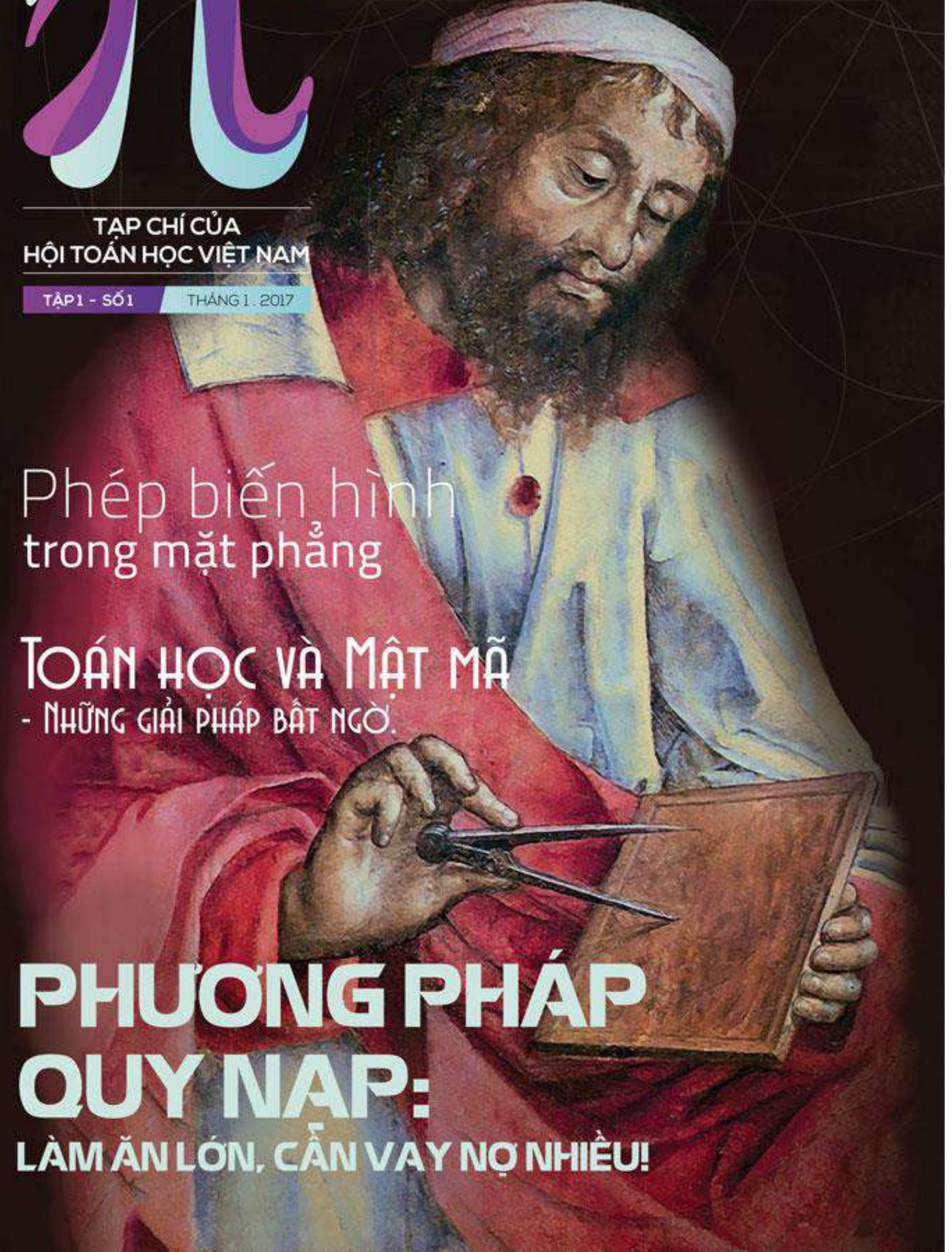
π

TẠP CHÍ CỦA
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

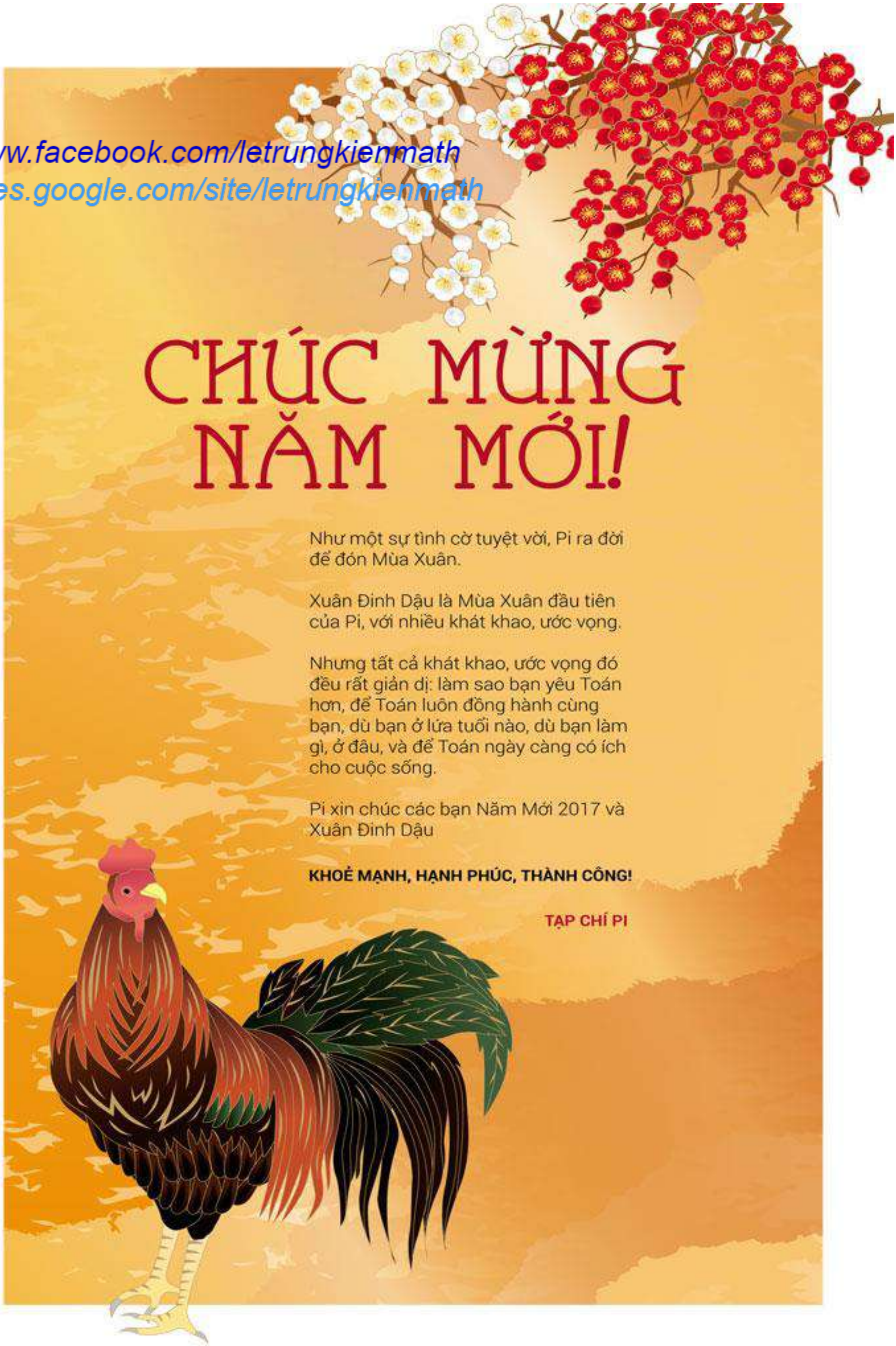
TẬP 1 - SỐ 1 THÁNG 1 . 2017



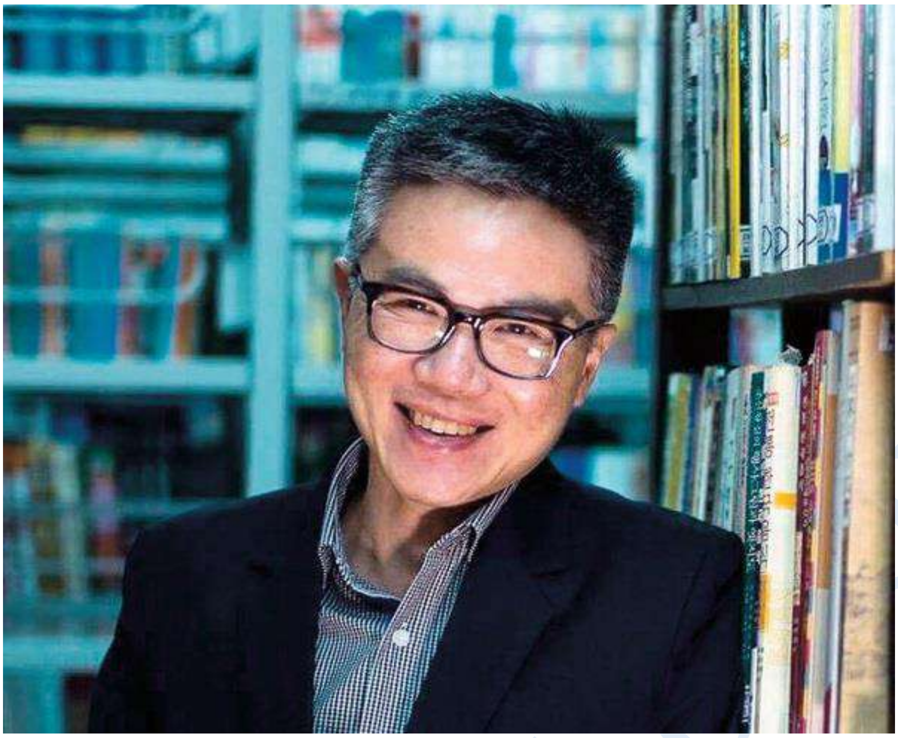
Phép biến hình trong mặt phẳng

Toán học và Mật mã - Những giải pháp bất ngờ.

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP: LÀM ĂN LỚN, CẦN VAY NỢ NHIỀU!


CHÚC MỪNG NĂM MỚI!
Như một sự tình cờ tuyệt vời, Pi ra đời để đón Mùa Xuân.
Xuân Đinh Dậu là Mùa Xuân đầu tiên của Pi, với nhiều khát khao, ước vọng.
Nhưng tất cả khát khao, ước vọng đó đều rất giản dị: làm sao bạn yêu Toán hơn, để Toán luôn đồng hành cùng bạn, dù bạn ở lứa tuổi nào, dù bạn làm gì, ở đâu, và để Toán ngày càng có ích cho cuộc sống.
Pi xin chúc các bạn Năm Mới 2017 và Xuân Đinh Dậu
KHOẺ MẠNH, HẠNH PHÚC, THÀNH CÔNG!
TẠP CHÍ PI

Trong số này:



Giáo sư Ngô Bảo Châu. Ảnh: Việt Thanh

Đôi điều về Tạp chí Pi

Đã từ lâu nhiều người trong cộng đồng toán học Việt Nam, trong đó có tôi, mong ước có một tờ báo phổ biến toán học, như tờ Kvant của Liên Xô cũ, tờ *American Mathematical Monthly* của Hội Toán học Mỹ, hay tờ *Toán học và tuổi trẻ* của những năm 60-80. Những trang báo ấy đã là bạn đồng hành của chúng tôi trong quá trình học tập và trưởng thành ngay từ khi đặt chân vào con đường toán học. Sự ra đời của *Tạp chí Pi* thể hiện sự nỗ lực của cộng đồng yêu toán muốn biến mong ước này thành hiện thực.

Trong bối cảnh khó khăn chung của báo giấy, việc thành lập một tờ báo giấy mới bao hàm nhiều rủi ro. Tuy vậy, chúng tôi kiên trì làm báo giấy, vì mong ước của chúng tôi là nhìn thấy các em học sinh thấp thỏm chờ ngày có số báo mới, nhìn thấy những số báo cũ nhầu nát đã quăn bìa nằm lăn lóc trên bàn nước ở các phòng họp giáo viên. Chúng tôi tin rằng quyết định này sẽ không thuần tuý lãng mạn và duy ý chí, nếu như mỗi số báo với 64 trang mang đến được cho bạn đọc những thông tin mới, chọn lọc, thú vị và bổ ích, và có khả năng khơi dậy niềm đam mê toán học ở các bạn trẻ. Hy vọng rằng *Tạp chí Pi* sẽ đồng hành lâu dài với bạn đọc yêu toán.

Giáo sư Hà Huy Khoái luôn tự nhận mình là "lãn nhân". Ông tâm đắc với học thuyết của lãn nhân, đó là nhất định không mất sức để làm những việc mà người khác có thể làm được. Trong số vô vàn khó khăn cho sự ra đời của *Pi*, khó khăn lớn nhất là thuyết phục được Giáo sư Hà Huy Khoái, ở tuổi 70, đảm đương trách nhiệm Tổng biên tập. Có lẽ Giáo sư Hà Huy Khoái cũng nhận ra rằng, đây chính là việc mà người khác không làm được.

Sự ra đời của *Pi* không hoàn toàn suôn sẻ, riêng thủ tục xin phép xuất bản đã kéo dài gần ba năm. Trong lúc chờ đợi giấy phép cho Pi, anh Trần Nam Dũng, người luôn thừa năng lượng và nhiệt tình, đã cho ra đời *Epsilon*, một chuyên san không chính thức, chỉ lưu hành trên mạng. Tờ *Epsilon* nay đã được mười hai số, mỗi số trên 150 trang đã được bạn đọc cũng như các cộng tác viên chào đón rất nồng nhiệt. Thành công của *Epsilon* là nguồn cổ vũ lớn cho nhóm sáng lập *Pi*. Tiến sĩ Trần Nam Dũng, với trách nhiệm Phó tổng biên tập, sẽ phụ trách một số chuyên mục quan trọng nhất của Pi, trong đó có Thách thức toán học. Chúng ta đều biết rằng bạn đọc của tờ *Pi* mong chờ nhất những bài toán mới, hóc búa và thú vị và đó chính là nội dung của chuyên mục Thách thức toán học.

Tôi không thể kể hết tên các thành viên của Ban biên tập ở đây, hầu hết các thành viên đều phụ trách một trong các chuyên mục của *Pi*. Nhưng sẽ rất thiếu sót nếu tôi không nêu những cá nhân, tổ chức đã giúp đỡ cho sự ra đời của *Pi* ngay từ thời kỳ thai nghén. Tiến sĩ Nguyễn Thành Nam luôn là người nhiệt tình cổ vũ cho các hoạt động phổ biến khoa học và toán học, anh đã vận động các Funix mentor xây dựng trang web cho *Pi* và sẽ đảm nhiệm vai trò Tổng biên tập của trang Pi online. Trung tâm Violympic sẽ là đối tác giúp phát hành và hỗ trợ cho Pi tổ chức các sự kiện. Anh Trần Trọng Thành và công ty Alezaa sẽ giúp phát hành *Pi* dưới định dạng phù hợp với các ứng dụng trên thiết bị di động. Anh Đỗ Hoàng Sơn ở công ty Long Minh, người đầy tâm huyết cho phong trào học STEM ở Việt Nam sẽ phụ trách một chuyên mục STEM cho *Pi*. Tiến sĩ Chu Cẩm Thơ sẽ phụ trách chuyên mục *Toán của Bi*, dành riêng cho học sinh những năm cuối tiểu học và trung học cơ sở và cùng *Pi* tổ chức các hoạt động cổ động niềm đam mê toán học ở các bé. Công ty Sputnik, cho đến rất gần đây, là đối tác chiến lược của *Pi*, với kinh nghiệm của mình trong việc làm sách toán, có thể giúp *Pi* trong việc lên trang và in ấn. Anh Lê Thống Nhất, người có nhiều kinh nghiệm trong việc xây *Toán tuổi thơ* đã có nhiều gắn bó với *Pi* trong thời kỳ thai nghén.

Mạn phép thay mặt cho cộng đồng toán học, tôi xin ghi nhận sự đóng góp của các anh chị, các tổ chức nói trên cho sự ra đời của *Pi* và xin cảm ơn.

Cảm ơn bạn đọc đã đón chào *Pi* rất nhiệt tình.

Ngô Bảo Châu

PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẲNG

■ **NGÔ BẢO CHÂU**

Đối tượng của hình học Euclid là điểm, đường thẳng, đường tròn trên mặt phẳng và vị trí tương đối của chúng. Vào cuối thế kỷ 19, hình học trải qua một cuộc lột xác sâu sắc cả về hình thức lẫn nội dung dưới ảnh hưởng của tư tưởng cách mạng của F. Klein, B. Riemann, H. Poincaré... Đối tượng của hình học không còn là điểm và đường nữa mà là nhóm các phép biến hình và những đại lượng bất biến của nó.

Trong giáo trình toán cao cấp, người ta thường bỏ qua mối liên hệ giữa những bài toán quen thuộc về đường thẳng, đường tròn trong hình học Euclid và những bài toán về các phép biến hình. Mục đích của bài viết này là giải thích mối liên hệ đó.

Để hiểu bài viết này, bạn đọc cần được trang bị một số khái niệm cơ sở của đại số tuyến tính và biết định nghĩa của nhóm.

1. Phép biến hình affine

Mặt phẳng của hình học Euclid sẽ được mô hình như không gian vector hai chiều $\mathbb{R}^2$ trên trường các số thực. Mỗi điểm P của mặt phẳng được xác định bởi toạ độ (x, y) của nó với x, y là hai số thực. Gốc toạ độ sẽ được ký hiệu là O. Đường thẳng tương ứng với tập con của $\mathbb{R}^2$, xác định bởi một phương trình có dạng $ax + by = c$, với a,b, c là các số thực nào đó. Đường thẳng có phương trình $ax+by = c$ chạy qua gốc toạ độ khi và chỉ khi $c = 0$.

Phép biến hình mà chúng ta quan tâm sẽ là một song ánh $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ biến đường thẳng thành đường thẳng. Các phép biến hình lập thành một nhóm vì ta có hợp thành $f \circ g$ của hai phép biến hình f và g cho trước.

Theo định nghĩa, hai đường thẳng song song thì không cắt nhau, vì vậy ảnh của chúng qua một phép biến hình vẫn là hai đường thẳng song song. Cũng vì vậy mà mọi phép biến hình sẽ biến một hình bình hành thành một hình bình hành khác. Nếu f cố định gốc toạ độ nghĩa là $f(O) = O$, f sẽ phải là một biến đổi tuyến tính của $\mathbb{R}^2$. Biến đổi tuyến tính của $\mathbb{R}^2$ có dạng:

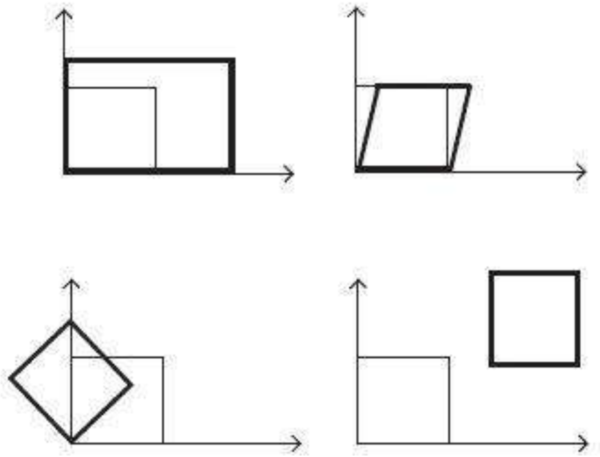
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

với a,b, c,d là các số thực thoả mãn $ad - bc \neq 0$.

Tập các ma trận vuông cỡ 2×2 với hệ số $a,b, c,d \in \mathbb{R}$ như ở trên lập thành nhóm $GL_2(\mathbb{R})$. Hợp thành của hai phép biến hình tương ứng với tích của hai ma trận.

Một phép biến hình $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, không nhất thiết cố định gốc toạ độ, sẽ là hợp thành của một ánh xạ tuyến tính với một ma trận vuông a,b, c,d như ở trên và một phép tịnh tiến theo vector $(e, f) \in \mathbb{R}^2$ nào đó:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$



Như vậy, một phép biến hình f sẽ được xác định bởi một ma trận $g \in GL_2(\mathbb{R})$ và một vector $u \in \mathbb{R}^2$ theo công thức:

$$f(v) = gv+u$$

với mọi $v \in \mathbb{R}^2$.

Vì vậy, tập A các phép biến hình chỉ đơn giản là tích trực tiếp $GL_2(R) \times \mathbb{R}^2$. Chú ý rằng phép hợp thành thì phức tạp hơn chút ít: nếu $f_1(v) = g_1v+u_1$ và $f_2(v) = g_2v+u_2$ thì ta có

$$f_1 \circ f_2(v) = g_1g_2(v) + u_1 + g_1u_2.$$

Công thức trên cho thấy nhóm A các phép biến hình affine là tích nửa trực tiếp

$$A = GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2,$$

mà mỗi phần tử là một cặp (g,u) với $G \in GL_2(\mathbb{R})$ và $u \in \mathbb{R}^2$ và luật hợp thành cho bởi công thức $(g_1,u_1)(g_2,u_2) = (g_1g_2, u_1 + g_1u_2)$.

Các định lý trong hình học phẳng chỉ có điểm, đường thẳng, đường thẳng song song như định lý Thales, Ceva, Melenaus ... có thể quy về cấu trúc của nhóm các phép biến hình affine A.

Ở trong bài này, chúng ta bỏ qua phần này để đi tiếp đến phần thú vị hơn của hình học phẳng với sự hiện diện của góc và đường tròn. Sự hiện diện của góc và đường tròn tương ứng với nhóm con của A bao gồm các phép biến hình bảo giác.

2. Phép biến hình bảo giác của mặt phẳng

Hình học phẳng trở nên thực sự thú vị khi có thêm khái niệm khoảng cách. Khoảng cách từ điểm $P = (x, y)$ đến gốc toạ độ O được cho bởi công thức của Pythagore:

$$OP = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Bên cạnh toạ độ Descartes $P = (x, y)$ ta còn có thể xác định một điểm $P \neq O$ trên mặt phẳng bằng toạ độ cực (r,φ) với $r = OP$ và $\varphi \in [0,2\pi)$ là góc định hướng từ tia Ox đến tia OP. Để chuyển từ toạ độ cực sang toạ độ Descartes ta có công thức:

$$(x, y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$$

Phép biến hình $f \in A$ cố định gốc toạ độ, bảo toàn khoảng cách, và góc định hướng, bắt buộc phải là phép quay quanh gốc toạ độ. Phép quay quanh gốc toạ độ ρ_θ với góc quay θ là biến đổi tuyến tính:

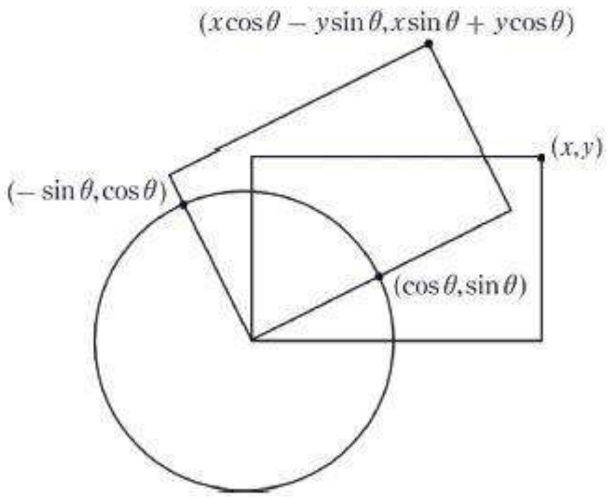
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ta có thể suy các đẳng thức lượng giác quen thuộc:

$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$$
$$\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'$$

từ công thức hợp thành của phép quay

$$\rho_\theta \circ \rho_{\theta'} = \rho_{\theta+\theta'}$$



bằng cách thực hiện phép nhân ma trận. Nhóm các ma trận quay ρ_θ được ký hiệu là $SO_2(\mathbb{R})$, đẳng cấu với nhóm S^1 các điểm trên đường tròn đơn vị.

Tổng quát hơn, phép biến hình $f \in A$ cố định gốc toạ độ và bảo toàn góc có định hướng, sẽ là hợp thành của một phép quay ρ_θ và một phép vị tự với tỉ số vị tự là một số thực dương $r \in \mathbb{R}_+$. Ta thấy nhóm các phép biến hình bảo giác và cố định gốc toạ độ là

$$S^1 \times \mathbb{R}_+.$$

Tác động của các phép biến hình bảo giác lên mặt phẳng có thể được mô tả một cách tiện lợi nhờ vào các số phức. Ta đồng nhất mặt phẳng thực $\mathbb{R}^2$ với tập các số phức $\mathbb{C}$ bằng cách gán điểm có toạ độ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ với số phức $z = x+iy$. Khi đó tập các phép biến hình bảo giác và cố định gốc toạ độ là

$$S^1 \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{C}^\times,$$

trong đó phép quay quanh gốc toạ độ ρ_θ với góc quay **θ tương ứng với số phức $e^{i\theta}$, phép vị tự tỉ số $r \in \mathbb{R}_+$ tương ứng với số thực $r \in \mathbb{C}^\times$ và hợp thành của chúng tương ứng với số phức $re^{i\theta}$. Tác động của $\mathbb{C}^\times$ trên $\mathbb{C}$ được cho bởi phép nhân số phức $(a,z) \longmapsto az$. Ta thấy nhóm B tất cả các phép biến hình bảo giác là nhóm

$$B = \mathbb{C}^\times \rtimes \mathbb{C}.$$

Mỗi phần tử $g = (a,b) \in \mathbb{C}^\times \rtimes \mathbb{C}$ tác động lên $\mathbb{C}$ theo công thức $g(z) = az+b$.

Sau khi đồng nhất mặt phẳng Euclid với tập số phức $\mathbb{C}$, nhóm các phép biến hình bảo giác với nhóm $B = \mathbb{C}^\times \rtimes \mathbb{C}$, ta có thể xem lại các tính chất cơ bản trong hình học phẳng qua lăng kính của lý thuyết bất biến.

Đại lượng bất biến cơ bản đối với tác động của B lên $\mathbb{C}$ là tỉ số đơn

$$(z_1; z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}.$$

Thật vậy, với mọi $g \in B$, sử dụng công thức $g(z) = az+b$ ta dễ thấy

$$(gz_1; gz_2, gz_3) = (z_1; z_2, z_3).$$

Các tính chất cơ bản về đường và điểm có thể biểu đạt gọn gàng nhờ vào tỉ số đơn:

- z_1, z_2, z_3 là ba điểm thẳng hàng khi và chỉ khi tỉ số đơn $(z_1; z_2, z_3)$ là một số thực:

$$(z_1; z_2, z_3) \in \mathbb{R}.$$

- Hai tia z_1z_2 và z_1z_3 tạo thành một góc vuông khi và chỉ khi tỉ số đơn $(z_1 : z_2 : z_3)$ là một số thuần ảo:

$$(z_1; z_2, z_3) \in i\mathbb{R}.$$

- Ba điểm z_1, z_2, z_3 là đỉnh của một tam giác đều sắp xếp theo chiều kim đồng hồ khi và chỉ khi

$$(z_1; z_2, z_3) = -j$$

với $j = e^{2i\pi/3}$ là căn bậc ba nguyên thuỷ của đơn vị. Dễ thấy điều này tương đương với

$$z_1 + jz_2 + j^2 z_3 = 0.$$

Ta có thể thử nghiệm ứng dụng các quan sát này để chứng minh một số định lý hình học đơn giản bằng số phức. Một ví dụ tiêu biểu là định lý về đường thẳng Euler chạy qua trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác. Sử dụng phép biến hình ta có thể giả sử ba đỉnh của tam giác là ba số phức z_1, z_2, z_3 nằm trên đường tròn đơn vị. Khi đó tâm đường tròn ngoại tiếp sẽ là số phức $0 \in \mathbb{C}$. Trọng tâm của tam giác sẽ là số phức $(z_1 + z_2 + z_3)/3$. Sử dụng tiêu chuẩn tỉ số đơn cho góc vuông, ta thấy rằng trực tâm của tam giác sẽ là số phức $z_1 + z_2 + z_3$. Ta nhận thấy trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp là ba điểm thẳng hàng, trọng tâm nằm giữa tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm theo tỉ lệ 1 : 2.

3. Tỉ số chéo

Còn quan trọng hơn tỉ số đơn là khái niệm tỉ số chéo, tức là tỉ số giữa hai tỉ số đơn:

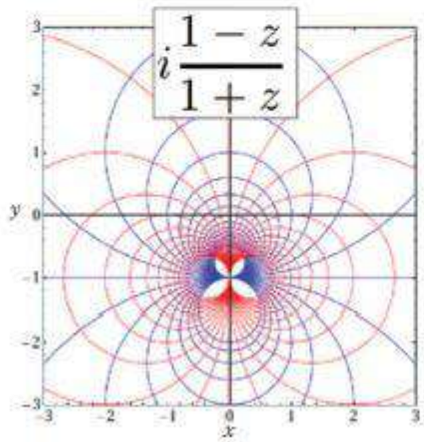
$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} = \frac{(z_1; z_3, z_4)}{(z_2; z_3, z_4)}$$

Có thể chứng minh được rằng tỉ số chéo $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ là một số thực khi và chỉ khi bốn điểm z_1, z_2, z_3, z_4 hoặc thẳng hàng, hoặc cùng nằm trên một đường tròn. Thật vậy, tuỳ vào z_1, z_2 nằm cùng phía hay nằm hai phía so với đường thẳng chạy qua z_3 và z_4, tiêu chuẩn tỉ số chéo tương đương với việc góc nhìn từ z_1 và z_2 xuống đoạn thẳng z_3z_4 là hai góc bằng nhau hay là hai góc đối nhau.

Nếu hoán vị 4 điểm z_1, z_2, z_3, z_4, tỉ số chéo $\lambda = (z_1, z_2; z_3, z_4)$ sẽ biến thành một trong 6 số phức $\lambda, \lambda^{-1}, 1 - \lambda, (1 - \lambda)^{-1}, 1 - \lambda^{-1}, (1 - \lambda^{-1})^{-1}$. Rõ ràng nếu một trong sáu số này là số thực thì cả năm số còn lại cũng là những số thực. Tuy nhận xét này rất tầm thường, bạn đọc nên lưu ý rằng một mẹo khá phổ biến trong các bài toán hình học phẳng là sử dụng dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp cho các cặp góc khác nhau. Mẹo này tương ứng với việc tính tỉ số kép sau khi hoán đổi vị trí các điểm.

Tỉ số chéo bất biến đối với những phép biến hình tổng quát hơn các biến hình bảo giác của mặt phẳng, điển hình là các phép nghịch đảo trong hình học sơ cấp. Các phép nghịch đảo biến đường tròn thành đường tròn hoặc đường thẳng, và vì thế nó là một công cụ khá thú vị trong hình học sơ cấp. Một đặc thù của phép nghịch đảo là nó biến tâm của phép nghịch đảo thành điểm ở vô hạn. Ánh xạ $z \longmapsto z^{-1}$ là một phép nghịch đảo điển hình.

Các phép nghịch đảo là phần tử của nhóm G các phép biến hình Moebius. Nhóm này tác động lên đường thẳng xạ ảnh phức $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ $(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Nhóm G chứa $B = \mathbb{C}^{\times} \times \mathbb{C}$ như nhóm con các phần tử $g \in G$ cố định điểm ∞ trong $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ và như vậy B tác động lên $\mathbb{C}$ như chúng ta đã biết.



Ta hiểu một điểm của $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ như một không gian vector con một chiều trong không gian vector hai chiều $\mathbb{C}^2$ trên trường số phức. Mỗi đường thẳng phức như vậy được sinh bởi một vector $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ khác không. Như vậy một điểm của $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ có thể xem như một lớp tương đương trong các vector $(x, y) \in \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ theo quan hệ tương đương: (x_1, y_1) ⍰ (x_2, y_2) khi và chỉ khi tồn tại $t \in \mathbb{C}^{\times}$ sao cho $x_2 = tx_1$ và $y_2 = ty_1$. Ta ký hiệu lớp tương đương này là

$$(x : y) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Nếu toạ độ $y \neq 0$, ta có $(x, y) \sim (xy^{-1}, 1)$ và vì vậy mỗi điểm của $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ với toạ độ $y \neq 0$

tương ứng với đúng một số phức $z = xy^{-1} \in$ C. Điểm còn lại là điểm với toạ độ $y = 0$ mà ta ký hiệu là điểm ∞.

Nhóm các biến đổi tuyến tính của $\mathbb{C}^2$ là nhóm các ma trận khả nghịch với hệ số phức

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

Nhóm này tác động lên $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ theo công thức

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x:y) = (ax+by:cx+dy).$$

Do các ma trận ở dạng

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

với $a \in \mathbb{C}^{\times}$ tác động tầm thường trên $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, nhóm các biến hình Moebius là nhóm

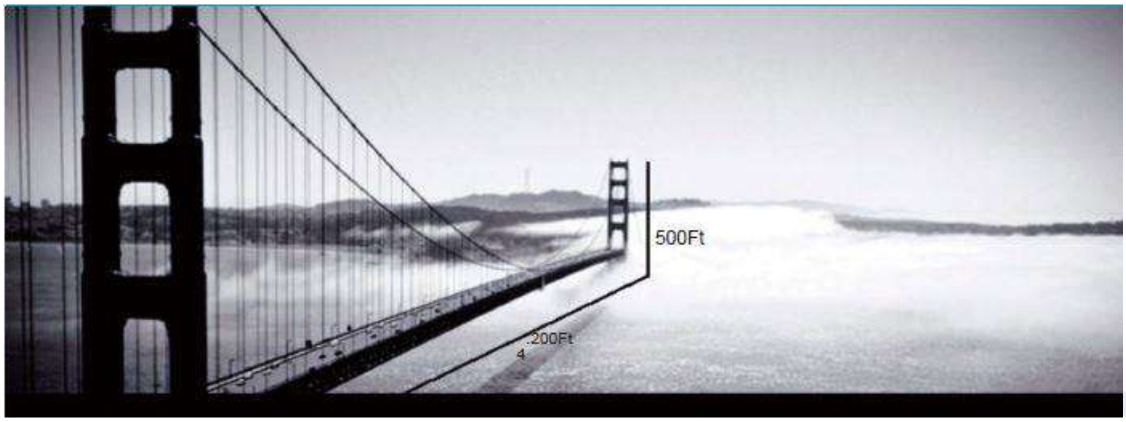
$$G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^{\times}.$$

Nhóm con của G cố định điểm ∞ tương ứng với các ma trận có$\mathbb{C}$= 0 và vì thế nó chính là nhóm B =$\mathbb{C}$× o C. Nhóm G = PGL2($\mathbb{C}$) là nhóm các biến đổi bảo giác của đường thẳng xạ ảnh phức $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

4. Kết luận

Các bài toán hình học trên mặt phẳng đều có thể phát biểu lại thành một bài toán về tỉ số đơn, đại lượng bất biến của nhóm *B* các biến đổi bảo giác của đường thẳng phức $\mathbb{C}$, hoặc về tỉ số chéo, đại lượng bất biến của nhóm *G* các biến đổi bảo giác của đường thẳng xạ ảnh phức $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Trên nguyên tắc mọi bài toán hình học đều có thể chuyển về một bài toán trong lý thuyết bất biến, và giải quyết được trong lý thuyết bất biến bằng thuật toán. Lời giải đôi khi đơn giản hơn, nhưng thường thì cồng kềnh hơn, ít thú vị hơn so với lời giải hình học. Thực ra có thể phiên dịch các lời giải hình học sơ cấp sang lý thuyết bất biến và bản dịch sẽ là một dãy những tính toán bất biến ít nhiều lắt léo. Lời giải như thế tất nhiên có thể sẽ gọn gàng hơn so với lời giải máy móc bằng thuật toán. Tuy nhiên việc tồn tại một thuật toán máy móc để giải quyết tất cả các bài toán hình học sơ cấp làm chuyên ngành này mất đi sức cuốn hút mà nó vốn có.

Hình học hiện đại nghiên cứu nhiều hơn về các nhóm Lie, như nhóm $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, và các không gian thuần nhất, như đường thẳng xạ ảnh phức $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, với tác động bắc cầu của nhóm Lie.



ỨNG DỤNG TOÁN HỌC TRONG MẬT MÃ VÀ NHỮNG GIẢI PHÁP BẤT NGỜ

■ **PHẠM HUY ĐIỂN**

Sự hiện diện của các công cụ toán học trong kỹ thuật mật mã không chỉ giúp giải quyết được vấn đề hóc búa tồn tại trong suốt hơn 2 ngàn năm lịch sử của nó, mà còn mang lại khả năng đương đầu một cách hiệu quả với những thách thức hoàn toàn mới chưa từng có trước đây, và đặc biệt đã mang lại những ứng dụng độc đáo không ngờ tới.

PHẦN 1: NHỮNG VẤN ĐỀ KHÓ CỦA AN TOÀN THÔNG TIN VÀ GIẢI PHÁP TỪ TOÁN HỌC

Những vấn đề nan giải của an toàn thông tin ngày nay

Chuyển chìa khóa mã - vấn đề nan giải ngàn năm của các hệ mã bí mật

Với các hệ mã bí mật truyền thống thì việc lập mã và giải mã được thực hiện với cùng một chìa khóa mã hoặc là 2 chìa *"liên thông"* với nhau. Điều này làm nảy sinh vấn đề nan giải là phải chuyển chìa khóa mã từ người lập mã đến cho người giải mã. Khó khăn là ở chỗ con đường trung chuyển thường rất *không an toàn* (về nguyên tắc: nếu có được con đường an toàn thì có thể dùng nó để chuyển thông tin, hà tất cần đến mật mã!!!). Vấn đề này đã khiến giới làm mật mã đau đầu suốt hơn 2 ngàn năm qua, và thường chỉ được giải quyết bằng những giải pháp mang tính riêng rẽ, nhất thời cho từng vụ việc (với cái giá phải trả thường là rất đắt). Người ta rất cần một giải pháp xử lý tổng quát cho vấn đề này.

Vấn đề toàn vẹn thông tin và ký văn bản điện tử

Thông tin trên giấy không dễ dàng tẩy xóa (mà không lộ dấu vết), cho nên mọi ý đồ *"chỉnh sửa, bóp méo"* dễ dàng bị phát hiện. Trong khi đó, việc chỉnh sửa văn bản điện tử lại không hề để lại dấu vết, cho nên nội dung văn bản dễ dàng bị thay đổi và làm sai lệch. Làm sao để người ta có thể phát hiện ra?

Chữ ký tay trên một văn bản giấy là không thể tách rời ra khỏi văn bản, cho nên nó là nhân tố khẳng định chủ quyền của người ký đối với văn bản đó. Ngược lại, với văn bản điện tử thì mọi thành phần có thể được sao chép, cắt dán một cách dễ dàng từ văn bản này sang văn bản khác. Làm sao xác định được ai là người đã ký một văn bản điện tử, và liệu nội dung của nó có bị thay đổi sau khi ký hay không?

Vấn đề "Ai là ai?" trong mạng thông tin điện tử

Khi giao tiếp qua mạng máy tính, người ta không trực tiếp bắt tay nhau, và cũng không thể dùng hình ảnh mặt người hay dấu vân tay để nhận diện nhau (vì chúng dễ dàng được sao chép, chỉnh sửa). Trong bối cảnh ấy, làm sao có thể xác định được chính xác "ai là ai" qua mạng?

Những đòi hỏi mới từ thực tiễn hiện tại

Hiện nay, những vấn đề về an toàn thông tin điện tử không chỉ là của riêng giới chuyên môn mật mã, mà là của mọi người dân. Các giải pháp phục vụ cho cộng đồng luôn được đòi hỏi phải có tính *công khai, đại chúng và đơn giản trong sử dụng*. Những yêu cầu này là chưa từng có đối với các giải pháp trước đây (vốn nó chỉ dành cho các đối tượng có nghiệp vụ cơ yếu).

Như vậy, công tác an toàn thông tin thời nay không chỉ là việc che giấu thông tin (bằng các thuật toán mã ngày càng mạnh), mà là bao gồm tất cả các vấn đề đặt ra ở trên. Chính các yêu cầu này buộc người ta phải thay đổi cách làm truyền thống để tìm đến với các phương pháp hoàn toàn mới, và trên thực tế đã tìm được sự hỗ trợ đắc lực của Toán học.

Một số bài toán khó trong Số học

Bài toán phân tích ra thừa số nguyên tố

Đây là bài toán kinh điển và có một quy trình khá đơn giản về mặt ý tưởng để thực hiện việc này: chỉ việc lấy số n cần phân tích đem chia cho các số nguyên tố nhỏ hơn $\sqrt{n}$ (có trong *sàng Ơ-ra-tô-xten*). Tuy nhiên, khi n là một số lớn thì cách làm này là không khả thi. Để hình dung ra được phần nào tính phức tạp của vấn đề, ta xem bảng dưới đây để biết khoảng thời gian cần thiết cho việc phân tích một số nguyên *n* ra thừa số nguyên tố bằng thuật toán nhanh nhất được biết đến hiện nay (với máy tính có tốc độ 1 triệu phép tính trong 1 giây.)

Số chữ số thập phân	Thời gian
75	104 ngày
100	74 năm
200	3.8 tỉ năm

Nói chung, bài toán phân tích một số ra các thừa số nguyên tố cho đến hiện nay vẫn là một bài toán hết sức khó khăn.

Bài toán tính logarit rời rạc và "khai căn" rời rạc

Với *a,m* là những số tự nhiên cho trước thì việc tính

$$k = a^n \bmod m \quad (*)$$

đối với mỗi số tự nhiên *n*, là khả thi và cũng khá nhanh (cho dù các số này có thể là rất lớn). Nhưng bài toán ngược lại, cho trước số tự nhiên *k* và phải tìm số tự nhiên *n* thỏa mãn $(*)$, lại là một bài toán vô cùng khó, và được gọi là tính *logarit rời rạc*. Ta biết rằng việc tính logarit thông thường (với số thực) thì không được xem là khó (và luôn khả thi với ngay cả máy tính cầm tay), thế nhưng việc tính logrit rời rạc thì hoàn toàn khác hẳn. Một trong những nguyên nhân làm nên tính khó giải của bài toán này là ở chỗ "hàm logarit rời rạc" biến thiên rất thất thường, khiến cho người ta dù biết được giá trị của hàm tại một điểm nào đó cũng chẳng thể nói gì về giá trị của hàm tại những điểm xung quanh.

Tương tự như vậy, khi biết trước các số tự nhiên *k* và *n* thì việc tìm số a thỏa mãn $(*)$ cũng là một bài toán vô cùng khó, và được gọi là bài toán "khai căn rời rạc".

Thông thường, khi giải được những bài toán khó thì người ta thấy sung sướng, và khi giải không được thì sẽ thấy khó chịu. Nhưng ở đây có một nghịch lý: một khi những bài toán trên còn chưa được giải thì người ta còn thấy sung sướng, vì rằng tính khó giải của chúng đã trở thành chỗ dựa cho một số thuật toán mật mã không thể phá, và thậm chí còn là giải pháp cho cuộc cách mạng trong công nghệ mật mã hiện nay.

Để cho đơn giản, trên đây ta chỉ đề cập đến mấy bài toán phổ thông, còn trong thực tế, mã hóa ngày nay phát triển rất xa, dựa trên nhiều bài toán khó của toán học hiện đại mà ta không thể trình bày trong khuôn khổ một bài viết ngắn.

Thuật toán mật mã dựa trên bài toán khó

Mã hóa hiện đại làm việc trên các dữ liệu số hóa, cho nên việc mã hóa dữ liệu (bao gồm cả văn bản, hình ảnh, âm thanh,. . .) đều trở thành việc mã hóa các con số, và khi ấy một "khối văn bản" cũng chính là một con số nào đó.

Thuật toán mã mũ Pohlig – Hellman

Chọn trước ρ là một *số nguyên tố không nhỏ* (không cần giữ bí mật), và chọn một số tự nhiên e làm chìa khóa, thỏa mãn điều kiện $(e,\rho-1) = 1$ (tức là hai số này nguyên tố cùng nhau). Khi ấy, một khối văn bản N được mã thành khối C theo công thức sau

$$C \equiv N^e \bmod \rho.$$

Để giải mã, người ta không thể "khai căn rời rạc" vì bài toán này vô cùng khó, mà phải làm cách khác. Trước hết, tính số nghịch đảo của e theo mod $(\rho-1)$ tức là số d thoả mãn $de \equiv 1 \bmod (\rho-1)$ (việc này không khó, theo thuật toán Euclid mở rộng), rồi sau đó áp dụng định lý Fermat (bé) để chỉ ra rằng

$$C^d \bmod \rho = N$$

Như vậy, công việc giải mã là khá dễ dàng khi ta biết số của e, và cùng với nó là d. Do vậy, cả hai số này đều phải cùng được giữ bí mật (vì biết số này thì dễ dàng tìm ra số kia, tức là chìa khóa lập mã và chìa khóa giải mã "liên thông nhau").

Thuật toán chuyển chìa khóa Diffie-Hellman

Với các hệ mã hiện đại, *chìa khóa mã* cũng chính là *một con số* nào đó. Rõ ràng, việc chuyển chìa khóa cũng tương đương với việc truyền thông tin cần thiết để hai bên cùng tính ra một con số chung làm chìa khóa.

Để làm việc này, ta chọn số nguyên tố ρ đủ lớn và chọn g là *phần tử sinh* của nhóm các thặng dư theo mod ρ. Để có chung chìa khóa cho một phiên giao dịch thì A và B làm như sau: A chọn ngẫu nhiên một số x và gửi cho B số $X = g^x$; đồng thời B cũng chọn ngẫu nhiên một số y rồi gửi cho A số $Y = g^y$. Khi ấy, cả A và B cùng tính được con số chung là

$$K = Y^x = (g^y)^x = (g^x)^y = X^y.$$

Trong khi đó, người ngoài cuộc không thể biết được gì ngoài các số X,Y mà từ đó không thể nào tính ra được K.

Nhận xét: Như vậy, thuật toán Diffie-Hellman đã đem lại một giải pháp xử lý tuyệt vời cho vấn đề nan giải hàng ngàn năm qua của giới làm mật mã.

Thuật toán mã hóa khóa công khai RSA

Những khó khăn trong việc chuyển chìa khóa mã (đối với các hệ mã truyền thống) đã khiến cho những người làm mật mã cuối thế kỉ XX nghĩ tới một *mô hình hệ mật mã phi đối xứng* với hai chìa khóa riêng biệt cho 2 việc lập mã và giải mã. Mỗi cá thể tham gia vào hệ thống như vậy sẽ được cấp một cặp chìa khóa, trong đó *chìa khóa lập mã* có thể được công bố công khai cho mọi người biết (nên được gọi là *chìa công khai*), còn *chìa khóa giải mã* thì chỉ một mình cá thể đó được biết (nên được gọi là *chìa bí mật* hay *chìa khóa riêng*). Điều cần lưu ý là từ chìa công khai không thể tính ra được chìa bí mật. Mọi người trong hệ thống đều có thể mã hóa dữ liệu để gửi cho một cá thể nào đó (bằng chìa khóa công khai của cá thể này), và chỉ một mình cá thể này có thể giải mã được các tài liệu mật (được mã hóa bằng chìa công khai của mình). Điều này cũng giống như là mọi người đều có thể gửi thư mật cho một người thông qua cửa khe của hòm thư báo đặt trước cửa nhà, và chỉ có người ấy mới có chìa khóa mở thùng lấy thư ra đọc (ở đây cửa khe đóng vai trò *chìa khóa công khai*, còn *chìa khóa bí mật* chính là chìa mở thùng thư). Hệ mật mã như vậy còn được gọi là hệ mã có chìa khóa công khai (gọi tắt là ***hệ mã khóa công khai***). Hệ mã này đã được "hiện thực hóa" vào những năm cuối của thập kỉ bảy mươi thế kỷ trước, nhờ sự thâm nhập của số học vào công nghệ mã.

Hệ mã khóa công khai RSA

Hệ mã này lần đầu tiên được công bố vào năm 1978 bởi ba nhà khoa học của Học viện Công nghệ Massachuset (Hoa Kỳ) là R. Rivest, A. Shamir và L. Adleman. Để xây dựng hệ mã, người ta chọn hai số nguyên tố p và q đủ lớn (có độ dài vào cỡ 150 chữ số thập phân) và tính các số $n = p.q$, $\varphi = (p-1).(q-1)$. Sau đó, chọn số tự nhiên e thỏa mãn $(e,\varphi) = 1$ và tính số $d = e^{-1}$ mod φ bằng thuật toán Euclid mở rộng.

Dùng bộ số (e,n) làm *chìa khóa công khai*, người ta mã hoá mỗi khối *văn bản P* theo công thức

$$C = P^e \bmod n,$$

và số C được gọi là khối *văn bản mã* tương ứng với P.

Để giải mã khối *văn bản mã C*, người ta áp dụng định lý Euler (mở rộng định lí nhỏ của Fermat) và chỉ ra rằng

$$C^d \bmod n = P.$$

Như vậy, phép giải mã được tính tương tự như phép lập mã cho nên là khả thi, với tốc độ khá nhanh. Điểm mấu chốt của *quy trình giải mã* là phải biết được số $d = e^{-1}$ mod φ, nên người ta gọi cặp hai số (d,n) là *chìa khoá giải mã* (hay *chìa bí mật*).

Rõ ràng, từ e muốn tính ra d thì phải biết được φ và điều này tương đương với việc phân tích số n thành tích $p.q$, một điều mà các máy tính mạnh nhất hiện nay không thể làm được trong cả ngàn năm khi số n có chiều dài khoảng 300 chữ số thập phân.

Độ an toàn của hệ mã RSA

Sau khi Rivest, Shamir và Adleman công bố phát minh về hệ mã đã nêu, trên tạp chí *Nhà khoa học Mỹ* có đưa ra lời thách thức người đọc bẻ khoá một mẩu tin nhỏ đã được mã hoá với:

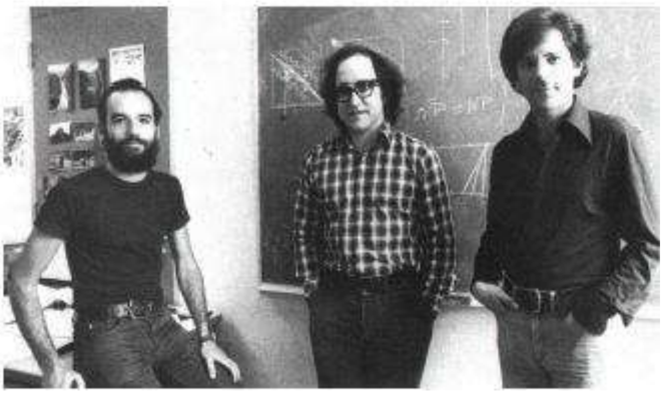
n =114381625757888867669235779976146612010218296721242362562561842935706935245733897830597123563958705058989075147599290026879543541.

e = 9007.

Một mẩu tin ngắn dưới dạng mã (chưa đầy một dòng) chỉ được giải mã sau 6 năm, bằng một cố gắng tổng lực với việc sử dụng 1600 máy tính cực mạnh tấn công trong 8 tháng để phân tích số **n** nêu trên ra thừa số nguyên tố. Điều này cho thấy thuật toán RSA là rất an toàn, vì trên thực tế hệ mã RSA tiêu chuẩn yêu cầu số **n** có độ dài lớn hơn hai lần con số nêu trên, và việc phân tích đòi hỏi thời gian kéo dài trong nhiều ngàn năm.

Phía sau trang lịch sử về RSA

Thiên hạ ngày nay đều biết hệ mã RSA được phát minh ra vào năm 1978 bởi 3 nhà khoa học của học viện MIT (Hoa Kỳ) là Rivest, Shamir, và Adleman (trong ảnh, theo thứ tự từ trái qua phải).



Thế nhưng vào năm 1997, Tổng hành dinh Thông tin Chính phủ Anh Quốc (GCGQ) đã tiết lộ sự thật về việc các chuyên gia mật mã của họ đã phát minh ra *thuật toán mã hóa phi đối xứng* giống như RSA vào năm 1972 bởi **Clifford Cocks** và *giao thức chuyển chìa khóa* kiểu Diffie-Hellman vào năm 1975 (bởi **Malcolm Williamson**). Cả hai người, C. Cocks và M. Williamson, đều từng là thành viên đội tuyển Anh đi thi toán quốc tế ở Moscow năm 1968 (đoạt Huy chương Bạc và Huy chương Vàng, theo thứ tự), và sau đó họ đều tốt nghiệp Đại học Cambridge về chuyên ngành lý thuyết số rồi cùng vào làm việc tại GCHQ.

British team for the Mathematical Olympiad in 1968 in Mosco

Một điều khác biệt thú vị giữa hai nhóm phát minh nói trên là ở chỗ, các nhà khoa học "lão làng" tìm ra giải pháp sau nhiều tháng bàn cãi đến đau đầu, trong khi các "tân binh" trẻ tìm ra nó một cách khá nhanh chóng và nhẹ nhàng, đến mức họ không ý thức được tầm quan trọng của kết quả tìm được.

Tương lai của các hệ mã phi đối xứng

Trên đây chỉ là đôi nét "chấm phá" về bức tranh mã hóa thông tin thời nay mà ta có thể cảm nhận được từ góc nhìn của toán phổ thông. Như đã nói, mật mã hiện đại đã phát triển rất xa, dựa trên nhiều thành tựu mới của Toán học hiện đại, trong đó có hệ mã phi đối xứng dựa trên đường cong elliptic đang được dùng ngày càng phổ biến và sẽ thay thế RSA trong tương lai không xa.

Điều bất ngờ về mã hóa phi đối xứng là nó đã gây thất vọng lớn cho những người làm mật mã ngay sau khi ra đời chẳng bao lâu, khi họ phát hiện ra tốc độ của nó quá chậm chạp (chậm hơn cả ngàn lần so với các hệ mã đối xứng với cùng cấp độ bảo mật). Và điều bất ngờ hơn thì là chính nó lại trở thành công cụ đắc lực cho việc giải quyết các vấn đề hóc búa của an toàn thông tin hiện đại mà ta đã nêu ra ở trên, như sẽ thấy trong phần tiếp theo của bài viết này.

GIẢI TOÁN CÙNG BẠN

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP: LÀM ĂN LỚN CẦN VAY NỢ NHIỀU!

■ HÀ HUY KHOÁI

Ta thử làm bài toán sau đây:

Chứng minh rằng, với mọi n nguyên dương, tồn tại số hữu tỷ r không biểu diễn được dưới dạng sau:

$$r = b + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

trong đó b là số nguyên, a_i *là các số nguyên khác 0.*

Với mọi *n*. Thế thì chắc là dùng quy nạp sẽ ổn?

Với $n = 1$: cứ lấy số hữu tỷ nằm giữa 1/2 và 1/3 là được. Giả sử kết luận đúng với *n*, cần chứng minh đúng với *n+1*. Nhưng xem ra chưa có cách gì rõ ràng để đi từ *n* sang *n+1*. Làm sao đây?

Mấu chốt của phương pháp quy nạp là ở chỗ: bạn giả sử kết luận đúng với *n* (hoặc với các số không quá *n*), chứng minh đúng với *n+1*. Như vậy, bạn đã "vay kết luận với *n*" để hy vọng thu được "lãi" là kết luận với *n+1*.

Đến đây thì một "chân lý" trong kinh doanh có thể có ích: làm ăn lớn, cần vay nợ nhiều!

Nếu ở bài trên đây, mình chỉ vay cái kết luận "tồn tại số hữu tỷ. . . " thì ít quá! Xem lại trường hợp $n = 1$: rõ ràng *mọi số* hữu tỷ trong khoảng (1/2,1/3) đều thoả mãn. Điều này gợi ý cho ta vay nhiều hơn, cụ thể là ta chứng minh khẳng định sau đây (mạnh hơn nhiều so với bài ra):

Chứng minh rằng, với mọi n nguyên dương, tồn tại các số $p_n < q_n$ *sao cho mọi số hữu tỷ r trong khoảng* (p_n,q_n) *đều không biểu diễn được dưới dạng sau:*

$$r = b + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i},$$

trong đó b là số nguyên, ai là các số nguyên khác 0.

Rõ ràng kết luận đúng với $n = 1$. Giả sử kết luận đúng với *n*, cần chứng minh đúng với $n + 1$. Khi bài toán "mạnh" lên, thì giả thiết quy nạp cũng mạnh lên theo. Nói cách khác, ta vay vốn nhiều hơn trước. Hy vọng sẽ có lãi to hơn! Như vậy, giả sử đã có $p_n <$

q_n sao cho mọi số hữu tỷ r trong khoảng (p_n,q_n), đều không biểu diễn được dưới dạng:

$$r = b + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i},$$

trong đó *b* là số nguyên, a_i là các số nguyên khác 0.

Ta hy vọng nếu thu hẹp đoạn này chút nữa thì trong đó mọi số hữu tỷ đều không biểu diễn được dạng đã nêu, với n thay bởi *n + 1*. Hơn nữa, nếu tìm được khoảng *(p_{n+1},q_{n+1})* mà trong đó chỉ có hữu hạn điểm hữu tỷ biểu diễn được dạng trên, thì dễ thu hẹp khoảng đó hơn nữa để *không tồn tại* số hữu tỷ nào có dạng đã nêu được chứa trong khoảng.

Ta thử thu hẹp khoảng *(p_n,q_n)* một cách đơn giản bằng cách đặt:

$$d = q_n - p_n,\ p_{n+1} = p_n + \frac{d}{3};\ q_{n+1} = q_n - \frac{d}{3}$$

Cần chứng minh trong khoảng *(p_{n+1},q_{n+1})* chỉ có hữu hạn số hữu tỷ r có thể biểu diễn dạng:

$$r = b + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i},$$

trong đó b là số nguyên, a_i *,i = 1,2,⋯ ,n+1*, là các số nguyên khác 0.

Giả sử *r* là một số có dạng như trên. Để sử dụng giả thiết quy nạp, rõ ràng cần bớt đi một số hạng dạng $\frac{1}{a_i}$ ở vế phải. Giả sử *l* là số nguyên tuỳ ý, 1 ≤ *l* ≤ n+1. Xét số:

$$r - \frac{1}{a_l} = b + \sum_{i=1, i\neq l}^{n+1} \frac{1}{a_i}$$

Theo giả thiết quy nạp, số $r - \frac{1}{a_l}$ không thuộc khoảng *(p_n,q_n)*. Tất nhiên có thể xem p_n,q_n vô tỷ, và ta có một trong hai trường hợp sau: $r - \left(\frac{1}{a_l}\right) > q_n$ hoặc $r - \left(\frac{1}{a_l}\right) < p_n$. Trước tiên, giả sử $r - \left(\frac{1}{a_l}\right) > q_n$. Do cách xây dựng q_{n+1}, ta có:

$$\frac{1}{a_l} < r - q_n < (q_n - \frac{d}{3}) - q_n = -\frac{d}{3}.$$

Như vậy, *−al* là số nguyên dương không vượt quá $\frac{3}{d}$ tức là *al* chỉ có thể nhận hữu hạn giá trị. Lý luận tương tự cho trường hợp $r - \left(\frac{1}{a_l}\right) < p_n$ ta thấy rằng, với mỗi *l,1 ≤ l ≤ n+1*, chỉ tồn tại hữu hạn số hữu tỷ có dạng đã nêu và thuộc khoảng *(p_{n+1},q_{n+1})*. Như vậy, chỉ tồn tại hữu hạn số hữu tỷ r trong khoảng *(p_{n+1},q_{n+1})* có dạng:

$$r = b + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i},$$

trong đó *b* là số nguyên và a_i là các số nguyên khác 0.

MỘT BÀI TOÁN PHÂN TÍCH ĐA THỨC

■ **LƯU BÁ THẮNG**

Bài toán 1. (Kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, Japan, 1999) *Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng đa thức*

$$(x^2+1^2)(x^2+2^2)\cdots(x^2+n^2)+1$$

không phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1.

Chứng minh. Đặt $f(x) = (x^2 + 1^2)(x^2 + 2^2)\cdots(x^2 + n^2) + 1$. Giả sử $f(x) = g(x)h(x)$ với $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $\deg g(x) \geq 1, \deg h(x) \geq 1$.

Do $f(x)$ là đa thức có hệ số bậc cao nhất bằng 1 nên ta có thể giả sử hệ số bậc cao nhất của $g(x), h(x)$ cũng bằng 1.

Do $f(ki) = 1$ với $k = -n, -n+1, \ldots, -1, 1, \ldots, n$ và i là số phức đơn vị nên $g(ki)h(ki) = 1$ với $k = -n, -n+1, \ldots, -1, 1, 2, \ldots, n$.

Chú ý rằng $g(ki)$ và $h(ki)$ là các số có dạng $a + bi$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ nên từ $g(ki)h(ki) = 1$ ta suy ra $(g(ki), h(ki)) \in \{(-1,-1), (1,1), (i,-i), (-i,i)\}$. Do đó $g(ki) = h(ki), h(ki)$ là liên hợp của $h(ki)$, với mọi $k = -n, -n+1, \ldots, n$.

Ta có $h(ki) = h(ki) = h(-ki)$ nên $g(ki) = h(-ki)$. Từ đó, đa thức $k(x) = g(x) - h(-x)$ là đa thức có hệ số nguyên và có bậc nhỏ hơn $2n$, nhận $2n$ phần tử phân biệt $-ni, (-n+1)i, \ldots, -i, i, 2i, \ldots, ni$ làm nghiệm nên $k(x) \equiv 0$ hay $g(x) = h(-x)$ với mọi x. Suy ra $g(0) = h(0)$. Và do đó $f(0) = g(0)^2$ là số chính phương. Mà $f(0) = (n!)^2 + 1$ nên $(n!)^2 + 1$ là số chính phương (mâu thuẫn). Vậy ta có điều phải chứng minh.

Từ bài toán trên ta đặt câu hỏi

Bài toán 2. *Cho số nguyên dương n. Đa thức*

$$(x+1^2)(x+2^2)\cdots(x+n^2)+1$$

có phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1 hay không?

Chứng minh. Câu trả lời là đa thức trên không phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1. Thật vậy, đặt $f(x) = (x+1^2)(x+2^2)\cdots(x+n^2)+1$.

Giả sử $f(x) = g(x)h(x)$ với $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $\deg g(x) \geq 1, \deg h(x) \geq 1$. Do $f(x)$ là đa thức có hệ số bậc cao nhất bằng 1 nên ta có thể giả sử hệ số bậc cao nhất của $g(x), h(x)$ cũng bằng 1.

Do $f(-k^2) = 1$ nên $g(-k^2)h(-k^2) = 1$ với $k = 1, 2, \ldots, n$.

Do $g(-k^2), h(-k^2) \in \mathbb{Z}$ nên ta suy ra $g(-k^2) = h(-k^2) = 1$ hoặc -1. Do đó đa thức $k(x) = g(x) - h(x)$ là đa thức có hệ số nguyên và có bậc nhỏ hơn n, nhận n phần tử phân biệt $-1^2, -2^2, \ldots, -n^2$ làm nghiệm nên $k(x) \equiv 0$ hay $g(x) = h(-x)$ với mọi x. Suy ra $g(0) = h(0)$. Và do đó $f(0) = g(0)^2$ là số chính phương. Mà $f(0) = (n!)^2 + 1$ nên $(n!)^2 + 1$ là số chính phương (mâu thuẫn).

Tiếp tục ta lại đặt ra câu hỏi

Bài toán 3. *Cho số nguyên dương n. Đa thức*

$$(x^4+1^2)(x^4+2^2)\cdots(x^4+n^2)+1$$

có phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1 hay không?

Rõ ràng với cách tiếp cận như cách giải hai bài toán 1 và 2, chúng ta dường như sẽ không thể trả lời cho bài toán trên. Liệu có một cách tiếp cận khác? Tình cờ chúng tôi phát hiện ra một Bổ đề, đó là bài toán thi chọn đội tuyển IMO của Romania năm2003. Nội dung của bài toán như sau.

Bổ đề 1 *(TST Romania,2003.) Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên với $\deg f(x) \geq 1$, có hệ số bậc cao nhất bằng 1, không phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1. Giả sử rằng $f(0)$ là số không chính phương. Khi đó $f(x^2)$ cũng không phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1.*

Chứng minh. Giả sử $f(x^2) = g(x)h(x)$ với $g(x),h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $\deg g(x) \geq 1, \deg h(x) \geq 1$. Do $f(x)$ là đa thức có hệ số bậc cao nhất bằng 1 nên ta có thể giả sử hệ số bậc cao nhất của $g(x),h(x)$ cũng bằng 1.

Ta có $f(x^2) = g(-x)h(-x)$ nên

$$g(x)g(-x)h(x)h(-x) = f(x^2)^2.$$

Do $g(x)g(-x)$ và $h(x)h(-x)$ là các hàm chẵn nên chúng là các đa thức không có hạng tử bậc lẻ, suy ra tồn tại $r(x),s(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho $r(x^2) = g(x)g(-x), s(x^2) = h(x)h(-x)$. Suy ra:

$$f(x)^2 = r(x)s(x)$$

và do đó $f(x) = r(x) = s(x)$ với mọi x hoặc $-f(x) = r(x) = s(x)$ với mọi x. Từ đó suy ra $s(x) = r(x)$, với mọi x hay $g(x)g(-x) = h(x)h(-x)$ với mọi x.

Do đó $g(0)^2 = h(0)^2$, nên $f(0) = h(0)^2$ là số chính phương (mâu thuẩn). Vậy điều giả sử là sai và ta có điều phải chứng minh.

Chú ý rằng điều kiện $f(0)$ là số không chính phương là chặt chẽ vì nếu $f(0)$ là số chính phương thì ta có phản ví dụ cho thấy Bổ đề là không đúng. Ví dụ $f(x) = x^2 + 4$ không phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1 nhưng đa thức $f(x^2) = x^4 + 4 = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

Từ Bổ đề trên, kết hợp với Bài toán 2, ta suy ra Bài toán 1 và Bài toán 3 bằng cách xét đa thức $f(x) = (x + 1^2)(x + 2^2)\cdots(x + n^2) + 1$. Từ cách tiếp cận này chúng ta có định lý sau:

Định lý. *Với mỗi số nguyên dương n và số tự nhiên k, đa thức*

$$(x^{2^k} + 1^2)(x^{2^k} + 2^2)\cdots(x^{2^k} + n^2) + 1$$

không phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1.

Qua các phân tích trên, chúng ta thấy rằng một bài toán có thể có nhiều cách tiếp cận khác nhau. Mỗi cách cho chúng ta một trải nghiệm và khám phá thú vị. Hi vọng bài viết này sẽ giúp các thầy cô và các em trong việc giảng dạy và học Toán sơ cấp một cách khoa học và năng động hơn.

ĐỊNH LÝ KHÔNG ĐIỂM TỔ HỢP VÀ ỨNG DỤNG

■ **VŨ THẾ KHÔI**

1. Định lí không điểm tổ hợp

Phương pháp Đại số đã được sử dụng thành công trong việc nghiên cứu nhiều bài toán tổ hợp liên quan đến cấu trúc số học hoặc hình học. Định lý Không điểm Tổ hợp (KĐTH) là một ví dụ điển hình về ứng dụng của các đa thức nhiều biến trong tổ hợp.

Trong khuôn khổ bài viết này, chúng tôi trình bày về định lý KĐTH và một số ứng dụng trong việc chứng minh các bài tập sơ cấp cũng như các định lý quan trọng trong Tổ hợp. Bài viết không chứa kết quả nào mới mà chỉ tổng hợp và trình bày lại các kết quả trong các tài liệu tham khảo [1-5].

Chúng ta xét các đa thức với hệ số trong trường $\mathbb{K} = \mathbb{R}$– các số thực hoặc $\mathbb{K} = Z_p = \{0,1,..., p - 1\}$ – hệ thặng dư modulo một số nguyên tố $p > 2$. Ký hiệu $\mathbb{K}[x_1,..., x_n]$ là tập các đa thức n biến với hệ số trong $\mathbb{K}$. Với một đa thức $f \in \mathbb{K}[x_1,..., x_n]$ ta định nghĩa *bậc* của f là bậc lớn nhất của một đơn thức trong f, trong đó bậc của một đơn thức $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ bằng $(k_1 + k_2 +\cdots k_n)$.

Ký hiệu bậc của đa thức f là *deg(f)*. Ta cũng có thể xét bậc của đa thức theo từng biến, ký hiệu là $\deg_{x_i}(f)$. Chú ý rằng ta quy ước là bậc của đa thức 0 bằng $-\infty$.

Giả sử $I = \{f_1, f_2,..., f_k\}$ là tập các đa thức. Ta gọi tập nghiệm của hệ phương trình $\{f_1(x_1,..., x_n) = 0,..., f_k(x_1,..., x_n) = 0\}$ là *tập không điểm* của I và ký hiệu bởi *Z(I)*. Các định lý Không điểm nói chung chỉ ra mối liên hệ:

Tính chất hình học của *Z(I)* ←→ tính chất đại số của tập I.

Với các ứng dụng trong tổ hợp, chúng ta xét mối liên hệ trong trường hợp đơn giản nhất.

Lực lượng của *Z(I)* ←→ bậc của các đa thức trong I.

Trong trường hợp đa thức một biến chúng ta đã biết kết quả quen thuộc sau:

Định lí 1. *Một đa thức bậc n trong $\mathbb{K}[x]$ có không quá n nghiệm (tính cả bội) trong $\mathbb{K}$.*

Chứng minh. Ta quy nạp theo bậc n. Trường hợp $n = 1$ hiển nhiên đúng. Giả sử kết luận đúng với mọi đa thức bậc nhỏ hơn n. Với một đa thức f có bậc $n > 1$, giả sử f có nhiều hơn n nghiệm. Chọn 1 nghiệm $x = a$, dùng thuật toán chia Euclid cho các đa thức ta có thể viết $f(x) = (x-a)g(x)$. Khi đó đa thức $g(x)$ có bậc $(n-1)$ nhưng lại có nhiều hơn $(n-1)$ nghiệm, trái với giả thiết quy nạp.

Ta cũng có thể phát biểu Định lý 1 theo một số dạng tương đương mà từ đó dễ mở rộng kết quả cho các đa thức nhiều biến.

Định lý 1'. *Giả sử $S \subset \mathbb{K}$ là một tập với $S = t + 1$ và f là đa thức bậc $n \leq t$ trong $\mathbb{K}[x]$ sao cho $f(a) = 0$ với mọi $a \in S$. Khi đó $f \equiv 0$.*

Định lý 1''. *Giả sử $S \subset \mathbb{K}$ là một tập với $S = t + 1$ và f là đa thức bậc t trong $\mathbb{K}[x]$. Khi đó luôn tồn tại $a \in S$, sao cho $f(a) \neq 0$.*

Định lý 1' có thể mở rộng một cách tự nhiên cho các đa thức nhiếu biến như sau.

Định lý 2. *Cho $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2,..., x_n]$ là một đa thức n biến thỏa mãn $\deg_{x_i}(f) \leq d_i$ với mọi $i = 1,2,...,n$. Cho $S_i \subset \mathbb{K}, i = 1,2,...,n$, là các tập với $S_i = d_i +1$. Khi đó nếu $f(a_1,...,a_n) = 0$ với mọi $(a_1,...,a_n) \in \prod_{i=1}^{n} S_i$ thì $f \equiv 0$.*

Chứng minh. Quy nạp theo số biến n. Trường hợp $n = 1$ chính là Định lý 1'.

Ta viết $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=0}^{d_n} f_j(x_1,\dots,x_{n-1})x_n^j$ trong đó mỗi f_j là một đa thức theo $x_1,\dots, x_{n-1}$ và $deg_{x_i}(f_j) \le d_i$ với $i = 1,\dots,n-1$ và $j = 0,1,\dots,d_n$

Với mỗi $(a_1,\dots,a_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1} S_i$ cố định thì đa thức theo biến x_n, $f(a_1,\dots,a_{n-1}, x_n)$ có $d_n + 1$ nghiệm do đó phải đồng nhất bằng 0.

Ta có $f_j(a_1,\dots,a_{n-1}) = 0$ với mọi $j = 0,\dots d_n$ và $(a_1,\dots,a_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1} S_i$. Theo giả thiết quy nạp với $(n - 1)$ biến, ta có $f_j \equiv 0$ với mọi $j = 0,\dots d_n$. Vậy $f \equiv 0$.

Một mở rộng của Định lý 1" sang trường hợp đa thức nhiều biến được đưa ra bởi Alon (1999) và được gọi là định lý Không điểm Tổ hợp.

Định lý KĐTH. *Cho $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2,\dots, x_n]$ là một đa thức với $deg(f) = d$. Giả sử f chứa một đơn thức $x_1^{t_1}x_2^{t_2}\cdots x_n^{t_n}$ với hệ số khác 0 và $\sum_{i=1}^{n} t_i = d$. Cho $S_i \subset \mathbb{K}, i = 1,2,\dots,n$ là các tập với $S_i \ge t_i + 1$. Khi đó tồn tại $(a_1,\dots,a_n) \in \prod_{i=1}^{n} S_i$ sao cho $f(a_1,\dots,a_n) \ne 0$.*

Chứng minh (cách 1). Ý tưởng chứng minh là sử dụng Định lý 2. Để làm vậy ta phải thay đổi f thành $\hat{f}$ sao cho $deg_{x_i}(\hat{f}) \le t_i$ và giá trị của f và $\hat{f}$ trùng nhau trên tập $\prod_{i=1}^{n} S_i$. Chú ý rằng ta có thể giả sử $S_i = t_i + 1$.

Với mỗi $i = 1,\dots,n$, ta có đa thức $\prod_{a \in S_i}(x_i - a) \in \mathbb{K}[x_1, x_2,\dots, x_n]$ bằng 0 trên $\prod_{i=1}^{n} S_i$. Ta nhận được $x_i^{t_i+1} = h_i$ trên $\prod_{i=1}^{n} S_i$, trong đó h_i là đa thức chỉ phụ thuộc biến x_i và $deg(h_i) \le t_i$. Do đó, trong đa thức f ban đầu ta có thể thay thế các lũy thừa của x_i với số mũ lớn hơn t_i bằng đa thức có bậc nhỏ hơn mà không làm thay đổi giá trị của f trên $\prod_{i=1}^{n} S_i$.

Sau khi thực hiện quá trình thay thế trên, ta nhận được một đa thức $\hat{f}$ mà có bậc theo mỗi biến x_i không vượt quá t_i.

Nhận xét rằng thành phần $Cx_1^{t_1}x_2^{t_2}\cdots x_n^{t_n}$ trong f vẫn không thay đổi trong quá trình thay thế trên vì nó không chứa số mũ nào quá lớn cần thay thế. Hơn nữa, nếu một số hạng $u = Cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ với $k_j > t_j$ với $k_j > t_j$ cần phải thay thế thì phải có một $k_l < t_l$ (do bậc của f bằng $d = \sum_{i=1}^{n} t_i$). Vậy khi thay u bằng đa thức có bậc nhỏ hơn thì bậc theo x_l luôn nhỏ hơn t_l vì quá trình thay thế không làm tăng bậc của một biến nào. Do đó hệ số của đơn thức $x_1^{t_1}x_2^{t_2}\cdots x_n^{t_n}$ trong $\hat{f}$ vẫn không đổi và là $C \ne 0$.

Giả sử trái lại $f(a_1,\dots,a_n) = 0$ với mọi $(a_1,\dots,a_n) \in \prod_{i=1}^{n} S_i$. Theo cách xây dựng $\hat{f}$ thì $f \equiv \hat{f}$ trên $\prod_{i=1}^{n} S_i$, vì vậy ta cũng có $\hat{f}(a_1,\dots,a_n) = 0$ với mọi $(a_1,\dots,a_n) \in \prod_{i=1}^{n} S_i$.

Cũng theo cách xây dựng, $deg_{x_i}(\hat{f}) \le t_i$. Áp dụng định lý 4 cho $\hat{f}$, ta nhận được $\hat{f} \equiv 0$. Điều này mâu thuẫn với việc $\hat{f}$ vẫn chứa số hạng $Cx_1^{t_1}x_2^{t_2}\cdots x_n^{t_n}$ với hệ số $C \ne 0$. Ta nhận được điều phải chứng minh.

Ta cũng có thể chứng minh định lý Không điểm Tổ hợp bằng quy nạp một cách ngắn gọn hơn.

Chứng minh (cách 2). Quy nạp theo d. Trường hợp $d = 1$ định lý là tầm thường. Giả sử $d > 1$, theo giả thiết quy nạp thì định lý đúng với mọi đa thức có bậc nhỏ hơn d.

Giả sử f thỏa mãn giả thiết của Định lý nhưng $f(a_1,...,a_n) = 0$ với mọi $(a_1,...,a_n) \in \prod_{i=1}^{n} S_i$.

Không mất tổng quát, giả sử $t_1 > 0$, ta cố định $\alpha_1 \in S_1$. Coi f như đa thức một biến theo x_1, ta có thể viết: $f = (x_1 - \alpha_1)g + h$ trong đó $deg(g) = deg(f) - 1$ và $deg_{x1}(h) \leq 0$.

Theo giả thiết g phải chứa đơn thức $x_1^{t_1-1}x_2^{t_2}\cdots x_n^{t_n}$ với hệ số khác 0.

Ta nhận thấy $h(a_1,a_2,...,a_n)=0$, $\forall (a_2,...,a_n) \in \prod_{i=2}^{n} S_i$. Tuy nhiên do h không phụ thuộc vào x_1 nên ta suy ra $h(a_1,a_2,...,a_n) = 0$; $\forall (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in \prod_{i=1}^{n} S_i$

Từ đó kết luận rằng $\forall (a_1,a_2,...,a_n) \in (S_1 \{\alpha\}) \times \prod_{i=2}^{n} S_i$ ta có $g(a_1,a_2,...,a_n) = 0$. Điều này trái với giả thiết quy nạp.

2. Ứng dụng

Trong mục này chúng tôi trình bày một số ứng dụng của Định lý KĐTH để đưa ra lời giải ngắn gọn cho các bài tập khó, hay đưa ra chứng minh mới cho các định lý quen thuộc.

♦ (Russian 2007) Tại mỗi đỉnh của một đa giác đều 100 cạnh ta viết 2 số phân biệt. Chứng minh rằng tại mỗi đỉnh có thể bỏ đi một số sao cho các số còn lại không có hai số nào ở hai đỉnh kề nhau mà bằng nhau.

Lời giải. Gọi $A_i, i = 1,2,\cdots,100$ là các tập hai số tại các đỉnh đa giác. Xét đa thức

$$P(x_1,\ldots,x_{100}) = \\ = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\cdots(x_{99} - x_{100})(x_{100} - x_1).$$

Ta thấy $deg(P) = 100$ và P chứa đơn thức $x_1x_2 \cdots x_{100}$ với hệ số bằng 2. Như vậy theo Định lý KĐTH phải tồn tại $(c_1, c_2,\cdots, c_{100}) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{100}$ sao cho $P(c_1,\cdots, c_{100}) \neq 0$.

♦ (IMO 2007) Cho n là số nguyên dương. Xét tập

$$S = \{(x,y,z) | x,y,z \in \{0,1,\ldots,n\}$$

với $(x, y,z) \neq (0,0,0)\}$ gồm $(n+1)^3 - 1$ điểm.

Tìm số nhỏ nhất các mặt phẳng trong $\mathbf{R}^3$ mà hợp của chúng chứa tập S nhưng không chứa gốc tọa độ.

Lời giải. Ta thấy có $3n$ mặt phẳng $x = 1,...,n$, $y = 1,...,n$, $z = 1,...,n$ thỏa mãn điều kiện đầu bài. Ta chứng min $3n$ là số nhỏ nhất thỏa mãn đầu bài. Giả sử có k mặt phẳng xác định bởi

$$a_ix + b_iy + c_iz - d_i = 0,\ i = 1,\ldots,k$$

cũng thỏa mãn đầu bài với $k < 3n$. Ta đặt

$$A(x,y,z) = \prod_{i=1}^{k}(a_ix + b_iy + c_iz - d_i)$$

$$B(x,y,z) = \prod_{i=1}^{n}(x-i)\prod_{i=1}^{n}(y-i)\prod_{i=1}^{n}(z-i).$$

Ta thấy hệ số của $x^ny^nz^n$ trong A bằng 0 còn trong B bằng 1. Do đó nếu

$$P(x,y,z) = A(x,y,z) - \frac{A(0,0,0)}{B(0,0,0)}B(x,y,z),$$

thì $P(x, y,z) = 0$ với mọi $x, y,z \in \{0,1,...,n\}$ và hệ số của $x^ny^nz^n$ trong P khác 0. Điều này mâu thuẫn với Định lý KĐTH.

♦ (Định lý Cauchy-Davenport) Với $A,B \subset \mathbf{Z}_p$ ký hiệu

$$A + B := \{a + b \mod p |\ a \in A, b \in B\} \subset \mathbf{Z}_p.$$

Khi đó $|A + B| \geq min(p, |A| + |B| - 1)$.

Chứng minh Trường hợp I: $|A| + |B| \geq p + 1$. Khi đó, với mọi $x \in \mathbf{Z}_p$, tập $x - B := \{x - b \mod p\ b \in B\}$ và A là hai tập con của $\mathbf{Z}p$ thỏa mãn $x-B+A > \mathbf{Z}_p$. Ta suy ra $(x-B) \cap A \neq 0$, tức là $x = a + b$ với $a \in$

A, $b \in B$. Ta nhận được $A + B = \mathbf{Z}_p$, kết luận của định lý đúng.

Trường hợp II: $A + B \leq p$. Giả sử trái với kết luận $A+B < A+B - 1$. Khi đó tồn tại $C \subset \mathbf{Z}_p$ với $C = A+B-2$ và $A+B \subset C$. Ta đặt $f(x,y) = \prod_{c \in C}(x+y-c) \in \mathbf{Z}_p[x,y]$. Như vậy f là một đa thức bậc $A+B-2$ và hệ số của $x^{|A|-1}y^{|B|-1}$ bằng $\binom{|A|+|B|-2}{|A|-1} \neq 0 \mod p$.

Theo Định lý KĐTH thì tồn tại $a \in A$, $b \in B$ sao cho $f(a,b) \neq 0$. Điều này mâu thuẫn với cách xây dựng của f.

♦ ***(Định lý Chevalley-Warning)*** Cho $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathbf{Z}_p[x_1, \ldots, x_n]$ là các đa thức thỏa mãn $\sum_{i=1}^m deg(f_i) < n$. Khi đó nếu các đa thức này có một nghiệm chung $(c_1, \ldots, c_n)$ thì nó phải có thêm nghiệm chung khác.

Chứng minh. Đặt $A = \prod_{i=1}^m (f_i^{p-1} - 1)$ và $B = \prod_{i=1}^n ((x_i - c_i)^{p-1} - 1)$.

Giả sử các đa thức f_i chỉ có nghiệm chung duy nhất là $(c_1, \ldots, c_n)$. Theo định lý Fermat nhỏ thì:

$A(x_1, \ldots, x_n) = B(x1, \ldots, xn) = 0$ với mọi $(x_1, \ldots, x_n) \neq (c_1, \ldots, c_n)$.

Hơn nữa $A(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$, $B(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$.

Ta xây dựng đa thức

$$P := A - \frac{A(c_1, \ldots, c_n)}{B(c_1, \ldots, c_n)} B.$$

Do $deg(A) < n(p-1) = deg(B)$, nên P là đa thức không đồng nhất bằng 0. Tuy nhiên theo cách xây dựng thì P bằng 0 trên toàn bộ Z_p^n và điều này mâu thuẫn với Định lý KĐTH.

3. Các bài toán khác

Trong phần cuối này, chúng tôi giới thiệu một số Định lý và bài tập mà người đọc có thể tự chứng minh bằng phương pháp tương tự như trong các bài toán ở mục trước. Hy vọng qua các bài toán này, người đọc cảm nhận được sức mạnh của phương pháp đa thức trong tổ hợp.

1. (Erdos-Heilbronn) Cho A là tập con của $\mathbf{Z}_p$- hệ thặng dư modulo một số nguyên tố p. Đặt $S = \{a + a' \mod p \mid a, a' \in A, a \neq a'\}$. Chứng minh rằng $|S| \geq \min(p, 2|A| - 3)$.

2. Chứng minh một dạng tổng quát của Định lý Chevalley-Warning ở trên: Cho $S_1, S_2, \cdots, S_n \subset Z_p$. Giả sử $f_1, f_2, \ldots, f_m \in Z_p[x_1, \ldots, x_n]$ là các đa thức thỏa mãn $(p-1)\sum_{i=1}^m deg(f_i) < \sum_{i=i}^n (|S_i| - 1)$. Khi đó các đa thức này không thể có duy nhất một nghiệm chung trong $\prod_{i=1}^n S_i$..

3. Sử dụng bài 2 để đưa ra một chứng minh ngắn gọn cho Định lý Erdos-Ginzburg-Ziv (trường hợp p nguyên tố):

Cho p là số nguyên tố và $a_1, \cdots, a_m$ là một dãy các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $m \geq 2p-1$ thì tồn tại một dãy con $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ip}$ thỏa mãn $a_{i1} + \cdots + a_{ip} \equiv 0 \mod p$.

4. (Alon-Friedland-Kalai) Cho p là một số nguyên tố và G là đồ thị có ít nhất $2p-1$ đỉnh. Chứng minh rằng tồn tại một tập con U các đỉnh sao cho số các cạnh chứa ít nhất 1 đỉnh trong U chia hết cho p.

5. (Alon-Furedi) Cho m phương trình

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots a_{i,n}x_n = b_i, i = 1, 2, \ldots m,$$

với $a_{i,j}, b_i \in \mathbf{R}$. Giả sử mọi bộ $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \cdots, 0)$ với $x_i \in \{0,1\}$ đều là nghiệm của ít nhất một phương trình nào đó trong số m phương trình trên. Chứng minh rằng $m \geq n$.

6. Cho $a_1, a_2, \cdots, a_k$ là các số (không nhất thiết phân biệt) thuộc $\boldsymbol{Z}_p$. Chứng minh rằng với mọi bộ số đôi một phân biệt $b_1, b_2, \cdots, b_k$ thuộc $\boldsymbol{Z}_p$, tồn tại một hoán vị σ sao cho các các số $a_1 + b_{\sigma(1)}, a_2 + b_{\sigma(2)}, \cdots, a_k + b_{\sigma(k)}$ đôi một phân biệt.

Tài liệu tham khảo

1. N. Alon, Combinatorial Nullstellensatz. Combi- natorics, Probability and Computing, (8): 7–29, 1999.

2. Evan Chen, Combinatorial Nullstellensatz, http://db.tt/G4xx3fdJ

3. Andrei Frimu and Marcel Teleuca, Applica- tions of Combinatorial Nullstellensatz, Gazeta Matematica, ANUL CXVI nr. 11, 2011.

4. Michałek, Mateusz, A short proof of Combinato- rial Nullstellensatz, The American Mathematical Monthly 117.9 (2010): 821-823.

5. Titu Andreescu and Gabriel Dospinescu, Prob- lems from the book.

THÁCH THỨC TOÁN HỌC

LTS. Thách thức toán học sẽ là chuyên mục định kỳ của Tạp chí Pi. Mỗi số, Ban biên tập sẽ tuyển chọn từ các bài toán đề xuất ra 10 bài toán, trong đó có 4 bài toán dành cho cấp THCS và 6 bài toán dành cho cấp THPT. Thời hạn nhận bài giải: trong vòng một tháng kể từ ngày đăng đề. Những lời giải hay sẽ được chọn đăng trong số báo của tháng tiếp theo (tức là sau 2 tháng).

Bài toán đề xuất cho chuyên mục cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm. Bài toán đề xuất và bài giải xin gửi về Tòa soạn theo các cách sau:

1) Thư điện tử gửi về: bbt@pi.edu.vn

2) Thư gửi qua Bưu điện theo địa chỉ: Toà soạn Tạp chí Pi, phòng 705– B8, tầng 7, Thư viện Tạ Quang Bửu, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội. Số 1 Đại Cồ Việt, Hà Nội.

Thách thức kì này

Dành cho cấp THCS

P 11. Với n là một số nguyên dương, gọi *P(n)* là tổng luỹ thừa bậc *n* của *n* số nguyên liên tiếp.

a) Chứng minh rằng *P(5)* chia hết cho 25.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $n > 1$ sao cho *P(n)* chia hết cho n^2.

(Lê Quốc Hán, Nghệ An)

P 12. Cho hai điểm *M, N* tương ứng nằm trên các cạnh *AC, AB* của tam giác *ABC*. Giả sử *BM, CN* cắt nhau tại *P*. Biết diện tích các tam giác *BPN, BPC, CPM* lần lượt bằng 3, 4, 5 (đơn vị diện tích). Hãy tính diện tích tam giác *ABC*.

(Ngô Văn Minh, Hà Nội)

P 13. Tìm tất cả các bộ 3 số hữu tỷ dương *(a, b, c)* sao cho $a+\frac{1}{b}, b+\frac{1}{c}$ và $c+\frac{1}{a}$ đều là các số nguyên.

(Nguyễn Tất Thu, Đồng Nai)

P 14. Có 100 quả bóng đen và 100 quả bóng trắng để trong một chiếc hộp kín. Ta bốc ra ngẫu nhiên 3 quả bóng, và phụ thuộc vào màu của các quả bóng bốc được, ta sẽ bỏ trở lại hộp một số quả bóng theo qui tắc dưới đây:

Bóng bốc ra	Bóng bỏ trở lại
3 quả đen	1 quả đen
2 quả đen, 1 quả trắng	1 quả đen, 1 quả trắng
1 quả đen, 2 quả trắng	2 quả trắng
3 quả trắng	1 quả trắng

Một người đã làm như vậy cho đến khi trong hộp chỉ còn lại 2 quả bóng. Người này không nói cho chúng ta biết quá trình diễn ra như thế nào. Bây giờ ta cần bốc ra một quả bóng từ hộp, nhưng trước đó cần đoán màu của quả bóng có thể được bốc ra. Hỏi ta nên đoán quả bóng đó màu gì? Giải thích rõ câu trả lời.

(Cuộc thi thách thức Toán học quốc tế mang tên Paul Erdos năm 2016 - 2017)

Dành cho cấp THPT

P 15. Một điểm trên mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên nếu cả hoành độ và tung độ của nó đều là số nguyên. Một điểm nguyên được gọi là điểm nguyên sơ nếu đoạn thẳng nối nó với gốc tọa độ không chứa điểm nguyên nào khác.

Cho *A* là một hình lồi chứa gốc tọa độ O. Đặt tên các điểm nguyên sơ nằm trong *A* lần lượt theo chiều kim đồng hồ, nhìn từ gốc tọa độ, bởi $X_1, X_2, \ldots$. Xét hình lồi *B* chứa *A* và có duy nhất điểm nguyên sơ, gọi là *Y*, nằm giữa X_1 và X_2, nhìn từ gốc tọa độ. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2}$.

(Ngô Bảo Châu, Chicago, Mỹ)

P 16. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn *(O)* và có hai đường chéo *AC* và *BD* vuông góc nhau. Gọi *P* là giao của *AD* và *BC*. Kẻ đường kính *PQ* của *(PCD)*. Gọi *M* và *N* lần lượt là điểm chính giữa cung *CD* không chứa *P* và cung *CD* chứa *P* của *(PCD)*. Biết *QM* giao *BD, CD* lần lượt tại *E, F*. Còn *QN* giao *AC, CD* lần lượt tại *K,L*. Chứng minh rằng *(EDF)* tiếp xúc với *(KCL)*.

(Nguyễn Văn Linh, Hà Nội)

P 17. Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn *(O)*. Giả sử *OA, OB, OC* cắt *BC, CA, AB* lần lượt tại *D,E,F* và cắt *EF, FD, DE* lần lượt tại *X, Y, Z*. Gọi *U, V, W* theo thứ tự là hình chiếu của *X, Y, Z* lên *BC, CA, AB*. Chứng minh rằng *AU, BV, CW* đồng quy trên đường thẳng Euler của tam giác *ABC*.

(Trần Quang Hùng, Hà Nội)

P 18. Cho *P(x)* là đa thức bậc n với hệ số thực và cho số thực $a \geq 3$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n+1} |a^i - P(i)| \geqslant \left(\frac{a-1}{2}\right)^n.$$

(Theo ý tưởng đề thi Hungary - Israel 2007)

P 19. Cho *p* là một số nguyên tố thỏa mãn $p \equiv 11 \pmod{12}$. Đặt $M = \{1, 2, \ldots, p-1\}$ và lấy *S* là một tập con bất kỳ của *M* có $\frac{p-1}{2}$ phần tử. Ta ký hiệu ΔS là thặng dư không âm bé nhất của $\prod_{s\in S} s - \prod_{s\in M\setminus S} s$ theo modulo *p*, tức là

$$\Delta_S \equiv \prod_{s\in S} s - \prod_{s\in M\setminus S} s \pmod{p}$$

và $0 \leq \Delta_S \leq p - 1$.

Đặt $A = \left\{\Delta_S | S \subset M, |S| = \frac{p-1}{2}\right\}$. Chứng minh rằng $|A| = \frac{p+1}{2}$.

(Phạm Tiến Kha, TP.Hồ Chí Minh)

P 20. Hai người, *A* và *B*, chơi trò "rót bia" như sau. Có ba cái cốc dung tích một lít. Ban đầu mỗi cốc chứa *a* lít bia. Hai người luân phiên nhau rót bia từ cốc này sang các cốc kia. Ở lượt chơi của mình, mỗi người sẽ chọn ra một cốc bia tùy ý và san một ít phần bia từ cốc này sang hai cốc còn lại một cách tùy ý. *A* là người đầu tiên rót bia và muốn làm tràn bia ở một cốc nào đó; ngược lại, *B* luôn tìm cách ngăn cản *A* thực hiện ý muốn của mình. *A* được coi là người thắng cuộc nếu ở lượt chơi nào đó của mình, *A* làm một cốc nào đó tràn bia; ngược lại, nếu *A* không thể làm bất cứ cốc nào tràn bia thì *B* được coi là người thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến lược thắng, nếu:

a) *a* = 0,5.

b) *a* = 0,4.

c) 0 < *a* < 1 bất kì.

(Lê Hồng Quý, Frankfurt, Đức)

Giải bài kỳ trước

Mặc dù số báo đầu tiên được phát hành vào tháng 1/2017 nhưng để chuẩn bị cho số báo này chúng tôi đã công bố đề bài Thách thức toán học đầu tiên từ ngày 15/11/2016 trên trang Facebook của Pi. Trong một thời gian ngắn, chúng tôi đã nhận được nhiều lời giải tốt từ bạn đọc. Trong số này, chúng tôi đăng lời giải của các bài số 1, 3, 6, 7, 8 là những bài có nhiều bạn đọc tham gia giải và giải đúng nhất. Các bài 2, 4, 5, 9, 10 chúng tôi đăng lại đề bài ở đây để bạn đọc tiếp tục giải cùng với các bài toán của số này.

P 1. Chứng minh rằng với mọi số thực *a,b,c,d* ta có bất đẳng thức

$$a(a+b)(a^2+b^2)+b(b+c)(b^2+c^2)+$$
$$c(c+d)(c^2+d^2)+d(d+a)(d^2+a^2)\geqslant 0.$$

(Nguyễn Đức Tấn, TP.Hồ Chí Minh)

Lời giải 1. (Của bạn *Nguyễn Văn Dũng*, Lớp 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, Hà Nội).

Ký hiệu $\sum a^4 = a^4+b^4+c^4+d^4$ và kí hiệu (*) là bất đẳng thức cần chứng minh. Ta có

$$(*)\Leftrightarrow \sum a^4+\sum a^2b^2+\sum ab(a^2+b^2)\geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \sum(a^4+2a^2b^2+b^4)+2\sum ab(a^2+b^2)\geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \sum(a^2+b^2)^2+2\sum ab(a^2+b^2)\geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \sum(a+b)^2(a^2+b^2)\geqslant 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng nên bất đẳng thức đề bài đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi *a = b = c = d = 0.*

Lời giải 2. Ta có đánh giá

$$a(a+b)=\frac{2a^2+2ab}{2}$$
$$=\frac{a^2-b^2+(a+b)^2}{2}\geqslant\frac{a^2-b^2}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$a(a+b)(a^2+b^2)\geqslant\frac{a^2-b^2}{2}\cdot(a^2+b^2)$$
$$=\frac{a^4-b^4}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta có

$$b(b+c)(b^2+c^2)\geqslant\frac{b^4-c^4}{2},$$
$$c(c+d)(c^2+d^2)\geqslant\frac{c^4-d^4}{2},$$
$$d(d+a)(d^2+a^2)\geqslant\frac{d^4-a^4}{2}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên, vế theo vế, ta có điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi *a = b = c = d =* 0.

Nhận xét. Do *a,b, c,d* là các số thực bất kỳ nên nghĩ đến việc phân tích về trái thành tổng các bình phương như lời giải 1 là khá tự nhiên. Bạn *Võ Tiến Dũng,* học sinh lớp 10 chuyên toán trường THPT Nguyễn Thượng Hiền TP.Hồ Chí Minh đã nêu ra hằng đẳng thức

$$b(b+c)(b^2+c^2)-\frac{b^4-c^4}{2}=\frac{(b+c)^2(b^2+c^2)}{2},$$

vừa liên quan đến phân tích tổng bình phương ở cách 1, vừa liên quan đến đánh giá ở cách 2.

Nguyễn Đức Tấn

P 3. Cho các số nguyên dương *a,b, c,d* thỏa mãn điều kiện $a^2 + 1 = bc$, $c^2 + 1 = da$.

a) Chứng minh rằng $P = \frac{a+d}{c} + \frac{b+c}{a}$ là một số nguyên.

b) Tìm tất cả các giá trị có thể có của P.

(Võ Quốc Bá Cẩn, Hà Nội)

Lời giải. (Của bạn *Phạm Hoàng Minh*, lớp 11 toán, trường PTNK ĐHQG TP.HCM)

a) Ta có

$$P = \frac{a+d}{c} + \frac{b+c}{a} = \frac{a^2 + da + bc + c^2}{ac} = \frac{2a^2 + 2c^2 + 2}{ac}.$$

Để chứng minh P nguyên, ta sẽ chứng minh $a^2 + c^2 + 1 \vdots ac$. Thật vậy, từ giả thiết đề bài ta có $a^2 + 1 \vdots c$, $c^2 + 1 \vdots a$. Suy ra $(a^2 + 1)(c^2 + 1) \vdots ac$; từ đó, $a^2 + c^2 + 1 \vdots ac$.

b) Theo lý luận ở câu a) ta thấy rằng nếu các số nguyên dương *a, b, c, d* thỏa mãn điều kiện $a^2 + 1 = bc$ và $c^2 + 1 = da$ thì $a^2 + c^2 + 1 \vdots ac$. Ngược lại, nếu *a, là các số nguyên dương sao cho* $a^2 + c^2 + 1 \vdots ac$ *thì rõ ràng* $a^2 + 1$ *chia hết cho* c *và* $c^2 + 1$ *chia hết cho* a, *suy ra tồn tại các số nguyên dương* b, d *thỏa mãn điều kiện* $a^2 + 1 = bc$ *và* $c^2 + 1 = da$*.

Từ đó, bài toán quy về việc tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho tồn tại các số nguyên dương *a, c* thỏa mãn điều kiện $a^2 + c^2 + 1 = kac$.

Giả sử k là số nguyên dương sao cho phương trình

$$a^2 + c^2 + 1 = kac \qquad (1)$$

có nghiệm nguyên dương *(a, c)*. Trong các nghiệm của (1), ta chọn nghiệm (a_0, c_0) sao cho $a_0 + c_0$ nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a_0 \ge c_0$. Xét phương trình bậc hai

Phương trình này có một nghiệm là a_0 nên theo định lý Viète, nó còn có một nghiệm nữa là

$$x^2 - kc_0x + c_0^2 + 1 = 0.$$

Từ biểu thức của a_1, ta thấy a_1 là số nguyên dương, nghĩa là (a_1, c_0) cũng là nghiệm nguyên dương của (1). Từ cách chọn (a_0, c_0) ta suy ra $a_1 > a_0$. Do đó

$$kc_0 - a_0 \geqslant a_0 \Rightarrow \frac{a_0}{c_0} \leqslant \frac{k}{2}.$$

Vì vậy

$$k = \frac{a_0}{c_0} + \frac{c_0}{a_0} + \frac{1}{a_0c_0} \leqslant \frac{k}{2} + 1 + 1.$$

Từ đây suy ra $k \le 4$. Ngoài ra, dễ thấy $k > 2$. Với $k = 3$ ta có bộ $(a, c) = (1, 1)$ thỏa mãn.

Với $k = 4$, ta có phương trình nghiệm nguyên

$$a^2 - 4ca + c^2 + 1 = 0.$$

Ta có

$$\Delta' = 4c^2 - c^2 - 1 = 3c^2 - 1 \equiv 2 (\bmod 3).$$

Do đó Δ' không là số chính phương. Vì vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

Vậy giá trị duy nhất mà P có thể nhận là 6, ứng với $k = 3$.

Nhận xét. Phương pháp mà bạn Minh sử dụng trong việc tìm số nguyên dương k sao cho phương trình $a^2 + c^2 + 1 = kac$ có nghiệm nguyên dương a, c được gọi là *phương pháp bước nhảy Viète*. Phương pháp này có thể áp dụng hiệu quả trong việc tìm các giá trị của tham số để một phương trình Diophant bậc^2 theo các ẩn có nghiệm nguyên dương. Ý tưởng cơ bản là dùng nguyên lý cực hạn (chọn nghiệm nhỏ nhất theo một nghĩa nào đó), dùng quy tắc sinh nghiệm nhờ định lý Viète để tạo ra một đánh giá cho tham số. Chẳng hạn các bạn có thể áp dụng cách làm tương tự để giải các bài toán sau:

1. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2 + y^2 + 6 = kxy$ có nghiệm nguyên dương.
2. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$ có nghiệm nguyên dương.

Phương trình ở bài toán 2 được đề cập đến trong một bài báo của viện sĩ A.A.Markov, vì thế những phương trình Diophant dạng này (bậc^2 theo các ẩn) còn được gọi là phương trình dạng Markov.

Trần Nam Dũng

P 6. Cho tam giác *ABC* ngoại tiếp đường tròn *(I)* và có trực tâm *H*. Gọi *D, E, F* lần lượt là tiếp điểm của *BC, CA, AB* với (*I*). Giả sử *M, N* tương ứng là điểm đối xứng của trung điểm *AH, BH* qua *FE, FD*. Chứng minh rằng MN đi qua trực tâm của tam giác *DEF*.

(Trần Minh Ngọc, TP.Hồ Chí Minh)

Lời giải. (Của bạn *Trần Minh Nguyên*, lớp 11 chuyên toán trường PTNK, ĐHQG TPHCM).

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn tâm (*O*) và ngoại tiếp đường tròn tâm (*I*). Đường tròn tâm (*I*) tiếp xúc các cạnh *BC, CA, AB* lần lượt tại *D, E, F*. Gọi *K* là trực tâm tam giác *DEF*. Khi đó *O, I, K* thẳng hàng.

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm *EF, FD, DE* và *r* là bán kính đường tròn (*I*). Ta có

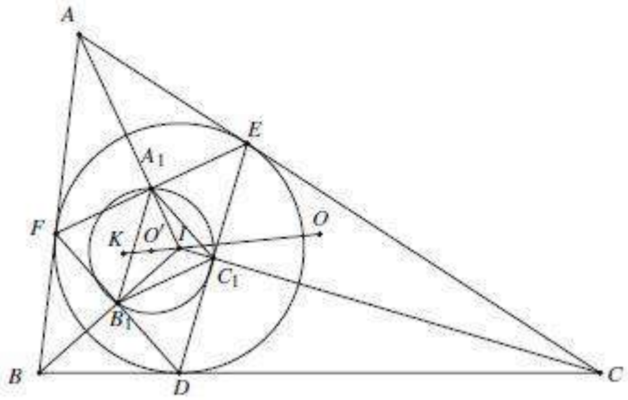
$$\overline{IA_1}\cdot\overline{IA}=\overline{IB_1}\cdot\overline{IB}=\overline{IC_1}\cdot\overline{IC}=r^2.$$

Xét phép nghịch đảo $I_I^{r^2}$ tâm *I*, phương tích r^2:

$$A_1 \to A,\ B_1 \to B,\ C_1 \to C$$

$$\Rightarrow (\triangle A_1B_1C_1 \to \triangle ABC).$$

Gọi *O'* là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$. Ta có $I_I^{r^2}$: *O'* → *O* nên *I, O', O* thẳng hàng.



Mặt khác vì A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm *EF, FD, DE* cho nên (*O'*) là đường tròn Euler của tam giác *DEF*. Suy ra *O'* là trung điểm *IK*; do đó *I, O', K* thẳng hàng.

Từ hai điều trên ta có *O, I, K* thẳng hàng hay *OI* đi qua *K*. Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, gọi *S, T* lần lượt là trung điểm *AH, BH*. Lấy *L, R* lần lượt đối xứng với *I* qua *FE, FD*. Ta có *IFLE* là hình thoi, do đó

$$\begin{cases} FL \parallel IE \\ FI \parallel LE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} FL \parallel AE \\ EL \parallel AF \end{cases}$$

nên *L* là trực tâm tam giác *AEF*. Tam giác *AEF* nội tiếp đường tròn đường kính *AI* cho nên

$$\frac{AL}{AI} = \cos(\angle FAE). \qquad (2)$$

Vì H là trực tâm tam giác ABC và tam giác ABC nội tiếp đường tròn đường kính $2OA$ nên

$$\frac{AS}{AO}=\frac{\frac{1}{2}AH}{\frac{1}{2}(2AO)}=\frac{AH}{2AO}=\cos(\angle BAC). \quad (3)$$

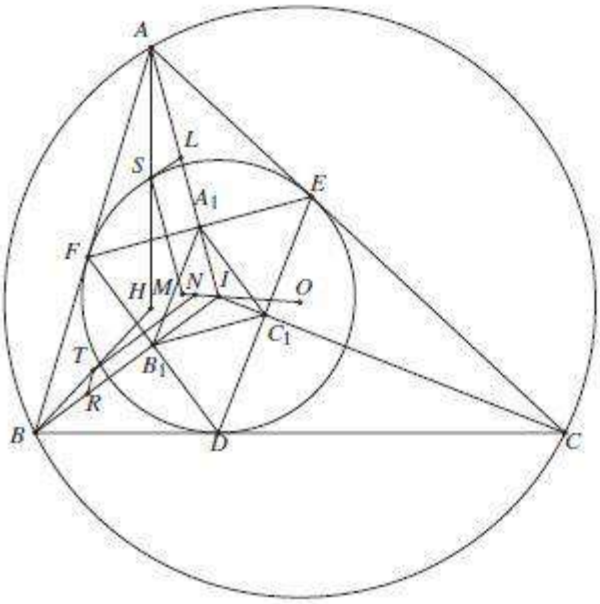
Từ (2) và (3) ta được

$$\frac{AL}{AI}=\frac{AS}{AO}\Rightarrow\frac{AL}{AS}=\frac{AI}{AO}. \qquad (4)$$

Dễ thấy $\angle OAB = \angle HAC$, do đó

$$\angle OAI=\angle SAL. \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có $\Delta OAI \sim \Delta SAL$, dẫn đến $\angle SLA = \angle AIO$.



Lấy M' trên OI sao cho $SM' \perp EF$. Ta có $\angle SLI = \angle AIM'$, do đó $ILSM'$ là hình thang cân có trục đối xứng EF; dẫn đến M' đối xứng với S qua FE. Vậy $M' \equiv M$, nghĩa là O, M, I thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có O, N, I thẳng hàng. Vậy O, I, M, N thẳng hàng.

Áp dụng *bổ đề*, ta có O, I, K thẳng hàng. Vậy M, N, K thẳng hàng hay MN đi qua trực tâm của tam giác DEF.

Nhận xét. Kết luận của bổ đề là một sự kiện quen thuộc trong hình học tam giác. Ta còn có thể nói ngắn gọn: *OI là đường thẳng Euler của tam giác DEF*. Ngoài cách chứng minh bằng cách sử dụng phép nghịch đảo như trong lời giải đã trình bày, ta còn có thể chứng minh tính chất này như sau:

Giả sử AI, BI, CI cắt (O) tại điểm thứ hai là A', B', C'. Vì $B'A = B'I$, $C'A = C'I$, ta suy ra $B'C'$ là đường trung trực của AI. Do đó $A'I \perp B'C'$. Chứng minh tương tự thì $B'I \perp C'A'$. Từ đó, I là trực tâm tam giác $A'B'C'$. Ngoài ra, điều đó còn dẫn đến có phép vị tự biến trực tâm I và tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác $A'B'C'$ thành trực tâm K, tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác DEF. Suy ra I, O, K thẳng hàng. Do đó $IK \equiv OI$ là đường thẳng Euler của tam giác DEF.

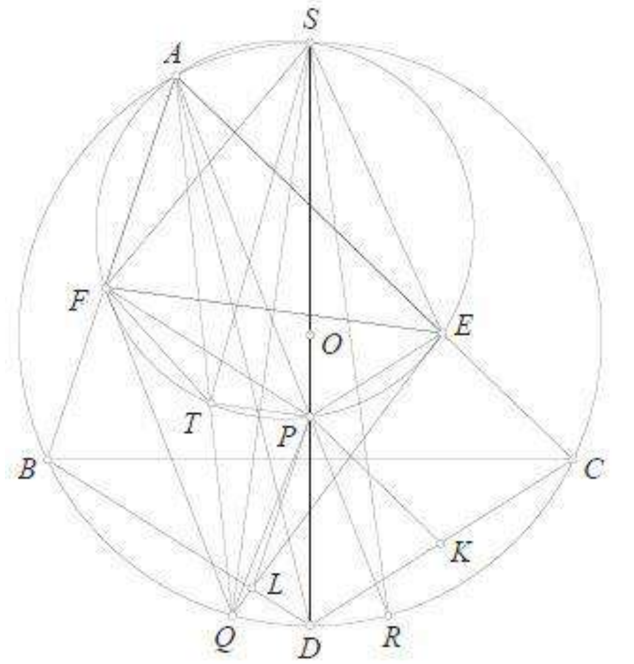
Ngoài bạn *Trần Minh Nguyên* còn có các bạn *Nguyễn Trần Hữu Thịnh*, lớp 12 chuyên toán trường THPT chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ và *Trần Vũ Duy* TP.Hồ Chí Minh cũng có lời giải tương đối tốt. Tuy nhiên trong lời giải của bạn Thịnh và bạn Duy còn có nhiều chỗ ghi dễ thấy, cần trình bày rõ ràng hơn.

Trần Minh Ngọc

P 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác góc BAC cắt (O) tại D khác A. Gọi P là một điểm nằm trên đoạn OD. Trên các cạnh CA, AB lần lượt lấy các điểm E, F sao cho PE song song với DC, PF song song với DB. Lấy Q trên (O) sao cho $\angle QAB = \angle PAC$. Chứng minh rằng $QE = QF$.

(Trần Quang Hùng, Hà Nội)

Lời giải 1. Không mất tính tổng quát, ta giả sử các điểm có vị trí như hình vẽ.



Trên đoạn thẳng DC lấy K và trên đoạn thẳng DB lấy L sao cho $PK \parallel AC$ và $PL \parallel AB$. Ta có

$$\angle KPL = \angle BAC = \angle BAC = 180^\circ - \angle BDC$$
$$= 180^\circ - KDL,$$

do đó tứ giác $PKDL$ nội tiếp.

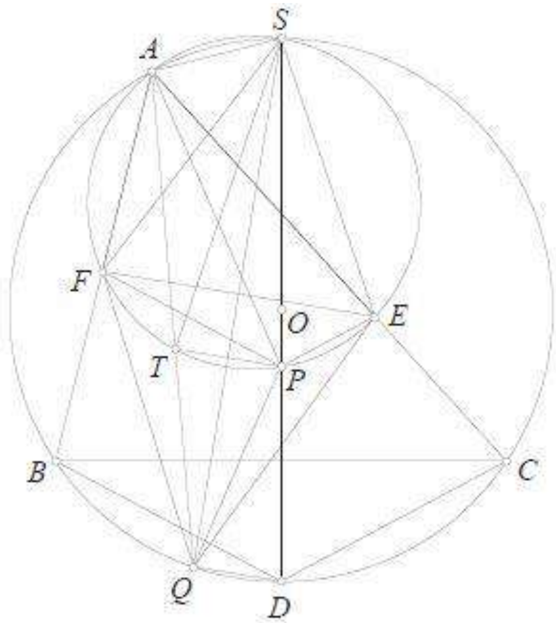
Dễ thấy tam giác DBC cân tại D và OD là trung trực BC. Suy ra DP là phân giác $\angle KDL$. Mà tứ giác $PKDL$ nội tiếp nên $PL = PK$. Từ các hình bình hành $PLBF$ và $PKCE$ ta có $BF = PL = PK = CE$. Do $BF = CE$ nên đường tròn (AEF) đi qua trung điểm S của cung BC chứa A của (O). Dễ thấy P nằm trên (AEF) do $\angle EPF = \angle BDC = 180^\circ - \angle BAC$.

Gọi T là giao điểm khác A của AQ và (AEF). Do $\angle QAB = \angle PAC$ nên $EFTP$ là hình thang cân. Ta cần chứng minh $QT = QP$ thì Q sẽ thuộc trục đối xứng của hình thang cũng là trung trực EF, từ đó $QE = QF$. Thật vậy, gọi R là giao điểm khác A của AP và (O). Do S là trung điểm cung BC chứa A của (O) và cung EF chứa A của (AEF) nên $SQ = SR$ và $ST = SP$; hơn nữa, dễ thấy $\angle TQS = \angle PRS$.

Vậy $\Delta STQ = \Delta SPR$ (c.g.c); suy ra $QT = PR = QP$. Bài toán được chứng minh.

Lời giải 2. (Của bạn *Nguyễn Tiến Hoàng* lớp 10 Toán, trường PTNK, ĐHQG TPHCM).

Không mất tính tổng quát, giả sử các điểm có vị trí như hình vẽ.



Gọi DS là đường kính của (O). Ta có $\angle AFP = \angle ABD = 180^\circ - \angle ASD$ nên F nằm trên (APS). Chứng minh tương tự E cũng nằm trên (APS). Gọi T là giao điểm khác A của AQ và (AEF). Dễ thấy DS là trung trực BC nên $SB = SC$, kéo theo $\Delta SFB = \Delta SEC$ (g.g); suy ra $SE = SF$. Vì $\angle TAF = \angle PAE$ nên $PT \parallel EF$, do đó $ST = SP$.

Ta thấy $\angle ATP = 180^\circ - \angle ASP = \angle AQD$ nên $TP \parallel QD$; mà $QD \perp QS$ do DS là đường kính của (O) nên $SQ \perp TP$. Kết hợp với $ST = SP$ ta suy ra $QT = QP$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Một số bạn đọc góp ý rằng đề bài nên sửa lại là *"lấy Q thuộc (O) sao cho AD là phân giác ∠PAQ"* thì mới chặt chẽ, tác giả bài toán đã công nhận góp ý này và chân thành cám ơn góp ý của các bạn. Lời giải của đa số các bạn giống trình tự lời giải thứ nhất là đi chứng minh $BF = CE$ trước rồi mới suy ra đường tròn (AEF) đi qua trung điểm S của cung BC không chứa A.

Cách giải thứ hai của bạn Hoàng và một số bạn khác có thú vị hơn khi đi chứng minh các điểm *E, F* cùng nằm trên đường tròn (*ASP*) một số bạn cũng làm theo cách này. Phần sau đa số các bạn cho giải giống nhau, tuy nhiên ý tưởng trình bày như trong lời giải thứ 2 có vẻ ngắn gọn hơn. Một số bạn có sử dụng lượng giác để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau.

Các bạn có lời giải đúng: *Nguyễn Ngọc Đức, Lê Anh Đức* lớp 10 Toán, THPT Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa. *Nguyễn Trần Hữu Thịnh*, lớp 12 Toán, Trường THPT Chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ. *Trần Vũ Duy* TP.Hồ Chí Minh. *Nguyễn Thị Minh Hằng*, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM. *Nguyễn Nguyễn*, lớp 10 Toán, *Trần Minh Nguyên*, *Phạm Hoàng Minh* lớp 11 Toán, trường PTNK, ĐHQG TPHCM.

Bài toán này là mở rộng trực tiếp của bài toán số 3 thi vòng 2 của Iran năm 2013.

Trần Quang Hùng

P 8. Trong không gian tồn tại hay không một tập con $S(S \subset \mathbb{R}^3)$ sao cho mỗi mặt phẳng đều chỉ chứa hữu hạn điểm thuộc tập *S*.

(Đỗ Minh Khoa, Hà Nội)

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Hữu Nhân,* sinh viên K64 TN Sư phạm Toán, ĐHSP Hà Nội).

Ta chọn $S = (t^5, t^3, t)t \in \mathbb{R}$. Mặt phẳng (*P*) trong không gian $\mathbb{R}^3$ có phương trình dạng

$$ax + by + cz + d = 0$$

với *a, b, c* không đồng thời bằng 0. Điểm $A(t^5, t^3, t) \in S$ nằm trên mặt phẳng (*P*) khi và chỉ khi

$$at^5 + bt^3 + ct + d = 0. \qquad (6)$$

Phương trình (6) là phương trình đa thức bậc lẻ, bậc nhỏ hơn hoặc bằng 5, nên phương trình (6) luôn có hữu hạn nghiệm thực. Do đó mỗi mặt phẳng đều chỉ chứa hữu hạn điểm thuộc tập *S*. Vậy tồn tại tập S thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét Với cách nhìn thuần túy hình học Euclid thì bài này khó hình dung. Nhưng nếu theo cách tiếp cận hình học tọa độ thì giao của các đường và các mặt là tập nghiệm của hệ phương trình tạo bởi việc ghép các phương trình của các đường và các mặt đó lại. Vì thế, ta sẽ tìm cách xây dựng hệ phương trình có hữa hạn nghiệm thực. Điều kiện hữu hạn nghiệm dẫn ta đến ý tưởng dùng đa thức và điều kiện có nghiệm thực gợi ta đến với đa thức bậc lẻ. Tính chất "đa thức bậc lẻ với hệ số thực luôn có ít nhất một nghiệm thực" là một tính chất quen thuộc, được suy ra từ một tính chất tổng quát hơn của lớp hàm liên tục: *Hàm liên tục trên một đoạn nhận mọi giá trị trung gian.*

Ngoài bạn *Nguyễn Hữu Nhân,* có các bạn: *Nguyễn Nguyễn* và *Phan Quốc Vượng* lớp 10 Toán trường PTNK ĐHQG TP.HCM cũng có lời giải tốt.

Trần Nam Dũng

Các bài toán sau đây chưa có lời giải. Mời các bạn tiếp tục gửi lời giải về tòa soạn.

P 2. Cho tứ giác *ABCD* ngoại tiếp đường tròn. Gọi (C_1), (C_2), (C_3), (C_4) lần lượt là các đường tròn đường kính *AB,BC,CD,DA.* Chứng minh rằng luôn tồn tại một đường tròn tiếp xúc với cả 4 đường tròn (C_1), (C_2), (C_3), (C_4).

(Nguyễn Hùng Sơn, Warsaw)

P 4. Có 100 chú gấu vào rừng hái quả. Chú gấu nhỏ nhất hái được 1 quả, chú gấu tiếp theo hái được2 quả, chú gấu thứ ba hái được 3 quả, cứ thế cho đến chú gấu lớn nhất hái được 100 quả. Các chú gấu gặp con sói già. Sói đề xuất sẽ giúp chúng chia quả hái được một cách *"công bằng"*. Sói đưa ra quy trình như sau: Sói sẽ chọn hai chú gấu bất kỳ, gộp số quả hái được lại và chia đều. Nhưng nếu có 1 quả lẻ thì sói sẽ ăn quả đó. Sói sẽ làm như vậy cho đến khi tất cả các chú gấu đều có số quả bằng nhau. Hỏi sói có thể ăn nhiều nhất bao nhiêu quả?

(Theo ý tưởng bài 5 của Cuộc thi toán giữa các thành phố 2016)

P 5. Xét các số thực dương x, y,z thỏa mãn điều kiện $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1.$

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực dương *m* sao cho biểu thức

$$P_m(x,y,z)=\frac{1}{m+x+y}+\frac{1}{m+y+z}+\frac{1}{m+z+}$$

có giá trị lớn nhất.

(Trần Quốc Luật, Hà Tĩnh)

P 9. Giả sử *m* là một số nguyên dương. Tập con A của tập hợp các số nguyên dương được gọi là *m* đầy nếu tổng các phần tử của A không vượt quá *m* và với mỗi *k* = 1, 2, ..., *m* tồn tại các phần tử phân biệt của A có tổng bằng *k*. Ví dụ *A* = {1,2,3} là một tập 6 đầy. Chứng minh rằng tồn tại các tập *m* đầy khi và chỉ khi $m \neq 2, 4, 5, 8, 9$.

(Hà Huy Khoái, Hà Nội)

P 10. Trong mặt phẳng, cho 7 điểm phân biệt. Người ta muốn vẽ các đường tròn qua đúng 4 điểm trong 7 điểm này. Hỏi có thể vẽ được nhiều nhất bao nhiêu đường tròn?

(Lê Phúc Lữ, TP.Hồ Chí Minh)

VÀI NÉT VỀ LỊCH SỬ TOÁN HỌC VIỆT NAM

■ HÀ HUY KHOÁI

Cho đến nay, có rất ít công trình nghiên cứu về lịch sử toán học Việt Nam. Phần lớn các nghiên cứu đã công bố lại thuộc về các tác giả nước ngoài. Đã đến lúc chúng ta cần đầu tư thích đáng cho việc tìm hiểu lịch sử toán học, cũng như lịch sử khoa học tự nhiên Việt Nam.

Những ai bắt tay vào nghiên cứu lịch sử khoa học Việt Nam đều gặp phải thách thức lớn, chủ yếu đến từ sự nghèo nàn, thậm chí nhiều khi thiếu hẳn, các tài liệu thành văn. Trong những nguyên nhân của sự thiếu hụt đó, có thể kể đến hai sự kiện sau:

1/ Kinh thành Thăng Long bị quân Chămpa đốt cháy vào năm 1371, và phần lớn thư tịch cổ bị thiêu rụi trong đám cháy đó.

2/ Trong cuộc xâm lược và chiếm đóng từ 1413 đến 1427, quân Minh đã đốt và lấy đi nhiều sách vở của Việt Nam.

Ngoài ra, những biến động lớn trong lịch sử hiện đại như cải cách ruộng đất, chiến tranh cũng là một trong những nguyên nhân làm thất truyền nhiều tài liệu cổ.

Trong hoàn cảnh khó khăn đó, chúng tôi chỉ dám đưa ra một vài suy nghĩ ban đầu về lịch sử toán học Việt Nam. Hy vọng sẽ có dịp trở lại đề tài này một cách sâu hơn.

I. Toán học Việt Nam cổ đại

Theo *Khâm định Việt sử thông giám cương mục* và *Đại Việt sử ký toàn thư*, toán học đã được đưa vào trong các kỳ thi ở Quốc tử giám vào các năm 1077, 1179, 1261, 1363, 1394, 1437, 1472 và 1505. Như vậy có thể nói rằng, môn toán được đưa vào thi cử ở Việt Nam khá sớm (sớm hơn vài thập niên so với Nhật Bản). Tiếc rằng chưa tìm thấy tài liệu nào nói về nội dung cụ thể của những câu hỏi về toán trong các kỳ thi đó. Tuy nhiên, trong những năm sau đó, hoàn toàn không có thông tin gì về việc có môn toán hay không trong các kỳ thi. Phải đến năm 1762 mới có quy định về việc đưa môn toán vào trong các kỳ thi, nhưng chủ yếu là để tuyển "lại", chứ không phải tuyển "quan".

Cuốn sách Toán đầu tiên của tác giả Việt Nam được biết đến là cuốn *Toán pháp đại thành* của Lương Thế Vinh, viết vào giữa thế kỷ 15. Lương Thế Vinh (1441-1496) nổi tiếng về thơ văn, Phật học, âm nhạc và toán học. Trong cuốn sách của mình, ông trình bày một số thuật toán giải phương trình nghiệm nguyên và một số bài toán hình học.

II. Toán học hiện đại Việt Nam

1. Lê Văn Thiêm người khởi đầu của toán học Việt Nam hiện đại.

Có thể nói, lịch sử toán học Việt Nam hiện đại bắt đầu vào năm 1947, khi nhà toán học Việt Nam đầu tiên Lê Văn Thiêm công bố một công trình khoa học trên tạp chí quốc tế (Beitrag zum Typenproblem der Riemannschen Flachen; *Commentarii Mathe- matici Helvetici,* 20, 1947, pp. 270-287)∗.[*]

Lê Văn Thiêm sinh năm 1918 ở Hà Tĩnh, trong một gia đình Nho học. Sau khi tốt nghiệp tú tài một cách xuất sắc, năm 1939, ông nhận được học bổng theo học tại trường Ecole Normale Supérieure ở Paris. Tuy nhiên, việc học của ông bị gián đoạn do đại chiến thứ II, và đến năm 1941 ông mới được vào trường. Chỉ một năm sau, ông đã nhận bằng cử nhân, và bắt đầu nghiên cứu dưới sự hướng dẫn của George Val- iron, một trong những nhà toán học nổi tiếng nhất thời đó. Đề tài nghiên cứu của Lê Văn Thiêm là một trong những hướng mũi nhọn của toán học thời đó (và đến nay vẫn là một hướng nghiên cứu phát triển mạnh): lý thuyết phân phối giá trị các hàm phân hình (hay còn gọi là lý thuyết Nevanlinna). Ông đã có đóng góp rất quan trọng vào lý thuyết Nevanlinna, cụ thể hơn là người đề xuất phương pháp dùng không gian Teichmuller để giải bài toán ngược của lý thuyết Nevanlinna.

Các kết quả trình bày trong luận án Tiến sĩ (Goettingen, 1945) và Tiến sĩ quốc gia (Paris, 1949) đã đưa ông lên hàng ngũ những nhà toán học trẻ xuất sắc thời đó. Công trình của Lê Văn Thiêm vẫn được nhắc đến sau này trong những sách chuyên khảo về lý thuyết các hàm phân hình[†].

2. Toán học Việt Nam thời kháng chiến 1945- 1954.

Ngày 19 tháng 12 năm 1946, kháng chiến toàn quốc bùng nổ, các cơ quan Chính phủ được sơ tán về Việt Bắc. Tuy vậy, một số cán bộ nhận lệnh khá muộn và phải tự sơ tán, chủ yếu là về quê. Giáo sư Nguyễn Thúc Hào là một trong số đó.

Giáo sư Nguyễn Thúc Hào tốt nghiệp Đại học ở Marseilles (Pháp) và trở về nước năm 1935. Ít tháng sau ngày toàn quốc kháng chiến, khi đang ở quê nhà, Ông nhận lệnh tổ chức một lớp đại học ở vùng tự do Liên khu IV. Có thể xem đó là điểm khởi đầu của nền giáo dục đại học Việt Nam trong Kháng chiến.

Cuối năm 1949, Giáo sư Lê Văn Thiêm về nước tham gia kháng chiến, theo lời kêu gọi của Chủ tịch Hồ Chí Minh. Vào thời kỳ đó, Giáo sư Lê Văn Thiêm là thần tượng của nhiều trí thức trẻ Việt Nam, và việc Ông trở về nước là một niềm khích lệ lớn đối với họ. Nhiều thanh niên tài năng đã đến Việt Bắc, theo học Trường Khoa học cơ bản do Giáo sư Lê Văn Thiêm làm hiệu trưởng.

Ngay sau khi hoà bình lập lại, nhiều học sinh của Trường Khoa học cơ bản được gửi đi học ở Liên Xô, và họ bảo vệ thành công luận án tiến sĩ chỉ sau 2-3 năm học tập (đặc biệt Hoàng Tụy công bố 5 bài báo trên những tạp chí hàng đầu của Liên Xô, bảo vệ xuất sắc luận án tiến sĩ chỉ sau 20 tháng làm việc).

Có thể nói, Trường Đại học Khoa học đã có vai trò quan trọng không chỉ trong việc đào tạo sinh viên thời kháng chiến 1945-1954, mà còn góp phần xây dựng nên những nhóm nghiên cứu toán học đầu tiên của nước Việt Nam sau thời kỳ thuộc địa.

3. Toán học Việt Nam 1954-1975.

Vào thời kỳ này, theo chủ trương của Nhà nước, nhiều nhà toán học chuyển mối quan tâm từ lý thuyết sang ứng dụng:

Hoàng Tụy, người vừa bảo vệ xuất sắc luận án tiến sĩ về lý thuyết hàm thực, đã trở thành người đầu tiên đưa vận trù học vào Việt Nam năm 1961. Các nhà toán học Việt Nam đã cố gắng giải những bài toán thực tế trong giao thông vận tải, như điều động xe thế nào để giảm những chuyến xe chạy không tải. Năm 1964 Hoàng Tuỵ nhận được những kết quả xuất sắc trong *quy hoạch lõm*. Ông đề xuất một phương pháp mới, về sau nổi tiếng với tên gọi *"nhát cắt Tuỵ"*. Nhờ những công trình đó, đôi khi người ta gọi Hoàng Tuỵ là "cha đẻ của tối ưu toàn cục".

Phan Đình Diệu, người nhận bằng tiến sĩ khoa học tại Matxcơva về toán học kiến thiết, đã chuyển mối quan tâm của mình sang khoa học máy tính.

Lê Văn Thiêm, một chuyên gia nổi tiếng trong lý thuyết hàm phức, chuyển sang nghiên cứu vấn đề chuyển động của nước thấm dưới các công trình thuỷ lợi. Ông nổi tiếng với lời giải tường minh cho bài toán thấm qua hai lớp đất với hệ số thấm khác nhau. Lê Văn Thiêm đã cùng nhiều học trò của mình áp dụng hàm biến phức trong nổ mìn định hướng để nạo vét kênh Nhà Lê thời chiến tranh, và làm đường chiến lược trong rừng.

Hàng đầu từ trái qua phải: Hoàng Tụy, Võ Nguyên Giáp, Phan Đình Diệu, Lê Văn Thiêm

Năm 1964, chiến tranh lan rộng ra miền Bắc Việt Nam với những trận ném bom của không quân Mỹ. Các trường đại học và viện nghiên cứu sơ tán về vùng nông thôn và miền núi. Tuy vậy, cộng đồng toán học Việt Nam vẫn tiếp tục những hoạt động của mình. Hội toán học Việt Nam, thành lập năm 1965, tổ chức các sinh hoạt, hội thảo hàng tháng về tối ưu, giải tich hàm, giải tích phức, đại số, giải tích số.

Trong thời kỳ chiến tranh, nhiều nhà toán học nổi tiếng đến thăm và giảng bài tại Việt Nam: A. Grothendieck (Giải thưởng Fields), L. Schwartz (Giải thưởng Fields), Ch. Davis, A. Martineau, B. Malgrange. . .

Trở về sau chuyến thăm Việt Nam 1967, Grothendieck đã viết một bài tường thuật được lan truyền rộng rãi trong các trường đại học Phương Tây. Ông thuật lại đời sống toán học của Việt Nam ngay trong hoàn cảnh khó khăn và ác liệt của chiến tranh, và kết luận: "Tôi đã chứng minh định lý về sự tồn tại nền toán học Việt Nam".

Ngay trong những năm chiến tranh, mỗi năm Nhà nước cử khoảng 100-150 sinh viên và khoảng 20 nghiên cứu sinh theo học ngành toán Liên Xô và Đông Âu. Trở về nước, họ trở thành những hạt nhân của các nhóm nghiên cứu trong các trường đại học. Vào thời kỳ này, Việt Nam đã xây dựng được những nhóm nghiên cứu mạnh về Tối ưu (do Hoàng Tụy lãnh đạo), lý thuyết kỳ dị (với sự hướng dẫn và giúp đỡ của các nhà toán học Việt kiều F. Pham, Lê Dũng Tráng), giải tích phức (Lê Văn Thiêm và các học trò), phương trình đạo hàm riêng. . .

Việc thành lập Ban Toán trực thuộc Ủy ban Khoa học và Kỹ thuật Nhà nước năm 1966 (và năm 1970 thành lập Viện Toán học) là sự kiện quan trọng thúc đẩy sự phát triển của toán học Việt Nam. Ngay trong những năm chiến tranh, nhiều công trình nghiên cứu của các nhà toán học Việt Nam đã được công bố trên những tạp chí quốc tế danh tiếng. Đặc biệt, hai tạp chí nghiên cứu là Acta Mathematica Vietnamica và Vietnam Journal of Mathematics đã ra đời trong thời kỳ này. Cho đến trước ngày thống nhất đất nước năm 1975, ở miền Nam Việt Nam có nhóm nghiên cứu mạnh về Phương trình đạo hàm riêng do Đặng Đình Áng lãnh đạo.

4. Toán học Việt Nam từ sau 1975.

Sau ngày thống nhất đất nước 30/4/1975, Toán học Việt Nam có những điều kiện thuận lợi mới để phát triển. Đặc biệt, sự hợp tác với cộng đồng toán học quốc tế trở nên dễ dàng hơn. Nhiều nhà toán học trẻ đã có cơ hội học tập không chỉ ở Liên Xô và Đông Âu, mà còn ở những nước có nền toán học phát triển khác như Pháp, Đức, Italia, Nhật. . .

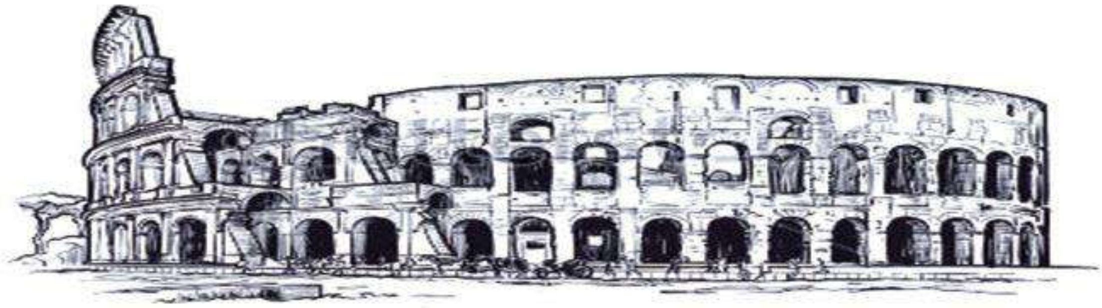
Tuy nhiên, toán học Việt Nam trong giai đoạn này lại gặp phải thách thức mới: khoảng 1985 kinh tế Việt Nam bước vào giai đoạn khủng hoảng, và từ đầu những năm 1990, chuyển sang kinh tế thị trường. Nhiều nhà toán học đã phải rời bỏ chuyên môn của mình để làm nghề khác kiếm sống. Trong bài viết đăng trên tờ thông tin của Hội toán học Pháp *Gazète de Mathématiques*, F. Pham lo ngại rằng, toán học Việt Nam sẽ biến mất vào năm 2000.

Toán học Việt Nam vẫn tồn tại và phát triển qua giai đoạn khó khăn, trước hết nhờ ở ý chí "sinh nghề tử nghiệp" của nhiều nhà toán học. Mặt khác, thời kỳ này toán học Việt Nam nhận được sự giúp đỡ quý báu của cộng đồng toán học thế giới. Có thể kể đến Chương trình hợp tác Pháp-Việt (ForMath Vietnam), Quỹ học bổng Alexander-von-Humboldt (CHLB Đức), JSPS (Nhật), ICTP (Italia). . .

Từ giữa những năm 1990, Việt Nam dần dần bước ra khỏi khủng hoảng kinh tế, và toán học Việt Nam lại có những điều kiện thuận lợi và cơ hội mới. Nếu như trước đây, sinh viên, nghiên cứu sinh và những nhà toán học chỉ có thể đi học tập, trao đổi ở nước ngoài với sự tài trợ của bên ngoài, thì ngày nay, Nhà nước đã có những chương trình gửi sinh viên đào tạo dài hạn ở nước ngoài (chẳng hạn Chương trình 322, Chương trình 911), và Quỹ hỗ trợ nghiên cứu khoa học (Nafosted).

Với sự kiện Ngô Bảo Châu được trao Giải thưởng Fields và Viện nghiên cứu cao cấp về Toán được thành lập, toán học Việt Nam bước sang một giai đoạn phát triển mới đầy triển vọng.

ĐẤU TRƯỜNG TOÁN HỌC



LTS. Với bề dày lịch sử trải qua 3 thế kỷ, các cuộc thi toán quốc tế, khu vực và địa phương đã có những sự phát triển mạnh mẽ về số lượng, quy mô và chất lượng. Các cuộc thi toán đóng một vai trò quan trọng trong việc khuyến khích, động viên phong trào dạy và học toán ở các cấp học, góp phần phát hiện và bồi dưỡng các tài năng toán học, giúp các em học sinh một bệ phóng để vươn lên những tầm cao mới. Dù có hàng trăm, hàng ngàn cuộc thi khác nhau với cùng một điểm chung là thi đấu toán học, chọn ra những người xuất sắc nhất đạt giải (thường được gọi là huy chương), nhưng mỗi một cuộc thi lại có những mục tiêu riêng khác nhau, hình thức thi khác nhau, nội dung thi khác nhau. Mỗi một học sinh, mỗi một trường học, vì thế, cũng cần phải xác định được mục tiêu của mình để lựa chọn tham gia các cuộc thi phù hợp, tránh tình trạng tham gia quá nhiều cuộc thi vừa mất sức, vừa thiếu hiệu quả lâu dài. Nhằm giúp bạn đọc hiểu thêm về các cuộc thi, có định hướng rõ ràng hơn trong ma trận các cuộc thi ở các cấp, chuyên mục Đấu trường toán học sẽ định kỳ giới thiệu về các cuộc thi trong nước, quốc tế và khu vực. Trong mỗi giới thiệu như vậy, nội dung chính sẽ là lịch sử hình thành, mục tiêu, nội dung và hình thức thi, quy mô cuộc thi, nhận xét và đánh giá về cuộc thi, các câu chuyện thú vị xoay quanh kỳ thi.

Đấu trường toán học số 1 của Pi xin được giới thiệu về Cuộc thi toán giữa các thành phố (International Tournament of the Towns - ITOT), một cuộc thi toán tầm quốc tế với lịch sử gần 40 năm.

CUỘC THI TOÁN GIỮA CÁC THÀNH PHỐ

TRẦN NAM DŨNG

Trong số các cuộc thi toán, Cuộc thi toán giữa các thành phố là một hiện tượng đặc biệt. Được khởi xướng bởi N.N.Constantinov, A.K.Tolpygo và A.Adzans vào năm 1980 một cách khiêm tốn như *"Olympic giữa 3 thành phố"*, cuộc thi đã không ngừng phát triển và kể từ năm 1991 trở thành cuộc thi quốc tế. Trong những năm gần đây, có rất nhiều cuộc thi được hình thành và tổ chức. Nhưng Cuộc thi toán giữa các thành phố vẫn có một chỗ đứng đặc biệt – kể cả về quy cách thi lẫn các bài toán. Thứ nhất, quy cách thi đặc biệt cho phép sử dụng những bài toán mà các cuộc thi khác sẽ loại đi do tính *"bất định thể thao"* của chúng, tức là những bài toán có nhiều tính nghiên cứu hơn là tính thi đấu Olympic. Thứ hai là vai trò của N.B.Vasiliev, người nhiều năm lãnh đạo việc biên soạn đề thi. Kết quả là ở Cuộc thi toán giữa các thành phố đã hình thành và gìn giữ được truyền thống tuyển chọn các bài toán sáng tác với nội dung toán học và hình thức thể hiện phong phú. Trong các bài toán của cuộc thi có cả những bài toán với những lời giải ngắn gọn, đẹp đẽ, lại có những bài toán cần đến sự nghiên cứu nghiêm túc. Hầu như trong bài toán nào cũng có điều gì đó độc đáo: Đề bài và lời giải chứa đựng nhiều điều hơn là thoạt nhìn ban đầu. Đó có thể là một câu trả lời đẹp, một kết quả mạnh, hay một điều gì đó vượt qua mức độ toán học được ghi trong đề bài.

Đề thi là những bài toán dành cho học sinh lớp 8−12. Đặc điểm của Cuộc thi toán giữa các thành phố là nó không hướng học sinh tới việc thi đấu, cạnh tranh huy chương, mà hướng học sinh tới việc làm việc chuyên sâu với các bài toán, tức là phát triển các tố chất cần thiết cho công việc nghiên cứu sau này.

Cuộc thi được tổ chức hàng năm kể từ năm 1980 và từ năm học 1982/1983 được tổ chức thành 2 vòng – vòng mùa thu và vòng mùa xuân, mỗi vòng lại có 2 đề - đề cơ bản và đề nâng cao. Đề nâng cao của cuộc thi có mức độ ngang bằng với đề thi vô địch Nga (ARO) và vô địch toán quốc tế (IMO), đề cơ bản có phần dễ hơn (còn gọi là đề luyện tập hay đề khởi động). Việc tham gia vào vòng thi nào, đề thi nào không phụ thuộc vào vòng thi hay đề thi khác, nói cách khác là hoàn toàn độc lập. Đề thi chia thành 2 nhóm riêng cho nhóm nhỏ (8−9) và nhóm lớn (10−12). Mọi học sinh (mọi lớp) có thể tham gia cuộc thi ở nhóm lớp của mình hoặc cao hơn.

Cuộc thi ITOT được tổ chức bởi các ban tổ chức địa phương tại hơn 100 thành phố ở hơn 25 quốc gia ở châu Âu, châu Á, Nam Mỹ, Bắc Mỹ, Úc và New Zealand. Mọi điểm dân cư đều có thể tham dự Cuộc thi. Việt Nam bắt đầu tham gia từ năm 2015 với điểm thi Hà Nội và người đại diện là PGS.TS Lê Anh Vinh thuộc trường Đại học Giáo dục, Đại học quốc gia Hà Nội.

Để có thể được đứng ra tổ chức ITOT, một cá nhân hoặc tập thể có thể gửi thư đề xuất về cho Ban tổ chức. Nếu ở điểm dân cư đó chưa có ai tổ chức và Ban tổ chức xét thấy cá nhân hoặc tập thể đó có khả năng tổ chức cuộc thi, họ sẽ được trao quyền tổ chức ITOT và sẽ được cung cấp mọi thông tin cần thiết để tổ chức cuộc thi.

Ngay trước ngày thi đề thi (bằng tiếng Nga và tiếng Anh) sẽ được gửi cho các Ban tổ chức địa phương và sau đó là lời giải và thang điểm, các quy định chấm thi. Ban tổ chức địa phương có thể tự chấm bài hoặc gửi về Moskva để chấm. Ban tổ chức khuyến khích chấm tại chỗ để có thể cho học sinh biết kết quả sơ bộ. Sau đó những bài làm tốt nhất được gửi về Moskva để chấm (trong phạm vi quota được ghi trong quy định).

Trong mỗi đề thi, sẽ có 8 bài toán được đề xuất (có ghi rõ điểm của từng bài hay từng ý) làm trong 5 tiếng đồng hồ nhưng chỉ tính điểm của 3 bài có điểm số cao nhất. Thí sinh có điểm cao trong một đề thi của một vòng thi nào đó sẽ được nhận bằng khen của Cuộc thi. Các ban tổ chức địa phương có quyền trao giải cho các thí sinh có điểm thấp hơn.

Tác giả của các bài thi tốt nhất của các lớp 9−11 (ở Nga là 9−10, vì hệ thống giáo dục Nga chỉ có đến lớp 11) sẽ được mời tham dự Hội nghị mùa hè của Cuộc thi toán giữa các thành phố. Đây là một hoạt động độc đáo của cuộc thi mà chúng tôi sẽ giải thích rõ ngay dưới đây.

"Hội nghị" của Cuộc thi ITOT không giống như các hội nghị khoa học với nghĩa thông thường. Ở đây không có các *"báo cáo toàn thể ", "làm việc ở tiểu ban"*, chương trình chính thức. Đây đúng hơn là một cuộc gặp mặt của các học sinh – những người đã chiến thắng trong cuộc thi ITOT và các giáo viên dẫn đoàn.

Một trong những mục tiêu của Hội nghị là giúp các học sinh có năng khiếu làm quen với việc giải các bài toán mang tính nghiên cứu. Với mục tiêu này, các nhà tổ chức đưa ra cho các học sinh các bài toán khó, thú vị, đôi khi dẫn đến các bài toán mở. Để giới thiệu đề bài một bài toán như vậy có khi cần cả một bài giảng. Vì thế phần trình bày đề toán thường chiếm ít nhất một ngày làm việc của hội nghị.

Lời giải những bài toán như vậy đòi hỏi nhiều thời gian và trí lực. Vì thế quy trình giải toán được thực hiện theo cách thức rất tự do: Học sinh được cho nhiều thời gian (một vài ngày), lời giải có thể là cá nhân, cũng có thể là tập thể, tức là chấp nhận lời giải từ bất cứ một nhóm học sinh nào. Và nhóm, tập thể không nhất thiết phải là các *"đội"* đến từ cùng một thành phố. Ban giám khảo sẽ đưa ra thời hạn nộp bài, và theo truyền thống sẽ có hai lần như vậy, được gọi là *"đích đến sơ bộ"* và *"đích đến chung cuộc"*. Các bài thi được nộp sẽ được kiểm tra, đánh giá mức độ tiến xa của thí sinh trong từng bài toán. Sau đó sẽ thảo luận các bài toán đã giải được. Một số bài toán hay ý nhỏ của bài toán sau khi thảo luận ở đích đến sơ bộ sẽ được bỏ ra. Và đôi khi lại bổ sung thêm một số bài toán mới. Việc đánh giá thành tích của thí sinh cũng khác với các cuộc thi khác: Thành tích của thí sinh được tính theo sự tiến triển xa nhất trong một bài toán. Có nghĩa là giống như cùng một lúc diễn ra vài cuộc thi (theo từng bài toán). Trong một Hội nghị, có khoảng 4–5 bài toán (đúng hơn là một vấn đề được phân ra thành chuỗi các bài toán) được đề xuất. Học sinh chỉ cần tập trung vào một bài toán như thế là đủ. Nhưng trong thực tế thì học sinh thường sẽ không dừng lại ở một bài mà giải cùng lúc vài bài toán. Nói chung là tất cả những người tham gia Hội nghị, kể cả học sinh và giáo viên sẽ có cơ hội được nghỉ ngơi, làm việc sáng tạo với cường độ cao và có những cuộc giao lưu bổ ích và hấp dẫn.

Có thể thấy rất rõ tinh thần tự do, vô tư, không nặng thành tích qua cách thức tổ chức của cuộc thi ITOT và Hội nghị mùa hè. Ngoài việc chấm tập trung những bài có điểm tốt nhất, ban tổ chức địa phương được toàn quyền trong việc tổ chức thi, chấm thi, sửa bài cho học sinh, trao giải. Thời gian làm bài được cho đủ nhiều và các đề thi có thể loại phong phú, hấp dẫn với nhiều độ mức độ khó dễ khác nhau tạo ra sự hứng thú và thách thức cho học sinh. Thông qua việc giải các bài toán, học sinh tập thói quen làm việc nghiêm túc, suy nghĩ sáng tạo và sâu sắc, lập luận chặt chẽ, khoa học. Các bài toán và lời giải cũng giới thiệu đến học sinh những kỹ thuật, những phương pháp, những ý tưởng và cả những nội dung toán học mới.

Để kết thúc bài giới thiệu, nhằm minh họa cho những đánh giá của chúng tôi về đề thi của ITOT, chúng tôi xin giới thiệu đến bạn đọc một số bài toán được chọn từ những đề thi ITOT qua các năm. Một cách đầy đủ hơn, các đề thi ITOT cũng như đề toán của Hội nghị mùa hè qua các năm sẽ được giới thiệu trong các số báo sau.

(**ITOT** 2011–2012) Cho p là số nguyên tố. Bộ gồm $p + 2$ số nguyên dương (không nhất thiết phân biệt) được gọi là *"thú vị"* nếu tổng của p số bất kỳ trong chúng chia hết cho mỗi số trong hai số còn lại. Hãy tìm tất cả các bộ số *"thú vị"*.

(**ITOT** 2011–2012) Trong tam giác đều ABC kẻ đường cao AH. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABH và L, K, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABI, BCI và CAI. Hãy tính góc KJL.

ITOT 2011–2012) Kostya có một đống sỏi gồm 100 viên. Mỗi một bước thực hiện, cậu ta chia một đống sỏi nào đó thành hai đống nhỏ hơn cho đến khi thu được 100 đống sỏi, mỗi đống 1 viên. Chứng minh rằng:

a) Có một thời điểm nào đó trong 30 đống sỏi nào đó có tổng cộng 60 viên sỏi.

b) Có một thời điểm nào đó trong 20 đống sỏi nào đó có tổng cộng 60 viên sỏi.

c) Kostya có thể tiến hành việc chia sỏi sao cho không có một thời điểm nào tồn tại 19 đống sỏi có tổng cộng 60 viên sỏi.

(**ITOT** 2013−2014) Đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(0) = 1$, $(P(x))2 = 1 + x + x^{100}Q(x)$ với $Q(x)$ là một đa thức nào đó. Chứng minh rằng hệ số của x^{99} trong đa thức $(P(x) +1)^{100}$ bằng 0.

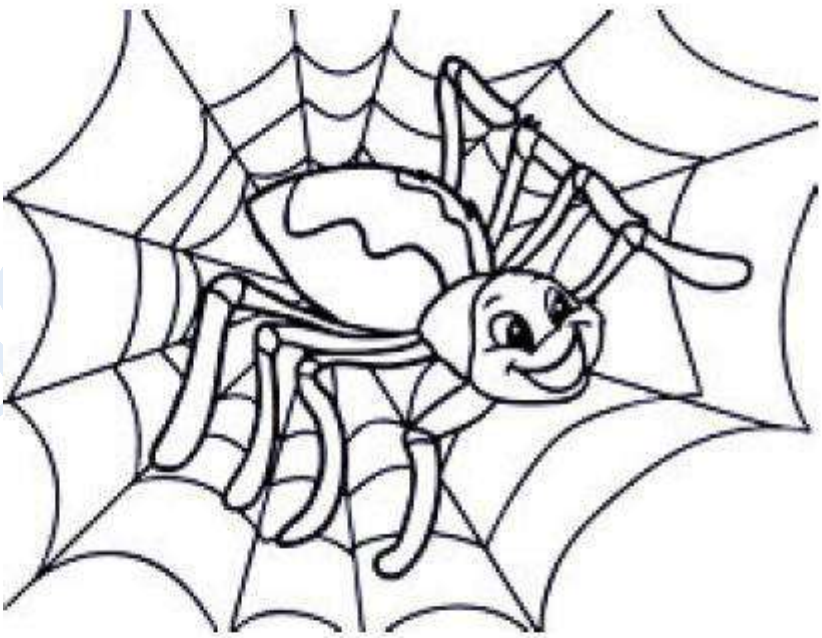
(**ITOT** 2014−2015) Vào phía trong một tam giác vuông ta vẽ hai đường tròn, đường tròn thứ nhất tiếp xúc với một cạnh góc vuông và cạnh huyền, đường tròn thứ hai tiếp cạnh góc vuông còn lại và cạnh huyền, ngoài ra hai đường tròn này tiếp xúc với nhau. Gọi M và N là điểm tiếp xúc của hai đường tròn với cạnh huyền. Chứng minh rằng trung điểm của MN nằm trên đường phân giác kẻ từ đỉnh góc vuông của tam giác.

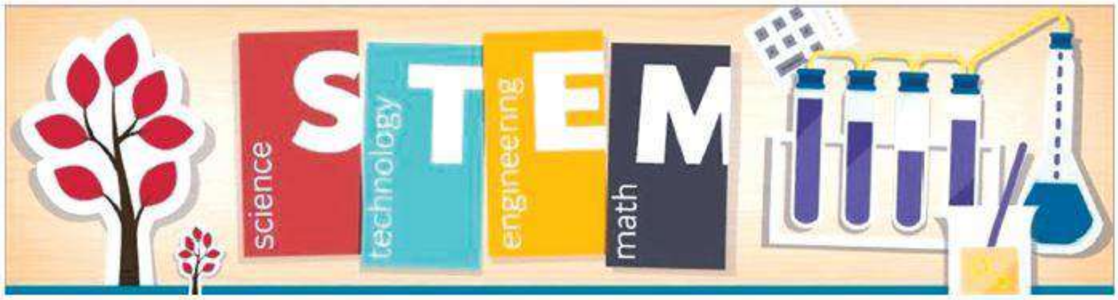
(**ITOT** 2014−2015) Mạng nhện có dạng lưới ô vuông 100×100 nút (nói cách khác, đây là bảng vuông 99×99 ô). Có một con nhện đang ngồi ở một góc nào đó, còn ở 100 nút lưới nào đó có 100 con ruồi bị dính vào. Mỗi một bước đi, con nhện có thể di chuyển đến nút bên cạnh. Hỏi con nhện có thể đảm bảo chắc chắn ăn hết được tất cả các con ruồi mà không di chuyển quá

a) 2100 bước?

b) 2000 bước?

(**ITOT** 2015−2016) Có N học sinh xếp thành một hàng ngang. Các học sinh có chiều cao khác nhau. Phân các học sinh này thành các nhóm học sinh đứng cạnh nhau, trong mỗi nhóm có nhiều cao tăng dần từ trái sang phải sao cho số nhóm là ít nhất (có thể có nhóm chỉ có một người). Sau đó trong mỗi nhóm ta đổi chỗ các học sinh theo chiều cao thấp dần từ trái sang phải. Chứng minh rằng sau $N - 1$ bước làm như thế, các học sinh sẽ đứng theo thứ tự thấp dần từ trái sang phải.





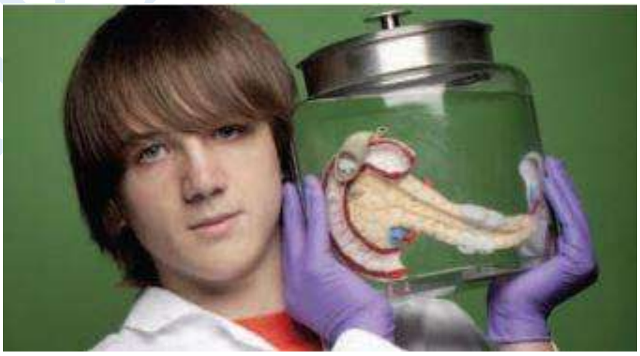
*LTS. Giáo dục STEM ngày càng phổ biến ở các trường phổ thông trên thế giới, với mục tiêu tích hợp các môn Khoa học (**S**cience), Công nghệ (**T**echnology), Kỹ thuật (**E**ngineering) và Toán học (**M**athematics) thành một chương trình thống nhất hướng đến ứng dụng vào thực tiễn. Pi dành chuyên mục Quán STEM để giới thiệu với bạn đọc về phương hướng đó.*

KHOA HỌC, TUỔI TRẺ VÀ SỰ DẤN THÂN

■ **NGUYỄN THÀNH CÔNG**

Để minh chứng cho khả năng tiềm tàng của học sinh trong nghiên cứu khoa học, xin được dẫn ra đây câu chuyện về Jack Thomas An- draka, một học sinh 15 tuổi ở Maryland, Hoa Kỳ - bằng đề tài nghiên cứu của mình đã mở ra một triển vọng xét nghiệm chẩn đoán sớm ung thư tuyến tụy, và đạt giải đặc biệt trong cuộc thi Intel ISEF* 2012 với phần thưởng lên tới 75.000 đô la Mỹ.

Khi Jack 13 tuổi, một người thân của cậu qua đời vì ung thư tuyến tụy. Sự ám ảnh về căn bệnh khiến cậu quyết định tìm hiểu căn bệnh này. Qua mạng internet cậu thấy các thống kê "hơn 85%bệnh nhân ung thư tuyến tụy được chẩn đoán muộn, vào thời điểm họ có ít hơn 2% cơ hội sống". Nhiều câu hỏi được cậu đặt ra: tại sao con người quá yếu kém trong việc phát hiện sớm ung thư tuyến tụy? tại sao vẫn phải dùng các kỹ thuật từ 60 năm trước vừa đắt đỏ vừa kém hiệu quả và khi phát hiện ra bệnh đồng nghĩa với việc cầm chắc cái chết? Jack quyết định đặt cho mình một nhiệm vụ gần như không tưởng: xây dựng bộ kit chẩn đoán sớm ung thư tuyến tụy với yêu cầu: rẻ, nhạy, chọn lọc và hạn chế tối đa phẫu thuật. Cậu bắt đầu làm việc với hai người bạn của mình là . . . google và wikipedia để tìm kiếm các dấu hiệu đặc trưng cho ung thư tuyến tụy. Jack nhận thấy có tới 8000 protein khác nhau được tìm thấy trong máu của một người bị căn bệnh này.



Việc đầu tiên, Jack đọc thông tin sinh học của 8000 protein này (có bao nhiêu người dũng cảm như cậu?) để tìm ra loại protein đặc thù cho căn bệnh mà cậu quan tâm. Sau 4000 lần thử, Jack tìm ra protein đó với tên gọi là *mesothelin*, loại protein xuất hiện với nồng độ cao trong máu của các bệnh nhân ung thư tuyến tụy từ giai đoạn rất sớm. Jack nghĩ: *"Phải tìm cách tạo ra thiết bị phát hiện nhanh protein này!"*

Một ý tưởng lóe lên trong đầu cậu về một cấu trúc nanocarbon (một dạng ống carbon được cấu thành từ các nguyên tử carbon liên kết với nhau) được gắn thêm các phân tử *kháng thể* đặc hiệu (một dạng protein chỉ phản ứng với 1 chất khác theo nguyên lý chìa khóa - ổ khóa). Cấu trúc này chỉ nhận diện mesothelin mà thôi. Jack tìm cách *"tạo ra bộ chẩn đoán làm bằng giấy"* theo quy trình: *"với một ít nước, thêm vào vài ống nanocarbon, thêm kháng thể, trộn lên, lấy mảnh giấy, nhúng vào, đem phơi khô và thế là bạn đã có thể phát hiện ung thư!"*

Jack háo hức gửi đề tài của mình tới 200 giáo sư, tất cả những ai có các nghiên cứu về ung thư và mong chờ phản hồi. Nhưng rồi có tới 199 lời từ chối, chỉ duy nhất một giáo sư đọc hết trình bày của Jack, ông còn chỉ ra những sai lầm trong mỗi bước của quy trình.

Ông sắp xếp một cuộc gặp mặt với hội đồng 20 tiến sĩ khác để thẩm vấn . . . cậu bé 14 tuổi. Cuối cùng, Jack cũng qua bài phỏng vấn và được làm việc tại phòng thí nghiệm. Quá trình nghiên cứu đã chỉ ra quy trình ban đầu có rất nhiều sai sót, Jack mất 7 tháng để khắc phục chúng. Cuối cùng, bộ kit chẩn đoán sớm ung thư tuyến tụy ra đời với giá 3 cent (khoảng 600 VNĐ), cho kết quả sau 5 phút, có nghĩa là nhanh hơn 168 lần, rẻ hơn 26.000 lần và nhạy hơn 400 lần so với phương pháp truyền thống. Nó rất chính xác, có thể phát hiện ung thư tuyến tụy ở giai đoạn sớm tới mức người bệnh có cơ hội sống 100%. Quan trọng hơn, nghiên cứu đã mở ra một hướng để chẩn đoán các căn bệnh khác như ung thư buồng trứng, ung thư phổi. . . và xa hơn nữa, bằng việc thay thế các kháng thể đặc hiệu (các chìa khóa khác) trên ống nanocarbon, có thể tìm ra và chẩn đoán sớm hàng loạt các căn bệnh khác nữa.

Bây giờ chắc bạn đã nhận thấy, mỗi học sinh đều có thể tự xây dựng cho mình một đề tài nghiên cứu có tính ứng dụng cao nhờ lòng say mê và ý chí dấn thân vào khoa học.

LTS. Từ thuở sơ khai, con người luôn khát khao tìm hiểu vũ trụ quanh mình. Trong cuộc tìm kiếm đó, Toán học luôn đồng hành cùng Thiên văn học. Vì thế, Pi cần có một Trạm Thiên văn, nơi các bạn nhìn lên bầu trời, nơi nuôi dưỡng niềm say mê khoa học và khát khao hiểu biết.

TỪ MỘT BÀI TOÁN TRONG ĐỀ THI QUỐC TẾ VỀ THIÊN VĂN HỌC VÀ VẬT LÝ THIÊN VĂN 2016

■ PHẠM VŨ LỘC

Kỳ thi quốc tế về thiên văn học và vật lý thiên văn (IOAA) năm 2016 diễn ra từ ngày 9 đến 19 tháng 12 năm 2016 với sự tham dự của 48 đội thi thuộc 42 quốc gia vừa kết thúc. Đoàn Việt Nam lần đầu tiên cử đội tham dự, với 5 thí sinh đến từ Hà Nội, đã giành được 1 huy chương bạc và 4 giải khuyến khích. Trong điều kiện môn thiên văn học và vật lý thiên văn chưa được giảng dạy sâu rộng trong chương trình phổ thông, đây là thành tích rất đáng khích lệ, mang dấu ấn tiên phong trong việc phổ biến môn học còn mới lạ nhưng vô cùng thú vị này ở nước ta.

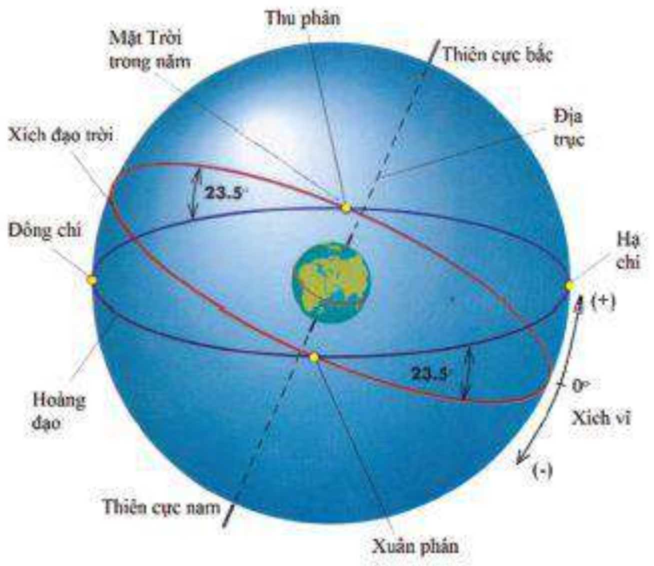
Trong số báo đầu tiên này, tôi xin giới thiệu một bài toán nhỏ nhưng lại gợi nhiều kiến thức thú vị về thiên văn học trong đề thi năm nay.

Đề bài như sau:

Một người quan sát ở bán cầu Bắc thấy một cây cọc thẳng đứng cao 1 mét đổ bóng ngắn nhất là 1,732 m và dài nhất là 5,671 m trong một ngày. Tìm vĩ độ của người đó và xích vĩ của Mặt Trời hôm đó, giả sử rằng Mặt Trời là một nguồn điểm và bỏ qua sự khúc xạ của khí quyển.

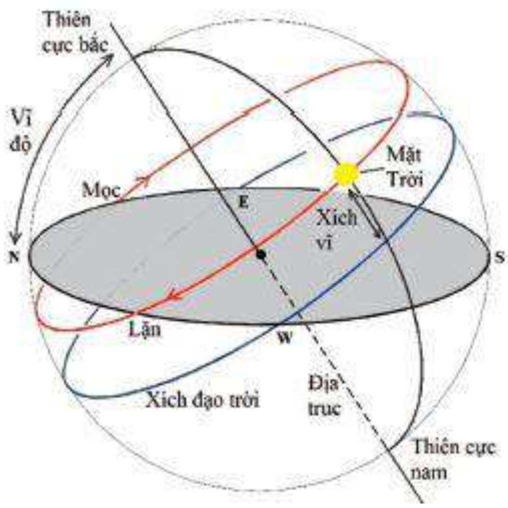
Nếu coi toàn bầu trời là một mặt cầu lớn có bán kính vô hạn (gọi là *thiên cầu*) thì ở mặt cầu đó, ta có thể áp dụng hệ tọa độ giống như trên mặt đất. Gọi giao tuyến của mặt phẳng chứa Xích đạo Trái Đất với thiên cầu là *Xích đạo trời*, có vĩ độ trời (gọi là xích vĩ δ) bằng 0. Bán thiên cầu Bắc sẽ có xích vĩ dương và ngược lại Bán thiên cầu Nam có xích vĩ âm. Địa trục đi qua hai địa cực sẽ cắt thiên cầu ở hai *Thiên cực*, Bắc và Nam. Mặt khác, vì Trái Đất quay quanh Mặt Trời nên đứng trên Trái Đất ta sẽ thấy Mặt Trời di chuyển trên thiên cầu trọn một đường mỗi năm, gọi là *Hoàng đạo*. Mặt phẳng chứa Hoàng đạo chính là mặt phẳng quỹ đạo Trái Đất. Địa trục nghiêng với mặt phẳng này một góc khoảng $23{,}5^\circ$, nên Hoàng đạo nghiêng so với Xích đạo trời $23{,}5^\circ$.

Hệ quả là Mặt Trời di chuyển trên Hoàng đạo trong một năm nên xích vĩ của nó thay đổi từ $-23{,}5^\circ$ vào ngày Đông chí, tới 0° vào ngày Xuân phân, đạt $23{,}5^\circ$ vào ngày Hạ chí và lại giảm về 0° vào ngày Thu phân.



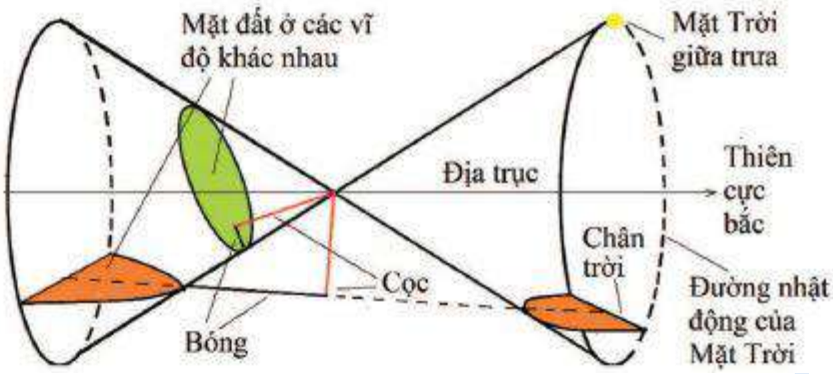
Hình 1

Ta đã biết, càng đi xa xích đạo về phía Bắc (tăng vĩ độ) thì thiên cực Bắc càng cao trên bầu trời (càng xa mặt đất). Và ta cũng có thể nhận ra rằng *cao độ* (khoảng cách góc so với chân trời) của thiên cực Bắc tại mỗi nơi bằng vĩ độ φ tại nơi đó. Trong một ngày, chuyển động tự quay của Trái Đất làm ta đứng trên đó thấy thiên cầu quay từ Đông sang Tây một vòng quanh địa trục, gọi là *nhật động* (nhật ở đây nghĩa là ngày). Thiên cầu kéo theo Mặt Trời và toàn bộ các tinh tú (được coi như đính trên đó) quay theo, mọc bên Đông, lặn bên Tây. Đường đi nhật động của Mặt Trời sẽ là một đường tròn dọc theo vĩ tuyến trời vuông góc với địa trục (hình 2).



Hình 2

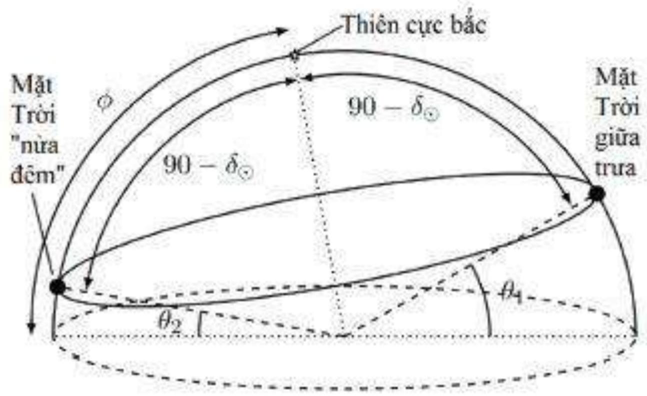
Cây cọc cắm trên Trái Đất được coi như nằm trên địa trục và mặt phẳng xích đạo Trái Đất khi khoảng cách của chúng là không đáng kể so với bán kính vô hạn của thiên cầu. Do đó, tia nắng từ đó truyền tới điểm đầu cọc vẽ lên trong không gian một mặt nón. Mặt đất tại nơi quan sát hứng bóng nắng chính là một cát diện của mặt nón đó. Chỉ riêng khi Mặt Trời đi qua Xích đạo trời vào ngày Xuân phân và Thu phân thì nó và đầu cọc đồng phẳng, mặt nón trở thành một đĩa tròn. Giao tuyến của nó với mặt đất là một đường thẳng đúng theo phương Đông-Tây.



Bóng cọc sẽ ngắn nhất vào giữa trưa. Nếu đường chân trời tại một nơi cắt đường nhật động của Mặt Trời trên thiên cầu thì Mặt Trời sẽ mọc và lặn trong ngày, bóng cọc là một đường hyperbol, bóng cọc dài vô hạn khi Mặt Trời đang lặn. Nếu hai đường trên không cắt nhau thì Mặt Trời sẽ không bao giờ mọc hoặc lặn, chính là hiện tượng ngày trắng và đêm trắng ở vùng hàn đới. Và nếu là ngày trắng thì bóng cọc là một elip, dài nhất vào lúc "nửa đêm".

Quỹ tích các điểm đầu bóng Mặt Trời trong năm cho phép người ta chế tạo ra đồng hồ Mặt Trời tùy theo nơi đặt.

Từ đề bài, ta có thể dễ dàng tính ra được bằng lượng giác góc nghiêng của bóng nắng so với mặt đất (tức là cao độ của Mặt Trời) lúc bóng ngắn nhất là $\theta_1 = 30^\circ$ và dài nhất là $\theta_2 = 10^\circ$ và nơi quan sát phải có vĩ độ hàn đới để độ dài bóng có cực đại. Mặt Trời tại hai thời điểm giữa trưa và "nửa đêm" này đối xứng hai bên địa trục và do đó là hai bên thiên cực Bắc. Mặt khác, như đã nói, xích vĩ Mặt Trời không thể quá $23{,}5^\circ$ nên hai Mặt Trời này không thể gần thiên cực quá $66{,}5^\circ$. Hệ quả là chúng cũng phải đối xứng qua trục thẳng đứng nơi quan sát như hình 4. Từ đây có thể dễ dàng tính được cao độ thiên cực bắc (và là vĩ độ) là $\varphi = 80^\circ$ và xích vĩ Mặt Trời là $\delta = 20^\circ$.



Hình 4

Các Mác học toán

Đàm Thanh Sơn

Trong lời giới thiệu bản năm 1885 của cuốn "Chống Duhrinh", Ăng-ghen có viết:

Nhưng từ khi Các Mác qua đời, thời giờ của tôi phải ngừng công việc nghiên cứu của tôi lại. Lúc bấy giờ tôi đành tạm bằng lòng với những phác thảo đã đưa ra trong sách này và đợi sau này có dịp thì sẽ tập hợp và công bố những kết quả đã thu nhận được, ***có thể là cùng một lúc với những bản thảo toán học rất quan trọng do Mác để lại.***

Đoạn tôi nhấn mạnh bằng chữ đậm ở trên liên quan đến một điều chắc ít ai biết: Các Mác lúc về già bỏ rất nhiều thời gian học toán, chủ yếu là môn giải tích. Có lẽ Mác cảm thấy cần thêm công cụ toán học để nghiên cứu kinh tế. Các ghi chép của Mác về toán cuối cùng phải đợi gần 50 năm sau khi Ăng-ghen viết những lời trên mới được công bố. Có thể đọc những ghi chép này (đã dịch sang tiếng Anh) ở đây:

http://www.marxists.org/archive/marx/works/1881/mathematical-manuscripts/

Đây là một trang trong bản thảo "On the Dif- ferential".

Rõ ràng Các Mác biết tính đạo hàm hàm số x^m.

$$u = x^4, \qquad z = x^3 + ax^2.$$

so that

$$du = 4x^3dx, \qquad dz = (3x^2 + 2ax)dx,$$

as was proved earlier for equations with only one dependent variable. These values of du, dz are brought into equation A), so that

$$\text{A)} \quad \frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2)\frac{4x^3dx}{dx} + x^4\frac{(3x^2 + 2ax)dx}{dx}$$; and then

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2)4x^3 + x^4(3x^2 + 2ax);$$

therefore

$$dy = \{(x^3 + ax^2)4x^3 + x^4(3x^2 + 2ax)\}\,dx.$$

The expression in brackets is the first derivative of uz; since, however, $uz = f(x)$, its derivative is $= f'(x)$; we now substitute the latter in place of the algebraic function, and so:

$$dy = f'(x)dx.$$

We have already obtained the same result from an arbitrary equation with only one variable. For example:

$$y = x^m,$$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} = f'(x),$$

$$dy = f'(x)dx.$$

In general we have: if $y = f(x)$, whether this function of x is now an original function in x or contains a dependent variable, then always $dy = df(x)$ and $df(x) = f'(x)dx$, and so:

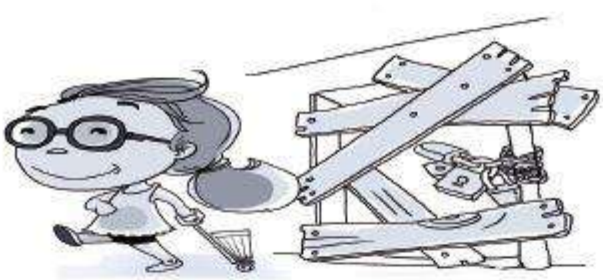
B) $dy = f'(x)dx$ is the most generally valid form of the differential of y. This would be demonstrable immediately also if the given $f(x)$ were $f(x, z)$, that is a function *of two mutually independent variables*. For our purposes, however, this would be superfluous.

Đọc qua bản thảo thì có lẽ không có kiến thức gì mới, và có lẽ cũng không có gì mới so với những gì người ta biết thời đó. Nhưng một người đã ở tuổi ngoài 50 mà chăm chỉ học toán như vậy có lẽ cũng là hiếm.

Pi đi mua đất

Chủ Quán

1. Một người đi mua khoảnh đất hình chữ nhật, xung quanh trồng cau. Các cây cau được trồng cách đều nhau, bốn góc có bốn cây. Ông bán đất nói: “Tôi bán cho anh mảnh này 200 triệu. Rẻ đấy anh bạn ạ, mảnh kia diện tích chỉ bằng một nửa mảnh này mà hôm nọ tôi bán những 120 triệu đấy”.



Ông khách thấy mảnh bên kia cũng hình chữ nhật, cũng trồng cau bao quanh, bốn góc cũng có bốn cây, khoảng cách các cây cũng như bên này. Anh ta đếm thì thấy số cây trên chiều dài của thửa đất chữ nhật phía bên kia gấp 5 lần số cây ở chiều rộng, mà số cây ở hai mảnh là như nhau (mỗi chiều chỉ được đếm một cây ở góc, mỗi cây ở góc chỉ được tính cho một chiều).

Ông khách cười nói với chủ nhà: ”Ông sai rồi! Diện tích mảnh này chưa bằng hai lần diện tích mảnh kia”.

Chủ nhà tròn mắt, không hiểu sao khách không sang đo mà biết được. Chủ nhà đâu có ngờ khách là bạn đọc thường xuyên của Pi, nên mấy bài toán thực tế thế này, anh ta sành lắm.

2. Nếu "xa thực tế" một chút, xem cây cau có thể "nhỏ tuỳ ý", để trên chu vi mảnh đất trồng được "đủ nhiều cây", vẫn với giả thiết tương tự như trên, thì tỷ lệ giữa số cây trồng trên hai chiều của mảnh đất bé ít nhất phải bằng bao nhiêu, mới tin được là diện tích của nó bằng 1/2 mảnh đang "đàm phán"?

3. Anh chàng Pi này ngày càng nghĩ xa thực tế, đến mức anh ta nói với ông chủ đất: "Tôi biết chính xác tỷ lệ tối thiểu cần thiết của hai chiều mảnh đất kia sao cho diện tích của nó đúng bằng 1/2 diện tích mảnh này. Số tối thiểu ấy lớn hơn 5,8 một chút, nhưng lại nhỏ hơn 5,9. Tuy nhiên, ngay cả khi diện tích của nó đúng bằng nửa mảnh này, ông cũng không thể nào trồng cây mà tỷ lệ số cây trên hai chiều đạt được số tối thiểu đó đâu. Nhưng cái này mới là quan trọng: khi diện tích đúng bằng một nửa mảnh này, ông có thể trồng sao cho đạt được tỷ lệ gần số tối thiểu đó bao nhiêu tuỳ ý".

Ông chủ đất trố mắt ngạc nhiên. Đặc biệt không hiểu sao có thể làm được để tỷ lệ "gần bao nhiêu tuỳ ý" so với cái số tối thiểu.

LỜI CHỦ QUÁN: Khi chủ quán bày món hàng đầu tiên (gần với mục **1**), có ngay mấy bạn vào mua, và chê món hàng chế biến đơn giản quá. Ông chủ quán giật mình. Tất nhiên ai cũng có khi sai, đặc biệt là cái ông chủ quán hay đãng trí này (có lần còn để mất tiền ở quán đấy). Bị chê, ông chủ quán cám ơn, và chế biến lại cho tinh tế. Bây giờ thì bạn thấy đấy, ngoài gói 1 giá rất hời, hai gói còn lại đắt đấy, không dễ mua. Đặc biệt là phần cuối của gói 3: hai chiều miếng đất đều có số đo nguyên (trồng được cây cách đều nhau), diện tích bằng nửa mà chu vi bằng chu vi miếng kia, đã thế lại còn phải có tỷ lệ số cây trên hai chiều “gần bao nhiêu tuỳ ý” một số nào đó (nằm khoảng giữa 5,8 và 5,9, mà nghe nói là không bao giờ đạt được!).

Có vô hạn số Fermat không là số nguyên tố?

Chủ Quán

Đang ngồi chơi game, Pi giật thót người khi Lãn Sinh reo lên:

- A! Em chứng minh được là có vô số số Fermat không phải là số nguyên tố! Có khi sắp được Giải thưởng Fields rồi ấy chứ!

- Nói nghe xem nào!

- Em chứng minh sự kiện còn tổng quát hơn:

Với *số k nguyên lẻ tuỳ ý, có vô hạn số n sao cho* $L_n = 2^{2n} + k$ *là hợp số.* Thế thì thay $k = 1$ là xong chứ gì.

Này nhé, em lấy số n tuỳ ý. Nếu L_n là hợp số thì tốt quá rồi, khi đó lại chọn n lớn hơn. Nếu nó là nguyên tố, chẳng hạn $2^{2n} + k = p$ thì do $2^{\varphi(p-1)} \equiv 1$ (mod) p (ở đây ký hiệu φ dùng để chỉ phi-hàm Euler) nên

$2^{2n+\varphi(p-1)} + k \equiv 2^{2n} + k \bmod p$.

Như vậy thì $2^{2n+\varphi(p-1)} + k$ chia hết cho p, và nó là hợp số chứ còn gì nữa. Vậy là em tìm được L_n lớn tuỳ ý mà là hợp số!

Đến đây thì Pi vò đầu bứt tai. Bạn hãy giúp Pi giải thích nhé! Và nếu được thì phát biểu lại cho chính xác (nếu cần) định lý của Lãn Sinh, và cho luôn chứng minh nhé.

Kiosque Violympic

Các bạn hãy dùng các kí hiệu cộng [+], trừ [-], nhân [*], chia [/] và 2 dấu ngoặc đơn () để tạo thành các đẳng thức:

5 5 5 5 5 = 0	5 5 5 5 5 = 4	5 5 5 5 5 = 8	5 5 5 5 5 = 30
5 5 5 5 5 = 1	5 5 5 5 5 = 5	5 5 5 5 5 = 9	5 5 5 5 5 = 40
5 5 5 5 5 = 2	5 5 5 5 5 = 6	5 5 5 5 5 = 10	5 5 5 5 5 = 50
5 5 5 5 5 = 3	5 5 5 5 5 = 7	5 5 5 5 5 = 20	5 5 5 5 5 = 60

Tại sao lại là Đại học Kinh tế quốc dân?

Phan Thanh Hồng và Nguyễn Thị Nhung (sưu tầm)

Một anh chàng sinh viên sống ở Ngã Tư Sở, gần một bến xe buýt. Anh chàng có hai cô bạn gái, một nàng ở Ký túc xá Đại học Kinh tế quốc dân, một nàng ở Ký túc xá Đại học Sư phạm. Để đến chơi với cô bạn ở Đại học Kinh tế quốc dân, anh chàng bắt xe buýt xuôi xuống Đại học Kinh tế quốc dân, để đến thăm cô bạn ở Đại học Sư phạm, anh lại bắt xe buýt ngược lên. Vì anh chàng thích hai cô gái như nhau nên cứ đến chiều thứ bảy hàng tuần, anh chàng ra bến xe một cách ngẫu nhiên gặp xe nào trước thì đi xe đó. Các tuyến xe buýt đến Đại học Kinh tế quốc dân và Đại học Sư phạm cứ đều đặn 15 phút lại có một chuyến. Sau một thời gian (khá dài), không hiểu vì lý do gì, anh chàng nhận ra rằng mình đến thăm cô bạn ở Đại học Kinh tế quốc dân nhiều gấp đôi cô bạn ở Đại học Sư phạm. Bạn có thể đưa ra lý do hợp lý nào để giải thích điều này không?

ĐÁP ÁN: Câu trả lời đơn giản cho tình huống này là lịch trình của xe buýt. Theo lịch trình, xe buýt đi Đại học Sư phạm từ bến này chậm sau 5 phút so với chuyến đi đến Đại học Kinh tế quốc dân. Nếu anh chàng này đến bến một cách ngẫu nhiên thì cơ hội để gặp xe đi Đại học Sư phạm chỉ rơi vào khoảng thời gian 5 phút, trong khi cơ hội đi Đại học Kinh tế quốc dân lại rơi vào khoảng thời gian 10 phút, và do đó anh ta thấy mình đến Đại học Kinh tế quốc dân nhiều gấp đôi so với Đại học Sư phạm.

NHẬN XÉT CỦA PI: Hai bạn Phan Thanh Hồng và Nguyễn Thị Nhung (giảng viên Khoa Toán-Tin Đại học Thăng Long) trước đây đều học ở Đại học Sư phạm Hà Nội, nên chắc gửi đến Pi bài này vì vẫn còn có chút ấm ức! Pi hết sức vui mừng vì nhận được rất nhiều phản hồi cho bài toán này, kể cả từ một số bạn đang ở nước ngoài. Chắc vì nó liên quan đến tình yêu! Như đã nói khi đưa ra bài toán, trình độ thích hợp để giải bài này là từ lớp một đến giáo sư, tiến sĩ. Trên thực tế thì đúng như vậy: có bạn đưa ra cách giải đơn giản như trên, bạn khác lại dùng lý thuyết xác suất để đưa ra kết quả. Tất nhiên, cũng có rất nhiều giải thích chưa đúng. Pi cám ơn tất cả các bạn đã quan tâm và gửi lời giải. Đặc biệt, Pi rất ấn tượng với lời giải đúng của ba bạn, có thể là nhỏ tuổi nhất trong số các bạn có lời giải đúng: Bảo Long, Khánh Chi, Quý Đăng, Lớp 7C1 - THCS Archimedes, Hà Nội. Ngoài ra, những bạn sau đây cũng có lời giải đúng, hoặc ý tưởng đúng, tuy trình bày chưa rõ ràng: (danh sách theo thứ tự ngẫu nhiên) Dat Le, Thạch Bảo, Cao Dũng, Bảo Bình, Quy Mai, Tài Trần, Võ Tuấn Hải, Vuong Dao Nghe, Due Pham, Đình Doanh Đoàn, Lê Thế, Nguyen Tri, nguyen.truonghai, Son levanhoang, Khuu TranVietHung B130, Hoa, Trang Nguyễn Đăng, Trương-Sinh Trang Nguyen, Nguyễn Lâm Tú, Binh spy, Tung Hiếu Vũ, Tiến Đạt Nguyễn Doãn, Thinh Hoang, Chau Thanh Tri, Paul Massimo, Tran Quang Huy, Trung Nguyen Huu, Tran Sang, Dũng Đinh Hoàng, Cương Nguyễn, Hien Phan, Minh Đức, Đăng Hải, Pham Manh, Thái Phát, Nam Nguyễn Minh, Hưng Nguyen, Thành Chu, Hoa Phạm Thị Xuân, Hoang Cong, Van Tho Dang, Triet Le, Do Duc Ton, Nguyễn Đăng Hải,. . .

Lọ Lem và dì ghẻ

Món hàng này do hai bạn Phan Thanh Hồng và Nguyễn Thị Nhung sưu tầm, ký gửi. Ông Chủ Quán có đóng gói lại

Mụ dì ghẻ độc ác chuẩn bị cùng con gái đi dạ hội do Hoàng tử mời, giao cho Lọ Lem sáu cái chìa khoá và bảo:

- Tao không cấm mày đi, nhưng phải làm cho xong việc này đã. Tao có ba cái tủ, mỗi tủ có hai ngăn. Một tủ thì cả hai ngăn đều đựng hạt dẻ, một tủ hai ngăn đều đựng đỗ đen, tủ còn lại một ngăn đỗ đen, một ngăn hạt dẻ. Ba cái nhãn ghi tủ nào đựng loại gì đều dán sai chỗ. Tao cho mày 6 chiếc chìa khoá, mỗi chìa mở được một ngăn tủ. Mà tao nói trước, loại khoá nhà tao phức tạp lắm, mỗi lần mở một chìa phải mất một giờ. Mày mở thế nào thì mở, miễn là dán lại nhãn cho đúng: tủ đựng hạt dẻ, tủ đựng đỗ đen, tủ đựng hạt dẻ+đỗ đen. Dán xong thì được đến dạ hội.

Mụ dì ghẻ nói xong, hai mẹ con cười khanh khách, tin chắc Lọ Lem làm xong việc thì dạ hội cũng tan.

Hai mẹ con đi rồi, Lọ Lem ngồi khóc. Bỗng Pi hiện lên hỏi:

- Làm sao bạn khóc?

Nghe xong sự việc, Pi bày ngay cho Lọ Lem cách làm để dán đúng nhãn thật nhanh.

Nếu là bạn, bạn sẽ khuyên Lọ Lem làm thế nào?

Từ văn học dân gian đến toán học hiện đại

Chủ Quán

Có nhiều vấn đề lớn của toán học hiện đại thực ra đã xuất hiện trong những chuyện dân gian. Chẳng hạn, câu chuyện vui *anh chồng tham ăn* được bà vợ dùng sợi dây điều khiển, mà hầu như người Việt Nam nào cũng đã từng ít nhất một lần nghe kể, nếu phân tích kĩ sẽ thấy là một bài giảng nhập môn tuyệt vời về Lí thuyết thông tin.

Xưa, một bà vợ có anh chồng rất tham ăn. Tính tham ăn của anh chồng khiến chị vợ nhiều phen xấu hổ. Chị bèn nghĩ ra một kế. Nhân ngày Tết về bên ngoại ăn cỗ, chị ngồi dưới bếp, buộc một sợi dây vào tay chồng và dặn rằng, khi nào chị giật dây một cái thì mới được gắp một miếng. Hôm đó, mọi người ngạc nhiên vì thấy anh chồng ăn uống rất từ tốn. Nào ngờ, chỉ được chừng nửa bữa thì có một chú gà trống chạy qua, mắc chân vào dây. Anh chồng tham ăn được thể gắp lia lịa (theo nhịp dãy chân của chú gà)! Mẹo hay của chị vợ thế là bị hỏng.

Vấn đề của *Lí thuyết thông tin* đặt ra trong câu chuyện này là: làm thế nào để mưu kế của chị vợ thành công ngay cả khi không may có chú gà mắc vào dây? Đó chính là một trong những bài toán khó nhất của toán học hiện đại.

Ta thử hình dung một hệ thống điển hình của lí thuyết thông tin: trước hết, ta có một *trung tâm điều khiển*, trong trường hợp này là *chị vợ*. Sau đó là một *trung tâm nhận thông tin*, chính là *chàng tham ăn*. Thông tin được truyền qua một *kênh truyền tin*, chính là *sợi dây*. Các thông tin được truyền qua kênh truyền tin bằng các *tín hiệu,* trong trường hợp này là *giật dây*. Thông tin luôn được truyền dưới dạng *mã hoá*, ở đây chị vợ đã mã hoá thông tin như sau: *giật một cái - gắp một miếng.*

Nhưng, một kênh truyền tin, dù hiện đại đến đâu, cũng không thể tuyệt đối chính xác: trung tâm thu nhận thông tin không bao giờ nhận được hoàn toàn chính xác thông tin mà trung tâm điều khiển truyền đi, mà thường bị một *nhiễu* nào đó. Cái nhiễu mà kênh truyền tin của chị vợ mắc phải chính là *con gà* tai hại! Vấn đề đặt ra cho chị vợ, cũng như cho lí thuyết thông tin là: *làm thế nào để ngay cả khi bị nhiễu, ta vẫn không đi đến kết quả quá tồi tệ?* Nói một cách "hàn lâm" là: làm thế nào để tăng *độ tin cậy* của kênh truyền tin?

Nếu như quy định của chị vợ không phải là *"giật một cái – gắp một miếng"* mà là "giật 20 cái – gắp một miếng" thì dù có cái nhiễu là con gà, anh chồng chắc cũng không đến nỗi mang tiếng quá tham ăn! Làm như thế, trong lí thuyết thông tin gọi là *tăng độ thừa để bảo đảm độ tin cậy.* Độ thừa ở đây là: lẽ ra chỉ cần giật dây một lần là đủ truyền lệnh gắp một miếng, thì ta phải giật những 20 lần! Nếu chị vợ quá cẩn thận đến mức quy định: *giật 100 lần mới gắp một miếng,* thì chắc anh chồng được tiếng rất lịch sự, nhưng cũng sẽ mang bụng đói về nhà. Vấn đề nan giải của lí thuyết thông tin chính là ở chỗ đó: nếu tăng độ thừa để đảm bảo độ tin cậy, thì sẽ bị ảnh hưởng đến *tốc độ truyền tin*. Trong thực tế, một thông tin chính xác nhưng đến quá muộn có thể là một thông tin vô ích. Vậy, chị vợ nên quy định giật bao nhiêu lần thì anh chồng được gắp một miếng, để sao cho anh ta vừa no bụng, lại vừa được tiếng lịch sự, hay ít nhất là không mang tiếng quá tham ăn, ngay cả khi bị chú gà làm nhiễu kênh truyền tin? Đó chính là bài toán điển hình không chỉ của lí thuyết thông tin, mà của hầu hết các ngành của Toán học hiện đại: nếu xem mỗi yêu cầu lập thành một miền nào đó, thì phải tìm ra đường biên giới phân chia các miền, sao cho mọi yêu cầu đều được thoả mãn trong một chừng mực chấp nhận được. (Bài toán này chắc không chỉ khó trong toán học, mà cả trong cuộc đời: không thể hy vọng đạt được một cách cao nhất mọi mục tiêu, mà vấn đề là phải làm sao cho hài hoà các mục tiêu đó!).

Để giải bài toán đặt ra, trong những năm gần đây đã xuất hiện nhiều kết quả khá thú vị. Một trong những phương pháp mới là dùng các *mã hình học đại số* vào lí thuyết thông tin. Phương pháp này thực sự bất ngờ vì xưa nay, hình học đại số là ngành trừu tượng nhất trong toán học, và ít ai nghĩ lại có thể dùng nó vào một vấn đề rất thực tiễn. Việc dùng hình học đại số để tìm ra biên giới thích hợp trong lí thuyết thông tin đã góp phần xoá đi biên giới giữa toán học lí thuyết và toán học ứng dụng.

Còn một điều nữa mà tôi chưa nói đến khi kể về hệ thống truyền tin của bà vợ nói trên, đó là *vấn đề bảo mật*. Nếu có anh chàng nào đó biết được điều giao hẹn của vợ chồng nhà kia và muốn phá vỡ hạnh phúc của họ, hay ít ra chỉ là để trêu chọc thôi, thì anh ta có thể gây nhiễu bằng cách giật dây thật nhanh, để dù bà vợ có "tăng độ thừa" đến đâu, vẫn không thể dứt bỏ được tiếng xấu tham ăn của chồng mình. Vì thế, trong khi truyền tin, nhất thiết phải đặt ra vấn đề bảo mật. Một lần nữa, toán học hiện đại lại có thể giúp ích cho bà vợ bằng cách cung cấp những phương pháp mã hoá hiện đại. Về chủ đề này, các bạn có thể tìm hiểu thêm trong bài về Toán học và mật mã của Phạm Huy Điển, cũng ở số báo này.

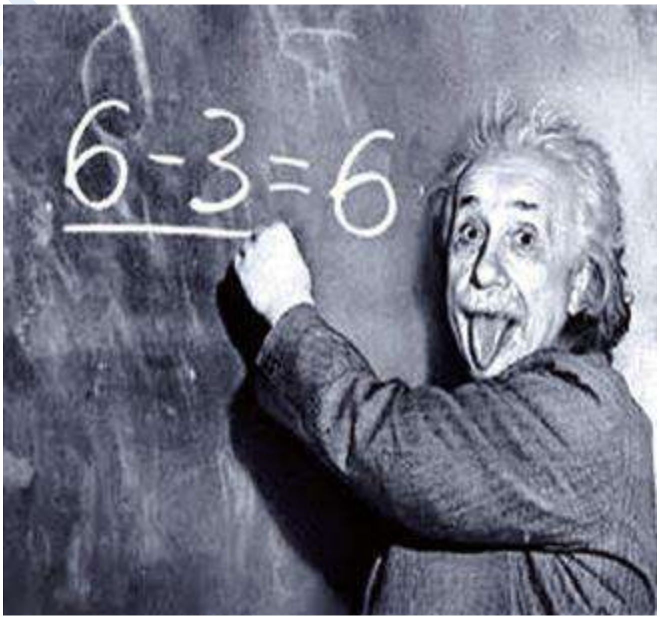
Kho tàng văn học dân gian vô cùng phong phú. Trên đây chỉ là một trong rất nhiều ví dụ về mối liên hệ giữa văn học dân gian và toán học hiện đại. Các bạn thử tìm thêm ví dụ khác nhé!

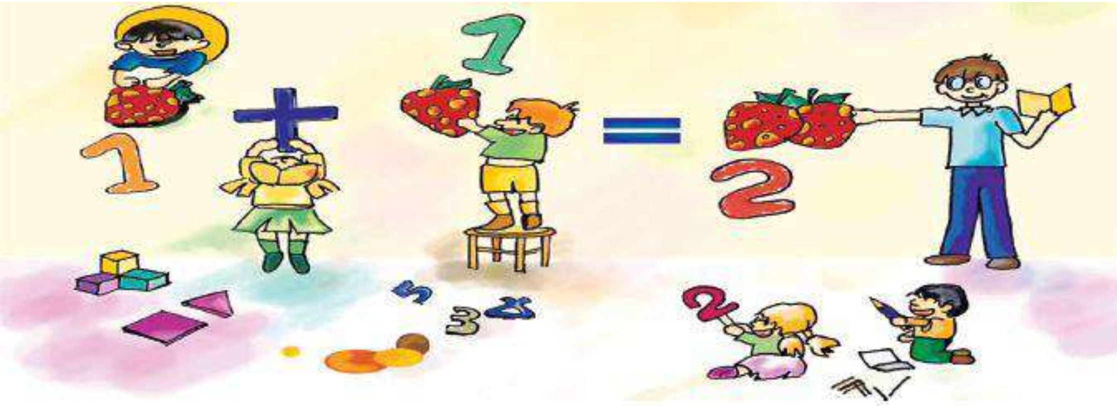
Danh ngôn toán học

"Do not worry about your difficulties in Mathematics. I can assure you mine are still greater".

Đừng lo lắng nếu bạn thấy Toán khó. Tôi có thể khẳng định rằng tôi còn thấy khó hơn.

Albert Einstein





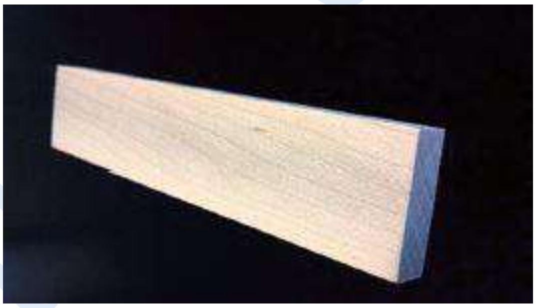
Xếp những hình mong manh

Lưu Thanh Hà

Mời các bạn xem một số hình ảnh sau:

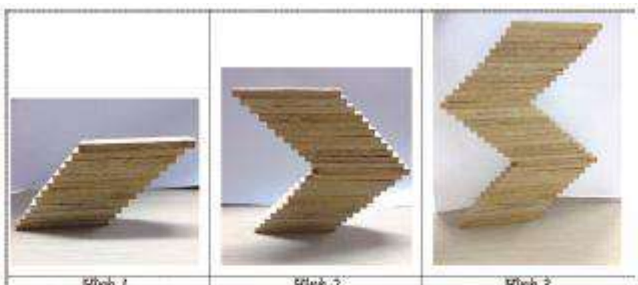
Những hình ảnh đó thật hấp dẫn phải không nào! Bạn có biết chúng được tạo thành từ những thanh gỗ KAPLA (Kabouter Plankjes)?

Đó là những thanh gỗ với tỉ lệ 1:3:15 được phát minh năm 1987 bởi Tom van der Bruggen (người Hà Lan). Điều đáng nói ở những thanh gỗ này là sự đơn giản đến mức tối giản nhưng có thể xây dựng được nhiều kiến trúc đáng kinh ngạc. Chúng gắn kết với nhau chỉ bằng lực hấp dẫn và sự cân bằng, không keo dán, không ốc vít, không chỉnh sửa kích thước.



Sau đây, bạn đọc sẽ được tìm hiểu một phần "kì diệu" của những thanh gỗ KAPLA thông qua thử thách với những hình "mong manh".

Mong manh như thế nào, tác giả xin giới thiệu một ví dụ như sau:



Hình 1 Hình 2 Hình 3

Bình luận: Quan sát hình 1, ta thấy có 12 thanh gỗ chồng lên nhau theo qui luật thanh bên trên sẽ dịch chuyển sang phải một khoảng so với thanh dưới mà khối 12 thanh vẫn cân bằng không bị đổ.

Vậy chúng ta có thể xếp thêm được bao nhiêu thanh nữa lên khối 12 thanh này?

Và khi nào khối sẽ đánh mất trạng thái cân bằng?

Câu trả lời là số lượng thanh gỗ xếp thêm phụ thuộc vào biên độ dịch chuyển sang phải của mỗi lần xếp. Ta biết rằng, một vật có mặt chân đế chỉ giữ được trạng thái cân bằng nếu giá của trọng lực phải đi qua mặt chân đế hay trọng tâm rơi trên mặt chân đế. Ở đây, mỗi lần xếp thêm một thanh gỗ, trọng tâm của cả khối lại có xu hướng dịch chuyển lên cao hơn và dịch chuyển sang bên phải. Do đó, nếu trọng tâm rơi ra bên ngoài mặt chân đế (chính là diện tích bề mặt của thanh gỗ dưới cùng) thì khối sẽ đánh mất trạng thái cân bằng.

Quan sát hình 2, ta thấy có thêm một khối tương tự hình 1 được xếp tiếp lên trên nhưng các thanh lại dịch chuyển sang trái. Bằng cách này, mặc dù trọng tâm tiếp tục được đưa lên cao (nghĩa là khả năng cân bằng bị giảm đi) nhưng trọng tâm được kéo trở lại để vẫn rơi trên mặt chân đế. Cứ như vậy, ta có thể xếp khối tiếp tục cao hơn (hình 3) dù diện tích mặt chân đế nhỏ, trọng tâm cao làm ảnh hưởng đến sự cân bằng của khối. Dĩ nhiên, sự cân bằng còn bị ảnh hưởng bởi chất liệu gỗ, ngoại lực bên ngoài và kể cả sự bình tĩnh, tập trung, khéo léo của người xếp.

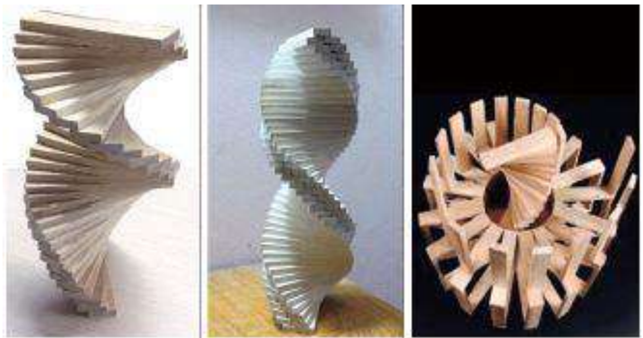
Một ý tưởng mới đặt ra là: Nếu nâng khối 12 thanh (Hình 1), đặt lên trên hai thanh (làm cột chống) thì khối có còn giữ được sự cân bằng?

Câu trả lời là có. Vì thực chất mặt chân đế không thay đổi. (Bạn đọc tự quan sát, tìm hiểu).

Bây giờ, ta bớt đi 1 thanh chống (nghĩa là diện tích chân đế giảm còn rất nhỏ) thì khối có còn cân bằng? Câu trả lời có là có, nhưng câu chuyện đã khó hơn rất nhiều. Để giữ được cân bằng, trọng tâm bắt buộc phải rơi trên mặt chân đế rất nhỏ kia. Và thế, việc giữ được cân bằng hay không quả thực "mong manh".

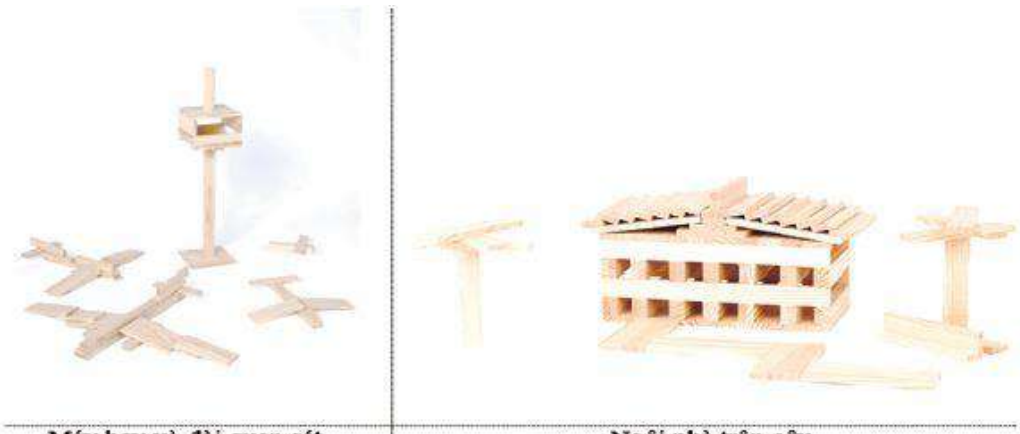
Thử thách cho bạn đọc

Dùng các thanh gỗ KAPLA, bạn đọc hãy xếp lại các hình sau và cảm nhận sự "mong manh" đồng thời thử thách sự tập trung, kiên nhẫn của mình nhé!



Xoắn 1 thanh	Xoắn 2 thanh	Sáng tạo với xoắn 1 thanh

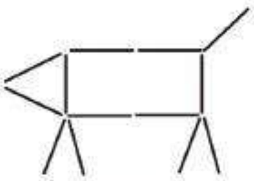
Dành cho các bạn từ 5 đến 7 tuổi:



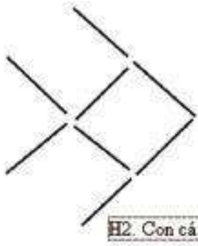
Máy bay và đài quan sát | Ngôi nhà trên cây

Que tính kỳ diệu

Vũ Anh Tuấn†

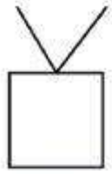


H1. Con chó



H2. Con cá

H3. Tàu vũ trụ



H4. Ti vi

Que tính hay những vật tương tự (que tăm, đũa, mảnh củi, cành cây, . . .) rất quen thuộc. Dùng những que tính chúng ta có thể xếp ra được những gì?

Hình 1, với 13 que tính chúng ta xếp được một con chó. Hình 2, với 8 que tính chúng ta xếp được một con cá. Hình 3, chúng ta có mô hình một con tàu vũ trụ với 16 que tính, và ở hình 4, chiếc ti vi được mô phỏng bởi 6 que tính.

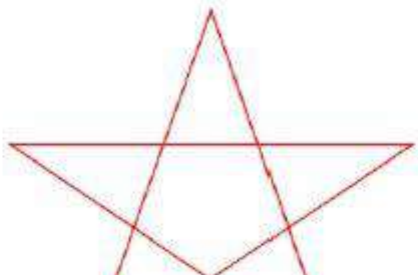
Chúng ta cùng xem xét một số bài toán thú vị sau:

Bài 1:

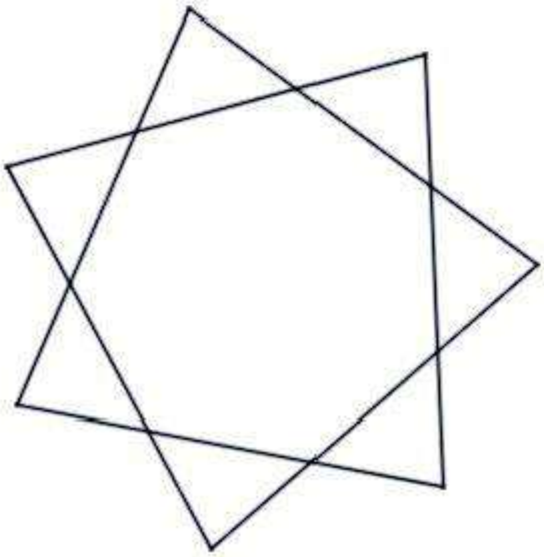
a) Có thể xếp được 5 tam giác giống nhau từ 5 que tính hay không?

b) Có thể xếp được 7 tam giác giống nhau từ 7 que tính hay không?

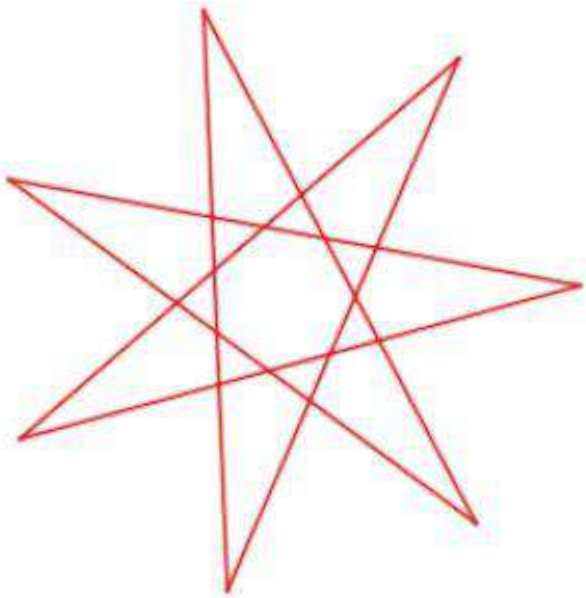
Bình luận: Câu trả lời là có, nếu chúng ta tinh ý quan sát một chút thì sẽ thấy hàng ngày, chúng ta gặp đáp án của câu hỏi này rất nhiều, đó chính là hình ngôi sao 5 cánh:



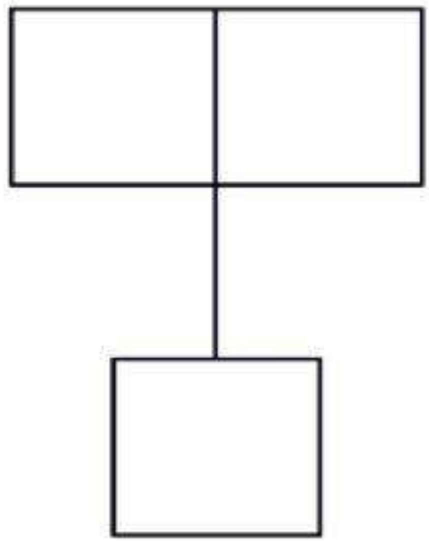
b) Tương tự như trên có thể xếp được đúng 7 tam giác giống nhau từ 7 que tính (ngoài 7 tam giác trên thì không có tam giác nào khác).



Câu hỏi đặt ra là, với 7 que tính, có thể xếp ra nhiều nhất bao nhiêu tam giác giống nhau? Tác giả đã tìm được đáp án có 14 tam giác giống nhau như hình vẽ? Đáp án của các bạn là bao nhiêu, 14 có phải là đáp án cuối cùng?

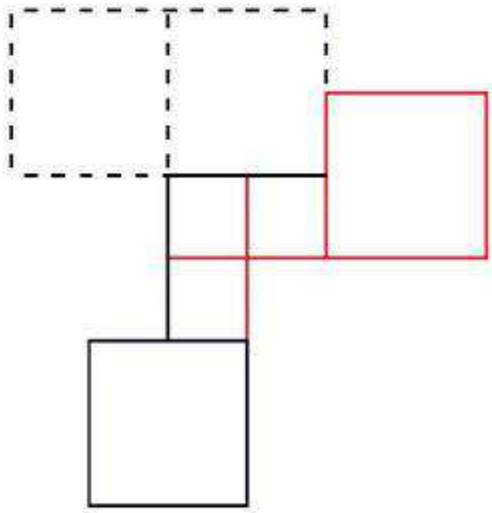


Bài 2: Quan sát hình vẽ bên, có thể thấy xuất hiện 3 hình vuông.



Di chuyển 6 que tính, bạn có thể tạo ra 5 hình vuông?

Bình luận: Chú ý rằng, đề bài chỉ yêu cầu xuất hiện 5 hình vuông mà không nhắc đến kích thước của các hình này có phải bằng nhau hay không, đây chính là điểm giúp ta có thể đột phá bài toán này, nếu chăm chăm xếp các hình vuông có kích thước như nhau thì sẽ chỉ dẫn đến ngõ cụt mà thôi.

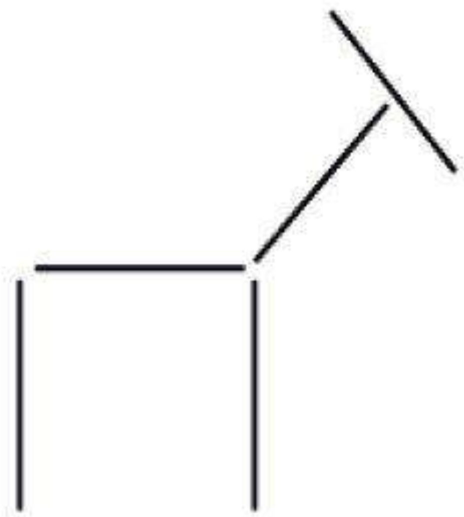


Câu đố cho các bạn:

1) Trong hai ý (a) và (b) của bài 1 ở trên, với 5 que tính có thể xếp ra được 5 tam giác, với 7 que tính có thể xếp 7 tam giác (và nhiều hơn thế nữa), vậy số que tính ít

nhất là bao nhiêu để có thể xếp ra số tam giác bằng với số que tính?

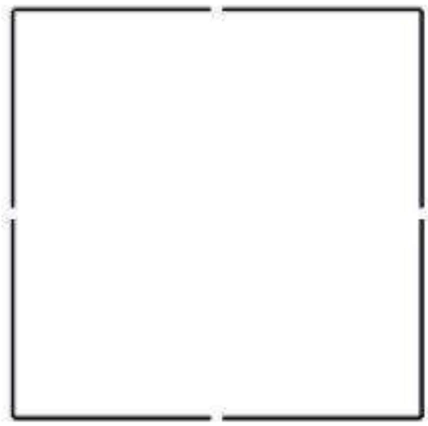
2) Hình dưới mô phỏng một chú ngựa đang dạo chơi. Di chuyển một que tính, bạn có thể làm cho chú ngựa quay đầu nhìn đi hướng khác?



3) Xếp lại hình con cá ở H2, rồi tìm cách di chuyển 2 que tính để con cá bơi theo hướng khác.

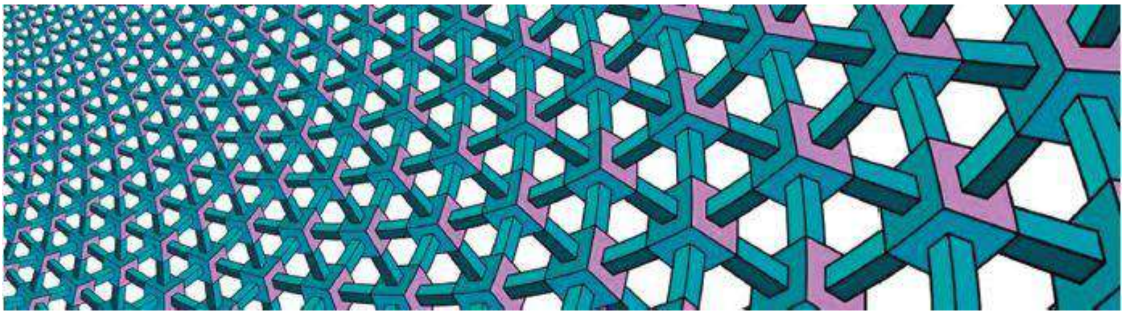
4) Bạn có thể dùng 16 que tính để mô phỏng hình một chú bướm đang bay?

5) Hình vuông sau được xếp từ 8 que tính:



Sử dụng 4 que tính khác, chia hình vuông thành hai phần giống nhau, chú ý không được "thừa" phần nào của bất kì que tính nào.

Lời giải xin gửi về: chuyên mục Toán của Bi.



TRÒ CHUYỆN VỚI GIÁO SƯ HOÀNG TỤY

■ **Mi Ly** (thực hiện)

Nổi danh trong giới toán học thế giới và có vai trò tiên phong xây dựng toán học trong nước, GS Hoàng Tụy được chọn là nhân vật đầu tiên trong chuỗi đối thoại của tạp chí Pi. Ở tuổi 90, ông vừa ra mắt cuốn sách "Convex Analysis and Global Optimization" (Giải tích lồi và Tối ưu hóa toàn cục), viết về công trình quan trọng nhất cuộc đời mình.

Giới toán học thế giới coi ông là "cha đẻ của tối ưu toàn cục", người mở đường cho một chuyên ngành toán học mới và cũng là một trong những chuyên ngành hiếm hoi có "quê hương" là Việt Nam.

Người ta nói, GS Hoàng Tụy nổi danh trong giới toán học quốc tế hơn cả ở quê nhà – nơi vẫn coi toán học là một ngành xa lạ, phần nào chỉ dành cho các trí thức tinh hoa.

Mãi biết ơn người anh, người thầy Lê Văn Thiêm

Thưa GS Hoàng Tụy, khi Ban biên tập tìm nhân vật đầu tiên cho chuỗi bài chân dung về các nhân vật toán học Việt Nam cho tạp chí Pi, GS Ngô Bảo Châu nói rằng không có lựa chọn nào khác ngoài ông, GS Hoàng Tụy, bởi những đóng góp to lớn của ông cho nền toán học nước nhà. Ông có suy nghĩ gì về điều này?

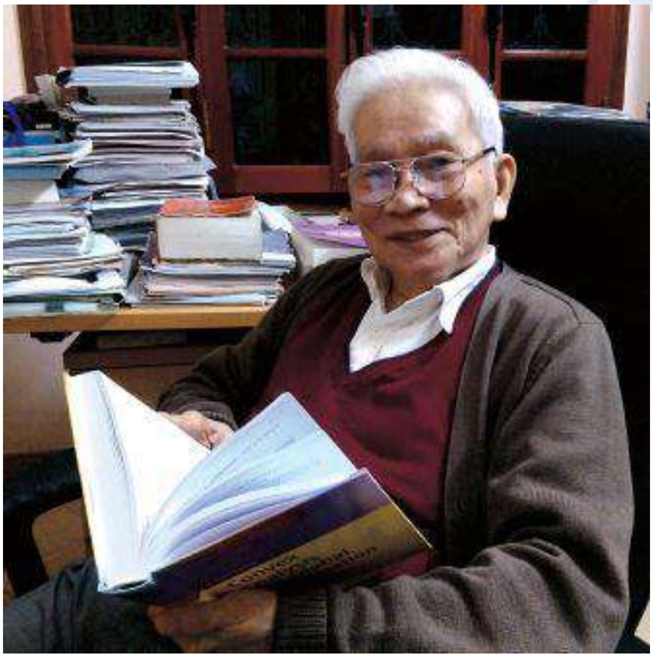
Trước hết tôi cảm ơn GS Ngô Bảo Châu vì lựa chọn đó. Công lao xây dựng nền toán học Việt Nam, công đầu thuộc về anh Lê Văn Thiêm Giáo sư, Tiến sĩ Khoa học đầu tiên của Việt Nam. Anh đã xây dựng nên nền toán học Việt Nam từ thời đất nước còn nghèo và lạc hậu. Toán lại là ngành khoa học trừu tượng còn xa lạ với thực tế đất nước khi đó.

Anh Lê Văn Thiêm là nguồn động viên to lớn của tất cả chúng tôi, là thần tượng của thế hệ tôi. Từ khi còn học trung học, tôi đã biết tiếng anh và học tập được nhiều từ anh. Tiếc là cuộc đời anh không gặp may mắn, gặp phải nhiều bi kịch. Nhờ công lao của anh và các nhà toàn học thế hệ sau, nền toán học Việt Nam đã phát triển và đạt được trình độ tương xứng với sự phát triển của đất nước như hiện nay. Toán học Việt Nam đã tự khẳng định mình trên thế giới thông qua các thành tựu được công bố và những nhà toán học thành danh trên trường quốc tế. Chúng ta cũng cần nhiều nhà toán học thành danh hơn nữa.

Công trình về "Tối ưu hóa toàn cục" của ông là một trong những thành tựu của toán học Việt Nam được thế giới công nhận. Ông có thể chia sẻ thêm về quá trình làm nên thành tựu này?

"Dù không hiểu cũng cần tôn trọng giá trị của Toán học" Hoàng Tụy

Về mặt công bố quốc tế thì anh Lê Văn Thiêm cũng là nhà toán học đầu tiên của Việt Nam làm được điều đó năm 1947 sau khi anh bảo vệ luận án Tiến sĩ ở Đức vào năm 1945. Nhưng khi về nước, vì hoàn cảnh xã hội khi đó, anh phải làm công tác đào tạo cán bộ và không có nhiều thời gian làm khoa học. Còn tôi, những công bố quốc tế đầu tiên tôi viết bằng tiếng Nga vào những năm 1987 - 1988, đăng tải trên các tạp chí của Liên Xô. Khi đó, toán học Liên Xô phát triển hàng đầu thế giới nên sách báo Liên Xô đều được dịch sang tiếng Anh và được giới toán học phương Tây tiếp cận. Ban đầu, tôi nghiên cứu về hàm thực, một lĩnh vực đang trên đà đi xuống nên ít được chú ý. Sau đó, tôi chuyển dần sang lý thuyết tối ưu, đơn giản vì tôi nghĩ rằng lý thuyết này có thể áp dụng được ở những nước chưa phát triển như Việt Nam. Việc công bố *Tối ưu hàm lõm* là khởi đầu cho *Tối ưu hóa toàn cục.* Sang thập niên 1990, đã có tạp chí riêng về Tối ưu hóa toàn cục trên thế giới. Và tôi cũng bắt đầu viết những cuốn sách từ năm 1990.



GS. Hoàng Tụy. Ảnh: Mi Ly

Ông có thể kể một vài kỷ niệm đẹp nhất của ông với toán học?

Tôi có may mắn là nhờ theo đuổi ngành có ứng dụng thực tế nên có vị trí trong nền toán học. Kỷ niệm đẹp nhất trong sự nghiệp của tôi là lần dự hội thảo quốc tế về quy hoạch toán học ở Budapest (Hungary) vào năm 1976. Lần đó, tôi được mời sang Pháp một tháng và trình bày bằng tiếng Anh trong chương trình hội thảo tại khán phòng kín đặc những nhà toán học tài năng đến từ khắp nơi trên thế giới.

Lúc tôi bước lên bục để trình bày công trình của mình, cử tọa cũng rất chú ý. Chắc hẳn người ta tò mò vì một nhà toán học ở Việt Nam xa xôi. Lúc tôi phát biểu xong, Tổng biên tập môt tờ tạp chí đến gặp tôi và mời tôi tham gia Ban biên tập của tờ tạp chí. Quá bất ngờ và vui sướng, tôi nhận lời luôn. Đó quả thực là một kỷ niệm rất đẹp trong cả đời làm toán của tôi.

"Người thầy trung bình chỉ biết nói, người thầy giỏi biết giải thích, người thầy xuất chúng biết minh họa, người thầy vĩ đại biết cách truyền cảm hứng."Các học trò từng dùng câu này để nói về ông, ý chỉ ông là người thầy biết truyền cảm hứng. Khi dạy, ông có ý thức về việc truyền cảm hứng cho học trò không?

"Trong giờ giảng của tôi mà học trò ngủ gật thì không xong rồi"

Tôi rất yêu nghề dạy học. Từ khi dạy ở trung học, tôi đã chú trọng truyền niềm say mê toán học cho học trò chứ không chỉ truyền đạt kiến thức thông thường. Khi giảng, nếu phát hiện học trò lơ đãng với bài học, tôi sẽ tìm mọi cách để đưa sự hứng thú của họ quay lại. Trong giờ giảng của tôi mà học trò ngủ gật thì không xong rồi (cười).

Tôi có nhiều người học trò đáng quý, sau này cũng thành công trong toán học như Hà Huy Khoái, Hoàng Xuân Phú, Ngô Việt Trung, Nguyễn Minh Chương. . .

Nhà báo Hồng Thanh Quang từng nhận xét ông rất "thanh niên", rất quan tâm đến các vấn đề của thời đại mới, rất hay góp ý dẫn dắt cho thế hệ đi sau về chuyên môn. Ông nghĩ sao về lời nhận xét đó?

Lời nhận xét đó được nói ra cách đây 15 năm rồi, khi tôi 75 tuổi. Bây giờ tôi đã 90, cũng không còn thanh niên như thời đó nữa (cười). Nhưng đúng là kể cả khi đã lớn tuổi, tôi vẫn rất say sưa với những cái mới. Dù làm trong ngành toán ứng dụng, tôi rất quan tâm đến toán lý thuyết và từng khuyến khích nhiều nhà toán học thế hệ sau theo đuổi lý thuyết phạm trù.

Còn sau này tuổi cao hơn, quỹ thời gian cuộc đời cũng dần eo hẹp, tôi trở về với mối quan tâm lớn của đời mình *tối ưu hóa toàn cục* và chuyên tâm viết cuốn sách mới, đó là cuốn *"Convex Analysis and Global Optimization" - Giải tích lồi và Tối ưu hóa toàn cục.*

Giới toán học quy tụ nhiều trí thức tinh hoa của đất nước, nhưng tính "tinh hoa" đó có mâu thuẫn với đại chúng, khiến đại chúng nghĩ rằng toán là một ngành tinh hoa của số ít người?

Điều này không chỉ có ở Việt Nam mà các nước cũng vậy. Toán học luôn là một ngành tri thức tinh hoa mà đại chúng khó hiểu và khó tiếp cận. Mặc dù vậy, ở các nước, dù không hiểu người ta vẫn rất coi trọng toán học. Còn ở Việt Nam, vì không hiểu và không tin vào toán học nên chúng ta coi thường. Đó là một lối suy nghĩ ấu trĩ. Người ta cần trân trọng giá trị và vẻ đẹp của toán học.

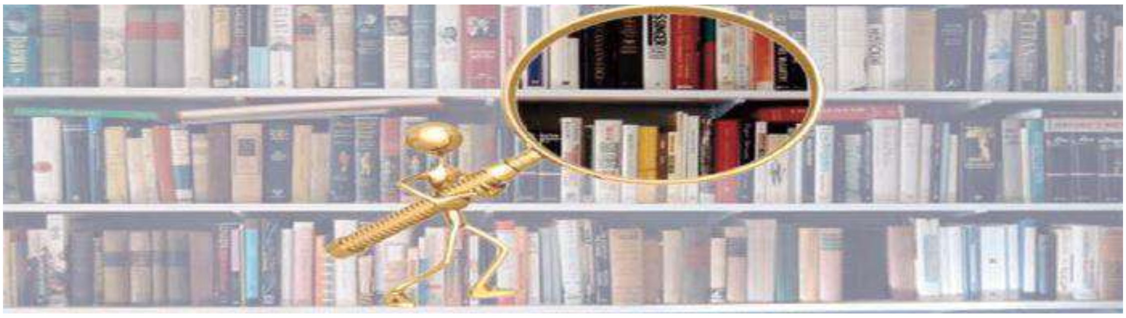
Xin cảm ơn giáo sư!

Cùng với Giáo sư Lê Văn Thiêm, ông là một trong hai người tiên phong xây dựng nền toán học của Việt Nam.

Năm 2011, GS Hoàng Tụy trở thành người đầu tiên trên thế giới nhận Giải thưởng toán học Con- stantin Caratheodory do Hội Tối ưu Toàn cục Quốc tế trao tặng. Ông được coi là cha đẻ của lý thuyết tối ưu toàn cục trên toàn thế giới. Bên cạnh đó, GS cũng từng được trao Giải thưởng Hồ Chí Minh đợt 1 vào năm 1996 và giải thưởng Phan Châu Trinh năm 2010.

Cuốn sách tiếng Anh "Convex Analysis and Global Optimization" - Giải tích lồi và Tối ưu hóa toàn cục, bản in lần 2 của GS Hoàng Tụy vừa được NXB Springer ấn hành vào cuối năm 2016.

ĐIỂM SÁCH

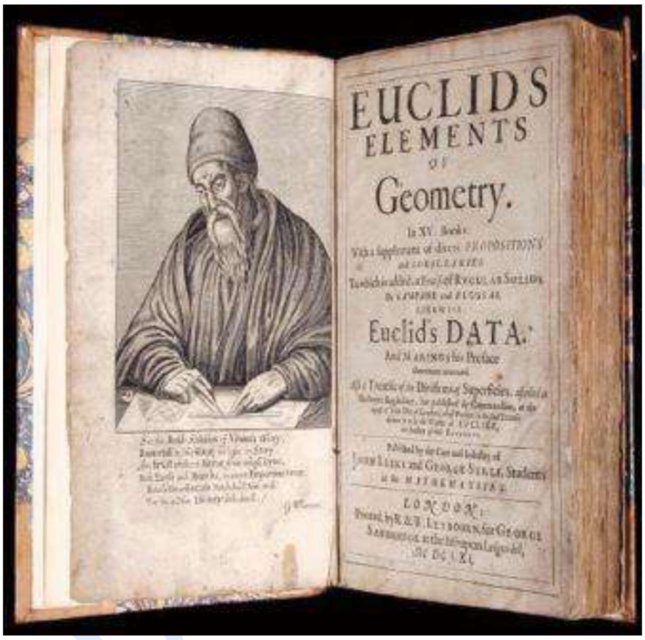


LTS. Pi mong muốn giới thiệu thường xuyên đến độc giả những cuốn sách hay, có ích cho mọi người. Lựa chọn đầu tiên cho chuyên mục này thật dễ dàng: đó chỉ có thể là "Cơ sở" của Euclid. Bởi vì "Theo một nghĩa nào đó, Cơ sở là quyển sách thuần tuý toán học đầu tiên của nhân loại và là tờ giấy khai sinh ra toán học như một bộ môn độc lập, tuy vẫn còn là một bộ phận của triết học".

Cũng vì lý do đó mà, như các bạn đã thấy, hình ảnh Euclid được lấy làm ảnh bìa cho Pi số đầu tiên.

Sách Cơ sở của Euclid

Ngô Bảo Châu



Euclid viết sách Cơ sở ở Alexandria khoảng 300 năm trước Công nguyên. Đây là thời kỳ Hellenistic của triết học cổ đại, thời kỳ mà triết học cổ đại đã lan toả tới những vùng đất chịu ảnh hưởng của văn hoá Hy Lạp mà tiêu biểu là thành Alexandria bên bờ Phi của Địa Trung Hải. Nét chung của triết học thời kỳ Hellenistic, phần nào thể hiện trong sách Cơ sở, là tư duy đã đạt đến mức tinh tuý, nhưng có lẽ đã mất đi tính bay bổng của thời kỳ trước Socrates và sức mạnh tư duy của Plato, Socrates.

Người ta cho rằng hầu hết nội dung của sách Cơ sở được truyền lại từ những tiền nhân như Pythagoras, Plato, Eudoxus . . . Tuy nhiên, khác với Pythagoras và Plato, Euclid loại bỏ triệt để các yếu tố siêu hình được gán cho các số và các hình. Các số hữu tỉ không còn được coi là minh chứng cho sự hài hoà của vũ trụ, các khối đều trong không gian không còn được coi là ý niệm toán học nấp đằng sau các phạm trù siêu hình như kim thuỷ hoả thổ. . . Hệ thống suy luận logic xuất phát từ hệ tiên đề của Plato được Euclid sử dụng một cách triệt để, các chỉ tiêu về tính chặt chẽ của chứng minh được áp dụng một cách không khoan nhượng. Theo một nghĩa nào đó, Cơ sở là quyển sách thuần tuý toán học đầu tiên của nhân loại và là tờ giấy khai sinh ra toán học như một bộ môn độc lập, tuy vẫn còn là một bộ phận của triết học. Cách Euclid xây dựng một hệ thống kiến thức cao vút dựa trên số ít tiên đề nền và lấy luật logic làm chất gắn kết, đã là hình mẫu cho sự phát triển của toán học cho đến ngày hôm nay.

Trải qua 2400 năm, các mệnh đề phát biểu và chứng minh trong sách Cơ sở vẫn còn tươi tắn một cách đáng ngạc nhiên. Từ hình học tam giác mà chúng ta học những năm cấp hai, cho đến chứng minh tuyệt đẹp bằng phản chứng cho sự tồn tại vô hạn những số nguyên tố, từ thuật toán Euclid tìm ước số chung lớn nhất mà chúng ta vẫn phải học trong giáo trình cơ sở toán học trong tin học, cho đến chứng minh không tồn tại khối đều nào khác ngoài năm khối đều của Platon, đều là những nội dung đã được triển khai một cách đầy đủ trong sách Cơ sở.

Đấy có lẽ là những lý do tại sao Cơ sở được coi là một trong những quyển sách có ảnh hưởng nhất tới sự phát triển của văn minh nhân loại. Sách đã được tái bản hàng ngàn lần, số lần tái bản có lẽ chỉ thua Kinh thánh. Từ thời kỳ Phục Hưng cho đến đầu thế kỷ hai mươi, sách của Euclid được coi là một trong những quyển sách mà những người có học phải đọc.

Lớn lên từ Cơ sở, Toán học đã đi những bước rất xa. Bây giờ bạn có thể tìm được vô số sách toán với nhiều nội dung hơn, trình bày sáng sủa hơn sách của Euclid. Tuy vậy, tôi vẫn tin rằng người có học vẫn cần đọc Euclid vào một thời điểm nào đó trong cuộc đời mình, vẫn cần có Cơ sở đặt trên giá sách.

Cảm ơn nhà xuất bản Trí thức, Alpha books và nhóm dịch giả đã đem sách Cơ sở của Euclid đến với độc giả Việt Nam.

THƯ BẠN ĐỌC

LTS. Pi rất vui vì tuy số 1 bây giờ mới ra mắt, nhưng Pi đã nhận được nhiều trao đổi của bạn đọc. Đặc biệt, Pi rất cám ơn nhà giáo Hoàng Quang (Hà Nội) vì đã gửi cho Pi một bức thư dài, mà Pi trích đăng dưới đây.

Ngoài ra, bạn Phan Dương Hiệu (giáo sư đại học Limoge, Pháp) vừa hài hước, vừa khoa học có đôi lời về "bếp núc" của Pi. Pi cảm nhận tình cảm ấm áp của bạn, và cũng xin được đăng ở đây. "Bức thư" của giáo sư Phan Dương Hiệu còn có thể xem là một bài toán để bạn đọc tính toán, suy nghĩ! Trong "lời bình" về bức thư đó, Giáo sư Đàm Thanh Sơn (đại học Chicago, Hoa Kỳ) có nói rằng, nếu sự việc diễn ra "trên mặt cầu, thì có thể không cần làm tròn", sao thế nhỉ?

Thư của nhà giáo Hoàng Quang

"Kính chào BBT Tạp chí π.

Tôi là một giáo viên (GV) đã nghỉ hưu, thỉnh thoảng có giải thích giúp một số học sinh yêu thích Toán. Hôm trước tôi có giới thiệu với các em Tạp chí π và khuyên các em nên là độc giả tích cực của Tạp chí. Nhân tiện cũng giới thiệu với các em bài toán ĐI XE BUÝT mà Tạp chí vừa đề cập. Tối hôm Noel các em lại đến chơi. Trong câu chuyện tôi có hỏi các em đã giải xong bài toán chưa. Các em bảo đã xong và nói rằng mấu chốt là ở chỗ khoảng thời gian (T) từ lúc xe khởi hành đi Sư phạm đến lúc xe kế tiếp khởi hành đi Kinh tế Quốc dân là 10 phút. Biết các em đã hiểu được bản chất vấn đề nên tôi chỉ nhắc thêm là trong các bài toán của cuộc sống ta cần nắm bắt và liệt kê ra tất cả các giả thiết (tuy không nêu rõ trong Bài toán, nhưng mặc định được công nhận) để trên cơ sở đó có thể chuyển bài toán của cuộc sống thành một bài tập của môn Toán.

(Để dễ hiểu tôi xin được lược ghi cuộc thoại)

GV: Chẳng hạn, trong bài toán này, ta phải mặc định là trong khung thời gian buổi chiều xác suất để anh sinh viên xuất hiện trên bến xe tại mọi thời điểm là như nhau. Chính xác hơn, xác suất để anh sinh viên xuất hiện trên bến xe trong các khoảng thời gian bằng nhau phải bằng nhau. . . .

Em Z: Người ta chỉ yêu cầu đưa ra lý do hợp lý, tức là chỉ cần đưa ra một mô hình phân bố giờ chạy xe, chứ không cần mô tả tất cả các mô hình sao cho xảy ra kết quả trong bài toán.

Kính thưa Ban Biên tập,

Bác cháu tôi cho rằng đây là bài tập hay, có hướng mở để được xét với những giả thiết khác nhau. Qua tìm hiểu, tôi biết rằng các em đã trăn trở cả. . . buổi chiều. Cái khó trong bài là KHUNG THỜI GIAN của buổi chiều không được xác định. Các em nói, nếu trong Bài toán này sau cụm từ " Chiều thứ 7 hàng tuần" có thêm đoạn "từ 14h đến trước 15h", tức là khung thời gian của buổi chiều được xác định, thì chúng cháu chỉ cần 10 phút.

Một trong những cái khó của các bài toán thực tế là những giả thiết phải được mặc nhiên công nhận chưa được thể hiện một cách rõ ràng. Đây chính là điều bác cháu tôi lo lắng khi phải tiếp xúc với các bài toán thực tế trong các đề thi tuyển sinh. Đây chính là thông điệp mà chúng tôi muốn qua Tạp chí gửi đến các thầy cô ra đề thi. Kính chào Ban Biên tập."

"Thư" của GS Phan Dương Hiệu

RÙA, BÁC K VÀ PI

"Nghe nói hồ Hoàn Kiếm có hình tròn xoe bán kính R mét, vì ở đó có một chú thần Rùa. Bác K nghe đâu đang gấp rút cho ra tờ báo Toán, nhưng vốn lười nên muốn dùng trí khôn để gỡ gạc thời gian. Rõ là chỉ có thần Rùa là hợp với phần bù của mình hơn cả, nên ngày cuối năm bác K đến thỉnh giáo Rùa: có cách nào làm nhanh được không? Rùa bảo: Bác K không cần làm gì đâu, chỉ cần tập chạy cho khoẻ, nếu chạy 1 ngày mà hết vòng hồ Hoàn Kiếm thì tự khắc tờ báo sẽ hiện ra. Bác K bảo: tôi đại lãn, nhưng kể ra cố tập chạy thì cũng đỡ hơn là cặm cụi ngày đêm. Nhưng hôm nay tất niên tôi đã thử rồi, chạy cả ngày chỉ được có R mét thôi. Sức thế, sao chạy được cả vòng hồ? Rùa chơi khó quá.

Rùa chỉ đợi có thế liền rút ngay ra thanh bảo kiếm trao cho bác K rồi nói: bác cầm thanh kiếm này, từ mai sang năm 2017 rồi, mỗi hôm bác sẽ chạy nhanh thêm 20.17% so với hôm trước. Bác cứ cố tập, khi nào thành chánh quả, ra đời Pi thì hoàn lại kiếm cho tôi.

Bác K nghe nói rất thích, cảm ơn Rùa. Đúng ngày Tết đầu năm, bác rủ vợ lững thững đi bộ, y như rằng đi được 1.2017R mét.

Bác K khôn lắm, nghĩ: đằng nào mỗi ngày mình cũng được thần cho chạy nhanh lên 20.17%, tội gì tập luyện, nghỉ ngơi cho khoẻ.

Y như rằng đến ngày thứ X[*], bác rủ vợ đi dạo, hai vợ chồng bác dắt nhau đi lững thững, đến 23h59' đêm vẫn chưa đi hết vòng hồ, bác K lo lắng lắm. Nhưng bác tin vào tài tính nhẩm của mình nên cũng chẳng thèm tăng tốc, quả không ngờ, đến đúng giây thứ 59 của phút cuối cùng thì hai vợ chồng bác bước tròn đúng 1 vòng hồ[†]. Bỗng đúng lúc, tờ báo Pi nóng hổi rơi xuống tay hai bác từ trên Dream Tree (chắc do Dream Team gì đó trồng trộm).

Rùa hiện lên đón chào hoan hô, hai bác trả lại thanh bảo kiếm và khuyến mại thêm cho Rùa tờ báo Pi để tăng thêm trí khôn."

Thể lệ gửi bài và đặt báo

Bạn đọc thân mến,

Đây là số đầu tiên, nên như các bạn thấy, tác giả phần lớn là thành viên Ban Biên tập, hoặc cộng tác viên thường xuyên của Pi. Hy vọng từ số tiếp theo, chúng tôi sẽ nhận được nhiều hơn sự ủng hộ của các bạn.

Sau đây là một số điều cần biết khi làm việc với Pi.

Thể lệ gửi bài:

- Bài gửi đăng Tạp chí cần ghi rõ dự định vào chuyên mục gì, hoặc không theo chuyên mục nào. Các đề đề xuất cần kèm theo lời giải và gợi ý trước về khối lớp.

- Cần ghi rõ họ tên tác giả, địa chỉ, e-mail và điện thoại để tiện liên hệ. Bản dịch hay sưu tầm cần ghi rõ nguồn. Bản thảo gửi theo định dạng latex hoặc word, cùng với file định dạng pdf. Tạp chí chỉ nhận những bài chưa đăng trên báo trong và ngoài nước.

Địa chỉ gửi bài:

- Qua email: bbt@pi.edu.vn

- Qua bưu điện đến:

Tòa soạn Tạp chí Pi

P705 - B8, Tầng 7, Tòa nhà Thư viện Tạ Quang Bửu,

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội,

Số 1 Đại Cồ Việt, Q. Hai Bà Trưng Hà Nội.

Thể lệ đặt báo:

Bạn đọc quan tâm có thể đặt báo theo một trong các hình thức sau:

- Đặt tại tất cả các bưu cục trong cả nước. Mã của Tạp chí Pi là C057.

- Đặt trực tiếp với Tòa soạn bằng cách gửi email đến địa chỉ info@pi.edu.vn với các nội dung: Họ và tên, Địa chỉ, Điện thoại, Số lượng kỳ đặt, Số lượng báo đặt mỗi kỳ.

- Đặt tại website www.pi.edu.vn: chọn nút Đặt tạp chí hoặc Đọc trực tuyến và làm theo hướng dẫn.

TÒA SOẠN

Tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
Số 1, Đại Cồ Việt, P. Bách khoa, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội
Email gửi bài: bbt@pi.edu.vn. Giao dịch: info@pi.edu.vn
Điện thoại: 04. 3215.1407 Fax: 04.36231543
Website: www.pi.edu.vn

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty In Hà Nội
Tạp chí ra hàng tháng.
Giá: 25.000 đồng

Phụ trách Truyền thông và Phát hành:
Trung tâm Violympic – Đại học FPT
Ảnh bìa 1: Euclid. *Nguồn: Internet*.
Các ảnh và hình minh họa khác: *nguồn Interne*