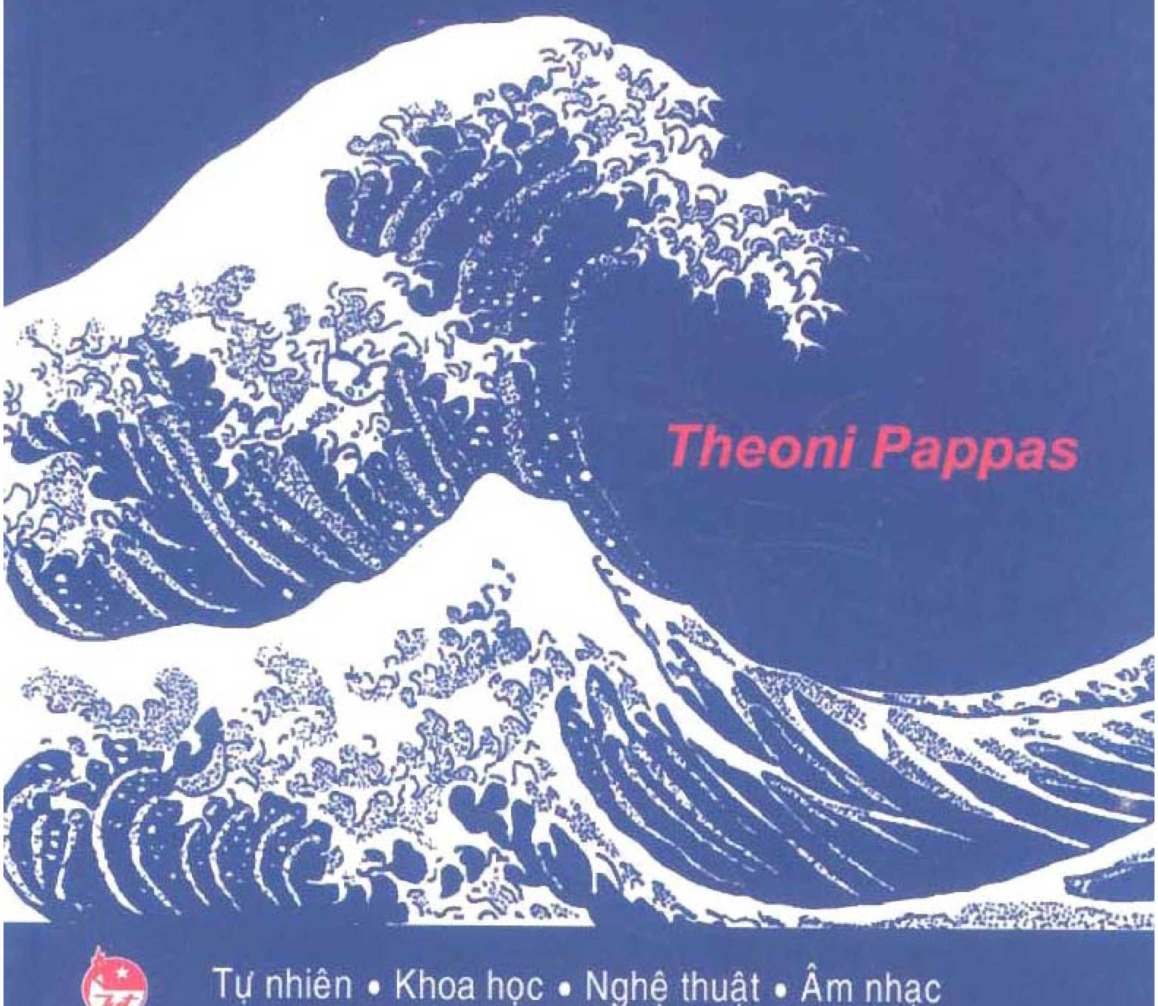
Niềm vui
TOÁN HỌC

Khám phá toán học quanh ta



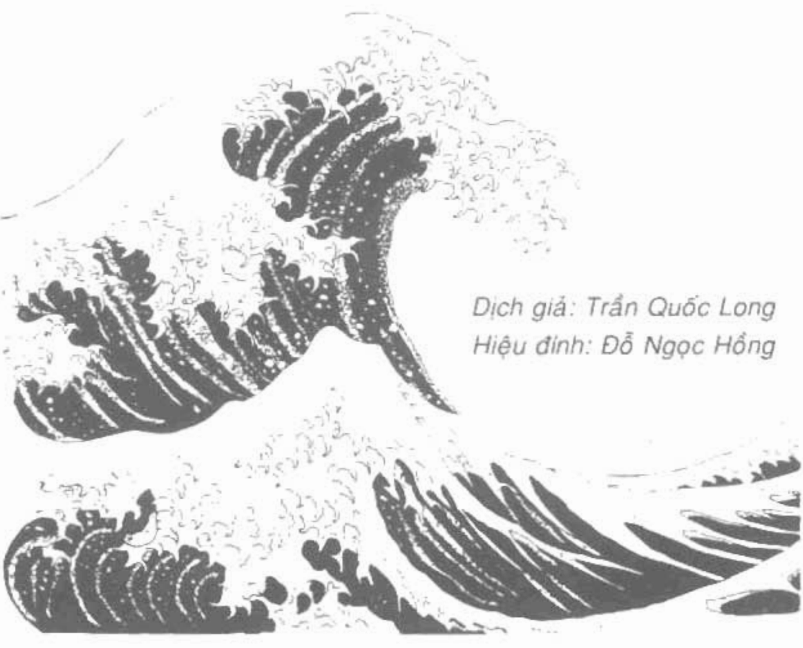
Theoni Pappas

Tự nhiên • Khoa học • Nghệ thuật • Âm nhạc
Kiến trúc • Triết học • Lịch sử • Văn học

Hi vọng rằng cuốn sách này
sẽ giới thiệu đến bạn phần nào các
khía cạnh đa dạng của toán học, đồng thời tạo
hứng thú để bạn tiếp tục tìm hiểu chúng sâu hơn.
—Theoni Pappas

Niềm vui TOÁN HỌC

Khám phá toán học quanh ta



Dịch giả: Trần Quốc Long
Hiệu đính: Đỗ Ngọc Hồng

Tự nhiên · Khoa học · Nghệ thuật · Âm nhạc
Kiến trúc · Triết học · Lịch sử · Văn học

NHÀ XUẤT BẢN KIM ĐỒNG

THE JOY OF MATHEMATICS

Discovering Mathematics all around you

Wide World Publishing/Tetra
P.O. Box 476
San Carlos, CA 94070
Websites: http://www.wideworldpublishing.com
http://www.mathproductsplus.com

NIỀM VUI TOÁN HỌC

Khám phá toán học quanh ta

Địa chỉ: Phòng 303, nhà 17T9
Khu đô thị Trung Hoà Nhân Chính, Thanh Xuân, Hà Nội
Điện thoại: 04. 6281 6835 * Fax: 04. 6281 6834
Email: sach@longminh.com.vn
Website: www.longminh.com.vn

Cuốn sách được xuất bản theo hợp đồng chuyển nhượng bản quyền giữa Wide World Publishing/Tetra và Công ty CP Văn hoá Giáo dục Long Minh.

"...vũ trụ vẫn luôn mở rộng trước mắt chúng ta, nhưng chúng ta không thể hiểu được nó nếu không hiểu ngôn ngữ và các kí tự của nó. Được viết bằng ngôn ngữ của toán học, kí tự của vũ trụ là những tam giác, đường tròn và các hình hình học khác mà nếu thiếu chúng, con người sẽ không thể hiểu được một từ nào của vũ trụ; thiếu chúng, ta sẽ chỉ lang thang trong một mê cung tối tăm."

—Galileo

MỤC LỤC

Quá trình hình thành hệ thập phân 3
Định lí Pythagoras 5
Ảo giác và đồ họa máy tính 6
Đường xiclôit, nàng Helen của hình học 7
Biến tam giác thành hình vuông 10
Sao chổi Halley 11
Tam giác không thể 15
Quipu 16
Dựng chữ cái, kĩ thuật in ấn và toán học 18
Bài toán *Lúa mì và bàn cờ* 19
Xác suất và số π 20
Động đất và các lôgarit 22
Trần nhà parabol của tòa trụ sở Quốc hội Mỹ 24
Máy tính, sự đếm và dòng điện 26
Tô-pô, một trò chơi toán học 28
Dãy số Fibonacci 30
Biến dạng của định lí Pythagoras 32
Bộ vòng ba, một mô hình tô-pô 33
Giải phẫu học và tỉ lệ vàng 34
Đường dây xích và đường cong parabol 36
Câu đố chữ T 37
Thales và đại kim tự tháp 38
Khách sạn Vô Hạn 39
Tinh thể – khối đa diện của tự nhiên 40
Tam giác Pascal, dãy số Fibonacci và công thức nhị thức 42
Toán học trên bàn bi-a 44
Hình học trong đường đi của electron 45
Dải Möbius và chiếc bình Klein 46
Câu đố của Sam Loyd 49

Toán học và trò chơi gấp giấy 50
Mẹo Fibonacci 53
Quá trình phát triển của các kí hiệu toán học 54
Các thiết kế hình học của Leonardo da Vinci 57
Mười mốc lịch sử 58
Định lí Napoleon 59
Lewis Carroll – nhà toán học 60
Đếm bằng các ngón tay 62
Một biến thể từ dải Möbius 63
Định lí Heron 64
Cùng quan sát kiến trúc và hình học Gô tích 65
Thanh Napier 66
Hội họa và hình học xạ ảnh 68
Vô cùng và đường tròn 70
Hình vành khuyên lạ kì 71
Những chú ngựa Ba Tư và câu đố của Sam Loyd 72
Những hình trăng lưỡi liềm 74
Các lục giác trong tự nhiên 76
Googol và Googolplex 78
Ma phương khối 79
Fractal – thật hay tưởng tượng! 80
Na-nô giây – đo thời gian trên máy tính 82
Vòm trắc địa của Leonardo da Vinci 83
Ma phương 84
Ma phương đặc biệt 89
Tam giác Trung Quốc 90
Cái chết của Archimedes 91
Một thế giới phi Euclid 92
Đạn pháo và các kim tự tháp 95
Đường concôit của Nicomedes 96
Nút ba lá 98

Ma phương của Benjamin Franklin	99
Số vô tỉ và định lí Pythagoras	100
Số nguyên tố	102
Hình chữ nhật vàng	104
Tạo một tri-tetra flexagon	109
Tìm kiếm vô hạn trong hữu hạn	110
Năm khối Platon	112
Phương pháp kim tự tháp để tạo các ma phương	114
Các khối Kepler Poinsot	115
Ảnh ảo giác giả xoắn ốc	116
Khối hai mươi mặt và hình chữ nhật vàng	117
Nghịch lí của Zeno. Nghịch lí Achilles và chú rùa	118
Hình lục giác thần bí	120
Câu đố về các đồng xu	121
Lát mặt phẳng	122
Câu đố của Diophantus	125
Bài toán *Bảy cây cầu Königsberg* và tô-pô	126
Đồ thị	128
Lịch Aztec[1]	130
Bộ ba bất khả thi	132
Ma phương của người Tây Tạng cổ đại	135
Chu vi, diện tích và các chuỗi vô hạn	136
Bài toán *Bàn cờ*	138
Máy tính của Pascal	139
Isaac Newton và các phép tính vi tích phân	140
Các phép tính vi tích phân của Nhật Bản	141
Chứng minh 1 = 2	142
Sự đối xứng trong các tinh thể	143
Toán học trong âm nhạc	144
Số Palindrome	148
Nghịch lí về bài kiểm tra bất ngờ	149

Bài toán viết bằng chữ hình nêm của người Babylon 150
Đường xoắn ốc của Archimedes 151
Sự phát triển của các ý tưởng toán học 152
Tô-pô học và bài toán *Bản đồ bốn màu* 154
Hội họa và sự cân đối động 156
Số siêu hạn 158
Bài toán logic 161
Đường bông tuyết 162
Số 0 – Ở đâu và khi nào? 164
Định lí Pappus và câu đố chín đồng xu 165
Vòng tròn ma thuật Nhật Bản 166
Vòm trắc địa và sự chưng cất nước 167
Đường xoắn ốc – toán học và di truyền 168
Đường thần kì 171
Toán học và kiến trúc 172
Lịch sử ảnh ảo giác 174
Bài toán chia ba góc và tam giác đều 176
Bài toán về gỗ, nước và lúa mì 177
Charles Babbage – Leonardo da Vinci của máy tính hiện đại 178
Toán học và nghệ thuật của Hồi giáo 180
Ma phương Trung Quốc 181
Vô cùng và giới hạn 182
Bài toán về đồng tiền giả 183
Đền thờ Parthenon và toán học 184
Xác suất và tam giác Pascal 186
Đường thân khai 189
Ngũ giác, hình sao năm cánh và tam giác vàng 190
Ba người đàn ông đứng trước bức tường 192
Sai lầm hình học và dãy số Fibonacci 193
Mê cung 194

Bàn cờ đam Trung Quốc 198
Các giao tuyến của mặt nón 199
Chân vịt Archimedes 201
Ảo giác quang học bức xạ 202
Định lí Pythagoras và Tổng thống Garfield 203
Nghịch lí bánh xe của Aristotle 205
Quần thể đá chồng Stonehenge 206
Có bao nhiêu chiều? 207
Máy tính và chiều không gian 209
Dải Möbius kép 210
Đường nghịch – đường lấp đầy không gian 211
Bàn tính 212
Toán học và dệt vải 213
Số Mersenne 214
Câu đố tangram 215
Vô cùng và hữu hạn 216
Các số tam giác, số vuông và số ngũ giác 217
Eratosthenes đo Trái Đất 218
Hình học xạ ảnh và quy hoạch tuyến tính 219
Bài toán *Nhện và ruồi* 221
Toán học và bong bóng xà phòng 222
Nghịch lí đồng tiền 223
Hexamino 224
Dãy Fibonacci và tự nhiên 225
Chú khỉ và những quả dừa 229
Bốn con nhện và những đường xoắn ốc 231
LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN 233
SÁCH DẪN (INDEX) 241
GIỚI THIỆU VỀ TÁC GIẢ 247

LỜI GIỚI THIỆU

Quyển sách *Niềm vui toán học* gợi mở các khái niệm, ý tưởng, các câu hỏi, lịch sử, các bài toán và những trò giải trí nhằm giúp bạn hiểu hơn về bản chất và tầm ảnh hưởng của toán học trong cuộc sống.

Tận hưởng niềm vui trong toán học chính là khi ta hiểu ra rằng toán học hoàn toàn không phải là một môn học xa rời với những thứ quanh ta và làm ta khó chịu với những cuốn sổ sách chưa quyết toán hay những cỗ máy tính phức tạp. Rất ít người trong chúng ta hiểu được bản chất của toán học vốn dĩ gắn liền với môi trường và cuộc sống. Vô vàn thứ trong đời sống hàng ngày của con người có thể mô tả được bằng toán học. Các khái niệm toán học thậm chí còn hiện hữu ngay cả trong cấu trúc của những tế bào.

Cuốn sách này sẽ giúp bạn nhận biết về mối quan hệ không thể tách rời của toán học với thế giới tự nhiên thông qua việc giới thiệu những khái niệm và hình ảnh của toán học trong muôn mặt đời sống.

Niềm vui trong toán học cũng giống như cảm giác khi mới khám phá điều gì đó lần đầu tiên. Như cảm giác của trẻ thơ trước những kì quan của thế giới vậy! Một khi bạn đã trải qua, bạn sẽ không bao giờ quên được. Cảm giác ấy có thể hứng thú như lần đầu tiên bạn nhìn vào kính hiển vi thấy những vật vẫn luôn ở xung quanh mà bình thường mắt bạn không thể nào nhìn thấy được.

Khi cần phải quyết định trình bày cuốn *Niềm vui toán học* như thế nào thì cách phân chia theo chủ đề ngay lập tức hiện đến với chúng tôi, ví dụ như toán học và tự nhiên, toán học và khoa học, toán học và nghệ thuật,... Nhưng toán học và những mối quan hệ của nó với thế giới xung quanh không hiện diện thành từng nhóm riêng biệt. Trái lại, toán học và sự xuất hiện của nó mang đầy tính ngẫu nhiên và bất ngờ. Vì thế, các chủ đề trong cuốn sách này cũng được sắp xếp một cách tự nhiên nhằm tạo sự thú vị trong quá trình khám phá. *Niềm vui toán học* được trình bày theo lối mở ở tất cả các phần. Mỗi mục, không kể lớn hay nhỏ, về cơ bản là độc lập với nhau.

Khi cảm nhận được niềm vui thực sự trong toán học, bạn sẽ càng hứng thú và mong muốn tìm hiểu về nó nhiều hơn nữa.

"Tất cả các lĩnh vực của toán học, dù trừu tượng đến mấy, sớm muộn rồi cũng sẽ được ứng dụng vào các hiện tượng của thế giới thực."

—Lobachevsky

Toán học là một khoa học, một ngôn ngữ, một nghệ thuật, một cách tư duy. *Toán học* hiện diện trong tự nhiên, nghệ thuật, âm nhạc, kiến trúc, lịch sử, khoa học, văn học. *Toán học* luôn tác động đến mọi khía cạnh của vũ trụ. *Toán học* là một khoa học, một ngôn ngữ, một nghệ thuật, một cách tư duy. *Toán học* hiện diện trong tự nhiên, nghệ thuật, âm nhạc, kiến trúc, lịch sử, khoa học, văn học. *Toán học* luôn tác động đến mọi khía cạnh của vũ trụ. *Toán học* là một khoa học, một ngôn ngữ, một nghệ thuật, một cách tư duy. *Toán học* hiện diện trong tự nhiên, nghệ thuật, âm nhạc, kiến trúc, lịch sử, khoa học, văn học. *Toán học* luôn tác động đến mọi khía cạnh của vũ trụ. *Toán học* là một khoa học, một ngôn ngữ, một nghệ thuật, một cách tư duy. *Toán học* hiện diện trong tự nhiên, nghệ thuật, âm nhạc, kiến trúc, lịch sử, khoa học, văn học. *Toán học* luôn tác động đến mọi khía cạnh của vũ trụ. *Toán học* là một khoa học, một ngôn ngữ, một nghệ thuật, một cách tư duy. *Toán học* hiện diện trong tự nhiên, nghệ thuật, âm nhạc, kiến trúc, lịch sử, khoa học, văn học. *Toán học* luôn tác động đến mọi khía cạnh của vũ trụ.

Quá trình hình thành hệ thập phân

Những hệ đếm đầu tiên không phải là hệ đếm theo vị trí[1]. Nhưng đến khoảng năm 1700 trước Công nguyên (tr.C.N), hệ đếm theo vị trí cơ số 60 đã bắt đầu được phát triển. Nó rất hữu dụng đối với người dân Lưỡng Hà, những người đã tạo ra nó để sử dụng cùng với lịch 360 ngày của họ. Hệ đếm theo vị trí thực sự được biết đến sớm nhất là của người Babylon, nó bắt nguồn từ hệ đếm cơ số 60 của người

---

(1). Hệ đếm theo vị trí: hệ đếm mà trong đó vị trí của mỗi chữ số quyết định giá trị của nó. Ví dụ trong hệ thập phân (hệ đếm cơ số 10), chữ số 3 của số 375 không phải có giá trị bằng 3 mà là 300 vì nó đứng ở vị trí hàng trăm.

Sumer cổ[1]. Thay vì dùng 60 biểu tượng để viết các chữ số từ 0 đến 59, họ dùng kí hiệu 𒁹 cho số 1 và 𒌋 cho số 10. Họ có thể biểu diễn các tính toán số phức tạp với các kí hiệu này, nhưng vẫn chưa có kí hiệu nào cho số 0 được đưa ra.

Để chỉ số 0, một khoảng trống được để lại ở trong con số. Khoảng năm 300 tr.C.N, một kí hiệu cho số 0 đã xuất hiện:  hoặc  và hệ đếm cơ số 60 từ đó phát triển rất mạnh mẽ. Trong những năm đầu sau Công nguyên (s.C.N), người Hy Lạp và người Ấn Độ bắt đầu sử dụng hệ đếm cơ số 10, nhưng họ không có kí hiệu vị trí. Họ dùng mười chữ cái đầu tiên trong bảng chữ cái của mình để đếm. Sau đó, khoảng năm 500 s.C.N, một người Ấn Độ đã phát minh ra kí hiệu vị trí cho hệ cơ số 10. Ông bỏ các chữ cái dùng để kí hiệu các số lớn hơn 9 và chuẩn hóa chín kí hiệu đầu tiên. Khoảng năm 825 s.C.N, nhà toán học người Ả-rập Al-Khowavizmi đã viết một cuốn sách ca ngợi các số Ấn Độ. Hệ đếm cơ số 10 đến Tây Ban Nha vào khoảng thế kỉ XI khi các số Ghobar hình thành. Nhưng châu Âu vẫn hoài nghi và chậm thay đổi. Các học giả và các nhà khoa học miễn cưỡng sử dụng hệ cơ số 10 bởi không có cách nào đơn giản hơn để kí hiệu phân số. Hệ đếm này trở nên phổ biến rộng rãi khi các nhà buôn tiếp nhận nó vì tác dụng vô giá của nó trong công việc tính toán và lưu giữ sổ sách. Sau đó, các phân số thập phân ra đời vào thế kỉ XVI và rồi dấu phẩy thập phân cũng được nhà toán học, vật lí và thiên văn học người Scotland John Napier đưa ra vào năm 1617.

Một ngày nào đó, khi nhu cầu và các cách tính của chúng ta thay đổi, liệu sẽ có hệ đếm mới nào xuất hiện và thay thế hệ thập phân mà chúng ta hiện đang dùng hay không?

---

(1). Các cư dân người Sumer đầu tiên đã định cư ở Lưỡng Hà và xây dựng nền nền văn minh tại đó vào khoảng năm 3500 tr.C.N cho đến thời đại Babylon (2024 - 1595 tr.C.N).

Định lí Pythagoras

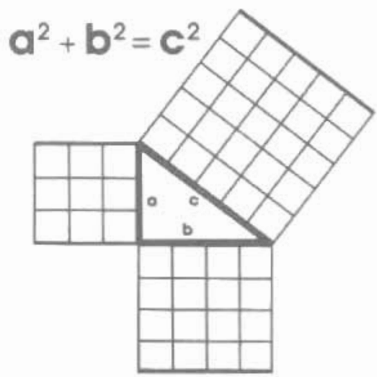
Bất kì bạn nào đã từng học qua đại số hay hình học hẳn đều đã nghe nói đến *định lí Pythagoras*. Định lí nổi tiếng này được sử dụng trong rất nhiều chuyên ngành của toán học, trong xây dựng, kiến trúc và trong đo đạc. Thời xưa, người Ai Cập cổ đại đã biết áp dụng kiến thức của họ về định lí Pythagoras để dựng góc vuông. Họ thắt nút để đánh dấu ba đoạn dây có độ dài tương ứng là 3, 4 và 5 đơn vị. Sau đó, họ căng ba đoạn dây này sao cho chúng tạo thành một tam giác. Họ biết rằng tam giác nhận được sẽ luôn có một góc vuông đối diện với cạnh dài nhất ($3^2 + 4^2 = 5^2$).

Định lí Pythagoras

Trong tam giác vuông, bình phương độ dài cạnh huyền luôn bằng tổng bình phương độ dài hai cạnh góc vuông.

Định lí Pythagoras đảo

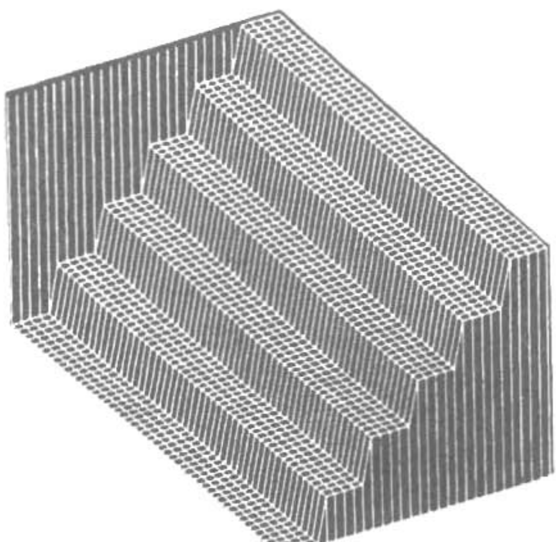
Nếu tổng bình phương độ dài hai cạnh của một tam giác bằng bình phương độ dài cạnh thứ ba thì tam giác đó là tam giác vuông.



Mặc dù định lí này được gọi theo tên nhà toán học Hy Lạp cổ đại Pythagoras (khoảng năm 540 tr.C.N) nhưng những dấu vết lịch sử lại cho thấy nó thuộc về người Babylon thời Vua Hammurabi, trước thời của Pythagoras khoảng 1000 năm. Có lẽ nó được đặt theo tên của Pythagoras bởi những chứng minh định lí được ghi lại đầu tiên do những môn đồ của trường phái ông thực hiện. Sự hiện diện của *định lí Pythagoras* và các chứng minh của nó có ở khắp các châu lục, các nền văn hóa và xuyên suốt nhiều thế kỉ. Trên thực tế, có lẽ đây là định lí có nhiều cách chứng minh hơn bất kì một định lí nào khác.

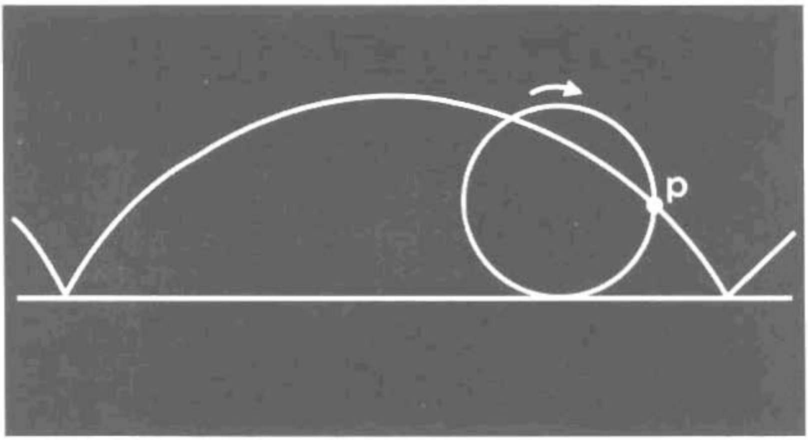
Ảo giác và đồ họa máy tính

Ngày nay, con người vẫn đang tiếp tục tìm hiểu những ứng dụng đa dạng của máy vi tính trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Đồ họa cũng là một trong số đó. Hình ảo giác bên dưới là ảnh biểu diễn trên máy tính của *cầu thang Schroder*. Nó thuộc loại ảo giác dao động. Trí não của chúng ta bị ảnh hưởng bởi những kinh nghiệm trong quá khứ và các gợi ý thu nhận được. Đầu tiên, trí não nhìn thấy một vật theo cách này, rồi một thời gian nào đó trôi qua, nó sẽ thay đổi và nhìn vật theo cách khác. Thời gian để não thay đổi cách nhìn phụ thuộc vào sự tập trung của chúng ta hoặc thời gian chúng ta trở nên chán khi nhìn vào vật đó. Trong hình ảo giác của Schroder, sau một lúc trông chiếc cầu thang như bị lật từ trên xuống.



Đường xiclôit, nàng Helen của hình học

Đường xiclôit là một trong những đường cong hấp dẫn của toán học. Nó được định nghĩa là *đường cong phẳng được vẽ ra bởi một điểm cố định nằm trên vòng tròn khi vòng tròn lăn không trượt trên một đường thẳng cố định.*



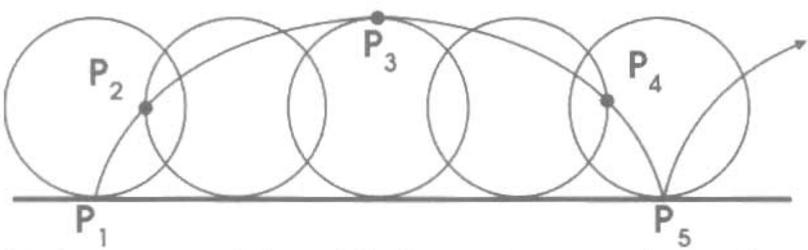
Một trong những ghi chép đầu tiên về đường xiclôit xuất hiện trong một cuốn sách của Charles Bouvelles xuất bản năm 1501. Nhưng đến tận thế kỉ XVII, nhiều nhà toán học lỗi lạc như Galileo, Pascal, Torricelli, Descartes, Fermat, Wren, Wallis, Huygens, Johann Bernoulli, Leibniz, Newton mới để ý tìm hiểu các tính chất của nó. Thế kỉ XVII là thế kỉ của những quan tâm về toán học trong cơ học và chuyển động, điều đó có thể lí giải cho sự chú ý đến đường xiclôit. Cùng với rất nhiều khám phá về đường xiclôit trong thời kì này là những cuộc tranh cãi về việc ai là người đầu tiên tìm ra nó và những lời buộc tội về việc đánh cắp ý tưởng, những đánh giá không tốt về kết quả của người khác. Chính vì vậy mà đường xiclôit còn được gọi bằng cái tên *quả táo bất hòa*[1] hay *nàng Helen của hình học*[2]. Một số tính chất của đường xiclôit được khám phá trong suốt thế kỉ XVII là:

1) Chiều dài của nó gấp bốn lần đường kính của vòng tròn lăn. Thật thú vị khi chiều dài của đường xiclôit là một số hữu tỉ không phụ thuộc vào số π.

2) Diện tích của vùng dưới đường xiclôit gấp ba lần diện tích của vòng tròn lăn.

3) Điểm cố định trên đường tròn vẽ nên đường xiclôit có vận tốc di chuyển khác nhau, trên thực tế tại điểm P_5 nó thậm chí đứng yên (tức là có vận tốc bằng 0).

4) Khi các viên bi được thả từ các vị trí khác nhau trên một bờ thành hình xiclôit thì chúng rơi xuống đến chân thành cùng một lúc với nhau.



Mỗi đường tròn trong hình trên biểu diễn vị trí của vòng tròn lăn sau mỗi một phần tư vòng quay của nó. Chú ý rằng chiều dài của đường xiclôit khi quay được một phần tư vòng từ điểm P_1 đến điểm P_2 ngắn hơn nhiều so với từ điểm P_2 đến điểm P_4. Vì vậy, điểm vẽ nên đường xiclôit phải tăng tốc từ P_2 đến P_4 do nó phải đi xa hơn trong cùng một thời gian. Điểm đứng yên khi nó đổi hướng chuyển động.

---

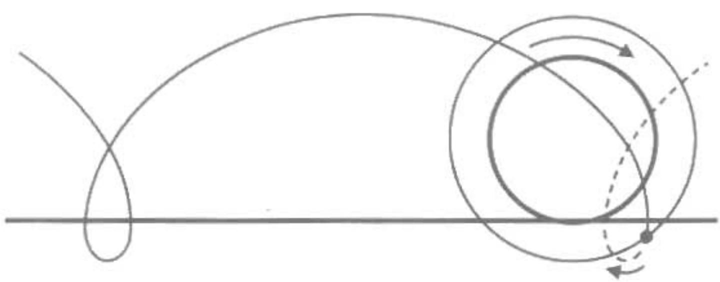
(1). Ám chỉ đường xiclôit chính là nguyên nhân gây nên những bất hòa, tranh cãi.

(2). Helen là một nhân vật trong thần thoại Hy Lạp, nàng là nguyên nhân gây nên cuộc chiến thành Troy nổi tiếng.

Có rất nhiều nghịch lí gắn liền với đường xiclôit, trong đó nghịch lí tàu hỏa đặc biệt rất hấp dẫn:

> *Tại mọi thời điểm, một tàu hỏa đang chạy không bao giờ chuyển động theo hướng mà động cơ kéo nó đi. Luôn có phần nào đó của tàu chuyển động ngược hướng với tàu đó.*

Nghịch lí này có thể được giải thích bằng cách sử dụng đường xiclôit. Ở đây đường cong được hình thành có tên gọi là đường *xiclôit co* – đường cong phẳng được vẽ ra bởi một điểm cố định nằm ngoài bánh xe lăn. Hình bên dưới cho thấy một phần bánh tàu hỏa chuyển động về phía sau trong khi đoàn tàu di chuyển về phía trước.

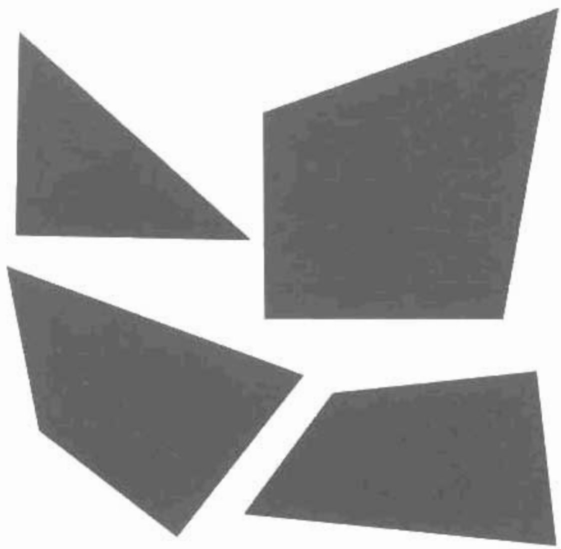


Biến tam giác thành hình vuông

Nhà toán học người Đức David Hilbert (1862 - 1943) là người đầu tiên chứng minh rằng bất kì một đa giác nào cũng đều có thể biến thành một đa giác khác có cùng diện tích bằng cách cắt nhỏ nó thành một số hữu hạn các mảnh nhỏ.

Định lí này được minh họa bằng một trong các câu đố của nhà đố vui nổi tiếng người Anh Henry Ernest Dudeney (1847 - 1930). Dudeney biến một tam giác đều thành một hình vuông bằng cách chia nó thành bốn phần nhỏ.

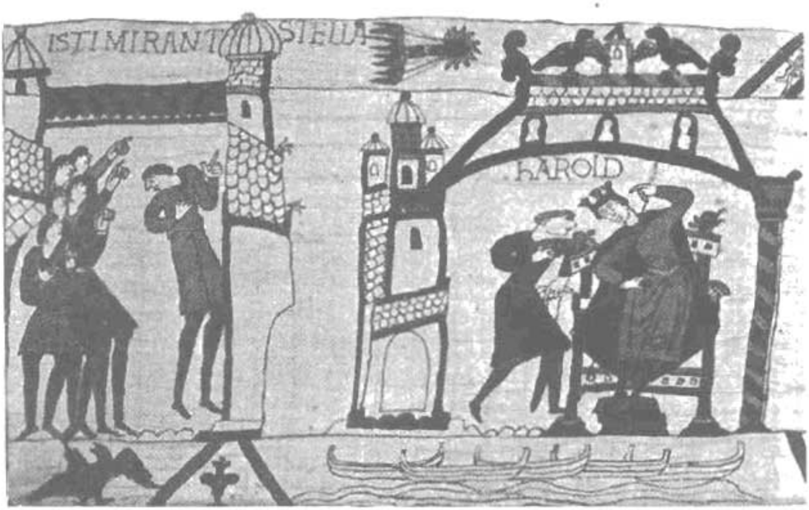
Dưới đây là bốn phần nhỏ đó. Bạn hãy thử ghép chúng lại với nhau! Đầu tiên thành hình tam giác đều và sau đó là thành hình vuông.



Xem hướng dẫn ở phần *Lời giải và đáp án*, mục *Biến tam giác thành hình vuông.*

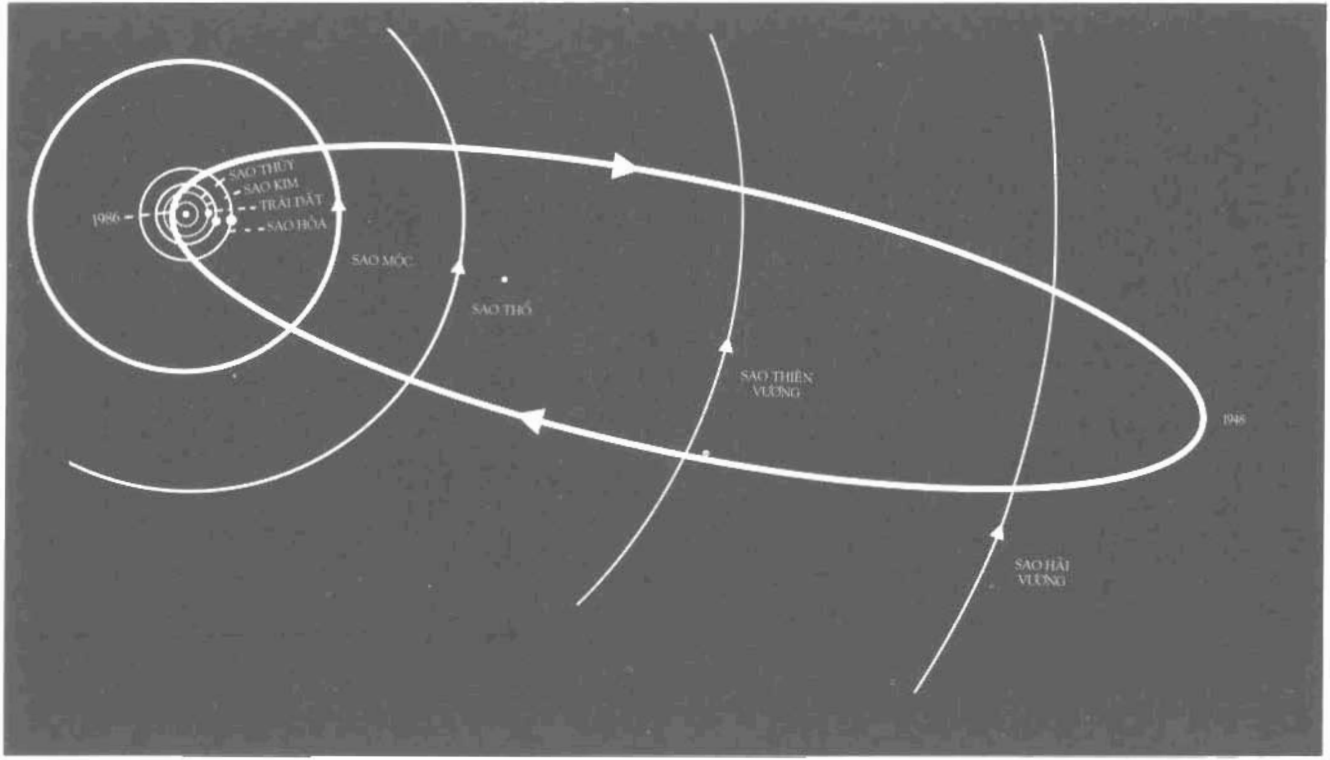
Sao chổi Halley

Quỹ đạo và đường đi là những khái niệm có thể biểu diễn dễ dàng bằng toán học dưới dạng các phương trình và đồ thị. Nghiên cứu đồ thị đôi khi có thể giúp ta thấy rõ các chu trình và chu kì đường đi. Trường hợp *sao chổi Halley* cũng vậy.



Sao chổi Halley được thêu trên thảm thêu Bayeaux.

Cho đến tận thế kỉ XVI, sao chổi vẫn là hiện tượng thiên văn chưa giải thích được. Aristotle và các nhà triết học Hy Lạp khác tin rằng chúng là những hình ảnh được tạo ra trong bầu khí quyển của Trái Đất. Năm 1577, ý kiến này đã bị nhà thiên văn học người Đan Mạch nổi tiếng Tycho de Brahe bác bỏ. Từ đài quan sát của mình trên đảo Hven ở Đan Mạch, ông đã đưa ra những quan sát chính xác về sao chổi năm 1577. Các đo đạc của ông cho thấy khoảng cách từ Trái Đất đến sao chổi phải lớn gấp ít nhất sáu lần khoảng cách từ Trái Đất tới Mặt Trăng, từ đó phủ nhận ý kiến cho rằng chúng được tạo


SAO THỦY
SAO KIM
TRÁI ĐẤT
SAO HỎA
1986
SAO MỘC
SAO THỔ
SAO THIÊN VƯƠNG
SAO HẢI VƯƠNG
1948

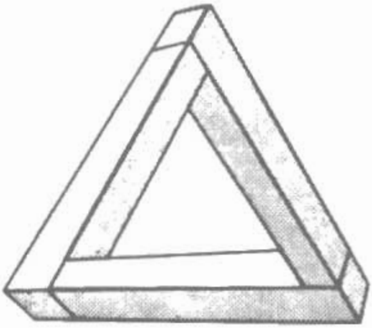
ra trong bầu khí quyển của Trái Đất. Tuy thế, hơn 100 năm sau khám phá của ông, người ta vẫn tin rằng sao chổi không tuân theo các quy luật trong Hệ Mặt Trời của Copernicus và Kepler. Ngay cả Johannes Kepler cũng tin rằng đường đi của các sao chổi là đường thẳng. Vào năm 1704, Edmund Halley đã nghiên cứu quỹ đạo của nhiều sao chổi khác nhau từ những dữ liệu mà ông thu thập được về chúng. Một trong số những ghi chép đầy đủ nhất là về sao chổi xuất hiện năm 1682. Ông nhận ra rằng quỹ đạo của nó đi qua cùng một vùng trời với những sao chổi xuất hiện năm 1607, 1531, 1456, từ đó ông kết luận chúng chỉ là một sao chổi quay quanh Mặt Trời theo quỹ đạo hình elip với chu kì khoảng 75 hay 76 năm. Halley đã dự đoán thành công sự trở lại của sao chổi này vào năm 1758, từ đó nó được nhắc đến với tên gọi **sao chổi Halley**. Những nghiên cứu gần đây đưa ra ý kiến sao chổi Halley có thể đã được người Trung Quốc ghi lại từ những năm 240 tr.C.N.

Mỗi lần xuất hiện, đuôi sao chổi Halley lại mờ dần, hình ảnh này được thấy rõ nhất trong lần xuất hiện gần đây nhất của nó vào năm 1985 – 1986.

Người ta tin rằng các sao chổi được tạo thành từ các hành tinh băng có kích thước nhỏ quay xung quanh Mặt Trời trong một vùng cầu tâm là Mặt Trời, bán kính khoảng 1 đến 2 năm ánh sáng. Các hành tinh băng nhỏ này có thành phần gồm băng, các hạt kim loại và silicat. Ngoài Hệ Mặt Trời, ở nhiệt độ đóng băng, các hành tinh này quay xung quanh Mặt Trời với vận tốc 4,8km/phút, vì thế chúng phải mất 30 triệu năm để quay trọn một vòng quanh Mặt Trời. Đôi khi lực hấp dẫn của các ngôi sao bên cạnh làm các hành tinh băng quay chậm lại và rơi gần về phía Mặt Trời, do đó quỹ đạo của nó thay đổi thành hình elip. Khi hành tinh băng đã bắt đầu chuyển động theo quỹ đạo elip quanh Mặt Trời, một phần băng của nó hóa khí. Chính điều này tạo nên đuôi sao chổi, đuôi này luôn hướng ngược phía Mặt Trời do bị gió Mặt Trời thổi bay. Đuôi sao chổi được hình thành từ khí và các hạt nhỏ, chúng được chiếu sáng bởi Mặt Trời. Sao chổi sẽ luôn quay trên một quỹ đạo elip không đổi quanh Mặt Trời nếu không có sự ảnh hưởng bởi lực hấp dẫn của Sao Mộc và Sao Thổ. Mỗi vòng quay lại đưa sao chổi lại gần Mặt Trời hơn, làm nó tan chảy nhiều băng hơn và đuôi sao chổi lại dài thêm ra. Chiếc đuôi làm kích thước sao chổi khi xuất hiện trên bầu trời lớn hơn nhiều so với thực tế (một sao chổi có đường kính trung bình khoảng 10km). Trong đuôi sao chổi có các sao băng (vốn dĩ thuộc lớp băng của sao chổi khi sao chổi còn nguyên vẹn). Chúng là những mảnh vụn còn lại trên quỹ đạo sau khi sao chổi đã tan rã. Khi quỹ đạo của sao chổi gặp quỹ đạo của Trái Đất, chúng sẽ tạo nên một cơn mưa sao băng.

Tam giác không thể

Rất nhiều thiết kế và hình minh họa đã trở nên quen thuộc và thường được cho là hiển nhiên. Trong tạp chí *British Journal of Psychology* [1], tháng 2 năm 1958, Roger Penrose đã cho in hình tam giác không thể của mình. Ông gọi nó là một cấu trúc hình chữ nhật ba chiều.

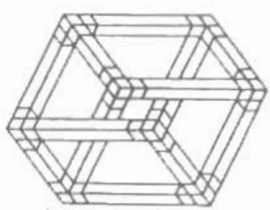


Ba góc vuông của cấu trúc này trông không có gì mâu thuẫn, nhưng thực tế thì không thể có một cấu trúc như vậy. Ba góc vuông dường như tạo thành một tam giác, nhưng tam giác là một hình phẳng (không phải là ba chiều) và tổng các góc của nó phải là 180° chứ không phải 270°.

Phần tử dây xoắn

Gần đây hơn, Penrose đã khởi xướng lí thuyết về các phần tử dây xoắn. Mặc dù các phần tử dây xoắn không nhìn thấy được, nhưng ông tin rằng không gian và thời gian đan vào nhau là nhờ sự tương tác của các dây xoắn này.

Bạn có thể tìm ra vì sao *ảnh ảo giác Hyzer* dưới đây cũng là một điều không thể trong toán học không?



Ảnh ảo giác Hyzer

(1). *Tạp chí của Anh về lĩnh vực tâm lí học.*

Quipu

Đế chế Inca xưa thống trị khắp các vùng đất bao quanh Cuzco[1], hầu hết phần còn lại của Peru và một số vùng thuộc Ecuador và Chile ngày nay. Mặc dù người Inca không có ngôn ngữ viết và hệ thống kí hiệu toán dưới dạng viết, họ vẫn có cách để quản lí vương quốc mình (với chiều dài hơn 3000km) bằng cách sử dụng các **quipu. Quipu** là những sợi dây được thắt nút tương tự như hệ đếm theo vị trí cơ số 10. Nút ở vị trí cách xa sợi dây chính nhiều nhất biểu diễn số một, nút kế đó biểu diễn số mười,... Nhánh dây không có nút biểu diễn số không. Kích cỡ, màu sắc và hình dáng nút ghi lại thông tin về vụ mùa, thuế, dân số và những dữ liệu khác. Ví dụ: sợi dây màu vàng tượng trưng cho vàng hoặc cây ngô; hoặc trên quipu dân số, những sợi dây đầu tiên thể hiện thông tin về đàn ông, những sợi thứ hai là về

Hình minh họa về quipu của người Peru này được một người Anh-điêng ở Peru tên là D. Felipe Poma de Ayala vẽ vào khoảng giữa từ năm 1583 đến 1613. Góc bên trái phía dưới là một bàn tính sử dụng hạt ngô để biểu diễn các phép tính, sau đó được dịch sang tính toán bằng quipu.

---

(1). Một thành phố ở đông nam Peru, là thủ đô của Đế chế Inca xưa.

đàn bà, còn những sợi thứ ba là về trẻ em. Các vũ khí như giáo, mũi tên hay cung tên cũng được biểu diễn tương tự như vậy.

Công việc tính toán, sổ sách trên toàn Vương quốc Inca được thực hiện bởi một tầng lớp những "nhà quipu", họ truyền các kĩ thuật sử dụng quipu lại cho con trai của mình. Ở mỗi cấp độ chính quyền lại có những nhà quipu chuyên trách từng lĩnh vực riêng biệt.

Trong hoàn cảnh không có chữ viết, quipu có vai trò như một phương tiện ghi chép lịch sử, những quipu lịch sử được các armantus (nhà thông thái) dùng để ghi chép thông tin và truyền lại cho thế hệ sau. Họ sử dụng chúng như những gợi nhớ về câu chuyện mà họ đã nghe kể trước đây.

Cứ như vậy, những máy tính nguyên thủy **quipu** đã khắc trong trí nhớ của người dân Inca những thông tin giúp gắn kết toàn bộ vương quốc này lại với nhau.

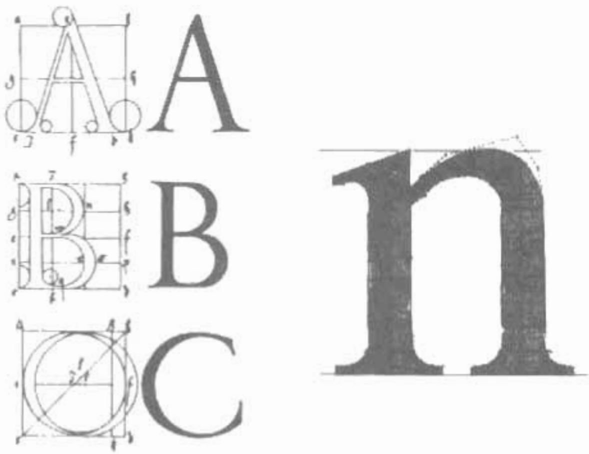
Con đường Hoàng gia Inca[1] trải dài 5600km từ Ecuador tới tận Chile. Tất cả thông tin về mọi thứ diễn ra trên Vương quốc Inca được truyền đi theo con đường này nhờ những chasquis (những người chạy truyền tin), mỗi người phụ trách một quãng đường dài 2km. Họ quen thuộc từng tấc đất trên quãng đường của mình tới nỗi có thể chạy với tốc độ cao nhất cả ngày lẫn đêm. Họ sẽ truyền đạt lại thông tin cho người kế tiếp cho đến khi thông tin tới được nơi cần đến. Sự phục vụ của họ, kết hợp với việc sử dụng quipu, đã giúp cho Hoàng đế Inca luôn cập nhật được thông tin về sự thay đổi dân số, công cụ lao động, mùa màng, nghề nghiệp, những âm mưu nổi loạn và tất cả những thông tin quan trọng khác. Các thông tin liên tục truyền đi 24 giờ mỗi ngày, do vậy luôn rất chính xác và kịp thời.

---

(1) Tuyến đường chính nối các thành phố của Đế chế Inca với nhau.

Dựng chữ cái, kĩ thuật in ấn và toán học

Kiến trúc, kĩ thuật, nghệ thuật trang trí và in ấn là một vài lĩnh vực trong đó có ứng dụng các nguyên lí hình học. Họa sĩ thời Phục hưng người Đức nổi tiếng Albrecht Dürer sinh năm 1471, mất năm 1528. Trong suốt cuộc đời, ông đã kết hợp những hiểu biết về hình học và tài năng nghệ thuật của mình để tạo nên rất nhiều hình thức và phương pháp nghệ thuật. Ông hệ thống hóa việc xây dựng các chữ cái La Mã, điều rất cần thiết cho tính chính xác và thống nhất của các chữ cái lớn trên các tòa nhà hay bia mộ. Những hình vẽ của Dürer ở bên dưới cho thấy ứng dụng của dựng hình hình học trong nghệ thuật viết chữ cái La Mã.

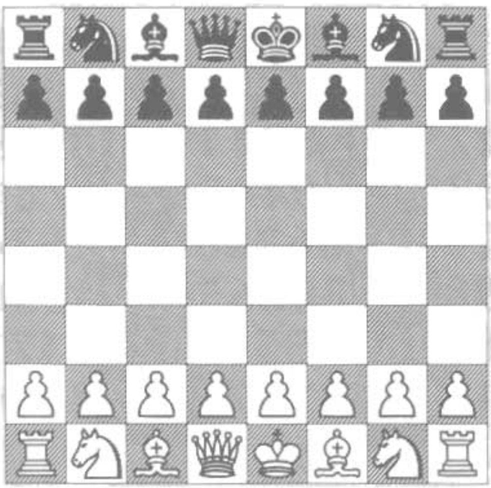


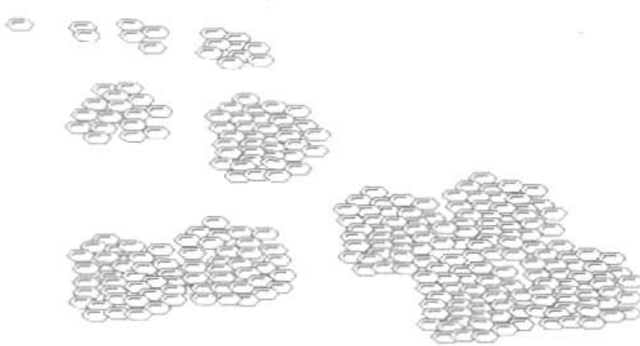
Ngày nay, các nhà khoa học máy tính đã dùng toán học để thiết kế các phần mềm tạo ra những bản in và hình ảnh có chất lượng cao. Một ví dụ điển hình là ngôn ngữ lập trình POSTSCRIPT phát triển bởi Công ty phần mềm Adobe System tại thành phố Palo Alto, California, Mỹ, được dùng cho các máy in laser.

Bài toán *Lúa mì* *và bàn cờ*

Cần bao nhiêu hạt lúa mì để đặt lên bàn cờ nếu chúng được xếp theo cách sau đây?

Xếp một hạt lúa mì vào ô vuông đầu tiên, hai hạt vào ô thứ hai, bốn hạt vào ô thứ ba, tám hạt vào ô thứ tư và cứ như vậy ở ô tiếp theo ta xếp số hạt lúa mì gấp đôi số hạt trong ô ngay trước nó.





Xem câu trả lời ở phần *Lời giải và đáp án* mục *Bài toán Lúa mì và bàn cờ.*

Xác suất và số π

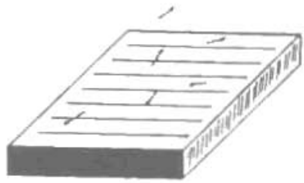
Các nhà toán học và khoa học vẫn luôn bị số π hấp dẫn, nhưng nó đã có thêm cả một lượng lớn người hâm mộ khi đánh bại chiếc máy tính ma quỷ trong một tập của bộ phim truyền hình *Star Trek (Hành trình đến các vì sao)*. Số π đóng những vai trò khác nhau: nó là *tỉ lệ* của chu vi và đường kính đường tròn, nó cũng là một số *siêu việt* (số không là nghiệm của bất kì phương trình đại số với hệ số nguyên nào).

Đã hàng nghìn năm nay, con người luôn cố gắng tính toán nhiều hơn nữa các chữ số sau dấu phẩy thập phân của số π. Chẳng hạn như Archimedes đã tính giá trị π xấp xỉ giữa $3\frac{1}{7}$ và $3\frac{10}{71}$ bằng cách tăng số cạnh của đa giác nội tiếp vòng tròn. Trong *Bible (Kinh thánh Cựu Ước)*, quyển *Book of Kings (Sách các vua)* và *Chronicles (Sử biên niên)*, giá trị của số π được đưa ra là 3. Số xấp xỉ cho π của các nhà toán học Ai Cập cổ đại là 3,16. Còn Ptolemy vào năm 150 s.C.N tính π xấp xỉ bằng 3,1416.

Về mặt lí thuyết, phương pháp xấp xỉ của Archimedes có thể kéo dài vô hạn, nhưng với phát minh về phép tính vi phân, tích phân, phương pháp của người Hy Lạp không được dùng đến nữa. Thay vào đó, các chuỗi, tích và liên phân số vô hạn hội tụ đã được sử dụng để xấp xỉ số π. Ví dụ như:

$$\pi = 4 / (1 + 1^2 / (2 + 3^2/(2 + 5^2 / (2 + 7^2 / (...)))))).$$

Một trong những phương pháp gây tò mò nhất để tính số π là của nhà tự nhiên học người Pháp thế kỉ XVIII Count Buffon và *Bài toán chiếc kim* của ông. Trên một mặt phẳng, ta kẻ các đường thẳng song song cách đều nhau d đơn vị chiều dài. Thả chiếc kim có độ dài nhỏ hơn d lên trên mặt phẳng đó. Nếu chiếc kim rơi lên trên đường kẻ thì lần thả đó được coi là thành công. Khám phá đầy bất ngờ của Buffon là tỉ lệ số lần thả thành công so với không thành công là một biểu thức chứa số π. Nếu chiều dài kim bằng d đơn vị, xác suất thả thành công là $\frac{2}{\pi}$. Số lần thả càng nhiều thì xấp xỉ cho số π càng chính xác. Năm 1901, nhà toán học người Ý M. Lazzerini đã thả 3 408 lần và đưa ra giá trị của số π là 3,1415929, chính xác đến sáu chữ số sau dấu phẩy. Nhưng việc Lazzerini có thực sự tiến hành thí nghiệm của mình hay không vẫn bị Lee Badger[1] ở Đại học Weber, Ogden, bang Utah, Mỹ, đặt câu hỏi nghi ngờ. Trong một phương pháp xác suất khác để tính số π vào năm 1904, R. Chartes đã tìm ra xác suất để hai số (được viết ngẫu nhiên) nguyên tố cùng nhau là $\frac{6}{\pi^2}$.



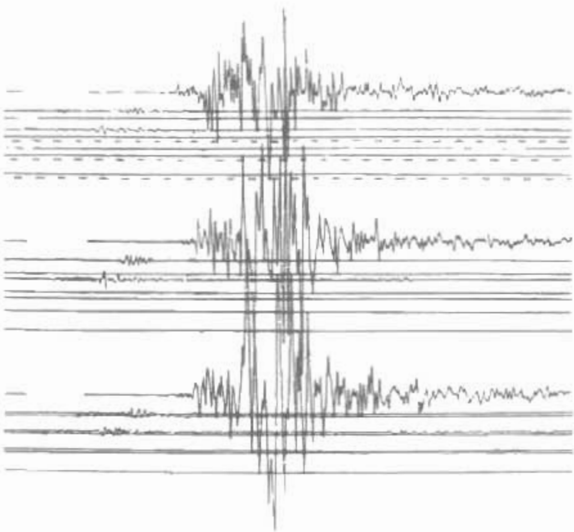
Thật đáng ngạc nhiên khi chúng ta khám phá ra sự đa năng của số π trong nhiều lĩnh vực khác nhau như hình học, xác suất và các phép tính vi tích phân.

---

(1). Xem False calculation of π by experiment (Những tính toán thực nghiệm sai về số π), tác giả John Maddox. Tạp chí NATURE, ngày 1 tháng 8 năm 1994, số 370, trang 323.

Động đất và các lôgarit

Dường như con người có nhu cầu mô tả các hiện tượng tự nhiên bằng ngôn ngữ của toán học. Có lẽ vì chúng ta luôn muốn tìm ra các phương pháp mà nhờ đó chúng ta phần nào kiểm soát được tự nhiên dù có thể chỉ qua dự đoán. Động đất là một hiện tượng tự nhiên như vậy.

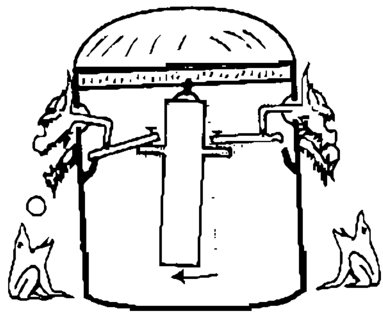


Biểu đồ địa chấn của một trận động đất

Thoạt nhìn có vẻ như rất kì lạ khi liên hệ các lôgarit với động đất, nhưng phương pháp được sử dụng để đo cường độ của động đất đã chỉ ra mối liên hệ này. Độ đo richter được nhà địa chấn học người Mỹ Charles F. Richter phát minh năm 1935. Thang đo này đo cường độ của trận động đất bằng cách mô tả lượng năng lượng giải phóng ra ở tâm chấn. Thang đo richter tính theo hàm lôga nên mỗi khi độ đo richter tăng lên 1 đơn vị thì biên độ của đường cong trên biểu đồ địa chấn lại tăng lên gấp 10 lần, trong khi đó năng lượng do động đất sinh ra tăng khoảng 30 lần. Ví dụ: trận động đất có cường độ 5 độ richter sinh ra lượng năng lượng gấp 30 lần so với trận động đất 4 độ richter. Vì thế, trận động đất 8 độ richter sẽ giải phóng ra một năng lượng gấp 30^3 hay 27 000 lần so với trận có cường độ 5 độ richter.

Các số trong thang đo richter đi từ 0 đến 9, nhưng về mặt lí thuyết không có giới hạn phía trên nào cả. Một trận động đất có cường độ lớn hơn 4,5 độ richter đã có thể gây ra thiệt hại, các trận động đất nghiêm trọng có cường độ lớn hơn 7. Chẳng hạn như trận động đất ở Alaska[1] năm 1964 với cường độ 8,4 độ richter và ở San Francisco năm 1906 với cường độ 7,8 độ richter.

Ngày nay, các nhà khoa học chuyên nghiên cứu động đất đi sâu vào tìm hiểu lĩnh vực địa chấn học, một ngành khoa học địa vật lí. Các thiết bị cùng những phương pháp tinh vi, nhạy bén đang được tìm kiếm và phát minh nhằm xác định và dự báo động đất. Một trong những thiết bị đầu tiên và thường xuyên được sử dụng là máy ghi địa chấn, nó có thể tự động kiểm tra, đo đạc và vẽ biểu đồ trận động đất cùng những rung động khác ở mặt đất.

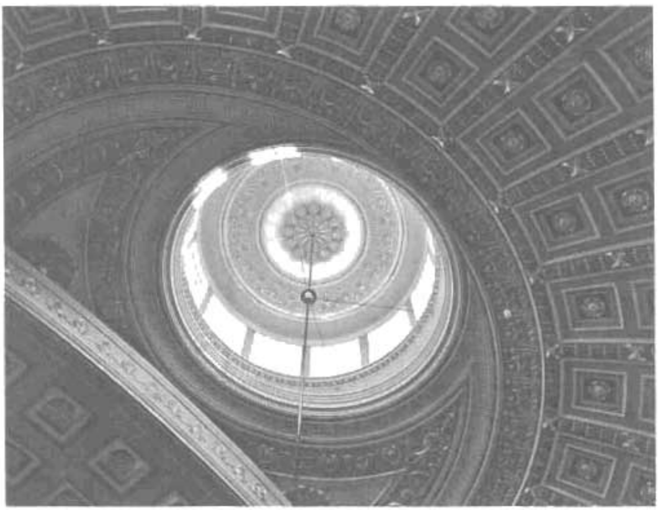


Hình mô tả máy ghi địa chấn được biết đến sớm nhất này được làm ra ở Trung Quốc vào thế kỉ II s.C.N từ một bình rượu bằng đồng có đường kính khoảng 1,8m). Tám con rồng ngậm quả bóng bao quanh chiếc bình. Khi có động đất, một con rồng nào đó sẽ làm rơi bóng của nó vào miệng con cóc ở bên dưới. Thiết bị này sau đó khóa lại, vì thế chỉ cho ta biết hướng của động đất.

(1). Bang rộng lớn nhất của nước Mỹ.

Trần nhà parabol của tòa trụ sở Quốc hội Mỹ

Trong thế giới công nghệ cao của chúng ta ngày nay, thật thú vị khi biết rằng vào thế kỉ XIX, tòa nhà trụ sở Quốc hội Mỹ đã được thiết kế có thiết bị nghe trộm riêng một cách ngẫu nhiên, mà lại không phải là thiết bị điện tử. Trụ sở Quốc hội Mỹ được Tiến sĩ William Thornton thiết kế vào năm 1792. Và nó bị quân đội Anh thiêu cháy năm 1814. Đến năm 1819, công trình này mới được xây dựng lại.



Trần nhà của Statuary Hall trong trụ sở Quốc hội Mỹ ngày nay.

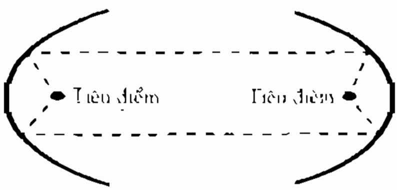
Ở phía nam của Rotunda (đại sảnh có mái vòm) là Statuary Hall[1] (sảnh tượng). Sở dĩ nó có tên gọi như vậy là vì năm 1864, mỗi bang của nước Mỹ được đề nghị đóng góp tượng hai công dân nổi tiếng của bang đó để đặt trong phòng. Hạ nghị viện Mỹ họp tại Statuary Hall cho đến năm 1857. Chính trong căn

(1). Một phòng lớn trong tòa nhà Quốc hội Mỹ dành để đặt tượng những công dân Mỹ xuất chúng.

phòng này, John Quincy Adams, khi còn là một nghị sĩ Hạ viện đã khám phá ra hiện tượng truyền âm của nó. Ông phát hiện ra rằng tại những điểm nào đó trong phòng, người ta có thể nghe thấy rõ ràng những cuộc hội thoại ở phía bên kia phòng, trong khi những người đứng giữa không thể nghe thấy gì và tiếng ồn do họ gây ra cũng không ảnh hưởng gì đến âm thanh đến từ bên kia phòng. Bàn làm việc của Adams có vị trí trùng với tiêu điểm của một trong những trần nhà phản xạ parabol. Vì thế, ông có thể dễ dàng nghe trộm những cuộc nói chuyện riêng của các nghị sĩ khác đứng gần tiêu điểm còn lại.

Các vật phản xạ parabol hoạt động theo cách sau:

Âm thanh dập vào vật phản xạ parabol thứ nhất (hoặc trong trường hợp này là trần nhà) và bật lại song song đi tới vật phản xạ parabol thứ hai nằm đối diện với vật phản xạ parabol thứ nhất, tại đó âm thanh tiếp tục phản xạ tới tiêu điểm của vật phản xạ parabol thứ hai. Vì vậy, tất cả âm thanh xuất phát từ một tiêu điểm sẽ truyền đến tiêu điểm đối diện



Viện bảo tàng Exploratorium[1] tại San Francisco, California, cũng có các vật phản xạ âm parabol được trưng bày để phục vụ người dân. Chúng được đặt ở các phía đối diện của một căn phòng lớn, các tiêu điểm của chúng được đánh dấu lại. Hai người có thể nói chuyện bình thường với nhau tại các tiêu điểm này. Số lượng người cũng như mức độ ồn trong phòng đều không hề cản trở khả năng nghe rõ tiếng của hai người với nhau.

(1). Viện bảo tàng khoa học, nghệ thuật và tri thức của loài người tại San Francisco, Mỹ

Máy tính, sự đếm và dòng điện

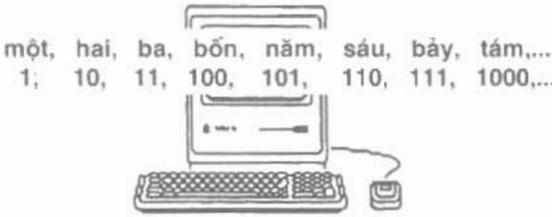
Con người giao tiếp với máy tính điện tử bằng việc sử dụng một ngôn ngữ máy tính. Ngôn ngữ máy tính đến lượt nó lại được dịch thành một hệ đếm cơ số nào đó để có thể điều khiển các xung điện cấp cho máy tính hoạt động. Hệ cơ số 10 hoạt động rất tốt cho những tính toán bằng tay của chúng ta, nhưng cần dùng một hệ cơ số khác cho các máy tính điện tử. Nếu các bộ nhớ được tổ chức ở hệ cơ số 10, sẽ phải có mười trạng thái khác nhau cho mười số tạo nên hệ cơ số 10 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Mặc dù điều này là có thể với một hệ thống cơ học, nhưng lại là không thể với dòng điện. Trong khi đó, hệ nhị phân (hệ cơ số 2) lại là một ứng cử viên hoàn hảo cho máy tính điện tử. Chỉ có hai số trong hệ nhị phân, đó là 0 và 1. Các số này có thể biểu diễn dễ dàng bởi dòng điện bằng một trong ba cách sau:

(1) Bật hoặc tắt dòng điện.
(2) Từ hóa một cuộn dây theo hướng này hay hướng ngược lại.
(3) Nạp điện hay không nạp điện một rơ-le.

Trong cả ba trường hợp, một trạng thái được chọn ứng với số 0, trạng thái còn lại ứng với số 1.

Các máy tính không đếm theo cách mà con người đếm: một, hai, ba, bốn, năm, sáu, bảy, tám, chín, mười, mười một, mười hai,... Thay vào đó, chúng sẽ đếm một, mười, mười một, một trăm, một trăm lẻ một, một trăm mười, một trăm mười một,...

Như vậy, máy tính hoạt động bằng dòng điện. Các cơ chế của máy tính dùng dòng điện để dịch thành các kí hiệu mà chúng ta có thể hiểu được trên màn hình hiển thị. Khi dòng điện chạy qua những phần phức tạp của một máy tính, nó vẫn có thể *bật* hoặc *tắt* một phần. **Bật** và **tắt** là hai trạng thái duy nhất của dòng điện, đó chính là lí do vì sao chỉ có hai chữ số 0, 1 và hệ nhị phân là được sử dụng trong máy tính.



HỆ CƠ SỐ MƯỜI và HỆ CƠ SỐ HAI

Khi chúng ta viết số, ta dùng các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chúng ta gọi đây là hệ cơ số 10 vì có mười chữ số được sử dụng để biểu diễn bất kì số nào khác. Vị trí của mỗi chữ số trong một số biểu diễn cho chữ số đó nhân với một lũy thừa cơ số 10. Khi chúng ta viết các số, giá trị của mỗi chữ số phụ thuộc vào vị trí của nó trong số đó, ví dụ:
5374 không có nghĩa là 5 + 3 + 7 + 4, mà là
5 nghìn + 3 trăm + 7 chục + 4 đơn vị.

Mỗi vị trí trong số là một lũy thừa cơ số mười:
Nghìn $= 1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$
Trăm $= 100 = 10 \times 10 = 10^2$
Chục $= 10 = 10^1$
Đơn vị $= 1 = 10^0$

Các máy tính viết số chỉ với hai chữ số 0 và 1. Hệ đếm của chúng gọi là hệ cơ số 2, bởi chỉ có hai chữ số được dùng để biểu diễn các số và mỗi vị trí trong một số là một lũy thừa cơ số hai. Vị trí đầu tiên là của 1, sau đó là vị trí của 2, tiếp theo là vị trí của $2 \times 2 = 4$*, rồi của* $2 \times 2 \times 2 = 8$*,...*

$2 \times 2 \times 2 = 8$ *lần*	$2 \times 2 = 4$ *lần*	*2 lần*	*1 lần*
2^3	2^2	2^1	2^0

như vậy số 1101 sẽ bằng
$1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 13$ *trong hệ cơ số 10.*

Tô-pô, một trò chơi toán học

Tô-pô là một trò chơi với rất nhiều chiến thuật biến đổi. Bao nhiêu người chơi cũng được. Khi bạn mới tập chơi, hãy bắt đầu với hai người chơi. Trò chơi này gồm có ba phần:

I. *Vẽ các ô để chơi.*
II. *Điền số vào một số hoặc tất cả các ô.*
III. *Ăn các ô.*

I. Mỗi người chơi lần lượt vẽ một ô liền sát ô người kia vừa vẽ theo cách bất kì. Mỗi người vẽ mười ô, như minh họa ở hình **A**.

II. Mỗi người chơi dùng bút màu khác nhau và lần lượt điền số vào một ô nào đó cho đến khi mỗi người điền được các ô với tổng các số trong đó là 100. Nếu người chơi điền ngay số 100 vào một ô nào đó, thì người đó sẽ chỉ có một ô đó là của mình.

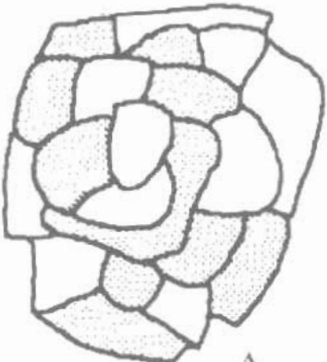
III. Mục tiêu của trò chơi: Khi kết thúc, người chơi có số ô của riêng mình nhiều hơn sẽ chiến thắng. Chú ý rằng giá trị các số trong ô không ảnh hưởng đến kết quả trò chơi.

Cách chơi: Một ô của người này bị ăn khi một hoặc nhiều ô của người kia nằm sát bên cạnh nó có tổng các số lớn hơn số trong ô đó.

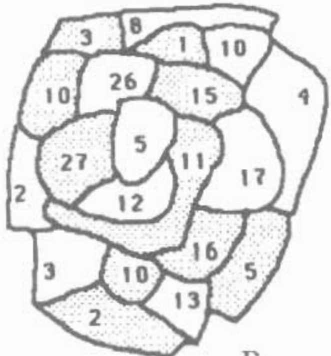
Khi một ô bị ăn, nó bị loại khỏi cuộc chơi và được đánh dấu cho người đã ăn nó.

Mỗi người lần lượt ăn một ô của người khác cho đến khi không còn ô nào ăn được nữa.

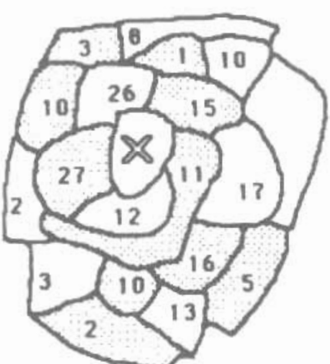
Tô-pô có một vài biến thể rất hấp dẫn. Càng chơi nhiều bạn sẽ càng khám phá ra nhiều chiến thuật khác nhau trong việc *vẽ các ô, điền số* và *ăn ô*.



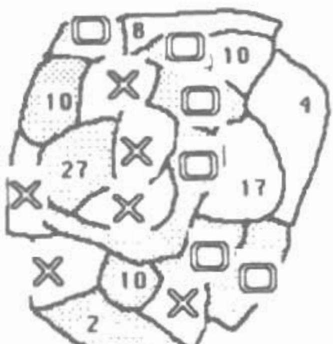
A



B



C



D

Dãy số Fibonacci

Fibonacci[1], một trong những nhà toán học hàng đầu thời Trung cổ đã có những đóng góp to lớn trong số học, đại số và hình học. Tên khai sinh của ông là Leonardo da Pisa (1175 - 1250), con trai của một viên chức hải quan người Ý làm việc tại Bugia (Bougie ngày nay), Bắc Phi. Công việc khiến cha ông phải đi đến nhiều thành phố phương Đông và Ả-rập khác nhau. Chính ở những vùng này, Fibonacci đã làm quen với hệ thập phân Ấn Độ - Ả rập, hệ số có giá trị hàng của chữ số và sử dụng kí hiệu cho số 0. Vào thời gian này, các số La Mã vẫn đang được dùng để tính toán tại nước Ý. Fibonacci nhận thấy được giá trị và vẻ đẹp của các số Ấn Độ - Ả rập, do đó ông ủng hộ mạnh mẽ việc sử dụng chúng. Năm 1202, ông viết cuốn **Liber Abaci (Sách tính toán)**, một cuốn sách hướng dẫn rất đầy đủ và toàn diện, trong đó giải thích cách sử dụng các số Ấn Độ - Ả rập; cách cộng, trừ, nhân và chia với những số này; cách giải các bài toán và những thảo luận xa hơn nữa về đại số và hình học. Các nhà buôn Ý bấy giờ miễn cưỡng thay đổi cách thức tính cũ của mình, nhưng thông qua những tiếp xúc thường xuyên của họ với Ả rập và các tác phẩm của Fibonacci cùng các nhà toán học khác, hệ kí số Ấn Độ - Ả rập đã được giới thiệu và dần dần chấp nhận ở châu Âu.

Dãy số Fibonacci: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55;...

Có vẻ như thật trớ trêu khi Fibonacci nổi tiếng ở thời đại ngày nay không phải nhờ những đóng góp to lớn của ông cho toán học mà là nhờ một dãy số vốn là kết quả của một bài toán rất ít người biết đến trong cuốn **Liber Abaci** của ông. Thời điểm ông viết bài toán này, nó được coi như là một bài tập trí tuệ thông thường. Sau đó, vào thế kỉ XIX, khi nhà toán học người

(1). Fibonacci: có nghĩa là "con trai của Bonacci"

Pháp Edouard Lucas biên tập một bộ sách bốn tập về toán học giải trí, ông gắn tên Fibonacci cho dãy số kết quả của bài toán này trong cuốn **Liber Abaci**. Bài toán sinh ra dãy Fibonacci như sau:

1) Giả sử một cặp thỏ một tháng tuổi (gồm một con đực và một con cái) còn quá nhỏ nên chưa thể sinh sản được, nhưng khi được hai tháng, chúng đã đủ lớn để sinh con. Giả thiết thêm rằng bắt đầu từ tháng thứ hai, chúng sinh một cặp thỏ con (gồm một thỏ đực và một thỏ cái).

2) Nếu mỗi cặp thỏ đều sinh sản theo cách như trên thì sẽ có bao nhiêu cặp thỏ vào mỗi đầu tháng?

 = cặp thỏ đủ lớn để sinh con

 = cặp thỏ còn nhỏ chưa sinh sản được

Số lượng cặp thỏ

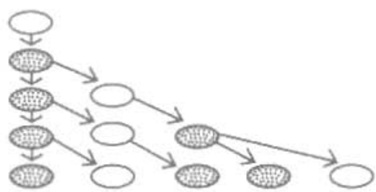
1 = F1 = số Fibonacci thứ 1

1 = F2 = số Fibonacci thứ 2

2 = F3 = số Fibonacci thứ 3

3 = F4 = số Fibonacci thứ 4

5 = F5 = số Fibonacci thứ 5



Mỗi phần tử của dãy Fibonacci là tổng của hai phần tử ngay trước nó và được biểu diễn bởi công thức: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Fibonacci đã không nghiên cứu dãy số kết quả này vào thời đó và cũng không có một ý nghĩa quan trọng nào của nó được đưa ra cho đến thế kỉ XIX, khi các nhà toán học bắt đầu chú ý đến dãy số, các tính chất và lĩnh vực mà nó xuất hiện.

Dãy Fibonacci hiện diện ở:

I. Tam giác Pascal, công thức nhị thức và xác suất.

II. Tỉ lệ vàng và hình chữ nhật vàng.

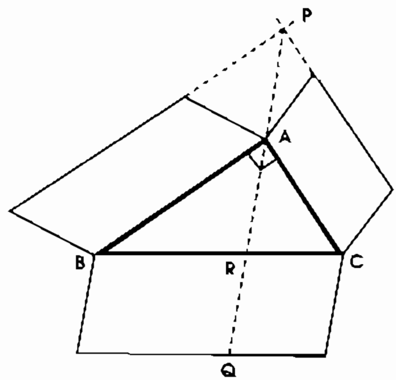
III. Tự nhiên và thực vật.

IV. Các mẹo toán học thú vị.

V. Các đồng nhất thức trong toán học.

Biến dạng của định lí Pythagoras

Pappus là nhà toán học Hy Lạp sống ở Alexandria vào khoảng những năm 300 tr.C.N. Ông đã chứng minh một biến dạng lí thú của định lí Pythagoras. Thay vì làm việc với các hình vuông trên hai cạnh bên và cạnh huyền, định lí của ông áp dụng cho bất kì hình bình hành nào dựng trên hai cạnh góc vuông và cạnh huyền của một tam giác vuông cho sẵn.



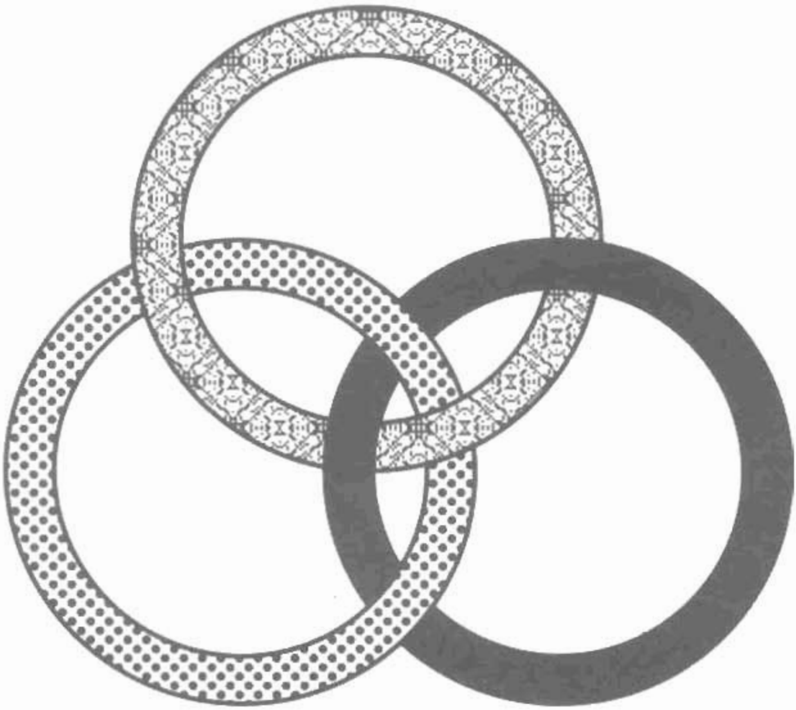
Sử dụng một tam giác vuông bất kì và tiến hành theo các bước sau đây:

1) Dựng hai hình bình hành bất kì trên hai cạnh bên của tam giác vuông đã cho.
2) Kéo dài các cạnh của hai hình bình hành cho đến khi chúng gặp nhau tại điểm P.
3) Vẽ tia PA sao cho tia PA cắt đoạn BC tại điểm R. Trên tia PA lấy điểm Q sao cho R nằm giữa A, Q và $|RQ| = |PA|$
4) Dựng hình bình hành trên cạnh huyền BC sao cho nó có hai cạnh đối song song và bằng $\overline{RQ}$

Kết luận của Pappus: *Diện tích của hình bình hành dựng trên cạnh huyền bằng tổng diện tích của hai hình bình hành còn lại.*

Bộ vòng ba, một mô hình tô-pô

Điều gì sẽ xảy ra nếu ta bỏ đi một chiếc vòng?

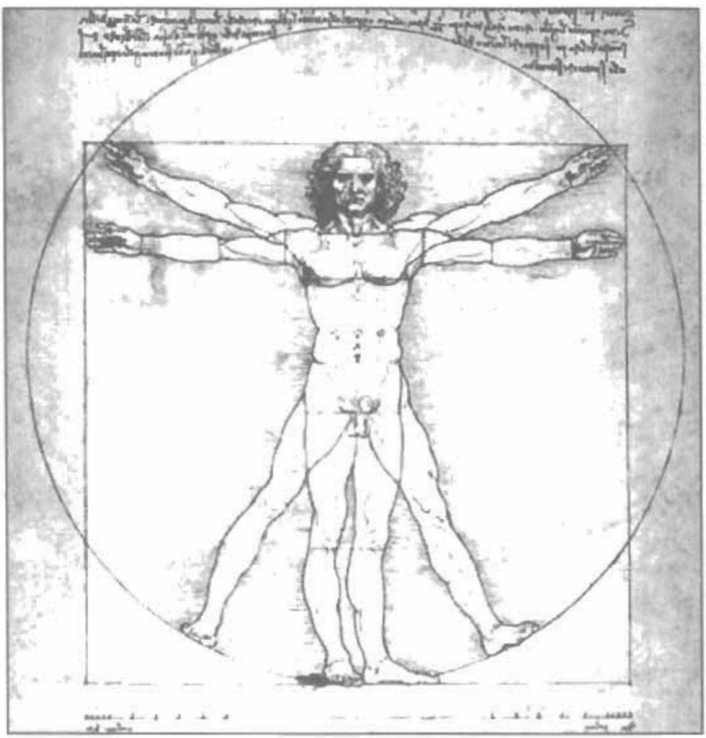


Có phải hai vòng nào cũng nối với nhau hay không?

Có phải cả ba vòng cùng nối với nhau?

Giải phẫu học và tỉ lệ vàng

Leonardo da Vinci đã nghiên cứu rất nhiều về các tỉ lệ trên cơ thể con người. Hình vẽ của ông dưới đây đã được nghiên cứu tỉ mỉ trước khi đem trưng bày để minh họa cho các ứng dụng tỉ lệ vàng.[1] Đây là một trong những hình vẽ mà ông minh họa cho cuốn sách *De Divina Proportione (Về những tỉ lệ thần thánh)* xuất bản năm 1509 của nhà toán học Luca Pacioli.



(1). Thuật ngữ tỉ lệ vàng còn được nhắc đến như là tỉ số vàng, sự cân đối vàng. Nó có ý nghĩa về mặt hình học khi áp dụng đối với một đoạn thẳng như sau: Điểm B chia đoạn AC sao cho $(|AC| / |AB|) = (|AB| / |BC|)$. Giá trị của tỉ lệ vàng được xác định là $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6$.

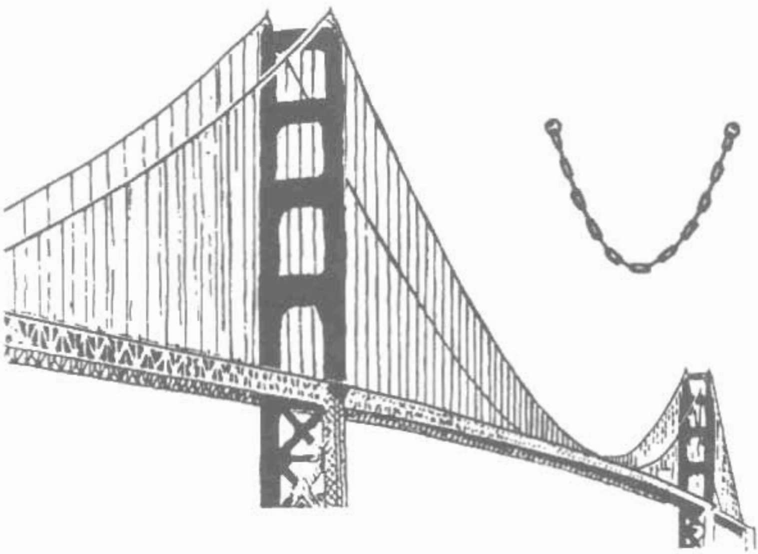
A B C

Tỉ lệ vàng cũng hiện diện trong tác phẩm chưa hoàn thành *St. Jerome (Thánh Jerome)* của Leonardo da Vinci, tác phẩm được ông vẽ vào năm 1483. Cơ thể của Thánh Jerome vừa vặn một cách hoàn hảo trong một hình chữ nhật vàng (được thêm vào trong bức tranh để minh họa). Người ta tin rằng đây không phải là sự tình cờ mà chính là Leonardo đã cố tình vẽ nên hình dáng cơ thể Thánh theo tỉ lệ vàng bởi ông luôn quan tâm sâu sắc và ứng dụng toán học vào trong các tác phẩm và ý tưởng của mình. Leonardo đã từng nói: "*...không có nhu cầu nào của con người có thể gọi là khoa học trừ khi nó theo đuổi con đường của mình thông qua những giải thích và biểu diễn toán học*".

St. Jerome. Leonardo da Vinci. Khoảng năm 1483.

Đường dây xích và đường cong parabol

Một dây xích treo tự do tạo nên một đường cong, nó được gọi là đường dây xích[1]. Đường dây xích trông giống như parabol, ngay cả Galileo ban đầu cũng tin nó là một parabol.



Khi các vật nặng được gắn vào đường dây xích tại những điểm cách đều nhau, đường dây xích trở thành một đường parabol. Hiện tượng này giống như ở cầu cáp treo, chẳng hạn như ở cây cầu *Cổng Vàng* tại San Francisco. Trên cây cầu này, đường parabol được hình thành khi các tải trọng thẳng đứng được đặt vào đường cáp cong hình dây xích.

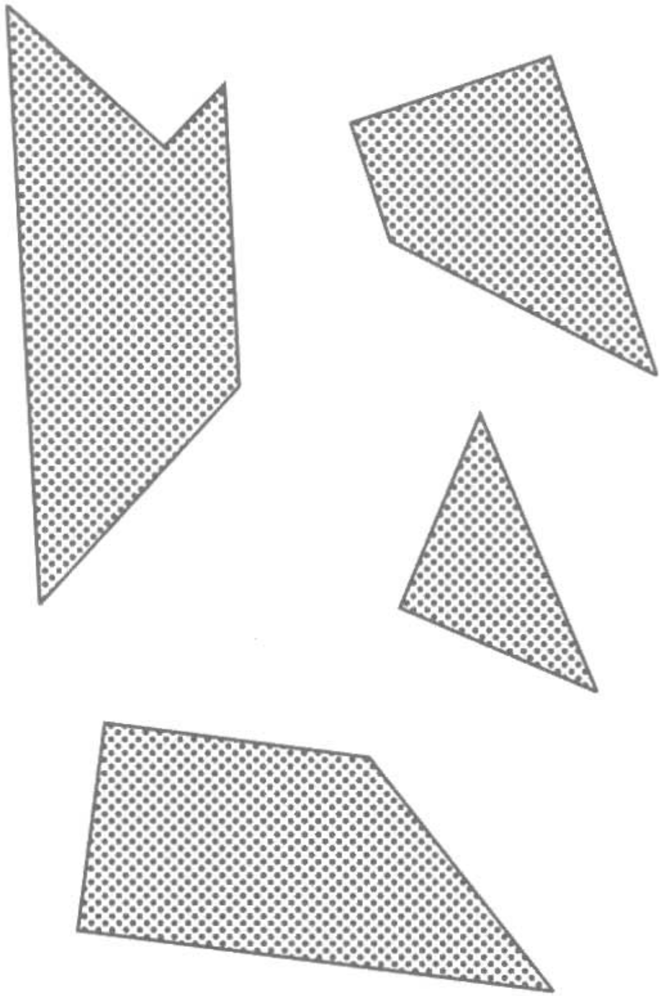
Tại Viện Bảo tàng Exploratorium ở San Francisco cũng trưng bày một cổng vòm cong hình dây xích treo.

---

(1) Phương trình của đường dây xích là: $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, trong đó trục x là đường chuẩn.

Câu đố chữ T

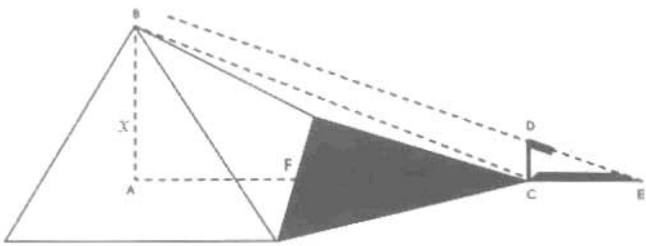
Một câu đố quen thuộc nhưng vẫn luôn khiến chúng ta gặp khó khăn, đó là làm cách nào để ghép bốn mảnh dưới đây thành một hình chữ T. Chúc bạn may mắn với câu đố này!



Xem câu trả lời ở phần *Lời giải và đáp án*, mục *Câu đố chữ T*.

Thales và đại kim tự tháp

Thales (640 546 tr.C.N) được biết đến như một trong bảy nhà thông thái vĩ đại của Hy Lạp cổ đại. Được mệnh danh là *cha đẻ của lập luận suy diễn*, ông đã đưa những nghiên cứu hình học vào Hy Lạp. Ông là nhà toán học, một thầy giáo, nhà triết học, nhà thiên văn học, một thương nhân tài ba và là nhà hình học đầu tiên đã chứng minh được các lí thuyết của mình bằng kiểu chứng minh từng bước. Thales đã dự đoán chính xác hiện tượng nhật thực vào năm 585 tr.C.N và làm người Hy Lạp phải sửng sốt khi ông tính toán được chiều cao của kim tự tháp Kheops[1] nhờ bóng của nó và các tam giác đồng dạng.



Các bước tính toán:

Hình vẽ phía trên cho thấy bóng của kim tự tháp Kheops trên mặt đất. Một thanh có chiều dài đã biết, | DC |, được đặt vuông góc với mặt đất tại đỉnh của bóng râm tại điểm C. Bóng của thanh có độ dài | CE |; | AF | là chiều dài $\frac{1}{2}$ cạnh đáy của kim tự tháp. Bây giờ, chiều cao x của kim tự tháp có thể tính dễ dàng nhờ các tam giác đồng dạng: tam giác ABC và tam giác CDE.

$$\frac{x}{|CD|} = \frac{|AC|}{|CE|}, \text{ vì thế } x = \frac{|CD| . |AC|}{|CE|}$$

(1). Đây là kim tự tháp cổ nhất và lớn nhất trong ba kim tự tháp hiện còn lại ở Cairo, Ai Cập. Nó là kì quan duy nhất trong bảy kì quan của thế giới cổ đại còn lại đến ngày nay.

Khách sạn Vô Hạn

Một trong những tiêu chuẩn đối với thư kí làm việc ở khách sạn Vô Hạn là có kiến thức làm việc về vô hạn. Paul nộp đơn, trả lời phỏng vấn và bắt đầu làm việc từ tối ngày hôm sau. Paul tự hỏi vì sao khách sạn lại đòi hỏi tất cả các thư kí phải biết về vô hạn, các tập hợp vô hạn và các số siêu hạn. Anh đoán rằng vì đó là một khách sạn có vô số phòng nên việc có phòng trống cho khách sẽ không có vấn đề gì. Sau đêm đầu tiên làm việc ở khách sạn, anh rất vui mừng vì mình biết thêm điều đó.

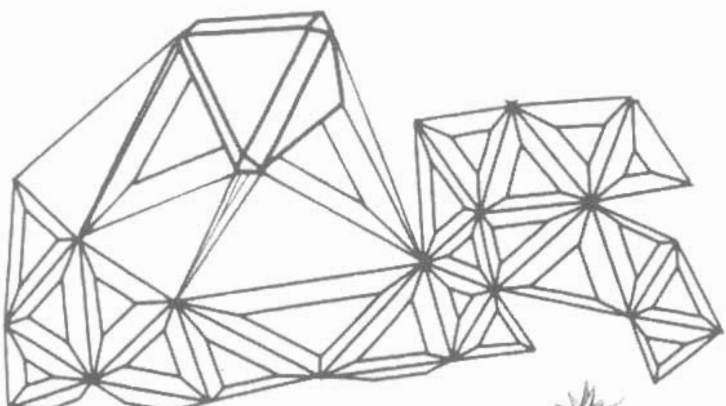
Khi Paul đến thay phiên cho cô thư kí làm việc ban ngày, cô thông báo cho Paul biết hiện có vô số phòng đã có người ở. Khi cô thư kí rời đi, một người khách mới bước vào đặt phòng. Paul cần quyết định xem sẽ xếp vị khách này vào phòng nào. Anh suy nghĩ giây lát, sau đó quyết định chuyển mỗi người hiện đang ở trong khách sạn tới căn phòng có số lớn hơn số phòng cũ 1 đơn vị, bằng cách đó Paul có thể giải phóng phòng số 1. Paul cảm thấy mãn nguyện với cách giải quyết của mình, nhưng ngay lúc đó, một xe buýt chở vô số khách hàng mới lại tới. Paul sẽ phải xếp phòng cho họ như thế nào đây?

Ý tưởng về một khách sạn vô hạn phòng được nhà toán học Đức David Hilbert (1962 – 1943) nghĩ ra đầu tiên.

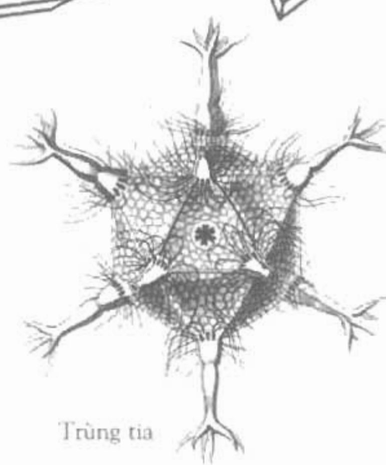
Xem phần *Lời giải và đáp án* để biết cách giải quyết của Paul.

Tinh thể - khối đa diện của tự nhiên

Từ xa xưa, các khối đa diện đã xuất hiện trong các tài liệu toán học, nhưng nguồn gốc của chúng thậm chí còn từ trước đó nữa và có mối liên hệ với nguồn gốc của tự nhiên. Các tinh thể hình thành trong hình dạng của các khối đa diện. Ví dụ như tinh thể natri clorat có dạng khối lập phương và tứ diện, trong khi tinh thể phèn crom thì lại có dạng khối bát diện. Hấp dẫn không kém là sự xuất hiện của tinh thể hình khối mười hai mặt và hai mươi mặt trong các cấu trúc xương của loài trùng tia – những động vật biển rất nhỏ.



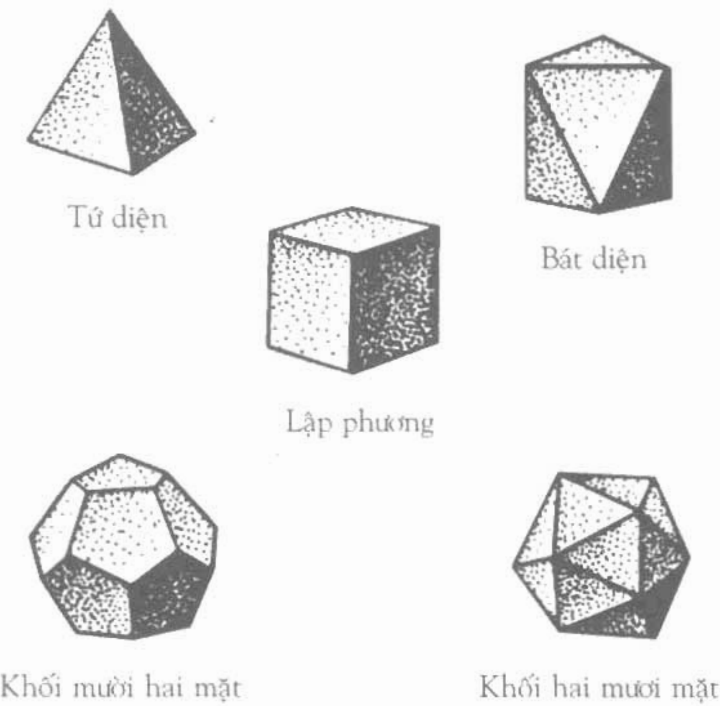
Khối đa diện là thể rắn có nhiều mặt là đa giác. Chúng được gọi là *đa diện đều* khi các mặt của chúng đều là các đa giác bằng nhau và các góc bằng nhau. Vì vậy, một đa diện đều có tất cả các mặt bằng nhau, tất cả các cạnh



Trùng tia

bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau. Có vô vàn kiểu đa diện nhưng chỉ có năm loại đa diện đều với tên gọi là các *khối Platon*.[1] Chúng được gọi theo tên của Plato, người đã tìm ra chúng một cách độc lập vào khoảng năm 400 tr.C.N. Sự tồn tại của chúng đã được biết đến từ trước đó bởi những môn đồ của Pythagoras, người Ai Cập cũng đã sử dụng một vài khối Platon vào các công trình kiến trúc và những thiết kế khác của họ.

Năm khối Platon



(1). Xem mục **Năm khối Platon** (trang 112).

Tam giác Pascal, dãy số Fibonacci và công thức nhị thức

Blaise Pascal (1623 – 1662) là nhà toán học nổi tiếng người Pháp, người đã có thể trở thành một trong số những nhà toán học vĩ đại nếu không vì những niềm tin tôn giáo, sức khỏe kém và sự ngần ngại đi sâu tìm hiểu hết mọi mặt của một vấn đề toán học. Cha của ông, vì sợ rằng con trai cũng sẽ đam mê toán học như mình[1] và mong muốn con phát triển học vấn toàn diện hơn, nên ngay từ đầu đã không khuyến khích Pascal học toán để cậu có thể phát triển những sở thích khác. Nhưng đến năm 12 tuổi, Pascal đã bộc lộ mình là một thiên tài về hình học đến nỗi sau đó thiên hướng toán học của cậu đã được cổ vũ. Pascal rất tài năng, lúc mười sáu tuổi, Pascal đã viết một bài luận về các đường conic khiến nhiều nhà toán học ngạc nhiên sửng sốt. Trong bài luận có một định lí sau đó được biết đến như là định lí Pascal, phát biểu như sau: *Các cạnh đối diện của một hình lục giác nội tiếp trong hình nón giao nhau tại ba điểm thẳng hàng nhau.* Năm 18 tuổi, Pascal phát minh ra chiếc máy tính đầu tiên. Vào thời điểm đó, sức khỏe của Pascal rất yếu và Pascal đã thề trước Chúa là sẽ từ bỏ nghiên cứu toán học. Nhưng ba năm sau, Pascal viết lại những kết quả mà mình thu được về tam giác Pascal và các tính chất của nó. Đêm ngày 23 tháng 11 năm 1654, Pascal trải qua một biến động về mặt tôn giáo, thúc giục ông cống hiến cuộc đời cho thần học và từ bỏ cả toán học lẫn khoa học. Ngoại trừ một khoảng thời gian ngắn (giữa năm 1658 – 1659), thời gian còn lại Pascal không bao giờ nghiên cứu toán học nữa.

---

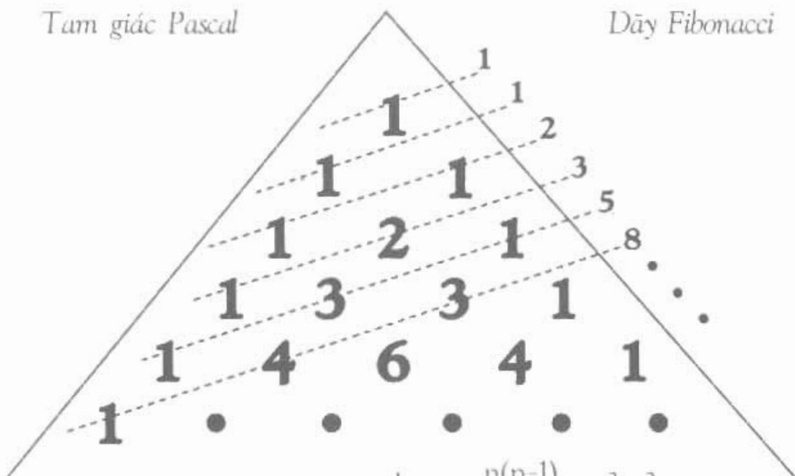
(1). Etienne Pascal rất yêu thích toán học và thực tế đường ốc sên của Pascal là được gọi theo tên của ông chứ không phải là con trai ông.

Toán học có cách của nó để kết nối các ý tưởng bề ngoài có vẻ như chẳng có liên hệ gì với nhau. Cũng tương tự như vậy đối với tam giác Pascal, dãy số Fibonacci và công thức nhị thức Newton. Tam giác Pascal, dãy số Fibonacci và công thức nhị thức Newton bề ngoài có vẻ như không liên quan gì, nhưng tất cả chúng đều có liên hệ với nhau. Hình vẽ dưới đây thể hiện mối quan hệ của chúng. Tổng các số dọc theo các đoạn thẳng chéo của tam giác Pascal sinh ra dãy số Fibonacci. Mỗi hàng của tam giác Pascal đưa ra các hệ số của nhị thức (a + b) lũy thừa lên một số cụ thể nào đó.

Ví dụ:

$(a + b)^0 = 1$	1
$(a + b)^1 = 1a + 1b$	1 1
$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$	1 2 1
$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	1 3 3 1

Tam giác Pascal *Dãy Fibonacci*



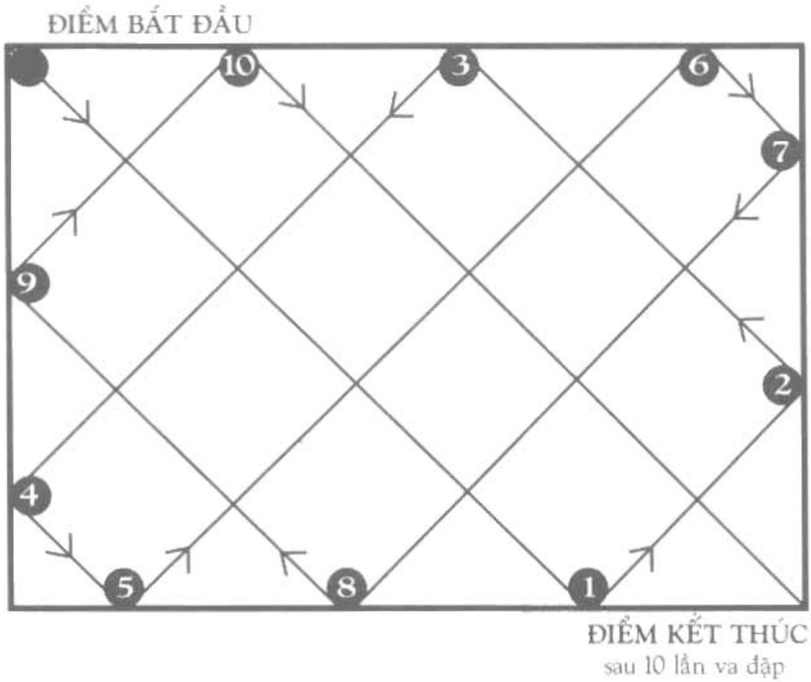
$$(a + b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 b^{n-2} + n \cdot a \cdot b^{n-1} + b^n$$

Công thức nhị thức Newton

Toán học trên bàn bi-a

Ai có thể tin rằng kiến thức về toán lại có thể hữu ích cho người chơi bi-a? Giả sử có một bàn bi-a hình chữ nhật có các cạnh tỉ lệ nhau theo các số nguyên, ví dụ 7:5 chẳng hạn. Một quả bóng đánh từ một góc nào đó theo hướng 45^{o} sẽ đi đến một trong số các góc sau một số lần va đập vào thành bàn. Số lần va đập trước khi tới góc cho bởi công thức:

Dài + rộng − 2.

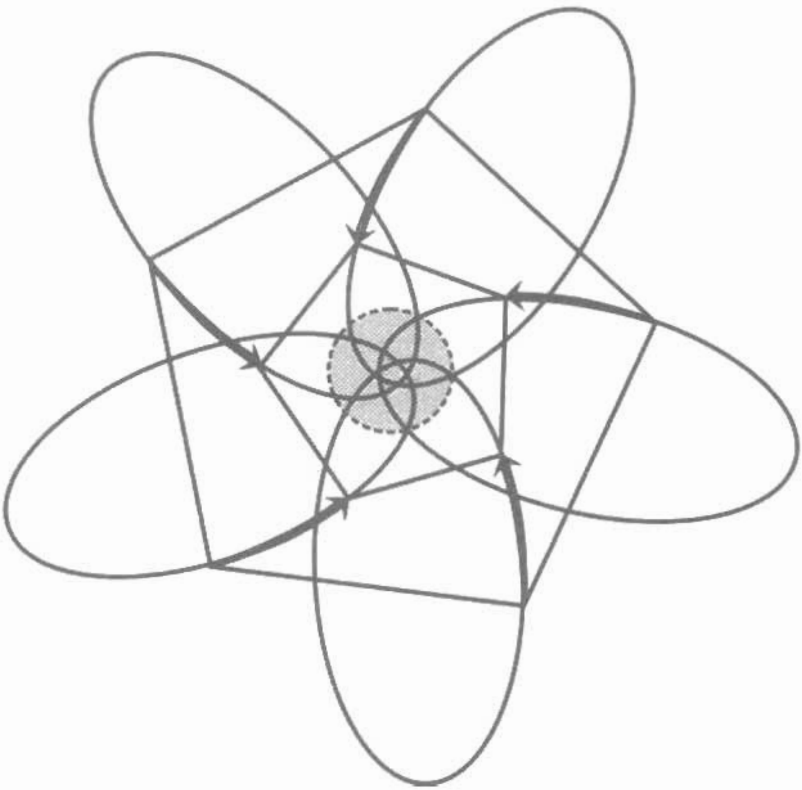


Với bàn bi-a trên, số lần va đập là 10.
$7 + 5 - 2 = 10$ (lần va đập).

Chú ý dạng của tam giác vuông cân trong việc xác định đường đi của quả bóng.

Hình học trong đường đi của electron

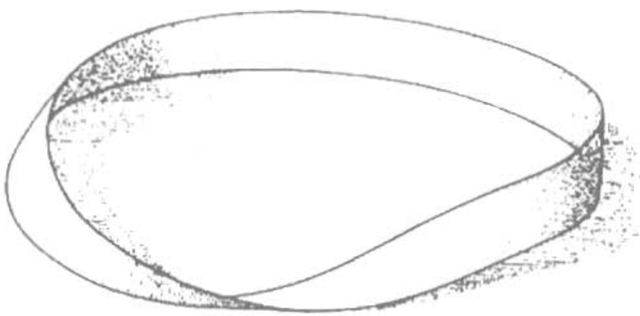
Các hình dạng hình học khác nhau xuất hiện trong nhiều phương diện của thế giới vật lí. Rất nhiều hình không thể nhìn thấy được bằng mắt thường. Trong đường đi của hạt electron cụ thể sau, sự hiện diện của hình ngũ giác đều là rất rõ ràng.



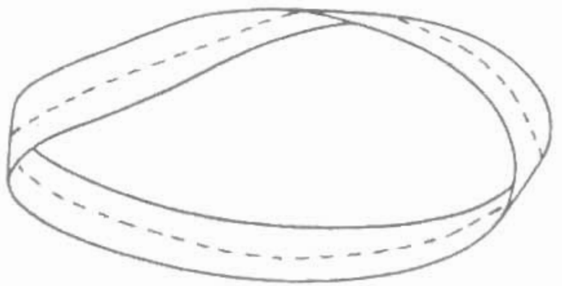
Dải Möbius và chiếc bình Klein

Các nhà hình học tô-pô đã tạo ra một số vật thể rất thú vị. Dải Möbius, do nhà toán học người Đức Augustus Möbius (1790 – 1868) tạo ra, là một vật thể như vậy.

Hình vẽ trên minh họa một băng giấy được dán lại để thành một vòng. Một mặt giấy là ở phía trong vòng, còn mặt kia ở phía ngoài của vòng. Nếu một con nhện đang bò trên mặt ngoài của vòng giấy thì cách duy nhất để nó có thể bò sang mặt trong là bò qua mép của vòng giấy.



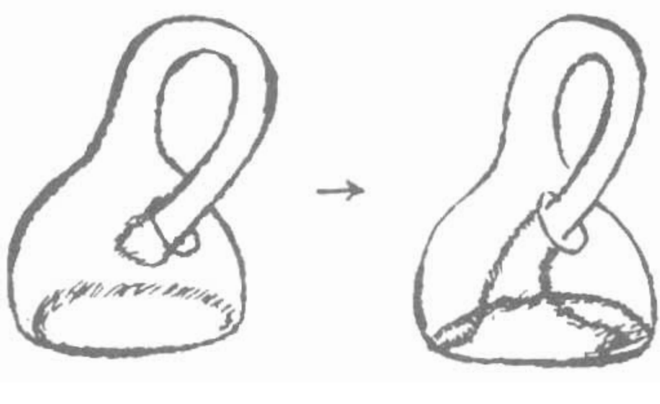
Còn hình vẽ trên đây minh họa *dải Möbius*, nó được tạo ra từ một băng giấy đã xoắn lại nửa vòng trước khi dán lại. Bây giờ, vòng giấy ở dạng này đã không còn hai mặt nữa. Nó chỉ có một mặt. Nếu con nhện bắt đầu bò dọc theo dải Möbius, nó có thể bò trên toàn bộ dải này mà không cần phải bò qua mép. Để chứng minh điều này, bạn hãy cầm một cây bút và vẽ một đường liên tục. Bạn sẽ đi qua toàn bộ dải giấy và trở về vị trí đặt bút vẽ ban đầu.



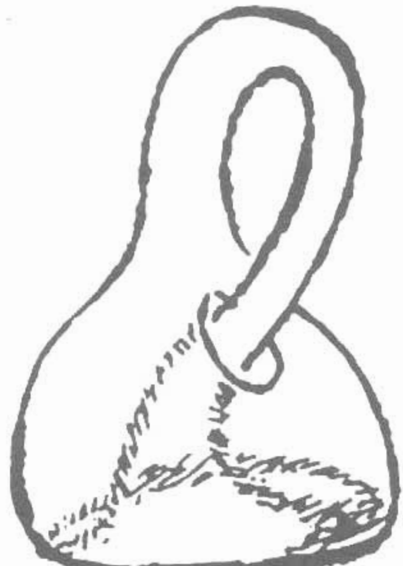
Bạn hãy khám phá thêm một tính chất lí thú nữa của dải Möbius bằng cách cắt nó theo đường nét đứt ở giữa nhé!

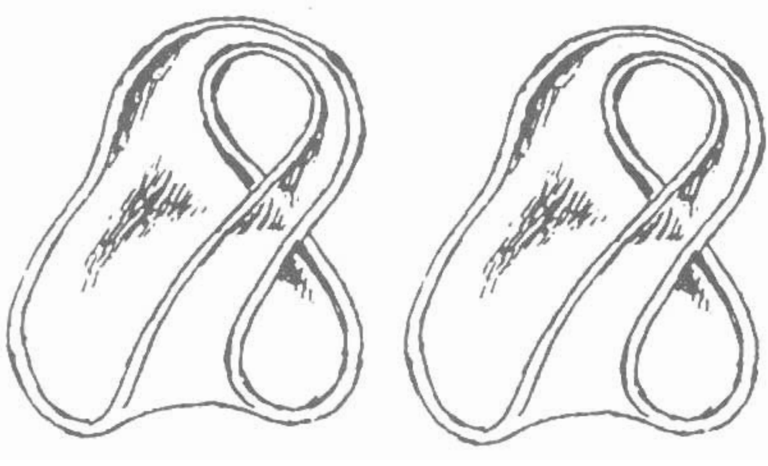
Các dải Möbius ở dây curoa của ô tô hay dây curoa cho các thiết bị cơ khí đặc biệt được quan tâm trong công nghiệp bởi chúng mòn đều hơn các dây curoa thông thường.

Thú vị không kém dải Möbius là bình Klein. Felix Klein, một nhà toán học người Đức (1849 - 1925), đã tìm ra mô hình tô-pô của một chiếc bình đặc biệt chỉ có một mặt này. Bình Klein chỉ có mặt ngoài mà không có mặt trong. Nó đi xuyên qua chính nó. Nếu rót nước vào bình Klein, nước sẽ tràn ra ngoài tại đúng chỗ bạn rót nước vào.



Có một mối liên hệ đặc biệt giữa dải Möbius và bình Klein. Đó là nếu cắt bình Klein thành hai nửa dọc theo chiều dài của nó thì ta sẽ có hai dải Möbius.

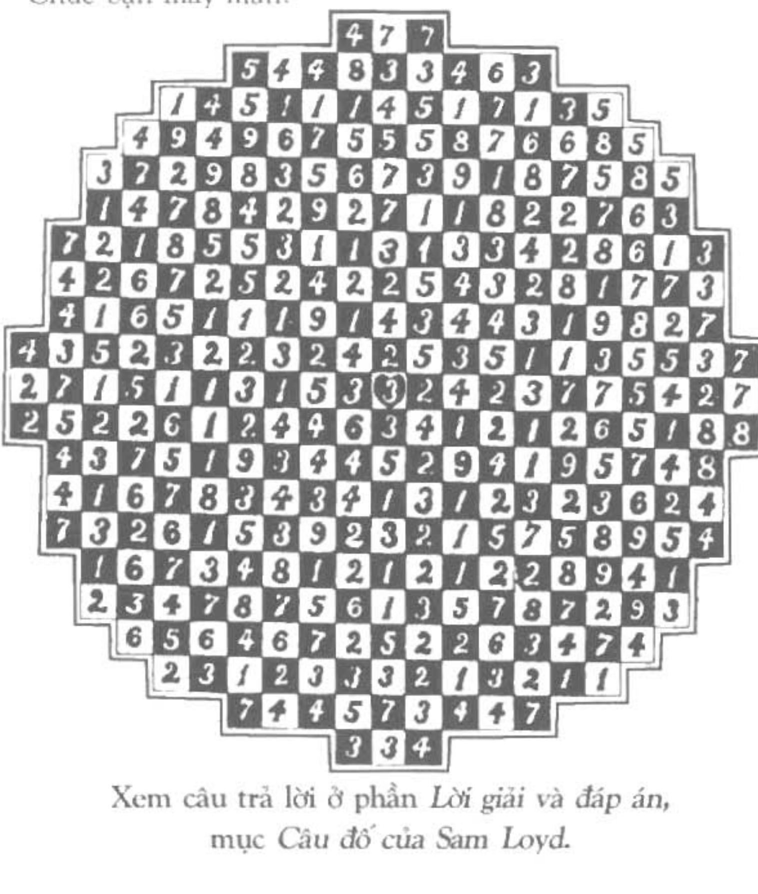




Câu đố của Sam Loyd

Câu đố này được nhà đố vui nổi tiếng Sam Loyd đưa ra. Yêu cầu là phải tìm được đường để ra khỏi viên kim cương. Bạn bắt đầu đi từ tâm, ô có số 3. Số này chỉ dẫn là ở bước đầu tiên bạn phải di chuyển qua 3 hình vuông sang phải, sang trái, lên, xuống hoặc theo đường chéo. Sau khi di chuyển bạn sẽ đặt chân vào một ô khác, số ở ô đó sẽ chỉ số ô mà bạn phải di chuyển trong bước tiếp sau theo một trong tám hướng.

Chúc bạn may mắn!



Xem câu trả lời ở phần *Lời giải và đáp án*, mục *Câu đố của Sam Loyd*.

Toán học và trò chơi gấp giấy

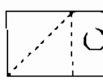
Hầu hết chúng ta đã từng gấp một mảnh giấy và cất nó đi, nhưng rất ít người chủ định gấp giấy để tìm hiểu các ý tưởng toán học trong đó. Gấp giấy vừa là một hình thức học hỏi, vừa là một hình thức giải trí. Ngay cả Lewis Carroll[1] cũng là một người say mê gấp giấy. Mặc dù gấp giấy có ở nhiều nền văn hóa, nhưng người Nhật đã phát triển và phổ biến nó thành một hình thức nghệ thuật gọi là origami.

Một vài khía cạnh toán học trong gấp giấy

Nhiều khái niệm hình học xuất hiện một cách tự nhiên khi gấp giấy. Ví dụ như: ***hình vuông, hình chữ nhật, tam giác vuông, đồng dạng, đường chéo, trung điểm, nội tiếp, diện tích, hình thang, đường trung trực, định lí Pythagoras, các ý tưởng hình học và đại số.***

Dưới đây là một số mẫu gấp giấy thể hiện ứng dụng của các khái niệm này.

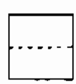
i) Từ một mảnh giấy **hình chữ nhật** tạo thành một hình vuông.



Cắt bỏ phần này đi.

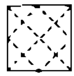
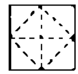
ii) Với mảnh giấy hình vuông, ta tạo **4 tam giác vuông bằng nhau.**

iii) Tìm **trung điểm** của cạnh hình vuông.



(1) *Tên thật là Charles Lutwidge Dodgson. Lewis Carroll là bút danh của ông. Ông là nhà văn, nhà toán học, nhà logic và nhiếp ảnh gia người Anh nổi tiếng, tác giả của truyện* Alice ở xứ sở thần tiên.

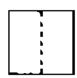
iv) **Nội tiếp** một hình vuông trong mảnh giấy hình vuông.

 hoặc 

v) Tìm hiểu những nếp gấp trên mảnh giấy, chú ý rằng hình vuông nội tiếp có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ **diện tích** hình vuông lớn.

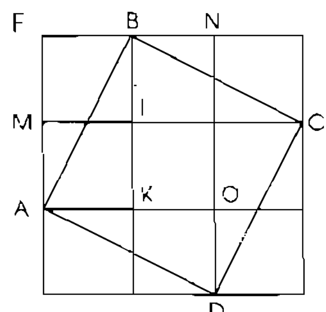
vi) Tạo hai **hình thang** bằng nhau bằng cách lấy một mẩu giấy hình vuông và gập nó dọc theo bất kì cạnh nào sao cho nếp gấp đi qua tâm hình vuông.

vii) Tạo **đường trung trực** của một đoạn thẳng bằng cách gập đôi hình vuông, nếp gấp sẽ là đường trung trực của cạnh hình vuông.



viii) Biểu diễn **định lí Pythagoras**:

Gập mảnh giấy vuông như minh họa trong hình vẽ bên dưới.



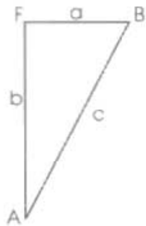
c^2 = diện tích hình vuông ABCD
a^2 = diện tích hình vuông FBIM
b^2 = diện tích hình vuông AFNO

Bằng cách so sánh các hình bằng nhau, ta có
Diện tích hình vuông FBIM = diện tích tam giác ABK

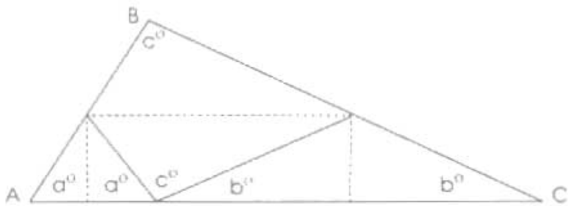
và

Diện tích AFNO = diện tích BCDAK
(diện tích còn lại của hình vuông ABCD).

Vì vậy, $a^2 + b^2 = c^2$.



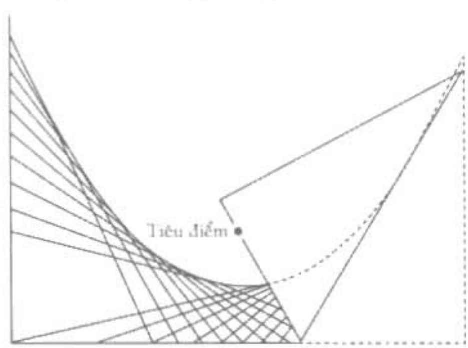
ix) Biểu diễn định lí **tổng các góc trong của một tam giác bằng 180°** bằng cách lấy một mẩu giấy tam giác bất kì và gập nó dọc theo các đường nét đứt như hình dưới.



$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = a^\circ + c^\circ + b^\circ = 180^\circ$ – chúng tạo thành một đường thẳng.

x) Dựng một **parabol** bằng cách gập các **đường tiếp tuyến.**

Các bước gập: Xác định tiêu điểm của parabol là điểm cách mép tờ giấy khoảng chừng vài xăng-ti-mét. Gấp tờ giấy khoảng 20 hoặc 30 lần như hình vẽ. Các nếp gấp này là tiếp tuyến của parabol và hình dáng của đường cong.



Mẹo Fibonacci

Mỗi phần tử trong dãy Fibonacci[1] được tạo ra bằng cách cộng hai phần tử ngay trước nó. Bất kì dãy nào được tạo ra bằng cách đó đều được gọi là dãy Fibonacci.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, ...

Bạn hãy chọn hai số bất kì và tạo ra dãy Fibonacci từ hai số đó. Tổng mười số đầu tiên trong dãy số của bạn sẽ luôn lớn gấp 11 lần số thứ bảy trong dãy.

Bạn có thể chứng minh điều này với hai số ban đầu bất kì được không?

Xem phần *Lời giải và đáp án* cho chứng minh của mẹo Fibonacci.

---

(1). Xem mục Dãy Fibonacci và tự nhiên (trang 225) để biết thêm thông tin.

Quá trình phát triển của các kí hiệu toán học

Kể từ khi người Babylon đầu tiên vạch chữ hình nêm của mình lên tấm đất sét và chừa chỗ trống cho số 0, các nhà toán học đã phát minh ra kí hiệu cho các khái niệm và phép tính nhằm đảm bảo tính rõ ràng và tất nhiên là tiết kiệm thời gian, công sức và cả không gian lưu trữ các ghi chép nữa.

Trong suốt thế kỉ XV, một số biểu tượng đầu tiên được dùng để kí hiệu cho *cộng* và *trừ* tương ứng là *p* và *m*. Các lái buôn người Đức thì dùng + hay để kí hiệu cân nặng thừa hoặc thiếu. Thời điểm đó, + và − được các nhà toán học tiếp nhận và sau năm 1481, chúng bắt đầu xuất hiện trong các bản thảo viết tay. Kí hiệu cho phép nhân, x, được cho là do William Oughtred (1574 – 1660) đưa ra, nhưng nó gặp phải phản ứng của một số nhà toán học bởi họ cho rằng kí hiệu này dễ nhầm lẫn với chữ cái x.

Thông thường, có bao nhiêu nhà toán học thì sẽ có bấy nhiêu kí hiệu. Chẳng hạn vào thế kỉ XVI, Francois Vieta đầu tiên sử dụng từ ***aequalis*** và sau đó là biểu tượng ~ để kí hiệu sự bằng nhau. Trong khi đó, Descartes lại thích dùng kí hiệu $\propto$ để biểu diễn đẳng thức hơn, cuối cùng thì kí hiệu = của Robert Recorde (1557) đã được tiếp nhận. Theo ông, các đường thẳng song song là những hình biểu thị rõ nhất sự bằng nhau.

Mặc dù các chữ cái được các nhà toán học Hy Lạp cổ đại Euclid và Aritstotle dùng để kí hiệu ẩn số, nhưng cách làm này không phổ biến vào thời đó. Đến thế kỉ XVI, các chữ như ***radix*** (tiếng Latinh nghĩa là ***căn nguyên***), **res** (tiếng Latinh nghĩa là ***vật***), ***cosa*** (tiếng Ý nghĩa là ***vật***), ***coss*** (tiếng Đức là ***vật***) được dùng để chỉ ẩn số. Vào giữa những năm 1584 – 1589, khi luật sư

Francois Vieta nghỉ làm việc tại Nghị viện Anh, ông tập trung nghiên cứu rộng khắp các công trình khoa học của nhiều nhà toán học khác.

Ông phát triển hệ kí hiệu dùng chữ cái đại diện cho những đại lượng dương đã biết và chưa biết. Descartes cải biến ý tưởng của ông và đưa ra hệ kí hiệu dùng những chữ cái đầu tiên trong bảng chữ cái cho những đại lượng đã biết và những chữ cái cuối

Biểu tượng này lần đầu tiên được sử dụng bởi nhà toán học Ý Fibonacci vào năm 1220. Nó biểu thị căn số và bắt nguồn từ từ Latinh radix có nghĩa là căn nguyên. Kí hiệu mà chúng ta dùng ngày nay √ xuất hiện từ thế kỉ XVI ở nước Đức.

Nhà toán học người Đức Christoff Rudolff đã dùng biểu tượng này để kí hiệu căn bậc hai vào năm 1525. √ xuất phát từ Pháp vào thế kỉ XVII.

Thế kỉ XVII, Leibniz nhà toán học người Đức, chọn kí hiệu này cho phép nhân.

Chữ D ngược này được một người Pháp tên là J.H. Gallimard dùng để kí hiệu phép chia vào những năm 1700.

Năm 1859 Benjamin Peirce giáo sư Đại học Harvard Mỹ, đã dùng biểu tượng này cho số pi. Kí hiệu π bắt nguồn ở Anh vào thế kỉ XVIII.

Biểu tượng này được Tartaglia nhà toán học thời Phục hưng dùng để kí hiệu phép cộng. Nó có nguồn gốc từ chữ tiếng Ý più, có nghĩa là thêm nữa.

Nhà toán học Hy Lạp cổ đại Diophantus sử dụng kí hiệu này cho phép trừ.

cùng cho các đại lượng chưa biết. Cuối cùng, vào năm 1657, các chữ cái được John Hudde dùng để kí hiệu cả số âm và số dương.

Biểu tượng ∞ được người La Mã dùng để kí hiệu số 1000 và sau đó là bất kì một số rất lớn nào. Vào năm 1655, John Wallis, một giáo sư Đại học Oxford, Mỹ, đã dùng kí hiệu ∞ cho vô cùng lần đầu tiên. Nhưng nó không được dùng rộng rãi cho đến khi được Bernoulli sử dụng vào năm 1713.

Các kí hiệu khác cũng được phát triển, như việc sử dụng dấu ngoặc đơn vào năm 1544, dấu móc căn bậc hai và dấu ngoặc nhọn vào năm 1593, dấu căn bậc hai do Descartes nghĩ ra (ông dùng √c để kí hiệu căn bậc ba).

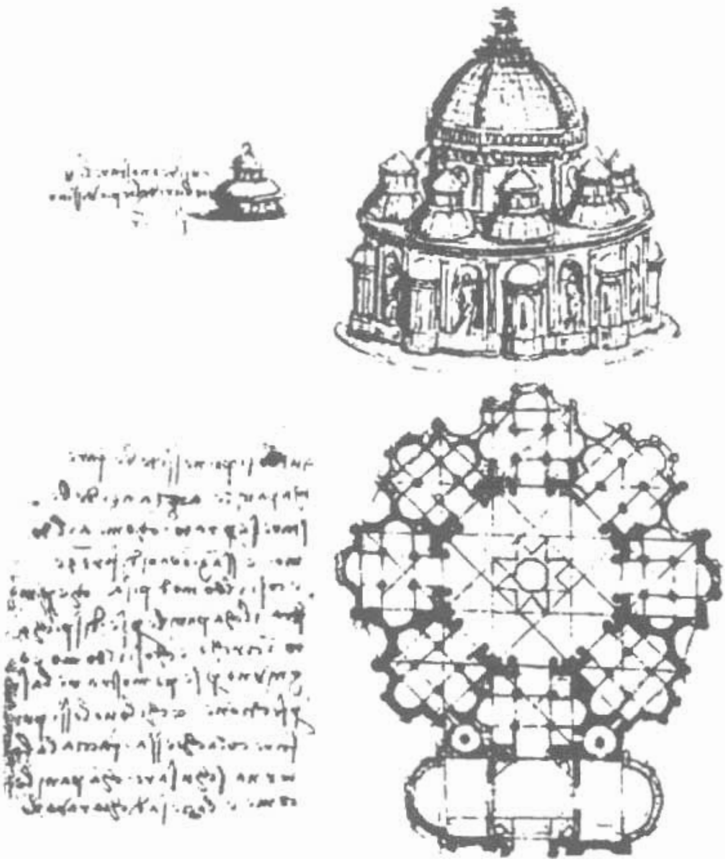
Thật khó có thể tưởng tượng chúng ta sẽ phải làm cách nào để giải các bài toán mà không có dấu +, kí hiệu cho số 0, hay bất kì kí hiệu toán học nào khác mà chúng ta vẫn thường coi là hiển nhiên. Cũng thật khó để nhận ra rằng phải mất nhiều thế kỉ đến thế để các kí hiệu toán học phát triển và được chấp nhận trên toàn thế giới như ngày nay.

Bảng so sánh các kí hiệu và biểu thức toán học được sử dụng xưa và nay.

	XƯA	*NAY*
	℞	$\sqrt{\ }$
	p	
	m	-
	v	được sử dụng dưới căn số
Cardantg (1501 - 1576)	℞.v.7.p.℞.14	$\sqrt{7} + \sqrt{14}$
Chuquet 1484	$12^3 + 12^0 + 7^{1m}$	$12x^3 + 12 + 7x^{-1}$
Bombelli	3	x^3
Stevin 1585	$1^{0} + 3^{1} + 6^{2} + {}^{3}$	$1 + 3x + 6x^2 + x^3$
	1/2	$\sqrt{\ }$
	1/3	$\sqrt[3]{\ }$
Descartes	$1 + 3x + 6xx + x^3$	$1 + 3x + 6x^2 + x^3$

Các thiết kế hình học của Leonardo da Vinci

Bức phác thảo của Leonardo da Vinci dưới đây cho thấy ông đã sử dụng các đa giác đều khi thiết kế kiến trúc của một nhà thờ. Sự quan tâm và những nghiên cứu của Leonardo về các cấu trúc hình học cùng với những hiểu biết của ông về đối xứng chính là công cụ giúp ông vẽ nên sơ đồ kiến trúc của những nhà nguyện nhỏ thêm vào cho nhà thờ lớn mà không làm xáo trộn thiết kế và tính đối xứng của tòa nhà chính.



Mười mốc lịch sử

Các cụm kí hiệu số khác nhau dưới đây thể hiện mười mốc lịch sử. Bạn hãy dịch chúng theo hệ cơ số 10 và tìm hiểu xem sự kiện nào đã diễn ra vào các năm đó nhé!

Bảng các hệ kí số khác nhau dưới đây có thể sẽ giúp bạn dịch những kí hiệu trên.

Ngày nay	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Babylon (năm 1500 tr.CN)	𒁹	𒈫	𒐈	𒐉	𒐊	𒐋	𒑂	𒑄	𒑆	𒌋	𒌋𒁹	𒌋𒈫	𒌋𒐈	?	?	?
Trung Quốc (năm 500 tr.CN)	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	?	?	?
Hy Lạp (năm 400 tTr.CN)	A	B	Γ	Δ	E	F	Z	H	Θ	I	IA	IB	IΓ	?	?	?
Ai Cập (năm 300 tr.CN)	𓏺	𓏻	𓏼	𓏽	𓏾	𓏿	𓐀	𓐁	𓐂	𓎆	𓎆𓏺	𓎆𓏻	𓎆𓏼	?	?	?
La Mã (năm 200 tTr.CN)	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	?	?	?
Maya (năm 300 tr.CN)	𝋡	𝋢	𝋣	𝋤	𝋥	𝋦	𝋧	𝋨	𝋩	𝋪	𝋫	𝋬	𝋭	?	?	?
Ấn Độ (thế kỉ XI)	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३	?	?	?
Hệ nhị phân (trong các máy tính)	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	?	?	?

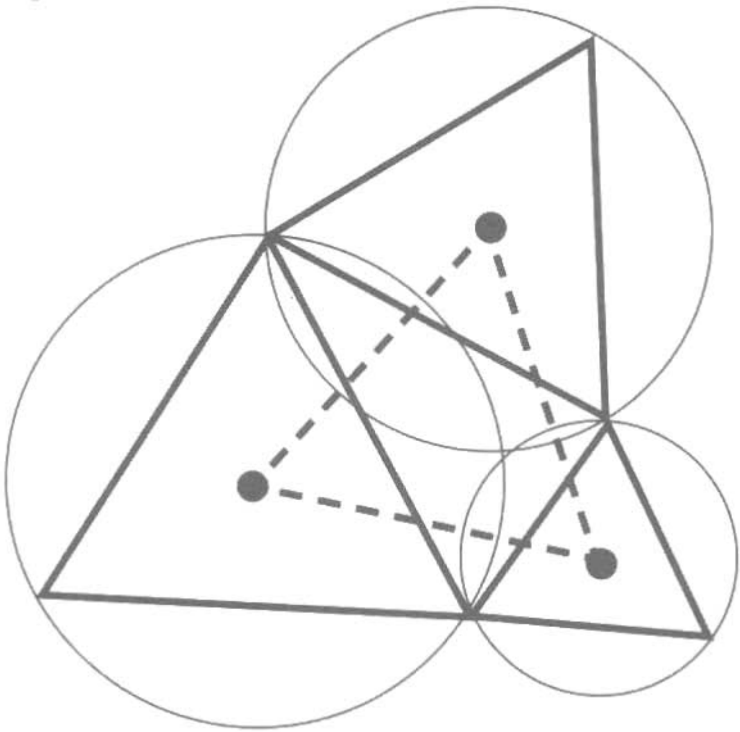
Xem câu trả lời ở phần *Lời giải và đáp án*.

Định lí Napoleon

"Sự tiến bộ và hoàn thiện của toán học liên quan mật thiết tới sự thịnh vượng của quốc gia."
—Napoleon I

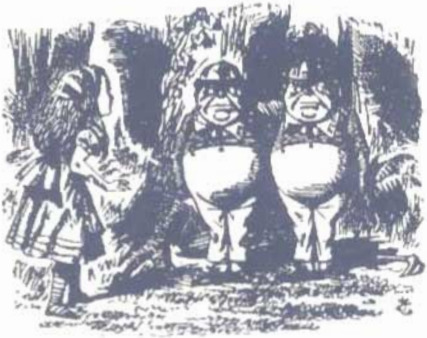
Napoleon Bonaparte (1769 – 1821) có một lòng tôn kính đặc biệt với toán học và các nhà toán học, bản thân ông cũng tự mình thưởng thức nó. Trên thực tế, ông là tác giả của định lí sau đây:

Nếu trên ba cạnh của một tam giác bất kì cho trước ta dựng ba tam giác đều về phía ngoài tam giác đã cho, thì tâm các đường tròn ngoại tiếp ba tam giác đó là các đỉnh của một tam giác đều.



Lewis Carroll - nhà toán học

Charles Lutwidge Dodgson (1832 – 1898) là nhà toán học và logic học người Anh, được biết tới nhiều nhất dưới bút danh Lewis Carroll. Ông là tác giả của truyện *Alice in Wonderland (Alice ở xứ sở thần tiên)* và *Alice through the Looking Glass (Alice ở xứ sở gương soi)*. Ngoài ra, ông còn xuất bản nhiều sách đề cập đến các lĩnh vực khác nhau của toán học. Cuốn sách *Pillow Problems (Những bài toán gối đầu)* của ông bao gồm 72 bài toán – tất cả hầu như được ông viết và giải vào ban đêm, đề cập đến số học, đại số, hình học, lượng giác, hình học giải tích, các phép tính vi tích phân và xác suất siêu việt.



"Ngược lại", Tweedledee tiếp tục, "nếu đã như thế, thì nó có thể như vậy; và nếu nó như vậy, thì nó sẽ là như thế: nhưng vì nó không như vậy, nên không là như thế. Đó là logic."

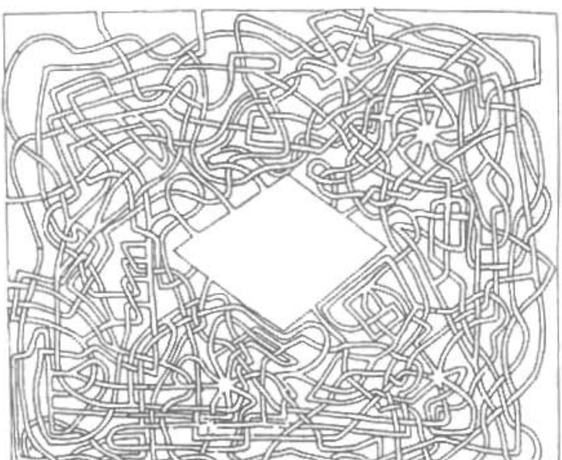
— Lewis Carroll.

A *Tangled Tale (Câu chuyện rối rắm)* ban đầu được in như là một bài báo trong một tờ nguyệt san. Sau đó, được biên soạn thành một câu chuyện hấp dẫn có chứa những câu đố toán học trong mười chương của nó. Người ta kể lại rằng Nữ hoàng Victoria say mê những quyển truyện về Alice của Carroll tới nỗi bà tìm mua tất cả những cuốn sách mà ông viết. Hẳn là bà sẽ vô cùng sửng sốt trước số lượng sách toán mà bà nhận được.

Bài toán thứ 8 trong quyển Pillow Problems

"Một số người đàn ông ngồi thành một vòng tròn sao cho mỗi người ngồi cạnh hai người khác, mỗi người có một số đồng si-linh nhất định. Người thứ nhất có nhiều hơn người thứ hai 1 đồng si linh, người thứ hai lại hơn người thứ ba 1 đồng si-linh và cứ như vậy. Người thứ nhất đưa cho người thứ hai 1 đồng, người thứ hai đưa người thứ ba 2 đồng và cứ tiếp tục như thế, người trước đưa cho người sau số đồng si-linh nhiều hơn số mà anh ta nhận được là 1, miễn là người đó đủ tiền để cho như vậy. Sau cùng, có hai người ngồi cạnh nhau mà một trong hai người đó có số đồng si linh gấp 4 lần người còn lại. Hỏi có tất cả bao nhiêu người đàn ông? Và lúc ban đầu, người có ít đồng si-linh nhất trong số họ có bao nhiêu đồng si-linh?"

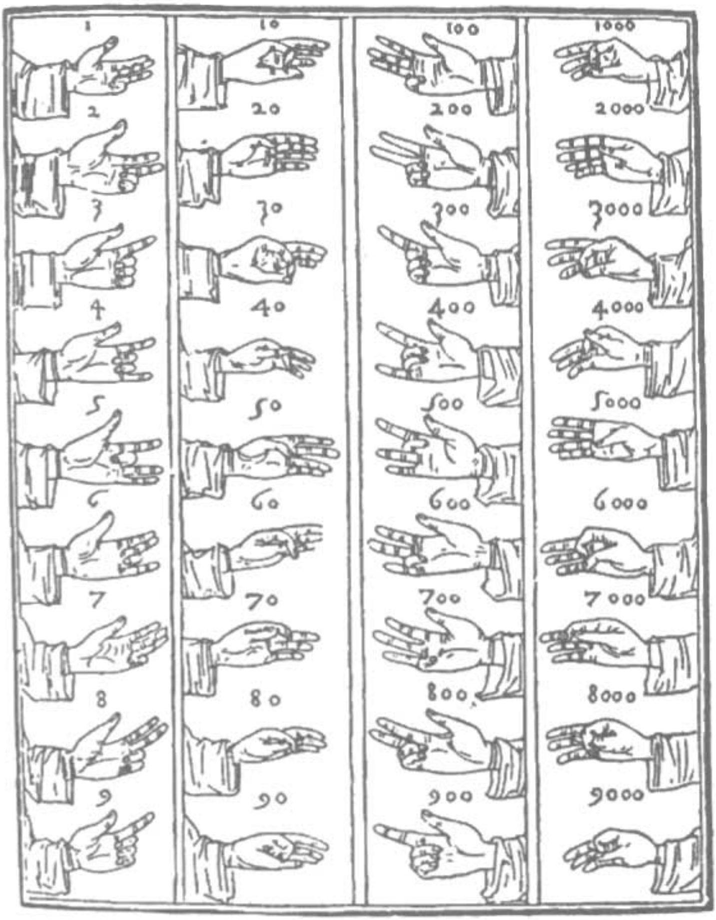
Xem đáp số ở phần *Lời giải và đáp án*.



Mê cung này được Lewis Carroll vẽ năm ông 20 tuổi. Ông tạo ra mê cung với những con đường vòng lên và luồn dưới nhau. Mục tiêu là tìm đường ra khỏi mê cung nếu bạn đứng ở chính giữa nó.

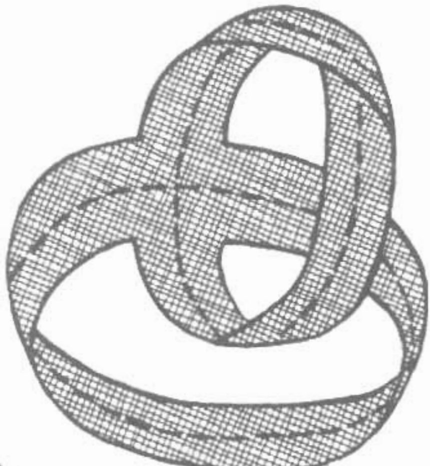
Đếm bằng các ngón tay

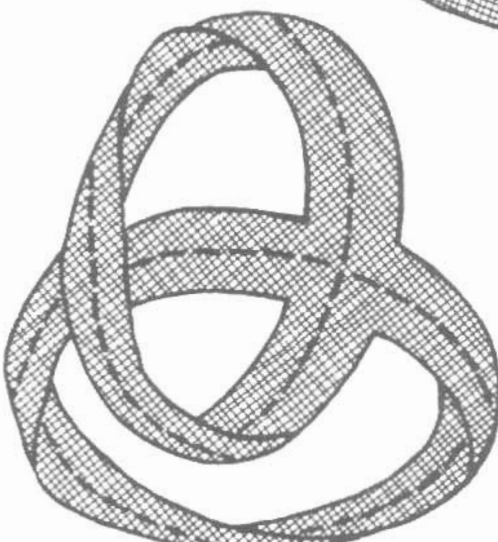
Vì trong suốt thời Trung cổ, giấy viết rất đắt đỏ nên việc đếm và liên lạc bằng cách ra dấu ngón tay thường xuyên được sử dụng. Như trong hình minh họa dưới đây, các ngón tay có thể biểu thị cả những số có giá trị nhỏ và lớn.



Một biến thể từ dải Möbius

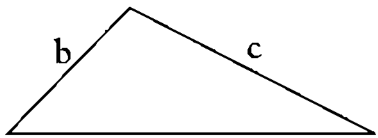
Hai hình dưới có liên quan đến dải Möbius. Nếu bạn tạo hai mẫu giấy giống như các mô hình tô-pô này, sau đó cắt chúng theo đường nét đứt thì mẫu thứ nhất sẽ trở thành một hình vuông, còn mẫu thứ hai sẽ thành hai mảnh tách rời nhau.





Định lí Heron

Nhiều người trong số chúng ta đã học cách tính diện tích tam giác dựa vào độ dài đường cao và cạnh tương ứng với nó trong môn Hình học. Nhưng nếu không có định lí Heron thì việc tính diện tích tam giác khi chỉ biết độ dài ba cạnh của nó đòi hỏi phải dùng kiến thức về lượng giác.



Heron được biết đến trong lịch sử toán học chính là nhờ công thức:

$$\textbf{Diện tích tam giác} = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

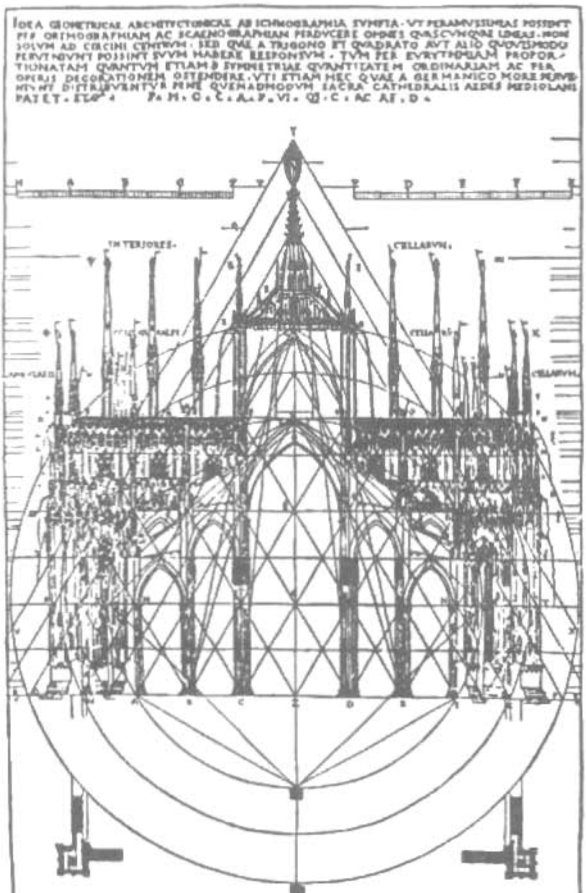
trong đó a, b, c là chiều dài ba cạnh tam giác, còn s là một nửa tổng chiều dài của ba cạnh đó.

Công thức Heron đã được Archimedes biết đến từ trước đó, có thể chính Archimedes đã chứng minh công thức này, nhưng ghi chép sớm nhất về nó mà chúng ta có được là của Heron trong cuốn *Metrica*[1]. Để miêu tả về Heron một cách chính xác nhất thì ông là một nhà toán học không cổ điển. Ông quan tâm nhiều đến tính thực tiễn của toán học hơn là lí thuyết hay quan niệm toán học như một môn khoa học hoặc nghệ thuật. Chính vì vậy, ông còn là người phát minh ra động cơ hơi nước nguyên thủy, nhiều đồ chơi khác nhau, máy bơm cứu hỏa, đèn tự động sáng khi cửa mở ở nhà thờ, quạt gió và rất nhiều thiết bị cơ khí khác dựa vào các tính chất của chất lỏng và các nguyên lí cơ học đơn giản.

(1) Cuốn sách ba tập về hình học của Heron, nhà toán học của Alexandria.

Cùng quan sát kiến trúc và hình học Gô-tích

Bản vẽ Gô-tích hiếm hoi này cho thấy việc sử dụng hình học và đối xứng trong kiến trúc của thánh đường *Dome of Milan (Mái nhà của Milan)* ở Ý. Nó được Caesar Caesariano, kiến trúc sư trưởng của thánh đường này vẽ ra năm 1521.



Thanh Napier

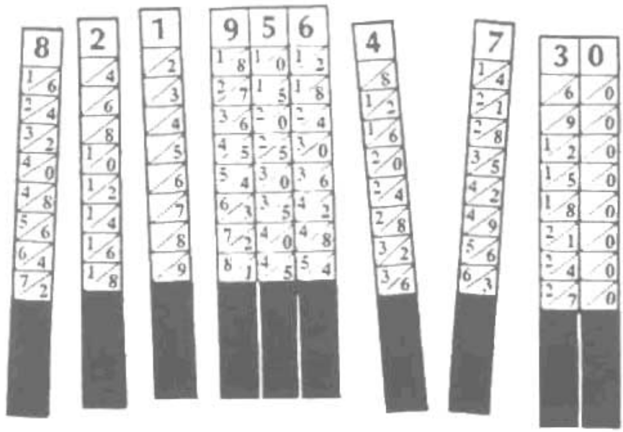
Làm việc với những phép tính phức tạp ngày càng trở nên buồn tẻ và mệt mỏi, đặc biệt là đối với những nhà khoa học cần thực hiện các tính toán thiên văn, những thủy thủ cần giải quyết các bài toán hàng hải thực tiễn, những nhà buôn cần lập sổ sách kế toán. Và rồi vào thế kỉ XVII, John Napier (1550 – 1617), một nhà toán học nổi tiếng người Scotland, đã cách mạng hóa công việc tính toán bằng phát minh của mình về lôgarit (một phương pháp sử dụng các số mũ để biểu diễn các phép nhân và chia phức tạp bằng cách chuyển chúng thành phép cộng hoặc trừ).[1] Phương pháp tính toán dùng các lôgarit của Napier và các bảng mà ông phát triển đã đơn giản hóa những tính toán khó bao gồm phép nhân, chia, lũy thừa và tìm căn. Mặc dù lí thuyết về hàm lôgarit và hàm số mũ là phần thiết yếu trong toán học, nhưng với sự ra đời của các máy tính điện tử và máy vi tính hiện đại, các bảng lôga và ứng dụng của chúng cũng đã trở nên lỗi thời như các thước lôga vậy. Tuy vậy, sự phát triển của chúng và các phương pháp tính toán rút gọn chính là phương thức tính toán tuyệt vời được sử dụng rộng rãi trong nhiều thế kỉ trước bởi các nhà toán học, các nhân viên kế toán, các nhà hàng hải, các nhà thiên văn học và khoa học.

Sử dụng lôgarit, Napier cũng phát minh ra các thanh có khắc số, gọi là thanh Napier để giảm nhẹ công việc kế toán của các thương nhân. Các thương nhân mang theo bên mình một bộ các thanh làm từ ngà voi hoặc gỗ để tính các phép nhân, chia, căn bậc hai và căn bậc ba. Mỗi thanh là một bảng tính

---

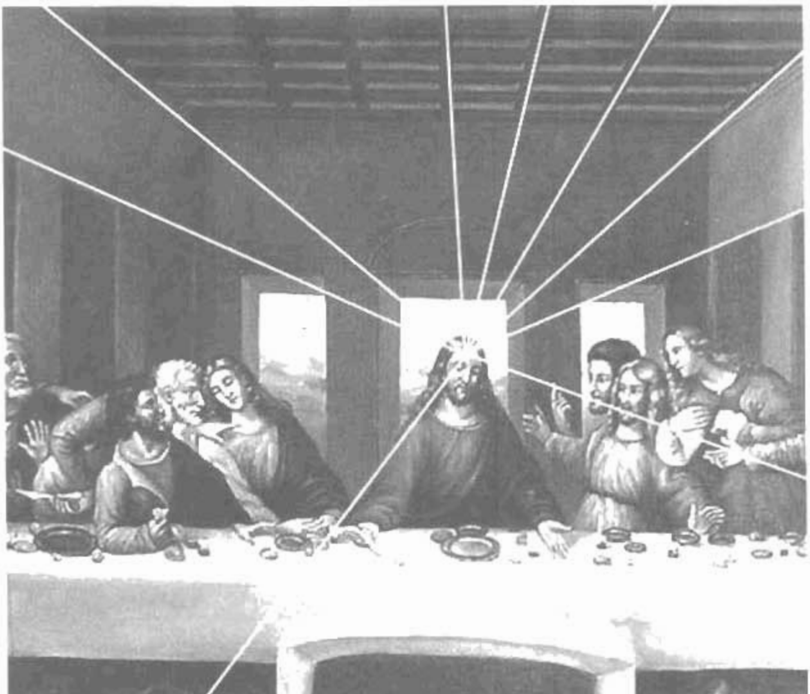
(1) Ví dụ để biểu diễn phép tính 3600 ÷ 0,072, người ta sẽ chuyển các số này thành dạng lũy thừa (tức là dạng lôga) bằng các bảng log (bảng này sử dụng cơ số 10). Để chia các số viết ở dạng lũy thừa của cùng một cơ số, ta chỉ cần trừ các số mũ của chúng. Vì vậy, số lôga của 3600 sẽ trừ cho số lôga của 0,072, kết quả sẽ được chuyển ngược lại bằng các bảng lôga cơ số 10.

nhân đối với chữ số ở trên đầu thanh. Ví dụ: để nhân 298 với 7, người ta sẽ xếp ba thanh 2, 9, 8 lại với nhau, tìm đến hàng thứ bảy rồi cộng hai số ở hàng đó lại để tìm kết quả như trong hình minh họa.



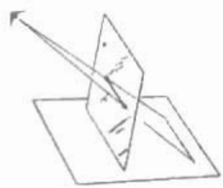
Hội họa và hình học xạ ảnh

Dù vô tình hay cố ý, toán học cũng đã ảnh hưởng tới hội họa và các họa sĩ trong hàng thế kỉ qua. Hình học xạ ảnh, tỉ lệ vàng, sự cân xứng, các tỉ lệ, ảnh ảo giác, đối xứng, các hình hình học, các thiết kế và họa tiết, các giới hạn và vô cùng, khoa học máy tính là một số lĩnh vực toán học có ảnh hưởng đến rất nhiều khía cạnh và thời kì khác nhau của hội họa, dù là hội họa thời kì sơ khai, cổ điển, Phục hưng, hiện đại, pop (xu hướng hội họa nổi lên ở Anh vào giữa những năm 1950 và ở Mỹ vào cuối những năm 1950) hay deco (xu hướng hội họa quốc tế phổ biến từ năm 1925 đến năm 1939).



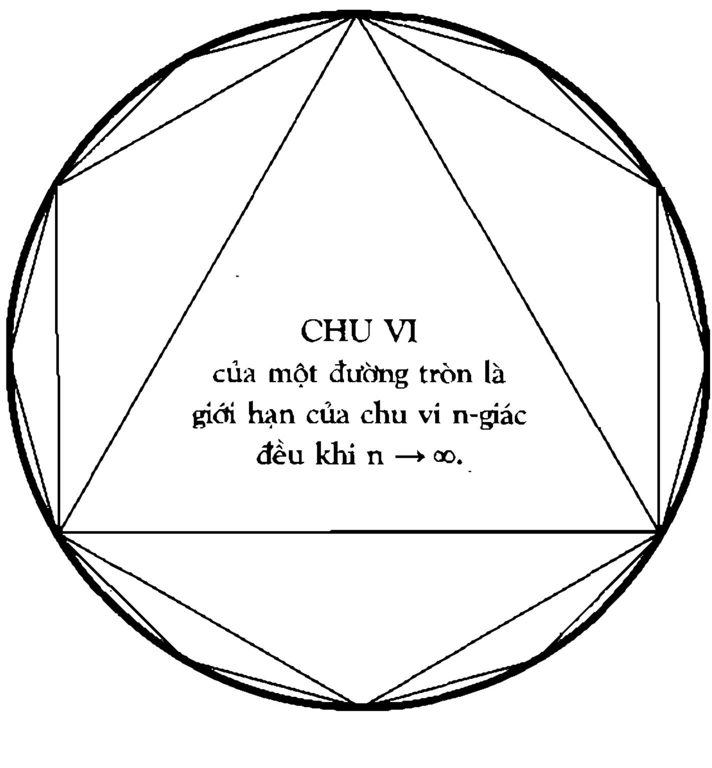
Những đường thẳng thêm vào trong tranh minh họa việc sử dụng hình học xạ ảnh của Leonardo da Vinci trong kiệt tác *Bữa tối cuối cùng* của ông.

Một họa sĩ vẽ cảnh ba chiều trên một bức tranh sơn dầu hai chiều hẳn phải quyết định mọi thứ sẽ thay đổi như thế nào khi nhìn từ các khoảng cách và vị trí khác nhau. Chính vì vậy, hình học xạ ảnh đã phát triển và đóng vai trò thiết yếu trong hội họa thời Phục hưng. *Hình học xạ ảnh là lĩnh vực toán học giải quyết các vấn đề về tính chất và các tương quan không gian của hình ảnh khi chúng được chiếu, do đó giải quyết các vấn đề về phối cảnh*. Để tạo nên các bức họa ba chiều như thật, các họa sĩ thời Phục hưng đã sử dụng các khái niệm của hình học xạ ảnh ngày nay như điểm chiếu, các đường hội tụ song song, điểm ảo. Hình học xạ ảnh là một trong những hình học phi Euclid đầu tiên được đưa ra. Các họa sĩ muốn miêu tả hiện thực. Họ lập luận rằng nếu họ có thể nhìn thấy cảnh bên ngoài qua một cửa sổ thì cũng có thể chiếu những gì họ thấy lên cửa sổ đó như là một tập hợp các điểm nhìn nếu giữ nguyên mắt tại một điểm quan sát duy nhất. Như vậy, cửa sổ sẽ đóng vai trò như là bức vẽ. Rất nhiều công cụ khác nhau đã được tạo ra để giúp các họa sĩ thực sự chuyển hóa được cửa sổ thành bức vẽ. Các bức tranh khắc gỗ của Albrecht Dürer dưới đây cho thấy hai công cụ như vậy. Bạn hãy lưu ý rằng mắt của người họa sĩ luôn đặt tại một điểm cố định.



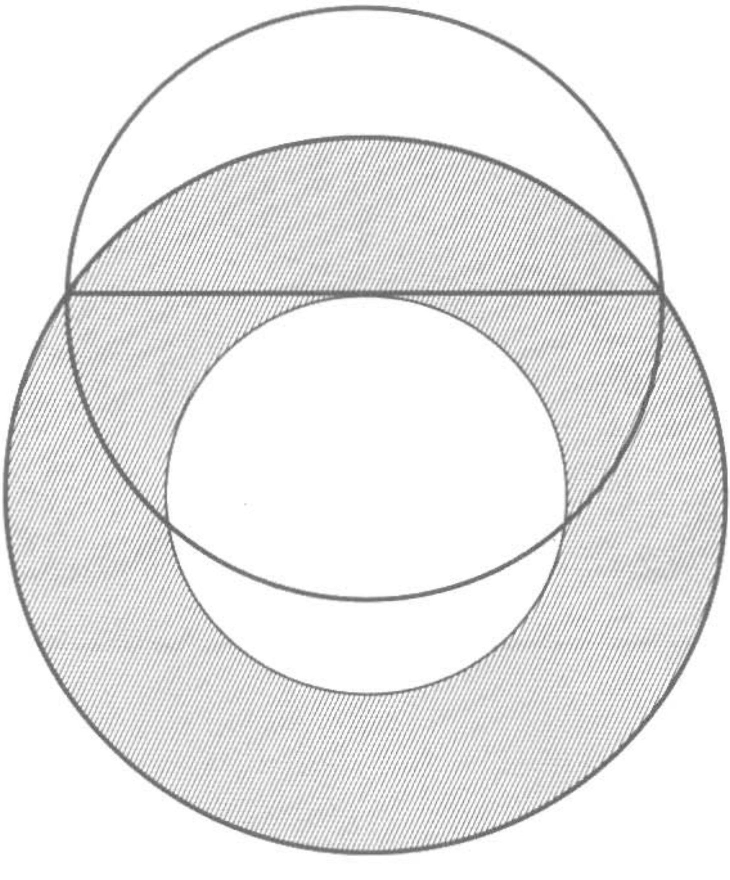
Vô cùng và đường tròn

Mỗi đường tròn đều có một chu vi cố định – một độ dài hữu hạn. Một phương pháp để tìm công thức chu vi của đường tròn là sử dụng khái niệm *vô cùng*. Xét dãy chu vi của các đa giác đều nội tiếp đường tròn. (Một đa giác đều có tất cả các cạnh và tất cả các góc bằng nhau). Khi tính toán và nghiên cứu chu vi của mỗi đa giác đều nội tiếp đường tròn, người ta thấy rằng nếu số cạnh của đa giác tăng lên thì chu vi của nó càng tiến gần đến chu vi của đường tròn. Trên thực tế, giới hạn của các chu vi này khi số cạnh đa giác tiến đến vô cùng chính là chu vi của đường tròn. Hình vẽ dưới đây minh họa rằng đa giác có số cạnh càng nhiều thì càng gần với đường tròn và càng trông giống đường tròn hơn.



Hình vành khuyên lạ kì

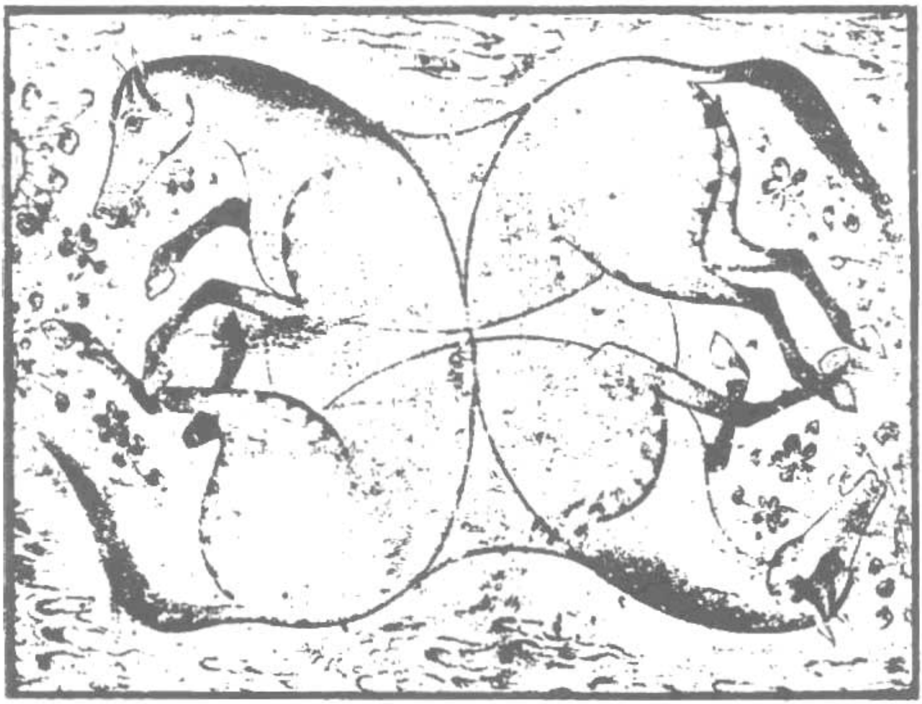
Lấy hình vành khuyên tròn có kích thước bất kì tạo bởi hai hình tròn đồng tâm. Bạn có thể chứng minh diện tích của hình vành khuyên bằng diện tích của vòng tròn có đường kính là một dây cung của vòng tròn lớn nhưng lại là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ được không?



Xem chứng minh ở phần *Lời giải và đáp án.*

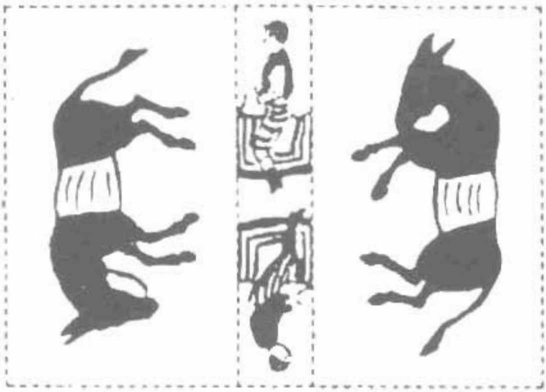
Những chú ngựa Ba Tư và câu đố của Sam Loyd

Bức họa Ba Tư ở thế kỉ XVII này đã rất khéo léo vẽ bốn chú ngựa. *Bạn có thể tìm ra bốn chú ngựa này không?*



Xem câu trả lời ở phần *Lời giải và đáp án.*

Còn bức vẽ dưới đây có lẽ chính là cảm hứng cho câu đố *Người cưỡi lừa và chú lừa* của chuyên gia đố vui Sam Loyd (1841 1911).



Phiên bản đầu tiên của câu đố này được Loyd nghĩ ra khoảng năm 1858, khi ông còn là một thiếu niên.

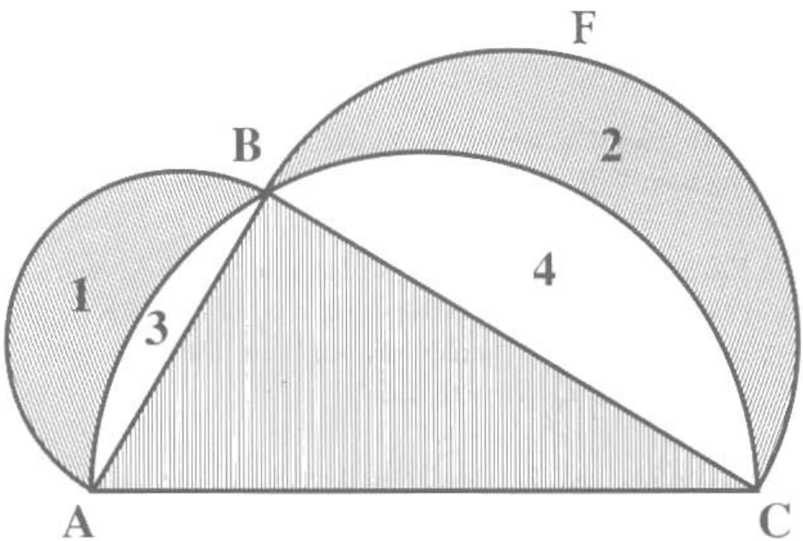
> *Yêu cầu của bài toán là hãy cắt bức tranh thành ba hình chữ nhật dọc theo các đường nét đứt và sắp xếp (không được gấp) các hình chữ nhật này thành hình hai người cưỡi hai chú lừa đang phi nước đại.*

Câu đố này ngay lập tức đã thu được thành công. Trên thực tế, nó phổ biến đến nỗi theo những tin tức được đưa lên thì Sam Loyd đã thu về 10 000 đô-la chỉ trong vòng vài tuần.

Xem câu trả lời ở phần *Lời giải và đáp án*, mục *Câu đố của Sam Loyd*.

Những hình trăng lưỡi liềm

Từ **lune**, có nghĩa là hình trăng lưỡi liềm, bắt nguồn từ từ Latinh *lunar* – nghĩa là hình mặt trăng. Các hình trăng lưỡi liềm là những vùng phẳng bị giới hạn bởi các cung của những đường tròn khác nhau (xem các hình trăng lưỡi liềm được tạo thành như thế nào ở hình vẽ bên dưới). Nhà toán học Hy Lạp cổ đại Hippocrates ở Chios (460 - 380 tr.C.N) đã nghiên cứu rất sâu các hình trăng lưỡi liềm. Có lẽ ông tin rằng chúng có thể được sử dụng bằng một cách nào đó để giải bài toán cầu phương một hình tròn.[1]



Ông đã tìm ra và chứng minh rằng:

Hai hình trăng lưỡi liềm dựng trên hai cạnh của một tam giác nội tiếp trong một nửa hình tròn có tổng diện tích bằng diện tích tam giác đó.

(1). *Xem mục* **Bộ ba bất khả thi** (*trang 132*).

Nếu $\widehat{ABC}$, $\widehat{AEB}$, $\widehat{BFC}$ là các nửa hình tròn, thì diện tích của lưỡi liềm (1) + diện tích của lưỡi liềm (2) = diện tích tam giác ABC.

Chứng minh

Diện tích của nửa hình tròn AEB/diện tích của nửa hình tròn $\widehat{ABC}$
$= (\pi|AB|2/8) / (\pi|AC|^2) / 8$
$= |AB|^2 / |AC|^2$
Diện tích của nửa hình tròn $\widehat{AEB}$ = diện tích của nửa hình tròn $\widehat{ABC}$ $|AB|^2 / |AC|^2)$ (a)

Tương tự thế,
diện tích của nửa hình tròn BFC = diện tích của nửa hình tròn $\widehat{ABC}$ $|BC|^2 / |AC|^2)$ (b)
Bây giờ cộng vế với vế của (a) và (b) rồi rút thừa số chung ta có:

diện tích nửa hình tròn $\widehat{AEB}$ + diện tích nửa hình tròn $\widehat{BFC}$ = diện tích nửa hình tròn $\widehat{ABC}$ $(|AB|^2+|BC|^2) / |AC|^2$ (c)
ΔABC là tam giác vuông vì nó nội tiếp trong một nửa hình tròn.
Vì vậy,
$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ *theo định lí Pitago.*
Áp dụng đẳng thức này vào (c) ta nhận được:
diện tích nửa hình tròn $\widehat{AEB}$ + diện tích nửa hình tròn $\widehat{BFC}$ = diện tích nửa hình tròn $\widehat{ABC}$

Trừ vế với vế đẳng thức trên cho đẳng thức sau:
diện tích (3) + diện tích (4) = diện tích (3) + diện tích (4)

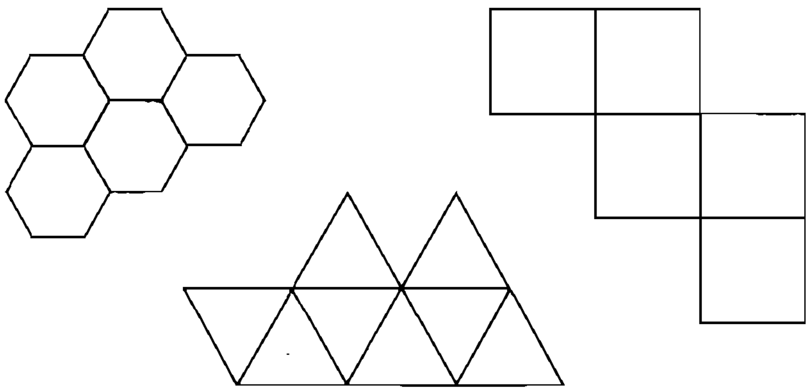
Suy ra điều phải chứng minh: diện tích lưỡi liềm (1) + diện tích lưỡi liềm (2) = diện tích tam giác ABC.

Mặc dù Hippocrates không thành công khi cố gắng cầu phương hình tròn, nhưng quá trình đi tìm lời giải cho bài toán này đã giúp ông khám phá ra được rất nhiều ý tưởng toán học mới quan trọng.

Các lục giác trong tự nhiên

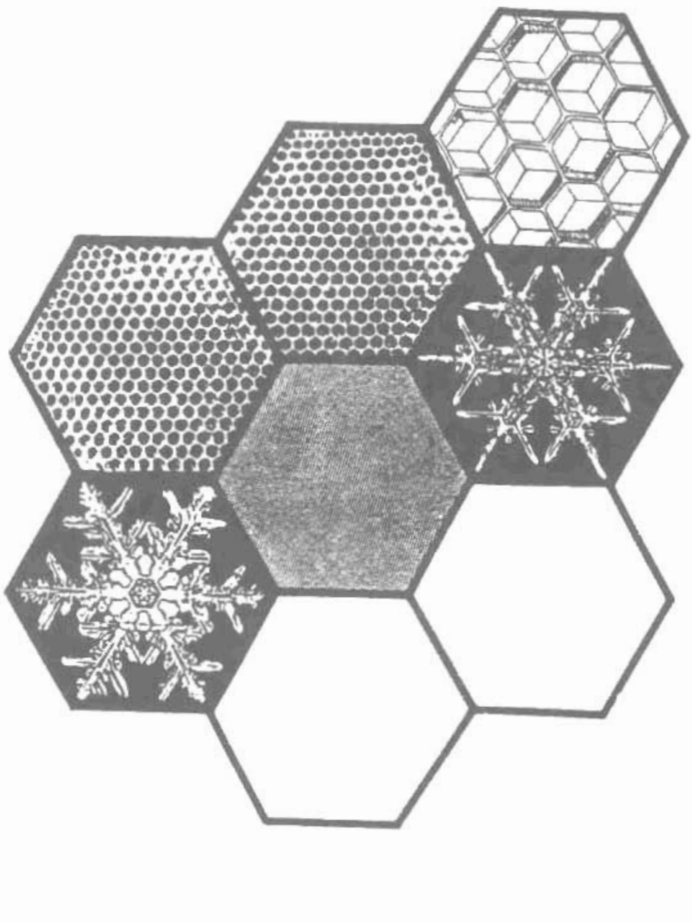
Rất nhiều những tạo vật của tự nhiên là các mô hình tuyệt đẹp cho những đối tượng toán học như hình vuông và hình tròn. Hình lục giác cũng là một trong những hình hình học được tìm thấy trong tự nhiên. Lục giác là một hình có sáu cạnh. Nó là hình lục giác đều nếu có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

Các nhà toán học đã chứng minh rằng chỉ có các lục giác đều, hình vuông và tam giác đều là có thể ghép lại với nhau (xếp hình) trên mặt phẳng mà không để lại một khoảng trống nào.



Trong ba hình nói trên, lục giác đều có chu vi nhỏ nhất nếu diện tích của chúng bằng nhau. Điều này có nghĩa là khi xây dựng các ô lục giác để làm tổ của mình, bầy ong dùng ít sáp và lao động ít hơn đối với cùng một khoảng không gian. Hình lục giác được tìm thấy trong các tổ ong, những bông tuyết, trong các phân tử, tinh thể, sinh vật biển và các dạng sống khác.

Đi dạo trong cơn mưa tuyết có nghĩa là bạn đang đứng giữa những hình hình học tuyệt vời. Bông tuyết là một trong những ví dụ thú vị nhất về đối xứng lục giác trong tự nhiên. Chúng ta có thể nhìn thấy các hình lục giác trong hình dạng của mỗi bông tuyết. Số lượng vô hạn các cách kết hợp của những họa tiết lục giác khiến chúng ta cảm giác rằng không có hai bông tuyết nào là như nhau.[1]



(1). Nancy C. Knight tại Trung tâm quốc gia nghiên cứu khí quyển ở Boulder Colorado, Mỹ, đã khám phá ra tập hợp các bông tuyết giống nhau đầu tiên. Chúng được tìm thấy vào ngày 1 tháng 11 năm 1986

Googol và Googolplex

Một googol là số 1 theo sau là một trăm số 0, tức là 10^{100}. Cái tên *googol* được nghĩ ra bởi người cháu trai chín tuổi của tác giả viết sách toán, Tiến sĩ Edward Kasner. Cậu bé này cũng đề nghị một số khác lớn hơn googol rất nhiều, *googolplex*, mà cậu miêu tả là số 1 theo sau là nhiều số 0 đến mức bạn sẽ viết mỏi cả tay. Định nghĩa toán học cho một googolplex là số 1 theo sau là một googol số 0, tức là 10^{googol}.

**10 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000
000 000 000 000**

Sử dụng các số lớn:

1) Nếu toàn bộ vũ trụ được lấp đầy bởi các hạt proton và electron sao cho không có chỗ trống nào còn sót lại, thì số các hạt sẽ là 10^{110}. Số này lớn hơn một googol, nhưng nhỏ hơn nhiều so với một googolplex.

2) Số lượng các hạt cát trên Coney Island[1] là khoảng 10^{20}.

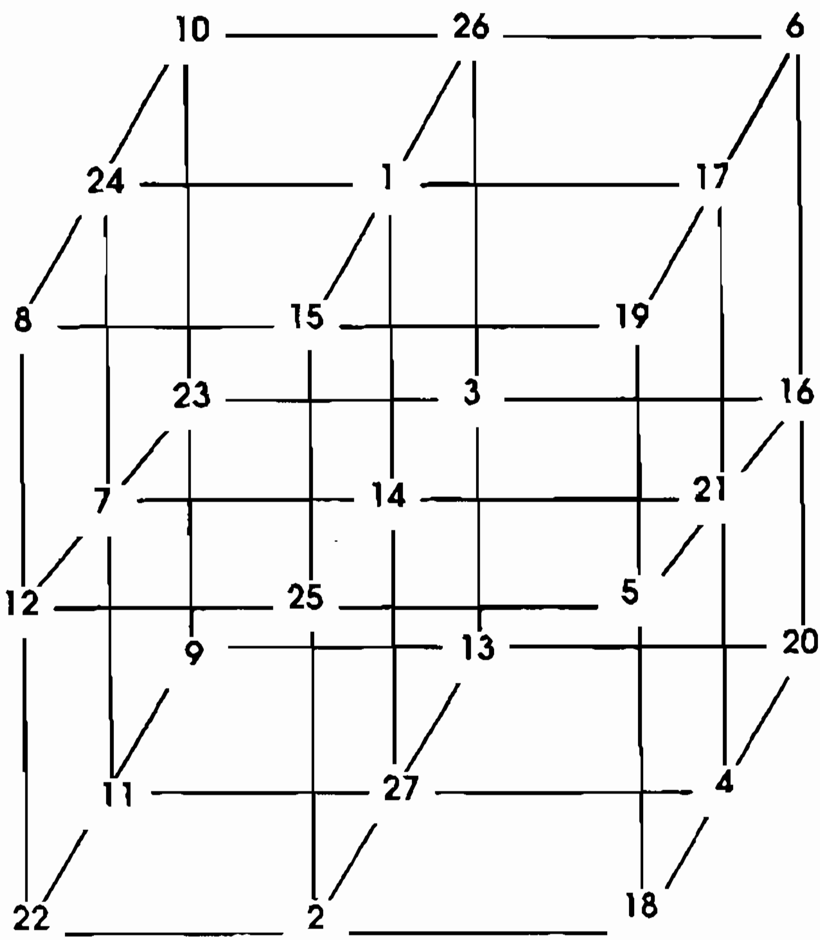
3) Số các từ được in ra kể từ khi quyển Kinh thánh Gutenberg được in (1456) cho đến những năm 1940 là khoảng 10^{16}.

---

(1). Coney Island: một bán đảo nằm ở cực nam Brooklyn, thành phố New York, Hoa Kỳ.

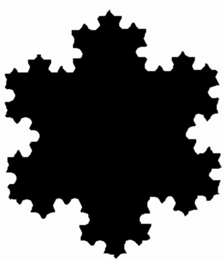
Ma phương khối

Khối ma phương 3 x 3 x 3 này là cách sắp xếp 27 số tự nhiên sao cho tổng các số trên mỗi hàng hay mỗi cột có ba số đều bằng 42.



Fractal - thật hay tưởng tượng?

Trong nhiều thế kỉ, các đối tượng và khái niệm của hình học Euclid (điểm, đường thẳng, mặt phẳng, không gian, hình vuông, hình tròn,...) được xem như là những thứ miêu tả thế giới mà chúng ta đang sống. Sự khám phá ra hình học phi Euclid đã mang lại cho chúng ta những đối tượng mới có thể dùng để miêu tả các hiện tượng của vũ trụ. Fractal là một trong số đó. Ngày nay, những hình fractal được coi là các bức ảnh miêu tả các sự vật, hiện tượng trong tự nhiên. Ý tưởng về fractal xuất hiện trong công trình của các nhà khoa học từ năm 1875 đến năm 1925. Chúng bị đặt cho cái tên là quái vật và bị cho là có ít giá trị khoa học. Ngày nay, chúng được biết đến dưới tên gọi *fractal* – thuật ngữ do Benoit Mandelbrot nghĩ ra vào năm 1975, ông là người đã có nhiều khám phá to lớn trong lĩnh vực này. Về mặt kĩ thuật, ***fractal** là một đối tượng có chi tiết không mất đi khi nó bị phóng to ra.* Trên thực tế, trông cấu trúc phóng to của fractal giống hệt như ban đầu.

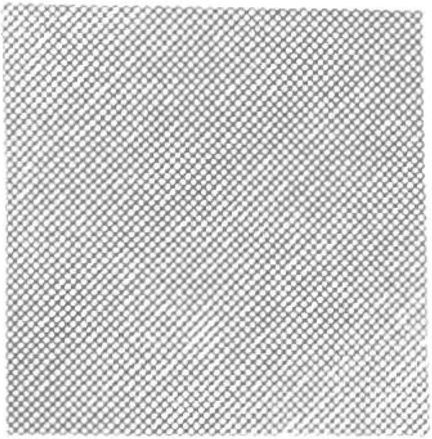


Đường bông tuyết[1] là một ví dụ về fractal tạo ra từ việc thêm các tam giác bằng nhau vào các cạnh của các tam giác đã có.

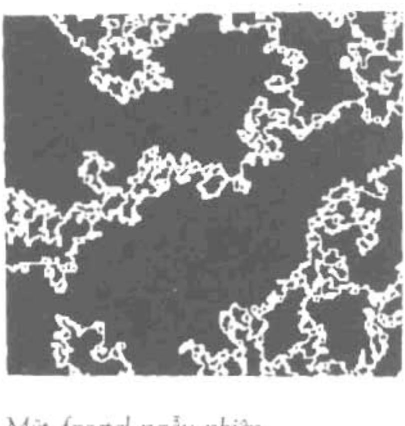
Trái ngược lại với fractal, đường tròn trông giống đường thẳng khi một phần nhỏ của nó được phóng to lên. Tuy nhiên, có hai loại fractal: *fractal hình học* lặp lại không ngừng một mẫu đồng nhất và *fractal ngẫu nhiên*. Các máy vi tính và đồ họa máy tính có nhiệm vụ làm những "quái vật" này sống lại bằng cách hầu như ngay lập tức tạo ra các fractal trên màn hình và từ đó biểu diễn những hình dạng kì dị của chúng, những thiết kế nghệ thuật hay những phông nền và hình ảnh chi tiết.

(1) Xem mục về đường bông tuyết để biết thêm thông tin

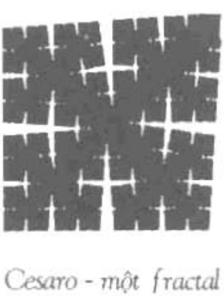
Người ta đã từng tưởng rằng các hình dạng trật tự trong hình học Euclid là những hình duy nhất có thể ứng dụng vào khoa học, nhưng với các hình dạng mới này, tự nhiên có thể được nhìn từ một góc độ khác. Các fractal hình thành nên một lĩnh vực mới trong toán học, đôi khi chúng gợi nhớ đến hình học của tự nhiên bởi các hình kì lạ và hỗn loạn của chúng miêu tả các hiện tượng như động đất, cây cối, vỏ cây, rễ gừng, đường bờ biển và có nhiều ứng dụng trong thiên văn học, kinh tế, khí tượng, kĩ thuật điện ảnh.



Đường Peano là một ví dụ về fractal và nó cũng là một đường cong có thể lấp đầy không gian. Trên một đường cong lấp đầy không gian, mỗi điểm trong một vùng đều được đi qua, do đó dần dần tô đen không gian. Hình vẽ bên thể hiện sự tô đen một phần.



Một fractal ngẫu nhiên

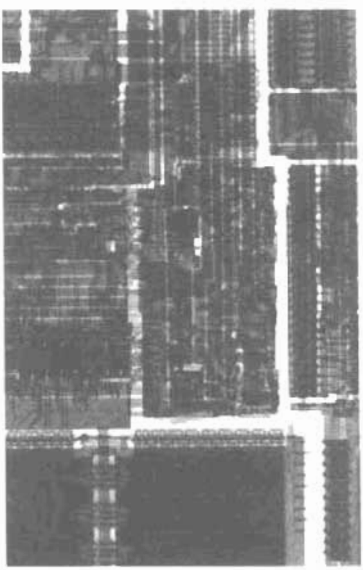


Đường Cesaro - một fractal

Na-nô giây - đo thời gian trên máy tính

Một xung điện cần thời gian một phần tỉ giây để đi được 20,3cm. Một phần tỉ giây được gọi là một na-nô giây. Ánh sáng đi được 30,5cm) trong 1 na-nô giây. Các máy tính ngày nay được xây dựng để thực hiện hàng triệu phép tính trong một giây. Để có thể cảm giác được một máy tính lớn có thể làm việc nhanh đến thế nào, chúng ta hãy cùng xét một nửa giây. Trong vòng nửa giây, máy tính có thể thực hiện những nhiệm vụ sau:

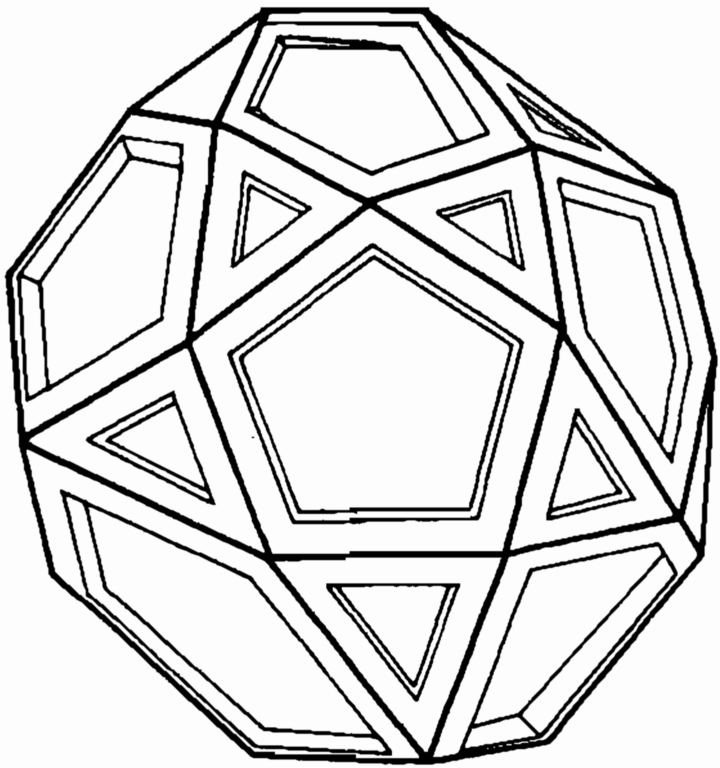
1) *Ghi nợ 200 séc vào 300 tài khoản ngân hàng khác nhau.*
2) *Kiểm tra điện tâm đồ của 100 bệnh nhân.*
3) *Chấm 150 000 câu trả lời của 3000 bài kiểm tra và đánh giá tính hợp lệ của mỗi câu.*
4) *Tính lương cho một công ty có 1000 nhân viên.*
5) *Và vẫn còn thời gian để thực hiện những nhiệm vụ khác.*



Mức độ nhanh của máy tính sẽ là không thể hình dung được nếu nó hoạt động bằng năng lượng ánh sáng chứ không phải năng lượng điện. Hệ đếm nào sẽ cần phải dùng để khai thác được công dụng của ánh sáng? Liệu nó có dựa trên số lượng các màu trên phổ của ánh sáng hay không? Hay là dựa vào một tính chất nào khác của ánh sáng?

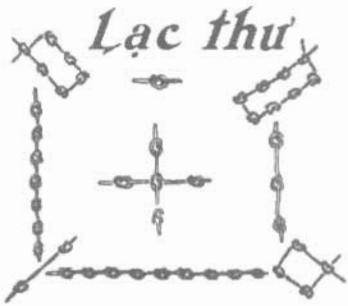
Vòm trắc địa của Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci say mê rất nhiều lĩnh vực nghiên cứu khác nhau và cả mối liên hệ giữa chúng. Toán học là một trong số đó. Ông dùng nhiều khái niệm trong hội họa, các thiết kế kiến trúc và phát minh của mình. Dưới đây là hình vẽ thể hiện vòm trắc địa mà ông đã phác thảo.



Ma phương

Các ma phương đã thu hút sự chú ý của con người từ hàng thế kỉ nay. Từ thời cổ đại, chúng đã được liên hệ với những thế lực siêu nhiên và thế giới thần kì. Những khai quật khảo cổ đã tìm thấy chúng trong những thành phố châu Á cổ đại. Trên thực tế, ghi nhận sớm nhất về sự có mặt của một ma phương là vào khoảng năm 2200 tr.C.N ở Trung Quốc. Nó có tên gọi là *Lạc thư* (lo-shu). Truyền thuyết kể rằng ma phương này được Vũ Đế nhìn thấy lần đầu tiên trên lưng một con thần quy bên bờ sông Hoàng Hà.



Các nút đen biểu trưng cho các số chẵn, còn các nút trắng biểu trưng cho các số lẻ. Trong ma phương này, số kì ảo của nó (tổng các số của một hàng, cột hay đường chéo bất kì) là 15.

Ở phương Tây, các ma phương lần đầu được nhắc đến vào năm 130 tr.C.N trong tác phẩm của Theon ở Smyrna. Vào thế kỉ IX, ma phương len lỏi vào thế giới của thiên văn học với việc các nhà thiên văn Ả rập dùng chúng trong các tính toán lá số tử vi. Cuối cùng, với các công trình của nhà toán học Hy Lạp Moschopoulos năm 1300 s.C.N, các ma phương cùng những tính chất của chúng đã lan khắp bán cầu Tây (đặc biệt trong suốt thời kì Phục hưng).

16	2	12
6	10	14
8	18	4

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA MA PHƯƠNG:

Bậc của ma phương được định nghĩa là số lượng các hàng hay các cột. Ví dụ: ma phương bên có bậc 3 vì nó có 3 hàng.

Sự thần kì của ma phương thể hiện ở tất cả các tính chất mà nó sở hữu. Một số tính chất như:

1) Mỗi hàng, cột hay đường chéo đều có tổng các số bằng nhau. Hằng số ma thuật này có thể tính bằng một trong các cách sau:

a) Lấy một ma phương bậc n và tìm giá trị của $\frac{1}{2}(n(n^2+1))$, trong đó ma phương được tạo thành từ các số tự nhiên 1, 2, 3,..., n^2.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Bậc 3. Số ma thuật $= \frac{1}{2}(3(3^2+1)) = 15$.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

15

15

b) Lấy một ma phương bất kì rồi bắt đầu từ góc bên trái của nó viết các số tự nhiên liên tiếp nhau lần lượt dọc theo mỗi hàng. Tổng của các số trên đường chéo nào cũng sẽ là số kì ảo.

2) Bất kì hai số nào (trong một hàng, cột, hay đường chéo) cách đều tâm ma phương đều bù nhau. Các số trong một ma phương gọi là bù nhau nếu tổng của chúng bằng với tổng của số bé nhất và lớn nhất trong ma phương đó.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

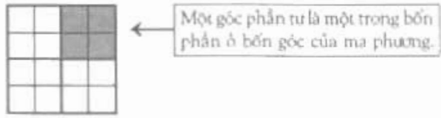
Ma phương này có các cặp số bù nhau sau: 8 và 2; 6 và 4; 3 và 7; 1 và 9.

CÁC CÁCH BIẾN MỘT MA PHƯƠNG SẴN CÓ THÀNH MỘT MA PHƯƠNG KHÁC:

3) Cộng hoặc trừ tất cả các số trong ma phương với cùng một số bất kì cho ta một ma phương mới.

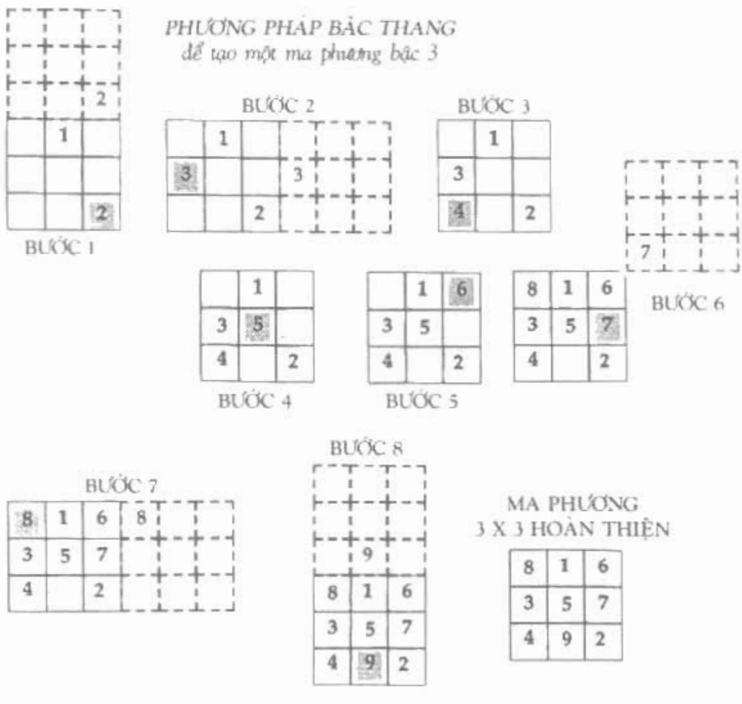
4) Nếu hai hàng và hai cột cách đều tâm ma phương đổi chỗ cho nhau thì ta vẫn nhận được một ma phương.

5) a) Đổi chỗ các góc phần tư của một ma phương bậc chẵn sẽ *tạo ra một ma phương mới.*



b) Đổi chỗ các góc phần tư và các hàng trong một ma phương bậc lẻ vẫn cho kết quả là một ma phương.

Con người đã viết về các ma phương nhiều hơn bất kì một sáng tạo toán học nào khác. Benjamin Franklin[1] cũng đã dành rất nhiều thời gian để nghiên cứu các phương pháp tạo thành ma phương. Quả là một thách thức không nhỏ khi bạn phải sắp xếp 25 số đếm đầu tiên thành một hình vuông 5 x 5 sao cho mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều có tổng các số bằng nhau. Đó chính là ma phương bậc 5. Bất kì ma phương



(1). Benjamin Franklin (17/01/1706 – 17/4/1790): một trong những nhà lập quốc nổi tiếng nhất của Hoa Kỳ.

nào có số lẻ các hàng hoặc cột đều là ma phương bậc lẻ. Nếu số các hàng hoặc cột là số chẵn thì ma phương có bậc chẵn. Một phương pháp chung để tạo ma phương bậc chẵn kích cỡ bất kì vẫn đang được tìm hiểu. Trong khi đó lại có một số phương pháp tổng quát có thể dùng để tạo ma phương bậc lẻ kích thước bất kì, trong đó phương pháp bậc thang, phát minh bởi La Loubere, là phương pháp nổi tiếng nhất trong giới những người say mê ma phương. Hình minh họa thể hiện cách tạo ra ma phương 3 x 3 bằng phương pháp này.

PHƯƠNG PHÁP BẬC THANG

1) Bắt đầu với số 1 ở ô vuông giữa của hàng trên cùng.

2) Số kế tiếp (số tự nhiên đứng ngay sau số 1, tức số 2) được đặt ở ô vuông chéo lên phía lên, trừ khi ô đó đã có số. Nếu ô vuông chéo lên này thuộc hình vuông tưởng tượng nằm ngoài ma phương, thì bạn hãy tìm vị trí tương ứng của nó trong ma phương và chuyển số vừa viết vào đó.

3) Nếu trong ma phương, ô vuông chéo lên trên đã có số, thì hãy đặt số tiếp theo vào ô vuông ngay bên dưới ô vừa viết, ví dụ như số 4 và số 7 ở bước 3 và bước 6.

4) Tiếp tục bước 2 và 3 để tìm vị trí cho các số còn lại của ma phương.

Giờ bạn hãy thử tạo ma phương 5 x 5 với 25 số đếm đầu tiên bằng phương pháp bậc thang. Sau đó, hãy kiểm tra một vài phương pháp biến đổi ma phương với ma phương vừa tạo được xem chúng hoạt động ra sao!

Dùng một trong số các ma phương mà bạn vừa tạo ra, nhân mỗi số của nó với một hằng số bất kì mà bạn thích. Liệu hình vuông mới nhận được có còn là ma phương hay không?

Tuy không có phương pháp tổng quát để xây dựng ma phương bậc chẵn, nhưng nhiều phương pháp khác nhau đã được phát minh nhằm xây dựng một ma phương bậc chẵn cụ thể.

Ví dụ: Phương pháp đường chéo chỉ áp dụng cho các ma phương 4 x 4.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

→

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Các bước xây dựng ma phương:
Bắt đầu bằng việc đặt lần lượt các số tự nhiên liên tiếp vào các hàng của ma phương. Với mỗi số trên đường chéo, đổi chỗ nó và số bù của nó cho nhau.

Với ma phương 4 x 4, các hàng hoặc các cột đều có thể đổi chỗ cho nhau mà vẫn cho ta một ma phương. Nếu đổi chỗ các góc phần tư cũng vậy, ta sẽ nhận được một ma phương mới.

Hãy thử xem bạn có thể nghĩ ra phương pháp của riêng mình để xây dựng các ma phương bậc chẵn khác hay không nhé, hoặc là thử khám phá một phương pháp chung cho tất cả các ma phương bậc chẵn.[1] Và biết đâu bạn còn muốn nghiên cứu sâu hơn về các phương pháp xây dựng ma phương bậc lẻ đã được phát minh ra!

---

(1). Rất nhiều người đã cống hiến thời gian và sức lực để tìm ra một phương pháp tổng quát xây dựng các ma phương bậc chẵn. Hyman Sirchuck ở Howell, New Jersey, Mỹ, tuyên bố đã nghĩ ra được một phương pháp để tạo các ma phương bậc chẵn.

Ma phương đặc biệt

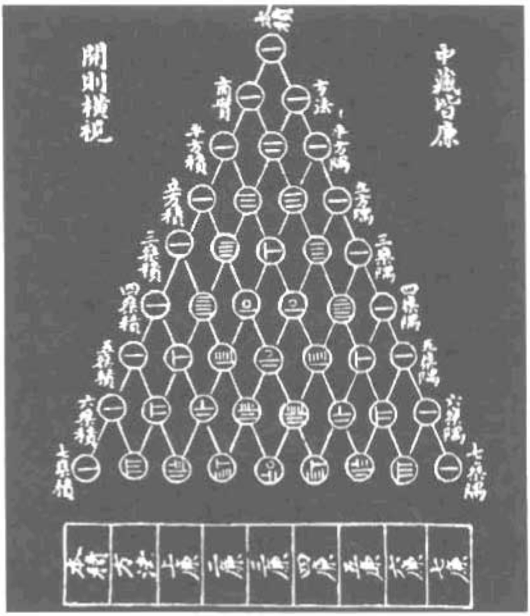
Dãy Fibonacci là dãy số 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... trong đó mỗi số là tổng của hai số ngay trước nó. Khi các số Fibonacci 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 được xếp tương ứng với các số đếm 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, một hình vuông mới sẽ hình thành. Nó không có các tính chất của ma phương, nhưng tổng của tích các số trong mỗi hàng (9078 + 9240 + 9360 = 27678) bằng tổng của tích các số trong mỗi cột (9256 + 9072 + 9350 = 27678).

8	1	6
3	5	7
4	9	2

89	3	34
8	21	55
13	144	5

Tam giác Trung Quốc

Toán học hiện diện ở khắp mọi nơi trên thế giới. Lịch sử đã chứng minh rằng con người đã ứng dụng và có những phát minh về toán học không phải chỉ ở riêng một vùng nào đó, ví dụ như phiên bản Trung Quốc của tam giác Pascal. Mặc dù Pascal đã có những phát hiện đáng kể về tam giác số mang tên ông, nhưng tam giác đó đã từng xuất hiện trong một cuốn sách được in vào khoảng năm 1303, ba trăm lẻ hai năm trước khi Pascal chào đời![1]



1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

. . . . . .

(1). Xem mục **Tam giác Pascal** (trang 42).

Cái chết của Archimedes

Archimedes ở Syracuse (287 tr.C.N - 212 tr.C.N) là nhà toán học hàng đầu của Hy Lạp cổ đại.

Trong suốt cuộc chiến tranh Punic lần thứ hai[1], Syracuse bị người La Mã bao vây từ năm 214 tr.C.N cho đến năm 212 tr.C.N. Vào thời điểm đó, Archimedes đã sáng chế ra các vũ khí phòng thủ rất tài tình như máy bắn đá, ròng rọc và móc câu để kéo và phá tan thuyền của quân La Mã, kính parabol để đốt cháy thuyền. Những vũ khí này đã kìm chân quân La Mã trong gần ba năm. Mặc dù vậy, Syracuse cuối cùng vẫn rơi vào tay quân La Mã. Marcus Claudius Marcellus, vị chỉ huy trưởng của quân La Mã, đã ra lệnh cho quân lính không được hãm hại Archimedes. Nhưng một tên lính La Mã đã đột nhập vào nhà của Archimedes và thấy ông đang mải mê làm toán mà không hề nhận ra sự xuất hiện của hắn. Tên lính ra lệnh cho ông phải ngừng lại, nhưng Archimedes không chút để ý đến lời hắn nói. Giận dữ, tên lính đã dùng kiếm đâm chết Archimedes.

(1). Cuộc chiến kéo dài từ năm 218 đến năm 201 tr.C.N giữa các vùng Tây và Đông Địa Trung Hải

Một thế giới phi Euclid

Thế kỉ XIX là thời kì của những tư tưởng cách mạng trong chính trị, nghệ thuật, khoa học cũng như sự phát triển của những hình học phi Euclid trong toán học. Những khám phá về hình học phi Euclid đã đánh dấu sự khởi đầu của toán học hiện đại, cũng giống như trường phái hội họa trừu tượng đã đánh dấu sự khởi đầu của nghệ thuật hiện đại.

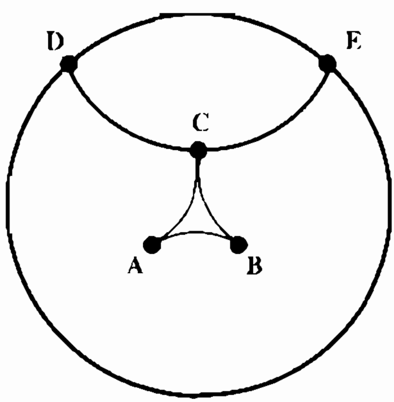
Trong suốt thời kì này, hình học hypebol (một trong số các hình học phi Euclid) đã được phát minh một cách độc lập bởi nhà toán học người Nga Nicolai Lobachevsky (1793 – 1856) và nhà toán học người Hungary Johann Bolyai (1802 – 1860).

Một thiết kế trừu tượng của mô hình hình học hypebol Poincaré.

Chúng ta thấy rằng hình học hypebol, giống như những hình học phi Euclid khác, mô tả các tính chất hoàn toàn xa lạ bởi mỗi khi nghe nhắc đến hình học, chúng ta thường nghĩ ngay đến hình học Euclid.

Chẳng hạn, trong hình học hypebol, đường không đơn giản là thẳng và các **đường song song** không cách đều nhau dù chúng cũng không giao nhau, bởi vì chúng chỉ tiệm cận nhau mà thôi. Khi nghiên cứu chi tiết các hình học phi Euclid, người ta thấy rằng chúng quả thực có thể đưa ra những mô tả chính xác hơn về các hiện tượng trong vũ trụ của chúng ta. Kết quả là *những thế giới khác* hình thành tại nơi mà các hình học này có thể tồn tại.

Một thế giới như vậy là mô hình do nhà toán học người Pháp Henri Poincaré (1854 – 1912) tạo ra. Vũ trụ tưởng tượng của ông bị giới hạn bởi một vòng tròn (hãy hình dung đó là một khối cầu nếu là trong không gian ba chiều) có nhiệt độ ở tâm là 0^{0} tuyệt đối. Khi một người di chuyển ra khỏi tâm, nhiệt độ xung quanh tăng lên. Giả sử rằng các vật thể và cư dân sống tại thế giới này không hề cảm nhận được sự thay đổi nhiệt độ, nhưng kích thước của mỗi vật đều thay đổi khi nó di chuyển. Trên thực tế, mỗi vật và cơ thể sống trở nên to hơn khi nó tiến gần đến tâm và nhỏ lại tương ứng như vậy khi nó tiến ra biên. Vì *mọi thứ* đều thay đổi kích cỡ, nên một người sẽ không biết và không thể kiểm tra được sự thay đổi kích thước này. Điều đó có nghĩa là bước chân của một người sẽ ngắn hơn khi người đó tiến lại biên và như vậy, người đó sẽ không ở gần đường biên hơn so với trước khi tiến lại biên. Hiện tượng này làm cho thế giới hiện ra là vô cùng và ở đây khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm là một đường cong, vì để đi từ A đến B thì số bước chân sẽ ít hơn (vì độ



dài bước chân lớn hơn) nếu chúng ta di chuyển lại gần tâm theo một đường cong. Đây là thế giới mà trong đó các cạnh của tam giác sẽ là các đoạn cong, như tam giác ABC trong hình vẽ. Thậm chí, các đường song song nhìn cũng sẽ khác. Đường DCE song song với đường AB vì chúng không bao giờ cắt nhau.

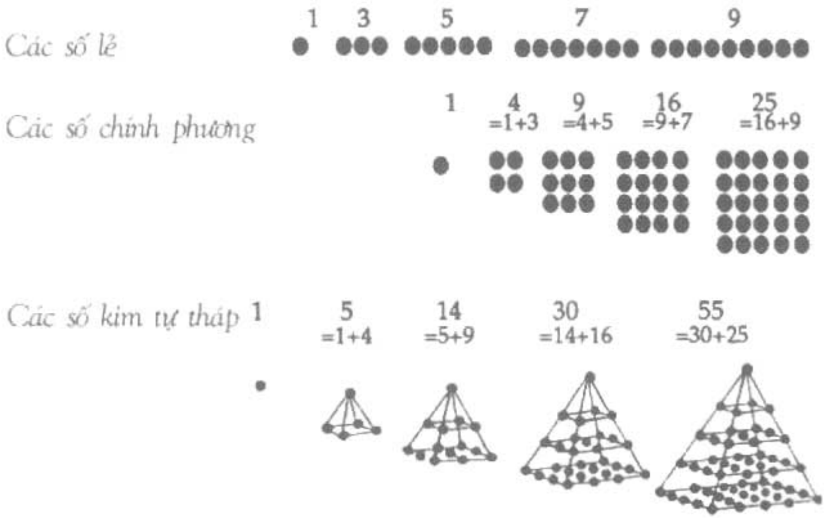
Thế giới của Poincaré có thể miêu tả chính thế giới mà chúng ta đang sống. Nếu chúng ta nhìn vào vị trí của mình trong vũ trụ và nếu chúng ta có thể đi lại những khoảng cách đo bằng năm ánh sáng, thì có lẽ chúng ta có thể khám phá ra những thay đổi trong kích thước cơ thể mình. Trong thuyết tương đối của Einstein, chiều dài của một chiếc thước ngắn lại khi nó có tốc độ bằng với tốc độ ánh sáng.

Henri Poincaré

Poincaré là một *nhà tư tưởng độc đáo*. Sự đa dạng trong các chủ đề mà ông giảng dạy khi là giáo sư tại trường Đại học Sorbonne ở Paris (từ năm 1881 đến năm 1912) đã chứng minh cho nhận định này. Các công trình và ý tưởng của ông bao trùm nhiều chủ đề như điện học, lí thuyết thế, thủy động lực học, nhiệt động lực học, xác suất, cơ học thiên thể, chuỗi phân kì, khai triển tiệm cận, các bất biến tích phân, sự ổn định quỹ đạo, hình dạng của các thiên thể và nhiều ngành khoa học khác. Có thể khẳng định rằng những công trình của ông đã khơi nguồn tư tưởng toán học của thế kỉ XX.

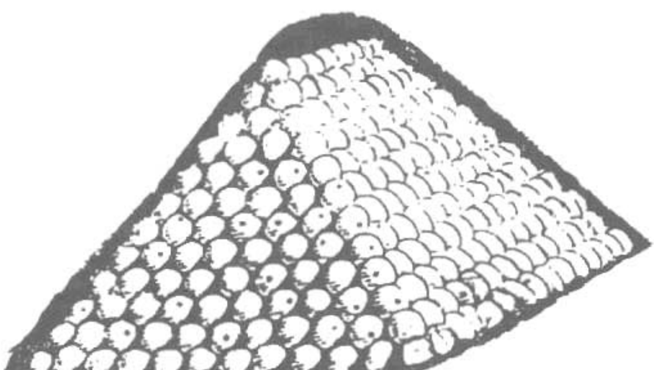
Đạn pháo và các kim tự tháp

Các số chính phương, số kim tự tháp và tổng của chúng có thể sử dụng để xác định số lượng đạn pháo trong một kim tự tháp đáy hình vuông.



Bạn hãy tìm hiểu các mô hình của những số trên.

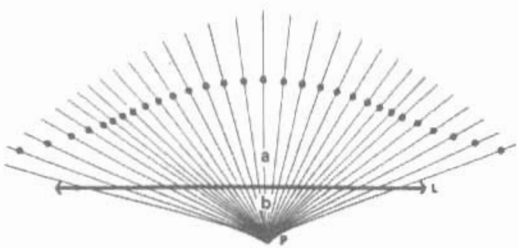
Có bao nhiêu quả đạn pháo trong khối hình dưới?



Đường concôit của Nicomedes

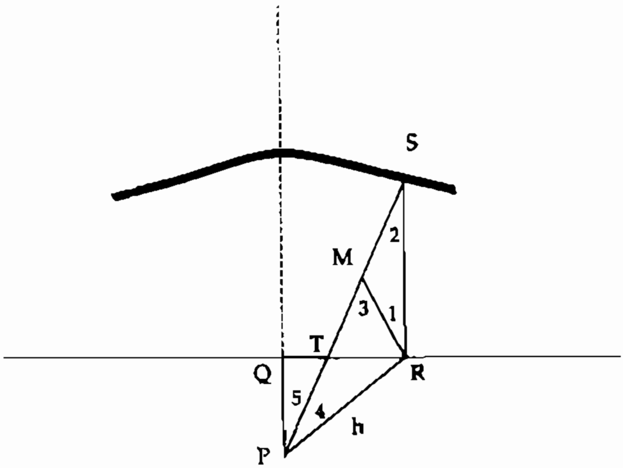
Thông thường, việc tìm kiếm lời giải cho bài toán nào đó dẫn đến việc tìm ra những khái niệm và khám phá mới. Ba bài toán dựng hình nổi tiếng thời cổ đại: *chia ba một góc* (chia một góc thành ba góc bằng nhau), *nhân đôi khối lập phương* (dựng một khối lập phương có thể tích gấp hai lần thể tích một khối lập phương cho trước) và *cầu phương hình tròn* (dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích của một hình tròn cho trước) đã khơi dậy nhiều suy ngẫm toán học. Kết quả là rất nhiều ý tưởng đã được khám phá nhằm giải quyết các bài toán trên. Mặc dù người ta đã chứng minh được rằng ba bài toán cổ này là không thể giải được nếu chỉ dùng *thước kẻ* và *compa*, nhưng chúng có thể giải được bằng những phương tiện khác mà một trong số đó là đường *concôit*.

Concôit là một trong số các đường cong thời cổ đại do *Nicomedes* (khoảng năm 200 tr.C.N) nghĩ ra và dùng để nhân đôi khối lập phương và chia ba một góc.



Để dựng một đường concôit, ta bắt đầu với đường thẳng L và điểm P (gọi là cực). Kẻ các tia đi qua P và cắt L. Đánh dấu một khoảng cách a cố định trên mỗi tia vừa kẻ. Quỹ tích các điểm này chính là đường concôit. Độ cong của đường concôit phụ thuộc vào tương quan độ lớn của a và b, tức là $a = b$, $a < b$, hay $a > b$. Phương trình ở tọa độ cực của đường concôit là $r = a + b \sec\Theta$.

Để chia ba $\widehat{P}$, ta dựng tam giác vuông QPR sao cho $\widehat{P}$ là một góc của hình vuông đó. Vẽ một đường concôit với cực P và đường $\overleftrightarrow{QR}$ chính là đường thẳng cố định L. Chọn khoảng cách cố định từ đường thẳng $\overleftrightarrow{QR}$ là 2h, trong đó h = | PR |. Tại điểm R, dựng đoạn thẳng $\overline{RS} \perp \overline{QR}$, điểm S nằm trên đường concôit. Khi đó, $\widehat{QPT}$ có độ lớn bằng một phần ba $\widehat{QPR}$.



Chứng minh:

Gọi M là trung điểm của $\overline{TS}$, khi đó | RM | = h vì ΔSRT là tam giác vuông, nên trung điểm của cạnh huyền cách đều hai đỉnh góc nhọn của nó.

$\widehat{R}_1 = \widehat{S}_2 = k^o$ vì ΔMRS cân tại M. | MS | = | MR | = h.
$\widehat{M}_3 = 2k^o$, do $\widehat{M}_3$ là góc ngoài của Δ SMR.
Ngoài ra, $\widehat{M}_3 = \widehat{P}_4 = 2k^o$ vì | MR | = | PR | = h.

$\widehat{P}_5 = \widehat{S}_2 = k^o$ vì $\overline{PQ}$ // $\overline{RS}$ (do các đoạn $\overline{PQ}$ và $\overline{SR}$ là đồng phẳng và cùng vuông góc với đường thẳng $\overleftrightarrow{QR}$).

Vì vậy, $\widehat{QPR} = 3k^o$ và $1/3(\widehat{QPR}) = k^o = \widehat{P}_5$.

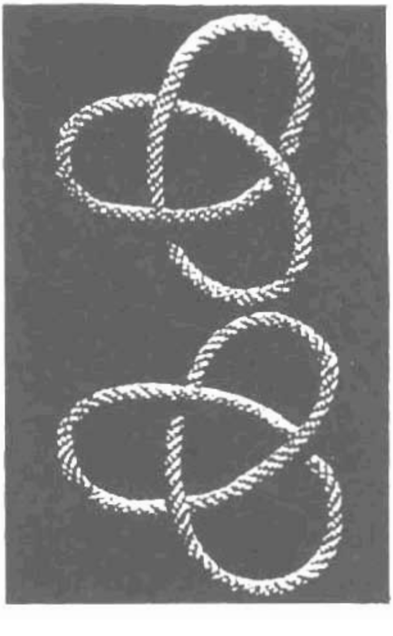
Như vậy, chúng ta đã chia ba được $\widehat{QPR}$.

Nút ba lá

Thất nút là một việc làm quen thuộc với hầu hết chúng ta kể từ khi chúng ta thành thạo việc thất dây giày. Tất nhiên, thắt nút có thể là một nghệ thuật, đặc biệt khi chúng ta nhìn một thủy thủ chằng buộc dây trên thuyền. Nhưng chủ đề về các nút thắt cũng là một ý tưởng toán học trong chuyên ngành tô-pô. Chúng hình thành một lĩnh vực tương đối mới. Điều quan trọng nhất đã được chứng minh về các nút thắt cho đến nay là *một nút thắt không thể tồn tại trong không gian lớn hơn ba chiều.*

Cách tạo nút ba lá

Để tạo một *nút ba lá* như hình dưới, bạn hãy lấy một dải giấy dài và xoắn nó 3 lần nửa vòng. Nối hai đầu của nó lại với nhau bằng băng dính. Dùng kéo cắt theo đường nằm giữa hai mép dọc theo toàn bộ dải giấy đó. Sau khi cắt xong, bạn sẽ nhận được một băng giấy mới với nút ba lá trong đó.



Ma phương của Benjamin Franklin

Ma phương của Benjamin Franklin đặc trưng bởi một loạt các tính chất kì lạ khác nhau ngoài những tính chất thông thường của một ma phương[1]. Trong ma phương này của ông, mỗi hàng có tổng các số bằng 260. Mỗi một nửa hàng có tổng các số là 130. Mỗi đường chéo gấp khúc tô sẫm gồm bốn số ở đoạn đi lên và bốn số ở đoạn đi xuống có tổng các số trên đó bằng 260. Tổng của bốn số bất kì cách đều tâm ma phương là 130. Tổng của bốn số ở bốn góc với bốn số ở trung tâm ma phương là 260. Và tổng của bốn số trong một hình vuông nhỏ 2 x 2 bất kì là 130.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

(1). Xem mục **Ma phương** (trang 84).

Số vô tỉ và định lí Pythagoras

Số vô tỉ là số không thể biểu diễn được dưới dạng một số thập phân hữu hạn hoặc tuần hoàn.

<u>*Ví dụ:*</u>

$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; π ; $\sqrt{48}$; e; $\sqrt{235}$; φ;...

Khi chúng ta muốn viết một số vô tỉ dưới dạng thập phân, nó sẽ là một số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

<u>*Ví dụ:*</u>

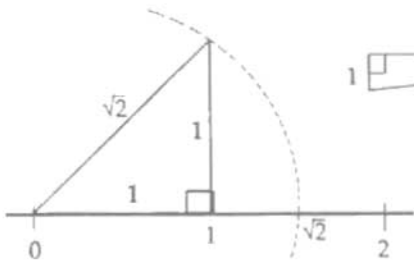
$\sqrt{2}$	≈ 1,41421356...	
$\sqrt{235}$	≈ 15,3297097...	
π	≈ 3,141592653...	
e	≈ 2,71828182...	
φ	≈ 1,61803398...	– tỉ lệ vàng.

Hàng nghìn năm nay, các nhà toán học đã phát minh ra nhiều phương pháp để có được xấp xỉ thập phân của số vô tỉ chính xác hơn nữa. Nhờ sử dụng các siêu máy tính và các chuỗi số vô hạn, các xấp xỉ này có thể được tìm ra đến mức độ chính xác như người tính mong muốn. Nhìn lại quãng thời gian và những nỗ lực đã bỏ ra để nghĩ ra những phương pháp này, ta sẽ phải ngạc nhiên vì vị trí chính xác trên đường thẳng thực của rất nhiều số vô tỉ có thể được tìm ra nhờ định lí Pythagoras tuyệt diệu. Các nhà toán học Hy Lạp cổ đại đã chứng minh định lí Pythagoras[1] và dùng nó để dựng các độ dài vô tỉ một cách chính xác.

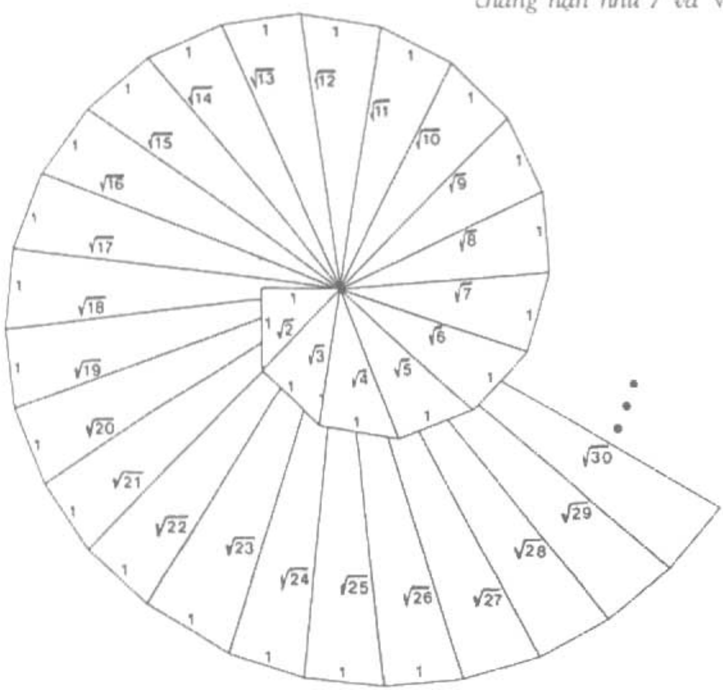
---

*(1) Xem mục **Định lí Pythagoras** (trang 5). Chú ý rằng số π và e không thể tìm được nếu chỉ dùng thước kẻ và compa, vì ngoài việc là số vô tỉ chúng còn là các số siêu việt.*

Để xác định vị trí của $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$,... trên đường thẳng thực, ta dựng các tam giác vuông với cạnh huyền có độ dài bằng những số này. Sau đó, dùng compa đo và vẽ một cung tròn để tìm vị trí của nó trên đường thẳng thực như minh họa bên dưới.



Như ở trong hình vẽ này mô tả, để dựng độ dài $\sqrt{52}$, người ta có thể dùng các độ dài $\sqrt{51}$ và 1, hoặc tìm một cách dựng sử dụng các độ dài khác, chẳng hạn như 7 và $\sqrt{3}$.



Số nguyên tố

Một số được gọi là *nguyên tố* nếu nó là số tự nhiên lớn hơn 1 và chỉ có hai ước số là 1 và chính nó.

Vào lúc 9 giờ tối ngày 30 tháng 10 năm 1978, con số trên (xem hình vẽ) là số nguyên tố lớn nhất được biết đến cho tới thời khắc đó. Sau 1800 giờ máy tính tính toán, Laura Nickel và Curt Noll (hai học sinh Phổ thông Trung học ở Hayward, California) đã tìm ra số nguyên tố $2^{21701} - 1$. Tiếp tục tìm kiếm một mình, Curt Noll đã khám phá ra số nguyên tố lớn hơn, số $2^{23209} - 1$ một vài tháng sau đó. Vào tháng 5 năm 1979, Harry Nelson tại Livermore Lab[1] tìm ra số nguyên tố còn lớn hơn số của Noll rất nhiều, $2^{44497} - 1$.

Mặc dù các máy tính ngày nay đã được lập trình để xác định các số nguyên tố, nhưng nhà toán học Hy Lạp Eratosthenes (275 - 194 tr.C.N) mới chính là người đã phát minh ra kĩ thuật

(1). Phòng thí nghiệm nghiên cứu khoa học do Đại học California thành lập.

sàng số nguyên tố để tìm ra các số nguyên tố nhỏ hơn một số cho trước. Bảng dưới đây có các số được khoanh tròn là những số nguyên tố nhỏ hơn 100.

Sàng Eratossthenes

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Các bước sàng số nguyên tố:

1) *Số 1 bị bỏ đi vì theo định nghĩa nó không phải là số nguyên tố.*
2) *Khoanh số 2, nó là số nguyên tố dương chẵn nhỏ nhất. Sau đó, bỏ đi tất cả các số chẵn, vì chúng đều là bội của 2.*
3) *Khoanh số 3, số nguyên tố tiếp theo. Bỏ đi tất cả các số là bội của 3. Một số số có thể đã bị gạch bỏ rồi, vì chúng cũng là bội của 2.*
4) *Khoanh số tiếp theo, số 5. Gạch bỏ tất cả các bội số của 5.*
5) *Tiếp tục quá trình cho đến khi tất cả các số từ 1 đến 100 đều hoặc được khoanh, hoặc đã bị gạch bỏ.*

Hình chữ nhật vàng

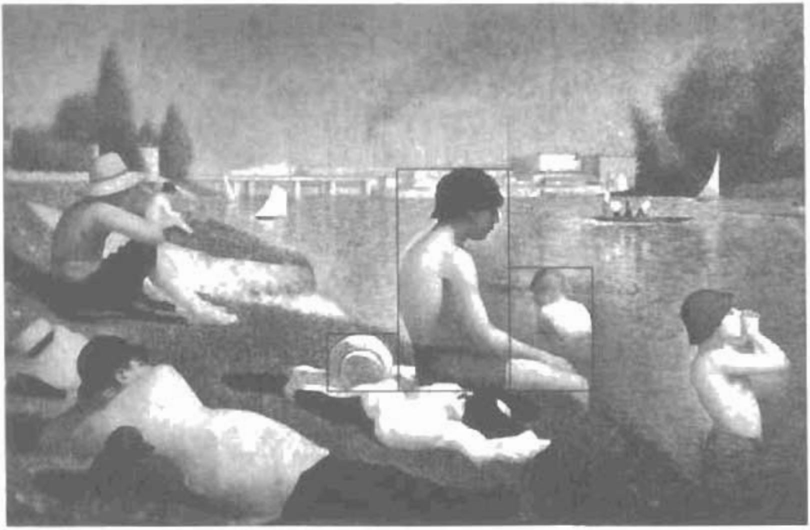
Hình chữ nhật vàng là một đối tượng toán học tuyệt đẹp và rất thú vị, vượt ra ngoài cả lĩnh vực toán học. Được tìm thấy trong nghệ thuật, kiến trúc, tự nhiên và thậm chí trong quảng cáo, mức độ phổ biến của nó không phải là một sự tình cờ. Các kiểm tra tâm lí đã chỉ ra rằng hình chữ nhật vàng là một trong số những hình chữ nhật nhìn dễ chịu nhất đối với mắt của con người.

Các kiến trúc sư Hy Lạp cổ đại thế kỉ V tr.C.N đã nhận thức về tác dụng tạo ra tính hài hòa, cân đối của hình chữ nhật vàng. Đền thờ Parthenon là ứng dụng đầu tiên của nó trong kiến trúc. Người Hy Lạp cổ đại đã có kiến thức về tỉ lệ vàng, cách xây dựng, xấp xỉ nó và cả cách dùng nó để dựng hình chữ nhật vàng. *Tỉ lệ vàng, ø (phi)*, không phải ngẫu nhiên là ba chữ cái đầu tiên của Phidias, nhà điêu khắc Hy Lạp nổi tiếng. Phidias được cho là đã dùng tỉ lệ vàng và hình chữ nhật vàng trong các tác phẩm của mình. Các môn đồ của Pythagoras hẳn đã chọn hình sao năm cánh là biểu tượng về cấp bậc của họ vì mối quan hệ của nó với tỉ lệ vàng.

Đền thờ Parthenon ở Aten, Hy Lạp.

Bên cạnh những ảnh hưởng trong kiến trúc, hình chữ nhật vàng cũng hiện diện trong hội họa. Trong bản luận *De Divina Proportione (Về các tỉ lệ thần thánh)* năm 1509 của Luca Pacioli, Leonardo da Vinci đã minh họa tỉ lệ vàng cho phác thảo về cơ thể người. Việc sử dụng tỉ lệ vàng trong hội họa được nhắc đến như là kĩ thuật về *cân đối động*.

Albrecht Dürer, George Seurat, Pietter Mondrian, Leonardo da Vinci, Salvador Dali, George Bellows đều sử dụng hình chữ nhật vàng trong một số tác phẩm của họ để tạo ra sự cân đối động.



Bức tranh *Bathers (Những người tắm sông)* của họa sĩ trường phái ấn tượng George Seurat. Có ba tỉ lệ vàng trong bức tranh.

Khi số trung bình nhân được xác định trên đoạn thẳng AC cho trước, tỉ lệ vàng[1] được lập nên bằng công thức trung bình nhân như sau:

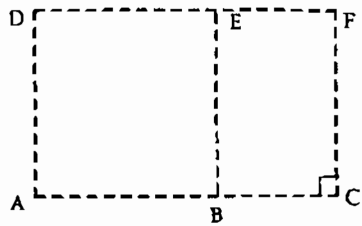
$$(|AC| / |AB|) = (|AB| / |BC|),$$

khi đó $|AB|$ *là tỉ lệ vàng.*

A ———————————— B ———————— C

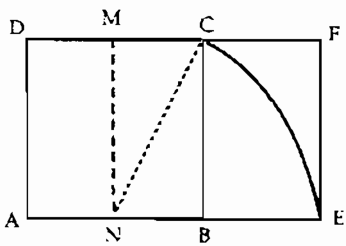
(1) Để xác định giá trị của tỉ lệ vàng, người ta phải giải phương trình: $(1/x) = (x/(1-x))$, trong đó $x = |AB|$, $|AC| = 1$, còn $|BC| = (1-x)$. Tỉ lệ vàng $|AC| / |AB|$ hoặc $|AB| / |BC|$ sẽ bằng $[(1 + \sqrt{5})/2] \approx 1{,}6$.

Khi một đoạn thẳng đã được chia theo tỉ lệ vàng, sẽ dễ dàng dựng được hình chữ nhật vàng như sau:



1) Cho đoạn thẳng $\overline{AC}$, trong đó B chia đoạn $\overline{AC}$ thành tỉ lệ vàng. Dựng hình vuông ABED.
2) Dựng đoạn $\overline{CF}$ vuông góc với $\overline{AC}$.
3) Kéo dài tia $\overrightarrow{DE}$ sao cho tia $\overrightarrow{DE}$ giao tia $\overrightarrow{CF}$ tại điểm F. Khi đó, ADFC là một hình chữ nhật vàng.

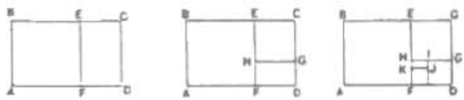
Một hình chữ nhật vàng cũng có thể dựng được mà không cần tỉ lệ vàng bằng cách sau:



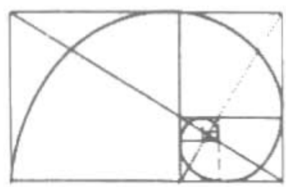
1) Dựng một hình vuông bất kì, ABCD.
2) Chia đôi hình vuông với đoạn thẳng $\overline{MN}$.
3) Dùng compa vẽ cung $\overset{\frown}{EC}$ bằng cách lấy tâm là N và bán kính là $|CN|$.
4) Kéo dài tia AB cho đến khi nó giao cung vừa vẽ tại điểm E.
5) Kéo dài tia $\overrightarrow{DC}$.
6) Dựng đoạn thẳng $\overline{EF}$ vuông góc với đoạn $\overline{AE}$ sao cho

tia $\overrightarrow{DC}$ giao tia $\overrightarrow{EF}$ tại điểm F. Khi đó, ADFE là một hình chữ nhật vàng.

Hình chữ nhật vàng cũng *tự sinh*. Nếu có hình chữ nhật vàng ABCD, hình chữ nhật vàng ECDF có thể dễ dàng dựng được bằng cách vẽ hình vuông ABEF. Sau đó, hình chữ vàng DGHF dựng được bằng cách vẽ hình vuông ECGH. Quá trình này có thể tiếp tục mãi mãi.



Dùng dãy vô hạn các hình chữ nhật vàng lồng nhau này, ta có thể vẽ được *đường xoắn ốc đẳng giác* (còn được gọi là *đường xoắn ốc lôgarit*). Sử dụng compa và các hình vuông của những hình chữ nhật vàng, vẽ các cung là một phần tư đường tròn nội tiếp trong những hình vuông đó. Các cung này sẽ hình thành đường xoắn ốc đẳng giác.

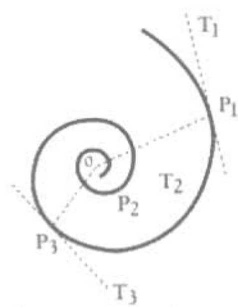


CHÚ Ý:

Hình chữ nhật vàng liên tiếp sinh ra các hình chữ nhật vàng khác, do đó kết quả nhận được là đường xoắn ốc đẳng giác. Điểm giao của các đường chéo như trong hình vẽ là cực, hay tâm của đường xoắn ốc.

O là tâm của đường xoắn ốc.

Bán kính của đường xoắn ốc là một đoạn thẳng có một đầu mút là O, đầu mút còn lại là một điểm bất kì trên đường xoắn ốc.



Lưu ý rằng mỗi tiếp tuyến tại một điểm trên đường xoắn ốc cùng với bán kính tại điểm đó tạo nên một góc, ví dụ góc T_1P_1O. Đường xoắn ốc là đẳng giác nếu tất cả các góc như vậy đều bằng nhau.

Nó còn được gọi là đường xoắn ốc lôgarit bởi vì nó lớn lên theo tỉ lệ nhân, tức là lũy thừa của một số nào đó, trong đó lũy thừa hay số mũ chính là tên gọi khác cho lôgarit.

Đường xoắn ốc đẳng giác là loại xoắn ốc duy nhất không thay đổi hình dạng khi lớn lên.

Trong tự nhiên có rất nhiều dạng hình kín: hình vuông, lục giác, hình tròn, tam giác. Hình chữ nhật vàng và đường xoắn ốc đẳng giác là hai trong số những hình dễ nhìn nhất về mặt thẩm mĩ. Dấu ấn của đường xoắn ốc và hình chữ nhật vàng được tìm thấy ở sao biển, vỏ sò, con cúc, ốc anh vũ, sự sắp xếp của những hạt giống, quả thông, quả dứa và thậm chí là quả trứng.

Thú vị không kém là cách thức tỉ lệ vàng liên hệ với dãy số Fibonacci. Giới hạn của dãy số gồm các tỉ lệ của hai số liên tiếp nhau trong dãy Fibonacci – (1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; …; $[F_{n\ 1} + F_{n\ 2}]$;…) – là một tỉ lệ vàng, *ø*.

$$\frac{1}{1};\ \frac{1}{1};\ \frac{2}{2};\ \frac{3}{3};\ \frac{5}{5};\ \frac{8}{8};\ \frac{13}{13};\ \frac{21}{21};\ \frac{34}{34};\ \ldots;\ \frac{F_{n+1}}{F_n} \longrightarrow \varphi$$

$$1;\ \ 2;\ \ 1{,}5;\ \ 1{,}6;\ \ 1{,}625;\ \ 1{,}\overline{615384};\ \ 1{,}\overline{619047};\ \ldots$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6$$

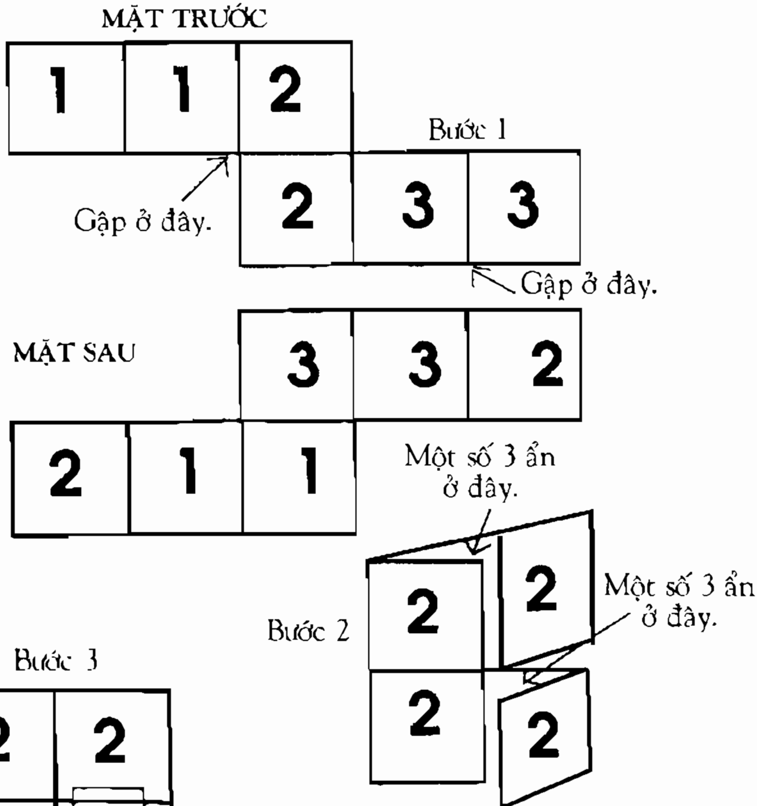
Bên cạnh sự hiện diện trong nghệ thuật, kiến trúc và tự nhiên, hình chữ nhật vàng ngày nay thậm chí còn được dùng trong quảng cáo và buôn bán. Rất nhiều công-ten-nơ đựng hàng có hình dạng giống hình chữ nhật vàng nhằm thu hút được thị hiếu thẩm mĩ của công chúng. Trên thực tế, các thẻ tín dụng tiêu chuẩn cũng gần như là một hình chữ nhật vàng.

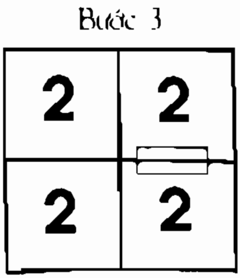
Hình chữ nhật vàng còn liên quan với các ý tưởng toán học khác nữa, chẳng hạn như chuỗi vô hạn, đại số, thập giác đều nội tiếp, các khối Platon, các đường xoắn ốc đẳng giác và lôgarit, giới hạn, tam giác vàng và những hình sao năm cánh.

Tạo một tri-tetra flexagon

Theo nghĩa rộng thì các flexagon có thể coi như là một loại xếp hình tô-pô. Chúng là những hình được tạo ra từ một mảnh giấy có nhiều mặt khác nhau, có thể xem được sau một số các bước gập.

Mảnh giấy bên dưới được gọi là một tri-tetra flexagon. **Tri** (tức là 3) là số các mặt, còn **tetra** (tức là 4) là số các cạnh của nó.

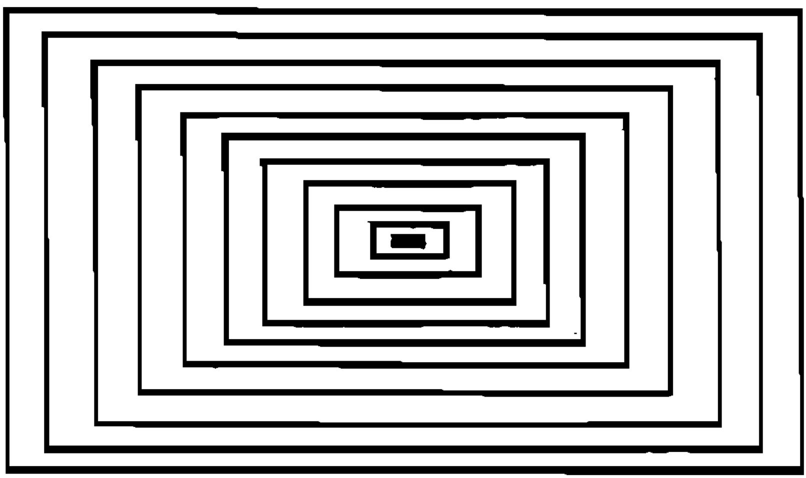




Bây giờ, ở mặt trước tất cả các số đều là 2, còn ở mặt sau tất cả các số đều là 1.
Để các số 3 hiện ra, gập cong dọc theo nếp giấy ngang.

Tìm kiếm vô hạn trong hữu hạn

Bạn có thể hình dung **vô hạn** là gì không? **Vô hạn** là một lượng không bao giờ hết. Khái niệm vô hạn thật khó nắm bắt. Chúng ta có thể dễ dàng hiểu được số 7 miêu tả 7 quả táo và số một tỉ (viết là 1 000 000 000) có thể mô tả số lượng hạt cát trong một chiếc bình. Nhưng **một lượng vô hạn** là không có kết thúc. Có một cách rất lí thú để cảm nhận vô hạn, đó là bạn hãy cầm một chiếc gương xoay trực tiếp trước một chiếc gương khác lớn hơn. Những gì bạn thấy sẽ là một chiếc gương ở bên trong một chiếc gương bên trong một chiếc gương bên trong một chiếc gương... không bao giờ kết thúc.

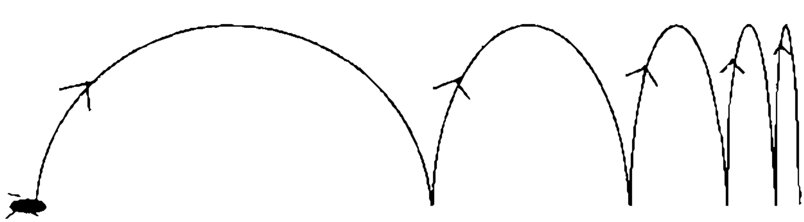


Rất nhiều người nghĩ rằng một lượng vô hạn phải chiếm một khoảng không gian rộng lớn, nhưng trên đoạn thẳng AB nhỏ bé này, A ———— B cũng có vô hạn điểm.

Để chứng minh điều này, chúng ta sử dụng khẳng định sau: Giữa hai điểm bất kì luôn tìm được một điểm thứ ba. Vì vậy, nếu *điểm A và điểm B nằm trên một đoạn thẳng, thì ta có thể tìm được điểm C ở giữa chúng. Sau đó, giữa A và C lại có một điểm khác, cũng như giữa B và C tồn tại một điểm khác chúng. Quá trình tìm điểm mới giữa hai điểm bất kì kéo dài mãi mãi, vì vậy có vô hạn điểm trên đoạn thẳng AB.*

Một cách khác để miêu tả một lượng vô hạn là sử dụng câu chuyện về chú bọ chét.

*Chú bọ chét **Half** muốn nhảy qua căn phòng. Bạn của nó bảo rằng nó sẽ không bao giờ tới được phía bên kia nếu nó hứa là sẽ chỉ nhảy các quãng bằng $\frac{1}{2}$ quãng đường còn lại. Bọ chét **Half** cam đoan nó sẽ nhảy qua bên kia phòng không có vấn đề gì cả. Đầu tiên, nó nhảy $\frac{1}{2}$ khoảng cách hai phía của căn phòng, sau đó $\frac{1}{2}$ khoảng cách còn lại, rồi lại $\frac{1}{2}$ khoảng cách còn lại tiếp theo và cứ tiếp tục như thế. Mặc dù nó rất gần với phía bên kia rồi, nhưng nó vẫn cứ phải tuân theo **quy tắc** đã hứa: mỗi quãng nó nhảy phải bằng $\frac{1}{2}$ quãng đường còn lại. Bọ chét **Half** cuối cùng cũng nhận ra rằng sẽ luôn còn lại một khoảng cách mà nó phải nhảy tới $\frac{1}{2}$ quãng đó. Và điều này sẽ tiếp tục mãi mãi, trừ khi nó bỏ cuộc.*

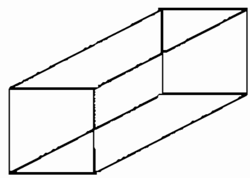


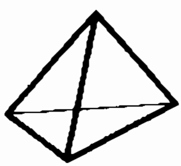
Như vậy, dù cho **vô hạn** là một lượng không bao giờ hết và không thể nhận biết được bằng một số, nhưng nó có thể bị chứa trong một không gian rất nhỏ cũng như trong một không gian rất lớn.

Năm khối Platon

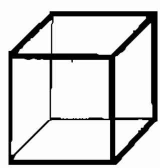
Các khối Platon là những khối đa diện lồi có các cạnh tạo nên các đa giác phẳng đều. *Chỉ tồn tại năm loại khối như vậy.*

Từ "khối" dùng để chỉ một vật thể ba chiều bất kì như tảng đá, hạt đậu, hình cầu, kim tự tháp, một cái hộp hay khối lập phương. Có một nhóm các khối đặc biệt gọi là khối đa diện đều do nhà triết học người Hy Lạp Plato khám phá ra vào thời cổ đại. Một khối được gọi là khối đa diện đều nếu các mặt của nó có hình dạng như nhau và bằng nhau. Như vậy, khối lập phương là một khối đa diện đều vì tất cả các mặt của nó là các hình vuông bằng nhau; còn chiếc hộp bên phải đây (xem hình vẽ) không phải là khối đa diện đều, vì các mặt của nó không phải là những hình chữ nhật bằng nhau. Plato đã chứng minh rằng chỉ tồn tại năm loại khối đa diện lồi. Chúng là *tứ diện, lập phương hay khối lục diện (khối sáu mặt), khối bát diện (khối tám mặt), khối mười hai mặt và khối hai mươi mặt.*

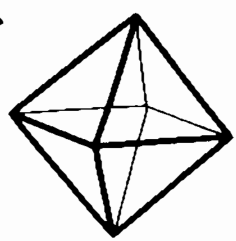




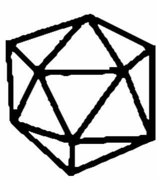
Tứ diện



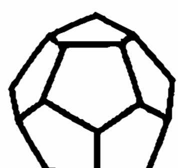
Lập phương



Khối bát diện

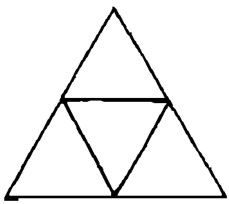


Khối mười hai mặt

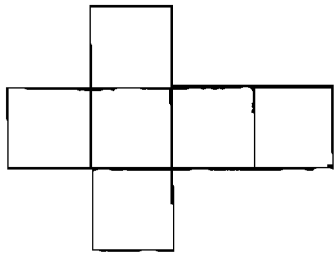


Khối hai mươi mặt

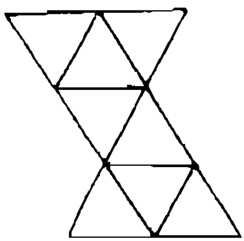
Dưới đây là những mẫu hình để tạo thành năm khối đa diện đều. Bạn hãy thử sao chép lại rồi cắt ra và gập chúng thành các khối ba chiều tương ứng nhé!



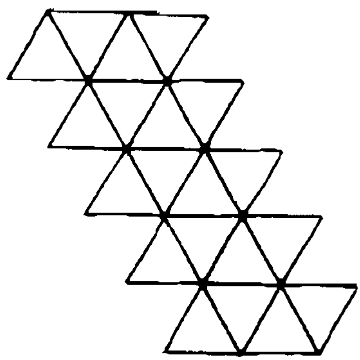
Tứ diện



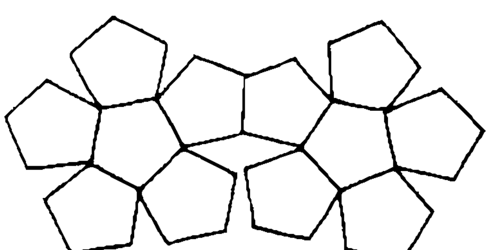
Lập phương



Khối bát diện



Khối hai mươi mặt



Khối mười hai mặt

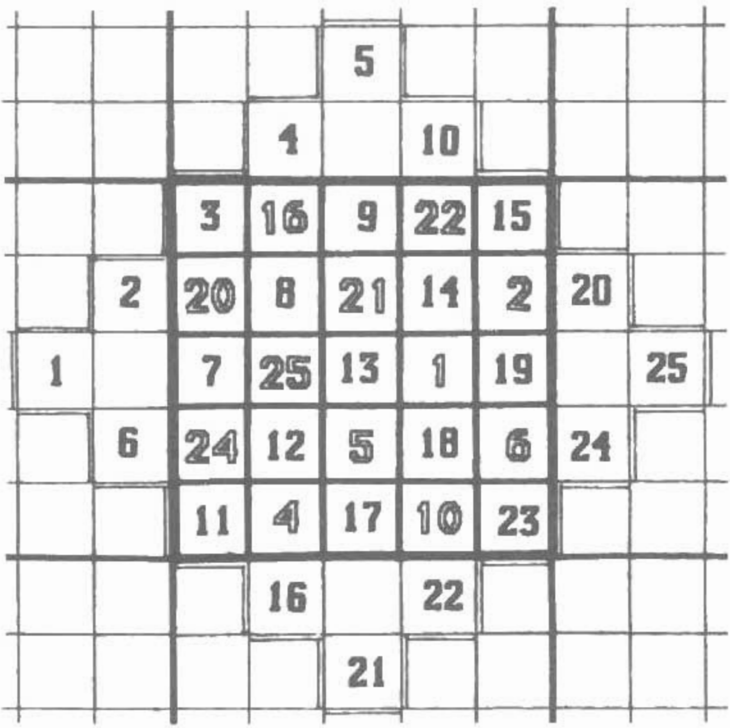
Phương pháp kim tự tháp để tạo các ma phương

Phương pháp kim tự tháp là một trong các phương pháp được dùng để xây dựng các ma phương bậc lẻ. Ví dụ dưới đây sẽ minh họa cách tạo **ma phương 5 x 5**.

Các bước:

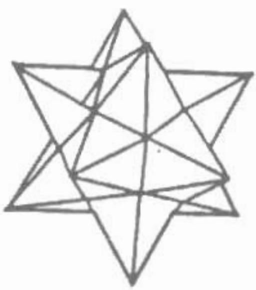
1) *Lần lượt đặt các số từ 1 tới 25 vào hình vuông chiếc hộp chéo như trong hình vẽ.*

2) *Sắp xếp lại các số nằm ngoài hình vuông của ma phương vào vị trí tương ứng trong ma phương (các số màu trắng là các số đã được di chuyển).*

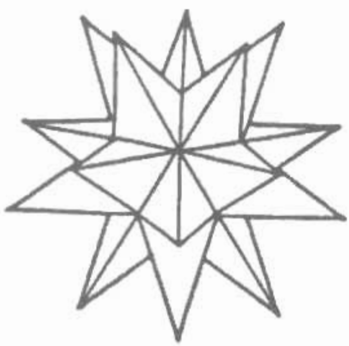


Các khối Kepler-Poinsot

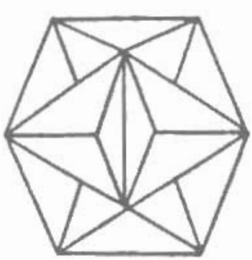
Dù cho Plato đã khám phá ra năm khối Platon (tứ diện, lập phương, bát diện, khối mười hai mặt, khối hai mươi mặt) và Archimedes khám phá ra các khối Archimedes, nhưng bốn loại khối không lồi dưới đây vẫn chưa được thế giới cổ đại biết tới. Kepler là người đã khám phá ra hai khối vào đầu những năm 1600, còn Louis Poinsot (1777 – 1859) khám phá lại hai khối này và thêm hai khối nữa vào năm 1809. Các khối này của họ giờ đây thường được sử dụng để làm các thiết bị chiếu sáng và chao đèn.



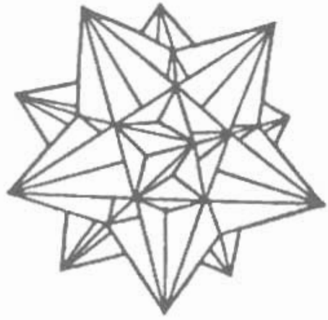
Khối mười hai mặt hình sao nhỏ



Khối mười hai mặt hình sao lớn



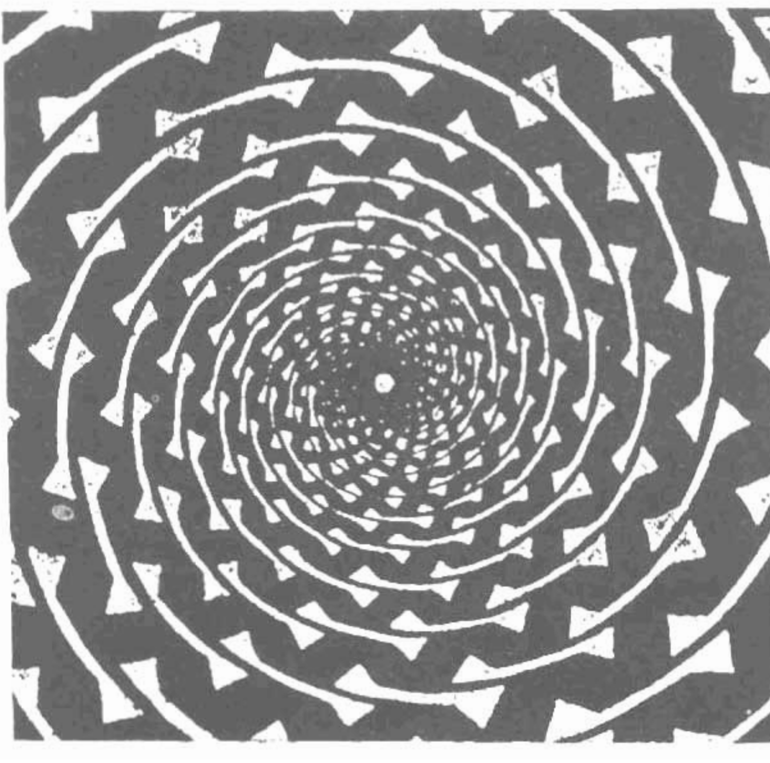
Khối mười hai mặt lớn



Khối hai mươi mặt lớn

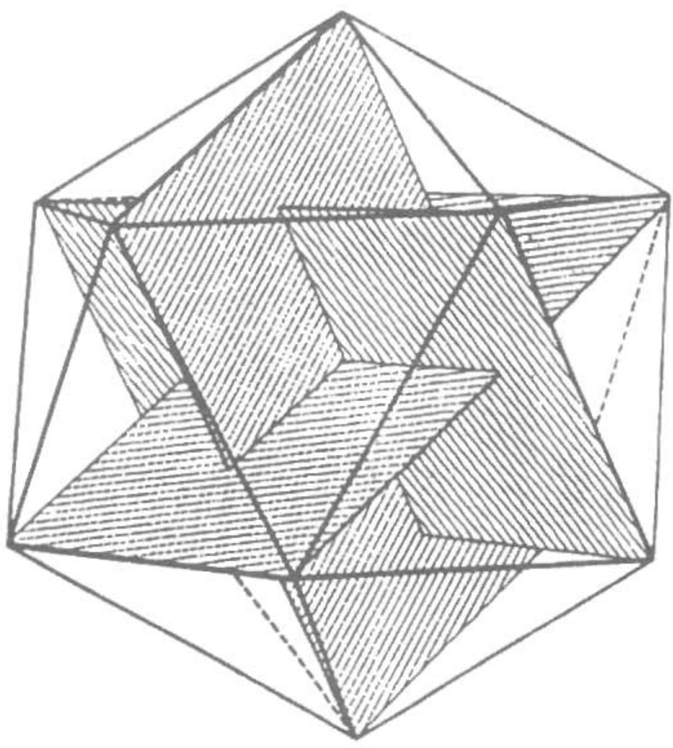
Ảnh ảo giác giả xoắn ốc

Hình bên dưới trông giống như một đường xoắn ốc, nhưng những kiểm tra kĩ lưỡng hơn cho thấy nó được tạo bởi các đường tròn đồng tâm. Khái niệm đơn vị hướng là do Tiến sĩ James Fraser nghĩ ra và lần đầu tiên được mô tả trên tạp chí *British Journal of Psychology* vào tháng 1 năm 1908. Nó thường được gọi là hiệu ứng dây xoắn. Hai sợi dây có màu tương phản được xoắn lại với nhau để tạo thành một dây duy nhất. Sau đó, sợi dây này được đặt lên trên những nền khác nhau. Ảnh ảo giác thu được thuyết phục tới mức ngay cả việc vẽ ra các đường tròn đồng tâm để phá đi ảo giác về đường xoắn ốc cũng là một việc khó khăn.



Khối hai mươi mặt và hình chữ nhật vàng

Hình chữ nhật vàng hiện diện ở rất nhiều lĩnh vực của cuộc sống chúng ta – kiến trúc, hội họa, tự nhiên, khoa học, cũng như là trong toán học. Cuốn sách *De Divina Proportione (Về các tỉ lệ thần thánh)* của Luca Paoioli (được Leonardo da Vinci minh họa năm 1509) đã giới thiệu những ví dụ tuyệt vời về tỉ lệ vàng trong mặt phẳng và hình học khối. Khối hình bên dưới là một trong số đó. Ở đây, ba hình chữ nhật vàng giao nhau một cách đối xứng và mỗi hình vuông góc với hai hình còn lại. Góc giữa các hình chữ nhật này bằng với mười hai góc của khối hai mươi mặt đều.



Nghịch lí của Zeno. Nghịch lí Achilles và chú rùa

Các nghịch lí đều rất thú vị, vui và là một phần quan trọng trong toán học. Chúng cho thấy rõ tầm quan trọng của việc phát biểu và chứng minh các ý tưởng một cách cẩn thận sao cho không có sơ hở nào. Trong toán học, chúng ta luôn cố gắng tạo ra các ý tưởng bao phủ được càng nhiều khía cạnh càng tốt, tức là chúng ta cố gắng tổng quát hóa một khái niệm và từ đó ứng dụng nó cho nhiều đối tượng hơn. Tổng quát hóa là quan trọng, nhưng nó cũng có thể là một việc làm nguy hiểm. Phải tiến hành một cách thận trọng. Một số nghịch lí dưới đây thể hiện sự nguy hiểm nói trên.

Vào thế kỉ V tr.C.N, Zeno, vận dụng kiến thức của ông về vô hạn, các dãy và các tổng riêng đã phát minh ra nghịch lí nổi tiếng sau đây. Ông giả thiết rằng trong một cuộc chạy đua với

Achilles, chú rùa được cho xuất phát ở phía trước cách Achilles 1000 mét. Giả sử Achilles chạy nhanh gấp 10 lần chú rùa. Khi cuộc đua bắt đầu, Achilles chạy được 1000 mét đầu tiên thì chú rùa đã chạy được 100 mét ở phía trước. Khi Achilles chạy được 100 mét tiếp theo thì chú rùa cũng chạy thêm được 10 mét nữa.

Zeno lập luận rằng Achilles sẽ tiếp tục tiến sát chú rùa, nhưng sẽ không bao giờ đuổi kịp nó. Liệu ông có đúng không? Nếu Achilles có thể đuổi kịp chú rùa thì tại thời điểm nào của cuộc đua điều đó sẽ xảy ra?

Xem câu trả lời ở phần *Lời giải và đáp án,* mục *Nghịch lí Achilles và chú rùa.*

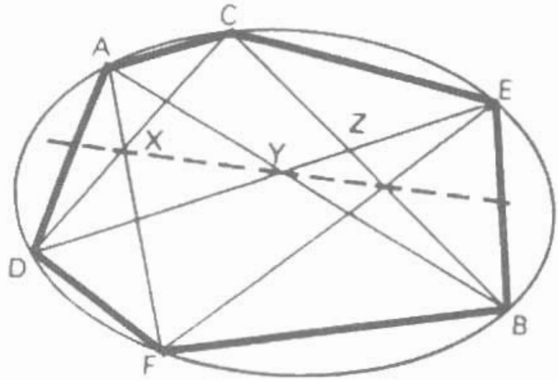
Nghịch lí của Eublides và Zeno

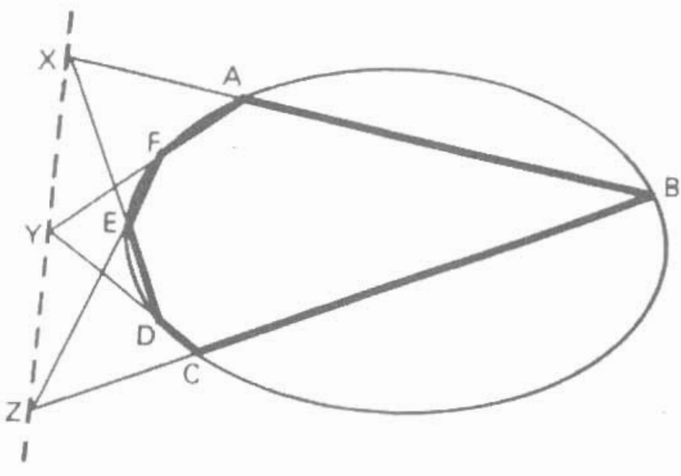
Nhà triết học Hy Lạp Eublides lí luận rằng người ta sẽ không thể nào có được một đống cát. Ông nói rằng một hạt cát thì dĩ nhiên không tạo thành một đống cát được. Và nếu người ta cho thêm một hạt cát nữa vào, thì chúng (hai hạt cát) cũng không làm nên đống cát. Như vậy, ông kết luận nếu bạn không có sẵn một đống cát và nếu bằng cách thêm một hạt cát vào những gì bạn có, bạn vẫn không có một đống cát, thì bạn sẽ không bao giờ có một đống cát cả.

Cùng với lí luận tương tự, Zeno nhìn vào các điểm trên một đoạn thẳng. Ông lập luận rằng nếu một điểm không có chiều dài (tức chiều dài bằng 0), thì cộng thêm một điểm nữa vào chúng vẫn không có chiều dài. Vì vậy, người ta sẽ không bao giờ nhận được một vật có kích thước chỉ bằng cách hợp các điểm lại với nhau. Nhưng sau đó ông lại lập luận rằng nếu một điểm có chiều dài, thì một đoạn thẳng sẽ là dài vô hạn, bởi nó chứa vô hạn điểm trên đó.

Hình lục giác thần bí

Toán học là một kho báu những ý tưởng hấp dẫn. Định lí đặc biệt sau đây được nhà toán học Pháp Blaise Pascal (1623 – 1662) chứng minh khi ông mới 16 tuổi. Ông gọi nó là **hình lục giác thần bí.**





Nếu một hình lục giác nội tiếp trong một đường conic, thì các giao điểm của các cặp cạnh đối diện thẳng hàng nhau.

Câu đố về các đồng xu

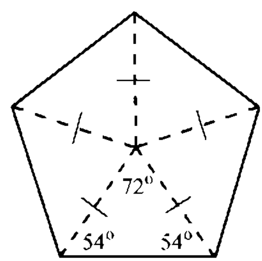
Bạn hãy đảo ngược tam giác đồng xu này xuống phía dưới bằng cách đẩy lần lượt từng đồng xu một đến vị trí mới sao cho nó luôn tiếp xúc với hai đồng xu khác.

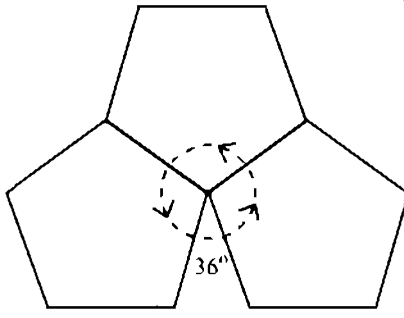
Số lần di chuyển ít nhất là 3.

Lát mặt phẳng

Lát mặt phẳng có nghĩa là phủ mặt phẳng bằng những hình lát phẳng sao cho không có khe hở và không xếp chồng lên nhau. Giả sử đã có sẵn các hình lát, người ta có thể dùng toán học để xét xem chúng có thể lát mặt phẳng được hay không mà không cần xếp lên mặt phẳng. Để hiểu rõ vấn đề này, ta cần phải biết đến một mệnh đề toán học, đó là để vẽ được một đường tròn, ta phải quay compa một góc 360^{o}.

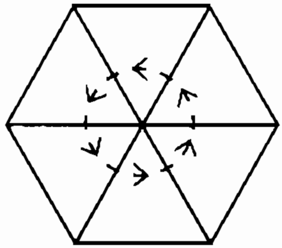
Bằng kiến thức trên và một số kiến thức hình học khác, chúng ta hãy xét bài toán lát mặt phẳng bằng các ngũ giác đều. Ngũ giác đều có năm cạnh bằng nhau và năm góc bằng nhau. Để tìm độ lớn các góc của ngũ giác, ta chia nó thành các tam giác như hình minh họa. Tổng các góc trong của mỗi tam giác bằng 180^{o}. Tất cả năm tam giác đều bằng nhau vì các cạnh và góc tương ứng của chúng bằng nhau. Lúc này, chúng ta có thể xác định các góc của ngũ giác là 108^{o}. Do đó, khi xếp các ngũ giác bằng nhau sát cạnh nhau thì trên mặt phẳng sẽ có khe hở vì các ngũ giác không thể xếp đầy một góc 360^{o} ($108^{o} + 108^{o} + 108^{o} = 324^{o}$).



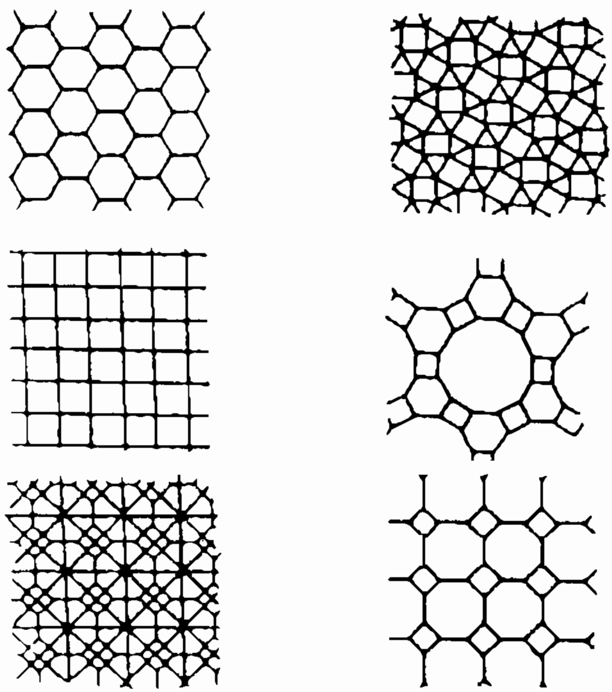


Khe hở

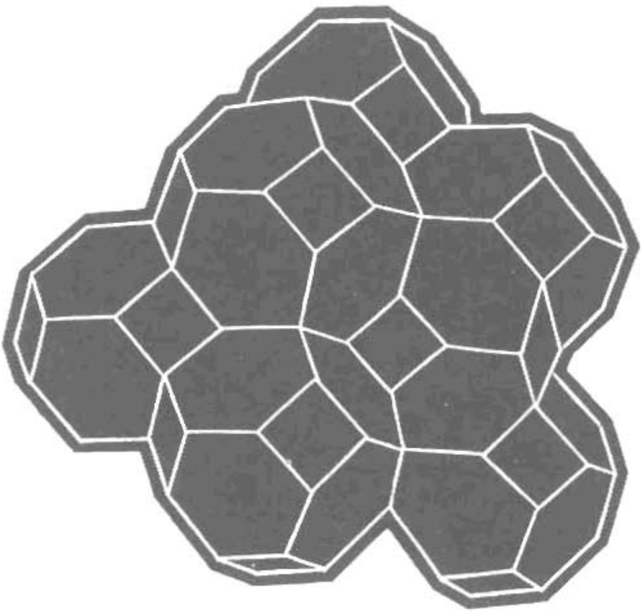
Bây giờ, chúng ta hãy thử lát mặt phẳng bằng các tam giác đều. Mỗi góc của tam giác đều là 60^{0}. Như vậy, có thể xếp sáu tam giác đều bằng nhau sát cạnh nhau và chúng sẽ làm đầy một góc 360^{0}.



Còn nếu dùng các hình vuông, lục giác, bát giác hay tổ hợp các hình thì có thể lát mặt phẳng được không? Dưới đây là hình minh họa của một số mẫu lát mặt phẳng.



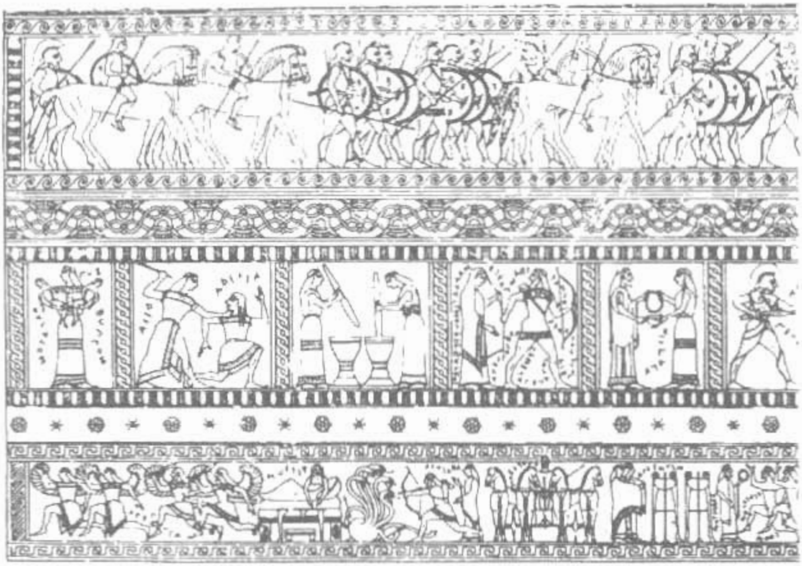
Bằng cách tương tự, không gian cũng có thể "lát", tức là xếp đầy bằng các khối ba chiều. Khối hình bên dưới là khối bát diện cụt. Chúng là đa diện Archimedes duy nhất có thể xếp đầy không gian mà không để lại khe hở và không cần kết hợp bất kì khối hình nào khác.



Họa sĩ người Hà Lan nổi tiếng M.C. Escher đã ứng dụng nhiều khái niệm hình học vào các tác phẩm của mình như: dải Möbius, đường trắc địa, hình học xạ ảnh, ảnh ảo giác, tam giác không thể, nút ba lá, lát mặt phẳng. Một số tác phẩm của ông sử dụng các cách lát nền biến hình rất thú vị do chính ông nghĩ ra như *Metamorphosis (Sự biến đổi), Horse man (Người ngựa), Smaller and Smaller (Nhỏ hơn và nhỏ hơn nữa), Square Limit (Giới hạn vuông), Circle Limit (Giới hạn tròn)*. Ngoài hội họa, nghiên cứu các ứng dụng của "lát" không gian cũng là mối quan tâm đặc biệt của kiến trúc, thiết kế nội thất và đóng gói hàng hóa trong thương mại.

Câu đố của Diophantus

Diophantus được mệnh danh là cha đẻ của đại số. Những thông tin mà chúng ta biết được về cuộc đời ông cho đến nay rất ít ỏi, ngoại trừ việc ông sống vào khoảng thời gian từ năm 100 đến 400 s.C.N. Tuy nhiên, chúng ta lại biết thông tin về tuổi thọ nhờ câu đố đại số mà một trong số những người ngưỡng mộ ông đã sử dụng để miêu tả cuộc đời của ông. Câu đố như sau:



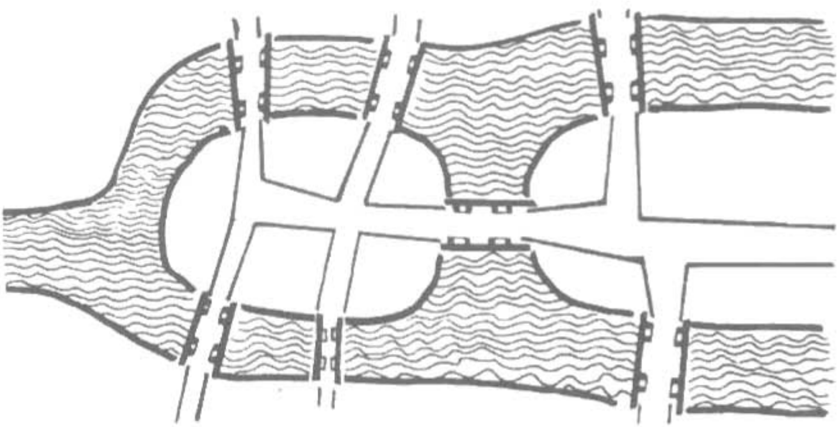
Thời thơ ấu của Diophantus chiếm $\frac{1}{6}$ cuộc đời.
$\frac{1}{12}$ cuộc đời tiếp theo là thời thanh niên sôi nổi.
Thêm $\frac{1}{7}$ cuộc đời nữa ông sống độc thân.
Sau khi lập gia đình được 5 năm thì sinh một con trai.
Nhưng số mệnh chỉ cho con sống bằng nửa đời cha.
Ông đã từ trần 4 năm sau khi con mất.
Diophantus sống bao nhiêu tuổi hãy tính cho ra.

Xem đáp số ở phần *Lời giải và đáp án.*

Tô-pô học bắt nguồn từ lời giải vào năm 1736 của một bài toán nổi tiếng – bài toán *Bảy cây cầu Königsberg*.

Bài toán *Bảy cây cầu Königsberg* và tô-pô

Königsberg[1] là một thành phố bên sông Preger, bao gồm hai đảo, các phần của thành phố được nối với nhau bằng bảy chiếc cầu. Dòng sông Preger bao quanh hai hòn đảo của thành phố. Các cây cầu bắc từ bờ sông sang hai đảo, trong đó có một



Bản đồ của bài toán Bảy cây cầu Königsberg.

cầu trực tiếp nối hai đảo với nhau. Người dân thành phố Königsberg đã hình thành thói quen đi dạo vào ngày chủ nhật và nhân tiện đó thử tìm cách đi qua tất cả bảy cầu, nhưng mỗi cầu chỉ đi qua duy nhất một lần. Không ai tìm ra cách để đi được như vậy cho đến khi nhà toán học người Thụy Sĩ Leonhard

(1). Vào thế kỉ VIII, Königsberg là một thành phố của nước Đức. Ngày nay, nó thuộc Liên bang Nga.

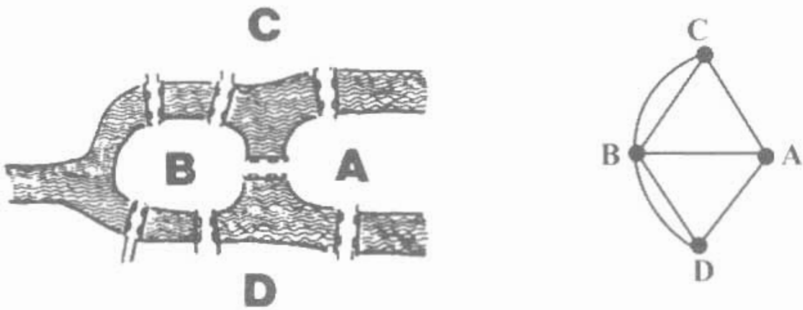
Euler (1707 – 1783) biết đến câu chuyện này. Vào thời đó, Euler đang làm việc cho Nữ hoàng Nga Catherine Đệ nhất tại St. Petersburg. Trong quá trình giải bài toán *Bảy cây cầu Königsberg*, Euler đã phát minh ra một chuyên ngành toán học mà ngày nay có tên gọi là tô-pô. Ông giải bài toán bằng cách dùng một lĩnh vực của tô-pô là đồ thị. Sử dụng đồ thị, ông đã chứng minh được rằng đi qua bảy cây cầu Königsberg sao cho mỗi cầu chỉ đi qua một lần là không thể được.

Bài toán này cùng với lời giải của Euler đã khởi đầu cho việc nghiên cứu tô pô. Tô-pô học là lĩnh vực tương đối mới. Các nhà toán học thế kỉ XIX đã bắt đầu đi sâu vào tô-pô cùng với những nghiên cứu về các hình học phi Euclid khác. Chuyên luận đầu tiên về tô-pô được viết vào năm 1847.


Euler

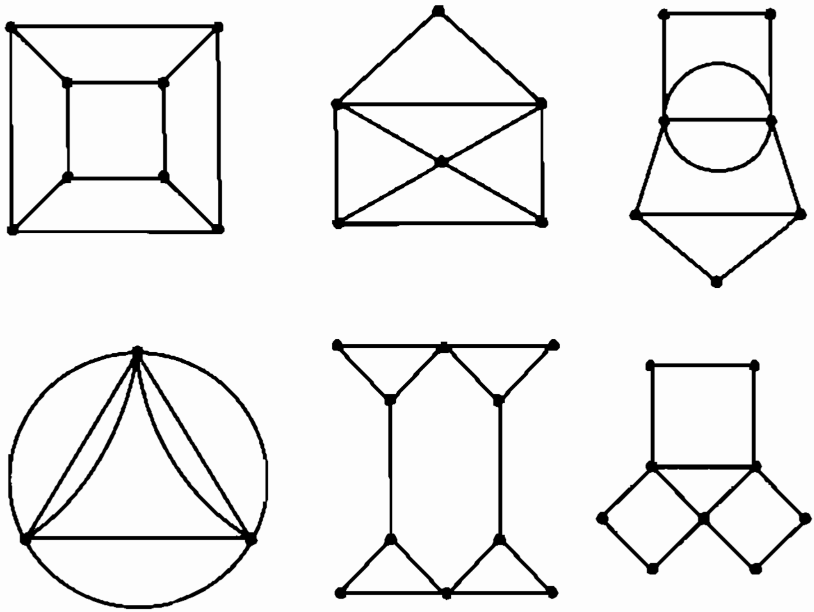
Đồ thị

Đồ thị về cơ bản là biểu đồ mô tả của một bài toán. Đồ thị mô tả bài toán Bảy *cây cầu Königsberg* được minh họa trong hình dưới đây.

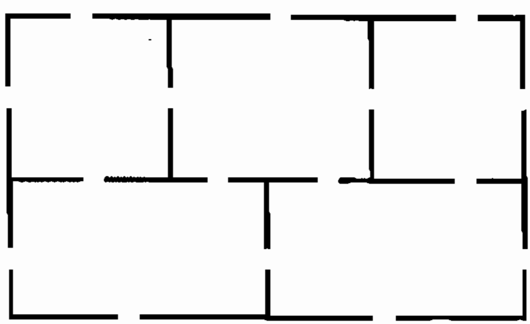


Đồ thị mô tả bài toán Bảy cây cầu Königsberg.

Một đồ thị bao gồm các *đỉnh* và các *cạnh*. Đồ thị gọi là *đi qua được* nếu có thể đi qua tất cả các cạnh của nó sao cho mỗi cạnh đi qua đúng một lần, còn một đỉnh có thể đi qua nhiều lần. Biểu đồ mô tả bài toán *Bảy cây cầu Königsberg* có các đỉnh là A, B, C, D. Bạn hãy chú ý số cạnh ở mỗi đỉnh: đỉnh A có 3 cạnh, B có 5 cạnh, C có 3 cạnh và D có 3 cạnh. Vì tất cả chúng đều có một số lẻ các cạnh nên chúng được gọi là các *đỉnh lẻ*. *Đỉnh chẵn* có một số chẵn các cạnh nhận nó làm một trong hai đầu mút. Euler đã phát hiện ra rất nhiều tính chất về số lượng các đỉnh chẵn và đỉnh lẻ của một đồ thị đi qua được. Đặc biệt, ông nhận ra rằng để một đỉnh là lẻ, người ta sẽ phải bắt đầu hoặc kết thúc đường đi tại đỉnh đó. Với phát hiện này, ông lập luận rằng vì một đồ thị chỉ có một điểm bắt đầu và một điểm kết thúc nên các đồ thị đi qua được chỉ có hai đỉnh lẻ. Bài toán *Bảy cây cầu Königsberg* có bốn đỉnh lẻ nên kết luận là không thể đi qua được.



Đồ thị nào trong số các đồ thị trên là đi qua được (tức là có thể đi qua hết cả đồ thị mà không cần lặp lại một đoạn nào)?



Bạn có thể tìm ra đường đi qua tất cả các cửa mà không cần nhấc bút chì lên không? Hãy chứng minh lời giải của mình bằng cách vẽ đồ thị.

Lịch Aztec[1]

Một trong những công cụ tính toán quan trọng và sớm nhất của loài người là lịch - một hệ thống dùng để đo và ghi lại thời gian đã trôi qua. Nhận thức được tự nhiên đã ban tặng cho con người bốn mùa đều đặn để tự chủ được nguồn lương thực cho mình, những người cổ đại đã cố gắng tìm ra mối tương quan giữa ngày Mặt Trời (thời gian Trái Đất quay quanh mình một vòng), năm Mặt Trời (thời gian Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời) và tháng Mặt Trăng (thời gian Mặt Trăng quay một vòng quanh Trái Đất). Vì tháng Mặt Trăng là khoảng 29,5 ngày, trong khi năm Mặt Trời là 365 ngày 5 giờ 48 phút và 46 giây, nên không thể có được một lượng tỉ lệ nguyên giữa tháng Mặt Trăng và năm Mặt Trời. Đây là khó khăn chính trong việc phát triển lịch nhất quán. Ngay cả lịch hiện dùng của chúng ta cũng không nhất quán, bởi năm đầu của thế kỉ mà không chia hết cho 400 (ví dụ 1700, 1800, 1900) sẽ mất đi ngày nhuận của nó mặc dù đó là năm nhuận.

Người Aztec có hai loại lịch, trong đó loại lịch tôn giáo không có liên quan gì với tháng Mặt Trăng và năm Mặt Trời. Lịch này chỉ có ý nghĩa quan trọng đối với các buổi lễ tôn giáo và người Aztec sẽ thêm ngày sinh của họ theo lịch này vào tên mình. Lịch tôn giáo bao gồm 20 kí hiệu và 13 số luân phiên nhau trong một chu kì cố định gồm 260 ngày. Loại lịch thứ hai của họ dựa vào nông nghiệp, gồm có 365 ngày.[2] Những chuyển động có tính chu kì của các thiên thể đã cho phép người Aztec điều chỉnh lịch của họ và dự đoán chính xác các hiện tượng như nhật thực và nguyệt thực.

---

(1). Aztec là một nền văn minh trong khu vực của Mexico bắt đầu từ năm 1248 và kéo dài đến năm 1521.

(2). Người Aztec vay mượn rất nhiều yếu tố, bao gồm cả nhiều phần của lịch, từ các nền văn minh Toltec và Maya.

Vào năm 1790, đá mặt trời Aztec, hay lịch bằng đá, đã được phát hiện khi người ta đang sửa chữa một thánh đường tại thành phố Mexico. Thánh đường này được xây dựng tại vị trí của đền thờ Tenochtitlàn cổ đại hình kim tự tháp. Tấm đá hình tròn có đường kính 3,65m và nặng 26 tấn. Nó ghi lại lịch sử thế giới theo kiến thức ngành vụ trũ học của người Aztec.

Tại tâm của đá mặt trời là hình điêu khắc Thần Mặt Trời (Tonatiuh). Xung quanh Thần Mặt Trời là bốn mặt trời, hay bốn thế giới trong vũ trụ (Hổ, Nước, Gió, Mưa lửa), chỉ thời kì trước thời đại Aztec. Ở đây còn xuất hiện các biểu tượng của sự chuyển động. Một vòng khác gồm 20 hình chạm – cá sấu, gió, ngôi nhà, con thằn lằn, con rắn, cái chết, con hươu, thỏ, nước, chó, khỉ, cỏ, cây sậy, con báo, đại bàng, con kền kền, động đất, viên đá lửa, mưa, hoa – tượng trưng cho hai mươi ngày của một tháng Aztec.

Bộ ba bất khả thi

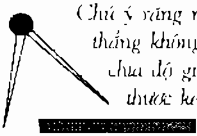
Vẻ đẹp của một bài toán không nằm trong câu trả lời mà chính là ở phương pháp giải. Có những bài toán mà đáp án cuối cùng lại là không có lời giải. Ở một khía cạnh nào đó, *không có lời giải* có vẻ như là một câu trả lời gây thất vọng, nhưng thông thường, quá trình suy ngẫm để có thể đi tới kết luận như thế lại rất hấp dẫn, chính trong quá trình này mới nảy sinh ra nhiều khám phá thú vị. Trường hợp *ba bài toán nổi tiếng thời cổ đại* cũng như vậy.

Chia ba một góc – chia một góc thành ba góc bằng nhau.

Nhân đôi hình lập phương – dựng một hình lập phương có thể tích gấp hai lần thể tích của một hình lập phương cho trước.

Cầu phương hình tròn – dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích một hình tròn cho trước.

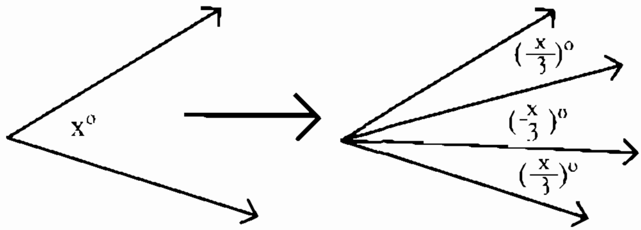
Ba bài toán trên đã thôi thúc sự tìm tòi và khám phá toán học trong suốt hơn 2000 năm qua, cho đến khi chúng được xác định vào thế kỉ XIX là *không thể giải được* nếu chỉ dùng *thước thẳng và compa*. Người ta đã suy luận được rằng thước thẳng chỉ có thể dùng để dựng các đường có phương trình mô tả là tuyến tính (các phương trình bậc một), ví dụ như $y = 3x - 4$. Compa thì lại chỉ có thể dựng các đường tròn và cung có phương trình mô tả là bậc hai, ví dụ $x^2 + y^2 = 25$. Khi tổ hợp tuyến tính phương trình của hai loại trên thì phương trình nhận được có bậc lớn nhất là hai. Trong khi đó, khi giải *ba bài toán dựng hình* trên bằng phương pháp đại số, các phương trình lại không phải là bậc một hay bậc hai mà là bậc ba hoặc có chứa số siêu việt. Do đó, chỉ với compa và thước thẳng thì sẽ không thể giải được chúng.



Chú ý rằng một thước thẳng không có vạch chia độ giống như ở thước kẻ.

Chia ba một góc

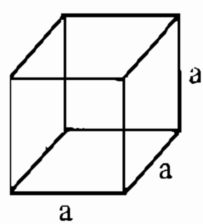
Các góc đặc biệt như góc 135° hay 90° có thể chia ba bằng compa và thước thẳng. Nhưng sẽ không thể chia ba một góc bất kì chỉ bằng hai dụng cụ trên bởi phương trình giải bài toán khi viết dưới dạng bậc ba là $a^3 - 3a - 2b = 0$.



Nhân đôi hình lập phương

Để nhân đôi một hình lập phương (dựng hình lập phương mới có thể tích gấp đôi hình lập phương cho sẵn), ta có thể nhân đôi chiều dài cạnh của nó. Nhưng cách này làm cho thể tích của hình lập phương tăng lên gấp 8 lần.

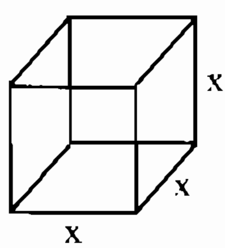
Thể tích của hình lập phương cần nhân đôi $= a^3$.



Để nhân đôi hình lập phương trên, ta cần dựng một lập phương có thể tích là $2a^3$.

$x^3 = 2a^3$, suy ra $x = a\sqrt[3]{2}$

Một lần nữa chúng ta lại đi tới một hình lập phương mà không thể dựng được với chỉ một compa và thước thẳng.

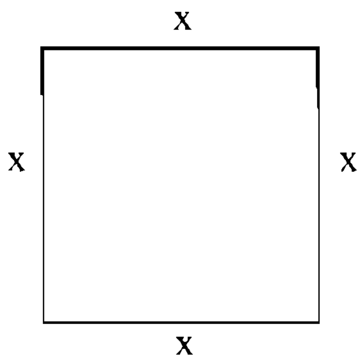


Cầu phương hình tròn

Cho một hình tròn bán kính là r, diện tích của nó sẽ là πr^2.

Như vậy, chúng ta cần dựng một hình vuông có diện tích là πr^2.

$x^2 = \pi r^2$, nên $x = r\sqrt{\pi}$. Vì π là một số siêu việt, nên không thể biểu diễn được nó dưới dạng một số hữu hạn các phép tính hữu tỉ và nghiệm thực, vì vậy đường tròn không thể cầu phương được chỉ với compa và thước thẳng.

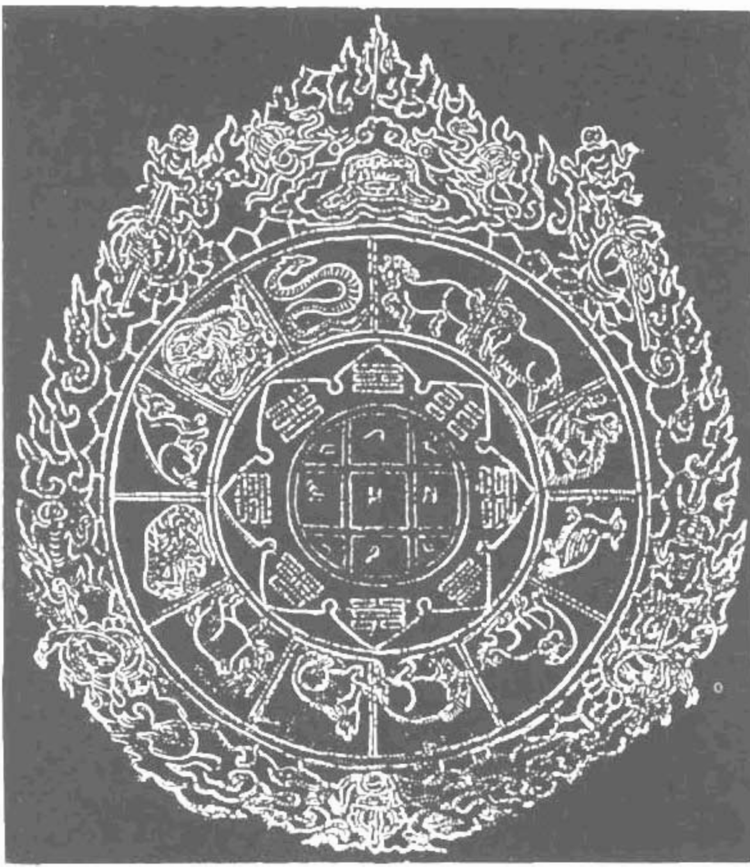


Dù ba bài toán thời cổ đại trên là không thể dựng được chỉ với compa và thước thẳng, nhưng người ta đã sáng tạo ra những phương pháp và công cụ mới rất tài tình để giải quyết chúng. Điều quan trọng không kém là chúng đã thúc đẩy phát triển tư duy toán học nhiều thế kỉ qua. Đường concôit của Nicomedes, đường xoắn ốc của Archimedes, đường quadratrix của Hippias, các giao diện của mặt nón, các đường bậc ba, bậc bốn và một số đường cong siêu việt khác là một số ý tưởng bắt nguồn từ ba bài toán dựng hình thời cổ đại này.

Ma phương của người Tây Tạng cổ đại

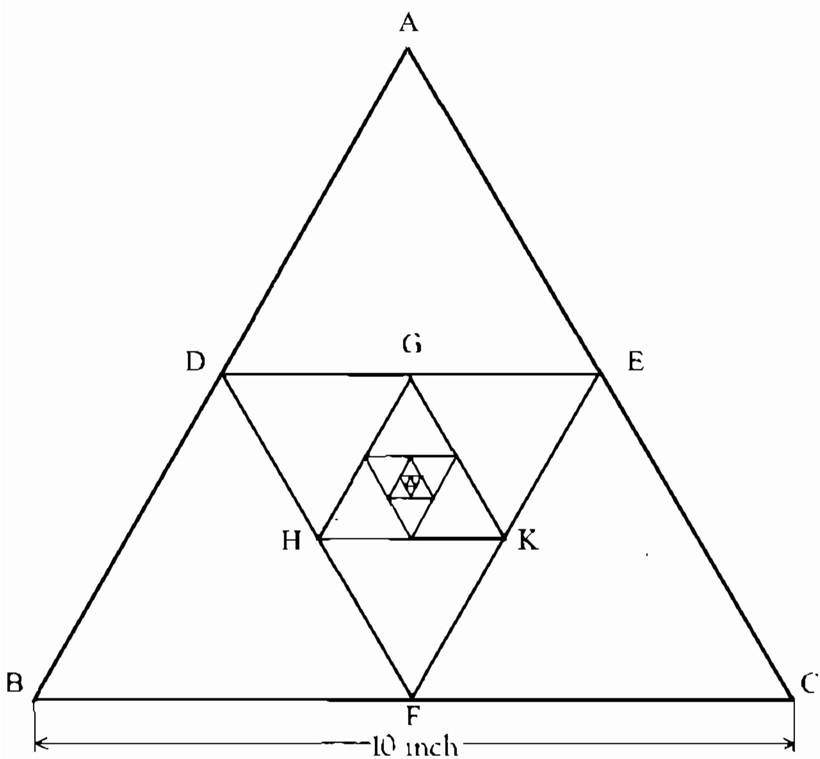
Một ma phương kích thước 3 x 3 nằm ở tâm con ấn của người Tây Tạng thời cổ đại, đây là ví dụ cho thấy tư tưởng toán học không bị giới hạn ở một quốc gia hay bất kì đường biên giới nào. Các số đếm xuất hiện trong ma phương này là:

4	9	2
3	5	7
8	1	6



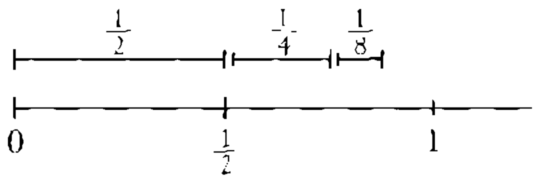
Chu vi, diện tích và các chuỗi vô hạn

Trong hình vẽ sau có vô số tam giác đều. Mỗi tam giác bên trong có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ngoại tiếp nó. Để xác định tổng chu vi của các tam giác, chúng ta xét chuỗi sau đây:



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots$$

Nhìn vào trục số, ta có thể xác định tổng của các phân số:



Lưu ý rằng mỗi một phân số tiếp theo thêm vào chuỗi số này sẽ làm tổng tiến gần 1 hơn, nhưng nó sẽ không bao giờ vượt quá 1. Vì thế, chuỗi số này có tổng bằng 1.

Bây giờ, bạn có thể băn khoăn kết luận trên sẽ giúp chúng ta tìm tổng chu vi của các tam giác như thế nào. Đầu tiên, hãy liệt kê chu vi của mỗi tam giác:

$$30, 15, \frac{15}{2}, \frac{15}{4}, \frac{15}{8}, \frac{15}{16}, \frac{15}{32}, \frac{15}{64}, \frac{15}{128}, \ldots \text{ (1)}$$

Cộng các số trong dãy trên để tìm tổng chu vi các tam giác:

$$30 + \frac{15}{2} + \frac{15}{4} + \frac{15}{8} + \frac{15}{16} + \frac{15}{32} + \frac{15}{64} + \frac{15}{128} + \ldots$$

Rút thừa số chung, ta có:

$$45 + 15\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots\right)$$

Thay 1 vào giá trị tổng của chuỗi số trong biểu thức trên, ta thu được:

$$45 + 15\,(1) = 45 + 15 = 60 \text{ (đây chính là chu vi cần tìm).}$$

Để xác định tổng diện tích các tam giác là một thử thách. Bạn có thể sẽ phải tìm hiểu thêm về tổng của một chuỗi số vô hạn mới.

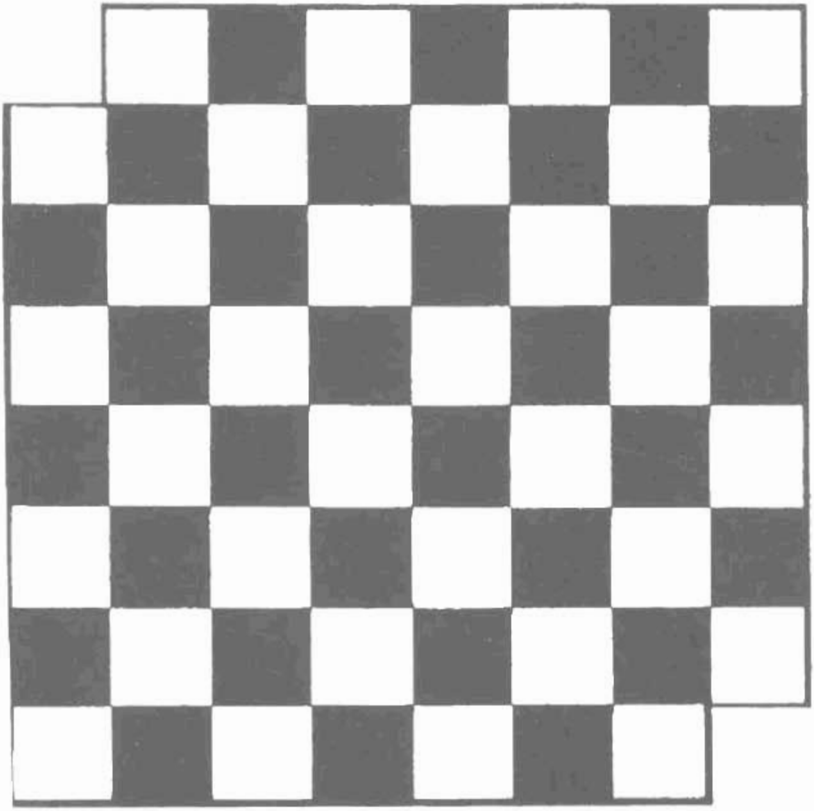
---

(1) Các giá trị này được tìm bằng cách dùng một định lí trong hình học như sau: Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của một tam giác có độ dài bằng một nửa cạnh đối diện nó.

Bài toán *Bàn cờ*

Nếu hai ô vuông ở hai góc đối diện của bàn cờ bị bỏ đi, thì có thể dùng các quân đô-mi-nô để xếp kín bàn cờ này được không?

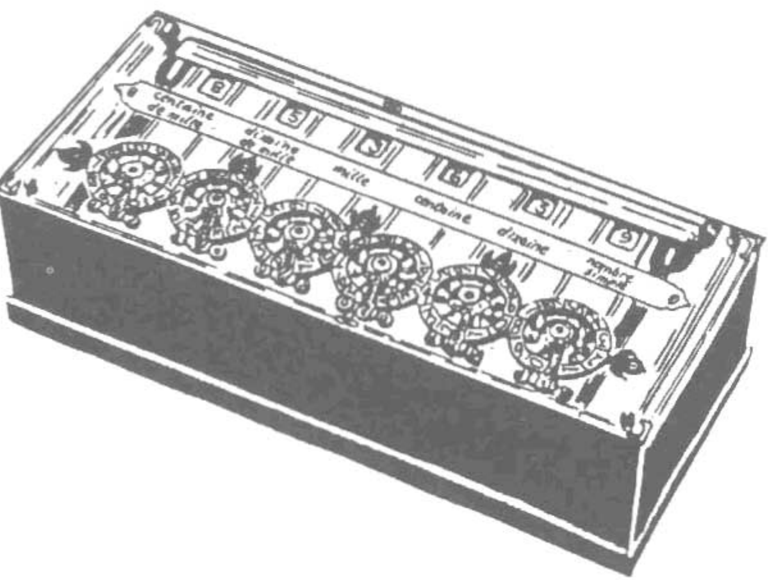
Giả sử mỗi quân đô-mi-nô có kích thước bằng hai ô vuông cạnh nhau trong bàn cờ. Các quân đô-mi-nô không được phép xếp chồng lên nhau mà phải nằm trên mặt phẳng của bàn cờ.



Xem câu trả lời của bài toán *Bàn cờ* ở phần *Lời giải và đáp án*.

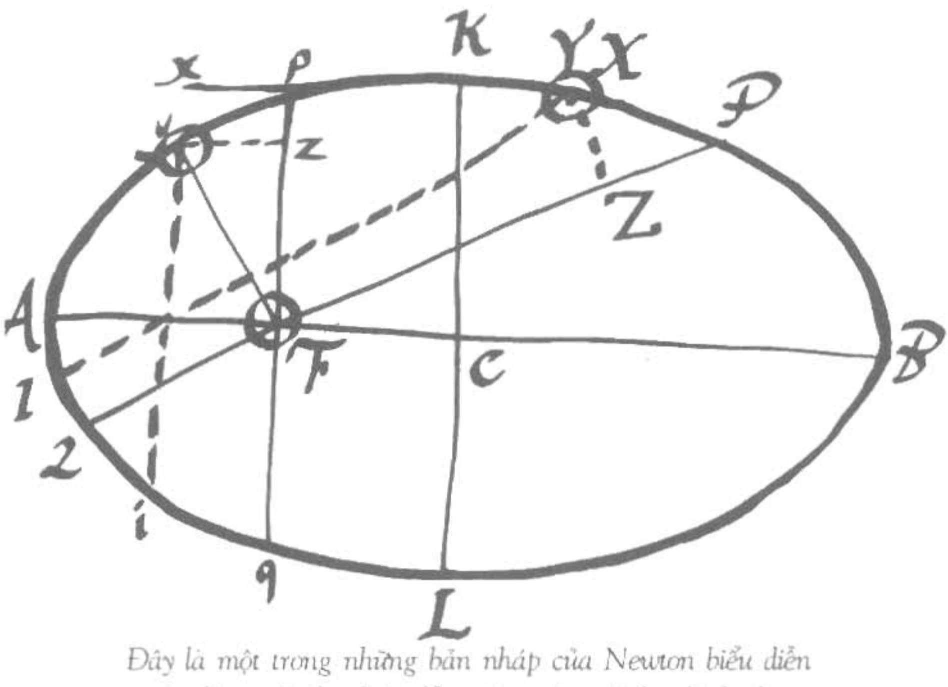
Máy tính của Pascal

Blaise Pascal (1623 - 1662) là một nhà toán học, nhà khoa học nổi tiếng của nước Pháp. Ông được vinh danh bởi rất nhiều khám phá khoa học và toán học lí thuyết như lí thuyết xác suất, lí thuyết về chất lỏng và áp suất chất lỏng. Ngoài ra, Pascal còn phát minh chiếc máy tính (hình bên dưới) khi mới mười tám tuổi. Với chiếc máy này, người ta có thể cộng các cột số dài. Phát minh này của ông đã đưa ra các quy tắc cơ bản làm nền tảng cho các máy tính hiện đại ngày nay.



Isaac Newton và các phép tính vi tích phân

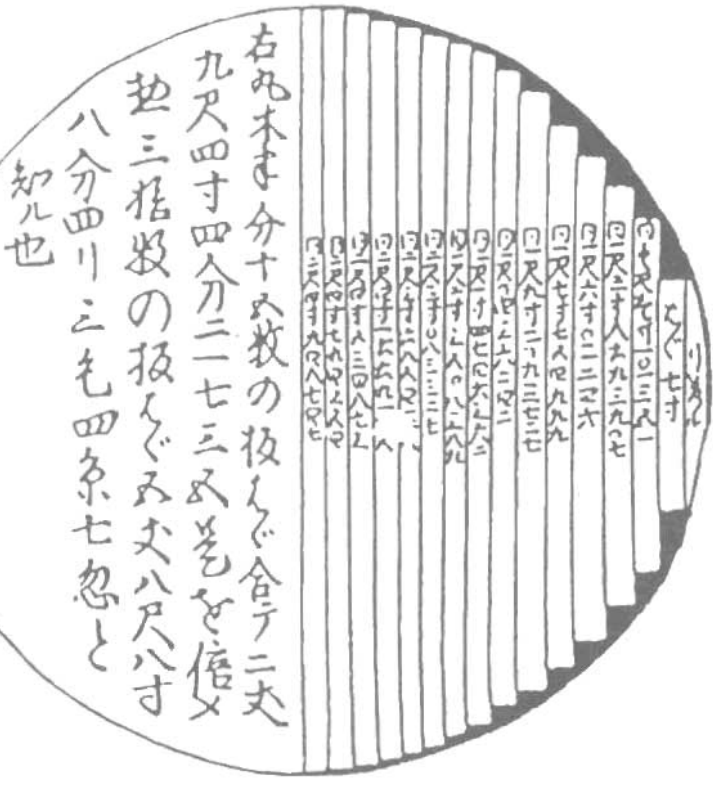
Isaac Newton (1642 – 1727) là một trong những người phát minh ra các phép tính vi tích phân và thuyết hấp dẫn. Dù là một thiên tài toán học, nhưng ông lại cống hiến phần lớn cuộc đời cho việc nghiên cứu thần học. Năm 1665, trường đại học nơi ông giảng dạy tại Cambridge phải đóng cửa vì bệnh dịch hạch. Ông ở nhà trong suốt thời gian này và đã phát triển các phép tính vi tích phân, hình thành thuyết vạn vật hấp dẫn và làm việc với nhiều vấn đề vật lí khác. Thật đáng tiếc, 39 năm sau các công trình của ông mới được công bố.



Đây là một trong những bản nháp của Newton biểu diễn tác động của lực hấp dẫn trên một quỹ đạo hình elip.

Các phép tính vi tích phân của Nhật Bản

Chúng ta cần hiểu rằng toán học phát triển trong các nền văn hóa khác nhau ở khắp nơi trên thế giới. Chẳng hạn như Seki Kowa, một nhà toán học người Nhật thế kỉ XVII, nổi tiếng với việc phát triển các phép tính vi tích phân của Nhật Bản. Phép tính vi tích phân của ông còn được gọi là **yenri** (nguyên lí hình tròn). Hình dưới đây được một học trò của Seki Kowa vẽ vào năm 1670. Nó thể hiện cách đo diện tích hình tròn bằng cách cộng một chuỗi các hình chữ nhật lại với nhau.



Chứng minh 1 = 2

Nghệ thuật suy luận có liên quan đến mọi khía cạnh của đời sống chúng ta, từ việc bạn quyết định sẽ ăn gì, cách thức dùng bản đồ, mua quà gì cho tới việc chứng minh một định lí hình học. Tất cả các loại kĩ năng và kĩ thuật đều được đưa vào để giải quyết vấn đề. Chỉ một sai lầm duy nhất trong quá trình suy luận cũng có thể dẫn đến những kết quả tai hại và kì cục. Chẳng hạn, nếu bạn là một lập trình viên, bạn có thể bỏ sót một bước và dẫn đến vòng lặp vô hạn. Có lẽ ai trong chúng ta cũng đã từng chắc chắn về những giải thích, lời giải hay chứng minh để rồi sau đó lại phát hiện ra mình nhầm lẫn? Trong toán học, *chia cho 0* là một lỗi phổ biến có thể gây nên những kết quả dị thường, như trong chứng minh 1 = 2 sau đây. Bạn có thể tìm thấy lỗi ở đâu không?

1 = 2 ?

Nếu a = b và b, a > 0, thì 1 = 2.

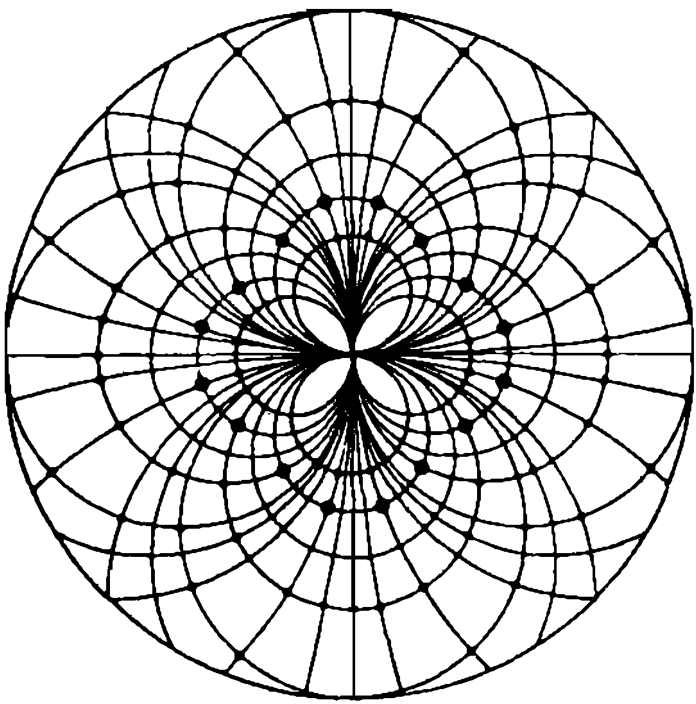
Chứng minh:

1) $a, b > 0$	*giả thiết*
2) $a = b$	*giả thiết*
3) $ab = b^2$	*nhân bước 2 với b.*
4) $ab - a^2 = b^2 - a^2$	*trừ hai vế của bước 3 cho a^2.*
5) $a(b - a) = (b + a)(b - a)$	*phân tích bước 4 thành thừa số.*
6) $a = (b + a)$	*chia hai vế của bước 5 cho $(b-a)$.*
7) $a = a + a$	*hệ quả của bước 2 và bước 6*
8) $a = 2a$	*tổng hai số bằng nhau ở bước 7.*
9) $1 = 2$	*chia hai vế ở bước 8 cho a.*

Xem lỗi trong chứng minh 1 = 2 ở phần *Lời giải và đáp án.*

Sự đối xứng trong các tinh thể

Có vô vàn những mẫu hình và sự đối xứng trong các hiện tượng tự nhiên. Năm 1912, nhà vật lí Max Von Laue đã chiếu tia X-quang xuyên qua một tinh thể cầu lên trên một tấm phim. Các điểm tối xuất hiện hoàn toàn đối xứng với nhau, chúng được nối lại với nhau để tạo thành thiết kế dưới đây. Vị trí của các điểm có liên quan đến tính đối xứng của tinh thể.



Toán học trong âm nhạc

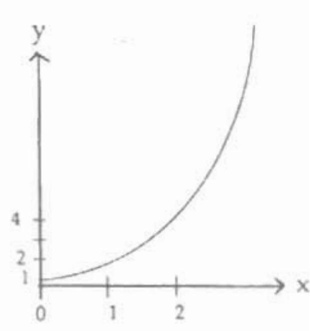
Âm nhạc và toán học có mối liên hệ với nhau. Ở thời kì trung cổ, các chương trình giáo dục trong nhà trường luôn bao gồm đại số, hình học, thiên văn học và âm nhạc. Các máy tính hiện đại ngày nay cũng đang minh chứng cho sự gắn bó đó.

Kí âm là lĩnh vực đầu tiên và rõ ràng nhất cho thấy sự ảnh hưởng của toán học tới âm nhạc. Trong một bản nhạc, chúng ta thấy có kí hiệu nhịp độ (nhịp 4 : 4, nhịp 3 : 4,...), các phách trong một ô nhịp, các nốt tròn (nốt một phách), nốt trắng (nốt $\frac{1}{2}$ phách), nốt đen (nốt $\frac{1}{4}$ phách), nốt móc đơn (nốt $\frac{1}{8}$ phách), nốt móc kép (nốt $\frac{1}{16}$ phách),... Viết nhạc để vừa vặn nốt nhạc vào một ô nhịp cũng giống như quá trình tìm mẫu số chung - các nốt có độ dài ngắn khác nhau phải được sắp vừa vặn vào ô nhịp theo một nhịp điệu nhất định. Ấy vậy mà các nhà soạn nhạc vẫn có thể sáng tác âm nhạc phù hợp với nhau thật tuyệt vời mà không hề gượng ép trong cấu trúc cứng nhắc của bản nhạc. Khi phân tích một tác phẩm đã hoàn thiện, ta thấy mỗi nhịp có một số lượng phách nhất định, bao gồm rất nhiều nốt nhạc có độ dài ngắn khác nhau theo ý muốn người soạn.

Ngoài mối quan hệ rõ ràng của toán học với bản nhạc, âm nhạc còn có mối liên hệ với các tỉ lệ, các đồ thị hàm mũ, hàm tuần hoàn và khoa học máy tính. Với các tỉ lệ, các môn đồ của Pythagoras (585 - 400 tr.C.N) là những người đầu tiên kết hợp âm nhạc và toán học lại với nhau. Họ khám phá ra mối quan hệ giữa sự hòa âm trong

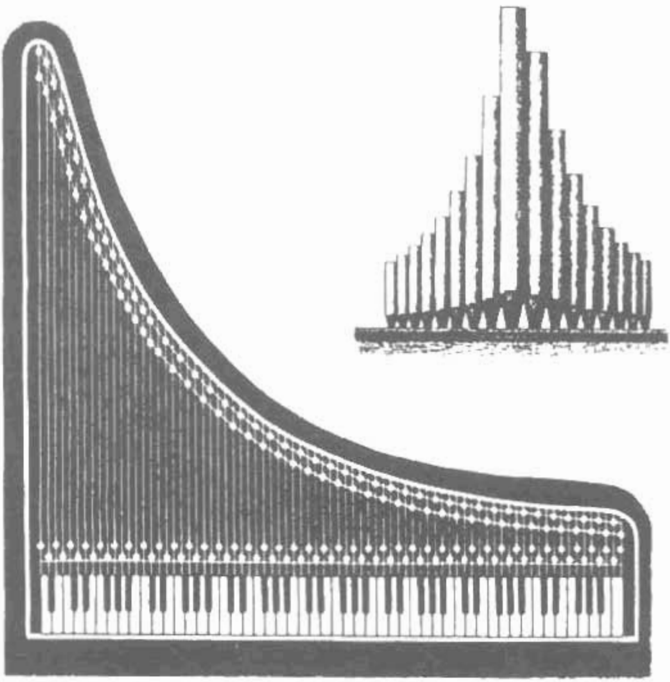
âm nhạc và các số nguyên khi thấy rằng âm thanh phát ra bởi một sợi dây đàn phụ thuộc vào độ dài của dây. Họ cũng nhận thấy những dây căng đều nhau có chiều dài tỉ lệ theo các tỉ lệ nguyên sẽ phát ra âm thanh du dương. Trên thực tế có thể biểu diễn mỗi sự kết hợp hài hòa của các dây được gẩy như là một tỉ lệ của các số nguyên. Bằng cách tăng chiều dài của dây theo các tỉ lệ nguyên, có thể tạo ra toàn bộ thang âm. Ví dụ, bắt đầu với một sợi dây tạo ra nốt Đô (C), khi đó $\frac{16}{15}$ độ dài của Đô cho ta nốt Si (B), $\frac{6}{5}$ độ dài nốt Đô cho ta La (A), $\frac{4}{3}$ độ dài nốt Đô cho nốt Son (G), $\frac{3}{2}$ của Đô cho nốt Fa (F), $\frac{8}{5}$ nốt Đô cho ta nốt Mi (E), $\frac{16}{9}$ nốt Đô cho ta nốt Rê (D), và $\frac{2}{1}$ độ dài nốt Đô cho ta nốt Đô thấp hơn (cách nốt Đô ban đầu một quãng tám).

Bạn đã bao giờ tự hỏi tại sao chiếc đàn dương cầm có hình dáng như vậy không? Thực tế có rất nhiều dụng cụ âm nhạc có hình dáng và cấu trúc liên quan đến các khái niệm toán học. Hàm số mũ và đồ thị của nó là ví dụ. Đường hàm mũ là đồ thị của hàm số có dạng $y = k^x$, trong đó $k > 0$. Ví dụ như $y = 2^x$. Đồ thị của nó có dáng như hình vẽ bên.



Các dụng cụ âm nhạc là đàn dây hoặc cấu tạo từ các cột khí phản ánh hình dáng của đường hàm mũ trong cấu trúc của chúng.

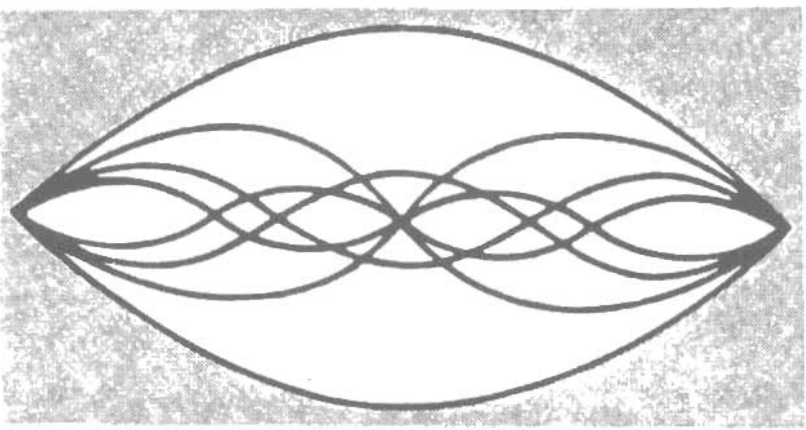
Việc nghiên cứu bản chất của âm thanh đạt tới đỉnh cao của nó với công trình của nhà toán học thế kỉ XIX John Fourier. Ông đã chứng minh tất cả các âm của âm nhạc, dù là khí nhạc hay thanh nhạc, đều có thể biểu diễn được bởi các biểu thức toán học có dạng tổng của các hàm sin tuần hoàn. Mỗi âm có ba đặc tính: cường độ, âm lượng và âm sắc để phân biệt nó với các âm khác.



Các đường hàm mũ được tạo ra bởi các dây của cây đàn dương cầm và các ống của đàn organ.

Phát hiện của Fourier cho phép người ta biểu diễn và phân biệt âm thanh bằng ba tính chất trên của chúng. Cường độ liên quan đến tần số của đường cong, âm lượng liên quan đến biên độ, còn âm sắc liên quan đến dạng hàm tuần hoàn.

Nếu không có hiểu biết về khía cạnh toán học trong âm nhạc thì sự tiến bộ trong việc ứng dụng máy tính vào soạn nhạc và thiết kế các nhạc cụ sẽ là điều không thể. Các khám phá toán học mà cụ thể là các hàm tuần hoàn là yếu tố thiết yếu trong thiết kế nhạc cụ ngày nay và trong thiết kế các máy tính có trang bị âm thanh. Rất nhiều nhà sản xuất nhạc cụ so sánh đồ thị âm thanh tuần hoàn của các sản phẩm với đồ thị lí tưởng của các nhạc cụ tương ứng. Độ trung thực của âm thanh điện tử cũng gắn bó chặt chẽ với các đồ thị tuần hoàn. Các nhà soạn nhạc và các nhà toán học sẽ vẫn tiếp tục đóng những vai trò quan trọng trong sáng tác và sản xuất âm nhạc.



Biểu đồ này minh họa một dây đàn dao động từng phần và toàn phần. Dao động dài nhất xác định cường độ, còn những dao động nhỏ hơn tạo ra sự hòa âm.

Số Palindrome

Một palindrome là một từ, một câu thơ hay một số,... mà đọc ngược hay xuôi đều giống nhau.

Ví dụ như:

(1) *madam, I'm Adam*

(2) *dad*

(3) *10 233 201*

(4) *"Able was I ere I saw Elba"*

Có một sự kì lạ thú vị về những con số như sau:

Lấy một số tự nhiên bất kì. Cộng nó với số tạo thành bằng cách đảo ngược các chữ số của nó. Cộng thêm vào tổng này số đảo ngược của tổng. Tiếp tục quá trình này cho đến khi bạn có được một số palindrome.

Liệu có phải ta sẽ luôn nhận được một số palindrome hay không?

$$\begin{array}{r} 1284 \\ +\ 4821 \\ \hline 6105 \\ +\ 5016 \\ \hline 11121 \\ +12111 \\ \hline 23232 \end{array}$$

là một số palindrome.

Nghịch lí về bài kiểm tra bất ngờ

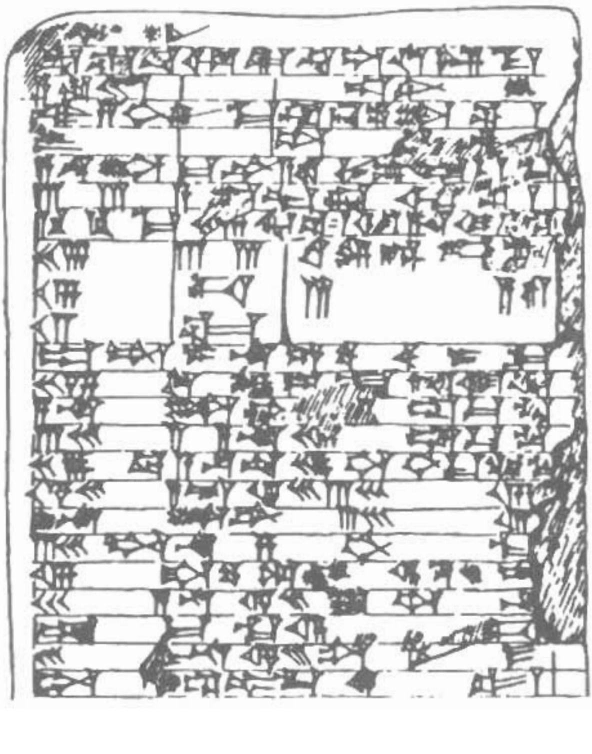
Một giáo viên thông báo sẽ có bài kiểm tra vào một trong năm ngày đi học tuần tới, nhưng lại nói cho cả lớp biết rằng: "Các bạn sẽ không biết kiểm tra vào ngày nào cho đến khi các bạn nhận được thông tin lúc 8h sáng của ngày có bài kiểm tra lúc 1h chiều".

Cuối cùng là không có bài kiểm tra, bạn có thể giải thích tại sao không?

Xem giải thích cho nghịch lí về bài kiểm tra bất ngờ ở phần *Lời giải và đáp án.*

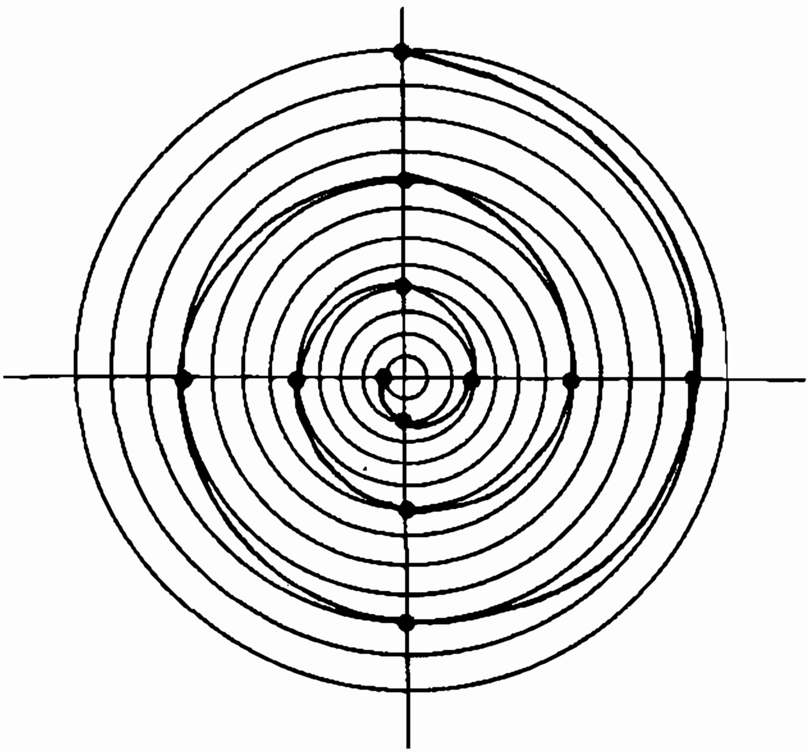
Bài toán viết bằng chữ hình nêm của người Babylon

Người Babylon có lẽ đã tiếp thu hình thức viết trên bản đất sét và chữ hình nêm (có hình cái nêm) của những người vùng Lưỡng Hà bởi thời đó, những giấy viết như giấy cói chẳng hạn đều không có sẵn. Hệ thống số đếm của họ là hệ đếm theo vị trí cơ số 60 với hai kí hiệu: 𒁹 cho số 1 và 𒌋 cho số 10. 𒁹𒌋 = 60 x 10 = 600. Các ghi chép trên bản đất sét cho thấy dấu vết của những tính toán phức tạp mà họ có thể thực hiện được với hệ thống số của mình. Bài toán dưới đây và lời giải của nó được người Babylon viết vào triều đại của Vua Hammurabi (khoảng năm 1700 tr.C.N). Bài toán đề cập đến các chiều dài, chiều rộng và diện tích.



Đường xoắn ốc của Archimedes

Đường xoắn ốc xuất hiện rất nhiều trong thế giới tự nhiên như cây leo, vỏ ốc, hiện tượng vòi rồng, bão táp, quả thông, dải Ngân Hà, các xoáy nước,...



Đường xoắn ốc Archimedes là một đường xoắn ốc hai chiều. Có một cách để hình dung nó như sau: giả sử có một chú sâu bò trên đường thẳng đi qua tâm của đường xoắn ốc. Chú sâu bò với vận tốc không đổi trên đường thẳng còn đường thẳng thì quay đều xung quanh tâm đường xoắn ốc. Đường bò của chú sâu trên mặt phẳng sẽ là đường xoắn ốc Archimedes.

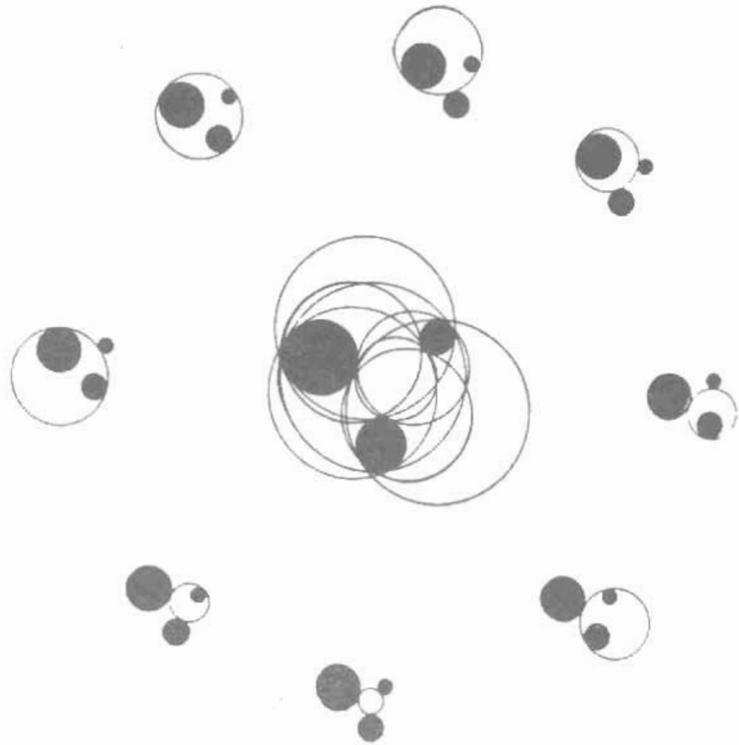
Sự phát triển của các ý tưởng toán học

Đối với những thiên thể trong vũ trụ nói chung và với sao chổi nói riêng thì khoảng thời gian 3000 năm không có ý nghĩa gì cả. Nó chưa bằng một giây trong quá trình hình thành lâu dài của vũ trụ. Nhưng các bạn, cũng như tôi – một nhà toán học – đều biết rằng đối với con người chúng ta thì 3000 năm là một khoảng thời gian rất lớn.

Flammaron, 1892

Chúng ta thường dễ dàng quên đi mất một sự thật toán học là một chuỗi tiến hóa của các ý tưởng, bắt đầu với những phát hiện sớm nhất của người tiền sử về việc chia thức ăn và khám phá của họ về khái niệm số. Mỗi một sự đóng góp, dù là nhỏ đến đâu, cũng đều rất quan trọng đối với quá trình phát triển tư tưởng toán học. Một số nhà toán học đã dành cả đời mình để nghiên cứu một ý tưởng duy nhất trong khi những người khác lại đa dạng hóa những nghiên cứu của họ. Chẳng hạn, chúng ta hãy cùng nhìn một cách tổng quan vào quá trình phát triển của hình học Euclid. Các ý tưởng hình học được khám phá bởi rất nhiều người trong suốt thời cổ đại. Thales (640 546 tr.C.N) được xem là người đầu tiên tiếp cận một cách logic các ý tưởng hình học. Những người khác trong 300 năm tiếp theo đã khám phá ra hầu hết những gì chúng ta học trong môn Hình học ở Phổ thông hiện nay. Khoảng năm 300 tr.C.N, Euclid đã sưu tập và tổ chức lại các ý tưởng hình học hình thành từ trước cho tới lúc đó. Đó quả là một công việc khổng lồ. Ông biên soạn tất cả những kiến thức này thành một hệ thống toán học được biết đến dưới cái tên *hình học Euclid*. Trong bộ sách *The Elements* (*Cơ bản*) của mình, ông sắp xếp kiến thức sao cho chúng đi theo một mạch phát triển logic. Bộ sách *The*

Elements, được viết hơn 2000 năm trước đây, chưa thể là một hệ thống toán hoàn hảo dưới cái nhìn của các nhà toán học ngày nay, nhưng nó vẫn là một công trình khoa học phi thường.



Apollonius, được truyền cảm hứng từ công trình của Euclid, đã đóng góp thành quả nghiên cứu của mình cho toán học trong lĩnh vực hình nón, thiên văn học và đạn đạo học. Hình trên là minh họa một trong những bài toán lí thú của ông:

Cho ba đường tròn cố định,
hãy tìm một đường tròn tiếp xúc với cả ba đường tròn đó.

Hình minh họa trình bày tám đáp án của bài toán này.

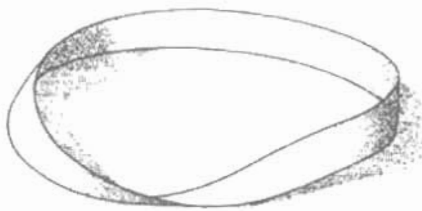
Tô-pô học và bài toán *Bản đồ bốn màu*

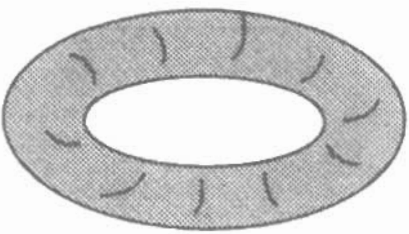
Với những người làm bản đồ trước đây, tồn tại một quy luật chưa được chứng minh – đó là bản đồ trên mặt phẳng hoặc trên mặt cầu chỉ cần bốn màu để tô và phân biệt các quốc gia với nhau. Năm 1976, bài toán *Bản đồ bốn màu* nổi tiếng đã được đặt dấu kết thúc với chứng minh bằng máy tính của K. Appel và W. Haken tại trường Đại học Illinois, Chicago, Mỹ. Nhưng chứng minh trên máy tính của họ sau đó vẫn tiếp tục không được thừa nhận.

Nội dung bài toán là: Chứng minh rằng chỉ cần tô bản đồ trên mặt phẳng bằng bốn màu để các vùng lãnh thổ cạnh nhau có các màu khác nhau.

Thay đổi đi một chút, chúng ta xét bài toán tô màu trên các mô hình tô-pô khác mặt phẳng. Các nhà tô-pô học nghiên cứu những bề mặt có hình dáng rất lạ thường như hình bánh rán, bánh quy xoắn, các mặt hình dải Möbius – với chúng một mặt cầu có thể biến thành mặt phẳng bằng cách đâm thủng một lỗ trên đó, sau đó kéo giãn rồi vuốt phẳng nó ra. Như vậy, về bản chất, số màu cần thiết để tô một mặt phẳng và một mặt cầu là như nhau. Tô-pô là lĩnh vực nghiên cứu các tính chất không thay đổi của vật thể khi vật bị biến dạng - giống như miếng cao su bị kéo giãn hay co lại. Vậy những loại tính chất nào không thay đổi? Vì vật được phép biến dạng, nên tô-pô không thể nghiên cứu về kích thước, hình dạng hay các vật thể rắn. Một số đặc điểm mà các nhà tô-pô học tìm kiếm đó là vị trí của các điểm bên trong hay bên ngoài một đường, số các mặt của vật thể, vật có phải là một đường cong kín hay không, số các vùng bên trong và bên ngoài của nó. Như vậy, đối với các đối tượng tô-pô mới này, **tô màu bản đồ** là một vấn đề hoàn toàn khác bởi lời giải của bài toán bản đồ bốn màu không thể áp dụng cho chúng được.

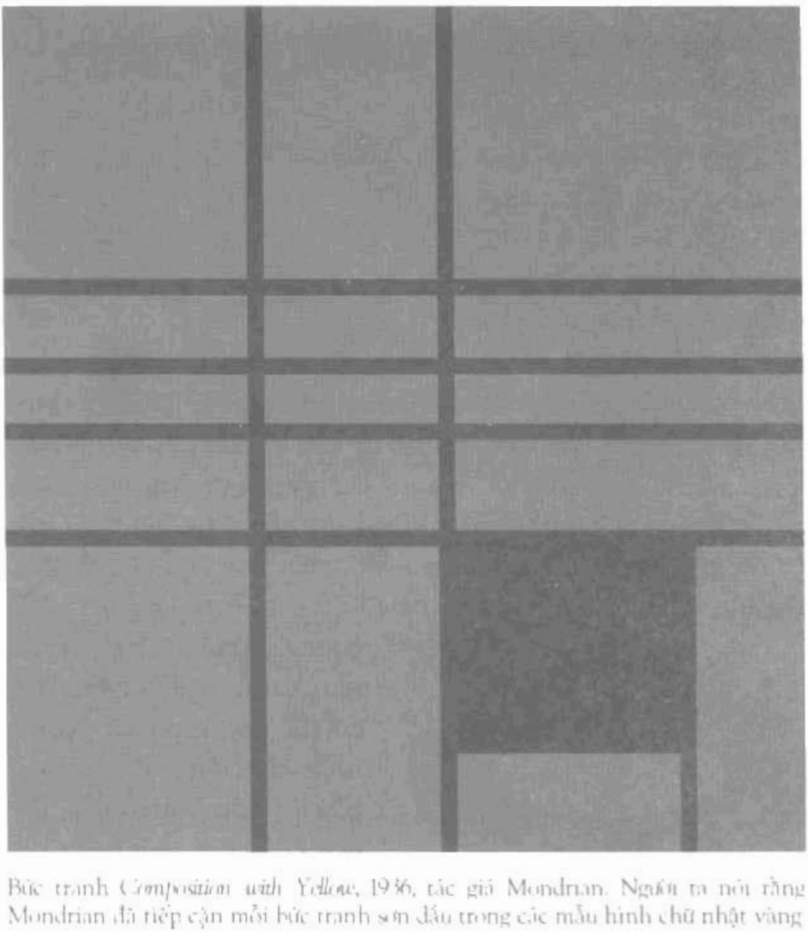
Bạn hãy thử tô màu các bản đồ khác nhau trên giấy. Sau đó, biến tờ giấy đó thành dải Möbius (xoắn tờ giấy nửa vòng rồi dán hai đầu lại với nhau). Liệu bốn màu có đủ không? Không hề! Vậy số màu tối thiểu cần dùng để có thể tô màu bất kì bản đồ nào là bao nhiêu? Cách dễ nhất để tìm ra đáp án là tưởng tượng ra một hình xuyến (trông giống như một chiếc bánh rán được tạo ra từ một mảnh giấy phẳng). Tô màu bản đồ trên một mặt của tờ giấy. Cuộn nó thành một hình trụ. Sau đó, hãy tưởng tượng là ta uốn cong hai đầu hình trụ lại để tạo thành hình xuyến. Bạn có thể xác định số màu ít nhất cần dùng để tô màu bản đồ trên hình xuyến (bề mặt của chiếc bánh rán) là bao nhiêu không?


Dải Möbius


Hình xuyến

Hội hoạ và sự cân đối động

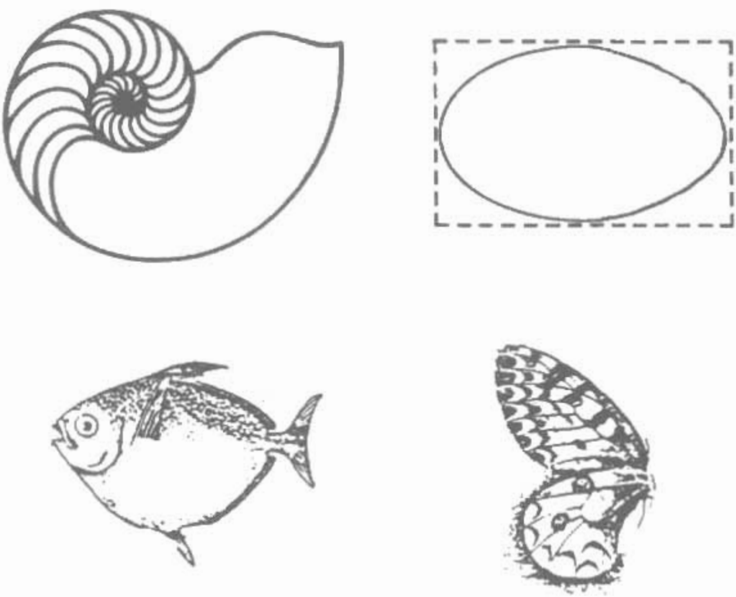
Có rất nhiều hình đối xứng xuất hiện trong tự nhiên như hình của những chiếc lá, những con bướm, cơ thể con người, những bông tuyết. Nhưng cũng có vô vàn hình dáng trong tự nhiên không đối xứng. Chúng ta hãy cùng xem hình các quả trứng, một bên cánh của con bướm, ốc anh vũ, hình con cá.



Bức tranh *Composition with Yellow*, 1936, tác giả Mondrian. Người ta nói rằng Mondrian đã tiếp cận mỗi bức tranh sơn dầu trong các mẫu hình chữ nhật vàng

Những hình không đối xứng này cũng sở hữu sự cân đối tuyệt đẹp trong hình dáng, được gọi là ***sự cân đối động***. Chúng ta có thể tìm thấy hình dạng của hình chữ nhật vàng[1] hay tỉ lệ vàng trong tất cả các hình cân đối động.

Việc ứng dụng tỉ lệ vàng và hình chữ nhật vàng trong hội hoạ được gọi là ***kĩ thuật của cân đối động***. Albrecht Dürer, George Seurat, Pietter Mondrian, Leonardo da Vinci, Salvador Dali và George Bellows, tất cả các họa sĩ này đều dùng hình chữ nhật vàng trong tác phẩm của mình để tạo ra được sự cân đối động.



Các hình trên thể hiện sự cân đối động của ốc anh vũ, quả trứng, cánh bướm và con cá.

---

(1). Xem mục Hình chữ nhật vàng

Số siêu hạn

Các tập sau đây có bao nhiêu phần tử:

$\{a, b, c\}$?
$\{-1, 5, 6, 4, \frac{1}{2}\}$?
$\{\ \}$

Nếu bạn trả lời là 3, 5 và 0, thì tức là bạn đang mô tả lực lượng (số lượng các phần tử) của các tập hợp đó.

Thế còn với tập hợp sau, bạn sẽ nói nó có bao nhiêu phần tử
$\{1, 2, 3, 4, 5,...\}$?

Nếu bạn trả lời là vô hạn phần tử, bạn đã nói không rõ ràng bởi có rất nhiều tập hợp vô hạn khác nhau. Trên thực tế, tồn tại một tập hợp vô hạn các số cardinal (số chỉ lực lượng của một tập hợp) vô hạn, chúng được gọi là các số siêu hạn.

Đúng như tên gọi của nó, số cardinal siêu hạn (vượt quá sự hữu hạn) là "số" mô tả một lượng vô hạn. Không có số hữu hạn nào có thể mô tả thích đáng một tập hợp vô hạn. Hai tập hợp có thể biểu diễn bởi cùng một số cardinal nếu các phần tử của tập này có thể ghép cặp với các phần tử của tập kia sao cho không có phần tử nào bị bỏ sót trong mỗi tập.

Ví dụ:

$\{a, b, c, d\}$
$\{1, 2, 3, 4\}$ có lực lượng là 4, tức là có 4 phần tử trong mỗi tập.

tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$

tập $B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots, n^2, \ldots\}$

Tập A và tập B có cùng lực lượng vì các phần tử của mỗi tập có thể ghép cặp với nhau. Tuy nhiên, trông có vẻ như là mâu thuẫn khi mà tập A chứa các số không phải là số chính phương nhưng không phần tử nào của nó bị bỏ sót trong quá trình ghép cặp.

Nhà toán học Đức thế kỉ XIX George Cantor đã giải quyết mâu thuẫn này bằng cách xây dựng một hệ số mới – hệ số dùng cho các tập hợp vô hạn. Ông lấy biểu tượng $\aleph$ (aleph - chữ cái đầu tiên trong bảng chữ cái Do Thái cổ) làm kí hiệu cho "số " các phần tử của một tập vô hạn. Đặc biệt, $\aleph_0$ (aleph không), là số nhỏ nhất trong số các số cardinal siêu hạn.

$\aleph_0$ mô tả số các phần tử trong:

Các số nguyên dương = {1, 2, 3, 4, 5,..., n,...} n
Các số nguyên không âm = {0, 1, 2, 3, 4, 5,..., n-1,...} là
Các số nguyên dương = {+1,+2,+3,+4,+5,..., n,...} một số
Các số nguyên âm = {-1, -2, -3, -4, -5,..., -n,...} nguyên dương.
Các số nguyên = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}
Các số hữu tỉ.

Tất cả các tập hợp trên và bất kì tập hợp nào khác có thể ghép cặp với các số nguyên dương được coi là có số cardinal $\aleph_0$.

Những ví dụ bên dưới chỉ ra cách thức lập tương ứng 1-1 giữa các số nguyên dương.

{ 1, 2, 3, 4, 5, . . . , n, . . . } các số nguyên dương.

{0, 1, 2, 3, 4, . . . , n-1, . . . } các số nguyên không âm.

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, . . . } các số nguyên dương.

$\left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \ldots \right\}$ các số hữu tỉ.

Biểu đồ bên dưới cho thấy thứ tự sắp xếp các số hữu tỉ ở trong tập hợp phía trên.

1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 . . .

2/1, 2/2, 2/3, 2/4, 2/5 . . .

3/1, 3/2, 3/3, 3/4, 3/5 . . .

4/1, 4/2, 4/3, 4/4, 4/5 . . .

5/1, 5/2, 5/3, 5/4, 5/5 . . .

. . . .

. . . .

Cantor đã phát minh ra phương pháp này nhằm sắp xếp các số hữu tỉ theo một thứ tự nào đó sao cho mỗi số hữu tỉ sẽ xuất hiện ở đâu đó trong chuỗi sắp xếp này.

Cantor cũng phát triển một hệ thống số học hoàn chỉnh để thao tác với các số siêu hạn:

$$\aleph_o, \ \aleph_1, \aleph_2, \ \aleph_3, \ \aleph_o, \ldots, \aleph_n, \ldots$$

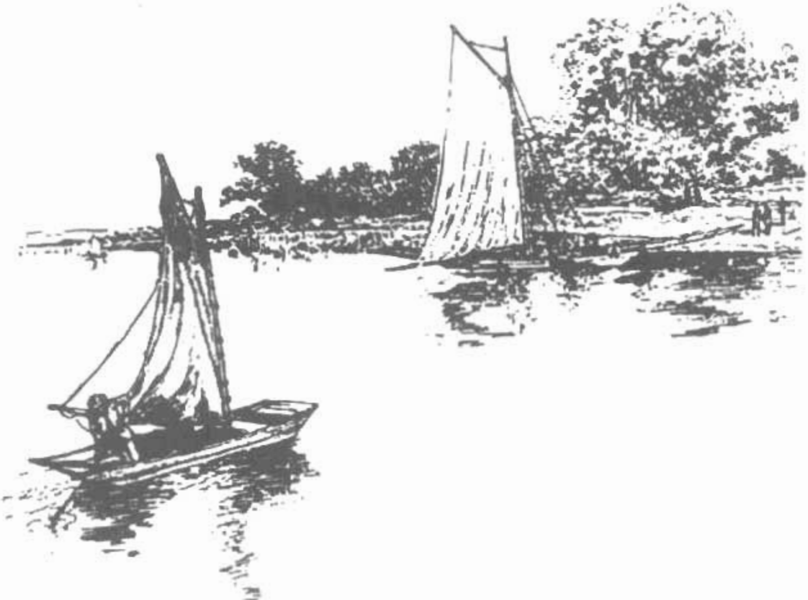
Ông cũng chứng minh

$$\aleph_o < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \aleph_o < \ldots < \aleph_n, \ldots$$

và chứng minh thêm rằng $\aleph_1$ mô tả lực lượng của tập hợp các số thực, các điểm trên một đường thẳng, các điểm trên mặt phẳng và các điểm của bất kì một phần nào trong không gian nhiều chiều hơn.

Bài toán logic

Bài toán logic này xuất hiện trong những ghi chép từ thế kỉ XVIII.



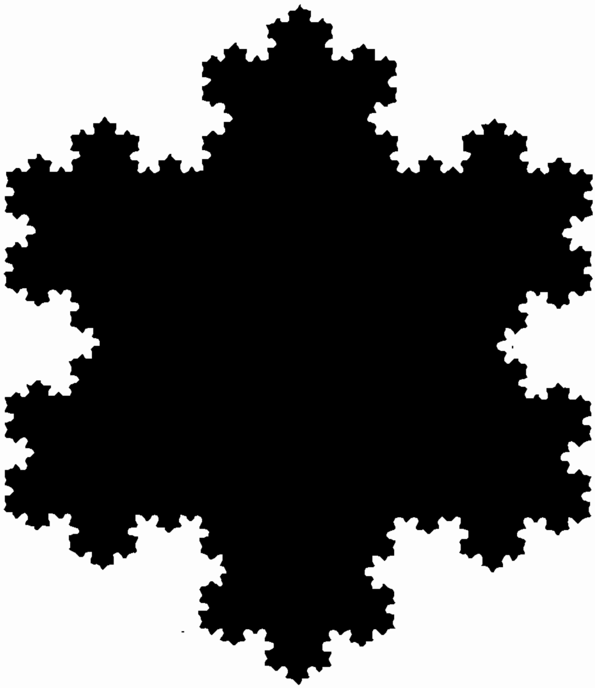
Một người nông dân cần mang theo một con dê, một con sói và một cây bắp cải qua sông. Chiếc thuyền của ông chỉ chở được ông cùng với con dê, hoặc con sói, hoặc cây bắp cải. Nếu ông chở con sói, thì con dê sẽ ăn mất cây bắp cải. Nếu ông chở cây bắp cải, thì con sói lại ăn thịt con dê. Chỉ khi nào có mặt ông cùng ở đó thì bắp cải và con dê mới không bị ăn.

Vậy người nông dân phải chở tất cả qua sông như thế nào?

Xem câu trả lời ở phần *Lời giải và đáp án*.

Đường bông tuyết

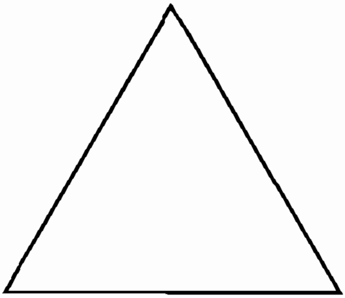
Đường bông tuyết[1] có tên gọi xuất phát từ hình dạng giống bông tuyết khi nó được tạo thành. Để tạo ra một đường bông tuyết, ta bắt đầu với một



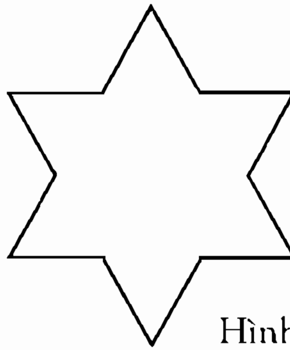
tam giác đều (hình 1). Chia ba mỗi cạnh của nó. Trên mỗi đoạn giữa của từng cạnh, dựng một tam giác đều ra phía ngoài tam giác ban đầu (hình 2). Tiếp tục quá trình này với mỗi mũi nhọn tam giác đều - chia ba các cạnh và vẽ thêm các mũi nhọn mới (hình 3). Đường bông tuyết được sinh ra bởi quá trình lặp này.

---

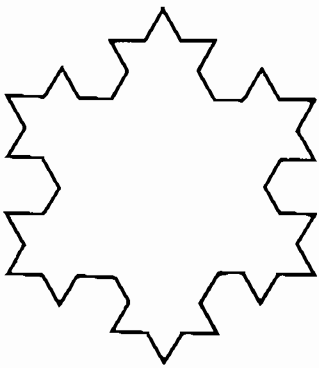
(1). *Xem mục Fractal để biết thêm thông tin.*



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Một đặc điểm lạ lùng của đường bông tuyết là: diện tích của nó hữu hạn, nhưng chu vi của nó bằng vô cùng.

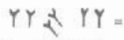
Chu vi của đường bông tuyết không ngừng tăng lên đến vô cùng. Nó có thể được vẽ trên một mảnh giấy rất nhỏ bởi diện tích của nó là hữu hạn, chính xác là bằng $1\frac{3}{5}$ diện tích của tam giác ban đầu.

Số 0 - Ở đâu và khi nào?

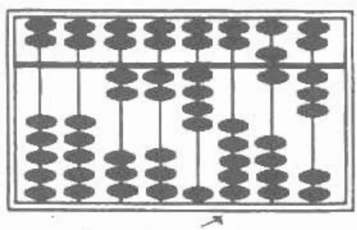
Số 0 là số không thể thiếu trong hệ số đếm của chúng ta. Nhưng khi các hệ đếm được phát minh, chúng không bao gồm số 0 ngay từ ban đầu. Trên thực tế, hệ số đếm của người Ai Cập cổ đại không có, hay không đòi hỏi phải có số 0.

SỐ 0 CỦA NGƯỜI MAYA

SỐ 0 CỦA NGƯỜI BABYLON



$= 7202 = 2(60)^2 + 0(60) + 2$

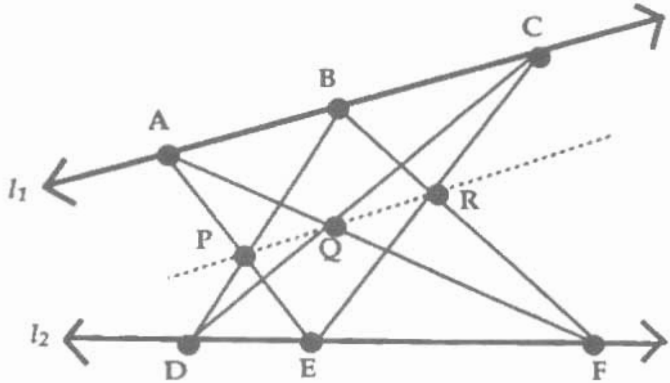


SỐ 0 TRÊN BÀN TÍNH

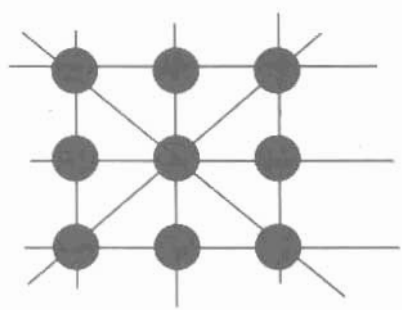
Vào khoảng năm 1700 tr.C.N, hệ số đếm theo vị trí cơ số 60 hình thành. Người Babylon sử dụng chúng cùng với lịch 360 ngày của họ. Họ thực hiện những tính toán phức tạp với hệ số đó, nhưng không có kí hiệu nào cho số 0 được nghĩ ra. Một khoảng trống được bỏ lại trong con số, tượng trưng cho số 0. Khoảng năm 300 tr.C.N, người Babylon dùng kí hiệu sau cho số 0: . Các hệ số đếm Maya và Ấn Độ được phát minh sau hệ số đếm của người Babylon. Chúng là các hệ số đầu tiên sử dụng kí hiệu cho số 0 với chức năng vừa là số chỉ vị trí hàng, vừa là số 0.

Định lí Pappus và câu đố chín đồng xu

Định lí Pappus: Nếu A, B, C là các điểm nằm trên đường thẳng l_1, còn D, E, F là những điểm nằm trên đường thẳng l_2, thì P, Q, R thẳng hàng.



Áp dụng định lí Pappus để giải *Câu đố chín đồng xu.*

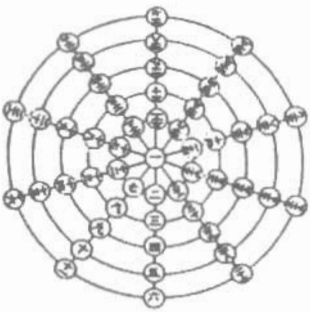


Câu đố chín đồng xu: Hãy sắp xếp chín đồng xu ở vị trí như trong hình vẽ trên (có tất cả 8 đường thẳng, mỗi đường chứa ba đồng xu) thành hình có 10 đường thẳng, mỗi đường thẳng chứa ba đồng xu.

Xem câu trả lời ở phần *Lời giải và đáp án.*

Vòng tròn ma thuật Nhật Bản

Vòng tròn ma thuật Nhật Bản này là tác phẩm của Seki Kowa. Ông là nhà toán học người Nhật Bản thế kỉ XVII, người được vinh danh nhờ khám phá ra một dạng phép tính vi tích phân và các phép toán trên ma trận ứng dụng trong giải hệ phương trình.



Trong vòng tròn ma thuật, mỗi đường kính bao gồm các số có tổng bằng nhau. Phương pháp dùng để tạo vòng tròn này có nét giống như phương pháp mà nhà toán hoặc vĩ đại của thế giới Friedrich Gauss sử dụng để tính tổng 100 số tự nhiên đầu tiên.

Chuyện kể rằng khi Gauss đang học Trung học cơ sở, một hôm thầy giáo ra bài cho cả lớp tính tổng của 100 số tự nhiên đầu tiên. Tất cả các học sinh khác trong lớp đều cặm cụi thêm số vào cột để tính tổng theo cách tính truyền thống. Riêng Gauss thì ngồi suy nghĩ. Thấy vậy, thầy giáo nghĩ là Gauss đang mơ mộng nên yêu cầu cậu bé bắt tay vào làm bài. Gauss trả lời rằng cậu đã giải xong bài toán. Thầy giáo bảo Gauss trình bày lời giải và Gauss đã trình bày cách làm của mình.

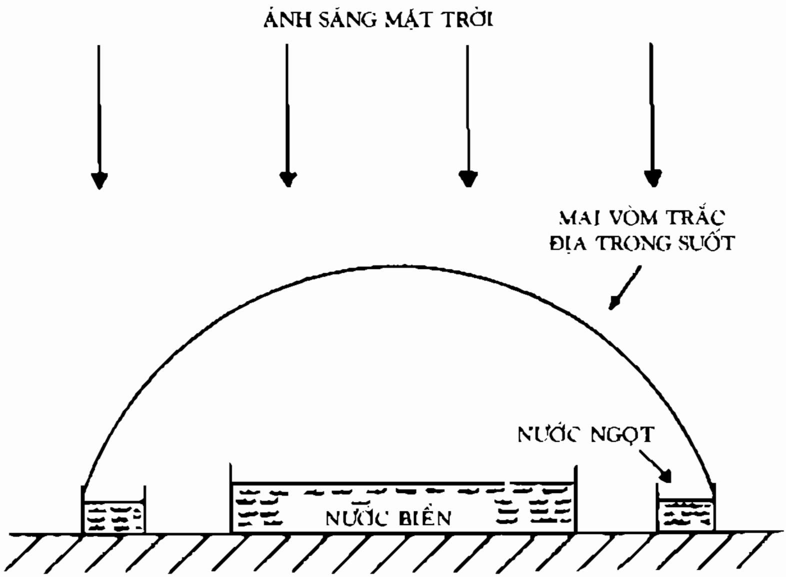
$$1+2+3+4+5+...+50+51+...+96+97+98+99+100$$

Gauss ghép cặp các số sao cho tổng của mỗi cặp là 101 và cậu bé thấy là có 50 cặp như vậy. Vì thế, tổng sẽ là 50 x 101 = 5050.

Vòm trắc địa và sự chưng cất nước

Các hình dạng hình học có rất nhiều ứng dụng khác nhau vào những tình huống trong cuộc sống hàng ngày của con người. Ví dụ sau sẽ cho thấy sức mạnh ứng dụng của chúng. Trên hòn đảo Symi ngoài khơi Hy Lạp, nơi mà mỗi một cụm chưng cất nước hình bán cầu hoạt động bằng năng lượng mặt trời cung cấp nước cho 4000 người dân trên đảo, mỗi người được khoảng gần 4 lít nước mỗi ngày.

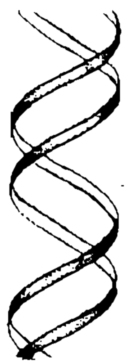
Sức nóng của mặt trời làm nước biển ở giữa hệ thống chưng cất bốc hơi. Sau đó, nước ngọt ngưng tụ ở dưới mái vòm hình cầu và lăn xuống các phía bên cạnh rồi được hứng ở xung quanh cạnh của vòm cầu.



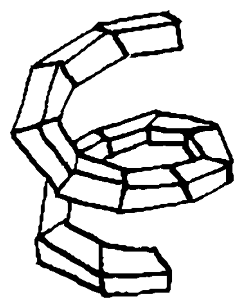
Đường xoắn ốc - toán học và di truyền

Đường xoắn ốc là một đối tượng toán học hấp dẫn có liên quan đến nhiều lĩnh vực trong cuộc sống chúng ta, chẳng hạn như trong cấu trúc gen, các mô hình tăng trưởng, sự vận động, trong thế giới tự nhiên và thế giới nhân tạo.

Để hiểu được đường xoắn ốc, ta cần nhìn vào sự hình thành của nó. Khi một nhóm các khối hình hộp chữ nhật giống nhau được nối với nhau theo chiều dọc, thì một cột hình hộp chữ nhật được hình thành. Thực hiện quá trình tương tự với các khối hình chữ nhật mà một mặt được đặt xiên đi. Khi đó cột sẽ uốn cong thành một đường tròn. Nhưng nếu một mặt của mỗi khối hình chữ nhật bị cắt chéo, thì cột sẽ uốn cong xung quanh chính nó và tạo thành một đường xoắn ốc ba chiều.



Mạch xoắn kép ADN

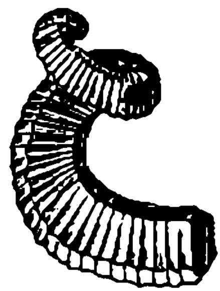


Các khối hình chữ nhật bị cắt chéo tạo thành một đường xoắn ốc ba chiều

Deoxyribonucleicacid, ADN – nhiễm sắc thể di truyền, được tạo thành từ hai mạch xoắn kép ba chiều như vậy. ADN có hai cột phân tử đường phôtphat xoắn xung quanh để liên kết các đơn vị phân tử xiên lại với nhau, giống như các khối hộp chữ nhật bị cắt xiên phía trên.

Có nhiều loại xoắn ốc. Trên thực tế, cột khối chữ nhật thẳng và cột có hình tròn có thể coi như là các trường hợp đặc biệt của đường xoắn ốc. Các đường xoắn ốc có thể xoắn theo chiều kim đồng hồ (phía bên phải) hoặc ngược chiều kim đồng hồ (phía bên trái). Đường xoắn ốc theo chiều kim đồng hồ, ví dụ như cái mở nút chai, khi chiếu vào gương sẽ cho ta đường xoắn ốc ngược chiều kim đồng hồ.

Hình ảnh của các loại đường xoắn ốc hiện diện trong rất nhiều mặt cuộc sống. Cầu thang uốn, dây cáp, ốc vít, bu lông, lò xo trong máy sưởi, đai ốc, dây thừng và kẹo mút, tất cả đều là những xoắn ốc về bên trái hay bên phải. Các đường xoắn ốc nằm hình nón được gọi là đường xoắn ốc hình nón, có thể thấy chúng ở các ốc vít, lò xo giường và cầu thang thoải hình xoắn ốc do kiến trúc sư tài ba Frank Lloyd Wright thiết kế ở Viện Bảo tàng Guggenhein tại New York.



Hình dạng của tinh thể prochorite

Trong tự nhiên, chúng ta cũng tìm thấy rất nhiều dạng xoắn ốc – sừng của các loài như linh dương, cừu đực, kì lân biển, động vật có vú; vi-rút; vỏ của ốc sên và các động vật thân mềm; trong cấu trúc thực vật của thân cây như cuống hoa, bắp ngô, các loại hoa, quả thông, những chiếc lá,... Dây rốn của con người cũng là ba đường xoắn ốc xoắn với nhau gồm một tĩnh mạch và hai động mạch quấn về bên trái.

Cũng không phải là bất thường nếu các đường xoắn ốc về bên trái và bên phải quấn vào nhau. Một cặp thực vật như vậy là cây kim ngân (quấn về bên trái) và giống cây bìm bìm (quấn về bên phải, bao gồm cả bìm bìm hoa tía trong họ của nó). Chúng đã trở nên bất hủ nhờ đại văn hào Shakespeare với vở kịch A *Midsummer Nights Dream (Giấc mộng đêm hè).* Trong vở kịch, Hoàng hậu Titania nói với Bottom: "Hãy ngủ đi chàng, ta sẽ vỗ về chàng trong vòng tay... Giống như bìm bìm và kim ngân dịu dàng quấn vào nhau".

Quá trình vận động cũng là một lĩnh vực khác có sự tham gia của đường xoắn ốc. Hình ảnh về đường xoắn ốc được thấy ở lốc xoáy, xoáy nước, mương nước, cách chạy lên chạy xuống thân cây của con sóc và đường bay hình xoắn ốc theo chiều kim đồng hồ của loài dơi sống ở các động Carlsbad tại New Mexico.

Cây kim ngân

Ốc vít

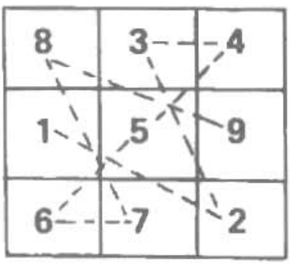
Một dây leo

Lò xo

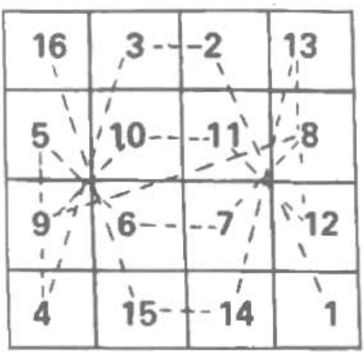
Phát hiện về sự liên quan của đường xoắn ốc với phân tử ADN giải thích cho sự tham gia của chúng vào nhiều lĩnh vực đến vậy. Bản thân các hình dạng khác nhau của đường xoắn ốc và các mô hình phát triển trong tự nhiên chịu sự quy định của mã di truyền, vì thế đường xoắn ốc sẽ mãi mãi xuất hiện ngày càng nhiều trong thế giới tự nhiên.

Đường thần kì

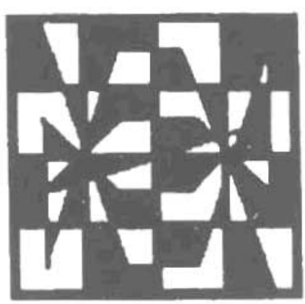
Vào những năm 1900, Claude F. Bragdon đã khám phá ra cách dùng các ma phương để tạo thành những mẫu hình nghệ thuật đẹp mắt. Ông phát hiện ra rằng nếu các số trong ma phương được nối với nhau theo thứ tự liên tiếp trong dãy số tự nhiên, chúng sẽ hình thành các mẫu hình thú vị có tên gọi là ***đường thần kì***. Thực tế, ***đường thần kì*** không phải là một đường, mà là họa tiết nhận được sau khi nối các số. Khi các họa tiết này được tô màu sáng tối, chúng tạo nên một số thiết kế rất độc đáo. Vốn là một kiến trúc sư nên Bragdon đã dùng các ***đường thần kì*** do mình khám phá để trang trí kiến trúc và thiết kế đồ họa của các cuốn sách cũng như vải vóc.



*Đường thần kì ở **Lạc thư**, ma phương sớm nhất được biết đến. Nó xuất hiện ở Trung Quốc vào năm 2200 tr.CN.*

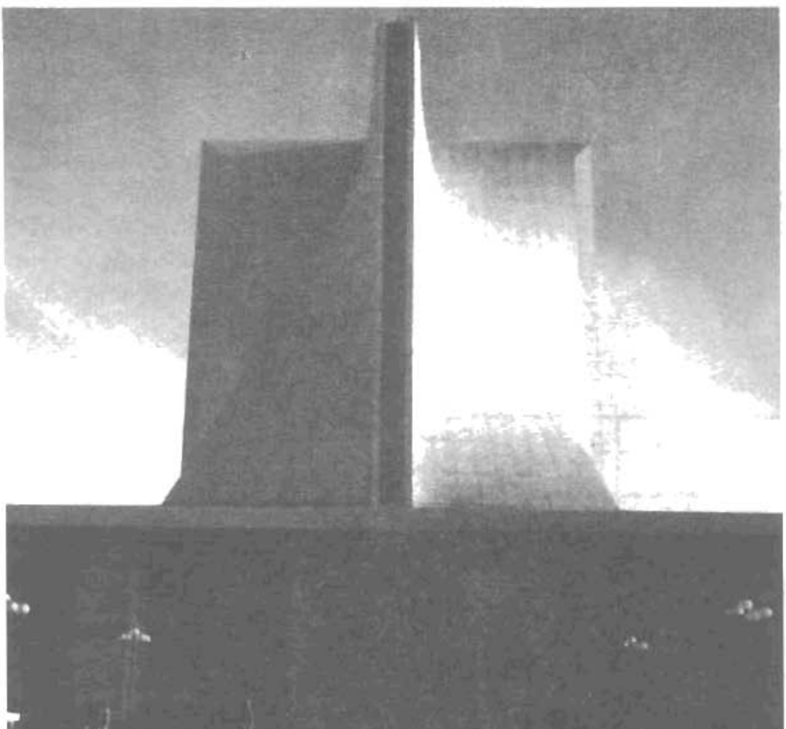


Đường thần kì ở ma phương năm 1514 của Albrecht Dürer.



Toán học và kiến trúc

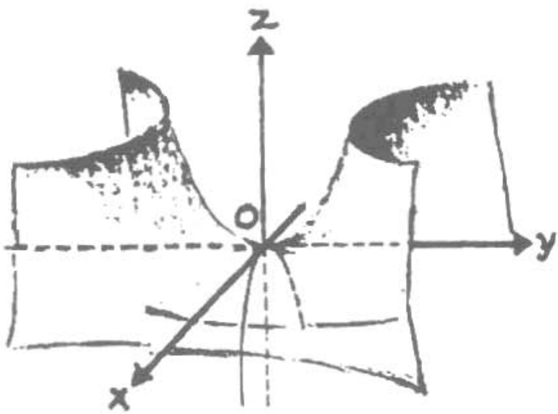
Tất cả chúng ta đều đã quen với rất nhiều hình dạng toán học được dùng trong kiến trúc như hình vuông, hình chữ nhật, hình chóp và hình cầu. Nhưng một số công trình kiến trúc lại được thiết kế với những hình dạng ít được biết đến hơn nhiều. Ví dụ nổi bật nhất chính là hình paraboloid hyperbolic ở thánh đường St. Mary tại San Francisco. Thánh đường do Paul A. Ryan, John Lee và các nhà tư vấn kĩ thuật Pier Luigi Nervi ở Rome cùng Pietro Bellaschi tại Viện Công nghệ Massachuset, Mỹ, thiết kế.



Thánh đường St. Mary

Tại lễ khánh thành thánh đường, khi được hỏi nếu Micheangelo (nhà điêu khắc tài ba của thời Phục hưng) ở đây thì ông sẽ nghĩ gì về thánh đường này, Nervi trả lời: "Ông sẽ không thể nào tưởng tượng được nó. Mẫu thiết kế này xuất phát từ những lí thuyết hình học chưa được chứng minh thời đó".

Đỉnh của công trình này là một mũi nhọn hình paraboloid hyperbolic có thể tích 60420 lít, với các bức tường cao 61m so với sàn nhà được đỡ bởi bốn cột bê tông khổng lồ trải dài 28,65m trên mặt đất. Mỗi cột chịu một khối lượng 4082 tấn. Các bức tường làm từ 1680 tấm bê tông được đúc sẵn với 128 kích cỡ khác nhau. Kích thước nền hình vuông của thánh đường là 77,7m x 77,7m.



Mặt paraboloid hyperbolic là sự kết hợp của một paraboloid (hình tạo ra khi xoay một parabol quanh trục đối xứng của nó) và một hypebol ba chiều.

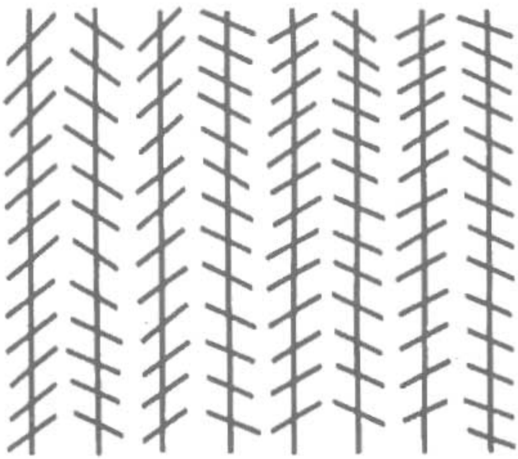
Phương trình của mặt paraboloid hyperbolic:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \qquad a, b > 0, c \neq 0$$

Lịch sử ảnh ảo giác

Vào nửa sau thế kỉ XIX, xuất hiện một làn sóng quan tâm đến lĩnh vực ảnh ảo giác. Trong thời kì này, các nhà vật lí và tâm lí học đã viết gần hai trăm bài báo mô tả các ảnh ảo giác và lí giải vì sao chúng lại xảy ra.

Ảnh ảo giác xuất hiện là do cấu trúc mắt của chúng ta, trí não của chúng ta hoặc sự kết hợp của cả hai. Những gì chúng ta nhìn thấy không phải lúc nào cũng là những gì thực sự tồn tại. Điều quan trọng là không nên đưa ra những kết luận hoàn toàn từ trực giác mà phải kiểm tra bằng những đo đạc thực tế.



Ảnh ảo giác của Zollner

Chính hình ảo giác trên đã khơi dậy làn sóng nghiên cứu về ảnh ảo giác trong thế kỉ XIX. Johann Zollner (1834 - 1883), một nhà vật lí thiên thể, một giáo sư thiên văn học (đã có nhiều đóng góp trong lĩnh vực nghiên cứu các sao chổi, Mặt Trời, các hành tinh và cũng là người phát minh ra quang kế đã tình cờ nhìn thấy một mảnh vải với hoa văn giống như vậy. Các đường thẳng đứng thực ra là song song nhau, nhưng nhìn vào thì có vẻ không phải. Một vài giải thích có thể đưa ra đối với ảnh ảo giác này là:

1) Sự khác nhau giữa các góc nhọn được đặt ở các hướng khác nhau trên các đường song song.

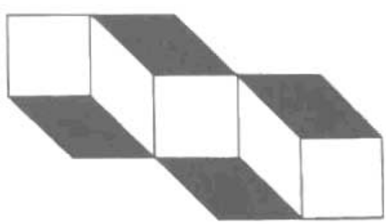
2) Độ cong võng mạc của mắt.

3) Các đoạn gạch chéo đặt thêm vào làm mắt của chúng ta hội tụ và phân kì, khiến cho các đường song song trông lệch đi.

Người ta phát hiện ra ảnh ảo giác có hiệu lực mạnh nhất khi các đoạn gạch chéo tạo với các đường song song một góc 45^{0}.

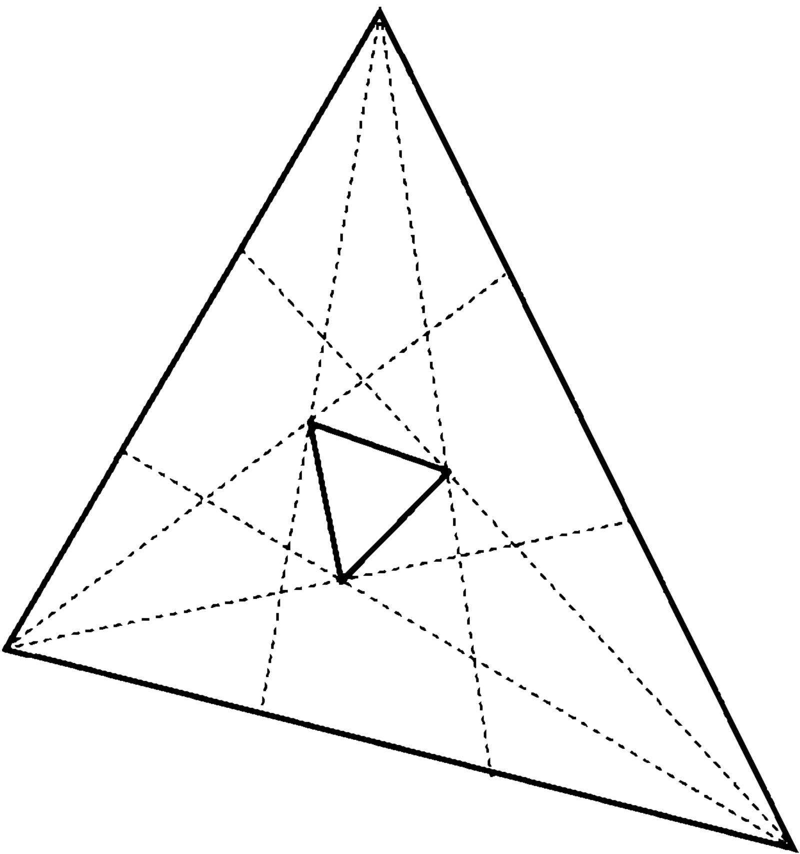
Ảnh ảo giác nổi tiếng trên xuất bản năm 1915 là tác phẩm của chuyên gia vẽ tranh biếm họa W.E. Hill. Nó thuộc loại ảo giác dao động bởi mắt của chúng ta nhìn qua lại giữa hai hình – một cụ bà và một phụ nữ trẻ.

Bạn có thể làm cho các mặt màu đen trở thành mặt trên hay thành đáy của các khối lập phương được không?



Bài toán chia ba góc và tam giác đều

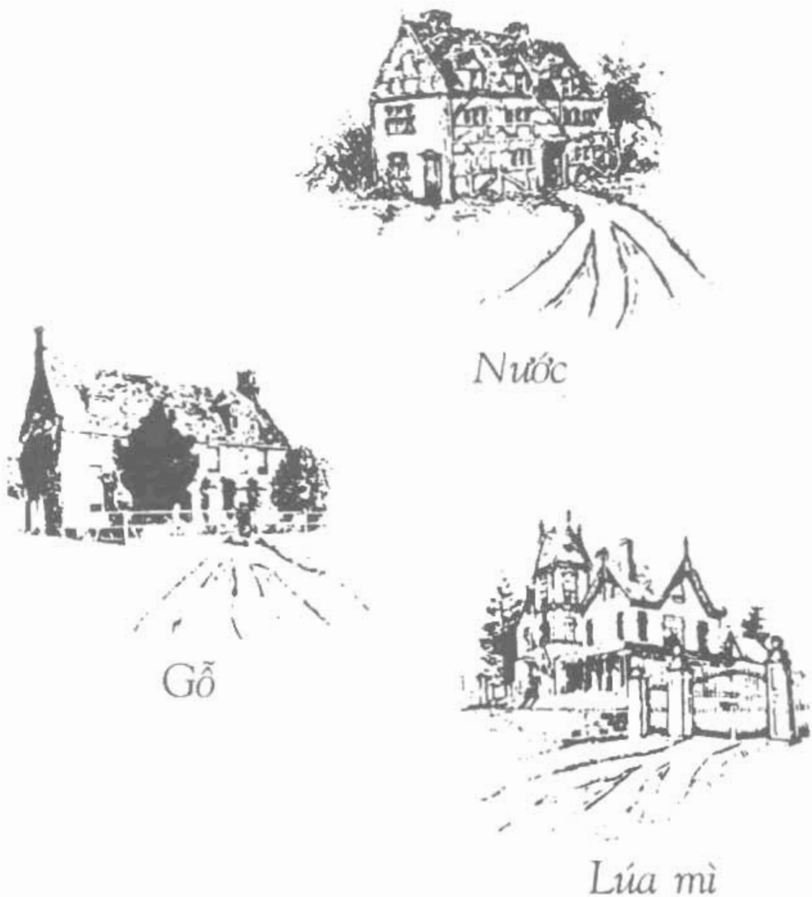
Hình học là lĩnh vực luôn phong phú các ý tưởng, khái niệm và định lí. Thật thú vị khi khám phá ra tính chất của một hình học nào đó. Chẳng hạn như lấy một tam giác bất kì và chia ba mỗi góc của nó. Sau đó, nghiên cứu hình tạo bởi các đường chia ba đó. Bạn nhận thấy điều gì?[1]



(1) Có thể chứng minh rằng các đường chia ba này luôn tạo thành một tam giác đồng dạng với tam giác ban đầu.

Bài toán về gỗ, nước và lúa mì

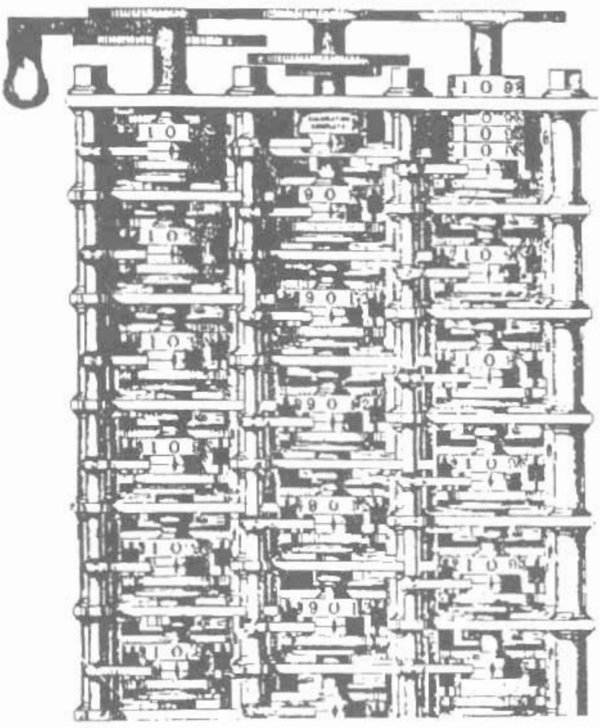
Từ mỗi ngôi nhà cần phải làm ba đường đi tách biệt nhau: một đường tới giếng nước, một đường tới cối xay lúa và một tới nhà chứa củi. Không có hai đường nào giao nhau. Hãy thử xem bạn có thể giải được bài toán này không nhé!



Xem cách giải bài toán ở phần *Lời giải và đáp án.*

Charles Babbage-Leonardo da Vinci của máy tính hiện đại

Một Leonardo da Vinci của các máy tính hiện đại chính là Charles Babbage (1792 – 1871), nhà toán học, kĩ sư, nhà phát minh người Anh. Ngoài những phát minh đồng hồ đo tốc độ đầu tiên, các loại máy chính xác, mã hóa và phương pháp để nhận biết dèn hải đăng từ những tia sáng của chúng, ông dành hầu hết thời gian của cuộc đời mình để tạo ra một chiếc máy có thể thực hiện các phép tính toán học và các bảng tính.



Hình minh họa này là một phần máy vi sai của Charles Babbage, ông bắt đầu xây dựng nó vào năm 1823 và từ bỏ vào năm 1842.

Mô hình đầu tiên của Babbage về *máy vi sai* được chế tạo với các bánh răng quay tay trên các trục, nó có thể tạo ra một bảng số chính phương có 5 chữ số. Sau đó, Babbage thiết kế một máy lớn hơn với khả năng lên đến 20 chữ số và có thể in câu trả lời trên một bản khắc đồng. Trong quá trình chế tạo các chi tiết, ông đã trở thành một chuyên gia kĩ thuật, phát triển rất nhiều công cụ và kĩ thuật tiên tiến báo hiệu trước các phương pháp hiện đại ngày nay. Ông không ngừng hoàn thiện các chi tiết, thiết kế và loại bỏ những kết quả cũ. Chủ nghĩa cầu toàn và trình độ công nghệ thời đó đã cản trở ông hoàn thành sản phẩm cuối cùng. Sau khi từ bỏ *máy vi sai*, trong ông bắt đầu thai nghén ý tưởng làm một *cỗ máy giải tích*[1] – một chiếc máy có thể thực hiện bất kì tính toán nào, có khả năng nhớ 1000 số có năm mươi chữ số, sử dụng các bảng tính từ các thư viện của chính nó, so sánh câu trả lời và đánh giá không theo các chỉ dẫn có sẵn. Các thao tác của máy dựa vào các bộ phận cơ và thẻ đục lỗ. Mặc dù ý tưởng của ông không thành hiện thực, song cấu trúc logic của *máy giải tích* đã được sử dụng trong các máy tính hiện nay.

Máy *giải tích* trên thực tế đại diện cho một lớp các máy, cũng giống như các *máy vi tính* ngày nay. Quả thật rất đáng ngạc nhiên khi Babbage hoàn toàn một mình vừa khởi xướng ý tưởng mới mẻ này, vừa tự chế tạo, phát triển các dụng cụ để xây dựng, thiết kế các bước khác nhau và vừa phát triển những lí thuyết toán học cần thiết để lập trình máy. Một công việc phi thường! Một mô hình có thể hoạt động được của *máy giải tích* đã được IBM xây dựng để tưởng nhớ công lao của Charles Babbage.

---

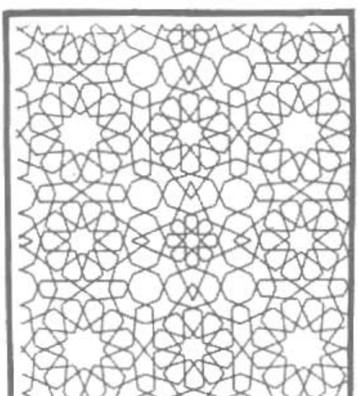
(1). Ada Lovelace, con gái của Lord Byron, đã cổ vũ và cùng làm việc với Charles Babbage để chế tạo cỗ máy giải tích. Ngoài những đóng góp về tài chính, kiến thức sâu rộng về toán học của cô đã góp phần đáng kể trong khía cạnh lập trình máy tính của máy giải tích. Và quan trọng không kém chính là tất cả sự hăng hái và lòng nhiệt tình của cô đối với công trình của ông.

Toán học và nghệ thuật của Hồi giáo

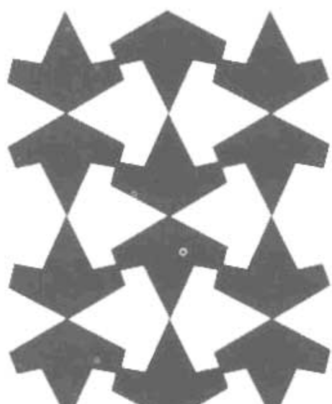
Phô bày cơ thể con người là điều cấm kị của những người theo đạo Hồi, chính vì vậy họ phải chuyển các hình thức nghệ thuật trong trang trí và chạm khảm sang thiết kế hình học, đây cũng là một hình thức nghệ thuật lát mặt phẳng. Kết quả là đã hình thành một mối quan hệ tự nhiên giữa nghệ thuật và toán học.

Sự phong phú của các họa tiết được tạo ra miêu tả:

- Sự đối xứng.
- Lát mặt phẳng, chiếu phản xạ, quay và chuyển dịch các hình hình học.
- Sự hài hòa giữa các họa tiết tối và sáng.



Mẫu thiết kế này cho thấy các phép tịnh tiến của các hình.



Hình trên minh họa sự lát phẳng[1], chiếu phản xạ, các phép quay và lấy đối xứng. Sự phù hợp giữa các hình sáng và tối cũng thể hiện rõ ở thiết kế này.

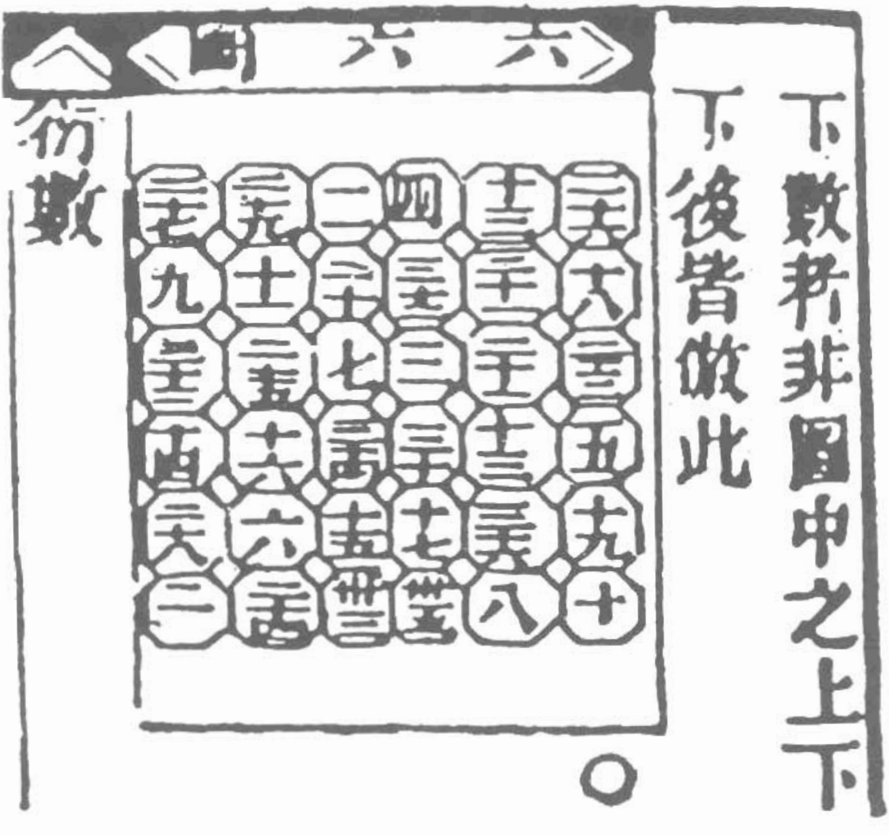
---

(1). Lát nền phẳng tức là phủ mặt phẳng bằng một hình cụ thể sao cho không có khe hở nào còn sót lại và chúng không xếp chồng lên nhau.

Ma phương Trung Quốc

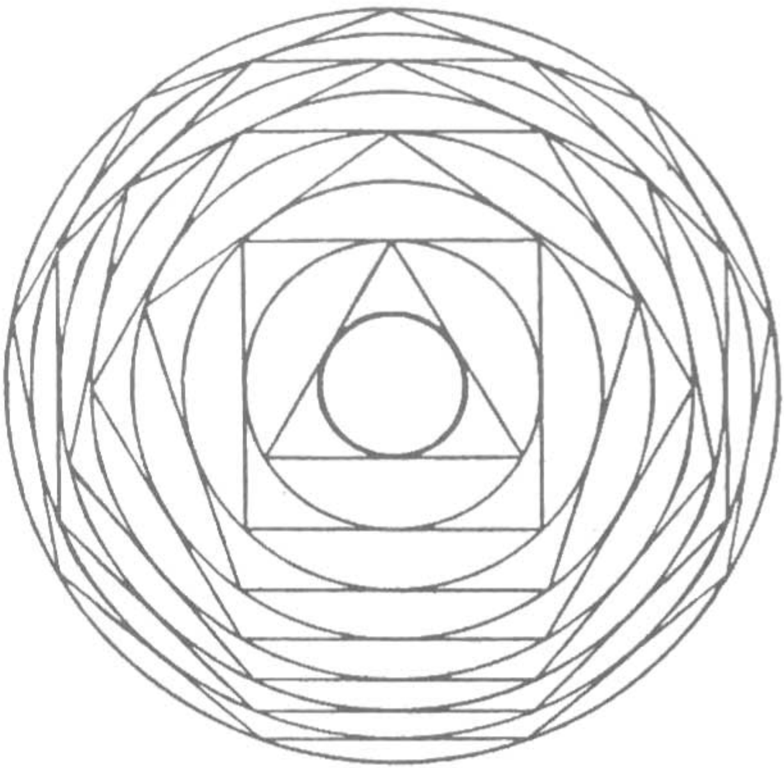
Ma phương Trung Quốc (hình bên dưới) đã có khoảng 400 năm tuổi. Ở hệ thập phân, nó có các số sau:

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10



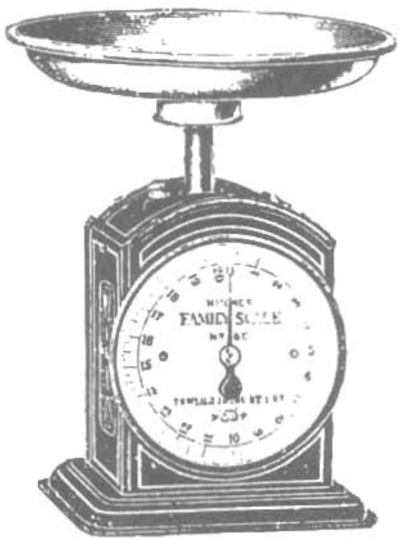
Vô cùng và giới hạn

Hình vẽ dưới đây mô tả các đa giác đều ngoại tiếp. Số lượng các cạnh đa giác lần lượt tăng lên liên tiếp. Ta có thể nghĩ rằng bán kính của chúng sẽ tăng mãi mà không bị giới hạn, nhưng trên thực tế, dãy bán kính tăng này tiến đến một giới hạn gấp khoảng 12 lần bán kính đường tròn ban đầu.



Bài toán về đồng tiền giả

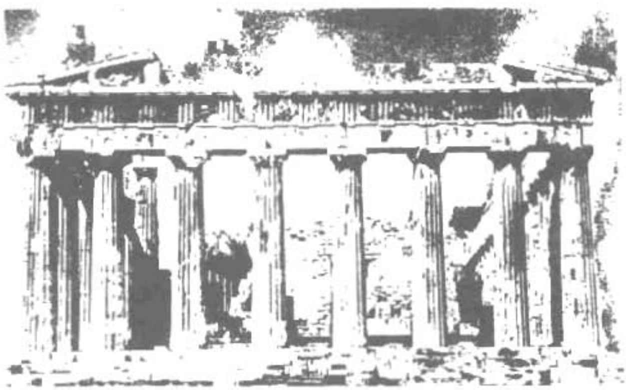
Có 10 cọc đồng tiền bạc, mỗi cọc có mười đồng. Cho biết khối lượng của mỗi đồng tiền thật và rằng mỗi đồng tiền giả nặng hơn đồng tiền thật một gam. Trong số 10 cọc, có một cọc gồm toàn tiền giả. Sử dụng một chiếc cân chính xác đến từng gam, bạn cần cân ít nhất bao nhiêu lần để xác định được cọc tiền giả?



Xem cách giải ở phần *Lời giải và đáp án.*

Đền thờ Parthenon và toán học

Các kiến trúc sư Hy Lạp cổ đại thế kỉ V tr.C.N là những bậc thầy về sử dụng ảo giác quang học và tỉ lệ vàng trong thiết kế của các công trình. Họ nhận thấy rằng các công trình được xây dựng thẳng đứng một cách chính xác trông sẽ không thẳng trong mắt chúng ta. Sự biến dạng này là do võng mạc của mắt cong khiến cho các đường thẳng ở những góc đặc biệt trông sẽ như là cong khi mắt chúng ta nhìn vào.



Đền thờ Parthenon

Đền thờ Parthenon là một trong những minh họa điển hình nhất cho thấy cách các kiến trúc sư cổ đại bù đắp sự biến dạng gây ra bởi mắt như thế nào. Kết quả là các cột của đền thờ Parthenon thực sự hơi cong ra ngoài, các cạnh của nền hình chữ nhật cũng vậy. Hình 1 mô tả hình ảnh đền thờ Parthenon mà mắt ta nhìn thấy khi các kiến trúc sư chưa chỉnh cong các cột và các cạnh nền.

Như vậy, bằng việc tạo ra những bù đắp, đền thờ và các cột trông thẳng đứng và rất hài hòa về mặt thẩm mĩ.

Hình 1

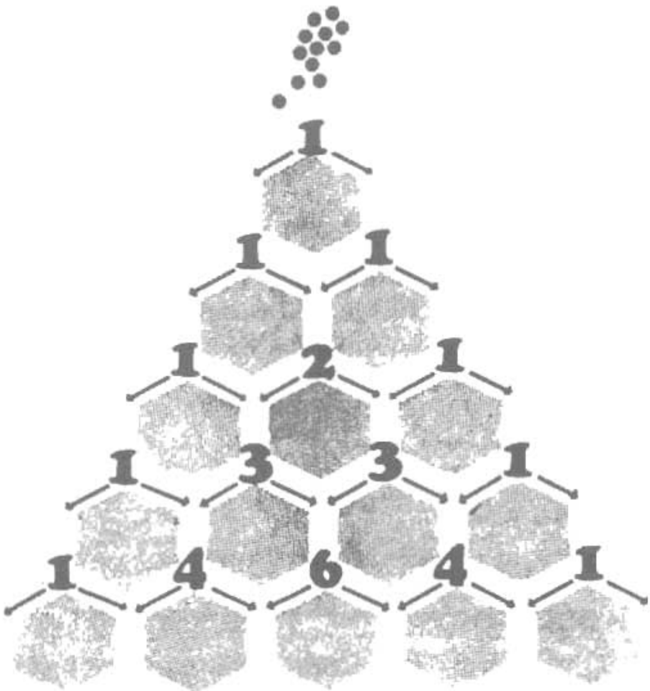
Các kiến trúc sư và các họa sĩ Hy Lạp cổ đại cũng nhận thức được tỉ lệ vàng và hình chữ nhật vàng[1] tăng cường biểu hiện thẩm mĩ của các tòa nhà và tượng điêu khắc. Họ có kiến thức sâu sắc về tỉ lệ vàng bao gồm cả cách xây dựng, cách xấp xỉ và cách sử dụng nó để dựng các hình chữ nhật vàng. Đền thờ Parthenon minh họa việc vận dụng tỉ lệ vàng trong kiến trúc. Hình 2 cho thấy kích thước của đền thờ phù hợp gần như chính xác với hình chữ nhật vàng.

Hình 2

(1) Xem mục *Hình chữ nhật vàng* (trang 104) để biết thêm thông tin.

Xác suất và tam giác Pascal

Tam giác được tạo thành từ các khối lục giác đều dưới đây có thể tạo ra tam giác Pascal theo một cách rất độc đáo. Những quả bóng từ một bể chứa nằm trên đỉnh tam giác rơi



xuống qua các vật cản sáu cạnh rồi tập trung lại ở bên dưới. Tại mỗi lục giác, khả năng quả bóng rơi sang bên trái hay bên phải là như nhau. Như trong minh họa, các quả bóng phân bố vị trí theo các số của tam giác Pascal. Chúng tập trung ở đáy và tạo ra một hình chuông có dạng *đường phân bố chuẩn*. Đường cong này được sử dụng trong các công ty bảo hiểm để lập ra các tỉ lệ, sử dụng trong khoa học để nghiên cứu động thái của các phân tử và trong nghiên cứu phân bố dân cư.

Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) đã định nghĩa xác suất của một biến cố là tỉ lệ giữa số lượng khả năng mà biến cố có thể xảy ra với tổng các khả năng có thể có của tất cả các biến cố. Vì thế, khi tung một đồng xu, xác suất nhận được mặt ngửa là

$\frac{1}{2}$ – số mặt ngửa của một đồng xu
– số lượng tất cả các biến cố có thể xảy ra (mặt ngửa và mặt sấp)

Tam giác Pascal có thể được dùng để tính các tổ hợp khác nhau và tổng cộng các tổ hợp có thể. Ví dụ: khi bốn đồng xu được tung lên trên không, các tổ hợp có thể của mặt ngửa và mặt sấp là:

4 ngửa – NNNN = 1
3 ngửa và 1 sấp – NNNS, NNSN, NSNN, SNNN = 4
2 ngửa và 2 sấp – NNSS, NSNS, SNSN, NSSN, SNSN, SSNN = 6
1 ngửa và 3 sấp – NSSS, SNSS, SSNS, SSSN = 4
4 sấp – SSSS = 1

Hàng thứ 4 kể từ đỉnh của tam giác Pascal (đỉnh tam giác coi là hàng thứ 0) chỉ ra các kết quả có thể này – 1 4 6 4 1. Tổng các số này là tổng cộng các kết quả có thể = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16. Vì vậy, xác suất để có 3 ngửa và 1 sấp là:

$\frac{4}{16}$ – số lượng tổ hợp có thể của 3 ngửa và 1 sấp
– tổng số các tổ hợp có thể xảy ra

Với những tổ hợp lớn khi khai triển tam giác Pascal rất cồng kềnh, thì công thức nhị thức Newton được sử dụng. Mỗi hàng của tam giác Pascal chứa các hệ số trong khai triển nhị thức $(a + b)^n$. Ví dụ: để tìm các hệ số trong khai triển của $(a + b)^3$, người ta nhìn vào hàng thứ 3 kể từ đỉnh tam giác

Pascal (đỉnh được coi là hàng thứ 0, tức là $(a + b)^0 = 1$). Tại dòng thứ 3 ta thấy 1 3 3 1, chính là các hệ số trong khai triển

$$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 = (a + b)^3.$$

Công thức nhị thức có thể áp dụng cho hàng thứ n của tam giác Pascal.

Công thức nhị thức:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1}(a^{n-1}b^1) + \frac{n}{1}\left(\frac{n-1}{2}\right)(a^{n-2}b^2) + \ldots + b^n$$

hệ số thứ r là $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Số lượng các tổ hợp r phần tử của tập có n phần tử là:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

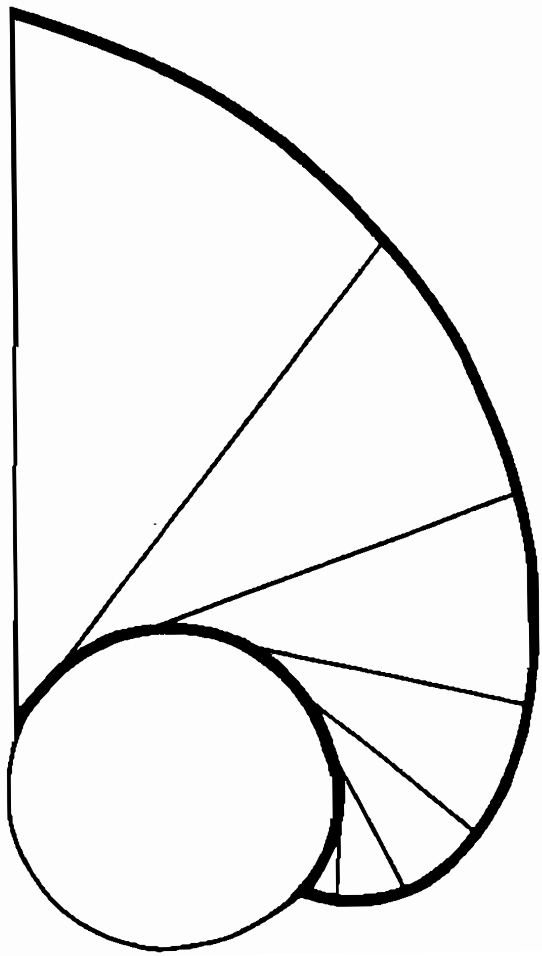
Nếu chọn 3 phần tử trong số 10 phần tử, thì số các cách chọn có thể là:

$$C(10,3) = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 120$$

Có 120 cách chọn 3 phần tử từ 10 phần tử, hoặc bạn cũng có thể xem ở hàng thứ 10 của tam giác Pascal.

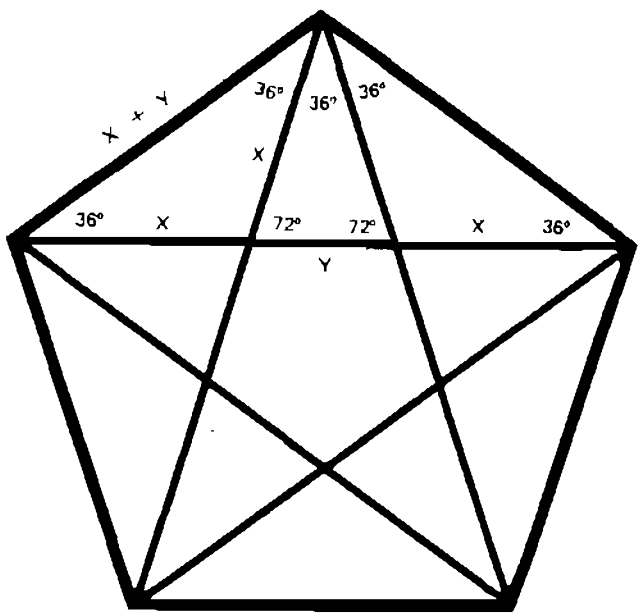
Đường thân khai

Khi một đoạn dây thừng bị cuộn hoặc bị tháo cuộn quanh một đường cong (ở đây là đường tròn) thì đầu mút của nó sẽ mô tả một đường thân khai. Rất nhiều hình ảnh về đường thân khai xuất hiện trong tự nhiên, ví dụ như đầu lá cọ, mỏ chim đại bàng hay vây lưng cá mập.



Ngũ giác, hình sao năm cánh và tam giác vàng

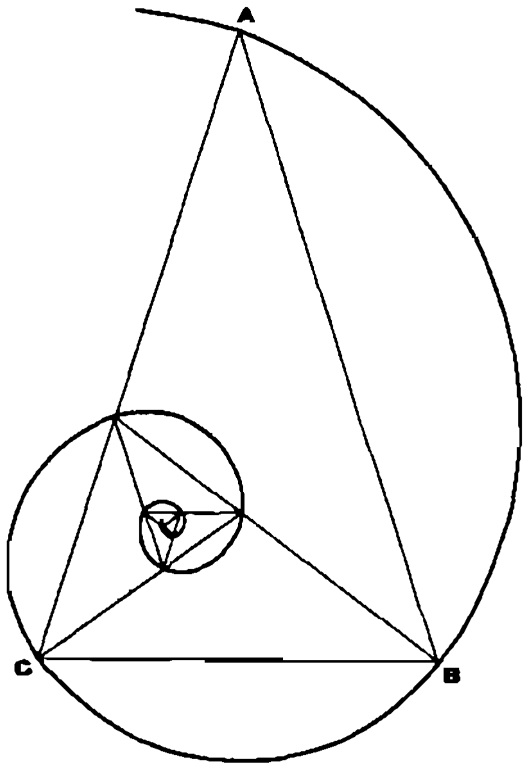
Từ một ngũ giác đều có thể tạo ra hình sao năm cánh bằng cách nối các đường chéo của ngũ giác với nhau. Trong hình dạng của sao năm cánh có xuất hiện những tam giác vàng. Chúng chia các cạnh của sao năm cánh thành các tỉ lệ vàng.



Tam giác vàng là tam giác cân có góc ở đỉnh là 36° và hai góc đáy là 72°. Tỉ lệ giữa cạnh bên và cạnh đáy của nó là tỉ lệ vàng. Khi góc đáy của nó được chia đôi thì đường chia đôi sẽ chia cạnh đối diện thành tỉ lệ vàng và tạo ra thêm hai tam giác cân nhỏ hơn.

Một trong hai tam giác này đồng dạng với tam giác ban đầu. Tam giác còn lại có chức năng như là vật tạo ra đường xoắn ốc.

Tiếp tục quá trình chia đôi góc đáy của tam giác vàng mới, ta sẽ nhận được một dãy các tam giác vàng và hình dáng của một đường xoắn ốc đẳng giác.[1]

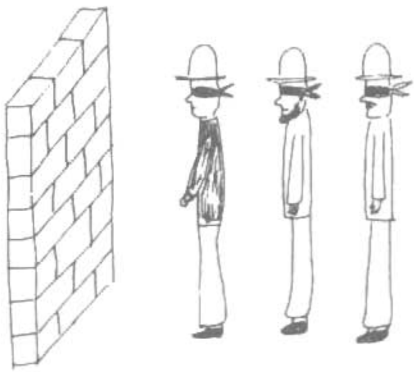


$$\frac{|AB|}{|BC|} = \text{tỉ lệ vàng, } \varnothing = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \approx 1{,}6180339\ldots$$

(1). Xem mục Hình chữ nhật vàng (trang 104) để biết thêm về đường xoắn ốc đẳng giác.

Ba người đàn ông đứng trước bức tường

Ba người đàn ông đứng xếp hàng thành một đường thẳng vuông góc với một bức tường. Họ đều bị bịt mắt. Sau đó, mỗi người được đội một chiếc mũ lấy từ một túi gồm ba mũ nâu và hai mũ đen. Ba người đàn ông được cho biết về thông tin này. Sau đó, các khăn bịt mắt được tháo ra. Người ta hỏi mỗi người đàn ông xem ông ta đang đội mũ màu gì.



Người đàn ông đứng xa tường nhất, có thể nhìn thấy hai người đứng trước ông ta, trả lời: "*Tôi không biết tôi đang đội mũ màu gì*". Người đứng giữa sau khi nghe thấy câu trả lời đầu tiên và nhìn thấy người trước ông ta cũng nói tương tự. Người thứ ba, chỉ có thể nhìn thấy bức tường, nhưng sau khi nghe hai người kia nói đã trả lời:

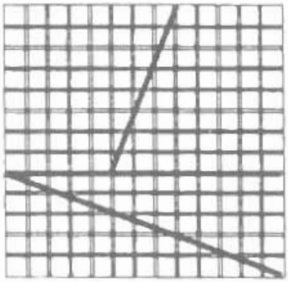
"Tôi biết tôi đội mũ màu gì rồi."

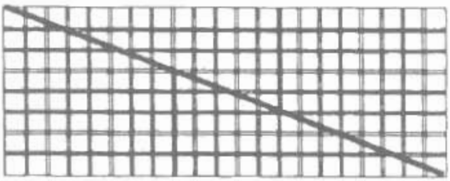
Ông ta đang đội mũ màu gì vậy? Và làm cách nào để ông ta biết điều đó?

Xem cách giải ở phần *Lời giải và đáp án.*

Sai lầm hình học và dãy số Fibonacci

Nếu một hình vuông được tạo thành bằng cách lấy tổng của hai số Fibonacci liên tiếp bất kì làm độ dài các cạnh của nó, thì sai lầm hình học xảy ra sẽ rất thú vị.





Ví dụ:

1) Dùng hai số Fibonacci liên tiếp là 5 và 8.

2) Vẽ một hình vuông 13 x 13.

3) Cắt hình vuông này như trong hình minh họa rồi tính diện tích của hình vuông và diện tích hình chữ nhật. Diện tích hình vuông lớn hơn diện tích của hình chữ nhật là 1 đơn vị.

4) Thử làm tương tự với hai số Fibonacci là 21 và 34. Trong trường hợp này, diện tích của hình chữ nhật lớn hơn diện tích của hình vuông 1 đơn vị.

Sự khác nhau 1 đơn vị này sẽ thay đổi giữa hình vuông và hình chữ nhật tùy thuộc vào hai số Fibonacci được sử dụng.[1]

---

(1) Dãy các tỉ lệ tạo thành từ các số Fibonacci liên tiếp 1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ thay đổi lớn hơn và nhỏ hơn so với tỉ lệ vàng. Giới hạn của dãy số này chính là giá trị của tỉ lệ vàng $\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$. Để biết thêm thông tin, bạn hãy xem mục Hình chữ nhật vàng (trang 104).

Mê cung

Ngày nay, chúng ta coi mê cung như là một câu đố giải trí, nhưng vào thời xưa, mê cung luôn gợi lên sự huyền bí, nguy hiểm. Người ta hoàn toàn có thể lạc lối vì lúng túng trong những con đường quanh co rắc rối, hay cũng có thể chạm trán với những quái vật ẩn náu trong lãnh địa mê cung. Thời xưa, các mê cung được xây dựng để bảo vệ các pháo đài. Những kẻ xâm lược buộc phải đi qua một quãng đường dài trong mê cung nên rất dễ bị phục kích.

Các mê cung đã xuất hiện ở rất nhiều nơi trên thế giới qua nhiều thế kỉ:

- *Những hình chạm trên đá ở Rock Valley, Ireland, vào khoảng năm 2000 tr.C.N.*
- *Mê cung Minoan ở đảo Crit, Hy Lạp, vào khoảng năm 1600 tr.C.N.*
- *Những dãy núi Alps, Pompeii, Scandinavia, Italy.*
- *Mê cung bằng cỏ ở xứ Wales và ở nước Anh.*
- *Các bộ mê cung khảm trên nền nhà của các nhà thờ châu Âu.*
- *Mê cung trên những tấm vải dệt ở châu Phi.*
- *Những hình chạm trên đá của người Ấn Độ Hopi, Arizona.*

Ngày nay, mê cung là mối quan tâm đặc biệt trong lĩnh vực tâm lí và thiết kế máy tính. Trong nhiều thập kỉ, các nhà tâm lí đã dùng các mê cung để nghiên cứu hành vi học tập ở động vật và con người. Những rô-bốt trên máy tính đã được chế tạo để giải các bài toán về mê cung như một bước khởi đầu trong quá trình chế tạo những máy hướng dẫn học tiên tiến hơn.

Khu vườn ở cung điện Hampton Court nước Anh.

Tô-pô là lĩnh vực toán học nghiên cứu các mê cung như một nhánh của đồ thị (giải các bài toán bằng phương pháp đồ thị). Đường cong Jordan vẫn thường bị nhầm thành mê cung. Trong tô-pô, chúng ta biết rằng đường cong Jordan là một đường tròn đã bị xoắn lại hoặc bị uốn vào trong hay vòng quanh mà không tự cắt chính nó. Nó có phần bên trong và bên ngoài giống như đường tròn, đây là điểm khác với mê cung. Vì vậy, cách duy nhất để đi từ bên trong ra bên ngoài của đường cong Jordan là đi qua chính nó.

Vì các rô-bốt đã được dùng để giải các mê cung nên các phương pháp có hệ thống phải được nghĩ ra để giải mê cung.

Các phương pháp giải mê cung:

(1) Đối với một mê cung đơn giản, bạn hãy tô đậm những lối cụt và vòng lặp mà bạn nhìn thấy. Các lối còn lại sẽ dẫn đến mục tiêu. Sau đó, chọn con đường ngắn nhất. Nếu mê cung phức tạp, phương pháp này sẽ rất khó áp dụng.

(2) Đi qua mê cung và luôn giữ một tay (bên phải hoặc bên trái) chạm vào tường. Phương pháp này rất đơn giản, nhưng không áp dụng được với tất cả các mê cung. Các mê cung ngoại lệ là: (a) các mê cung có hai cửa và một đường nối hai cửa với nhau mà đường đó không đi qua mục tiêu, (b) các mê cung với các đường đi có vòng lặp hoặc bao quanh mục tiêu.

(3) Nhà toán học người Pháp M. Trémaux đã nghĩ ra một phương pháp chung để giải bất kì một mê cung nào.

Các bước giải mê cung:

(a) Khi bạn đi trong mê cung, hãy vạch liên tục một đường về phía bên phải.

(b) Mỗi khi bạn đến một điểm giao giữa các đường, hãy chọn bất kì một lối nào mà bạn thích.

(c) Nếu trên con đường mới, bạn gặp lại một điểm giao cũ hoặc ngõ cụt, hãy quay trở lại đường mà bạn vừa đi tới đó.

(d) Nếu khi quay trở lại đường cũ, bạn lại gặp một điểm giao cũ thì hãy rẽ sang đường mới nếu có. Nếu không, hãy đi lại một đường mà bạn đã qua.

(e) Không bao giờ đi vào đường đã được đánh dấu ở cả hai phía. Mê cung này xuất hiện trên một tấm chăn Navajo.

Phương pháp này được cho là thành công, nhưng có thể mất hơi nhiều thời gian.

Cho dù là ở trong cuộc sống hay chỉ được vẽ ra bởi một cây bút trong tay, các mê cung vẫn tiếp tục thách thức, kích thích trí tò mò và cho chúng ta những giây phút giải trí lí thú.

Mê cung này xuất hiện trên một tấm chăn Navajo.

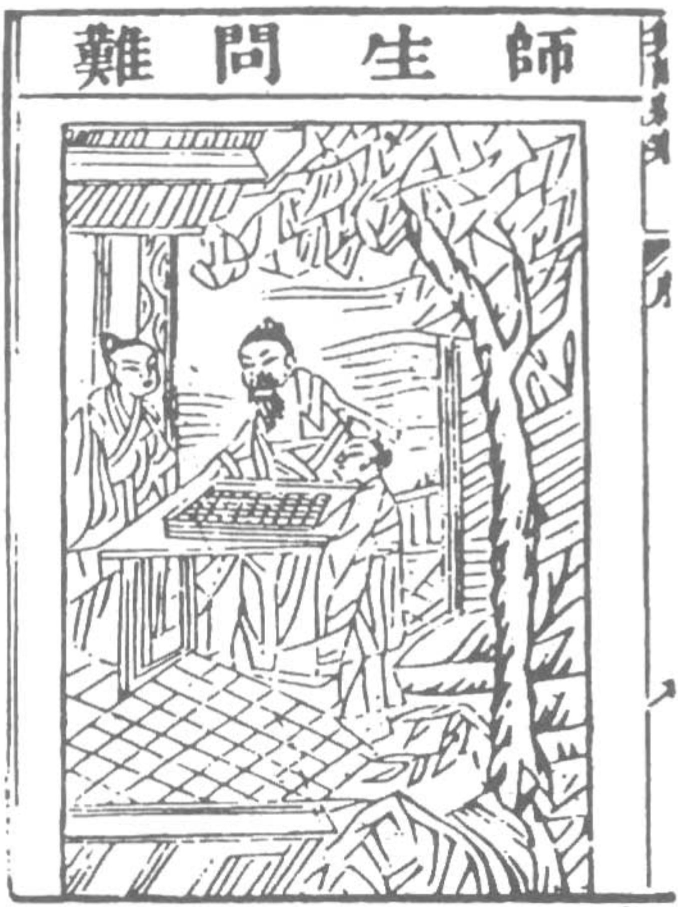
WATERLOO ROAD (ĐƯỜNG WATERLOO)

Mê cung về thành phố London này xuất hiện trên tạp chí *The Strand Magazine* vào tháng tư năm 1905 cùng với chỉ dẫn sau: "*Một người khách du lịch muốn đi vào Waterloo Road và mục đích của anh ta là đi đến Thánh đường St. Paul mà không phải đi qua bất kì ba-ri-e chắn đường nào trên các con đường đang sửa chữa*".

Bàn cờ đam Trung Quốc

Hình vẽ sau minh họa một phần bàn cờ đam của bàn tính Trung Quốc. Người Trung Quốc là những người đầu tiên nghĩ ra một hệ thống quy tắc dùng để giải các hệ phương trình.

Họ sẽ đặt các hệ số vào bàn tính, sau đó áp dụng các quy tắc dựa vào ma trận để giải bài toán.



Các giao tuyến của mặt nón

Một số người trong chúng ta cảm thấy thật khó hiểu khi các nhà toán học theo đuổi một vấn đề hay ý tưởng chỉ đơn giản vì nó thú vị hay gợi trí tò mò. Cùng nhìn lại các nhà tư tưởng Hy Lạp cổ đại, chúng ta thấy họ nghiên cứu các ý tưởng hết mình mà không quan tâm đến tính thiết thực của chúng, họ nghiên cứu chỉ vì chúng đầy hứng thú và thách thức. Trường hợp các ***giao tuyến của mặt nón*** cũng vậy.

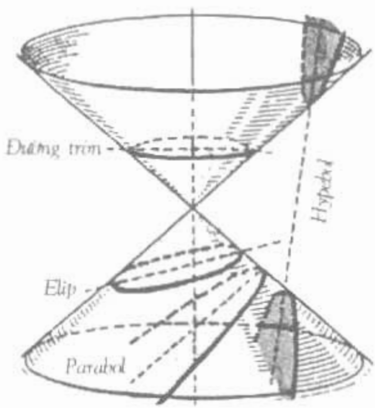
Mối quan tâm đầu tiên của các nhà toán học về những đường cong này là dùng chúng để giải ba bài toán dựng hình thời cổ đại – cầu phương hình tròn, nhân đôi hình vuông và chia ba một góc. Các bài toán này không có giá trị thiết thực vào thời đó, nhưng chúng đầy thách thức và khích lệ tư duy toán học. Thông thường, ứng dụng thực tế của một ý tưởng toán học không biểu hiện ngay trong nhiều năm. Các giao tuyến của mặt nón tạo ra trong suốt thế kỉ thứ III tr.C.N đã cho các nhà toán học thế kỉ XVII những nền tảng để bắt đầu thành lập nhiều lí thuyết khác nhau có liên quan đến các đường cong. Chẳng hạn như Kepler đã dùng elip để mô tả đường đi của các hành tinh, còn Galileo thì tìm ra đường parabol phù hợp với chuyển động của các viên đạn bắn ra trên trái đất.

Hình vẽ ở trang 199 minh họa cách một mặt phẳng giao với mặt nón để tạo ra ***đường tròn, elip, parabol và hypebol.***

Câu hỏi: Mặt phẳng phải cắt mặt nón như thế nào để tạo ra một đường thẳng, hai đường thẳng cắt nhau, hay một điểm?

Có rất nhiều sự vật hiện tượng trong vũ trụ là hình ảnh của các đường cong này. Một ví dụ hấp dẫn và có giá trị đương thời chính là **sao chổi Halley.**

Năm 1704, Edmund Halley đã tìm hiểu về quỹ đạo của rất nhiều sao chổi khác nhau từ các dữ liệu có được thời đó. Ông kết luận rằng các sao chổi năm 1682, 1607, 1531, 1456 thực chất chỉ là một sao chổi quay quanh mặt trời theo đường elip với chu kì khoảng 76 năm. Ông đã dự đoán thành công sự trở lại của nó vào năm 1758, thế là người ta gọi sao chổi này là sao chổi Halley. Những nghiên cứu gần đây cho rằng sao chổi Halley có thể đã được người Trung Quốc ghi lại ngay từ năm 240 tr.C.N.



Ví dụ về các đường cong trên trong vũ trụ

Parabol:

- Hình vòng cung của tia nước phun ra.
- Hình dạng ánh sáng của đèn chóp trên một bề mặt phẳng.

Elip:

- Quĩ đạo của một số hành tinh và sao chổi.

Hypebol:

- Đường đi của một số sao chổi và các vật thể thiên văn khác.

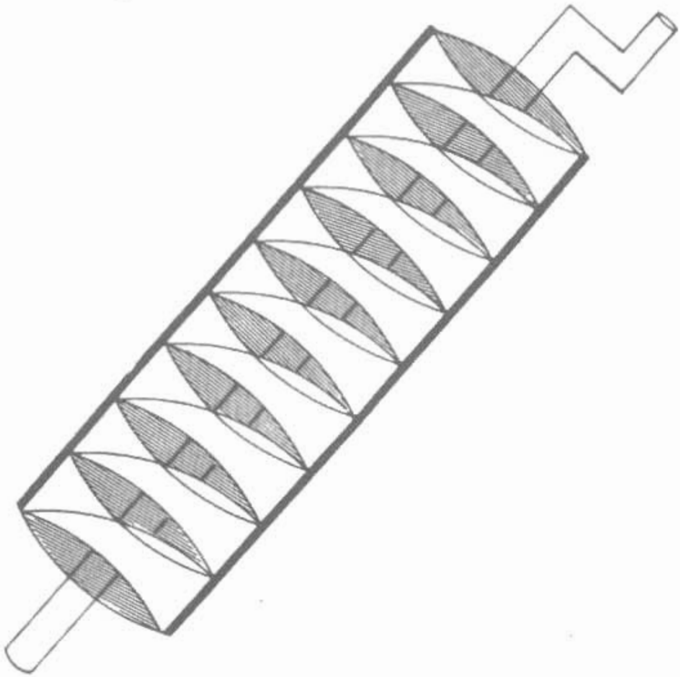
Đường tròn:

- Các gợn sóng trên mặt biển.
- Các quỹ đạo tròn.
- Bánh xe.
- Các vật thể trong tự nhiên.

Chân vịt Archimedes

Chân vịt Archimedes khi chìm vào trong nước và quay có thể bơm nước lên cao.

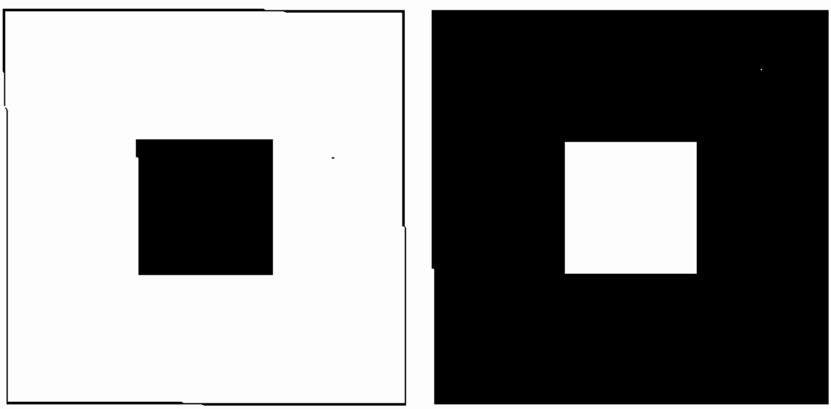
Ngày nay, nó vẫn được dùng trong tưới tiêu ở nhiều khu vực trên thế giới.



Archimedes (287 - 212 tr.C.N) là nhà toán học, nhà phát minh người Hy Lạp. Ông đã tìm ra quy tắc đòn bẩy và ròng rọc. Những khám phá của ông đã dẫn đến việc phát minh ra các máy móc có khả năng vận chuyển các vật nặng một cách dễ dàng. Ông nổi tiếng với phương pháp so sánh các thể tích bằng cách nhấn chìm các vật vào trong nước - thủy tĩnh - sự nổi - sử dụng các ý tưởng về vi tích phân - phát minh ra máy lăng đá - phát minh ra gương cầu lõm để tập trung ánh sáng mặt trời.

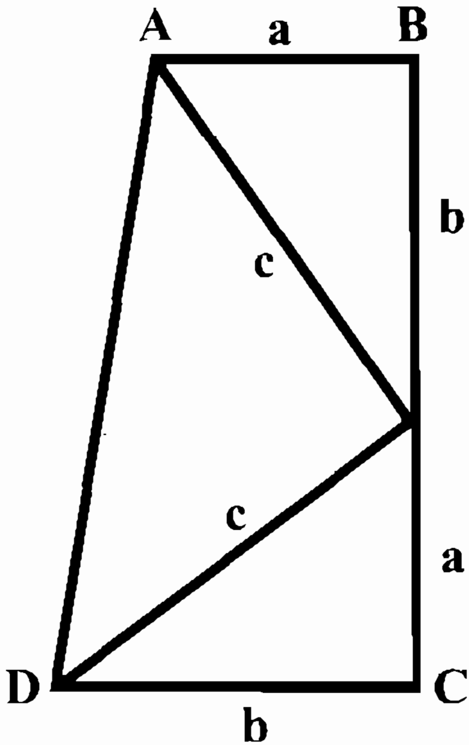
Ảo giác quang học bức xạ

Ảo giác quang học tạo ra bởi trí não, mắt chúng ta, hoặc cả hai. Ví dụ: khi ta nhìn vào một vùng có cả các vật thể sáng và tối thì do các chất lỏng trong mắt chúng ta không hoàn toàn trong suốt nên ánh sáng phân tán ra khi đi qua võng mạc ở phía sau mắt (đây là nơi mắt kiểm tra ánh sáng). Kết quả là, ánh sáng chói hoặc các vùng sáng sẽ tràn lên trên các vùng tối của hình ảnh trên võng mạc. Vì vậy, vùng sáng trông sẽ lớn hơn vùng tối có cùng kích thước (xem hình minh họa). Điều này giải thích vì sao quần áo tối màu, đặc biệt là màu đen, làm cho bạn trông mảnh mai hơn so với khi bạn mặc cùng mẫu quần áo đó nhưng màu sáng hay trắng. Ảo giác này được gọi là *sự chiếu bức xạ*, do Herman L. F. von Helmholtz khám phá vào thế kỉ XIX.



Định lí Pythagoras và Tổng thống Garfield

Tổng thống James Abram Garfield (1831 – 1881), vị tổng thống thứ 20 của nước Mỹ, rất quan tâm đến toán học. Năm 1876, khi đang là nghị sĩ Hạ viện, ông đã khám phá ra một chứng minh thú vị của định lí Pythagoras.[1] *New England Journal of Education (Tạp chí Giáo dục Anh)* đã cho đăng chứng minh này.



1). Xem mục *Định lí Pythagoras* (trang 5).

Chứng minh của ông dựa vào hai cách tính diện tích hình thang:

Cách (1): *diện tích hình thang =* $\frac{1}{2}$ *(tổng hai cạnh đáy) (chiều cao)*

Cách (2): *chia hình thang thành 3 tam giác vuông và tính diện tích của 3 tam giác vuông này.*

Chứng minh

Dựng hình thang ABCD với $\overline{AB}$ // $\overline{DC}$, các góc C và B là góc vuông, các độ dài được kí hiệu (xem hình vẽ) là a, b và c.

Tính diện tích hình thang bằng hai cách trên.

Diện tích theo cách (1) = diện tích theo cách (2)

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}(ab) + \frac{1}{2}(ab) + \frac{1}{2}(cc)$$

$$(a+b)(a+b) = ab + ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

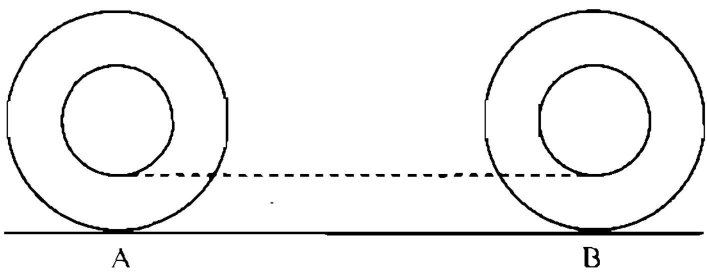
(Điều phải chứng minh)

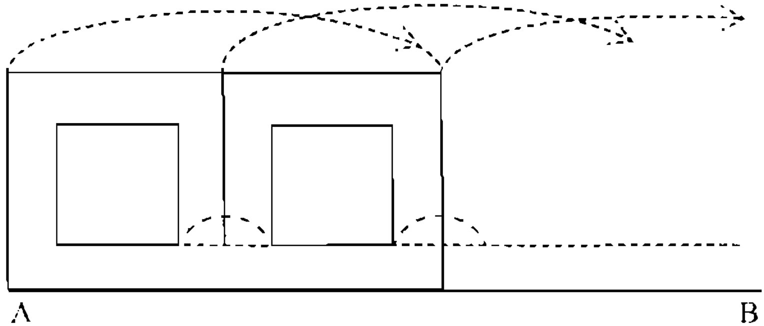
Nghịch lí bánh xe của Aristotle

Xét hai đường tròn đồng tâm trên bánh xe trong hình minh họa. Bánh xe di chuyển từ A tới B khi nó quay được một vòng. Chú ý rằng | AB | bằng chu vi của đường tròn lớn. Liệu có phải vì đường tròn nhỏ cũng quay một vòng và đi được một đoạn | AB | nên chu vi của nó cũng là | AB | không?

Giải thích của Galileo về nghịch lí bánh xe của Aristotle

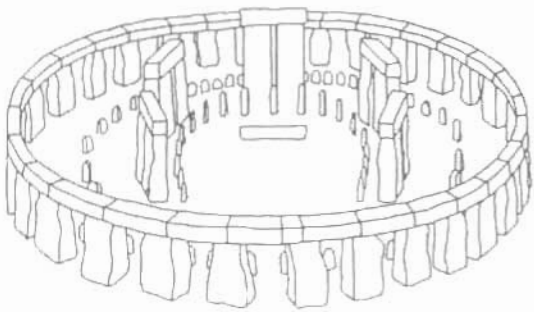
Galileo phân tích bài toán bằng cách xét hai hình vuông đồng tâm trên một bánh xe "vuông". Khi hình vuông này lật 4 lần, (bằng với chu vi của bánh xe vuông, | AB |), chúng ta thấy rằng hình vuông nhỏ chỉ lật 3 lần. Điều này giải thích cách đường tròn nhỏ lăn dọc theo khoảng cách | AB | và vì sao | AB | không bằng chu vi của nó.





Quần thể đá chồng Stonehenge

Trên vùng đồng bằng Salisbury ở Anh sừng sững một quần thể đá chồng đáng kinh ngạc được biết đến với cái tên **Stonehenge**. Nó được dựng vào khoảng năm 2700 tr.C.N, vòng tròn cuối cùng trong ba vòng đã hoàn thành vào năm 2000 tr.C.N.



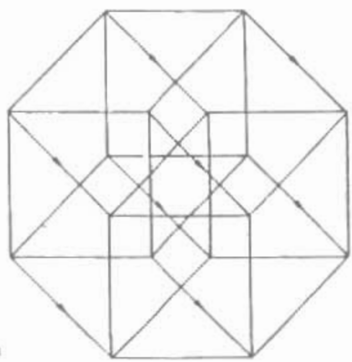
Người ta xây dựng Stonehenge làm gì? Nó có ý nghĩa gì với những nhóm người khác nhau, những người đã sử dụng và phát triển nó? Liệu nó có phải là:

- Một đền thờ tôn giáo?
- Một đài quan sát mặt trăng và mặt trời khi hoàng hôn lúc đông chí và khi bình minh lúc hạ chí?
- Một lịch âm lịch?
- Một máy tính nguyên thủy để dự đoán nhật thực và nguyệt thực?

Do không có bất kì tài liệu ghi chép nào của những người xây dựng và sử dụng Stonehenge nên chúng ta không có cách nào biết được mục đích thật sự của nó là gì. Từ rất ít những dấu tích còn lại, tất cả những lí thuyết đều chỉ là suy đoán. Nhưng có một điều rõ ràng, đó là những người xây dựng nó đã rất hiểu biết về đo đạc và hình học.

Có bao nhiêu chiều?

Nghệ thuật không ngừng biến đổi từ những hình vẽ trên hang động thời cổ xưa, biểu tượng của Đế chế Đông La Mã, cho đến các họa sĩ thời Phục hưng và các họa sĩ trường phái ấn tượng, những người miêu tả các vật thể tồn tại trong không gian hai chiều hoặc ba chiều. Các họa sĩ, các nhà khoa học, các nhà toán học và các kiến trúc sư đã phát triển những hình thức thể hiện của riêng mình về hình ảnh mà họ cho rằng các vật thể sẽ hiện ra trong không gian bốn chiều. Ví dụ: hình vẽ bốn chiều của hình lập phương, được gọi là *siêu lập phương*, tác phẩm của kiến trúc sư Claude Bragdon năm 1913. Bragdon đã kết hợp chặt chẽ hình siêu lập phương với các thiết kế bốn chiều khác vào trong các tác phẩm của mình, chẳng hạn như tòa nhà Phòng Thương mại Rochester, Mỹ.

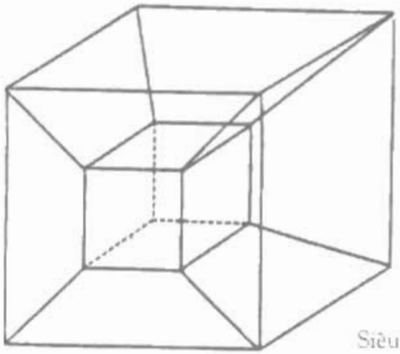


Siêu lập phương
của Claude Bragdon

Sự tồn tại của các chiều không gian lớn hơn không gian thứ ba luôn là một ý niệm hấp dẫn. Theo một quan điểm toán học, khả năng tồn tại của các không gian lớn chiều hơn tuân theo một quá trình suy luận logic.

Ví dụ: Bắt đầu từ một vật *không chiều, một điểm*, chúng ta di chuyển điểm đó một đơn vị về bên phải hoặc bên trái, kết quả một *đoạn thẳng* được hình thành. Đoạn thẳng sẽ là một vật thể *một chiều.*

Di chuyển đoạn thẳng một đơn vị lên trên hoặc xuống dưới, ta sẽ có một hình vuông. *Hình vuông* sẽ là vật thể *hai chiều.* Tiến hành tương tự, lấy hình vuông và di chuyển nó vào hoặc ra một đơn vị, ta thu được một hình lập phương – một vật thể *ba chiều.* Bước tiếp theo là bằng cách nào đó hình dung cách di chuyển hình lập phương một đơn vị theo hướng của chiều không gian thứ tư và tạo ra một siêu lập phương. Tương tự như vậy, người ta có thể nhận được *siêu cầu,* một hình cầu 4D (bốn chiều). Nhưng toán học không chỉ dừng lại ở chiều thứ tư, mà còn xét đến *chiều thứ n.* Các mẫu hình toán học đáng kinh ngạc đã xuất hiện khi dữ liệu liên quan đến các đỉnh, cạnh và mặt của các vật thể nhiều chiều khác được thu thập và sắp xếp lại.



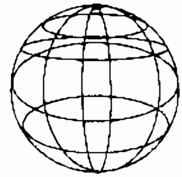
Siêu lập phương

Khả năng tồn tại của chiều thứ tư thu hút sự quan tâm của rất nhiều người. Các họa sĩ và các nhà toán học đã cố gắng tưởng tượng để vẽ nên hình ảnh của các vật thể trong chiều thứ tư. Siêu lập phương chính là đại diện bốn chiều của hình vuông. Một hình lập phương trên giấy được vẽ trong phối cảnh để ám chỉ đặc điểm chiều thứ ba của nó. Vì vậy, một siêu lập phương trên giấy là phối cảnh của một phối cảnh.

Máy tính và chiều không gian

Con người, một sinh vật ba chiều, có thể dễ dàng tưởng tượng và hiểu ba chiều không gian đầu tiên. Mặc dù các chiều không gian theo toán học có thể tồn tại với hơn ba chiều, nhưng thật khó để chấp nhận thứ gì đó mà chúng ta không thể nhìn thấy hay tưởng tượng ra. Vì vậy, các máy tính bắt đầu được sử dụng để giúp chúng ta hình dung những chiều không gian lớn hơn. Chẳng hạn, Thomas Banchoff (một nhà toán học) và Charles Strauss (một nhà khoa học máy tính) tại trường Đại học Brown, Mỹ, đã dùng máy tính để tạo các hình ảnh động của một siêu lập phương chuyển động vào và ra một không gian ba chiều, từ đó ghi lại các hình ảnh khác nhau tại các góc độ khác nhau của siêu lập phương trong thế giới ba chiều. Điều này tương tự như một hình lập phương (tức một vật thể ba chiều) đi xuyên qua mặt phẳng (thế giới hai chiều) theo các góc khác nhau và ghi lại hình các mặt cắt nó tạo ra trên mặt phẳng. Tập hợp các hình này sẽ giúp ta đưa ra một bức tranh tốt hơn về hình ảnh hai chiều của một vật thể ba chiều.

Hình minh họa cho thấy các hình ảnh khác nhau của một mặt cầu ghi lại trên mặt phẳng khi nó đi qua hoặc giao mặt phẳng, tức là chiều không gian thứ hai. Tương tự như vậy, siêu lập phương đi qua không gian, tức là chiều không gian thứ ba.

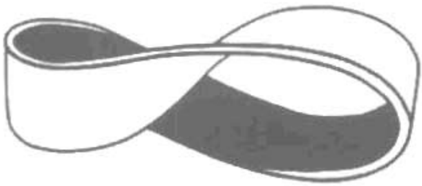


Ngày nay, chúng ta đã có kĩ thuật hai chiều để vẽ các vật thể ba chiều. Các kĩ thuật tạo ảnh ba chiều đang được thương mại hóa trong quảng cáo và đồ họa. Có lẽ trong tương lai, kĩ thuật ba chiều sẽ được phát triển và sử dụng để tạo ảnh vật thể bốn chiều.

Bạn đã bao giờ nghĩ rằng ngay cả người bạn thân nhất của bạn cũng có thể là sinh vật bốn chiều, nhưng hiện ra trước mắt bạn dưới dạng ba chiều?

Dải Möbius kép

Tô-pô là lĩnh vực nghiên cứu các tính chất của một đối tượng nào đó mà không thay đổi khi đối tượng bị biến dạng (kéo giãn hoặc co lại). Không giống hình học Euclid, tô-pô không quan tâm đến kích thước, hình dạng hay các vật thể rắn. Về cơ bản, nó nghiên cứu các vật thể co giãn, đó chính là lí do vì sao nó còn có tên gọi là *hình học "miếng cao su"*. Dải Möbius được nhà toán học người Đức Augustus Möbius tạo ra vào thế kỉ XVII và là một trong những đối tượng nghiên cứu của tô-pô. Bằng cách lấy một dải giấy, xoắn nó một nửa vòng rồi dán hai đầu lại với nhau, dải Möbius sẽ được hình thành. Dải Möbius lôi cuốn bởi nó chỉ có một mặt. Bạn có thể lấy bút chì vẽ một đường trên toàn bộ bề mặt của nó mà không cần nhấc bút chì lên.



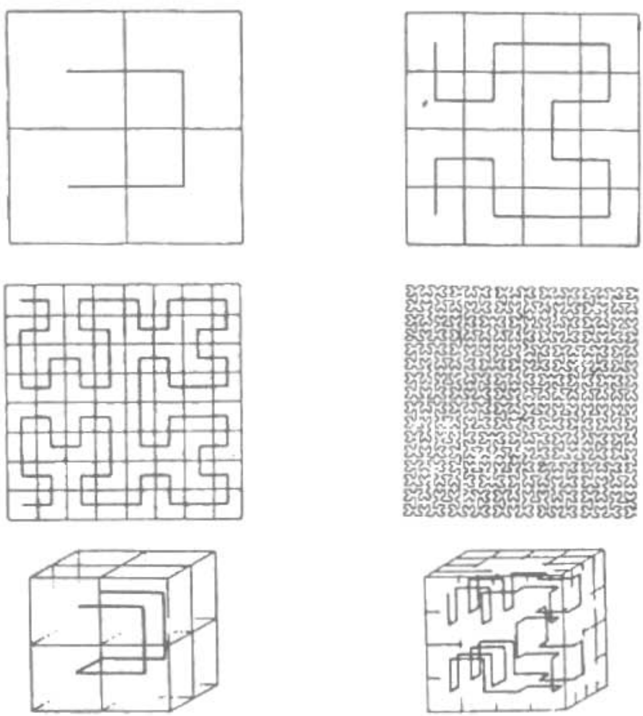
Giờ chúng ta hãy cùng xét đến *dải Möbius kép*. Nó được tạo ra khi lấy hai dải giấy, đồng thời xoắn mỗi dải một nửa vòng rồi dán các đầu lại với nhau. Các vòng giấy thu được sẽ là hai dải Möbius lồng vào nhau. Nhưng chúng là gì?

Bạn hãy làm thử mô hình này và kiểm tra nó xem sao. Lấy đầu ngón tay chạy giữa hai vòng giấy để xem chúng có thực sự lồng nhau hay không. Lấy bút chì và vẽ một nét dọc theo một trong số hai dải cho đến khi bạn quay lại điểm ban đầu đặt bút vẽ. Điều gì đã xảy ra?

Và điều gì sẽ xảy ra nếu không cho hai vòng giấy lồng vào nhau nữa?

Đường nghịch - đường lấp đầy không gian

Đường cong thường được coi là một chiều và được tạo thành từ các điểm, quy ước là có không chiều. Với những định nghĩa này, có vẻ như là mâu thuẫn khi một đường cong có thể lấp đầy một không gian. Các đường cong Euclid là phẳng. Các nhà toán học thời kì Euclid đã không nghĩ rằng chúng có thể được tự sinh ra chính mình theo cách sau đây:

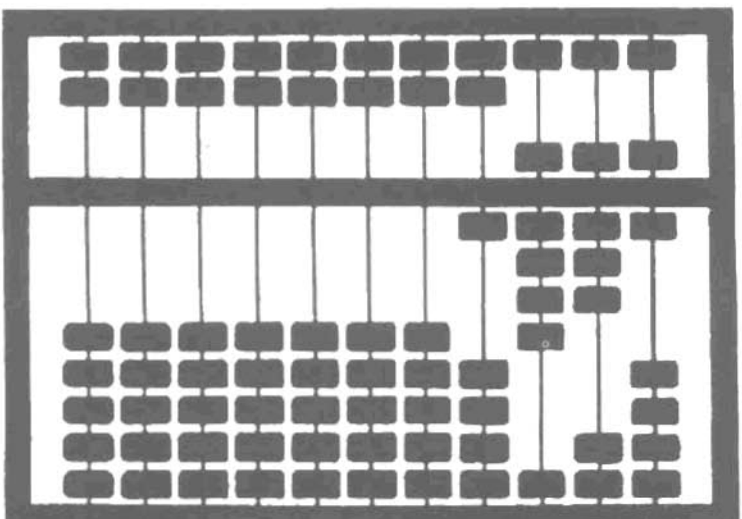


Ví dụ trên chỉ ra các bước mà *đường cong lấp đầy không gian* sẽ bao phủ toàn bộ không gian của một hình lập phương bằng cách không ngừng tự sinh ra mình theo cách đặc biệt đã minh họa trong hình.

Bàn tính

Thường được gọi là máy tính thời cổ đại, bàn tính là một trong những công cụ tính toán lâu đời nhất được biết đến. Chiếc máy tính cổ đại này đã và đang được sử dụng tại Trung Quốc và các nước châu Á khác để cộng, trừ, nhân, chia, tính bình phương và căn bậc ba. Có rất nhiều loại bàn tính. Chẳng hạn như bàn tính của người Ả-rập có mười hạt trên mỗi dây và không có thanh ở giữa. Lịch sử cho thấy ngay cả người Hy Lạp và La Mã cổ đại cũng dùng bàn tính.

Bàn tính của người Trung Quốc bao gồm mười ba gióng có xiên các hạt được ngăn bởi một thanh ngang. Mỗi gióng có năm hạt ở dưới thanh ngang và hai hạt ở trên. Mỗi hạt ở trên thanh ngang có giá trị tương đương với năm hạt ở dưới thanh ngang cùng gióng với nó. Ví dụ: một hạt ở trên thanh ngang trong gióng thứ mười có giá trị là 5 x 10 = 50.



Các hạt ở bàn tính này đang thể hiện số 1986.

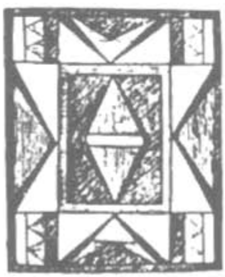
Toán học và dệt vải

Làm cách nào mà các đối tượng toán học lại hiện diện trên các tấm vải dệt?

Có phải người thợ dệt đã cố tình phân tích hoa văn theo cách nhìn toán học?

Tìm hiểu các mẫu dệt dưới đây, người ta thấy rất nhiều khái niệm toán học xuất hiện trong đó:

- Các đường đối xứng.
- Lát mặt phẳng.
- Các hình hình học.
- Các vật đồng dạng.



Hoa văn Shoshone ở Ấn Độ

Hoa văn Ojibwa ở Ấn Độ

Hoa văn ở Công-gô

Hoa văn Potawatomi ở Ấn Độ

Bạn hãy tìm các ý tưởng toán học trên trong các hoa văn dệt vải ở hình minh họa. Bạn có thể tìm thêm được các ý tưởng toán khác không?

Số Mersenne

Vào thế kỉ XVII, nhà toán học người Pháp Marin Mersenne đã công bố một số nguyên tố có 69 chữ số nhưng chưa có chứng minh. Tháng 2 năm 1984, một nhóm các nhà toán học đã lập trình thành công máy tính Cray (có khả năng kiểm tra một loạt các số cùng một lúc) để giải bài toán 300 tuổi này. Sau 32 giờ 12 phút máy tính tính toán, ba ước số của số Mersenne đã được tìm ra. Thành công này đã làm các chuyên gia mã hóa phải lo lắng, bởi nhiều hệ thống mã hóa dùng số có nhiều chữ số khó phân tích thành nhân tử để mã hóa những bí mật và giữ cho chúng an toàn.

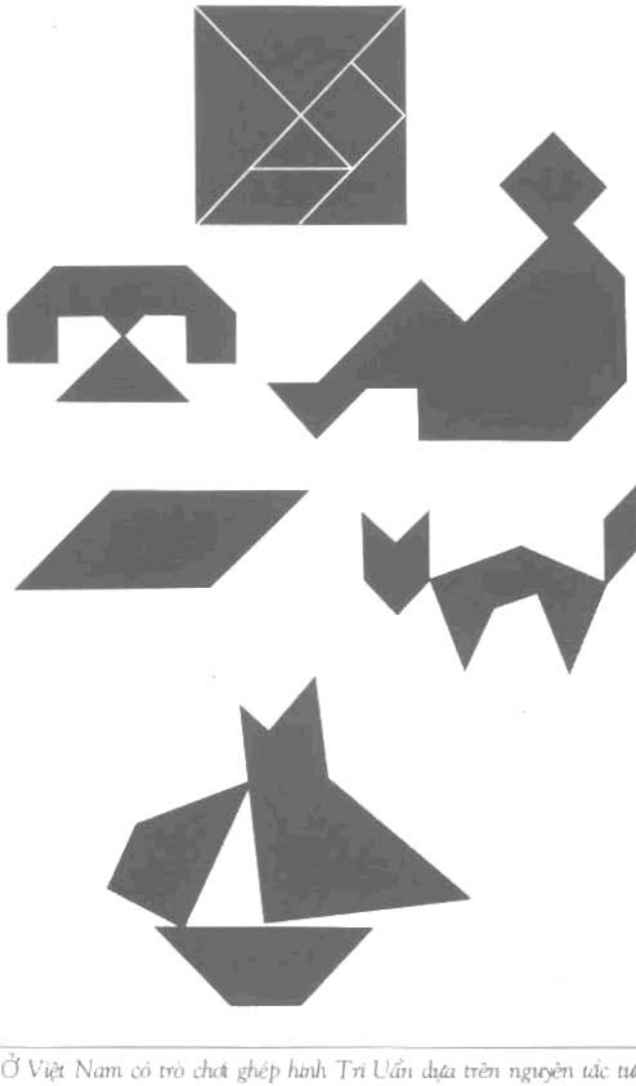
SỐ MERSENE
132686104398972053177608575506090561429353935989033525802891469459697
Các ước số:
178230287214063289511 và 61676882198695257501367 và 12070396178249893039969681

Phân tích một số thành nhân tử tức là phân tích nó thành tích của các số nguyên tố bé hơn. Đây là việc đơn giản với những số bé và có thể làm bằng cách thử tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn để xem chúng có phải là ước số hay không. Những số lớn đòi hỏi các phương pháp toán học khác. Số lượng các phép tính cần thiết để phân tích một số thành nhân tử tăng theo cấp số mũ khi số đó tăng lên. Ngay cả chiếc máy tính có thể thực hiện một tỉ phép tính trong một giây cũng phải mất vài nghìn năm để phân tích một số có 60 chữ số bằng phương pháp trên.

Từ 1985 - 1986, Robert Silvernam (Tập đoàn Mitre, Bedford, MA) và Peter Montgomery (Tập đoàn Santa Monica, CA) đã phát triển một phương pháp phân tích thành nhân tử sử dụng máy vi tính thay vì các máy tính đặc biệt chế tạo chỉ để phân tích các số hoặc máy Cray đắt tiền. Phương pháp của họ nhanh và rẻ. Một trong những thành tựu gần đây của họ là phân tích một số có 81 chữ số bằng tám máy vi tính chạy trong vòng 150 giờ.

Câu đố tangram

Bạn hãy dùng bảy mảnh hình tangram[1] để xác định cách ghép thành các hình dưới đây.

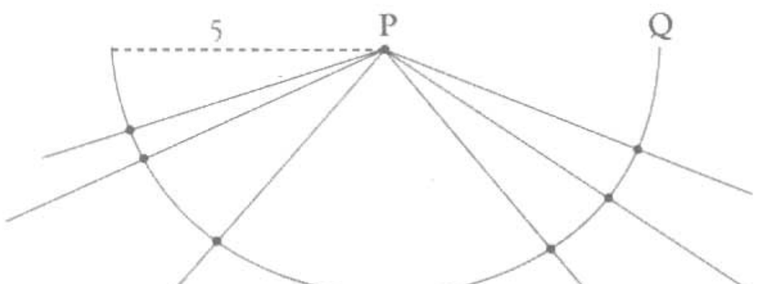


(1). Ở Việt Nam có trò chơi ghép hình Trí Uẩn dựa trên nguyên tắc tương tự, do nhà trí thức Nguyễn Trí Uẩn sáng tạo ra.

Vô cùng và hữu hạn

Hình dưới đây minh họa cách ghép cặp (đặt tương ứng 1-1) tập hợp các điểm trên nửa đường tròn có độ dài hữu hạn với tập hợp các điểm trên đường thẳng có độ dài vô cùng. Nửa đường tròn có chu vi là 5 . Đường tiếp tuyến với nửa đường tròn có độ dài là vô cùng. Kẻ một tia có đỉnh là điểm P (tâm của nửa đường tròn) sao cho nó cắt cả đường thẳng và nửa đường tròn. Bằng cách đó, các giao điểm của tia với nửa đường tròn và với đường thẳng sẽ được tương ứng 1 1 với nhau. Khi tia di chuyển trên nửa đường tròn và tiến đến gần tia PQ, nó giao với đường thẳng ở điểm càng ngày càng xa hơn.

Điều gì sẽ xảy ra nếu tia trùng với tia PQ[1]*?*

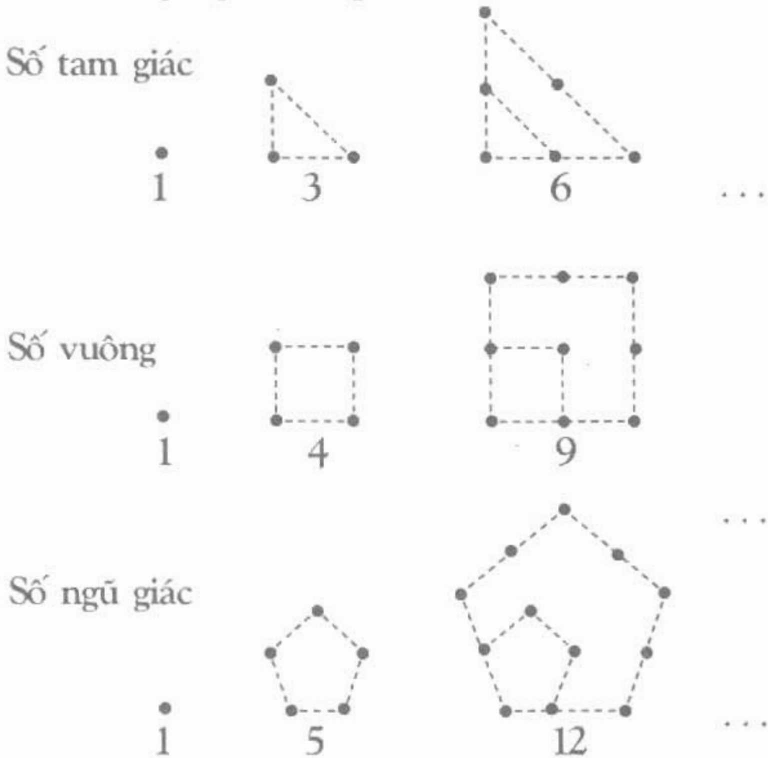


(1). *Tia sẽ song song với đường thẳng.*

Các số tam giác, số vuông và số ngũ giác

Các con số có rất nhiều tên gọi. Một số tên gọi của chúng được nghĩ ra dựa theo hình dáng của các hình mà chúng tạo thành. Dưới đây, chúng ta sẽ thấy rằng các *số lẻ* tạo thành các hình tam giác, do đó chúng còn được gọi là *số tam giác. Các số chính phương*, tức là các số $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$,... tạo thành các hình vuông, vì vậy chúng còn được gọi là số vuông.

Mỗi nhóm số có một hình tương ứng với nó. Bạn hãy thử thành lập các dãy số khác có thể tạo thành các hình và xác định hình tương ứng với chúng.



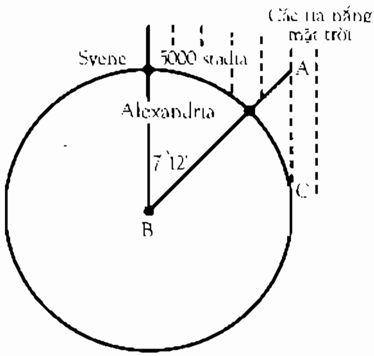
Eratosthenes đo Trái Đất

Vào năm 200 tr.C.N, Eratosthenes đã nghĩ ra một phương pháp tài tình để đo độ dài xung quanh Trái Đất.

Để đo chu vi của Trái Đất, Eratosthenes dùng các kiến thức về hình học, cụ thể là định lí sau:

Nếu cắt các đường thẳng song song bằng một đường thẳng không song song với chúng thì các góc trong so le được tạo ra sẽ bằng nhau.

Ông biết rằng vào thời điểm giữa trưa trong suốt thời gian hạ chí, tại thành phố Svene, Ai Cập, một cây gậy thẳng đứng sẽ không có bóng, tức là tia sáng chiếu thẳng đứng. Cùng lúc đó ở Alexandria (cách đó 5000 stadia ≈ 500 dặm), cây gậy thẳng đứng có bóng tạo thành một góc 7°12'. Với những thông tin này, ông có thể tính được chu vi Trái Đất với sai số ±2% so với chu vi thực.



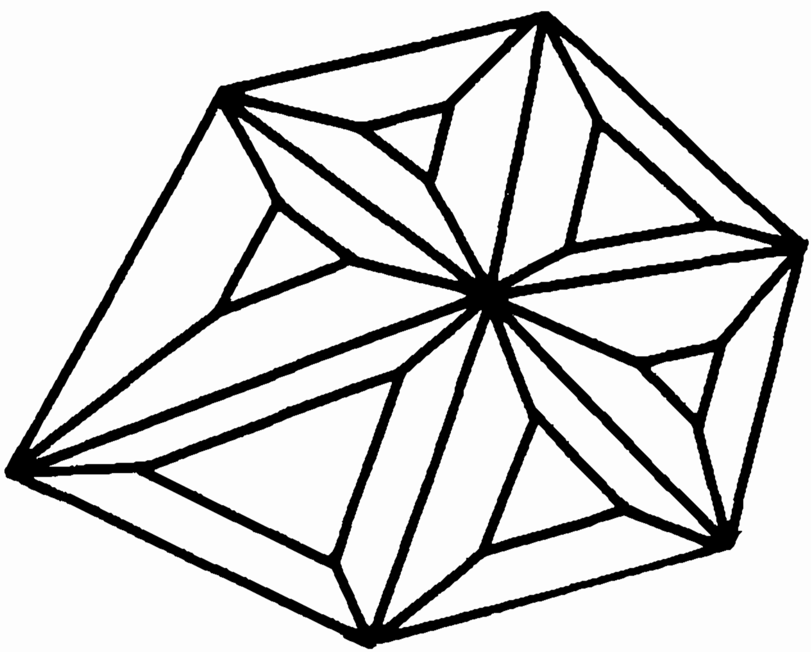
Cách tính:

Vì các tia sáng chiếu song song với nhau, nên <CAB và <B trong hình trên là các góc trong so le bằng nhau.

Do đó, khoảng cách giữa Syene và Alexandria tỉ lệ với chu vi Trái Đất. Tỉ lệ này là $\frac{7°12'}{360°} = \frac{1}{50}$. Suy ra chu vi Trái Đất là 500 dặm x 50 = 25000 dặm (tương đương với 40233,7km).

Hình học xạ ảnh và quy hoạch tuyến tính

Sử dụng các kĩ thuật của hình học xạ ảnh và giải hệ phương trình, **Narendra Karmarker,** khi còn là một nhà toán học làm việc tại phòng thí nghiệm Bell, đã tìm ra một phương pháp giảm thiểu rất nhiều thời gian cần dùng để giải các bài toán quy hoạch tuyến tính cồng kềnh, chẳng hạn như bài toán phân phối thời gian trên các vệ tinh liên lạc, lên lịch cho các đội bay hay chọn đường truyền cho hàng triệu cuộc điện thoại đường dài.



Hình vẽ của một họa sĩ về một khối hình học và các mặt của nó.

Cho đến gần đây, *phương pháp đơn hình* – do nhà toán học George B. Danzig vào năm 1947 phát triển – vẫn được sử dụng. Phương pháp này cần rất nhiều thời gian tính toán và không khả thi với những bài toán lớn. Các nhà toán học biểu diễn các bài toán quy hoạch tuyến tính như các khối hình học phức tạp với hàng triệu hay hàng tỉ mặt. Mỗi góc của từng mặt đại diện cho một giải pháp có thể. Nhiệm vụ của thuật toán[1] là tìm lời giải tốt nhất mà không cần phải xem xét từng lời giải một. Phương pháp đơn hình của Danzig chạy dọc theo các cạnh của khối hình, kiểm tra lần lượt các góc nhưng đồng thời cũng luôn hướng tới giải pháp tốt nhất. Trong hầu hết các bài toán, nó có thể đủ mạnh, miễn là số lượng các biến (ẩn số) nằm trong khoảng từ 15 000 đến 20 000. *Thuật toán Karmarker* tạo một đường đi tắt bằng cách đi xuyên qua giữa khối hình. Sau khi chọn một điểm bất kì nằm trong khối hình, thuật toán sẽ làm méo toàn bộ cấu trúc, tức là định dạng lại bài toán sao cho điểm đã chọn nằm tại đúng tâm của hình mới. Bước tiếp theo là tìm một điểm mới theo chiều hướng tốt nhất và làm méo cấu trúc một lần nữa, rồi đưa điểm mới chọn đó thành tâm. Nếu không có quá trình làm méo, chiều hướng mới xuất hiện có thể đưa ra sự cải tiến tốt nhất sau mỗi lần sẽ chỉ là không tưởng. Những biến đổi lặp đi lặp lại dựa trên các khái niệm của hình học xạ ảnh sẽ đưa ra giải pháp tốt nhất một cách nhanh chóng.

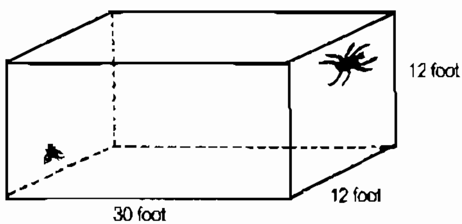
---

(1). Thuật toán là một cách tiến hành tính toán để đi đến lời giải. Ví dụ: quá trình chia và các bước chia dài là một thuật toán. Khi chia dài, chúng ta thầm rút ngắn quá trình chia — nếu chia 658 cho 29, ta thầm lấy 29 gần với 30 và tính xem 650 chia 30 bằng bao nhiêu chứ không chia ngay 658 cho 29. Thuật toán Karmarker cũng có những rút ngắn đặc biệt trong đó, gọi là quá trình biến đổi hay làm méo.

Bài toán Nhện và ruồi

Henry Ernest Dudeney, người Anh, là một chuyên gia sáng tạo các câu đố vui nổi tiếng ở thế kỉ XIX. Hầu hết các sách đố vui ngày nay có rất nhiều câu đố của ông, nhưng chúng thường không được coi là do ông nghĩ ra. Vào những năm 1890, ông và Sam Loyd, nhà đố vui nổi tiếng của Mỹ đã cộng tác với nhau trên một loạt các bài đố vui trên báo.

Cuốn sách đầu tiên của Dudeney, *The Canterbury Puzzles* (*Những câu đố Canterbury*[1]), xuất bản vào năm 1907. Năm quyển sách bổ sung được xuất bản sau đó, cho đến nay chúng vẫn là một kho báu những bài toán hóc búa quý giá.



Bài toán *Nhện và ruồi*, ra mắt lần đầu tiên ở một tờ báo Anh năm 1903, là một trong những câu đố nổi tiếng nhất của ông.

Trong một căn phòng hình hộp chữ nhật, 30foot x 12foot x 12foot, một con nhện nằm ở giữa một bức tường, cách trần nhà 1 foot (1 foot = 0,304 m).

Một con ruồi nằm ở giữa bức tường đối diện với con nhện, cách nền nhà 1 foot. Con ruồi sợ đến nỗi không thể di chuyển được gì.

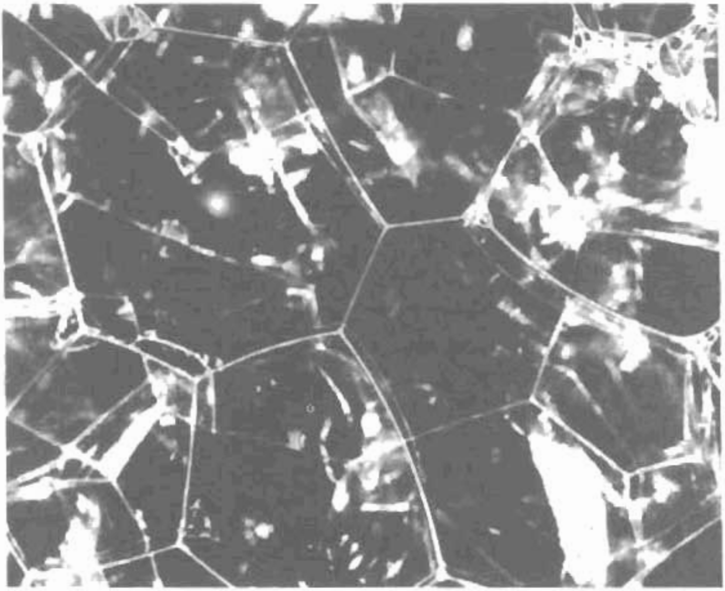
Hỏi con đường ngắn nhất mà nhện phải bò để có thể bắt được con ruồi là đường nào? (Gợi ý: đường đó ngắn hơn 42 foot).

Xem câu trả lời ở phần *Lời giải và đáp án*.

(1) *Canterbury là một thành phố ở phía đông nước Anh*

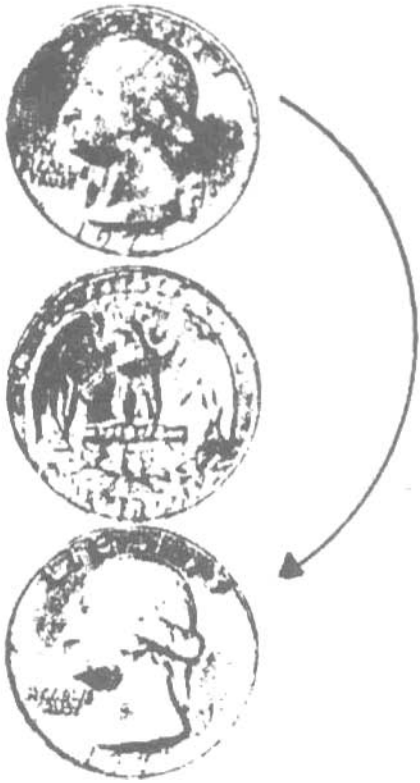
Toán học và bong bóng xà phòng

Những khái niệm toán học nào có thể liên quan đến bong bóng xà phòng? Hình dạng mà những màng xà phòng hình thành bị chi phối bởi sức căng bề mặt. Sức căng bề mặt làm giảm diện tích của bề mặt đến mức tối thiểu. Vì vậy, mỗi bong bóng xà phòng bao phủ một lượng không khí sao cho diện tích bề mặt của lượng không khí đó là nhỏ nhất. Điều này giải thích vì sao một bong bóng xà phòng đơn lẻ có hình cầu, trong khi một đám bong bóng, như trong đám bọt, lại có hình dạng khác. Trong đám bọt, các cạnh của bong bóng xà phòng tạo thành các góc 120^{o}, gọi là *điểm nối ba*. Điểm nối ba về bản chất là điểm giao của ba đoạn thẳng mà các góc tại giao điểm đều là 120^{o}. Rất nhiều hiện tượng tự nhiên (như vảy cá, bên trong quả chuối, hình dáng các hạt ngô, hay các bản trên mai rùa) phù hợp với điểm nối ba   điểm cân bằng của tự nhiên.



Nghịch lí đồng tiền

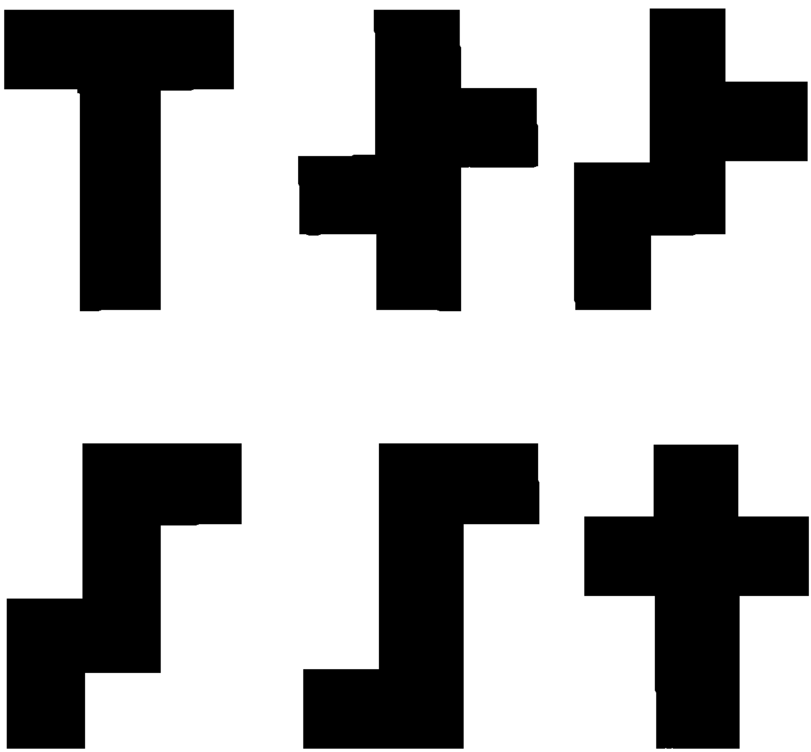
Đồng tiền trên cùng bị lăn đi một nửa đường tròn qua đồng bên dưới nó, cuối cùng nó ở bên dưới đồng tiền thứ hai mà không hề bị xoay lệch đi so với lúc ban đầu. Vì nó đã di chuyển được một nửa chu vi của mình, nên ta có thể nghĩ rằng khi xuống phía dưới, nó sẽ bị lộn ngược lại. Lấy hai đồng tiền và thử di chuyển. Hãy giải thích vì sao điều này không xảy ra?



Hexamino

Hexamino là một vật phẳng được tạo bởi sáu đơn vị hình vuông. Bắt đầu với một hình lập phương có thể tích là 1 đơn vị, bạn hãy cắt dọc theo bảy cạnh của nó sao cho nó rời ra thành một hình phẳng. Hình nhận được là một hexamino. Tùy thuộc vào các cạnh bị cắt mà các hexamino khác nhau được tạo thành. Một vài hexamino được minh họa ở dưới đây.

Có tất cả bao nhiêu hexamino?



Dãy Fibonacci và tự nhiên

Dãy Fibonacci xuất hiện trong tự nhiên thường xuyên đến mức người ta không thể tin đó chỉ là do ngẫu nhiên.

a) Chúng ta hãy cùng xem danh sách *các loài hoa có số cánh hoa là số Fibonacci*: cỏ duyên linh, hoa hồng dại, cỏ rễ máu, hoa bướm, mao lương vàng, hoa rẻ quạt, hoa li, hoa diên vĩ.

b) *Những bông hoa có số cánh ở đài hoa là một số Fibonacci*: cúc tây, hoa bướm, cúc dại, hoa mật.

Những số Fibonacci sau thường là số cánh hoa của:

3.................... hoa huệ tây và diên vĩ
5....................hoa rẻ quạt, mao lương vàng và hoa phi yến
8....................hoa tai thỏ
13..................hoa bướm
21..................hoa cúc tây
34, 55, 84.......hoa cúc dại

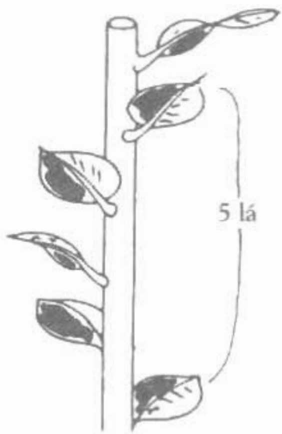
Cỏ rễ máu

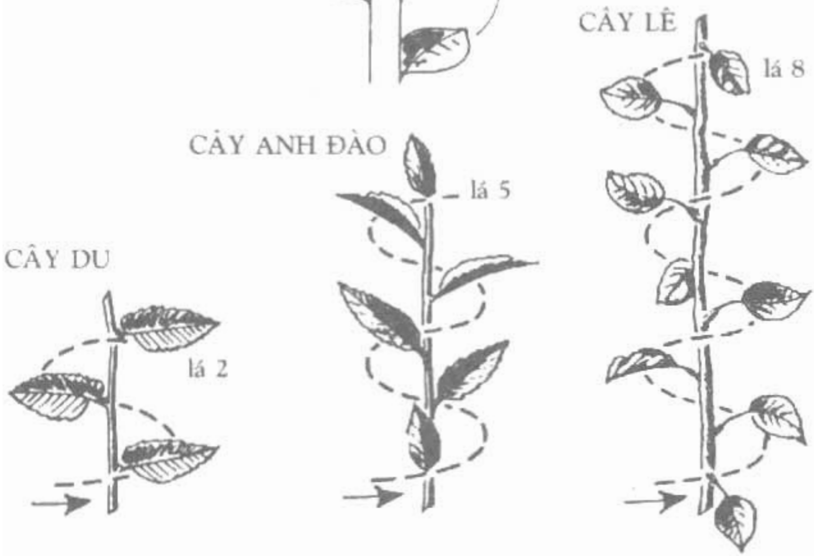
Cỏ duyên linh

Hoa bướm

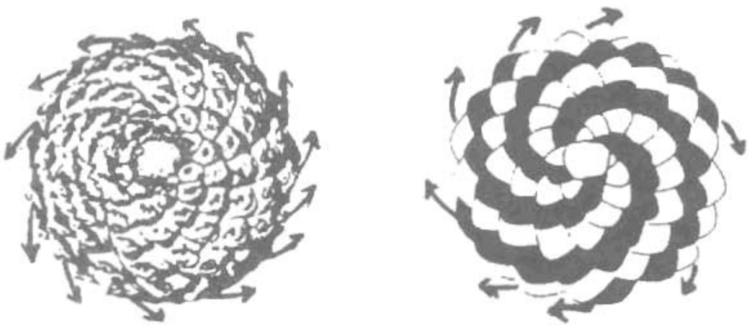
Hoa hồng dại

c) Các số Fibonacci cũng được tìm thấy trong ***cách sắp xếp của các lá, cành cây và thân cây.*** Bạn hãy chọn một chiếc lá nào đó trên thân cây và đánh dấu nó là số 0, sau đó đếm số lượng các lá (giả sử không có lá nào rụng) cho đến khi tới chiếc lá thẳng hàng với lá số 0 ban đầu. Tổng số lượng các lá trong hầu hết các trường hợp đều là một số Fibonacci và số lượng các vòng xoắn trước khi tới chiếc lá thẳng hàng ở phía trên cũng là số Fibonacci. Tỉ lệ số lá cây với số vòng xoắn trên được gọi là tỉ lệ sắp xếp lá (xuất phát từ một từ Hy Lạp, *lafarraangement* có nghĩa là *sắp xếp lá*). Hầu hết các tỉ lệ sắp xếp lá là tỉ lệ Fibonacci.





d) Các số Fibonacci đôi khi còn được gọi là ***số nón thông*** vì các số Fibonacci liên tiếp nhau có xu hướng xuất hiện như là các đường xoắn ốc trái và phải của một nón thông. Điều này cũng đúng với đài hạt hoa hướng dương. Ngoài ra, bạn còn có thể tìm thấy một vài số Lucas liên tiếp.[1]



8 vòng xoáy về bên phải và 13 vòng xoáy về bên trái

Đài hạt hướng dương

---

(1). Các số Lucas tạo thành một dãy Fibonacci với hai số đầu tiên là 1 và 3; các số tiếp theo được tìm bằng cách lấy tổng của hai số trước nó. Vì vậy, dãy Lucas sẽ là 1, 3, 4, 7, 11... Nó được gọi theo tên của Edouard Lucas, một nhà toán học thế kỉ XIX, người đã đặt tên gọi cho dãy Fibonacci và nghiên cứu những dãy số truy hồi. Một cách liên hệ khác giữa dãy Lucas và dãy Fibonacci là:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .

1, 3, 4, 7, 11, 18, . . .

e) *Quả dứa* là một dạng thực vật khác có thể dùng để xem xét sự hiện diện của các số Fibonacci. Bạn hãy đếm số lượng các vòng xoắn tạo bởi các mắt dứa hình lục giác.

Dãy Fibonacci và tỉ lệ vàng

Dãy các tỉ lệ Fibonacci liên tiếp:

$$\frac{1}{1};\ \frac{2}{1};\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{3};\ \frac{8}{5};\ \ldots,\ \frac{F_{n+1}}{F_n};\ \ldots$$

1; 2; 1,5; 1,6; 1,625; 1,6153; 1,619; . . .

thay đổi lớn hơn và nhỏ hơn so với giá trị của tỉ lệ vàng, φ. Giới hạn của dãy số này là φ. Mối liên hệ này ám chỉ rằng bất kì đâu (đặc biệt trong các hiện tượng tự nhiên) có tỉ lệ vàng, hình chữ nhật vàng hoặc có các đường xoắn ốc đẳng giác, thì nơi đó có sự hiện diện của dãy Fibonacci và ngược lại.

Chú khỉ và những quả dừa

Ba thủy thủ và một chú khỉ sau khi bị đắm tàu thấy mình nằm trên một hòn đảo, nơi thức ăn duy nhất là những quả dừa. Họ hái dừa cả ngày và quyết định đi ngủ rồi sẽ chia dừa vào ngày hôm sau. Trong đêm, một thủy thủ thức dậy và muốn lấy phần dừa của mình ngay chứ không đợi đến sáng mai. Anh ta chia số dừa thành ba phần, nhưng có một quả dừa còn sót lại, anh ta để cho chú khỉ. Sau khi giấu phần dừa của mình, anh ta đi ngủ tiếp. Một lúc sau, một thủy thủ khác tỉnh dậy và cũng làm giống như người trước. Anh ta để lại số dừa còn dư cho chú khỉ. Cuối cùng, người thủy thủ thứ ba thức giấc và cũng chia dừa như hai người trước, để lại số dừa dư cho chú khỉ. Sáng hôm sau, khi cả ba người thức dậy, họ chia đống dừa thành ba phần với một quả còn thừa cho chú khỉ.

Hỏi số dừa ít nhất mà các thủy thủ hái được là bao nhiêu?

Bạn hãy làm những bài toán tương tự, nhưng với bốn thủy thủ, rồi sau đó là năm thủy thủ.

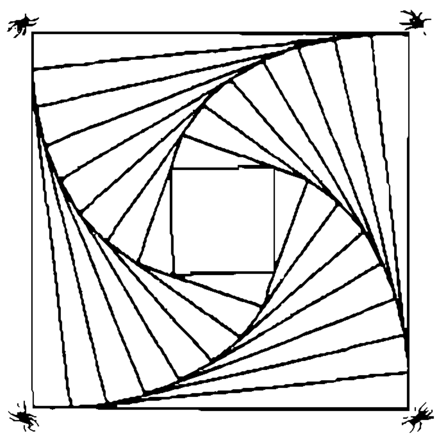
Các phương trình giải những bài toán loại này có tên gọi là phương trình Diophantine. Chúng được gọi theo tên của nhà toán học Hy Lạp Diophantus, người đầu tiên dùng những loại phương trình này để giải một số bài toán.

Xem câu trả lời ở phần *Lời giải và đáp án.*

Bốn con nhện và những đường xoắn ốc

Bốn con nhện bắt đầu bò từ bốn góc của một hình vuông 6 x 6m. Mỗi một con bò về phía con nhện bên phải nó và di chuyển dần tới tâm hình vuông với vận tốc không đổi là 1cm/giây. Do đó, chúng luôn luôn nằm ở bốn góc của một hình vuông.

Phải mất bao nhiêu phút chúng mới bò tới tâm hình vuông?



Đường đi của bốn con nhện này là những *đường xoắn ốc đẳng giác*.[1]

Hãy thử làm lại bài toán với những hình đa giác đều khác.

Xem cách giải ở phần *Lời giải* và đáp án.

---

(1). Để biết thêm thông tin về đường xoắn ốc đẳng giác, xem mục lục Hình chữ nhật vàng (trang 104).

LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả

• lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả •

lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả

• lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả •

lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả

• lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả •

lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả

• lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả •

lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả

• lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả •

lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả

• lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả •

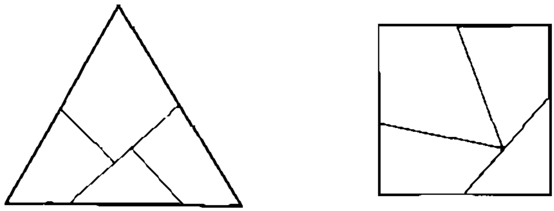
lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả

• lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả •

lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả

• lời giải • câu trả lời • giải thích • kết quả •

Trang 10 – Biến tam giác thành hình vuông

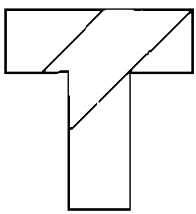


Trang 19 – Bài toán Lúa mì và bàn cờ

$1 + (2) + (2)^2 + (2)^3 + (2)^4 + \ldots + (2)^{63}$

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$

Trang 37 – Câu đố chữ T



Trang 39 – Khách sạn Vô Hạn

Anh ta quyết định chuyển mỗi người đã có phòng sang phòng có số lớn gấp đôi với số của phòng người đó đang ở, như vậy người thuê phòng số 1 sẽ chuyển sang phòng số 2, người ở phòng số 2 chuyển sang phòng số 4, người ở phòng số 3 chuyển sang phòng số 6,... Cách này sẽ làm trống tất cả những phòng có số lẻ để dành cho số khách mới đến trên xe buýt.

Trang 48– Câu đố của Sam Loyd

Bắt đầu từ giữa, di chuyển các hình vuông thích hợp theo các hướng sau: Tây Nam, Tây Nam, Đông Bắc, Đông Bắc, Đông Bắc, Tây Nam, Tây Nam, Tây Nam, Tây Bắc.

Trang 53 – Mẹo Fibonacci

Nếu a và b là hai phần tử đầu tiên của dãy, thì các phần tử tiếp theo sẽ là: a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, 5a + 8b, 8a + 13b, 13a + 21b, 21a + 34b. Lấy tổng của mười phần tử đầu tiên, ta nhận được 55a + 88b, là số gấp 11 lần phần tử thứ bảy là 5a + 8b.

Trang 58 – Mười mốc lịch sử

1879 – năm sinh của Einstein; 1066 – trận đánh Hastings; 476 Đế chế La Mã sụp đổ; 1215 Năm ban hành Đại Hiến chương nước Anh; 1455 – Năm xuất bản Kinh thánh Gutenberg; 563 Năm sinh của Đức Phật Tổ Như Lai; 1770 – Năm sinh của Beethoven; 1969 – Người đầu tiên đặt chân lên Mặt Trăng; 1948 Thủ tướng Gandi bị ám sát; 1776 Nước Mỹ tuyên bố độc lập.

Trang 61 – Bài toán thứ 8 trong quyển Pillow Problems

Giải thích của Lewis Carroll như sau:

m = ≠ số lượng người đàn ông

k = ≠ số lượng đồng si-linh của người đàn ông cuối cùng (người nghèo nhất)

Sau một vòng, mỗi người mất đi một đồng si-linh, và số đồng si linh bị chuyển đi là m đồng. Sau k vòng, mỗi người mất đi k đồng si linh, người cuối cùng sẽ không còn đồng nào, còn số tiền bị di chuyển là mk đồng si linh. Quá trình chuyển tiền kết thúc khi người cuối cùng không thể chuyển tiền được nữa (vì số tiền anh ta có lúc đó nhỏ hơn số tiền phải chuyển cho người bên cạnh) và tổng số tiền đã chuyển khi đó là (mk + m 1) si linh. Người ngay trước người cuối cùng lúc đó không còn đồng si linh nào cả, còn người đầu tiên có (m - 2) si-linh.

Người đầu tiên và người cuối cùng là hai người cạnh nhau duy nhất có thể có số tiền tỉ lệ 4:1. Vì vậy,

hoặc là mk + m 1 = 4(m - 2)

hoặc là $4(mk + m - 1) = m - 2$

Phương trình đầu tiên cho ta $mk = 3m - 7$, suy ra $k = 3 - (\frac{7}{m})$, suy ra không có nghiệm nguyên nào khác ngoài $m = 7$, $k = 2$.

Phương trình thứ hai dẫn đến $4mk = 2 - 3m$. Không có cặp số nguyên nào thỏa mãn phương trình này.

Vì vậy, đáp số là có 7 người đàn ông và 2 đồng si-linh.

Trang 71 – Hình vành khuyên lạ kì

Chứng minh cho hình vành khuyên lạ kì:

Diện tích của hình vành khuyên là: $\pi R^2 \quad \pi r^2$.

Đây là hiệu của diện tích vòng tròn lớn trừ đi diện tích vòng tròn nhỏ.

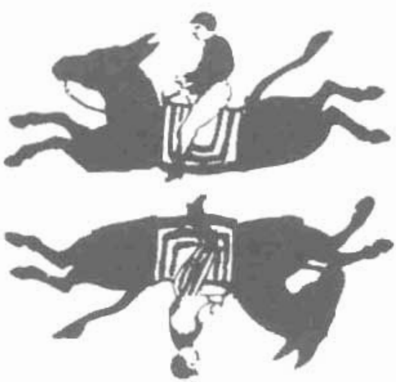
Từ hình vẽ trang 71, chúng ta suy ra độ dài của dây cung là: $2\sqrt{(R^2 - r^2)}$.

Vì vậy, một vòng tròn với đường kính này sẽ có diện tích là: $\pi(R^2 - r^2)$, tức là $\pi R^2 - \pi r^2$.

Trang 72 – Những chú ngựa Ba Tư

Có hai chú ngựa nằm ngang quay bụng vào nhau và hai chú ngựa nằm dọc quay lưng vào nhau.

Trang 73 – Câu đố của Sam Loyd



Trang 118 – Nghịch lí Achilles và chú rùa

Achilles sẽ đuổi kịp chú rùa sau $111\frac{1}{9}$m. Nếu đoạn đường đua ngắn hơn khoảng cách này, chú rùa sẽ chiến thắng. Nếu nó dài đúng bằng như vậy, hai bên sẽ hòa nhau. Còn nếu không thì Achilles sẽ vượt qua chú rùa.

Trang 124 – Câu đố của Diophantus

Gọi n là số tuổi thọ của Diophantus.

$(\frac{1}{6})n + (\frac{1}{12})n + (\frac{1}{7})n + 5 + (\frac{1}{2})n + 4 = n$

rút gọn lại ta có: $(\frac{3}{28})n = 9$

$n = 84$ tuổi.

Trang 138 – Bài toán Bàn cờ

Không thể phủ kín bàn cờ đã biến đổi bằng các quân đô-mi-nô. Mỗi quân đô-mi-no phải chiếm chỗ của một ô đen và một ô đỏ. Vì cả hai góc bị bỏ đi của bàn cờ cùng màu với nhau, nên trên bàn cờ không còn lại số lượng ô đen và đỏ thích hợp.

Trang 142 – Chứng minh 1 = 2

Phép chia cho 0 xuất hiện ở bước 6. Số 0 bị ẩn đi bởi biểu thức (b – a). (b – a) bằng 0 vì a = b theo giả thiết ban đầu.

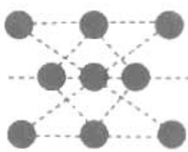
Trang 149 – Nghịch lí về bài kiểm tra bất ngờ

Bài kiểm tra sẽ không thể vào thứ sáu, vì nó là ngày học cuối cùng trong tuần và nếu thứ năm bạn vẫn chưa có kiểm tra, thì bạn sẽ có thể suy ra ngay là kiểm tra vào thứ sáu. Nếu thế, trước 8 giờ sáng ngày thứ 6 bạn có thể đoán được ngày thứ 6 có bài kiểm tra. Điều này trái với điều kiện bài toán. Vì vậy, nếu thứ sáu là không thể, thì thứ năm sẽ là ngày cuối cùng có thể có kiểm tra. Nhưng thứ năm cũng không đúng, vì đến thứ tư bạn đã biết là chỉ còn lại thứ năm và thứ sáu. Thứ sáu không thể được, như vậy sẽ phải là thứ năm, tức là vào thứ tư bạn đã biết là kiểm tra vào thứ năm. Điều này trái với điều kiện của bài. Như vậy chỉ còn lại thứ tư là ngày cuối cùng có thể có kiểm tra, nhưng thứ tư cũng bị loại bởi nếu thứ ba vẫn không có kiểm tra thì bạn sẽ biết vào thứ ba là kiểm tra vào thứ tư. Tiếp tục suy luận như vậy, thì tất cả các ngày trong tuần không có bài kiểm tra.

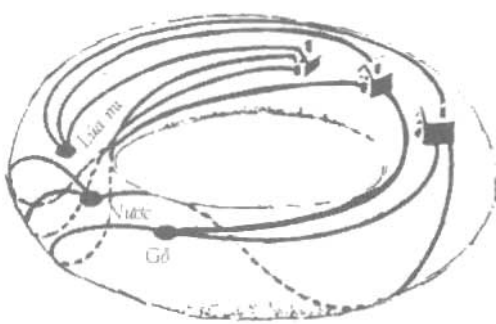
Trang 161 – Bài toán logic

Đầu tiên, người nông dân đưa con dê qua sông. Sau đó, ông trở lại đưa con sói qua. Sang bên bờ bên kia, ông để lại con sói và chở con dê quay lại. Tới lại bờ bên này, ông để lại con dê và chở cây bắp cải sang sông. Sau đó, ông quay lại đón con dê và qua sông, nơi có con sói và cây bắp cải.

Trang 165 – Câu đố chín đồng xu



Trang 177 – Bài toán về gỗ, nước và lúa mì



Bài toán về gỗ, nước và lúa mì không có lời giải nếu các đường đi phải nằm trên mặt phẳng (Euclid). Nhưng nếu ba ngôi nhà nằm trên bề mặt của một hình xuyến hay chiếc bánh rán (như minh họa trong hình vẽ) thì lời giải sẽ rất đơn giản.

Trang 183 – Câu đố về đồng tiền giả

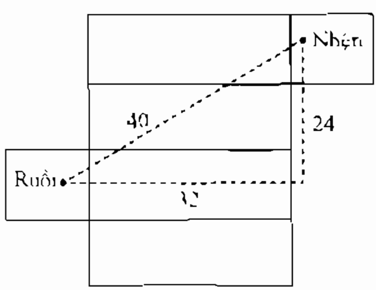
Chỉ cần một lần cân!

Bạn hãy đặt lên cân một đồng tiền ở cọc đầu tiên, hai đồng ở cọc thứ hai, ba đồng ở cọc thứ ba và cứ tiếp tục như vậy. Bạn sẽ biết khối lượng của chúng nếu không có đồng nào là giả. Vì vậy, để xác định cọc tiền nào là giả, hãy nhìn mặt cân và xem số tiền trên cân nặng hơn là bao nhiêu so với trường hợp tất cả chúng là tiền thật. Số cân nặng hơn này sẽ chính là số thứ tự của cọc tiền giả. Ví dụ: Nếu chúng nặng hơn 4 gam, thì cọc tiền thứ tư là giả vì bạn đã đặt bốn đồng tiền giả từ cọc đó lên trên cân.

Trang 192 – Ba người đàn ông đứng trước bức tường

Người đàn ông xa tường nhất hoặc là nhìn thấy hai mũ nâu, hoặc là nhìn thấy một mũ đen và một mũ nâu. Nếu ông ta nhìn thấy hai mũ đen, thì ông ta sẽ biết ngay mình đội mũ nâu. Người đàn ông ở giữa nhìn thấy mũ nâu, vì nếu ông ta nhìn thấy mũ đen, ông ta sẽ biết là mình phải đội mũ nâu từ thông tin do người đứng sau nói ra. Vì vậy, người đàn ông gần tường nhất kết luận rằng ông ta chỉ có thể đội mũ nâu từ những gì người đứng giữa nói ra.

Trang 221 – Bài toán Nhện và ruồi



Trang 229 — Chú khỉ và những quả dừa

Có tất cả 79 quả dừa. Gọi n là số lượng quả dừa lúc ban đầu.

Số dừa cho chú khỉ	Số dừa mỗi thủy thủ giấu đi	Số dừa còn lại trong đống dừa
1	$\frac{(n - 1)}{3}$	$\frac{(2n - 2)}{3}$
1	$\frac{(2n - 5)}{3} : 3 = \frac{2n - 5}{9}$	$\frac{2(2n - 5)}{9} = \frac{4n - 10}{9}$
1	$\frac{(4n - 19)}{9} : 3 = \frac{4n - 19}{27}$	$\frac{2(4n - 19)}{27} = \frac{8n - 38}{27}$
	Số dừa mỗi thủy thủ lấy vào sáng hôm sau	
1	$\frac{(8n - 65)}{27} : 3 = \frac{8n - 65}{81}$	0

trong đó n là tổng số dừa ban đầu.

$\frac{8n - 65}{81} = f$ là số dừa mỗi thủy thủ nhận được khi chia nhau vào buổi sáng. Cho f lần lượt nhận giá trị là các số đếm tăng dần, bắt đầu từ 1. Số f nhỏ nhất cho chúng ta giá trị n nguyên là $f = 7$. Khi đó, n có giá trị là 79.

Trang 231 — Bốn con nhện và những đường xoắn ốc

Nhận xét rằng khi bốn con nhện di chuyển, kích thước của hình vuông mà chúng tạo thành nhỏ lại, nhưng nó vẫn luôn là một hình vuông. Đường đi của mỗi con nhện vuông góc với đường đi của con nhện ở bên phải nó. Thời gian mỗi con nhện di chuyển cho đến khi nó gặp con nhện bên phải nó cũng bằng thời gian di chuyển cần thiết để chúng gặp nhau trong trường hợp con nhện bên phải đứng yên. Mỗi con nhện sẽ phải đi 6m, tức là 600cm. Để đi được 600cm, chúng cần di chuyển trong vòng 600 giây, hay là 10 phút.

SÁCH DẪN

A

Archimedes, 91, 201
đa diện Archimedes, 124
chân vịt Archimedes, 201
Albrecht, 18, 69, 105
Apollonius, 153
A-khowavizmi, 4
Ảnh ảo giác Hyzer, 15
Ảogiácquanghọc,6,15,68,116,202
lịch sử của, 174-175
Parthenon, 184-185

B

Babbage, Charles, 178-179
Babylon, người, 3, 5
bài toán viết bằng chữ hình nêm, 150
Bàn tính, 212
Bài toán
Bàn cờ, 138
Bản đồ bốn màu, 154-155
Bảy cây cầu Königsburg, 126
logic, 161
Nhện và ruồi, 221
về gỗ, nước và lúa mì, 177
Bình Klein, 46-48
Bi-a, 44
Bộ *Cơ bản*, 152
Bragdon, Claude F và đường thần kì, 171

C

Cantor, George, 159-160
Alice ở xứ sở thần tiên, 60
Alice ở xứ sở gương soi, 60
Câu chuyện rối rắm, 60
Các phép tính vi tích phân, 140-141
Các chữ số Ấn Độ, 3, 4
Các kí hiệu toán học, 54-56
Cân đối động, 105, 156-157
Câu đố
về hình vành khuyên lạ kì, 71
về đạn pháo và các kim tự tháp, 95
của Diophantus, 125
về chú khỉ và những quả dừa, 229-230
về chín đồng xu, 165
về các đồng xu, 121
về những chú ngựa Ba Tư, 72
của Sam Loyd, 49, 73
về bốn con nhện và những đường xoắn ốc, 231
tangram, 215
về ba người đàn ông đứng trước bức tường, 192
chữ T, 37
biến tam giác thành hình

vuông, 10
về lúa mì và bàn cờ, 19
Cầu Cổng Vàng và toán học, 36
Công thức nhị thức, 42, 43, 187, 188
Chia ba một góc, 96, 132-134, 199
Chiều không gian, 207
Chu vi, 70
Chứng minh 1 = 2, 142
Chữ số Ghobar, 3, 4
Cầu phương hình tròn, 74, 96, 132, 134, 199

D

Da Vinci, Leonardo, 34-35, 57, 83, 104, 105
Dải Möbius, 46-48, 63
Augustus Möbius, 46
dải Möbius kép, 210
Dãy Fibonacci, 30-31, 42, 43, 53, 89, 108, 193
và sai lầm hình học, 193
và tỉ lệ vàng, 108
và tự nhiên, 225-228
tam giác Pascal và công thức nhị thức, 42, 43
và ma phương đặc biệt, 89
và mẹo, 53
Diophantus, 125, 230
Dodgson, Charles Lutwidge, 60-61
Dòng điện và toán học, 26-27
Dudeney, Henry Ernest, 10, 221
Dürer Albrecht, 18, 69, 105
Dựng chữ cái, 18

Đ

Đa diện, 40-41
đa diện đều, 40
Đồ thị, 127-128
Đối xứng, 143, 157
Động đất và các lôgarit, 22-23
Đường
bông tuyết, 80, 162-163
Cesaro, 81
concôit của Nicomedé, 96-97
xiclôit, 7-9
xiclôit co, 9
dây xích, 36
thần khai, 189
thần kì, 171
xoắn ốc
đẳng giác, 107, 191, 231
lôgarit, 107
Archimedes, 151
Đường đi của electron, 45
Đường lấp đầy không gian, 211

E

Eratosthenes, 218
đo Trái Đất, 218
Escher, M.C., 124

Euclid, 152
Euler, 127

F

Fibonacci (Leonardo da Pisa), 30-31
Flexagon, tritetra, 109
Fractal, 80-81

G

Galileo, 205
Gauss, Carl Friedrich, 166
Gấp giấy, toán học trong, 50-52
Giải phẫu học và toán học, 34-35
Giao tuyến của mặt nón, 199-200
Googol, 78

H

Halley, Edmund, 11
Heron và định lí Heron, 64
Hexamino, 224
Hệ
 đếm theo vị trí, 3
 cơ số mười, 3, 4, 26, 27
 nhị phân, 26-27
Hệ phương trình, 198
 bàn cờ đam Trung Quốc, 198
Hilbert, David, 10
Hình chữ nhật vàng, 31, 104-108, 117, 185
Hình lục giác, 120
Hình học
 Euclid, 152
 tô-pô, 210
  Bài toán bảy cây cầu Königsberg, 126
 trăng lưỡi liềm, 74-75
 phi Euclid, 69
  fractal, 80-81
  hypebol, 92
   mô hình của Poincaré, 92-94
 và đường đi của electron, 45
 và kiến trúc Gô-tích, 65
 xạ ảnh và hội họa, 68-69
 xạ ảnh, 69, 219-220
Hippocrates ở Chios, 74
Hữu hạn, 216

K

Kĩ thuật in ấn, 18
Kiến trúc
  và toán học, 172-173
  Gô-tích và toán học, 65
Kim tự tháp vĩ đại và Thales, 38
Khối
 Kepler, 115
 mười hai mặt, 117
Klein Felix, 47
Kĩ thuật tạo ảnh ba chiều, 209

L

Laplace, Pierre Simon, 187
Lát mặt phẳng, 122-124
Leonardo da Vinci, 34-35, 57, 83, 105
Liber Abaci, 30, 31
Lịch Aztec, 130-131
Lôgarit và động đất, 22-23
Loyd, Sam, 49, 221
câu đố, 49
người cưỡi lừa và con lừa, 73
Lục giác trong tự nhiên, 76-77
Lưỡng Hà, 3, 4, 150

M

Ma phương, 84-89, 114, 171
của Benjamin Franklin, 99
của người Tây Tạng cổ đại, 135
khối, 79
Trung Quốc, 181
Máy tính, 26-27, 178-179, 209
đồ họa, 6
Charles Babbage, 178-179
na-nô giây, 82
Mê cung, 61, 194-196

N

Na-nô giây, 82
Napier, John, 66
thanh Napier, 66-67
Napoleon, Bonaparte, 59
Newton, Isaac, 140
Nghệ thuật Hồi giáo và toán học, 180
Nghịch lí
bánh xe của Aristotle, 205
đồng tiền, 223
đường nghịch, 211
bài kiểm tra bất ngờ, 149
Zeno, 118-119
Ngũ giác, 190-191
Nhân đôi hình lập phương, 96, 132-133
Nút ba lá, 98

P

Palindrome, 148
Pappus, 32
định lí Pappus, 165
Parabol, 24-25, 36
Pascal, Blaise, 42, 120, 139
Paraboloid hyperbol, 172-173
Peano, đường, 81
Penrose, Roger, 15
Pi, π, 20-21
Phần tử dây xoắn, 15
Phân số thập phân, 4
Plato, 41
Platon, khối, 41, 112
Poincaré, Henri, 93
Poinsot, khối, 115
Postscript, 18

Pythagoras, định lí, 5, 32, 51
Pythagoras, 5
và các số vô tỉ, 100-101
các môn đồ của Pythagoras, 104, 144
và Tổng thống Garfield, 203-204

Q

Quipu, 16-17
Inca, 16-17
Quy hoạch tuyến tính, 219

S

Sai lầm hình học, 193
Sao chổi Halley, 11-13, 199
Siêu lập phương, 207-208
Số
chính phương, 95, 217
kim tự tháp, 95
Mersenne, 214
lẻ, 95
ngũ giác, 217
nguyên tố, 102-103
Phi, Ø, 104-108
Pi, π, 20-21
siêu hạn, 158-160
tam giác, 217
Shroder, cầu thang, 6
Stonehenge, 206
Sự đếm, 26-27
đếm bằng các ngón tay, 62
Số không, 4, 164

T

Tam giác đồng dạng, chia ba, 176
Tam giác không thể, 15
Tam giác vàng, 190-191
Tam giác Pascal, 31, 42-43, 90, 186-188
Tangram, 215
Thales, 38
Tinh thể, 40, 143
Tỉ lệ vàng, 31, 34-35, 68, 104, 185, 190-191, 228
Toán học và
âm nhạc, 144-147
bong bóng xà phòng, 222
di truyền, 168-170
dệt vải, 213
dựng chữ cái, 18
đền thờ Parthenon, 184-185
hội họa, 68-69, 156-157
kĩ thuật in ấn, 18
kiến trúc, 172-173
nghệ thuật Hồi giáo, 180
sự phát triển các ý tưởng
Toán học, 152-153
tự nhiên, 76-77
Tô-pô, trò chơi, 28-29
Tô-pô, 33, 98, 109, 126-127, 154-155, 210

bài toán *Bản đồ bốn màu*, 154-155
đồ thị, 128-129

V

Vật phản xạ parabol, 25
Vòm trắc địa, 167
Vòm trắc địa của Leonardo da Vinci, 83
Vòng tròn ma thuật, Nhật Bản, 166
Vô cùng (vô hạn), 39, 70, 110-111, 216
khách sạn Vô Hạn, 39
chu vi và diện tích, 136-137
và giới hạn, 182

X

Xác suất, 20-21
và tam giác Pascal, 186-188

Z

Zeno, nghịch lí, 118-119

Giáo viên dạy Toán, người cố vấn toán học Theoni Pappas nhận bằng cử nhân trường Đại học California tại Berkeley vào năm 1966, và bằng thạc sĩ tại trường Đại học Stanford năm 1967. Pappas đã rất tận tụy trong công việc minh họa và làm sáng tỏ toán học, nhằm giúp mọi người loại bỏ suy nghĩ toán học chỉ dành cho những người giỏi và nỗi sợ hãi đối với nó. Năm 2000, bà nhận được giải thưởng dành cho người có thành tựu xuất sắc của Hội cựu sinh viên trường Đại học California.

Những quyển sách do bà viết đã được biên dịch sang tiếng Nhật, tiếng Phần Lan, Slovakia, Séc, Hàn Quốc, Thổ Nhĩ Kỳ, tiếng Trung Quốc phổ thông và truyền thống, Bồ Đào Nha, tiếng Ý và tiếng Tây Ban Nha.

Ngoài quyển *Niềm vui toán học*, những sáng tạo của bà còn có: *Thêm nữa những niềm vui toán học; Sự kì diệu của toán học; Fractal, googol và những câu chuyện toán học khác; Toán học cho trẻ em và mọi người; Những cuộc phiêu lưu của Penrose – chú mèo ham học toán,*... cùng rất nhiều tác phẩm khác.

NIỀM VUI TOÁN HỌC

Khám phá toán học quanh ta

NHÀ XUẤT BẢN KIM ĐỒNG
55 Quang Trung - Hà Nội ĐT: 04 3943 4730 - 04 3942 8632 - Fax: 04 3822 9085
Internet website: http//www.nxbkimdong.com.vn - Email: kimdong@hn.vnn.vn
TRUNG TÂM SÁCH KIM ĐỒNG MIỀN TRUNG
102 Ông Ích Khiêm - TP. Đà Nẵng. ĐT: 0511 381 2333 - 0511 381 2335 - Fax: 0511 381 2334
Email: mtkimdong@dng.vnn.vn
CHI NHÁNH NXB KIM ĐỒNG
268 Nguyễn Đình Chiểu - TP. Hồ Chí Minh. ĐT. 08 3930 3832 - Fax: 08 3930 5867
Email. cnnxbkimdong@hcm.fpt.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản PHẠM QUANG VINH - ĐỖ HOÀNG SƠN
Chịu trách nhiệm bản thảo: NGUYỄN HUY THẮNG
Biên tập: VÕ HẰNG NGA - VŨ THANH DUNG
Trình bày: CÔNG TY CP VĂN HÓA GIÁO DỤC LONG MINH
Thiết kế: BÙI THỊ THANH THUỶ

In 3.000 bản - Khổ 14 x 21.5 cm - Tại Công ty TNHH In và DVTM Phú Thịnh
Số xuất bản: 05-2010/CXB/(102, 103)-161/KĐ cấp ngày 02 tháng 12 năm 2009
In xong và nộp lưu chiểu tháng 05 /2010

"**Niềm vui toán học** giúp người đọc hiểu thêm về mối liên hệ mật thiết giữa toán học và thế giới này bằng các khái niệm và hình ảnh của toán học hiện diện trong mọi lĩnh vực của đời sống chúng ta."

– Science News

"Hiếm khi nào chúng ta bắt gặp được những cuốn sách toán học với lượng kiến thức phong phú và có chiều sâu như cuốn sách này. Sách của Pappas luôn chứa đựng những thông tin bổ ích và lí thú, không chỉ thỏa mãn lòng ham hiểu biết của các em học sinh và các đối tượng khác mà còn là tài liệu dành cho các nhà nghiên cứu. Pappas thông thái vừa là một nhà toán học vừa là một nhà thơ. Bằng tư duy sắc sảo của một nhà khoa học và cái nhìn đầy thi vị của một nhà nghệ thuật, bà đã lựa chọn những chủ đề chắc chắn sẽ kích thích trí tưởng tượng và khơi dậy cảm giác thích thú của bạn đọc về sự bao la kì vĩ của hành tinh toán học."

– Clifford A. Pickover, tác giả cuốn *Computers & the Imagination*

"**Niềm vui toán học** mang thế giới toán học đến với bạn đọc bằng một cách thức chuẩn mực nhưng rất mới mẻ... Tôi chân thành khuyên các bạn nên đọc."

– The Mathematics Teacher

"**Niềm vui toán học** không phải là sự lặp đi lặp lại đầy máy móc về các khái niệm. Cuốn sách khám phá nguồn gốc của cả khái niệm toán học và người phát minh khái niệm ấy, đưa ra những bài tập độc đáo khiến bộ não chúng ta không chỉ tiếp thu lí thuyết mà còn phải áp dụng vào thực tế... Các bí quyết, bài tập và khái niệm không còn khô cứng nữa, mà trở nên thú vị hơn bao giờ hết."

– The Bookwatch

Theoni Pappas nổi tiếng trong giới toán học như là tác giả của những nguồn tài liệu quý báu và vô cùng cuốn hút người đọc.

KIM ĐỒNG

LONGMINH

CÔNG TY CỔ PHẦN VĂN HÓA GIÁO DỤC LONG MINH

website: www.longminh.com.vn

Địa chỉ: Phòng 303, Nhà 17T9 Khu đô thị Trung Hòa Nhân Chính, Quận Thanh Xuân, TP Hà Nội

Điện thoại: 04. 6281 6835 * Fax: 04. 6281 6834

Email: sach@longminh.com.vn

7102303800026

Giá: 65.000đ

8935036616197