ý rằng M,H nằm khác phía so với BN nên ta chỉ ra được $H(3;2)$.

Mặt khác với giả thiết $3AC=2AB=2CD=2NH$ ta chỉ ra được $MC=\dfrac{1}{2}NH$ tức là tam giác MNH vuông tại M và tìm được $N(-1;0)$.

Từ đó ta sẽ tìm được $C(1;1)$, $D(-3;-1)$, $A\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{7}{3}\right)$, $B\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{13}{3}\right)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+(y^2-y-1)\sqrt{x^2+2}-y^3+y+2=0 & (a)\\ \sqrt[3]{y^2-3}-\sqrt{xy^2-2x-2}+x=0 & (b)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $xy^2-2x-2\ge 0$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+2}$ $(t\ge 2)$, khi đó (a) trở thành:

$$t^2+(y^2-y-1)t-y^3+y=0 \iff (t-y)(t+y^2-1)=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=y\\ t+y^2-1=0\end{array}\right. \quad (*)$$

Vì $t\ge 2$ nên $t+y^2-1>0$, do đó:

$$(*) \iff t=y \iff \sqrt{x^2+2}=y \iff \begin{cases} y\ge 0\\ x^2+2=y^2\end{cases}$$

Thay $y^2 = x^2 + 2$ vào phương trình (b), với điều kiện $x \geq \sqrt[3]{2}$, ta được:

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{x^2-1} - \sqrt{x^3-2} + x = 0 \\
\iff & \sqrt[3]{x^2-1} - \sqrt{x^3-2} + 5 + x - 3 = 0 \\
\iff & \frac{x^2-9}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} - \frac{x^3-27}{\sqrt{x^3-2}+5} + x - 3 = 0 \\
\iff & (x-3)\left[\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} - \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} + 1\right] = 0 \\
\iff & \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ \dfrac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} + 1 = \dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} \qquad (c) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Xét phương trình (c), ta sẽ chứng minh $VP(c) > 2 > VT(c)$.
Thật vậy:

$$\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} > 2 \iff (x^2+3x-1)^2 > 4(x^3-2) \iff (x^2+x)^2 + (x-3)^2 + 5x^2 > 0, \quad \forall x$$

và:

$$\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} + 1 < 2 \iff \sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 1 > x \quad (d)$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2-1}$ $(t > 0)$. Khi đó (d) trở thành:

$$t^2 + 2t + 1 > \sqrt{t^3+1} \iff t^4 + 3t^2 + 6t^2 + 4 > 0 \quad (\text{đúng } \forall t > 0)$$

Do đó phương trình (c) vô nghiệm.
Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(3; \sqrt{11})$

Bài 3

Cho $a \in [1;2]$. CMR $(2^a + 3^a + 4^a)(6^a + 8^a + 12^a) < 24^{a+1}$.

Hướng dẫn

Bất đẳng thức tương đương với

$$(2^a + 3^a + 4^a)\left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a}\right) < 24.$$

Do $a \in [1;2]$ nên $2 \leq 2^a \leq 4$; $3 \leq 3^a \leq 9$; $4 \leq 4^a \leq 16 \implies 2 \leq 2^a < 16$; $2 < 3^a < 16$; $2 < 4^a \leq 16$.
Lại có, $x \in [2;16]$ thì $(x-2)(x-16) \leq 0 \iff x^2 - 18x + 32 \leq 0 \iff x - 18 + \dfrac{32}{x} \leq 0 \iff \dfrac{32}{x} \leq 18 - x$.
Từ đó suy ra

$$32\left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a}\right) < 54 - (2^a + 3^a + 4^a) \iff \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} < \frac{54 - (2^a + 3^a + 4^a)}{32}.$$

Khi đó

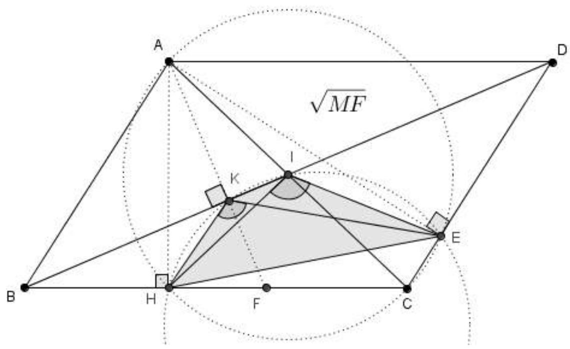
$$\begin{aligned}
(2^a + 3^a + 4^a)\left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a}\right) &< \frac{(2^a + 3^a + 4^a)[54 - (2^a + 3^a + 4^a)]}{32} \\
&\leq \frac{1}{32}\left[\frac{[2^a + 3^a + 4^a + 54 - (2^a + 3^a + 4^a)]}{2}\right]^2 = \frac{729}{32} < 24.
\end{aligned}$$

8 THPT Đặng Thúc Hứa (Nghệ An)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{ABC}$ nhọn, $A(-2;-1)$. Gọi H, K, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BC, BD, CD. Đường tròn $(C): x^2+y^2+x+4y+3=0$ ngoại tiếp tam giác HKE. Tìm tọa độ B, C, D biết H có hoành độ âm, C có hoành độ dương và nằm trên đường thẳng $x-y-3=0$.

Hướng dẫn



Gọi $I = AC \cap BD$, ta sẽ chứng minh $I \in (C)$ bằng cách chỉ ra $HKIE$ là tứ giác nội tiếp. Thật vậy, $AHCE$ nội tiếp đường tròn tâm I nên $\widehat{HIE} = 2\widehat{HAE}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn 1 cung).

Lại có $ABHK, AKED$ là các tứ giác nội tiếp và $\widehat{EAB} = \widehat{HAD} = 90^o$ nên

$$\widehat{HKE} = 180^o - \widehat{HKB} - \widehat{EKD} = 180^o - \widehat{HAB} - \widehat{EAD} = 90^o - \widehat{HAB} + 90^o - \widehat{EAD} = 2\widehat{HAE}.$$

Từ đó, $\widehat{HKE} = \widehat{HIE}$, tức là $HKIE$ nội tiếp.

Mặt khác, I là trung điểm AC và $C(c; c-3) \in d$ $(c>0)$ nên $I\left(\dfrac{c-2}{2}; \dfrac{c-4}{2}\right)$.

Do $I \in (C)$ nên ta tìm được $c=2$ và $I(0;-1)$, $C(2;-1)$.

Gọi (C') là đường tròn đường kính AC, (C'): $x^2+(y+1)^2=4$.

$E, H = (C) \cap (C')$ nên ta sẽ tìm được $\left(-\dfrac{8}{5}; -\dfrac{11}{5}\right)$, $E(0;-3)$ (Do H có hoành độ âm).

Từ đó ta cũng tìm được $B(-4;-3)$, $C(2;-1)$, $D(4;1)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{y^3(2x-y)} + \sqrt{x^2(5y^2-4x^2)} = 4y^2 & (1) \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{y+1} + 2 = x + y^2 & (2) \end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $x \le 2$; $y \ge -1$; $y^3(2x-y) \ge 0$; $5y^2 - 4x^2 \ge 0$.

Nhận thấy (1) đồng bậc 3 nên đặt $y = tx$. Ta có $y^3(2x-y) \ge 0 \implies xy \ge 0 \implies t > 0$.

Ta sẽ được phương trình

$$3\sqrt{t^3(2-t)} + \sqrt{5t^2-4} = 4t^2.$$

Bằng phương pháp nhân với lượng liên hợp với nhân tử chung là $(t-1)^2$ ta xác định được $(*)$ có đúng một nghiệm $t=1$, tức là $x=y$. (Bằng BĐT AM-GM ta cũng sẽ chỉ ra được $x=y$).

Thế vào (2) ta được

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{x+1} + 2 = x + x^2.$$

Suy ra $x^2+x-2>0 \implies x>1$. Bằng phương pháp nhân liên hợp ta sẽ phân tích phương trình trở thành

$$(x^2-x-1)\left(1 + \frac{1}{x-1+\sqrt{2-x}} + \frac{1}{x+\sqrt{x+1}}\right) = 0$$

$$\iff x^2 - x - 1 = 0 \implies x = y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Bài 3

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $4(a^3+b^3)+c^3 = 2(a+b+c)(ac+bc-2)$. Tìm GTLN

$$P = \frac{2a^2}{3a^2+b^2+2a(c+2)} + \frac{b+c}{a+b+c+2} - \frac{(a+b)^2+c^2}{16}.$$

Hướng dẫn

Ta có $x^3+y^3 \geq \frac{1}{4}(x+y)^3$; $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ với mọi $x, y > 0$.
Suy ra

$$\frac{1}{4}(a+b+c)^3 \leq (a+b)^3+c^3 \leq 4(a^3+b^3)+c^3 \leq 2(a+b+c)\left(\frac{(a+b+c)^2}{4}-2\right)$$

Suy ra $a+b+c \geq 4$.
Khi đó áp dụng BĐT AM-GM ta có

$$\frac{2a^2}{3a^2+b^2+2a(c+2)} = \frac{a}{a+c+2+\left(\frac{b^2}{2a}+\frac{a}{2}\right)} \leq \frac{a}{a+c+2+2\sqrt{\frac{b^2}{2a}\cdot\frac{a}{2}}} = \frac{a}{a+b+c+2},$$

và $(a+b)^2+c^2 \geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2$.
Suy ra

$$P \leq \frac{a+b+c}{a+b+c+2} - \frac{(a+b+c)^2}{32} = \frac{t}{t+2} - \frac{t^2}{32}.$$

Với $t = a+b+c \geq 4$, ta có $f'(t) = \frac{2}{(t+2)^2} - \frac{t}{16} = \frac{32-t(t+2)^2}{16(t+2)^2} < 0,\ \forall t \geq 4$.

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $[4;+\infty)$. Do đó $P \leq f(t) \leq f(4) = \frac{1}{6}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a=b, a+b=c \\ a+b+c=4 \end{cases} \iff a=b=1, c=2$. Vậy $P_{\max} = \frac{1}{6}$.

9 THPT Đông Đậu (Vĩnh Phúc)

Bài 1

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2y+1}-2x = 4(y-1) & (1) \\ x^2+4y^2+2xy = 7 & (2) \end{cases}.$$

Hướng dẫn

Đây là một hệ phương trình khá đơn giản.
Với (1), đặt $\sqrt{x+2y+1} = t$, ta sẽ giải được $t = 2$.
Thế vào (2) ta tìm được nghiệm của hệ là $(1;1)$ và $\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Bài 2

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng AB: $2x+y-1=0$, phương trình AC :, $3x+4y+6=0$ và điểm $M(1;-3)$ nằm trên BC thỏa mãn $3MB=2MC$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Hướng dẫn

Một bài tập khá đơn giản minh họa cho phương pháp tham số hóa.
$A=AB\cap AC$ nên $A(2;-3)$.
$B\in AB$ nên $B(b;1-2b)$.
$C\in AC$ nên $C(-2-4c;3c)$.
Một điểm lưu ý là M chưa biết nằm trong hay nằm ngoài B,C nên ta cần xét 2 trường hợp.

- **TH1**: M nằm ngoài, tức là $3\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC}$ ta tìm được $b=\dfrac{11}{5}$, $c=-\dfrac{6}{5}$. Từ đó $G\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{10}{3}\right)$.

- **TH2**: $3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}$ ta cũng xác định được $G\left(1;-\dfrac{8}{3}\right)$.

Bài 3

Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình sau có nghiệm trên $[0;2]$

$$\sqrt{(m+2)x+m}\ge |x-1|.$$

Hướng dẫn

Với $x\in[0;2]$ ta có

$$\sqrt{(m+2)x+m}\ge |x-1| \iff (m+2)x+m\ge (x-1)^2 \iff m\ge \frac{x^2-4x+1}{x+1}=f(x).$$

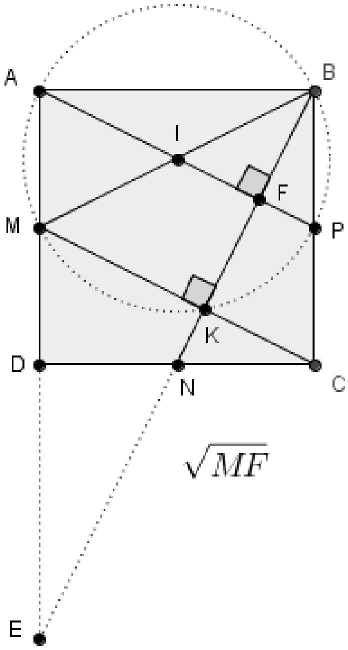
Xét $f(x)$ trên $[0;2]$ ta chỉ ra được $f(x)\in[2\sqrt{6}-6;1]$.
Do đó để BPT có nghiệm trên $[0;2]$ thì $m\ge 2\sqrt{6}-6$.

10 THPT Chuyên Hưng Yên

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(-1;2)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và DC; $K=BN\cap CM$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK, biết BN có phương trình $2x+y-8=0$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 2.

Hướng dẫn



Một lần nữa, chúng ta lại bắt gặp tính chất hình học ở **Đề 2**, tuy nhiên cần phải tận dụng nó một cách khéo léo kết hợp với các giả thiết khác.

Tương tự như ở **Đề 2**, ta chứng minh được $CM \perp BN$ và $AP \perp BN$ với P là trung điểm BC. Và do đó, $I = AP \cap BM$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔBKM có đường kính BM.

Mặt khác, gọi $F = AP \cap BN$ ta có $AF = d(A, BN) = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$.

Gọi $E = AD \cap BN$, dễ thấy D là trung điểm AE. Lại có

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{5}{4AB^2}.$$

Nên $AB = 4$. Từ đó ta tính được $IA = \dfrac{AP}{2} = \sqrt{5}$, suy ra $\overrightarrow{AI} = \dfrac{5}{8}\overrightarrow{AF}$.

Ta lại tìm được $F\left(\dfrac{11}{5}; \dfrac{18}{5}\right)$ (Hình chiếu của A lên BN) nên ta cũng tính được $I(1;3)$. Và phương trình cần tìm là $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

Nhận xét: Cách làm trong đáp án chính thức cần tìm tọa độ điểm B từ giả thiết $AB = 4$ và $B \in BN$ nên cần $x_B > 2$ để loại nghiệm. Nhưng với cách làm này ta thấy giả thiết $x_B > 2$ bị thừa.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x^2+2y^2} = x + 2y + 3xy & (1) \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x^2+2y^2} = 2y - x & (2) \end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $y \geq -1$. Với phương trình (1), đặt $\sqrt{x^2+2y^2} = t \geq 0$, coi là phương trình ẩn t, x, y là tham số. Ta tính được $\Delta_t = (2x+3y+1)^2$ nên

$$(1) \iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2y^2} = -x-y-1 \\ \sqrt{x^2+2y^2} = x+2y \end{array}\right.$$

Thế vào (2) ta được nghiệm $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 3

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $5(x^2+y^2+z^2) = 9(xy+2yz+zx)$. Tìm GTLN

$$P = \frac{x}{y^2+z^2} - \frac{1}{(x+y+z)^3}.$$

Hướng dẫn

Ta có $5x^2 + 5(y^2+z^2) = 9x(y+z) + 18yz \iff 5x^2 - 9x(y+z) = 18yz - 5(y^2+z^2)$.

Lại có $yz \leq \dfrac{1}{4}(y+z)^2$; $y^2+z^2 \geq \dfrac{1}{2}(y+z)^2$ nên $18yz - 5(y^2+z^2) \leq 2(y+z)^2$.

Do đó

$$\begin{aligned} & 5x^2 - 9x(y+z) \le 2(y+z)^2 \\ \iff & [x - 2(y+z)](5x + y + z) \le 0 \\ \iff & x \le 2(y+z). \end{aligned}$$

Và

$$P = \frac{x}{y^2+z^2} - \frac{1}{(x+y+z)^3} \le \frac{2x}{(y+z)^2} - \frac{1}{(x+y+z)^3} \le \frac{4}{y+z} - \frac{1}{27(y+z)^3}.$$

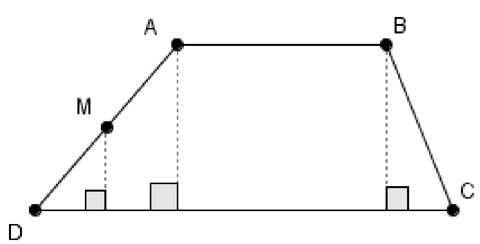
Đặt $y+z = t > 0$ ta có $P \le 4t - \frac{1}{27}t^3 = f(t)$. Xét $f(t)$ ta suy ra được $P \le 16$.
Vậy $P_{\max} = 16$ khi $x = \frac{1}{3}$; $y = z = \frac{1}{12}$.

11 THPT Chuyên Lê Hồng Phong (TP. HCM)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $CD = 2AB$, điểm $C(-1;-1)$, trung điểm của AD là $M(1;-2)$. Tìm tọa độ B, biết diện tích tam giác BCD bằng 8, $AB = 4$ và D có hoành độ nguyên dương.

Hướng dẫn



Ta có, $d(M,CD) = \frac{1}{2}d(A,CD) = \frac{1}{2}d(B,CD)$.
Nên $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}.d(B,CD).BC = 2d(M,CD).AB$. Từ đó tìm được $d(M,CD) = 1$.
Khi đó ta sẽ viết được phương trình đường thẳng CD (là đường thẳng qua C cách M một khoảng không đổi).

Cụ thể, gọi VTPT của CD là $\overrightarrow{n} = (a,b) \ne \overrightarrow{0}$, phương trình của CD là $a(x+1) + b(y+1) = 0$, suy ra

$$d(M,CD) = \frac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \iff 3a^2 - 4ab = 0 \iff \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ 3a = 4b \end{array}\right..$$

Với $a = 0$, chọn $b = 1$, ta được CD: $y + 1 = 0$. Với giả thiết $CD = 8$ và x_D nguyên dương ta sẽ tìm được $D(7;-1)$. Mà $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $B(-9;-3)$.
Với $3a = 4b$, chọn $a = 4$, $b = 3$, ta được CD: $4x + 3y + 7 = 0$, tương tự như trên ta thấy trường hợp này không có điểm D nào thỏa mãn điều kiện x_D nguyên dương.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2 + 9.3^{x^2-2y} = (2 + 9^{x^2-2y}).5^{2y-x^2+2} & (1) \\ 4^x + 4 = 4x + 4\sqrt{2y - 2x + 4} & (2) \end{cases}.$

Hướng dẫn

Đk: $y - x + 2 \geq 0$. Với (1) đặt $t = x^2 - 2y$ ta biến đổi thành

$$\frac{2+3^{t+2}}{5^{t+2}} = \frac{2+3^{2t}}{5^{2t}} \iff f(t+2) = f(2t).$$

Với $f(u) = \dfrac{2+3^u}{5^u} = 2.\left(\dfrac{1}{5}\right)^u + \left(\dfrac{3}{5}\right)^u$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên ta được $t = 2 \iff 2y = x^2 - 2$.
Thế vào (2) ta được

$$4^x + 4 = 4x + 4\sqrt{x^2-2x+2} \iff 4^{x-1} = x - 1 + \sqrt{(x-1)^2+1} \iff 4^s = s + \sqrt{s^2+1}. \quad (3)$$

Do $(s+\sqrt{s^2+1})(\sqrt{s^2+1}-1) = 1$ nên $4^{-s} = \sqrt{s^2-1} - s. \quad (4)$.
Trừ vế (3), (4) ta được $4^s - 4^{-s} - 2s = 0. \quad (*)$
Xét $g(v) = 4^v - 4^{-v} - 2v$, $g'(v) = \ln 4(4^v + 4^{-v}) - 2 \geq 2\ln 4 - 2 > 0$. Suy ra $g(v)$ là hàm đồng biến, và do đó $(*)$ có đúng 1 nghiệm $s = 0$. Và nghiệm hệ là $\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 3

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + 1 = z$. Tìm GTNN

$$P = \frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z^2+2}{z+xy}.$$

Hướng dẫn

Ta có $x + yz = yz - z - y - 1 = (z-1)(y+1) = (x+y)(y+1)$. Tương tự cũng có $y + zx = (x+y)(x+1)$ và $z + xy = (x+1)(y+1)$. Nên

$$P = \frac{x}{(x+y)(y+1)} + \frac{y}{(x+y)(x+1)} + \frac{z^2+2}{(x+1)(y+1)} = \frac{x^2+y^2+x+y}{(x+y)(x+1)(y+1)} + \frac{z^2+2}{(x+1)(y+1)}.$$

Lại có, $x^2 + y^2 \geq \dfrac{1}{2}(x+y)^2$; $(x+1)(y+1) \leq \dfrac{1}{4}(x+y+2)^2$. Nên

$$P \geq \frac{2(x+y)^2 + 4(x+y)}{(x+y+2)^2(x+y)} + \frac{4(z^2+2)}{(x+y+2)^2} = \frac{2(x+y)+4}{(x+y+2)^2} + \frac{4(z^2+2)}{(x+y+2)^2} = \frac{2}{z+1} + \frac{4(z^2+2)}{(z+1)^2} = f(z).$$

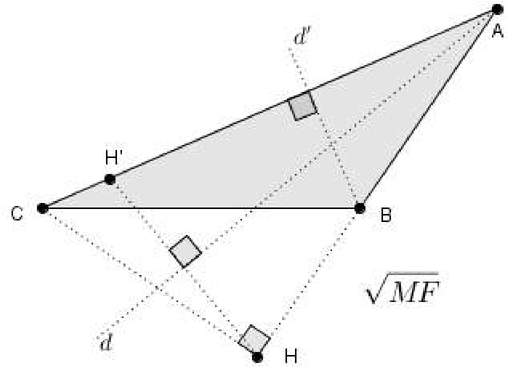
Xét $f(z)$ với $z > 1$ ta sẽ suy ra được $f(z) \geq \dfrac{13}{4}$ hay $P_{\min} = \dfrac{13}{4}$ khi $x = y = 1$, $z = 3$.

12 THPT Lê Xoay (Vĩnh Phúc)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Đường phân giác trong góc A có phương tình d: $x - y + 2 = 0$, đường cao hạ từ B có phương trình d': $4x + 3y - 1 = 0$. Biết hình chiếu của C lên AB là điểm $H(-1; -1)$. Tìm tọa độ B, C.

Hướng dẫn



Một bài tập cơ bản minh họa cho phương pháp dựng hình. Các yếu tố cho trước: d, d', H.
Từ đó, ta sẽ "dựng" được H' (tức là tìm được tọa độ) đối xứng với H qua d. Do d là đường phân giác trong $\widehat{BAC}$ nên $H' \in AC$. Từ đó ta sẽ dựng được đường thẳng AC qua H' vuông góc với d'.
$A = AC \cap d$, ta dựng được đường thẳng AH, $B = AH \cap d'$.
Ta cũng dựng được đường thẳng CH qua H vuông góc AB và $C = CH \cap AC$.

Với phân tích như thế, ta sẽ tìm được $B\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$, $C\left(-\dfrac{10}{3};\dfrac{3}{4}\right)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y & (1) \\ 3y(2+\sqrt{9x^2+3}) + (4y+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1) = 0 & (2) \end{cases}$.

Hướng dẫn

Với (1), phân tích thành nhân tử ta sẽ được $(x-y)(x^2-y+1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = x^2+1 \end{array}\right.$.
Với $y = x^2+1$ thế vào (2) dễ thấy vô nghiệm.
Với $y = x$ thế vào (2) ta được

$$3x(2+\sqrt{9x^2+3}) + (4x+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1) = 0$$

$$\iff 3x(2+\sqrt{9x^2+3}) = (-2x-1)(\sqrt{3+(-2x-1)^2}+2) \iff f(3x) = f(-2x-1)$$

Với $f(t) = t(\sqrt{t^2+2})$ là một hàm đồng biến nên ta được $3x = -2x-1 \iff x = -\dfrac{1}{5}$.
Nghiệm hệ là $\left(-\dfrac{1}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$.

Bài 3

Cho $a,b,c > 0$ thỏa mãn $a+b+c = 2$. Tìm GTLN

$$S = \sqrt{\frac{ab}{ab+2c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+2a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+2b}}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+2c}} = \sqrt{\frac{ab}{ab+(a+b+c)c}} = \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{a}{a+c} = \dfrac{b}{b+c}$. Tương tự ta cũng có

$$\sqrt{\frac{bc}{bc+2a}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}\right); \quad \sqrt{\frac{ca}{ca+2b}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+b}+\frac{a}{a+b}\right).$$

Cộng các vế ta được

$$S \le \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a}\right) = \frac{3}{2}.$$

Vậy $S_{\max} = \dfrac{3}{2}$ khi $a = b = c = \dfrac{2}{3}$.

13 THPT Lục Ngạn số 1 (Bắc Giang)

Bài 1

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - x\sqrt{\dfrac{y^2+2}{x}} = 2x - 2 & (1) \\ \sqrt{y^2+1} + \sqrt[3]{2x-1} = 1 & (2) \end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $x > 0$. Với (1), chia cả hai vế cho x ta được

$$\frac{y^2+2}{x} - \sqrt{\frac{y^2+2}{x}} - 2 = 0 \iff \sqrt{\frac{y^2+2}{x}} = 2 \iff y^2 = 4x + 2.$$

Thế vào (2) được $\sqrt{4x-1} + \sqrt[3]{2x-1} = 1$.

Đặt $\sqrt{4x-1} = u \ge 0$; $\sqrt[3]{2x-1} = v$. Ta được $\begin{cases} u + v = 1 \\ u^2 - 2v^3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$.

Từ đó ta được nghiệm hệ $\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

Bài 2

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $A(2;1)$, $B(-1;-3)$ và hai đường thẳng d_1: $x + y + 3 = 0$, d_2: $x - 5y - 16 = 0$. Tìm tọa độ $C \in d_1$ và $D \in d_2$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Hướng dẫn

Ta có, $C(c; -c-3) \in d_1$, $D(5d+16; d) \in d_2$ nên $\overrightarrow{CD} = (5d + 16 - c; d + c + 3)$.
Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ từ đó ta tìm được $d = -2$, $c = 3$ và $C(3;-6)$, $D(6;-2)$.

Bài 3

Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 3$. Tìm GTLN và GTNN $P = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

Hướng dẫn

Ta có

$$P = x^3 + y^3 - 3x - 3y = (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3(x+y).$$

Lại có $x^2 + y^2 + xy = 3 \iff xy = (x+y)^2 - 3$, nên

$$P = t^3 - 3(t^2-3)t - 3t = -2t^3 + 6t = f(t).$$

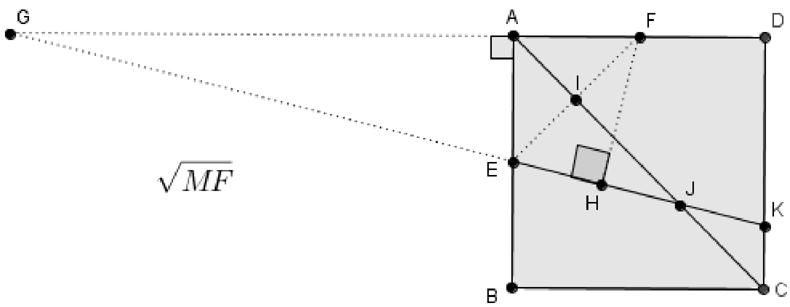
Với $t = x + y$. Mà $t^2 - 3 = xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{t^2}{4}$, nên $t \in [-2;2]$.
Xét $f(t)$ với $t \in [-2;2]$ ta tìm được $P_{\max} = 4$, $P_{\min} = -4$.

14 THPT Lương Ngọc Quyển (Thái Nguyên)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. $F\left(\dfrac{11}{2};3\right)$ là trung điểm AD. EK: $19x-8y-18=0$ với E là trung điểm AB, K thuộc cạnh CD sap cho $KD=3KC$. Tìm tọa độ C biết $x_E<3$.

Hướng dẫn



Kẻ $FH\perp EK$, $FH=d(F,EK)=\dfrac{25}{2\sqrt{17}}$.

Gọi $G=AD\cap EK$, hình vuông có độ dài cạnh là a. Ta tính được $GE=\dfrac{a\sqrt{17}}{2}$, $GF=\dfrac{5a}{2}$. Hơn nữa, $\dfrac{AE}{FH}=\dfrac{GE}{GF}=\dfrac{\sqrt{17}}{5}$. Nên ta sẽ tính được $a=5$.

Khi đó $EF=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, mà $E\in EF$, $x_E<3$ nên ta tìm được $E\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$.

Gọi $I\left(\dfrac{15}{4};\dfrac{11}{4}\right)$ là trung điểm EF, suy ra AC: $7x+y-29=0$ (qua I vuông góc với EF).

Gọi $P=AC\cap EF$, ta tìm được $P\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{17}{3}\right)$, hơn nữa $\overrightarrow{IC}=\dfrac{9}{5}\overrightarrow{IP}$ nên $C(3;8)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} |x-2y|+1=\sqrt{x-3y} \\ x(x-4y+1)+y(4y-3)=5 \end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $x\ge 3y$. Đặt $|x-2y|=u\ge 0$; $|\sqrt{x-3y}|=v\ge 0$. ta được hệ

$$\begin{cases} u-v=-1 \\ u^2+v^2=5 \end{cases} \iff \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases}.$$

Từ đó giải hệ ta được nghiệm $(-5;-3)$; $(-11;-5)$.

Bài 3

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+1}{4b^2}+\frac{b^2+1}{4c^2}+\frac{c^2+1}{4a^2} \geq \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \left(\frac{a^2}{4b^2}+\frac{1}{4b^2}\right)+\left(\frac{b^2}{4c^2}+\frac{1}{4c^2}\right)+\left(\frac{c^2}{4a^2}+\frac{1}{4a^2}\right) \\ &= \frac{a}{2b^2}+\frac{b}{2c^2}+\frac{c}{2a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right). \end{aligned}$$

Mà

$$\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a} \geq \frac{2}{b}; \quad \frac{b}{c^2}+\frac{1}{b} \geq \frac{2}{c}; \quad \frac{c}{a^2}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{a}.$$

Nên

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Suy ra

$$VT \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\right] \geq \frac{1}{4}\left(\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}\right)=VP.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

15 THPT Lương Thế Vinh (Hà Nội) lần 2

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, D; diện tích hình thang bằng 6; $CD = 2AB$, $B(0;4)$. Biết $I(3;-1)$, $K(2;2)$ lần lượt nằm trên đường thẳng AD và DC. Viết phương trình đường thẳng AD biết AD không song song với trục tọa độ.

Hướng dẫn

Vì AD không song song với các trục tọa độ nên gọi VTPT của AD là $\overrightarrow{n}=(1,a)$ $(a \neq 0)$.
Suy ra AD: $x+ay+a-3=0$ và DC: $ax-y-2a+2=0$.
Từ đó ta tính được:

$$d_{(B,DC)}=\frac{|2a+2|}{\sqrt{a^2+1}}; \quad d_{(B,AD)}=\frac{|5a-3|}{\sqrt{a^2+1}}$$

Mặt khác:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AD.(AB+CD)=6$$

nên ta sẽ tìm được $a=1$, $a=-\frac{5}{3}$, $a=\frac{-1\pm 2\sqrt{2}}{7}$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x(x^2-3x+3)}=\sqrt[3]{y+2}+\sqrt{y+3}+1 & (a) \\ 3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-6x+6}=\sqrt[3]{y+2}+1 & (b) \end{cases}$.

Hướng dẫn

ĐK: $x\in[1;3-\sqrt{3}]\cup[3+\sqrt{3};+\infty)$; $y\in[-3;+\infty)$.

$$(a)\iff x-1+\sqrt{(x-1)^3+1}=\sqrt[3]{y+2}+\sqrt{(\sqrt[3]{y+2})^3+1}\iff f(x-1)=f(\sqrt[3]{y+2}).$$

Với $f(t)=t+\sqrt{t^3+1}$, $t\geq -1$ là hàm đồng biến nên ta có $x-1=\sqrt[3]{y+2}$. Thế vào (b) ta được

$$3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-6x+6}=(x-1)+1\iff (x-1)+1+\sqrt{(x-1)^2-4(x-1)+1}=3\sqrt{x-1}.$$

Do $x=1$ không thỏa mãn nên chia cả hai vế cho $\sqrt{x-1}>0$ ta được

$$\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1-4+\frac{1}{x-1}}=3\iff t+\sqrt{t^2-6}=3\iff t=\frac{5}{2}.$$

Với $t=\sqrt{x-1}+\frac{1}{x-1}>2$. Từ đó ta tìm được nghiệm hệ $(5;62)$, $\left(\frac{5}{4};-\frac{127}{64}\right)$.

Bài 3

Cho $x,y>0$ thỏa mãn $x-y+1\leq 0$. Tìm GTLN

$$T=\frac{x+3y^2}{\sqrt{x^2+y^4}}-\frac{2x+y^2}{5x+5y^2}.$$

Hướng dẫn

Ta có $x\leq y-1\implies 0<\frac{x}{y^2}\leq\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{4}$. Đặt $t=\frac{x}{y^2}\implies t\in(0;\frac{1}{4}]$.

Suy ra

$$T=\frac{\frac{x}{y^2}+3}{\sqrt{\left(\frac{x}{y^2}\right)^2+1}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2\frac{x}{y^2}+1}{\frac{x}{y^2}+1}=\frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2t+1}{t+1}=f(t).$$

$$f'(t)=\frac{1-3t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}.$$

Do $t\in(0;\frac{1}{4}]$ nên $1-3t\geq\frac{1}{4}$; $\sqrt{(t^2+1)^3}\leq\sqrt{\left(\frac{17}{16}\right)^3}\implies\frac{1-3t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}\geq\frac{4}{17\sqrt{\frac{17}{16}}}$.

Và $-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}>-\frac{1}{5}$. Suy ra $f'(t)>0$.

Vậy $f(t)$ đồng biến trên $(0;\frac{1}{4}]\implies f(t)\leq f(\frac{1}{4})=\frac{13}{\sqrt{17}}-\frac{6}{25}$.

16 THPT Lương Văn Chánh (Phú Yên)

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y+1-\sqrt{2}=0$ và điểm $A(-1;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) qua A, gốc tọa độ O và tiếp xúc đường thẳng d.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của OA thì $M\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{OA}=(-1;1)$ là vectơ pháp tuyến của trung trực đoạn OA, do đó trung trực đoạn OA có phương trình $x-y+1=0$

Tâm I của đường tròn (C) nằm trên trung trực đoạn OA nên suy ra $I(t,t+1)$.

Theo đề ta có:

$$IA=d(I,d) \iff \sqrt{(t+1)^2+t^2}=\frac{\left|t-t-1+1\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}} \iff 2t^2+2t=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right.$$

Khi $t=0$ thì $I(0;1)$ và bán kính R của (C) là 1. Phương trình đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=1$

Khi $t=-1$ thì $I(-1;0)$ và bán kính R của (C) là 1. Phương trình đường tròn $(C): (x+1)^2+y^2=1$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3+3(y-1)(x-y)=2 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{8} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x, y \geq -1$

Phương trình đầu tương đương

$$\begin{aligned} & (x+y)^3-8+6-3xy(x+y)+3(y-1)(x-y)=0 \\ \iff & (x+y-2)(x^2+y^2+2xy+2x+2y+4)-3(x+y-2)(xy+y+1)=0 \\ \iff & (x+y-2)(x^2-xy+y^2+2x-y+1)=0 \\ \iff & \left[\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ x^2-xy+y^2+2x-y+1=0 \quad (*) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Phương trình $(*) \iff x^2+(2-y)x+y^2-y+1=0$

Phương trình này có $\Delta=-3y^2 \leq 0$.

Nếu $y \neq 0$ thì $\Delta<0$ dẫn đến hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $y=0$ thì $x=-1$, cũng không thỏa hệ phương trình.

Với $x+y-2=0$, thay $y=2-x$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{x+1}+2\sqrt{3-x}=x^2-2x+1 \\
\iff & (2\sqrt{x+1}-x-1)+(2\sqrt{3-x}+x-3)=x^2-2x-3 \\
\iff & (x^2-2x-3)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}+x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3-x}+3-x}\right)=0 \\
\iff & x^2-2x-3=0 \\
\iff & \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $x=-1$ thì $y=3$

Với $x=3$ thì $y=-1$

So điều kiện hệ đã cho có nghiệm $(-1;3)$, $(-3;1)$

Bài 3

Giả sử x và y không đồng thời bằng 0. Chứng minh

$$-2\sqrt{2}-2 \le \frac{x^2-(x-4y)^2}{x^2+4y^2} \le 2\sqrt{2}-2$$

Lời giải

Nếu $y=0$, khi đó $x\neq 0$. Ta có $\dfrac{x^2-(x-4y)^2}{x^2+4y^2}=0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Nếu $y\neq 0$ khi đó:

$$\begin{aligned}
& -2\sqrt{2}-2 \le \frac{x^2-(x-4y)^2}{x^2+4y^2} \le 2\sqrt{2}-2 \\
\iff & -2\sqrt{2}-2 \le \frac{\left(\frac{x}{2y}\right)^2-\left(\frac{x}{2y}-2\right)^2}{\left(\frac{x}{2y}\right)^2+1} \le 2\sqrt{2}-2 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Đặt $\dfrac{x}{2y}=\tan t$, khi đó

$$\begin{aligned}
(*) \iff & -2\sqrt{2}-2 \le \frac{\tan^2 t-(\tan t-2)^2}{\tan^2 t+1} \le 2\sqrt{2}-2 \\
\iff & -2\sqrt{2}-2 \le \cos^2 t(4\tan t-4) \le 2\sqrt{2}-2 \\
\iff & -2\sqrt{2}-2 \le 2\sin 2t-4\cos^2 t \le 2\sqrt{2}-2 \\
\iff & -\sqrt{2}-1 \le \sin 2t-2\cos^2 t \le \sqrt{2}-1 \\
\iff & -\sqrt{2} \le \sin 2t-\cos 2t \le \sqrt{2} \\
\iff & -\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right) \le 1 \\
\iff & -1 \le \sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng, vậy ta có điều phải chứng minh.

17 THPT Minh Châu (Hưng Yên)

Bài 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có đỉnh $A(-1;4)$, trực tâm H. Đường thẳng AH cắt cạnh BC tại M, đường thẳng CH cắt AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I(2;0)$, đường thẳng BC đi qua điểm $P(1;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C của tam giác biết đỉnh B thuộc đường thẳng $x+2y-2=0$.

Lời giải

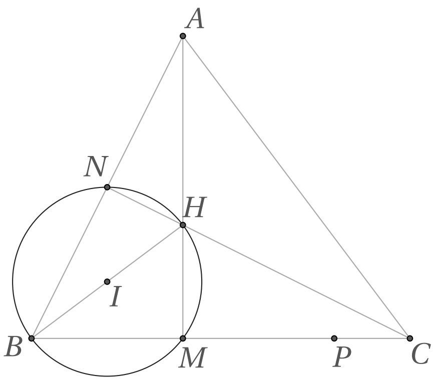
Dễ thấy $BMHN$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra I là trung điểm BH.

$B \in d \implies B(2-2t;t)$.

Suy ra $H(2+2t;-t)$.

Từ đó $\overrightarrow{AH}=(3+2t;-t-4), \overrightarrow{BP}=(2t-1;-t-2)$.

Do H là trực tâm $\triangle ABC$ nên



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BP}=0 &\iff (2t+3)(2t-1)+(t+4)(t+2)=0\\ &\iff 5t^2+10t+5=0\\ &\iff t=-1\end{aligned}$$

Từ đó $H(0;1), B(4;-1), \overrightarrow{AH}=(1;-3)$. Đường thẳng $BC: x-3y-7=0$

Đường thẳng $AC: 2x-y+6=0$. Từ đó tọa độ $C(-5;-4)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}+\dfrac{1}{x+\sqrt{y(2x-y)}}=\dfrac{2}{y+\sqrt{x(2x-y)}} \\ 2(y-4)\sqrt{2x-y-3}-(x-6)\sqrt{x+y+1}=3(y-2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0, y\ge 0\\ 2x-y\ge 0\\ 2y-x\ge 0\\ 2x-y+3\ge 0\end{cases}$

Nếu $y=0$ thì phương trình đầu trở thành:

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{\sqrt{2x^2}} \iff \frac{3}{x}=\frac{\sqrt{2}}{x}$$

Dẫn đến hệ vô nghiệm.

Tương tự $x=0$ cũng không là nghiệm của hệ.

Xét $x, y > 0$. Đặt $t = \dfrac{x}{y}$, thế thì $t > 0$. Phương trình đầu trở thành

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{(\sqrt{t}+1)^2} + \frac{1}{t+\sqrt{2t-1}} = \frac{2}{1+\sqrt{t(2t-1)}}\\
\iff &\frac{2}{(\sqrt{t}+1)^2} + \frac{2}{2t-1+2\sqrt{2t-1}+1} = \frac{2}{1+\sqrt{t(2t-1)}}\\
\iff &\frac{2}{(\sqrt{t}+1)^2} + \frac{2}{(\sqrt{2t-1}+1)^2} = \frac{2}{1+\sqrt{t(2t-1)}} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{t} \\ b = \sqrt{2t-1} \end{cases}$ $(a, b > 0)$. Khi đó:

$$(1) \iff \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} = \frac{1}{1+ab}$$

Ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab}, \quad \forall a, b > 0$$

Theo BĐT Cauchy-Schwarz ta có:

$$(1+ab)(a+b) \geq (\sqrt{a}+\sqrt{ab}.\sqrt{b})^2 = a(1+b)^2 \implies \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{a}{a+b}.\frac{1}{1+ab}$$

Tương tự:

$$\frac{1}{(1+a)^2} \geq \frac{b}{a+b}.\frac{1}{1+ab}$$

Cộng 2 BĐT vế theo vế ta được:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{a+b}{a+b}.\frac{1}{1+ab} = \frac{1}{1+ab}$$

Bổ đề được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$. Tức là khi $x = y$

Thay $y = x$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$(2x-8)\sqrt{x+3} - (x-6)\sqrt{2x+1} = 3(x-2)$$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+3} \\ v = \sqrt{2x+1} \end{cases}$. Ta có:

$$\begin{aligned}
&(v^2-9)u - (u^2-9)v = 3(v^2-u^2)\\
\iff &(u-3)(v-3)(u-v) = 0\\
\iff &\left[\begin{array}{l} u = 3 \\ v = 3 \\ u = v \end{array}\right.\\
\implies &\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 6 \\ x = 2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Từ đó ta có các nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(2;2), (4;4), (6;6)$.

Bài 3

Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a > 2, b > 0, c > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2-4a+5}} - \frac{1}{(a-1)(b+1)(c+1)}$$

Lời giải

Đặt $a_1 = a-2$, ta có $a_1 > 0$. Khi đó:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{a_1^2+b^2+c^2+1}} - \frac{1}{(a_1+1)(b+1)(c+1)}$$

Ta có:

$$a_1^2+b^2+c^2+1 \geq \frac{(a_1+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} \geq \frac{1}{4}(a_1+b+c+1)^2$$

Ta lại có:

$$(a_1+1)(b+1)(c+1) \leq \left(\frac{a_1+1+b+1+c+1}{3}\right)^3 = \left(\frac{a_1+b+c+3}{3}\right)^3$$

Do đó:

$$P \leq \frac{1}{a_1+b+c+1} - \frac{27}{(a_1+b+c+3)^3}$$

Đặt $t = a_1+b+c$, khi đó $t > 1$. Khi đó $P \leq \dfrac{1}{t} - \dfrac{27}{(t+2)^3}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{27}{(t+2)^3}$ trên $(1; +\infty)$.

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{81}{(t+2)^4}; \quad \begin{cases} f'(t) = 0 \\ t > 1 \end{cases} \iff t = 4$$

Lập bảng biến thiên:

t	1		4		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta có $f(t) \leq f(4) = \dfrac{1}{8}$ $\forall t > 1$. Vậy $P \leq \dfrac{1}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = 3, b = c = 1$. Vậy $\max P = \dfrac{1}{8}$

18 THPT Nguyễn Trung Thiên (Hà Tĩnh) lần 2

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Viết phương trình các cạnh của hình vuông $ABCD$, biết rằng các đường thẳng AB, CD, BC, AD lần lượt đi qua các điểm $M(2;4)$, $N(2;-4)$, $P(2;2)$, $Q(3;-7)$.

Lời giải

Gọi $\overrightarrow{n} = (a, b)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB. Vì AB đi qua điểm $M(2;4)$ nên phương trình tổng quát của AB là $ax + by - 2a - 4b = 0$.

Đường thẳng BC đi qua $P(2;2)$ và vuông góc với AB nên có phương trình:

$$-bx + ay - 2a + 2b = 0$$

$ABCD$ là hình vuông nên:

$$d_{(N,AB)} = d_{(Q,BC)} \iff \frac{|2a - 4b - 2a - 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-3b - 7a - 2a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \iff \left[\begin{array}{l} 9a = -9b \\ 9a = 7b \end{array}\right.$$

Với $9a = -9b$, chọn $a = 1 \implies b = -1$

Phương trình $AB : x - y + 2 = 0$, phương trình $BC : x + y - 4 = 0$

Đường thẳng CD đi qua $N(2;-4)$ và song song với AB nên có phương trình $x - y - 6 = 0$

Đường thẳng AD đi qua $Q(3;-7)$ và song song với BC nên có phương trình $x + y + 4 = 0$

Với $9a = 7b$, chọn $a = 7, b = 9$.

Phương trình $AB : 7x + 9y - 50 = 0$, phương trình $BC : -9x + 7y + 4 = 0$.

Phương trình $CD : 7x + 9y + 22 = 0$, phương trình $AD : -9x + 7y + 76 = 0$

Bài 2

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 7x + 2y + 6 = 0 \\ -7x^3 + 12x^2y - 6xy^2 + y^3 - 2x + 2y = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Hướng dẫn

Ta có:

$$-7x^3 + 12x^2y - 6xy^2 + y^3 - 2x + 2y = 0 \iff (x - y)\left[x^2 - x(y - 2x) + (y - 2x)^2 + 2\right] = 0 \quad (*)$$

Mặt khác:

$$x^2 - x(y - 2x) + (y - 2x)^2 + 2 = \left[y - 2x - \frac{x}{2}\right]^2 + \frac{3x^2}{4} + 2 > 0, \quad \forall x, y$$

nên $(*) \iff x = y$

Thay $y = x$ vào phương trình sau ta được:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm $(2;2), (3;3)$

Bài 3

Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-3b\le 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4}{(b+2)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$$

Lời giải

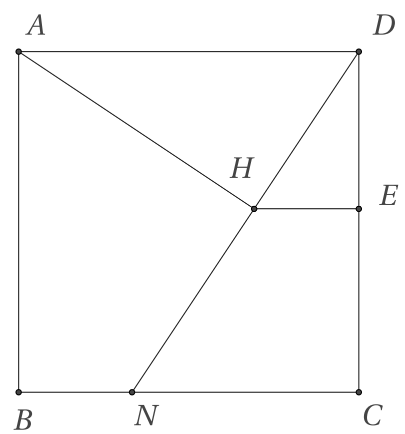
Ta có:
$$a^2+b^2+c^2-2a-4b-2c+6=(a-1)^2+(b-2)^2+(c-1)^2\ge 0$$
Theo giả thiết: $a^2+b^2+c^2\le 3b$.
Suy ra:
$$3b-2a-4b-2c+6\le 0 \iff 2a+b+2c\le 6 \iff 2a+b+2c+10\le 16$$
Với hai số $x,y>0$ thì $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge\frac{8}{(x+y)^2}$.
Áp dụng nhận xét trên ta có
$$P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4}{(b+2)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\ge\frac{8}{\left(a+\frac{b}{2}+2\right)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\ge\frac{8.8}{\left(a+\frac{b}{2}+c+5\right)^2}=\frac{16^2}{(2a+b+2c+10)^2}\ge 1$$
Đẳng thức xảy ra khi $a=c=1,b=2$. Vậy $\min P=1$.

19 THPT Phủ Cừ (Hưng Yên)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Điểm $N(1;-2)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{0}$ và điểm $M(3;6)$ thuộc đường thẳng chứa cạnh AD. Gọi H là chân hình chiếu vuông góc của A xuống đường thẳng DN. Xác định tọa độ của các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết khoảng cách từ điểm H đến cạnh CD bằng $\frac{12\sqrt{2}}{13}$ và đỉnh A có hoành độ là một số nguyên lớn hơn -2.

Lời giải



Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên $CD \implies HE=\frac{12\sqrt{2}}{13}$

Giả sử cạnh hình vuông là a $(a>0)$

Ta có $2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ nên N nằm giữa B,C và thỏa mãn $NC=\frac{2}{3}BC=\frac{2a}{3}$.

Suy ra $DN=\sqrt{CD^2+CN^2}=\frac{a\sqrt{13}}{3}$

Ta có $\triangle ADH \backsim \triangle DNC$ (g.g) nên $\frac{AD}{DN}=\frac{DH}{NC} \implies DH=\frac{2a}{\sqrt{13}}$

$\triangle DHE \backsim DNC$ (g.g) nên $\dfrac{HE}{NC} = \dfrac{DH}{DN} \implies NC = \dfrac{13}{6}.HE = 2\sqrt{2}$

Dẫn đến $\dfrac{2a}{3} = 2\sqrt{2} \implies a = 3\sqrt{2}$

Giả sử vectơ pháp tuyến của AD là $\overrightarrow{n} = (a;b)$ với $a^2+b^2 > 0$. Phương trình $AD: ax+by-3a-6b = 0$.

$$\begin{aligned} & d(N, AD) = 3\sqrt{2} \\ \iff & \frac{|-2a-8b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3\sqrt{2} \\ \iff & (a+b)(7a-23b) = 0 \\ \iff & \left[\begin{array}{l} a = -b \\ 7a = 23b \end{array}\right. \end{aligned}$$

Trường hợp $a = -b$. Chọn $a = 1, b = -1$. Phương trình $AD: x - y + 3 = 0$.

Kẻ $NP \perp AD$ ($P \in AD$), khi đó $NP: x + y + 1 = 0 \implies P(-2;1)$

$AP = BN = \dfrac{BC}{3} = \sqrt{2}$. Lại do $A \in AD \implies A(t;t+3)$ $(t > -2)$. Từ $AP = \sqrt{2}$ suy ra $t = -1$

Với $t = -1$ thì $A(-1;2)$. Khi đó do $\overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{AP}$ nên $D(-4;-1)$. Từ đó tìm được $B(2;-1), C(-1;-4)$

Trường hợp $7a = 23b$. Giải tương tự ta được 2 giá trị hoành độ A không phải số nguyên. Vậy ta loại trường hợp này.

Kết luận $A(-1;2), B(2;-1), C(-1;-4), D(-4;-1)$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2-x-y-1}.\sqrt[3]{x-y-1} = y+1 \\ x+y+1+\sqrt{2x+y} = \sqrt{5x^2+3y^2+3x+7y} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - x - y - 1 \geq 0 \\ 2x + y \geq 0 \\ 5x^2 + 3y^2 + 3x + 7y \geq 0 \end{cases}$

Nếu $x^2 = x + y + 1$, từ phương trình đầu suy ra:

$$y + 1 = 0 \implies y = -1 \implies x^2 - x = 0 \implies \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Thử vào phương trình sau thấy $(x, y) = (1;-1)$ thỏa mãn. Suy ra $(1;-1)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Nếu $x^2 > x+y+1$. Phương trình đầu tương đương

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{x-y-1} = \frac{y+1}{\sqrt{x^2-x-y-1}} \\
\iff &\sqrt[3]{x-y-1} - 1 = \frac{y+1}{\sqrt{x^2-x-y-1}} - 1 \\
\iff &\frac{x-y-2}{\sqrt[3]{(x-y-1)^2} + \sqrt[3]{x-y-1} + 1} = \frac{-(x+y+1)(x-y-2)}{\sqrt{x^2-x-y-1}.(y+1+\sqrt{x^2-x-y-1})} \\
\iff &(x-y-2)\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x-y-1)^2} + \sqrt[3]{x-y-1} + 1} + \frac{x+y+1}{\sqrt{x^2-x-y-1}(\sqrt{x^2-x-y-1}+y+1)}\right] = 0 \\
\iff &\left[\begin{array}{l} x-y-2=0 \quad (1) \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-y-1)^2} + \sqrt[3]{x-y-1} + 1} + \dfrac{x+y+1}{\sqrt{x^2-x-y-1}(\sqrt{x^2-x-y-1}+y+1)} = 0 \quad (*) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Từ điều kiện $\begin{cases} 2x+y \geq 0 \\ x^2-x-y-1 \geq 0 \end{cases} \implies x^2+x-1 \geq 0 \implies \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Nếu $x < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, khi đó từ $2x+y \geq 0 \implies y \geq -2x \geq 1+\sqrt{5} \implies x+y+1 > 0$, do đó $(*)$ vô nghiệm.

Trường hợp $x > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \implies x > 0$. Giả sử $y+1 \leq 0 \implies x-(y+1) > 0 \implies VT(1) > 0 \geq VP(1)$, dẫn đến hệ vô nghiệm. Suy ra $y+1 > 0$, từ đây thì pt $(*)$ vô nghiệm.

Suy ra $y = x-2$. Thay vào phương trình sau ta được:

$$2x-1+\sqrt{3x-2} = \sqrt{8x^2-2x-2} \iff 2x-1+\sqrt{3x-2} = \sqrt{2(2x-1)^2+2(3x-2)}$$

Điều kiện: $x \geq \dfrac{2}{3}$

Đặt $\begin{cases} a = 2x-1 \ (a > \dfrac{1}{3}) \\ b = \sqrt{3x-2} \ (b \geq 0) \end{cases}$

Phương trình trở thành:

$$a+b = \sqrt{2a^2+2b^2} \iff a^2+2ab+b^2 = 2a^2+2b^2 \iff (a-b)^2 = 0 \iff a = b$$

Từ đó:

$$2x-1 = \sqrt{3x-2} \iff 4x^2-4x+1 = 3x-2 \iff 4x^2-7x+3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{3}{4} \end{array}\right.$$

Với $x = 1 \implies y = -1$, thử lại thấy thỏa mãn. Ta nhận nghiệm $(x;y) = (1;-1)$

Với $x = \dfrac{3}{4} \implies y = -\dfrac{5}{4}$. Thử lại không thỏa.

Bài 3

Cho ba số thực không âm x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}} - \frac{4}{(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}} - \frac{5}{(y+z)\sqrt{(y+2x)(z+2x)}}$$

Lời giải

Sử dụng BĐT Cauchy ta có

$$\begin{aligned}(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)} &\le (x+y).\frac{x+y+4z}{2} = \frac{x^2+y^2+2xy+4xz+4yz}{2}\\ &\le \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^2+y^2}{2} + (x^2+z^2) + (y^2+z^2)\\ &\le 2(x^2+y^2+z^2)\end{aligned}$$

$$(y+z)\sqrt{(y+2x)(z+2x)} \le (y+z).\frac{y+z+4x}{2} \le 2(x^2+y^2+z^2)$$

Khi đó biểu thức P trở thành:

$$P \le \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}} - \frac{4}{2(x^2+y^2+z^2)} - \frac{5}{2(x^2+y^2+z^2)} = \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}} - \frac{9}{2(x^2+y^2+z^2)}$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+y^2+z^2+4}$, khi đó $t > 2$. Khi đó $P \le \frac{4}{t} - \frac{9}{2(t^2-4)}$

Xét hàm số $y = f(t) = \frac{4}{t} - \frac{9}{2(t^2-4)}$ trên miền $(2;+\infty)$

$$f'(t) = -\frac{4}{t^2} + \frac{9t}{(t^2-4)^2} = \frac{(4-t)(4t^3+7t^2-4t-16)}{t^2(t^2-4)^2}$$

Do $t > 2$ nên $4t^3+7t^2-4t-16 \ge 4(t^3-4)+t(7t-4) > 0$, vậy $f'(t) = 0 \iff t = 4$

Lập bảng biến thiên ta thu được $f(t) \le f(4) = \frac{5}{8}$. Vậy $P \le \frac{5}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 2$. Vậy $\max P = \frac{5}{8}$

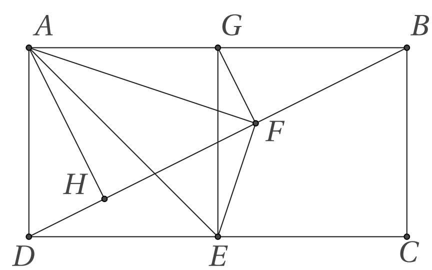
20 THPT Quỳnh Lưu 3 (Nghệ An)

Bài 1

Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BD. E, F lần lượt là trung điểm cạnh CD và BH. Biết $A(1;1)$, phương trình đường thẳng EF là $3x - y - 10 = 0$ và điểm E có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

Lời giải

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CD, BH, AB. Ta chứng minh $AF \perp EF$.



Ta thấy các tứ giác $ADEG$ và $ADFG$ nội tiếp đường tròn đường kính DG nên tứ giác $ADEF$ cũng nội tiếp đường tròn này, do đó $AF \perp EF$.

Đường thẳng AF có phương trình $x + 3y - 4 = 0$

Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{17}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases} \implies F\left(\frac{17}{5}; \frac{1}{5}\right) \implies AF = \sqrt{\frac{32}{5}}$$

$$\triangle AFE \backsim \triangle DCB \implies EF = \frac{AF}{2} = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$E \in EF : 3x - y - 10 = 0 \implies E(t; 3t - 10) \implies \overrightarrow{EF} = \left(t - \dfrac{17}{5}; 3t - \dfrac{51}{5}\right)$. Do đó:

$$EF^2 = \left(t - \frac{17}{5}\right)^2 + \left(3t - \frac{51}{5}\right)^2 = \frac{8}{5} \iff 5t^2 - 34t + 57 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{19}{5} \end{array}\right.$$

$t = 3 \implies E(3; -1)$. Với $t = \dfrac{19}{5}$ thì $E\left(\dfrac{19}{5}; \dfrac{7}{5}\right)$. Vì E có tung độ âm nên $E(3; -1)$.

Phương trình $AE : x + y - 2 = 0$. Vì $\triangle ADE$ vuông cân tại D nên:

$$\begin{cases} AD = DE \\ AD \perp DE \end{cases} \implies \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2 \\ (x-1)(x-3) = (y-1)(y+1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x - 2 \\ (x-1)(x-3) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 1, y = -1 \\ x = 3, y = 1 \end{array}\right.$$

Với $x = 1; y = -1$ thì $D(1; -1)$. Với $x = 3; y = 1$ thì $D(3; 1)$.

Do D và F nằm về hai phía so với AE nên $D(1; -1)$

Khi đó $C(5; -1), B(1; 5)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x + y + 6} = 1 - y \\ 9\sqrt{1 + x} + xy\sqrt{9 + y^2} = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x + y + 6 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$

Nếu $y \geq 0$, để hệ có nghiệm thì $1 \geq y \geq 0$.

Khi đó $2\sqrt{x + y + 6} \geq 2\sqrt{-1 + 0 + 6} = 2\sqrt{5}$ mà $1 - y \leq 1$. Dẫn đến phương trình đầu vô nghiệm.

Vậy $y < 0$, để phương trình sau có nghiệm thì $x > 0$. Ta có

$$9\sqrt{1 + x} + xy\sqrt{9 + y^2} = 0 \iff \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{9 + \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2} = (-y)\sqrt{9 + (-y)^2} \tag{42}$$

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{9+t^2}$ với $t>0$

$f'(t)=\dfrac{9+2t^2}{\sqrt{9+t^2}}>0\ \forall t>0$. Vậy $f(t)$ đồng biến trên miền $(0;+\infty)$

Do đó: $$(42) \iff \frac{3}{\sqrt{x}}=-y \iff x=\frac{9}{y^2}$$

Thế vào phương trình sau ta được $2\sqrt{\dfrac{9}{y^2}+y+6}=1-y\ (*)$

Hàm số $g(y)=2\sqrt{\dfrac{9}{y^2}+y+6}$ đồng biến trên $(-\infty;0)$, hàm số $h(y)=1-y$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$ nên phương trình $(*)$ nếu có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất.

Nhận thấy $y=-3$ là nghiệm của $(*)$, vậy $y=-3$ là nghiệm duy nhất của $(*)$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(1;-3)$.

Bài 3

Cho các số thực dương $ab\ge 1$ và $c(a+b+c)\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{b+2c}{1+a}+\frac{a+2c}{1+b}+6\ln(a+b+2c)$$

Lời giải

$$\begin{aligned}P+2&=\frac{a+b+2c+1}{1+a}+\frac{a+b+2c+1}{1+b}+6\ln(a+b+2c)\\&=(a+b+2c+1)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\right)+6\ln(a+b+2c)\end{aligned}$$

Ta chứng minh bổ đề quen thuộc sau:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}},\quad (ab\ge 1)$$

Thật vậy:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}\iff(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{ab}-1)\ge 0\quad (\text{luôn đúng do } ab\ge 1)$$

Lại theo BĐT Cauchy: $\sqrt{ab}\le\dfrac{ab+1}{2}$ nên:

$$\frac{2}{1+\sqrt{ab}}\ge\frac{4}{3+ab}\ge\frac{4}{c^2+ab+bc+ca}=\frac{4}{(a+c)(b+c)}\ge\frac{16}{(a+b+2c)^2}$$

Từ đó:

$$P+2\ge\frac{16(a+b+2c+1)}{(a+b+2c)^2}+6\ln(a+b+2c)$$

Đặt $t=a+b+2c$, ta có $t>0$. Khi đó:

$$P+2\ge\frac{16(t+1)}{t^2}+6\ln t.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{16(t+1)}{t^2}+6\ln t$ với $t>0$.

$$f'(t)=\frac{6t^2-16t-32}{t^3};\quad f'(t)=0\iff t=4\quad(\text{do } t>0)$$

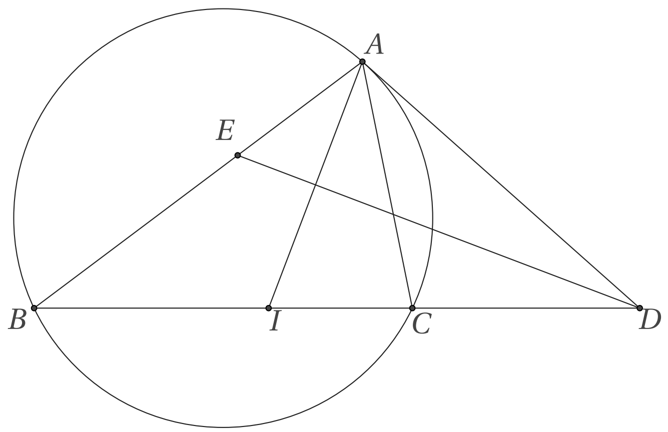
Lập bảng biến thiên ta được $f(t)\ge f(4)=5+6\ln 4$.
Vậy $P\ge 3+6\ln 4$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.
Kết luận: $\max P=3+6\ln 4$.

21 THPT Thanh Chương III (Nghệ An)

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của $\angle ADB$ có phương trình $x-y+2=0$. Điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải



Gọi AI là phân giác trong $\angle BAC$.

Ta có $\begin{cases} \angle AID = \angle ABD + \angle BAI \\ \angle IAD = \angle CAD + \angle IAC \end{cases}$

Mà $\angle BAI = \angle IAC$ và $\angle ABC = \angle CAD$

Nên $\angle AID = \angle IAD$. Tức $\triangle AID$ cân tại D.

Gọi E là giao điểm của phân giác trong $\angle ADB$ với AB. Khi đó $DE \perp AI$.

Suy ra đường thẳng $AI: x+y-5=0$

Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AI. Vì $M \in AC$ nên $M' \in AB$. Dễ dàng tìm được tọa độ M' là $(4;9)$.

Đường thẳng AB đi qua A và nhận $\overrightarrow{AM}$ làm vtcp nên có phương trình $5x-3y+7=0$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3\sqrt{xy+x-y^2-y} = 5y+4 \\ \sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1} = x-1 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} xy+x-y^2-y \geq 0 \\ 4y^2-x-2 \geq 0 \\ y-1 \geq 0 \end{cases}$.

Phương trình đầu tương đương với:

$$x-y+3\sqrt{(x-y)(y+1)}-4(y+1)=0$$

Đặt $u=\sqrt{x-y}$ và $v=\sqrt{y+1}$ $(u, v \geq 0)$, khi đó:

$$u^2-4v^2+3uv=0 \iff \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=-4v \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Với $u = v$ thì $x = 2y + 1$. Thay vào phương trình sau ta được

$$\begin{aligned}
&\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y\\
\iff &\sqrt{4y^2-2y-3}-(2y-1)+\sqrt{y-1}-1=0\\
\iff &\frac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0\\
\iff &(y-2)\left(\frac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{1}{\sqrt{y-1}+1}\right)=0\\
\iff &y-2=0 \quad \text{(Vì biểu thức còn lại luôn dương với mọi } y\ge 1)
\end{aligned}$$

$y = 2 \implies x = 5$.

Kiểm tra điều kiện, hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = (5; 2)$

Bài 3

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}}+\frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}$$

Lời giải

Sử dụng BĐT Cauchy, ta có :

$$\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{bc}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)$$

Tương tự :

$$\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}}\le\frac{ca}{2}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{b+c}\right);\qquad \frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}\le\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}\right)$$

Cộng các BĐT vừa đánh giá vế theo vế ta được:

$$P\le\frac{bc+ca}{2(a+b)}+\frac{ca+ab}{2(b+c)}+\frac{ab+bc}{2(c+a)}=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy $\max P = \dfrac{3}{2}$

22 THPT Thiệu Hóa (Thanh Hóa)

Bài 1

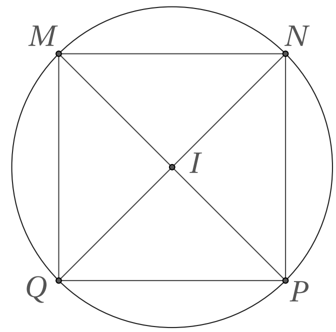
1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông $MNPQ$ nội tiếp đường tròn (C) biết tọa độ $M(2;0)$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Tìm tọa độ các điểm M trên (E) sao cho $MF_1 = 2MF_2$ với F_1, F_2 lần lượt là tiêu điểm bên trái, bên phải của (E).

Lời giải

1. (C) có tâm $I(2;-3)$, bán kính $R=3$.

Vì hình vuông $MNPQ$ nội tiếp (C) nên I cũng là tâm của $MNPQ$.



M,P đối xứng nhau qua I nên $P(2;-6)$.

Đường thẳng NQ đi qua I và nhận $\overrightarrow{MP}=(0;-6)$ làm vtpt nên có phương trình $y+3=0$

Tọa độ N,Q là nghiệm của hệ $\begin{cases} y+3=0 \\ x^2+y^2-4x+6y+4=0 \end{cases}$

Suy ra $N(-1;-3),Q(5;-3)$ hoặc $N(5;-3),Q(-1;-3)$.

Với $N(-1;-3),Q(5;-3)$. Đường thẳng $MN: x+y-2=0$, đường thẳng $NP: x+y+4=0$, đường thẳng $PQ: x-y-8=0$ và đường thẳng $QM: x-y-2=0$

2. Ta có $a=4; b=3, c=\sqrt{7}$.

Theo định nghĩa elip và giả thiết ta có hệ $\begin{cases} MF_1-MF_2=8 \\ MF_1=2MF_2 \end{cases} \iff \begin{cases} MF_1=\dfrac{16}{3} \\ MF_2=\dfrac{8}{3} \end{cases}$

Theo công thức bán kính qua tiêu ta có:

$$MF_2=a-\frac{cx_M}{a} \iff \frac{8}{3}=4-\frac{\sqrt{7}x_M}{4} \iff x_M=\frac{16\sqrt{7}}{21}$$

Thay x_M vào phương trình (E) ta được $y_M=\pm\dfrac{\sqrt{329}}{7}$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2.4^y+1=2^{\sqrt{2x}+1}+2\log_2\dfrac{\sqrt{x}}{y} \\ x^3+x=(y+1)(xy+1)+x^2 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

Phương trình thứ hai tương đương

$$\begin{aligned} & x^3+x-x^2=xy^2+xy+y+1 \\ \iff & (x-y-1)+x(x^2-y^2+x-y)=0 \\ \iff & (x-y-1)+x[(x-y)(x+y)+x-y]=0 \\ \iff & (x-y-1)(x^2+xy+1)=0 \quad (*) \end{aligned}$$

Vì $x>0, y>0$ nên $x^2+xy+1>0$. Do đó:

$$(*) \iff x-y-1=0 \iff x=y+1 \qquad (1)$$

Mặt khác, phương trình đầu tương đương với

$$\begin{aligned}
& 4^y+\frac{1}{2}=2^{\sqrt{2x}}+\log_2\sqrt{x}-\log_2 y\\
\Longleftrightarrow\ & 4^y+\log_2\sqrt{2}+\log_2 y=2^{\sqrt{2x}}+\log_2\sqrt{x}\\
\Longleftrightarrow\ & 2^{2y}+\log_2(\sqrt{2}.y)=2^{2.\sqrt{\frac{x}{2}}}+\log_2\left(\sqrt{2}.\sqrt{\frac{x}{2}}\right) \quad (**)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=2^{2t}+\log_2(\sqrt{2}.t)$ với $t>0$

$f'(t)=2.2^{2t}.\ln 2+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}.t.\ln 2}>0$ với mọi $t>0$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó:

$$(**)\iff y=\sqrt{\frac{x}{2}}\iff 2y^2=x \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2y^2=y+1\implies\left[\begin{array}{l} y=1\\ y=-\dfrac{1}{2}\quad \text{(loại)}\end{array}\right.$

Với $y=1$ thì $x=2$. Thử lại thấy đúng, vậy hệ đã cho có nghiệm $(x,y)=(2;1)$

Bài 3

Cho a,b,c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+1}{4b^2}+\frac{b^2+1}{4c^2}+\frac{c^2+1}{4a^2}\geq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$

Lời giải

Ta có:

$$VT=\left(\frac{a^2}{4b^2}+\frac{1}{4a^2}\right)+\left(\frac{b^2}{4c^2}+\frac{1}{4b^2}\right)+\left(\frac{c^2}{4a^2}+\frac{1}{4c^2}\right)\geq\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}$$

Áp dụng BĐT $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y}$ với mọi $x,y>0$ ta có :

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\geq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$

23 THPT Thuận Châu (Sơn La)

Bài 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(0;2)$ và hai đường thẳng $d:x+2y=0$ và $\Delta:4x+3y=0$. Viết phương trình của đường tròn đi qua điểm M, có tâm thuộc đường thẳng d và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho độ dài đoạn AB bằng $4\sqrt{3}$. Biết tâm đường tròn có tung độ dương.

Lời giải

Gọi I là tâm đường tròn cần tìm. $I \in d$ nên $I(-2t;t) \implies \overrightarrow{IM} = (2t;2-t)$

Kẻ $IH \perp AB$ $(H \in AB)$, khi đó $IH = d(I,\Delta) = \dfrac{|-8t+3t|}{5} = |t|$

Ta có:

$$IM^2 = IA^2 = IH^2 + AH^2 \implies 4t^2 + (2-t)^2 = t^2 + 12 \implies t^2 - t - 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -1 \end{array}\right.$$

Với $t = -1$ thì $y_I < 0$ (loại)

Với $t = 2$ thì $I(-4;2)$. Bán kính đường tròn $R = IM = 4$.

Suy ra phương trình đường tròn $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 12y^2 + x + 2 = 8y^3 + 8y \\ \sqrt{x^2 + 8y^3} = 5x - 2y \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $x^3 + 8y^3 > 0$

Phương trình đầu tương đương $x^3 + x + 1 = (2y-1)^3 + (2y-1) + 1$ $(*)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 1$ trên $\mathbb{R}$. Do $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó $(*) \iff x = 2y - 1$.

Thay $2y = x + 1$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$\sqrt{x^2 + (x+1)^3} = 4x - 1 \iff \begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ x^3 - 12x^2 + 11 = 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 11 \end{array}\right.$$

Với $x = 1$ thì $y = 1$, với $x = 11$ thì $y = 6$.

So điều kiện ta được nghiệm của hệ là $(x;y) = (1;1)$ và $(x;y) = (11;6)$.

Giúp hiểu sâu hơn lời giải.

Thực ra có nhiều học sinh sẽ khó khăn khi biến đổi pt (1) về thành (*). Tuy nhiên, vấn đề này hết sức đơn giản và phép biến đổi đó không phải là duy nhất. Ta có thể tạo ra nhiều đẳng thức tương tự.

Chẳng hạn ta muốn biến đổi (1) thành $f(x+a) = f(2y+b)$, chỉ việc cho giá trị a ngẫu nhiên sau đó đồng nhất thức ta được b.

Cụ thể, $(1) \iff x^3 + x + 2 = 8y^3 - 12y^2 + 8y$.

Chọn ngẫu nhiên $a = -1$, khi đó $VT = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 4(x-1) + 4$

Như vậy vế phải sẽ có dạng $(2y+b)^3 + 3(2y+b)^2 + 4(2y+b) + 4$

Đồng nhất (từ số hạng tự do) với $8y^3-12y^2+8y$, tức là giải phương trình $b^3+3b^2+4b+4=0$ cho ta $b=-2$

Kết quả là:

$$(1) \iff (x-1)^3+3(x-1)^2+4(x-1)+4=(2y-2)^3+3(2y-2)^2+4(2y-2)+4$$

Và khảo sát hàm đặc trưng cuối cùng vẫn cho ta: $x=2y-1$.

Các em có thể thực hành vấn đề này ở đề 26, câu 2.

Bài 3

Cho a,b,c là độ dài các cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c+b=abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\frac{3}{b+c-a}+\frac{4}{c+a-b}+\frac{5}{a+b-c}$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $a,b,c>0$ và $\frac{1}{c}+\frac{2}{b}=a$

Sử dụng đánh giá $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ với mọi $x,y\geq 0$ ta có:

$$\begin{aligned}
S&=\left(\frac{2}{b+c-a}+\frac{2}{a+b-c}\right)+\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\right)+\left(\frac{3}{c+a-b}+\frac{3}{a+b-c}\right)\\
&\geq\frac{2.4}{2b}+\frac{4}{2c}+\frac{3.4}{2a}\\
&=\frac{4}{b}+\frac{2}{c}+\frac{6}{a}\\
&=2a+\frac{6}{a}\\
&\geq 4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}$. Vậy $\min S=4\sqrt{3}$

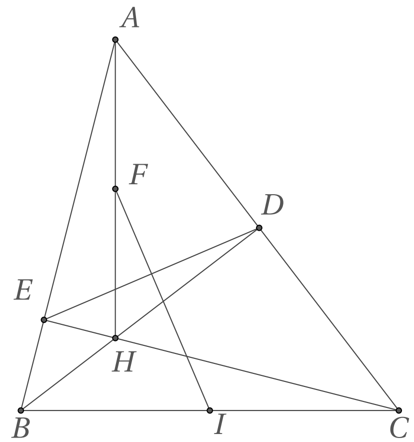
24 THPT Tĩnh Gia I (Thanh Hóa)

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;0)$ và trung điểm của BC là $I(6;1)$. Đường thẳng AH có phương trình $x+2y-3=0$. Gọi D,E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết phương trình DE là $x-2=0$ và điểm D có hoành độ dương.

Lời giải

Dễ thấy tứ giác $BEDC$ nội tiếp đường tròn tâm I.



Và tứ giác $AEHD$ nội tiếp đường tròn tâm F.

Vậy IF là đường trung trực của ED. Do đó $IF \perp ED$.

Suy ra phương trình $IF: y-1=0$. Suy ra $F(1;1)$, suy ra $A(-1;2)$.

$D \in DE \implies D(2;d)$. Do $FD = FA \implies 1+(x-1)^2 = 5 \implies \left[\begin{array}{l} d=3 \\ d=-1 \end{array}\right.$

Do $y_D > 0$ nên $D(2;3)$.

Phương trình $AC: x-3y+7=0$.

Đường thẳng BC đi qua I và vuông góc AH nên có phương trình $BC: 2x-y-11=0$

Từ đó $C(8;5) \implies B(4;-3)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^2-3y+1+\sqrt{y-1} = x^2+\sqrt{x}+xy \\ \sqrt{2x+y}-\sqrt{-3x+2y+4}+3x^2-14x-8=0 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ 2x+y \geq 0 \\ -3x+2y+4 \geq 0 \end{cases}$

Nhận thấy $x=0, y=1$ không phải là nghiệm của hệ.

Xét $y>1, x>0$ Phương trình đầu tương đương:

$$\sqrt{y-1}-\sqrt{x}+(y-1)^2-x^2+y^2-xy-y=0$$

$$\iff \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+(y-1-x)(y-1+x)+y(y-1-x)=0$$

$$\iff (y-x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+2y-1+x\right)=0 \quad (*)$$

Do $x>0, y>1$ nên $\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+2y-1+x>0$. Vậy $y=x+1$.

Thay $y=x+1$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$$

$$\iff (\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+(x-5)(3x+1)=0$$

$$\iff \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$$

$$\iff (x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+(3x+1)\right)=0$$

Vì $x>0$ nên suy ra $x=5$, từ đó $y=6$. Thử lại thấy đúng, vậy hệ đã cho có nghiệm $(x,y)=(5;6)$

Bài 3

Cho ba số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{2a}{a^2+1}+\frac{2b}{b^2+1}+\frac{c^2-1}{c^2+1}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{2a}{a^2+1}+\frac{2b}{b^2+1}&=\frac{2a}{a^2+ab+bc+ca}+\frac{2b}{b^2+ab+bc+ca}=\frac{2a}{(a+b)(a+c)}+\frac{2b}{(b+c)(b+a)}\\&=\frac{2ab+2ac+2ab+2bc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{4ab+2bc+2ca}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&=\frac{2+2ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}\le\frac{2+2ab}{(1+ab).\sqrt{1+c^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+c^2}}\end{aligned}$$

Vậy $VT\le\dfrac{2}{\sqrt{1+c^2}}-\dfrac{2}{c^2+1}+1$

Đặt $t=\sqrt{1+c^2}$ $(t\ge1)$, khi đó $VT\le\dfrac{2}{t}-\dfrac{2}{t^2}+1$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}$ với $t\ge1$.

Lập bảng biến thiên ta được $f(t)\le f(2)=\dfrac{1}{4}$

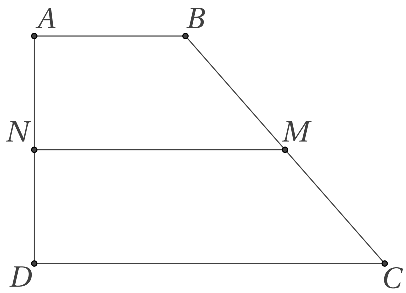
Từ đó $VT\le\dfrac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}c=\sqrt{3}\\a=b=2-\sqrt{3}\end{cases}$

25 THPT Thanh Chương I (Nghệ An)

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ có đường cao AD. Biết $BC=2AB$. $M(0;4)$ là trung điểm BC và phương trình đường thẳng AD là $x-2y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang biết rằng hình thang có diện tích bằng $\dfrac{54}{5}$ và A,B có tọa độ dương.

Lời giải



Gọi N là hình chiếu của M lên AD. Dễ dàng tìm được $N\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{2}{5}\right)$

$MN=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$. Ta có $S_{ABCD}=MN.AD=\dfrac{54}{5}$

$\Longrightarrow AD=\dfrac{6}{\sqrt{5}}\Longrightarrow AN=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

$A \in AD \implies A(2t+1;t)$. Ta có:

$$AN = \frac{3}{\sqrt{5}} \iff \left(2t+1-\frac{9}{5}\right)^2 + \left(t-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{9}{5} \iff \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{-1}{5} \end{array}\right.$$

Do tọa độ của A dương nên $t=1$, khi đó $A(3;1), D\left(\frac{9}{5};-\frac{1}{5}\right)$

AB vuông góc với AD nên phương trình tham số của $AB: \begin{cases} x=3+b \\ y=1-2b \end{cases}$

$B \in AB \implies B(3+b,1-2b)$.

Ta có:

$$BM = BA \implies (3+b)^2 + (3+2b)^2 = b^2 + (b-1)^2 \iff \left[\begin{array}{l} b=-1 \\ b=-\frac{17}{3} \end{array}\right.$$

Với $b=-\frac{17}{3}$ thì $x_B<0$ (loại)

Với $b=-1$ thì $B(2;3)$. Suy ra $C(-2;5)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3y+1}+\sqrt{5x+4}=3xy-y+3 \\ \sqrt{2x^2+2y^2}+\sqrt{\frac{4(x^2+xy+y^2)}{3}}=2(x+y) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} 3y+1\ge 0 \\ 5x+4\ge 0 \end{cases}$

Đặt $a=\sqrt{2x^2+2y^2}, b=\sqrt{\frac{4(x^2+xy+y^2)}{3}}$, khi đó $a\ge 0, b\ge 0$. Phương trình sau trở thành:

$$a+b=\sqrt{2(3b^2-a^2)} \iff (a-b)(3a+5b)=0 \iff \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ 3a+5b=0 \end{array}\right.$$

Với $3a+5b=0 \implies a=b=0$. Từ đó $x=0, y=0$ là nghiệm của hệ đã cho.

Với $a=b \implies x=y$, thay vào phương trình đầu ta được

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=3x^2-x+3 \\
\iff &\sqrt{3x+1}-(x+1)+\sqrt{5x+4}-(x+2)+3(-x^2+x)=0 \\
\iff &\frac{-x^2+x}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{-x^2+x}{\sqrt{5x+4}+2}+3(-x^2+x)=0 \\
\iff &(-x^2+x)\left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{5x+4}+2}+3\right)=0 \\
\iff &-x^2+x=0 \\
\iff &x=0 \vee x=1
\end{aligned}$$

Với $x=1 \implies y=1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm (0;0), (1;1).

Cách 2. Từ phương trình sau để hệ có nghiệm thì $x+y \geq 0$.

Ta có $\sqrt{2x^2+2y^2} \geq x+y$ và $\sqrt{\dfrac{4(x^2+xy+x^2)}{3}} \geq x+y$

Do đó:

$$\sqrt{2x^2+2y^2}+\sqrt{\frac{4(x^2+xy+y^2)}{3}} \geq 2(x+y)$$

Đẳng thức xảy ra $x=y$.

Bài 3

Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2}}$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$

Sử dụng BĐT Cauchy-Schwarz:

$$\sqrt{(1+2)(a^2+2b^2)} \geq a+2b \implies \frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{a+2b} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\right)$$

Chứng minh tương tự ta suy ra:

$$A \leq \frac{\sqrt{3}}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}+\frac{1}{c}+\frac{2}{a}\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}.\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}\right)=\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy $\max A=\sqrt{3}$

26 THPT Cẩm Bình (Hà Tĩnh)

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;0)$. Biết $M(1;1), N(4;4)$ lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, AC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải

Vì MN là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $MN \parallel BC \implies MN \perp AH$.

Suy ra phương trình $AH: x+y-3=0$. Tọa độ $A(t;3-t)$

M là trung điểm $AB \implies B(2-t;t-1)$

N là trung điểm $AC \implies C(8-t;t+5)$

Suy ra $\overrightarrow{BH} = (t+1; 1-t)$ và $\overrightarrow{AC} = (8-2t; 2t+2)$

Do $BH \perp AC \implies \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \implies -2t^2 - 3t - 5 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Với $t = -1 \implies A(-1;4); B(3;-2), C(9;4)$

Với $t = \dfrac{5}{2} \implies A\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right), B\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right), C\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{15}{2}\right)$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + 32x = 9x^2 + 8y + 36 \\ 4\sqrt{x+2} + \sqrt{16-3y} = x^2 + 8 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq \dfrac{16}{3} \end{cases}$

Từ phương trình đầu ta có:

$$x^3 - 9x^2 + 32x - 36 = (y+2)^3 - 9(y+2)^2 + 32(y+2) - 36 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 9t^2 + 32t - 36$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(t) = 3t^2 - 18t + 32 = 3(t-3)^2 + 5 > 0\ \forall t \in \mathbb{R}$. Vậy $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó $(*) \iff x = y + 2$

Thay $y = x - 2$ vào phương trình sau ta được

$$\begin{aligned}
& 4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2 + 8 \\
\iff & 4\sqrt{x+2} - \left(\frac{4x}{3} + \frac{16}{3}\right) + \sqrt{22-3x} - \left(\frac{14}{3} - \frac{x}{3}\right) + (-x^2 + x + 2) = 0 \\
\iff & \frac{1}{3}.\frac{144(x+2) - (4x+16)^2}{4\sqrt{x+2} + (4x+16)} + \frac{1}{3}.\frac{9(22-3x) - (14-x)^2}{\sqrt{22-3x} + (14-x)} + (-x^2 + x + 2) = 0 \\
\iff & (-x^2 + x + 2)\left[\frac{1}{3}.\frac{16}{4\sqrt{x+2} + (4x+16)} + \frac{1}{3}.\frac{1}{\sqrt{22-3x} + (14-x)} + 1\right] = 0 \\
\iff & -x^2 + x + 2 = 0 \iff x = -1 \vee x = 2
\end{aligned}$$

Với $x = -1 \implies y = -3$.
Với $x = 2 \implies y = 0$.

So điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm $(x;y) = (-1;-3)$, $(x;y) = (2;0)$

Giúp hiểu sâu hơn lời giải.

Tương tự cách làm câu 2 đề 23, ta cần biến đổi (1) thành $f(x+a) = f(y+b)$

Chọn ngẫu nhiên $a = 1$, $VT = (x+1)^3 - 12(x+1)^2 + 53(x+1) - 78$

Phân tích $VP = (y+b)^3 - 12(y+b)^2 + 53(y+b) - 78$.

Giải phương trình $b^3-12b^2+53b-78=0$ ta nhận được $b=3$.

$$(1) \iff (x+1)^3-12(x+1)^2+53(x+1)-78=(y+3)^3-12(y+3)^2+53(y+3)-78$$

Vẫn dẫn đến $x=y+2$

Bài 3

Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2}{c(c^2+a^2)}+\frac{b^2}{a(a^2+b^2)}+\frac{c^2}{b(b^2+c^2)}+2(a^2+b^2+c^2)$$

Lời giải

Sử dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{a^2}{c(c^2+a^2)}=\frac{1}{c}-\frac{c}{c^2+a^2}\geq\frac{1}{c}-\frac{c}{2ac}=\frac{1}{c}-\frac{1}{2a}$$

Từ đó

$$\begin{aligned}P&\geq\frac{1}{c}-\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{2c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{2b}+2(a^2+b^2+c^2)\\&=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+2a^2+2b^2+2c^2\\&=\frac{1}{4a}+\frac{1}{4a}+2a^2+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4b}+2b^2+\frac{1}{4c}+\frac{1}{4c}+2c^2\\&\geq\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\\&=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$. Vậy $\min P=\frac{9}{2}$.

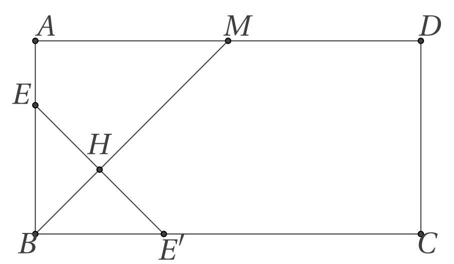
27 THPT Lý Thái Tổ (Bắc Ninh)

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có đường phân giác trong góc $\angle ABC$ đi qua trung điểm M của cạnh AD, đường thẳng BM có phương trình $x-y+2=0$, điểm D nằm trên đường thẳng Δ có phương trình $x+y-9=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ biết đỉnh B có hoành độ âm và đường thẳng AB đi qua $E(-1;2)$.

Lời giải

Dễ thấy ABM vuông cân tại B nên $AB=AM=\frac{AD}{2}$



Gọi E' là điểm đối xứng của E qua BM. Khi đó $E'\in BC$ vì $\triangle BEE'$ vuông cân tại B.

$EE'\perp BM$ nên có phương trình $x+y-1=0$.

Từ đó dễ dàng tìm được $E'(0;1)$

$B \in BM \implies B(t;t+2)$. Khi đó $\overrightarrow{EB} = (t+1;t), \overrightarrow{E'B} = (t;t+1)$

$EB \perp E'B \iff \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{E'B} = 0 \iff t(t+1) = 0 \iff t = 0 \vee t = -1$

Nếu $t = 0$ thì $x_B = 0$ (loại)

Nếu $t = -1$ thì $B(-1;1)$.

Phương trình cạnh $AB : x+1 = 0 \implies A(-1;a)\ (a \neq 1)$.

$D \in \Delta \implies D(d;9-d)$

M là trung điểm AD nên $M\left(\dfrac{d+1}{2};\dfrac{9+a-d}{2}\right)$.

$M \in BM : x - y + 2 = 0$ nên:

$$\frac{d+1}{2} - \frac{9+a-d}{2} + 2 = 0 \iff -a + 2d - 6 = 0 \qquad (1)$$

Mặt khác $\overrightarrow{AD} = (d+1;9-d-a), \overrightarrow{AB} = (0;1-a)$.

$$AB \perp AD \implies \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \implies (9-d-a)(1-a) = 0 \iff -a-d+9 = 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a = 4 \\ d = 5 \end{cases}$. Vậy $A(-1;4), D(5;4)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \implies C(5;1)$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2x - 2(x^2 - x)\sqrt{3-2y} = (2y-3)x^2 - 1 \\ \sqrt{2 - \sqrt{3-2y}} = \dfrac{\sqrt[3]{2x^2 + x^3} + x + 2}{2x+1} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 3 - 2y \geq 0 \\ 2 - \sqrt{3-2y} \geq 0 \\ 2x + 1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq y \leq \dfrac{3}{2} \\ x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Phương trình đầu tương đương với:

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + 1 - 2(x-1).x\sqrt{3-2y} + x^2(3-2y) = 0 \\ \iff & \left[(x-1) - x\sqrt{3-2y}\right]^2 = 0 \\ \iff & x - 1 = x\sqrt{3-2y} \end{aligned}$$

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Xét $x \neq 0$, khi đó ta có $\dfrac{x-1}{x} = \sqrt{3-2y}$

Thay $\sqrt{3-2y} = 1 - \dfrac{1}{x}$ vào phương trình thứ hai ta được

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt[3]{2x^2+x^3}+x+2}{2x+1} \iff (2x+1)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=x+2+\sqrt[3]{2x^2+x^3}$$
$$\iff \left(2+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{2}{x}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}$$
$$\iff \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^3+\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{2}{x}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} \quad (*)$$

Xét hàm $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+1>0$ với mọi t.
Vậy $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó:

$$(*) \iff \sqrt{1+\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} \qquad (**)$$

Đặt $a=\frac{1}{x}$ $(a\neq 0)$, khi đó:

$$(**) \iff \sqrt{1+a}=\sqrt[3]{1+2a}$$
$$\iff \begin{cases} a\geq -1 \\ a^2-a-1=0 \end{cases}$$
$$\iff a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Nên $x=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \implies \sqrt{3-2y}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ (vô nghiệm).
Vậy hệ đã cho vô nghiệm

Bài 3

Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x, y\geq 1$ và $3(x+y)=4xy$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^3+y^3-3\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

Lời giải

Ta có:

$$P=(x+y)^3-3xy(x+y)-3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2+\frac{6}{xy}$$

Từ giả thiết suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3}$, do đó:

$$P=(x+y)^3-3xy(x+y)+\frac{6}{xy}-\frac{16}{3}$$

Mặt khác $3(x+y)=4xy\leq (x+y)^2 \implies x+y\geq 3$.

Và do $x, y\geq 1$ nên:

$$(x-1)(x-1)\geq 0 \implies xy-(x+y)+1\geq 0 \implies \frac{3(x+y)}{4}-(x+y)+1\geq 0 \implies x+y\leq 4$$

$t=x+y$, khi đó $3\leq t\leq 4$, và $P=t^3-\frac{9t^2}{4}+\frac{8}{t}-\frac{16}{3}$

Xét hàm số $f(t)=t^3-\dfrac{9t^2}{4}+\dfrac{8}{t}-\dfrac{16}{3}$ với $3\le t\le 4$

Ta có $f'(t)=3t^2-\dfrac{9t}{2}-\dfrac{8}{t^2}>0$ với mọi $t\in[3;4]$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[3;4]$.

Suy ra $\min P=f(3)=\dfrac{49}{12}$ đạt được khi $t=3$ hay $x=y=\dfrac{3}{2}$

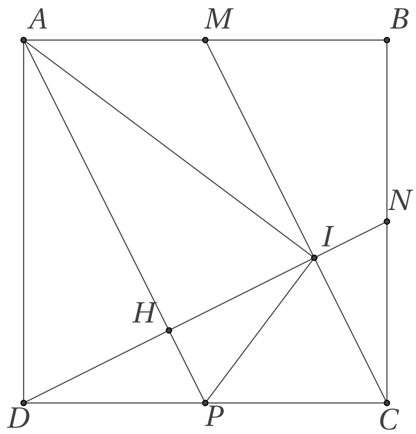
Và $\max P=f(4)=\dfrac{74}{3}$ đạt được khi $t=4$ hay $x=1, y=3$.

28 THPT Nghèn (Hà Tĩnh)

Bài 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình vuông $ABCD$ có hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC, biết CM cắt DN tại điểm $I\left(\dfrac{22}{5};\dfrac{11}{5}\right)$. Gọi H là trung điểm DI, biết đường thẳng AH cắt CD tại $P\left(\dfrac{7}{2};1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết hoành độ A nhỏ hơn 4.

Lời giải



Dễ dàng chứng minh $CM\perp DN$ tại I.

Qua A kẻ đường thẳng vuông góc DN cắt DN tại H' và DC tại P'.

Dễ thấy $AP'\parallel CM$, từ đó suy ra $AMCP'$ là hình bình hành. Suy ra $CP'=AM=\dfrac{CD}{2}$. Suy ra P' là trung điểm CD.

Mà $H'P'\parallel CI$ nên H' là trung điểm DI. Suy ra $H'\equiv H$.

Vậy $AH\perp DI$ và P là trung điểm CD.

Dễ dàng chứng minh $\angle AIP=90^\circ$, do đó phương trình $AI: 3x+4y-22=0$

Suy ra $A\left(t;\dfrac{22-3t}{4}\right)\Longrightarrow \overrightarrow{IA}=\left(t-\dfrac{22}{5};\dfrac{66-15t}{20}\right)$

Ta có $AI=AD=2DP=2PI$, do đó:

$$\left(t-\frac{22}{5}\right)^2+\left(\frac{66-15t}{20}\right)^2=9\iff\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\dfrac{34}{5}\end{array}\right.$$

Do $x_A<4$ nên $t=2$ và $A(2;4)$.

Phương trình $AP: 2x+y-8=0$, phương trình $DN: x-2y=0$. Suy ra $H\left(\dfrac{16}{5};\dfrac{8}{5}\right)$.

Suy ra $D(2;1), C(5;1), B(5;4)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2+5y^2)^2 = 2\sqrt{xy}(6-x^2-5y^2)+36 \\ \sqrt{5y^4-x^4} = 6x^2+2xy-6y^2 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} xy \geq 0 \\ 5y^4-x^4 \geq 0 \end{cases}$.

Xét phương trình đầu, đặt $t = x^2+5y^2$ $(t \geq 0)$, khi đó phương trình đầu trở thành:

$$t^2-2\sqrt{xy}.t-2\sqrt{xy}-36=0 \quad (*)$$

$\Delta' = (\sqrt{xy}-6)^2 \geq 0$

Phương trình $(*)$ có nghiệm $x^2+5y^2=6$, $x^2+5y^2=-2\sqrt{xy}-6<0$ (loại)

Vậy $x^2+5y^2=6$. Thay vào phương trình sau ta được:

$$\sqrt{5y^4-x^4} = (x^2+5y^2)(x^2-y^2)+2xy \iff \sqrt{5y^4-x^4}+(5y^4-x^4) = 4x^2y^2+2xy$$

Xét hàm số $f(t) = t^2+t$ với $t \geq 0$. Hàm số này đồng biến nên $\sqrt{5y^4-x^4} = 2xy \implies x = y$ (do x, y cùng dấu)

Thay $x = y$ vào $x^2+5y^2=6 \implies x = y = \pm 1$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = (1; 1)$, $(x, y) = (-1; -1)$

Bình luận.

Ngoài cách xử lí phương trình (1) như trong lời giải ta còn có thể biến đổi:

$$(1) \iff (x^2+5y^2)^2+2\sqrt{xy}(x^2+5y^2) = 6^2+2\sqrt{xy}.6$$

Đặt $\sqrt{xy} = a > 0$ và xét hàm số $f(t) = t^2+2at, (t>0)$ có $f'(t) = 2t+2a > 0$.
Hàm số đồng biến, điều này cho ta kết quả $x^2+5y^2=6$.

Bài 3

Cho a, b, c là các số thực không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn $(a+b+c)^2 = 2(a^2+b^2+c^2)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Lời giải

Giả sử $c \neq 0$. Đặt $x = \dfrac{a}{c}, y = \dfrac{b}{c}$

Từ giả thiết ta có:

$$(x+y+1)^2 = 2(x^2+y^2+1) \iff 4xy = (x+y)^2-2(x+y)+1$$

Đặt $u = x+y, v = xy$, khi đó $u^2-2u+1 = 4v \leq u^2 \implies u \geq \dfrac{1}{2}$

Ta có

$$\begin{aligned}P &= \frac{x^3+y^3+1}{(x+y+1)(xy+x+y)} = \frac{4(x^3+y^3)+4}{(x+y+1)(4xy+4x+4y)} \\ &= \frac{4u^3-3u.(u-1)^2+4}{(u+1)^3} = \frac{u^3+6u^2-3u+4}{(u+1)^2} \\ &= 1+3\frac{(u-1)^2}{(u+1)^3}\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(u) = \dfrac{(u-1)^2}{(u+1)^3}$ với $u \geq \dfrac{1}{2}$.

$$f'(u) = \frac{2(u-1)(u+1)^3-3(u^2-1)^2}{(u+1)^6} = \frac{2(u-1)(u+1)-3(u-1)^2}{(u+1)^4}$$

$$f'(u) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=5 \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta thu được trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ ta có:

$$\min f(u) = f(1) = 0, \quad \max f(u) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(5) = \frac{2}{27}$$

Vậy $\min P = 1$, đạt được chẳng hạn khi $a=0, b=c\neq 0$

$\max P = \dfrac{11}{9}$, đạt được chẳng hạn khi $a=b=\dfrac{c}{4}$.

29 THPT Chuyên Trần Quang Diệu (Đồng Tháp)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=5$ và đường thẳng $\Delta: x+y+1=0$. Từ điểm A thuộc đường thẳng Δ, kẻ hai đường thẳng lần lượt tiếp xúc với (C) tại B và C. Tìm tọa độ điểm A biết diện tích tam giác ABC bằng 8.

Lời giải

(C) có tâm $I(2;2)$, bán kính $R=\sqrt{5}$, $A\in\Delta \implies A(a;-a-1)$

Từ tính chất tiếp tuyến suy ra $IA\perp BC$ tại H là trung điểm của BC.

Giả sử $IA=m, IH=n$ $(m>n>0)$

Suy ra $HA=m-n, BH=\sqrt{IB^2-IH^2}=\sqrt{5-n^2}$

Suy ra $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}.BC.AH=BH.AH=(m-n)\sqrt{5-n^2}$

Theo đề bài $S_{ABC}=8 \iff (m-n)\sqrt{5-n^2}=8$

Mặt khác trong tam giác vuông IBA nên $BI^2=IH.IA \implies 5=mn \implies m=\dfrac{5}{n}$

Từ đó suy ra:

$$\left(\frac{5}{n}-n\right)\sqrt{5-n^2}=8 \iff n^6-15n^4+139n^2-125=0 \iff n=1 \implies m=5$$

$$IA=5 \iff (a-2)^2+(-a-3)^2=25 \iff a^2+a-6=0 \iff \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-3 \end{array}\right.$$

Với $a=1 \implies A(2;-3)$.

Với $a=-3 \implies A(-3;2)$

Bài 2

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y(2+2\sqrt{4y^2+1})=x+\sqrt{x^2+1} \\ x^2(4y^2+1)+2(x^2+1)\sqrt{x}=6 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ.

Xét $x>0$, phương trình đầu tương đương với:

$$2y(1+\sqrt{4y^2+1})=\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t(1+\sqrt{t^2+1})$ trên $\mathbb{R}$. Ta có:

$$f'(t)=1+\frac{2t^2+1}{\sqrt{t^2+1}}>0, \quad \forall t$$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

$$(*) \iff 2y=\frac{1}{x}$$

Thay $2y=\frac{1}{x}$ vào phương trình hai ta được:

$$x^2+1+2(x^2+1)\sqrt{x}-6=0 \iff x^2+2(x^2+1)\sqrt{x}-5=0 \quad (**)$$

Dễ thấy $x=1$ là một nghiệm của phương trình $(**)$

Xét hàm $g(x)=x^2+2(x^2+1)\sqrt{x}-5$ với $x>0$. Ta có:

$$g'(x)=2x+4x\sqrt{x}+\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}>0 \quad \forall x>0$$

Vậy $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó 1 là nghiệm duy nhất của $(**)$

Với $x=1$ thì $y=\frac{1}{2}$. Hệ có nghiệm duy nhất $\left(1;\frac{1}{2}\right)$

Bài 3

Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $c=\min\{a,b,c\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+c^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\sqrt{a+b+c}$$

Lời giải

Ta có:

$$a^2+c^2 \le a^2+ac \le a^2+ac+\frac{c^2}{4}=\left(a+\frac{c}{2}\right)^2$$

Tương tự $b^2+c^2 \le \left(b+\frac{c}{2}\right)^2$.

$$\begin{aligned} P &\ge \frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\sqrt{a+b+c} \\ &\ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+\frac{c}{2}}+\frac{1}{b+\frac{c}{2}}\right)^2+\sqrt{a+b+c} \\ &\ge \frac{1}{2}.\frac{16}{(a+b+c)^2}+\sqrt{a+b+c} \end{aligned}$$

Đặt $t=\sqrt{a+b+c}$ $(t>0)$. Khi đó $P \ge \frac{8}{t^4}+t$ Xét hàm số $f(t)=\frac{8}{t^4}+t$ với $t>0$. Ta có:

$$f'(t)=-\frac{32}{t^5}+1; \qquad f'(t)=0 \iff t=2$$

Lập bảng biến thiên ta được $f(t) \ge f(2)=\frac{5}{2}$ với mọi $t>0$. Do đó $P \ge \frac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=2, c=0$

30 THPT Nguyễn Thị Minh Khai (TP. HCM)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại B, nội tiếp đường tròn (C) : $x^2+y^2-10y-25=0$. I là tâm đường tròn (C). Đường thẳng BI cắt đường tròn (C) tại $M(5;0)$. Đường cao kẻ từ C cắt đường tròn (C) tại $N\left(\frac{-17}{5};\frac{-6}{5}\right)$. Tìm tọa độ các điểm A,B,C biết điểm A có hoành độ dương.

Lời giải

Ta có $I(0;5)$. Do I là trung điểm BM nên $B(-5;10)$.

Vì tam giác ABC cân tại B nên BI là đường cao và cũng là phân giác góc ABC.

$\angle ABM = \angle ACN$ (cùng phụ $\angle BAC$) nên A là trung điểm cung MN. Do đó $AI \perp MN$.

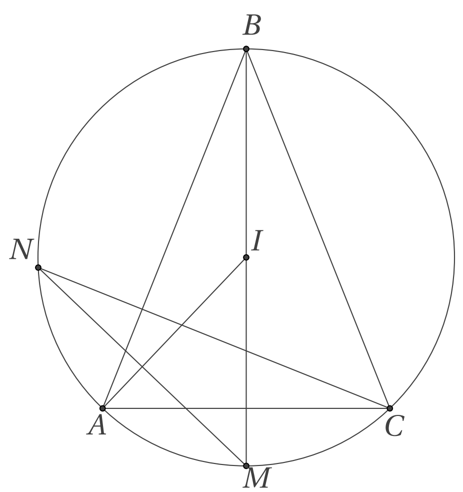
Suy ra phương trình $AI: 7x+y-5=0$

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 7x+y-5=0 \\ x^2+y^2-10y-25=0 \end{cases}$

$\Longrightarrow A(1;-2)$ (do $x_A>0$)

Phương trình $BI: x+y-5=0$. Do $AC \perp BI$ nên phương trình $AC: x-y-3=0$

Gọi H là giao điểm của AC và MN, khi đó $H(4;1)$. Suy ra tọa độ $C(7;4)$.



Bài 2

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3x^2+6x+4=y^3+3y \\ x^3(3y-7)=1-\sqrt{(1+x^2)^3} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải

Phương trình đầu tương đương với:

$$(x+1)^3+3(x+1)=y^3+3y \qquad (*).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+3>0$ với mọi t nên $f(t)$ đồng biến.

Từ đó $(*) \iff x+1=y$. Thay $y=x+1$ vào phương trình sau ta được

$$\begin{aligned}
x^3(3x-4)=1-\sqrt{(1+x^2)^3} &\iff x^3(3x-4)=\frac{-x^2(1+\sqrt{1+x^2}+1+x^2)}{1+\sqrt{1+x^2}} \\
&\iff x^2\left(3x^2-4x+\frac{2+x^2+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)=0 \\
&\iff x^2\left(3x^2-4x+1+\frac{1+x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)=0 \\
&\iff \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3x^2-4x+1+\dfrac{1+x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}=0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
3x^2-4x+1+\frac{1+x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}=0 &\iff 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+\frac{1+x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}=0 \\
&\iff 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3+3x^2-\sqrt{1+x^2}-1}{1+\sqrt{1+x^2}}=0 \\
&\iff 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{x^2+1-\sqrt{x^2+1}+1+1+2x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}=0
\end{aligned}$$

Phương trình này vô nghiệm do vế trái lớn hơn 0.

Vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Với $x=0$ thì $y=1$. Hệ phương trình có nghiệm $(0;1)$.

Bài 3

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn: $a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)\le\frac{4}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$$

Lời giải

Sử dụng BĐT Cauchy-Schwarz:

$$P=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{9}{a+b+c+3}$$

Từ giả thiết suy ra:

$$a^2+b^2+c^2-a-b-c \le \frac{4}{3} \implies \frac{(a+b+c)^2}{3}-(a+b+c) \le \frac{4}{3} \implies 0 < a+b+c \le 4$$

Đặt $t=a+b+c$, thế thì $0<t\le 4$. Khi đó $P \ge \dfrac{9}{t+3}$

Ta chứng minh $\dfrac{9}{t+3} \ge \dfrac{9}{7}$. Thật vậy $\dfrac{9}{t+3} \ge \dfrac{9}{7} \iff t \le 4$

BĐT cuối luôn đúng do $t \le 4$. Vậy $P \ge \dfrac{9}{7}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{4}{3}$.

Vậy $\min P = \dfrac{9}{7}$.

31 THPT Như Thanh (Thanh Hóa)

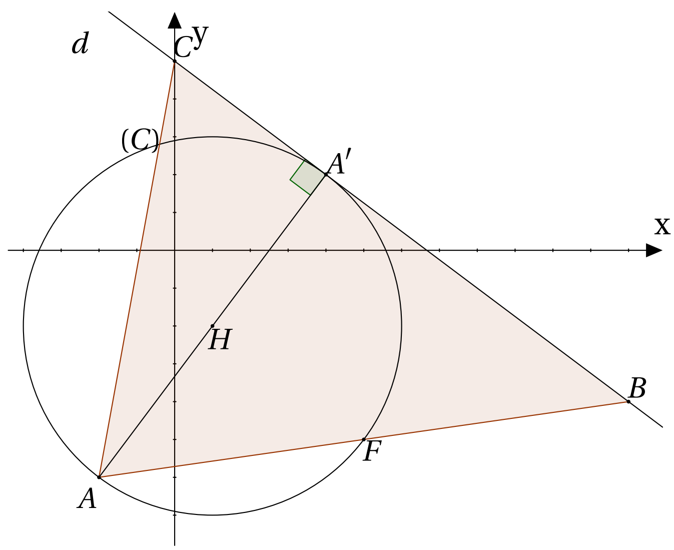
Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-20=0$ và đường thẳng $d: 3x+4y-20=0$. Chứng minh rằng d tiếp xúc với (C). Tam giác ABC có đỉnh $A \in (C)$, hai đỉnh $B, C \in d$, trung điểm cạnh $AB \in (C)$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC, biết trực tâm tam giác ABC trùng với tâm đường tròn (C) và B có hoành độ dương.

Hướng dẫn

Đường tròn (C) có tâm $H(1;-2), R=5$.
Ta có $d(H,d)=5$, suy ra d tiếp xúc với (C) tại điểm $A'(4;2)$.
Tam giác ABC có trực tâm H, B và C thuộc d, suy ra A' là chân đường cao thuộc BC, A thuộc (C) nên $AA'=2R=10$, suy ra $A(-2;-6)$.
Do trung điểm F của AB thuộc (C) nên:

$$\begin{cases} HF // A'B \\ HF = \frac{1}{2}A'B \end{cases} \implies A'B=10 \implies B(12;-4)$$



Do C thuộc d nên tọa độ C thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} \overrightarrow{CA'} = t\overrightarrow{A'B} \\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \implies C(0;5)$.

Vậy $A(-2;-6), B(12;-4), C(0;5)$.

Bài 2

Giải phương trình:

$$4\sqrt{5x^3-6x^2+2}+4\sqrt{-10x^3+8x^2+7x-1}+x-13=0 \qquad (43)$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 5x^3-6x^2+2\geq 0 \\ -10x^3+8x^2+7x-1\geq 0 \end{cases}$ $(*)$

Ta có:

$$(43) \iff 4\sqrt{5x^3-6x^2+2}+4\sqrt{-10x^3+8x^2+7x-1}=x-13$$

Với điều kiện $(*)$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta được:

$$4\sqrt{5x^3-6x^2+2}=4\sqrt{1.(5x^3-6x^2+2)}\leq 4.\frac{5x^3-6x^2+2+1}{2} \tag{44}$$

Tương tự ta có:

$$4\sqrt{-10x^3+8x^2+7x-1}=2\sqrt{4(-10x^3+8x^2+7x-1)}\leq 2.\frac{-10x^3+8x^2+7x-1+4}{2} \tag{45}$$

Từ (44) và (45) ta có:

$$VT(43)=4\sqrt{5x^3-6x^2+2}+4\sqrt{-10x^3+8x^2+7x-1}\leq -4x^2+7x+9.$$

Mặt khác ta lại có:

$$-4x^2+7x+9\leq -4x^2+7x+9+4(x-1)^2=x-13=VP(43).$$

Khi đó:

$$(43) \iff \begin{cases} 5x^3-6x^2+2=1 \\ -10x^3+8x^2+7x-1=4 \\ 4(x-1)^2=0 \end{cases} \iff x=1$$

Vậy phương trình đã cho nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 3

Cho các số $a,b,c\in R, a^2+b^2+c^2\neq 0$ và $2(4a^2+4b^2+c^2)=(2a+2b+c)^2$.
Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\frac{8a^3+8b^3+c^3}{(2a+2b+2c)(4ab+2bc+2ca)}$$

Lời giải

Từ giả thiết của bài toán, ta có

$$\left[a+b+\frac{c}{2}\right]^2=2\left[a^2+b^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2\right].$$

Đặt $d=\dfrac{c}{2}$, ta có:

$$(a+b+d)^2=2(a^2+b^2+d^2) \tag{46}$$

Mặt khác ta có:

$$ab+bd+da=\frac{1}{2}\left[(a+b+d)^2-a^2-b^2-d^2\right] \tag{47}$$

Từ (46) và (47) ta được :

$$ab+bd+da=\frac{1}{4}(a^2+b^2+d^2)$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{8a^3+8b^3+c^3}{2(2a+2b+c)(2ab+bc+ca)} \\
&= \frac{a^3+b^3+\left(\dfrac{c}{2}\right)^3}{\left(a+b+\dfrac{c}{2}\right)\left(ab+\dfrac{bc}{2}+\dfrac{ca}{2}\right)} \\
&= \frac{a^3+b^3+d^3}{(a+b+d)(ab+bd+da)} \\
&= \frac{8(a^3+b^3+d^3)}{(a+b+d)^3} \\
&= \frac{1}{32}\left[\left(\frac{4a}{a+b+d}\right)^3+\left(\frac{4b}{a+b+d}\right)^3+\left(\frac{4d}{a+b+d}\right)^3\right]
\end{aligned}$$

Đặt $x=\dfrac{4a}{a+b+d}, y=\dfrac{4b}{a+b+d}, z=\dfrac{4d}{a+b+d}$, ta có:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+yz+zx=4 \end{cases} \iff \begin{cases} y+z=4-x \\ yz=x^2-4x+4 \end{cases}$$

và

$$(y+z)^2 \geq 4yz \implies 0 \leq x \leq \frac{8}{3}.$$

Khi đó:

$$A=\frac{1}{32}\left[x^3+(y+z)^3-3yz(y+z)\right]=\frac{1}{32}\left[3x^3-12x^2+12x+16\right]$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{32}\left[3x^3-12x^2+12x+16\right]$ với $0 \leq x \leq \dfrac{8}{3}$. Ta có:

$$\min A=\frac{1}{32} \iff \min f(x)=1 \iff a=0, c=2b \neq 0$$

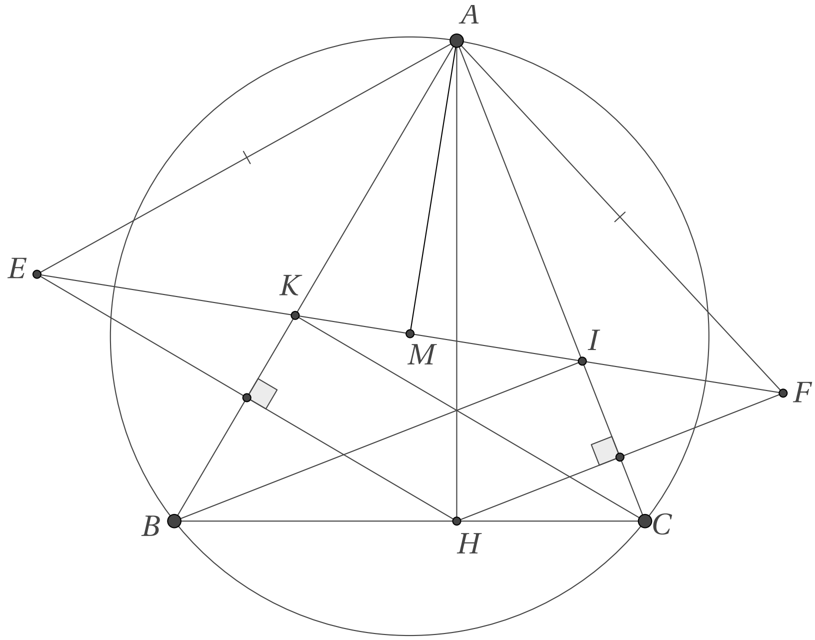
$$\max A=\frac{1}{32} \iff \max f(x)=\frac{11}{9} \iff a=b, c=8a, a\neq 0$$

32 THPT Chuyên Hạ Long (Quảng Ninh)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;6), B(1;1), C(6;3)$.
1. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
2. Tìm trên các cạnh AB, BC, CA các điểm K, H, I sao cho chu vi tam giác KHI nhỏ nhất.

Lời giải



1. Giả sử phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$(C): x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0, \quad (a^2 + b^2 - c > 0)$$.

Vì $A, B, C \in (C)$ nên:

$$\begin{cases} 4 + 36 + 4a + 12b + c = 0 \\ 1 + 1 + 2a + 2b + c = 0 \\ 36 + 9 + 12a + 6b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\dfrac{139}{46} \\ b = -\dfrac{147}{46} \\ c = \dfrac{240}{23} \end{cases} \quad \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình đường tròn (C) cần tìm là:

$$x^2 + y^2 - \frac{139}{23}x - \frac{1147}{23}y + \frac{240}{23} = 0$$

2. Ta có

$$\overrightarrow{AB}(1;-5), \overrightarrow{AC}(4,-3), \overrightarrow{BC}(5,2) \implies AB = \sqrt{26}, AC = 5, BC = \sqrt{29}$$

Mặt khác:

$$\begin{cases} BC > AB > AC \\ \cos A > 0 \end{cases} \implies 90^o > \widehat{A} > \widehat{C} > \widehat{B}$$

Vậy tam giác ABC nhọn.

Gọi E, F lần lượt đối xứng với H qua AB, AC. Ta có:

$$AE = AH = AF \implies \begin{cases} AEF \text{ cân tại } A \\ \widehat{EAF} = 2\widehat{A} \end{cases}$$

Gọi M là trung điểm EF, trong tam giác vuông AME, ta có:

$$ME = AE.\sin A = AH.\sin A$$

Suy ra Chu vi tam giác HIK là

$$\mathsf{C}_{HIK} = KE + KI + IF \geq EF = 2\sin A.AH \geq 2\sin A.d(A, BC) = \frac{2.S_{ABC}}{R}$$

Dấu "=" xảy ra khi H là chân đường cao kẻ từ A xuống BC và K, I là giao điểm của EF với AB, AC.

Ta chứng minh $\widehat{IHF}+\widehat{CHF}=\widehat{BAC}$.
Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{IHF}=\widehat{AHF}-\widehat{AHI}=\widehat{C}-90^o+\widehat{A} \\ \widehat{FHC}=90^o-\widehat{C} \end{cases} \Longrightarrow \widehat{IHF}+\widehat{CHF}=\widehat{A}$$

suy ra tứ giác $ABHI$ nội tiếp. Do đó $\widehat{AIB}=\widehat{AHB}=90^o$, suy ra I là chân đường cao tam giác ABC kẻ từ B. Tương tự có K là chân đường cao của C xuống AB.
Ta có các phương trình đường thẳng

$$(AB): 5x-y-4=0; \quad (AC): 3x+4y-30=0; \quad (BC): 2x-5y+3=0$$
$$(AH): 5x+2y-22=0; \quad (BI): 4x-3y-1=0; \quad (CK): x+5y-21=0$$

Suy ra

$$H\left(\frac{104}{29},\frac{59}{29}\right), \quad K\left(\frac{41}{26};\frac{101}{26}\right), \quad I\left(\frac{94}{25};\frac{117}{25}\right)$$

Bài 2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3y\sqrt{2+x}+8\sqrt{2+x}=10y-3xy+12 & (a) \\ 5y^3\sqrt{2-x}-8=6y^2+xy^3\sqrt{2-x} & (b) \end{cases}.$$

Hướng dẫn

ĐK: $x\in[-2;2]$
Nhận xét $y=0$ không thỏa mãn phương trình (b) của hệ. Do đó

$$(b) \iff \left(\sqrt{2-x}\right)^3+3\sqrt{2-x}=\left(\frac{2}{y}\right)^3+3.\frac{2}{y}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ trên $\mathbb{R}$. Dễ thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Do đó:

$$(b) \iff f\left(\sqrt{2-x}\right)=f\left(\frac{2}{y}\right) \iff \sqrt{2-x}=\frac{2}{y}$$

Thế vào PT (a) ta có

$$(a) \iff 3y\sqrt{2+x}+8\sqrt{2+x}=10y-3xy+12 \quad (48)$$
$$\iff 3\sqrt{2+x}+4\sqrt{2+x}\sqrt{2-x}=10-3x+6\sqrt{2-x} \quad (49)$$
$$\iff 3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}+3x-10=0 \quad (50)$$

Đặt $\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}=t \implies t^2=10-3x-4\sqrt{4-x^2}$
Phương trình (50) trở thành:

$$3t-t^2=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=3 \end{array}\right.$$

+ Với $t=0$ ta được $x=\dfrac{6}{5}, y=\sqrt{5}$.
+ Với $t=3$ ta có $\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}=3$, phương trình vô nghiệm vì $VT\le 2$.

Bài 3

Chứng minh rằng: với mọi ΔABC ta đều có

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\geq\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Longrightarrow \sin\frac{A}{2},\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2},\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B}{2},\cos\frac{C}{2}>0$$

Do đó

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\geq 3\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}>0 \quad \text{(Cauchy)}$$

Lại có:

$$\begin{aligned}\sum\cot\frac{A}{2}&=\sum\frac{\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\\&=\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\\&\geq\frac{3\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \quad \text{(Cauchy)}\end{aligned}$$

Vậy ta có

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\geq\frac{9}{2}\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}$$

Mà

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$$

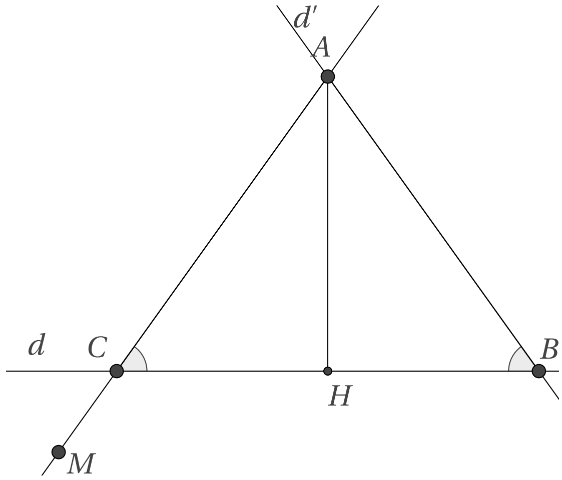
Do đó ta có đpcm.

33 THPT chuyên Vĩnh Phúc - Khối AB

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác cân ABC có đáy BC nằm trên đường thẳng $d: 2x-5y+1=0$, cạnh AB nằm trên đường thẳng $d': 12x-y-23=0$. Viết phương trình đường thẳng AC biết nó đi qua điểm $M(3;1)$.

Hướng dẫn



Vectơ pháp tuyến của các đường thẳng BC, AB, AC lần lượt là:

$\overrightarrow{n}_{BC} = (2;-5), \overrightarrow{n}_{AB} = (12;-1), \overrightarrow{n}_{AC} = (a;b), (a^2+b^2>0)$

Ta có:

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} < 90^o$$
$$\Longrightarrow \cos\widehat{ABC} = \cos\widehat{ACB}$$
$$\Longleftrightarrow \left|\cos(\overrightarrow{n}_{AB}, \overrightarrow{n}_{BC})\right| = \left|\cos(\overrightarrow{n}_{BC}, \overrightarrow{n}_{CA})\right|$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{145}}{5} = \frac{|2a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+12b=0 \\ 9a-8b=0 \end{array}\right.$$

+ Với $a+12b=0$, chọn $a=12; b=-1$ thì $AB//AC$ (loại)
+ Với $9a-8b=0$, chọn $a=8, b=9$ thì $(AC): 8x+9y-33=0$.

Cách 2 (nhanh hơn): Gọi Δ là đường thẳng đối xứng với d' qua d. Khi đó AC là đường thẳng đi qua M và song song với Δ.

Bài 2

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2} = 3(x+y) & (a) \\ \sqrt{x+2y+1}+2\sqrt[3]{12x+7y+8} = 2xy+x+5 & (b) \end{cases}.$$

Lời giải

ĐK: $\begin{cases} 5x^2+2xy+2y^2 \geq 0 \\ 2x^2+2xy+5y^2 \geq 0 \\ x+2y+1 \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x+2y+1 \geq 0$

Khi hệ có nghiệm, từ PT (a) suy ra $x+y \geq 0$.
Ta thấy:

$$\sqrt{5x^2+2xy+2y^2} = \sqrt{(x-y)^2+(2x+y)^2} \geq 2x+y \quad (51)$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y$
Tương tự

$$\sqrt{2x^2+2xy+5y^2} \geq x+2y \quad (52)$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y$.
Từ (51) và (52) ta có:

$$VT(a) = \sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2} \geq 3(x+y) = VP(a)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y$
Thế $x=y$ vào PT (b) ta được:

$$\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{19x+8}=2x^2+x+5 \quad (x\geq -\frac{1}{3})$$
$$\iff 2(x^2-x)+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+2\left(x+2-\sqrt[3]{19x+8}\right)=0$$
$$\iff (x^2-x)\left[2+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+2.\frac{1}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\sqrt[3]{(19x+8)^2}}\right]=0$$
$$\iff x^2-x=0 \quad \text{(Biểu thức trong ngoặc vuông lớn hơn 0)}$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} x=0 \implies y=0 \\ x=1 \implies y=1 \end{array}\right. \quad \text{(thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(0;0),(1;1)$.

Bài 3

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$S=8(a+b+c)+5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh
$$8a+\frac{5}{a}\geq\frac{3a^2+23}{2}, \quad (0<a<\sqrt{3}) \tag{53}$$
Thật vậy:
$$8a+\frac{5}{a}\geq\frac{3a^2+23}{2} \iff (a-1)^2(3a-10)\leq 0 \text{ (Luôn đúng)}$$
Dấu bằng khi $a=1$.
Tương tự
$$8b+\frac{5}{b}\geq\frac{3b^2+23}{2}, \quad (0<b<\sqrt{3}) \tag{54}$$
Dấu bằng khi $b=1$
$$8c+\frac{5}{c}\geq\frac{3c^2+23}{2}, \quad (0<c<\sqrt{3}) \tag{55}$$
Dấu bằng khi $c=1$.
Từ $(53),(54),(55)$ ta có:
$$S=8(a+b+c)+5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{3(a^2+b^2+c^2)+69}{2}=39$$
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.
Vậy $\min S=39$ đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

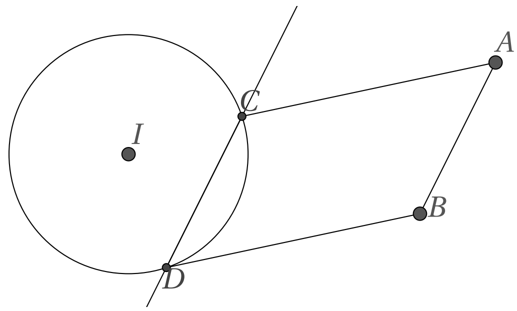
Chú ý: Để tìm ra vế phải của (53) ta sử dụng phương pháp tiếp tuyến.

34 THPT chuyên Vĩnh Phúc - Khối D

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(T): x^2+y^2-x-9y+18=0$ và hai điểm $A(4;1), B(3;-1)$. Gọi C, D là hai điểm thuộc (T) sao cho $ABCD$ là một hình bình hành. Viết phương trình đường thẳng CD.

Lời giải



Đường tròn (T) có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$ bán kính $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(-1;-2)$, $\quad AB=\sqrt{5}$, $\quad AB: 2x-y-7=0$.

Đường thẳng $CD||AB$ nên $CD: 2x-y+m=0, (m\neq -7)$.

Suy ra: $h=d(I;CD)=\frac{|2m-7|}{2\sqrt{5}}$ và

$$CD=2\sqrt{R^2-h^2}=2\sqrt{\frac{5}{2}-\frac{(2m-7)^2}{20}}$$

Do đó:

$$CD=AB \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6 \\ m=1 \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với $m=6$ thì $(CD): 2x-y+6=0$

+ Với $m=1$ thì $(CD): 2x-y+1=0$

Bài 2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-y^3+6x-3y=3x^2+4 & (a) \\ x^2+6y+19=2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5y+14} & (b) \end{cases}.$$

Hướng dẫn

ĐK: $\begin{cases} 3x+4\geq 0 \\ 5y+14\geq 0 \end{cases}$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$. Ta có: $f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$. Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$(a) \Longleftrightarrow (x-1)^3+3(x-1)=y^3+3y \Longleftrightarrow f(x-1)=f(y) \Longleftrightarrow y=x-1$$

Thế $y=x-1$ vào PT (b) ta được:

$$x^2+6x+13=2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9} \quad \left(x\geq -\frac{4}{3}\right)$$

$$\Longleftrightarrow (x^2+x)+2\left[(x+2)-\sqrt{3x+4}\right]+3\left[(x+3)-\sqrt{5x+9}\right]=0$$

$$\Longleftrightarrow (x^2+x)\left[1+\frac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\frac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}}\right]=0$$

$$\Longleftrightarrow x^2+x=0 \quad \text{(Biểu thức trong ngoặc vuông lớn hơn 0)}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \quad \text{(thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(0;-1),(-1;-2)$

Bài 3

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(a+b+c)\geq 2\sqrt{3}.$$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh:

$$-a+\frac{1}{a}\geq -2\sqrt{3}a^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}, \quad (0<a<1) \tag{56}$$

Dấu bằng khi $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Thật vậy $\quad (56) \iff \left(\sqrt{3}a-1\right)^2\left(2a+\sqrt{3}\right)\geq 0 \quad$ (Luôn đúng với mọi $0<a<1$)

Dấu bằng khi $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Tương tự

$$-b+\frac{1}{b}\geq -2\sqrt{3}b^2+\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (0<b<1) \tag{57}$$

Dấu bằng khi $b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$-c+\frac{1}{c}\geq -2\sqrt{3}c^2+\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (0<c<1) \tag{58}$$

Dấu bằng khi $c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
Từ (56), (57), (58) ta có

$$-(a+b+c)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq -2\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)+3.\frac{4\sqrt{3}}{3}$$
$$\iff \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(a+b+c)\geq 2\sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

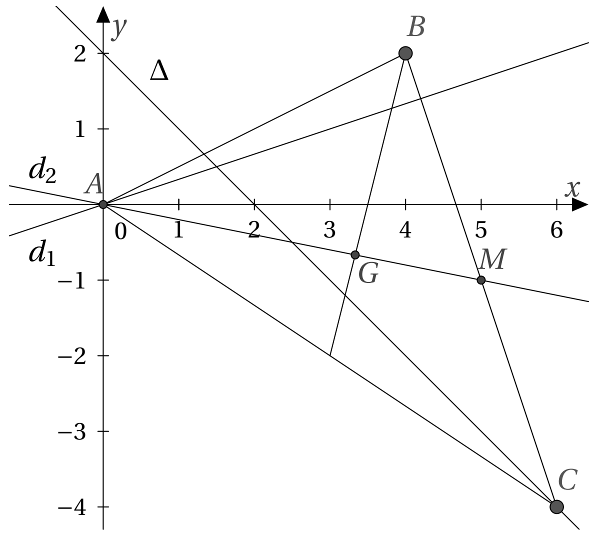
Chú ý: Để tìm ra vế phải của (1) ta sử dụng phương pháp tiếp tuyến.

35 THPT Hồng Quang (Hải Dương)

Bài 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A lần lượt có phương trình là $x-3y=0$ và $x+5y=0$. Đỉnh C nằm trên đường thawgnr $\Delta: x+y-2=0$ và có hoành độ dương. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ C đi qua điểm $E(-2,6)$.

Lời giải



Gọi $d_1: x-3y=0;\quad d_2: x+5y=0$
Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-3y=0 \\ x+5y=0 \end{cases} \iff x=y=0 \implies A(0;0)$$

$C \in \Delta$ nên $C(c;2-c)$
$BC \perp d_1$ nên $BC: 3x+y+m=0$.
Vì $C \in \Delta$ nên:

$$3c+2-c+m=0 \iff m=-2c-2$$

$\implies BC: 3x+y-2c-2=0$.
Gọi M là trung điểm BC. Tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+5y=0 \\ 3x+y-2c-2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{5c+5}{7} \\ y=-\dfrac{c+1}{7} \end{cases} \implies M\left(\dfrac{5c+5}{7};-\dfrac{c+1}{7}\right)$$

Gọi G là trọng tâm tam giác ta có

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \iff \begin{cases} x_G=\dfrac{10c+10}{21} \\ y_G=\dfrac{-2c-2}{21} \end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{EC}=(c+2;-4-c);\overrightarrow{EG}=\left(\dfrac{10c+52}{21};\dfrac{-2c-128}{21}\right)$

Do $E;G;C$ thẳng hàng nên

$$\frac{\frac{10c+52}{21}}{c+2}=\frac{\frac{-2c-128}{21}}{-c-4} \implies c=6$$

Vậy $C(6;-4); M(5;-1); B(4;2)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{y}{x+1}-\dfrac{1+y}{y} & (a) \\ \sqrt{8y+9}=(x+1)\sqrt{y}+2 & (b) \end{cases}.$$

Lời giải

ĐK: $x \neq -1, y > 0$
Ta có:

$$\begin{aligned} & x-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{y}{x+1}-\frac{1+y}{y} \\ \iff & x+\frac{1+y}{y}=\frac{y}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2} \\ \iff & \frac{xy+y+1}{y}-\frac{xy+y+1}{(x+1)^2}=0 \\ \iff & \left[\begin{array}{l} xy+y+1=0 \\ y=(x+1)^2 \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $y=(x+1)^2$, thay vào PT (b) ta có:
$$\sqrt{8(x+1)^2+9}=(x+1)|x+1|+2$$

  – Xét $x>-1$, đặt $t=x+1,(t>0)$. Ta có phương trình:
$$\begin{aligned}&\sqrt{8t^2+9}=t^2+2\\ \Longleftrightarrow\ & t^4-4t^2-5=0\\ \Longleftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}t^2=-1\\ t^2=5\end{array}\right.\\ \Longleftrightarrow\ & t=\sqrt{5}\quad (t>0)\\ \Longrightarrow\ & x=-1+\sqrt{5}\end{aligned}$$

  – Xét $x<-1$, đặt $t=x+1,(t<0)$. Ta có phương trình
$$\sqrt{8t^2+9}=-t^2+2 \Longleftrightarrow \begin{cases}t^4-12t^2-5=0\\ t^2\le 2\end{cases}$$
  Hệ vô nghiệm

- Với $xy+y+1=0$, thay vào PT (b) có:
$$\sqrt{8y+9}+\frac{1}{y}\sqrt{y}-2=0$$
  Vì $y>0$ nên $\sqrt{8y+9}>3$. Phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases}x=-1+\sqrt{5}\\ y=5\end{cases}$.

Bài 3

Cho các số dương x,y,z thỏa mãn $x>y$ và $(x+z)(y+z)=1$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{4}{(x+z)^2}+\dfrac{4}{(y+z)^2}$.

Lời giải

Đặt $x+z=a$. Từ giả thiết ta có $y+z=\dfrac{1}{a}$.
Mặt khác:
$$x>y \Longrightarrow x+z>y+z \Longrightarrow a>1$$
Ta có:
$$x-y=x+z-(y+z)=a-\frac{1}{a}=\frac{a^2-1}{a}$$
$$P=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}+\frac{4}{a^2}+4a^2=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}+3a^2+a^2+\frac{4}{a^2}\ge\frac{a^2}{(a^2-1)^2}+3a^2+4\qquad\text{(Cauchy)}$$
Đặt $t=a^2>1$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{(t-1)^2}+3t+4$ với $t>1$
Ta có:
$$f'(t)=\frac{-t-1}{(t-1)^3}+3;\qquad f'(t)=0\Longleftrightarrow t=2$$
Bảng biến thiên

t	1		2		$+\infty$
$f'(t)$	||	$-$	0	$+$	
$f(t)$	|| $+\infty$	↘	12	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên có $f(t) \geq 12, \forall t > 1$.

Do đó $P \geq 12$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} x + z = \sqrt{2} \\ y + z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$. Chẳng hạn $\begin{cases} x = 1 \\ z = \sqrt{2} - 1 \\ y = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

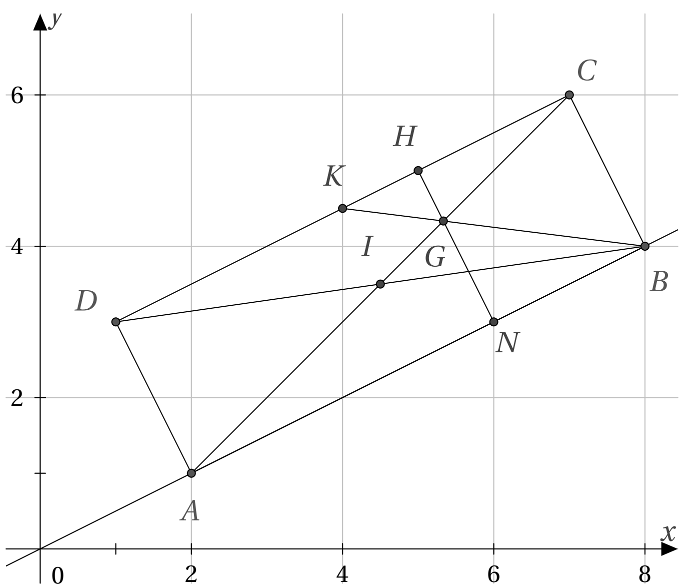
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 12.

36 THPT Lương Thế Vinh (Hà Nội)

Bài 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 15. Đường thẳng AB có phương trình $x - 2y = 0$. Trọng tâm của tam giác BCD là điểm $G\left(\dfrac{16}{3}; \dfrac{13}{3}\right)$. Tìm tọa độ bốn đỉnh của hình chữ nhật biết điểm B có tung độ lớn hơn 3.

Hướng dẫn



Ta có
$$d(G, AB) = \frac{10}{3\sqrt{5}} \implies BC = \sqrt{5} \implies AB = 3\sqrt{5}$$
Đường thẳng d qua G và vuông góc với AB nên $d: 2x + y - 15 = 0$
Gọi $N = d \cap AB$, ta có $N(6;3)$. Suy ra:
$$NB = \frac{1}{3}AB = \sqrt{5}$$
Gỉa sử $B(2b; b) \in AB$. Khi đó:
$$NB^2 = 5 \implies b = 4 \implies B(8;4)$$
Ta có
$$\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{BN} \implies A(2;1)$$
$$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \implies C(7;6)$$
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \implies D(1;3).$$

Bài 2

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^3-3+2\sqrt{y^2+3y}=2x\sqrt{y}+y & (a)\\ x^2-\sqrt{y+3}+\sqrt{y}=0 & (b)\end{cases}.$$

Lời giải

ĐK: $y \geq 0$
Ta có:

$$\begin{aligned}(a) &\iff 2x^3-2x\sqrt{y}+y=\left(\sqrt{y+3}-\sqrt{y}\right)^2=x^4 \quad (\text{Do } (b))\\ &\iff \left(x^2-2x+\sqrt{y}\right)\left(x^2-\sqrt{y}\right)=0\end{aligned}$$

- Với $\sqrt{y}=x^2$, ta có:

$$\begin{aligned}(2) &\iff \sqrt{x^2+3}=2x^2\\ &\iff 4x^4-x^2-3=0\\ &\iff x=\pm 1\end{aligned}$$

  Từ đó ta có các nghiệm $(1;1),(-1;1)$.

- Với $\sqrt{y}=2x-x^2$, ta có $x\in[0;2]$. Khi đó

$$\begin{aligned}(b) &\iff \sqrt{3+(2x-x^2)^2}=2x\\ &\iff \begin{cases} x\geq 0\\ x^4-4x^3+3=0\end{cases}\\ &\iff \left[\begin{array}{l} x=1\\ x^2(x-3)-3x-3=0 \quad (c)\end{array}\right.\end{aligned}$$

  Từ $0\leq x\leq 2$ ta có (c) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;1),(-1;1)$

Bài 3

Cho các số thực a,b không âm và thỏa mãn: $3(a+b)+2(ab+1)\geq 5(a^2+b^2)$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$T=3\sqrt{a+b}-3(a^2+b^2)+2(a+b)-ab.$$

Hướng dẫn

Từ giả thiết ta có:
$$3(a+b)+2\geq 2(a+b)^2+3(a-b)^2\geq 2(a+b)^2,\quad \forall a,b$$
Đặt $t=a+b\geq 0 \implies 0\leq t\leq 2$
Ta có:
$$T=ab+3\sqrt{a+b}-2(a^2+b^2)+1-(a+b-1)^2\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+3\sqrt{a+b}-(a+b)^2+1$$

Suy ra:

$$T \le -\frac{3}{4}t^2 + 3\sqrt{t} + 1 = f(t), \quad t \in [0;2]$$

Ta có:

$$f'(t) = -\frac{3}{2}.\frac{t\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}; \qquad f'(t) = 0 \iff t = 1$$

$$f(0) = 1; \quad f(1) = \frac{13}{4}; \quad f(2) = 3\sqrt{2} - 2$$

Từ đó:

$$\max T = \frac{13}{4} \iff t = 1 \iff a = b = \frac{1}{2}.$$

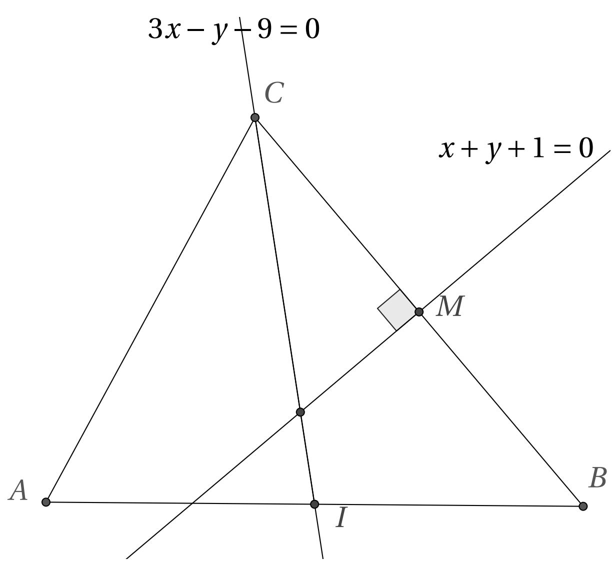
37 THPT Thường Xuân 3 (Thanh Hóa)

Bài 1

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;-4)$. Phương trình đường trung trực cạnh BC, đường trung tuyến xuất phát từ C lần lượt là $x + y - 1 = 0$ và $3x - y - 9 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác ABC.
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ và đường thẳng (Δ) có phương trình: $2x - 3y - 1 = 0$. Chứng minh rằng (Δ) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm tọa độ điểm M trên đường tròn (C) sao cho diện tích tam giác ABM lớn nhất.

Hướng dẫn

1.



Gọi $C(c; 3c-9$ và M là trung điểm BC. Khi đó $M(m; 1-m)$ và $B(2m-c; 11-2m-3c)$.
Gọi I là trung điểm AB ta có $I\left(\frac{2m-c+3}{2}; \frac{7-2m-3c}{2}\right)$
Vì I nằm trên đường thẳng $3x - y - 9 = 0$ nên $m = 2$. Vậy $M(2;-1)$
Do đó $BC: x - y - 3 = 0$.

2.

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R = \sqrt{13}$.

$$d(I,\Delta) = \frac{9}{\sqrt{13}} < R$$

Vậy (Δ) cắt (C) tại 2 điểm $A;B$ phân biệt.
Gọi M nằm trên (C) ta có:

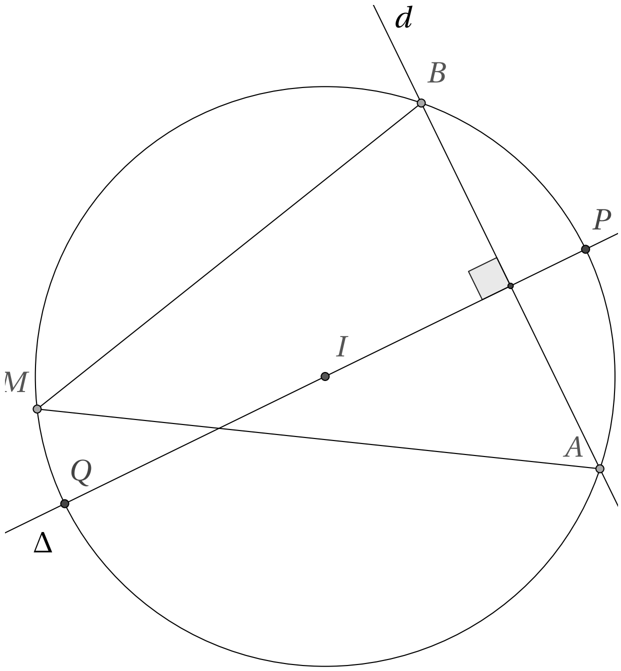
$$S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.d(M;\Delta)$$

S_{ABM} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $d(M;\Delta)$ lớn nhất.
Gọi d đi qua I và vuông góc (Δ).Khi đó:

$$(d): 3x+2y-1=0$$

Gọi P,Q là giao điểm của (d) và (C), tọa độ $P;Q$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-4y-8=0 \\ 3x+2y-1=0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x=1, y=-1 \\ x=-3, y=5 \end{array}\right.$$



Suy ra $P(1;-1); Q(-3;5)$.
Ta có:

$$d(P,\Delta) = \frac{4}{\sqrt{13}}; \quad d(Q,\Delta) = \frac{22}{\sqrt{13}}$$

$d(M,\Delta)$ lớn nhất khi và chỉ khi M trùng Q. Vậy $M(-3;5)$.

Bài 2

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2} \geq 5 & (a) \\ x^4+8x^2+16mx+16m^2+32m+16=0 & (b) \end{cases}.$$

Hướng dẫn

Với $x \neq -2$, ta có:

$$\begin{aligned}(a) &\iff \left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2+\frac{4x^2}{x+2}-5 \geq 0 \\ &\iff \left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+4.\frac{x^2}{x+2}-5 \geq 0 \\ &\implies \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ -2 \neq x \leq -1 \end{array}\right.\end{aligned}$$

Giả sử x_0 là nghiệm của (b)
Khi đó phương trình sau đây (ẩn m) phải có nghiệm.

$$16m^2+16(x_0+2)m+x_0^4+8x_0^2+16=0$$

Điều này tương đương với:

$$\Delta' \geq 0 \iff 0 \leq x_0 \leq 2$$

Do đó hệ có nghiệm khi (b) có nghiệm $x=2$
Thay $x=2$ ta có $m=-2$
Thử lại, ta thấy $m=-2$ là nghiệm của bài toán.

Bài 3

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{\sqrt{5-4x}-\sqrt{1+a}}{\sqrt{5-4a}+2\sqrt{1+a}+6}$$
trong đó a là tham số thực và $-1\le a\le\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn

Đặt $A=\sqrt{5-4a};B=\sqrt{1+a}$ thì $A^2+4B^2=0;A,B\ge 0$

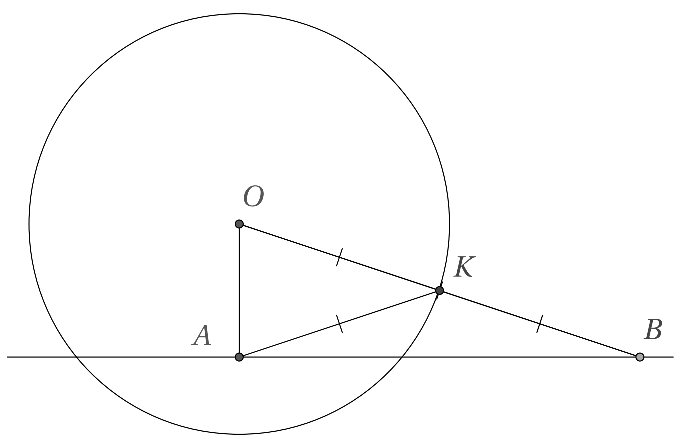
Do đó tồn tại $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $A=3\sin x;2B=3\cos x$. Khi đó
$$P=\frac{3\sin x-\frac{3}{2}\cos x}{3\sin x+3\cos x+6}=\frac{2\sin x-\cos x}{2\sin x+2\cos x+4}=f(x)$$
Ta có $f'(x)>0$ nên hàm đồng biến trên đoạn $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Do đó
$$\min f(x)=f(0)=-\frac{1}{6};\quad \max f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}$$
Vậy
$$\min P=-\frac{1}{6}\iff a=\frac{5}{4},\ maxP=\frac{1}{3}\iff a=-1$$

38 THPT Tĩnh Gia II (Thanh Hóa)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2=5$ tâm O, đường thẳng $(d):3x-y-2=0$. Tìm tọa độ các điểm A,B trên (d) sao cho $OA=\frac{\sqrt{10}}{5}$ và đoạn OB cắt (C) tại K sao cho $KA=KB$.

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.
Ta có:
$$d(O;d)=\frac{\sqrt{10}}{5}=OA\implies OA\perp(d)$$
Vectơ chỉ phương của (d) là $\overrightarrow{u}_d=(1;3)$. Giả sử $A(t;3t-2)\in(d)$. Khi đó $\overrightarrow{OA}=(t;3t-2)$.
$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{u}_d=0\iff t=\frac{3}{5}\implies A\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$$
Ta có $KA=KB=OK$.

Suy ra K là trung điểm OB. Do đó $OB=2OK=2\sqrt{5}$
Vì $B\in(d)$ nên $B(b;3b-2)$. Khi đó:
$$OB^2=20\implies\left[\begin{array}{l}b=2\\ b=-\frac{4}{5}\end{array}\right.$$
Vậy $B(2;4)$ hoặc $B\left(-\frac{4}{5};-\frac{22}{5}\right)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{y^2-2y+5}=y-3x-3 & (a) \\ y^2-3y+3=x^2-x & (b) \end{cases}.$$

Hướng dẫn

Ta có:
$$(b) \iff y-3x-3=y^2-x^2-2y-2x$$
Thay vào PT (a) ta có:
$$\sqrt{(x+1)^2+}-\sqrt{(y-1)^2+4}=y^2-x^2-2y-2x \quad (59)$$
$$\iff \sqrt{(x+1)^2+4}+(x+1)^2=\sqrt{(y-1)^2+4}+(y-1)^2 \quad (60)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+4}+t$ trên $[0;+\infty)$, ta có:
$$f'(t)>0, \quad \forall t\geq 0$$
Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$
Vậy
$$(60) \iff (x+1)^2=(y-1)^2 \iff \left[\begin{array}{l} x=y-2 \\ x=-y \end{array}\right.$$
Đáp án: $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$.

Bài 3

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:
$$\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b}\geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}.$$

Hướng dẫn

BĐT cần chứng minh tương đương với
$$\frac{1+\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}}{\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}}+\frac{1+\sqrt{\frac{b}{a+b+c}}}{\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}}+\frac{1+\sqrt{\frac{c}{a+b+c}}}{\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}}\geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2}$$
Đặt $x=\frac{a}{a+b+c};y=\frac{b}{a+b+c};z=\frac{c}{a+b+c}$ ta có $x,y,z>0$ và $x+y+z=1$
Ta thu được:
$$\frac{1+\sqrt{x}}{1-x}+\frac{1+\sqrt{y}}{1-y}+\frac{1+\sqrt{z}}{1-z}\geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2}$$
Ta có:
$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\geq \frac{9}{3-x-y-z}=\frac{9}{2}$$
Ta chứng minh rằng:
$$\frac{\sqrt{x}}{1-x}+\frac{\sqrt{y}}{1-y}+\frac{\sqrt{z}}{1-z}\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x}(1-x)$ với $0 < x < 1$ ta có $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{3}$.

Do đó:

$$0 < f(x) < \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{3}$.

Vậy ta có:

$$\frac{\sqrt{x}}{1-x} = \frac{x}{(1-x)\sqrt{x}} \geq \frac{3\sqrt{3}x}{2}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{\sqrt{x}}{1-x} + \frac{\sqrt{y}}{1-y} + \frac{\sqrt{z}}{1-z} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

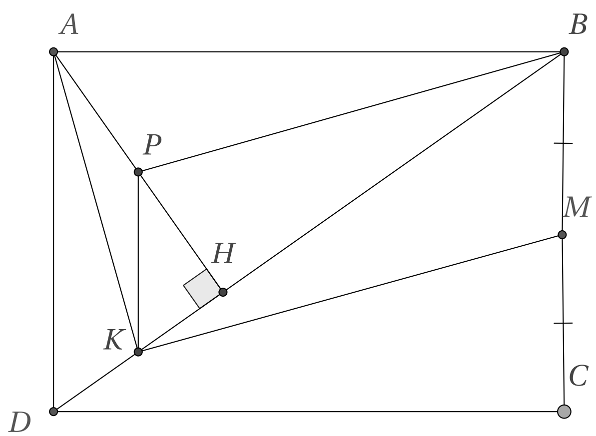
Ta có đpcm, dấu bằng khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

39 THPT Triệu Sơn 3 (Thanh Hóa)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $H(1;2)$ là hình chiếu vuông góc của A lên BD. Điểm $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ là trung điểm của cạnh BC, phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của ΔADH là $d: 4x + y - 4 = 0$. Viết phương trình cạnh BC.

Hướng dẫn



Gọi K là trung điểm HD, P là trung điểm AH.

Ta có P là trực tâm tam giác ABK nên $BP \perp AK$.

$\Longrightarrow AK \perp KM$

Từ giả thiết, ta có: $(KM): x - 4y + \frac{15}{2} = 0$.

Suy ra $K\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Do K là trung điểm HD nên $D(0;2)$ suy ra:

$$(BD): y - 2 = 0, \quad (AH): x - 1 = 0$$

$A(1;0)$, $AD: 2x + y - 2 = 0$. BC qua M và song song AD nên $BC: 2x + y - 12 = 0$.

Bài 2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+y} + y = \sqrt{x^4+x^3} + x & (a) \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{x-1} + \sqrt{y(x-1)} = \frac{9}{2} & (b) \end{cases}.$$

Hướng dẫn

ĐK: $x \geq 1, y \geq 0$

Thực hiện nhân liên hợp ta có

$$\begin{aligned}(a) &\Longleftrightarrow (x-y)\left(\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}-x\right)=0\\ &\Longleftrightarrow x=y\end{aligned}$$

Thay vào (b) ta có:

$$x+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x(x-1)}=\frac{9}{2}$$

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}, t\geq 0$, phương trình trở thành

$$\begin{aligned}& t^2+1+2t=9\\ \Longleftrightarrow\ & t=2\\ \Longleftrightarrow\ & \sqrt{x}+\sqrt{x-1}=2\\ \Longleftrightarrow\ & 2\sqrt{x(x-1)}=5-2x\\ \Longleftrightarrow\ & \begin{cases} x\leq \dfrac{5}{2}\\ 4x^2-4x=25-20x+4x^2\end{cases}\\ \Longleftrightarrow\ & x=\frac{25}{16}\end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{25}{16};\frac{25}{16}\right)$.

Bài 3

Cho a,b,c thuộc khoảng $(0;1)$ thỏa mãn $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)=1$. Tìm GTNN của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

Hướng dẫn

Từ giả thiết suy ra:

$$ab+bc+ca=a+b+c-1+2abc$$

Ta có:

$$\begin{aligned}P&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\ &=(a+b+c)^2-2(a+b+c-1)-4abc\\ &\geq t^2-2t+2-\frac{4}{27}t^3 \quad (\text{với } t=a+b+c, 0<t<3)\end{aligned}$$

Khảo sát hàm số $f(t)=t^2-2t+2-\frac{4}{27}t^3$ trên $(0;3)$.

Đáp án: $\min P=\frac{3}{4}$ khi $t=\frac{3}{2}$ hay $a=b=c=\frac{1}{2}$.

40 Trung tâm dạy thêm văn hóa - THPT Chuyên Lê Hồng Phong (TP. HCM)

Bài 1

Trong mặt phẳng Oxy cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $CD = 3AB$, $C(-3;-3)$, trung điểm của AD là $M(3;1)$. Tìm tọa độ đỉnh B biết $S_{BCD} = 18$, $AB = \sqrt{10}$ và đỉnh D có hoành độ nguyên dương.

Bài toán này giống bài toán 1 của đề 11.

Bài 2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y\sqrt{2-x} + 2y^2 = 2 & (a) \\ 2\left(\sqrt{x+2} - 4y\right) + 8\sqrt{y}\sqrt{xy+2y} = 34 - 15x & (b) \end{cases}.$$

Hướng dẫn

ĐK: $-2 \le x \le 2; y \ge 0$.

$$(a) \iff (2-x) + \sqrt{2-x}.y - 2y^2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{2-x} = y \\ \sqrt{2-x} = -2y \end{array}\right.$$

+ Với $\sqrt{2-x} = y$, thay vào (b) ta có

$$2\left(\sqrt{x+2} - 4\sqrt{2-x}\right) + 8\sqrt{4-x^2} = 34 - 15x$$

Đặt $t = \sqrt{x+2} - 4\sqrt{2-x}$, phương trình trở thành:

$$2t = t^2 \iff \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2} = 4\sqrt{2-x} \\ \sqrt{x+2} = 4\sqrt{2-x} + 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{30}{17} \implies y = \dfrac{2\sqrt{17}}{17} \\ x = 2 \implies y = 0 \end{array}\right.$$

+ Với $\sqrt{2-x} = -2y \ge 0 \implies y \le 0$, mà $y \ge 0 \implies y = 0 \implies x = 2$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x;y) = (2;0), \left(\dfrac{30}{17}; \dfrac{2\sqrt{17}}{17}\right)$.

Bài 3

Cho x, y là các số không âm thỏa $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của:

$$P = 5(x^5 + y^5) + x^2y^2\left(5\sqrt{2xy+2} - 4xy + 12\right).$$

Hướng dẫn

Với $0 \le x, y \le \sqrt{2}$, ta có:

$$\begin{cases} x^2(x-\sqrt{2}) \le 0 \\ y^2(y-\sqrt{2}) \le 0 \end{cases} \Longrightarrow x^3+y^3 \le 2\sqrt{2}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} &(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) = 4 \\ \Longrightarrow\ & x+y \le 2 \\ \Longrightarrow\ & 2(x^3+y^3) \ge (x+y)(x^3+y^3) \ge (x^2+y^2)^2 = 4 \\ \Longrightarrow\ & x^3+y^3 \ge 2 \end{aligned}$$

Đặt $t = x^3+y^3$, $t \in [2; 2\sqrt{2}]$. Ta có:

$$2^3 = (x^2+y^2)^3 = (x^3+y^3)^2 - 2x^3y^3 + 6x^2y^2$$

$\Longrightarrow\ 2x^3y^3 - 6x^2y^2 = t^2 - 8.$

$$2(x^3+y^3) = (x^3+y^3)(x^2+y^2) = x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$$

$\Longrightarrow\ x^5+y^5+x^2y^2(x+y) = 2t.$

Vậy

$$\begin{aligned} P &= -4x^3y^3 + 12x^2y^2 + 5(x^5+y^5) + 5x^2y^2\sqrt{2+2xy} \\ &= -2t^2 + 10t + 16 = f(t) \end{aligned}$$

Ta có:

$$f'(t) = -4t + 10 = 0 \iff t = \frac{5}{2} \quad \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy:

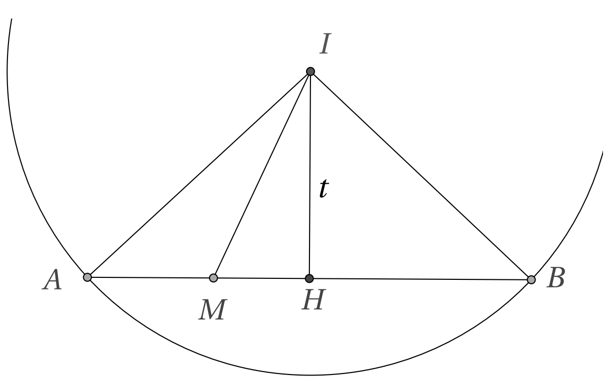
$$\min P = f(2) = 28; \quad \max P = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{57}{2}.$$

41 THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 2

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-4=0$ tâm I và điểm $M(3;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Lời giải



(C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$. Ta có $IM = 2 < R$ nên M nằm trong đường tròn (C).
Gọi H là hình chiếu của I trên AB và đặt $IH = t, 0 < t \le 2$.

$$S_{IAB} = \frac{1}{2}IH.AB = t\sqrt{9-t^2}.$$

Xét hàm số:

$$f(x) = t\sqrt{9-t^2}; 0 < t \le 2$$

Ta có $f'(t) > 0, \forall t \in (0;2]$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0;2]$.

Do đó:

$$f(t) \le f(2), \quad \forall t \in (0;2]$$

Vậy S_{IAB} lớn nhất khi $t=2$ hay H trùng M.
Khi đó Δ nhận $\overrightarrow{IM}$ làm vectơ pháp tuyến nên $\Delta: x-3=0$.

Bài 2

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4-2x=y^4-y & (a)\\ (x^2-y^2)^3=3 & (b)\end{cases}.$$

Hướng dẫn

Đặt $x+y=a; x-y=b, 3=c^3$, từ (b) ta có $ab=c$
Mặt khác:
$$\begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2}\\ y=\dfrac{a-b}{2}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^4-y^4=\dfrac{ab}{2}(a^2+b^2)\\ (2x-y)=a+b-\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{a+3b}{2}=\dfrac{a+bc^3}{2}\end{cases}$$
Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} c(a^2+b^2)=a+bc^3\\ ab=c\end{cases}$$
$$\Longrightarrow ca^4+c^3=a^3+ac^4$$
$$\Longleftrightarrow (ca-1)(a^3-c^3)=0$$
$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{c}\\ a=c\end{array}\right.$$

\+ Nếu $a=c \Longrightarrow b=1$ thì
$$x=\frac{c+1}{2}=\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2};\quad y=\frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$$
\+ Nếu $a=\dfrac{1}{c} \Longrightarrow b=c^2$ thì
$$x=\frac{2}{\sqrt[3]{3}},\quad y=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$
Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2};\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\right);\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}};-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

Bài 3

Cho các số a,b,c không âm sao cho tổng hai số bất kì đều dương. Chứng minh rằng:
$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}\ge 6.$$

Hướng dẫn

Giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó:
$$\sqrt{\frac{ab}{a+c}}+\sqrt{\frac{ac}{a+b}}\ge\sqrt{\frac{b.b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c.c}{c+b}}=\sqrt{b+c}$$
Suy ra:
$$\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge\sqrt{\frac{b+c}{a}}$$

Đặt $t = b + c$ thì
$$VT \geq \sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t}$$
Ta có
$$\sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t} = \frac{a+t}{\sqrt{at}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t} \geq 6 \quad \text{(AM-GM)}$$
Do đó $VT \geq 6$ (đpcm)

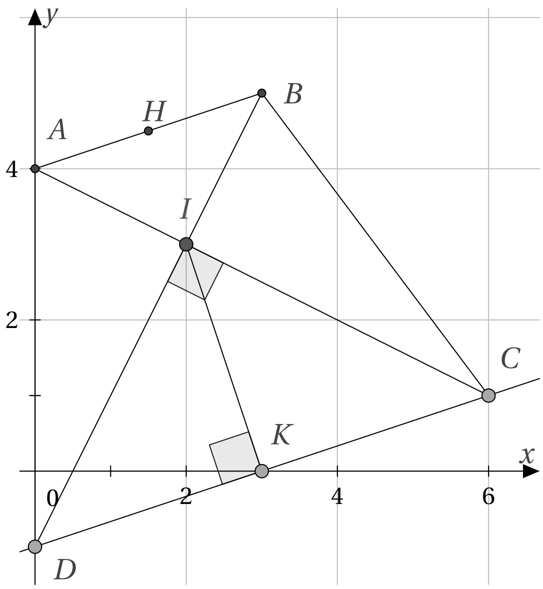
Đẳng thức xảy ra khi $a + t = 3\sqrt{at}$. Chẳng hạn $(a;b;c) = \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2};1;0\right)$

42 THPT Đồng Lộc (Hà Tĩnh)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ có diện tích bằng $\frac{45}{2}$, đáy lớn CD nằm trên đường thẳng $x - 3y - 3 = 0$. Biết hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại $I(2;3)$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC, biết điểm C có hoành độ dương.

Lời giải



Từ giả thiết ta có tam giác ICD vuông cân tại I.
Đường thẳng qua I và vuông góc với CD có phương trình: $3x + y - 9 = 0$.
Gọi K là trung điểm CD, tọa độ K thỏa mãn
$$\begin{cases} x - 3y - 3 = 0 \\ 3x + y - 9 = 0 \end{cases} \Longrightarrow K(3;0).$$
Mà $KI = KC = KD$ nên C, D là giao điểm của CD và đường tròn tâm K bán kính $KI = \sqrt{10}$, do đó tọa độ của chúng thỏa mãn
$$\begin{cases} x - 3y - 3 = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Longrightarrow C(6;1)$$
(do C có hoành độ dương).
Suy ra $D(0;-1)$.
Gọi H là trung điểm AB, có:
$$\frac{45}{2} = \frac{1}{2}(AB + CD).HK = (IH + \sqrt{10})^2 \Longrightarrow IH = \frac{\sqrt{10}}{2}$$
Mà
$$\overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{IB} \Longrightarrow B(3;5) \Longrightarrow \overrightarrow{BC} = (3;-4)$$
Vậy $BC: 4x + 3y - 27 = 0$.

Bài 2

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^3 + 6y^2 + 16y - 3x + 11 = 0 & (a) \\ x^3 + 3x^2 + x + 3y + 3 = 0 & (b) \end{cases}.$$

Hướng dẫn

Ta có:
$$\text{HPT} \iff \begin{cases} (y+2)^3 + 4y - 3x + 3 = 0 \\ (x+1)^3 + 3y - 2x + 2 = 0 \end{cases}$$
Đặt $\begin{cases} a = y+2 \\ b = x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = a-2 \\ x = b-1 \end{cases}$, thay vào hệ ta có
$$\begin{cases} a^3 + 4a - 3b = 2 \\ b^3 + 3a - 2b = 2 \end{cases}$$
Trừ theo vế ta được:
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0 \iff a = b$$
Thay $a = b$ vào (a) ta có:
$$a^3 + a - 2 = 0$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} a = 1 \implies b = 1 \\ a^2 + a + 2 = 0 \quad \text{(vô nghiệm)} \end{array} \right.$$
Khi đó $x = 0; y = -1$

Vậy $x = 0; y = -1$.

Bài 3

Cho $0 < a, b, c < \frac{1}{2}$ thỏa mãn $a + 2b + 3c = 2$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a(4b+6c-3)} + \frac{2}{b(3c+a-1)} + \frac{9}{c(2a+4b-1)} \geq 54.$$

Hướng dẫn

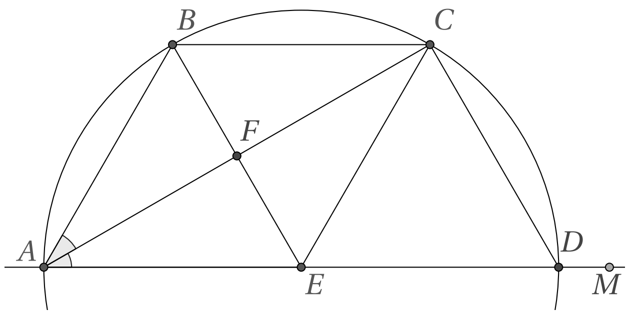
Bổ đề: Với $x > 0$, Ta có
$$x^2(1-2x) \leq \frac{1}{27}$$
Chứng minh. Thật vậy, ta có:
$$x^2(1-2x) = x.x.(1-2x) \leq \left(\frac{x + x + 1 - 2x}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \quad (AM-GM)$$
Quay lại bài toán:
$$A = \frac{1}{a(1-2a)} + \frac{2}{b(1-2b)} + \frac{9}{c(3-6c)}$$
$$= \frac{a}{a^2(1-2a)} + \frac{2b}{b^2(1-2b)} + \frac{3c}{c^2(1-2c)}$$
Áp dụng bổ đề trên ta có
$$A \geq 27a + 27.2b + 27.3c = 54$$
Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

43 THPT Hậu Lộc 2 (Thanh Hóa)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy AD, BC. Biết $AB = BC, AD = 7$. Đường chéo AC có phương trình $x - 3y - 3 = 0$; điểm $M(-2;-5)$ thuộc đường thẳng AD. Viết phương trình đường thẳng CD, biết đỉnh $B(1;1)$.

Hướng dẫn



Dễ thấy $ABCD$ là hình thang nội tiếp đường tròn.
Do $AB = BC = CD$ nên AC là phân giác trong của $\widehat{BAD}$
Gọi E đối xứng B qua AC suy ra $E \in AD$.
Đường thẳng BE có phương trình: $3x + y - 4 = 0$.
Vì $F = AC \cap BE$ nên $F\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$. Suy ra $E(2;-2)$.

Đường thẳng $AD : 3x - 4y - 14 = 0$.
Vì $A = AD \cap AC$ nên $A(6;1)$.
Giả sử $D(2 + 4t; -2 + 3t)$, Khi đó:

$$AD = 7 \implies \left[\begin{array}{l} D_1\left(\dfrac{58}{5};\dfrac{26}{5}\right) \\ D_2\left(\dfrac{2}{5};-\dfrac{16}{5}\right) \end{array}\right.$$

Kiểm tra tính tương đối ta có D_2 thỏa mãn.
Vì $BC||AD$ nên $BC : 3x - 4y + 1 = 0$.

$$C = BC \cap AC \implies C(-3;-2).$$

Tuy nhiên $AB = 5; CD = \sqrt{13}$ (mâu thuẫn với giả thiết $ABCD$ là hình thang cân).
Bài toán vô nghiệm.

Bài 2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 2\left(1 + \dfrac{1-y^2}{x}\right) & (a) \\ 4y^2 = (y^2 - x^3 + 3x - 2)\left(\sqrt{2 - x^2} + 1\right) & (b) \end{cases}.$$

Hướng dẫn

ĐK: $x \neq 0, -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$
Ta có:

$$\begin{aligned} (a) &\iff x(x+1)^2 + xy^2 = 2(x + 1 - y^2) \\ &\iff (x+2)(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ &\iff \left[\begin{array}{ll} x = -2 & \text{(Loại)} \\ x^2 + y^2 = 1 & \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $x^2+y^2=1 \iff x^2=1-y^2$, thay vào (b) ta có:

$$\begin{aligned}
&4y^2=(y^2-x^3+3x-2)\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)\\
\iff &4\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)=(y^2-x^3+3x-2)\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)\\
\iff &x^3-3x-2=y^2-4\sqrt{y^2+1}
\end{aligned}$$

Mặt khác:

$$x^2+y^2=1 \implies \begin{cases} -1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1\end{cases}$$

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x-2$ trên đoạn $[-1;1]$. Ta có:

$$f'(x)=3x^2-3=0 \iff x=\pm 1$$

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(-1)=0; f(1)=-4$ nên

$$\min f(x)=-4; \quad \max f(x)=0$$

Xét hàm số $g(y)=y^2-4\sqrt{y^2+1}$ trên đoạn $[-1;1]$, ta được

$$\min g(y)=1-4\sqrt{2}, \quad \max g(y)=-4$$

Do đó:

$$f(x)=g(y)=-4 \iff \begin{cases} x=1\\ y=0\end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;0)$.

Bài 3

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $xy\ge 1, z\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}+\frac{z^3+2}{3(xy+1)}$$

Hướng dẫn

Bổ đề: Với $x,y>0$ thỏa mãn $xy\ge 1$ ta có

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\ge\frac{2}{1+\sqrt{xy}} \tag{61}$$

Chứng minh.
Biến đổi tương đương ta được:

$$(61) \iff (\sqrt{xy}-1)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\ge 0$$

BĐT luôn đúng do $xy\ge 1$ (đpcm)

Quay lại bài toán, theo BĐT AM-GM ta có

$$z^3+2=z^3+1+1\ge 3z\ge 3$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
P&\ge\frac{x}{y+1}+1+\frac{y}{x+1}+1+\frac{1}{xy+1}-2\\
&=(x+y+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)+\frac{1}{xy+1}-2\\
&\ge(2\sqrt{xy}+1).\frac{2}{1+\sqrt{xy}}+\frac{1}{xy+1}-2
\end{aligned}$$

Đặt $t=\sqrt{xy}, t\ge 1$ ta có:

$$P\ge (2t+1).\frac{2}{t+1}+\frac{1}{t^2+1}-2=\frac{2t}{t+1}+\frac{1}{t^2+1}=P(t)$$

Ta có

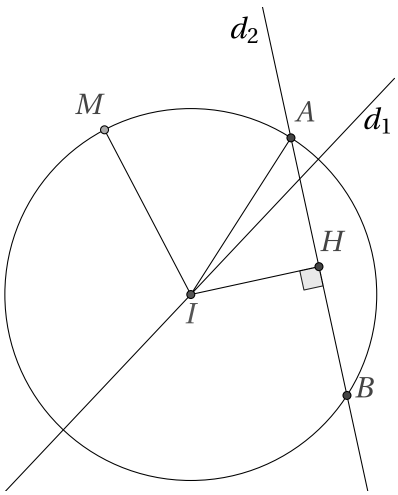
$$P'(t)\ge 0,\quad \forall t\ge 1 \Longrightarrow P(t)\ge P(1)=\frac{3}{2},\quad \forall t\ge 1$$

Vậy $\min P=\frac{3}{2} \iff x=y=z=1.$

44 Đề 44

Bài 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(0;2)$ và hai đường thẳng $d_1: x+2y=0$, $d_2: 4x+3y=0$. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm M có tâm thuộc đường thẳng d_1 và cắt d_2 tại hai điểm A,B sao cho độ dài đoạn AB bằng $4\sqrt{3}$. Biết tâm đường tròn có tung độ dương.



Hướng dẫn

Gọi $I(-2t;t)\in d_1$ là tâm đường tròn $(t>0)$, ta có $d_{(I,d_2)}=|t|$ và:

$$IM^2=4t^2+(2-t)^2$$

Gọi H là trung điểm của đoạn AB. Ta có:

$$\begin{aligned}IH^2+AH^2=IA^2 &\iff IH^2+AH^2=IM^2\\ &\iff t^2-t-2=0\\ &\iff \left[\begin{array}{ll} t=2 & \text{(thỏa mãn)}\\ t=-1 & \text{(loại)}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Do đó phương trình đường tròn cần tìm là:

$$(x+4)^2+(y-2)^2=16$$

Bài 2

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+12y^2+x+2=8y^3+8y & (a)\\ \sqrt{x^2+8y^3}=5x-2y & (b)\end{cases}$$

Hướng dẫn

Điều kiện: $x^2+8y^3\ge 0$

Xét phương trình (a) ta có:

$$\begin{aligned}&x^3+12y^2+x+2=8y^3+8y\\ \iff & x^3+x+1=(2y-1)^3+2y-1+1\\ \iff & x=2y-1 \quad \text{(Hàm số } f(t)=t^3+t+1 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R})\end{aligned}$$

Thế vào phương trình (b) ta được:

$$\sqrt{x^3+4x^2+3x+1}=4x-1 \iff \begin{cases} x\ge \frac{1}{4}\\ x^3-12x^2+11x=0\end{cases} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=11\end{array}\right.$$

Kiểm tra điều kiện, ta có các nghiệm là $(1;1);(11;6)$

Bài 3

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{a+c-b} + \frac{5}{a+b-c}$$

Trong đó a,b,c là độ dài các cạnh của một tam giác thỏa mãn $2a+b=abc$

Hướng dẫn

Áp dụng BĐT: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, ta có:

$$S = \left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}\right)+2\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}\right)+3\left(\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{a+b-c}\right) \geq \frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}$$

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=a \implies \frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}=2\left(a+\frac{3}{a}\right) \geq 4\sqrt{3}$$

Vậy

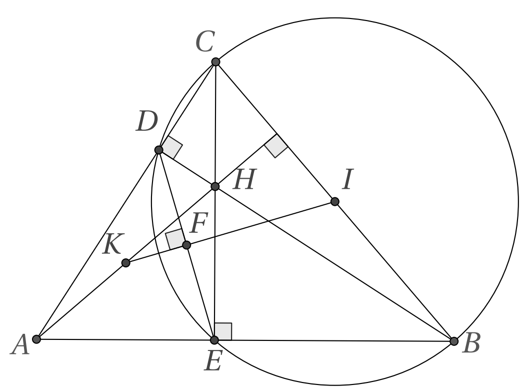
$$S_{min}=4\sqrt{3} \iff a=b=c=\sqrt{3}$$

45 Sở GDĐT Vĩnh Phúc lần 1

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;0)$ và trung điểm của BC là $I(6;1)$. Đường thẳng AH có phương trình $x+2y-3=0$. Gọi $D;E$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B,C của tam giác ABC. Xác định tọa độ đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng DE có phương trình $x-2=0$ và điểm D có tung độ dương.

Hướng dẫn



Gọi K là trung điểm của AH. Tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn tâm K và $BCDE$ nội tiếp đường tròn tâm I.
Suy ra $IK \perp DE$. Ta có $IK: y-1=0$
Tìm được $K(1;1)$, $A=(-1;2)$
Điểm $D(2;a) \in DE$.
Ta có:

$$KA=KD \implies D=(2;3)$$

Phương trình $AC: x-3y+7=0$.
Phương trình $BC: 2x-y-11=0$
Tọa độ $C(8;5)$ nên $B=(4;-3)$
Vậy $A(-1;2);B(4;-3);C(8;5)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy+2=y\sqrt{x^2+2} & (a)\\ y^2+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=2x^2-4x & (b)\end{cases}$$

Hướng dẫn

Vì
$$\sqrt{x^2+2}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\geq 0;\forall x\in\mathbb{R}$$
Nên ta có:
$$(a)\iff y=\sqrt{x^2+2}+x$$
Thế vào phương trình (b) và biến đổi ta được:
$$(x+1)\left[1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right]=(-x)\left[1+\sqrt{(-x)^2+2}\right] \quad (62)$$
Xét hàm số: $f(t)=t\left(1+\sqrt{t^2+2}\right)$ ta có:
$$f'(t)=1+\sqrt{t^2+2}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0;\quad \forall t\in\mathbb{R}$$
Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó phương trình (62) có nghiệm duy nhất $x=-\frac{1}{2}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\left(-\frac{1}{2};1\right)$

Bài 3

Cho $x;y;z$ là các số thực dương thỏa mãn: $x+y-x=-1$. Tìm GTLN của biểu thức:
$$P=\frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+xz)(x+xy)^2}$$

Lời giải

Ta có: $z=x+y+1$, suy ra
$$z+xy=(x+1)(y+1)$$
$$x+yz=(x+y)(y+1)$$
$$y+xz=(x+y)(x+1)$$
Do đó:
$$P=\frac{x^3y^3}{(x+y)^2(x+1)^3(y+1)^3}\leq\frac{x^2y^2}{4(x+1)^3(y+1)^3}$$
THeo BĐT AM-GM ta có:
$$x+1=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}$$
$$\Longrightarrow (x+1)^3\geq\frac{27}{4}x^2$$
$$\Longrightarrow 0<\frac{x^2}{(x+1)^3}\leq\frac{4}{27}$$
Tương tự: $0<\frac{y^2}{(y+1)^3}\leq\frac{4}{27}$. Vậy:
$$P_{Min}=\frac{4}{729}\iff\begin{cases} x=y=2\\ z=5\end{cases}$$

Bài 1

Giải bất phương trình: $2x+5>\sqrt{2-x}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+4}\right)$

Hướng dẫn

Điều kiện: $x\in[1;2]$
Ta có:

$$2x+5=(3x+4)-(x-1)=(\sqrt{3x+4}-\sqrt{x-1})(\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-1})$$

Đó bất phương trình tương đương:

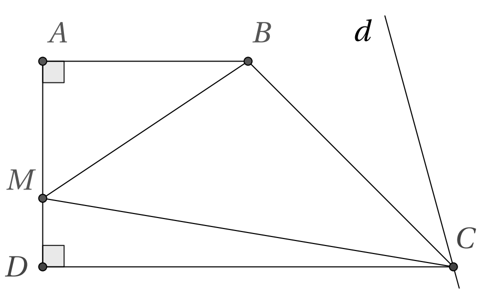
$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2-x}\qquad (\text{Vì } \sqrt{3x+4}+\sqrt{x-1}>0)$$

Chuyển vế bình phương, giải được tập nghiệm của BPT là $S=[1;2]$

Bài 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ có $\angle BAD=\angle ADC=90^\circ$, $AB=AD=2; DC=4$, đỉnh C nằm trên đường thẳng $d:3x-y+2=0$. Điểm M nằm trên cạnh AD sao cho $AM=2MD$ và đường thẳng BM có phương trình là $3x-2y+2=0$. Tìm tọa độ C.

Hướng dẫn



Ta có:

$$C=\left(t;2+3t\right)\in d\implies d_{(C;BM)}=\frac{|2+3t|}{\sqrt{13}}$$

Theo giả thiết ta suy ra

$$MD=\frac{1}{3}AD=\frac{2}{3};AM=\frac{4}{3}$$

Tam giác ABM vuông tại A nên:

$$S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}AM.AB=\frac{4}{3}$$

Tam giác CDM vuông tại D nên:

$$S_{\Delta CDM}=\frac{1}{2}MD.DC=\frac{4}{3}$$

và $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AD.(AB+CD)=6.$

Do đó: $S_{BMC}=\dfrac{10}{3}$

Lại có:

$$S_{BMC}=\frac{1}{2}BM.d_{(C;BM)}\implies d_{(C;BM)}=\frac{10}{\sqrt{13}}$$

Đáp số: $C\left(-4;-10\right)$ hoặc $C=(\dfrac{8}{3};10)$

Bài 3

Cho $a;b;c$ là các số thực dương thỏa mãn: $3\left(a^2+b^2+c^2\right)=1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$Q=\sqrt{a^2+b^2+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{b^2+c^2+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{c^2+a^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

Hướng dẫn

Từ giả thiết suy ra $a+b+c\le 1$
THeo BĐT Cau chy-Schwarz ta có:

$$Q\sqrt{2}=\sum\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)+2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}\ge\sum\sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

Xét các vectơ:

$$\vec{x}=\left(a+b;\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),\quad \vec{y}=\left(b+c;\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right),\quad \vec{z}=\left(c+a;\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Ta có:

$$|\vec{x}|+|\vec{y}|+|\vec{z}|\ge|\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}|$$

Do đó:

$$Q\sqrt{2}\ge 2\sqrt{(a+b+c)+\frac{81}{(a+b+c)^2}}$$

Đặt $t=a+b+c;0<t\le 1$. Xét hàm số: $f(t)=t+\dfrac{81}{t};t\in(0;1]$

Đáp số: $$Q_{Min}=2\sqrt{41}\iff a=b=c=\frac{1}{3}$$

47 Sở GDĐT TP. Hồ Chí Minh

Bài 1

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{y}+1\right)^2+\dfrac{y^2}{x}=y^2+2\sqrt{x-2} & (a)\\ x+\dfrac{x-1}{y}+\dfrac{y}{x}=y^2+y & (b)\end{cases}$$

Hướng dẫn

Ta có:

$$(b)\iff\left(x-y^2\right)(xy+x-1)=0\iff x=y^2\quad(xy+x-1>0)$$

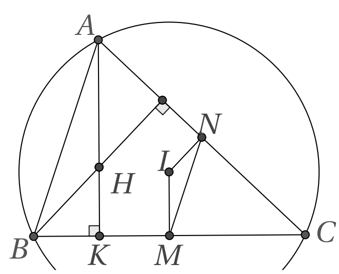
Do đó:

$$(a)\iff\left(\sqrt{y}+1\right)^2=\left(\sqrt{y^2-2}+1\right)^2\iff y=2\implies x=4$$

Bài 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi $H(3;-2),I(8;11),K(4;-1)$ lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC. Tìm tọa độ $A;B;C$.

Hướng dẫn



Ta có $\overrightarrow{HK}=(1;1)$ suy ra $AK:x-y-5=0;BC:x+y-3=0$
Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC,AC.
Dễ thấy $\Delta AHB\sim\Delta MIN$ với tỉ số đồng dạng $\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{1}{2}$.
Do đó: $\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{MI}$.
Mặt khác $IM\perp BC$. Ta có $IM:x-y+3=0$ và $M=(0;3)$

$$\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{MI}=(16;16)\implies A=(19;14)$$

Điểm $B(b;3-b)\in BC$. Khi đó:

$$C=(-b;b+3),\quad \overrightarrow{BH}=(3-b;b-5),\quad \overrightarrow{CA}=(19+b;11-b)$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC} &\Longrightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0\\ &\Longleftrightarrow b=\pm 1\\ &\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} B=(1;2);C=(-1;4)\\ B=(-1;4);C=(1;2)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Bài 3

Cho hai số thực $x;y$ thỏa mãn điều kiện $x^4+16y^4+2\left(2xy-5\right)^2=41$. Tìm GTNN, GTLN của biểu thức:

$$P=xy-\frac{3}{x^2+4xy^2+3}$$

Hướng dẫn

Ta có:

$$x^4+16y^4+2\left(2xy-5\right)^2=41\iff\left(x^2+4y^2\right)^2+9=40xy$$

Đặt $t=x^2+4y^2$ ta có:

$$t^2+9=40xy\le 10t\implies 1\le t\le 9$$

Khi đó:

$$P=\frac{t^2+9}{40}-\frac{3}{3+t}$$

Khảo sát hàm số ta thu được:

$$P_{Max}=2\iff\begin{cases}x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\\ y=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\end{cases},\quad P_{Min}=-\frac{1}{2}\iff\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ y=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

48 Sở GDĐT Thanh Hóa

Bài 1

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2y+x^2+1=2x\sqrt{x^2y+2} & (a)\\ y^3\left(x^6-1\right)+3y\left(x^2-2\right)+3y^2+4=0 & (b)\end{cases}$$

Hướng dẫn

*ĐKXĐ: $x^2y\ge -2$

Ta có:

$$\begin{aligned}(b)&\iff x^6y^3+3x^2y=y^3-3y^2+3y-1+3\left(y-1\right)\\ &\iff\left(x^2y\right)^3+3x^2y=\left(y-1\right)^3+3\left(y-1\right)\end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + 3t$. Dễ thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$x^2 y = y - 1 \quad (y \geq -1)$$

Thế vào phương trình (a) ta được:

$$x^2 y + x^2 + 1 = 2x\sqrt{y+1}$$
$$\iff \left(x\sqrt{y+1} - 1\right)^2 = 0$$
$$\iff x\sqrt{y+1} = 1$$

Do đó hệ đã cho tương đương với một hệ đơn giản hơn:

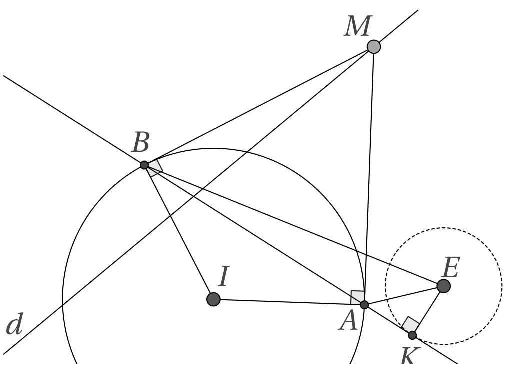
$$\begin{cases} x\sqrt{y-1} = 1 \\ x^2 y = y - 1 \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được nghiệm $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 2

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho điểm $E(3;4)$ đường thẳng $d: x + y - 1 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d và nằm ngoài đường tròn (C). Từ M kẻ tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (A, B là các tiếp điểm). Gọi (E) là đường tròn tâm E và tiếp xúc với đường thẳng AB. Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn (E) có chu vi lớn nhất.

Hướng dẫn



Đường tròn (C) có tâm $I(-2;1)$ và bán kính $R = 3$. Điểm $M(a; 1-a)$ thuộc d và nằm ngoài (C) nên:

$$IM > R$$
$$\iff IM^2 > 9$$
$$\iff (a+2)^2 + (-a)^2 > 9$$
$$\iff 2a^2 + 4a - 5 > 0$$

Ta có:

$$MA^2 = MB^2 = IM^2 - IA^2 = 2a^2 + 4a - 5$$

Do $A; B$ thuộc đường tròn (C) nên tọa độ A, B thỏa mãn phương trình:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$$

$\implies (a+2)x - ay + 3a - 5 = 0$.

Đó cũng là phương trình đường thẳng AB. (*Bạn đọc tự xem lại Kĩ thuật viết phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm của đường tròn.*)

Đường tròn (E) có bán kính là $R' = d_{(E;\Delta)}$. Do đó chu vi (E) lớn nhất khi và chỉ khi R' lớn nhất.

Đường thẳng AB luôn đi qua điểm $K\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{11}{2}\right)$

Gọi H là hình chiếu của E lên AB. Suy ra:

$$d_{(E;AB)} = EH \leq EK = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $AB \perp EK$

Vậy $M(-3;4)$

Bài 3

Cho $x; y; z$ là các số thực thỏa mãn:

$$-1-2\sqrt{2} < x < -1+2\sqrt{2}; y > 0; z > 0; x+y+z = -1$$

Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\left(x+y\right)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{8-\left(y+z\right)^2}$$

Hướng dẫn

Ta có:

$$P = \frac{1}{(-1-z)^2} + \frac{1}{\left(-1-y\right)^2} + \frac{1}{8-(-1-x)^2}$$

Bằng phương pháp biến đổi tương đương ta dễ dàng chứng minh được:

$$\frac{1}{\left(1+y\right)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+yz}$$

Ta lại có:

$$yz \leq \frac{\left(y+z\right)^2}{4} = \frac{(1+x)^2}{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\left(1+y\right)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{4}{4+(1+x)^2}$$

$$\Longrightarrow P \geq \frac{4}{4+(1+x)^2} + \frac{1}{8-(x+1)^2}$$

Mặt khác:

$$-1-2\sqrt{2} < x < -1+2\sqrt{2} \Longrightarrow 0 \leq (x+1)^2 < 8$$

Đến đây ta xét hàm số và tìm được:

$$P_{Min} = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = z = 1 \end{cases}$$

49 Sở GDĐT Quảng Ngãi

Bài 1

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} = 4 \end{cases}$$

Hướng dẫn

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x-1+y-1+2\sqrt{(x-1)\left(y-1\right)} = 4 \\ x+2+y+2+2\sqrt{(x+2)\left(y+2\right)} = 16 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x-1)+(y-1)+2\sqrt{(x-1)\left(y-1\right)} = 4 & (a) \\ (x-1)+(y-1)+2\sqrt{(x-1)(y-1)+3(x-1+y-1)+9} = 10 & (b) \end{cases}$$

Đặt $t = \sqrt{(x-1)(y-1)} \geq 0$. Ta có $x-1+y-1 = 4-2t$
Thế vào (b) ta được:

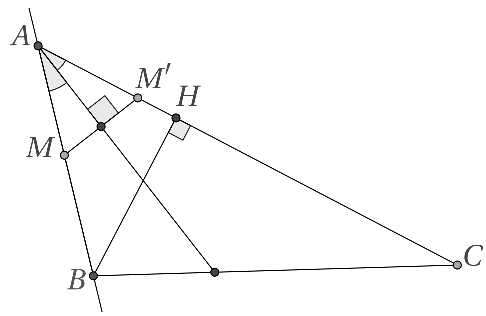
$$\sqrt{t^2-6t+21} = t+3 \iff t=1$$

Ta có nghiệm $(2;2)$

Bài 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $AB = 3AC$. Đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ có phương trình $x-y=0$. Đường cao BH có phương trình: $3x+y-16=0$. Hãy xác định tọa độ A,B,C biết AB đi qua điểm $M(4;10)$

Hướng dẫn



Gọi M' là điểm đối xứng với M qua đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$.
Khi đó $M' = (10;4)$ và thuộc đường AC.
Vì đường cao qua đỉnh B có phương trình $3x+y-16=0$ nên $AC: x-3y+2=0$
Suy ra:

$$A = (1;1), \quad AB: 3x-y-2, \quad B = (3;7)$$

Mặt khác:

$$AB = 3AC \iff C = \left(3;\frac{5}{3}\right)$$

Vậy $A(1;1); B(3;7); C\left(3;\frac{5}{3}\right)$ là các đỉnh của tam giác đã cho.

Bài 3

Cho 3 số thực $x;y;z$ thỏa mãn $x^3+y^3+z^3-3xyz=1$. Tìm GTNN của biểu thức: $P = x^2+y^2+z^2$

Hướng dẫn

Ta có:

$$1 = x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz\right) \tag{63}$$

Hơn nữa: $x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz > 0 \implies x+y+z > 0$
Mặt khác:

$$P = \frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}{3} + \frac{2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{3}$$

Đặt $t = x+y+z > 0$, từ (63) ta được:

$$P = \frac{t^2}{3} + \frac{2}{3t}$$

Vậy $P_{Min} = 1$ đạt tại $(x;y;z) = (1;0;0)$ và các hoán vị.

50 Sở GDĐT Quảng Nam

Bài 1

Giải phương trình: $2x^3+9x^2-6x(1+2\sqrt{6x-1})+2\sqrt{6x-1}+8=0$

Hướng dẫn

ĐK: $x \geq \frac{1}{6} \quad (*)$
Ta có:

$$2x^3 + 9x^2 - 6x + 8 = 2(6x-1)\sqrt{6x-1}$$

Đặt $y = \sqrt{6x-1}$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3 + 9x^2 - 6x + 8 = 2y^3 \\ 18x - 3 = 3y^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 2x^3 + 9x^2 + 12x + 5 = 2y^3 + 3y^2$$

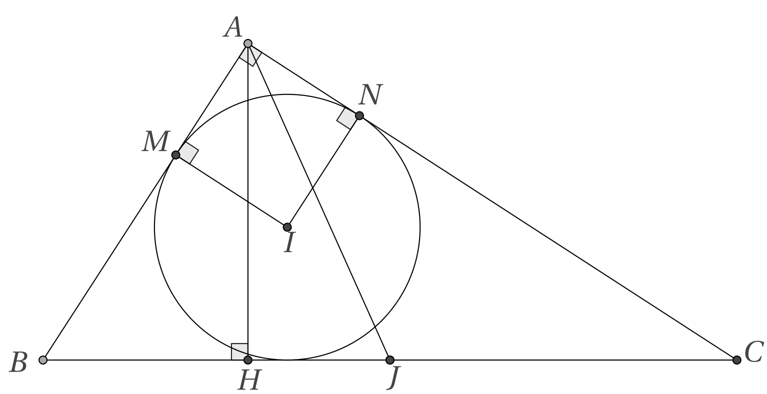
$$\Longrightarrow 2(x+1)^3 + 3(x+1)^2 = 2y^3 + 3y^2$$

Xét hàm số: $f(t) = 2t^3 + 2t^2; t \geq 0$. Hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$
Do đó: $x + 1 = y$.
Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 2 + \sqrt{2}; x = 2 - \sqrt{2}$

Bài 2

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A, có $B(-2;1)$ và $C(8;1)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính $r = 3\sqrt{5} - 5$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC, biết $y_I > 0$.

Hướng dẫn



Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC.
Ta có $BC = 10$. Gọi M, N lần lượt là tiếp điểm trên AB, AC. Khi đó $AM = IN = r$. Ta có:

$$S = pr = (BC + AM)r = (BC + r)r = 20$$

Goi H là chân đường cao hạ từ A của tam giác.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = 20 \Longrightarrow AH = 4$$

Ta lại có $BC : y = 1$ và $d_{(I,BC)} = r$ nên I nằm trên đường thẳng song song với BC cách BC một đoạn đúng bằng r.
$y_I > 0$ suy ra I nằm trên đường thẳng $d : y = 3\sqrt{5} - 4$ và A nằm trên đường $y = 5$.
Gọi J là trung điểm BC suy ra $JA = JB = JC$.Từ đó ta tìm được $A(0;5)$ hoặc $A(6;5)$.

- Với $A(0;5)$. Ta có:

  $$AB : 2x - y + 5 = 0; \quad AC : x + 2y - 10 = 0; \quad AI : 3x + y - 5 = 0$$

  Vì $AI \cap d = I$ nên ta có $I(3 - \sqrt{5}; 3\sqrt{5} - 4)$.

- Với $A(6;5)$. Bằng cách tương tự, ta có $I(-3 + \sqrt{5}; 3\sqrt{5} - 4)$.

Bài 3

Cho 3 số thực dương tùy ý $a;b;c$. Tìm GTNN của biểu thức:
$$P=\frac{\sqrt{a^3c}}{2\sqrt{b^3a}+3bc}+\frac{\sqrt{b^3a}}{2\sqrt{c^3b}+3ca}+\frac{\sqrt{c^3b}}{2\sqrt{a^3c}+3ab}$$

Hướng dẫn

Ta có:
$$\frac{\sqrt{a^3c}}{2\sqrt{b^3a}+3bc}=\frac{a\sqrt{ac}}{b(2\sqrt{ba}+3c)}=\frac{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2}{2\sqrt{\frac{b}{c}}+3\sqrt{\frac{c}{a}}}$$
Thiết lập các biểu thức tương tự.
Đổi biến:
$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}};\sqrt{\frac{b}{c}};\sqrt{\frac{c}{a}}\right)=(x;y;z)\implies xyz=1$$
Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số $\dfrac{x^2}{2y+3z}$ và $\dfrac{2y+3z}{25}$ ta có:
$$\frac{x^2}{2y+3z}+\frac{2y+3z}{25}\geq 2\sqrt{\frac{x^2}{2y+3z}.\frac{2y+3z}{25}}=\frac{2x}{5}$$
Ta được:
$$P=\frac{x^2}{2y+3z}+\frac{y^2}{2z+3x}+\frac{z^2}{2x+3y}\geq\frac{1}{5}\left(x+y+z\right)\geq\frac{3}{5}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{5}$$
Vậy
$$P_{Min}=\frac{3}{5}\iff x=y=z=1\iff a=b=c$$

51 Sở GDĐT Lào Cai

Bài 1

Giải hệ phương trình trên tập số thực:
$$\begin{cases}2\sqrt{x^2+5}=2\sqrt{2y}+x^2 & (a)\\ x+3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4 & (b)\end{cases}$$

Hướng dẫn

ĐK: $\begin{cases}y\geq 0\\ xy+x-y^2-y\geq 0\end{cases}$
Ta có:
$$\begin{aligned}(b)&\iff(x-2y-1)+3\left(\sqrt{xy+x-y^2-y}-y-1\right)=0\\ &\iff(x-2y-1)\left[\frac{3(y+1)}{\sqrt{xy+x-y^2-y}+y+1}\right]=0\\ &\iff x-2y-1=0\quad\text{(Vì theo ĐK thì trong ngoặc vuông dương)}\end{aligned}$$

Thế vào (a) ta được:

$$2\sqrt{x^2+5} = 2\sqrt{x-1} + x^2$$
$$\iff (x-2)\left[-\frac{2(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} + \frac{2}{\sqrt{x-1}+1} + x + 2\right] = 0$$

Với $\forall x \geq 1$ thì:

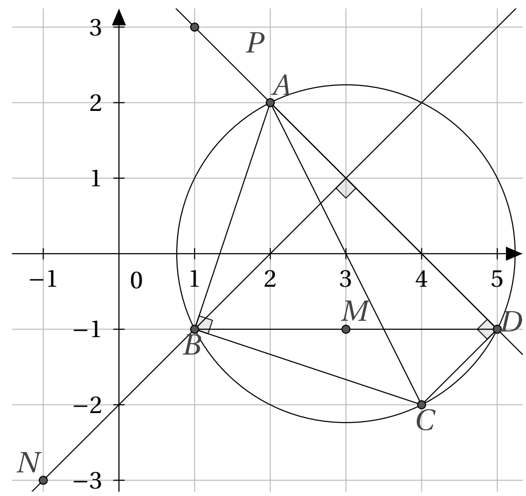
$$-\frac{2(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} + \frac{2}{\sqrt{x-1}+1} + x + 2 = \frac{2}{\sqrt{x-1}+1} + (x+2)\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x^2+5}+3}\right) > 0$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm $\left(2;\frac{1}{2}\right)$

Bài 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AC. Điểm $M(3;-1)$ là trung điểm của $BD, C(4;-2)$. Điểm $N(-1;-3)$ nằm trên đường thẳng đi qua B và vuông góc với AD. Đường thẳng AD đi qua $P(1;3)$. Tìm tọa độ $A;B;D$

Hướng dẫn



Giả sử $D(a;b)$.
Vì M là trung điểm của BD nên $B(6-a;-2-b)$.
Ta có:

$$\angle ADC = 90^\circ \implies AD \perp DC \implies BN \parallel CD.$$

Vì $\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{CD}$ cùng phương nên ta được $b = a - 6$.

Lại có:

$$\overrightarrow{PD} \perp \overrightarrow{CD} \implies (a-1)(a-4) + (b+2)(b-3) = 0$$

Suy ra $a = 5$ hoặc $a = 4$.

Đáp số: $A(2;2); D(5;-1); B(1;-1)$

Bài 3

Cho x là số thực thuộc đoạn $\left[-1;\frac{5}{4}\right]$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{5-4x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{5-4x} + 2\sqrt{1+x} + 6}$$

Hướng dẫn

Đặt $\begin{cases} \sqrt{5-4x} = a \\ \sqrt{1+x} = b \end{cases} \implies a^2 + 4b^2 = 9$

Do đó tồn tại $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\begin{cases} a = 3sin\alpha \\ 2b = 3sos\alpha \end{cases}$

Khi đó P trở thành:

$$P = \frac{2sin\alpha - cos\alpha}{2sin\alpha + 2cos\alpha + 4}$$

Đến đây ta sẽ khảo sát hàm số.

Đáp số: $P_{Min} = -\frac{1}{6};\quad P_{Max} = \frac{1}{3}.$

52 Sở GDĐT Lâm Đồng

Bài 1

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+6y-4=\sqrt{2(1-y)(x^3+1)} & (a)\\ (3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0 & (b)\end{cases}$$

Hướng dẫn

ĐK: $x\le 2,\quad y\le \dfrac{1}{2},\quad (1-y)(x^3+1)\ge 0$

Ta có:

$$(b)\iff (1+2-x)\sqrt{2-x}=(1+2y-1)\sqrt{2y-1}$$

Xét hàm số: $f(t)=(1+t^2)t=t^3+t$

Hàm số trên đồng biến nên suy ra: $2y=3-x$

Thế vào (a) biến đổi thành:

$$3(x^2-x+1)-2(x^2-1)=\sqrt{(x^2-1)(x^2-x+1)}\iff x=2$$

Bài 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, $I\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ là tâm hình chữ nhật và $M(3;0)$ là trung điểm của AD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết y_D<0

Hướng dẫn

Bạn đọc tự vẽ hình.

Dễ thấy:

$$IM=\frac{3\sqrt{2}}{2}\implies CD=3\sqrt{2}\implies AD=2\sqrt{2}$$

Đường thẳng AD đi qua M, nhận $\overrightarrow{IM}$ là vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $(d): x+y-3=0$.

Ta có $\{A,D\}=(d)\cap(M,\sqrt{2})$. Tìm được $A(2;1),D(4;-1)$.

Áp dụng tính chất trung điểm của I, tìm được $B(5;4),C(7;2)$.

Bài 3

Cho các số thực dương a;b;c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+ab}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ab}}+\frac{2\sqrt{3}}{1+c}$$

Hướng dẫn

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ab}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ab}}\ge\frac{2}{\sqrt[4]{(a^2+ab)(b^2+ab)}}\ge\frac{2}{\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2+ab}{2}}}\ge\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Do đó:

$$P \geq \frac{2}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{2\sqrt{3}}{c+1}$$

Vậy

$$P_{Min} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \iff \begin{cases} a = b = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

53 Sở GDĐT Bình Dương

Bài 1

Giải bất phương trình: $\sqrt{4x+1} + \sqrt{6x+4} \geq 2x^2 - 2x + 3$

Hướng dẫn

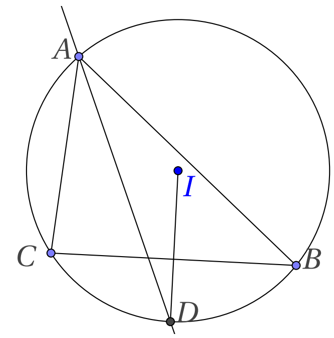
Ta có:

$$\begin{aligned} BPT &\iff \sqrt{4x+1} - (x+1) + \sqrt{6x+4} - (x+2) \geq 2(x^2-2x) \\ &\iff (x^2-2x)\left(2 + \frac{1}{\sqrt{4x+1}+x+1} + \frac{1}{\sqrt{6x+4}+x+2}\right) \geq 2(x^2-2x) \end{aligned}$$

Bài 2

Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(1;5)$, đường phân giác trong góc A có phương trình $x-1=0$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(\dfrac{-3}{2};0\right)$ và điểm $M(10;2)$ thuộc đường thẳng BC. Tìm tọa độ $B;C$

Hướng dẫn



Nhận xét: Bài toán này giống Ví dụ 2 trang 27.
Có tọa độ I, A nên ta viết được phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi $d: x-1=0$.
Gọi $D = (C) \cap d$. Khi đó $ID \perp BC$. Do đó đường thẳng BC đi qua M và nhận $\overrightarrow{ID}$ là vectơ pháp tuyến.
Viết phương trình BC và tìm giao của nó với (C).

Bài 3

Cho $a;b;c$ là 3 số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^4+a^2b^2} + \frac{1}{b^4+a^2b^2} + \frac{32}{(1+c)^3}$$

Hướng dẫn

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{a^4+a^2b^2} + \frac{1}{b^4+a^2b^2} \geq \frac{4}{\left(a^2+b^2\right)^2} = \frac{4}{\left(1-c^2\right)^2}$$

$\Longrightarrow P \geq \dfrac{4}{\left(1-c^2\right)^2} + \dfrac{32}{(1+c)^3}$

Khảo sát hàm số, ta thu được:

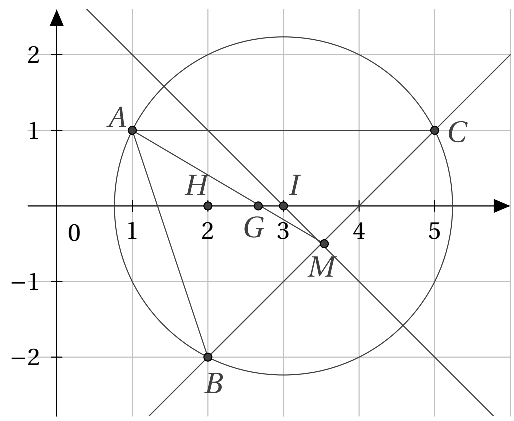
$$\min P = \frac{448}{27} \iff a = b = \frac{\sqrt{6}}{4}; c = \frac{1}{2}$$

54 THPT Nguyễn Văn Trỗi (Hà Tĩnh)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng $BC: x-y-4=0$. Các điểm $H(2;0), I(3;0)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Hãy lập phương trình cạnh AB, biết điểm B có hoành độ không lớn hơn 3.

Lời giải



Gọi $G(a;b)$ là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó:

$$\overrightarrow{HG} = (1-2;b), \quad \overrightarrow{GI} = (3-a;-b)$$

Mà $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$. Do đó:

$$\begin{cases} a-2 = 6-2a \\ b = -2b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{8}{3} \\ b = 0 \end{cases} \Longrightarrow G\left(\frac{8}{3};0\right)$$

Gọi M là trung điểm BC. Dễ thấy $MI \perp BC$ nên đường thẳng MI có phương trình: $x+y-3=0$.

$MI \cap BC = M$ nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $M\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Giả sử $A(c;d)$. Ta có: $\overrightarrow{AG} = \left(\dfrac{8}{3}-c;-d\right), \overrightarrow{GM} = \left(\dfrac{5}{6};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Từ $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{3} - c = \dfrac{5}{3} \\ -d = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ d = 1 \end{cases} \Longrightarrow A(1;1)$$

Giả sử $B(m;m-4) \in BC$, với $m \leq 3$. Vì $IB = IA = \sqrt{5}$ nên:

$$BI^2 = 5 \iff (m-3)^2 + (m-4)^2 = 5 \iff \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 4 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $B(2;-2)$.

Phương trình đường thẳng AB là: $3x+y-4=0$.

Bài 2

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = \sqrt{y^3 + 3y^2} \\ \sqrt{x-3} = \sqrt{y-x+2} \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 3 \\ y \ge x-2 \end{cases}$.

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = y\sqrt{y+3} \iff (x-1)^3 - 3(x-1) = \left(\sqrt{y+3}\right)^3 - 3\sqrt{y+3} \tag{64}$$

Dễ thấy $\sqrt{y+3} > 1, x-1 > 1$. Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t, \forall t \ge 1$. Ta có:

$$f'(t) = 3t^2 - 3 \ge 0, \quad \forall t \ge 1$$

Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$.

$$\begin{aligned} (64) &\iff f(x-1) = f\left(\sqrt{y+3}\right) \\ &\iff x-1 = \sqrt{y+3} \\ &\iff y = x^2 - 2x - 2 \end{aligned}$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta thu được:

$$\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-3x} \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho là: $(3;1)$.

Bài 3

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \ge \frac{9}{10}$$

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $a, b, c \in (0;1)$.
Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\begin{aligned} ab &\le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 \\ bc &\le \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \\ ca &\le \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Do đó:

$$P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \ge \frac{4a}{a^2-2a+5} + \frac{4b}{b^2-2b+5} + \frac{4c}{c^2-2c+5} = f(a) + f(b) + f(c)$$

Trong đó $f(x) = \dfrac{4x}{x^2-2x+5}, \forall x \in (0;1)$.
Ta sẽ chứng minh BĐT đã cho bằng phương pháp tiếp tuyến.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = \frac{1}{3}$ là $y = \frac{99x-3}{100}$.
Ta có:

$$\frac{4x}{x^2-2x+5} - \frac{99x-3}{100} = \frac{(3x-1)^2(15-11x)}{100(x^2-2x+5)} \geq 0, \quad \forall x \in (0;1)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{3}$. Do đó:

$$P \geq \frac{99}{100}(a+b+c) - \frac{9}{100} = \frac{9}{10} \quad \text{(đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

55 THPT Chuyên ĐH Vinh

Bài 1

Giải bất phương trình

$$x^2 + 5x < 4\left(1 + \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x}\right)$$

Lời giải

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x \geq -1+\sqrt{5} \\ -1-\sqrt{5} \leq x \leq 0 \end{array}\right.$.
BPT tương đương với:

$$x^2 + 2x - 4 + 3x < 4\sqrt{x(x^2+2x-4)} \tag{65}$$

Xét hai trường hợp:

- $-1-\sqrt{5} \leq x \leq 0$. Khi đó: $\begin{cases} x^2+2x-4 \leq 0 \\ 3x \leq 0 \\ x^2+2x-4, 3x \text{ không đồng thời bằng } 0 \end{cases}$. Do đó:

$$VT(65) < 0 \leq VP(65)$$

  Vậy $-1-\sqrt{5} \leq x \leq 0$ thỏa mãn BPT đã cho.

- $x \geq -1+\sqrt{5}$. Khi đó $x^2+2x-4 \geq 0$. Đặt $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-4} = a \geq 0 \\ \sqrt{x} = b > 0 \end{cases}$. Ta có

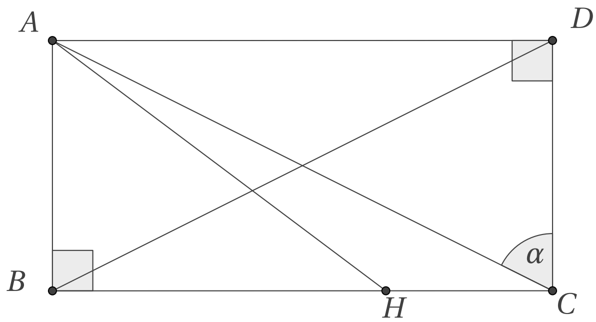
$$\begin{aligned}
(65) &\iff a^2 + 3b^2 < 4ab \\
&\iff (a-b)(a-3b) < 0 \\
&\iff b < a < 3b \\
&\iff \sqrt{x} < \sqrt{x^2+2x-4} < 3\sqrt{x} \\
&\iff \begin{cases} x^2+x-4 > 0 \\ x^2-7x-4 < 0 \end{cases} \\
&\iff \frac{-1+\sqrt{17}}{2} < x < \frac{7+\sqrt{65}}{2} \quad \text{(thỏa mãn).}
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là: $\left[-1-\sqrt{5};0\right] \cup \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$.

Bài 2

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $\widehat{ACD}=\alpha$ với $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, điểm H thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{HB}=-2\overrightarrow{HC}$, K là giao điểm của hai đường thẳng AH và BD. Biết $H\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}\right)$, $K(1;0)$ và điểm B có hoành độ dương. Tìm tọa độ các điểm A,B,C,D.

Lời giải



Dễ thấy $H\in BC$ và $BH=\dfrac{2}{3}BC$. Vì $BH//AD$ nên:

$$\frac{KH}{KA}=\frac{BH}{AD}=\frac{2}{3}\implies HK=\frac{2}{3}KA.$$

Suy ra $\overrightarrow{HA}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{HK}$. Giả sử $A\left(x_A;y_A\right)$.

Ta có:

$$\begin{cases} x_A-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}\\ y_A+\dfrac{4}{3}=\dfrac{10}{3}\end{cases}\iff\begin{cases} x_A=2\\ y_A=2\end{cases}.$$

Vậy $A(2;2)$. Vì tam giác ACD vuông tại D và $\cos\widehat{ACD}=\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ nên $AD=2CD, AC=\sqrt{5}CD$.

Đặt $CD=a>0$, khi đó: $AD=2a, AB=a, BH=\dfrac{4}{3}a$.

Trong tam giác vuông ABH, ta có:

$$AB^2+BH^2=AH^2\iff\frac{25}{9}a^2=\frac{125}{9}\iff a=\sqrt{5}.$$

Suy ra:

$$\begin{cases} AB=\sqrt{5}\\ HB=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}\end{cases}\tag{66}$$

Giả sử $B(x;y), x>0$. Ta có:

$$(66)\iff\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=5\\ \left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{80}{9}\end{cases}\iff\left[\begin{array}{l} x=3;y=0\\ x=-\dfrac{1}{5};y=\dfrac{8}{5}\quad\text{(loại)}\end{array}\right..$$

Suy ra $B(3;0)$.

Từ $\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BH}\implies C(-1;-2)$.

Từ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\implies D(-2;0)$.

Bài 3

Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn

$$0<(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\le 2$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=4^x+4^y+4^z+\ln(x^4+y^4+z^4)-\frac{3}{4}(x+y+z)^4$$

Lời giải

Từ giả thiết, ta có: $\begin{cases}0\le x,y,z\le 1\\ x^2+y^2+z^2\le 1\end{cases}.$

Xét hàm số
$$g(t) = 4^t - 3t - 1, \quad t \in [0;1]$$
Ta có: $g'(t) = 4^t \ln 4 - 3$.
$$g'(t) = 0 \iff t = \log_4 \frac{3}{\ln 4} = t_0$$
$$g'(t) > 0 \iff t > t_0; \quad g'(t) < 0 \iff t < t_0$$
Vì $1 < \dfrac{3}{\ln 4} < 4$ nên $0 < t_0 < 1$. Bảng biến thiên của hàm số $g(t)$:

t	0		t_0		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	$\searrow$	$g(t_0)$	$\nearrow$	0

Suy ra $g(t) \le 0, \forall t \in [0;1]$ hay
$$4^t \le 3t + 1, \quad \forall t \in [0;1]$$
Mặt khác, do $0 \le x, y, z \le 1$ nên:
$$x^4 + y^4 + z^4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 1$$
Từ đó, ta có:
$$\begin{aligned} P &\le 3 + 3(x+y+z) + \ln(x^4 + y^4 + z^4) - \frac{3}{4}(x+y+z)^4 \\ &\le 3 + 3(x+y+z) - \frac{3}{4}(x+y+z)^4 \end{aligned}$$
Đặt $x + y + z = u$, khi đó: $u \ge 0$ và
$$P \le 3 + 3u - \frac{3}{4}u^4$$
Xét hàm số $f(u) = 3 + 3u - \dfrac{3}{4}u^4$ với $u \ge 0$. Ta có:
$$f'(u) = 3 - 3u^3; \quad f'(u) = 0 \iff u = 1$$
Bảng biến thiên của $f(u)$:

u	0		1		$+\infty$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		$\nearrow$	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	

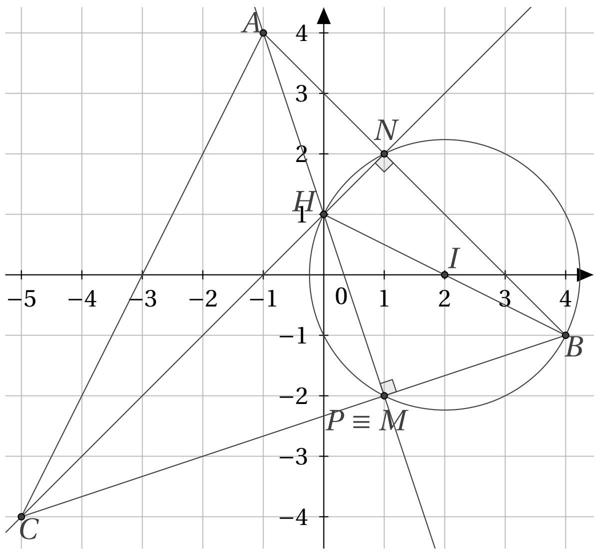
Dựa vào bảng biến thiên, ta có
$$f(u) \le \frac{21}{4}, \quad \forall u \ge 0$$
Suy ra: $P \le \dfrac{21}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1, y = z = 0$ hoặc các hoán vị.
Vậy $\max P = \dfrac{21}{4}$.

56 THPT Thủ Đức (TP Hồ Chí Minh)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có $A(-1;4)$, các đường cao AM, CN và trực tâm H. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I(2;0)$. Đường thẳng BC đi qua $P(1;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết B thuộc đường thẳng $d: x+2y-2=0$

Hướng dẫn



Dễ thấy tứ giác $BMHN$ nội tiếp đường tròn tâm $I(2;0)$, đường kính BH.
Giả sử $B(2-2b;b), H(2b+2;-b)$. Ta có:

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BP}=0 \implies b=-1 \implies B(4;-1), H(0;1).$$

Viết được phương trình đường thẳng $BC: x-3y-7=0$, $AC: 2x-y+6=0$ và tìm được $C(-5;-4)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x^2+2y^2}=x+2y+3xy \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x^2+2y^2}=2y-x \end{cases}$$

Lời giải

ĐK: $y \geq -1$.
Đặt $t=\sqrt{x^2+2y^2} \geq 0$. Phương trình đầu của hệ trở thành:

$$t^2+(1-y)t-x^2-2y^2-x-2y-3xy=0$$

$$\implies \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2y^2}=-x-y-1 \\ t=x+2y \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2y^2}=-x-y-1 \\ \sqrt{x^2+2y^2}=x+2y \end{array}\right.$$

- $\sqrt{x^2+2y^2}=-x-y-1$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta có:
$$\sqrt{y+1}=3y+1 \iff \begin{cases} y \geq -\dfrac{1}{3} \\ 9y^2+5y=0 \end{cases} \iff y=0$$
Suy ra: $\sqrt{x^2}=-x-1$ (không thỏa mãn).

- $\sqrt{x^2+2y^2}=x+2y$. Ta có hệ:
$$\begin{cases} \sqrt{y+1}=-2x \\ \sqrt{x^2+2y^2}=x+2y \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Bài 3

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn
$$5(x^2+y^2+z^2)=9(xy+2yz+zx)$$
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P=\frac{x}{y^2+z^2}-\frac{1}{(x+y+z)^3}$$

Hướng dẫn

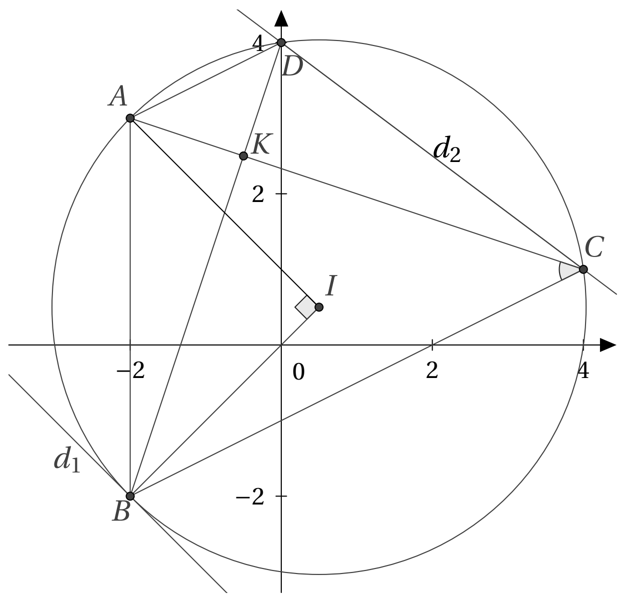
Từ giả thiết, ta có:
$$5x^2-9x(y+z)=18yz-5(y^2+z^2)$$
Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:
$$\begin{cases} yz \leq \dfrac{1}{4}(y+z)^2 \\ y^2+z^2 \geq \dfrac{1}{2}(y+z)^2 \end{cases} \implies 18yz-5(y^2+z^2) \leq 2(y+z)^2$$
Do đó:
$$\begin{aligned} 5x^2-9x(y+z) \leq 2(y+z)^2 &\iff [x-2(y+z)](5x+y+z) \leq 0 \\ &\implies x \leq 2(y+z) \end{aligned}$$
Suy ra:
$$P \leq \frac{2x}{(y+z)^2}-\frac{1}{(x+y+z)^3} \leq \frac{4}{y+z}-\frac{1}{27(y+z)^3}$$
Đặt $y+z=t>0$, ta có:
$$P \leq \frac{4}{t}-\frac{1}{27t^3}=f(t)$$
Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thu được $P \leq 16$.
Vậy $\max P=16$ khi $x=\dfrac{1}{3}; y=z=\dfrac{1}{12}$

57 THPT Nông Cống 1 (Thanh Hóa) lần 2

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm I có hoành độ dương. (C) đi qua điểm $A(-2;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d_1): x+y+4=0$ tại điểm B.
(C) cắt đường thẳng $(d_2): 3x+4y-16=0$ tại C và D sao cho $ABCD$ là hình thang $(AD \parallel BC)$ có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau. Tìm tọa độ các điểm B, C, D.

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình thang nội tiếp đường tròn nên nó là hình thang cân.
Đặt $K = AC \cap BD$. Khi đó: $\triangle KBC$ vuông cân tại K. Suy ra:

$$\widehat{ACB} = 45^o \implies \widehat{AIB} = 90^o \implies IB \perp AI. \qquad (67)$$

Mặt khác:

$$(d_1) \text{ tiếp xúc với } (C) \text{ tại } B \implies IB \perp (d_1). \qquad (68)$$

Từ (67) và (68) suy ra:

$$IB = d_{(A,(d_1))} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Ta có phương trình đường thẳng $AI: x+y-1=0$. Vì $I \in AI$ nên $I(a;1-a)$. Khi đó:

$$IA = \frac{5}{\sqrt{2}} \iff \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2} \\ a = -\dfrac{9}{2} \quad \text{(loại)} \end{array}\right. .$$

Vậy $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. Vì B là hình chiếu của I lên (d_1) nên $B(-2;-2)$

Phương trình của đường tròn (C) là: $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$.

Hai điểm C, D có tọa độ là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2} \\ 3x+4y-16=0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} (x;y)=(0;4) \\ (x;y)=(4;1) \end{array}\right. .$$

Vì $AD//BC$ nên $C(4;1), D(0;4)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+xy+2y^2}+\sqrt{y^2+xy+2x^2}=2(x+y) \\ (8y-6)\sqrt{x-1}=\left(2+\sqrt{y-2}\right)\left(y+4\sqrt{x-2}+3\right) \end{cases}.$$

Hướng dẫn

ĐK: $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 2 \end{cases}$. Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+2}+\sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1}=2\left(\frac{x}{y}+1\right).$$

Đặt $\frac{x}{y}=t>0$, ta được:

$$\sqrt{t^2+t+2}+\sqrt{2t^2+t+1}=2(t+1) \tag{69}$$

Ta chứng minh:

$$\sqrt{t^2+t+2}\geq\frac{3}{4}t+\frac{5}{4},\quad \forall t>0 \tag{70}$$

Thật vậy,

$$\sqrt{t^2+t+2}\geq\frac{3}{4}t+\frac{5}{4}\iff t^2+t+2-\left(\frac{3}{4}t+\frac{5}{4}\right)^2\geq 0\iff 7(t-1)^2\geq 0\quad\text{(luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=1$.
Tương tự, ta có:

$$\sqrt{2t^2+t+1}\geq\frac{5}{4}t+\frac{3}{4},\quad \forall t>0 \tag{71}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=1$.
Cộng theo vế (70) và (71), ta có:

$$VT(69)\geq VP(69)$$

Vậy $t=1$ là nghiệm của phương trình (69). Từ đó ta có $x=y$.
Thay $x=y$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta có:

$$(8x-6)\sqrt{x-1}=\left(2+\sqrt{x-2}\right)\left(x+4\sqrt{x-2}+3\right)\iff f\left(\sqrt{4x-4}\right)=f\left(2+\sqrt{x-2}\right).$$

Trong đó $f(t)=t^3+t$.
Dễ thấy $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$\sqrt{4x-4}=2+\sqrt{x-2}.$$

Giải phương trình, ta thu được $x=2, x=\frac{34}{9}$.

Hệ có hai nghiệm $(2;2);\left(\frac{34}{9};\frac{34}{9}\right)$.

Bài 3

Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn:

$$\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}+\sqrt{2y^2+3xy+4x^2}-3(x+y)^2\leq 0.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=2(x^3+y^3)+2(x^2+y^2)-xy+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}.$$

Lời giải

Đặt $Q=\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}+\sqrt{2y^2+3xy+4x^2}$. Ta có:

$$Q=\sqrt{\left(\sqrt{2}\left(x+\frac{3y}{4}\right)\right)^2+\left(\sqrt{\frac{23}{8}}y\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}\left(y+\frac{3x}{4}\right)\right)^2+\left(\sqrt{\frac{23}{8}}x\right)^2}\geq 3|x+y|=3(x+y)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y\geq 0$.
Đặt $t=x+y$, ta có:

$$\begin{cases} t^2-t\geq 0\\ t\geq 0\end{cases}\implies\left[\begin{array}{l} t=0\\ t\geq 1\end{array}\right. \tag{72}$$

Mặt khác:

$$P = 2(x^3+y^3)+2(x^2+y^2)-xy+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1} \ge 2t^3+2t^2-\frac{t^2}{4}(6t+5)+\sqrt{t^2+4}$$

hay

$$4P \ge 2t^3+3t^2+4\sqrt{t^2+4}$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+3t^2+4\sqrt{t^2+4}$ với t thỏa mãn (72). Ta có:

$$f'(t)=6t^2+6t+\frac{4t}{\sqrt{t^2+4}} \ge 0, \quad \forall t \quad (\text{ thỏa mãn } (72))$$

Suy ra:

$$f(t) \ge \min\{f(0); f(1)\} = f(0) = 8$$

Vậy $4P \ge 8$. Hay $\min P = 2$ khi:

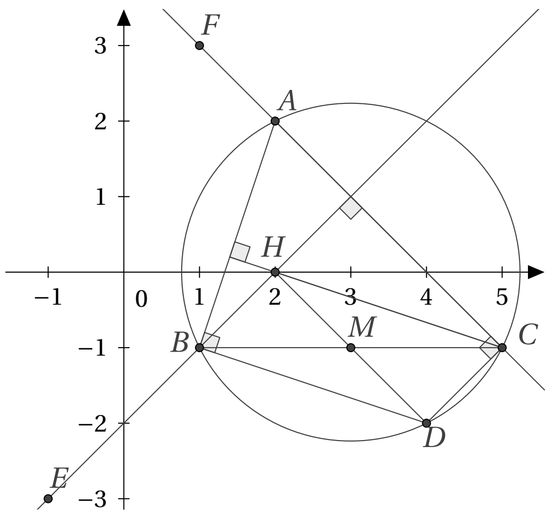
$$\begin{cases} x = y \ge 0 \\ x+y=0 \end{cases} \iff x=y=0.$$

58 THPT Nguyễn Trung Thiên lần 1

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm cạnh BC là $M(3;-1)$. Điểm $E(-1;-3)$ nằm trên đường thẳng Δ chứa đường cao đi qua đỉnh B. Đường thẳng AC đi qua $F(1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường kính AD với $D(4;-2)$.

Lời giải



Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Khi đó:

$$\begin{cases} BH//CD \\ BD//CH \end{cases} \Longrightarrow BDCH \text{ là hình bình hành}$$

$\Longrightarrow M$ là trung điểm $DH \Longrightarrow H(2;0)$

Đường thẳng AC đi qua $F(1;3)$ và nhận $\overrightarrow{HE}=(-3;-3)$ là vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $x+y-4=0$.
Đường cao BH có phương trình: $x-y-2=0$.
Giả sử $B(b;b-2), C(c;4-c)$. Do M là trung điểm BC nên:

$$\begin{cases} b+c=6 \\ b-c+2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=5 \end{cases}$$

Vậy $B(1;-1), C(5;-1)$.
Đường cao AH đi qua H và vuông góc với BC nên có phương trình $x=2$.
Tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=2 \\ x+y-4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy $A(2;2)$

Bài 2

Giải phương trình
$$(x+2)\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)=0$$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với:
$$(x+2)\left(\sqrt{(x+2)^2+3}+1\right)=-x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)\iff f(x+2)=f(-x)$$
Trong đó $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+1\right)$. Ta có:
$$f'(t)=1+\sqrt{t^2+3}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0,\quad \forall t\in\mathbb{R}$$
Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó:
$$f(x+2)=f(-x)\iff x+2=-x\iff x=-1$$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Bài 3

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P=\frac{x}{(y+z)^2}+\frac{y}{(x+z)^2}+\frac{z}{(x+y)^2}$$

Lời giải

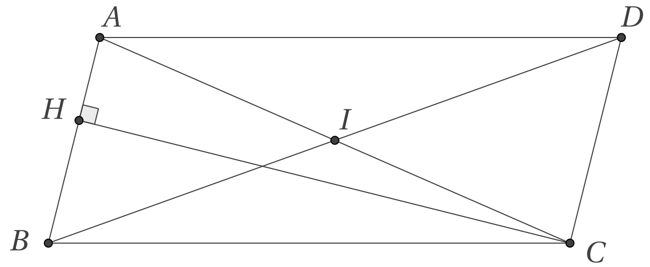
Từ giả thiết suy ra $0<x,y,z<\sqrt{3}$. Ta chứng minh $\dfrac{x}{2(3-x^2)}\ge\dfrac{1}{4}x^2$.
Thật vậy:
$$\frac{x}{2(3-x^2)}\ge\frac{1}{4}x^2\iff 2\ge x(3-x^2)\iff (x-1)^2(x+2)\ge 0\quad\text{(luôn đúng)}$$
Ta có:
$$(y+z)^2\le 2(y^2+x^2)=2(3-x^2)\implies \frac{x}{(y+z)^2}\ge\frac{x}{2(3-x^2)}\ge\frac{1}{4}x^2$$
Tương tự:
$$\frac{y}{2(3-y^2)}\ge\frac{1}{4}y^2;\quad \frac{z}{2(3-z^2)}\ge\frac{1}{4}z^2$$
Từ đó suy ra:
$$P=\frac{x}{(y+z)^2}+\frac{y}{(x+z)^2}+\frac{z}{(x+y)^2}\ge\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)=\frac{3}{4}$$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.
Vậy $\min P=\dfrac{3}{4}$.

59 THPT Lam Kinh (Thanh Hóa)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích bằng 4. Biết $A(1;0), B(0;2)$ và tâm I của hình bình hành nằm trên đường thẳng $y = x$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;2) \implies AB = \sqrt{5}$.
Phương trình đường thẳng AB là: $2x + y - 2 = 0$.
Giả sử $I(t;t) \in (d) : y = x$. Vì I là trung điểm AC và BD nên ta có: $C(2t-1;2t), D(2t;2t-2)$.

Gọi CH là đường cao kẻ từ C của hình bình hành. Theo giả thiết:

$$S_{ABCD} = AB.CH = 4 \implies CH = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Ta có:

$$d_{(C;AB)} = CH \iff \frac{|6t-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \iff \left[\begin{array}{l} t = \frac{4}{3} \\ t = 0 \end{array}\right.$$

Vậy $C\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$ hoặc $C(-1;0), D(0;-2)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases}$$

Lời giải

Nhận xét: Hệ đã cho không có nghiệm dạng $(x_0;0)$.
Với $y \neq 0$, ta có:

$$HPT \iff \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y} + x + y = 4 \\ (x+y)^2 - 2\dfrac{x^2+1}{y} = 7 \end{cases}$$

Đặt $u = \dfrac{x^2+1}{y}, v = x + y$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ v^2 - 2u = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} u = 4 - v \\ v^2 + 2v - 15 = 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} v = 3; u = 1 \\ v = -5; u = 9 \end{array}\right.$$

- với $u = 1; v = 3$, ta có:
$$\begin{cases} x^2 + 1 = y \\ x + y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 1 = y \\ y = 3 - x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 3 - x \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 2 \\ x = -2; y = 5 \end{array}\right.$$
- với $u = 9; v = -5$, ta có:
$$\begin{cases} x^2 + 1 = 9y \\ x + y = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 1 = 9y \\ y = -5 - x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 9x + 46 = 0 \\ y = -5 - x \end{cases} \quad \text{(vô nghiệm)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm: $(1;2), (-2;5)$.

Bài 3

Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3a+c}+\frac{1}{2a+b+c}\right)+\frac{b}{3a+c}+\frac{c}{3a+b}<2 \tag{73}$$

Lời giải

Vì a, b, c là các cạnh của 1 tam giác nên: $\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} \dfrac{a+b}{2}=x \\ \dfrac{c+a}{2}=y \\ a=z \end{cases}$, $(x, y, z>0)$. Ta có: $\begin{cases} x+y>z \\ y+z>x \\ z+x>y \end{cases}$.

Khi đó:

$$VT(73)=\frac{a+b}{3a+c}+\frac{a+c}{3a+b}+\frac{2a}{2a+b+c}=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$$

Ta có:

$$x+y>z \iff z(x+y+z)<2z(x+y) \iff \frac{2z}{x+y+z}>\frac{z}{x+y}$$

Tương tự:

$$\frac{x}{y+z}<\frac{2x}{x+y+z}; \quad \frac{y}{z+x}<\frac{2y}{x+y+z}$$

Do đó:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}<\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2$$

Vậy:

$$a\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3a+c}+\frac{1}{2a+b+c}\right)+\frac{b}{3a+c}+\frac{c}{3a+b}<2 \quad \text{(đpcm)}.$$

60 THPT Cù Huy Cận (Hà Tĩnh)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm A thuộc đường thẳng $d_1: x-y-4=0$, điểm $C(-7;5)$, M là điểm thuộc BC sao cho $MB=3MC$, đường thẳng đi qua D và M có phương trình $d_2: 3x-y+18=0$. Xác định tọa độ đỉnh A, B biết điểm B có tung độ dương.

Lời giải

Giả sử $A(t;t-4)\in d_1$. Gọi $I=AC\cap DM$. Ta có:

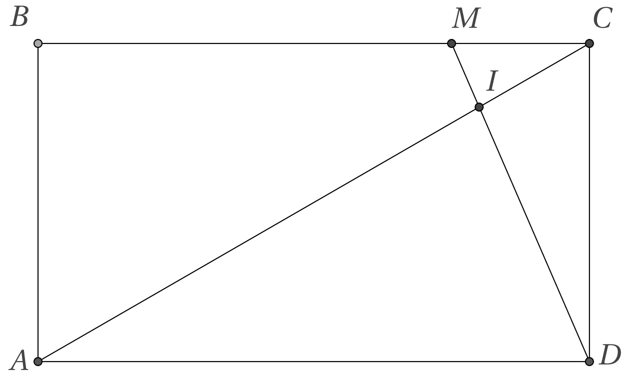
$$\triangle IAD \sim \triangle ICM \implies \frac{IA}{IC}=\frac{AD}{CM}=4 \implies \overrightarrow{IA}=-4\overrightarrow{IC}$$

Giả sử $I(x;y)$, ta có:

$$\overrightarrow{IA}=(t-x;t-4-y), \overrightarrow{IC}=(-7-x;5-y).$$

Khi đó:

$$\overrightarrow{IA} = -4\overrightarrow{IC} \iff \begin{cases} t - x = 28 + 4x \\ t - 4 - y = -20 + 4y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{t-28}{5} \\ y = \dfrac{t+16}{5} \end{cases}$$



Suy ra: $I\left(\dfrac{t-28}{5}; \dfrac{t+16}{5}\right)$.
Vì $I \in DM$ nên:
$$3\frac{t-28}{5} - \frac{t+16}{5} + 18 = 0 \iff t = 5$$
Vậy $A(5;1)$.
Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{CB} = 4\overrightarrow{CM}$.
Giả sử $M(u;3u+18) \in d_2, B(a;b)$. Ta có: $\overrightarrow{CB} = (a+7;b-5); \overrightarrow{CM} = (u+7;3u+13)$. Khi đó:
$$\overrightarrow{CB} = 4\overrightarrow{CM} \iff \begin{cases} a+7 = 4u+28 \\ b-5 = 12u+52 \end{cases} \implies B(4u+21;12u+57)$$
Ta có: $\overrightarrow{CB} = (4u+28;12u+52); \overrightarrow{AB} = (4u+16;12u+56)$.
Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên:
$$\begin{aligned} \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AB} = 0 &\iff 16(u+7)(u+4) + 16(3u+13)(3u+14) = 0 \\ &\iff 5u^2 + 46u + 105 = 0 \\ &\iff \left[\begin{array}{l} u = -\dfrac{21}{5} \\ u = -5 \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $u = -\dfrac{21}{5}$, ta có $B\left(\dfrac{21}{5}; \dfrac{33}{5}\right)$
- Với $u = -5$, ta có: $B(1;-3)$ không thỏa mãn.

Vậy $A(5;1), B\left(\dfrac{21}{5}; \dfrac{33}{5}\right)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 = y + 3\sqrt{x+y+3} \\ 6x^2 + 2xy + 2\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right) = 3(x^2 - y - 4)\sqrt[3]{2x^2 + xy + 3x + 2} \end{cases}$$

ĐK: $\begin{cases} x + y + 3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$.
Từ phương trình đầu của hệ, ta có:
$$x^2 + 3x = x + y + 3 + 3\sqrt{x+y+3} \iff f(x) = f\left(\sqrt{x+y+3}\right)$$
Trong đó $f(t) = t^2 + 3t, \quad (t \geq 0)$. Ta có:
$$f'(t) = 2t + 3 > 0, \quad \forall t \geq 0$$
Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$. Do đó:
$$f(x) = f\left(\sqrt{x+y+3}\right) \iff x = \sqrt{x+y+3} \iff y = x^2 - x - 3$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta có:

$$\begin{aligned}
&2x^3+4x^2-4x-2=3(x-1)\sqrt[3]{x^3+x^2+2}\\
\iff &(x-1)\left(2x^2+6x+2-3\sqrt[3]{x^3+x^2+2}\right)=0\\
\iff &\left[\begin{array}{l} x=1\\ 2x^2+6x+2-3\sqrt[3]{x^3+x^2+2}=0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Với $x=1$, ta có $y=-3$.
- Ta có:

$$\begin{aligned}
&2x^2+6x+2-3\sqrt[3]{x^3+x^2+2}=0\\
\iff &(x+1)^3+3(x+1)=x^3+x^2+2+3\sqrt[3]{x^3+x^2+2}\\
\iff &g(x+1)=g\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2}\right)
\end{aligned}$$

Trong đó $g(t)=t^3+3t$. Ta có:

$$g'(t)=3t^2+3>0,\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Suy ra hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$\begin{aligned}
g(x+1)=g\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2}\right) &\iff x+1=\sqrt[3]{x^3+x^2+2}\\
&\iff 2x^2+3x-1=0\\
&\iff \left[\begin{array}{ll} x=\dfrac{-3+\sqrt{11}}{4} & \\ x=\dfrac{-3-\sqrt{11}}{4} & \text{(loại)}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $x=\dfrac{-3+\sqrt{11}}{4}$, ta có $y=\dfrac{-8-5\sqrt{11}}{8}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $(1;-3),\left(\dfrac{-3+\sqrt{11}}{4};\dfrac{-8-5\sqrt{11}}{8}\right)$

Bài 3

Cho x,y là các số thực thỏa mãn: $4x^2+y^2\le 8$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{(2x+6)^2+(y+6)^2+4xy-32}{2x+y+6}$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
&8\ge 4x^2+y^2\ge\frac{(2x+y)^2}{2}\\
\iff &(2x+y)^2\le 16\\
\iff &-4\le 2x+y\le 4\\
\iff &2\le 2x+y+6\le 10
\end{aligned}$$

Đặt $t = 2x + y + 6, t \in [2;10]$. Khi đó:

$$P = 2x + y + 6 + \frac{4}{2x + y + 6} = f(t)$$

Xét hàm số: $f(t) = t + \frac{4}{t}, \quad t \in [2;10]$. Ta có:

$$f'(t) = 1 - \frac{4}{t^2}; \quad f'(t) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2 \quad \text{(loại)} \end{array}\right. ; \quad f(2) = 4; f(10) = \frac{52}{5}.$$

Vậy:

$$\max P = \frac{52}{5} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} ; \quad \min P = 4 \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} .$$

61 THPT Đa Phúc (Hà Nội)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $E, F\left(\frac{11}{2};3\right)$ lần lượt là trung điểm AB, AD. Gọi K là điểm thuộc cạnh CD sao cho $KD = 3KC$. Phương trình đường thẳng $EK: 19x - 8y - 18 = 0$. Xác định tọa độ đỉnh C, biết điểm E có hoành độ nhỏ hơn 3.

Lời giải

Bài toán này trùng với bài 1 của Đề thi THPT Lương Ngọc Quyến (Thái Nguyên) - Đề 14.

Bài 2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2 + xy + y^2}{3}} = x + y \\ x\sqrt{2xy + 5x + 3} = 4xy - 5x - 3 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $2xy + 5x + 3 \geq 0$.
Ta có:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} \geq \frac{|x + y|}{2} + \frac{|x + y|}{2} = |x + y| \geq x + y$$

Do đó phương trình đầu của hệ tương đương với: $x = y \geq 0$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$6x^2 - x\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - (2x^2 + 5x + 3) = 0$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 5x + 3} \\ x = -\frac{1}{3}\sqrt{2x^2 + 5x + 3} \quad \text{(phương trình vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\frac{1}{2} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Từ $x = 3$ suy ra $y = 3$.
Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(3;3)$.

Bài 3

Cho a,b,c là các số thực đôi một phân biệt thỏa mãn: $\begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ca>0 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=2\left(\sqrt{\frac{2}{(a-b)^2}+\frac{2}{(b-c)^2}}+\frac{1}{|c-a|}\right)+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2,\quad \forall x,y$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}\geq\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \forall x,y>0$$

Dấu "= xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Mặt khác:

$$P\geq\frac{2}{|a-b|}+\frac{2}{|b-c|}+\frac{2}{|c-a|}+\frac{5}{\sqrt{ab+ac+ca}}$$

Giả sử: $a>b>c$. Khi đó:

$$P\geq\frac{10}{|a-c|}+\frac{10}{2\sqrt{ab+ac+ca}}\geq\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}$$

Ta có:

$$(1-b)(1+3b)=\frac{1}{3}(3-3b)(1+3b)\leq\frac{4}{3}$$

$\Longrightarrow P\geq 10\sqrt{6}$.

Vậy $\min P=10\sqrt{6}$ khi và chỉ khi $a=\frac{2+\sqrt{6}}{6}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{2-\sqrt{6}}{6}$ và các hoán vị.

62 THPT Lạng Giang I (Bắc Giang)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Gọi E,F lần lượt là chân đường cao hạ từ B,C. Tìm tọa độ điểm A, biết $E(7;1), F\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right)$, phương trình đường thẳng BC là $x+3y-4=0$ và điểm B có tung độ dương.

Hướng dẫn

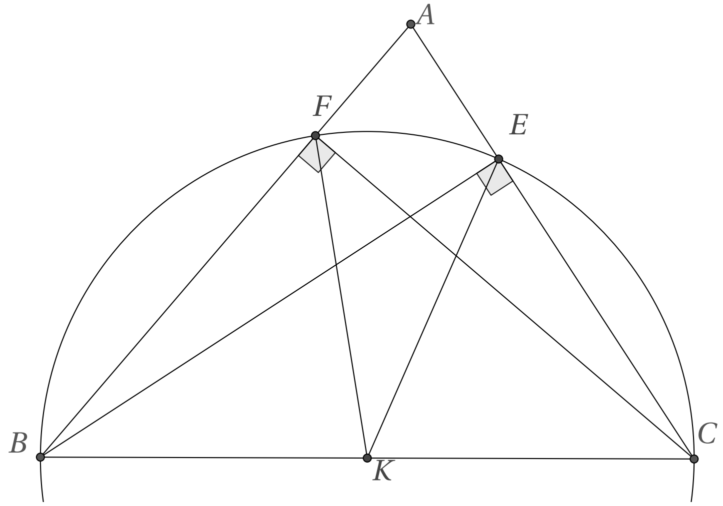
Gọi K là trung điểm của BC. Khi đó, vì $K\in BC$ nên $K(4-3t;t)$.
Vì $\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^o$ nên B,C,E,F nằm trên đường tròn tâm K, bán kính KB. Do đó:

$$\begin{aligned}&KE=KF\\ \iff&(3+3t)^2+(t-1)^2=\left(\frac{9}{5}-3t\right)^2+\left(t-\frac{13}{5}\right)^2\\ \iff&t=0\end{aligned}$$

Vậy $K(4;0)$.
Vì $B \in BC$ nên $B(4-3b;b), b>0$.
Từ $KB = KE$, tính được $B(1;1)$.
Sử dụng tính chất trung điểm của K, ta tìm được $C(7;-1)$.
Khi đó:

$$CE : x = 7; \quad BF : 4x - 3y - 1 = 0.$$

Vì $A = BF \cap CE$ nên $A(7;9)$



Bài 2

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (xy+3)^2 + (x+y)^2 = 8 \\ \dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{y}{y^2+1} = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \quad (74)$$

Lời giải

Nhận xét: $(0;0)$ không phải là nghiệm của hệ.
Với $x \neq 0, y \neq 0$, ta có:

$$(74) \iff \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x}.\dfrac{y^2+1}{y} = -8 \\ \dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{y}{y^2+1} = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Đặt $a = \dfrac{x}{x^2+1}, b = \dfrac{y}{y^2+1}$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b = -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{ab} = -8 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} (a;b) = \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right) \\ (a;b) = \left(\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{2}\right) \end{array} \right. .$$

Ta có hai trường hợp:

- $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$

- $\begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $\left(-1; 2 \pm \sqrt{3}\right), \left(2 \pm \sqrt{3}; -1\right)$

Bài 3

Cho các số thực dương x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}} - \frac{8}{(x+2)(y+2)(z+2)}$$

Lời giải

Với mọi số thực dương x, y, z, ta có:
$$\begin{cases} x^2+y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{2} \\ z^2+4 \geq \dfrac{(z+2)^2}{2} \end{cases}$$
Suy ra:
$$x^2+y^2+z^2+4 \geq \frac{1}{2}\left[(x+y)^2+(z+2)^2\right]$$
$$\Longrightarrow x^2+y^2+z^2+4 \geq \frac{1}{2}\left(x+y+z+2\right)^2$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}} \leq \frac{2}{x+y+z+2}$$

Mặt khác:
$$(x+2)(y+2)(z+2) \leq \frac{(x+y+z+6)^3}{27}$$
$$\Longrightarrow -\frac{8}{(x+2)(y+2)(z+2)} \leq -\frac{216}{(x+y+z+6)^3}, \quad \forall x, y, z > 0$$
Do đó:
$$P \leq \frac{2}{x+y+z+2} - \frac{216}{(x+y+z+6)^3}, \quad \forall x, y, z > 0$$
Đặt $t = x+y+z+2, t > 2$. Khi đó:
$$P \leq \frac{2}{t} - \frac{216}{(t+4)^3} = f(t)$$
Ta có:
$$f'(t) = \frac{648}{(t+1)^4} - \frac{2}{t^2}, \forall t > 2; \qquad \begin{cases} f'(t) = 0 \\ t > 2 \end{cases} \iff t = 8$$
Bảng biến thiên:

t	2		8		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0

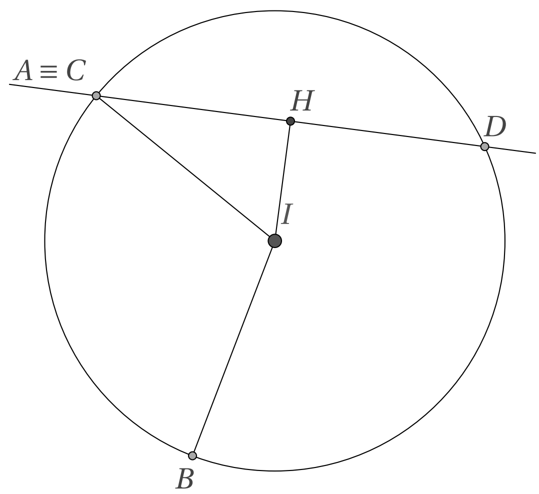
Do đó:
$$P \leq \max f(t) = f(8) = \frac{1}{8}$$
Vậy $\max P = \frac{1}{8}$, đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

63 THPT Lý Tự Trọng (Khánh Hòa)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2), B(4;1)$ và đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A, B và cắt đường thẳng d tại C, D sao cho $CD=6$.

Lời giải



Nhận xét: Vì $A \in d$ nên $A \equiv C$ hoặc $A \equiv D$. Giả sử $A \equiv C$.
Gọi I là tâm đường tròn (C), bán kính $R>0$.
(C) đi qua A, B nên I thuộc đường trung trực Δ của AB.
Ta có phương trình của $\Delta: 3x-y-6=0$. Khi đó:

$$I(a;3a-6), R=\sqrt{10a^2-50a+65}.$$

Gọi H là trung điểm CD, ta có:

$$R=IC \iff R=\sqrt{CH^2+d^2_{(I,d)}}$$

$$\iff \sqrt{10a^2-50a+65}=\sqrt{9+\frac{(9a-29)^2}{25}}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=\frac{43}{13} \end{array}\right.$$

Ta có hai trường hợp:

- $a=1$. Ta có $I(1;-3), R=5$. Phương trình đường tròn (C) có dạng: $(x-1)^2+(y+3)^2=25$.
- $a=\frac{43}{13}$. Ta có $I\left(\frac{43}{13};\frac{51}{13}\right), R=\frac{5\sqrt{61}}{13}$. Phương trình đường tròn (C) có dạng:

$$\left(x-\frac{43}{13}\right)^2+\left(y-\frac{51}{13}\right)^2=\frac{1525}{169}.$$

Bài 2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-6x^2+13x=y^3+y+10 \\ \sqrt{2x+y+5}-\sqrt{3-x-y}=x^3-3x^2-10y+6 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+y+5\ge 0 \\ 3-x-y\ge 0 \end{cases}$

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$(x-2)^3+(x-2)=y^3+y \iff f(x-2)=f(y)$$

Trong đó $f(t)=t^3+t$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có:

$$f'(t)=3t^2+1>0, \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$f(x-2)=f(y) \iff x-3=y$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{3x+3}-\sqrt{5-2x}=x^3-3x^2-10x+26 \\ -1\le x\le \frac{5}{2} \end{cases} \quad (75)$$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{3x+3} - \sqrt{5-2x}$ trên $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$. Ta có:

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+3}} + \frac{1}{\sqrt{5-2x}} > 0, \quad \forall x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right]$$

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$.

Xét hàm số $h(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 26$ trên $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$. Ta có:

$$h'(x) = 3x^2 - 6x - 10 < 0, \quad \forall x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right]$$

Suy ra hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$.

Mặt khác $g(2) = h(2) = 2$. Do đó hệ (75) có nghiệm duy nhất $x = 2$.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(2; -1)$.

Bài 3

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{4 + 2\ln(1+x) - y} + \frac{1}{4 + 2\ln(1+y) - z} + \frac{1}{4 + 2\ln(1+z) - x}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương a, b, c, ta có:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \implies \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \tag{76}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.
Áp dụng (76), ta có:

$$P \geq \frac{9}{12 + 2\ln(1+x) - x + 2\ln(1+y) - y = 2\ln(1+z) - z}$$

Xét hàm số $f(t) = 2\ln(1+t) - t$ trên $[0; 3]$. Ta có:

$$f'(t) = \frac{2}{1+t} - 1; \quad f'(t) = 0 \iff t = 1$$

$$f(0) = 0; \quad f(1) = \ln 4 - 1; \quad f(3) = 4\ln 2 - 3$$

Do đó:

$$4\ln 2 - 3 = \min_{[0;3]} f(t) \leq f(t) \leq \max_{[0;3]} f(t) = \ln 4 - 1$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} & 12\ln 2 - 9 \leq f(x) + f(y) + f(z) \leq 3\ln 4 - 3 \\ \implies & 12\ln 2 + 3 \leq f(x) + f(y) + f(z) + 12 \leq 9 + 3\ln 4 \\ \implies & P \geq \frac{9}{12 + f(x) + f(y) + f(z)} \geq \frac{9}{9 + 3\ln 4} = \frac{3}{3 + \ln 4} \end{aligned}$$

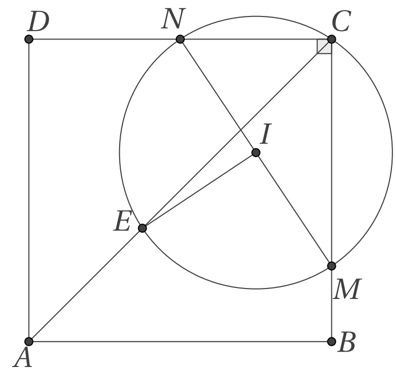
Vậy $\min P = \frac{3}{3 + \ln 4} \iff x = y = z = 1$.

64 THPT Quảng Hà (Quảng Ninh)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $A(2;2)$. Biết điểm $M(6;3)$ thuộc cạnh BC, điểm $N(4;6)$ thuộc cạnh CD. Tìm tọa độ đỉnh C.

Lời giải



Gọi I là trung điểm MN. Ta có $I\left(5;\dfrac{9}{2}\right)$.

Do $\widehat{MCN}=90^o$ nên C thuộc đường tròn tâm I đường kính MN.
Vì CA là phân giác trong của góc $\widehat{MCN}$ nên CA giao với đường tròn (I) tại điểm E là điểm chính giữa cung MN không chứa C (E và A cùng phía so với MN). Suy ra E là giao điểm của (I) và trung trực của MN.

Phương trình đường tròn $(I):(x-5)^2+\left(y-\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{13}{4}$.

Phương trình trung trực của MN là: $4x-6y+7=0$.
Tọa độ của điểm E là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-5)^2+\left(y-\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{13}{4}\\ 4x-6y+7=0\end{cases}\iff\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{13}{2},y=\dfrac{11}{2}\\ x=\dfrac{7}{2},y=\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$$

Vì E,A cùng phía so với MN nên chọn $E\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{7}{2}\right)$.

Phương trình đường thẳng $AE:x-y=0$. Do $C\in AE$ nên $C(c;c)$. Vì $C\in(I)$ nên:

$$(c-5)^2+\left(c-\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{13}{4}\iff\left[\begin{array}{l}c=6\\ c=\dfrac{7}{2}\quad\text{(loại, vì trùng }E)\end{array}\right.$$

Vậy $C(6;6)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^4+4y^3+(x^4-1)y+4y^2=1\\ 8y^3+4\sqrt{x^2+1}=x^2+6y+2\end{cases}$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}&x^4+4y^3+(x^4-1)y+4y^2=1\\ \iff&x^4(y+1)+4y^2(y+1)=y+1\\ \iff&(x^4+4y^2-1)(y+1)=0\\ \iff&\left[\begin{array}{l}y=-1\\ x^4+4y^2=1\end{array}\right.\end{aligned}$$

Ta xét hai trường hợp:

- Với $y=-1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta có:

$$4\sqrt{x^2+1}=x^2+4\iff\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

- Với $x^4+4y^2=1 \implies \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\dfrac{1}{2} \le y \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$8y^3-6y-2+4\sqrt{x^2+1}-x^2=0 \tag{77}$$

Xét hàm số $f(x)=4\sqrt{x^2+1}-x^2$ trên $[-1;1]$, ta có:

$$f'(x)=\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}-2x; \quad f'(x)=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$
$$f(\pm 1)=4\sqrt{2}-1; \quad f(0)=4; \quad f(\pm\sqrt{3})=5$$

Vậy $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(0)=4$.

Xét hàm số $g(y)=8y^3-6y-2$ trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, ta có:

$$g'(y)=24y^2-6; \quad g'(y)=0 \iff y=\pm\frac{1}{2}; \quad g\left(\frac{1}{2}\right)=-4; \quad g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

Vậy $\min\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} g(y)=g\left(\frac{1}{2}\right)=-4$.

Do đó:

$$f(x)+g(y)\ge 0, \quad \forall x\in[-1;1], \forall y\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right].$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x;y)=\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Suy ra:

$$(77) \iff \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $\left(0;\frac{1}{2}\right), (0;-1), (2\sqrt{2};-1), (-2\sqrt{2};-1)$.

Bài 3

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^2}{yz+\sqrt{8+x^3}}+\frac{y^2}{zx+\sqrt{8+y^3}}+\frac{z^2}{xy+\sqrt{8+z^3}}$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh rằng: với các số thực $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ sao cho $a_2, b_2, c_2>0$, ta luôn có:

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{b_1^2}{b_2}+\frac{c_1^2}{c_2}\ge\frac{(a_1+b_1+c_1)^2}{a_2+b_2+c_2} \tag{78}$$

Chứng minh

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki cho hai bộ $\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_2}};\frac{b_1}{\sqrt{b_2}};\frac{c_1}{\sqrt{c_2}}\right)$ và $\left(\sqrt{a_2};\sqrt{b_2};\sqrt{c_2}\right)$, ta có:

$$\left(\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{b_1^2}{b_2}+\frac{c_1^2}{c_2}\right)(a_2+b_2+c_2)\ge(a_1+b_1+c_1)^2$$

Do $a_2+b_2+c_2>0$ nên ta có điều phải chứng minh.

Quay lại bài toán, áp dụng BĐT (78), ta có:

$$P \geq \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx+\sqrt{8+x^3}+\sqrt{8+y^3}+\sqrt{8+z^3}}$$

Mặt khác:

$$\sqrt{8+x^3} = \sqrt{(2+x)(4-2x+x^2)} \leq \frac{6-x+x^2}{2}$$

$$\sqrt{8+y^3} = \sqrt{(2+y)(4-2y+y^2)} \leq \frac{6-y+y^2}{2}$$

$$\sqrt{8+z^3} = \sqrt{(2+z)(4-2z+z^2)} \leq \frac{6-z+z^2}{2}$$

Do đó:

$$P \geq \frac{2(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)-(x+y+z)+x^2+y^2+z^2+18} = 2\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2}-(x+y+z)+18$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ hoặc $x=y=z=2$.
Đặt $t=x+y+z \geq 3$, ta có:

$$P \geq \frac{2t^2}{t^2-t+18}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2t^2}{t^2-t+18}$ trên $[3;+\infty)$. Ta có:

$$f'(t) = \frac{-2t^2+72t}{(t^2-t+18)^2}; \quad f'(t)=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=36 \end{array}\right. ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(t) = 2$$

Bảng biến thiên:

t	3		36		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{144}{71}$	$\searrow$	2

Ta có: $\min\limits_{[3;+\infty)} f(t) = f(3) = \dfrac{3}{4}$.
Vậy $\min P = \dfrac{3}{4}$ khi $x=y=z=1$.

65 THPT Thống nhất (Bình Phước)

Bài 1

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x-2y-\sqrt{xy}=0 \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{2y-1}=1 \end{cases}$$

Lời giải

ĐK: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$\begin{aligned}
& x-y-(y+\sqrt{xy})=0 \\
\Longleftrightarrow & \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)=0 \\
\Longleftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}-2\sqrt{y}=0 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=0 \quad \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & x=4y
\end{aligned}$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta có:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{4y-1}-\sqrt{2y-1}=1 \\
\Longleftrightarrow & \sqrt{4y-1}=\sqrt{2y-1}+1 \\
\Longleftrightarrow & 4y-1=2y-1+2\sqrt{2y-1}+1 \\
\Longleftrightarrow & 2y-1=2\sqrt{2y-1} \\
\Longleftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \sqrt{2y-1}=0 \\ \sqrt{2y-1}=2 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $\left(2;\dfrac{1}{2}\right),\left(10;\dfrac{5}{3}\right)$.

Bài 2

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho các điểm $A(1;0),B(-2;4),C(-1;4),D(3;5)$ và đường thẳng $d:3x-y-5=0$. Tìm tọa độ điểm M trên d sao cho hai tam giác MAB,MCD có diện tích bằng nhau.

Hướng dẫn

Ta có: $AB=5,CD=\sqrt{17}$ và $AB:4x+3y-4=0;CD:x-4y+17=0$. Vì $M\in d$ nên $M(m;3m-5)$.
Yêu cầu của bài toán tương đương với:

$$S_{\triangle MAB}=S_{\triangle MCD}\Longleftrightarrow AB.d_{(M,AB)}=CD.d_{(M,CD)}$$

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, ta thu được 1 phương trình ẩn m.
Giải phương trình, ta thu được: $M_1\left(\dfrac{7}{3};2\right),M_2(-9;-32)$.

Nhận xét: Câu này không xứng tầm với đề thi THPT Quốc gia vì nó chỉ yêu cầu tính toán thông thường chứ không cần dùng các tính chất hình học đặc biệt.

Bài 3

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b^2}{b+c}+\frac{b+c^2}{c+a}+\frac{c+a^2}{a+b}\geq 2 \qquad (79)$$

Lời giải

Ta có:

$$VT(79) = \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) + \left(\frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{a+b}\right) = A + B$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} A+3 &= \frac{1}{2}\left((a+b)+(b+c)+(c+a)\right)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \\ &\geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.3\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow A \geq \frac{3}{2}$.

Hơn nữa:

$$1 = (a+b+c)^2 \leq \left(\frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{a+b}\right)(a+b+b+c+c+a) = 2B$$

$\Longrightarrow B \geq \frac{1}{2}$.

Từ đó ta có:

$$VT(79) \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 = VP(79)$$

Ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

66 THPT Hồng Quang (Hải Dương)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A lần lượt là $d_1 : x - 3y = 0$ và $d_2 : x + 5y = 0$. Đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta : x + y - 2 = 0$ và có hoành độ dương. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết rằng đường trung tuyến kẻ từ C đi qua điểm $E(-2;6)$

Lời giải

Do $A = d_1 \cap d_2$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + 5y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

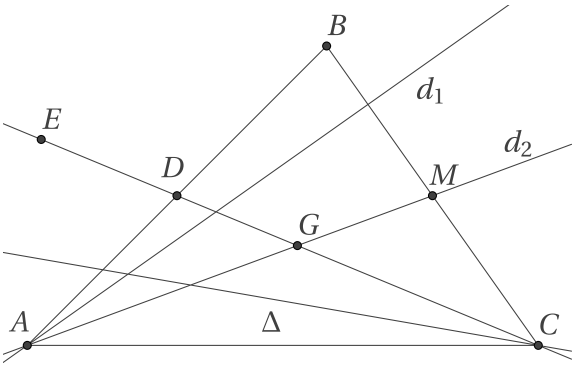
Vậy $A(0;0)$.

Vì $C \in \Delta$ nên $C(c;2-c)$. Đường thẳng BC đi qua C và vuông góc với d_1 nên có phương trình dạng:

$$3x + y - 2c - 2 = 0$$

Gọi M là trung điểm BC. Vì $M = BC \cap d_2$ nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 5y = 0 \\ 3x + y - 2c - 2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5c+5}{7} \\ y = -\dfrac{c+1}{7} \end{cases}$$



Vậy $M\left(\frac{5c+5}{7}; -\frac{c+1}{7}\right)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác, ta có:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{10c+10}{21} \\ y_G = \dfrac{-2c-2}{21} \end{cases}$$

Khi đó: $\overrightarrow{EC}=(c+2;-4-c)$; $\overrightarrow{EG}=\left(\dfrac{10c+52}{21};\dfrac{-2c-128}{21}\right)$

Vì E,G,C thẳng hàng nên $\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EG}$. Do đó:

$$\frac{\frac{10c+52}{21}}{c+2}=\frac{\frac{-2c-128}{21}}{-c-4}\iff c^2-5c-6=0\iff\left[\begin{array}{ll}c=-1 & \text{(loại)}\\ c=6\end{array}\right.$$

Vậy $C(6;-4)$. Khi đó: $M(5;-1)$. Suy ra $B(4;2)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{y}{x+1}-\dfrac{1+y}{y}\\ \sqrt{8y+9}=(x+1)\sqrt{y}+2\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\neq -1\\ y>0\end{cases}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} x-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{y}{x+1}-\frac{1+y}{y} &\iff x+\frac{1+y}{y}=\frac{y}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\\ &\iff \frac{xy+y+1}{y}-\frac{yx+y+1}{(x+1)^2}=0\\ &\iff \left[\begin{array}{l} xy+y+1=0\\ y=(x+1)^2\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Với $y=(x+1)^2$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta có:

$$\sqrt{8(x+1)^2+9}=(x+1)|x+1|+2$$

  - Trường hợp $x>-1$, đặt $t=x+1,(t>0)$. Ta có phương trình:

$$\begin{aligned}\sqrt{8t^2+9}=t^2+2 &\iff 8t^2+9=t^4+4t^2+4\\ &\iff t^4-2t^2-5=0\\ &\iff t^2=5\\ &\iff \left[\begin{array}{ll} t=\sqrt5\\ t=-\sqrt5 & \text{(loại)}\end{array}\right.\\ &\iff x=-1+\sqrt5\end{aligned}$$

    Từ đó suy ra $y=5$.

  - Trường hợp $x<-1$. đặt $t=x+1,(t<0)$. Ta có phương trình:

$$\begin{aligned}\sqrt{8t^2+9}=-t^2+2 &\iff \begin{cases} 8t^2+9=t^4-4t^2+4\\ -t^2+2\geq 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} t^4-12t^2-5=0\\ t^2\leq 2\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} t^2=6+\sqrt{41}\\ t^2\leq 2\end{cases} \quad \text{(vô nghiệm)}\end{aligned}$$

- Với $(x+1)y=-1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta có:

$$\sqrt{8y+9}+\frac{1}{y}\sqrt{y}-2=0 \tag{80}$$

Mặt khác: $y>0 \Longrightarrow 8y+9>9 \Longrightarrow \sqrt{8y+9}>3$ Do đó phương trình (80) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\left(-1+\sqrt{5};5\right)$.

Bài 3

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện: $x>y$ và $(x+z)(y+z)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x+z)^2}+\frac{4}{(y+z)^2}$$

Lời giải

Đặt $x+y+z=a$. Từ giả thiết, ta có $(x+z)(y+z)=1$. Suy ra: $y+z=\frac{1}{a}$.
Mặt khác:

$$x>y \Longrightarrow x+z>y+z \Longrightarrow a>1$$

Ta có:

$$x-y=x+z-(y+z)=a-\frac{1}{a}=\frac{a^2-1}{a}$$

$$P=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}+\frac{4}{a^2}+4a^2=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}+3a^2+a^2+\frac{4}{a^2}\geq\frac{a^2}{(a^2-1)^2}+3a^2+4$$

Đặt $t=a^2>1$. Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{(t-1)^2}+3t+4$ trên $(1;+\infty)$. Ta có:

$$f'(t)=-\frac{t+1}{(t-1)^3}+3;\quad f'(t)=0 \Longleftrightarrow t=2$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$:

t	1		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	12	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên , ta có:

$$P\geq f(t)\geq 12, \forall t>1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} x+z=\sqrt{2} \\ y+z=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

Vậy $\min P=12$.

67 THPT Sông Lô (Vĩnh Phúc)

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A là $d: 2x+y-3=0$. Đỉnh B thuộc trục hoành, đỉnh C thuộc trục tung và diện tích tam giác ABC bằng 5. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Lời giải

Giả sử $B(b;0, C(0;c)$. Khi đó $\overrightarrow{BC}=(-b;c)$. Gọi H là trung điểm BC. Ta có $H\left(\dfrac{b}{2};\dfrac{c}{2}\right)$.

Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(-1;2)$.
Do tam giác ABC cân tại A nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC}.\vec{u}=0 \\ H\in d \end{cases} \iff \begin{cases} b+2c=0 \\ 2b+c=6 \end{cases} \iff \begin{cases} b=4 \\ c=-2 \end{cases}$$

Suy ra: $B(4;0), C(0;-2)$.
Ta có $BC=2\sqrt{2}, H(2;-1)$.
Mặt khác:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AH \iff AH=\sqrt{5}$$

Giả sử $A(a;3-2a)$. Ta có:

$$AH=\sqrt{5} \iff \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=3 \end{array}\right.$$

Vậy $A(1;1)$ hoặc $A(3;-3)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện $|x|\ge|y|$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2-y^2}, u\ge 0 \\ v=x+y \end{cases}$.

Vì $x=-y$ không thỏa mãn hệ nên ta xét $x\neq -y$. Ta có $y=\dfrac{1}{2}\left(v-\dfrac{u^2}{v}\right)$.

Hệ phương trình đã cho có dạng:

$$\begin{cases} u+v=12 \\ \dfrac{u}{2}\left(v-\dfrac{u^2}{v}\right)=12 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} u=4; v=8 \\ u=3; v=9 \end{array}\right.$$

- $\begin{cases} u=4 \\ v=8 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x^2-y^2}=4 \\ x+y=8 \end{cases} \iff \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ (thỏa mãn).

- $\begin{cases} u=3 \\ v=9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-y^2}=3 \\ x+y=9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm: $(5;3),(5;4)$.

Bài 3

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện: $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a}}{2+b\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{2+c\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{c}}{2+a\sqrt{c}}\geq 1$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{\sqrt{a}}{2+b\sqrt{a}}=\frac{a}{2\sqrt{a}+ba}\geq\frac{a}{1+a+ba} \qquad (\text{do } 1+a\geq 2\sqrt{a})$$

Tương tự:

$$\frac{\sqrt{b}}{2+c\sqrt{b}}\geq\frac{b}{1+b+bc}$$
$$\frac{\sqrt{c}}{2+a\sqrt{c}}\geq\frac{c}{1+c+ac}$$

Cộng theo vế các BĐT trên, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a}}{2=b\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{2+c\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{c}}{2+a\sqrt{c}}&\geq\frac{a}{1+a+ba}+\frac{b}{1+b+cb}+\frac{c}{1+c+ac}\\&=\frac{abc}{bc+bca+babc}\frac{b}{1+b+cb}+\frac{cb}{b+bc+abc}\\&=\frac{1}{bc+1+b}\frac{b}{1+b+cb}+\frac{cb}{b+bc+1}=1\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

68 THPT Chuyên Nguyễn Huệ (Quảng Nam) lần 3

Bài 1

Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ và $P(2;1)$. Một đường thẳng d đi qua P cắt đường tròn tại A và B. Tiếp tuyến tại A và B của đường tròn cắt nhau tại M. Tìm tọa độ của M biết M thuộc đường tròn $(C_1): x^2+y^2-6x-4y+11=0$

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=2$.

Gọi $M(a;b)$. Vì $M\in(C_1)$ nên $a^2+b^2-6a-4b+11=0 \quad (a)$

Gọi K là trung điểm IM, suy ra $K\left(\frac{a+1}{2};\frac{b+2}{2}\right)$

Phương trình đường tròn đường kính IM:

$$\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b+2}{2}\right)^2=\frac{(a-1)^2}{4}+\frac{(b-2)^2}{4}$$
$$\iff x^2+y^2-(a+1)x-(b+2)y-a-2b=0$$

Vì A,B thuộc (C) và (IM) nên suy ra phương trình đường thẳng AB: $(a-1)x+(b-2)y+1-a-2b=0$

Do $P\in AB \implies a-b-3=0 \quad (b)$

Từ (a) và (b) suy ra $\begin{cases} a=4\\ b=1\end{cases} \implies M(4;1)$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\sqrt{2y-1}+\sqrt{x-y}=5\\ y^2+2=xy+y\end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} 2y-1\geq 0\\ x-y\geq 0\end{cases} \iff \begin{cases} y\geq \dfrac{1}{2}\\ x\geq y\end{cases}$

Đặt $a=\sqrt{2y-1}, b=\sqrt{x-y}$ $(a,b\geq 0)$. Khi đó $\begin{cases} y=\dfrac{a^2+1}{2}\\ x-y=b^2\end{cases} \implies x+y=a^2+1+b^2$

Khi đó hệ đã cho trở thành $\begin{cases} a^2+b^2+a+b-4=0\\ a^2b^2+a^2+b^2-3=0\end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S=a+b\\ P=ab\end{cases}$ $(S,P\geq 0, S^2\geq 4P)$ ta được $\begin{cases} S^2+S-2P=4 & (a)\\ P^2+S^2-2P=3 & (b)\end{cases}$

Trừ (a) cho (b) ta được $S-P^2=1 \implies S=P^2+1$

Thay $S=P^2+1$ vào (b) ta được

$$P^2+P^4+2P^2+1-2P=3$$
$$\iff P^4+3P^2-2P-2=0$$
$$\iff (P-1)(P^3+P^2+4P+2)=0$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} P=1\\ P^3+P^2+4P+2=0\end{array}\right.$$

Vì $P\geq 0$ nên $(*) \iff P=1 \implies S=2$. Từ đó $a=b=1 \implies \begin{cases} x=2\\ y=1\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(2;1)$

Bài 3

Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a^4+b^4+c^4+3(ab+bc+ca)$$

Hướng dẫn

Kí hiệu $P = P(a,b,c) = a^4+b^4+c^4+3(ab+bc+ca)$.
Dễ thấy chỉ cần xét $a, b, c \geq 0$.
Giả sử $a = \max\{a,b,c\}$ và đặt $s = \sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}}, p = bc$. Ta sẽ chứng minh:

$$P(a,b,c) \leq P(a,s,s) \tag{81}$$

Khi đó, để ý rằng $a^2+s^2+s^2=3$, bài toán được đưa về trường hợp có hai số bằng nhau.
Viết lại biểu thức theo s và p, ta có:

$$P(a,b,c) = 4s^4-2p^2+3p+3a\sqrt{2s^2+2p} = f(p)$$

Xem $f(p)$ là hàm số biến p:

$$f'(p) = -4p+3+\frac{3a}{\sqrt{2s^2+2p}}$$

Vì $0 \leq p \leq s \leq 1 \leq a$ nên:

$$f'(p) \geq -4+3+\frac{3}{\sqrt{2+2}} = \frac{1}{2} > 0$$

Do đó $f(p)$ đồng biến trên $[0,s]$. Suy ra:

$$f(p) \leq f(s) = P(a,s,s)$$

(81) được chứng minh xong.
Bây giờ chỉ cần xét bài toán khi có hai số bằng nhau (cụ thể hơn nữa là trong trường hợp $a \geq 1 \geq b = c$).
Bài toán bây giờ trở thành một biến, tính đạo hàm và lập bảng biến thiên ta dễ dàng tìm được max khi $a=b=c=1$ hoặc $a=2b=2c=\sqrt{2}$

69 THPT Chuyên Hùng Vương (Phú Thọ)

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM và đường cao AH lần lượt có phương trình $13x-6y-2=0$, $x-2y-14=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là $I(-6;0)$.

Lời giải

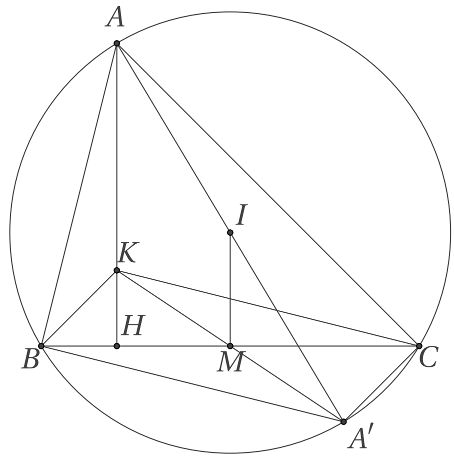
Tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-2y-14=0 \\ 13x-6y-2=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-9 \end{cases} \Longrightarrow A(-4;-9)$$

Kẻ đường kính AA' của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Khi đó $A'(-8;9)$.
Gọi K là trực tâm $\triangle ABC$.
Dễ thấy $BKCA'$ có 2 cặp cạnh đối song song nên $BKCA'$ là hình bình hành. Do đó M là trung điểm $A'K$.
Vì K và M lần lượt nằm trên đường thẳng AH và AM nên tọa độ $K(2k+14,k)$ và $M\left(m,\dfrac{13m-2}{6}\right)$.
M là trung điểm $A'K$, suy ra:

$$\begin{cases} 2k+14-8=2m \\ k+9=2.\dfrac{13m-2}{6} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ m=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} K(12;-1) \\ M(2;4) \end{cases}$$



Đường thẳng BC đi qua M và nhận $\overrightarrow{AK}$ làm vtpt nên $BC: 2x+y-8=0$

Giả sử $B(b;8-2b)$. Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ nên

$$IA=IB \Longleftrightarrow 4+81=(b+6)^2+(2b-8)^2 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=1 \end{array}\right.$$

Với $b=3$ ta có $B(3;2)$. Do C đối xứng với B qua M nên $C(1;6)$

Với $b=1$ ta có $B(1;6)$. Do C đối xứng với B qua M nên $C(3;2)$.

Bài 2

Giải bất phương trình $2x+5\sqrt{x}>11+\dfrac{4}{x-2}$

Lời giải

Điều kiện $x\geq 0, x\neq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương:

$$2(x-2)+5\sqrt{x}>7+\frac{4}{x-2} \Longleftrightarrow 2(x-2)+5\sqrt{x}>\frac{7x}{x-2}$$

Dễ thấy $x=0$ không làm nghiệm của bất phương trình.
Xét $0<x\neq 2$, chia 2 vế của BPT cho $\sqrt{x}$ ta được $\dfrac{2(x-2)}{\sqrt{x}}+5>\dfrac{7\sqrt{x}}{x-2}$

Đặt $t=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}$, khi đó BPT trở thành

$$2t+5>\frac{7}{t} \Longleftrightarrow \frac{2t^2+5t-7}{t}>0 \Longleftrightarrow t(2t+7)(t-1)>0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>1 \\ -\dfrac{7}{2}<t<0 \end{array}\right.$$

Với $t>1$ ta có $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}>1$ hay

$$\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}}>0 \Longleftrightarrow x>4$$

Với $-\dfrac{7}{2}<t<0$ ta có $-\dfrac{7}{2}<\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}<0$ hay

$$\begin{cases} 0<x<2 \\ (\sqrt{x}+4)(2\sqrt{x}-1)>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{1}{4}<x<2$$

Vậy BPT đã cho có tập nghiệm là $\left(\dfrac{1}{4};2\right)\cup(4;+\infty)$

Bài 3

Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}+\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca}-\frac{3}{4}(a+b)^2$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}\geq\frac{a^2}{(b+c)^2+\frac{5(b+c)^2}{4}}=\frac{4a^2}{9(b+c)^2}$$

Tương tự $\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca}\geq\frac{4b^2}{9(c+a)^2}$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}+\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca}&\geq\frac{4a^2}{9(b+c)^2}+\frac{4b^2}{9(c+a)^2}\\&\geq\frac{4}{9}\left[\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2}\right]\\&\geq\frac{2}{9}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)^2\\&=\frac{2}{9}\left[\frac{a^2+b^2+c(a+b)}{c^2+c(a+b)+ab}\right]^2\\&\geq\frac{2}{9}\left[\frac{\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)}{c^2+c(a+b)+\frac{(a+b)^2}{4}}\right]^2\\&=\frac{2}{9}\left[\frac{2(a+b)^2+4c(a+b)}{(a+b)^2+4c(a+b)+4c^2}\right]^2\end{aligned}$$

Vì $a+b+c=1$ nên $a+b=1-c$, do đó:

$$P\geq\frac{2}{9}\left[\frac{2(1-c)^2+4c(1-c)}{(1-c)^2+4c(1-c)+4c^2}\right]^2-\frac{3}{4}(1-c)^2=\frac{2}{9}\left[\frac{(1-c)(2+2c)}{(1+c)^2}\right]^2-\frac{3}{4}(1-c)^2=\frac{8}{9}\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2-\frac{3}{4}(1-c)^2$$

Xét hàm số $f(c)=\frac{8}{9}\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2-\frac{3}{4}(1-c)^2$ với $0<c<1$.

$$f'(c)=-\frac{16}{9}.\frac{1-c}{1+c}.\frac{2}{(1+c)^2}-\frac{3}{2}(c-1)=\frac{32}{9}.\frac{c-1}{(c+1)^3}-\frac{3}{2}(c-1)$$

$$f'(c)=0\iff\left[\begin{array}{l}c=1\\c=\frac{1}{3}\end{array}\right.\iff c=\frac{1}{3}\quad(\text{do } c<1)$$

Lập bảng biến thiên ta được $f(c)\geq f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{9}$ với mọi $c\in(0;1)$

Vậy $P\geq-\frac{1}{9}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy $\min P=-\frac{1}{9}$

70 THPT Chuyên Nguyễn Huệ (Quảng Nam)

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho điểm $M(1;2)$ và hai đường thẳng $d_1 : x-2y+1=0$ và $d_2 : 2x+y+2=0$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt các đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại B, C (B, C không trùng A) sao cho $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Dễ thấy $d_1 \perp d_2$ và giao điểm $A(-1;0)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Khi đó $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{AH^2}\geq\dfrac{1}{AM^2}$

Vậy $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $H\equiv M$.

$d\perp AM \implies d: x+y-3=0$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2+12y^2+24xy-9(x+2y)\sqrt{2xy}=0 \\ 5x^2-7y^2+xy=15 \end{cases}$ $(x, y\in\mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $xy\geq 0$.

Đặt phương trình đầu là (a), phương trình sau là (b). Ta có:

$$(a) \iff (x+2y)^2+4xy=3(x+2y)\sqrt{2xy}$$

Đặt $\begin{cases} u=x+2y \\ v=\sqrt{2xy} \end{cases}$ $(v\geq 0)$. Khi đó ta có:

$$u^2+2v^2=3uv \iff \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=2v \end{array}\right.$$

Với $u=v \implies x+2y=\sqrt{2xy}$ ta có:

$$\begin{cases} x+2y\geq 0 \\ xy\geq 0 \\ x^2+4y^2+2xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y\geq 0 \\ xy\geq 0 \\ (x-2y)^2+6xy=0 \end{cases} \iff x=y=0$$

Thế $x=y=0$ vào phương trình (b) thấy không thỏa mãn, vậy $x=y=0$ không phải là nghiệm của hệ.

Với $u=2v \implies x+2y=2\sqrt{2xy} \iff x=2y$

Thay $x=2y$ vào (b) ta được $y^2=1 \iff y=\pm 1$

Với $y=-1 \implies x=-2$. Không thỏa mãn.

Với $y=1 \implies x=2$. Thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x,y)=(2;1)$

Bài 3

Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $a+b+ab=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2}{1+b}+\frac{b^2}{1+a}+\frac{ab}{a+b}$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $a+b+ab+1=4 \iff (a+1)(b+1)=4$

Ta chứng minh được đánh giá sau $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\ge\frac{(x+y)^2}{a+b}$ với mọi $a,b>0, x,y\in\mathbb{R}$

Áp dụng đánh giá trên ta có:

$$P\ge\frac{(a+b)^2}{2+a+b}+\frac{3-(a+b)}{a+b}=\frac{(a+b)^2}{a+b+2}+\frac{3}{a+b}-1$$

Đặt $t=a+b$, thế thì do $3=a+b+ab\le a+b+\frac{(a+b)^2}{4}\implies a+b\ge 2$ nên $t\ge 2$.

Khảo sát hàm số $f(t)=\frac{t^2}{t+2}+\frac{3}{t}-1$ với $t\ge 2$ ta thu được $f(t)\ge f(2)=\frac{3}{2}$

Vậy $P\ge\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=1$. Vậy $\min P=\frac{3}{2}$

Nhận xét. Để tìm GTNN của biểu thức $\frac{t^2}{t+2}+\frac{3}{t}$ ta có thể sử dụng kĩ thuật thuần túy BĐT như sau:

$$\frac{t^2}{t+2}+\frac{3}{t}=\frac{t^2}{t+2}+\frac{t+2}{2t}+\frac{2}{t}-\frac{1}{2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{t^2.(t+2).2}{(t+2).2t.t}}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

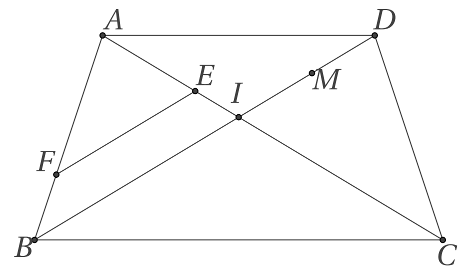
Đẳng thức xảy ra khi $t=2$ hay $a=b=1$.

71 THPT Chuyên Lê Quý Đôn (Bình Định)

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ ($AD\parallel BC$) có phương trình đường thẳng $AB: x-2y+3=0$ và đường thẳng $AC: y-2=0$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang cân $ABCD$, biết $IB=IA\sqrt{2}$, hoành độ I lớn hơn -3 và $M(-1;3)$ nằm trên đường thẳng BD.

Lời giải



$A = AB \cap AC \implies A(1;2)$

Lấy $E(0;2) \in AC$. Suy ra $EA = 1$

Qua E kẻ đường thẳng song song BD cắt AB tại F. Theo định lý Thales thì $\dfrac{EA}{EF} = \dfrac{IA}{IB} \implies EF = EA\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Vì $F \in AB \implies F(2t-3;t)$. Do đó $\overrightarrow{EF} = (2t-3;t-2)$

Suy ra $(2t-3)^2 + (t-2)^2 = 2 \iff \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t = \dfrac{11}{5} \end{array}\right.$

Với $t = 1$ thì $F(-1;1) \implies \overrightarrow{EF} = (-1;-1)$. Vì $EF \parallel BD$ nên $\overrightarrow{EF}$ là vtcp của BD, và do $M \in BD$ nên phương trình $BD: x - y + 4 = 0$. Và do $I = BD \cap AC \implies I(-2;2)$

Vì $B = BD \cap AB \implies B(-5;-1)$

Bởi vì $ABCD$ là hình thang cân nên

$$\frac{IB}{IA} = \frac{IB}{ID} \implies IB = \sqrt{2}.ID \implies \overrightarrow{IB} = -\sqrt{2}.\overrightarrow{ID} \implies D\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2; \frac{3}{\sqrt{2}} + 2\right)$$

$\overrightarrow{IA} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\overrightarrow{IC} \implies C(-3\sqrt{2}-2;2)$

Với $t = \dfrac{11}{5}$ thì $\overrightarrow{EF} = \left(\dfrac{7}{5};\dfrac{1}{5}\right)$ là vtcp của BD, từ đó phương trình $BD: x - 7y + 22 = 0$.

$I = BD \cap AC \implies I(-8;2)$ (loại do $x_I > -3$)

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (1-y)(x-3y+3) - x^2 = \sqrt{(y-1)^3}.\sqrt{x} \\ \sqrt{x^2 - y + 2\sqrt[3]{x^3-4}} = 2(y-2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} y \ge 1 \\ x^2 \ge y \\ x \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 \ge y \\ x \ge 1, y \ge 1 \end{cases}$

Đánh số phương trình đầu là (a), phương trình sau là (b).

$$(a) \iff 3(y-1)^2 - x(y-1) - x^2 = (y-1)\sqrt{y-1}\sqrt{x}$$

Nhận xét $y = 1$ không là nghiệm của hệ. Xét $y > 1$, chia 2 vế của (a) cho $(y-1)^2$ ta được:

$$3 - \frac{x}{y-1} - \left(\frac{x}{y-1}\right)^2 = \sqrt{\frac{x}{y-1}}$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x}{y-1}}$ $(t > 0)$, khi đó ta có:

$$t^4 + t^2 + t - 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^3 + t^2 + 2t + 3 = 0 \end{array}\right. \iff t = 1 \quad (\text{do } t > 0)$$

Với $t=1$ thì $y=x+1$, thay vào phương trình (b) ta được

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-x-1}+2\sqrt[3]{x^3-4}=2(x-1) &\iff \sqrt{x^2-x-1}+2\left[\frac{x^3-4-(x-1)^3}{\sqrt[3]{(x^3-4)^2}+\sqrt[3]{x^3-4}.(x-1)+(x-1)^2}\right]=0\\ &\iff \sqrt{x^2-x-1}+\frac{6(x^2-x-1)}{\sqrt[3]{(x^3-4)^2}+\sqrt[3]{x^3-4}.(x-1)+(x-1)^2}=0\\ &\iff \sqrt{x^2-x-1}\left[1+\frac{6\sqrt{x^2-x-1}}{\sqrt[3]{(x^3-4)^2}+\sqrt[3]{x^3-4}.(x-1)+(x-1)^2}\right]=0\\ &\iff x^2-x-1=0\\ &\iff x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad (x\geq 1)\end{aligned}$$

Với $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \implies y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

So điều kiện hệ có nghiệm $(x,y)=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

Bài 3

Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $2x+3y\leq 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=2xy+y+\sqrt{5(x^2+y^2)}-24\sqrt[3]{8(x+y)-(x^2+y^2+3)}$$

Lời giải

Ta có $\sqrt{5(x^2+y^2)}=\sqrt{(4+1)(x^2+y^2)}\geq 2x+y$

Và $(x+y-3)^2=x^2+y^2+9+2xy-6(x+y)\geq 0$ nên $2(xy+x+y+3)\geq 8(x+y)-(x^2+y^2+3)$

Từ đó suy ra $P\geq 2(xy+x+y)-24\sqrt[3]{2(xy+x+y+3)}$

Mặt khác từ giả thiết suy ra

$$x+y+xy=(x+1)(y+1)-1=\frac{1}{6}(2x+2)(3y+3)-1\leq\frac{(2x+3y+5)^2}{24}-1\leq 5$$

Đặt $t=\sqrt[3]{2(x+y+xy+3)}$ thì $0<t\leq 2\sqrt[3]{2}$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-6-24t$ với $0<t\leq 2\sqrt[3]{2}$. Ta có $f'(t)=3t^2-24<0\ \forall t\in(0;2\sqrt[3]{2}]$

Vậy $f(t)$ nghịch biến trên $(0;2\sqrt[3]{2}]$. Do đó $f(t)\geq f(2\sqrt[3]{2})=10-48\sqrt[3]{2}$

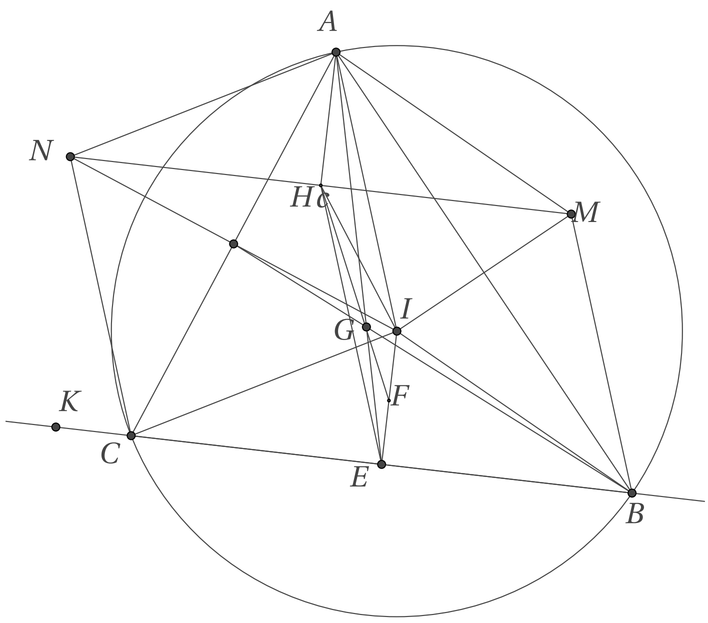
Vậy $P\geq 10-48\sqrt[3]{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=2,b=1$. Vậy $\min P=10-48\sqrt[3]{2}$.

72 THPT Chuyên ĐH Vinh lần 3

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{8}{3};0\right)$ và có đường tròn ngoại tiếp là (C) tâm I. Biết rằng các điểm $M(0;1), N(4;1)$ lần lượt đối xứng I qua các đường thẳng AB, AC, đường thẳng BC đi qua điểm $K(2;-1)$. Viết phương trình đường tròn (C)

Lời giải



Gọi H, E là trung điểm của MN, BC $\Longrightarrow H(2;1)$.
Từ giả thiết ta suy ra $IAMB, IANC$ là các hình thoi. Suy ra AMN, IBC là các tam giác cân bằng nhau.

$\Longrightarrow \begin{cases} AH \perp MN \\ IE \perp BC \end{cases}$

$\Longrightarrow AHEI$ là hình bình hành.
$\Longrightarrow G$ cũng là trọng tâm của tam giác HEI
$\Longrightarrow HG$ cắt IE tại F là trung điểm IE. Từ $BC \parallel MN$ và $K(2;-1) \in BC$.
Ta viết được: $BC: y+1=0$.
Mặt khác:

$$\overrightarrow{HF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HG} \Longrightarrow F\left(3;-\frac{1}{2}\right).$$

$EF \perp BC \Longrightarrow EF: x=3 \Longrightarrow E(3;-1)$.

Vì F là trung điểm của IE nên $I(3;0)$ và $R = IA = HE = \sqrt{5}$

Suy ra phương trình (C) là $(x-3)^2 + y^2 = 5$

Bài 2

Giải bất phương trình:

$$3(x^2-1)\sqrt{2x+1} < 2(x^3-x^2) \qquad (82)$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$.

Với điều kiện trên, ta có:

$$\begin{aligned}(82) &\Longleftrightarrow (x-1)[2x^2 - 3(x+1)\sqrt{2x+1}] > 0\\ &\Longleftrightarrow (x-1)[2(x+1)^2 - 3(x+1)\sqrt{2x+1} - 2(2x+1)] > 0\\ &\Longleftrightarrow (x-1)(x+1-2\sqrt{2x+1})[2(x+1)+\sqrt{2x+1}] > 0\\ &\Longleftrightarrow (x-1)(x+1-2\sqrt{2x+1}) > 0 \qquad (a)\end{aligned}$$

Do $2(x+1)+\sqrt{2x+1}>0, \quad \forall x \ge -\dfrac{1}{2}$, ta xét hai trường hợp sau:

+) $-\dfrac{1}{2} \le x < 1$. Khi đó:

$$(a) \iff (x+1-2\sqrt{2x+1})<0 \iff x^2-6x-3<0 \iff 3-2\sqrt{3}<x<3+2\sqrt{3}$$

Đối chiếu điều kiện, ta được nghiệm $3-2\sqrt{3}<x<1$.

+) $x>1$. Khi đó:

$$(1') \iff (x+1-2\sqrt{2x+1})>0 \iff x^2-6x-3>0 \iff \left[\begin{array}{l} x>3+2\sqrt{3} \\ x<3-2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện, ta được nghiệm $x>3+2\sqrt{3}$.

Vậy ta được nghiệm của bất phương trình là $3-2\sqrt{3}<x<1$ và $x>3+2\sqrt{3}$.

Bài 3

Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+z \le 2y$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}-y^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}\right)$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $\sqrt{xz} \le y$.

Chú ý rằng, với mọi $x, y \ge 0$ và mọi a, b ta có:

$$\frac{(x+y)^2}{a+b} \le \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b} \tag{83}$$

Thật vậy, (83) tương đương với $(ay-bx)^2 \ge 0$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
P=\frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}-y^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}\right) &\le \frac{(x+y)^2}{4(1+z^2)}+\frac{(z+y)^2}{4(1+x^2)}-y^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}\right)\\
&=\frac{(x+y)^2}{4(x^2+y^2+2z^2)}+\frac{(z+y)^2}{4(2x^2+y^2+z^2)}-y^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}\right)\\
&\le \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{y^2}{z^2+y^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)-y^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}\right)\\
&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{z^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)-y^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}\right)\\
&\le \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{2yz}+\frac{y^2}{2xy}\right)-y^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}\right)\\
&=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^3}{z^3}\right)\\
&\le \frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{z}\right)^3+3\frac{y^2}{xz}\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{z}\right)\\
&\le \frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{z}\right)^3+\frac{3}{4}\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{z}\right)^2\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{z}\right)\\
&=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^3
\end{aligned}$$

Đặt $t=\frac{y}{z}+\frac{y}{x}$, $t\ge 2\sqrt{\frac{y^2}{zx}}\ge 2$. Khi đó $P\le -\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{8}t+\frac{1}{4}$

Xét hàm số $f(t)=-\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{8}t+\frac{1}{4}$ với $t\ge 2$. Ta có $f'(t)=-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{8}<0, \forall t\ge 2$.

Suy ra $\max\limits_{[2;+\infty)} f(t)=f(2)=-\frac{3}{2}$

Suy ra $P\le -\frac{3}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $-\frac{3}{2}$, dấu" = "xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$

73 THPT Chuyên Hùng Vương (Gia Lai)

Bài 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 16, các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt đi qua các điểm $M(4;5), N(6;5), P(5;2), Q(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải

AB đi qua $M(4;5)$ nên phương trình AB có dạng: $ax+by-4a-5b=0 \quad (a^2+b^2\neq 0)$

$BC\perp AB$ và BC đi qua $N(6;5) \implies$ phương trình BC có dạng $bx-ay-6b+5a=0$

Ta có diện tích hình chữ nhật:

$$\begin{aligned}
&S=d_{(P,AB)}.d_{(Q,BC)}=16\\
\iff &\frac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{|4a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=16\\
\iff &a^2-4ab+3b^2=\pm 4(a^2+b^2)\\
\iff &\left[\begin{array}{l} 3a^2+4ab+b^2=0\\ 5a^2-4ab+7b^2=0 \quad \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.\\
\iff &\left[\begin{array}{l} a+b=0\\ 3a+b=0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

+Với $a+b=0$, chọn $a=1, b=-1$ ta được phương trình AB là: $x-y+1=0$

+Với $3a+b=0$, chọn $a=1, b=-3$ ta được phương trình $AB: x-3y+11=0$.

Bài 2

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-x^2y-y=2x^2-x+2 & (1)\\ y^2+4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=2x^2-4x+12 & (2)\end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải

ĐK: $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq \dfrac{16}{3} \end{cases}$

Phương trình $(1) \implies (x-y-2).(x^2+1)=0 \iff y=x-2$

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$\begin{aligned} & (x-2)^2+4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3(x-2)}=2x^2-4x+12 \\ \iff & 4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8 \\ \iff & (x^2-4)+4(2-\sqrt{x+2})+(4-\sqrt{22-3x})=0 \\ \iff & (x-2)\left[(x+2)-\frac{4}{2+\sqrt{x+2}}+\frac{3}{4+\sqrt{22-3x}}\right]=0 \\ \iff & \left[\begin{array}{l} x-2=0 \implies y=0 \\ (x+2)-\dfrac{4}{2+\sqrt{x+2}}+\dfrac{3}{4+\sqrt{22-3x}}=0 \qquad (*) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Giải (*), ta xét hàm số: $f(x)=(x+2)-\dfrac{4}{2+\sqrt{x+2}}+\dfrac{3}{4+\sqrt{22-3x}}$ trên đoạn $\left[-2;\dfrac{22}{3}\right]$

$$f'(x)=1+\frac{2}{\sqrt{x+2}(2+\sqrt{x+2})^2}+\frac{9}{2\sqrt{22-3x}(4+\sqrt{22-3x})^2}\geq 0 \qquad \forall x\in\left(-2;\frac{22}{3}\right)$$

$\implies f(x)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $\left[-2;\dfrac{22}{3}\right]$, mà $-1\in\left[-2;\dfrac{22}{3}\right]$ và $f(-1)=0$.

Từ đó:

$$(*) \implies f(x)=f(-1) \iff x=-1 \iff y=-3$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(2;0)$ và $(x;y)=(-1;-3)$.

Bài 3

Cho $x;y;z$ là 3 số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2-2(x^2+y^2)-z^2}$$

Lời giải

Ta có

$$P=\frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2-2(x^2+y^2)-z^2}=\frac{(x+y)^2}{z^2+4(xy+yz+zx)}=\frac{(x+y)^2}{z^2+4(x+y)z+4xy}$$

Ta có $4xy\leq(x+y)^2$ nên

$$P\geq\frac{(x+y)^2}{z^2+(x+y)z+(x+y)^2}=\frac{\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}\right)}{1+4\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}\right)+\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}\right)^2}$$

Đặt $t=\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}$, vì $x,y,z\in[1;2]$ nên $t\in[1;4]$

Ta có $f(t)=\dfrac{t}{1+4t+t^2}, f'(t)=\dfrac{4t^2+2t}{(1+4t+t^2)^2}>0 \qquad t\in[1;4]$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1;4]$ nên $f(t)$ đạt GTNN bằng $\dfrac{1}{6}$ khi $t=1$

Dấu " = " xảy ra khi $\begin{cases} x=y \\ z=x+y \\ x,y,z\in[1;2] \end{cases} \iff \begin{cases} x=y=1 \\ z=2 \end{cases}$

Vậy $\min P=\dfrac{1}{6}$ khi $x=y=1; z=2$

Tài liệu

[1] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo Bất đẳng thức*

[2] Võ Quốc Bá Cẩn, *Một số kỹ thuật nhỏ để sử dụng Cauchy - Schwarz*

[3] Nguyễn Anh Văn, Lê Hoàng Nam, ...*Chinh phục Hình học Giải tích trong mặt phẳng*

[4] Lê Minh An, *Tuyển tập các bài toán Elip ôn thi Đại học*

[5] Hoàng Ngọc Thế, *Khám phá cách giải một số bài toán hình học giải tích trong mặt phẳng.*

[6] Hoàng Ngọc Thế, *Bài toán phụ của bài toán khảo sát hàm số.*

[7] Các topic thảo luận trên http://diendantoanhoc.net