CHƯƠNG 5. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

Có lẽ quan trọng nhất của tất cả các ứng dụng của giải tích là phương trình vi phân. Khi các nhà khoa học vật lý hoặc các nhà khoa học xã hội sử dụng giải tích, thường thì là phân tích một phương trình vi phân đã phát sinh trong quá trình mô hình hóa một số hiện tượng mà họ đang nghiên cứu. Mặc dù không thể tìm thấy một công thức rõ ràng đối với nghiệm của một phương trình vi phân, chúng ta sẽ thấy rằng tiếp cận phương pháp tiếp đồ họa và phương pháp số cung cấp các thông tin cần thiết.

Mối quan hệ giữa các quần thể động vật săn mồi và con mồi (cá mập và cá thực phẩm, bọ rùa và rệp, chó sói và thỏ) được khám phá bằng cách sử dụng các cặp phương trình vi phân trong phần cuối của chương này.

5.1. Mô hình hóa với phương trình vi phân

Mô hình toán học của các hệ thống thực thường dẫn tới các dạng *phương trình vi phân*, tức là, một phương trình chứa hàm chưa biết và một số đạo hàm của nó. Đây không phải là đáng ngạc nhiên vì trong một bài toán thực tế, chúng ta thường nhận thấy rằng những thay đổi xảy ra và chúng ta muốn dự đoán hành vi trong tương lai trên cơ sở thay đổi như thế nào của các giá trị hiện tại. Hãy bắt đầu bằng cách kiểm tra một số ví dụ về cách phương trình vi phân phát sinh khi chúng ta mô hình hiện tượng vật lý.

5.1.1. Mô hình tăng trưởng dân số

Một mô hình cho sự phát triển của một dân số được dựa trên giả định rằng dân số phát triển với tốc độ tỷ lệ thuận với số lượng của dân số. Đó là một giả định hợp lý cho một quần thể vi khuẩn hoặc động vật trong điều kiện lý tưởng (không giới hạn môi trường, dinh dưỡng đầy đủ, không có kẻ thù, khả năng miễn dịch bệnh).

Chúng ta hãy xác định và đặt tên cho các biến trong mô hình này:

t = thời gian (biến độc lập)

P = số lượng các thể trong quần thể (biến phụ thuộc)

Tốc độ tăng trưởng của quần thể là đạo hàm *dP/dt*. Vì thế chúng ta giả sử rằng tốc độ tăng trưởng của quần thể tỷ lệ tuận với số lượng các cá thể, được viết theo phương trình

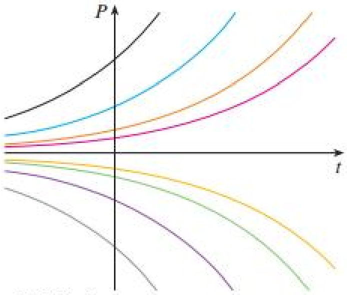
[1] $dP/dt = kP$

trong đó k là hằng số tỷ lệ. Phương trình 1 là mô hình đầu tiên của chúng ta đối với sự tăng trưởng quần thể. Đó là phương trình vi phân bởi vì nó chứa hàm phải tìm P và đạo hàm của nó dP/dt.

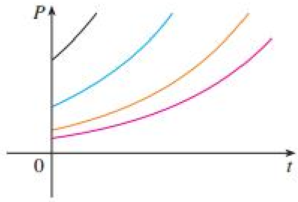
Đã xây dựng được mô hình, chúng ta xem hậu quả của nó. Nếu chúng ta loại trừ dân số bằng 0 thì $P(t) > 0$ với mọi t. Vì vậy nếu $k > 0$ thì phương trình 1 chứng tỏ rằng $P(t) > 0$ với mọi t. Nghĩa là quần thể luôn luôn tăng. Sự thật, khi P(t) tăng, phương trình 1 chỉ ra rằng dP/dt trở lên lớn hơn. Nói khác đi, tốc độ tăng trưởng tăng khi quần thể tăng.

Chúng ta xem xét nghiệm của phương trình 1. Phương trình này yêu cầu chúng ta tìm một hàm mà đạo hàm của nó là hằng số nhân với chính nó. Dễ kiểm tra rằng hàm mũ có tính chất này. Sự thật, nếu chúng ta đặt $P(t) = Ce^{kt}$, thì $P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t)$.

Vì vậy bất kỳ hàm mũ dạng $P(t) = Ce^{kt}$ là nghiệm của phương trình 1. Trong phần 5.4 ta sẽ thấy nó không có nghiệm nào khác.



Hình 1
Họ nghiệm của dP/dt = kP



Hình 2
Họ nghiệm $P(t) = Ce^{kt}$
với C > 0 và t ≥ 0

Cho phép C nhận mọi giá trị thực, chúng ta nhận được họ nghiệm $P(t) = Ce^{kt}$ mà đồ thị của nó được chỉ ra trên Hình 1. Nhưng quần thể chỉ có giá trị dương và vì vậy chúng ta chỉ quan tâm các nghiệm với C > 0. Và có lẽ chúng ta chỉ quan tâm với các giá trị của t lớn hơn giá trị thời gian khởi tạo t = 0. Hình 2 biểu thị các nghiệm có ý nghĩa vật lý. Đặt t = 0, ta nhận được P(0) = C, vì vậy hằng số C là giá trị khởi tạo của quần thể, P(0).

Phương trình 1 là phù hợp với mô hình tăng trưởng dân số trong điều kiện lý tưởng, nhưng chúng ta phải nhận ra rằng một mô hình thực tế hơn phải phản ánh thực tế là một môi trường nhất định có nguồn lực hạn chế. Nhiều quần thể bắt đầu bằng cách tăng một cách theo số mũ, nhưng mức độ quần thể dừng khi nó tiếp cận ngưỡng (carrying capacity) M của nó (hoặc giảm nếu nó vượt quá M). Đối với một mô hình có tính đến cả hai xu hướng, chúng ta đặt ra hai giả định:

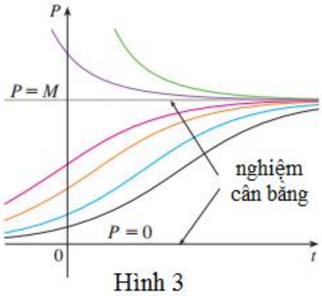
- dP/dt ≈ kP nếu P nhỏ (Ban đầu, tốc độ tăng trưởng là tỷ lệ thuận với P)
- dP/dt < 0 nếu P > M (P giảm nếu P vượt quá M)

Một biểu thức đơn giản mà kết hợp cả hai giả thiết được cho bởi phương trình

[2] $$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Chú ý rằng nếu P là nhỏ so với M, thì P/M gần bằng 0 và vì vậy dP/dt ≈ kP. Nếu P > M thì 1 – P/M âm và vì vậy dP/dt < 0.

Phương trình 2 được gọi là phương trình vi phân hậu cần, được đề xuất bởi nhà sinh vật học, toán học người Hà Lan Pierre-François Verhulst trong những năm 1840 như một mô hình cho sự phát triển dân số thế giới. Chúng ta sẽ phát triển các kỹ thuật cho phép chúng ta tìm nghiệm tường minh của phương trình hậu cần tại mục 5.4, nhưng bây giờ chúng ta có thể suy ra các đặc trưng của nghiệm trực tiếp từ phương trình 2. Đầu tiên chúng ta nhận thấy rằng các hàm hằng số P(t) = 0 và P(t) = M là nghiệm bởi vì, trong cả hai trường hợp , một trong hai nhân tử ở vế phải của phương trình 2 là bằng không. (Điều này chắc chắn có ý nghĩa vật lý: Nếu dân số hoặc là bằng 0 hoặc bằng ngưỡng, nó vẫn như vậy.) Hai nghiệm hằng số đó được gọi là nghiệm cân bằng (equilibrium).



Hình 3

Nếu gí trị khởi tạo P(0) nằm giữa 0 và M thì vế phải phương trình 2 dương, vì vậy dP/dt > 0 và dân số tăng. Nhưng nếu dân số vượt quá ngưỡng (P > M) thì 1 – P/M âm, nên dP/dt < 0 và dân số giảm. Chú ý rằng trong mỗi trường hợp, nếu dân số tiếp cận ngưỡng (P → M) thì dP/dt → 0, nghĩa là mức dân số dừng. Vì thế chúng ta mong muốn rằng các nghiệm của phương trình vi phân hậu cần có đồ thị trông giống như những cái trong Hình 3. Chú ý rằng các đồ thị di chuyển ra khỏi nghiệm cân bằng P = 0 và tiến tới nghiệm cân bằng P = M.

5.1.2. Mô hình chuyển động của lò xo

Bây giờ hãy quan sát một ví dụ về một mô hình từ khoa học vật lý. Chúng ta xem xét chuyển động của một đối tượng với khối lượng m tại đầu của một lò xo dọc (như trong Hình 4). Theo Định luật Hooke, nếu lò xo được kéo dài (hoặc nén) x đơn vị từ chiều dài tự nhiên của nó, thì nó tạo nên một lực tỷ lệ thuận với x: lực đàn hồi = -kx, trong đó k là hằng số dương, được gọi là *hằng số đàn hồi* (spring constant). Nếu chúng ta bỏ qua mọi lực cản bên ngoài (do sức cản không khí hoặc ma sát) thì theo Định luật thứ 2 Newton (lực bằng khối luongj nhân với gia tốc), ta có

[3] $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

Đây là một ví dụ về phương trình vi phân cấp hai bởi vì nó liên quan đến các đạo hàm cấp hai. Hãy xem những gì chúng ta có thể đoán về dạng của nghiệm trực tiếp từ phương trình. Chúng ta có thể viết lại phương trình 3 dưới dạng

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

cái đó nói lên rằng đạo hàm cấp 2 của x tỷ lệ với x nhưng trái dấu. Chúng ta biết hai hàm có tính chất này, là hàm sine và hàm cosine. Trong thực tế, nó chỉ ra rằng tất cả các nghiệm của phương trình 3 có thể được viết như là sự kết hợp của các hàm sine và cosine. Đây không phải là đáng ngạc nhiên, chúng ta hy vọng lò xo dao động về vị trí cân bằng của nó và do đó, tự nhiên nghĩ rằng hàm lượng giác có liên quan.

5.1.3. Phương trình vi phân tổng quát

Nói chung, một phương trình vi phân là một phương trình có chứa hàm phải tìm và một hoặc nhiều đạo hàm của nó. Cấp của một phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm xuất hiện trong phương trình. Do đó phương trình 1 và 2 là phương trình cấp một và phương trình 3 là một phương trình cấp hai. Trong cả ba của những phương trình, t là biến độc lập và biểu thị thời gian, nhưng nói chung các biến độc lập không biểu thị thời gian. Ví dụ, khi chúng ta xem xét các phương trình vi phân

[4] y' = xy

nó được hiểu rằng hàm cần tìm y là phụ thuộc x.

Một hàm f được gọi là nghiệm của phương trình vi phân nếu phương trình được thỏa mãn khi y = f(x) và các đạo hàm của nó được thay vào phương trình. Vì vậy f là nghiệm của phương trình 4 nếu *f '(x) = xf(x)*, với mọi giá trị của x trên khoảng nào đó.

Khi chúng ta được yêu cầu giải một phương trình vi phân, chúng ta mong muốn sẽ tìm thấy tất cả các nghiệm có thể có của phương trình. Chúng ta đã giải một số phương trình vi phân đặc biệt đơn giản, cụ thể là dạng *y' = f(x)*.

Ví dụ, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' = x^3$ được cho bởi $y = \frac{1}{4}x^4 + C$, với C là hằng số tùy ý.

Nhưng, nói chung, việc giải một phương trình vi phân không phải là một vấn đề dễ dàng. Không có hệ thống kỹ thuật cho phép chúng ta giải tất cả các phương trình vi phân. Tuy nhiên, tại mục 5.2, chúng ta sẽ xem làm thế nào để vẽ đồ thị thô của các nghiệm ngay cả khi chúng ta không có công thức tường minh. Chúng ta cũng sẽ tìm hiểu làm thế nào để tìm nghiệm xấp xỉ ở dạng số.

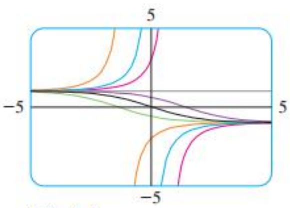
Ví dụ 1 Chứng tỏ rằng mọi hàm có dạng $y = \frac{1+ce^t}{1-ce^t}$, với C là hằng số nào đó, là nghiệm của phương trình $y' = \frac{1}{2}(y^2-1)$.

Lời giải Chúng ta sử dụng quy tắc lấy đạo hàm của thương để tính đạo hàm:

$$y' = \frac{ce^t(1-ce^t)-(1+ce^t)(-ce^t)}{(1-ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2}$$

Vế phải của phương trình vi phân trở thành

$$\frac{1}{2}(y^2-1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+ce^t}{1-ce^t}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+ce^t)^2-(1-ce^t)^2}{(1-ce^t)^2}\right] = \frac{1}{2}\frac{4ce^t}{(1-ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2}$$



Hình 5

Do đó, với mọi giá trị của C, hàm đã cho là nghiệm của phương trình vi phân.

Hình 5 cho thấy đồ thị của bảy nghiệm riêng của họ nghiệm trong Ví dụ 1. Phương trình vi phân cho thấy rằng nếu y ≈ ± 1, thì y ' ≈ 0. Đó là do độ phẳng của đồ thị gần y = 1 và y = -1.

Khi áp dụng phương trình vi phân, chúng ta thường không quan tâm đến việc tìm kiếm một họ các nghiệm (nghiệm tổng quát), mà tìm kiếm một nghiệm thỏa mãn một số yêu cầu bổ sung. Trong nhiều bài toán vật lý chúng ta cần tìm nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện dạng $y(t_0) = y_0$, được gọi là điều kiện đầu, và việc tìm nghiệm của phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện ban đầu được gọi là bài toán với giá trị đầu.

Về mặt hình học, khi chúng ta áp đặt một điều kiện đầu, chúng ta nhìn vào họ của các đường cong nghiệm và chọn một trong những đường đi qua điểm (t_0, y_0). Về ý nghĩa vật lý, điều này tương ứng với trạng thái của một hệ thống tại thời gian t_0 và sử dụng nghiệm của bài toán với giá trị đầu để dự đoán hành vi tương lai của hệ thống.

Ví dụ 2 Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y' = \frac{1}{2}(y^2-1)$ thỏa mãn điều kiện y(0) = 2.

Lời giải Thay các giá trị t = 0 và y = 2 vào công thức $y = \frac{1+ce^t}{1-ce^t}$ trong Ví dụ 1, ta nhận được $2 = \frac{1+ce^0}{1-ce^0} = \frac{1+c}{1-c}$. Giải ra ta được $c = \frac{1}{3}$, vì vậy nghiệm của bài toán giá trị đầu là

$$y = \frac{1+\frac{1}{3}e^t}{1-\frac{1}{3}e^t} = \frac{3+e^t}{3-e^t}$$

5.2. Trường hướng và phương pháp Euler

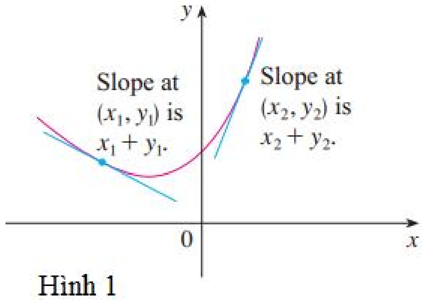
Thật không may, chúng ta không thể giải hầu hết phương trình vi phân theo nghĩa có được một công thức tường minh cho nghiệm. Trong phần này, chúng ta chỉ ra rằng, mặc dù không có nghiệm tường minh, chúng ta vẫn có tìm hiểu được rất nhiều về nghiệm thông qua cách tiếp cận đồ họa (trường hướng) hoặc cách tiếp cận số (phương pháp Euler).

5.2.1. Trường hướng

Giả sử chúng ta được yêu cầu phác họa đồ thị của nghiệm của bài toán giá trị đầu

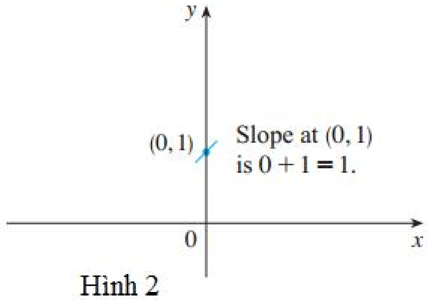
y' = x + y   y(0) = 1

Chúng ta không biết công thức nghiệm, vậy làm thế nào chúng ta có thể có thể phác họa đồ thị của nó? Hãy suy nghĩ về ý nghĩa của phương trình vi phân. Phương trình y' = x + y cho chúng ta biết độ dốc tại điểm bất kỳ (x, y) trên đồ thị (được gọi là đường cong nghiệm) bằng tổng của các tọa độ x và y của điểm đó (xem Hình 1). Đặc biệt, bởi vì đường cong đi qua điểm (0, 1), độ dốc của nó phải bằng 0 + 1 = 1. Vì vậy, một phần nhỏ của đường cong nghiệm gần điểm (0, 1) trông giống như một đoạn thẳng ngắn đi qua (0, 1) có độ dốc 1. (Xem Hình 2).



Hình 1

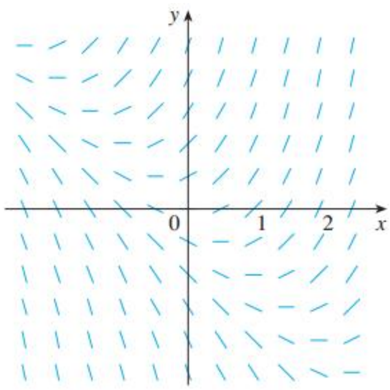
Nghiệm của y' = x + y



Hình 2

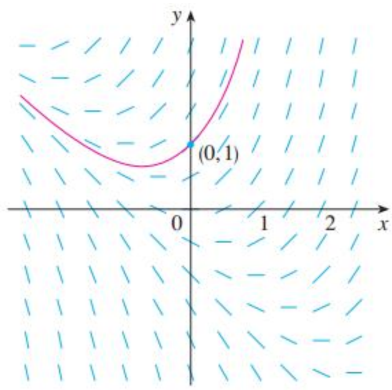
Bắt đầu của đường cong nghiệm qua (0, 1)

Như hướng dẫn để phác thảo phần còn lại của đường cong, hãy vẽ các đoạn thẳng ngắn tại một số điểm (x, y) có độ dốc x + y. Kết quả được gọi là trường hướng và được thể hiện trong Hình 3. Ví dụ, đoạn thẳng tại điểm (1, 2) có độ dốc 1 + 2 = 3. Trường hướng cho phép chúng ta hình dung dáng điệu chung của đường cong nghiệm bằng cách chỉ ra các hướng tại mỗi điểm mà đường cong đi qua.



Hình 3

Trường hướng đối với y' = x + y



Hình 4

Đường cong nghiệm đi qua (0, 1)

Bây giờ chúng ta có thể phác họa đường cong nghiệm đi qua điểm (0, 1) bởi trường hướng như trong Hình 4. Chú ý rằng chúng ta đã vẽ ra những đường cong mà nó song song với những đoạn thẳng ở gần.

Nói chung, giả sử chúng ta có một phương trình vi phân cấp một dạng y' = F(x, y), trong đó F(x, y) là biểu thức nào đó của x và y. Phương trình vi phân nói rằng độ dốc của đường cong nghiệm tại điểm (x, y) trên đường cong là F(x, y). Nếu chúng ta vẽ những đoạn thẳng ngắn với độ dốc F(x, y) tại vài đr (x, y), kết quả được gọi là trường hướng (hoặc trường độ dốc). Các đoạn thẳng đó biểu thị hướng mà theo đó đường cong nghiệm hướng tới, vì vậy trường hướng giúp chúng ta hình dung dáng điệu chung của các đường cong.

Ví dụ 1 (a) Phác họa trường hướng đối với phương trình vi phân $y' = x^2 + y^2 - 1$.

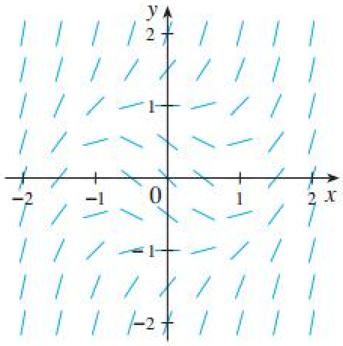
(b) Sử dụng phần (a) để phác họa đường cong nghiệm đi qua gốc tọa độ.

Lời giải (a) Chúng ta bắt đầu tính độ dốc tại vài điểm trong bảng sau:

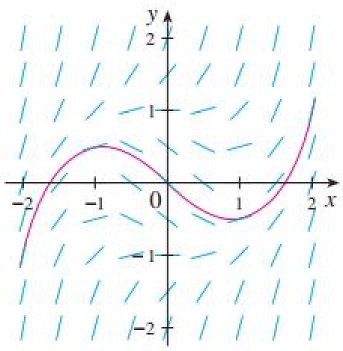
x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	...
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	...

Bây giờ chúng ta vẽ các đoạn ngắn với độ dốc tại các điểm đó. Kết quả là trường hướng được chỉ ra trên Hình 5.

(b) Chúng ta bắt đầu tại gốc tọa độ và di chuyển sang bên phải theo hướng của đoạn thẳng có độ dốc bằng -1. Chúng ta tiếp tục vẽ đường cong nghiệm để nó di chuyển song song với các đoạn gần đó. Đường cong nghiệm kết quả được thể hiện trong Hình 6. Trở lại gốc tọa độ, chúng ta vẽ đường cong nghiệm bên trái như vừa rồi.

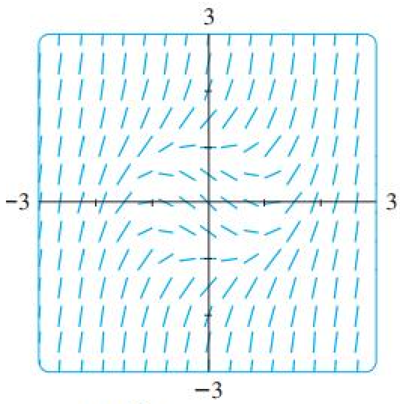


Hình 5

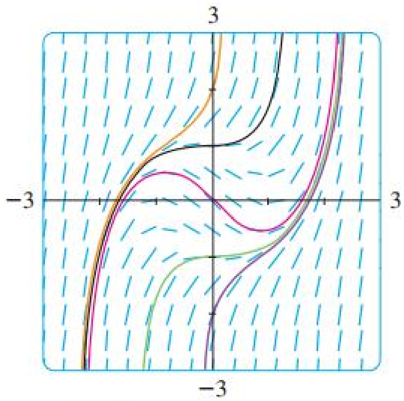


Hình 6

Càng nhiều đoạn thẳng được vẽ trên trường hướng thì bức tranh càng trở nên rõ ràng. Tất nhiên, thật là tẻ nhạt (tedious) để tính độ dốc và vẽ các đoạn thẳng với số lượng lớn một cách thủ công, nhưng máy tính là phụ hợp tốt cho nhiệm vụ này. Hình 7 chỉ ra chi tiết hơn, máy tính đã vẽ ra trường hướng cho phương trình vi phân trong Ví dụ 1. Nó cho phép chúng ta vẽ với độ chính xác hợp lý, các đường cong nghiệm được chỉ ra trên Hình 8.

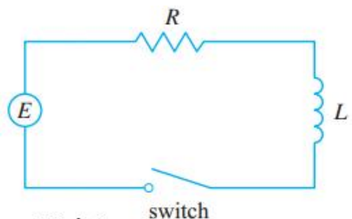


Hình 7



Hình 8

Bây giờ hãy xem các trường hướng cung cấp cho cái nhìn sâu sắc vào các tình huống vật lý như thế nào. Mạch điện đơn giản thể hiện trong Hình 9 gồm một nguồn điện (thường là pin hoặc máy phát điện) cung cấp một điện áp E(t) volt (V) và một dòng điện I(t) ampe (A) tại thời điểm t. Mạch cũng có một điện trở R ohms (Ω) và một cuộn cảm với điện cảm L henries (H).



Hình 9

Định luật Ôm cho hiệu điện thế trên điện trở là RI. Hiệu điện thế trên cuộn cảm là L(dI/dt). Một trong những định luật Kirchhoff nói rằng tổng của những hiệu điện thế bằng điện áp cung cấp E(t). Do đó chúng ta có

[1] $$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

đó là phương trình vi phân cấp một mà mô hình dòng điện I tại thời điểm t.

Ví dụ 2 Giả sử rằng trong mạch điện đơn giản của Hình 9, điện trở là 12 Ω, điện cảm là 4 H, và một pin cho một điện áp không đổi 60 V.

(a) Vẽ trường hướng cho phương trình 1 với các giá trị trên.

(b) Có thể nói gì về các giá trị giới hạn của dòng điện?

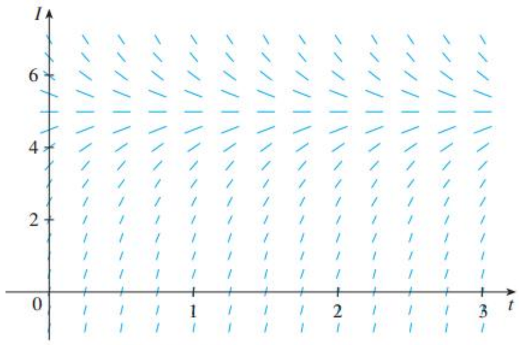
(c) Xác định các nghiệm cân bằng.

(d) Nếu chuyển mạch được đóng khi t = 0 vì vậy dòng điện bắt đầu với I(0) = 0, sử dụng trường hướng phác họa đường cong nghiệm.

Lời giải Nếu chúng ta đặt L = 4, R = 12 và E(t) = 60 vào phương trình 1, ta nhận được

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \text{ hay } \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

Trường hướng đối với phương trình vi phân này được chỉ ra trên Hình 10.

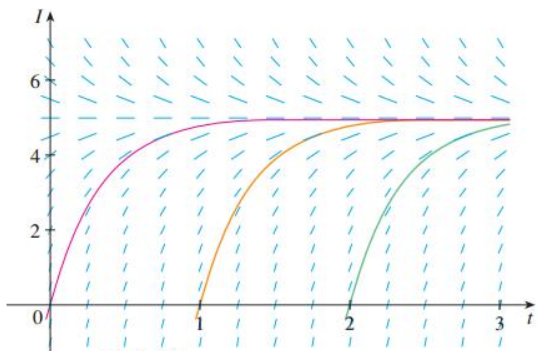


Hình 10

(b) Trường hướng cho thấy các nghiệm đều tiếp cận giá trị 5A, tức là $\lim_{t\to\infty} I(t) = 5$

(c) Trường hướng cho thấy hàm không đổi I(t) = 5 là nghiệm cân bằng. Thật vậy, chúng ta có thể kiểm tra trực tiếp từ phương trình vi phân *dI/dt = 15 – 3I*. Nếu I(t) = 5 thì vế trái *dI/dt* = 0 và vế phải 15 – 3(5) = 0.

(d) Chúng ta sử dụng trường hướng để phác họa đường cong nghiệm đi qua (0, 0), như được chỉ ra trên Hình 11.



Hình 11

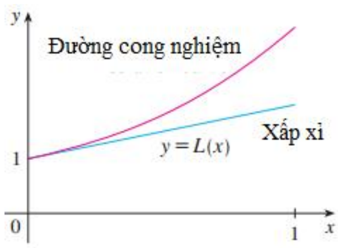
Thông báo từ Hình 10 là đoạn thẳng dọc theo bất kỳ đường ngang là song song. Đó là bởi vì t biến độc lập không xuất hiện ở phía bên phải của phương trình I' = 15 – 3I. Tổng quát, phương trình vi phân dạng y' = f(y) trong đó biến độc lập không xuất hiện ở vế phải của phương trình, được gọi là tự trị (autonomous). Với những phương trình như vậy, độ dốc tương ứng của hai điểm khác nhau với cùng một tọa độ y sẽ bằng nhau. Nghĩa là nếu chúng ta biết một nghiệm của phương trình vi phân tự trị, thì chúng ta có thể nhận được vô hạn nghiệm bằng cách dịch nghiệm đã biết sang phải hoặc sacng trái. Trên Hình 11 chúng ta chỉ ra các nghiệm mà kết quả là việc đẩy chuyển động nghiệm của Ví dụ 2 một hoặc hai đơn vị thời gian (cụ thể là giây) sang bên phải. Chúng tương ứng với sự đóng mạch khi t = 1 hoặc t = 2.

5.2.2. Phương pháp Euler

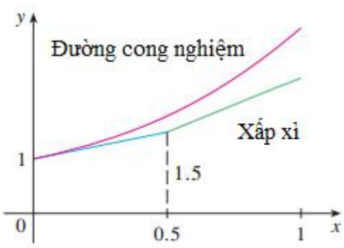
Ý tưởng cơ bản đằng sau trường hướng có thể được sử dụng để tìm nghiệm xấp xỉ dạng số của phương trình vi phân. Chúng ta minh họa phương pháp bằng bài toán giá trị đầu mà chúng ta đã sử dụng để giới thiệu trường hướng: y' = x + y y(0) = 1

Phương trình vi phân cho chúng ta biết rằng y'(0) = 0 + 1 = 1, vì thế đường cong nghiệm có độ dốc bằng 1 tại điểm (0, 1). Như là xấp xỉ đầu tiên của nghiệm, chúng ta sử dụng xấp xỉ tuyến tính L(x) = x + 1. Nói khác đi, chúng ta có thể sử dụng đường tiếp tuyến tại (0,1) như một xấp xỉ thô (rough) của đường cong nghiệm (xem Hình 12).

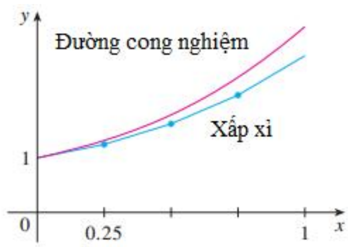
Ý tưởng của Euler là cải thiện xấp xỉ này bằng cách chỉ thực hiện một đoạn ngắn dọc theo tiếp tuyến này và sau đó thay đổi hướng theo trường hướng. Hình 13 cho thấy những gì sẽ xảy ra nếu chúng ta bắt đầu dọc theo đường tiếp tuyến nhưng dừng lại khi x = 0.5. Khoảng cách ngang này được gọi là độ dài bước (step size). Vì L(0.5) = 1.5, chúng ta có y(0.5) ≈ 1.5 và chúng ta đặt (0.5, 1.5) như là điểm bắt đầu của đoạn mới. Phương trình vi phân cho chúng ta thấy y'(0.5) = 0.5 + 1.5 = 2, vì vậy chúng ta sử dụng hàm tuyến tính y = 1.5 + 2(x – 0.5) = 2x + 0.5 như là xấp xỉ của nghiệm với x > 0.5 (đoạn phía dưới trong Hình 13). Nếu chúng ta giảm độ dài bước từ 0.5 xuống 0.25, chúng ta nhận được xấp xỉ Euler tốt hơn, chỉ ra trong Hình 14.



Hình 12
Xấp xỉ Euler đầu tiên



Hình 13
Xấp xỉ Euler với độ dài bước 0.5



Hình 14
Xấp xỉ Euler với độ dài bước 0.25

Nói chung, phương pháp Euler nói rằng bắt đầu tại điểm cho trước bởi các giá trị đầu, đi dọc theo hướng được chỉ định bởi trường hướng. Dừng lại sau một thời gian ngắn, nhìn vào độ dốc ở vị trí mới, tiếp tục đi theo hướng đó. Dừng lại và thay đổi hướng dựa vào trường hướng. Phương pháp Euler không đưa ra nghiệm chính xác mà đưa ra nghiệm xấp xỉ. Nhưng bằng cách giảm độ dài bước (và do đó tăng số lần điều chỉnh), chúng ta có được các xấp xỉ liên tiếp tốt hơn của nghiệm chính xác. (So sánh Hình 12, 13, và 14.)

Đối với bài toán giá trị đầu tổng quát y' = f(x, y), y(x_0) = y_0, mục đích của chúng ta là tìm các giá trị xấp xỉ của nghiệm tại các điểm cách đều x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ..., ở đây h là độ dài bước. Phương trình nói với chúng ta rằng độ dốc tại (x_0, y_0) là $y' = f(x_0, y_0)$, vì thế Hình 15 chỉ ra rằng giá trị xấp xỉ của nghiệm khi $x = x_1$ là

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Tương tự $\quad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$

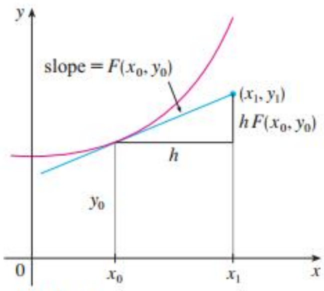
Tổng quát $\quad y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$

Phương pháp Euler Các giá trị xấp xỉ của nghiệm của bài toán giá trị đầu $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ với độ dài bước h, tại $x_k = x_{k-1} + h$, là

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}) \qquad k = 1, 2, 3, ...$$

Ví dụ 3 Sử dụng phương pháp Euler với độ dài bước 0.1 để xây dựng bảng các giá trị xấp xỉ của nghiệm của bài toán giá trị đầu

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$



Hình 15

Lời giải

Chúng ta có $h = 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ và $f(x, y) = x + y$. Vì thế

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1) = 1.22$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.22 + 0.1(0.2 + 1.22) = 1.362$$

Nghĩa là nếu y(x) là nghiệm chính xác thì $y(0.3) \approx 1.362$.

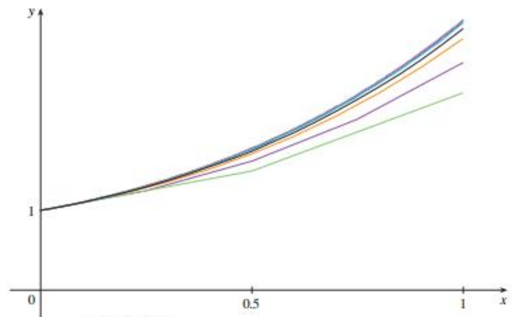
Tiếp tục với những tính toán tương tự, chúng ta nhận được các giá trị trong bảng:

k	x_k	y_k		k	x_k	y_k
0	0	1.000000		5	0.5	1.721020
1	0.1	1.100000		6	0.6	1.943122
2	0.2	1.220000		7	0.7	2.197434
3	0.3	1.362000		8	0.8	2.487178
4	0.4	1.528200		9	0.9	2.815895

Trong Ví dụ 3, để có một bảng các giá trị chính xác hơn, chúng ta có thể làm giảm dộ dài bước. Nhưng đối với một số lượng lớn các bước nhỏ thì số lượng tính toán là đáng kể và do đó chúng ta cần một chương trình máy tính để thực hiện các tính toán đó. Bảng sau cho thấy kết quả của việc áp dụng phương pháp Euler với giảm độ dài của Ví dụ 3.

Đồ dài bước	y(0.500)	y(1.000)
0.500	1.500000	2.500000
0.250	1.625000	2.882813
0.100	1.721020	3.187485
0.050	1.757789	3.306595
0.020	1.781212	3.383176
0.010	1.789264	3.409628
0.005	1.793337	3.423034
0.001	1.796619	3.433848

Chú ý rằng các ước lượng Euler trong bảng dường như là tiếp cận giới hạn, cụ thể, các giá trị đúng của y(0.5) và y(1). Hình 16 cho thấy đồ thị của các xấp xỉ Euler với độ dài bước là 0.50, 0.25, 0.10, 0.05, 0.02, 0.01, và 0.005. Chúng tiếp cận đường cong của nghiệm đúng khi độ dài bước h dần về 0.



Hình 16
Các nghiệm xấp xỉ dần tới nghiệm đúng

Ví dụ 4 Trong ví dụ 2, chúng ta đã thảo luận về một mạch điện đơn giản với điện trở 12Ω, điện cảm 4H, và một nguồn điện áp 60V. Nếu chuyển mạch đóng khi t = 0, chúng ta đã mô hình hóa dòng điện I tại thời điểm t theo bài toán giá trị đầu dI/dt = 15 – 3I, I(0) = 0

Ước lượng dòng điện trong mạch ở nửa giây sau khi chuyển mạch được đóng.

Lời giải Chúng ta sử dụng phương pháp Euler với f(t, I) = 15 – 3I, $t_0 = 0$, $I_0 = 0$, và độ dài bước h = 0.1 giây:

$$I_1 = 0 + 0.1(15 - 3(0)) = 1.5$$
$$I_2 = 1.5 + 0.1(15 - 3(1.5)) = 2.55$$
$$I_3 = 2.55 + 0.1(15 - 3(2.55)) = 3.285$$
$$I_4 = 3.285 + 0.1(15 - 3(3.285)) = 3.7995$$
$$I_5 = 3.7795 + 0.1(15 - 3(3.7795)) = 4.15965$$

Vì vậy dòng điện sau 0.5 giây là I(0.5) = 4.15965 ≈ 4.16A

5.3. Phương trình phân ly

Chúng ta đã xem xét các phương trình vi phân cấp một theo phương diện hình học của xem (trường hướng) và phương pháp số (phương pháp Euler). Về phương diện biểu thức tượng trưng thì sao? Cần có một công thức rõ ràng cho nghiệm của một phương trình vi phân. Thật không may, điều đó không phải là luôn luôn có thể. Nhưng trong phần này chúng ta xem xét một loại phương trình vi phân mà có thể giải tường minh.

Một phương trình phân ly là một phương trình vi phân caaps một trong đó biểu thức dy/dx có thể được phân tích thành tích của một hàm của x nhân với một hàm của y. Nói cách khác, nó có thể được viết dưới dạng *dy/dx = g(x)f(y)*, hoặc tương đương nếu f(y) ≠ 0,

[1] $$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

trong đó h(y) = 1/f(y). Để giải phương trình này, chúng ta viết lại dưới dạng *h(y)dy = g(x)dx*, tức là tất cả liên quan đến y thì thuộc một vế, còn tất cả liên quan đến x thì thuộc vế kia. Khi đó tích phân hai vế của phương trình ta được:

[2] $$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Phương trình 2 xác định hàm ẩn y phụ thuộc x. Trong một số trường hợp chúng ta có thể giải ra được y theo x.

Chúng ta sử dụng quy tắc dây chuyền để chứng minh thủ tục này. Giả sử h và g thỏa mãn phương trình 2, thì

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)dx\right) \Leftrightarrow \frac{d}{dy}\left(\int h(y)dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x) \Leftrightarrow h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

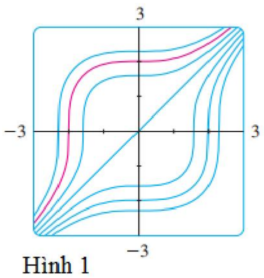
Vì vậy phương trình 1 thỏa mãn.

Ví dụ 1 (a) Giải phương trình vi phân $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{x^2}{y^2}$

(b) Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện đầu y(0) = 2.

Lời giải (a) Ta viết phương trình ở dạng các vi phân rồi tích phân hai vế:

$$y^2dy = x^2dx \Leftrightarrow \int y^2dy = \int x^2dx \Leftrightarrow \tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$



Hình 1

trong đó C là hằng số tùy ý. Giải ra y ta nhận được

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}, \text{ hoặc } y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

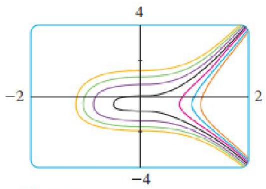
(b) Nếu chúng ta đặt x = 0 trong nghiệm tổng quát, ta nhận được $y(0) = \sqrt[3]{K}$. Để thỏa mãn điều kiện y(0) = 2 thì $\sqrt[3]{K} = 2$ nên K = 8.

Vì thế nghiệm của bài toán giá trị đầu là $y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$.

Hình 1 mô tả đồ thị của một số nghiệm riêng trong Ví dụ 1. Đồ thị của nghiệm ở phần (b) là đường cong thứ hai từ trên xuống.

Ví dụ 2 Giải phương trình vi phân $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{6x^2}{2y + cosy}$

Lời giải Viết phương trình ở dạng vi phân rồi tích phân hai vế, ta được



Hình 2

$$(2y + cosy)dy = 6x^2dx \Leftrightarrow \int(2y + cosy)dy = \int 6x^2dx$$

[3] $y^2 + \text{siny} = 2x^3 + C$

trong đó C là hằng số tùy ý. Phương trình 3 đưa ra nghiệm tổng quát ẩn. Trong trường hợp này không thể giải phương trình để biểu diễn y tường minh là hàm của x.

Hình 2 hiển thị đồ thị của các nghiệm của phương trình trong Ví dụ 2. Các đường cong từ trái sang phải ứng với các giá trị của C là 3, 2, 1, 0, -1, -2 và -3.

Ví dụ 3 Giải phương trình vi phân y' = x^2y.

Lời giải Trước hết ta viết lại phương trình khi với việc sử dụng ký hiệu của Leibniz

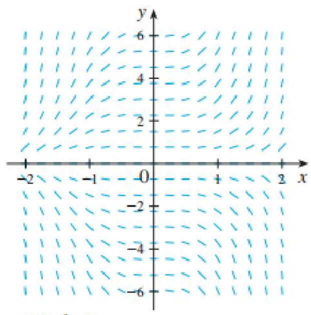
$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = x^2y$$

Nếu y ≠ 0, ta viết lại phương trình dưới dạng vi phân rồi lấy tích phân hai vế:

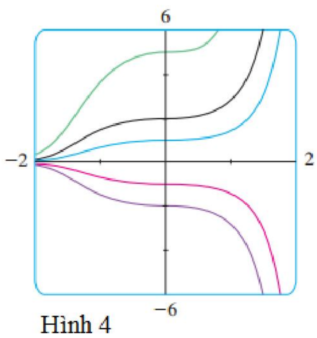
$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} = x^2dx \quad y \neq 0 \implies \int \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} = \int x^2dx \implies ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Phương trình này xác định hàm ẩn y theo x. Nhưng chúng ta có thể giải tường minh được y như sau: $|y| = e^{ln|y|} = e^{x^3/3+C} = e^Ce^{x^3/3} \implies y = \pm e^Ce^{x^3/3}$

Dễ kiểm tra lại rằng hàm y = 0 cũng là nghiệm của phương trình vi phân đã cho. Vì thế chúng ta có thể viết nghiệm tổng quát dưới dạng $y = Ae^{x^3/3}$, với A là hằng số tùy ý.



Hình 3



Hình 4

Hình 3 mô tả trường hướng đối với phương trình vi phân trong Ví dụ 3. So sánh nó với Hình 4, là đồ thị của hàm $y = Ae^{x^3/3}$ với một vài giá trị cụ thể của A. Nếu chúng ta sử dụng trường hướng để phác họa các đường cong nghiệm cắt trục y tại 5, 2, 1, -1 và -2, chúng nhất định giống như trên Hình 4.

Ví dụ 4 Trong mục 5.2 chúng ta đã mô hình dòng điện I(t) trong mạch điện ở Hình 5 bằng phương trình vi phân $L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$. Tìm biểu thức của dòng điện trong mạch khi điện trở là 12Ω, điện cảm là 4H, nguồn điện 60V và chuyển mạch mở khi t = 0. Giới hạn của dòng điện là bao nhiêu?

Lời giải Với L = 4, R = 12 và E(t) = 60, phương trình trở thành

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{hay} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

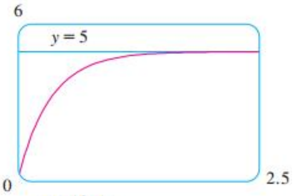
và bài toán giá trị đầu là

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Chúng ta nhận ra đây là phương trình phân ly, và giải nó như sau:

$$\int \frac{dI}{15-3I} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{3}ln|5 - I| = t + C \Rightarrow |5 - I| = e^{-3(t+C)}$$

$$5 - I = \pm e^{-3C}e^{-3t} = Ae^{-3t} \Longrightarrow I = 5 - Ae^{-3t}$$



Hình 6

Vì I(0) = 0, ta có $5 - A = 0$ nên A = 5 và nghiệm là

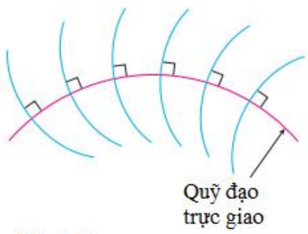
$$I = 5 - 5e^{-3t}$$

Giới hạn của dòng điện là $\lim_{t\to\infty} I = \lim_{t\to\infty}(5 - 5e^{-3t}) = 5$ (A).

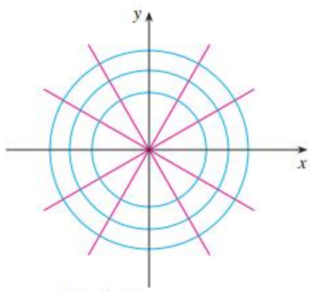
Hình 6 cho thấy nghiệm trong Ví dụ 4 (dòng điện) dẫn tới giá trị giới hạn của nó. So sánh với Hình 11 tại mục 5.2 cho thấy rằng chúng ta có thể vẽ một đường cong nghiệm khá chính xác từ trường hướng.

5.3.1. Quỹ đạo trực giao

Một quỹ đạo trực giao của một họ đường cong là một đường cong mà nó cắt mọi đường cong của họ đó theo một góc vuông (xem Hình 7). Ví dụ, mỗi thành viên của họ đường thẳng đi qua gốc tọa độ *y* = *mx* là một quỹ đạo trực giao của họ các đường tròn đồng tâm với tâm tại gốc tọa độ $x^2 + y^2 = r^2$ (xem Hình 8). Chúng ta nói rằng hai họ là quỹ đạo trực giao của nhau.



Hình 7



Hình 8

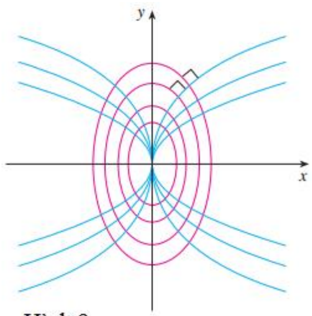
Ví dụ 5 Tìm quỹ đạo trực giao của họ đường cong $x = ky^2$, ở đây k là hằng số tùy ý.

Lời giải Các đường cong $x = ky^2$ có dạng parabola với trục đối xứng là trục x. Bước đầu tiên là tìm một phương trình vi phân cấp một mà thỏa mãn tất cả các thành viên của họ. Nếu đạo hàm hai vế ta được

$$1 = 2ky\frac{dy}{dx} \qquad \text{hay} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

Phương trình này phụ thuộc vào k, nhưng chúng ta cần phương trình mà đồng thời đúng cho mọi giá trị của k. Để loại bỏ k, chúng ta chú ý rằng từ phương trình parabola đã cho $x = ky^2$, ta có $k = x/y^2$ và vì thế phương trình được viết lại là

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\frac{x}{y^2}y} \qquad \text{hay} \qquad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{y}{2x}$$



Hình 9

Nghĩa là, độ dốc của đường tiếp tuyến tại bất kỳ điểm (x, y) trên mỗi parabola là $y' = y/(2x)$. Trên quỹ đạo trực giao, độ dốc của đường tiếp tuyến cần phải trái dấu với nghịch đảo của độ dốc trên parabola (Vì hai tiếp tuyến vuông góc với nhau). Do đó quỹ đạo trực giao cần phải thỏa mãn phương trình

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -\frac{2x}{y}$$

Đây là phương trình vi phân phân ly, ta giải như sau:

$$\int y dy = -\int 2x dx \implies y^2/2 = -x^2 + C$$

[4] $$x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

với C là hằng số dương tùy ý. Vì vậy quỹ đạo trực giao là họ các ellipse được cho bởi phương trình 4 và được phác họa trên Hình 9.

Quỹ đạo trực giao xuất hiện trong nhiều nhánh của ngành vật lý. Ví dụ, trong một trường tĩnh điện các đường của lực trực giao với các đường đẳng thế. Ngoài ra, các luồng trong khí động học là quỹ đạo trực giao của các đường vận tốc đẳng thế.

5.3.2. Bài toán trộn

Một bài toán trộn điển hình liên quan đến một bồn chứa đầy với dung lượng cố định một dung dịch hỗn hợp của cùng một chất, như muối chẳng hạn. Một dung dịch với nồng độ đã cho chảy vào bể với một tốc độ cố định và trộn, khuấy đều, chảy ra theo một tốc độ cố định, mà có thể khác với tốc độ chảy vào. Nếu y(t) biểu thị lượng chất trong bể tại thời điểm t, thì y'(t) là tốc độ mà tại đó các chất chảy vào trừ đi tốc độ mà nó chảy ra. Mô tả toán học của tình trạng này thường dẫn đến một phương trình vi phân phân ly cấp một. Chúng ta có thể sử dụng cùng một lập luận để mô hình một loạt các hiện tượng: phản ứng hóa học, các chất ô nhiễm xả xuống hồ, tiêm một loại thuốc vào máu.

Ví dụ 6 Một bể chứa 20 kg muối hòa tan trong 5000 lít nước. Nước biển có chứa 0.03 kg muối trong một lít nước chảy vào bể với tốc độ 25 lít/phút. Dung dịch được trộn hoàn toàn và thoát ra khỏi bể với tốc độ tương tự. Bao nhiêu muối có trong bể sau nửa giờ?

Lời giải Giả sử y(t) là lượng muối còn lại sau t phút. Chúng ta có y(0) = 20 và muốn tìm y(30). Chúng ta thực hiện bằng cách tìm phương trình vi phân thỏa mãn theo y(t). Chú ý rằng dy/dt là tốc độ thay đổi của lượng muối, vì thế

[5] $$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = Rin - Rout$$

trong đó *Rin* là tốc độ muối chảy vào bể và *Rout* là tốc độ muối chảy ra khỏi bể. Ta có

$$Rin = \left(0.03\,\frac{kg}{lít}\right)\left(25\,\frac{lít}{phút}\right) = 0.75\,\frac{kg}{phút}$$

Bể thường xuyên chứa 5000 lít chất lỏng, vì thế nồng độ (concentration) tại thời điểm t là y(t)/5000 (kg/lít). Bởi vì luồng nước mặn chảy ra là 25 lít/phút, chúng ta có

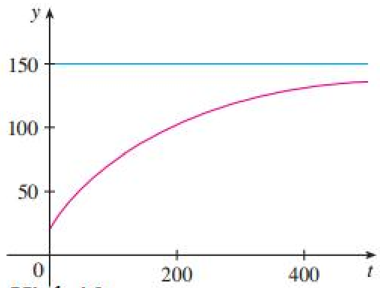
$$Rout = \left(\frac{y(t)}{5000}\frac{kg}{lít}\right)\left(25\frac{lít}{phút}\right) = \frac{y(t)}{200}\frac{kg}{phút}$$

Vì thế, từ phương trình 5 ta nhận được

$$\frac{dy}{dt} = 0.75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150-y(t)}{200}$$

Giải phương trình phân ly này ta nhận được

$$\int\frac{dy}{150-y} = \int\frac{dt}{200} \Longrightarrow -ln|150-y| = \frac{t}{200} + C$$



Hình 10

Vì y(0) = 20, ta có –ln130 = C,

nên $-ln|150-y| = \frac{t}{200} - ln130$

Do đó $|150-y| = 130e^{-t/200}$. Vì y(t) liên tục và y(0) = 20, vế phải khác 0, chúng ta suy ra rằng 150 – y luôn dương. Vì thế $y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$.

Lượng muối còn lại sau 30 phút là

$$y(30) = 150 - 130e^{-\frac{30}{200}} \approx 38.1 \text{ kg.}$$

Hình 10 thể hiện đồ thị của hàm y(t) trong Ví dụ 6. Chú ý rằng khi thời gian trôi qua, lượng muối tiếp cận đến 150 kg.

5.4. Mô hình tăng trưởng quần thể

Trong mục này chúng ta quan tâm các phương trình vi phân mà sử dụng để mô hình sự tăng trưởng quần thể: quy luật tăng trưởng tự nhiên, phương trình hậu cần và một vài cái khác.

5.4.1. Quy luật tăng trưởng tự nhiên

Một mô hình tăng trưởng quần thể mà chúng ta đã xem xét trong mục 5.1 dựa trên giả thiết tăng trưởng quần thể tỷ lệ thuận với số lượng của quần thể: $dP/dt = kP$

Đó là một giả định hợp lý? Giả sử chúng ta có một quần thể (vi khuẩn chẳng hạn) với số lượng P = 1000 và tại một thời điểm nhất định nó đang phát triển với tốc độ P' = 300 vi khuẩn mỗi giờ. Bây giờ chúng ta hãy lấy 1000 vi khuẩn khác cùng loại và thêmt chúng vào trong quần thể ban đầu. Mỗi một nửa quần thể được kết hợp đã được phát triển với tốc độ 300 vi khuẩn trên mỗi giờ. Chúng ta muốn rằng tổng số lượng 2000 vi khuẩn sẽ tăng với tốc độ 600 vi khuẩn trên mỗi giờ ban đầu (cung cấp có đủ chỗ và dinh dưỡng). Vì vậy, nếu chúng ta tăng gấp đôi kích thước, tốc độ tăng trưởng tăng gấp đôi. Nó có vẻ hợp lý rằng tốc độ tăng trưởng cần phải tỷ lệ thuận với số lượng.

Nhìn chung, nếu P(t) là giá trị của đại lượng y tại thời điểm t và nếu tốc độ thay đổi của P theo t tỷ lệ thuận với số lượng của nó P(t) tại thời điểm bất kỳ thì

[1] dP/dt = kP

trong đó k là hằng số. Phương trình 1 đôi khi còn được gọi là quy luật tăng trưởng tự nhiên. Nếu k dương, thì quần thể tăng, nếu k âm quần thể giảm.

Bởi vì phương trình 1 là phân ly nên chúng ta ta có thể giải nó theo phương pháp ở mục 5.3:

$$\int\frac{dP}{dt} = \int kdt \Rightarrow \ln|P| = kt + C \Rightarrow |P| = e^{kt+C} = e^{C}e^{kt} = Ae^{kt}$$

trong đó A (= $\pm e^{C}$ hoặc 0) là hằng số tùy ý. Để tìm dấu của A, ta thấy rằng $P(0) = Ae^{k.0} = A$.

Do đó A bằng giá trị đầu của phương trình.

[2] Nghiệm của bài toán giá trị đầu

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = P_0$$

là $\quad P(t) = P_0e^{kt}$

Cách viết khác của phương trình là

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

nói lên rằng tốc độ tăng trưởng tương đối là không đổi. Khi đó [2] nói rằng quần thể với tốc độ tăng trưởng tương đối không đổi là tăng trưởng dạng mũ.

Chúng ta có thể giải thích cho sự di cư của quần thể bằng cách thay đổi phương trình 1: Nếu tốc độ di cư là hằng số m thì tốc độ thay đổi của quần thể được mô hình bởi phương trình vi phân

[3] $$\frac{dP}{dt} = kP - m$$

5.4.2. Mô hình hậu cần

Như đã thảo luận ở mục 5.1, một quần thể thường tăng theo hàm mũ trong giai đoạn đầu nhưng mức độ giảm dần và tiếp cận ngưỡng bởi vì tài nguyên có hạn. Nếu P(t) là số lượng của quần thể tại thời điểm t, ta giả thiết rằng $\quad dP/dt \approx kP \quad$ nếu P nhỏ

Điều này nói lên rằng, tốc độ tăng trưởng ban đầu gần như tỷ lệ thuận với kích thước. Nói cách khác, tốc độ tăng trưởng tương đối là gần như không đổi khi dân số là nhỏ. Nhưng chúng tôi cũng muốn phản ánh thực tế là tốc độ tăng trưởng tương đối giảm khi dân số P giảm và trở thành âm nếu P vượt quá ngưỡng M của nó, là số lượng tối đa mà môi trường có khả năng duy trì trong thời gian dài. Biểu thức đơn giản nhất cho tốc độ tăng trưởng tương đối mà kết hợp các giả định này là

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Nhân hai vế với P, ta nhận được mô hình tăng trưởng được biết như lá phương trình vi phân hậu cần:

[4] $$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Chú ý từ phương trình 4, nếu P là nhỏ so với M thì P/M gần với 0 và vì vậy $dP/dt \approx kP$. Hơn nữa khi $P \to M$ (tiếp cận ngưỡng) thì $P/M \to 1$, vì thế $dP/dt \to 0$. Chúng ta có thể suy ra thông tin về việc các nghiệm tăng hoặc giảm trực tiếp từ phương trình 4. Nếu P nằm giữa 0 và M thì vế phải của phương trình dương, nên $dP/dt > 0$ và số lượng tăng. Nhưng nếu số lượng vượt ngưỡng ($P > M$) thì $1 - P/M$ âm, nên $dP/dt < 0$ và số lượng giảm.

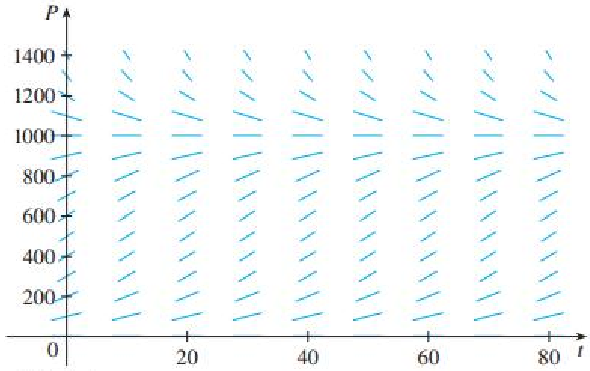
Hãy bắt đầu phân tích chi tiết hơn về phương trình vi phân hậu cần bằng cách nhìn vào trường hướng.

Ví dụ 1 Vẽ đường hướng của phương trình hậu cần với k = 0.08 và ngưỡng M = 1000. Có thể suy ra điều gì từ nghiệm thu được?

Lời giải Trong trường hợp này phương trình vi phân hậu cần là

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)$$

Một trường hướng của phương trình được chỉ ra trên Hình 1. Chúng ta hiển thị chỉ mỗi góc phần tư thứ nhất bởi vì số lượng không âm và chúng ta chỉ quan tâm điều gì xảy ra sau thời điểm t = 0.

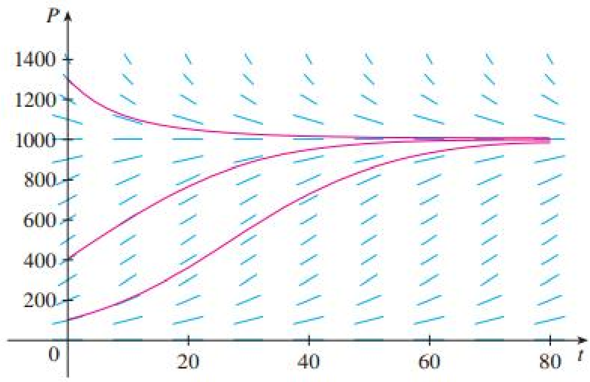


Hình 1
Trường hướng đối với phương trình trong Ví dụ 1

Phương trình hậu cần là tự trị (dP/dt chỉ phụ thuộc P, không phụ thuộc t), nên độ dốc là như nhau dọc theo mọi đường nằm ngang. Như mong muốn, các độ dốc là dương với $0 < P < 1000$ và âm với $P > 1000$.

Các độ dốc nhỏ khi P gần 0 hoặc 1000 (ngưỡng). Chú ý rằng các nghiệm di chuyển từ nghiệm cân bằng $P = 0$ về phía nghiệm cân bằng $P = 1000$.

Trong Hình 2 chúng ta sử dụng trường hướng này để phác họa các đường cong nghiệm với các giá trị đầu của P(0) là 100, 400 và 1300. Chú ý rằng các đường cong nghiệm mà bắt đầu ở phía dưới $P = 1000$ là tăng, còn bắt đầu ở phía trên $P = 1000$ thì giảm. Các độ dốc lớn nhất khi $P \approx 500$ và do đó các đường cong nghiệm mà bắt đầu ở phía dưới $P = 1000$ có điểm uốn (inflection) khi $P \approx 500$. Thực tế chúng ta có thể chứng minh rằng tất cả đường cong nghiệm mà bắt đầu bên dưới $P = 500$ có điểm uốn khi $P = 500$.



Hình 2
Các đường cong nghiệm của phương trình trong Ví dụ 1

Phương trình [4] là phân ly và chúng ta có thể giải nó một cách tường minh bằng phương pháp ở mục 5.3. Bởi vì

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

ta có

$$\int \frac{dP}{P(1-P/M)} = \int k\,dt \qquad [5]$$

Để tính tích phân vế trái, ta viết

$$\frac{1}{P(1-P/M)} = \frac{M}{P(M-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}$$

Điều đó cho phép chúng ta viết lại phương trình 5:

$$\int\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{M-P}\right)dt=\int kdt \Rightarrow ln|P|-ln|M-P|=kt+C$$

$$ln\left|\frac{M-P}{P}\right|=-kt-C \Longrightarrow \left|\frac{M-P}{P}\right|=e^{-kt-C} \Longrightarrow \left|\frac{M-P}{P}\right|=e^{-C}e^{-kt}$$

[6] $\frac{M-P}{P}=Ae^{-kt}$ với $A=e^{-C}$

Giải P từ phương trình 6, ta nhận được

$$\frac{M}{P}-1=Ae^{-kt} \Longrightarrow \frac{P}{M}=\frac{1}{1+Ae^{-kt}} \Longrightarrow P=\frac{M}{1+Ae^{-kt}}$$

Với t = 0 thì P = P_0 nên $\frac{M-P_0}{P_0}=Ae^0=A$, vì vậy nghiệm của phương trình hậu cần là

[7] $P(t)=\frac{M}{1+Ae^{-kt}}$ với $A=\frac{M-P_0}{P_0}$

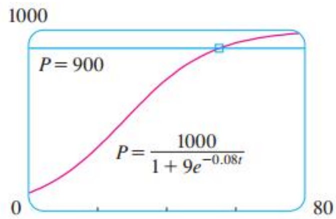
Từ công thức 7, ta thấy $\lim_{t\to\infty}P(t)=M$, đó là điều mong muốn.

Ví dụ 2 Viết nghiệm của bài toán giá trị đầu

$$\frac{dP}{dt}=0.08P\left(1-\frac{P}{1000}\right) \qquad P(0)=100$$

và sử dụng nó để tìm các số lượng P(40) và P(80). Khi nào P đạt 900?

Lời giải Phương trình vi phân là phương trình hậu cần với k = 0.08, ngưỡng M = 1000 và điều kiện đầu P_0 = 100. Vì thế phương trình 7 cho số lượng tại thời điểm t là



Hình 3

$$P(t)=\frac{1000}{1+Ae^{-0.08t}} \quad \text{trong đó } A=\frac{100-100}{100}=9$$

Vì vậy $P(t)=\frac{1000}{1+9e^{-0.08t}}$

Các số lượng tại t = 40 và t = 80 là

$$P(40)=\frac{1000}{1+9e^{-3.2}}\approx 731.6 \qquad P(80)=\frac{1000}{1+9e^{-6.4}}\approx 985.3$$

Số lượng quần thể đạt 900 khi $\frac{1000}{1+9e^{-0.08t}}=900$. Giải phương trình này theo t, ta được

$$1+9e^{-0.08t}=\frac{10}{9} \Rightarrow e^{-0.08t}=\frac{1}{81} \Rightarrow -0.08t=-ln81 \Rightarrow t=\frac{ln81}{0.08}\approx 54.9$$

Vì thế số lượng đạt 900 khi t xấp xỉ 55. Như để kiểm tra, chúng ta vẽ đường cong nghiệm trên Hình 3 và nhận thấy nó cắt đường P = 900 tại t ≈ 55.

5.4.3. Sự so sánh của tăng trưởng tự nhiên và mô hình hậu cần

Trong những năm 1930, nhà sinh vật học G.F. Gause đã tiến hành một thử nghiệm với các sinh vật đơn bào Paramecium và sử dụng một phương trình hậu cần để mô hình dữ liệu của mình. Bảng dưới cho biết số đếm hàng ngày của ông về đơn bào. Ông ước tính tốc độ tăng trưởng tương đối ban đầu là 0.7944 và ngưỡng là 64.

t (ngày)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P(quan sát)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

Ví dụ 3 Tìm mô hình mũ và mô hình hậu cần đối với dữ liệu của Gause. So sánh các giá trị dự đoán với các giá trị quan sát được và nhận xét về sự phù hợp.

Lời giải Với tốc độ tăng trưởng tương đối k = 0.7944 và giá trị ban đầu P_0 = 2, mô hình mũ là $P(t)=P_0e^{kt}=2e^{0.7944t}$

Gause đã sử dụng cùng giá trị k đối với mô hình hậu cần của ông. Điều này là hợp lý bởi vì P_0 = 2 là nhỏ so với ngưỡng M = 64. Phương trình

$$\frac{1}{P_0}\frac{dP}{dt}\Big|_{t=0} = k\left(1 - \frac{2}{64}\right) \approx k$$

chứng tỏ rằng giá trị của k đối với mô hình hậu cần là rất gần với giá trị cho mô hình mũ.

Khi đó nghiệm của mô hình hậu cần trong phương trình 7 cho ra

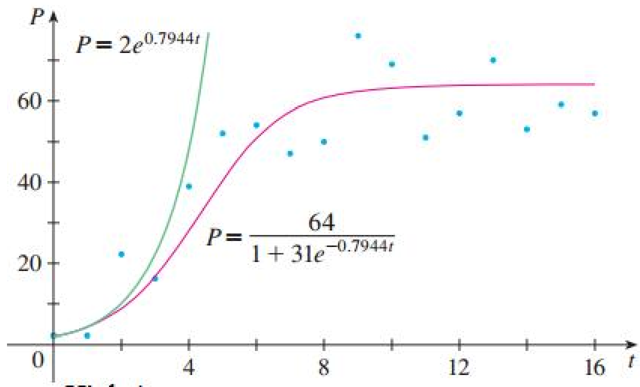
$$P(t) = \frac{M}{1+Ae^{-kt}} = \frac{64}{1+Ae^{-0.7944t}}, \text{ trong đó } A = \frac{M-P_0}{P_0} = \frac{64-2}{2} = 31$$

Vì vậy $P(t) = \frac{64}{1+31e^{-0.7944t}}$

Chúng ta sử dụng các phương trình này để tính các giá trị dự đoán (được làm tròn tới số nguyên gần nhất) và so sánh chúng trong bảng sau

t (ngày)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P(quan sát)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57
P(hậu cần)	2	4	9	17	28	40	51	57	61	62	63	64	64	64	64	64	64
P(mũ)	2	4	10	22	48	106	...										

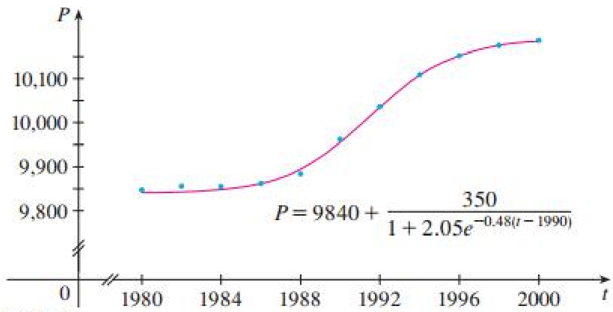
Từ bảng và từ đồ thị trong Hình 4, chúng ta nhận thấy đối với ba trong bốn ngày đầu tiên mô hình mũ cho kết quả tương đương với mô hình hậu cần. Tuy nhiên, đối với t ≥ 5 mô hình hàm mũ là vô vọng không chính xác, trong khi mô hình hậu cần khá phù hợp với quan sát.



Hình 4
Mô hình mũ và mô hình hậu cần cho dữ liệu Paramecium

Bảng dưới cho thấy giá trị giữa năm B(t), dân số của Bỉ (đơn vị nghìn), tại thời điểm t, từ năm 1980 đến năm 2000. Hình 5 cho thấy các điểm dữ liệu cùng với hàm hậu cần được vẽ bởi máy tính. Chúng ta thấy rằng mô hình hậu cần cung cấp một sự phù hợp rất tốt.

t	$B(t)$	t	$B(t)$
1980	9,847	1992	10,036
1982	9,856	1994	10,109
1984	9,855	1996	10,152
1986	9,862	1998	10,175
1988	9,884	2000	10,186
1990	9,962		



Hình 5
Mô hình hậu cần cho dân cư của Bỉ

5.4.4. Những mô hình khác đối với tăng trưởng

Luật tăng trưởng tự nhiên và phương trình vi phân hậu cần không phải là phương trình duy nhất đã được đề xuất đối với mô hình tăng trưởng dân số. Trong bài tập 20 chúng ta thấy hàm tăng trưởng Gompertz và trong bài tập 21 và 22 chúng ta xem xét mô hình tăng trưởng theo mùa.

Hai trong số các mô hình khác được sửa đổi của mô hình hậu cần. Phương trình vi phân

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - c$$

đã được sử dụng để mô hình quần thể mà tuân theo thu hoạch của một loài hay hình thức khác. (Hãy nghĩ về số cá bị bắt theo một tốc độ không đổi.) Phương trình này được khám phá trong các bài tập 17 và 18.

Đối với một số loài có một mức tối thiểu *m* mà dưới đó chúng có xu hướng bị tuyệt chủng. (Người lớn có thể không tìm thấy bạn tình phù hợp.) Quần thể như vậy đã được mô hình hóa bởi các phương trình vi phân

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

trong đó nhân tử mở rộng, 1 – m/P, có tính đến hậu quả quần thể thưa thớt (xem Bài tập 19).

5.5. Phương trình tuyến tính

5.5.1. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

Phương trình vi phân tuyến tính cấp một là phương trình vi phân có dạng

[1] $$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

trong đó P và Q là các hàm liên tục trên một đoạn xác định. Phương trình dạng này xuất hiện thường xuyên trong nhiều ngành khoa học mà chúng ta sẽ thấy.

Một ví dụ của phương trình tuyến tính là xy' + y = 2x, bởi vì với x ≠ 0, nó có thể được viết lại dưới dạng

[2] $$y' + \frac{1}{x}y = 2$$

Chú ý rằng đây không phải dạng phương trình phân ly bởi vì không thể phân tích biểu thức của y' thành tích của một hàm của x nhân với một hàm của y. Nhưng chúng ta vẫn giải phương trình này theo nhận xét, xy' + y = (xy)', và vì vậy ta có thể viết lại phương trình như sau

$$(xy)' = 2x$$

Tích phân hai vế ta nhận được

$$xy = x^2 + C \quad \text{hoặc} \quad y = x + \frac{C}{x}$$

Nếu phương trình được đưa ra dưới dạng phương trình 2, thì chúng ta sẽ phải thực hiện bước sơ bộ là nhân hai vế của phương trình với x.

Nó chỉ ra rằng mỗi phương trình vi phân tuyến tính cấp một có thể được giải bởi một phương trình tương đương bằng cách nhân cả hai vế của phương trình 1 bởi một hàm I(x) thích hợp được gọi là một thừa số tích phân. Chúng ta cố gắng tìm I sao cho vế trái của phương trình 1, khi nhân với I(x), trở thành đạo hàm của tích I(x)y:

[3] $$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)'$$

Nếu chúng ta tìm được hàm I như vậy, thì phương trình 1 trở thành

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

Tích phân hai vế ta nhận được $I(x)y = \int I(x)Q(x)dx + C$

như thế nghiệm sẽ là

[4] $\quad y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)dx + C\right]$

Để tìm những I như thế, chúng ta khai triển phương trình 3:

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = I'(x)y + I(x)y' \Longrightarrow I(x)P(x) = I'(x)$$

Đây là phương trình phân ly đối với I, ta giải như sau:

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)dx \Longrightarrow \ln|I| = \int P(x)dx$$

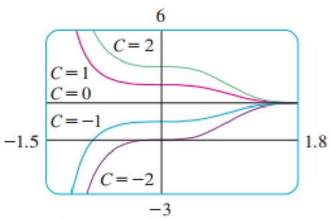
[5] $\quad I = Ae^{\int P(x)dx}$

Vì vậy công thức đối với nghiệm tổng quát của phương trình 1 đường cong cho bởi phương trình 4, trong đó I đường cong cho bởi phương trình 5. Thay cho việc nhớ công thức này, chúng ta chỉ nhớ dạng của thừa số tích phân.

Để giải phương trình vi phân tuyến tính y' + P(x)y = Q(x), nhân hai vế với thừa số tích phân $I(x) = e^{\int P(x)dx}$ và tích phân hai vế.

Ví dụ 1 Giải phương trình vi phân $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$

Lời giải Phương trình đã cho là tuyến tính bởi nó có dạng phương trình 1 với $P(x) = 3x^2$ và $Q(x) = 6x^2$. Thừa số tích phân là $I(x) = e^{\int 3x^2dx} = e^{x^3}$



Hình 1

Nhân hai vế của phương trình với e^{x^3}, ta được

$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$ hay $\frac{d}{dx}\left(e^{x^3}y\right) = 6x^2e^{x^3}$

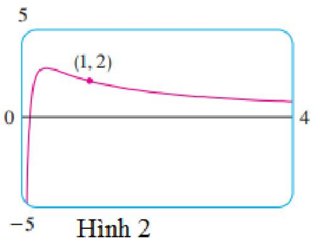
Tích phân hai vế ta có

$e^{x^3}y = \int 6x^2e^{x^3} + C = 2e^{x^3} + C$ hay $y = 2 + Ce^{-x^3}$

Hình 1 chỉ ra đồ thị của một vài nghiệm riêng trong Ví dụ 1. Chú ý rằng tất cả đều dần về 2 khi x → ∞.

Ví dụ 2 Tìm nghiệm của bài toán giá trị đầu $x^2y' + xy = 1$ $\quad x > 0 \quad y(1) = 2$.

Lời giải Trước hết ta chia cả hai vế cho thừa số của y' để đưa về dạng chuẩn:



Hình 2

[6] $\quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \quad x > 0$

Thừa số tích phân là $I(x) = e^{\int dx/x} = e^{lnx} = x$

Nhân phương trình 6 với thừa số tích phân, x, ta được

$xy' + y = \frac{1}{x}$ hay $(xy)' = \frac{1}{x}$

$xy = \int \frac{dx}{x} = lnx + C$ hay $y = \frac{lnx + C}{x}$

Vì y(1) = 2, ta có $2 = \frac{ln1 + C}{1}$ hay C = 2

Do đó nghiệm của bài toán giá trị đầu là $y = \frac{lnx + 2}{x}$

Ví dụ 3 Giải phương trình y' + 2xy = 1.

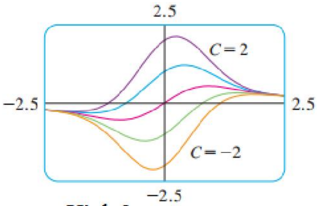
Lời giải Phương trình đã cho ở dạng chuẩn của phương trình tuyến tính.

Dễ thấy thừa số tích phân là $e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$.

Nhân hai vế của phương trình với thừa số tích phân ta được

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x^2} \text{ hoặc } \left(e^{x^2}y\right)' = e^{x^2}.$$

Do đó $\quad e^{x^2}y = \int e^{x^2}dx + C.$



Hình 3

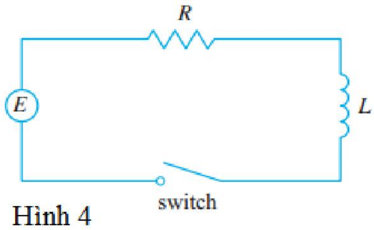
Nhưng $\int e^{x^2}dx$ không thể biểu diễn theo các hàm sơ cấp. Vì vậy ta biểu diễn nghiệm của phương trình dưới dạng

$$y = e^{-x^2}\int e^{x^2}dx + Ce^{-x^2},$$

hoặc $$y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt + Ce^{-x^2}$$

Hình 3 là đồ thị của một vài nghiệm riêng. Mặc dù nghiệm được biểu diễn ở dạng tích phân, nhưng một số máy tính có thể vẽ được đồ thị của chúng.

5.5.2. Ứng dụng vào mạch điện



Hình 4

Trong mục 5.2 chúng ta đã xem xét mạch điện đơn giản được chỉ ra trên hình 4: Một nguồn điện với hiệu điện thế E(t) vôn (V) và một dòng điện I(t) (A) ampe tại thời điểm t. Mạch còn gồm điện trở R ôm (Ω) và điện cảm L henri (H).

Định luật Ohm cho sụt áp trên điện trở là RI. Sụt áp trên cuộn cảm là L(dI/dt). Định luật Kirchhoff nói rằng tổng các sụt áp là bằng hiệu điện thế E(t). Vì vậy ta có

[7] $$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

là phương trình vi phân cấp 1. Nghiệm của phương trình này là dòng điện I(t) tại thời điểm t.

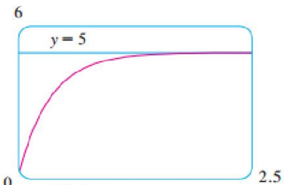
Ví dụ 4 Giả sử rằng trong mạch điện của Hình 4, điện trở là 12Ω và điện cảm là 4H. Nếu nguồn điện là cố định 60V và chuyển mạch là đóng khi t = 0 nên dòng điện bắt đầu với I(0) = 0. Tìm

(a) I(t)

(b) Dòng điện sau 1s, tức I(1)

(c) Giá trị giới hạn của dòng điện này

Lời giải (a) Nếu đặt L = 4, R = 12 và E(t) = 60 vào phương trình 7, ta nhận được bài toán giá trị đầu:



Hình 5

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad I(0) = 0$$

hay $$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \qquad I(0) = 0$$

Nhân hai vế với thừa số tích phân là $e^{\int 3dt} = e^{3t}$, ta nhận được

$$e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(e^{3t}I) = 15e^{3t}$$

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}dt = 5e^{3t} + C \Rightarrow \quad I(t) = 5 + Ce^{-3t}$$

Vì I(0) = 0 nên 5 + C = 0, do đó C = -5 và $I(t) = 5(1 - e^{-3t})$

(b) Sau 1s dòng điện là $I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4.75A$

(c) Giới hạn của dòng điện là $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = \lim\limits_{t\to\infty} 5(1 - e^{-3t}) = 5\ A$

Ví dụ 5 Giae sử rằng điện trở và cuộn cảm vẫn như trong Ví dụ 4, nhưng thay cho nguồn cố định, ta sử dụng máy phát điện với điện thế E(t) = 60sin30t vôn. Tìm I(t).

Lời giải Lần này phương trình trở thành

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60sin30t \qquad \text{hay} \qquad \frac{dI}{dt} + 3I = 15sin30t$$

Vẫn cùng thừa số tích phân e^{3t}, ta có

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = 15e^{3t}sin30t$$

Tích phân hai vế ta được $e^{3t}I = \int 15e^{3t}sin30tdt = 15\int e^{3t}sin30tdt = 15J$

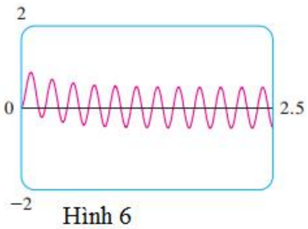
$J = \int e^{3t}sin30tdt = \frac{1}{3}\int sin30td(e^{3t}) = \frac{1}{3}[e^{3t}sin30t - 30\int e^{3t}cos30tdt]$

$\int e^{3t}cos30tdt = \frac{1}{3}\int cos30td(e^{3t}) = \frac{1}{3}[e^{3t}cos30t + 30\int e^{3t}sin30tdt]$

$= \frac{1}{3}[e^{3t}cos30t + 30J] = \frac{1}{3}e^{3t}cos30t + 10J$

Ta nhận được phương trình $J = \frac{1}{3}\left[e^{3t}sin30t - 30\left(\frac{1}{3}e^{3t}cos30t + 10J\right)\right]$,

Giải ra ta được $J = \frac{1}{101}\left[\frac{1}{3}e^{3t}(sin30t - 10cos30t)\right]$



Hình 6

Thay vào ta được $e^{3t}I = \frac{5}{101}e^{3t}(sin30t - 10cos30t) + C$

Cuối cùng, $I = \frac{5}{101}(sin30t - 10cos30t) + Ce^{-3t}$

Vì I(0) = 0, ta có $-\frac{50}{101} + C = 0$ nên $C = \frac{50}{101}$,

Dòng điện là $I = \frac{5}{101}(sin30t - 10cos30t) + \frac{50}{101}e^{-3t}$

Hình 6 biểu thị đồ thị của dòng điện với nguồn là máy phát điện.

5.6. Hệ thống săn mồi

Chúng tôi đã xem xét một loạt các mô hình cho sự phát triển của một loài duy nhất sống một mình trong một môi trường. Trong mục này chúng ta xem xét mô hình thực tế hơn là xem xét sự tương tác của hai loài trong cùng môi trường sống. Chúng ta sẽ thấy rằng các mô hình này tạo ra một cặp phương trình vi phân có mối liên kết.

Trước tiên chúng ta xem xét các tình huống trong đó một loài, được gọi là con mồi (prey), có một nguồn cung cấp thực phẩm dồi dào và loài thứ hai, được gọi là những kẻ săn mồi (predators), ăn con mồi. Ví dụ về con mồi và kẻ thù bao gồm thỏ và sói trong một khu rừng hẻo lánh, cá thực phẩm và cá mập, rệp và bọ rùa, vi khuẩn và amip. Mô hình của chúng ta sẽ có hai biến phụ thuộc và cả hai đều là hàm của thời gian. Chúng ta giả sử R(t) là số con mồi (Rabbits: thỏ) và W(t) là số lượng động vật ăn thịt (Wolves: sói) tại thời điểm t.

Trong sự vắng mặt của kẻ săn mồi, nguồn cung lương thực dồi dào sẽ hỗ trợ tăng trưởng theo số mũ của con mồi, đó là điểm/dt = kR, trong đó k là hằng số dương.

Trong sự vắng mặt của con mồi, chúng ta giả thiết rằng quần thể săn mồi sẽ giảm theo tỷ lệ thuận với số lượng của chúng, tức là dW/dt = -rW, trong đó r là một hằng số dương.

Tuy nhiên, với sựu hiện diện của cả hai loài, chúng ta giả thiết rằng nguyên nhân chính gây tử vong ở con mồi là bị kẻ săn mồi ăn thịt, và tốc độ sinh và tồn tại của những kẻ săn mồi phụ thuộc vào nguồn thức ăn sẵn có của mình, cụ thể là các con mồi. Chúng ta cũng giả định rằng khả năng hai loài này chạm trán nhau tỷ lệ thuận với cả hai quần thể và do đó là tỷ lệ thuận với tích RW. (Số lượng một hoặc cả hai quần thể càng nhiều thì càng tăng khả năng chạm trán.) Một hệ hai phương trình vi phân kết hợp các giả thiết đó sẽ có dạng như sau:

[1] $\frac{dR}{dt} = kR - aRW$ $\frac{dW}{dt} = -rW + bRW$

trong đó k, r, a và b là các hằng số dương. Chú ý rằng hạng thức $-aRW$ làm giảm sự tăng trưởng tự nhiên của con mồi và hạng thức bRW làm tăng sự tăng trưởng tự nhiên của kẻ săn mồi.

Phương trình 1 được biết như là hệ săn mồi, hoặc hệ Lotka-Volterra. Nghiệm của hệ này là cặp các hàm R(t) và W(t) mô tả các quần thể con mồi và kẻ săn mồi như là các hàm của thời gian. Bởi vì hệ là một cặp hai phương trình xảy ra đồng thời nên chúng ta không thể giải cái nọ rồi đến cái kia mà phải giải chúng đồng thời. Thật không may, thường không thể tìm thấy công thức tường minh cho R và W như là hàm của t. Tuy nhiên, chúng ta có thể sử dụng phương pháp đồ họa để phân tích các phương trình.

Ví dụ 1 Giả sử rằng quần thể của thỏ và sói được mô tả theo các phương trình Lotka-Volterra với k = 0.08, a = 0.001, r = 0.02 và b = 0.00002. Thời gian t được đo theo tháng.

(a) Tìm nghiệm hằng số (được gọi là nghiệm cân bằng) và giải thích kết quả

(b) Sử dụng hệ thống phương trình vi phân để tìm một biểu thức của dW/dR.

(c) Vẽ trường hướng cho kết quả phương trình vi phân trên mặt phẳng RW. Sau đó sử dụng trường hướng phác hoạ một vài đường cong nghiệm.

(d) Giả sử rằng, tại một thời điểm nào đó có 1000 thỏ và 40 sói. Vẽ đường cong nghiệm tương ứng và sử dụng nó để mô tả những thay đổi số lượng trong cả hai quần thể.

(e) Sử dụng phần (d) để phác thảo R và W như là hàm của t.

Lời giải

(a) Với các giá trị đã cho, phương trình Lotka-Volterra trở thành

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

Cả R và W sẽ là hằng số nếu cả hai đạo hàm bằng 0, tức là

$$\frac{dR}{dt} = R(0.08 - 0.001W) = 0$$

$$\frac{dW}{dt} = W(-0.02 + 0.00002R) = 0$$

Một nghiệm là R = 0 và W = 0. (Nghĩa là, nếu không có thỏ hoặc sói thì các quần thể không tăng). Một nghiệm hằng số khác là

$$W = \frac{0.08}{0.001} = 80 \qquad R = \frac{0.02}{0.00002} = 1000$$

Vì vậy các quần thể cân bằng gồm 80 sói và 1000 thỏ. Nghĩa là 1000 con thỏ là đủ để duy trì cân bằng với 80 con sói. Không quá nhiều sói (làm thỏ ít đi) cũng không quá ít sói (làm thỏ nhiều lên).

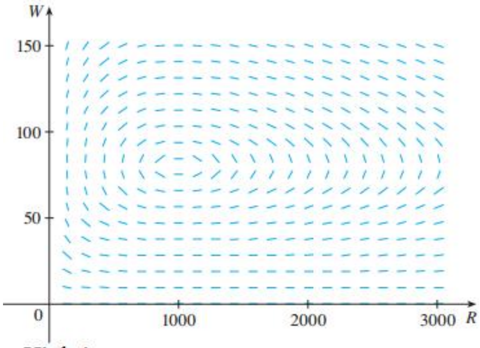
(b) Chúng ta sử dụng quy tắc dây chuyền để khử t:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dR}\frac{dR}{dt} \quad \text{nên} \quad \frac{dW}{dR} = \frac{dW/dt}{dR/dt} = \frac{W(-0.02+0.00002R)}{R(0.08-0.001W)}$$

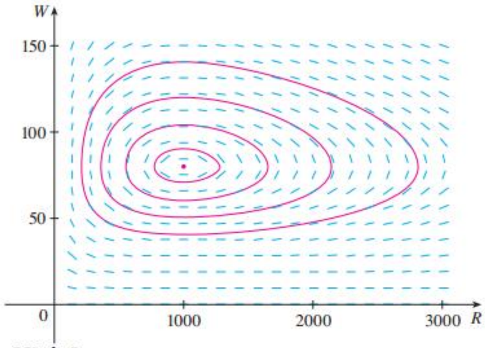
(c) Nếu xem W là hàm của R, ta có phương trình vi phân

$$\frac{dW}{dR} = \frac{W(-0.02+0.00002R)}{R(0.08-0.001W)}$$

Chúng ta vẽ trường hướng đối với phương trình vi phân này trên Hình 1 và sử dụng để phác họa một vài đường cong nghiệm trên Hình 2. Nếu di chuyển dọc theo đường cong nghiệm, chúng ta nhận thấy mối quan hệ giữa R và W thay đổi khi thời gian trôi qua như thế nào. Chú ý rằng các đường cong là khép kín nói lên rằng nếu đi dọc theo một đường cong, chúng ta luôn luôn quay trở lại điểm xuất phát. Cũng thấy rằng điểm (1000, 80) là bên trong tất cả các đường cong nghiệm. Điểm đó được gọi là điểm cân bằng bởi vì nó tương ứng với nghiệm cân bằng R = 1000, W = 80.



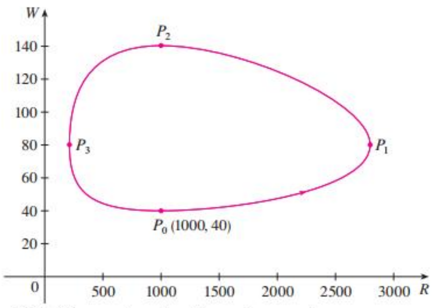
Hình 1
Trường hướng của hệ thợ săn - con mồi



Hình 2
Biểu đồ pha của hệ

Khi chúng ta thể hiện các nghiệm của hệ phương trình vi phân như trong Hình 2, chúng ta dựa vào mặt phẳng RW như là mặt phẳng pha, và chúng ta gọi là quỹ đạo pha. Vì vậy, một quỹ đạo pha là một đường được vạch ra bởi các nghiệm (R, W) theo thời gian. Một biểu đồ pha bao gồm các điểm cân bằng và các quỹ đạo pha điển hình, như trong Hình 2.

(d) Bắt đầu với 1000 thỏ và 40 sói tương ứng với đường cong đi qua điểm $P_0(1000, 40)$.



Hình 3 Quỹ đạo pha đi qua (1000, 4)

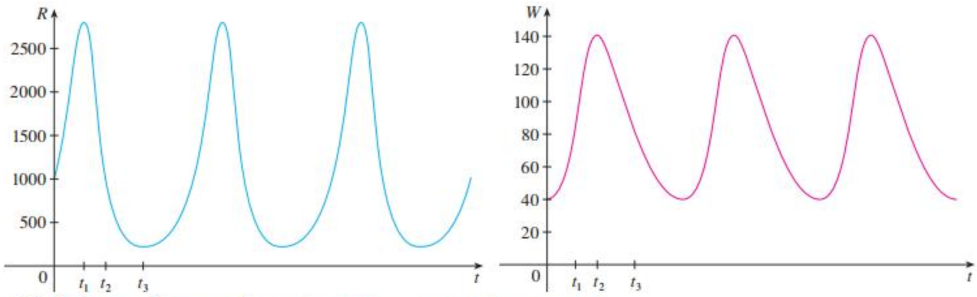
Hình 3 thể hiện quỹ đạo pha với trường hướng đã được xóa bỏ. Bắt đầu tại điểm P_0 tại thời gian t = 0 và giả sử t tăng, chúng ta sẽ di chuyển theo chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng vòng quanh quỹ đạo pha? Nếu chúng ta đặt R = 1000 và W = 40 vào phương trình đầu tiên, ta nhận được

$$\frac{dR}{dt} = 0.08(1000) - 0.001(1000)(40) = 40$$

Bởi vì điểm/dt > 0, chúng ta kết luận rằng R tăng tại P_0 và vì vậy chúng ta di chuyển ngược chiều kim đồng hồ vòng quanh quỹ đạo pha.

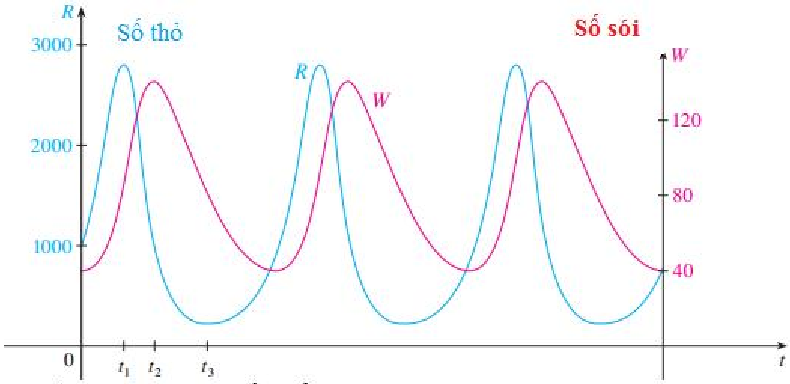
Chúng ta thấy rằng tại P_0 không có đủ sói để duy trì một sự cân bằng giữa các quần thể, do đó số lượng các con thỏ tăng lên. Kết quả là nhiều con sói và cuối cùng có rất nhiều con sói mà những con thỏ rất khó tránh chúng. Vì vậy, số lượng thỏ bắt đầu giảm (tại P_1, nơi mà chúng ta ước tính R đạt giá trị tối đa của nó là khoảng 2800). Điều này có nghĩa rằng tại một thời điểm sau đó số sói bắt đầu giảm (tại P_2, khi R = 1000 và W ≈ 140). Nhưng điều này có lợi cho thỏ, vì vậy số lượng của chúng sau đó bắt đầu tăng (tại P_3, khi W = 80 và R ≈ 210). Kết quả là, số sói cuối cùng lại tăng lên. Điều này xảy ra khi các quần thể trở về giá trị ban đầu của chúng là R = 1000 và W = 40, và chu kỳ lại bắt đầu.

(e) Từ mô tả trong phần (d) cách mà các quần thể thỏ và sói tăng và giảm, chúng ta có thể phác họa đồ thị của R(t) và W(t). Giả sử các điểm P_1, P_2 và P_3 trong Hình 3 đạt được tại các mốc thời gian t_1, t_2 và t_3. Khi đó chúng ta có thể phác họa đồ thị của R và W như trong Hình 4.



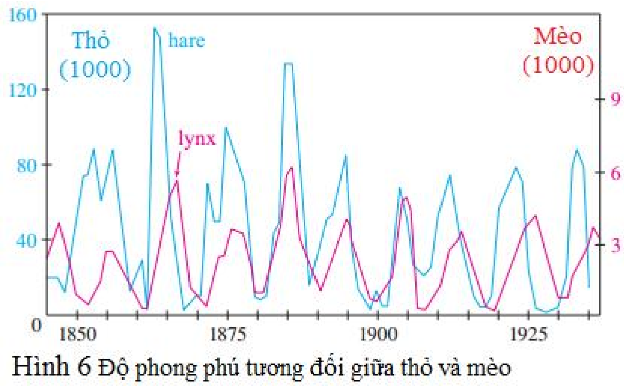
Hình 4 Các đồ thị của số lượng thỏ và sói như là hàm của thời gian

Để dễ so sánh các đồ thị, chúng ta vẽ chúng trên cùng một hệ trục nhưng với tỷ lệ khác nhau như trên Hình 5. Chú ý rằng số thỏ đạt giá trị lớn nhất khoảng phần tư đầu tiên của chu kỳ trước số sói.



Hình 5 So sánh các quần thể thỏ và sói

Một phần quan trọng của quá trình xây dựng mô hình là để giải thích kết luận toán học của chúng ta như những dự đoán thế giới thực và để kiểm tra những dự đoán đối với dữ liệu thực. Công ty Hudson's Bay, bắt đầu kinh doanh lông thú động vật tại Canada vào năm 1670, đã giữ hồ sơ từ những năm 1840. Hình 6 cho thấy đồ thị của số lượng những bộ lông của thỏ và kẻ thù của nó là mèo rừng Canada, công ty kinh doanh trong khoảng thời gian 90 năm. Có thể thấy rằng các dao động kết hợp trong quần thể thỏ và mèo rừng được dự đoán bởi mô hình Lotka-Volterra thực sự xảy ra và thời gian của các chu kỳ là khoảng 10 năm.



Hình 6 Độ phong phú tương đối giữa thỏ và mèo

Mặc dù mô hình Lotka-Volterra tương đối đơn giản đã có một số thành công trong việc giải thích và dự đoán các quần thể cùng chung sống, các mô hình phức tạp hơn cũng đã được đề xuất. Một cách để sửa đổi các phương trình Lotka-Volterra là giả định rằng, trong trường hợp không có động vật săn mồi, con mồi phát triển theo một mô hình hậu cần với ngưỡng M. Khi đó các phương trình Lotka-Volterra [1] được thay thế bằng hệ các phương trình vi phân

$$\frac{dR}{dt} = kR\left(1 - \frac{R}{M}\right) - aRW \qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

Mô hình này được quan tâm ở các bài tập 11 và 12.

Mô hình cũng đã được đề xuất để mô tả và dự đoán mức độ quần thể của hai hay nhiều loài cùng cạnh tranh các nguồn tài nguyên hoặc hợp tác cùng có lợi. Mô hình như vậy được khám phá trong bài tập 2-4.