MỤC LỤC

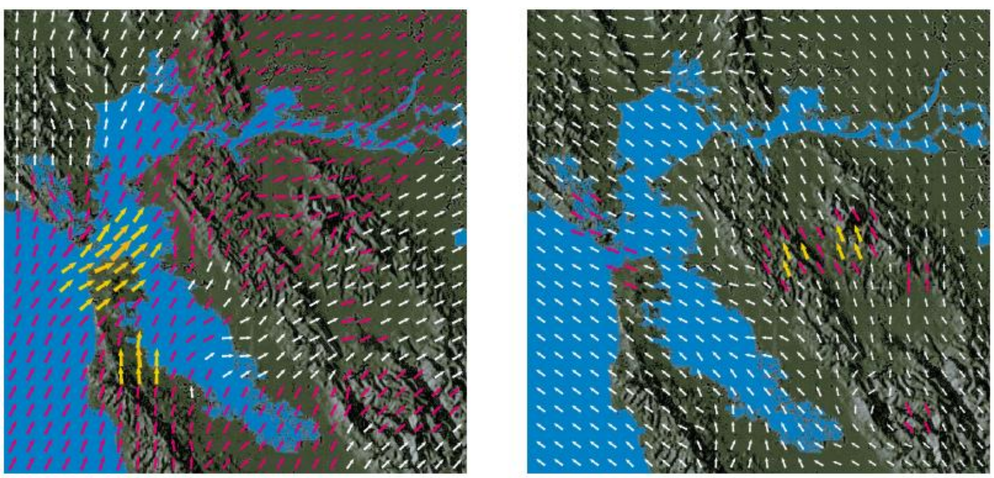
CHƯƠNG 4. GIẢI TÍCH VÉC TƠ

Trong chương này, chúng ta nghiên cứu các phép toán của các trường vectơ. (Đây là những hàm mà gán các véc tơ thành các điểm trong không gian.) Đặc biệt chúng ta định nghĩa tích phân đường (line integrals), mà có thể được sử dụng để tính công sinh ra bởi một trường lực trong việc di chuyển một đối tượng dọc theo một đường cong. Sau đó, chúng ta định nghĩa tích phân mặt (surface integrals), có thể được sử dụng để tìm tốc độ dòng chảy qua một bề mặt. Mối liên hệ giữa các loại tích phân mới này với tích phân đơn, tích phân kép và tích phân bội ba được đưa ra bởi định lý cơ bản của tích phân trong không gian nhiều chiều: Định lý Green, Định lý Stokes, và định lý phân tán.

4.1. Trường véc tơ

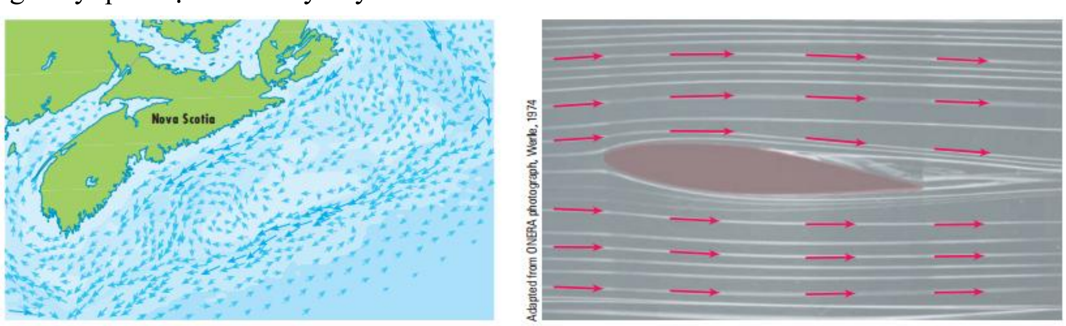
4.1.1. Trường véc tơ

Các vectơ trong Hình 1 là các vectơ vận tốc không khí chỉ ra tốc độ và hướng gió tại các điểm 10 m độ cao so với bề mặt ở khu vực vịnh San Francisco. Chúng ta thấy các mũi tên lớn nhất trong phần (a) rằng tốc độ gió lớn nhất tại thời điểm gió vào vịnh qua cầu Golden Gate. Phần (b) cho thấy mô hình gió rất khác nhau 12 giờ trước đó. Liên quan đến tất cả các điểm trong không khí chúng ta có thể tưởng tượng một véc tơ vận tốc gió. Đây là một ví dụ về trường véc tơ vận tốc.



(a) 6:00 PM, March 1, 2010 Hình 1 (b) 6:00 AM, March 1, 2010

Những ví dụ khác về trường véc tơ vận tốc được minh họa trong Hình 2: các dòng hải lưu và dòng chảy qua một cánh máy bay.



(a) Dòng hải lưu ngoài khơi bờ biển Nova Scotia (b) Luồng không khí qua một cánh máy bay

Hình 2 Trường véc tơ vận tốc

Một loại trường véc tơ, được gọi là một trường lực, cho tương ứng mỗi vectơ lực với một điểm trong một miền. Một ví dụ về trường lực hấp dẫn mà chúng ta sẽ xem xét trong Ví dụ 4.

Nói chung, một trường véc tơ là một hàm mà miền xác định của nó là tập các điểm trong $\mathbb{R}^2$ (hoặc $\mathbb{R}^3$) và miền giá trị của nó là tập các véc tơ trong V_2 (hoặc V_3).

[1] **Định nghĩa** Giả sử D là tập trong $\mathbb{R}^2$ (miền phẳng). Một trường véc tơ trên $\mathbb{R}^2$ là một hàm **F** cho tương ứng mỗi điểm (x, y) trong D với véc tơ hai chiều **F**(x, y).

Cách tốt nhất để minh họa bằng hình ảnh một trường véc tơ là vẽ các mũi tên biểu thị véc tơ **F**(x, y) bắt đầu tại điểm (x, y). Tất nhiên, không thể làm điều này cho tất cả các điểm (x, y), nhưng chúng ta có thể đạt được một cảm giác hợp lý của **F** bằng cách thực hiện nó cho một vài điểm đại diện trong D như trong Hình 3. Bởi vì **F**(x, y) là một véc tơ hai chiều, chúng ta có thể viết nó qua các hàm thành phần của nó, P và Q, như sau:

$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y)\rangle$, hoặc ngắn gọn, $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$

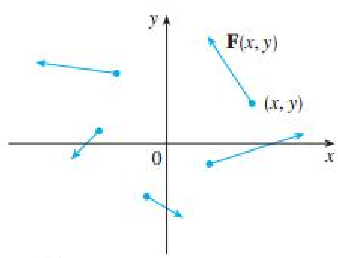
Chú ý rằng P và Q là các hàm vô hướng của hai biến và đôi khi được gọi là trường vô hướng để phân biệt chúng với trường véc tơ.

[2] **Định nghĩa** Giả sử E là tập con của $\mathbb{R}^3$. Một trường véc tơ trên $\mathbb{R}^3$ là một hàm **F** cho tương ứng mỗi điểm (x, y, z) trong E với véc tơ ba chiều **F**(x, y, z).

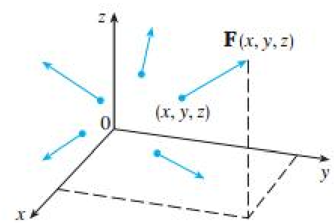
Một trường véc tơ trên $\mathbb{R}^3$ được minh họa bằng hình ảnh trong Hình 4. Chúng ta có thể biểu diễn nó qua các hàm thành phần của nó là P, Q và R như sau

$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k} = \langle P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\rangle$

hoặc ngắn gọn, $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$



Hình 3 Trường véc tơ trong $\mathbb{R}^2$



Hình 4 Trường véc tơ trong $\mathbb{R}^3$

Giống như các hàm véc tơ trong mục 1.1, chúng ta có thể định nghĩa sự liên tục của trường véc tơ và chỉ ra rằng **F** là liên tục khi và chỉ khi các hàm thành phần của nó liên tục.

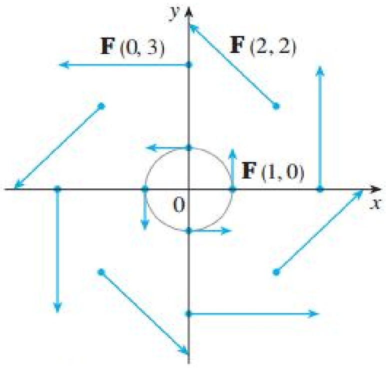
Đôi khi chúng ta phân đồng nhất (x, y, z) với véc tơ vị trí của nó $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ và viết **F**(**x**) thay cho **F**(x, y, z). Khi đó **F** trở thành hàm gán mỗi véc tơ **F**(**x**) từ véc tơ **x**.

Ví dụ 1 Một trường véc tơ trên $\mathbb{R}^2$ được xác định bởi $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Mô tả **F** bằng cách phác họa một vài véc tơ **F**(x, y) như Hình 3.

Lời giải Bởi vì $\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$, ta vẽ véc tơ $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ bắt đàu tại điểm (1, 0) trong Hình 5. Bởi vì $\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$, ta vẽ véc tơ $\langle -1, 0\rangle$ bắt đàu tại điểm (0, 1). Tiếp tục bằng cách đó, chúng ta tính một số giá trị đại diện khác của **F**(x, y) trong bảng và vẽ các véc tơ tương ứng để thể hiện trường véc tơ trong Hình 5.

Hình 5 cho thấy mọi mũi tên là tiếp tuyến của đường tròn tâm tại gốc tọa độ. Để khẳng định điều đó, ta lấy tích hữu hướng của véc tơ vị trí $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ với véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y)$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) = -xy + yx = 0$$



Hình 5 $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

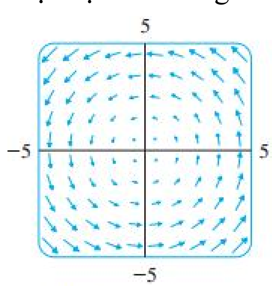
(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$

Điều đó chứng tỏ rằng **F**(x, y) vuông góc với véc tơ vị trí $\langle x, y\rangle$ và do đó là tiếp tuyến của đường tròn tâm tại gốc tọa độ và bán kính $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Chú ý rằng

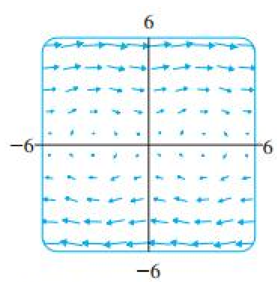
$$|\boldsymbol{F}(x,y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\boldsymbol{x}|$$

nên độ lớn của véc tơ **F**(x, y) bằng bán kính của đường tròn đó.

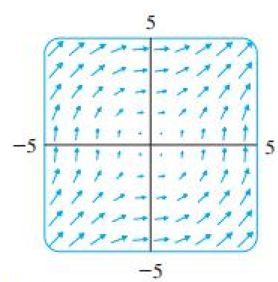
Một số hệ thống máy tính có khả năng vẽ các trường vectơ trong không gian hai hoặc ba chiều. Chúng gây ra sự cảm nhận tốt hơn về trường véc tơ hơn là khả năng vẽ bằng tay bởi vì máy tính có thể vẽ một số lượng lớn các vector đại diện. Hình 6 cho thấy máy tính vẽ trường vector trong Ví dụ 1, Hình 7 và Hình 8 cho thấy hai trường véc tơ khác. Chú ý rằng máy tính xác định tỷ lệ độ dài của các vectơ vì thế vẽ chúng không quá dài nhưng là tỷ lệ thuận với độ dài thực sự của chúng.



Hình 6 $\mathbf{F}(x, y) = \langle -y, x\rangle$



Hình 7 $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, \sin x\rangle$



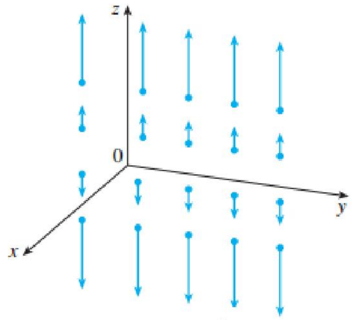
Hình 8 $\mathbf{F}(x, y) = \langle \ln(1 + y^2), \ln(1 + x^2)\rangle$

Chúng ta có thể sử dụng MATLAB để vẽ trường véc tơ. Ví dụ, với trường véc tơ trong Hình 6, ta sử dụng các lệnh sau:

```
>> [X,Y] = meshgrid(-5:.5:5,-5:.5:5);
>> F1 = -Y; F2 = X;
>> quiver(X, Y, F1, F2)
>> axis equal; axis tight;
```

Ví dụ 2 Phác họa trường véc tơ trong $\mathbb{R}^3$ được cho bởi $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$.

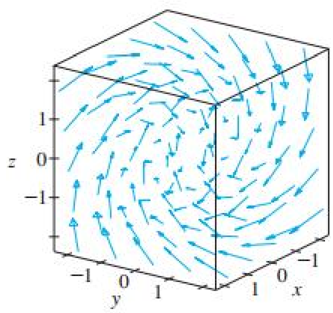
Lời giải Phác họa được chỉ ra trên Hình 9. Chú ý rằng tất cả các véc tơ là thẳng đứng và trỏ ngược lên khi ở phía trên mặt phẳng xy, hoặc trỏ xuống khi ở phía dưới. Độ lớn tăng dần theo khoảng cách từ mặt phẳng xy.



$\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$

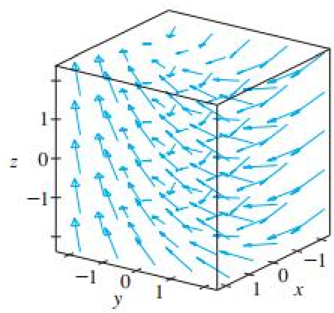
Hình 9

Chúng ta có khả năng vẽ bằng tay trường véc tơ trong Ví dụ 2 bởi vì công thức đơn giản đặc biệt của nó. Hầu hết là các trường véc tơ ba chiều, tuy nhiên, hầu như không thể phác họa bằng tay và vì vậy chúng ta cần nhờ đến hệ thống máy tính. Các ví dụ được thể hiện trên các hình 10, 11 và 12. Chú ý rằng các trường véc tơ trên Hình 10 và 11 có các công thức tương tự, nhưng tất cả các véc tơ trên Hình 11 trỏ vào hướng chung là phía âm của trục y bởi vì các thành phần y của chúng đều bằng –2. Nếu trường véc tơ trong Hình 12 biểu thị trường vận tốc, thì một hạt sẽ được quét lên và sẽ theo đường xoắn ốc xung quanh trục y theo hướng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên cao



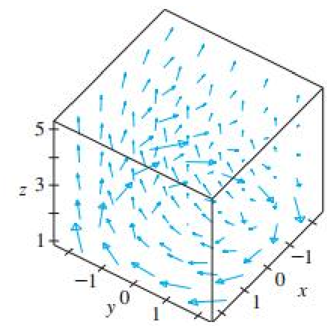
$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

Hình 10



$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

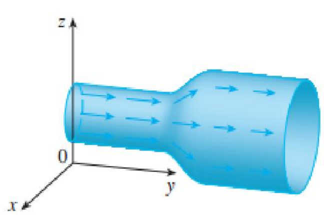
Hình 11



$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{y}{z}\boldsymbol{i} - \frac{x}{z}\boldsymbol{j} + \frac{z}{4}\boldsymbol{k}$

Hình 12

Ví dụ 3 Hãy tưởng tượng một chất lỏng chảy đều đặn dọc theo một đường ống và giả sử **V**(x, y, z) là véc tơ vận tốc tại điểm (x, y, z). Khi đó **V** gán mỗi véc tơ tới điểm (x, y, z) trong miền E nào đó (phần trong của ống) và vì vậy **V** là trường véc tơ trên $\mathbb{R}^3$ và được gọi là trường vận tốc. Một trường véc tơ khả dĩ được minh họa trên Hình 13. Vận tốc tại một điểm đã cho được chỉ thị bởi độ dài mũi tên.



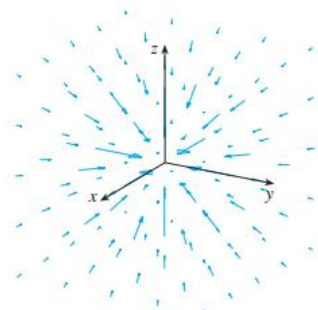
Hình 13
Trường véc tơ trong dòng chảy

Trường vận tốc cũng xảy ra trong những vùng vật lý khác. Ví dụ, trường véc tơ trong Ví dụ 1 có thể được sử dụng như trường vận tốc mô tả sự quay ngược của một bánh xe. Chúng ta đã thấy những ví dụ khác về trường vận tốc trong Hình 1 và Hình 2.

Ví dụ 4 Định luật vạn vật hấp dẫn của Newton phát biểu rằng độ lớn của lực hấp dẫn (gravitational force) giữa hai vật có khối lượng m và M là $|\boldsymbol{F}| = \frac{mMG}{r^2}$, trong đó r là khoảng cách giữa các đối tượng và G là hằng số hấp dẫn. Giả sử rằng các đối tượng với khối lượng M nằm tại gốc tọa độ trong $\mathbb{R}^3$. (Ví dụ, M có thể là khối lượng của trái đất và gốc tọa độ là tâm của nó.) Giả sử véc tơ vị trí của đối tượng với khối lượng m là $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$.

Khi đó $r = |\mathbf{x}|$, vì vậy $r^2 = |\mathbf{x}|^2$. Lực hấp dẫn tác động lên đối tượng thứ hai này hướng tới gốc tọa độ, và véc tơ đơn vị theo hướng này là $-\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$. Do đó lực hấp dẫn tác động lên đối tượng tại $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ là

[3] $$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\frac{mMG}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{x}$$



Hình 14
Trường lực hấp dẫn

Các nhà vật lý thường sử dụng ký hiệu **r** thay cho **x** đối với véc tơ vị trí, vì vậy chúng ta có thể xem công thức 3 được viết ở dạng $\boldsymbol{F} = -\left(\frac{mMG}{r^3}\right)\boldsymbol{r}$. Hàm được cho bởi phương trình 3 là một ví dụ của trường véc tơ, được gọi là trường hấp dẫn, bởi vì nó gắn kết một véc tơ [lực **F**(**x**)] với mỗi điểm **x** trong không gian.

Công thức 3 là một cách viết gọn của trường hấp dẫn, nhưng chúng ta có thể viết nó theo các hàm thành phần của nó bằng cách sử dụng các sự kiện

x = x**i** + y**j** + z**k** và $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{i} + \frac{-mMGy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{j} + \frac{-mMGz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{k}$$

Trường hấp dẫn **F** được minh họa trong Hình 14.

Ví dụ 5 Giả sử rằng điện tích Q định vị tại gốc tọa độ. Theo định luật Coulomb, điện trường **F**(**x**) được tạo ra bởi điện tích q định vị tại điểm (x, y, z) với véc tơ vị trí **x** = ⟨x, y, z⟩ là

[4] $$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{\varepsilon qQ}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{x}$$

trong đó ε là hằng số (phụ thuộc vào các đơn vị sử dụng). Đối với các điện tích như thế, ta có qQ > 0 và lực là đẩy (repulsive). Với các điện tích khác ta có qQ < 0 và lực là hút (attractive). Chú ý sự tương tự giữa các công thức 3 và 4, cả hai trường véc tơ đều là trường lực.

Thay thế cho việc xem xét điện trường **F**, các nhà vật lý thường xem xét lực trên một đơn vị điện tích:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{q}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|x|^3}\boldsymbol{x}$$

Khi đó **E** là trường véc tơ trên $\mathbb{R}^3$ và được gọi là điện trường của Q.

4.1.2. Trường Gradient

Nếu f là hàm vô hướng của hai biến, nhắc lại mục 2.6, rằng gradient của nó, ∇f (hoặc grad f) được định nghĩa bởi $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}$.

Vì thế ∇f là trường véc tơ trên $\mathbb{R}^2$ và được gọi là trường véc tơ gradient. Hơn nữa, nếu f là hàm vô hướng của ba biến, gradient của nó là trường véc tơ trên $\mathbb{R}^3$ được cho bởi

$\nabla f(x, y) = f_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + f_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$

Ví dụ 6 Tìm trường véc tơ gradient được cho bởi

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} = 2xy\boldsymbol{i} + (x^2 - 3y^2)\boldsymbol{j}$$

Hình 15 thể hiện bản đồ đồng mức của f với trường véc tơ gradient. Chú ý rằng các véc tơ gradient là vuông góc với các đường mức, như đã mong đợi từ mục 2.6.

Chú ý rằng các véc tơ gradient là dài khi các đường mức gần nhau và ngắn khi các đường mức xa nhau. Đó là vì độ dài của véc tơ gradient là giá trị của đạo hàm theo hướng của f và các đường mức sát nhau biểu thị đồ thị dốc.

Một trường véc tơ F được gọi là trường bảo toàn (conservative) hay trường thế, nếu nó là gradient của hàm vô hướng nào đó, tức là nếu tồn tại hàm f sao cho **F** = ∇f. Trong trường hợp này f được gọi là hàm thế vị (potential function) của **F**.

Không phải mọi trường véc tơ đều là trường bảo toàn, nhưng các trường như vậy xay ra thường xuyên trong vật lý. Ví dụ, trường hấp dẫn **F** trong Ví dụ 4 là trường bảo toàn bởi vì nếu chúng ta định nghĩa

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

thì

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$= \frac{-mMGx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{i} + \frac{-mMGy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{j} + \frac{-mMGz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{k} = \mathbf{F}(x, y, z)$$

Trong mục 4.3 và 4.5 chúng ta sẽ tìm hiểu làm thế nào để gọi hay không một trường véc tơ đã cho là trường bảo toàn.

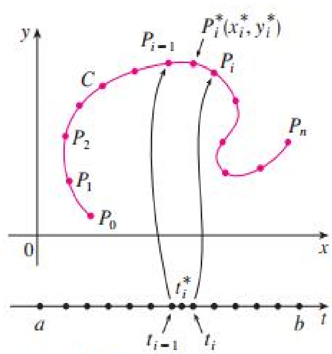
4.2. Tích phân đường

4.2.1. Tích phân đường trong mặt phẳng

Trong mục này chúng ta định nghĩa tích phân tương tự như tích phân đơn ngoại trừ thay thế việc lấy tích phân trên đoạn [a, b], chúng ta lấy tích phân trên một đường cong C. Các tích phân như vậy được gọi là tích phân đường, cho dù "tích phân đường cong" có thể là thuật ngữ thích hợp hơn. Chúng đã được phát minh vào những năm đầu thế kỷ 19 để giải quyết các vấn đề liên quan đến dòng chảy, lực, điện học và từ tính.

Chúng ta bắt đầu với đường cong phẳng C được cho bởi phương trình tham số

[1] $\quad x = x(t) \quad\quad y = y(t) \quad\quad a \le t \le b$



Hình 1

hoặc tương đương, theo phương trình véc tơ **r**(t) = x(t) **i** + y(t) **j**, và chúng ta giả sử rằng C là đường cong trơn. [Nghĩa là **r**' là liên tục và **r**'(t) ≠ **0**. Xem mục 1.3] Nếu chúng ta chia đoạn tham số [a, b] thành n đoạn con bằng nhau $[t_{i-1}, t_i]$ và đặt $x_i = x(t_i)$ và $y_i = y(t_i)$ thì các điểm tương ứng $P_i(x_i, y_i)$ chia C thành n cung nhỏ với các độ dài $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. (Xem Hình 1.) Chúng ta chọn điểm bất kỳ $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ trên cung thứ **i** (ứng với điểm t_i^* trên $[t_{i-1}, t_i]$). Bây giờ nếu f là hàm hai biến có miền xác định chứa đường cong C, chúng ta tính f tại điểm (x_i^*, y_i^*), nhân với độ dài Δs_i của cung nhỏ và lập tổng

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$

đó là tổng Riemann. Chuyển qua giới hạn tổng này và tạo ra định nghĩa sau đây tương tự như đối với tích phân đơn.

[2] **Định nghĩa** Nếu f xác định trên một đường cong trơn C được cho bởi phương trình 1 thì tích phân đường của f dọc theo C là

$$\int_C f(x, y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$

nếu giới hạn đó tồn tại.

Trong học phần Toán 2, chúng ta đã biết rằng độ dài của C là

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

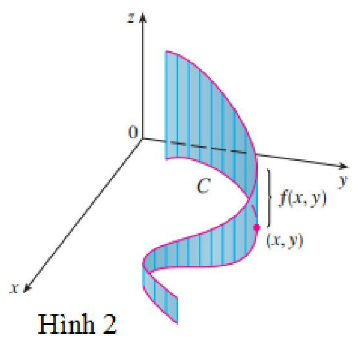
Nếu f là liên tục thì giới hạn trong Định nghĩa 2 tồn tại và có thể sử dụng công thức sau để tính tích phân đường:

$$[3] \quad \int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Giá trị của tích phân đường không phụ thuộc sự tham số của đường cong, với điều kiện đường cong không lặp lại khi t tăng từ a tới b.

Nếu s(t) là độ dài của C giữa **r**(a) và **r**(t) thì $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

Vì vậy cách để nhớ công thức 3 là đưa tất cả về tham số t: sử dụng phương trình tham số để biểu diễn x và y theo t và viết $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$



Hình 2

Trong trường hợp đặc biệt khi C là đoạn thẳng nối (a, 0) tới (b, 0) thì sử dụng x như là tham số, ta có thể viết phương trình tham số của C là x = x, y = 0, a ≤ x ≤ b. Công thức 3 trở thành $\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x,0)dx$, vì vậy tích phân đường trở thành tích phân đơn.

Giống như tích phân đơn thông thường, chúng ta có thể giải thích tích phân đường của hàm dương như là diện tích. Thật vậy, nếu f(x, y) ≥ 0, $\int_C f(x,y)ds$ biểu thị diện tích của "hàng rào" (fence) hay "tấm màn" (curtain) trên Hình 2, cơ sở của nó là C và chiều cáo của nó trên điểm (x, y) là f(x, y).

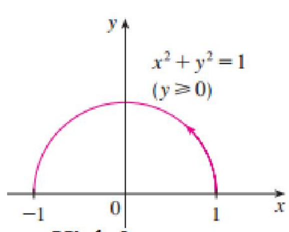
Ví dụ 1 Tính $\int_C (2 + x^2y)ds$, ở đây C là nửa trên của đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải Để sử dụng công thức 3, đầu tiên chúng ta cần phương trình tham số để biểu diễn C. Nhớ lại rằng vòng tròn đơn vị có thể được tham số hóa bởi các phương trình

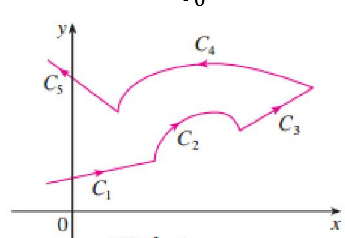
x = cost y = sint

và nửa trên của nó được mô tả bởi đoạn tham số 0 ≤ t ≤ π. (Xem Hình 3.) Từ công thức 3:

$$\int_C (2 + x^2y)ds = \int_0^\pi (2 + cos^2t)\sqrt{sin^2t + cos^2t}dt = \int_0^\pi (2 + cos^2t)dt = 2\pi + \frac{2}{3}$$



Hình 3



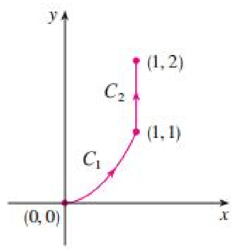
Hình 4

Bây giờ ta giả thiết rằng C là đường cong trơn từng khúc (piecewise–smooth curve), tức là C là hợp (union) của hữu hạn đường cong C_1, C_2, ..., C_n, trong đó, như minh họa trên Hình 4, điểm bắt đầu của C_{i+1} là điểm kết thúc của C_i. Khi đó chúng ta định nghĩa tích phân của f dọc theo C như là tổng của các tích phân của f dọc theo mọi khúc cong của C:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds + \cdots + \int_{C_n} f(x,y)ds$$

Ví dụ 2 Tính $\int_C 2xds$, ở đây C bao gồm cung C_1 của parabola $y = x^2$ từ (0, 0) tới (1, 1), và sau đó là đoạn thẳng đứng C_2 từ (1, 1) tới (1, 2).

Lời giải Đường cong C ddcj chỉ ra trên Hình 5. C_1 là đồ thị của hàm biến x, vì thế ta chọn x làm tham số và phương trình của C_1 trở thành



Hình 5 $C = C_1 \cup C_2$

$x = x \quad y = x^2 \quad 0 \le x \le 1$

Do đó

$$\int_{C_1} 2xds = \int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}d(1+4x^2)$$

$$= \frac{1}{6}(1+4x^2)^{3/2} = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}$$

Trên C_2 ta chọn y làm tham số vì thế phương trình của C_2 là $x = 1 \quad y = y \quad 1 \le y \le 2$

và $\int_{C_2} 2xds = \int_1^2 2(1)dy = 2$

Vì vậy $\int_C 2xds = \int_{C_1} 2xds + \int_{C_2} 2xds = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2 = \frac{5\sqrt{5}+11}{6}$

Mọi giải thích vật lý của tích phân đường $\int_C f(x,y)ds$ phụ thuộc vào giải thích vật lý của hàm f. Giả sử rằng ρ(x, y) thể hiện mật độ tuyến tính tại điểm (x, y) của một dây mỏng có hình dạng như đường cong C. Khi đó khối lượng của phần của dây từ P_{i-1} đến P_i trên Hình 1 là xấp xỉ điện từ để trong hình 1 là khoảng và do đó, tổng khối lượng của dây là khoảng. Bằng cách tham gia ngày càng nhiều điểm trên đường cong, chúng ta có được khối lượng của dây như các giá trị giới hạn của các xấp xỉ $\rho(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$ và vì thế tổng khối lượng của dây xấp xỉ $\Sigma\rho(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$. Bằng cách tạo ra ngày càng nhiều các điểm trên đường cong, ta nhận được khối lượng m của dây như là giới hạn của các xấp xỉ đó:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \rho(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i = \int_C \rho(x,y)ds$$

[Trong Ví dụ 1, nếu $f(x, y) = 2 + x^2y$ biểu thị mật độ của sợi dây phủ nửa đường tròn thì tích phân giá trị của tích phân đó biểu thị khối lượng của sợi dây.] Trọng tâm của dây với hàm mật độ là ρ được tính theo công thức

[4] $\overline{x} = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y)ds \qquad \overline{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)ds$

Các giải thích vật lý khác của tích phân đường sẽ trình bày phần sau của chương.

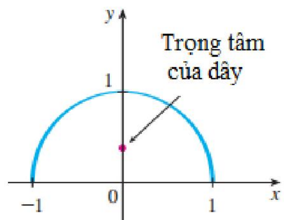
Ví dụ 3 Một sợi dây chiếm nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $y \ge 0$ và phần hai đầu dây dày hơn phần giữa của dây. Tìm trọng tâm của dây nếu mật độ tuyến tính tại mọi điểm tỷ lệ thuận với khoảng cách đến đường thẳng y = 1.

Lời giải Như trong Ví dụ 1, ta sử dụng sự tham số hóa x = cost, y = sint, 0 ≤ t ≤ π, và tìm thấy ds = diện tích. Hàm mật độ tuyến tính là ρ(x, y) = k(1 – y) với **k** là hằng số. Khi đó

$$m = \int_C k(1-y)ds = \int_0^\pi k(1-sint)dt = k[t+cost]_0^\pi = k(\pi-2)$$

Từ phương trình 4 ta có

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)ds = \frac{1}{k(\pi-2)}\int_C yk(1-y)ds = \frac{1}{\pi-2}\int_0^{\pi}(sint - sin^2t)dt$$
$$= \frac{1}{\pi-2}\left[-cost - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sin2t\right]_0^{\pi} = \frac{4-\pi}{2(\pi-2)}$$



Hình 6

Do tính đối xứng nên $\overline{x} = 0$, vậy trọng tâm của sợi dây là

$\left(0, \frac{4-\pi}{2(\pi-2)}\right) \approx (0, 0.38)$ (Xem Hình 6)

Hai tích phân đường khác nhận được bằng cách thay Δs_i bởi hoặc $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, hoặc $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ trong Định nghĩa 2. Chúng được gọi là tích phân đường của f dọc theo C theo x hoặc y:

[5] $\int_C f(x,y)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i$

[6] $\int_C f(x,y)dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i$

Khi chúng ta muốn phân biệt tích phân đường ban đầu với các tích phân trong các phương trình 5 và 6, chúng ta gọi nó là tích phân đường theo độ dài cung.

Công thức sau đây nói rằng các tích phân đường theo x và theo y cũng có thể tính bằng cách biểu diễn tất cả theo t: x = x(t), y = y(t), dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt.

[7] $\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)dt$

$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f(x(t),y(t))y'(t)dt$

Nó thường xuất hiện các tích phân đường theo x và theo y đồng thời. Khi điều đó xảy ra, theo thói quen viết tắt:

$$\int_C P(x,y)dx + \int_C Q(x,y)dy = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Khi chúng ta thiết lập các tích phân đường, nhiều lúc rất khó tìm biểu diễn dạng tham số của đường cong khi đã biết biểu diễn hình học của nó. Đặc biệt, chúng ta thường tham số hóa đoạn thẳng, vì vậy rất hữu ích khi nhớ rằng biểu diễn véc tơ của đoạn thẳng bắt đầu tại $\mathbf{r}_0$ và kết thúc tại $\mathbf{r}_1$ được cho bởi:

[8] $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad 0 \le t \le 1$

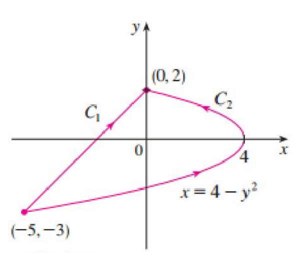
Ví dụ 4 Tính $\int_C y^2dx + xdy$, trong đó

(a) $C = C_1$ là đoạn thẳng từ (–5, –3) tới (0, 2)

(b) $C = C_2$ là cung của parabola $x = 4 - y^2$ từ (–5, –3) tới (0, 2). (Xem Hình 7.)

Lời giải (a) Biểu diễn tham số của đoạn thẳng là

$x = 5t - 5 \qquad y = 5t - 3 \qquad 0 \le t \le 1$



Hình 7

(Sử dụng phương trình 8 với $\mathbf{r}_0 = \langle -5, -3\rangle$ và $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 2\rangle$.) Khi đó dx = 5dt, dy = 5dt và công thức 7 cho

$$\int_{C_1} y^2dx + xdy = \int_0^1 (5t-3)^2(5dt) + (5t-5)(5dt)$$
$$= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4)dt = \left[\frac{25}{3}t^3 - \frac{25}{2}t^2 + 4t\right]_0^1 = -\frac{5}{6}$$

(b) Bởi vì parabola đã cho là hàm của y, ta coi y là tham số và viết C_2 như sau

$$x = 4 - y^2 \qquad y = y \qquad -3 \le y \le 2$$

Khi đó dx = –2dy và theo công thức 7 ta có

$$\int_{C_1} y^2dx + xdy = \int_{-3}^{2} y^2(-2y)dy + (4 - y^2)dy$$

$$= \int_{-3}^{2}(-2y^3 - y^2 + 4)dy = \left[-\tfrac{1}{2}y^4 - \tfrac{1}{3}y^2 + 4y\right]_{-3}^{2} = \frac{245}{6}$$

Chú ý rằng chúng ta nhận được các kết quả khác nhau trong các phần (a) và (b) của Ví dụ 4, mặc dù hai đường cong có chung các mút. Nhìn chung, giá trị của tp đường không chỉ phụ thuộc vào các mút của đường cong mà cả trên đường cong. (Nhưng mục 4.3 cho điều kiện mà với nó tích phân không phụ thuộc đường đi.)

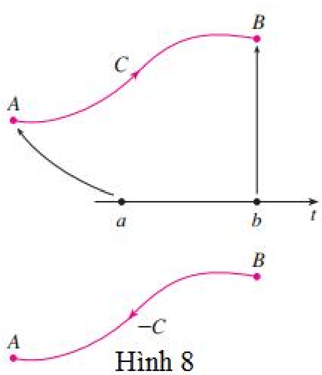
Cũng chú ý rằng các kết quả trong Ví dụ 4 phụ thuộc vào hướng của đường cong.

Nếu $-C_1$ ký hiệu đoạn thẳng từ (0, 2) tới (–5, –3), sử dụng tham số hóa

$$x = -5t \qquad y = 2 - 5t \qquad 0 \le t \le 1$$

ta có thể kiểm tra rằng, $\int_{C_1} y^2dx + xdy = \frac{5}{6}$.

Nhìn chung, mỗi tham số hóa đã cho x = x(t), y = y(t), a ≤ t ≤ b, xác định hướng của đường cong C, với hướng dương tương ứng với sự tăng giá trị của tham số t. (Xem Hình 8, ở đó điểm bắt đầu A tương ứng với giá trị tham số a và điểm kết thúc B tương ứng với t = b.)



Hình 8

Nếu –C ký hiệu đường cong bao gồm các điểm của C nhưng đảo chiều (từ điểm bắt đầu B tới điểm kết thúc A trong Hình 8), thì ta có

$$\int_{-C} f(x,y)dx = -\int_C f(x,y)dx$$

$$\int_{-C} f(x,y)dy = -\int_C f(x,y)dy$$

Nhưng nếu chúng ta tích phân theo độ dài cung, giá trị của tích phân không thay đổi khi đảo ngược hướng của đường cong:

$$\int_{-C} f(x,y)ds = -\int_C f(x,y)ds$$

Đó là vì Δs_i luôn dương, trong khi Δx_i và Δy_i đổi dấu khi đảo ngược hướng của C.

4.2.2. Tích phân đường trong không gian

Bây giờ chúng ta giả thiết rằng C là đường cong trơn đường cong cho bởi phương trình tham số $\quad x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad a \le t \le b$

hoặc theo phương trình véc tơ $\quad \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$. Nếu f là hàm của ba biến liên tục trên miền C nào đó, thì chúng ta định nghĩa tích phân đường của f dọc theo C (theo độ dài) tương tự như trước với đường cong phẳng:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta s_i$$

Sử dụng công thức 3 để tính nó:

$$[9] \quad \int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

Nhận thấy rằng các tích phân trong các công thức 3 và 9 có thể viết ở dạng véc tơ

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt$$

Đối với trường hợp đặc biệt f(x, y, z) =1, ta nhận được

$$\int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|dt = L$$

trong đó L là độ dài của đường cong C (xem công thức 1.3.3).

Các tích phân đường dọc theo C theo x, y và z cũng có thể được định nghĩa. Ví dụ,

$$\int_C f(x,y,z)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta z_i = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)dt$$

Do đó, như với tích phân đường trong mặt phẳng, ta tính tích phân

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(x,y)dz$$

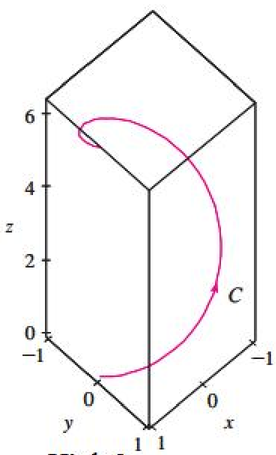
bằng cách biểu diễn tất cả (x, y, z, dx, dy, dz) theo tham số t.

Ví dụ 5 Tính $\int_C ysinzds$, trong đó C là đường xoắn tròn (circular helix) được cho bởi các phương trình x = cost, y = sint, z = t, 0 ≤ t ≤ 2π. (Xem Hình 9.)

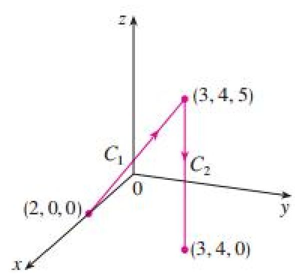
Lời giải Công thức 9 cho ra

$$\int_C ysinzds = \int_0^{2\pi} sin^2t\sqrt{sin^2t + cos^2t + 1}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi}(1 - cos2t)dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[t - \frac{1}{2}sin2t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi$$



Hình 9



Hình 10

Ví dụ 6 Tính $\int_C ydx + zdy + xdz$, trong đó C bao gồm đoạn thẳng C_1 từ (2, 0, 0) tới (3, 4, 5), sau đó là đoạn thẳng C_2 từ (3, 4, 5) tới (3, 4, 0).

Lời giải Đường cong C đường cong thể hiện trên Hình 10. Sử dụng phương trình 8, ta viết C_1 như sau: r(t) = (1 – t)⟨2, 0, 0⟩ + t⟨3, 4, 5⟩ = ⟨2 + t, 4t, 5t⟩

hoặc ở dang tham số: x = 2 + t y = 4t z = 5t 0 ≤ t ≤ 1

Vì vậy

$$\int_{C_1} ydx + zdy + xdz = \int_0^1 (4t)dt + (5t)dt + (2+t)5dt$$

$$= \int_0^1 (10 + 29t)dt = \left[10t + \frac{29}{2}t\right]_0^1 = \frac{49}{2}$$

Tương tự, C_2 có thể viết dưới dạng

r(t) = (1 – t)⟨3, 4, 5⟩ + t⟨3, 4, 0⟩ = ⟨3, 4, 5 – 5t⟩

hoặc x = 3 y = 4 z = 5 – 5t 0 ≤ t ≤ 1

Khi đó dx = dy = 0, vì vậy

$$\int_{C_2} ydx + zdy + xdz = \int_0^1 3(-5)dt = -15$$

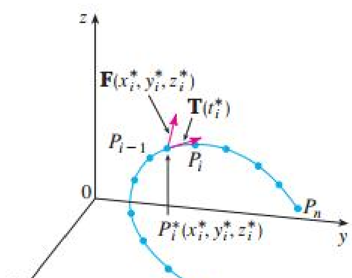
Cộng các giá trị của các tích phân, ta nhận được

$$\int_C ydx + zdy + xdz = \frac{19}{2}$$

4.2.3. Tích phân đường của trường véc tơ

Trong học phần Toán 2 (Giải tích 1), chúng ta biết rằng, công sinh ra bởi một lực thay đổi f(x) khi di chuyển một chất điểm từ a tới b dọc theo trục x là $W = \int_a^b f(x)dx$. Công sinh ra bởi một lực không đổi **F** khi di chuyển một đối tượng từ điểm P tới điểm Q trong không gian là W = **F** · **D**, trong đó **D** = $\overrightarrow{PQ}$ là véc tơ dịch chuyển.

Bây giờ ta giả sử rằng **F** = P**i** + Q**j** + R**k** là trường lực liên tục trên $\mathbb{R}^3$, giống như trường hấp dẫn của Ví dụ 4 trong mục 4.1 hoặc điện trường của Ví dụ 5 trong mục 4.1 (Một trường lực trên $\mathbb{R}^2$ có thể xem là trường hợp đặc biệt khi R = 0 còn P và Q chỉ phụ thuộc x và y.) Chúng ta muốn tính công sinh ra bởi lực này khi di chuyển chất điểm dọc theo đường cong trơn C.



Hình 11

Chúng ta chia C thành các cung nhỏ $P_{i-1}P_i$ với độ dài Δs_i bằng cách chia đoạn tham số [a, b] thành n đoạn con bằng nhau. (Xem Hình 1 đối với trường hợp 2 chiều hoặc Hình 11 đối với trường hợp 3 chiều.) Chọn một điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ trên cung nhỏ thứ **i** tương ứng với giá trị tham số t_i^*. Nếu Δs_i là nhỏ thì khi chất điểm di chuyển từ P_{i-1} tới P_1 dọc theo đường cong, xem như nó di chuyển theo hướng $\mathbf{T}(t_i^*)$, là véc tơ tiếp tuyến đơn vị tại P_i^*. Vì vậy công sinh ra bởi lực **F** khi di chuyển chất điểm từ P_{i-1} tới P_i xấp xỉ bằng

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\Delta s_i$$

và tổng công sinh ra khi di chuyển chất điểm dọc theo C xấp xỉ

[11] $$\sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \boldsymbol{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)]\Delta s_i$$

trong đó **T**(x, y, z) là véc tơ tiếp tuyến đơn vị tại điểm (x, y, z) trên C. Bằng trực giác, chúng ta thấy rằng xấp xỉ sẽ trở nên tốt hơn khi n lớn. Do đó chúng ta định nghĩa công sinh ra bởi trường lực **F** là giới hạn của tổng Riemann trong [11], cụ thể là

[12] $$W = \int_C \boldsymbol{F}(x,y,z) \cdot \boldsymbol{T}(x,y,z)ds = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} ds$$

Nếu đường cong C đường cong cho bởi phương trình véc tơ r(t) = x(t) **i** + y(t) **j** + z(t) **k** thì T(t) = r'(t)/|r'(t)|, vì thế sử dụng phương trình 9 ta có thể viết lại phương trình 12 dưới dạng

$$W = \int_a^b \left[F(r(t)) \cdot \frac{r'(t)}{|r'(t)|}\right] |r'(t)|dt = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$$

Tích phân này thường được viết tắt là $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ và xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khác nhau của vật lý. Do đó chúng ta định nghĩa tích phân đường của trường véc tơ liên tục bất kỳ.

[13] **Định nghĩa** Giả sử **F** là trường véc tơ liên tục xác định trên đường cong trơn C đường cong cho bởi hàm véc tơ **r**(t), a ≤ t ≤ b. Khi đó tích phân đường của **F** dọc theo C là

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\, dt = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} ds$$

Khi sử dụng Định nghĩa 13, nhớ rằng F(r(t)) là viết tắt của F(x(t), y(t), z(t)), vì vậy chúng ta tính F(r(t)) đơn giản bằng cách đặt x = x(t), y = y(t) và z = z(t) trong biểu thức của F(x, y, z). Chú ý rằng chúng ta cũng có thể viết chính thức d**r** = r'(t)dt.

Ví dụ 7 Tìm công sinh ra bởi trường lực **F**(x, y) = x^2 **i** – xy **j** khi di chuyển một chất điểm dọc theo một phần tư đường tròn r(t) = cost **i** + sint **j**, $0 \le t \le \pi/2$.

Lời giải Vì x = cost và y = sint nên F(r(t)) = $\cos^2$t **i** + cost sint **j**, và r'(t) = –sint **i** + cost **j**

Do đó công sinh ra là

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^{\pi/2} F(r(t)) \cdot r'(t)dt = \int_0^{\pi/2} (-2cos^2 t sint)dt = \frac{2}{3}cos^3 t\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

Chú ý Mặc dù

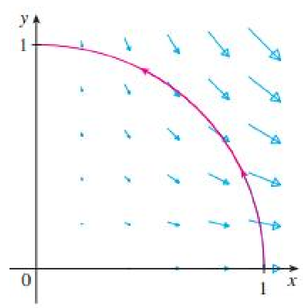
$$\int_C F \cdot dr = \int_C F \cdot T ds$$

và tích phân theo độ dài cung là không đổi khi đổi hướng, công thức sau vẫn còn đúng

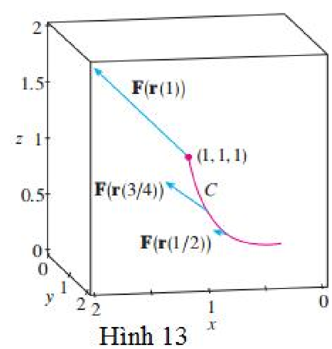
$$\int_{-C} F \cdot dr = -\int_C F \cdot dr$$

bởi vì véc tơ tiếp tuyến đơn vị T được thay bởi –T khi C được thay bởi –C.

Hình 12 mô tả trường lực và đường cong trong Ví dụ 7. Công sinh ra là âm bởi vì lực đã cản trở sự di chuyển dọc theo đường cong.



Hình 12



Hình 13

Ví dụ 8 Tính $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, ở đây **F**(x, y, z) = xy **i** + yz **j** + zx **k** và C là đường xoắn bậc 3 được cho bởi phương trình x = t y = t^2 z = t^3 $0 \le t \le 1$.

Lời giải Ta có **r**(t) = t **i** + t^2 **j** + t^3 **k**, **r'**(t) = **i** + 2t **j** + 3t^2 **k**, **F**(**r**(t)) = t^3 **i** + t^5 **j** + t^4 **k**.

Vì vậy $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt = \int_0^1 (t^3 + 5t^6)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{5}{7}t^7\right]_0^1 = \frac{27}{28}$

Cuối cùng, chúng ta nhận thấy mối liên hệ giữa các tích phân đường của các trường vectơ và các tích phân đường của các trường vô hướng. Giả sử trường vector **F** trên $\mathbb{R}^3$ được cho trong ở dạng các thành phần bởi các phương trình **F** = P **i** + Q **j** + R **k**. Chúng ta sử dụng Định nghĩa 13 để tính các tích phân đường của nó dọc theo C:

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)dt = \int_a^b (Pi + Qj + Rk) \cdot (x'(t) + y'(t) + z'(t))dt$$

$$= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt$$

Nhưng tích phân cuối cùng này chính là tích phân đường trong [10]. Do đó ta có

$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C Pdx + Qdy + Qdz$ ở đây **F** = P **i** + Q **j** + Q **k**

Ví dụ, tích phân $\int_C ydx + zdy + xdz$ trong Ví dụ 6 có thể đưa về $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ với

F(x, y, z) = y ***i*** *+ z* ***j*** *+ x k.*

4.3. Định lý cơ bản đối với tích phân đường

4.3.1. Định lý cơ bản

Nhớ lại rằng, định lý cơ bản của giải tích có thể viết là

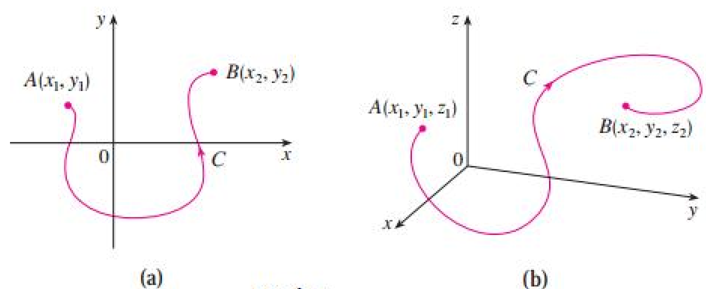
[1] $$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

trong đó F' là liên tục trên [a, b]. Chúng ta còn gọi phương trình 1 là Định lý biến động: Tích phân của vận tốc bằng độ biến động.

Nếu chúng ta xem véc tơ gradient ∇f của hàm f hai hoặc ba biến như là một dạng đạo hàm của f, thì định lý sau đây có thể xem như một phiên bản của định lý cơ bản đối với tích phân đường.

[2] **Định lý** Giả sử C là đường cong trơn đường cong cho bởi phương trình véc tơ r(t), $a \le t \le b$. Giả sử f là hàm khả vi hai hoặc ba biến mà véc tơ gradient của nó liên tục trên C. Khi đó

$$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{r} = f\big(\boldsymbol{r}(b)\big) - f\big(\boldsymbol{r}(a)\big)$$



Hình 1

Chú ý Định lý 2 nói rằng chúng ta có thể tính tích phân đường của trường bảo toàn (véc tơ gradient của hàm thế vị f) đơn giản bằng cách biết các trị của f tại các mút của C. Trong thực tế, Định lý 2 nói rằng tích phân đường của ∇f là độ biến động trong f. Nếu f là hàm của hai biến và C là đường cong phẳng với điểm bắt đầu $A(x_1, y_1)$ và điểm kết thúc $B(x_2, y_2)$, như trên Hình 1, thì Định lý 2 trở thành

$$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Nếu f là hàm của ba biến và C là đường cong không gian nối điểm $A(x_1, y_1, z_1)$ tới điểm $B(x_2, y_2, z_2)$, ta có

$$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Chúng ta chứng minh Định lý 2 cho trường hợp này.

Chứng minh Định lý 2 Sử dụng Định nghĩa 4.2.13, ta có

$$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \nabla f\big(r(t)\big) \cdot r'(t)dt = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f\big(r(t)\big)dt = f\big(r(b)\big) - f\big(r(a)\big)$$

Bước cuối cùng được dẫn ra từ phương trình 1.

Mặc dù chúng ta đã chứng minh Định lý 2 cho các đường cong trơn, nhưng nó vẫn đúng cho các đường cong trơn từng khúc. Điều này có thể thấy được bằng cách chia C thành một số hữu hạn các đường cong trơn và cộng kết quả của các tích phân lại.

Ví dụ 1 Tính công sinh ra bởi trường hấp dẫn

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

khi di chuyển một chất điểm có khối lượng m từ điểm (3, 4, 12) tới điểm (2, 2, 0) dọc theo đường cong trơn từng khúc C. (Xem Ví dụ 4 tại mục 4.1.)

Lời giải Từ mục 4.1 chúng ta biết rằng **F** là trường bảo toàn và trong thực tế, **F** = Δf, ở đây

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Do đó, theo Định lý 2, công sinh ra là

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \nabla f\cdot d\boldsymbol{r} = f(2,2,0) - f(3,4,12)$$

$$= \frac{mMG}{\sqrt{2+2^2}} -= \frac{mMG}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}} = mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right)$$

4.3.2. Không phụ thuộc đường lấy tích phân

Giả sử C_1 và C_2 là hai đường cong trơn từng khúc (gọi là đường đi) có cùng điểm bắt đầu A và điểm kết thúc B. Từ Ví dụ 4 mục 4.2 chúng ta biết rằng, nói chung, $\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. Nhưng một hàm ý của Định lý 2 là

$$\int_{C_1}\nabla \mathrm{f}\cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2}\nabla \mathrm{f}\cdot d\mathbf{r}$$

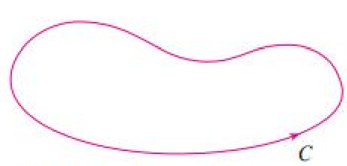
tại mọi nơi Δf liên tục. Nói khác đi, tích phân đường của trường bảo toàn chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường cong.

Nhìn chung, nếu **F** là trường véc tơ liên tục với miền xác định D, chúng ta nói rằng tích phân đường $\int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ là *không phụ thuộc đường đi* nếu $\int_{C_1}\nabla \mathrm{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2}\nabla \mathrm{f}\cdot d\mathbf{r}$ đối với mọi cặp đường đi C_1 và C_2 thuộc D, có cùng điểm bắt đầu và điểm kết thúc. Với thuật ngữ này, chúng ta có thể nói rằng *tích phân đường của trường bảo toàn là không phụ thuộc đường đi.*

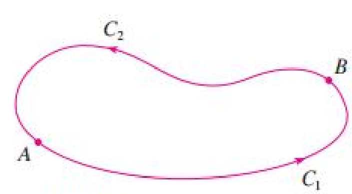
Một đường cong được gọi là kín (closed) nếu điểm kết thúc của nó trùng với điểm bắt đầu, tức là **r**(b) = **r**(a). (Xem Hình 2.) Nếu $\int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ không phụ thuộc đường đi trong D và C là đường cong kín bất kỳ trong D, chúng ta có thể chọn bất kỳ hai điểm A và B trên C và xem C như là hợp của đường đi C_1 từ A tới B và đường đi C_2 từ B tới A. (Xem Hình 3.) Khi đó

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} -\neq \int_{-C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

vì C_1 và $-C_2$ có cùng các điểm bắt đầu và kết thúc.



Hình 2 Đường đi kín



Hình 3

Ngược lại, nếu điều đó là đúng, rằng $\int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$ với mọi C là đường đi kín trong D, thì chúng ta mô phỏng sự không phụ thuộc đường đi như sau. Tạo ra hai đường đi bất kỳ C_1 và C_2 từ A tới B trong D và định nghĩa C là hợp của C_1 với C_2. Khi đó

$$0 = \int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

do đó $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Như thế ta đã chứng minh định lý sau.

[3] **Định lý** $\int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ không phụ thuộc đường đi trong D khi và chỉ khi $\int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ với mọi đường đi kín C trong D.

Bởi vì tích phân đường của trường bảo toàn không phụ thuộc đường đi nên $\int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ đối với mọi đường đi kín. Giải thích vật lý là công sinh ra bởi trường bảo toàn (ví dụ trường hấp dẫn hoặc điện trường trong mục 4.1) khi nó di chuyển một đối tượng quanh một đường đi kín là bằng 0.

Định lý sau đây nói rằng chỉ những trường véc tơ mà không phụ thuộc đường đi là trường bảo toàn. Nó được phát biểu và chứng minh cho đường cong phẳng, nhưng có một phiên bản tương tự cho đường cong trong không gian. Chúng ta giả thiết rằng D là "mở", nghĩa là với mỗi điểm P thuộc D, tồn tại một hình tròn tâm P nằm trọn trong D. (Vì thế D không chứa bất kỳ điểm biên nào.) Hơn nữa, chúng ta giả thiết rằng D là liên thông (connected), nghĩa là hai điểm bất kỳ thuộc D có thể được nói bởi một đường đi nằm trọn trong D.

[4] **Định lý** Giả sử **F** là trường véc tơ liên tục trên miền liên thông mở D. Nếu $\int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ không phụ thuộc đường đi trong D thì **F** là trường bảo toàn trên D, tức là, tồn tại hàm f sao cho Δf = **F**.

Chứng minh Giả sử A(a, b) là điểm cố định trong D. Ta xây dựng hàm thế vị f như sau

$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

với mọi điểm (x, y) trong D. Bởi vì $\int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ không phụ thuộc đường đi nên không quan trọng đường đi C nào từ (a, b) tới (x, y) được dùng để tính f(x, y). Do D là mở, tồn tại hình tròn tâm (x, y) nằm trọn trong D. Chọn điểm bất kỳ (x_1, y) trong hình tròn với $x_1 < x$ và giả sử C bao gồm một phần của đường đi bất kỳ C_1 từ (a, b) tới (x_1, y) và tiếp theo là đoạn thẳng C_2 từ (x_1, y) tới (x, y). (Xem Hình 4.) Khi đó

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Chú ý rằng tích phân đầu tiên không phụ thuộc x nên lấy đạo hàm riêng hai vế theo x:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Nếu ta viết **F** = **P i** + Q **j** thì

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathrm{Pdx} + \mathrm{Qdy}$$

Trên C_2, y không đổi nên dy = 0. Sử dụng t như là tham số, với $x_1 \leq t \leq x$, ta có

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathrm{Pdx} + \mathrm{Qdy} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^{x} \mathrm{P(t, y)dt} = P(x, y)$$

Tương tự, sử dụng đoạn thẳng đứng (xem Hình 5), chỉ ra rằng

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} \mathrm{Pdx} + \mathrm{Qdy} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^{y} \mathrm{Q(x, t)dt} = Q(x, y)$$

Vì thế $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = \nabla f$, và **F** là trường bảo toàn.

Câu hỏi đặt ra là: Làm thế nào để xác định có hay không một trường véc tơ là trường bảo toàn? Giả sử rằng **F** = P **i** + Q **j** là trường bảo toàn, với P và Q có các đạo hàm riêng cấp một liên tục. Khi đó tồn tại hàm f sao cho **F** = Δf, tức là

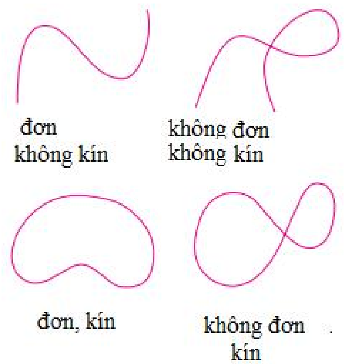
$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Do đó theo Định lý Clairaut,

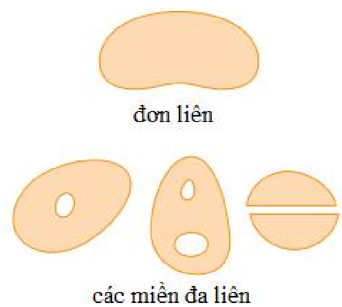
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

[5] **Định lý** Nếu **F**(x, y) = P(x, y) **i** + Q(x, y) **j** là trường bảo toàn với P và Q là có các đạo hàm riêng liên tục trên miền D thì khắp nơi trên D ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$



Hình 6



Hình 7

Phần ngược lại của Định lý 5 là đúng chỉ với kiểu miền đặc biệt. Để giải thích điều đó, trước hết chúng ta cần đưa ra khái niệm đường cong đơn (simple curve), là đường cong không tự cắt tại những nơi giữa hai điểm mút. [Xem Hình 6, **r**(a) = **r**(b) đối với đường cong đơn và kín, nhưng $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ khi $a < t_1 < t_2 < b$.]

Trong Định lý 4 chúng ta cần miền liên thông mở. Với định lý tiếp theo chúng ta cần điều kiện mạnh hơn. Một miền *đơn liên* (simply–connected) trong mặt phẳng là miền liên thông sao cho mọi đường cong kín trong D chỉ bao quanh những điểm thuộc D. Chú ý rằng từ Hình 7, nói theo trực quan, miền đơn liên không chứa các lỗ và bao gồm hai mảnh riêng biệt.

Với thuật ngữ miền đơn liên, chúng ta có thể phát biểu phần ngược của Định lý 5, đưa ra phương pháp chung để kiểm tra một trường véc tơ trên $\mathbb{R}^2$ là trường bảo toàn. Lời chứng minh nhất định sẽ được phác họa trong mục tiếp theo như là hệ quả của Định lý Green.

[6] **Định lý** Giả sử **F** = P **i** + Q **j** là trường véc tơ trên miền đơn liên D. Giả sử rằng P và Q có các đạo hàm riêng liên tục và hầu khắp trên D,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

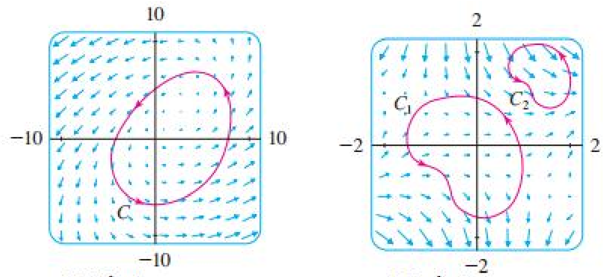
thì **F** là trường bảo toàn.

Ví dụ 2 Xác định trường véc tơ **F**(x, y) = (x – y) **i** + (x – 2) **j** là trường bảo toàn hay không.

Lời giải Giả sử P(x, y) = x – y và Q(x, y) = x – 2. Khi đó $-1 = \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, vậy không phải là trường bảo toàn.

Ví dụ 3 Xác định **F**(x, y) = (3 + 2xy) **i** + ($x^2 - 3y^2$) **j** là trường bảo toàn hay không.

Lời giải Giả sử P(x, y) = 3 + 2xy và Q(x, y) = $x^2 - 3y^2$. Khi đó $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$. Ngoài ra miền xác định D của **F** là toàn bộ mặt phẳng (D = $\mathbb{R}^2$), nên D là mở và đơn liên. Do đó chúng ta có thể áp dụng Định lý 6 và kết luận **F** là trường bảo toàn.



Hình 8 Hình 9

Hình 8 và 9 tương ứng cho thấy các trường véc tơ trong các ví dụ 2 và 3. Các véc tơ trong Hình 8 mà bắt đầu trên đường cong kín C gần như cùng một hướng như C. Vì vậy, có vẻ như $\int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{r} > 0$ và do đó F là trường bảo toàn. Tính toán trong Ví dụ 2 khẳng định cảm nhận này. Một số vector gần các đường cong C_1 và C_2 trong Hình 9 gần như cùng hướng với đường cong, trong khi những cái khác chỉ theo hướng ngược lại. Vì vậy, nó thể hiện sự hợp lý rằng tích phân đường dọc theo mọi đường cong kín là bằng 0. Ví dụ 3 chỉ ra rằng F thực sự là trường bảo toàn.

Trong Ví dụ 3, Định lý 6 nói với chúng ta rằng **F** là trường bảo toàn, nhưng nó không chỉ ra làm thế nào tìm được hàm thế vị f sao cho **F** = Δf. Lời chứng minh của Định lý 4 cho chúng ta đầu mối để tìm f. Chúng ta sử dụng tích phân từng phần trong ví dụ sau.

Ví dụ 4 (a) Nếu **F**(x, y) = (3 + 2xy) **i** + ($x^2 - 3y^2$) **j**, tìm hàm f sao cho **F** = Δf.

(b) Tính tích phân đường $\int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ với C là đường cong được cho bởi

$$\mathbf{r}(t) = e^t\sin t\,\mathbf{i} + e^t\cos t\,\mathbf{j} \qquad 0 \le t \le \pi$$

Lời giải (a) Từ Ví dụ 3 ta biết rằng **F** là trường bảo toàn, vì vậy tồn tại hàm f để Δf = **F**, tức là

[7] $f_x(x, y) = 3 + 2xy$

[8] $f_y(x, y) = x^2 - 3y^2$

Tích phân [7] theo x ta nhận được

[9] $f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$

Chú ý rằng hằng số của phép lấy tích phân là hằng theo x, tức là một hàm của y mà ta gọi là g(y). Tiếp theo ta đạo hàm hai vế của [9] theo y:

[10] $f_y(x, y) = x^2 + g'(y)$

So sánh [8] và [10] ta thấy $g'(y) = -3y^2$.

Tích phân theo y ta có $g(y) = -y^3 + K$, với **k** – hằng số.

Đặt vào công thức trong [9], ta có $f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K$, là hàm thế vị mong muốn.

(b) Để sử dụng Định lý 2, tất cả những gì chúng ta phải biết là các điểm đầu và cuối của C, cụ thể **r**(0) = (0, 1) và **r**(π) = (0, $-e^{\pi}$). Trong biểu thức của f(x, y) ở phần (a), bất kỳ giá trị nào của hằng số **k** cũng làm như thế, vì vậy ta chọn **k** = 0. Khi đó ta có

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \nabla f\cdot d\boldsymbol{r} = f(0,-e^{\pi}) - f(0,1) = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

Phương pháp này ngắn hơn nhiều phương pháp đơn giản tính tích phân đường mà ta đã xem xét tại mục 4.2.

Via dụ 5 Nếu $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\,\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\,\mathbf{j} + 3ye^{3z}\,\mathbf{k}$, tìm hàm f sao cho $\Delta f = \mathbf{F}$.

Lời giải Nếu có hàm f như thế thì

[11] $f_x(x, y, z) = y^2$

[12] $f_y(x, y, z) = 2xy + e^{3z}$

[13] $f_z(x, y, z) = 3ye^{3z}$

Tích phân [11] theo x, ta nhận được

[14] $f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z)$

trong đó g(y, z) là hằng số theo x. Đạo hàm [14] theo y ta có $f_y(x, y, z) = 2xy + g_y(y, z)$, so sánh với [12] cho ra $g_y(y, z) = e^{3z}$. Vì vậy $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$ và ta viết lại [14]:

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Cuối cùng, đạo hàm theo z và so sánh với [13] ta nhận được $h'(z) = 0$ và do đó $h(z) = K$, hằng số. Hàm mong muốn là $f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$. Dễ kiểm tra $\Delta f = \mathbf{F}$.

4.3.3. Bảo toàn năng lượng

Chúng ta áp dụng tư tưởng của chương này tới trường lực liên tục **F** di chuyển một đối tượng dọc theo đường đi C được cho bởi **r**(t), a ≤ t ≤ b, trong đó **r**(a) = A là điểm bắt đầu và **r**(b) = B là điểm kết thúc của C. Được suy ra từ Định luật Newton thứ 2 về chuyển động (xem mục 1.4), lực $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ tại một điểm trên C là liên quan tới gia tốc $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ theo phương trình

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$$

Vì thế công sinh ra bởi lực tác động lên đối tượng là

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b F\big(r(t)\big)\cdot r'(t)dt = \int_a^b mr''(t)\cdot r'(t)dt$$

$$= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}[r'(t)\cdot r'(t)]dt = \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}dt = \frac{m}{2}[|r'(t)|^2]_a^b = \frac{m}{2}(|r'(b)|^2 - |r'(a)|^2)$$

Do đó

$$[16] \qquad W = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}(b)|^2 - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}(a)|^2$$

trong đó v = r' là vận tốc.

Đại lượng $\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}(t)|^2$ (một nửa tích của khối lượng với bình phương vận tốc) được gọi là động năng (kinetic energy) của đối tượng. Do đó chúng ta có thể viết phương trình 15 như sau

[16] $W = K(B) - K(A)$

nghĩa là công sinh ra bởi trường lực dọc theo C là bằng sự thay đổi động năng tại các mút của C.

Bây giờ chúng ta hãy tiếp tục giả định rằng **F** là một trường bảo toàn, tức là chúng ta có thể viết $\mathbf{F} = \Delta f$. Trong vật lý, động năng của một đối tượng tại điểm (x, y, z) được xác định là P(x, y, z) = –f(x, y, z), vì thế ta có $\mathbf{F} = -\Delta P$. Khi đó theo Định lý 2 ta có

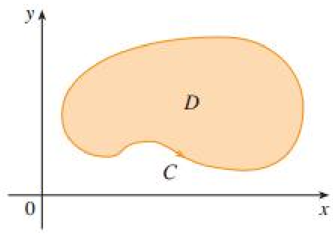
$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \nabla P\cdot d\boldsymbol{r} = -\big[P\big(\boldsymbol{r}(b)\big) - P\big(\boldsymbol{r}(a)\big)\big] = P(A) - P(B)$$

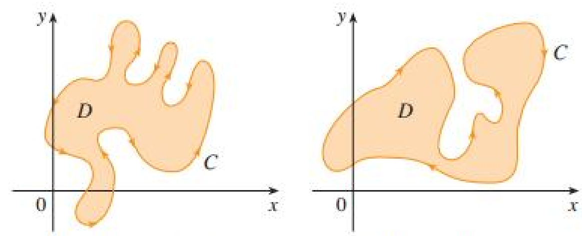
So sánh phương trình này với phương trình 16, ta thấy rằng P(A) + K(A) = P(B)+K(B). Điều đó nói lên rằng nếu đối tượng di chuyển từ điểm A tới điểm B dưới tác động của một trường bảo toàn, thì tổng của thế năng và động năng là không đổi. Cái đó được gọi là "Định luật bảo toàn năng lượng" và nó là lý do trường véc tơ được gọi là trường "bảo toàn".

4.4. Định lý Green

4.4.1. Định lý Green

Định lý Green đưa ra mối quan hệ giữa tích phân đường quanh một đường cong đơn kín C và tích phân kép trên miền phẳng D được giới hạn bởi C. (Xem Hình 1. Chúng ta giả thiết rằng D chứa tất cả các điểm trong C cũng như tất cả các điểm thuộc C.) Để bắt đầu, chúng ta sử dụng quy ước hướng dương của một đường cong đơn kín C là hướng mà một người đi dọc theo C theo chiều ngược chiều kim đồng hồ sẽ thấy phần miền gần nhất được giới hạn bởi C nằm về bên tay trái. Vì vậy nếu đường cong C được cho bởi hàm véc tơ **r**(t), a ≤ t ≤ b thì miền D luôn luôn nằm về bên trái của điểm **r**(t) (xem Hình 2).





(a) Hướng dương (b) Hướng âm

Hình 1 Hình 2

Định lý Green Giả sử C là đường cong đơn kín, định hướng dương, trơn từng khúc trong mặt phẳng và giả sử D là miền đường cong giới hạn bởi C. Nếu P và Q có các đạo hàm riêng liên tục trên miền mở chứa D thì

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(Q_x - P_y\right)dA$$

Chú ý Ký hiệu $\oint_C Pdx + Qdy$ hay $\oint_C Pdx + Qdy$ đôi khi được sử dụng để chỉ thị rằng tích phân đường là được tính theo chiều dương của đường cong C. Một ký hiệu khác cho biên định hướng dương của D là ∂D, vì vậy công thức Green có thể viết lại

[1] $$\iint_D \left(Q_x - P_y\right)dA = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

So sánh phương trình 1 với phương trình trong Định lý cơ bản của giải tích (phần 2):

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

ta thấy cả hai đều liên quan đến đạo hàm (F', ∂Q/∂x, ∂P/∂y) trong vế trái của các phương trình. Và cả hai vế phải liên quan đến các giá trị của hàm gốc (F, P, Q) chỉ trên biên của miền.

Định lý Green không dễ dàng chứng minh trong trường hợp tổng quát, nhưng chúng ta có thể đưa ra chứng minh cho trường hợp đặc biệt khi miền là loại 1 hoặc loại 2 (xem mục 3.3). Chúng ta gọi các miền như vậy là *miền đơn* (simple region).

Chứng minh của Định lý Green khi D là miền đơn

Chú ý rằng Định lý Green nhất định được chứng minh nếu chúng ta chỉ ra rằng

[2] $$\int_C Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dA$$ và [3] $$\int_C Qdy = -\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dA$$

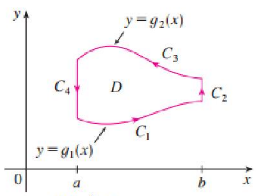
Chúng ta chứng minh phương trình 2 bằng cách biểu diễn D như là loại 1:

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

trong đó g_1 và g_2 là các hàm liên tục. Điều đó cho phép chúng ta tính tích phân kép bên vế phải của phương trình 2 như sau:

[4] $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy\, dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx$

trong đó bước cuối cùng được suy từ Định lý cơ bản.



Hình 3

Bây giờ chúng ta tính vế trái của phương trình 2 bằng cách bẻ gãy C thành bốn đường cong C_1, C_2, C_3 và C_4 như Hình 3. Trên C_1 ta xem x là tham số: $x = x$, $y = g_1(x)$, $a \le x \le b$. Do đó

$$\int_{C_1} P dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx$$

Nhận thấy rằng C_3 đi từ phải sang trái nên $-C_3$ đi từ trái sang phải, vì thế chúng ta có thể viết phương trình tham số của $-C_3$ là $x = x$, $y = g_2(x)$, $a \le x \le b$. Vì thế

$$\int_{C_3} P(x,y) dx = -\int_{-C_3} P(x,y) dx = -\int_a^b P(x, g_2(x)) dx$$

Trên C_2 hoặc C_4 (chúng có thể suy biến thành một điểm), x là hằng số, vì vậy dx = 0 và

$$\int_{C_2} P(x,y) dx = \int_{C_4} P(x,y) dx = 0$$

Vì vậy

$$\int_C P(x,y) dx = \int_{C_1} P(x,y) dx + \int_{C_2} P(x,y) dx + \int_{C_3} P(x,y) dx + \int_{C_4} P(x,y) dx$$

$$= \int_{C_3} P(x,y) dx = \int_a^b [P(x, g_1(x)) - P(x, g_2(x))] dx$$

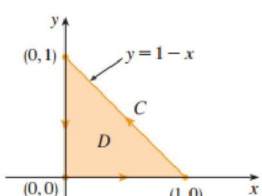
So sánh biểu thức này với phương trình 4, ta thấy

$$\int_C P(x,y) dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

Phương trình 3 có thể được chứng minh tương tự bằng cách biểu diễn D như là miền loại 2. Sau đó bằng cách cộng các phương trình 2 và 3, ta nhận được công thức Green.

Ví dụ 1 Tính $\int_C x^4 dx + xy dy$, trong đó C là đường tam giác gồm các đoạn thẳng (0, 0) tới (1, 0), từ (1, 0) tới (0, 1) và từ (0, 1) tới (0, 0).

Lời giải Mặc dù tích phân đường đã cho có thể được tính bằng cách sử dụng phương pháp trong mục 4.2, liên quan đến việc tính ba tích phân riêng biệt dọc theo ba cạnh của tam giác, nhưng ở đây chúng ta sử dụng công thức Green. Chú ý rằng D là miền kín bởi C là đơn và C có hướng dương (xem Hình 4). Nếu chúng ta đặt $P(x, y) = x^4$ và $Q(x, y) = xy$ thì ta có



Hình 4

$$\int_C x^4 dx + xy dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = -\frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Ví dụ 2 Tính $\int_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$, ở đây C là đường tròn $x^2 + y^2 = 9$

Lời giải Miền D được giới hạn bởi C là đĩa $x^2 + y^2 \le 9$, vì vậy chúng ta chuyển sang tọa độ cực sau khi áp dụng công thức Green:

$$\int_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy = \iint_D (7 - 3) dA = 4 \iint_D dA$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^3 r dr\, d\theta = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r dr = 36\pi$$

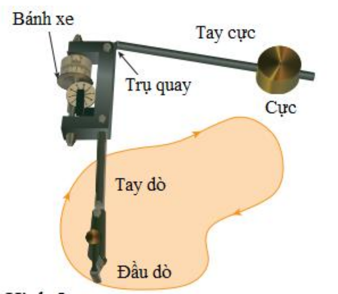
Thay cho việc sử dụng tọa độ cực, ta có thể tính: $4 \iint_D dA = 4 \cdot \pi 3^2 = 36\pi$

Ví dụ 3 Tính diện tích miền được giới hạn bởi ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Lời giải Ellipse có phương trình tham số là x = acosst, y = bsint, $0 \le t \le 2\pi$. Sử dụng công thức thứ 3 trong phương trình 5, ta có

$$A = \frac{1}{2}\int_C \ xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abcos^2tdt + absin^2tdt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \pi a$$

Công thức 5 dùng để giải thích cách hoạt động của planimeter. Đây là một công cụ cơ khí được dùng để đo diện tích của một miền bằng cách lần theo đường biên. Các thiết bị như vậy rất hiệu quả trong khoa học: sinh học để đo diện tích lá hoặc cánh, trong y học để đo kích thước của mặt cắt của các cơ quan hoặc các khối u, trong lâm nghiệp để ước lượng kích thước của vùng rừng từ các bức ảnh.



Hình 5 Planimeter cực Keuffel và Esser

Hình 5 cho thấy hoạt động của một planimeter cực: Cực là cố định và khi đầu dò di chuyển dọc theo đường biên của miền, các bánh xe một phần trượt và một phần lăn vuông góc với cánh tay dò. Các planimeter đo khoảng cách mà các bánh xe lăn và đây là tỷ lệ thuận với diện tích của miền. Giải thích như một hệ quả của công thức 5 có thể được tìm thấy trong các bài viết sau đây:

- R. W. Gatterman, "The planimeter as an example of Green's Theorem" *Amer. Math. Monthly*, Vol. 88 (1981), pp. 701– 4.
- Tanya Leise, "As the planimeter wheel turns" *College Math. Journal*, Vol. 38 (2007), pp. 24 –31.

4.4.2. Công thức Green mở rộng

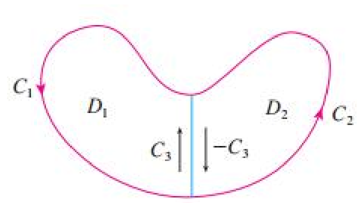
Mặc dù chúng ta đã chứng minh Định lý Green chỉ với trường hợp D là miền đơn, bây giờ chúng ta có thể mở rộng nó tới trường hợp D là hợp của hữu hạn các miền đơn. Ví dụ, nếu D là miền được thể hiện trên Hình 6, thì chúng ta có thể viết $D = D_1 \cup D_2$, ở đây D_1 và D_2 đều là miền đơn. Biên của D_1 là $C_1 \cup C_3$ và biên của D_2 là $C_2 \cup (-C_3)$, vì vậy áp dụng Định lý Green tới D_1 và D_2 riêng biệt, ta nhận được

$$\int_{C_1 \cup C_3} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dA \quad \int_{C_2 \cup (-C_3)} Pdx + Qdy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dA$$

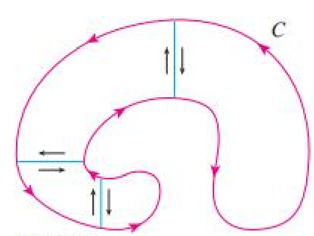
Nếu chúng ta cộng hai phương trình này, các tích phân đường dọc theo C_3 và $-C_3$ là hủy bỏ, vì thế ta nhận được

$$\int_{C_1 \cup C_2} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dA$$

đó là Định lý Green cho $D = D_1 \cup D_2$, và biên của nó là $C = C_1 \cup C_2$.



Hình 6



Hình 7

Cùng một lập luận cho phép chúng ta xây dựng Định lý Green cho một hợp hữu hạn bất kỳ các miền đơn không chồng lẫn lên nhau (nonoverlapping).

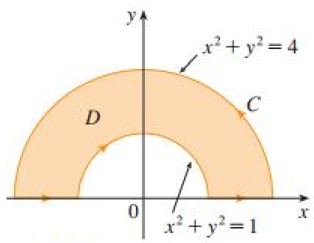
Ví dụ 4 Tính $\int_C y^2dx + 3xydy$, trong đó C là biên của miền D là nửa vành khuyên (semiannular) phía trên giữa hai đường tròn $x^2 + y^2 = 4$.

Lời giải Chú ý rằng mặc dù miền D là không đơn, trục y chia nó thành hai miền đơn (xem Hình 8). Trong tọa độ cực ta có thể viết D = {(r, θ) | 1 ≤ r ≤ 2, 0 ≤ θ ≤ π}.

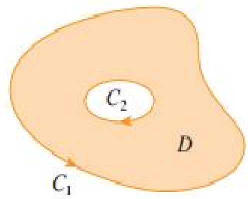
Do đó Định lý Green đưa ra

$$\int_C y^2dx + 3xydy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)dA\right] = \iint_D ydA$$

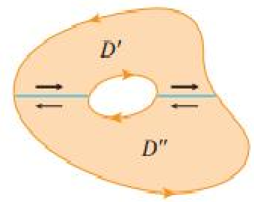
$$= \int_0^\pi \int_1^2 r sin\theta r dr\, d\theta = \int_0^\pi sin\theta d\theta \int_1^2 r^2 dr = [-cos\theta]_0^\pi \left[\frac{1}{3}r^3\right]_1^2 = \frac{14}{3}$$



Hình 8



Hình 9



Hình 10

Định lý Green có thể mở rộng để áp dụng tới những miền bị hổng, tức là những miền không đơn liên. Nhận thấy rằng biên C của miền D trên Hình 9 bao gồm hai đường cong đơn kín C_1 và C_2. Chúng ta giả thiết rằng những đường cong này định hướng sao cho miền D luôn luôn ở về bên trái khi di chuyển trên đường cong C. Vì thế hướng dương là ngược chiều kim đồng hồ đối với đường cong bên ngoài C_1, nhưng cùng chiều kim đồng hồ đối với đường cong bên trong C2. Nếu chúng ta chia D thành hai miền D' và D" bởi đường thẳng nằm ngang như trên Hình 10 và sau đó áp dụng Định lý Green cho mỗi D' và D", ta nhận được

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dA = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dA$$

$$= \int_{\partial D'} Pdx + Qdy + \int_{\partial D''} Pdx + Qdy$$

Vì tích phân đường dọc theo biên chung là ngược chiều nhau nên chúng triệt tiêu và ta nhận được

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dA = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy = \int_C Pdx + Qdy$$

đó là Định lý Green cho miền D.

Ví dụ 5 Cho **F**(x, y) = (-y **i** + x **j**)/($x^2 + y^2$), chỉ ra rằng $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ với mọi đường đi đơn kín định hướng dương bao quanh gốc tọa độ.

Lời giải Vì C là đường đi kín tùy ý bao quang gốc tọa độ, rất khó để tính trực tiếp tích phân đã cho. Vì vật chúng ta xem xét đường tròn C' định hướng ngược chiều kim đồng hồ và nằm bên trong C. (Xem Hình 11.) Giả sử D là miền được giới hạn bởi C và C'. Khi đó biên của nó định hướng dương là C∪(-C') và vì vậy Định lý Green cho ra

$$\int_C Pdx + Qdy + \int_{-C'} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dA$$

$$= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] dA = 0$$

Do đó $\int_C Pdx + Qdy = \int_{C'} Pdx + Qdy$, tức là $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Bây giờ chúng ta dễ dàng tính được tích phân cuối cùng bằng cách sử dụng phương trình tham số được cho bởi $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$. Vì vậy

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-asint)(-asint)+(acost)(acost)}{a^2cos^2t+a^2sin^2t}dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Chúng ta kết thúc mục này bằng cách sử dụng Định lý Green để thảo luận về một kết quả đã được nêu trong phần trước.

Phác thảo chứng minh định lý 4.3.6 Chúng ta giả thiết rằng $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ là trường véc tơ trên một miền mở liên thông D, tức là P và Q có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục, và thỏa mãn

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ khắp trong D}$$

Nếu C là đường đi đơn kín trong D và R à miền sao cho được bao bởi C thì Định lý Green cho ra

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)dA = \iint_R 0dA = 0$$

Một đường cong không đơn tự cắt tại một hoặc nhiều điểm có thể được chia ra thành một số đường cong đơn. Chúng ta chỉ ra rằng các tích phân đường của **F** dọc theo các đường cong đơn này đều bằng 0 và cộng các tích phân đó lại ta thấy $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ với mọi đường cong kín C. Do đó $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ không phụ thuộc đường đi trong D theo Định lý 4.3.3. Điều đó dẫn tới **F** là trường véc tơ bảo toàn.

4.5. Rota và Dive

Trong phần này chúng ta định nghĩa hai hoạt động có thể được thực hiện trên các trường véc tơ và đóng một vai trò cơ bản trong các ứng dụng của giải tích véc tơ đối với dòng chảy và điện trường và từ trường. Cùng tác động đạo hàm tương tự nhau, nhưng một cái sinh ra một trường véc tơ, cái kia tạo ra một trường vô hướng.

4.5.1. Véc tơ xoáy Rota

Nếu $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ là một trường véc tơ trên $\mathbb{R}^3$ và các đạo hàm riêng của P, Q và R tồn tại, thì **rot** của **F** là trường véc tơ trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

[1] $$\mathbf{rot\,F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

Để dễ nhớ, chúng ta viết lại phương trình 1 khi sử dụng ký hiệu toán tử. Chúng ta đưa ra toán tử véc tơ đạo hàm ∇ như sau

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Nó có nghĩa khi tác động vào hàm vô hướng để sinh ra gradient của f:

$$\nabla f = \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

Nếu chúng ta xem ∇ như là véc tơ với các thành phần $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, chúng ta cũng có thể xem tích hữu hướng của ∇ với trường véc tơ **F** như sau:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = \mathbf{rot\,F}$$

Vì thế cách dễ nhất để nhớ Định nghĩa 1 là nhớ biểu thức ký hiệu

[2] $\mathbf{rot\,F} = \nabla \times \mathbf{F}$

Ví dụ 1 Nếu $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, tìm **rot F**.

Lời giải Sử dụng phương trình 2 ta có

$$\mathbf{rot\,F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} = -y(2+x)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$$

Nhớ lại rằng gradient của hàm f ba biến là trường véc tơ trên $\mathbb{R}^3$ và vì vậy chúng ta có thể tính **rot** của nó. Định lý sau đây nói rằng rot của trường véc tơ gradient bằng **0**.

[3] **Định lý** Nếu f là hàm của ba biến có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục thì $\mathbf{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$.

Chứng minh

$$\mathbf{rot}\,(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$$

Một trường véc tơ bảo toàn thì $\mathbf{F} = \nabla f$, Định lý 3 có thể phát biểu lại như sau:

Nếu **F** là bảo toàn thì $\mathbf{rot\,F} = \mathbf{0}$.

Điều đó cho chúng ta cách kiểm tra một trường véc tơ không là bảo toàn.

Ví dụ 2 Chứng tỏ rằng trường véc tơ $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + z\tilde{y}\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ là không bảo toàn.

Lời giải Trong Ví dụ 1 ta chỉ ra rằng $\mathbf{rot\,F} = -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$

Điều đó chứng tỏ rằng $\mathbf{rot\,F} \neq \mathbf{0}$ và vì vậy, theo Định lý 3, nó không bảo toàn.

Điều ngược lại của Định lý 3 nói chung không đúng, nhưng định lý sau đây nói rằng điều ngược lại là đúng nếu **F** xác định khắp nơi. (Tổng quát hơn, nó là đúng nếu miền xác định là đơn liên, tức là "không bị thủng".) Định lý 4 là phiên bản thứ ba của Định lý 4.3.6. Việc chứng minh nó đòi hỏi Định lý Stoke và sẽ được phác thảo ở cuối phần 4.8.

[4] **Định lý** Nếu **F** là trường véc tơ xác định trên $\mathbb{R}^3$, các hàm thành phần của nó có các đạo hàm riêng liên tục và $\mathbf{rot\,F} = \mathbf{0}$, thì **F** là trường véc tơ bảo toàn.

Ví dụ 3 (a) Chứng tỏ rằng $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$ là bảo toàn.

(b) Tìm hàm f sao cho $\mathbf{F} = \nabla f$.

Lời giải (a) Ta tính **rot** của **F**:

$$\mathbf{rot\,F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (6xyz^2 - 6xyz^2)\boldsymbol{i} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\boldsymbol{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$$

Vì rot F = 0 và miền xác định của f là $\mathbb{R}^3$, F là trường véc tơ bảo toàn theo Định lý 4.

(b) Kỹ thuật để tìm f được đưa ra trong mục 4.3. Ta có

[5] $f_x(x, y, z) = y^2z^3$

[6] $f_y(x, y, z) = 2xyz^3$

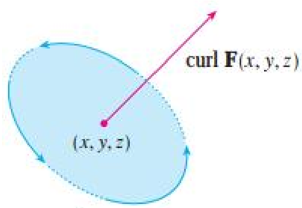
[7] $f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2$

Tích phân [5] theo x ta nhận được

[8] $f(x, y, z) = xy^2z^3 + g(y, z)$

Đạo hàm [8] theo y, ta có $f_y(x, y, z) = 2xyz^3 + g_y(y, z)$, so sánh với [6] thì $g_y(y, z) = 0$. Vì vậy $g(y, z) = h(z)$ và $f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$

Khi đó [7] cho ra $h'(z) = 0$. Do đó $f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$



Hình 1

Lý do đặt tên là **rot** vì liên quan đến sự quay (rotation). Một liên quan ảy ra khi **F** là trường vận tốc trong dòng chất lỏng (xem Ví dụ 3 mục 4.1). Những hạt gần (x, y, z) có xu hướng xoay quanh trục mà hướng theo hướng của **rot F**(x, y, z), và độ dài của véc tơ rot cho biết các hạt di chuyển quanh trục nhanh như thế nào (xem Hình 1). Nếu rot F = 0 tại điểm P thì chất lỏng thoát khỏi sự quay tại P và F đường cong gọi là *không quay* tại P. Nói khác đi, không có xoáy hay xoắn tại P. Nếu rot F = 0 thì cái guồng (paddle wheel) di chuyển theo chất lỏng nhưng không quay quanh trục của nó. Nếu rot F ≠ 0, cái guồng quay quanh trục của nó. Chúng ta cung cấp một lời giải thích chi tiết hơn trong mục 4.8 như một hệ quả của Định lý Stokes.

4.5.2. Đivê

Nếu P **i** + Q **j** + R **k** là trường véc tơ trên $\mathbb{R}^3$ và $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ và $\partial R/\partial z$ tồn tại thì *đivê của F* là hàm ba biến xác định bởi

[9] $$div\ F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Nhận thấy rằng rot F là trường véc tơ nhưng div F là trường vô hướng. Theo ký hiệu của toán tử gradient $\nabla = (\partial/\partial x)\,\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\,\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\,\mathbf{k}$, đivê của F có thể viết dưới dạng ký hiệu là tích vô hướng của ∇ và F:

[10] $$\text{div F} = \nabla \cdot \text{F}$$

Ví dụ 4 Cho $F(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$, tìm div F.

Lời giải Theo định nghĩa của đivê ta có

$$\text{div F} = \nabla \cdot \text{F} = \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(xyz)}{\partial y} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial z} = z + xz$$

Nếu F là trường véc tơ trên $\mathbb{R}^3$ thì rot F cũng là trường véc tơ trên $\mathbb{R}^3$. Vì vậy chúng ta có thể tính đivê của nó. Định lý sau chỉ ra rằng nó bằng 0.

[11] **Định lý** Nếu $F = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ là trường véc tơ trên $\mathbb{R}^3$ và P, Q, R có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục, thì div (**rot F**) = 0.

Chứng minh Sử dụng định nghĩa của đivê và rôta, ta có

$$\text{div rot F} = \nabla \cdot (\nabla \times \text{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} = 0$$

bởi vì từng đôi một khử khau theo định lý Clairaut.

Ví dụ 5 Chứng tỏ rằng trường véc tơ $F(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ không thể là rôta của trường véc tơ nào, tức là không tồn tại trường véc tơ G để rot F = G.

Lời giải Trong Ví dụ 4 chúng ta đã chỉ ra rằng div F = z + xz, vì thế div F ≠ 0. Nếu đúng là F = rot G thì theo Định lý 11 sẽ có div F = div rot G = 0, mâu thuẫn với div F ≠ 0. Vì vậy F không là rot của bất kỳ trường véc tơ nào.

Một lần nữa, lý do tên đivê có thể được hiểu trong ngữ cảnh của dòng chảy. Nếu F(x, y, z) là vận tốc của chất lỏng (hoặc khí) thì div F(x, y, z) thể hiện tốc độ thay đổi (theo thời gian) của khối lượng chất lỏng (hoặc khí) sau điểm (x, y, z) trên một đơn vị thể tích. Nói khác đi, div F(x, y, z) phản ánh xu hướng của chất lỏng tách ra từ điểm (x, y, z). Nếu div F = 0 thì F được gọi là không nén được.

Một toán tử khác xuất hiện khi chúng ta tính đivê của trường véc tơ gradient ∇f. Nếu f là hàm của ba biến, ta có

$$div(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

và biểu thức này xuất hiện thường xuyên và chúng ta viết là $\nabla^2 f$.

Toán tử $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ được gọi là toán tử Laplace bởi nó liên quan tới phương trình Laplace

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Chúng ta cũng có thể áp dụng toán tử Laplace ∇^2 tới trường véc tơ F(P, Q, R)

$$\nabla^2 F = \nabla^2 P\,\mathbf{i} + \nabla^2 Q\,\mathbf{j} + \nabla^2 R\,k$$

4.5.3. Dạng véc tơ của Định lý Green

Các toán tử rot và div cho phép chúng ta viết Định lý Green dưới dạng hữu ích cho công việc của chúng ta sau này. Chúng ta giả sử rằng miền phẳng D được giới hạn bởi đường cong C và các hàm P và Q thỏa mãn các giả thiết của Định lý Green. Khi đó chúng ta xem xét trường véc tơ F = P **i** + Q j, tích phân đường của nó là

$$\oint_C F \cdot dr = \oint_C Pdx + Qdy$$

và F là trường véc tơ trên $\mathbb{R}^3$ với thành phần thứ ba bằng 0, ta có

$$rot\ F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

Do đó

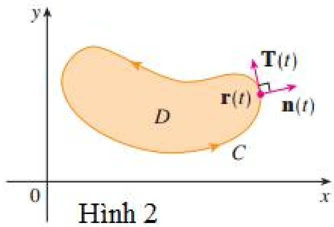
$$(rot\ F) \cdot k = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

và chúng ta viết lại phương trình trong Định lý Green dưới dạng véc tơ

$$[12] \quad \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D (rot\ F) \cdot \boldsymbol{k} dA$$

Phương trình 12 biểu thị tích phân đường của thành phần tiếp tuyến của F dọc theo C như là tích phân kép của thành phần dọc của rot F trên miền D được giới hạn bởi C. Bây giờ chúng ta rút ra được công thức tương tự liên quan đến thành phần pháp tuyến của F.

Nếu C được cho bởi phương trình véc tơ r(t) = x(t) **i** + y(t) j, a ≤ t ≤ b, thì véc tơ tiếp tuyến đơn vị (xem Hình 1.2) là



Hình 2

$$T(t) = \frac{x'(t)}{|r'(t)|} i + \frac{y'(t)}{|r'(t)|} j$$

Dễ kiểm tra rằng véc tơ đơn vị ngược hướng là

$$T(t) = -\frac{y'(t)}{|r'(t)|} i - \frac{x'(t)}{|r'(t)|} j$$

(Xem Hình 2.) Khi đó từ phương trình 4.2.3 ta có

$$\oint_C F \cdot n ds = \int_a^b (F \cdot n)(t)|r'(t)|dt = \int_a^b \left[\frac{P(x(t),y(t))y'(t)}{|r'(t)|} - \frac{Q(x(t),y(t))x'(t)}{|r'(t)|}\right]|r'(t)|dt$$

$$= \int_a^b P\big(x(t),y(t)\big)y'(t)dt - Q(x(t),y(t))x'(t)dt$$

$$= \int_C Pdx - Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dA$$

theo Định lý Green. Nhưng biểu thức trong tích phân kép lại là đivê của F. Do đó chúng ta có dạng véc tơ thứ hai của Định lý Green.

[13] $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x,y) dA$

Phiên bản này nói lên rằng tích phân đường của thành phần pháp tuyến của F dọc theo C là bằng tích phân kép của đivê của F trên miền D được giới hạn bởi C.

4.6. Các mặt cong tham số và diện tích của chúng

Trước đây chúng ta đã xem xét một số mặt đặc biệt: mặt trụ, mặt bậc hai, đồ thị của hàm hai biến và mặc mức của hàm ba biến. Ở đây chúng ta sử dụng hàm véc tơ để mô tả nhiều hơn các mặt tổng quát, được gọi là các mặt cong tham số và tính diện tích của chúng. Sau đó chúng ta xây dựng công thức tính diện tích mặt cong tổng quát và sẽ thấy ứng dụng của nó tới các mặt đặc biệt.

4.6.1. Mặt tham số

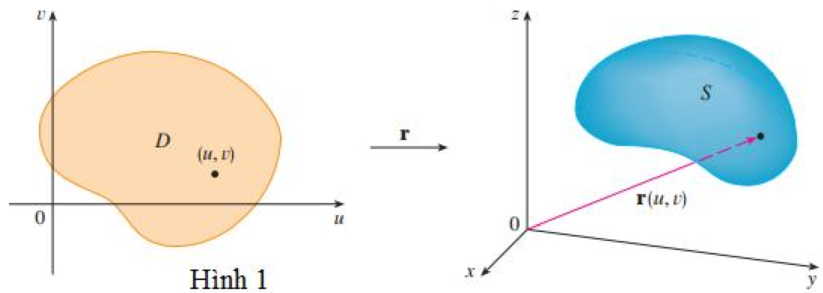
Tương tự cách mô tả đường cong trong không gian bởi phương trình véc tơ r(t) của một tham số t, chúng ta có thể mô tả mặt cong bởi hàm véc tơ r(u, v) của hai tham số u và v. Chúng ta giả sử rằng

[1] r(u, v) = x(u, v) **i** + y(u, v) **j** + z(u, v) **k**

là hàm véc tơ xác định trên miền D thuộc mặt phẳng uv. Vì thế x, y và z (các hàm thành phần của r) là các hàm hai biến u và v với miền xác định D. Tập các điểm (x, y, z) trong $\mathbb{R}^3$ sao cho

[2] x = x(u, v) y = y(u, v) z = z(u, v)

và (u, v) biến thiên trong miền D, được gọi là mặt tham số S và phương trình 2 được gọi là phương trình tham số của S. Mỗi giá trị của u và v xác định một điểm trên S, tất cả các giá trị có thể của u và v tương ứng với toàn bộ mặt S. Nói khác đi, mặt cong S được vẽ ra bởi điểm mút của véc tơ vị trí r(u, v) khi (u, v) di chuyển khắp nơi trên D. (Xem Hình 1.)



Hình 1

Ví dụ 1 Nhận dạng và phác họa mặt cong với phương trình véc tơ

$$r(u, v) = 2\cos u\ \mathbf{i} + v\ \mathbf{j} + 2\sin u\ k$$

Lời giải Phương trình tham số của mặt cong này là: $x = 2\cos u \quad y = v \quad z = 2\sin u$

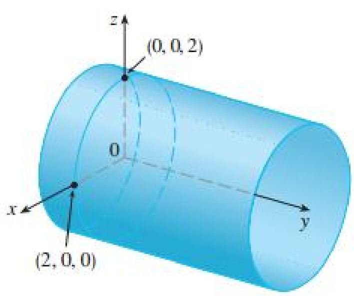
Vì vậy với mỗi điểm (x, y, z) trên mặt cong ta có: $x^2 + z^2 = 4\cos^2 u + 4\sin^2 u = 4$

Điều đó nghĩa là các mặt cắt theo chiều dọc song song với mặt phẳng xz (tức là y không đổi) là các đường tròn bán kính bằng 2. Bởi vì y = v và không bị hạn chế được đặt trên v, mặt cong là mặt trụ tròn với bán kính bằng 2 và có trục là trục y (xem Hình 2).

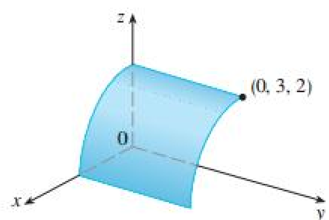
Trong Ví dụ 1 chúng ta đặt không hạn chế các tham số u và v vì thế chúng ta nhận được toàn bộ mặt trụ. Ví dụ, nếu ta hạn chế u và v bằng cách viết miền của tham số như

$$0 \le u \le \pi/2 \qquad 0 \le v \le 3$$

thì $x \ge 0$, $z \ge 0$, $0 \le y \le 3$, và ta nhận được một phần tư mặt trụ với độ dài 3 được minh họa trên Hình 3.

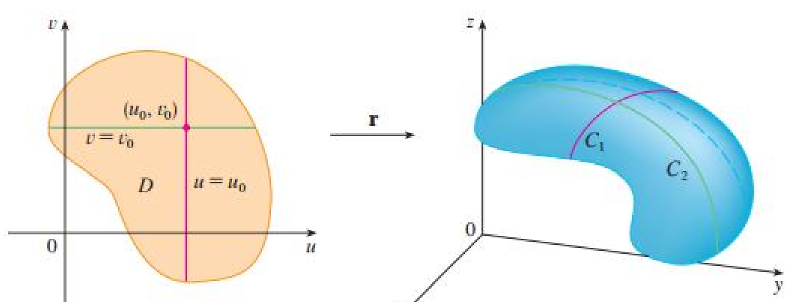


Hình 2



Hình 3

Nếu mặt tham số S được cho bởi hàm véc tơ r(u, v) thì hai họ đường cong nằm trên S, một họ với u không đổi và một họ với v không đổi. Các họ này tương ứng với các đường thẳng dọc và ngang trên mặt phẳng uv. Nếu chúng ta giữ u không đổi bằng cách đặt $u = u_0$ thì $r(u_0, v)$ trở thành hàm véc tơ một tham số v và xác định đường cong C_1 nằm trên S. (Xem Hình 4.)



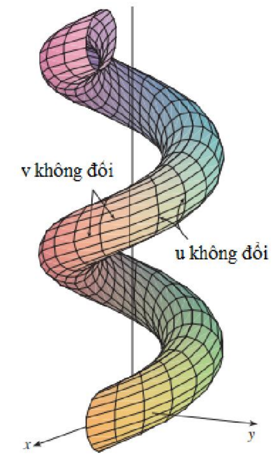
Hình 4

Tương tự, nếu chúng ta giữ v không đổi bằng cách đặt $v = v_0$, chúng ta nhận được đường cong C_2 được cho bởi $r(u, v_0)$ nằm trên S. Chúng ta gọi những đường cong này là lưới. (Trong

Ví dụ 1, lưới nhận được bằng cách cho u không đổi là những đường ngang, trong khi lưới với v không đổi là những đường tròn.) Thực tế, khi máy tính vẽ mặt cong tham số, nó thường mô tả mặt cong bằng cách vẽ các lưới như ta thấy trong ví dụ sau.

Ví dụ 2 Sử dụng máy tính vẽ mặt cong r(u, v) = ⟨(2 + sinv)cosu, (2 + sinv)sinu, u + cosv⟩. Lưới nào có u không đổi? Lưới nào có v không đổi?

Lời giải Chúng ta vẽ một phần của mặt cong với miền tham số $0 \le u \le 4\pi$, $0 \le v \le 2\pi$ trên Hình 5. Nó có hình dạng của một xoắn ốc. Để nhậ dạng các lưới, ta viết các phương trình tham số tương ứng:



Hình 5

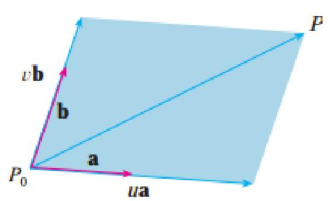
x = (2 + sinv)cosu y = (2 + sinv)sinu z = u + cosu

Nếu v không đổi thì sinv và cosv là không đổi, vì vậy các phương trình tham số giống như xoắn trong Ví dụ 4 tại mục 1.1. Vì vậy các lưới với v không đổi là đường xoắn trên Hình 5. Chúng ta suy luận rằng các lưới với u không đổi là đường cong mà giống như đường tròn. Thêm bằng chứng cho ví dụ này là nếu u được giữ không đổi, $u = u_0$, thì phương trình $z = u_0 + \cos v$ chỉ ra rằng giá trị z biến thiên từ $u_0 - 1$ đến $u_0 + 1$.

Trong ví dụ 1 và 2, chúng ta đã đưa ra một phương trình véc tơ và yêu cầu vẽ đồ thị của mặt tham số tương ứng. Trong ví dụ sau đây, tuy nhiên, chúng ta đưa ra các vấn đề khó khăn hơn của việc tìm kiếm một hàm véc tơ để mô tả một mặt cong nhất định. Trong phần còn lại của chương này chúng ta sẽ thường cần phải làm chính xác điều đó.

Ví dụ 3 Tìm hàm véc tơ biểu diễn mặt phẳng đi qua điểm P_0 với véc tơ vị trí r_0 và chứa hai véc tơ không song song **a** và **b**.

Lời giải Nếu P là một điểm bất kỳ trên mặt phẳng, chúng ta có thể nhận được từ P_0 bằng cách di chuyển một khoảng nhất định theo hướng của a và một khoảng nữa theo hướng của b. Vì vậy tồn tại các số u và v sao cho $\overrightarrow{P_0P} = ua + vb$. (Hình 6 minh họa cách làm việc này theo quy tắc hình bình hành, đối với trường hợp u và v cùng dương.) Nếu r là véc tơ vị trí của P thì $r = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = r_0 + ua + vb$



Hình 6

Vì thế phương trình véc tơ của mặt phẳng có thể viết là $r(u, v) = r_0 + ua + vb$m trong đó u và v là các số thực.

Nếu ta viết r = ⟨x, y, z⟩, $r_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, $a = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ và $b = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ thì chúng ta có thể viết phương trình tham số của mặt phẳng đi qua điểm (x_0, y_0, z_0) là:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1 \qquad y = y_0 + ua_2 + vb_2 \qquad z = z_0 + ua_3 + vb_3$$

Ví dụ 4 Tìm biểu diễn tham số của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

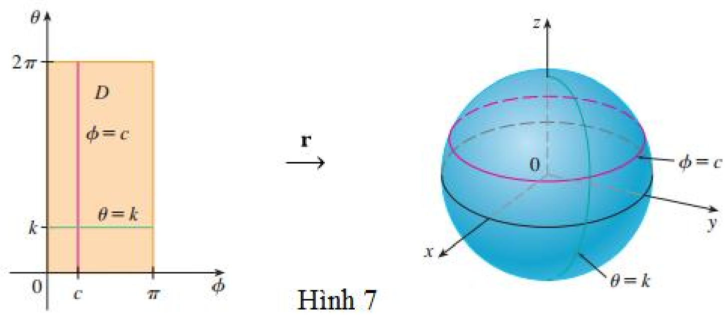
Lời giải Mặt cầu có biểu diễn đơn giản ρ = a trong tọa độ cầu, vì thế chúng ta chọn những góc ϕ và θ trong tọa độ cầu làm tham số (xem mục 3.9). Sau đó, đặt ρ = a trong các phương trình chuyển từ tọa độ cầu tới tọa độ Đề các (Phương trình 3.9.1), ta nhận được

$$x = a\sin\phi\cos\theta \qquad y = a\sin\phi\sin\theta \qquad z = a\cos\phi$$

như là phương trình tham số của mặt cầu. Phương trình véc tơ tương ứng là

$r(\phi, \theta) = a\sin\phi \cos\theta \, \mathbf{i} + a\sin\phi \sin\theta \, \mathbf{j} + a\cos\phi \, \mathbf{k}$

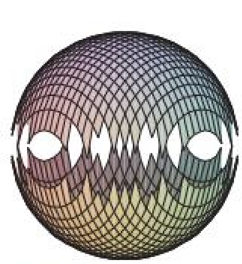
Chúng ta có $0 \le \phi \le \pi$ và $0 \le \theta \le 2\pi$, vì thế miền xác định của tham số là hình chữ nhật $D = [0, \pi]\times[0, 2\pi]$. Các lưới với ϕ không đổi là đường tròn với vĩ độ không đổi. Các lưới với θ không đổi là các kinh tuyến (nửa đường tròn) nối các cực bắc và nam (xem Hình 7).



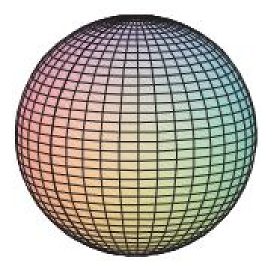
Hình 7

Chú ý Chúng ta đã thấy trong Ví dụ 4 rằng các lưới đối với mặt cầu là các đường cong với các vĩ độ và kinh độ cố định. Với mặt tham số tổng quát chúng ta cũng tạo ra một bản đồ và các lưới tương tự như các đường có vĩ độ và kinh độ. Mô tả một điểm trên mặt tham số bằng cách chỉ ra các giá trị u và v, giống như đưa ra vĩ độ và kinh độ của một điểm.

Một trong sự sử dụng mặt tham số là trong đồ họa máy tính. Hình 8 biểu thị kết quả của việc vẽ đồ thị mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bằng cách giải phương trình đối với z và vẽ các bán cầu trên và dưới riêng biệt. Một phần của quả cầu đã bị mất đi vì hệ thống lưới hình chữ nhật được sử dụng bởi máy tính. Hình ảnh tốt hơn nhiều trong Hình 9 được vẽ bởi một máy tính bằng cách sử dụng phương trình tham số được tìm thấy trong Ví dụ 4.



Hình 8



Hình 9

Ví dụ 5 Tìm biểu diễn tham số của mặt trụ $x^2 + y^2 = 4 \quad 0 \le z \le 1$

Lời giải Mặt trụ có biểu diễn đơn giản r = 2 trong tọa độ trụ, vì thế chúng ta chọn các tham số θ và z trong tọa độ trụ. Khi đó phương trình tham số của mặt trụ là

$$x = 2\cos\theta \qquad y = 2\sin\theta \qquad z = z$$

trong đó $0 \le \theta \le 2\pi$ và $0 \le z \le 1$.

Ví dụ 6 Tìm hàm véc tơ biểu diễn paraboloid elliptic $z = x^2 + 2y^2$.

Lời giải Nếu chúng ta xem x và y như là tham số thì phương trình tham số đơn giản là

$$x = x \quad y = y \quad z = x^2 + 2y^2$$

và phương trình véc tơ là $r(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x^2 + 2y^2)\,k$.

Tổng quát, với một mặt cong đã cho như là đồ thị của một hàm hai biến x và y, tức là với phương trình dạng $z = f(x, y)$, luôn có thể xem là mặt tham số bằng cách coi x và y là tham số và viết các phương trình tham số dạng $x = x \quad y = y \quad z = f(x, y)$.

Sự biểu diễn tham số (cũng đường cong gọi là tham số hóa) của các mặt cong là không duy nhất. Ví dụ tiếp theo chỉ ra hai cách tham số hóa mặt nón.

Ví dụ 7 Tìm biểu diễn tham số cho mặt cong $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, tức là nửa trên của mặt nón $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

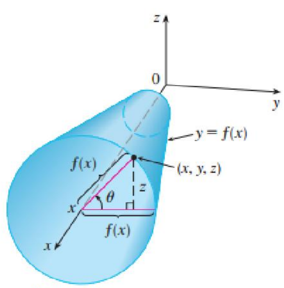
Lời giải Một khả năng nhận được bằng cách chọn x và y làm tham số:

$$x = x \quad y = y \quad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Vì thế phương trình véc tơ là $r(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}$

Một cách khác nhận được từ việc chọn các tham số tọa độ cực r và θ. Một điểm (x, y, z) trên mặt nón thỏa mãn $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ và $z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$. Vì thế phương trình véc tơ của mặt nón là $\mathbf{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j} + 2r\,\mathbf{k}$, ở đây $r \geq 0$ và $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

4.6.2. Mặt tròn xoay



Hình 10

Mặt tròn xoay có thể được biểu diễn tham số và vì thế được vẽ bởi máy tính. Ví dụ, chúng ta xem xét mặt cong S nhận được bằng cách quay quanh trục x đường cong $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, ở đây $f(x) \geq 0$. Giả sử θ là góc quay như chỉ ra trên Hình 10. Nếu (x, y, z) là điểm thuộc S thì

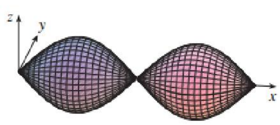
$$[3] \qquad x = x \quad y = f(x)\cos\theta \quad z = f(x)\sin\theta$$

Do đó chúng ta lấy x và θ làm tham số và như thế phương trình 3 là phương trình tham số của S. Miền xác định của tham số được cho bởi $0 \leq x \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ví dụ 8 Tìm phương trình tham số của mặt cong được sinh ra bởi sự quay quanh trục x đường cong $y = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Sử dụng phương trình đó để vẽ mặt tròn xoay.

Lời giải Từ phương trình 3, các phương trình tham số là

$$x = x \quad y = \sin x\cos\theta \quad z = \sin x\sin\theta$$



Hình 11

và miền tham số là $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Sử dụng máy tính để vẽ các phương trình này và quay ảnh, ta nhận được đồ thị trên Hình 11.

Chúng ta cũng có thể phỏng theo phương trình 3 để biểu diễn một mặt cong nhận được thông qua sự quay quanh trục y hoặc trục z.

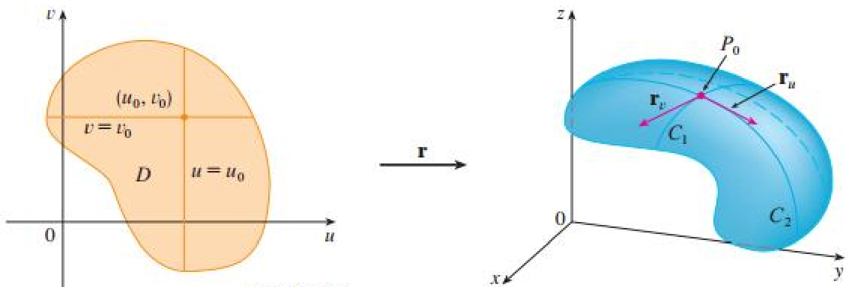
4.6.3. Tiếp diện

Bây giờ chúng ta tìm tiếp diện của mặt tham số S được cho bởi hàm véc tơ

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

tại điểm P_0 với véc tơ vị trí $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Nếu chúng ta giữ u không đổi bằng cacgs đặt $u = u_0$, thì $\mathbf{r}(u_0, v)$ trở thành hàm véc tơ một biến v và xác định một lưới C_1 thuộc S. (Xem Hình 12.) Véc tơ tiếp tuyến của C_1 tại P_0 nhận được bằng cách lấy đạo hàm của **r** theo v:

$$[4] \qquad \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\boldsymbol{i} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\boldsymbol{k}$$



Hình 12

Tương tự, nếu chúng ta giữa v cố định bằng cách đặt $v = v_0$, ta nhận được lưới C_2 được cho bởi $\mathbf{r}(u,v_0)$ thuộc S và véc tơ tiếp tuyến của nó tại P_0 là

[5] $$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\boldsymbol{i} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\boldsymbol{k}$$

Nếu $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ thì mặt S được gọi là *trơn* (smooth). Với mặt trơn, tiếp diện là mặt phẳng mà chứa các véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{r}_u$ bà $\mathbf{r}_v$, và véc tơ $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng.

Ví dụ 9 Tìm tiếp diện tại điểm (1, 1, 3) của mặt cong có phương trình tham số

$$x = u^2 \quad y = v^2 \quad z = u + 2v$$

Lời giải Trước hết chúng ta tính các véc tơ tiếp tuyến: $\mathbf{r}_u = 2u\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $r_v = 2v\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$.

Vì vậy véc tơ pháp tuyến của tiếp diện là

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 1v & 2 \end{vmatrix} = -2v\,\mathbf{i} - 4u\,\mathbf{j} + 4uv\,\mathbf{k}$$

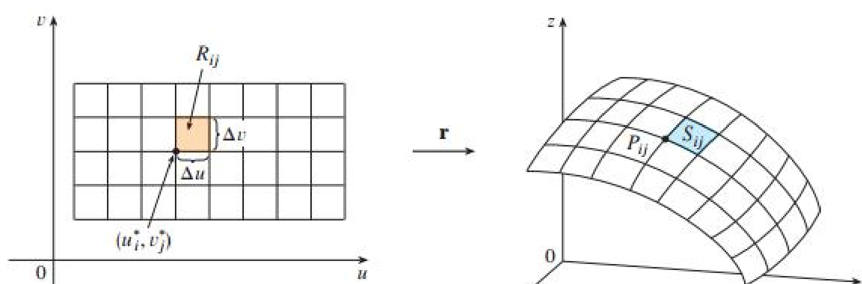
Chú ý rằng điểm (1, 1, 3) tương ứng với các giá trị tham số u = 1 và v = 1, vì vậy véc tơ pháp tuyến là $-2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$

Do đó phương trình tiếp diện tại (1, 1, 3) là

$-2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 3) = 0$ hay $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

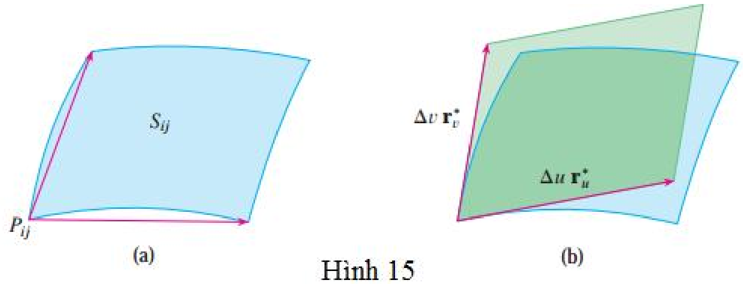
4.6.4. Diện tích mặt cong

Bây giờ chúng ta xác định diện tích của một mặt tham số tổng quát được cho bởi phương trình 1. Để đơn giản, chúng ta bắt đầu với giả thiết miền tham số của mặt cong là hình chữ nhật, và chúng ta chia nó thành các hình chữ nhật nhỏ R_{ij} rồi chọn (u_i^*, v_j^*) là góc dưới bên trái của R_{ij}. (Xem Hình 14.)



Hình 14

Phần S_{ij} của mặt S tương ứng với R_{ij} được gọi là *miếng vá* (patch) và có điểm P_{ij} với véc tơ vị trí $\mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$ như là một góc của nó. Giả sử $\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*)$ và $\mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$ là các véc tơ tiếp tuyến tại P_{ij} được cho bởi các phương trình 5 và 4.



Hình 15

Hình 15(a) chỉ ra rằng hai cạnh của miếng vá gặp nhau tại P_{ij} có thể được xấp xỉ bởi các véc tơ. Các véc tơ này có thể được xấp xỉ bởi các véc tơ $\Delta u\mathbf{r}_u^*$ và $\Delta v\mathbf{r}_v^*$ bởi vì các đạo hàm riêng có thể được xấp xỉ bởi thương của các vi phân. Vì thế chúng ta xấp xỉ S_{ij} bởi hình bình hành được xác định bởi các véc tơ $\Delta u\mathbf{r}_u^*$ và $\Delta v\mathbf{r}_v^*$. Hình bình hành này được chỉ ra trên Hình 15(b) và thuộc tiếp diện của S tại P_{ij}. Diện tích của hình bình hành là

$$|(\Delta u\mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v\mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\Delta u\Delta v$$

vì vậy xấp xỉ của diện tích S là $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|r_u^* \times r_v^*|\Delta u\Delta v$

Trực giác của chúng ta mách bảo rằng xấp xỉ này tốt nhất khi chúng ta tăng số của hình chữ nhật, và chúng ta ghi nhận tổng kép là tổng Riemann của tích phân kép $\iint_D |r_u \times r_v|dudv$.

Điều đó dẫn đến định nghĩa sau đây.

[6] **Định nghĩa** Nếu một mặt tham số trơn S được cho bởi phương trình

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

và S là được phủ chỉ một lần khi (u, v) biến thiên trong miền D, khi đó diện tích miền S là

$$A(S) = \iint_D |r_u \times r_v|dudv$$

trong đó $\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{k}$ $\quad \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial z}{\partial v}\boldsymbol{k}$

Ví dụ 10 Tính diện tích mặt cầu có bán kính bằng a.

Lời giải Trong Ví dụ 4 ta tìm được biểu diễn tham số của mặt cầu

$$x = a\sin\phi\cos\theta \qquad y = a\sin\phi\sin\theta \qquad z = a\cos\phi$$

trong đó miền tham số là $D = \{(\phi,\theta) \mid 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}$

Trước hết chúng ta tính tích hữu hướng của các véc tơ tiếp tuyến

$$r_\phi \times r_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ acos\phi cos\theta & acos\phi sin\theta & -asin\phi \\ -asin\phi sin\theta & asin\phi cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$= a^2\sin^2\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + a^2\sin^2\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + a^2\sin\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$

Vì vậy $|r_\phi \times r_\theta|^2 = a^4\sin^4\phi\cos^2\theta + a^4\sin^4\phi\sin\theta^2 + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi = a^4\sin^2\phi$

Vì $0 \le \phi \le \pi$ nên $\sin\phi \ge 0$ và $|r_\phi \times r_\theta| = a^2\sin\phi$. Theo định nghĩa 6, diện tích mặt cầu là

$$A = \iint_D |r_u \times r_v|dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 sin\phi d\phi d\theta = a^2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} sin\phi d\phi = 4\pi a^2$$

(Bằng 4 lần diện tích của thiết diện đi qua xích đạo)

4.6.5. Diện tích mặt cong là đồ thị của hàm

Trường hợp riêng khi S là đồ thị của hàm z = f(x, y), trong đó (x, y) thuộc miền D và f có các đạo hàm riêng liên tục, ta lấy x và y làm tham số, phương trình tham số là

$x = x \quad y = y \quad z = f(x, y)$

vì thế $\boldsymbol{r}_x = \boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{r}_y = \boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{k}$

và

$$[7] \qquad r_x \times r_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

Vì vậy ta có

$$[8] \qquad |r_x \times r_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

và công thức diện tích mặt cong trong định nghĩa trở thành

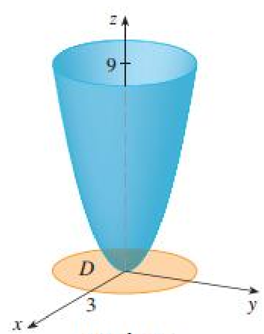
$$[9] \qquad A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Chúng ta thấy sự tương tự giữa công thức 9 và công thức tính độ dài cung

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Ví dụ 11 Tính diện tích phần của paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm phía dưới mặt phẳng $z = 9$.

Lời giải Mặt phẳng giao với paraboloid theo đường tròn $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Do đó mặt phẳng đã cho nằm trên đĩa D với tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 3. (Xem Hình 16.)



Hình 16

Sử dụng công thức 9 ta có

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}dA$$

Chuyển sang tọa độ cực ta được

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r dr$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{8}\right)\frac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big|_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$

Câu hỏi còn lại là liệu định nghĩa của chúng ta về diện tích mặt cong [6] là phù hợp với công thức diện tích mặt cong của hàm một biến $S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$.

Chúng ta coi mặt cong S nhận được bằng cách quay đường cong $y = f(x)$, $a \le x \le b$, quanh trục x, trong đó $f(x) \ge 0$ và f khả vi liên tục. Từ phương trình 3 ta biết rằng phương trình tham số của S là $x = x \quad y = f(x)\cos\theta \quad xz = f(x)\sin\theta \quad a \le x \le b,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

Để tính diện tích mặt cong S ta cần các véc tơ tiếp tuyến

$r_x = \mathbf{i} + f'(x)\cos\theta\, \mathbf{j} + f'(x)\sin\theta\, \mathbf{k} \qquad r_\theta = -f'(x)\sin\theta\, \mathbf{j} + f'(x)\cos\theta\, \mathbf{k}$

Vì vậy

$$r_x \times r_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & f'(x)cos\theta & f'(x)sin\theta \\ 0 & -f(x)sin\theta & f(x)cos\theta \end{vmatrix} = f(x)f'(x)\boldsymbol{i} - f(x)cos\theta\boldsymbol{j} - f(x)sin\theta\boldsymbol{k}$$

Vì $f(x) \ge 0$ nên

$$|r_x \times r_\theta| = \sqrt{[f(x)f'(x)]^2 + [f(x)]^2} = f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

Do đó diện tích của S là

$A = \iint_D |r_x \times r_\theta| dA = \int_0^{2\pi} \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dxd\theta = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$

Đây chính là công thức đã sử dụng để tính diện tích mặt tròn xoay trong hàm một biến.

4.7. Tích phân mặt

Mối quan hệ giữa tích phân mặt và diện tích mặt cong giống như mối quan hệ giữa tích phân đường và độ dài cung. Giả sử f là hàm ba biến có miền xác định chứa mặt cong S. Chúng ta định nghĩa tích phân mặt của f trên S giống như cách khi f(x, y, z) = 1, giá trị của tích phân bằng diện tích của mặt S. Chúng ta bắt đầu với mặt tham số và xử lý trường hợp đặc biệt khi S là đồ thị của hàm hai biến.

4.7.1. Mặt tham số

Giả sử rằng mặt cong S có phương trình véc tơ

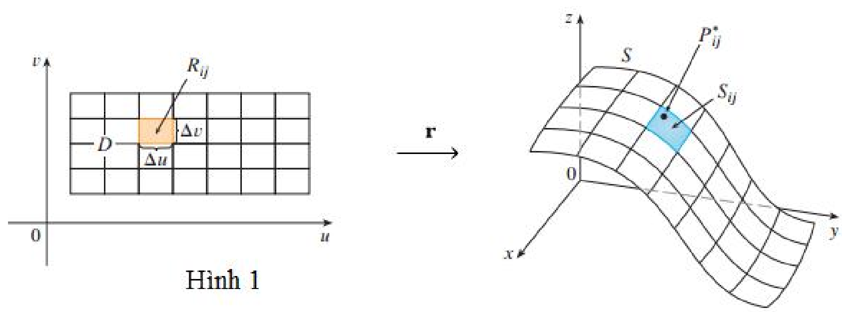
r(u, v) = x(u, v) **i** + y(u, v) **j** + z(u, v) **k**   (u, v) ∈ D

Trước hết chúng ta giả thiết rằng miền tham số D là hình chữ nhật và chúng ta chia nó thành các hình chữ nhật nhỏ R_{ij} với các kích thước Δ_u và Δ_v. Khi đó mặt cong S được chia thành các miếng vá S_{ij} như trên Hình 1. Chúng ta tính f tại điểm P_{ij}* thuộc mỗi miếng vá, nhân với diện tích ΔS_{ij} của miếng vá rồi lập tổng Riemann

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(P_{ij}^*\right)\Delta S_{ij}$$

Sau đó lấy giới hạn khi số miếng vá tăng và định nghĩa tích phân mặt của f trên S là

[1] $$\iint_S f(x,y,z)dS = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(P_{ij}^*\right)\Delta S_{ij}$$



Hình 1

Chú ý sự tương tự như định nghĩa của tích phân đường (4.2.2) và cũng tương tự với định nghĩa của tích phân kép (3.1.5).

Để tính tích phân mặt trên phương trình 1 chúng ta xấp xỉ diện tích miếng vá ΔS_{ij} bởi diện tích của parabola thuộc tiếp diện. Trong mục 3.6 ta đã đánh giá $\Delta S_{ij} \approx |r_u \times r_v|\Delta_u \Delta_v$, trong đó

$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{k}$ $r_v = \frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\boldsymbol{k}$

là các véc tơ tiếp tuyến tại một góc của S_{ij}. Nếu các thành phần là liên tục và r_u và r_v khác không và không song song trong miền trong của D, nó có thể được chỉ ra trong định nghĩa 1, thậm chí khi D không phải là hình chữ nhật, rằng

[2] $$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f\left(r(u,v)\right)|r_u \times r_v|dA$$

Điều đó cần phải so sánh với công thức tích phân đường:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f\left(r(t)\right)|r'(t)|dt$$

Nhận thấy rằng

$$\iint_S 1dS = \iint_D |r_u \times r_v| dA = A(S)$$

Công thức 2 cho phép chúng ta tính tích phân mặt bằng cách chuyển nó sang tích phân kép trên miền tham số D. Khi sử dụng công thức này, nhớ rằng f(r(u, v)) được tính bằng cách viết x = x(u, v), y = y(u, v) và z = z(u, v) trong công thức của f(x, y, z).

Ví dụ 1 Tính tích phân mặt $\iint_S x^2 dS$, trong đó S là mặt cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Lời giải Như trong Ví dụ 4 trong mục 4.6, chúng ta sử dụng biểu diễn tham số

$$x = \sin\phi\cos\theta \qquad y = \sin\phi\sin\theta \qquad z = \cos\phi \qquad 0 \le \phi \le \pi \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

tức là, $r(\phi, \theta) = \sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k}$

Như trong Ví dụ 10 mục 4.6, chúng ta có thể tính rằng $|r_\phi \times r_\theta| = \sin\phi$

Do đó theo công thức 2,

$$\iint_S x^2 dS = \iint_D (\sin\phi\cos\theta)^2 |r_\phi \times r_\theta| dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\phi\cos^2\theta \sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^{\pi} \sin^2\phi \sin\phi\, d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta \int_0^{\pi}(\sin\phi - \sin\phi\cos^2\phi)\,d\phi$$

$$\frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\left[-\cos\phi + \frac{1}{3}\cos 3\phi\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi$$

Tích phân mặt có ứng dụng tương tự như các tích phân mà chúng ta đa xem xét trước đây. Ví dụ, nếu một tấm mỏng (lá nhôm chẳng hạn) có hình dạng mặt cong S và mật độ (khối lượng/đơn vị diện tích) tại điểm (x, y, z) là ρ(x, y, z) , thì khối luongj của tấm mỏng là

$$m = \iint_D \rho(x,y,z)\,dS$$

và trọng tâm của nó, $(\overline{x}, \overline{y}, z)$, được tính theo công thức

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y,z)\,dS \qquad \overline{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y,z)\,dS \qquad \overline{z} = \frac{1}{m}\iint_D z\rho(x,y,z)\,dS$$

Mô men quán tính cũng có thể được định nghĩa như trước đây.

4.7.2. Đồ thị

Bất kỳ mặt cong S với phương trình z = g(x, y) có thể xem là mặt tham số với phương trình tham số x = x y = y z = g(x, y)

và ta có $r_x = \boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{k}$ $\qquad r_y = \boldsymbol{j} + \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{k}$

Vì vậy

[3] $r_x \times r_y = -\frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

và $\left|r_x \times r_y\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$

Vì thế trong trường hợp này công thức 2 trở thành

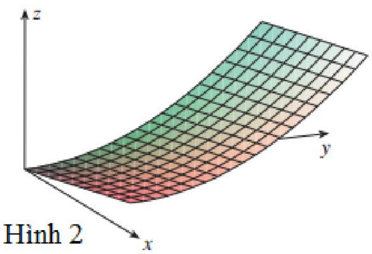
[4] $\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dA$

Các công thức tương tự được áp dụng khi nó thuận tiện hơn để chiếu đối tượng S lên mặt phẳng yz hoặc xz. Ví dụ, nếu S là mặt cong với phương trình y = h(x, z) và D là chiếu của nó lên mặt phẳng xz, khi đó

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,h(x,z),z)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\,dA$$

Ví dụ 2 Tính $\iint_S ydS$, ở đây S là mặt cong $z = x + y^2$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.(Hình 2)

Lời giải Vì $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ và $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$, Công thức 4 đưa ra



Hình 2

$$\iint_S ydS = \iint_D y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 y\sqrt{1 + 1 + 4y^2}\, dy\, dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 dx \int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\, dy$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\right)\int_0^2 \sqrt{1 + 2y^2}\, d(1 + 2y^2)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{2}{3}(1 + 2y^2)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3}$$

Nếu S là mặt cong trơn từng phần, tức là hợp của hữu hạn các mặt cong trơn $S_1, S_2, \ldots, S_n$, các mặt cong này chỉ nếu giao nhau thì chỉ trên biên, thì tích phân mặt của S được định nghĩa bởi

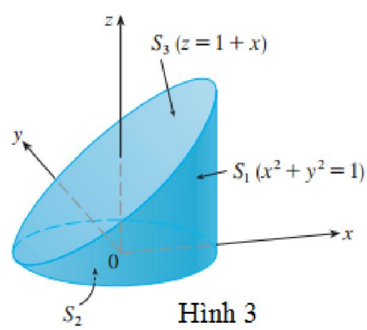
$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)dS + \iint_{S_2} f(x,y,z)dS + \cdots + \iint_{S_n} f(x,y,z)dS$$

Ví dụ 3 Tính $\iint_S zdS$, trong đó mặt cong S là hợp của mặt bên S_1 được cho bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, mặt đáy S_2 là đĩa $x^2 + y^2 \le 1$, mặt trên S_3 là phần mặt phẳng $z = 1 + x$ nằm trên S_2.

Lời giải Mặt S được chỉ ra trên Hình 3. Với S_1 ta sử dụng θ và z làm tham số (xem Ví dụ 5 mục 4.6) và viết các phương trình tham số là $x = \cos\theta$ $y = \sin\theta$ $z = z$

trong đó $0 \le \theta \le 2\pi$ và $0 \le z \le 1 + x = 1 + \cos\theta$

Do đó



Hình 3

$$r_\theta \times r_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = cos\theta\, \boldsymbol{i} + sin\theta \boldsymbol{j}$$

và

$$|r_\theta \times r_z| = \sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta} = 1$$

Vì vậy tích phân mặt trên S_1 là

$$\iint_{S_1} zdS = \iint_D z|r_\theta \times r_z|dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+cos\theta} zdz\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + cos\theta)^2 d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

Bởi vì S_2 thuộc mặt phẳng $z = 0$, ta có

$$\iint_{S_2} zdS = \iint_{S_2} 0dS = 0$$

Mặt trên S_3 thuộc mặt phẳng $z = 1 + x$ và nằm trên đĩa D nên đặt $g(x, y) = 1 + x$ trong công thức 4 và chuyển sang tọa độ cực, ta có

$$\iint_{S_3} zdS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + rcos\theta)\sqrt{1 + 1 + 0}rdr\, d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r + r^2cos\theta)dr\, d\theta$$

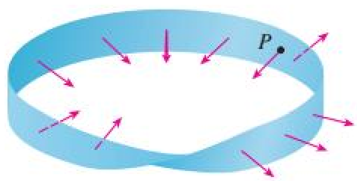
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\quad)d\theta = \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{3}sin\theta\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi$$

Do đó

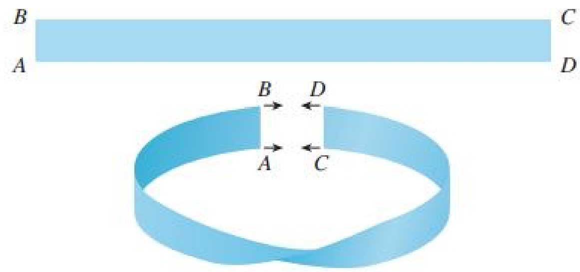
$$\iint_S zdS = \frac{3}{2}\pi + 0 + \sqrt{2}\pi = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi$$

4.7.3. Mặt định hướng

Để định nghĩa các tích phân mặt trên các trường véc tơ, chúng ta cần loại trừ các mặt không định hướng giống như dải Mobius được chỉ ra trên Hình 4. [Nó mang tên nhà hình học người Đức August Mobius (1790 – 1868).] Bạn có thể tự tạo ra một cái từ một dải giấy hình chữ nhật, xoắn nửa vòng và dán hai cạnh ngắn lại với nhau như Hình 5. Nếu một con kiến bò dọc theo dải Mobius bắt đầu tại điểm P, nó sẽ kết thúc ở "phía bên kia" của dải.



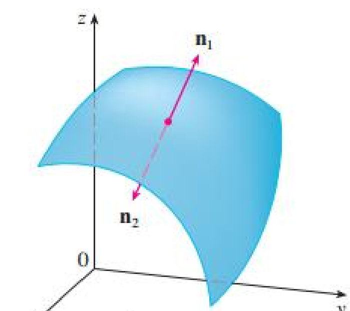
Hình 4



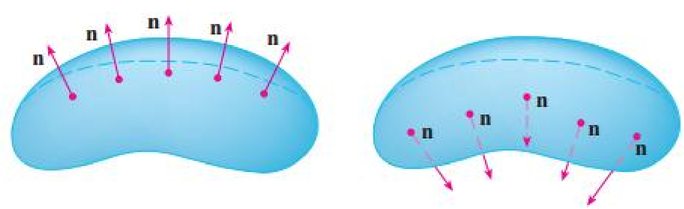
Hình 5

Từ đây trở đi chúng ta chỉ xem xét các mặt định hướng được (hai phía). Ta bắt đầu với mặt cong S có tiếp diện tại mọi điểm (x, y, z) trên S (ngoại trừ trên biên). Tại mỗi điểm (x, y, z), có hai véc tơ pháp tuyến đơn vị là n_1 và $n_2 = -n_1$ (xem Hình 6).

Nếu có thể chọn được véc tơ pháp tuyến đơn vị **n** tại mỗi điểm (x, y, z) sao cho **n** biến thiên liên tục trên S, thì S được gọi là mặt định hướng được và sự chọn **n** là định hướng cho mặt S. Có hai khả năng định hướng cho bất kỳ mặt cong nào định hướng được (xem Hình 7).



Hình 6



Hình 7 Hai hướng của mặt định hướng được

Với mặt cong z = g(x, y) đã cho là đồ thị của g, chúng ta sử dụng phương trình 3 để gán cho mặt một hướng tự nhiên được cho bởi véc tơ đoen vị

$$[5] \qquad \boldsymbol{n} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

Bởi vì thành phần thứ ba (hệ số của **k**) dương nên xác định hướng *phía trên* của mặt.

Nếu S là mặt cong trơn định hướng được được cho ở dạng tham số bởi hàm véc tơ r(u, v) thì nó tự động định hướng theo véc tơ pháp tuyến đơn vị

$$[6] \qquad \boldsymbol{n} = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

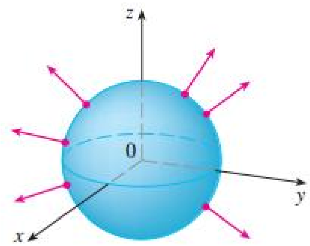
và hướng ngược lại là –**n**. Ví dụ, trong Ví dụ 4 mục 4.6, với mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2$, chúng ta tìm được biểu diễn tham số r(ϕ, θ) = a sinϕ cosθ **i** + a sin ϕ sinθ **j** + a cos ϕ **k**. Khi đó trong Ví dụ 10 mục 4.6, chúng ta thấy rằng $r_\phi \times r_\theta = a^2\sin^2\phi\cos\theta\ \mathbf{i} + a^2\sin^2\phi\sin\theta\ \mathbf{j} + a^2\sin\phi\cos\phi\ \mathbf{k}$,

và $|r_\phi \times r_\theta| = a^2\sin\phi$.

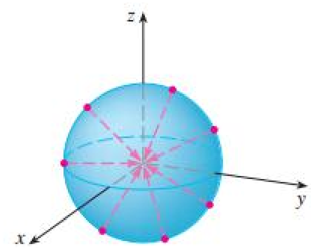
Vì vậy hướng sinh ra bởi r(ϕ, θ) được xác định bởi véc tơ pháp tuyến đơn vị

$$\boldsymbol{n} = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = sin\phi cos\theta\ \boldsymbol{i} + sin\phi sin\theta \boldsymbol{j} + cos\phi \boldsymbol{k} = \frac{1}{a} r(\phi, \theta)$$

Nhận thấy rằng **n** có cùng hướng với véc tơ vị trí, tức là phía trên của mặt cầu (xem Hình 8). Hướng ngược lai có thể nhận được (xem Hình 9) nếu chúng ta đảo thứ tự các tham số, bởi vì $r_\theta \times r_\phi = -r_\phi \times r_\theta$.



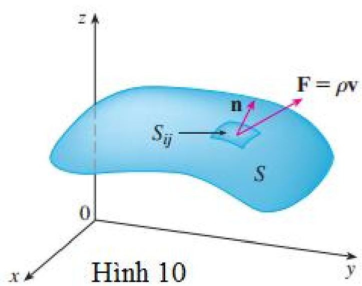
Hình 8 Hướng dương



Hình 9 Hướng âm

Với mặt kín, tức là mặt cong giới hạn một vật thể E, thì quy ước hướng dương là hướng mà các véc tơ pháp tuyến trỏ từ trong E ra ngoài, và hướng âm là hướng các véc tơ pháp tuyến trỏ từ ngoài vào trong E (xem Hình 8).

4.7.4. Tích phân mặt và trường véc tơ



Hình 10

Giả sử S là mặt định hướng với véc tơ pháp tuyến đơn vị **n**, và tưởng tượng chất lỏng với mật độ ρ(x, y, z) và trường vận tốc v(x, y, z) chảy qua S. (Hình dung S là một bề mặt tưởng tượng mà không cản trở dòng chảy chất lỏng, giống như một lưới đánh cá trên một dòng sông.) Khi đó tỷ lệ của chất lỏng (khối lượng/đơn vị thời gian) trên đơn vị diện tích là ρv. Nếu chúng ta chia S thành các miếng vá S_{ij}, như trên Hình 10 (so sánh với Hình 1), thì S_{ij} gần phẳng và vì vậy chúng ta có thể xấp xỉ khối lượng của chất lỏng trên một đơn vị thời gian xuyên qua S_{ij} theo hướng của pháp tuyến **n** bởi công thức (ρ**v** · **n**)A(S_{ij}), trong đó ρ, **v**, và **n** được tính tại cùng một điểm trên S_{ij}. (Nhớ rằng thành phần của véc tơ ρv theo hướng của véc tơ đơn vị **n** là ρ**v** · **n**.) Bằng cách lấy tổng rồi chuyển qua giới hạn, theo định nghĩa 1, tích phân mặt của hàm ρ**v** · **n** trên S là:

[7] $$\iint_S \rho v \cdot n dS = \iint_S \rho(x,y,z) v(x,y,z) \cdot n(x,y,z) dS$$

và điều đó được giải thích vật lý là tốc độ của chất lỏng xuyên qua S.

Nếu ta viết **F** = ρ**v** thì **F** cũng là trường véc tơ trên $\mathbb{R}^3$ và tích phân trong phương trình 7 trở thành

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Ttichs phân mặt dạng này thường xuất hiện trong vật lý, ngay cả khi **F** khác ρ**v**, và được gọi là tích phân mặt của **F** trên S.

[8] **Định nghĩa** Nếu F là trường véc tơ liên tục xác định trên mặt định hướng S với véc tơ pháp tuyến đơn vị **n**, thì tích phân mặt của **F** trên S là

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Tích phân này còn được gọi là thông lượng (flux) của **F** qua S.

Bằng lời, định nghĩa 8 nói rằng tích phân mặt của trường véc tơ trên S bằng tích phân mặt của thành phần pháp tuyến của nó trên S (như định nghĩa trước đây).

Nếu S được cho bởi hàm véc tơ r(u, v) thì **n** được cho bởi phương trình 6, và từ định nghĩa 8 và phương trình 2 ta có

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\frac{r_u\times v}{|r_u\times r_v|}dS = \iint_D \left[\mathbf{F}\big(\boldsymbol{r}(u,v)\big)\cdot\frac{r_u\times r_v}{|r_u\times r_v|}\right]|r_u\times r_v|dA$$

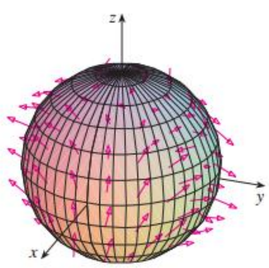
trong đó D là miền tham số. Vì thế ta có

[9] $$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}\big(\boldsymbol{r}(u,v)\big)\cdot(r_u\times r_v)dA$$

Ví dụ 4 Tính thông lượng của trường véc tơ **F**(x, y, z) = z **i** + y **j** + x **k** xuyên qua mặt cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Lời giải Như trong Ví dụ 1, chúng ta sử dụng biểu diễn tham số

$x = \sin\phi\cos\theta \qquad y = \sin\phi\sin\theta \qquad z = \cos\phi \qquad 0 \le \phi \le \pi \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$



Hình 11

Khi đó $\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi,\theta)) = \cos\phi\ \mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\ \mathbf{j} + \sin\phi\cos\theta\ \mathbf{k}$

và từ Ví dụ 10 mục 4.6,

$$\mathbf{r}_\theta\times \mathbf{r}_\phi = \sin^2\phi\cos\theta\ \mathbf{i} + \sin^2\phi\sin\theta\ \mathbf{j} + \sin\phi\cos\phi\ \mathbf{k}$$

Do đó

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi,\theta))\cdot(\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_\phi) = \cos\phi\sin^2\phi\cos\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos\phi\cos\theta$$

và theo công thức 9, thông lượng là

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}\cdot(r_u\times r_v)dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(2sin^2\phi cos\phi cos\theta + sin^3\phi sin^2\theta d\phi d\theta)$$

$$= 2\int_0^{\pi}2sin^2\phi cos\phi d\phi\int_0^{2\pi}cos\theta d\theta + \int_0^{\pi}sin^3\phi d\phi\int_0^{2\pi}sin^2\theta d\theta$$

$$= 0 + \int_0^{\pi}sin^3\phi d\phi\int_0^{2\pi}sin^2\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi$$ (cùng một kết quả như Ví dụ 1)

Ví dụ, nếu trường véc tơ trong Ví dụ 4 là trường vận tốc mô tả dòng chất lỏng với mật độ 1, thì kết quả 4π/3 thể hiện tốc độ của dòng chảy xuyên qua mặt cầu theo đơn vị khối lượng trên một đơn vị thời gian.

Trong trường hợp mặt cong S được cho bởi đồ thị z = g(x, y), chúng ta có thể xem x và y là tham số và sử dụng phương trình 3 để viết

$$\boldsymbol{F}\cdot\big(\boldsymbol{r_x}\times\boldsymbol{r_y}\big) = (Pi + Qj + Rk)\cdot\left(-\frac{\partial g}{\partial x}i - \frac{\partial g}{\partial y}j + k\right)$$

Vì thế công thức 9 trở thành

[10] $$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right)dA$$

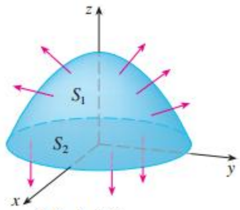
Công thức này đúng cho hướng dương (trong ra ngoài) của S. Các công thức tương tự cũng có thể có được nếu S được cho bởi y = h(x, z) hoặc x = k(y, z).

Ví dụ 5 Tính $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, trong đó **F**(x, y, z) = y i + x j + z k và S là biên của vật thể E được bao quanh bởi paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ và mặt phẳng z = 0.

Lời giải S bao gồm mặt trên S_1 là một parabolic và mặt đáy S_2 là hình tròn. (Xem Hình 12.) Bởi vì S là mặt kín, chúng ta sử dụng hướng dương quy ước (từ trong ra ngoài). Nghĩa là S_1 định hướng lên trên và ta sử dụng phương trình 10 với D là chiếu của S_1 lên mặt phẳng xy, cụ thể là đĩa $x^2 + y^2 \le 1$. Bởi vì trên S_1,

$P(x, y, z) = y \quad Q(x, y, z) = x \quad R(x, y, z) = z = 1 - x^2 - y^2$

và $\partial g/\partial x = -2x$, $\partial g/\partial y = -2y$ nên chúng ta có



Hình 12

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA$$

$$= \iint_D [-y(-2x) - x(-2y) + 1 - x^2 - y^2] dA$$

$$= \iint_D (1 + 4xy - x^2 - y^2) dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 4r^2 cos\theta sin\theta - r^2) r dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3 + 4r^3 cos\theta sin\theta) dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + cos\theta sin\theta\right) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Vì S_2 định hướng xuống dưới nên véc tơ pháp tuyến đơn vị là **n** = -**k** và ta có

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot (-\boldsymbol{k}) dS = \iint_D (-z) dA = \iint_D (0) dA = 0 \qquad (\text{vì } z = 0 \text{ trên } S_2)$$

Cuối cùng, theo định nghĩa,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Mặc dù chúng ta sử dụng ví dụ về dòng chất lỏng để trình bày tích phân mặt của trường véc tơ, nhưng nội dung này cũng đúng trong nhiều hiện tượng vật lý khác. Ví dụ, nếu E là điện trường (xem Ví dụ 5 mục 4.1), thì tích phân mặt $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ được gọi là thông lượng điện trường của E qua mặt S. Một trong những định luật quan trọng của tĩnh điện là Định luật Gauss, nói rằng điện tích được bao quanh bởi mặt cong S là

[11] $\quad Q = \varepsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$

trong đó ε_0 là hằng số điện môi (permitivity) phụ thuộc vào đơn vị sử dụng (Theo hệ thống đo lường quốc tế, $\varepsilon_0 \approx 8.8542 \times 10^{-12} C^2/N.m^2$). Do đó nếu trường véc tơ F trong Ví dụ 4 biểu thị điện trường, chúng ta có thể kết luận rằng điện tích được bao quanh bởi S là $Q = \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0$.

Một ứng dụng khác của tích phân mặt xuất hiện trong nghiên cứu luồng nhiệt. Giả sử rằng nhiệt độ tại điểm (x, y, z) trong vật thể là u(x, y, z). Khi đó luồng nhiệt được định nghĩa là trường véc tơ $F = -K\nabla u$, trong đó K là hằng số thực nghiệm, được gọi là độ dẫn nhiệt (conductivity) của chất. Tốc độ dòng nhiệt qua mặt S trong vật thê được cho bởi tích phân mặt

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}$$

Ví dụ 6 Nhiệt độ trong một quả bóng kim loại tỷ lệ với bình phương khoảng cách từ tâm của quả bóng. Tìm tỷ lệ dòng nhiệt qua một hình cầu S bán kính a với tâm là tâm của quả bóng.

Lời giải Đặt tâm quả bóng vào gốc tọa độ, ta có $u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$, trong đó C là hằng số tỷ lệ. Khi đó dòng nhiệt là $F(x, y, z) = -K\nabla u = -KC(2x\, i + 2y\, j + 2z\, k)$, trong đó K là độ dẫn nhiệt của kim loại. Thay cho việc sử dụng tham số hóa của mặt cầu trong Ví dụ 4, chúng ta nhận thấy rằng véc tơ pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ tại (x, y, z) là

$$n = \frac{1}{a}(xi + y + zk)$$

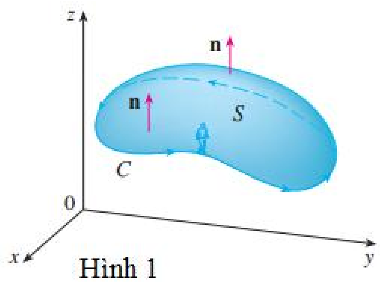
vì thế

$$F \cdot n = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Nhưng trên S ta có $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nên F · n = -2aKC. Do đó tốc độ dòng nhiệt qua S là

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = -2aKC \iint_S dS = -2aKC\, A(S) = -8KC\pi a^3$$

4.8. Công thức Stoke



Hình 1

Định lý Stokes có thể được coi là Định lý Green trong không gian nhiều chiều. Trong khi Định lý Green cho mối liên hệ giữa tích phân kép trên miền phẳng D với tích phân đường dọc theo đường cong phẳng là biên của D, thì Định lý Stoke cho mối liên hệ giữa tích phân mặt trên mặt cong S với tích phân đường dọc theo biên của mặt cong S (đường cong trong không gian).

Hình 1 biểu thị mặt định hướng với véc tơ pháp tuyến đơn vị n. Hướng của S xác định hướng dương của đường biên C được chỉ ra trên hình vẽ. Nghĩa là nếu ta đi dọc C theo hướng dương với đầu về phía hướng của n thì mặt cong luôn luôn ở về bên tay trái.

Định lý Stoke Giả sử S là mặt cong trơn từng khúc định hướng được, có biên là đường cong C đơn kín, trơn từng khúc theo hướng dương. Giả sử F là trường véc tơ mà các hàm thành phần có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở thuộc $\mathbb{R}^3$ chứa S. Khi đó

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Bởi vì

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \qquad \text{và } \iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

nên Định lý Stoke nói rằng tích phân đường quanh biên của S của thành phần tiếp tuyến của F bằng tích phân mặt trên S của thành phần pháp tuyến của rot F.

Biên định hướng dương của mặt định hướng S thường được ký hiệu ∂S, vì vậy

[1] $$\iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Có sự tương tự giữa Định lý Stoke, Định lý Green và Định lý cơ bản của giải tích. Như trước đây, có tích phân liên quan đến các đạo hàm bên trái của phương trình 1 (nhớ lại rằng rot F là một dạng đạo hàm của F) và bên phải liên quan đến các giá trị của F chỉ trên biên của S.

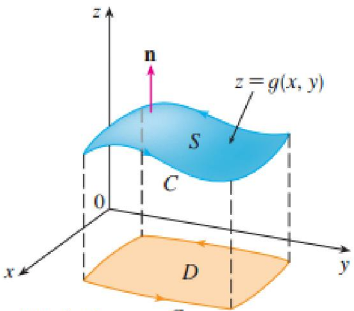
Sự thật là, trong trường hợp đặc biệt khi mặt cong S là phẳng và thuộc mặt phẳng xy với hướng lên trên, pháp tuyến đơn vị là **k**, tích phân mặt trở thành tích phân kép, và Định lý Stoke trở thành

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA$$

Đây chính là dạng véc tơ của Định lý Green được cho trong phương trình 4.5.12. Vì thế chúng ta xem rằng Định lý Green là trường hợp đặc biệt của Định lý Stoke.

Mặc dù Định lý Stoke là rất khó chứng minh trong trường hợp tổng quát, chúng ta có thể đưa ra lời chứng minh khi S là đồ thị và F, S và C là thỏa mãn.

Chứng minh trường hợp riêng của Định lý Stoke Chúng ta giả thiết rằng phương trình của S là $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, trong đó g có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục và D là miền phẳng đơn liên có biên là đường cong C_1 tương ứng với C. Nếu hướng của S là lên trên thì hướng dương của C tương ứng với hướng dương của C_1. (Xem Hình 2.) Chúng ta cũng cho rằng F = P i + Q j + R k, trong đó các đạo hàm riêng của P, Q và R liên tục.



Hình 2

Bởi vì S là đồ thị của một hàm nên chúng ta có thể áp dụng công thức 4.7.10 với F được thay bởi rot F. Kết quả là

$$[2] \qquad \iint_S \mathbf{rot\,F}.d\mathbf{S} = \iint_D \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dA$$

trong đó các đạo hàm riêng của P, Q và R được tính tại (x, y, g(x, y)).

Nếu $x = x(t)$ $y = y(t)$ $a \le t \le b$ là tham số biểu diễn C_1 thì tham số biểu diễn C là $x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = g(x(t), y(t))$ $a \le t \le b$

Theo quy tắc dây chuyền, ta tính tích phân đường như sau:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\right)dt = \int_a^b \left[P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\right]dt$$

$$= \int_a^b \left[\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}\right]dt = \int_{C_1} \left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]dA$$

ở đây chúng ta đã sử dụng Định lý Green trong bước cuối. Sau đó, sử dụng quy tắc dây chuyền lần nữa và nhớ rằng P, Q và R là các hàm của x, y và z, và z lại là hàm của x và y, ta nhận được

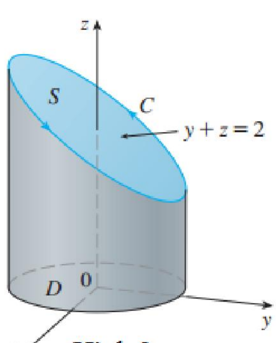
$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + R\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)\right]dA$$

Bốn hạng thức trong tích phân kép triệt tiêu nhau và còn lại sáu hạng thức có thể sắp xếp để trùng với vế phải của phương trình 2. Do đó

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{rot\,F}\cdot d\mathbf{S}$$

Ví dụ 1 Tính $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, trong đó $F(x, y, z) = -y^2\, i + x\, j + z^2\, k$ và C là giao của mặt phẳng $y + z = 2$ với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$. (Hướng C là ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên.)

Lời giải Đường cong C là một ellipse được chỉ ra trên Hình 3. Mặc dù $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ có thể được tính trực tiếp, chúng ta dễ dàng sử dụng Định lý Stoke. Trước hết ta tính



Hình 3

$$\mathbf{rot\,F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\mathbf{k}$$

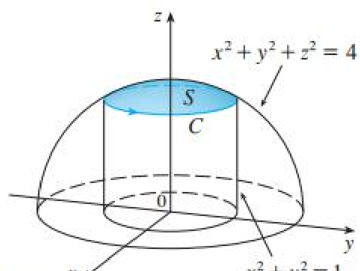
Mặc dù có nhiều mặt cong với biên C, nhưng lựa chọn thuận lợi nhất là miền ellipse S trên mặt phẳng $y + z = 2$ được bao bởi C. Nếu chúng ta định hướng của S là lên trên thì C có hướng dương. Hình chiếu D của S trên mặt phẳng xy là đĩa $x^2 + y^2 \le 1$ và vì vậy sử dụng phương trình 4.7.10 với $z = g(x, y) = 2 - y$, ta có

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{rot\,F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1+2y)dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+2r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}r^2 + \frac{2}{3}r^3\sin\theta\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sin\theta\right)d\theta = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$$

Ví dụ 2 Sử dụng Định lý Stoke để tính tích phân $\iint_S \mathbf{rot\,F}\cdot d\mathbf{S}$, trong đó $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,i + yz\,j + xy\,k$ và S là phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 \le 1$, và trên mặt phẳng xy.

Lời giải Để tìm biên C chúng ta giải các phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và $x^2 + y^2 = 1$. Sau khi trừ, ta nhận được $z = \sqrt{3}$ (vì $z > 0$). Vì vậy C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $z = \sqrt{3}$. Phương trình véc tơ của C là $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$,



Hình 4

do đó $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$

Như vậy ta có $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3}\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{3}\sin t\,\mathbf{j} + \cos t\sin t\,\mathbf{k}$

Theo Định lý Stoke,

$$\iint_S \mathbf{rot\,F}\cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(-\sqrt{3}\cos t\sin t + \sqrt{3}\sin t\cos t)dt = \int_0^{2\pi}(0)dt = 0$$

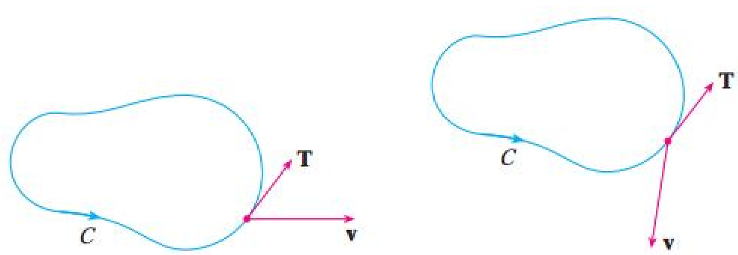
Chú ý rằng trong Ví dụ 2 chúng ta đã tính tích phân mặt đơn giản bằng cách biết các giá trị của F trên biên là đường cong C. Điều đó có nghĩa là, nếu chúng ta có một tích phân mặt khác với cùng biên C thì chúng ta nhận được chính xác cùng một giá trị.

Tổng quat, nếu S_1 và S_2 là các mặt định hướng với cùng cùng biên định hướng C và cả hai thỏa mãn các giả thiết của Định lý Stoke, thì

[3] $$\iint_{S_1} \mathbf{rot\,F}\cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \mathbf{rot\,F}\cdot d\mathbf{S}$$

Sự kiện này rất hiệu quả khi khó tích phân trên mặt cong này nhưng lại dễ tích phân trên mặt cong khác.

Bây giờ chúng ta sử dụng Định lý Stoke để soi sáng ý nghĩa của véc tơ rôta. Giả sử rằng C là đường cong kín định hướng và **v** biểu thị trường vận tốc trong luồng chất lỏng. Xem xét tích phân $\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{T}ds$, và nhớ rằng $\mathbf{v}\cdot\mathbf{T}$ là thành phần của **v** theo hướng của véc tơ tiếp tuyến đơn vị **T**. Nghĩa là hướng của **v** càng gần với hướng của **T** thì giá trị của $\mathbf{v}\cdot\mathbf{T}$ càng lớn. Vì thế $\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ là độ đo xu hướng của chất lỏng di chuyển quanh C và được gọi là lưu số (circulation) của v quang C. (Xem Hình 5.)



(a) $\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} > 0$, lưu số dương (b) $\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} < 0$, lưu số âm

Hình 5

Bây giờ giả thiết $P_0(x_0, y_0, z_0)$ là điểm trong chất lỏng và giả sử S_a là đĩa nhỏ bán kính a và tâm P_0. Khi đó (rot F)(P) ≈ (rot F)(P_0) với mọi điểm P trong S_a bởi vì rot F là liên tục. Vì vậy, theo Định lý Stoke, chúng ta nhận được lưu số xấp xỉ quanh biên hình tròn C_a sau đây:

$$\int_{C_a} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_a} \mathbf{rot\,v}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \mathbf{rot\,v}\cdot \mathbf{n}dS$$

$$\approx \iint_{S_a} \mathbf{rot\,v}(P_0)\cdot \mathbf{n}(P_0)dS = \mathbf{rot\,v}(P_0)\cdot \mathbf{n}(P_0)\pi a^2$$

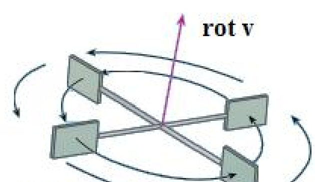
Xấp xỉ này trở nên tốt nhất khi a → 0 và ta có

[4] $$\mathbf{rot\,v}(P_0)\cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a\to 0}\frac{1}{\pi a^2}\int_{C_a} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$$

Phương trình 4 cho ra mối liên hệ giữa rôta và lưu số. Nó chỉ ra rằng **rot v · n** là số đo của hiệu ứng quay của chất lỏng quanh trục **n**. Hiệu ứng quay là lớn nhất là quanh trục song song với **rot v**.

Cuối cùng, chúng ta mong muốn rằng Định lý Stoke có thể được sử dụng để chứng minh Định lý 4.5.4 (ở đó phát biểu rằng nếu **rot F** = **0** trên toàn $\mathbb{R}^3$ thì F là bảo toàn). Từ các kết quả trước (Các định lý 4.3.3 và 4.3.4) ta biết rằng F là bảo toàn nếu $\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ với mọi đường đi kín C. Cho C, giả sử rằng chúng ta có thể tìm một mặt có hướng S có biên là C. (Điều này thực hiện được, nhưng việc chứng minh đòi hỏi kỹ thuật cao.) Khi đó Định lý Stoke cho ra

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{rot\,F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0}\cdot d\mathbf{S} = 0$$



Hình 6

Một đường cong không đơn có thể tách thành một số đường cong đơn, và các tích phân quanh các đường cong đơn đó đều bằng 0. Cộng các tích phân đó lại ta nhận được $\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ với mọi đường cong kín C.

Hãy tưởng tượng một bánh xe mái chèo nhỏ được đặt trong chất lỏng tại một điểm P, như trong Hình 6, bánh xe quay nhanh nhất khi trục của nó song song với **rot v**.

4.9. Định lý phân tán

Trong mục 4.5 chúng ta đã viết Định lý Green dưới dạng véc tơ là

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y)dA$$

trong đó C là đường cong định hướng dương giới hạn miền D. Nếu mở rộng cho trường véc tơ trong $\mathbb{R}^3$, chúng ta sẽ đoán rằng

[1] $$\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\,ds = \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y)dV$$

trong đó S là biên của vật thể E. Nó chỉ ra rằng phương trình 1 là đúng, với giả thuyết thích hợp, và được gọi là Định lý phân tán. Nhận thấy sự tương đồng của nó với lý Green và Định lý Stokes ở chỗ nó liên quan đến tích phân của đạo hàm của một hàm (**rot F** trong trường hợp này) trên một miền E với tích phân của hàm F trên biên của miền E.

Ở giai đoạn này, bạn có thể muốn xem xét các loại khác nhau của các miền mà chúng ta có thể tính tích phân bội ba trong mục 3.7. Chúng ta phát biểu và chứng minh định lý phân tán cho các miền E thuộc đồng thời loại 1, loại 2 và loại 3, và chúng ta gọi là vật thể đơn. (Ví dụ, vật thể được giới hạn bởi các ellipsoid hoặc hình hộp chữ nhật là vật thể đơn.) Biên của E là một mặt kín, và chúng ta sử dụng quy ước, được giới thiệu tại mục 4.7, rằng hướng dương là từ trong ra ngoài, tức là véc tơ pháp tuyến đơn vị được định hướng ra từ trong ra ngoài.

Định lý phân tán Giả sử E là vật thể đơn với biên là mặt S định hướng dương. Giả sử F là trường véc tơ mà các hàm thành phần có các đạo hàm riêng liên tục trên miền chứa E. Khi đó

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y)dV$$

Vì thế Định lý phân tán phát biểu rằng, với những điều kiện đã cho, thông lượng của F qua mặt biên của E là bằng tích phân bội ba của đivê của F trên E.

Chứng minh Giả sử F = Pi + Qj + Rk, khi đó

$$div\ F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \text{ nên } \iiint_E div\ FdV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}dV$$

Nếu **n** là véc tơ pháp tuyến đơn vị của S hướng ra phía ngoài, thì tích phân mặt bên vế trái của Định lý phân tán là

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_S (P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}dS$$

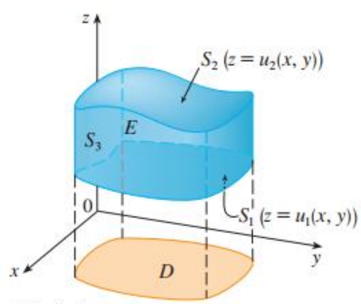
$$= \iint_S P\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}dS + \iint_S Q\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}dS + \iint_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS$$

Do đó, để chứng minh Định lý phân tán, ta chứng minh ba phương trình sau

[2] $$\iint_S P\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}dV$$

[3] $$\iint_S Q\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}dV$$

[4] $$\iint_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}dV$$



Hình 1

Để chứng minh phương trình 4, chúng ta sử dụng sự kiện E là miền loại 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$

trong đó D là chiếu của E lên mặt phẳng xy. Theo phương trình 3.7.6 ta có

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)dz\right]dA$$

và do đó, theo Định lý cơ bản của giải tích

[5] $$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}dV = \iint_D \left[R\big(x,y,u_2(x,y)\big) - R\big(x,y,u_1(x,y)\big)\right]dA$$

Biên S bao gồm ba mảnh: mặt đáy S_1, mặt trên S_2 và mặt xung quanh S_3. (Xem Hình 1. Có thể S_3 không thể hiển thị, chẳng hạn mặt cầu.) Chú ý rằng trên S_3 ta có **k** · **n** = 0, bởi vì **n** nằm ngang còn **k** thẳng đứng, nên

$$\iint_{S_3} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS = 0$$

Vì vậy, cho dù có một mặt thẳng đứng, chúng ta có thể viết

[6] $$\iint_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_{S_1} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS + \iint_{S_2} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS$$

Phương trình của S_2 là $z = u_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, và véc tơ pháp tuyến **n** hướng lên trên nên từ phương trình 4.7.10 (**F** được thay bởi R**k**) ta có

$$\iint_{S_2} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_D R\big(x,y,u_2(x,y)\big)dA$$

Trên S_1 ta có $z = u_1(x, y)$, nhưng ở đây véc tơ pháp tuyến **n** hướng xuống dưới, nên

$$\iint_{S_1} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS = -\iint_D R\big(x,y,u_1(x,y)\big)dA$$

Do đó phương trình 6 cho ra

$$\iint_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_D \big[R\big(x,y,u_2(x,y)\big) - R\big(x,y,u_1(x,y)\big)\big]dA$$

So sánh với phương trình 5, chỉ ra rằng

$$\iint_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}dV$$

Các phương trình 2 và 3 được chứng minh hoàn toàn tương tự khi xem E tương ứng là loại 2 và 3.

Ví dụ 1 Tính thông lượng của trường véc tơ **F**(x, y, z) = z i + y j + x k qua mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Lời giải Trước hết chúng ta tính đivê của **F**:

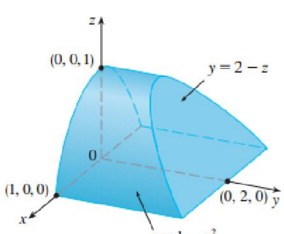
$$div\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1$$

Mặt cầu đơn vị S là biên của quả cầu B được cho bởi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$. Vì thế, theo Định lý phân tán, thông lượng là

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_B div\,\mathbf{F}dV = \iiint_B 1dV = V(B) = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi$$

Ví dụ 2 Tính $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, trong đó $F(x,y,z) = xyi + \big(y^2 + e^{xz^2}\big)j + \sin(x,y)\,k$ và S là mặt của vật thể E được giới hạn bởi mặt trụ parabolic $z = 1 - x^2$ và các mặt phẳng z = 0, y = 0 và y + z = 2. (Xem Hình 2.)

Lời giải Rất khó để tính trực tiếp tích phân mặt đã cho. (Chúng ta cần phải tính bốn tích phân mặt tương ứng với 4 mảnh của S.) Hơn nữa, đivê của F ít phức tạp hơn F:



Hình 2

$$div\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\big(y^2 + e^{xz^2}\big) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin(xy)) = y + 2y = 3y$$

Do đó chúng ta sử dụng Định lý phân tán để chuyển tích phân mặt đã cho sang tích phân bội ba. Cách dễ nhất để tính tích phân bội ba là biểu diễn E là miền loại 3:

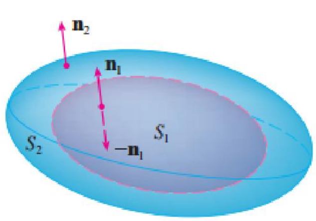
$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1 - x^2,\ 0 \le y \le 2 - z\}$$

Khi đó ta có

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E div\,FdV = \iiint_E 3ydV = 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z} y dy\,dz\,dx$$

$$= 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\frac{1}{2}(2-z)^2dz\,dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\Big[-\frac{1}{3}(2-z)^3\Big]_0^{1-x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[(x^2+1)^3 - 8]dx = -\int_{-1}^{1}(x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7)dx = \frac{184}{35}$$



Hình 3

Mặc dù chúng ta chứng minh Định lý phân tán đối với các miền vật thể đơn, nó có thể được chứng minh đối với các miền là hợp hữu hạn các miền đơn. Ví dụ, chúng ta xem xét miền E nằm giữa các mặt kín S_1 và S_2, trong đó S_1 bên trong S_2. Giả sử n_1 và n_2 là các pháp tuyến hướng ra ngoài của S_1 và S_2. Khi đó biên của E là $S = S_1 \cup S_2$ và pháp tuyến của nó $\mathbf{n} = -\mathbf{n}$ trên S_1 và $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ trên S_2. (Xem Hình 3.) Áp dụng Định lý phân tán cho S, ta nhận được

[7] $\iiint_E \ div\, FdV = \iint_S \ \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S \ \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}dS = \iint_{S_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n_2}dS - \iint_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n_1}dS$

Ví dụ 3 Trong Ví dụ 5 mục 4.1 chúng ta đã xem xét điện trường

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{x}$$

trong đó điện tích Q được đặt tại gốc tọa độ và $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ là véc tơ vị trí. Sử dụng Định lý phân tán để chứng tỏ rằng điện thông của E qua bất kỳ mặt cong kín S_2 bao quanh gốc tọa độ bằng

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi\varepsilon Q$$

Lời giải Rất khó khi mà chúng ta không biết rõ phương trình của S_2 vì nó là mặt cong kín bất kỳ bao quanh gốc tọa độ. Mặt cong đơn giản nhất như thế là mặt cầu, vì vậy chúng ta giả thiết S_1 là mặt cầu nhỏ với bán kính a và tâm tại gốc tọa độ. Dễ kiểm tra rằng div E = 0. Do đó phương trình 7 cho ra

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} + \iiint_E \ \text{div}\, \mathbf{E}\, dV = \iint_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot \mathbf{n}dS$$

Điểm chính ở đây là chúng ta đã đưa về tính tích phân trên mặt cầu S_1. Véc tơ pháp tuyến đơn vị tại **x** là **x**/|**x**|. Do đó

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon Q}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{x} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right) = \frac{\varepsilon Q}{|\boldsymbol{x}|^4}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \frac{\varepsilon Q}{|\boldsymbol{x}|^2} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}$$

vì phương trình của S_1 là |**x**| = a. Vì vậy ta có

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot \mathbf{n}dS = \iint_{S_1} \frac{\varepsilon Q}{a^2}dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2}\iint_{S_1} dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2}A(S_1) = 4\pi\varepsilon Q$$

Điều đó chứng tỏ rằng điện thông của E qua bất kỳ mặt kín chứa gốc tọa độ là 4πεQ.

[Đây là trường hợp riêng của Định luật Gauss (Phương trình 4.7.11) đối với điện tích đơn. Mối quan hệ giữa ε và ε_0 là $\varepsilon = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.]

Một ứng dụng khác của Định lý phân tán xuất hiện trong dòng chất lỏng. Giả sử v(x, y, z) là trường vận tốc của chất lỏng với mật độ không đổi ρ. Khi đó **F** = ρ**v** là tốc độ của chất lỏng trên một đơn vị diện tích. Nếu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ là điểm trong chất lỏng và B_a là khối cầu tâm P_0 với bán kính rất nhỏ a, thì div **F**(P) ≈ **F**(P_0) với mọi điểm trong B_a vì div **F** liên tục. Chúng ta xấp xỉ thông lượng trên mặt cầu S_a như sau:

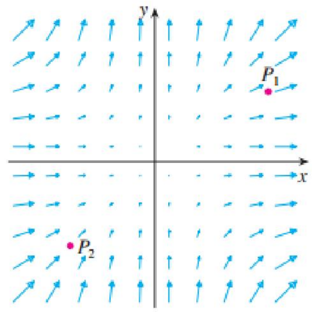
$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B_a} \text{div}\, \mathbf{F}\, dV \approx \iiint_{B_a} \text{div}\, \mathbf{F}(P_0)\, dV = \text{div}\, \mathbf{F}(P_0)\boldsymbol{V}(B_a)$$

Xấp xỉ này trở nên tốt hơn khi a → 0 và cho thấy

[8] $\text{div}\, \mathbf{F}(\mathrm{P}_0) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

Phương trình 8 nói rằng div F(P_0) là vận tốc thực của thông lượng hướng ra ngoài trên một đơn vị thể tích tại P_0. (Đó là lý do có tên *phân tán*.) Nếu div F(p) > 0, thông lượng thực hướng ra gần P và P được gọi là *điểm nguồn* (source). Nếu div F(P) < 0, thông lượng là hướng vào gần P và P được gọi là *điểm rò* (sink).

Đối với trường véc tơ trên Hình 4, biểu thị rằng các véc tơ mà mút cuối gần P_1 là ngắn hơn các véc tơ mà mút gốc gần P_1. Vì thế thông lượng thực là hướng ra gần P_1, nên div F(P_1) > 0. và P_1 là điểm nguồn. Mặt khác, gần P_2, các mũi tên đi vào là dài hơn các mũi tên đi ra. Ở đây thông lượng thực là đi vào, nên div F(P_2) < 0 và P_2 là điểm rò. Chúng ta có thể sử dụng công



Hình 4
Trường véc tơ $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

thức đối với F để khẳng định cảm nhận này. Bởi vì $\mathbf{F} = x^2\ \mathbf{i} + y^2\ \mathbf{j}$, chúng ta có div $\mathbf{F} = 2x + 2y$, nó dương khi $y > -x$. Vì thế những điểm nằm phía bên trên đường $y = -x$ là điểm nguồn, và phía bên dưới là điểm rò.

4.10. Tóm tắt

Các kết quả chính của chương này là tất cả các phiên bản nhiều chiều của cơ bản Định lý của giải tích. Để giúp ghi nhớ chúng dễ dàng, chúng ta thu thập chúng lại với nhau ở đây (không có giả thuyết) để có thể nhìn thấy dễ dàng hơn sự tương tự cần thiết của chúng. Chú ý rằng trong mọi trường hợp, ở phía bên trái là tích phân của "đạo hàm" trên một miền, và bên phải liên quan đến các giá trị của hàm chỉ trên biên của miền.

- Định lý cơ bản của giải tích

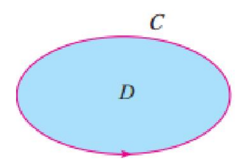
$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Định lý cơ bản đối với tích phân đường

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f\big(\mathbf{r}(b)\big) - f\big(\mathbf{r}(a)\big)$$

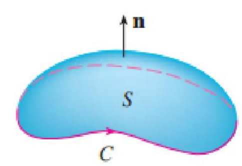
- Định lý Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dA = \int_C Pdx + Qdy$$



- Định lý Stoke

$$\iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



- Định lý phân tán

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$