CHƯƠNG 3. TÍCH PHÂN BỘI

Trong chương này chúng ta mở rộng ý nghĩa của tích phân xác định tới các tích phân của các hàm hai hoặc ba biến. Các ý nghĩa đó là sử dụng để tính thể tích, khối lượng và trọng tâm của những miền tổng quát. Chúng ta cũng sử dụng tích phân kép để tính xác xuất của hai biến ngẫu nhiên có liên quan.

Ta sẽ thấy hệ tọa độ cực rất (polar coordinates) hiệu quả trong tính tích phân kép trên một số dạng miền đặc biệt. Tương tự như thế, chúng ta sẽ giới thiệu hai hệ tọa độ mới trong không gian ba chiều – tọa độ trụ (cylindrical coordinates) và tọa độ cầu (spherical coordinates) – đơn giản hóa việc tính toán tích phân bội ba trên những miền hay gặp trong không gian ba chiều.

3.1. Tích phân kép trên miền chữ nhật

Giống như cách giải bài toán tính diện tích đã dẫn đến định nghĩa tích phân xác định, bây giờ chúng ta tính thể tích của vật thể và quá trình này dẫn đến định nghĩa tích phân kép.

3.1.1. Xem lại định nghĩa tích phân xác định

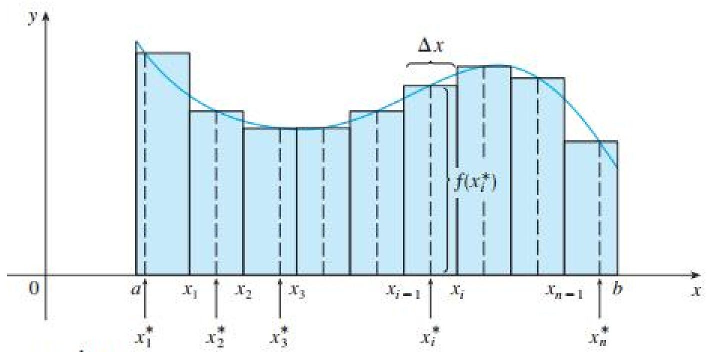
Trước hết chúng ta nhớ lại các sự kiện cơ bản liên quan đến định nghĩa tích phân xác định của hàm một biến. Nếu f(x) xác định trên [a, b], ta chia [a, b] thành n phần đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ bằng nhau với $\Delta x = (b – a)/n$ và chọn một điểm x_i^* trên đoạn con đó. Sau đó lập tổng tích phân

$$[1] \qquad \sum_{k=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$$

và lấy giới hạn của các tổng đó khi $n \to +\infty$ để nhận được định nghĩa tích phân xác định của hàm f từ a đến b:

$$[2] \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$$

Trong trường hợp đặc biệt khi $f(x) \ge 0$, tổng tích phân có thể được xem như tổng của các diện tích của các hình chữ nhật trên Hình 1, và $\int_a^b f(x)\,dx$ biểu thị diện tích của miền nằm phía dưới đường cong y = f(x), từ a tới b.

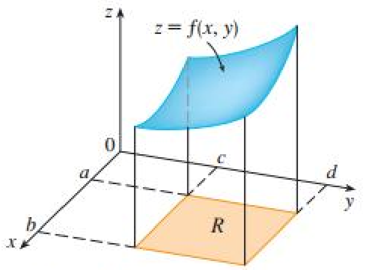


Hình 1

3.1.2. Thể tích và tích phân kép

Một cách tương tự, chúng ta xem xét một hàm hai biến xác định trên một hình chữ nhật đóng $R = [a, b]\times[c, d] = \{(x, y) \in R^2 \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$

và chúng ta giả sử rằng $f(x, y) \ge 0$. Đồ thị của f là mặt cong với phương trình $z = f(x, y)$.



Hình 2

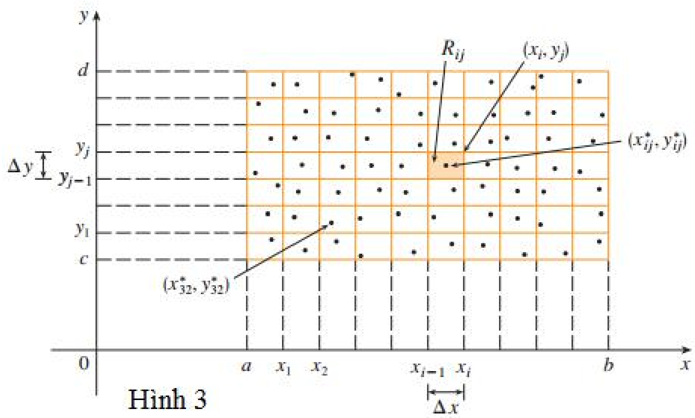
Giả sử S là S là vật thể nằm trên R và dưới đồ thị của f, tức là $S = \{(x, y, z) \in R^3 \mid 0 \le z \le f(x, y), (x, y) \in R^2\}$

(Xem Hình 2.) Đích của ta là tìm thể tích của S.

Đầu tiên, chia hình chữ nhật R thành các hình chữ nhật nhỏ. Chúng ta thực hiện điều này bằng cách chia đoạn [a, b] thành m đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ cùng độ dài $\Delta x = (b - a)/m$ và chia đoạn [c, d] thành n đoạn con cùng độ dài $\Delta y = (d - c)/n$. Bằng cách vẽ các đường thẳng song song với các trục tọa độ đi qua các mút của các đoạn con như Hình 3, ta có dạng của các hình chữ nhật nhỏ

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j\}$$

tất cả có cùng diện tích $\Delta A = \Delta x\Delta y$.



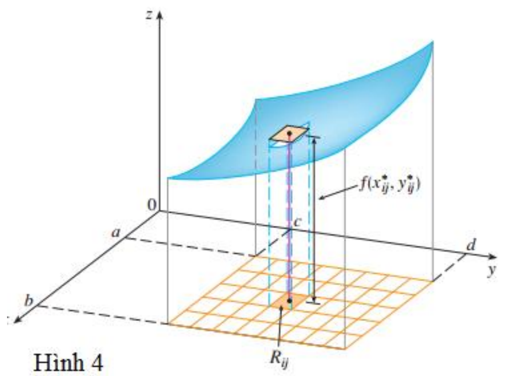
Hình 3

Nếu trên mỗi R_{ij} ta chọn một điểm ngẫu nhiên (x_{ij}^*, y_{ij}^*) thì chúng ta có thể xấp xỉ phần của S nằm trên mỗi R_{ij} bởi một khối hộp chữ nhật với đáy là R_{ij} và chiều cao là $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, như trên Hình 4. Thể tích hình hộp này bằng chiều cáo của nó nhân với diện tích đáy $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$.

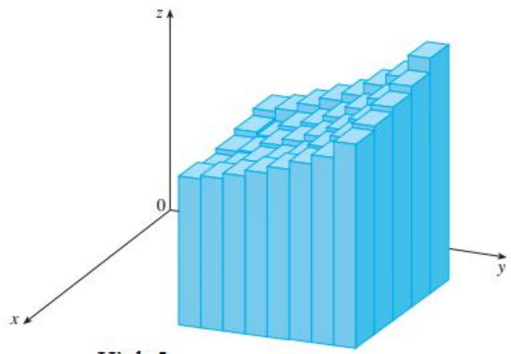
Nếu chúng ta làm như thế cho tất cả hình chữ nhật và cộng các thể tích của các hình hộp tương ứng, ta nhận được giá trị xấp xỉ với thể tích của S:

$$[3] \qquad V \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A$$

(Xem Hình 5.) Tổng kép này có nghĩa là với mỗi hình chữ nhật con, chúng ta tính giá trị của f tại điểm đã chọn rồi nhân với diện tích của hình chữ nhật con, rồi cộng vào kết quả.



Hình 4



Hình 5

Trực giác của ta mách bảo rằng xấp xỉ đã cho trong [3] trở nên tốt hơn khi m vag n lớn và vì vậy

[4] $$V = \lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A$$

Chúng ta sử dụng biểu thức trong phương trình 4 để xác định thể tích của vật thể S nằm dưới đồ thị của f và trên hình chữ nhật R.

Các giới hạn có dạng trong phương trình 4 xảy ra thường xuyên, không chỉ tìm thể tích mà còn trong một loạt tình huống khác mà ta sẽ gặp trong phần 3.5, ngay cả khi f không dương.

[5] **Định nghĩa** Tích phân kép của f trên hình chữ nhật R là

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Ý nghĩa về độ chính xác của giới hạn trong Định nghĩa 5 là, với mọi ε > 0, tồn tại số N nguyên dương sao cho

$$\left|\iint_R f(x,y)\,dA - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A\right| < \varepsilon$$

với mọi số nguyên dương m và n lớn hơn N và đối với bất kỳ phép chọn các điểm (x_{ij}*, y_{ij}*) trong R_{ij}.

Hàm f được gọi là khả tích nếu giới hạn trong Định nghĩa 5 tồn tại. Sự thật là, tích phân kép của f tồn tại chứng tỏ rằng f không "quá gián đoạn". Đặc biệt, nếu f bị chặn [tức là, tồn tại hằng số M sao cho |f(x, y)| ≤ M với mọi (x, y) ∈ R], và f liên tục trên đó, ngoại trừ hữu hạn điểm của đường cong trơn thì f khả tích trên R.

Điểm (x_{ij}*, y_{ij}*) có thể chọn tùy ý trên R_{ij}, nhưng nếu ta chọn nó là góc trên–phải của R_{ij} [điểm (x_i, y_j), Hình 3] thì biểu thức của tích phân kép nom đơn giản hơn

[6] $$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_i, y_j\right)\Delta A$$

Bằng cách so sánh Định nghĩa 4 và Định nghĩa 5, ta thấy thể tích có thể viết như là tích phân kép:

Nếu f(x, y) ≥ 0 thì thể tích V của vật thể nằm trên hình chữ nhật R và dưới mặt cong z = f(x, y) là

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA$$

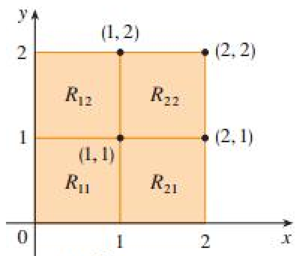
Tổng trong Định nghĩa 5, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A$, được gọi là tổng Riemann kép hay tổng tích phân kép và được dùng để xấp xỉ giá trị của tích phân kép. Nếu f là hàm dương thì tổng tích phân kép biểu thị tổng của các thể tích của các cột, như Hình 5, và là xấp xỉ của thể tích nằm dưới đồ thị của f.

Ví dụ 1 Ước lượng thể tích của vật thể nằm trên hình vuông R = [0, 2]×[0, 2] và dưới paraboloid elliptic z = 16 – x^2 – $2y^2$. Chia R thành bốn hình vuông bằng nhau và chọn điểm mẫu là góc trên–phải của mỗi hình vuông R_{ij}. Phác họa vật thể và các khối hộp chữ nhật xấp xỉ.

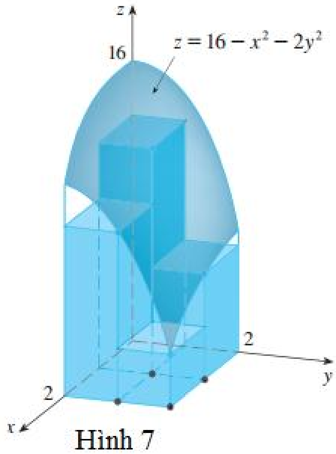
Lời giải Các hình vuông được chỉ ra trên Hình 6. Paraboloid là đồ thị của f(x, y) = 16 – x^2 – $2y^2$ và diện tích của mỗi hnhf vuông là ΔA = 1. Xấp xỉ thể tích bởi tổng Riemann với m = n = 2 ta có

$$V \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f\left(x_i, y_j\right)\Delta A = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f\left(x_i, y_j\right) = f(1,1) + f(1,2) + f(2,1) + f(2,2) = 34$$

Thể tích này được xấp xỉ bởi các khối hộp chữ nhật trên Hình 7.

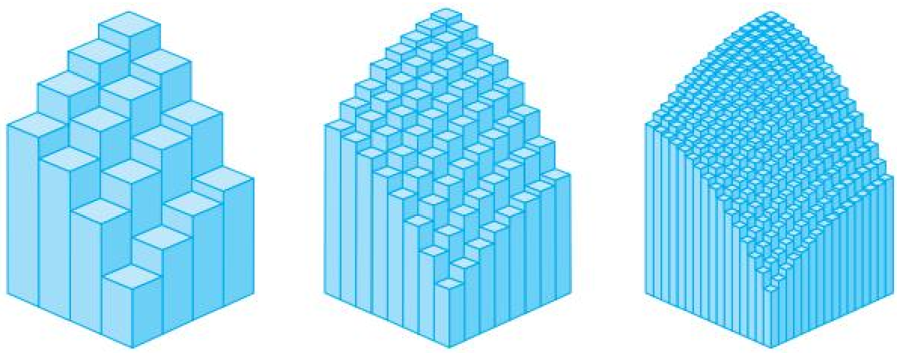


Hình 6



Hình 7

Chúng ta nhận được các xấp xỉ tốt hơn nếu chúng ta tăng số các hình vuông. Hình 8 cho thấy các cột trông giống như vật thể thực và xấp xỉ tương ứng trở nên chính xác hơn khi chúng ta sử dụng 16, 64, và 256 ô vuông. Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ thấy khối lượng chính xác là 48.

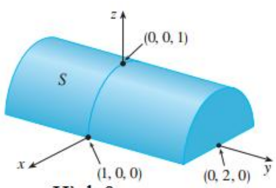


(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46.46875$

Hình 8

Ví dụ 2 Cho R = {(x, y) | –1 ≤ x ≤ 1, –2 ≤ y ≤ 2}, ước lượng tích phân $\iint_R \sqrt{1-x^2}\,dA$.

Lời giải Rất khó để ước lượng tích phân này theo Định nghĩa 5, nhưng vì $\sqrt{1-x^2} \geq 0$ nên chúng ta ta có thể tính tích phân này bằng cách chú ý đến thể tích. Nếu $z = \sqrt{1-x^2}$ thì $x^2 + z^2 = 1$ và z ≥ 0, vì vậy tích phân kép đã cho biểu thị thể tích của vật thể nằm dưới mặt trụ tròn $x^2 + y^2 = 1$ và trên hình chữ nhật R. (Xem Hình 9.) Thể tích của S bằng diệc tích của nửa hình tròn bán kính bằng 1 nhân với độ dài của hình trụ. Vì thế



Hình 9

$$\iint_R \sqrt{1-x^2}\,dA = \frac{1}{2}\pi(1)^2(4) = 2\pi$$

3.1.3. Quy tắc trung điểm

Các phương pháp mà chúng ta sử dụng để tính xấp xỉ tích phân đơn như Quy tắc Trung điểm (Midpoint Rule), Quy tắc Hình thang (Trapezoidal Rule), Quy tắc Simson (Simson's Rule) đều áp dụng được với tích phân kép. Ở đây chúng ta chỉ xem xét Quy tắc Trung điểm cho tích phân kép. Điều đó có nghĩa rằng chúng ta ta sử dụng tổng Riemann kép để xấp xỉ tích phân kép, trong đó điểm (x_{ij}*, y_{ij}*) trong R_{ij} là được chọn là điểm tâm $(\overline{x}_i, \overline{y}_j)$ của R_{ij}. Nói khác đi, $\overline{x}_i$ là trung điểm của $[x_{i-1}, x_i]$ và $\overline{y}_j$ là trung điểm của $[y_{j-1}, y_j]$.

Quy tắc Trung điểm đối với tích phân kép

$$\iint_R f(x,y)\,dA \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\overline{x_i}, \overline{y_j})\Delta A$$

trong đó $\overline{x}_i$ là trung điểm của $[x_{i-1}, x_i]$ và $\overline{y}_j$ là trung điểm của $[y_{j-1}, y_j]$.

Ví dụ 3 Sử dụng Quy tắc Trung điểm với m = n = 2 để ước lượng giá trị của tích phân $\iint_R (x-3y^2)\,dA$, trong đó R = {(x, y) | 0 ≤ x ≤ 2, 1 ≤ y ≤ 2}

Lời giải Khi sử dụng Quy tắc Trung điểm với m = n = 2, chúng ta lượng giá hàm f(x, y) = x – 3y² tại các tâm của bốn hình chữ nhật nhỏ như trong Hình 10.

Vì vậy $\overline{x}_1 = \frac{1}{2}, \overline{x}_2 = \frac{3}{2}, \overline{y}_1 = \frac{5}{4}, \overline{y}_2 = \frac{7}{4}$. Diện tích của mỗi hình chữ nhật nhỏ là $\Delta A = \frac{1}{2}$. Vì thế

$$\iint_R (x-3y^2)\,dA \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(\overline{x_i}, \overline{y_j})\Delta A = \frac{1}{2}\left[f(\overline{x_1}, \overline{y_1}) + f(\overline{x_1}, \overline{y_2}) + f(\overline{x_2}, \overline{y_1}) + f(\overline{x_2}, \overline{y_2})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{67}{16} - \frac{139}{16} - \frac{51}{16} - \frac{123}{16}\right] = -\frac{95}{8} = -11.875$$

Chú ý Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ phát triển một phương pháp hiệu quả để tính tích phân kép và chúng ta sẽ thấy rằng giá trị chính xác của tích phân kép trong Ví dụ 3 là –12. (Nhớ rằng việc giải thích một tích phân kép như một số đo thể tích chỉ khi hàm dưới dấu tích phân f là một hàm dương. Hàm f trong Ví dụ 3 không phải là một hàm dương, do đó tích phân của nó không phải là số đo thể tích. Trong ví dụ 2 và 3 trong phần 3.2, chúng ta sẽ thảo luận làm thế nào để giải thích các tích phân của các hàm mà không phải là luôn luôn dương.) Nếu tiếp tục chia mỗi hình chữ nhật nhỏ trong Hình 10 thành bốn cái nhỏ hơn với hình dạng tương tự, chúng ta sẽ nhận được các xấp xỉ theo Quy tắc Trung điểm được hiển thị trong biểu đồ bên. Chú ý rằng các xấp xỉ này tiến dần đến giá trị đúng của tích phân kép là –12.

Số hình chữ nhật	Giá trị xấp xỉ
1	−11.5000
4	−11.8750
16	−11.9687
64	−11.9922
256	−11.9980
1024	−11.9995

3.1.4. Giá trị trung bình

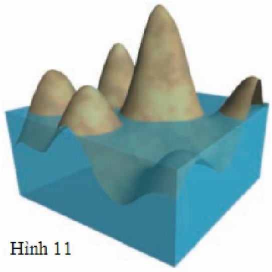
Nhớ lại rằng giá trị trung bình của hàm một biến xác định trên [a, b] là

$$f_{TB} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Tương tự, chúng ta ta định nghĩa giá trị trưng bình của hàm hai biến xác định trên hình chữ nhật R là

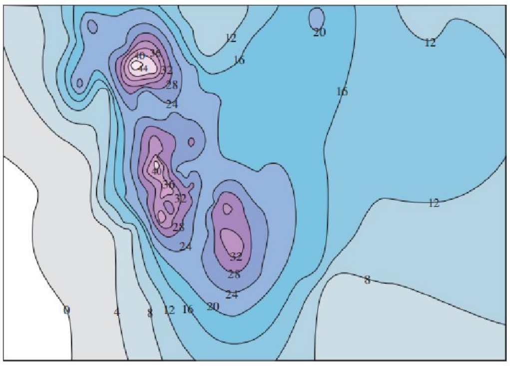
$$f_{TB} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x,y)dA$$

trong đó A(R) là diện tích của R.

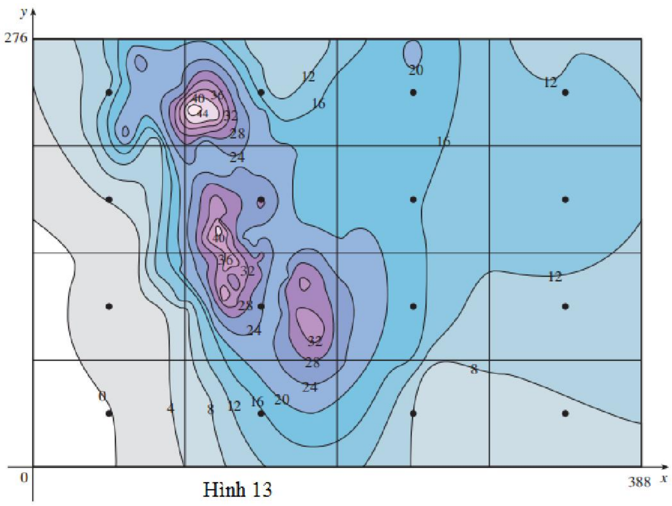

Hình 11

Nếu f(x, y) ≥ 0, phương trình $A(R) \times f_{TB} = \iint_R f(x,y)dA$ nói lên rằng khối hộp với đáy R và chiều cao f_{AB} có cùng thể tích với vật thể nằm dưới đồ thị của f. [Nếu z = f(x, y) mô tả một miền đồi núi và bạn cắt ngang các đỉnh núi tại độ cao f_{TB} thì bạn có thể dùng chúng lấp đầy các vùng trũng (valley) để khu vực trở nên hoàn toàn bằng phẳng. Xem Hình 11.]

Ví dụ 4 Bản đồ đồng mức trong Hình 12 cho thấy tuyết rơi (theo inches) xuống bang Colorado vào ngày 20 và 21 tháng 12 năm 2006. (Tiểu bang là một hình chữ nhật kích thước 388 dặm từ tây sang đông và 276 dặm từ nam đến bắc.) Sử dụng bản đồ đồng mức để ước tính lượng tuyết rơi trung bình cho toàn bộ tiểu bang Colorado vào những ngày này.


Hình 12

Lời giải Đặt gốc tọa độ tại góc tây nam của tiểu bang. Khi đó 0 ≤ x ≤ 388, 0 ≤ y ≤ 276 và f(x, y) là tuyết rơi (theo inches) tại vị vùng x dặm đông và y dặm bắc tính từ gốc tọa độ. Nếu R là hình chữ nhật biểu thị Colorado thì trung bình tuyết roei trong các ngày 20–12 tháng 12 là



Hình 13

$$f_{TB} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x,y)dA$$

trong đó A(R) = (388)(276). Để ước lượng giá trị của tích phân kép này, chúng ta sử dụng Quy tắc Trung điểm với m = n = 4. Nói khác đi, chúng ta chia R thành 16 hình chữ nhật nhỏ kích thước bằng nhau, như Hình 13. Diện tích của mỗi hình chữ nhật nhỏ là

$\Delta A = \frac{1}{16}(388)(276)=6693$ (dặm)^2

Sử dụng bản đồ đồng mức để ước lượng giá trị của f tại tâm của mỗi hình chữ nhật nhỏ:

$$\iint_R f(x,y)dA \approx \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right)\Delta A =$$

= ΔA(0 + 15 + 8 + 7 + 2 + 25 + 18.5 + 11 + 4.5 + 28 + 17 + 13.5 + 12 + 15 + 17.5 + 13] = (6693)(207)

Vì vậy $f_{TB} \approx \frac{(6693)(207)}{(388)(276)} \approx 12.9$

Vào 20–21 tháng 12 năm 2006, lượng tuyết rơi trung bình tại Colorado xấp xỉ 13 inches.

3.1.5. Các tính chất của tích phân kép

Chúng ta liệt kê ra đây ba tính chất của tích phân kép tương tự với tích phân đơn. Giả sử rằng tất cả các tích phân đều tồn tại. Các tính chất 7 và 8 được gọi là tuyến tính.

[7] $\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$

[8] $\iint_R cf(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA$ ở đây c là hằng số

Nếu f(x, y) ≥ g(x, y) với mọi (x, y) trong R thì

[9] $\iint_R f(x,y)dA \geq 0$

3.2. Tích phân lặp

Nhớ lại rằng thường là khó để ước lượng tích phân đơn trực tiếp từ định nghĩa, nhưng định lý cơ bản của phép tính vi tích phân cung cấp một phương pháp dễ dàng hơn nhiều. Đánh giá tích phân kép từ nguyên lý đầu tiên thậm chí còn khó khăn hơn, nhưng trong phần này chúng ta thấy cách biểu diễn một tích phân kép như là tích phân lặp, mà sau đó có thể được đánh giá bằng cách tính toán hai tích phân đơn.

3.2.1. Khái niệm

Giả sử rằng f là hàm của hai biến khả tích trên hình chữ nhật R = [a, b]×[c, d]. Chúng ta sử dụng ký hiệu $\int_c^d f(x,y)dy$ nghĩa là x là cố định và f(x, y) khả tích theo y từ c tới d. Việc làm đó được gọi là tích phân từng phần theo biến y. (Chú ý rằng điều đó tương tự như đạo hàm riêng.) Bây giờ $\int_c^d f(x,y)dy$ là biểu thức phụ thuộc x, vì vậy nó xác định một hàm của x:

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

Nếu chúng ta tích phân hàm A theo x từ x = a tới x = b, ta nhận được

[1] $\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$

Tích phân bên vế phải của phương trình 1 được gọi là tích phân lặp. Thường thì bỏ qua cặp ngoặc, vì vậy

[2] $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$

nghĩa là tích phân theo y từ c tới d trước sau đó tích phân theo x từ a đến b. Tương tự

[3] $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$

nghĩa là tích phân theo x từ a tới b trước sau đó tích phân theo y từ c đến d.

Ví dụ 1 Ước lượng tích phân lặp sau

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy\,dx$ (b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx\,dy$

Lời giải

(a) Xem x là hằng số, ta nhận được

$$A(x) = \int_1^2 x^2 y dy = \left[x^2 \tfrac{1}{2} y^2\right]_{y=1}^{y=2} = \tfrac{3}{2}x^2$$

Vì vậy

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2y dy\, dx = \int_0^3 \frac{3}{2}x^2 dx = \frac{x^3}{2}\Big|_0^3 = \frac{27}{2}$$

(b) Ta tính tích phân theo x trước

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2ydx\, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2ydx\right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3}y\Big|_{x=0}^{x=3}\right] dy = \int_1^2 9ydy = \frac{9}{2}y^2\Big|_1^2 = \frac{27}{2}$$

Chý ý rằng trong Ví dụ 1 chúng ta nhận được cùng một đáp số. Tổng quát, các tích phân lặp trong các phương trình 2 và 3 là bằng nhau, tức là trình tự lấy tích phân không quan trọng. Điều này tương tự như Định lý Clairaut về sự bằng nhau của các đạo hàm riêng chéo.

Định lý sau đây cung cấp một phương pháp đánh giá một tích phân kép bằng cách biểu diễn nó như là một tích phân lặp.

[4] **Định lý Fubini** Nếu f liên tục trên hình chữ nhật

R = {(x, y) | a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d}, thì

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\, dy$$

Tổng quát hơn, điều này vẫn đúng nếu f bị chặn trên R, có thể gián đoạn tại một số hữu hạn điểm và các tích phân lặp tồn tại.

Chứng minh của định lý Fubini là quá khó khăn để đưa vào cuốn sách này, nhưng ít nhất chúng ta có thể đưa ra một dấu hiệu trực quan chỉ ra nó là đúng cho trường hợp f(x, y) ≥ 0. Nhớ lại rằng, nếu f dương thì chúng ta có thể giải thích tích phân kép $\iint_R f(x,y)dA$ như là thể tích V của vật thể S nằm phía trên R và phía dưới mặt cong z = f(x, y). Nhưng chúng ta có một công thức khác đã sử dụng trong tích phân đơn

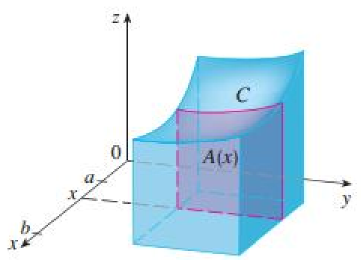
$$V = \int_a^b A(x)dx$$

trong đó A(x) là diện tích của thiết diện của S trong mặt phẳng đi qua x và vuông góc với trục x. Từ Hình 1 ta có thể thấy rằng A(x) là diện tích dưới đường cong C có phương trình z = f(x, y) với x cố định và c ≤ y ≤ d. Do đó $A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$, và ta có

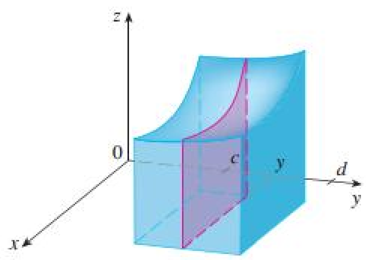
$$\iint_R f(x,y)dA = V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\, dx$$

Tương tự, sử dụng thiết diện vuông góc với trục y trên Hình 2, chỉ ra rằng

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\, dy$$



Hình 1



Hình 2

Ví dụ 2 Ước lượng tích phân kép $\iint_R (x-3y^2)dA$, ở đây

R = {(x, y) | 0 ≤ x ≤ 2, 1 ≤ y ≤ 2} (So sánh với Ví dụ 3 ở 3.1)

Lời giải 1 Định lý Fubini cho ra

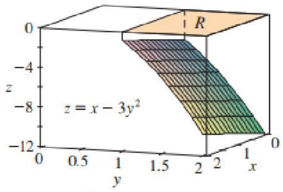
$$\iint_R (x-3y^2)dA = \int_0^2 \int_1^2 (x-3y^2)dy\, dx = \int_0^2 [xy-y^3]_{y=1}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^2 (x-7)dx = \left(\frac{x^2}{2} - 7x\right)_0^2 = -12$$

Lời giải 2 Vẫn áp dụng Định lý Fubini, nhưng tích phân theo x trước, ta có

$$\iint_R (x-3y^2)dA = \int_1^2 \int_0^2 (x-3y^2)dx\,dy = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_1^2 (2-6y^2)dy = (2y-2y^3)_1^2 = -12$$



Hình 3

Chú ý rằng kết quả trong Ví dụ 2 là số âm, nhưng không có gì là mâu thuẫn. Hàm f là không dương, vì vậy tích phân của nó không biểu thị thể tích. Từ Hình 3 ta thấy rằng f luôn âm trên R, vì thế giá trị của tích phân là trái dấu với số đo thể tích của vật thể nằm trên đồ thị của f và dưới R.

Ví dụ 3 Ước lượng tích phân $\iint_R y\sin(xy)dA$, ở đây R = [1, 2]×[0, π].

Lời giải 1 Tích phân theo x trước, ta được

$$\iint_R y\sin(xy)dA = \int_0^\pi \int_1^2 y\sin(xy)dx\,dy = \int_0^\pi -\cos(xy)\Big|_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^\pi (-\cos 2y + \cos y)dy = -\tfrac{1}{2}\sin 2y + \sin y\Big|_0^\pi = 0$$

Lời giải 2 Nếu đảo trình tự lấy tích phân, ta nhận được

$$\iint_R y\sin(xy)dA = \int_1^2 \int_0^\pi y\sin(xy)dy\,dx$$

Ta sử dụng phương pháp tích phân từng phần với

u = y dv = sin(xy)dy ⇒ du = dy $v = -\frac{\cos(xy)}{x}$

vì thế $$\iint_R y\sin(xy)dA = -\frac{y\cos(xy)}{x}\Big|_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x}\int_0^\pi \cos(xy)\,dy$$

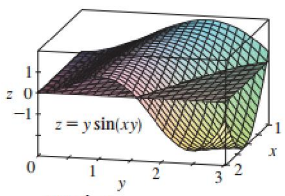
$$= -\frac{\pi\cos(\pi x)}{x} + \frac{1}{x}\sin(xy)\Big|_{y=0}^{y=\pi} = -\frac{\pi\cos(\pi x)}{x} + \frac{\sin\pi x}{x^2}$$

Tích phân từng phần đối với tích phân thứ nhất, u = –1/x, dv = πcosπxdx, ta có

$$\int\left(-\frac{\pi\cos(\pi x)}{x}\right)dx = -\frac{\sin(\pi x)}{x} - \int \frac{\sin(\pi x)}{x^2}dx$$

Do đó $\int\left(-\frac{\pi\cos(\pi x)}{x} + \frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)dx = -\frac{\sin(\pi x)}{x}$,

nên $$\int_1^2 \int_0^\pi y\sin(xy)dy\,dx = -\left[\frac{\sin(\pi x)}{x}\right]_1^2 = \frac{\sin(2\pi)}{2} - \sin\pi = 0$$



Hình 4

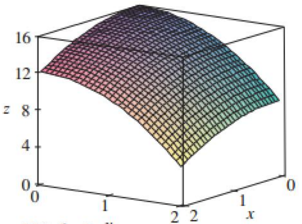
Với hàm f nhận cả hai giá trị dương và âm, $\iint_R f(x,y)dA$ là sự sai khác của các thể tích: $V_1 - V_2$, ở đây V_1 là thể tích trên R và dưới đồ thị còn V_2 là thể tích dưới R và trên đồ thị. Sự kiện tích phân trong Ví dụ 3 bằng 0 chứng tỏ hai thể tích này bằng nhau.

Ví dụ 4 Tìm thể tích của vật thể S được giới hạn bởi paraboloid elliptic $x^2 + 2y^2 + z = 16$, các mặt phẳng x = 2 và y = 2 cùng ba mặt phẳng tọa độ.

Lời giải Trước hết ta thấy rằng S là vật thể nằm dưới mặt cong $z = 16 - x^2 - 2y^2$ và trên hình chữ nhật R = [0, 2]×[0, 2]. (Xem Hình 5.) Vật thể này đã được xem xét trong Ví dụ 1 mục 3.1, nhưng bây giờ chúng ta sử dụng Định lý Fubini để đánh giá tích phân kép. Do đó

$$V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left[16x - \tfrac{1}{3}x^3 - 2xy^2\right]_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^2 \left(\tfrac{88}{3} - 4y^2\right)dy = \left[\tfrac{88}{3}y - \tfrac{4}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=2} = 48$$



Hình 5

Trong trường hợp đặc biệt khi f(x, y) có thể phân tích thành tích của hàm theo x với gàm theo y, tích phân kép của f có thể viết ở dạng đơn giản. Cụ thể, giả sử f(x, y) = g(x)h(y) và R = [a, b]×[c, d] thì Định lý Fubini cho ra

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y)dx\,dy$$

$$= \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)dx\right] dy$$

Với tích phân bên trong, y là không đổi nên h(y) không đổi, vì vậy

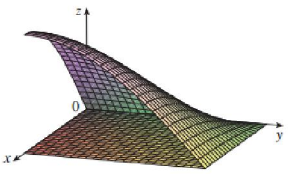
$$\int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)dx\right] dy = \int_c^d \left[h(y) \int_a^b g(x)dx\right] dy = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy$$

vì $\int_a^b g(x)dx$ là hằng số. Do đó trong trường hợp này tích phân kép có thể viết như là tích của hai tích phân đơn:

[5] $\iint_R g(x)h(y)dA = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy$ với R = [a, b]×[c, d]

Ví dụ 5 Nếu R = [0, π/2]×[0, π/2] thì theo phương trình 5,

$$\iint_R sinx\; cosydA = \int_0^{\pi/2} sinxdx \int_0^{\pi/2} cosydy = [-cosx]_0^{\pi/2}[siny]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1$$



Hình 6

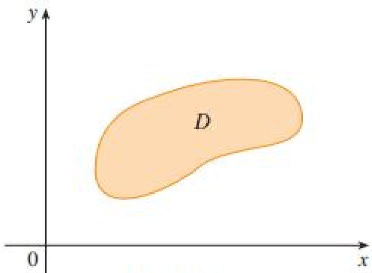
Hàm f(x, y) = sinx cosy trong Ví dụ 5 là hàm dương trên R, vì vậy tích phân biểu thị thể tích của vật thể nằm trên R và dưới đồ thị của f, như trên Hình 6.

3.3. Tích phân kép trên miền tổng quát

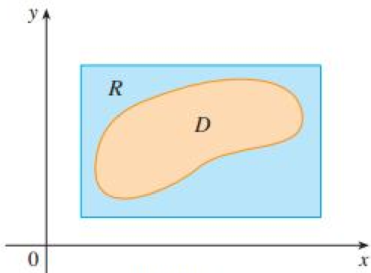
3.3.1. Các dạng miền lấy tích phân kép

Với tích phân đơn, miền lấy tích phân luôn luông là một đoạn. Nhưng với tích phân kép, miền lấy tích phân có thể là miền bất kỳ, giống như trong Hình 1. Ta giả thiết rằng D là miền giới nội, nghĩa là D có thể được giới hạn trong một hình chữ nhật R như Hình 2. Vì vậy chúng ta định nghĩa một hàm mới F với miền xác định là R:

[1] $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$



Hình 1



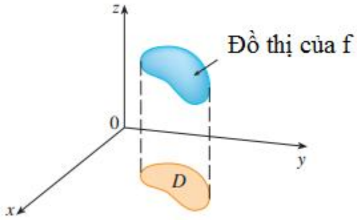
Hình 2

Nếu F khả tích trên R thì chúng ta định nghĩa tích phân kép của f trên D như sau

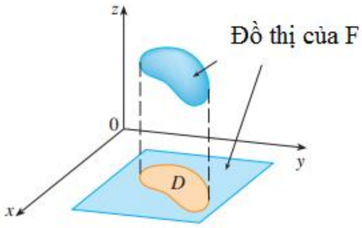
[2] $\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA$ ở đây F được cho bởi phương trình 1

Định nghĩa 2 có nghĩa bởi vì $\iint_R F(x,y)dA$ đã được định nghĩa trong mục 3.1. Việc chúng ta làm như trên là hợp lý bởi vì giá trị của F(x, y) bằng 0 khi (x, y) nằm ngoài D và vì vậy chúng không ảnh hưởng gì tới tích phân. Điều đó có nghĩa rằng hình chữ nhật R chứa D như thế nào cũng không quan trọng.

Trong trường hợp f(x, y) ≥ 0, chúng ta vẫn có thể giải thích $\iint_D f(x,y)dA$ như là thể tích của vật thể nằm trên D và dưới mặt cong z = f(x, y), đồ thị của f. Ta thấy rằng điều này hợp lý bằng cách so sánh các đồ thị của f và F trên Hình 3 và Hình 4 và nhớ rằng $\iint_R F(x,y)dA$ là thể tích nằm dưới đồ thị của F.



Hình 3



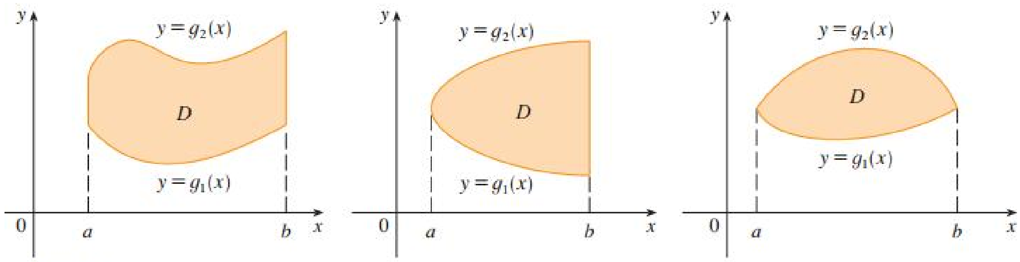
Hình 4

Hình 4 cũng chứng tỏ rằng hàm F có vẻ không liên tục tại các điểm biên của D. Tuy nhiên, nếu f liên tục trên D và biên của D là "tốt theo nghĩa nào đó" (vượt phạm vi cuốn sách này) thì nó có thể chỉ ra rằng $\iint_R F(x,y)dA$ tồn tại và do đó $\iint_D f(x,y)dA$ tồn tại. Trong thực tế, đó là trường hợp của hai loại miền sau đây.

Miền D được gọi là loại 1 nếu nó nằm giữa các đồ thị của hai hàm liên tục theo x, tức là

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

trong đó g_1 và g_2 là các hàm liên tục trên [a, b]. Một số ví dụ về loại 1 được chỉ ra trên Hình 5.



Hình 5

Để tính $\iint_D f(x,y)dA$ khi D là miền loại 1, ta chọn một hình chữ nhật R = [a, b]×[c, d] chứa D, như Hình 6, và ta giả sử F là hàm được cho bởi phương trình 1, tức là, F trùng với f trên D, và F bằng 0 ngoài miền D. Vì vậy, theo Định lý Fubini

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)dy\,dx$$

Nhận thấy rằng F(x, y) = 0 nếu $y < g_1(x)$ hoặc $y > g_2(x)$ vì (x, y) nằm ngoài D. Do đó

$$\int_c^d F(x,y)dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$$

bởi vì F(x, y) = f(x, y) khi $g_1(x) \le y \le g_2(x)$. Vì vậy ta có công thức sau cho phép chúng ta tính tích phân kép như là tích phân lặp.

[3] Nếu f liên tục trên miền D loại 1 $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$

thì $$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx$$

Tích phân bên vế phải của [3] là tích phân lặp tương tự mà chúng ta đã xem xét ở đầu mục, ngoại trừ tích phân bên trong có x không chỉ trong f(x, y) mà còn tại các cận của tích phân, $g_1(x)$ và $g_2(x)$.

Chúng ta cũng xem xét các miền phẳng loại 2, nó có biểu diễn là

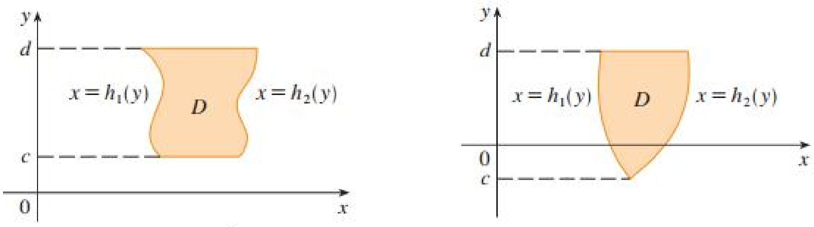
[4] $D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$

trong đó h_1 và h_2 là các hàm liên tục. Hai miền như thế được minh họa trông Hình 7.

Sử dụng cùng một phương pháp như đã dùng để xây dựng [3], ta chỉ ra rằng

[5] $$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h(y)} f(x,y)dx\,dy$$

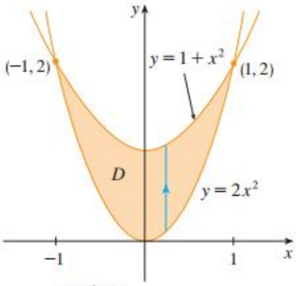
trong đó D là miền loại 2 được cho bởi phương trình [4]



Hình 7

Ví dụ 1 Tính $\iint_D (x + 2y)dA$, ở đây D là miền được giới hạn bởi các parabola $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$.

Lời giải Các parabola giao nhau khi $2x^2 = 1 + x^2$, tức là $x^2 = 1$, hay $x = \pm 1$. Chú ý rằng miền D, như phác họa trên Hình 8, thuộc loại 1 mà không thuộc loại 2, vì vậy $D = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1,\ 2x^2 \le y \le 1 + x^2\}$



Hình 8

Bởi vì cận dưới là $y = 2x^2$ và cận trên là $y = 1 + x^2$, phương trình 3 trở thành

$$\iint_D (x + 2y)dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [xy + y^2]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)dx = -\tfrac{3}{5}x^5 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + x + 1\Big|_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$

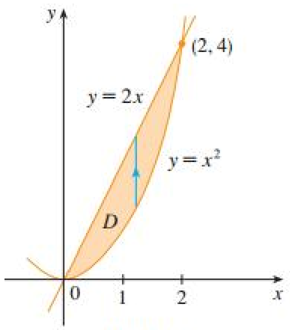
Khi chúng ta thiết lập một tích phân kép như trong Ví dụ 1, cần phác thảo hình học miền lấy tích phân. Thường hữu ích khi vẽ một mũi tên thẳng đứng như trong Hình 8. Khi đó, các giới hạn của tích phân bên trong có thể được đọc từ hình vẽ như sau: Mũi tên bắt đầu từ biên phía dưới $y = g_1(x)$, đó chính là cận dưới của tích phân, và mũi tên kết thúc ở biên phía trên $y = g_2(x)$, chính là cận trên của tích phân. Đối với miền loại 2, mũi tên được vẽ theo chiều ngang từ biên bên trái sang biên bên phải.

Ví dụ 2 Tính thể tích của vật thể nằm phía dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$ và phía trên miền D trong mặt phẳng xy được giới hạn bởi $y = 2x$ và parabola $y = x^2$.

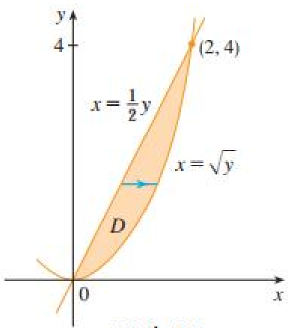
Lời giải 1 Từ Hình 9 ta thấy miền D thuộc loại 1, $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x\}$. Vì vậy thể tích của vật thể là

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)dy\,dx = \int_0^2 \left[x^2y + \tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=x^2}^{y=2x} dx$$

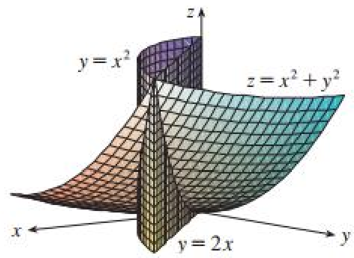
$$= \int_0^2 \left(-\tfrac{1}{3}x^6 - x^4 + \tfrac{14}{3}x^3\right)dx = -\tfrac{1}{21}x^7 - \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{7}{6}x^4\Big|_0^2 = \frac{216}{35}$$



Hình 9



Hình 10



Hình 11

Lời giải 2 Từ Hình 10 ta thấy miền D cũng thuộc loại 2, nên

$$D = \{(x,y) | 0 \le y \le 4,\ \tfrac{1}{2}y \le x \le \sqrt{y}\}$$

Do đó V được tính theo công thức

$$V = \iint_D (x^2+y^2)dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)dx\,dy = \int_0^4 \left[\tfrac{1}{3}x^3 + y^2x\right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy$$

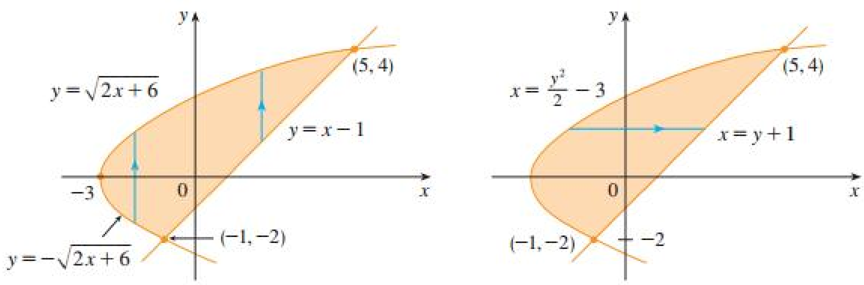
$$= \int_0^4 \left(\tfrac{1}{3}y^{3/2} + y^{5/2} - \tfrac{1}{24}y^3 - \tfrac{1}{2}y^3\right)dy = \tfrac{2}{15}y^{5/2} + \tfrac{2}{7}y^{7/2} - \tfrac{13}{96}y^4\Big|_0^4 = \frac{216}{35}$$

Hình 11 phác họa vật thể mà thể tích được tính trong Ví dụ 2. Nó nằm trên mặt phẳng xy và dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$, nằm giữa mặt phẳng $y = 2x$ và mặt trụ $y = x^2$.

Ví dụ 3 Tính $\iint_D xydA$, ở đây D là miền được giới hạn bởi đường $y = x - 1$ và parabola $y^2 = 2x + 6$.

Lời giải MIền D được chỉ ra trong Hình 12. Lại thấy D thuộc cả loại 1 và loại 2, nhưng biểu diễn loại 1 của D phức tạp bởi biên phía dưới bao gồm hai phần. Vì vậy ta biểu diễn D ở dạng loại 2:

$$D = \{(x,y) | -2 \le y \le 4,\ \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \le x \le y + 1\}$$



(a) D là loại 1 (b) D là loại 2

Từ [5] cho ra

$$\iint_D xydA = \int_{-2}^4 \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy\,dx\,dy = \int_{-2}^4 \tfrac{1}{2}x^2y\Big|_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^4 y\left[(y+1)^2 - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)^2\right]dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^4 \left(-\tfrac{1}{4}y^5 + 4y^3 + 2y^2 - 8y\right)dy = \frac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{24}y^6 + y^4 + \tfrac{2}{3}y^3 - 4y^2\right]_{-2}^4 = 36$$

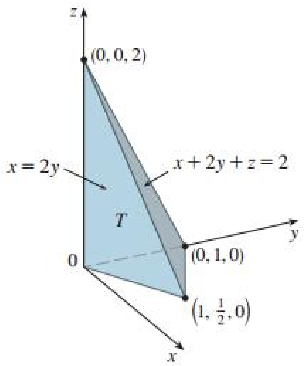
Nếu chúng ta biểu diễn D như loại 1 thì ta nhận được

$$\iint_D xydA = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx + \int_{-1}^{5} \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx$$

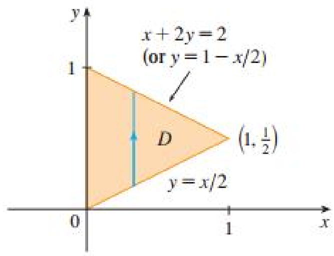
nhưng điều này dẫn đến khối lượng tính toán nhiều hơn.

Ví dụ 4 Tính thể tích của tứ diện được giới hạn bởi các mặt phẳng x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0 và z = 0.

Lời giải Trong một câu hỏi như thế này, cách tốt nhất là vẽ ra hai hình: Một vật thể trong không gian ba chiều, và một là miền D trong mặt phẳng. Hình 13 biểu thị tứ diện T được giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ x = 0, z = 0, mặt phẳng ngang x = 2y và mặt phẳng x + 2y + z = 2. Bởi vì mặt phẳng x + 2y + z = 2 giao với mặt phẳng xy (cho z = 0) theo một đường thẳng x + 2y = 2, chúng ta thấy rằng T nằm trên miền D là tam giác, được giới hạn bởi các đường x = 2y, x + 2y = 2 và x = 0. (Xem Hình 14.)



Hình 13



Hình 14

Mặt phẳng x + 2y + z = 2 có thể viết là z = 2 – x – 2y, nên vật thể nói đến nằm dưới đồ thị của hàm z = 2 – x – 2y và nằm trên miền D, trong đó

D = {(x, y) | 0 ≤ x ≤ 1, x/2 ≤ y ≤ 1 – x/2}

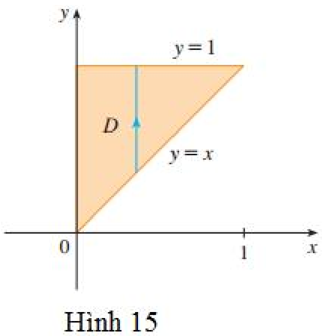
Do đó $V = \iint_D (2 - x - 2y)dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)dy\,dx$

$$= \int_0^1 [2y - xy - y^2]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx = \frac{1}{3}(x-1)^2\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

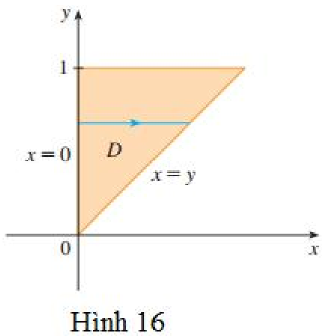
Ví dụ 5 Tính tích phân lặp $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\,dy\,dx$.

Lời giải Nếu chúng ta cố tính tích phân lặp này theo trình tự trên, chúng ta phải đối mặt với việc tính $\int \sin(y^2)\,dy$. Nhưng điều đó là không thể vì nguyên hàm của sin(y^2) không thuộc lớp hàm sơ cấp. Vì thế chúng ta cần thay đổi trình tự tính tích phân. Trước hết chúng ta phải đưa nó về tích phân kép:

$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\,dy\,dx = \iint_D \sin(y^2)\,dA$ trong đó D = {(x, y) | 0 ≤ x ≤ 1, x ≤ y ≤ 1}



Hình 15



Hình 16

Chúng ta phác họa miền D trên Hình 15. Từ Hình 16 ta thấy miền D được mô tả là

D = {(x, y) | 0 ≤ y ≤ 1, 0 ≤ x ≤ y}

Điều đó cho phép chúng ta sử dụng [5] để tính tích phân kép như là tích phân lặp theo thứ tự đảo ngược:

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\,dy\,dx = \iint_D \sin(y^2)\,dA = \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 [x\sin(y^2)]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^1 y\sin(y^2)\,dy = -\tfrac{1}{2}cos(y^2)\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}(1 - cos1)$$

3.3.2. Các tính chất của tích phân kép

Chúng ta giả thiết rằng tất cả các tích phân sau đều tồn tại. Các tính chất đầu tiên của tích phân kép trên miền D được suy trực tiếp từ Định nghĩa 2 trong mục này và các tính chất 7, 8 và 9 trong mục 3.1.

[6] $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA$

[7] $\iint_D cf(x,y)dA = c\iint_D f(x,y)dA$

Nếu f(x, y) ≥ g(x, y) với mọi (x, y) thuộc D thì

[8] $\iint_D f(x,y)dA \ge \iint_D g(x,y)dA$

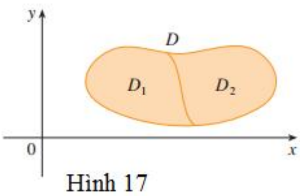
Tính chất tiếp theo của tích phân kép tương tự với tích phân đơn trong phương trình

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

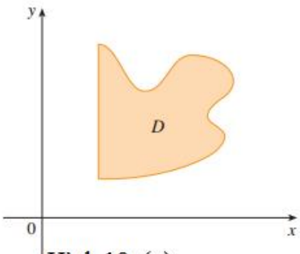
Nếu $D = D_1 \cup D_2$ với D_1 và D_2 không phủ lên nhau, ngoại trừ trên biên (Hình 17), thì

[9] $\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$

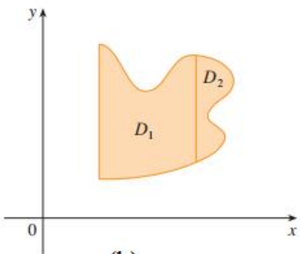
Tính chất 9 có thể sử dụng để tính tích phân kép trên những miền mà không phải loại 1 cũng chẳng phải loại 2, nhưng có thể biểu diễn dưới dạng hợp của loại 1 và loại 2. Hình 18 minh họa điều đó.



Hình 17



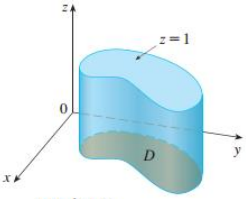
Hình 18 (a)



(b)

Tính chất tiếp theo nói rằng nếu chúng ta tích phân hàm hằng số f(x, y) = 1 trên miền D, ta nhận được diện tích của D:

[10] $\iint_D 1\,dA = A(D)$



Hình 19

Hình 19 minh họa vì sao phương trình 10 là đúng: Vật trụ có đáy là D và chiều cao bằng 1 có A(D) · 1 = A(D), nhưng chúng ta biết rằng có thể viết thể tích của nó là $\iint_D 1\,dA$.

Cuối cùng, ta có thể kết hợp các tính chất 7, 8 và 10 để chứng minh tính chất sau.

[11] Nếu m ≤ f(x, y) ≤ M với mọi (x, y) trên D thì

$$mA(d) \le \iint_D f(x,y)dA \le MA(D)$$

Ví dụ 6 Sử dụng tính chất 11 để ước lượng tích phân $\iint_D e^{sinxcosy} dA$, ở đây D là đĩa với tâm tại gốc tọa độ và bán kính bằng 2.

Lời giải Từ $-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos y \le 1$, ta có $-1 \le \sin x \cos y \le 1$, và do đó

$$e^{-1} \le e^{sinxcosy} \le e^1 = e$$

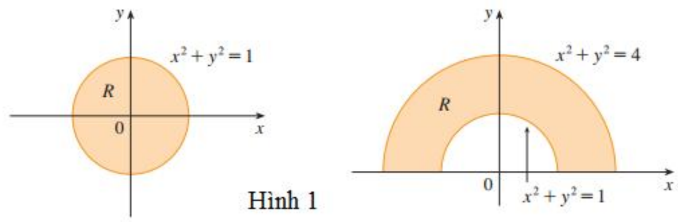
Vì vậy, sử dụng $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e$ và $A(D) = \pi(2)^2$ trong tính chất 11, ta nhận được

$$\frac{4\pi}{e} \le \iint_D e^{sinxcosy} dA \le 4\pi e$$

3.4. Tích phân kép trong tọa độ cực

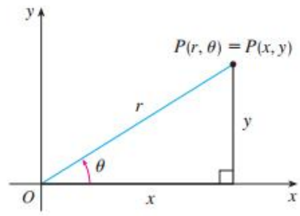
3.4.1. Tính tích phân kép trong tọa độ cực

Giả sử rằng chúng ta muốn tính tích phân kép $\iint_D f(x,y) dA$, trong đó R là một trong những miền như trên Hình 1. Trong cả hai trường hợp mô tả của R về tọa độ vuông góc là khá phức tạp, nhưng R có thể được mô tả dễ dàng khi sử dụng tọa độ cực.



Hình 1

(a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$ (b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi\}$



Hình 2

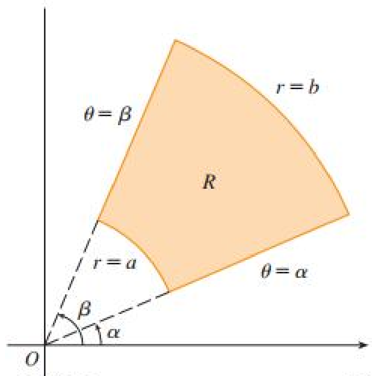
Hình 2 cho mối quan hệ giữa tọa độ cực (r, θ) và tọa độ vuông góc (x, y):

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

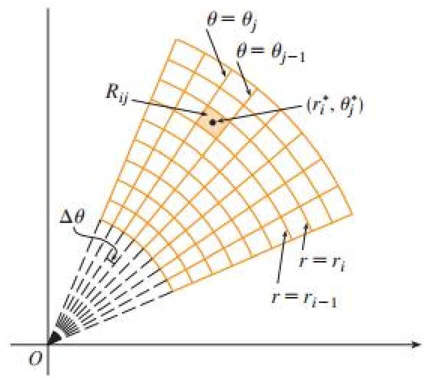
Các miền trong Hình 1 là các trường hợp đặc biệt của *hình chữ nhật cực*

$$R = \{(r, \theta) \mid a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$$

được thể hiện trong Hình 3. Theo trình tự tính tích phân kép $\iint_D f(x,y) dA$, trong đó R là hình chữ nhật cực, chúng ta chia đoạn [a, b] thành m đoạn con $[r_{i-1}, r_i]$ bằng nhau với độ dài $\Delta r = (b - a)/m$ và chia đoạn $[\alpha, \beta]$ thành n đoạn con bằng nhau với độ dài $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$. Như thế các đường tròn $r = r_i$ và các tia $\theta = \theta_j$ chia hình chữ nhật cực R thành các hình chữ nhật cực nhỏ R_{ij} như chỉ ra trên Hình 4.



Hình 3 Hình chữ nhật cực



Hình 4 Chia R thành các hình chữ nhật cực nhỏ

"Tâm" của hình chữ nhật cực nhỏ $R_{ij} = \{(r, \theta)\ r_{i-1} \le r \le r_i, \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j\}$ có tọa độ cực là

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \qquad \theta_i^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_i)$$

Chúng ta tính diện tích của R_{ij} khi sử dụng sự kiện rằng diện tích của hình quạt tròn với bán kính r và góc trung tâm θ là $\frac{1}{2}r^2\theta$. Hiệu các diện tích của hai hình quạt mà mỗi cái cùng có góc trung tâm là $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, ta nhận được diện tích của R_{ij} là

$$\Delta A_i = \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^*\Delta r\Delta\theta$$

Mặc dù chúng ta đã định nghĩa tích phân kép $\iint_D f(x,y)dA$ trên hình chữ nhật thông thường, nó chỉ ra rằng với hàm f liên tục, chúng ta luôn luôn nhận được cùng một kết quả khi sử dụng các hình chữ nhật cực. Tọa độ vuông góc của tâm của R_{ij} là $(r_i^* cos\theta_i^*, r_i^* sin\theta_i^*)$, vì thế tổng Riemann điển hình là

$$[1] \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* cos\theta_i^*, r_i^* sin\theta_i^*)\Delta A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* cos\theta_i^*, r_i^* sin\theta_i^*) r_i^*\Delta r\Delta\theta$$

Nếu chúng ta viết $g(r, \theta) = rf(rcos\theta, rsin\theta)$ thì tổng Riemann trong phương trình 1 có thể viết lại là $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_i^*)\Delta r\Delta\theta$, đó là tổng Riemann của tích phân kép $\int_\alpha^\beta \int_a^b g(r,\theta)drd\theta$

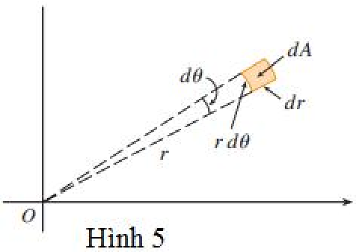
Do đó ta có

$$\iint_D f(x,y)dA = \lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* cos\theta_i^*, r_i^* sin\theta_i^*)\Delta A_i$$

$$= \lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_i^*)\Delta r\Delta\theta = \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r,\theta)drd\theta = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(rcos\theta, rsin\theta)rdrd\theta$$

[2] **Chuyển sang tọa độ cực trong tích phân kép** Nếu f liên tục trên hình chữ nhật cực R được cho bởi $0 \le a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$, trong đó $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$, thì

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(rcos\theta, rsin\theta)rdrd\theta$$



Hình 5

Công thức trong [2] nói rằng, chúng ta chuyển từ tọa độ vuông góc sang tọa độ cực trong tích phân kép bằng cách viết $x = rcos\theta$ và $y = rsin\theta$, sử dụng các cận thích hợp của tích phân theo r và θ, và thay thế dA bởi $rdrd\theta$. Cẩn thận kẻo quên nhân tố r trong vế phải của công thức 2. Một phương pháp cổ điển để ghi nhớ điều này thể hiện trên Hình 5, khi hình chữ nhật cực "vô cùng nhỏ" có thể được coi là một hình chữ nhật bình thường với kích thước $rd\theta$ và dr và do đó có "diện tích" là $dA = rdrd\theta$.

Ví dụ 1 Tính $\iint_R (3x + 4y^2)dA$, trong đó R là miền thuộc nửa trên của mặt phẳng được giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.

Lời giải Miền R có thể mô tả là $R = \{(x, y) \mid y \ge 0, 1 \le x^2 + y^2 \le 1\}$. [Xem Hình 1(b)] và trong tọa độ cực ta có $1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$. Do đó theo công thức 2,

$$\iint_R (3x + 4y^2)dA = \int_0^\pi \int_1^2 (3rcos\theta + 4r^2sin^2\theta)rdrd\theta$$

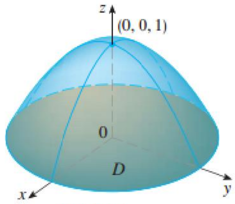
$$= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2cos\theta + 4r^3sin^2\theta)drd\theta = \int_0^\pi [r^3cos\theta + r^4sin^2\theta]_{r=1}^{r=2}d\theta$$

$$= \int_0^\pi (7cos\theta + 15sin^2\theta)d\theta = \int_0^\pi \left[7cos\theta + \frac{15}{2}(1 - cos2\theta)\right]d\theta$$

$$= 7sin\theta + \frac{15}{2}\theta - \frac{15}{4}sin2\theta\Big|_0^\pi = \frac{15}{2}\pi$$

Ví dụ 2 Tìm thể tích của vật thể được giới hạn bởi các mặt z = 0 và $z = 1 - x^2 - y^2$.

Lời giải Nếu đặt z = 0 vào phương trình của paraboloid ta nhận được $x^2 + y^2 = 1$. Điều đó có nghĩa là mặt phẳng cắt paraboloid theo một đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, vì vậy vật thể nằm dưới paraboloid và trên hình tròn D được cho bởi $x^2 + y^2 \le 1$. [Xem Hình 6 và Hình 1(a)]. Trong tọa độ cực D được cho bởi $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Vì $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$ nên thể tích là



Hình 6

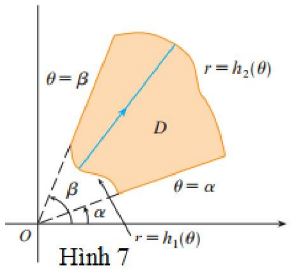
$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)r dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Nếu ta sử dụng tọa độ vuông góc thay thế cho tọa độ cực thì ta nhận được

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)dA = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)dy\, dx$$

tích phân này không dễ dàng để tính vì nó liên quan đến tính tích phân $\int (1 - x^2)^{3/2}dx$.



Hình 7

Những gì chúng ta đã làm cho đến nay có thể được mở rộng đến kiểu miền phức tạp hơn được thể hiện trong Hình 7. Nó tương tự như miền hình chữ nhật loại 2 được xem xét trong mục 3.3. Trong thực tế, bằng cách kết hợp công thức 2 trong phần này với công thức 3.3.5, chúng ta có công thức sau đây.

[3] Nếu f liên tục trên miền cực có dạng

$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$

thì $$\iint_D f(x, y)dA = \int_\theta^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

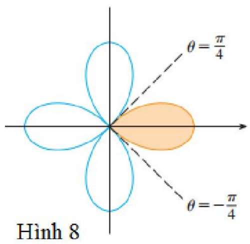
Đặc biệt, trong công thức trên đặt f(x, y) = 1, $h_1(\theta) = 0$, $h_2(\theta) = h(\theta)$, ta thấy diện tích của miền D được giới hạn bởi θ = α, θ = β và r = h(θ) là

$$A(D) = \iint_D 1dA = \int_\alpha^\beta \int_0^{h(\theta)} r dr\, d\theta = \int_\alpha^\beta \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{h(\theta)} d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [h(\theta)]^2 d\theta$$

Điều này phù hợp với công thức đã biết trong Toán 2 (Hàm một biến số).

Ví dụ 3 Sử dụng tích phân kép để tìm diện tích của miền được đóng kín bởi một lần lặp của đường hoa hồng 4 cánh r = cos2θ.

Lời giải Từ phác họa của đường cong trên Hình 8, ta thấy một lần lặp cho miền



Hình 8

$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \le \theta \le \pi/4, 0 \le r \le \cos 2\theta\}$

Vì thế diện tích là

$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\cos 2\theta} r dr\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1 + \cos 4\theta)d\theta = \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

Ví dụ 4 Tính thể tích của vật thể nằm dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$, nằm trên mặt phẳng xy và trong hình trụ $x^2 + y^2 = 2x$.

Lời giải Vật thể nằm trên miền D được giới hạn bởi hình tròn $x^2 + y^2 = 2x$, hay $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. (Xem Hình 9 và Hình 10.)

Trong tọa độ cực ta có $x^2 + y^2 = r^2$ và x = rcosθ, vì thế đường tròn trở thành r = 2cosθ. Vì thế

$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/2 \le \theta \le \pi/2, 0 \le r \le 2\cos\theta\}$

và theo công thức 3, ta có

$$\iint_D (x^2+y^2)dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2cos\theta} r^2rdr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2cos\theta} d\theta = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^4\theta d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/2} cos^4\theta d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+cos2\theta}{2}\right)^2 d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\left[1+2cos2\theta+\tfrac{1}{2}(1+cos4\theta)\right]d\theta$$

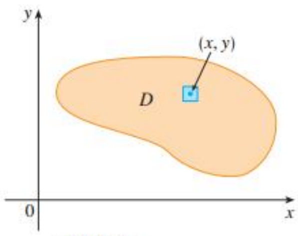
$$= 2\left[\frac{3}{2}\theta + sin2\theta + \frac{1}{8}sin4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}\pi$$

3.5. Ứng dụng của tích phân kép

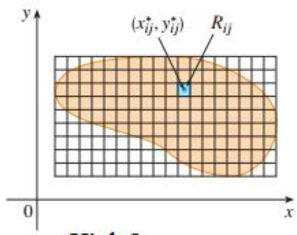
Chúng ta đã thấy một ứng dụng của tích phân kép: tính thể tích. Một ứng dụng hình học khác là tìm diện tích các mặt cong và điều này sẽ được thực hiện trong phần tiếp theo. Trong phần này chúng ta khám phá các ứng dụng vật lý như tính toán khối lượng, điện tích, trọng tâm, và mô men quán tính. Chúng ta sẽ thấy rằng những ý nghĩa vật lý này cũng rất quan trọng khi áp dụng cho các hàm mật độ xác suất của hai biến ngẫu nhiên.

3.5.1. Mật độ và khối lượng

Chúng ta có thể sử dụng tích phân đơn để tính mô men quán tính và tọa độ trọng tâm của bản phẳng (thin plate, lamina) với mật độ không đổi. Bây giờ, với trang bị là tích phân kép, chúng ta có thể xem xét các bản phẳng với mật độ thay đổi. Giả sử rằng bản phẳng choán (occupies) một miền D trong mặt phẳng xy và mật độ của nó (đơn vị khối lượng/đơn vị diện tích) tại mỗi điểm (x, y) trên D được cho bởi ρ(x, y), ở đây ρ là hàm liên tục trên D. Điều đó nghĩa là $\rho(x,y) = lim\frac{\Delta m}{\Delta A}$, ở đây Δm và ΔA là khối lượng và diện tích của một hình chữ nhật nhỏ chứa (x, y) và giới hạn được lấy trong quá trình kích thước của hình chữ nhật dần về 0. (Xem Hình 1.)



Hình 1



Hình 2

Để tìm tổng khối lượng m của bản phẳng, chúng ta chia hình chữ nhật R chứa D thanhfcacs hình chữ nhật con R_{ij} có cùng kích thước (như Hình 2) và xem rằng ρ(x, y) = 0 ngoài D. Nếu ta chọn một điểm (x^*_{ij}, y^*_{ij}) trên R_{ij} thì khối lượng của phần bản phẳng choán R_{ij} sẽ xấp xỉ ρ(x^*_{ij}, y^*_{ij})ΔA, trong đó ΔA là diện tích của R_{ij}. Nếu cộng tất cả các khối lượng như thế ta nhận được xấp xỉ của tổng khối lượng:

$$m \approx \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\rho\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A$$

Nếu chúng ta tăng số của các hình chữ nhật nhỏ, ta nhận được tổng khối lượng m của bản phẳng là giới hạn của các giá trị xấp xỉ:

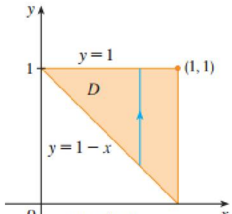
[1] $$m = \lim_{k,l\to+\infty}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\rho\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A = \iint_D \rho(x,y)dA$$

Các nhà vật lý cũng xem xét các kiểu khác của mật độ mà có thể được xử lý theo cách tương tự. Ví dụ nếu một điện tích được phân bố trên miền D và mật độ điện tích (đơn vị điện tích/một đơn vị diện tích) được cho bởi σ(x, y) tại một điểm (x, y) trên D, thì tổng điện tích Q được cho bởi

[2] $$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA$$

Ví dụ 1 Điện tích được phân bố trên hình chữ nhật D (Hình 3) sao cho mật độ điện tích tại (x, y) là σ(x, y) = xy, đơn vị đo là C/m^2 (coulombs per square meter). Tính tổng điện tích.

Lời giải Từ phương trình 2 và Hình 3 ta có



Hình 3

$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy dy\, dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} xy^2\right]_{y=1-x}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x[1 - (1 - x^2)] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4\right]_0^1 = \frac{5}{24}$$

Vậy tổng điện tích là $\frac{5}{24} C$.

3.5.2. Mô men và trọng tâm

Giả sử một bản phẳng choán miền D và có hàm mật độ ρ(x, y). Chúng ta xác định mô men của nó với các trục tọa độ và tọa độ trọng tâm của nó. Chúng ta biết rằng, mô men của một chất điểm (particle) với một trục là tích khối lượng của nó với khoảng cách từ nó tới trục. Chúng ta chia D thành các hình chữ nhật nhỏ như Hình 2. Khi đó khối lượng của R_{ij} xấp xỉ $\rho(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta A$, vì thế có thể xấp xỉ mô men của R_{ij} với trục x bởi $[\rho(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta A]y^*_{ij}$.

Nếu chúng ta cộng tất cả các đại lượng đó và lấy giới hạn khi số các hình chữ nhật tăng lên vô cùng, ta nhận được mô men của bản phẳng với trục x là

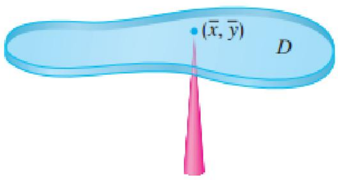
[3] $$M_x = \lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}^* \rho\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A = \iint_D y\rho(x, y) dA$$

Tương tự, mô men với trục y là

[4] $$M_y = \lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \rho\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A = \iint_D x\rho(x, y) dA$$

Như trước đây, chúng ta định nghĩa trọng tâm $(\overline{x}, \overline{y})$ sao cho $m\overline{x} = M_y$ và $m\overline{y} = M_x$. Ý nghĩa vật lý là xem như toàn bộ khối lượng tập trung tại trọng tâm của bản phẳng. Vì thế bản phẳng cân bằng ngang khi được đỡ tại trọng tâm (Xem Hình 4).

[5] Tọa độ $(\overline{x}, \overline{y})$ của trọng tâm của bản phẳng choán miền D có hàm mật độ ρ(x, y) là



Hình 4

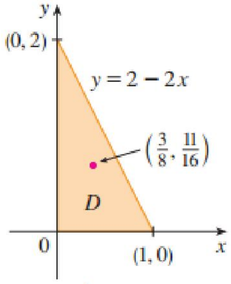
$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y) dA \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y) dA$$

trong đó khối lượng m được tính theo công thức

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA$$

Ví dụ 2 Tìm khối lượng và trọng tâm của bản phẳng tam giác với các đỉnh (0, 0), (1, 0) và (0, 2) nếu hàm mật độ là ρ(x, y) = 1 + 3x + y.

Lời giải Tam giác được chỉ ra trên Hình 5. Chú ý rằng phương trình của biên trên là y = 2 – 2x. Khối lượng của bản phẳng là



Hình 5

$$m = \iint_D \rho(x,y)dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = 4\int_0^1 (1 - x^2)dx$$
$$= 4\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

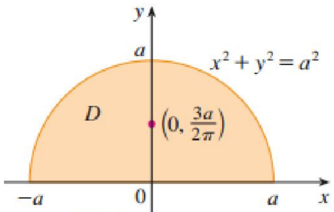
Từ công thức [5] cho ra

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dA = \frac{3}{8}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy)dy\,dx$$
$$= \frac{3}{8}\int_0^1 \left[xy + 3x^2y + \frac{1}{2}xy^2\right]_0^{y=2-2x} dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (x - x^3)dx = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{8}$$
$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dA = \frac{3}{8}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2)dy\,dx$$
$$= \frac{3}{8}\int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3\right]_0^{y=2-2x} dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3)dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[7x - \frac{9}{2}x^2 - x^3 + \frac{5}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{11}{16}$$

Trọng tậm của bản phẳng tại điểm $\left(\frac{3}{8}, \frac{11}{16}\right)$

Ví dụ 3 Mật độ tại điểm bất kỳ trên bán nguyệt là tỷ lệ với khoảng cách từ tâm của hình tròn tới điểm đó. Tìm trọng tâm của bán nguyệt.

Lời giải Đặt bán nguyệt như là nửa trên của hình tròn $x^2 + y^2 = a^2$. (Xem Hình 6.) Khoảng cách từ điểm (x, y) tới tâm hình tròn là $\sqrt{x^2 + y^2}$. Vì vậy hàm mật độ là $\rho(x,y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$



Hình 6

trong đó K là hằng số nào đó. Ta chuyển sang tọa độ cực. Khi đó $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ và miền D được cho bởi $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le \pi$.

Vì thế khối lượng của bán nguyệt là

$$m = \iint_D \rho(x,y)dA = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2}dA = \int_0^\pi \int_0^a (Kr)r\,dr\,d\theta$$
$$= K\int_0^\pi d\theta \int_0^a r^2 dr = K\pi\frac{1}{3}r^3\Big|_0^a = \frac{1}{3}K\pi a^3$$

Cả bán nguyệt và hàm mật độ đối xứng theo trục y nên trọng tâm của nó phải nằm trên trục y, vì vậy $\bar{x} = 0$. Tọa độ trục y được cho bởi

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dA = \frac{3}{K\pi a^3}\int_0^\pi \int_0^a r\sin\theta(Kr)r\,dr\,d\theta$$
$$= \frac{3}{\pi a^3}\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{3}{\pi a^3}[-\cos\theta]_0^\pi \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^a = \frac{3a}{2\pi}$$

Do đó trọng tâm của bán nguyệt tại điểm $\left(0, \frac{3a}{2\pi}\right)$.

3.5.3. Mô men quán tính

Mô men quán tính (moment of inertia), còn gọi là mô men thứ hai, của một chất điểm có khối lượng m đối với một trục được định nghĩa là mr^2, trong đó r là khoảng cách từ chất điểm tới trục. Chúng ta mở rộng vấn đề này tới bản phẳng có hàm mật độ ρ(x, y) và choán một miền D như đã làm với mô men thứ nhất. Ta chia D thành các hình chữ nhật nhỏ, xấp xỉ mọi mô men quán tính của mỗi hình chữ nhật nhỏ đối với trục x, và láy giới hạn của tổng khi số các hình chữ nhật nhỏ dần ra vô cùng. Kết quả đó là mô men quán tính của bản phẳng đối với trục x.

[6] $I_x = \lim\limits_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}^*\right)^2 \rho\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A = \iint_D y^2\rho(x,y)dA$

Tương tự, mô men quán tính của bản phẳng đối với trục y là

[7] $I_y = \lim\limits_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}^*\right)^2 \rho\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A = \iint_D x^2\rho(x,y)dA$

Mô men quán tính của bản phẳng đối với gốc tọa độ là

[8] $I_0 = \lim\limits_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(x_{ij}^*\right)^2 + \left(y_{ij}^*\right)^2\right] \rho\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dA$

Chú ý rằng $I_0 = I_x + I_y$.

Ví dụ 4 Tìm các mô men quán tính I_x, I_y và I_0 của một cái đĩa đồng chất có hàm mật độ $\rho(x, y) = \rho$, tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng a.

Lời giải Biên của D là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$ và trong tọa độ cực D được mô tả bởi $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le a$. Ta tính I_0 trước:

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\rho dA = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 r dr\, d\theta = \rho\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 r dr = \frac{1}{2}\pi\rho a^4$$

Thay cho việc tính I_x và I_y, chúng ta sử dụng sự kiện $I_x + I_y = I_0$ và $I_x = I_y$ (Do tính đối xứng của bài toán). Vì vậy $I_x = I_y = \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{4}\pi\rho a^4$

Trong Ví dụ 4, chú ý rằng khối lượng của đĩa là m = (khối lượng)×(diện tích) = $\rho\pi a^2$ nên mô men quán tính của đĩa đối với gốc tọa độ có thể viết lại

$I_0 = \frac{1}{2}\pi\rho a^4 = \frac{1}{2}(\pi\rho a^2)a^2 = \frac{1}{2}ma^2$

Vì vậy, nếu chúng ta tăng khối lượng hoặc bán kính của đĩa, chúng ta đã làm tăng moment quán tính. Nói chung, mô men quán tính đóng vai trò trong chuyển động quay mà khối lượng đóng vai trong chuyển động thẳng. Mô men quán tính của bánh xe làm cho nó khó khăn để bắt đầu hoặc dừng vòng quay của bánh xe, cũng như khối lượng của một chiếc xe hơi làm cho nó khó khăn để bắt đầu hoặc dừng chuyển động của xe.

Bán kính quay (radius of gyration) hay bán kính hồi chuyển của bản phẳng đối với một trục là số R sao cho

[9] $mR^2 = I$

trong đó m là khối lượng của bản phẳng và I là mô men quán tính đối với trục. Phương trình 9 nói rằng nếu khối lượng của bản phẳng tập trung tại điểm cách trục một khoảng R, thì mô men quán tính của điểm này bằng với mô men quán tính của bản phẳng.

Đặc biệt, các bán kính quay $\overline{\overline{y}}$ và $\overline{\overline{x}}$ tương ứng với các trục x và y được cho bởi

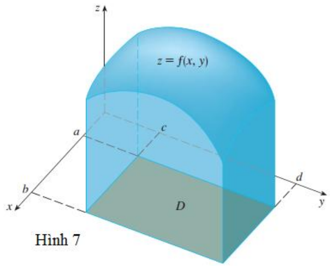
[10] $m\overline{\overline{y}}^2 = I_x \qquad m\overline{\overline{x}}^2 = I_y$

Vì thế $\left(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}\right)$ là điểm mà tại đó khối lượng của bản phẳng có thể tập trung mà không thay đổi mô men quán tính đối với các trục tọa độ.

Ví dụ 5 Tìm bán kính quay đối với trục x của đĩa trong Ví dụ 4.

Lời giải Như đã đề cập, khối lượng của đĩa là $m = \rho\pi a^2$, do đó, từ phương trình 10, chúng tôi có $\overline{\overline{y}}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho a^4}{\pi\rho a^2} = \frac{1}{4}a^2$. Vì vậy bán kính quay đối với trục x là $\overline{\overline{y}} = \frac{a}{2}$, đó là nửa bán kính của đĩa.

3.5.4. Xác suất



Hình 7

Chúng ta xem xét hàm mật độ xác xuất f của biến ngẫu nhiên liên tục X. Nghĩa là f(x) ≥ 0 với mọi x, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, và xác suất mà X nằm giữa a và b được tính theo công thức

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

Bây giờ ta xét một cặp biến ngẫu nhiên X và Y, như là đời sống của hai thành phần của một cái máy hoặc chiều cao và cân nặng của người phụ nữ tại thời điểm ngẫu nhiên. Hàm mật độ chung của X và Y là một hàm f của hai biến giống như xác xuất mà (X, Y) thuộc miền D là $P\big((X, Y) \in D\big) = \iint_D f(x, y)dA$.

Đặc biệt, nếu miền D là hình chữ nhật, xác suất mà X thuộc a và b và Y thuộc c và d là

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dy\,dx \quad \text{(Xem Hình 7.)}$$

Bởi vì xác suất không am và được đo trên thang từ 0 đến 1, hàm mật độ có tính chất sau:

$$f(x, y) \ge 0 \qquad \iint_{R^2} f(x, y)dA = 1$$

Tích phân kép trên R^2 là tích phân suy rộng được định nghĩa là giới hạn của tích phân kép trên các hình tròn hoặc hình vuông mở rộng, ta có thể viết

$$\iint_{R^2} f(x, y)dA = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy\,dx = 1$$

Ví dụ 6 Nếu hàm mật độ chung của X và Y được cho bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & 0 \le x \le 10, 0 \le y \le 10 \\ 0 & khác \end{cases}$$

Tìm giá trị của hằng số C. Tính P(X ≤ 7, Y ≥ 2).

Lời giải Ta tìm giá trị của C theo tính chất tích phân kép của f bằng 1. Bởi vì f(x, y) = 0 bên ngoài hình chữ nhật [0, 10]×[0, 10], ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy\,dx = \int_0^{10} \int_0^{10} C(x + 2y)dy\,dx$$
$$= C\int_0^{10} [xy + y^2]_{y=0}^{y=10} dx = C\int_0^{10} (10x + 100)dx = 1500C$$

Vì 1500C = 1 nên C = 1/1500.

Bây giờ chúng ta có thể tính xác suất mà X lớn nhất bằng 7, Y nhỏ nhất bằng 2:

$$P(X \le 7, Y \ge 2) = \int_{-\infty}^{7} \int_2^{+\infty} f(x, y)dy\,dx = \int_0^7 \int_2^{10} \tfrac{1}{1500}(x+2y)dy\,dx$$
$$= \frac{1}{1500}\int_0^7 [xy + y^2]_{y=2}^{y=10} dx = \frac{1}{1500}\int_0^7 (8x + 96)dx = \frac{868}{1500} \approx 0.5787$$

Giả sử rằng X và Y là các biến ngẫu nhiên tương ứng với các hàm mật độ xác suất $f_1(x)$ và $f_2(y)$. Khi đó X và Y được gọi là các biến ngẫu nhiên độc lập nếu hàm mật độ chung của chúng bằng tích các hàm mật độ riêng của chúng: $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$.

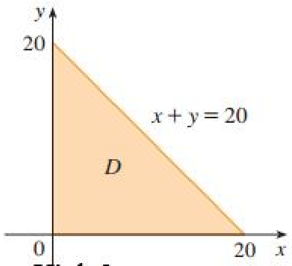
Để mô hình hóa thời gian chờ đợi, ta sử dụng hàm mật độ dạng mũ:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & t \ge 0 \end{cases}$$

trong đó μ là trung bình thời gian chờ đợi. Trong ví dụ tiếp theo chúng ta xem xét tình huống hai thời gian chờ đợi độc lập.

Ví dụ 7 Người quản lý của một rạp chiếu phim xác định rằng trung bình thời gian chờ đợi mà khán giả xếp hàng để mua vé cho bộ phim của tuần này là 10 phút và thời gian trung bình mà họ chờ đợi để mua bỏng ngô là 5 phút. Giả sử rằng các thời gian chờ đợi là độc lập, tìm xác suất mà một khán giả chờ đợi tổng cộng ít hơn 20 phút trước khi nhận được chỗ ngồi của mình.

Lời giải Giả sử rằng cả thời gian chờ đợi X để mua vé và thời gian chờ đợi Y trong hàng giải khát được mô hình hóa bởi các hàm mật độ xác suất theo hàm số mũ, chúng ta có thể viết các hàm mật độ riêng như sau:



Hình 8

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{10}e^{-x/10} & x \geq 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{5}e^{-y/5} & y \geq 0 \end{cases}$$

Vì X và Y là độc lập hàm mật độ chung là tích:

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & khác \end{cases}$$

Chúng ta đang đòi hỏi xác suất mà X + Y < 20: P(X + Y < 20) = P((X, Y) ∈ D) trong đó D là tam giác được chỉ ra trong Hình 8. Vì vậy

$$P(X+Y<20) = \iint_D f(x,y)dA = \int_0^{20}\int_0^{20-x}\frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5}dy\,dx$$

$$= \frac{1}{50}\int_0^{20}\left[e^{-x/10}(-5)e^{-y/5}\right]_{y=0}^{y=20-x}dx = \frac{1}{10}\int_0^{20}e^{-x/10}\left(1-e^{(x-20)/5}\right)dx$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^{20}\left(e^{-x/10} - e^{-4}e^{x/10}\right)dx = 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0.7476$$

Nghĩa là khoảng 75% khán giả đợi ít hơn 20 phút trước khi nhận được chỗ ngồi.

3.5.5. Kỳ vọng

Nếu X là biến ngẫu nhiên với hàm mật độ xác suất f thì kỳ vọng là $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

Bây giờ nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên với hàm mật độ chung f, chúng ta định nghĩa X–kỳ vọng và Y–kỳ vọng, còn được gọi là kỳ vọng (expected value) của X và Y, là

[11] $\mu_1 = \iint_{R^2} xf(x,y)dA$ $\qquad \mu_2 = \iint_{R^2} yf(x,y)dA$

Chú ý rằng các biểu thức μ_1 và μ_2 trong [11] giống như các momen M_x và M_y của một bản phẳng với mật độ hàm ρ trong phương trình 3 và phương trình 4. Trong thực tế, chúng ta có thể xem rằng xác suất giống như khối lượng phân phối liên tục. Chúng ta tính xác suất tựa như chúng ta tính khối lượng, bằng cách tích phân hàm mật độ. Và bởi vì tổng "lượng xác suất " bằng 1, các biểu thức đối với $\overline{x}$ và $\overline{y}$ trong [5] cho thấy rằng chúng ta có thể xem kỳ vọng của X và Y, μ_1 và μ_2 như tọa độ của "trọng tâm" của phân phối xác suất.

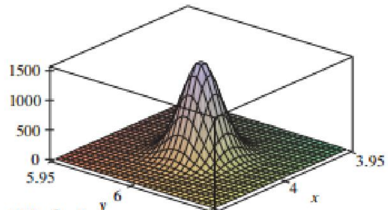
Trong ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ xử lý với phân phối chuẩn (normally distributed). Như đã biết, một biến ngẫu nhiên là phân phối chuẩn nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

trong đó μ là kỳ vọng và σ là độ lệch chuẩn.

Ví dụ 8 Một nhà máy sản xuất (hình trụ) vòng bi đũa được bán ra có đường kính 4.0 cm và chiều dài 6.0 cm. Trong thực tế, đường kính X là phân bố chuẩn với kỳ vọng 4.0 cm và độ lệch chuẩn 0.01 cm trong khi chiều dài Y là phân bố chuẩn với kỳ vọng 6.0 cm và độ lệch chuẩn 0.01 cm. Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập, viết hàm mật độ chung và vẽ đồ thị của nó. Tìm xác suất mà một vòng bi được chọn ngẫu nhiên từ các dây chuyền sản xuất có hoặc chiều dài hoặc đường kính khác với kỳ vọng hơn 0.02 cm.

Lời giải Chúng ta có X và Y là phân phối chuẩn với $\mu_1 = 4.0$, $\mu_2 = 6.0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.01$.



Hình 9

Vì vậy các hàm mật độ riêng của X và Y là

$$f_1(x) = \frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{0.0002}} \qquad f_2(y) = \frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-6)^2}{0.0002}}$$

Bởi vì X và Y là độc lập, hàm mật độ chung là tích:

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) = \frac{1}{0.0002\pi} e^{-\frac{(x-4)^2}{0.0002}} e^{-\frac{(y-6)^2}{0.0002}}$$

$$= \frac{5000}{\pi} e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]}$$

Đồ thị của hàm này được chỉ ra trên Hình 9.

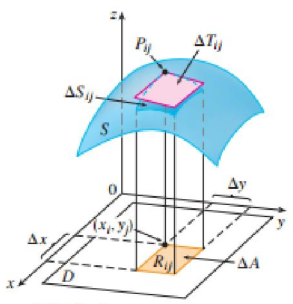
Trước tiên ta tính xác suất mà cả X và Y sai khác với kỳ vọng của chúng nhỏ hơn 0,02 cm. Sử dụng máy tính để ước lượng tích phân ta có

$$P(3.98 < X < 4.02, 5.98 < Y < 6.02) = \int_{3.98}^{4.02} \int_{5.98}^{6.02} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \frac{5000}{\pi} \int_{3.98}^{4.02} \int_{5.98}^{6.02} e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]} dy\,dx \approx 0.91$$

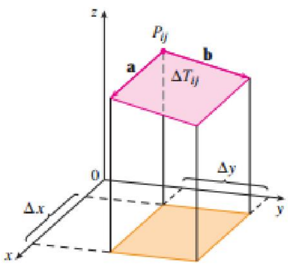
Vì vậy xác suất mà cả X hoặc Y sai khác với kỳ vọng hơn 0.02 cm xấp xỉ 1 – 0.91 = 0.09.

3.6. Tích phân mặt



Hình 1

Trong phần này chúng ta áp dụng tích phân kép để tính diện tích của mặt cong, đồ thị của một hàm hai. Giả sử S là mặt cong với phương trình z = f(x, y), với f có các đạo hàm riêng liên tục. Để đơn giản trong việc suy luận, chúng ta giả thiết rằng $f(x, y) \geq 0$ và miền xác định D của f là hình chữ nhật. Ta chia D thành các hình chữ nhật nhỏ với diện tích $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Nếu (x_i, y_j) là góc của R_{ij} gần gốc tọa độ, thì $P_{ij}(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ là điểm thuộc S (xem Hình 1). Mặt phẳng tiếp diện của S tại P_{ij} là xấp xỉ của S gần P_{ij}. Vì thế diện tích ΔT_{ij} của phần tiếp diện nằm trực tiếp phía trên R_{ij} là xấp xỉ của diện tích ΔS_{ij} của phần thuộc S nằm trực tiếp phía trên R_{ij}. Vì thế tổng kép $\Sigma\Sigma\Delta T_{ij}$ là xấp xỉ của tổng diện tích của S, và xấp xỉ này tốt hơn khi số hình chữ nhật tăng lên. Do đó chúng ta định nghĩa diện tích của S là



Hình 2

$$[1] \qquad A(S) = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij}$$

Để tìm công thức thuận tiện hơn phương trình 1 trong tính toán, chúng ta giả sử ***a*** và ***b*** là các véc tơ bắt đầu tại P_{ij} và nằm dọc theo các cạnh của hình bình hành với diện tích ΔT_{ij}, khi đó $\Delta T_{ij} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ (xem Hình 2). Nhớ lại từ mục 2.3 rằng $f_x(x_i, y_j)$ và $f_y(x_i, y_j)$ là độ dốc của các đường tiếp tuyến đi qua P_{ij} theo hướng của ***a*** và ***b***. Do đó

$$\boldsymbol{a} = \Delta x\boldsymbol{i} + f_x(x_i, y_j)\Delta x\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{b} = \Delta y\boldsymbol{i} + f_y(x_i, y_j)\Delta y\boldsymbol{k}$$

và

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_j)\Delta x \\ 0 & \Delta & f_y(x_i, y_j)\Delta y \end{vmatrix}$$

$= -f_x(x_i, y_j)\Delta x\Delta y\,\boldsymbol{i} - f_y(x_i, y_j)\Delta x\Delta y\,\boldsymbol{j} + \Delta x\Delta y\,\boldsymbol{k} = [-f_x(x_i, y_j)\,\boldsymbol{i} - f_y(x_i, y_j)\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}]\,\Delta A$

Vì vậy $\Delta T_{ij} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1}\,\Delta A$

Từ định nghĩa 1 ta có

$$A(S) = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij} = \lim_{m,n\to\infty} \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1}\,\Delta A$$

và theo định nghĩa của tích phân kép ta nhận được công thức

[2] Diện tích của mặt cong có phương trình z = f(x, y), (x, y) ∈ D, có f_x và f_y liên tục, là

$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2 + 1}\,\Delta A$$

Trong mục 4.6, nhất định chúng ta sẽ kiểm tra lại rằng công thức này phù hợp với công thức trước đây đối với diện tích mặt tròn xoay. Nếu sử dụng ký hiệu thay thế cho đạo hàm riêng, ta có thể viết công thức [2] dưới dạng:

[3] $$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA$$

Ví dụ 1 Tính diện tích của phần mặt cong $z = x^2 + 2y$ nằm trên tam giác T trong mặt phẳng xy với các đỉnh (0, 0), (1, 0) và (1, 1).

Lời giải Miền T được chỉ ra trong Hình 3 và được mô tả bởi

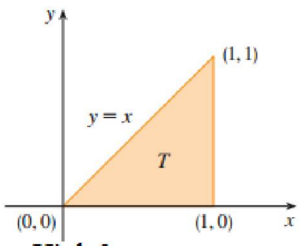
$$T = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$$

Sử dụng công thức 2 với $f(x, y) = x^2 + 2y$, ta nhận được

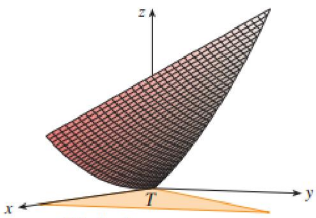
$$A = \iint_T \sqrt{(2x)^2 + 2^2 + 1}\,dA = \int_0^1\int_0^x \sqrt{4x^2+5}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{4x^2+5}\,dx = \frac{1}{12}(4x^2+5)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\left(27 - 5\sqrt{5}\right)$$

Hình 4 chỉ ra phần của mặt cong có diện tích đã được tính trong Ví dụ 1.



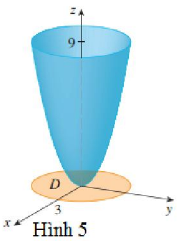
Hình 3



Hình 4

Ví dụ 2 Tính diện tích của phần paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm dưới mặt phẳng z = 9.

Lời giải Mặt phẳng giao với paraboloid theo đường tròn $x^2 + y^2 = 9$, z = 9.



Hình 5

Do đó mặt phẳng đã cho nằm trên đĩa D với tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 3. (Xem Hình 5.) Sử dụng công thức 3 ta có

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\,dA$$

Chuyển sang tọa độ cực ta nhận được

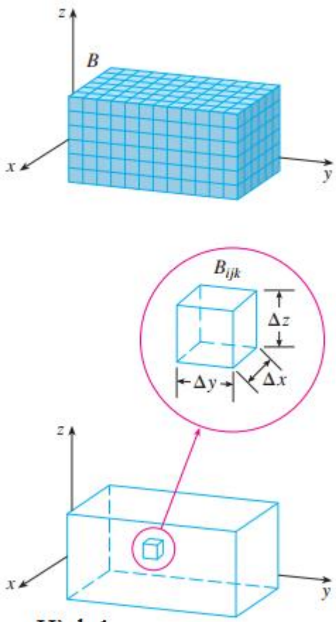
$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{1}{8}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\,d(4r^2)$$

$$= 2\pi \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$

3.7. Tích phân bội ba

3.7.1. Khái niệm tích phân bội ba

Cũng như định nghĩa tích phân đơn cho hàm một biến và tích phân kép cho hàm hai biến, chúng ta có thể định nghĩa tích phân bội ba (triple integrals) cho hàm ba biến. Trước hết ta xét trường hợp đơn giản nhất khi f xác định trên khối hộp chữ nhật:



Hình 1

[1] B = {(x, y, z) | a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d, r ≤ z ≤ s}

Đầu tiên ta chia B thành các hộp nhỏ, bằng cách chia đoạn [a, b] thành *l* đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ bằng nhau với độ dài Δx, chia đoạn [c, d] thành *m* đoạn con $[y_{j-1}, y_j]$ bằng nhau với độ dài Δy và chia đoạn [r, s] thành *n* đoạn con $[z_{k-1}, z_k]$ bằng nhau với độ dài Δz. Các mặt phẳng đi qua các mút của các đoạn con này song song với các mặt phẳng tọa độ sẽ chia khối hộp chữ nhật B thành *l.m.n* hộp nhỏ $B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]\times[z_{k-1}, z_k]$, được chỉ ra trên Hình 1. Mỗi hộp nhỏ có thể tích ΔV = ΔxΔyΔz. Tổng Riemann có dạng

[2] $$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*\right)\Delta V$$

trong đó điểm mẫu $\left(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*\right)$ thuộc B_{ijk}. Theo cách tương tự với định nghĩa tích phân kép 3.1.5, chúng ta định nghĩa tích phân bội ba là giới hạn của tổng Riemann trong [2].

[3] **Định nghĩa** Tích phân bội ba của f trên hộp B là

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*\right)\Delta V$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Tích phân bộ ba tồn tại nếu f liên tục. Chúng ta có thể chọn điểm mẫu bất kỳ trên hộp nhỏ, nhưng nếu chúng ta chọn nó là điểm (x_i, y_j, z_k) ta nhận được biểu thức đơn giản hơn:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_i, y_j, z_k\right)\Delta V$$

Cũng như tích phân kép, phương pháp thực tế để tính tích phân bội ba là đưa nó về tích phân lặp sau:

[4] **Định lý Fubini cho tích phân bội ba** Nếu f liên tục trên khối hộp chữ nhật B = [a, b]×[c, d]×[r, s] thì $\iiint_V f(x,y,z)dV = \int_r^s\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dx\,dy\,dz$

Tích phân lặp ở vế phải có nghĩa rằng đầu tiên chúng ta tích phân theo biến x (giữ y và z cố định), sau đó tích phân theo biến y (coi z cố định) và cuối cùng tích phân theo z. Có 5 khả năng nữa về thứ tự lấy tích phân và chúng đều cho cùng một giá trị. Ví dụ, nếu chúng ta tích phân theo trình tự z, rồi y, rồi x thì ta có $\iiint_V f(x,y,z)dV = \int_a^b\int_c^d\int_r^s f(x,y,z)dz\,dy\,dx$.

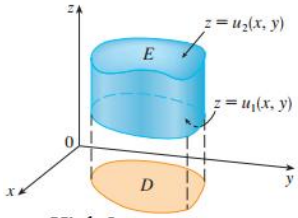
Ví dụ 1 Tính tích phân bội ba $\iiint_V xyz^2dV$, trong đó B là khối hộp chữ nhật được cho bởi B = {(x, y, z) | 0 ≤ x ≤ 1, –1 ≤ y ≤ 2, 0 ≤ z ≤ 3}

Lời giải Chúng ta có thể sử dụng bất kỳ một trong 6 khả năng về thứ tự lấy tích phân. Nếu ta chọn trình tự x, y rồi z thì ta nhận được

$$\iiint_V xyz^2 dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dx\, dy\, dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{1}{2}x^2yz^2\right]_{x=0}^{x=1} dy\, dz$$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{1}{2} yz^2 dy\, dz = \int_0^3 \left[\frac{1}{4}y^2z^2\right]_{y=-1}^{y=2} dz = \int_0^3 \frac{3}{4}z^2 dz = \frac{1}{4}z^3\Big|_0^3 = \frac{27}{4}$$

Bây giờ chúng ta định nghĩa tích phân bội ba trên miền bất kỳ E trong không gian ba chiều theo cách giống như đã sử dụng đối với tích phân kép. Chúng ta bao E bởi một hộp B có kiểu cho trong phương trình 1. Sau đó chúng ta định nghĩa hàm F trùng với f trên E nhưng bằng 0 với mọi điểm thuộc B nhưng không thuộc E. Định nghĩa:



Hình 2

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iiint_B F(x,y,z)dV$$

Tích phân này tồn tại nếu f liên tục và biên của E là "đủ trơn". Tích phân bội ba về cơ bản có các tính chất giống như tích phân kép. Ở đây chúng ta hạn chế chỉ quan tâm tới các hàm liên tục f và các kiểu đơn giản của miền lấy tích phân.

(a) Miền lấy tích phân thuộc loại 1

Một miền E được gọi là loại 1 nếu nó nằm giữa hai đồ thị của hai hàm liên tục theo x và y, tức là

[5] $E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$

trong đó D là hình chiếu của E lên mặt phẳng xy như Hình 2. Chú ý rằng biên trên của E là mặt cong có phương trình $z = u_2(x, y)$, còn biên dưới có phương trình $z = u_1(x, y)$.

Bằng cùng một lập luận dẫn đến (3.3.3), có thể chỉ ra rằng nếu miền E thuộc loại 1 được cho bởi phương trình 5 thì

[6] $$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA$$

Nghĩa của tích phân bên trong là x và y được giữ cố định, vì vậy $u_1(x, y)$ và $u_2(x, y)$ được xem như không đổi khi tích phân theo biến z.

Đặc biệt, nếu hình chiếu D của E lên mặt phẳng xy thuộc miền phẳng loại 1 (Hình 3) thì

$E = \{(x, y, z) \mid a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x), u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$

và phương trình 6 trở thành

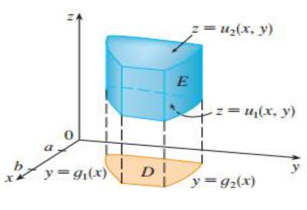
[7] $$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\, dy\, dx$$

Mặt khác, nếu D thuộc miền phẳng loại 2 (như Hình 4), thì

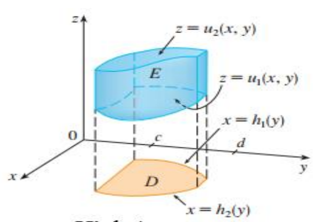
$E = \{(x, y, z) \mid c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y), u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$

và phương trình 6 trở thành

[8] $$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\, dx\, dy$$



Hình 3



Hình 4

Ví dụ 2 Tính $\iiint_E zdV$, trong đó E là tứ diện được giới hạn bởi bốn mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ và $x + y + z = 1$.

Lời giải Chúng ta nên vẽ ra hai hình: một là miền E (xem Hình 5), một là miền D, là hình chiếu của E lên mặt phẳng xy (xem Hình 6). Biên dưới của tứ diện là mặt phẳng $z = 0$ và biên trên là mặt phẳng $x + y + z = 1$ hay $z = 1 - x - y$, vì thế $u_1(x, y) = 0$ và $u_2(x, y) = 1 - x - y$. Chú ý rằng các mặt phẳng $x + y + z = 1$ và $z = 0$ giao nhau theo đường thẳng $x + y =1$ hay $y = 1 - x$ trên mặt phẳng xy. Vì chiếu của E là miền tam giác chỉ ra trên Hình 6, ta có

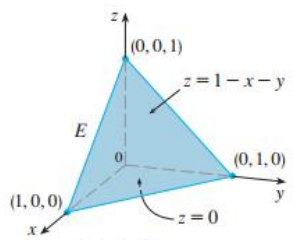
[9] $E = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\}$

Mô tả này của E như là kiểu 1 cho phép ta tính tích phân như sau:

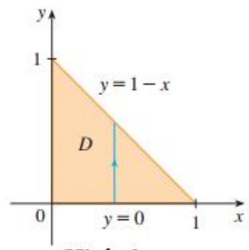
$$\iiint_E zdV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} zdz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{1-x-y} dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2 dy\,dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{1}{3}(1 - x - y)^3\right]_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 (1 - x)^3 dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{4}(1 - x)^4\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

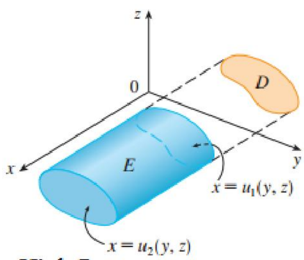


Hình 5



Hình 6

(b) ***Miền lấy tích phân thuộc loại 2***



Hình 7

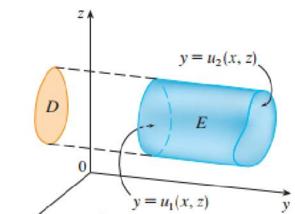
Miền E được gọi là loại 2 nếu nó có dạng

$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D, u_1(y, z) \le x \le u_2(y, z)\}$

trong đó D là chiếu của E lên mặt phẳng yz (xem Hình 7). Mặt sau là $x = u_1(y, z)$, mặt trước là $z = u_2(y, z)$, ta có

[10] $$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right] dA$$

(c) ***Miền lấy tích phân thuộc loại 3***



Hình 8

Miền E được gọi là loại 3 nếu nó có dạng

$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, u_1(x, z) \le y \le u_2(x, z)\}$

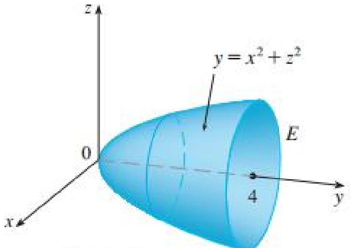
trong đó D là chiếu của E lên mặt phẳng xz (xem Hình 8). Mặt trái là $y = u_1(x, z)$, mặt phải là $z = u_2(x, z)$, ta có

[11] $$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right] dA$$

Trong mỗi phương trình 10 và 11 lại có hai khả năng thể hiện tích phân, phụ thuộc vào miền D là miền phẳng loại 1 hay loại 2.

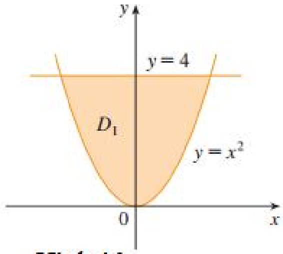
Ví dụ 3 Tính $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}dV$, trong đó E là miền được giới hạn bởi paraboloid $y = x^2 + z^2$ và mặt phẳng $y = 4$.

Lời giải Miền E được chỉ ra trên Hình 9. Nếu chúng ta xem nó là loại 1 thì chúng ta cần phải xem xét chiếu của nó lên mặt phẳng xy, D_1, là một parabol trên Hình 10.



Hình 9

Miền lấy tích phân



Hình 10

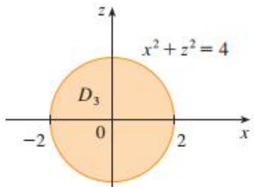
Chiếu lên mặt phẳng xy

Từ y = x^2 + y^2 ta nhận được $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, nên biên trên của E là $z = \sqrt{y - x^2}$ và biên dưới là $z = -\sqrt{y - x^2}$. Do đó mô tả của E thuộc kiểu 1 là

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4, -\sqrt{y - x^2} \le z \le \sqrt{y - x^2}\}$$

và ta nhận được

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}dV = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2}dz\,dy\,dx$$



Hình 11

Mặc dù thể hiện này là đúng, nhưng cực kỳ khó để tính nó. Vì thế chúng ta hãy thay thế bằng cách xem E là loại 3. Như vậy, chiếu của nó lên mặt phẳng xz, D_3, là đĩa $x^2 + z^2 \le 4$ (Hình 11). Như vậy biên trái của E là paraboloid $y = x^2 + z^2$ và biên phải là mặt phẳng y = 4, vì thế thay $u_1(x, z) = x^2 + z^2$ và $u_2(x, z) = 4$ vào phương trình 11, ta có

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}dV = \iint_{D_3}\left[\int_{x^2+z^2}^{4}\sqrt{x^2 + z^2}dy\right]dA$$

$$= \iint_{D_3}(4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}dA$$

Mặc dù tích phân này có thể viết là $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}dz\,dx$, chúng ta chuyển sang tọa độ cực trong mặt phẳng xz: x = rcosθ, z = rsinθ. Ta nhận được

$$\iint_{D_3}(4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2(4 - r^2)rr dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4r^2 - r^4)dr$$

$$= 2\pi\left[\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{5}r^5\right]_0^2 = \frac{128}{15}\pi$$

Ví dụ 4 Đưa tích phân lặp $\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^y f(x, y, z)dz\,dy\,dx$ về dạng tích phân bội ba và viết lại nó dưới dạng tích phân lặp theo thứ tự theo x, theo z và theo y.

Lời giải Ta có thể viết

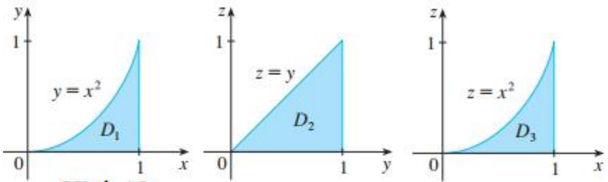
$$\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^y f(x, y, z)dz\,dy\,dx = \iiint_E f(x, y, z)dV$$

trong đó E = {(x, y, z) | 0 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ y ≤ x^2, 0 ≤ z ≤ y}. Mô tả nay cho phép chúng ta viết hình chiếu lên ba mặt phẳng tọa độ như sau:

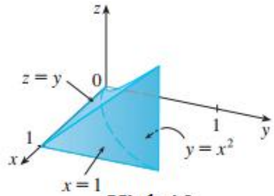
Trên mặt phẳng xy: D_1 = {(x, y) | 0 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ y ≤ x^2} = {(x, y) | 0 ≤ y ≤ 1, $\sqrt{y}$ ≤ x ≤ 1}

Trên mặt phẳng yz: D_2 = {(y, z) | 0 ≤ y ≤ 1, 0 ≤ z ≤ y}

Trên mặt phẳng xz: D_3 = {(x, z) | 0 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ z ≤ x^2}



Hình 12



Hình 13

Từ các phác họa các hình chiếu trên Hình 12, chúng ta phác họa vật thể E trên Hình 13. Chúng ta thấy rằng đó là vật thể được giới hạn bởi các mặt phẳng z = 0, x = 1, y = z và mặt trụ $y = x^2$ (hay $x = \sqrt{y}$).

Nếu tích phân theo trình tự x, z và y, chúng ta sử dụng biểu diễn sau:

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \le y \le 1, 0 \le z \le y, \sqrt{y} \le x \le 1\}$$

Vì thế $\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y,z)dx\,dz\,dy$

3.7.2. Ứng dụng của tích phân bội ba

Nhắc lại rằng nếu f(x, y) ≥ 0 thì tích phân đơn $\int_a^b f(x)dx$ thể hiện diện tích của miền nằm dưới đường cong y = f(x) từ a tới b, nếu f(x, y) ≥ 0 thì tích phân kép $\iint_D f(x,y)dA$ thể hiện thể tích của vật thể nằm dưới mặt cong z = f(x, y) và trên miền D. Sự giải thích tương ứng của tích phân bội ba $\iiint_E f(x,y,z)dV$ với f(x, y, z) ≥ 0 là không hữu dụng bởi vì nó cần "siêu thể tích" (hypervolume) của đối tượng bốn chiều, tất nhiên điều này rất khó hình dung. (Nhớ rằng E là miền xác định của hàm f, đồ thị của f nằm trong không gian 4 chiều.) Dù sao, tích phân bội ba có thể được giải thích theo cách khác trong tình huống vật lý khác, phụ thuộc vào sựu giải thích vật lý của x, y, z và f(x, y, z).

Chúng ta bắt đầu với trường hợp đặc biệt khi f(x, y, z) = 1 với mọi điểm trong E. Khi đó tích phân bội ba biểu thị thể tích của E:

[12] $$V(E) = \iiint_E dV$$

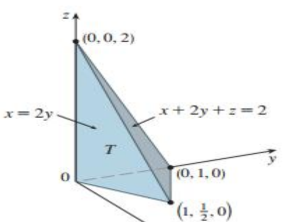
Ví dụ, ta có thể thấy điều đó trong trường hợp E thuộc loại 1 bằng cách đặt f(x, y, z) = 1 vào công thức 6:

$$\iiint_E 1dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} dz\right] dA = \iint_D [u_2(x,y) - u_1(x,y)]dA$$

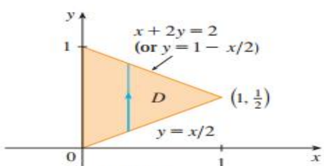
và từ mục 3.3 ta biết đấy là thể tích của vật thể nằm giữa các mặt $z = u_1(x, y)$ và $z = u_2(x, y)$.

Ví dụ 5 Sử dụng tích phân bội ba tính thể tích của tứ diện T được giới hạn bởi các mặt phẳng x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0 và z = 0.

Lời giải Tứ diện T và hình chiếu D của nó lên mặt phẳng xy được chỉ ra trong Hình 14 và Hình 15. Biên dưới của T là mặt phẳng z = 0 và biên trên là mặt phẳng x + 2y + z = 2, tức là z = 2 – x – 2y.



Hình 14



Hình 15

Do đó ta có

$$V(T) = \iiint_T \; dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2-x-2y) dy\, dx = \frac{1}{3}$$

theo cùng cách tính trong Ví dụ 4 của mục 3.3.

(Nhận thấy rằng nó không phải là cần thiết để sử dụng tích phân bội ba để tính thể tích mà chỉ đơn giản là đưa ra một phương pháp thay thế cho việc thiết lập các tính toán.)

Tất cả cá ứng dụng của tích phân kép trong mục 3.3 có thể mở rộng trực tiếp tới tích phân bội ba. Ví dụ, nếu hàm mật độ của vật thể choán miền E là ρ(x, y, z), đơn vị khối lượng/đơn vị thể tích, tại mọi điểm dã cho (x, y, z) thì khối lượng của nó là

[13] $$m = \iiint_E \; \rho(x, y, z) dV$$

và các mô men của nó đối với ba mặt phẳng tọa độ là

[14] $$M_{yz} = \iiint_E \; x\rho(x, y, z) dV \quad M_{xz} = \iiint_E \; y\rho(x, y, z) dV \quad M_{xy} = \iiint_E \; z\rho(x, y, z) dV$$

Trọng tâm là điểm $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, trong đó

[15] $$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Các mô men quán tính đối với ba trục tọa độ là

[16] $$I_x = \iiint_E \; (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV \qquad I_y = \iiint_E \; (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$$

$$I_z = \iiint_E \; (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV$$

Như trong mục 3.5, tổng điện tích trong vật thể choán một miền E và có mật độ điện tích là σ(x, y, z) là

$$Q = \iiint_E \; \sigma(x, y, z) dV$$

Nếu ta có ba biến ngẫu nhiên X, Y và Z, hàm mật độ chung của chúng là hàm ba biến, thì xác suất mà (X, Y, Z) thuộc E là

$$P\big((X, Y, Z) \; \in E\big) = \iiint_E \; f(x, y, z) dV$$

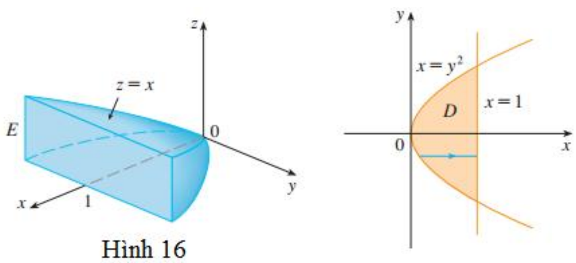
Đặc biệt,

$$P(a \le x \le b, c \le y \le d, r \le z \le s) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) dz\, dy\, dx$$

Hàm mật độ chung thỏa mãn

$$f(x, y, z) \ge 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dz\, dy\, dx = 1$$

Ví dụ 6 Tìm trọng tâm của vật thể đồng chất được giới hạn bởi trụ x = y^2 và các mặt phẳng x = z, z = 0 và x = 1.



Hình 16

Lời giải Vật thể E và hình chiếu của nó lên mặt phẳng xy được chỉ ra trên Hình 16. Các mặt dưới và trên cuae E là các mặt phẳng z = 0 và z = x, vì thế chúng ta mô tả E như loại 1:

E = {(x, y, z) | –1 ≤ y ≤ 1, y^2 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ z ≤ x}

Nếu mật độ là ρ(x, y, z) = ρ, khối lượng là

$$m = \iiint_E \rho dV = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_0^x \rho dz\, dx\, dy = \rho\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x dx\, dy = \rho\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2\Big|_{x=y^2}^{x=1} dy$$

$$= \frac{\rho}{2}\int_{-1}^{1}(1-y^4)dy = \rho\int_0^1(1-y^4)dy = \rho\left[y-\frac{1}{5}y^5\right]_0^1 = \frac{4}{5}\rho$$

Vì sự đối xứng của E và ρ qua mặt phẳng xz, chúng ta có thể trực tiếp nói rằng $M_{xz} = 0$ và do đó $\overline{y} = 0$. Các mô men khác là

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho dV = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_0^x x\rho dz\, dx\, dy = \rho\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2 dx\, dy = \rho\int_{-1}^{1}\frac{1}{3}x^3\Big|_{x=y^2}^{x=1} dy$$

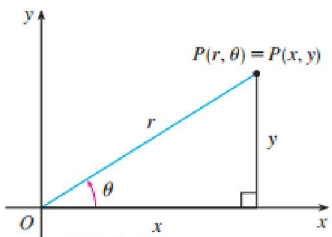
$$= \frac{2}{3}\rho\int_0^1(1-y^6)dy = \frac{2}{3}\rho\left[y-\frac{1}{7}y^7\right]_0^1 = \frac{4}{7}\rho$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho dV = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_0^x z\rho dz\, dx\, dy = \frac{\rho}{2}\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2 dx\, dy$$

$$= \frac{1}{3}\rho\int_0^1(1-y^6)dy = \frac{2}{7}\rho$$

Do đó trọng tâm là $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m},\frac{M_{xz}}{m},\frac{M_{xy}}{m}\right) = \left(\frac{5}{7},0,\frac{5}{14}\right)$

3.8. Tích phân bội ba trong tọa độ trụ



Hình 1

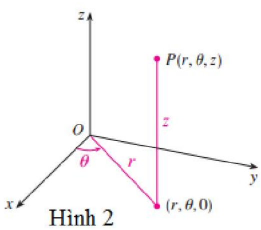
Trong hình học phẳng, hệ tọa độ cực được sử dụng để mô tả thuận tiện một số đường và miền nhất định. Hình 1 cho phép chúng ta nhớ lại mối liên hệ giữa tọa độ cực và tọa độ Đề các. Với điểm P, tọa độ Đề các là (x, y) và tọa độ cực là (r, θ) thì từ hình vẽ,

$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = y/x$

Trong không gian ba chiều có hệ tọa độ, gọi là tọa độ trụ (cylindrical coordinates), tương tự như tọa độ cực và cho phép mô tả thuận tiện một số mặt cong và vật thể hay thông dụng. Ta sẽ thấy, một số tích phân bội ba sẽ dễ dàng tính được trong tọa độ trụ.

3.8.1. Tọa độ trụ



Hình 2

Trong tọa độ trụ, một điểm P trong không gian ba chiều được biểu diễn theo bộ ba có thứ tự (r, θ, z), trong đó r và θ là tọa độ trụ của chiếu của P lên mặt phẳng xy và z là khoảng cách định hướng từ mặt phẳng xy tới P. (Xem Hình 2.)

Để chuyển từ tọa độ trụ tới tọa độ Đề các, ta sử dụng các phương trình

[1] $\quad x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$

trong khi chuyển từ tọa độ Đề các tới tọa độ cực ta dùng phương trình

[2] $\quad r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = y/x \qquad z = z$

Ví dụ 1

(a) Vẽ điểm với tọa độ trụ (2, 2π/3, 1) và tìm tọa độ Đề các của nó.

(b) Tìm tọa độ trụ của điểm với tọa độ Đề các là (3, –3, –7).

Lời giải

(a) Điểm với tọa độ trụ (2, 2π/3, 1) được vẽ trên Hình 3. Từ phương trình 1, tọa độ Đề các của nó là:

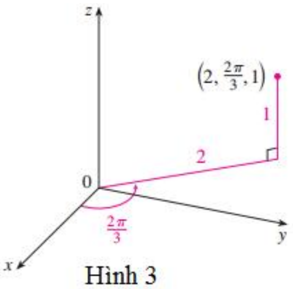
$x = 2cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ $\qquad y = 2sin\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$ $\qquad z = 1$

Vậy tọa độ Đề các của điểm đó là $\left(-1, \sqrt{3}, 1\right)$

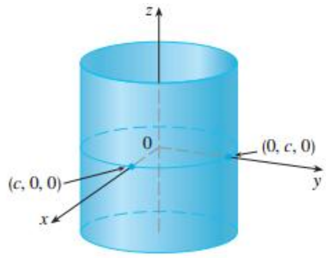
(b) Từ phương trình 2 ta có

$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$ $\qquad tan\theta = -\frac{3}{3} = -1$ nên $\theta = \frac{7}{4}\pi + n2\pi$ $\qquad z = 7$

Do đó một tập các tọa độ trụ là $\left(3\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4} + n2\pi, -7\right)$.



Hình 3

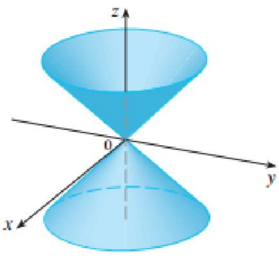


Hình 4

Tọa độ hình trụ là hữu ích trong các vấn đề có liên quan đến tính đối xứng quanh một trục và trục z được chọn để trùng với trục đối xứng này. Ví dụ, trục của mặt trụ tròn với phương trình $x^2 + y^2 = c^2$ là trục z. Trong tọa độ trụ, mặt trụ có phương trình rất đơn giản là r = c. (Xem Hình 4). Đây là lý do cho cái tên tọa độ "trụ".

Ví dụ 2 Mô tả mặt cong mà phương trình của nó trong tọa độ trụ là z = r.

Lời giải Phương trình nói lên rằng giá trị z, hay chiều cao, của mọi điểm trên mặt cong đều bằng r, khoảng cách từ điểm tới trục z. Bởi vì θ không có mặt nên nó thay đổi. Vì thế bất kỳ vết ngang trên mặt phẳng z = k (k > 0) là đường tròn bán kính k. Những vết đó cho thấy mặt cong là một hình nón. Dự đoán này có thể được xác nhận bằng cách chuyển đổi phương trình về tọa độ Đề các. Từ phương trình đầu tiên trong [2] chúng ta có $z^2 = r^2 = x^2 + y^2$.



Hình 5
z = r, hình nón

Chúng ta ghi nhận phương trình $z^2 = x^2 + y^2$ là hình nón tròn mà trục của nó là trục z (xem Hình 5).

3.8.2. Tính tích phân bội ba trong tọa độ trụ

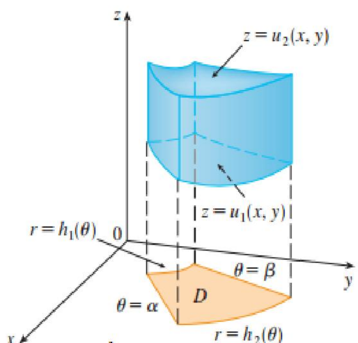
Giả sử rằng E là miền loại 1 với hình chiếu D của nó lên mặt phẳng xy được mô tả trong tọa độ cực (xem Hình 6). Đặc biệt, giả thiết f liên tục và

$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \le x \le u_2(x, y)\}$

trong đó D là được cho trong tọa độ cực $D = \{(r, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$.

Chúng ta biết từ phương trình 3.7.6 rằng

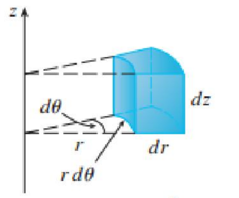
[3] $\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$



Hình 6

Nhưng chúng ta cũng biết cách tính tích phân kép trong tọa độ cực. Thực tế, kết hợp phương trình 3 với phương trình 3.4.3 ta nhận được

$$[4] \quad \iiint_E f(x,y,z)dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(rcos\theta,rsin\theta)}^{u_2(rcos\theta,rsin\theta)} f(rcos\theta, rsin\theta, z) rdz\,dr\,d\theta$$

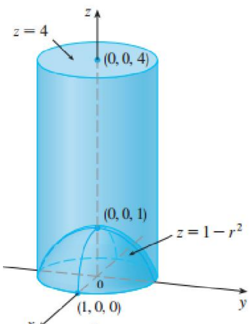


Hình 7 $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

Công thức 4 là *công thức tính tích phân bội ba trong tọa độ cực.* Nó nói lên rằng chuyển một tích phân bội ba trong tọa độ Đề các sang tọa độ trụ bằng cách viết x = rcosθ, y = rsinθ, còn z giữ nguyên, sử dụng các cận thích hợp của tích phân đối với z, r và θ, và thay dV bởi rdzdrdθ. (Hình 7 chỉ ra cách nhớ điều đó.) Công thức này được sử dụng khi E là vật thể dễ dàng mô tả trong tọa độ trụ và đặc biệt là khi hàm f(x, y, z) liên quan tới biểu thức $x^2 + y^2$.

Ví dụ 3 Một vật thể bên trong hình trụ $x^2 + y^2 = 1$, bên dưới mặt phẳng z = 4, bên trên paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$. (Xem Hình 8.) Mật độ tại mỗi điểm của nó tỷ lệ với khoảng cách từ đó tới trục của hình trụ. Tính khối lượng của E.

Lời giải Trong tọa độ trụ, phương trình hình trụ là r = 1 và phương trình paraboloid là $z = 1 - r^2$, vì vậy ta có thể viết



Hình 8

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 1 - r^2 \le z \le 4\}.$$

Vì mật độ tại (x, y, z) tỷ lệ với khoảng cách từ đó đến trục z nên hàm mật độ là $f(x,y,z) = K\sqrt{x^2+y^2} = Kr$ trong đó K là hằng số tỷ lệ. Từ công thức 3.7.13, khối lượng của E là

$$m = \iiint_E K\sqrt{x^2+y^2}dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 (Kr)rdz\,dr\,d\theta$$

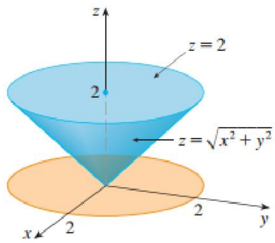
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 Kr^2[4-(1-r^2)]dr\,d\theta = K\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(3r^2+r^4)dr$$

$$= 2\pi K\left[r^3 + \frac{1}{5}r^5\right]_0^1 = \frac{12}{5}\pi K$$

Ví dụ 4 Tính $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2+y^2)dz\,dy\,dx$

Lời giải Tích phân lặp này là tích phân bội ba trên miền

$$E = \{(x,y,z) \mid -2 \le x \le 2, -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$$



Hình 9

và hình chiếu của E lên mặt phẳng xy là đĩa $x^2 + y^2 \le 4$. Mặt dưới của E là nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và mặt trên của nó là mặt phẳng z = 2. (Xem Hình 9.). Mô tả của E trong tọa độ trụ là

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2,\ r \le z \le 2\}$$

Do đó ta có

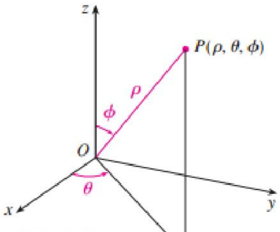
$$\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2+y^2)dz\,dy\,dx = \iiint_E (x^2+y^2)dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2rdz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3(2-r)dr = 2\pi\left[\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{5}r^5\right]_0^2 = \frac{16}{5}\pi$$

3.9. Tích phân bội ba trong tọa độ cầu

Một hệ tọa độ nữa trong không gian ba chiều là tọa độ cầu (spherical). Nó đơn giản hóa cách tính tích phân bội ba trên những miền được giới hạn bởi các hình cầu hoặc hình nón.

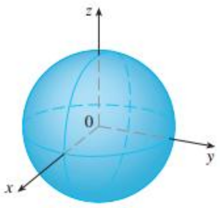
3.9.1. Tọa độ cầu

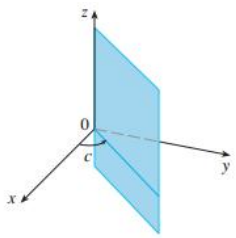


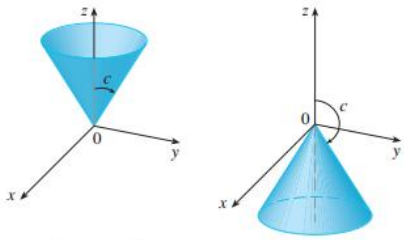
Hình 1

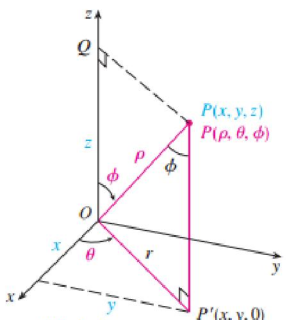
Tọa độ cầu (ρ, θ, ϕ) của điểm P trong không gian được chỉ ra trên Hình 1, trong đó ρ = |OP| là khoảng cách từ gốc tọa độ đến P, θ giống như góc trong tọa độ trụ, và ϕ là góc giữa hướng dương của trục z với OP. Chú ý rằng $\rho \ge 0 \quad 0 \le \phi \le \pi$.

Hệ tọa độ cầu đặc biệt hữu ích trong các bài toán có điểm đối xứng và gốc tọa độ đặt tại điểm này. Ví dụ, hình cầu với tâm là gốc tọa độ và bán kính c có phương trình đơn giản ρ = c (xem Hình 2), điều đó giải thích cái tên tọa độ "cầu". Đồ thị của phương trình θ = c là nửa mặt phẳng (sem Hình 3), phương trình ϕ = c biểu thị nửa hình nón với trục z là trục của nó (xem Hình 4).


Hình 2 $\rho = c$, hình cầu


Hình 3 $\theta = c$, nửa mặt phẳng


$0 < c < \pi/2$ $\pi/2 < c < \pi$
Hình 4 $\phi = c$, nửa mặt nón



Hình 5

Mối liên hệ giữa tọa độ Đề các và tọa độ cầu có thể thấy từ Hình 5. Từ các tam giác OPQ và OPP' ta có

$$z = \rho\cos\phi \qquad r = \rho\sin\phi$$

Nhưng x = rcosθ và y = rsinθ nên để chuyển từ tọa độ cầu sang tọa độ Đề các, ta sử dụng

[1] $x = \rho\sin\phi\cos\theta$ và $y = \rho\sin\phi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\phi$

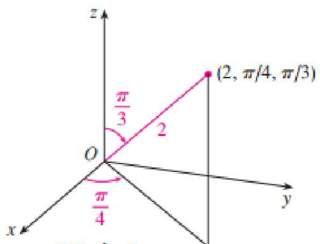
Ngoài ra, công thức khoảng cách là

[2] $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Chúng ta sử dụng phương trình này để chuyển từ tọa độ Đề các sang tọa độ cầu.

Ví dụ 1 Điểm (2, π/4, π/3) được cho trong tọa độ cầu. Vẽ điểm đó và tìm tọa độ Đề các của nó.

Lời giải Chúng ta vẽ điểm đó trên Hình 6. Từ phương trình 1 ta có



Hình 6

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho\sin\phi\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho\cos\phi = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Vậy tọa độ Đề các của điểm đó là $\left(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1\right)$.

Ví dụ 2 Điểm $\left(0, 2\sqrt{3}, -2\right)$ được cho trong tọa độ Đề các, tìm tọa độ cầu của nó.

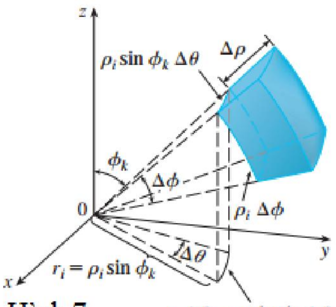
Lời giải Từ phương trình 2 ta có $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$ và vì thế phương trình 1 cho ra

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{2}{3}\pi \qquad \cos\theta = \frac{x}{\rho\sin\phi} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Chú ý rằng $\theta \neq 3\pi/2$ bởi vì $y = 2\sqrt{3} > 0$.

Do đó tọa độ cầu của điểm đã cho là $(4, \pi/2, 2\pi/3)$.

3.9.2. Sự đánh giá tích phân bội ba với tọa độ cầu



Hình 7

Trong tọa độ cầu, tương ứng với khối hộp chữ nhật trong tọa độ Đề các là nêm cầu (spherical wedge)

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d\}$$

trong đó $a \ge 0$ và $\beta - \alpha \le 2\pi$, $d - c \le \pi$. Mặc dù chúng ta định nghĩa tích phân bội ba bằng cách chia vật thể thành nhiều khối hộp chữ nhật nhỏ, cũng có thể chỉ ra rằng chia thành nhiều nêm cầu nhỏ cũng cho cùng một kết quả. Vì thế chúng ta chia E thành những nêm cầu nhỏ E_{ijk} bởi các mặt cầu $\rho = \rho_i$, các nửa mặt phẳng $\theta = \theta_j$ và các nửa hình nón $\phi = \phi_k$. Hình 7 chỉ ra rằng E_{ijk} xấp xỉ với khối hộp chữ nhật có ba kích thước là $\Delta\rho$, $\rho_i\Delta\phi$ (cung của đường tròn bán kính ρ_i, góc $\Delta\theta$), và $\rho_i\sin\phi_k\Delta\theta$ (cung của đường tròn bán kính $\rho_i\sin\phi_k$, góc $\Delta\theta$).

Vì vậy xấp xỉ thể tích E_{ijk} là $\Delta V_{ijk} = (\Delta\rho)(\rho_i\Delta\phi)(\rho_i sin\phi_k\Delta\theta) = \rho_i^2 sin\phi_k\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$

Thực tế, có thể chỉ ra rằng, với sự hỗ trợ của Định lý giá trị trung bình, thể tích của E_{ijk} chính xác là $\Delta V_{ijk} = \tilde{\rho}_i^2 sin\tilde{\phi}_k\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$, trong đó $\left(\tilde{\rho}_i\ \tilde{\theta}_j, \tilde{\phi}_k\right)$ là điểm nào đó trên E_{ijk}.

Giả sử $\left(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*\right)$ là tọa độ Đề các của điểm đó, thì

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*\right)\Delta V_{ijk}$$

$$= \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(\tilde{\rho}_i sin\tilde{\phi}_k cos\tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i sin\tilde{\phi}_k sin\tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i cos\tilde{\phi}_k\right)\tilde{\rho}_i^2 sin\tilde{\phi}_k\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$$

Nhưng đây là tổng Riemann của hàm

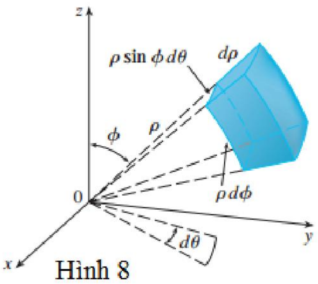
$$(F(\rho,\theta,\phi) = f(\rho sin\phi cos\theta, \rho sin\phi sin\theta, \rho cos\phi)\rho^2 sin\phi$$

Do đó chúng ta đa đi đến công thức tích phân bội ba trong tọa độ cầu

$$[3] \quad \iiint_E f(x,y,z)dV = \int_c^d\int_\alpha^\beta\int_a^b f(\rho sin\phi cos\theta, \rho sin\phi sin\theta, \rho cos\phi)\rho^2 sin\phi d\rho\, d\theta\, d\phi$$

trong đó E là nêm cầu được cho bởi $E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d\}$

Công thức 3 nói lên rằng, chúng ta chuyển tích phân bội ba từ tọa độ Đề các sang tọa độ cầu bằng cách viết $x = \rho\sin\phi\cos\theta$ $y = \rho\sin\phi\sin\theta$ $z = \rho\cos\phi$



Hình 8

và sử dụng các cận tích phân thích hợp, và thay dV bởi $\rho^2 sin\phi d\rho d\theta d\phi$. Điều này được minh họa trên Hình 8.

Công thức này có thể mở rộng cho miền tổng quát như

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d, g_1(\theta, \phi) \le \rho \le g_2(\theta, \phi)\}$$

Trong trường hợp này công thức giống như [3] ngoại trừ các cận của tích phân đối với ρ là $g_1(\theta, \phi)$ và $g_2(\theta, \phi)$.

Thông thường, tọa độ cầu được sử dụng trong tích phân bội ba khi biên của miền lấy tích phân là các mặt cong có dạng hình nón và hình cầu hình.

Ví dụ 3 Tính $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dV$, trong đó B là hình cầu đơn vị (unit ball):

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$

Lời giải Vì biên của B là mặt cầu nên chúng ta sử dụng tọa độ cầu:

B = {(ρ, θ, ϕ) | 0 ≤ ρ ≤ 1, 0 ≤ θ ≤ 2π, 0 ≤ ϕ ≤ π}

Hơn nữa, tọa độ cầu là thuận lợi bởi vì $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Vì vậy từ [3] ta nhận được

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 sin\phi d\rho\, d\theta\, d\phi$$

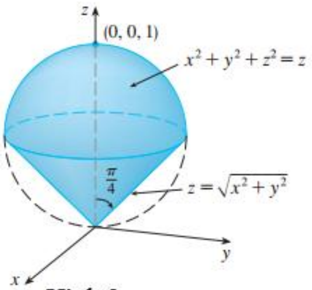
$$= \int_0^{\pi} sin\phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{\rho^3}\rho^2 d\rho = [-cos\phi]_0^{\pi}(2\pi)\left[\frac{1}{3}e^{\rho^3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi(e-1)$$

Chú ý: Sẽ vô cùng khó khăn để tính tích phân bội ba trong Ví dụ 3 mà không dùng tọa độ cầu. Trong tọa độ Đề các tích phân lặp sẽ là

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz\, dy\, dx$$

Ví dụ 4 Sử dụng tọa độ cầu tính thể tích vật thể nằm trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (Hình 9).

Lời giải Chú ý rằng mặt cầu đi qua gốc tọa độ và có tậm là (0, 0, 1/2). Chúng ta viết phương trình của mặt cầu trong tọa độ cầu: $\rho^2 = \rho cos\phi$ hay $\rho = cos\phi$



Hình 9


Hình 10 Một cách nhìn khác

Phương trình nặt nón có thể viết là

$$\rho cos\phi = \sqrt{\rho^2 sin^2\phi cos^2\theta + \rho^2 sin^2\phi sin^2\theta} = \rho sin\phi \implies cos\phi = sin\phi \implies \phi = \pi/4$$

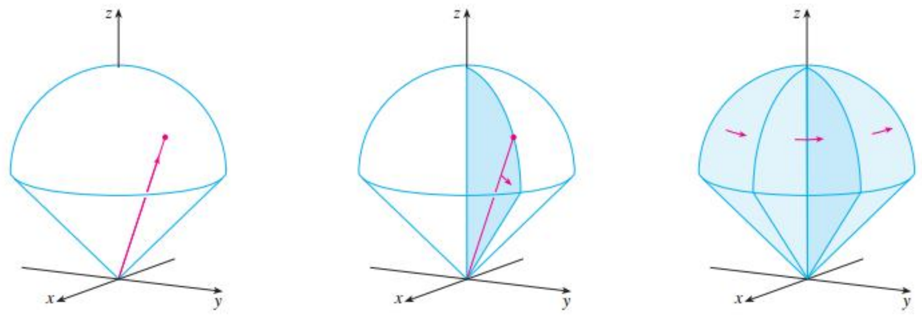
Do đó mô tả của E trong tọa độ cầu là

E = {(ρ, θ, ϕ) | 0 ≤ θ ≤ 2π, 0 ≤ ϕ ≤ π/4 , 0 ≤ ρ ≤ cosϕ}

Hình 11 cho thấy cách mà E lan ra khi chúng ta tích phân theo biến ρ trước, sau đó đến ϕ và θ. Thể tích của E là:

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{cos\phi} \rho^2 sin\phi d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} sin\phi \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_{\rho=0}^{\rho=cos\phi} d\phi = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi/4} sin\phi cos^3\phi d\phi = \frac{2}{3}\pi\left[-\frac{1}{4}cos^4\phi\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$



ρ thay đổi từ 0 đến cosϕ khi ϕ và θ không đổi

ϕ thay đổi từ 0 đến π/4 khi θ cố định

θ thay đổi từ 0 tới 2π

Hình 11

3.10. Đổi biến trong tích phân bội

3.10.1. Đổi biến trong tích phân kép

Với tích phân đơn, ta có quy tắc đổi biến: Nếu u = g(x) thì

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Bằng cách hoán đổi vai trò x và u, ta có thể viết lại

[1] $$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du$$

trong đó x = g(u) và a = g(c), b = g(d). Một cách viết khác của công thức 1 như sau:

[2] $$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(x(u))\frac{dx}{du}du$$

Sự đổi biến cũng hiệu quả trong tích phân kép. Chúng ta đã biết ví dụ về đổi biến: chuyển sang tọa độ cực. Các biến mới r và θ có quan hệ với biến cũ theo các phương trình

$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

và với sự đổi biến, công thức 3.4.2 có thể viết là

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

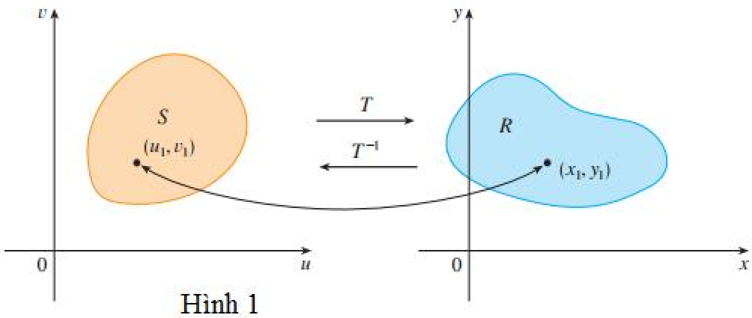
ở đây S là miền trong mặt phẳng rθ tương ứng với miền R trong mặt phẳng xy.

Tổng quát hơn, chúng ta xem xét sự đổi biến được cho bởi phép biến đổi T từ mặt phẳng uv sang mặt phẳng xy: T(u, v) = (x, y), ở đây x và y quan hệ với u và v theo phương trình

[3] x = g(u, v) y = h(u, v) [oặc đôi khi ta viết: x = x(u, v) y = y(u, v)]

Chúng ta thường cho rằng g và h có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục.

Phép đổi biến T thực ra là hàm mà miền xác định và miền giá trị là các tập con của $\mathbb{R}^2$. Nếu $T(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$ thì điểm (x_1, y_1) được gọi là ảnh của điểm (u_1, v_1). Nếu không có hai điểm cùng chung một ảnh thì T được gọi là 1–1 (one–to–one). Hình 1 mô tả phép đổi biến T trên miền S thuộc mặt phẳng *uv*. T biến S thành miền R trên mặt phẳng xy, được gọi là ảnh của S, bao gồm ảnh của tất cả các điểm trên S.



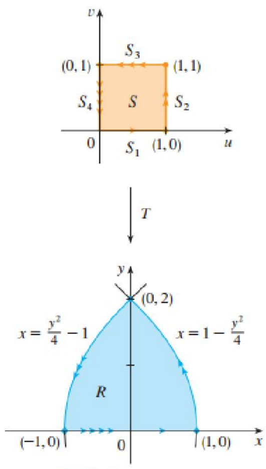
Hình 1

Nếu T là 1–1 thì tồn tại phép biến đổi ngược T^{-1} từ mặt phẳng xy sang mặt phẳng uv và nó có thể giải phương trình 3 đối với u và v theo x và y: u = G(x, y) v = H(x, y)

Ví dụ 1 Sự đổi biến được xác định bởi phương trình $x = u^2 - v^2$ $y = 2uv$

Tìm ảnh của hình vuông S = {(u, v) | 0 ≤ u ≤ 1, 0 ≤ v ≤ 1}.

Lời giải Phép đổi biến ánh xạ biên của S thành biên của ảnh. Vì vậy chúng ta bắt đầu tìm các ảnh của các cạnh của S. Cạnh đầu tiên, S_1, được cho bởi v = 0 ($0 \le u \le 1$). (Xem Hình 2.) Từ các phương trình đã cho ta có $x = u^2$, y = 0, vì vậy $0 \le x \le 1$. Vì vậy S_1 được ánh xạ thành đoạn từ (0, 0) tới (1, 0) trên mặt phẳng xy. Cạnh thứ hai, S_2, là u = 1 ($0 \le v \le 1$), thay u = 1 vào các phương trình, ta nhận được $x = 1 - v^2$ $y = 2v$



Hình 2

Loại bỏ v ta nhận được

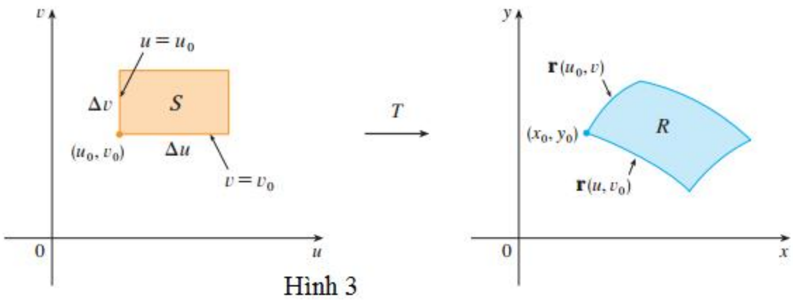
$$[4] \qquad x = 1 - \frac{1}{4}y^2 \qquad 0 \le y \le 2$$

đó là mpptj phần của parabola. Tương tự, S_3 được cho bởi v = 1 ($0 \le u \le 1$), ảnh của nó là cung parabola

$$[5] \qquad x = \frac{1}{4}y^2 - 1 \qquad 0 \le y \le 2$$

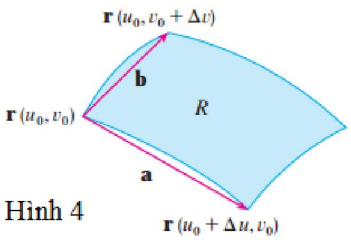
Cuối cùng, S_4 được cho bởi u = 0 ($0 \le v \le 1$), ảnh của nó là $x = -v^2$, y = 0, tức là $-1 \le x \le 0$. (Chú ý rằng khi chúng ta di chuyển quanh hình vuông theo hướng ngược chiều kim đồng hồ, ta cũng di chuyển quanh miền parabolic theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.) Ảnh của S là miền R (trên Hình 2) được giới hạn bởi trục x và các parabola được cho bởi phương trình 4 và phương trình 5.

Bây giờ chúng ta xem sự đổi biến ảnh hưởng như thế nào đến tích phân kép. Chúng ta bắt đầu với hình chữ nhật nhỏ S trên mặt phẳng uv, có góc dưới bên trái là điểm (u_0, v_0) và các kích thước của nó là Δu và Δv (xem Hình 3).



Hình 3

Ảnh của S là miền R trên mặt phẳng xy, một điểm biên của nó là $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$.



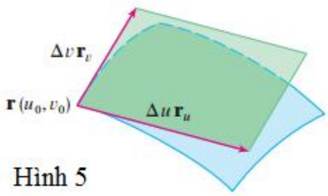
Hình 4

Véc tơ $\boldsymbol{r}(u, v) = g(u, v)\boldsymbol{i} + h(u, v)\boldsymbol{j}$ là véc tơ vị trí của ảnh của điểm (u, v). Phương trình của cạnh dưới của S là $v = v_0$, đường cong ảnh của nó đường cong cho bởi hàm véc tơ $r(u, v_0)$. Véc tơ tiếp tuyến tại (x_0, y_0) của đường cong ảnh là

$$\boldsymbol{r}_u = g_{u(u_0,v_0)}\boldsymbol{i} + h_{u(u_0,v_0)}\boldsymbol{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j}$$

Tương tự, véc tơ tiếp tuyến tại (x_0, y_0) của đường cong ảnh của cạnh trái của S (tên là $u = u_0$) là $\boldsymbol{r}_v = g_{v(u_0,v_0)}\boldsymbol{i} + h_{v(u_0,v_0)}\boldsymbol{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{j}$

Chúng ta có thể xấp xỉ miền ảnh R = T(S) bởi một hình bình hành được xác định bởi các vectơ cát tuyến (Hình 4): $a = r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_0, v_0)$ $b = r(u_0, v_0 + \Delta v) - r(u_0, v_0)$



Hình 5

Nhưng $r_u = \lim_{\Delta_u \to 0} \frac{r(u_0+\Delta_u, v_0) - r(u_0, v_0)}{\Delta_u}$

và vì vậy $r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_0, v_0) \approx \Delta u r_u$

Tương tự $r(u_0, v_0 + \Delta v) - r(u_0, v_0) \approx \Delta v r_v$

Điều đó có nghĩa là chúng ta có thể xấp xỉ R bởi hình bình hành được xác định bởi các véc tơ $\Delta u r_u$ và $\Delta v r_v$ (xem Hình 5).

Do đó chúng ta có thể xấp xỉ diện tích của R bởi diện tích của hình bình hành này:

[6] $|(\Delta u r_u) \times (\Delta v r_v)| = |r_u \times r_v|\Delta u \Delta v$

Tính tích vô hướng ta nhận được

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

Định thức cuối cùng được gọi là Jacobian của phép đổi biến và được ký hiệu đặc biệt.

[7] **Định nghĩa** Jacobian của phép đổi biến T: x = g(u, v), y = h(u, v) là

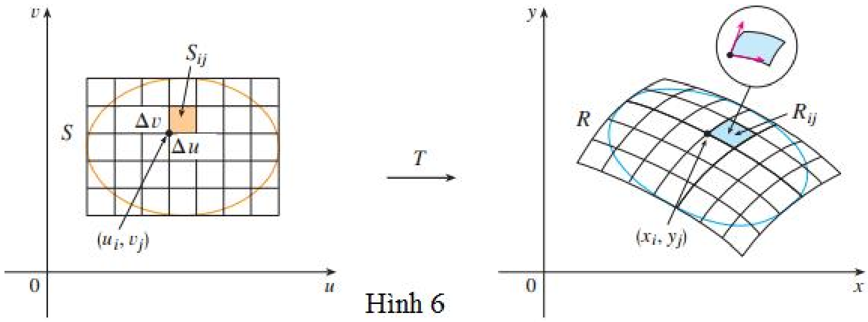
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Với ký hiệu này, chúng ta có thể sử dụng phương trình 6 để đưa ra xấp xỉ diện tích ΔA của R:

[8] $$\Delta A \approx \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \Delta v$$

trong đó Jacobian được ước lượng tại (u_0, v_0).

Tiếp theo chúng ta chia miền S trên mặt phẳng uv thành các hình chữ nhật S_{ij} và gọi ảnh của chúng trên mặt phẳng xy là R_{ij} (Hình 6).



Hình 6

Thực hiện xấp xỉ [8] cho mọi R_{ij}, ta xấp xỉ tích phân kép của f trên R như sau:

$$\iint_R f(x,y)dA \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A$$

$$\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \Delta v$$

trong đó Jacobian được ước lượng tại (u_i, v_j). Chú ý rằng tổng kép này là tổng Riemann của tích phân

$$\iint_S f(g(u,v), h(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Lập luận trên đây gợi ý rằng định lý sau đây là đúng. (Chứng minh đầy đủ được trình bày trong cuốn sách về giải tích nâng cao).

[9] **Định lý** (*đổi biến trong tích phân kép*) Giả sử T là phép đổi biến có các đạo hàm riêng liên tục và Jacobian của nó khác 0 và ánh xạ miền S trong mặt phẳng uv thành miền R trong mặt phẳng xy. Giả sử rằng f liên tục trên R, cả R và S là các miền phẳng loại 1 hoặc loại 2. Giả sử T là 1–1, có thể loại trừ trên biên của S. Khi đó

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Định lý 9 nói lên rằng chúng ta thay việc tính tích phân theo x và y bởi tích phân theo u và v bằng cách biểu diễn x và y theo u và v, và viết

$$dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Nhận thấy sự giống nhau giữa Định lý 9 và công thức trong phương trình 2. Thay thế cho đạo hàm dx/du, ta có trị tuyệt đối của Jacobian, tức là $|\partial(x,y)/\ \partial(u,v)|$.

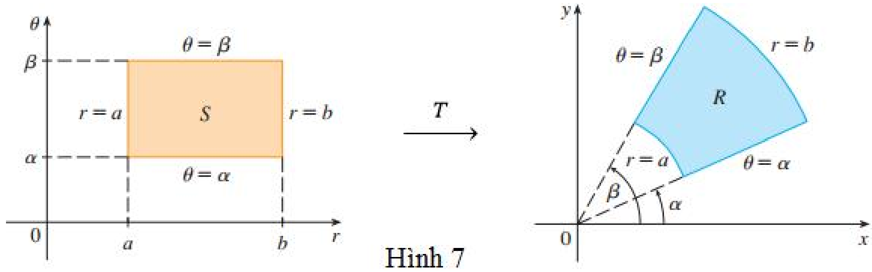
Để làm minh họa đầu tiên cho Định lý 9, chúng ta chỉ ra rằng công thức tích phân trong tọa độ cực là trường hợp đặc biệt. Ở đây phép biến đổi T từ mặt phẳng rθ tới mặt phẳng xy được cho bởi $x = g(r, \theta) = r\cos\theta \quad y = h(r, \theta) = r\sin\theta$
và tính hình học của phép biến đổi chỉ ra trên Hình 7. T ánh xạ hình chữ nhật thông thường của mặt phẳng rθ tới hình chữ nhật cực của mặt phẳng xy. Jacobian của T là

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r > 0$$

Vì thế Định lý 9 cho ra

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| drd\theta = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr\, d\theta$$

hoàn toàn trùng với công thức 3.4.2.



Hình 7

Ví dụ 2 Sử dụng phép đổi biến $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ để tính tích phân $\iint_R ydA$, ở đây R là miền được giới hạn bởi trục x và các parabola $y^2 = 4 - 4x$ và $y^2 = 4 + 4x$, $y \geq 0$.

Lời giải Miền R được chỉ ra trong Hình 2. Trong Ví dụ 1 chúng ta phát hiện rằng T(S) = R, ở đây S là hình vuông [0, 1]×[0, 1]. Thật vậy, lý do đổi biến để tính tích phân là S so với R là miền đơn giản hơn nhiều. Trước hết chúng ta tính Jacobian:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

Theo Định lý 9, $\iint_R ydA = \iint_S 2uv\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dA = \int_0^1\int_0^1(2uv)4(u^2+v^2)du\,dv$

$$= 8\int_0^1\int_0^1(u^3v + uv^3)du\,dv = 8\int_0^1\left[\frac{1}{4}u^4v + \frac{1}{2}u^2v^3\right]_{u=0}^{u=1} dv$$

$$= \int_0^1 (2v + 4v^3)dv = [v^2 + v^4]_0^1 = 2$$

Chú ý Ví dụ 2 không phải là một vấn đề rất khó giải quyết bởi vì chúng ta đã đưa ra phép đổi biến phù hợp. Nếu chúng ta không được cung cấp phép đổi biến, thì đầu tiên là nghĩ về một sự đổi biến thích hợp. Nếu f(x, y) là khó lấy tích phân, thì dạng của f(x, y) có thể gợi ý ra phép đổi biến. Nếu miền lấy tích phân là phức tạp, thì phép đổi biến phải được chọn sao cho miền S tương ứng trong mặt phẳng uv được mô tả thuận tiện.

Ví dụ 3 Tính tích phân $\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}} dA$, ở đây R là hình thang với các đỉnh (1, 0), (2, 0), (0, –2) và (0, –1).

Lời giải Vì khó tính tích phân $e^{\frac{x+y}{x-y}}$ nên chúng ta đổi biến theo gợi ý của hàm này

[10] $u = x + y \qquad v = x - y$

Các phương trình đó xác định phép đổi biến T^{-1} từ mặt phẳng xy sang mặt phẳng uv. Định lý 9 nói về phép đổi biến T từ mặt phẳng uv sang mặt phẳng xy. Nó nhận được bằng cách giải các phương trình 10 đối với x và y:

[11] $x = (u + v)/2 \qquad y = (u - v)/2$

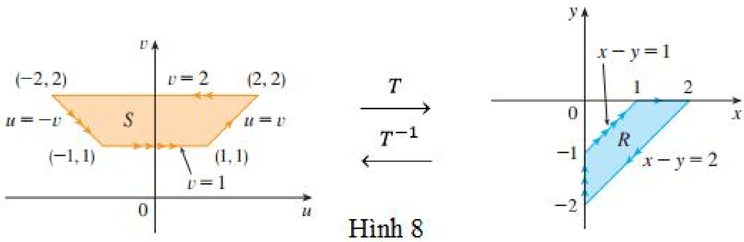
Jacobian của T là

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Để tìm miền S trên mặt phẳng uv tương ứng với R, chúng ta chú ý rằng các cạnh của R nằm trên các đường thẳng $y = 0 \quad x - y = 2 \qquad x = 0 \qquad x - y = 1$

và từ các phương trình 10 và 11, các đường thẳng ảnh trên mặt phẳng uv là

$u = v \quad v = 2 \qquad u = -v \qquad v = 1$



Hình 8

Vì vậy miền S là hình thang với các đỉnh (1, 1), (2, 2), (–2, 2) và (–1, 1) trên Hình 8.

Do đó $S = \{(u, v) \mid 1 \le v \le 2, -v \le u \le v\}$. Định lý 9 cho ra

$$\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}} dA = \iint_S e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} du dv = \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} du\, dv = \frac{1}{2} \int_1^2 (e - e^{-1}) v dv = \frac{3}{4}(e - e^{-1})$$

3.10.2. Đổi biến trong tích phân bội ba

Có công thức đổi biến tương tự đối với tích phân bội ba. Giả sử T là phép đổi biến ánh xạ miền S trong không gian uvw sang mặt phẳng R trong không gian xyz theo nghĩa của các phương trình $x = g(u, v, w) \qquad y = h(u, v, w) \qquad z = k(u, v, w)$

Jacobian của T là định thức cấp 3:

[12] $$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Với các giả thiết tương tự trong Định lý 9, ta có công thức sau đây cho tích phân bội ba:

[13] $$\iiint_R f(x,y,z)dV = \iiint_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Ví dụ 4 Sử dụng công thức 13 để rút ra công thức cho tích phân bội ba trong tọa độ cầu.

Lời giải Phép đổi biến ở đây là

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\phi$$

Chúng ta tính Jacobian như sau:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} sin\phi cos\theta & -\rho sin\phi sin\theta & \rho cos\phi cos\theta \\ sin\phi sin\theta & \rho sin\phi cos\theta & \rho cos\phi sin\theta \\ cos\phi & 0 & -\rho sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= cos\phi \begin{vmatrix} -\rho sin\phi sin\theta & \rho cos\phi cos\theta \\ \rho sin\phi cos\theta & \rho cos\phi sin\theta \end{vmatrix} - \rho sin\phi \begin{vmatrix} sin\phi cos\theta & -\rho sin\phi sin\theta \\ sin\phi sin\theta & \rho sin\phi cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= -p^2 cos\phi(sin\phi cos\phi sin^2\theta + sin\phi cos\phi cos^2\theta) - \rho^2 sin\phi(sin^2\phi cos^2\theta + sin^2\phi sin^2\theta)$$

$$= -p^2 cos^2\phi sin\phi - \rho^2 sin\phi sin^2\phi = -\rho^2 sin\phi$$

Vì $0 \le \phi \le \pi$ nên $sin\phi \ge 0$, do đó

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = |-\rho^2 sin\phi| = \rho^2 sin\phi$$

và công thức 13 được viết lại

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \iiint_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\rho^2 sin\phi dudvdw$$

nó tương đương với công thức 3.9.3.