MỤC LỤC

CHƯƠNG 2. ĐẠO HÀM RIÊNG 1
2.1. Hàm nhiều biến 1
2.1.1. Hàm hai biến 1
2.1.2. Đồ thị 3
2.1.3. Đường mức 5
2.1.4. Hàm ba hoặc nhiều biến 8
2.2. Giới hạn và sự liên tục 9
2.2.1. Giới hạn 9
2.2.2. Sự liên tục 13
2.2.3. Hàm ba hoặc nhiều biến 14
2.3. Đạo hàm riêng 15
2.3.1. Khái niệm về đạo hàm riêng 15
2.3.2. Ý nghĩa của các đạo hàm riêng 17
2.3.3. Hàm nhiều hơn hai biến 18
2.3.4. Đạo hàm cấp cao 19
2.4. Mặt phẳng tiếp diện và xấp xỉ tuyến tính 20
2.4.1. Mặt phẳng tiếp diện 20
2.4.2. Xấp xỉ tuyến tính 22
2.4.3. Vi phân 23
2.4.4. Các hàm ba hoặc nhiều biến 25
2.5. Quy tắc dây chuyền 25
2.5.1. Đạo hàm hàm ẩn 28
2.6. Đạo hàm theo hướng và véc tơ gradient 29
2.6.1. Đạo hàm theo hướng 29
2.6.2. Véc tơ gradient 31
2.6.3. Hàm ba biến 32
2.6.4. Cực đại của đạo hàm theo hướng 33
2.6.5. Mặt phẳng tiếp diện của mặt mức 34
2.6.6. Tầm quan trọng của véc tơ gradient 35
2.7. Các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất 36
2.7.1. Cực đại địa phương và cực tiểu địa phương 36
2.7.2. Cực trị tuyệt đối 41
2.8. Nhân tử Lagrange 42
2.8.1. Phương pháp nhân tử Lagrange 42
2.8.2. Hai ràng buộc 46

CHƯƠNG 2. ĐẠO HÀM RIÊNG

2.1. Hàm nhiều biến

Trong phần này chúng ta xem xét các hàm hai hoặc nhiều biến theo bốn cách nhìn

- Lời nói (Theo mô tả bằng lời)
- Số (Theo bảng các giá trị)
- Đại số (Theo biểu thức tường minh)
- Trực quan (Theo đồ thị)

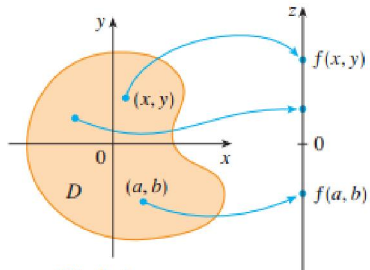
2.1.1. Hàm hai biến

Nhiệt độ của một điểm trên bề mặt của trái đất tại bất kỳ thời gian nào phụ thuộc vào kinh độ x và vĩ độ y của điểm đó. Chúng ta có xem đó là hàm của hai biến x và y, hoặc như là hàm của một cặp (x, y). Chúng ta biểu thị sự phụ thuộc này bằng cách viết $T = f(x, y)$.

Thể tích V của hình trụ tròn phụ thuộc vào bán kính r và chiều cao h của nó, vì $V = \pi r^2 h$. Chúng ta nói rằng V là hàm của r và h, và viết $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Định nghĩa Hàm hai biến là một quy luật cho tương ứng mỗi cặp có thứ tự các số thực (x, y) trong tập D với duy nhất một số thực $f(x, y)$. Tập D là miền xác định của f và miền giá trị của nó là tập tất cả các giá trị có thể của f, tức là tập $\{f(x,y) \mid (x,y) \in D\}$.

Chúng ta thường viết $z = f(x,y)$ để chỉ ra sự tường minh giá trị của f tại điểm tổng quát (x,y). Các biến x và y là các biến độc lập và z là biến phụ thuộc.



Hình 1

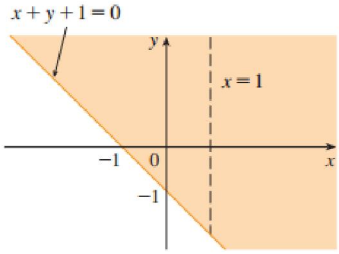
Hàm hai biến là hàm mà miền xác định là tập con của R^2 và miền giá trị là tập con của R. Một cách trực quan, hàm hai biến giống như các mũi tên (Hình 1), trong đó miền D được biểu thị như là một tập con của mặt phẳng xy và miền giá trị là tập các số trên đường thẳng thực, được biểu thị bởi trục z. Ví dụ, nếu $f(x,y)$ biểu thị nhiệt độ tại mỗi điểm (x,y) trong một tấm kim loại phẳng với hình dạng của D, chúng ta có thể xem trục z là nhiệt kế hiển thị nhiệt độ đo được.

Nếu hàm f được cho bởi công thức và chưa chỉ ra miền xác định thì miền xác định của f được hiểu là tập tất cả các cặp (x,y) sao cho biểu thức đã cho nhận giá trị thực.

Ví dụ 1 Với mỗi hàm sau đây, đánh giá $f(3,2)$ và phác thảo miền xác định.

(a) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ (b) $f(x,y) = x\ln(y^2 - x)$

Lời giải (a) $f(3,2) = \dfrac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$



Hình 2

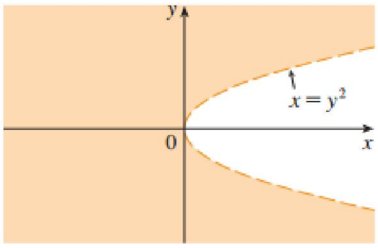
Biểu thức f có ý nghĩa nếu mẫu số khác 0 và giá trị trong căn bậc hai không âm. Vì vậy miền xác định của f là

$$D = \{(x,y) \mid x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$$

Bất phương trình x + y + 1 ≥ 0, hay y ≥ – x – 1, mô tả những điểm nằm tại hoặc phía trên đường thẳng y = – x – 1.

Ràng buộc x ≠ 1 nghĩa là phải bỏ đi những điểm trên đường thẳng x = 1. (Xem Hình 2).

(b) $f(3,2) = 3\ln(2^2 - 3) = 3ln1 = 0$



Hình 3

Bởi vì $ln(y^2 - x)$ xác định khi $y^2 - x > 0$, tức là $x < y^2$, vậy miền xác định của *f* là $D = \{(x, y) \mid x < y^2\}$. Đây là tập các điểm thuộc về bên trái của parabol $x = y^2$. (Xem Hình 3.) Không phải tất cả các hàm đều có thể được biểu thị bởi công thức tường minh. Hàm trong ví dụ sau đây được mô tả bằng lời và bằng ước lượng số theo các giá trị của nó.

Ví dụ 2 Ở những vùng có thời tiết mùa đông khắc nghiệt, chỉ số gió lạnh (wind-chill index) thường được sử dụng để mô tả mức độ nghiêm trọng của cái lạnh. Chỉ số W này là nhiệt độ cảm nhận phụ thuộc vào nhiệt độ thực tế T và tốc độ gió *v*. Vì vậy, W là hàm của T và *v* và chúng ta có thể viết $W = f(T, v)$. Bảng 1 ghi giá trị của W được biên soạn bởi Dịch vụ Thời tiết Quốc gia của Hoa Kỳ (National Weather Service) và Dịch vụ Khí tượng của Canada (Meteorological Service).

TABLE 1 Wind-chill index as a function of air temperature and wind speed

Wind speed (km/h)

Actual temperature (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Ví dụ, bảng cho thấy nếu nhiệt độ là -5°C và tốc độ gió là 50 km/h, thì sẽ cảm thấy lạnh như nhiệt độ khoảng -15°C khi không có gió. Vì vậy $f(-5, 50) = -15$.

Ví dụ 3 Năm 1928, Charles Cobb và Paul Douglas công bố một nghiên cứu, trong đó họ đã mô hình hóa sự phát triển của nền kinh tế Mỹ trong giai đoạn 1899 -1922. Chúng được coi là một cách nhìn đơn giản hóa của nền kinh tế trong đó sản lượng được xác định bởi số lượng lao động tham gia và số vốn đầu tư. Trong khi có nhiều yếu tố khác ảnh hưởng đến hiệu quả kinh tế, mô hình của họ được chứng minh là khá chính xác. Hàm mà họ đã sử dụng để mô hình sản xuất có dạng

[1] $P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$

trong đó P là tổng sản lượng (giá trị tiền tệ của tất cả các hàng hóa sản xuất trong một năm), L là số lượng lao động (tổng số người-giờ làm việc trong một năm), và K là số vốn đầu tư (giá trị tiền tệ của tất cả các máy móc, thiết bị, và các tòa nhà). Trong phần 2.3 chúng ta sẽ chỉ ra rằng, làm thế nào dạng thức của phương trình [1] dẫn tới các giả định kinh tế nhất định.

TABLE 2

Year	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

Cobb và Douglas sử dụng dữ liệu kinh tế được công bố của chính phủ để có được Bảng 2. Họ đã lấy năm 1899 làm cơ sở và P, L và K cho năm 1899 là mỗi gán giá trị 100. Các giá trị trong nhiều năm khác được thể hiện theo tỷ lệ phần trăm của các con số của 1899.

Cobb và Douglas sử dụng phương pháp bình phương tối thiểu ở Table 2 để xây dựng hàm

[2] $\qquad P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$

Nếu chúng ta sử dụng mô hình đưa ra bởi các hàm trong phương trình [2] để tính toán sản lượng trong những năm 1910 và 1920, chúng ta nhận được giá trị

$$P(147, 208) = 1.01(147)^{0.75}(208)^{0.25} \approx 161.9$$

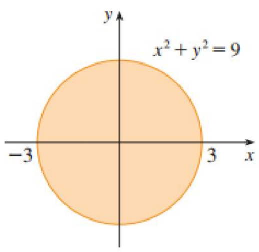
$$P(194, 407) = 1.01(194)^{0.75}(407)^{0.25} \approx 235.8$$

chúng là khá gần với giá trị thực tế là 159 và 231.

Hàm sản lượng [1] sau đó đã được sử dụng trong nhiều phạm vi khác nhau, từ các công ty tư nhân đến kinh tế toàn cầu. Miền xác định của nó là $\{(L, K) \mid L \ge 0, K \ge 0\}$ bởi vì L và K biểu thị lao động và vốn nên không bao giờ âm.

Ví dụ 4 Tìm miền xác định và miền giá trị của $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Lời giải Miền xác định của g là



Hình 4

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \ge 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 9\}$$

đó là đĩa tròn tâm (0, 0) bán kính bằng 3. (Xem Hình 4.)

Miền giá trị của g là $\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$

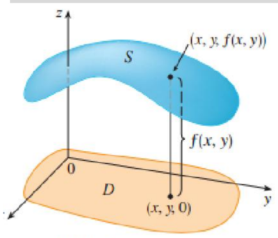
Bởi vì $9 - x^2 - y^2 \le 9$ nên $\sqrt{9 - x^2 - y^2} \le 3$.

Do đó miền giá trị của g là $\{z \mid 0 \le z \le 3\} = [0, 3]$.

2.1.2. Đồ thị

Một cách khác để hình dung đặc trưng của hai biến là xem xét đồ thị của nó.

Định nghĩa Nếu f là hàm hai biến có miền xác định là D thì đồ thị của nó là tập tất cả các điểm $(x, y, z) \in R^3$ sao cho $z = f(x, y)$ và $(x, y) \in D$.



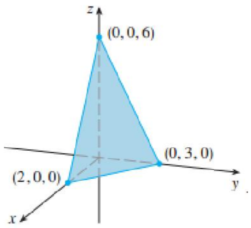
Hình 5

Như vậy, đồ thị của hàm một biến là đường cong với phương trình $y = f(x)$ thì đồ thị của hàm hai biến là mặt cong với phương trình $z = f(x, y)$.

Chúng ta có thể hình dung rằng hình chiếu lên mặt phẳng xy của đồ thị S của hàm f chính là miền D (Hình 5).

Ví dụ 5 Phác họa đồ thị hàm f(x, y) = 6 – 3x – 2y.

Lời giải Đồ thị của f có phương trình z = 6 – 3x – 2y hay 3x + 2y + z = 6, đó là mặt phẳng. Để vẽ mặt phẳng, ta tìm các điểm chắn (intercepts). Cho y = z = 0, ta nhận được x = 2, là x-chắn. Tương tự, y-chắn bằng 3 và z-chắn bằng 6. Điều này giúp chúng ta phác họa phần của đồ thị nằm trong phần tám đầu tiên của không gian (first octant) như trong Hình 6.



Hình 6

Hàm trong Ví dụ 5 là trường hợp đặc biệt của hàm

f(x, y) = ax + by + c,

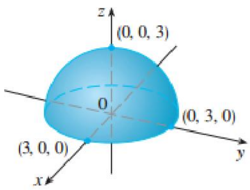
nó được gọi là hàm tuyến tính. Đồ thị của các hàm có phương trình

z = ax + by + c hay ax + by – z + c = 0

là các mặt phẳng. Tương tự như hàm tuyến tính một biến, hàm tuyến tính hai biến đóng vai trò rất quan trọng trong các phép toán vi phân và tích phân.

Ví dụ 6 Phác họa đồ thị của hàm $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Lời giải Đồ thị có phương trình $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Bình phương hai vế ta nhận được $z^2 = 9 - x^2 - y^2$ hay $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, đó chính là phương trình của mặt cầu tâm tại gốc tọa độ và bán kính bằng 3. Nhưng vì z ≥ 0 nên đồ thị của hàm g chỉ là nửa phía trên của mặt cầu.

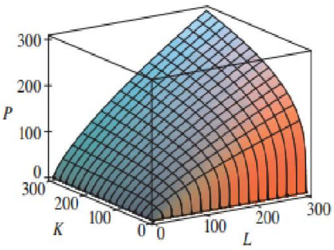


Hình 7

Chú ý Toàn bộ mặt cầu không thể biểu thị bởi một hàm hai biến x và y. Như trong Ví dụ 6, bán cầu (hemisphere) trên được biểu thị bởi phương trình $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, còn bán cầu dưới được biểu thị bởi phương trình $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Ví dụ 7 Sử dụng máy tính để vẽ đồ thị của hàm Cobb-Douglas $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$

Lời giải Hình 8 biểu thị đồ thị của P theo các giá trị của nhân công L và vốn K trong phạm vi từ 0 đến 300. Máy tính đã vẽ mặt cong bằng cách vẽ ra các vết dọc. Chúng ta thấy rằng giá trị của hàm P tăng theo cả hai sự tăng của L và K, như là dự đoán. Trong MATLAB, chúng ta sử dụng các câu lệnh sau:



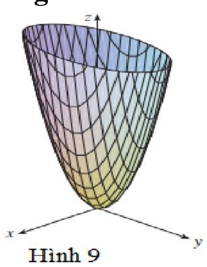
Hình 8

```
x = 0:10:300; y = x;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
Z = 1.01.*X.^0.75.*Y.^0.25;
surf(X,Y,Z)
```

Ví dụ 8 Tìm miền xác định, miền giá trị và vẽ đồ thị hàm số $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

Lời giải Miền xác định của h là toàn bộ mặt phẳng R^2. Miền giá trị là [0, +∞). Đồ thị của nó có phương trình $z = 4x^2 + y^2$, đây chính là một paraboloid elliptic. Các vết cắt ngang là các ellipse, các vết cắt dọc là các parabola (Hình 9).

Các chương trình máy tính cho phép vẽ đồ thị của hàm hai biến. Trong hầu hết các chương trình như vậy, các vết dọc trong các mặt phẳng x = k và

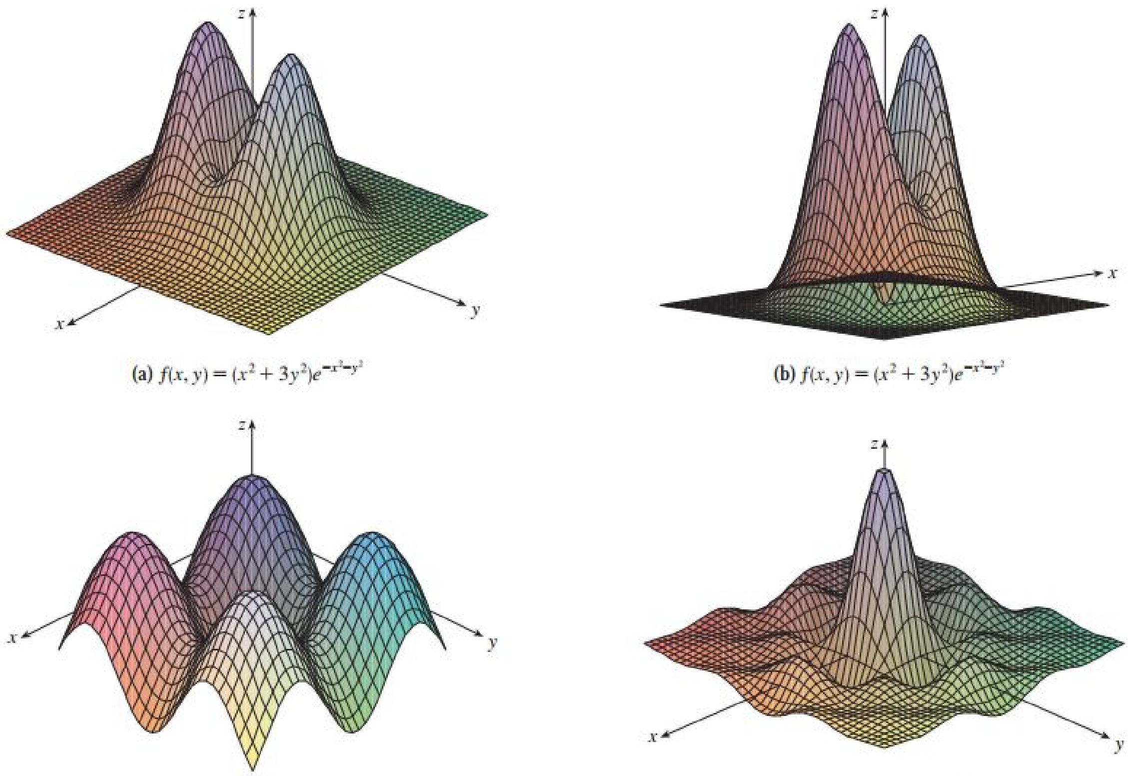


Hình 9

y = k được vẽ với các giá trị cách đều nhau của k và một phần của đồ thị được loại bỏ bằng cách sử dụng loại bỏ dòng ẩn.

Hình 10 biểu thị các đồ thị của một số hàm được vẽ bởi máy tính. Chú ý rằng chúng ta có thể nhận được những hình ảnh tốt hơn khi chúng ta sử dụng việc quay hình và chọn điểm quan sát thích hợp.

Trong các hình (a) và (b), đồ thị rất phẳng và bám sát vào mặt phẳng xy, ngoại trừ gần lân cận của gốc tọa độ, bởi vì $e^{-x^2-y^2}$ là rất nhỏ khi x hoặc y là đủ lớn.



(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

(c) $f(x, y) = \sin x + \sin y$

Hình 10

(d) $f(x, y) = \dfrac{\sin x \sin y}{xy}$

2.1.3. Đường mức

Cho đến nay chúng ta đã có hai phương pháp để hình dung hàm: sơ đồ mũi tên và đồ thị. Một phương pháp thứ ba, mượn ý tưởng từ những người làm bản đồ, là một bản đồ các chu tuyến trên đó các giá trị biểu thị độ cao được gán kết với các đường mức (level curves).

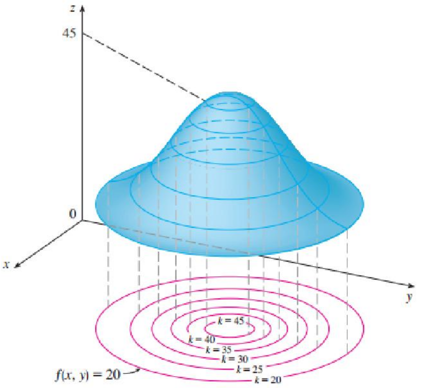
Định nghĩa Đường mức của hàm hai biến f là những đường cong có phương trình f(x, y) = k, ở đây k là hằng số (thuộc miền giá trị của f).

Mỗi đường mức f(x, y) = k là tập tất cả các điểm trên miền xác định của f mà tại đó f nhận giá trị k. Nói khác đi, nó biểu thị những chỗ mà đồ thị của f có chiều cao là k.

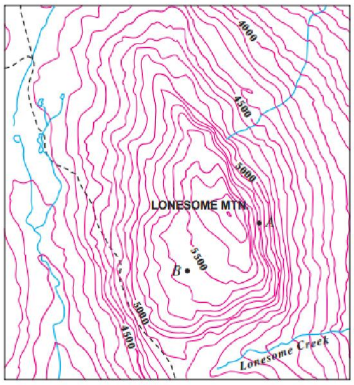
Từ Hình 11, chúng ta có thể thấy mối quan hệ giữa đường mức và các vết ngang.

Đường mức f(x, y) = k như là giao tuyến của đồ thị của f với mặt phẳng ngang z = k được chiếu xuống mặt phẳng xy.

Một ví dụ quen thuộc của đường mức là chúng xuất hiện trong bản đồ địa hình của một khu vực miền núi, như bản đồ trong Hình 12. Đường mức là mức độ cao so với mặt nước biển. Nếu bạn đi bộ dọc theo một trong những đường cong, bạn không lên cũng không xuống.

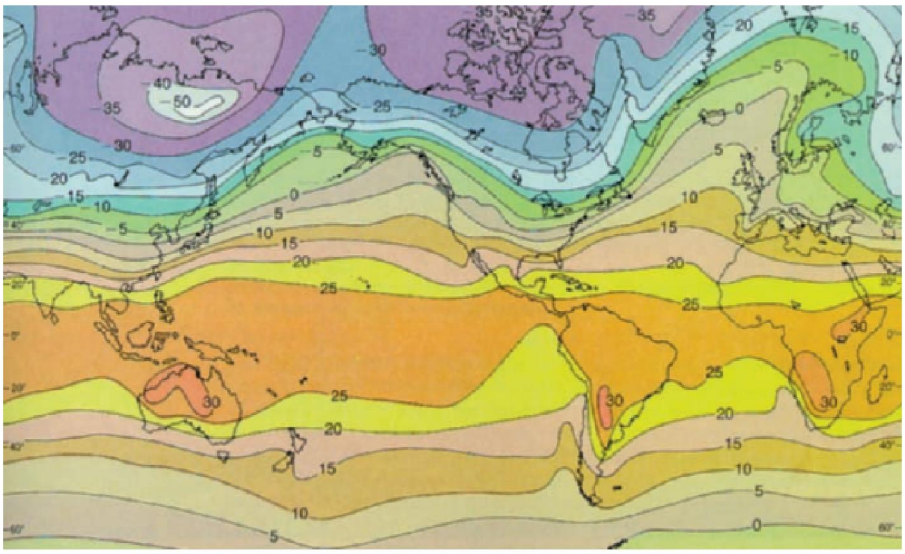


Hình 11



Hình 12

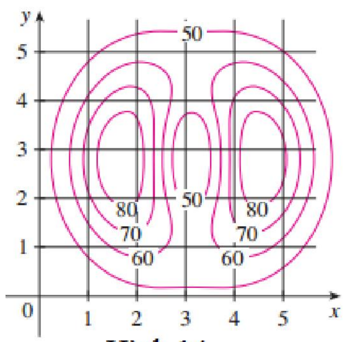
Một ví dụ quen thuộc nữa là hàm nhiệt độ được giới thiệu trong đoạn mở đầu của phần này. Ở đây các đường cong độ được gọi là đẳng nhiệt (*isothermals*) và chúng kết nối các miền có cùng một nhiệt độ. Hình 13 cho thấy một bản đồ thời tiết của thế giới cho thấy nhiệt độ trung bình trong tháng Giêng. Các đường đẳng nhiệt là những đường cong phân cách các dải màu.



Hình 13

Ví dụ 9 Hình 14 biểu thị bản đồ đường mức của hàm f. Sử dụng nó để ước lượng các giá trị f(1, 3) và f(4, 5).

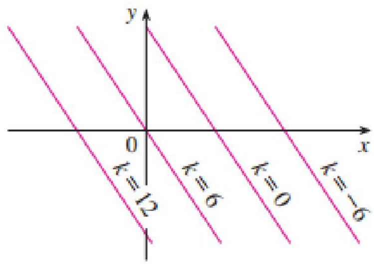
Lời giải Điểm (1, 3) thuộc phần giữa hai đường mức với các giá trị 70 và 80, vì vậy ta ước lượng f(1, 3) ≈ 73. Tương tự f(4, 5) ≈ 56.



Hình 14

Ví dụ 10 Phác họa đường mức của hàm f(x, y) = 6 – 3x – 2y với các giá trị k = -6, 0, 6, 12.

Lời giải Các đường mức là 6 – 3x – 2y = k hay 3x + 2y + (k – 6) = 0



Hình 15

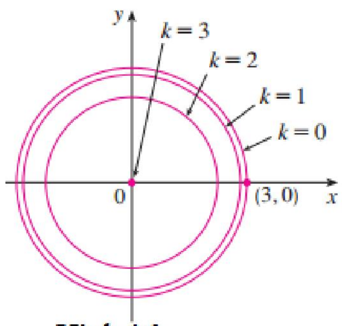
Đây là họ các đường thẳng với độ dốc $-\frac{3}{2}$. Bốn đường mức riêng ứng với k = -6, 0, 6 và 12 là 3x + 2y – 12 = 0, 3x + 2y – 6 = 0, 3x + 2y = 0 và 3x + 2y + 6 = 0.

Chúng được phác họa trên Hình 15. Các đường mức là song song và cách đều nhau bởi đồ thị của f là mặt phẳng.

Ví dụ 11 Phác thảo các đường mức của hàm

$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ với k = 0, 1, 2, 3.

Lời giải Đường mức là $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k$ hay $x^2 + y^2 = 9 - k^2$. Đây là họ các đường tròn đồng tâm với tâm (0, 0) bán kính $\sqrt{9 - k^2}$.

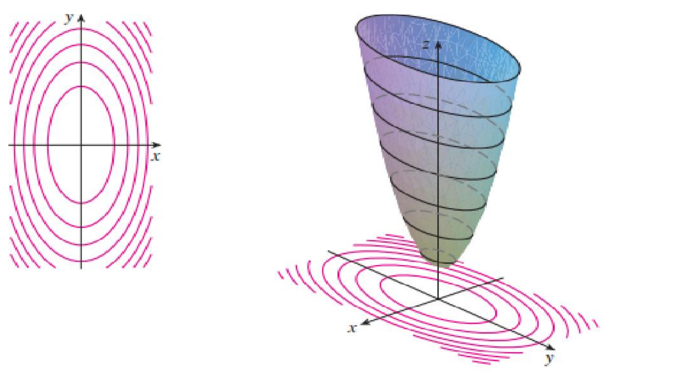


Hình 16

Các trường hợp k = 0, 1, 2, 3 được biểu thị trên Hình 16. Hãy thử hình dung những đường cong này được nâng lên tạo thành một mặt cong và so sánh với đồ thị của một bán cầu trong Hình 7.

Ví dụ 12 Phác thảo các đường mức của hàm $g(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

Lời giải Đường mức là $4x^2 + y^2 + 1 = k$ hay $\frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$



(a) Bản đồ đồng mức (b) Các vết ngang là các đường mức

Hình 17

ở đây với k > 1, biểu thị một họ các ellipse với các bán trục (semiaxes) là $\frac{1}{2}\sqrt{k-1}$ và $\sqrt{k-1}$. Hình 17(a) cho thấy một bản đồ đồng mức của h được vẽ bởi máy tính. Hình 17(b) cho thấy những đường mức được nâng tới đồ thị của h (một paraboloid elliptic), ở đó chúng trở thành các vết ngang.

Ví dụ 13 Vẽ đường mức của hàm Cobb-Douglas trong Ví dụ 3.

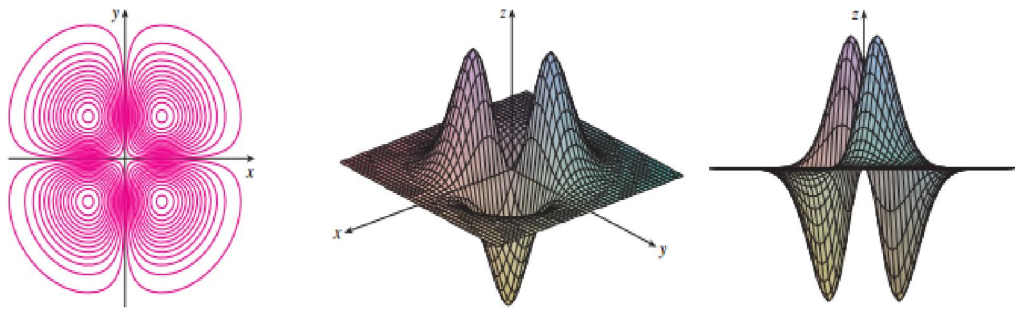
Lời giải Trong Hình 18, các đường đồng mức của hàm Cobb-Douglas

$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$ được vẽ bởi máy tính.

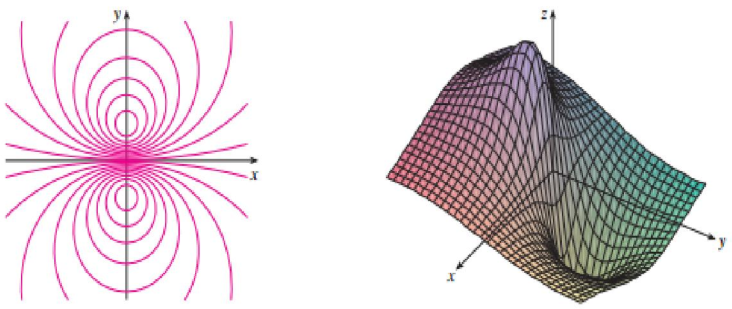
Các đường mức được gán nhãn theo các giá trị của sản phẩm P. Ví dụ, đường mức có nhãn 140 biểu thị tất cả các giá trị của nhân công L và đầu tư K để có sản phẩm P = 140. Chúng ta thấy rằng, đối với một giá trị cố định của P, thì L tăng K giảm, và ngược lại.

Tùy theo mục đích, một bản đồ đồng mức hữu ích hơn một đồ thị. Đó là chắc chắn đúng trong Ví dụ 13. (So sánh Hình 18 với Hình 8.) Nó cũng đúng trong việc ước tính giá trị của hàm, như trong Ví dụ 9.

Hình 19 cho thấy một số đường mức được máy tính tạo ra cùng với các đồ thị tương ứng. Chú ý rằng các đường mức trong phần (c) tụ lại với nhau gần nguồn gốc tọa độ. Tương ứng với thực tế là các đồ thị trong phần (d) là rất dốc khi ở gần gốc tọa độ.



(a) Các đường mức của $f(x,y) = -xye^{-x^2-y^2}$ (b) Hai góc nhìn của $f(x,y) = -xye^{-x^2-y^2}$



Hình 19 (c) Các đường mức của $f(x,y) = \frac{-3x}{x^2+y^2+1}$ (d) $f(x,y) = \frac{-3x}{x^2+y^2+1}$

2.1.4. Hàm ba hoặc nhiều biến

Một hàm ba biến, f, là quy luật gán mỗi bộ ba có thứ tự (x, y, z) trên miền $D \subset R^3$ với duy nhất một giá trị thực $f(x,y,z)$. Ví dụ, nhiệt độ T tại mỗi điểm trên bề mặt Trái đất phụ thuộc vào kinh độ x, vĩ độ y và thời điểm t, vì vậy có thể viết $T = f(x,y,t)$.

Ví dụ 14 Tìm miền xác định của $f(x,y,z) = \ln(x-y) + xysinz$.

Lời giải Biểu thức f(x, y, z) được xác định khi z – y > 0, vì vậy miền xác định của f là

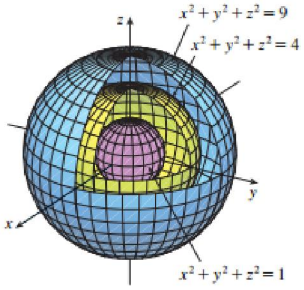
$$D = \{(x,y,z) \in R^3 \mid z > y\}$$

Đây là nửa không gian bao gồm tất cả các điểm nằm về phía trên mặt phẳng z = y.

Rất khó để cảm nhận đồ thị của hàm ba biến, vì nó nằm trong không gian bốn chiều. Tuy nhiên, chúng ta có được một số cái nhìn sâu sắc vào f bằng cách kiểm tra các mặt mức (level surfaces) của nó, đó là những mặt cong có phương trình *f(x, y, z) = k*, với k là một hằng số. Nếu điểm (x, y, z) di chuyển dọc theo một mặt mức, giá trị của *f(x, y, z)* vẫn không đổi.

Ví dụ 15 Tìm mặt mức của hàm f(x, y, z) = $x^2 + y^2 + z^2$.

Lời giải Các mặt mức là $x^2 + y^2 + z^2 = k$, với $k \geq 0$. Đó là họ các mặt cầu đồng tâm với bán kính $\sqrt{k}$ (Xem Hình 20). Vì vậy, khi (x, y, z) thay đổi trên bất kỳ mặt cầu tâm O, giá trị của f(x, y, z) là không đổi.



Hàm n biến là quy luật gán mỗi bộ n-số thực ($x_1, x_2, ..., x_n$) với một số thực z = f($x_1, x_2, ..., x_n$).

Ta ký hiệu R^n là tập tất cả các bộ n-số thực. Ví dụ, nếu một công ty sử dụng n loại nguyên liệu để làm ra một sản phẩm, c_i là giá của nguyên liệu thứ i, x_i là số đơn vị nguyên liệu thứ i, khi đó giá thành C của mỗi sản phầm là hàm của n biến $x_1, x_2, ..., x_n$.

[3] $C = f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$.

Hàm f có giá trị thực với miền xác định là tập con của R^3. Đôi khi ta sử dụng ký hiệu véc tơ để biểu thị hàm ở dạng gọn hơn:

Nếu $\boldsymbol{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, ta viết $f(\boldsymbol{x})$ thay cho $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Với ký hiệu như vậy, chúng ta có thể định nghĩa hàm trong phương trình [3] như sau: $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}.\boldsymbol{x}$

ở đây $c = \langle c_1, c_2, \dots, c_n \rangle$ và **c.x** là ký hiệu tích vô hướng của các véc tơ $\boldsymbol{c}$ và $\boldsymbol{x}$ trong V_n.

Xem sự tương ứng một – một giữa điểm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ trong R^3 với véc tơ vị trí $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ trong V_n, chúng ta có ba cách quan niệm về hàm f được xác định trong tập con của R^n:

1. Như là hàm của n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$
2. Như là hàm của một biến điểm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
3. Như là hàm của một biến véc tơ $\boldsymbol{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$

2.2. Giới hạn và sự liên tục

2.2.1. Giới hạn

Bảng 1 Các giá trị của f(x, y)

x \ y	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
−0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
−0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

Bảng 1 Các giá trị của g(x, y)

x \ y	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
−0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
−0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0	−1.000	−1.000	−1.000		−1.000	−1.000	−1.000
0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

Chúng ta xem xét hai hàm

$$f(x, y) = \frac{sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \text{ và } g(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

khi cả x và y đồng thời dần về 0, tức là điểm (x, y) dần về gốc tọa độ.

Bảng 1 và Bảng 2 liệt kê các giá trị của f(x, y) và g(x, y), chính xác tới ba chữ số thập phân, đối với các điểm (x, y) gần gốc tọa độ. Chú ý rằng hàm không xác định tại gốc tọa độ.

Nó biểu thị rằng, khi (x, y) dần đến (0, 0) thì các giá trị của f(x, y) dần đến 1, trong khi đó các giá trị của g(x, y) không dần tới giá trị nào. Nó chỉ ra rằng, các bằng chứng số là chính xác và ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1 \text{ và } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ không tồn tại.}$$

Tổng quát, chúng ta ký hiệu

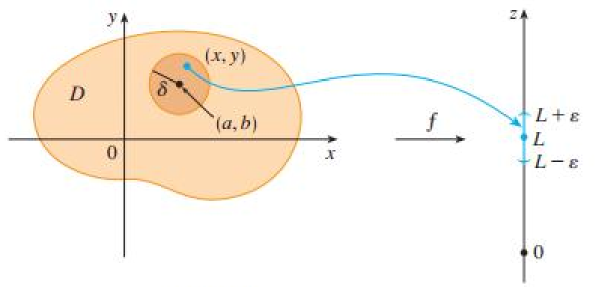
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

để biểu thị rằng giá trị của f(x, y) dần đến L khi điểm (x, y) dần tới điểm (a, b) dọc theo bất kỳ đường nào nằm trọn trong miền xác định của f. Nói khác đi, chúng ta có thể làm cho giá trị của f(x, y) gần với L bằng cách chọn điểm (x, y) đủ gần điểm (a, b). Định nghĩa chính xác được phát biểu như sau:

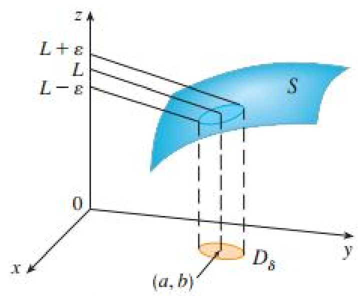
[1] Định nghĩa Giả sử f là hàm hai biến với miền xác định D chứa điểm (a, b). Chúng ta nói rằng "*giới hạn của f(x, y) bằng L khi (x, y) dần tới (a, b)*" và ta viết $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, nếu với mỗi ε > 0 bất kỳ, tìm được số δ > 0 sao cho nếu (x, y) ∈ D và $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ thì $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

Ngoài ra, người ta còn dùng ký hiệu $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = L$ và $f(x,y) \to L$ khi $(x,y) \to (a,b)$.

Chú ý rằng $|f(x, y) - L|$ là khoảng cách giữa các số f(x, y) và L, và $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ là khoảng cách giữa điểm (x, y) và điểm (a, b). Vì vậy Định nghĩa 1 nói rằng khoảng cách giữa các số f(x, y) và L có thể nhỏ tùy ý bằng cách cho khoảng cách giữa điểm (x, y) và điểm (a, b) đủ nhỏ (nhưng khác 0). Hình 1 minh họa Định nghĩa 1 theo nghĩa của biểu đồ mũi tên. Với mỗi khoảng nhỏ (L - ε, L + ε) chứa L, chúng ta có thể tìm được miền hình tròn D_δ [có thể trừ đi điểm (a, b)] với tâm (a, b) và bán kính δ > 0 sao cho f ánh xạ tất cả các điểm trong D_δ [có thể trừ đi điểm (a, b)] vào trong khoảng (L - ε, L + ε).



Hình 1

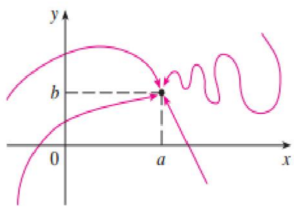


Hình 2

Một minh họa khác của Định nghĩa 1 được cho trong Hình 2, ở đó mặt cong S là đồ thị của f. Với ε > 0 cho trước, ta có thể tìm được δ > 0 sao cho nếu (x, y) thuộc miền D_δ và (x, y) ≠ (a, b) thì phần tương ứng của S nằm giữa các mặt phẳng z = L – ε và L + ε.

Với hàm một biến, x chỉ có thể dần đến a theo hai phía từ bên trái hoặc bên phải. Nhớ lại rằng nếu $\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x)$ thì không tồn tại $\lim_{x\to a} f(x)$.

Với các hàm hai biến thì việc đó không đơn giản bởi vì chúng ta có thể cho (x, y) dần đến (a, b) từ muôn vàn hướng khác nhau (Hình 3), miễn là (x, y) vẫn thuộc miền xác định của f.



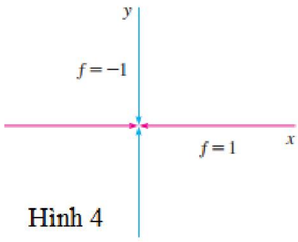
Hình 3

Định nghĩa 1 chỉ đề cập tới khoảng cách giữa (x, y) và (a, b) mà không quan tâm đến hướng của sự dần đến. Do đó, nếu giới hạn tồn tại thì f(x, y) phải dần tới cùng một giới hạn, không phụ thuộc (x, y) dần tới (a, b) như thế nào. Vì thế nếu chúng ta tìm thấy hai đường dần đến (a, b) của (x, y) có hai giới hạn khác nhau thì $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ không tồn tại.

Nếu $f(x, y) \to L_1$ khi $(x, y) \to (a, b)$ dọc theo C_1 và $f(x, y) \to L_2$ khi $(x, y) \to (a, b)$ dọc theo C_2 mà $L_1 \neq L_2$ thì $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ không tồn tại.

Ví dụ 1 Chứng tỏ rằng $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Lời giải Giả sử $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Trước hết ta xét sự dần đến (0, 0) dọc theo trục x. Sau đó cho y = 0 ta được *$f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$* với mọi $x \neq 0$, vì vậy $f(x, y) \to 1$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo trục x.



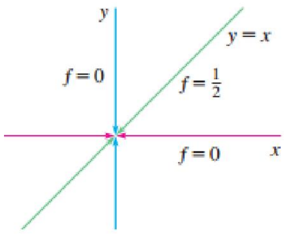
Hình 4

Giờ chúng ta dẫn đến dọc theo trục y bằng cách đặt x = 0. Vì $f(0, y) = -y^2/y^2 = -1$ với mọi $y \neq 0$ nên $f(x, y) \to -1$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo trục y (Hình 4). Bởi vì *f* có hai giới hạn khác nhau dọc theo hai đường khác nhau nên giới hạn trên không tồn tại.

Ví dụ 2 Nếu $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, tồn tại hay không giới hạn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Lời giải Nếu y = 0 thì $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$, vậy $f(x, y) \to 0$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo trục x.

Nếu x = 0 thì $f(0, y) = 0/y^2 = 0$, vậy $f(x, y) \to 0$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo trục y.



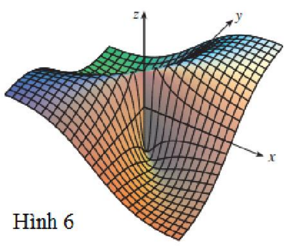
Hình 5

Mặc dù chúng ta nhận được cùng một giới hạn, nhưng điều đó không chứng tỏ giới hạn đã cho là bằng 0. Giờ chúng ta xét sự dần đến (0, 0) dọc theo đường y = x.

Với $x \neq 0$ thì $f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$,

vì vậy $f(x,x) \to \frac{1}{2}$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo y = x (Hình 5).

Vì vậy giới hạn đã cho không tồn tại.



Hình 6

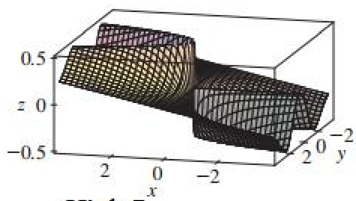
Hình 6 làm rõ cho Ví dụ 2. Sườn cong xuất hiện trên đường y = x tương ứng với thực tế là f(x, y) = 1/2 đối với mọi điểm (x, y) trên đường đó, ngoại trừ gốc tọa độ.

Ví dụ 3 Cho $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, có hay không giới hạn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Lời giải Nhớ lại lời giải trong Ví dụ 2, chúng ta tiết kiệm thời gian bằng cách cho (x, y) dần tới (0, 0) dọc theo mọi đường nghiêng đi qua gốc tọa độ y = mx, ở đây m là độ dốc:

$$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \frac{m^2x}{1+m^4x^2} \to 0$$

khi (x, y) → (0, 0) dọc theo y = mx. Vì thế f có cùng một giới hạn dọc theo mọi đường nghiêng đi qua gốc tọa độ. Nhưng điều đó không chứng tỏ giới hạn đã cho bằng 0. Giờ chúng ta cho (x, y) dần tới (0, 0) dọc theo parabola $x = y^2$, ta có



Hình 7

$$f(x,y) = f(y^2,y) = \frac{y^2y^2}{(y^2)^2+y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

vậy $f(x,y) \to \frac{1}{2}$ khi (x, y) →(0, 0) dọc theo $x = y^2$.

Vậy giới hạn đã cho không tồn tại.

Hình 7 là đồ thị của hàm trong Ví dụ 3. Chú ý rằng sườn dốc nằm trên parabola $x = y^2$.

Bây giờ chúng ta hãy xem xét các giới hạn mà tồn tại. Cũng như đối với hàm một biến, việc tìm giới hạn cho các hàm hai biến có thể được đơn giản hóa bằng cách sử dụng các tính chất của giới hạn. Các quy tắc tìm giới hạn của hàm một biến có thể được mở rộng đến các hàm hai biến: Giới hạn của một tổng bằng tổng của các giới hạn, giới hạn của một tích bằng tích của các giới hạn. Đặc biệt, các công thức sau đây là đúng khi (x, y) → (a, b):

[2] $\lim x = a \qquad \lim y = b \qquad \lim c = c$

Định lý Squeeze vẫn còn đúng.

Nếu	$g(x,y) \le f(x,y) \le h(x,y)$
và	$\lim g(x,y) = \lim h(x,y) = L$
thì	$\lim f(x,y) = L$

Ví dụ 4 Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ nếu nó tồn tại.

Lời giải Như trong Ví dụ 3, chúng ta có thể rằng giới hạn dọc theo bất kỳ đường thẳng nào đi qua gốc tọa độ đều bằng 0. Điều đó không chứng minh được giới hạn đã cho bằng 0, nhưng các giới hạn dọc theo các parabola $y = x^2$ và $x = y^2$ cũng bằng 0, vì vậy chúng ta bắt đầu nghi ngờ rằng giới hạn đó là tồn tại và bằng 0.

Cho ε > 0. Chúng ta cần tìm δ > 0 sao cho nếu $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ thì $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$,

tức là, nếu $0 < \sqrt{x^2 + y^2 < \delta}$ thì $\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} < \varepsilon$.

Mặc dù $x^2 \le x^2 + y^2$ vì $y^2 \ge 0$, nên $x^2/(x^2+y^2) \le 1$, vì vậy

[3] $\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \le 3|y| = 3\sqrt{y^2} \le 3\sqrt{x^2+y^2}$

Vì thế nếu ta chọn δ = ε/3 và giả sử $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ thì

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \le 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Từ đó theo Định nghĩa 1, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Chúng ta cũng có thể sử dụng định lý Squeeze để chứng minh.

Thật vậy, từ [3], chú ý đến [2], ta có điều cần chứng minh.

2.2.2. Sự liên tục

Sự liên tục của hàm hai biến được định nghĩa tương tự như đối với hàm một biến.

[4] Định nghĩa Hàm hai biến f được gọi là liên tục tại (a, b) nếu $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Chúng ta nói f liên tục trên D nếu nó liên tục tại mọi điểm (a, b) thuộc D.

Ý nghĩa trực quan của sự liên tục là nếu điểm (x, y) thay đổi một lượng nhỏ thì giá trị của f(x, y) cũng thay đổi một số lượng nhỏ. Điều này có nghĩa rằng mặt cong là đồ thị của một hàm liên tục không có lỗ hoặc bị rách.

Sử dụng các thuộc tính của giới hạn, bạn có thể thấy tổng, hiệu, tích và thương các hàm liên tục là liên tục trên miền xác định của chúng. Hãy sử dụng tính chất này để đưa ra một số ví dụ về hàm liên tục.

Hàm đa thức (polynomial) hai biến là tổng của các hạng thức dạng cx^my^n, trong đó c là hằng số, còn m và n là các số nguyên. Hàm phân thức (rational) là tỷ số của các đa thức. Ví dụ, $f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$ là hàm đa thức, còn $g(x,y) = \frac{2xy+1}{x^2+y^2}$ là hàm phân thức.

Các giới hạn trong [2] chứng tỏ rằng các hàm f(x, y) = x, g(x, y) = y và h(x, y) = c là các hàm liên tục. Bởi vì mọi đa thức đều được xây dựng từ các hàm đơn giản f, g và h bằng các phép nhân và cộng, nên mọi hàm đa thức hai biến đều liên tục trên R^2. Tương tự, mọi hàm phân thức đều liên tục trên miền xác định của nó bởi nó là thương của hai hàm liên tục.

Ví dụ 5 Đánh giá $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$

Lời giải Bởi vì hàm $f(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ là đa thức nên nó t khắp nơi, vì vậy ta có thể tìm giới hạn bằng cách thay trực tiếp:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2 2 - 1^3 2 + 3.1 + 2.2 = 11$$

Ví dụ 6 Hàm $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ liên tục tại những đâu?

Lời giải Hàm f không liên tục tại (0, 0) bởi vì nó không xác định tại đó. Do f là hàm phân thức nên miền liên tục của nó là tập D = {(x, y) | (x, y) ≠ (0, 0)}.

Ví dụ 7 Giả sử

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ở đây g được xác định tại (0, 0) nhưng g vẫn không liên tục bởi vì $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ không tồn tại (xem Ví dụ 1).

Ví dụ 8 Giả sử

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Chúng ta biết rằng f liên tục với $(x, y) \neq (0, 0)$ vì nó là hàm phân thức. Từ Ví dụ 4 ta có

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

Vì vậy f liên tục tại (0, 0), và do đó nó liên tục trên toàn R^2.

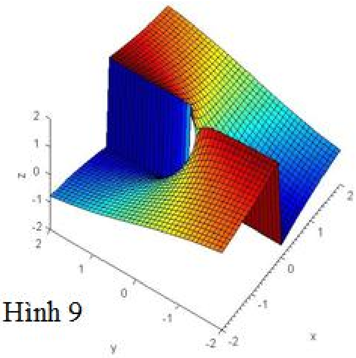
Giống như hàm một biến, phép lấy hàm hợp của hai hàm là một cách để nhận được hàm thứ ba. Thực tế, có thể chỉ ra rằng nếu f là hàm hai biến liên tục và g là hàm một biến liên tục xác định trên miền giá trị của f, thì hàm hợp (composite) $h = g_o f$ được xác định bởi

$$h(x,y) = g(f(x,y))$$

cũng là hàm liên tục.

Ví dụ 9 Tìm miền liên tục của hàm h(x, y) = arctan(y/x).

Lời giải Hàm f(x, y) = y/x là hàm phân thức nên nó liên tục ngoại trừ trên đường thẳng x = 0. Hàm $g(t) = \arctan t$ là liên tục khắp nơi. Vì vậy hàm hợp g(f(x, y)) = arctan(y/x) = h(x, y) liên tục ngoại trừ trên đường thẳng x = 0. Hình 9 chỉ ra sự đứt gãy trên đồ thị của hàm h trên trục y.



Hình 9

2.2.3. Hàm ba hoặc nhiều biến

Mọi kết quả đã biết đều có thể mở rộng cho hàm ba hoặc nhiều biến.

Ký hiệu $\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = L$ nghĩa là các giá trị của f(x, y, z) dần tới số L khi điểm (x, y, z) dần tới điểm (a, b, c) dọc theo bất kỳ đường nào trong miền xác định của f.

Vì khoảng cách giữa hai điểm (x, y, z) và (a, b, c) trong R^3 bằng

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

nên ta có thể định nghĩa chính xác như sau:

Với mọi số ε > 0, tồn tại số δ > 0 sao cho, nếu (x, y, z) thuộc miền xác định của f và

$$0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} < \delta$$

thì $$|f(x,y,z) - L| < \varepsilon.$$

Hàm f liên tục tại (a, b, c) nếu $\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c)$,

Ví dụ, hàm

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$$

là hàm phân thức của ba biến và vì vậy nó liên tục tại mọi điểm trong R^3, ngoại trừ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Nói khác đi, nó không liên tục trên mặt cầu tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1.

Nếu sử dụng ký hiệu véc tơ đã trình bày trong phần 2.1, chúng ta có thể định nghĩa giới hạn của hàm hai hoặc ba biến ở dạng đơn giản như sau.

[5] Định nghĩa Nếu f xác định trên miền D của $\mathbb{R}^n$ thì $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L$ có nghĩa là, với mọi ε > 0, tồn tại số δ > 0 sao cho, nếu $\boldsymbol{x} \in D$ và $0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta$ thì $|f(\boldsymbol{x}) - L| < \varepsilon$.

Chú ý rằng nếu n = 1 thì $\boldsymbol{x} = x$ và $\boldsymbol{a} = a$, Định nghĩa 5 chính là định nghĩa về giới hạn đối với hàm một biến. Trong trường hợp n = 2, ta có

$$\boldsymbol{x} = \langle x, y\rangle,\ \boldsymbol{a} = \langle a, b\rangle, \text{ và } |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

Định nghĩa 5 trở thành Định nghĩa 1. Nếu n = 3 thì $\boldsymbol{x} = \langle x, y, z\rangle$, $\boldsymbol{a} = \langle a, b, c\rangle$, và Định nghĩa 5 trở thành định nghĩa về giới hạn của hàm ba biến.

Trong mọi trường hợp ta đều viết $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$.

2.3. Đạo hàm riêng

2.3.1. Khái niệm về đạo hàm riêng

Vào một ngày nóng, độ ẩm cao làm cho chúng ta nghĩ rằng nhiệt độ cao hơn nhiệt độ thực của nó, trong khi trong không khí rất khô, chúng ta cảm nhận nhiệt độ thấp hơn chỉ thị của nhiệt kế. Dịch vụ Thời tiết Quốc gia (National Weather Service) đã đưa ra các chỉ số nhiệt (còn gọi là chỉ số nhiệt độ-độ ẩm, hoặc chỉ số độ ẩm ở một số nước) để mô tả tác động kết hợp của nhiệt độ và độ ẩm. Chỉ số nhiệt I là nhiệt độ không khí cảm nhận được khi nhiệt độ thực tế là T và độ ẩm tương đối là H. Vì vậy, I là một hàm của T và H, và chúng ta có thể viết I = f(T, H). Bảng dưới đây của các giá trị của I được trích từ một bảng được biên soạn bởi các Dịch vụ Thời tiết Quốc gia.

Độ ẩm tương ứng (%)

Nhiệt độ thực tế (°F)

T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

Bảng 1 Chỉ số nhiệt I như là hàm của nhiệt độ và độ ẩm

Nếu chúng ta tập trung vào cột được đánh dấu của bảng, tương ứng với độ ẩm tương đối của H = 70%, chúng ta coi chỉ số nhiệt như là hàm một biến T đối với giá trị cố định của H. Ta viết g(T) = f (T, 70). Sau đó g (T) mô tả cách thức chỉ số nhiệt I tăng lên khi nhiệt độ thực tế T tăng, tương ứng với độ ẩm là 70%. Đạo hàm của g khi T = 96°F là tốc độ thay đổi của I đối với T khi T = 96°F:

$$g'(96) = \lim_{h\to 0}\frac{g(96+h) - g(96)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(96+h, 70) - f(96, 70)}{h}$$

Chúng ta có thể xấp xỉ g'(96) bằng cách sử dụng các giá trị trong Bảng 1 với h = 2 và -2

$$g'(96) \approx \frac{g(98) - g(96)}{2} = \frac{f(98,70) - f(96,70)}{2} = \frac{133 - 125}{2} = 4$$

$$g'(96) \approx \frac{g(94) - g(96)}{-2} = \frac{f(94,70) - f(96,70)}{-2} = \frac{118 - 125}{-2} = 3.5$$

Lấy trung bình cộng hai giá trị này, ta có thể nói rằng đạo hàm g'(96) xấp xỉ bằng 3.75. Nghĩa là, khi nhiệt độ thực tế là 96°F và độ ẩm tương đối là 70%, nhiệt độ biểu kiến tăng khoảng 3.75°F so với mỗi độ tăng của nhiệt độ thực tế.

Giờ chúng ta xem xét dòng được đánh dấu trong Bảng 1, tương ứng với nhiệt độ cố định T = 96°F. Các số trên dòng là các giá trị của hàm G(H) = f(96, H), chúng mô tả cách thức chỉ số nhiệt tăng lên khi mà độ ẩm tương đối tăng, trong khi nhiệt độ thực tế T = 96°F. Đạo hàm của hàm này khi H = 70% là tốc độ biến thiên của I đối với H khi H = 70%:

$$G'(70) = \lim_{h\to 0}\frac{G(70+h)-G(96)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(96,70+h)-f(96,70)}{h}$$

Chúng ta có thể xấp xỉ G'(70) bằng cách đặt h = 5 và -5:

$$G'(70) \approx \frac{G(75)-G(70)}{5} = \frac{f(96,75)-f(96,70)}{5} = \frac{130-125}{5} = 1$$

$$G'(70) \approx \frac{G(65)-G(70)}{-5} = \frac{f(96,65)-f(96,70)}{-5} = \frac{121-125}{-5} = 0.8$$

Lấy giá trị trung bình, ta có ước lượng G'(70) ≈ 0.9. Điều này nói lên rằng, khi nhiệt độ là 96°F và độ ẩm tương đối là 70%, chỉ số nhiệt tăng khoảng 0.9°F đối với mỗi phần trăm tăng của nhiệt độ tương đối.

Tổng quát, nếu f là hàm của hai biến x và y, giả sử cố định y = b - const và cho x biến đổi. Khi đó ta có hàm một biến g(x) = f(x, b). Nếu g có đạo hàm tại a thì ta gọi nó là đạo hàm riêng của f theo biến x tại (a, b) và ký hiệu $f_x(a, b)$. Vì vậy

[1] $f_x(a, b) = g'(a)$ với $g(x) = f(x, b)$

Theo định nghĩa đạo hàm riêng ta có $g'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$, vì vậy [1] trở thành

[2] $$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,h)}{h}$$

Tương tự, đạo hàm riêng của f theo y tại (a, b), ký hiệu $f_y(a, b)$, nhận được bằng cách cố định x = a và tính đạo hàm tại b của hàm một biến G(y) = f(a, y):

[3] $$f_y(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,h)}{h}$$

Với các ký hiệu này của các đạo hàm riêng, ta có thể viết tốc độ thay đổi của chỉ số nhiệt I theo nhiệt độ thực tế T và độ ẩm tương đối H khi T = 96°F và H = 70% như sau:

$f_T(96, 70) \approx 3.75$ $\quad$ $f_H(96, 70) \approx 0.9$

Giờ chúng ta coi điểm (a, b) thay đổi, f_x và f_y trở thành hàm hai biến.

[4] Nếu f là hàm hai biến, các đạo hàm riêng của nó f_x và f_y được xác định như sau:

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Có nhiều ký hiệu đối với các đạo hàm riêng, ví dụ, nếu *z = f(x, y)* thì

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

Quy tắc tính các đạo hàm riêng:

1. Để tính f_x, coi y là không đổi và đạo hàm f(x, y) theo x.
2. Để tính f_y, coi x là không đổi và đạo hàm f(x, y) theo y.

Ví dụ 1 Cho $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, tìm $f_x(2, 1)$ và $f_y(2, 1)$.

Lời giải Giữ y cố định và đạo hàm theo x, ta nhận được $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$, vì vậy

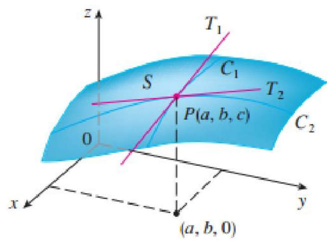
$$f_x(2, 1) = 3.2^2 + 2.2.1^3 = 16$$

Giữ x cố định và đạo hàm theo y, ta nhận được $f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$, vì vậy

$$f_y(2, 1) = 3.2^2.1^2 - 4.1 = 8$$

2.3.2. Ý nghĩa của các đạo hàm riêng

Để đưa ra ý nghĩa của các đạo hàm riêng, chúng ta nhớ lại rằng phương trình z = f(x, y) mô tả một mặt cong S. Nếu f(a, b) = c thì điểm P(a, b, c) thuộc S. Cố định y = b, chúng ta đã hạn chế sự chú ý của ta trên đường cong C_1 là giao của mặt phẳng y = b với S. Nói khác đi, C_1 là giao tuyến của S trên mặt phẳng y = b. Tương tự thế, mặt phẳng x = a giao với S theo đường cong C_2. Cả hai đường cong C_1 và C_2 đều đi qua điểm P (xem Hình 1).



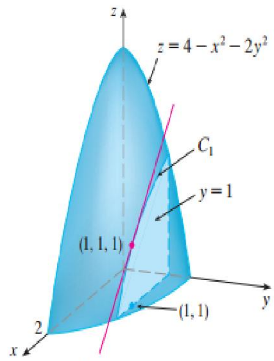
Hình 1

Chú ý rằng đường cong C_1 là đồ thị của hàm g(x) = f(x, b), vì thế độ dốc của tiếp tuyến của nó T_1 tại P là $g'(a) = f_x(a, b)$. Đường cong C_2 là đồ thị của hàm G(y) = f(a, y), vì thế độ dốc của tiếp tuyến của nó T_2 tại P là $G'(b) = f_y(a, b)$.

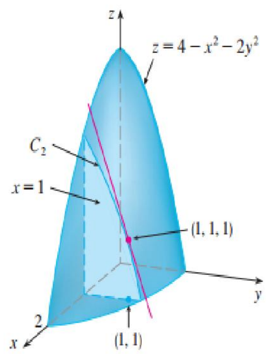
Vì thế các đạo hàm riêng $f_x(a, b)$ và $f_y(a, b)$ có thể hiểu là độ dốc của các đường tiếp tuyến tại P(a, b, c) của các giao tuyến C_1 và C_2 của S với các mặt phẳng y = b và x = a.

Ví dụ 2 Cho $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, tìm $f_x(1, 1)$ và $f_y(1, 1)$ rồi giải thích ý nghĩa.

Lời giải Vì $f_x(x, y) = -2x$ nên $f_x(1, 1) = -2$, vì $f_y(x, y) = -4y$ nên $f_y(1, 1) = -4$.



Hình 2

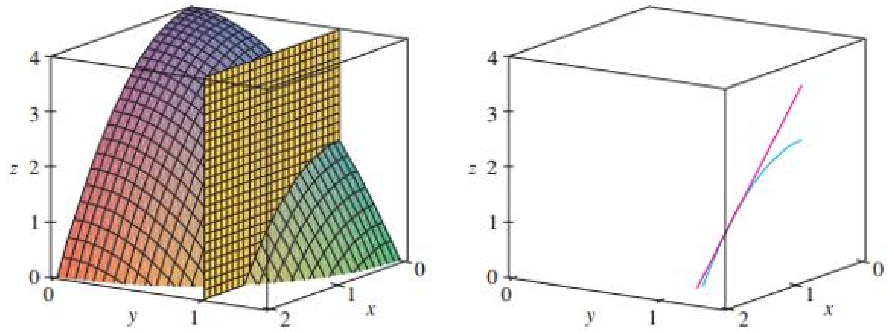


Hình 3

Đồ thị của f là paraboloid $z = 4 - x^2 - 2y^2$ và giao của mặt phẳng y = 1 với nó là parabola $z = 2 - x^2$, y = 1. (Đường cong C_1 trong Hình 2). Độ dốc của tiếp tuyến của parabola tại điểm (1, 1, 1) là $f_x(1, 1) = -2$. Tương tự, đường cong C_2 là giao của paraboloid với mặt phẳng x = 1, đó là một parabola $z = 3 - 2y^2$, x = 1. Độ dốc của tiếp tuyến tại (1, 1, 1) là $f_y(1, 1) = -4$ (Hình 3).

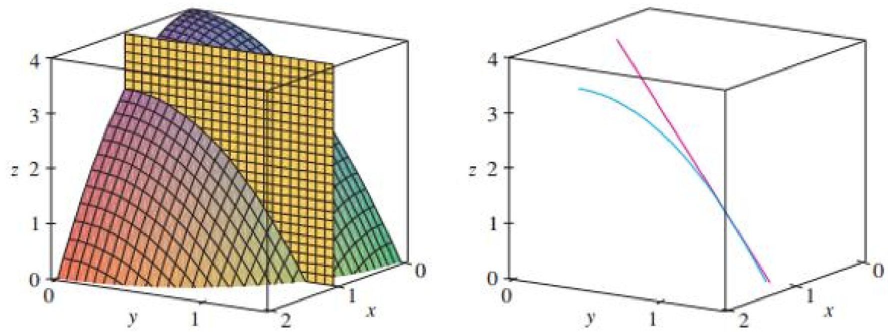
Hình 4 mô tả máy tính vẽ tương ứng với Hình 2. Phần (a) biểu thị mặt phẳng y = 1 giao với mặt cong theo giao tuyến và phần (b) mô tả C_1 và T_1. Chúng ta sử dụng các phương trình véc tơ $\boldsymbol{r}(t) = \langle t, 1, 2 - t^2 \rangle$ cho C_1 và $\boldsymbol{r}(t) = \langle 1 + t, 1, 1 - 2t \rangle$ cho T_1. Tương tự, Hình 5 tương ứng với Hình 3.

Hình 4



(a) (b)

Hình 5



(a) (b)

Ví dụ 3 Cho f(x, y) = $\sin\frac{x}{1+y}$, tính $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Lời giải Sử dụng quy tắc Chain đối với hàm một biến, ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\frac{x}{(1+y)^2}$$

Ví dụ 4 Tìm ∂z/∂x và ∂z/∂y nếu z được xác định ẩn như là hàm của x, y theo phương trình $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Lời giải Để tìm ∂z/∂x, chúng ta đạo hàm hàm ẩn theo x, coi y như hằng số:

$$3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xz\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Giải ra ta được $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2+2yz}{z^2+2xy}$. Tương tự, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2+2xz}{z^2+2xy}$

2.3.3. Hàm nhiều hơn hai biến

Các đạo hàm riêng có thể được định nghĩa cho các hàm nhiều hơn hai biến. Ví dụ, nếu f là hàm ba biến x, y và z thì đạo hàm riêng theo x được định nghĩa là

$$f_x(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}$$

Nếu w = f(x, y, z) thì f_x = ∂w/∂x có thể xem là tốc độ thay đổi của w theo x khi y và z không đổi. Nhưng chúng ta không thể giải thích hình học bởi vì đồ thị của f nằm trong không gian bốn chiều.

Tổng quát, nếu u là hàm của n biến, $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ thì đạo hàm riêng theo biến thứ i sẽ là

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{h}$$

và chúng ta cũng viết $$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

Ví dụ 5 Tìm f_x, f_y và f_z nếu $f(x, y, z) = e^{xy}\ln z$.

Lời giải Giữ y và z không đổi và đạo hàm theo x ta được $f_x = ye^{xy}\ln z$.

Tương tự, $f_y = xe^{xy}\ln z$ và $f_z = e^{xy}/z$

2.3.4. Đạo hàm cấp cao

Nếu f là hàm hai biến thì các đạo hàm riêng f_x và f_y cũng là hàm hai biến, vì vậy chúng ta có thể lấy đạo hàm riêng của chúng và gọi đó là các đạo hàm riêng cấp hai của f.

Nếu $z = f(x, y)$, chúng ta sử dụng các ý hiệu sau:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Vì thế ký hiệu f_{xy} (hay $\partial^2 f/\partial y\partial x$) có nghĩa là đầu tiên lấy đạo hàm theo x, sau đó lấy đạo hàm theo y, trong khi đó f_{yx} thì đảo lại thứ tự.

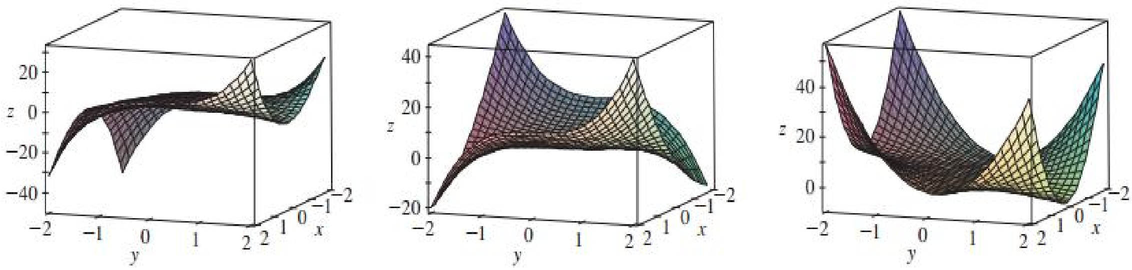
Ví dụ 6 Tính các đạo hàm riêng cấp hai của $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Lời giải Trong Ví dụ 1 chúng ta tìm được $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$, $f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$

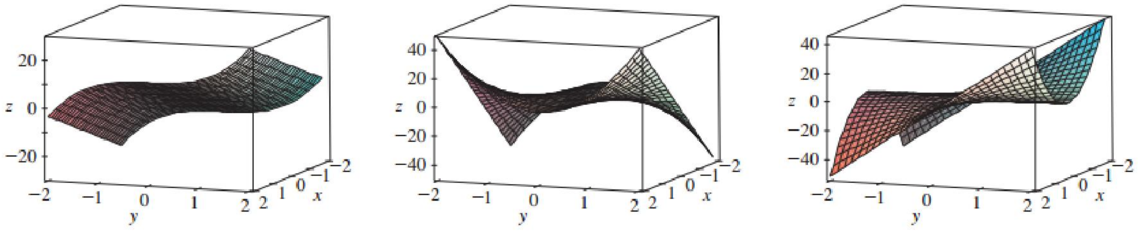
Vì vậy $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3$ $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$

$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2$ $f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$

Hình 7 cho thấy đồ thị của hàm f trong Ví dụ 6 và các đồ thị của các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai với $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$. Chú ý rằng các đồ thị này phù hợp với cách giải thích của chúng ta, fx và fy là độ dốc của đường tiếp tuyến với các chu tuyến của đồ thị của f. Ví dụ, đồ thị của giảm nếu chúng ta bắt đầu tại (0, -2) và di chuyển theo hướng dương của trục x. Điều này được phản ánh bởi giá trị âm của f_x. Bạn nên so sánh các đồ thị của f_{yx} và f_{yy} với đồ thị của f_y để xem các mối quan hệ.



f f_x f_y



f_{xx} Hình 7 $f_{xy} = f_{yx}$ f_{yy}

Chú ý rằng trong Ví dụ 6, $f_{xy} = f_{yx}$. Đây không phải là sự trùng hợp. Nó chỉ ra rằng các đạo hàm riêng hỗn hợp f_{xy} và f_{yx} là bằng nhau trong hầu hết các hàm chúng ta gặp trong thực hành. Định lý sau đây, được phát hiện bởi nhà toán học người Pháp Alexis Clairaut (1713-1765), cho ra điều kiện có thể khẳng định $f_{xy} = f_{yx}$.

Định lý Clairaut Giả sử f xác định trên miền D chứa điểm (a, b). Nếu các đạo hàm riêng cấp hai f_{xy} và f_{yx} cùng tồn tại và liên tục trên D thì $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

Các đạo hàm riêng cấp 3 hoặc cao hơn cũng có thể xác định. Ví dụ

$$f_{xyy} = \left(f_{xy}\right)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

và sử dụng định lý Clairaut có thể chứng minh rằng $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ nếu các hàm này cùng tồn tại và liên tục.

Ví dụ 7 Tính f_{xxyz} nếu $f(x, y, z) = \sin(3x + yz)$.

Lời giải $f_x = 3\cos(3x + z)$ $f_{xx} = -9\sin(3x + yz)$

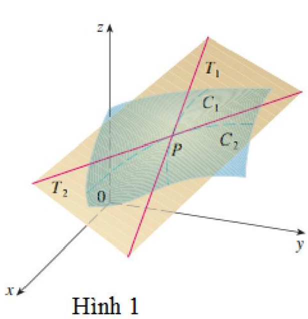
$f_{xxy} = -9z\cos(3x + yz)$ $f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\sin(3x + yz)$

2.4. Mặt phẳng tiếp diện và xấp xỉ tuyến tính

Một trong những ý tưởng quan trọng nhất trong các phép tính giải tích hàm một biến là khi chúng ta phóng to một điểm trên đồ thị của một hàm khả vi, đồ thị trở nên không thể phân biệt so với đường tiếp tuyến của nó và chúng ta có thể xấp xỉ hàm bởi một hàm tuyến tính. Ở đây chúng ta phát triển ý tưởng tương tự trong ba chiều. Khi chúng ta phóng to một điểm trên một mặt cong là đồ thị của một hàm hai biến khả vi, mặt cong trông giống một mặt phẳng (mặt phẳng tiếp tuyến của nó) và chúng ta có thể hàm bởi một hàm tuyến tính hai biến. Chúng ta cũng có thể mở rộng ý tưởng này đối với hàm nhiều biến hơn.

2.4.1. Mặt phẳng tiếp diện

Giả sử rằng mặt S có phương trình $z = f(x, y)$, trong đó f có các đạo hàm riêng cấp một liên tục, và giả sử $P(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm trên S. Như ở phần trước, giả sử C_1 và C_2 là các giao tuyến của các mặt phẳng $y = y_0$ và $x = x_0$ với mặt S, hi đó điểm P nằm trên cả C_1 và C_2.



Hình 1

Giả sử T_1 và T_2 là các đường tiếp tuyến của C_1 và C_2 tại P, khi đó mặt phẳng tiếp diện (tangent plane) của S tại P là mặt phẳng chứa cả hai tiếp tuyến T_1 và T_2 (Xem Hình 1).

Trong phần 2.6 chúng ta thấy rằng nếu C là đường cong bất kỳ nằm trong S và đi qua P, thì tiếp tuyến của nó tại P nằm trên mặt phẳng tiếp diện. Do đó ta có thể xem rằng tiếp diện của S tại

P chứa tất cả các tiếp tuyến tại P của các đường cong nằm trên S và đi qua P.

Chúng ta biết rằng phương trình của mặt phẳng đi qua $P(x_0, y_0, z_0)$ có dạng

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Chia hai vế cho C và đặt a = -A/C, b = -B/C, ta viết lại dưới dạng

[1] $$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Nếu phương trình [1] mô tả tiếp diện tại P thì giao của nó với mặt phẳng $y = y_0$ sẽ là đường tiếp tuyến T_1. Đặt $y = y_0$ vào phương trình [1] ta nhận được

$$z - z_0 = a(x - x_0) \text{ khi } y = y_0$$

và chúng ta biết rằng đây là phương trình của đường thẳng với độ dốc a. Nhưng trong mục 2.3 ta biết rằng độ dốc của tiếp tuyến T_1 là $f_x(x_0, y_0)$, vì thế $a = f_x(x_0, y_0)$.

Tương tự, đặt $x = x_0$ vào phương trình [1], ta nhận được $z - z_0 = b(y - y_0)$, đó chính là tiếp tuyến T_2, vậy $b = f_y(x_0, y_0)$.

Định nghĩa 2 Giả sử f có các đạo hàm riêng liên tục. Phương trình tiếp diện của mặt cong $z = f(x, y)$ tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ là $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

Ví dụ 1 Tìm mặt phẳng tiếp diện của paraboloid elliptic $z = 2x^2 + y^2$ tại điểm (1, 1, 3).

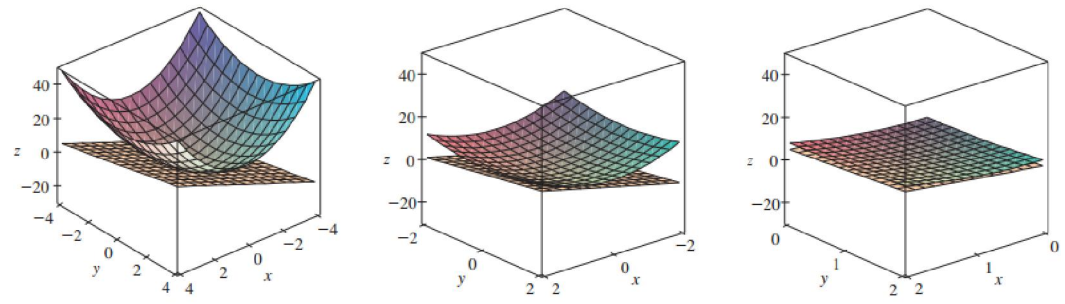
Lời giải Giả sử $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Khi đó

$$f_x(x, y) = 4x \Rightarrow f_x(1, 1) = 4 \qquad f_y(x, y) = 2y \Rightarrow f_y(1, 1) = 2$$

Theo Định nghĩa 2, phương trình mặt phẳng tiếp diện tại (1, 1, 3) là

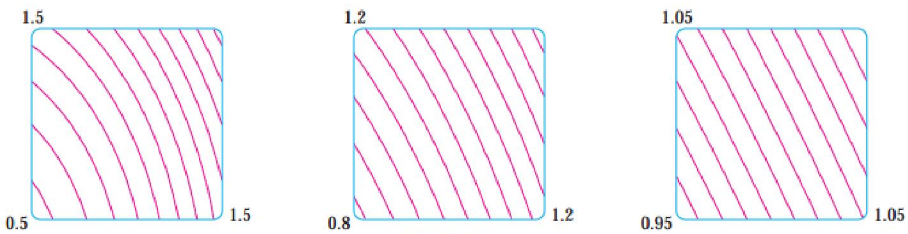
$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1) \text{ hay } 4x + 2y - z - 3 = 0.$$

Hình 2(a) mô tả paraboloid elliptic và mặt phẳng tiếp diện tại P(1, 1, 3) nói đến trong Ví dụ 1. Các hình (b) và (c) là phóng to tại điểm (1, 1, 3). Chú ý rằng càng phóng to thì đồ thị càng phẳng và càng giống với mặt phẳng tiếp diện của.



(a) Hình 2 (b) (c)

Trên Hình 3 chúng ta khẳng định thêm về điều đó, bằng cách phóng to điểm (1, 1) trên bản đồ đường đồng mức của hàm $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Chú ý rằng càng phóng to thì các đường mức nhìn như các đường song song, đó là đặc trưng của đường thẳng.



Hình 3

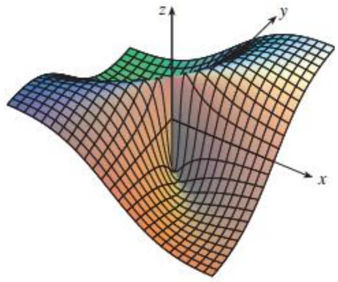
2.4.2. Xấp xỉ tuyến tính

Trong Ví dụ 1, chúng ta thấy rằng phương trình của tiếp diện của đồ thị của hàm $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ tại điểm (1, 1, 3) là $z = 4x + 2y - 3$. Vì vậy, các chứng cứ trên Hình 2 và Hình 3 cho thấy, hàm tuyến tính hai biến $L(x, y) = 4x + 2y - 3$ là xấp xỉ tốt nhất của f(x, y) khi (x, y) gần (1, 1). Hàm L được gọi là tuyến tính hóa của f tại (1, 1) và sự xấp xỉ $f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$ được gọi là xấp xỉ tuyến tính hoặc xấp xỉ tiếp diện của f tại (1, 1).

Ví dụ, tại điểm (1.1, 0.95) xấp xỉ tuyến tính sẽ cho

$$f(1.1, 0.95) \approx 4(1.1) + 2(0.95) - 3 = 3.3$$

khá gần với giá trị thực sự của $f(1.1, 0.95) = 2(1.1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225$. Nhưng nếu ta lấy điểm xa điểm (1, 1) hơn, ví dụ điểm (2, 3), chúng ta không còn nhận được xấp xỉ tốt. Thật vậy, ta có L(2, 3) = 11, trong khi đó f(2, 3) = 17.



Hình 4

Tổng quát, phương trình tiếp diện của đồ thị của hàm f hai biến tại điểm (a, b, f(a, b)) là

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Hàm tuyến tính có đồ thị là tiếp diện là hàm

[3] $$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

được gọi là tuyến tính hóa của f tại (a, b), và xấp xỉ

[4] $$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

được gọi là xấp xỉ tuyến tính hoặc xấp xỉ tiếp diện của f tại (a, b).

Chúng ta đã xác định được tiếp diện của mặt cong z = f(x, y) tại nơi mà f có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục. Điều gì sẽ xảy ra nếu f_x và f_y không liên tục? Hình 4 là đồ thị của một hàm như vậy, nó có phương trình

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Có thể kiểm tra rằng tại (0, 0), các đạo hàm riêng tồn tại, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0)$ nhưng không liên tục. Xấp xỉ tuyến tính sẽ là f(x, y) = 0, nhưng thực tế $f(x, y) = \frac{1}{2}$ tại tất cả các điểm trên đường thẳng y = x. Vì vậy vẫn xảy ra tình trạng xấu ngay cả khi các đạo hàm riêng của hàm hai biến tồn tại. Để khắc phục, ta đưa ra khái niệm khả vi đối với hàm hai biến.

Nhớ lại rằng, với hàm một biến y = f(x), nếu x thay đổi từ a tới a + Δx, thì số gia của y là

$$\Delta y = f(x + \Delta) - f(x)$$

Nếu f khả vi tại a thì

[5] $$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x \text{ với } \varepsilon \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0$$

Bây giờ ta xét hàm hai biến z = f(x, y), và giả sử x thay đổi từ a tới a + Δx, còn y thay đổi từ b đến b + Δy. Khi đó số gia tương ứng của z là

[6] $$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Như vậy số gia Δz biểu thị sự thay đổi giá trị của f khi (x, y) thay đổi từ (a, b) tới (a + Δx, b + Δy). Tương tự [5], ta định nghĩa tính khả vi của hàm hai biến như sau

[7] Định nghĩa Nếu z = f(x, y) thì f là khả vi tại (a, b) nếu Δz có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

trong đó ε_1 và ε_2 cùng dần về 0 khi $(\Delta x, \Delta y)$ dần về $(0, 0)$.

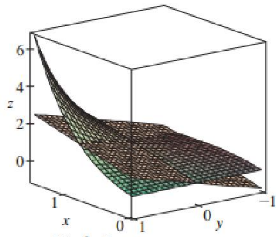
Định nghĩa 7 nói lên rằng, hàm khả vi sẽ có xấp xỉ tốt khi (x, y) ở gần (a, b). Nói khác đi, mặt phẳng tiếp diện xấp xỉ tốt nhất với đồ thị tại tiếp điểm.

[8] Định lý Nếu các đạo hàm riêng f_x và f_y tồn tại trong lân cận của (a, b) và liên tục tại (a, b) thì khả vi tại (a, b).

Ví dụ 2 Chứng tỏ rằng $f(x, y) = xe^{xy}$ khả vi tại (1, 0) và tìm tuyến tính hóa của nó tại đó. Sau đó sử dụng để tìm xấp xỉ f(1.1, -0.1).

Lời giải Các đạo hàm riêng là $f_x(x, y) = e^{xy}(1 + xy) \Rightarrow f_x(1, 0) = 1$

$$f_y(x, y) = x^2e^{xy} \Rightarrow f_y(1, 0) = 1$$



Hình 5

Cả f_x và f_y là các hàm liên tục, vì vậy f khả vi theo Định lý 8. Tuyến tính hóa là

$$L(x, y) = f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) = x + y$$

Xấp xỉ là $xe^{xy} \approx x + y$, vậy $f(1.1, -0.1) \approx 1.1 - 0.1 = 1$.

So sánh với giá trị thực, $f(1.1, -0.1) = 1.1e^{-0.11} \approx 0.98542$.

Hình 5 thể hiện đồ thị của f và tuyến tính hóa L trong Ví dụ 2.

Ví dụ 3 Ở đầu phần 2.3 chúng ta đã nói đến chỉ số nhiệt I là hàm của nhiệt độ thực tế và độ ẩm tương đối H, và đưa ra bảng các giá trị từ Dịch vụ Thời tiết Quốc gia

Độ ẩm tương đối (%)

Nhiệt độ thực tế (°F) T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

Tìm xấp xỉ tuyến tính của chỉ số nhiệt I = f(T, H) khi T gần 96°F và H gần 70%. Sử dụng nó để ước lượng chỉ số nhiệt khi nhiệt độ là 97°F và độ ẩm tương đối là 72%.

Lời giải Từ bảng ta có f(96, 70) = 125. Trong phần 2.3 ta đã có ước lượng $f_T(96, 70) \approx 3.75$ và $f_H(96, 70) \approx 0.9$. Vì vậy xấp xỉ tuyến tính là

$$f(T, H) \approx f(96, 70) + f_T(96, 70)(T - 96) + f_H(96, 70)(H - 70)$$
$$\approx 125 + 3.75(T - 96) + 0.9(H - 70)$$

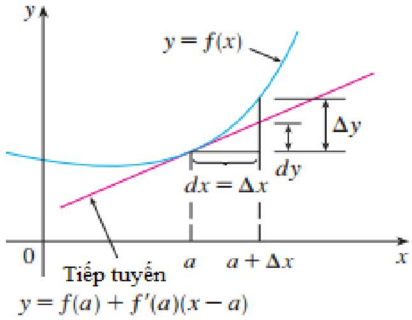
Đặc biệt, $f(97, 72) \approx 125 + 3.75(1) + 0.9(2) = 130.55$

Vì vậy, khi T = 97°F và H = 72% thì chỉ số nhiệt là $I \approx 131$°F

2.4.3. Vi phân

Với hàm khả vi một biến y = f(x), chúng ta xem vi phân dx là biến độc lập, tức là dx có thể nhận bất cứ giá trị thực nào. Vi phân của y được định nghĩa là

[9] $dy = f'(x)dx$.

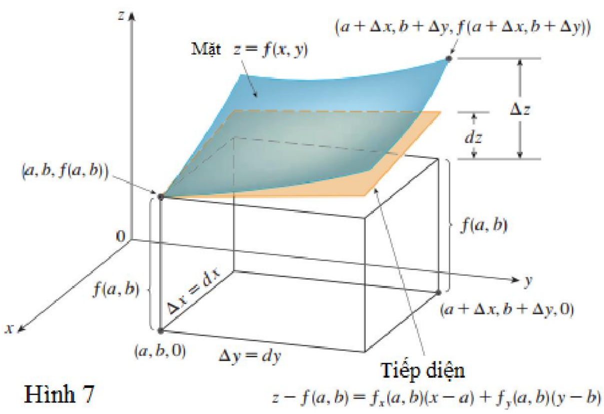


Hình 6

Hình 6 mô tả mối quan hệ giữa số gia Δy và vi phân dy: Δy biểu thị sự thay đổi theo chiều cao của đường cong y = f(x), còn dy biểu thị sự thay đổi theo chiều cao của đường tiếp tuyến khi x thay đổi một lượng dx = Δx.

Đối với hàm khả vi hai biến z = f(x, y), chúng ta xem các vi phân dx và dy là các biến độc lập. Khi đó vi phân dz được gọi là vi phân toàn phần (total differential), được xác định:

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad [10]$$



Hình 7

Đôi khi sử dụng df thay cho dz.

Nếu chúng ta đặt

$$dx = \Delta x = x - a \text{ và } dy = \Delta y = y - b$$

trong phương trình 10, thì vi phân của z là

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Vì vậy, theo ký hiệu của các vi phân, xấp xỉ tuyến tính [4] có thể viết như sau

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

Hình 7 tương ứng với Hình 6 trong không gian ba chiều, mô tả ý nghĩa hình học của vi phân dz và số gia Δz: dz biểu thị sự thay đổi theo chiều cao của mặt phẳng tiếp diện, trong khi Δz biể thị sự thay đổi theo chiều cao của mặt cong z = f(z, y) khi (x, y) thay đổi từ (a, b) đến (a + Δx, b + Δy).

Ví dụ 4

(a) Cho z = f(x, y) = $x^2 + 3xy - y^2$, tìm vi phân dz.

(b) Cho x thay đổi từ 2 tới 2.05 và y thay đổi từ 3 tới 2.96, so sánh các giá trị Δz và dz.

Lời giải

(a) Từ Định nghĩa 10 ta có

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (2x + 3y)dx + (3x - 2y)dy$$

(b) Đặt x = 2, dx = Δx = 0.05, y = 3, dy = Δy = -0.04, ta có

$$dz = [2(2) + 3(3)]0.05 + [3(2) - 2(3)](-0.04) = 0.65$$

Số gia của z là

$$\Delta z = f(2.05, 2.96) - f(2, 3) = [(2.05)^2 + 3(2.05)(2.96) - (2.96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2] = 0.6449$$

Chú ý rằng Δz ≈ dz nhưng dễ tính hơn.

Ví dụ 5 Bán kính cơ sở và chiều cao của hình nón tròn được xác định tương ứng là 10cm và 25cm, với sai số 0.1cm trong mỗi giá trị đo. Sử dụng vi phân để ước lượng sai số lớn nhất khi tính toán thể tích của hình nón.

Lời giải Thể tích của hình nón với bán kính cơ sở r và chiều cao h là $V = \pi r^2 h/3$. Vì vậy vi phân của V là

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh = \frac{2\pi rh}{3}dr + \frac{\pi r^2}{3}dh$$

Bởi vì mọi sai số là 0.1cm, ta có $|\Delta r| \leq 0.1$, $|hr| \leq 0.1$ cùng với r = 10, h = 25. Do đó

$$dV = \frac{500\pi}{3}(0.1) + \frac{100\pi}{3}(0.1) = 20\pi$$

Vì vậy lỗi lớn nhất khi tính thể tích hình nón là $20\pi cm^3 \approx 63\ cm^3$.

2.4.4. Các hàm ba hoặc nhiều biến

Các khái niệm xấp xỉ tuyến tính, tính khả vi và vi phân có thể được mở rộng cho hàm nhiều hơn hai biến. Sự khả vi được mở rộng từ Định nghĩa 7. Xấp xỉ tuyến tính là

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

và tuyến tính hóa L(x, y, z) là vế phải của biểu thức này.

Nếu w = f(x, y, z) thì số gia của w là $\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$.

Vi phân dw được xác định theo công thức $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$

Ví dụ 6 Kích thước của khối hộp chữ nhật có các số đo là 75cm, 60cm và 40cm cùng một sai số là 0.2cm. Sử dụng vi phân để ước lượng sai số lớn nhất có thể khi thể tích của hộp được đo với độ đo đó.

Lời giải Nếu các kích thước của hộp là x, y và z thì thể tích của nó là V = xyz, vì vậy

$$dwV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = yzdx + xzdy + xydz$$

Ta đã cho $|\Delta x| \leq 0.2$, $|\Delta y| \leq 0.2$, $|\Delta z| \leq 0.2$. Để ước lượng sai số lớn nhất, chúng ta sử dụng dx = dy = dz = 0.2 và x = 75, y = 60. z = 40:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0.2) + (75)(40)(0.2) + (75)(60)(0.2) = 1980$$

Như vậy, chỉ với sai số 0.2cm trên mỗi số đo đã dẫn đến sai số xấp xỉ $1980 cm^3$ khi tính thể tích. Điều đó xem ra có vẻ là sai số lớn, nhưng nó chỉ chiếm 1% số đo thể tích của hộp.

2.5. Quy tắc dây chuyền

Nhớ lại quy tắc dây chuyền của hàm một biến đối với hàm hợp: Nếu y = f(x) và x = g(t) là các hàm khả vi thì y là hàm khả vi gián tiếp theo t, và

[1] $$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Đối với hàm nhiều biến, quy tắc dây chuyền có một số dạng, mỗi dạng đưa ra một quy tắc để tính vi phân của hàm hợp. Dạng thứ nhất (Định lý 2) đề cập tới trường hợp z = f(x, y) và các biến x và y là các hàm theo t. Điều đó có nghĩa là z phụ thuộc gián tiếp vào t, z = f(g(t), h(t)), và quy tắc dây chuyền cho ra dạng vi phân z như là hàm của t. Chúng ta giả thiết rằng f là khả vi (Định nghĩa 2.4.7). Nhớ lại rằng đây là trường hợp f_x và f_y liên tục (Định lý 2.4.8).

[2] **Quy tắc dây chuyền thứ nhất** Giả sử rằng z = f(x, y) là hàm khả vi theo các biến x và y, trong đó x = g(t) và y = h(t) là hai hàm khả vi theo t. Khi đó z là hàm khả vi theo t và

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Chứng minh Sự thay đổi của Δt tại t sinh ra các sự thay đổi của Δx tại x và Δy tại y. Vì thế dẫn tới sự thay đổi của Δz tại z và từ Định nghĩa 2.4.7 ta có

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

trong đó cả ε_1 và ε_2 cùng dần về 0 khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. [Nếu các hàm ε_1 và ε_2 không xác định tai (0, 0), chúng ta cần định nghĩa chúng bằng 0 tại đó.] Chia cả hai vế cho Δt ta được

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Nếu cho $\Delta t \to 0$ thì $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \to 0$ vì g là hàm khả vi nên nó liên tục. Tương tự, $\Delta y \to 0$. Điều đó có nghĩa là $\varepsilon_1 \to 0$ và $\varepsilon_2 \to 0$, vì vậy

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t\to 0}\varepsilon_1\right)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t\to 0}\varepsilon_2\right)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0.\frac{dx}{dt} + 0.\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Bởi vì chúng ta thường viết $\frac{\partial z}{\partial x}$ thay cho $\frac{\partial f}{\partial x}$ nên có thể viết lại quy tắc dây chuyền dưới dạng sau:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

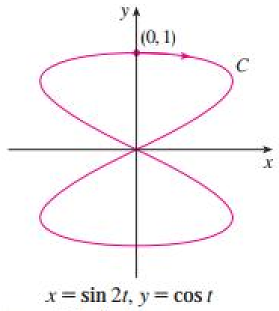
Ví dụ 1 Cho $z = x^2y + 3xy^4$ với x = sin2t và y = cost. Tìm dz/dt khi t = 0.

Lời giải Ta có $\partial z/\partial x = 2xy + 3y^4$, $\partial z/\partial y = z^2 + 12xy^3$,

dx/dt = 2cos2t, dy/dt = -sint

Theo quy tắc dây chuyền, $dz/dt = (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (z^2 + 12xy^3)(-\sin t)$

Tức là không cần thiết thay x và y bởi các biểu thức theo t. Dễ thấy rằng khi t = 0 ta có x = 0 và y = 1. Vì vậy tại t = 0 thì dz/dt = (0 + 3)(2cos0) + (0 + 0)(-sin0) = 6



Hình 8

Các đạo hàm trong Ví dụ 1 có thể hiểu là tốc độ thay đổi của z theo t khi điểm (x, y) di chuyển dọc theo đường cong C với phương trình tham số x = sin2t, y = cost. (Xem Hình 1.) Đặc biệt khi t = 0, điểm (x, y) là (0, 1) và dz/dt = 6 là tốc độ của sự tăng khi di chuyển dọc theo đường cong C qua điểm (0, 1). Cụ thể, nếu $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ biểu thị nhiệt độ tại điểm (x, y) thì hàm hợp z = T(sin2t, cost) biểu thị nhiệt độ tại điểm trên C và đạo hàm dz/dt biểu thị thay đổi của nhiệt độ dọc theo C.

Ví dụ 2 Áp lực (pressure) P(kilopascals, $9.8692326 * 10^{-3}$ atmosphere), thể tích V(liters) và nhiệt độ T(kelvins, 0 Kelvin = –273.15 Celsius) của một phân tử gam (mol) khí lý tưởng liên quan với nhau theo công thức PV = 8.31T. Tìm tốc độ mà áp lực thay đổi khi nhiệt độ là 300K và tăng với tốc độ 0.1K/s, thể tích V bằng 100L và tăng với tốc độ 0.2L/s.

Lời giải Nếu t biểu thị khoảng thời gian theo giây thì tại thời điểm tức thời đó ta có T = 300, dT/dt = 0.1, V = 100, dV/dt = 0.2. Bởi vì P = 8.31T/V nên

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{8.31}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{8.31T}{V^2}\frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{8.31}{100}(0.1) - \frac{8.31(300)}{100^2}(0.2) = -0.04155$$

Áp lực giảm khoảng 0.042 kPa/s.

Bây giờ ta xét trường hợp z = f(x, y) nhưng cả x và y đều là hàm của hai biến s và t:

x = g(s, t), y = h(s, t)

Do đó z gián tiếp là hàm của s và t nên chúng ta có thể tìm ∂z/∂s và ∂z/∂t. Nhớ lại rằng Nhớ lại rằng khi tính ∂z/∂t ta giữ s cố định. Áp dụng Định lý 2 ta nhận được

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Tương tự, ta tìm được ∂z/∂s. Vì thế ta có dạng thứ hai của quy tắc dây chuyền

[3] ***Quy tắc dây chuyền thứ hai***: Giả sử rằng z = f(x, y) là hàm khả vi theo hai biến x và y, trong đó x = g(s, t) và y = h(s, t) là các hàm khả vi liên tục theo s và t. Khi đó

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

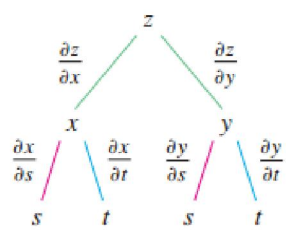
Ví dụ 3 Cho $z = e^x \sin y$, với $x = st^2$ và $y = s^2t$. Tìm ∂z/∂s và ∂z/∂t.

Lời giải Áp dụng quy tắc dây chuyền thứ 2, ta nhận được

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (e^x siny)(t^2) + (e^x cosy)(2st) = t^2e^{st^2}\sin(s^2t) + 2ste^{st^2}\cos(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (e^x siny)(2st) + (e^x cosy)(s^2) = 2ste^{st^2}\sin(s^2t) + s^2e^{st^2}\cos(s^2t)$$

Dạng 2 của quy tắc dây chuyền chứa ba dạng biến: s và t là các biến độc lập, x và y được gọi là các biến trung gian, z là biến phụ thuộc.



Hình 2

Một cách hiệu quả để nhớ quy tắc dây chuyền là vẽ sơ đồ cây (tree diagram) trên Hình 2. Chúng ta vẽ các nhánh bắt đầu từ biến đọc lập z tới các biến trung gian x và y để biểu thị rằng z là hàm của x và y. Sau đó vẽ các nhánh từ x và y tới các biến độc lập s và t. Trên mỗi nhánh chúng ta viết các đạo hàm riêng tương ứng. Để tìm ∂z/∂s, chúng la lấy tích của các đạo hàm riêng dọc theo đường từ z tới s.

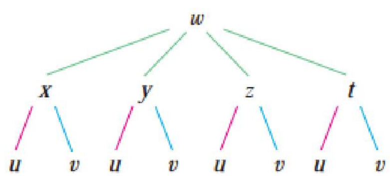
Bây giờ ta xét trường hợp tổng quát, biến phụ thuộc u là hàm của n biến trung gian x_1, x_2, ..., x_n, mỗi biến trung gian lại là hàm của m biến độc t_1, t_2, ..., t_m. Việc chứng minh tương tự như trường hợp 1.

[4] **Quy tắc dây chuyền tổng quát** Giả sử u là hàm khả vi của n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và mỗi x_j là hàm khả vi của m biến $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Khi đó u là hàm của $t_1, t_2, \ldots, t_m$ và

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$ với mọi i = 1, 2, ..., m.

Ví dụ 4 Viết ra quy tắc dây chuyền cho trường hợp w = f(x, y, z, t) và x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) và t = t(u, v).

Lời giải Chúng ta áp dụng Định lý 4 với n = 4 và m = 2. Hình 3 biểu thị sơ đồ cây. Mặc dù chúng ta chưa viết các đạo hàm riêng trên các nhánh, nhưng được hiểu là, nếu một nhánh dẫn từ y tới u thì đạo hàm riêng đối với nhánh đó là ∂y/∂u. Với sự trợ giúp của sơ đồ cây, chúng ta có thể viết các biểu thức cần thiết:



Hình 3

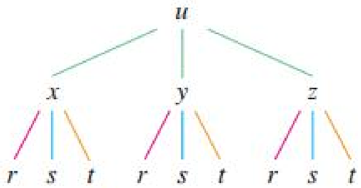
$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$

Ví dụ 5 Cho $u = x^4y + y^2z^3$, với $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$, $z = r^2s\sin t$.

Tìm giá trị của $\partial u/\partial s$ khi r = 2, s = 1, t = 0.

Lời giải Với sự trợ giúp của sơ đồ cây trên Hình 4, ta có



Hình 4

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} =$$

$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2\sin t)$

Khi r = 2, s = 1 và t = 0 ta có x = 2, y = 2 và z = 0.

Vì vậy $\partial u/\partial s = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$.

2.5.1. Đạo hàm hàm ẩn

Giả sử rằng từ phương trình dạng F(x, y) = 0 xác định y như là hàm của x, tức là y = f(x) với F(x, f(x)) = 0 với mọi x trên miền xác định của f. Nếu F khả vi, ta áp dụng dạng thứ nhất của quy tắc dây chuyền, đạo hàm hai vế phương trình F(x, y) = 0 theo biến x. Vì cả x và y đều là hàm của x, ta nhận được

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Nhưng dx/dx = 1, nếu $\partial F/\partial y \neq 0$ ta giải ra được

[6] $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Để nhận được phương trình này chúng ta đã giả thiết rằng F(x, y) = 0 xác định hàm ẩn của y theo x. Định lý hàm ẩn cho ta điều kiện mà qua đó giả thiết của chúng ta là hợp lệ: Nếu f được xác định trong lân cận của (a, b), ở đây F(a, b) = 0, $F_y(a, b) \neq 0$, F_x và F_y là các hàm liên tục trong lân cận đó, thì phương trình F(x, y) = 0 xác định hàm ẩn y theo x trong lân cận của (a, b) và đạo hàm của hàm này được cho bởi phương trình 6.

Ví dụ 8 Tìm y' nếu $x^3 + y^3 = 6xy$.

Lời giải Phương trình đã cho có thể viết là $F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$, vì vậy phương trình 6 cho ra $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2-6y}{3y^2-6x} = -\frac{x^2-2y}{y^2-2x}$.

Giả sử z = f(x, y) là hàm ẩn được cho bởi dạng F(x, y, z) = 0, tức là F(x, y, f(x, y)) = 0 với mọi (x, y) thuộc miền xác định của f. Nếu F và f khả vi, ta sẻ dụng quy tắc dây chuyền với phương trình này

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Nhưng vì $\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$ và $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$ nên $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

Nếu $\partial F/\partial z \neq 0$, ta nhận được $\partial z/\partial x$ như trong công thức 7. Tương tự, ta cũng xây dựng được công thức tính $\partial z/\partial y$.

[7] $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Thêm một dạng nữa của định lý hàm ẩn chỉ ra điều kiện để giả thiết của chúng ta thỏa mãn: Nếu F được xác định bên trong mặt cầu chứa (a, b, c), tại đó F(a, b, c) = 0, $F_z(a, b, c) \neq 0$

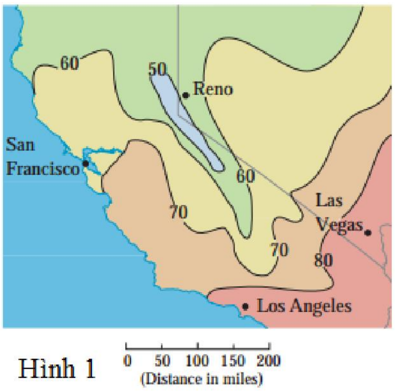
và các đạo hàm riêng F_x, F_y, F_z liên tục trên mặt cầu, thì phương trình F(x, y, z) = 0 xác định z là hàm của x và y trong lân cận của (a, b, c) và hàm này khả vi, với các đạo hàm riêng được tính theo công thức 7.

Ví dụ 9 Tìm ∂z/∂x và ∂z/∂y nếu $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Lời giải Giả sử $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1 = 0$. Từ phương trình 7 ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2+2yz}{z^2+2xy} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2+2xz}{z^2+2xy}$$

2.6. Đạo hàm theo hướng và véc tơ gradient



Hình 1

Bản đồ thời tiết trên Hình 1 biểu thị bản đồ đồng mức của hàm nhiệt độ T(x, y) của các bang California và Nevada tại 3:00pm trong một ngày của tháng Mười. Các đường mức, hay đẳng nhiệt (isothermals), kết nối các vùng có cùng nhiệt độ. Đạo hàm riêng T_x tại một địa phương như Reno là tốc độ thay đổi của nhiệt độ đối với khoảng cách nếu chúng ta di chuyển xuống phía đông từ Reno, T_y là tốc độ thay đổi của nhiệt độ nếu chúng ta di chuyển xuống phía bắc. Nhưng sẽ thế nào nếu chúng ta muốn biết tốc độ thay đổi của nhiệt độ khi chúng ta di chuyển về phía Đông Nam (đến Las Vegas), hoặc trong một số hướng khác? Trong phần này chúng ta giới thiệu một dạng đạo hàm, được gọi là đạo hàm theo hướng, cho phép chúng ta tìm tốc độ thay đổi của một hàm hai hay nhiều biến theo bất kỳ hướng nào.

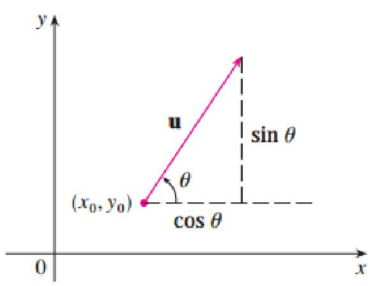
2.6.1. Đạo hàm theo hướng

Nhớ lại rằng các đạo hàm riêng f_x và f_y được định nghĩa như sau

$$\boxed{1} \qquad f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

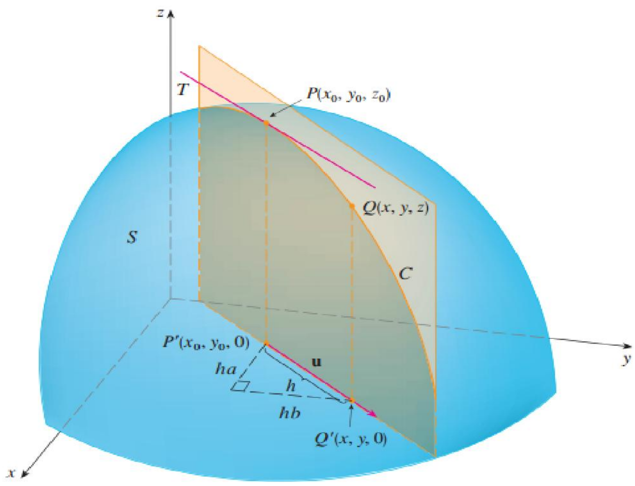
$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

và biểu thị tốc độ thay đổi của z theo hướng x và y, tức là hướng của các véc tơ đơn vị ***i*** và ***j***.



Véc tơ đơn vị $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle = \langle \cos\theta, \sin\theta\rangle$

Hình 2



Hình 3

Giả sử rằng ta muốn tìm tốc độ thay đổi của z tại (x_0, y_0) theo hướng véc tơ đơn vị bất kỳ $\boldsymbol{u} = \langle a, b\rangle$. (Xem Hình 2.) Để làm điều đó chúng ta xét mặt S với phương trình z = f(x, y) và giả sử $z_0 = f(x_0, y_0)$, khi đó điểm P(x_0, y_0, z_0) thuộc mặt S. Mặt phẳng đi qua P và song song với ***u*** giao với S theo đường cong C. (Xem Hình 3.) Độ dốc của đường tiếp tuyến của C tại điểm P chính là tốc độ thay đổi của z theo hướng ***u***.

Nếu Q(x, y, z) là một điểm khác nằm trên C, P' và Q' là các hình chiếu của P và Q lên mặt phẳng xy thì véc tơ $\overrightarrow{P'Q'}$ song song với ***u*** và $\overrightarrow{P'Q'} = h\boldsymbol{u} = \langle ha, hb\rangle$ với hằng số h nào đó. Bởi vì $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$ nên $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$ và

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha,\ y_0 + hb) - f(x_0,\ y_0)}{h}$$

Chuyển qua giới hạn khi h → 0, ta nhận được tốc độ thay đổi của z (theo khoảng cách) theo hướng ***u***, và được gọi là đạo hàm theo hướng của f theo hướng của ***u***.

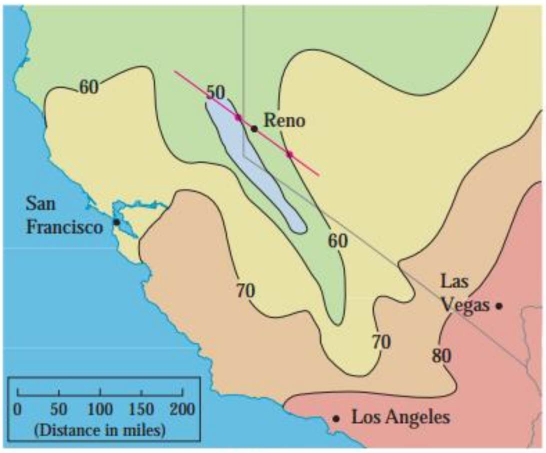
[2] **Định nghĩa** Đạo hàm theo hướng của f tại (x_0, y_0) theo hướng của véc tơ đơn vị $\boldsymbol{u} = \langle a, b\rangle$ (nếu giới hạn đó tồn tại) là

$$D_{\boldsymbol{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + ha,\ y_0 + hb) - f(x_0,\ y_0)}{h}$$

Bằng cách so sánh Định nghĩa 2 với phương trình [1], ta thấy rằng nếu $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} = \langle 1, 0\rangle$ thì $D_{\boldsymbol{i}}f = f_x$ và nếu $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{j} = \langle 0, 1\rangle$ thì $D_{\boldsymbol{j}}f = f_y$. Nói khác đi, các đạo hàm riêng của f theo x và y là các trường hợp đặc biệt của đạo hàm theo hướng.

Ví dụ 1 Sử dụng bản đồ thời tiết trên Hình 1 để ước lượng giá trị của đạo hàm theo hướng của hàm nhiệt độ tại Reno theo hướng Đông Nam.

Lời giải Véc tơ đơn vị định hướng Đông Nam là $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})/\sqrt{2}$, nhưng chúng ta không muốn dùng biểu thức này. Ta bắt đầu vẽ một đường thẳng qua Reno hướng Đông Nam (Xem Hình 4). Chúng ta xấp xỉ đạo hàm theo hướng $D_{\boldsymbol{u}}T$ bởi giá trị trung bình của tốc độ thay đổi của nhiệt độ giữa các điểm mà đường thẳng này cắt các đường đồng mức T = 50 và T = 60. Nhiệt độ tại điểm Đông Nam của Reno là T = 60°F và nhiệt độ tại điểm Tây Bắc của Reno là T = 50°F. Khoảng cách giữa các điểm được xem là khoảng 75 dặm. Vì vậy tốc độ thay đổi của nhiệt độ theo hướng Đông Nam là



Hình 4

$$D_{\boldsymbol{u}}T \approx \frac{60 - 50}{75} \approx 0.13^{o}F/mi$$

Khi tính đạo hàm theo hướng của hàm được xác định bởi công thức, chúng ta hay dùng định lý sau.

[3] **Định lý** Nếu f là hàm khả vi của x và y thì f có đạo hàm theo mọi hướng của véc tơ đơn vị $\boldsymbol{u} = \langle a, b\rangle$, và $D_{\boldsymbol{u}}f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$.

Chứng minh Nếu định nghĩa hàm g một biến h, g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb), thì theo định nghĩa của đạo hàm ta có

[4] $$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah,\ y_0+bh)-f(x_0,\ y_0)}{h} = D_{\boldsymbol{u}}f(x_0,\ y_0)$$

Mặt khác, ta có thể viết g(h) = f(x, y), trong đó x = x_0 + ah, y = y_0 + bh, nên theo quy tắc dây chuyền

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Đặt h = 0 thì x = x_0 và y = y_0, và

[5] $g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$

So sánh phương trình 4 và phương trình 5 ta thấy rằng

$$D_{\boldsymbol{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

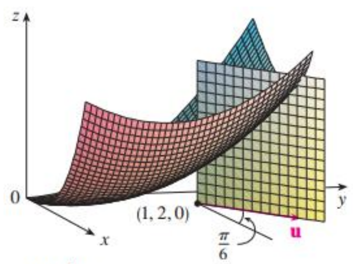
Ví dụ 2 Tìm đạo hàm theo hướng $D_{\boldsymbol{u}}f(x, y)$ nếu $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ và ***u*** là véc tơ đơn vị được cho bởi góc θ = π/6. Hỏi rằng $D_{\boldsymbol{u}}f(1, 2)$ là gì?

Lời giải Công thức 6 cho ra $D_uf(x, y) = f_x(x, y)\cos\pi/6 + f_y(x, y)\sin\pi/6$

$$= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[3\sqrt{3}x^2 - 3x + \left(3 - 3\sqrt{3}\right)y\right]$$

Do đó

$$D_{\boldsymbol{u}}f(1,2) = \frac{1}{2}\left[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + \left(3 - 3\sqrt{3}\right)(2)\right] = \frac{13-3\sqrt{3}}{2}$$



Hình 5

Đạo hàm theo hướng $D_uf(1, 2)$ biểu thị tốc độ thay đổi của z theo hướng u. Đó là độ dốc của tiếp tuyến của đường cong là giao của mặt cong $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ với mặt phẳng nằm ngang đi qua điểm (1, 2, 0) theo hướng của u (Xem Hình 5).

2.6.2. Véc tơ gradient

Theo Định lý 3, đạo hàm theo hướng của hàm khả vi có thể viết dưới dạng tích vô hướng của hai véc tơ:

[7] $D_uf(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b = \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle\cdot\langle a, b\rangle = \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle\cdot\boldsymbol{u}$

Véc tơ đầu tiên trong tích vô hướng không chỉ xuất hiện trong việc tính đạo hàm theo hướng mà còn trong một số ngữ cảnh khác. Vì vậy ta đặt cho nó một cái tên đặc biệt (gradient của f) và ký hiệu đặc biệt (***grad*** f, hoặc ∇f, đọc là "del f").

[8] **Định nghĩa** Nếu f là hàm của hai biến x và y thì gradient của f là véc tơ ∇f được xác định bởi

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

Ví dụ 3 Nếu f(x, y) – sinx + e^{xy} thì

$\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y\rangle = \langle cosx, xe^{xy}\rangle$ và $\nabla f(1,2) = \langle 2,0\rangle$

Với ký hiệu này của véc tơ gradient, ta có thể viết phương trình 7 dưới dạng

[9] $D_u f(x, y) = \nabla f(x, y)\cdot \boldsymbol{u}$

Điều này thể hiện đạo hàm theo hướng của véc tơ đơn vị ***u*** là chiếu vô hướng của véc tơ gradient lên ***u***.

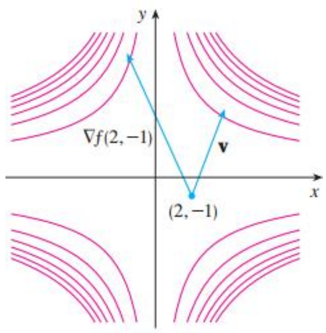
Ví dụ 4 Tìm đạo hàm theo hướng của hàm $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ tại điểm (2, -10 theo hướng của véc tơ $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$.

Lời giải Trước hết ta tính véc tơ gradient tại (2, -1):

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\boldsymbol{i} + (3x^2y^2 - 4)\boldsymbol{j} \qquad \nabla f(2, -1) = -4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$$

Chú ý rằng ***v*** không phải là véc tơ đơn vị, nhưng vì $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{29}$ nên véc tơ đơn vị theo hướng ***v*** là

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\boldsymbol{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\boldsymbol{j}$$



Hình 6

Vì vậy theo phương trình 9 ta có

$$D_u f(2,-1) = \nabla f(2,-1)\cdot \boldsymbol{u} = (-4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j})\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\boldsymbol{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\boldsymbol{j}\right)$$

$$= \frac{(-4)(2)+(8)(5)}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

Véc tơ gradient ∇f(2,-1) trong Ví dụ 4 được minh họa trong Hình 6. Cả véc tơ ***v*** là hướng của đạo hàm theo hướng. Cả hai véc tơ đó đều xếp chồng lên các đồng mức của đồ thị của f.

2.6.3. Hàm ba biến

Chúng ta có thể định nghĩa đạo hàm theo hướng của hàm ba biến một cách tương tự. Một lần nữa, $D_u f(x, y, z)$ có thể hiểu là tốc độ thay đổi của hàm theo hướng của véc tơ đơn vị ***u***.

[10] **Định nghĩa** Đạo hàm theo hướng của f tại (x_0, y_0, z_0) theo hướng của véc tơ đơn vị $\boldsymbol{u} = \langle a, b, c\rangle$ là (nếu giới hạn đó tồn tại):

$$D_{\boldsymbol{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + ha,\ y_0 + hb,\ z_0 + hc) - f(x_0,\ y_0,\ z_0)}{h}$$

Nếu sử dụng ký hiệu véc tơ thì chúng ta có thể viết cả hai định nghĩa (2 và 10) của đạo hàm theo hướng trong dạng chung

[11] $$D_{\boldsymbol{u}} f(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + hu) - f(x_0)}{h}$$

trong đó $\boldsymbol{x_0} = \langle x_0, y_0\rangle$ nếu n = 2 và $\boldsymbol{x_0} = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ nếu n = 3. Điều đó là hợp lý bởi vì phương trình véc tơ của đường thẳng đi qua $\boldsymbol{x_0}$ theo hướng của véc tơ ***u*** là $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} + t\boldsymbol{u}$ và do đó $f(\boldsymbol{x_0} + t\boldsymbol{u})$ thể hiện giá trị của f tại một điểm trên đường này.

Nếu f(x, y, z) là khả vi và $\boldsymbol{u} = \langle a, b, c\rangle$ thì với phương pháp đã sử dụng để chứng minh Định lý 3, ta có thể sử dụng để chứng tỏ rằng

[12] $D_u f(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c$

Với hàm ba biến f, véc tơ gradient là $\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\rangle$ hoặc ở dạng ngắn gọn

[13] $$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

Vì thế, giống như với hàm hai biến, công thức [12] có thể viết lại dưới dạng

[14] $D_u f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)\cdot \boldsymbol{u}$

Ví dụ 5 Cho f(x, y, z) = xsinyz. (a) tìm gradient của f và (b) tìm đạo hàm theo hướng của f tại (1, 3, 0) theo hướng của $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

Lời giải (a) Gradient của f là

$$\nabla f(x,y,z) = \langle f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\rangle = \langle sinyz,\ xzcosyz,\ xycosyz\rangle$$

(b) Tại (1, 3, 0) ta có ∇f(1, 3, 0) = ⟨0, 0, 3⟩. Véc tơ đơn vị theo hướng $\boldsymbol{v}$ là

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$$

Do đó phương trình 14 cho ra

$$D_uf(1, 3, 0) = \nabla f(1, 3, 0)\cdot\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.6.4. Cực đại của đạo hàm theo hướng

Giả sử ta có hàm hai hoặc ba biến và ta xét mọi khả năng của đạo hàm theo hướng của f tại một điểm đã cho. Chúng đưa ra các tốc độ thay đổi của f theo mọi hướng. Ta có thể đặt câu hỏi: Hướng nào thì f thay đổi nhanh nhất và như thế nào thì tốc độ thay đổi đạt giá trị lớn nhất? Câu trả lời chính là định lý sau.

[15] **Định lý** Giả sử f là hàm khả vi hai hoặc ba biến. Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng $D_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{x})$ là $|\nabla f(\boldsymbol{x})|$ và nó xảy ra khi $\boldsymbol{u}$ có cùng hướng với véc tơ gradient $\nabla f(\boldsymbol{x})$.

Chứng minh Từ phương trình 9 hoặc 14 ta có

$$D_uf = \nabla f\cdot\boldsymbol{u} = |\nabla f(\boldsymbol{x})||\boldsymbol{u}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$

trong đó θ là góc giữa ∇f và $\boldsymbol{u}$. Giá trị lớn nhất của cosθ là 1 và nó xảy ra khi θ = 0. Do đó giá trị lớn nhất của D_uf là $|\nabla f|$ và nó xảy ra khi θ = 0, tức là khi $\boldsymbol{u}$ cùng hướng với ∇f.

Ví dụ 6

(a) Cho f(x, y) = xe^y, tìm tốc độ thay đổi của f tại điểm P(2, 0) theo hướng từ P tới Q(1/2,2).

(b) Theo hướng nào thì f đạt tốc độ thay đổi lớn nhất? Giá trị lớn nhất này là gì?

Lời giải

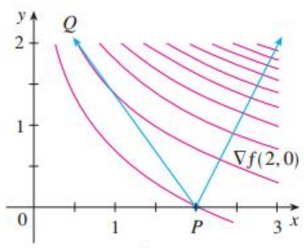
(a) Truocs hết ta tính gradient của f

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y\rangle = \langle e^y, xe^y\rangle \qquad \nabla f(2, 0) = \langle 1, 2\rangle$$

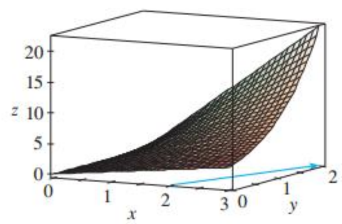
Véc tơ đơn vị theo hướng của $\overrightarrow{PQ} = \langle -1.5, 2\rangle$ là $u = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle$, vì vậy tốc độ thay đổi của f theo hướng từ P tới Q là

$$D_uf(2,0) = \nabla f(2,0)\cdot u = \langle 1,2\rangle\cdot\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle = 1$$

(b) Theo Định lý 15, f tăng nhanh nhất theo hướng của véc tơ gradient $\nabla f(2,0) = \langle 1,2\rangle$. Tốc độ thay đổi lớn nhất là $|\nabla f(2,0)| = |\langle 1,2\rangle| = \sqrt{5}$.



Hình 7



Hình 8

Tại (2, 0) hàm trong Ví dụ 6 tăng nhanh nhất theo hướng của véc tơ gradient $\nabla f(2,0) = \langle 1,2\rangle$. Hình 7 nói lên rằng véc tơ này dường như vuông góc với đường mức đi qua (2, 0).

Hình 8 mô tả đồ thị của f và véc tơ gradient.

Ví dụ 7 Giả sử rằng nhiệt độ tại điểm (x, y, z) trong không gian được cho bởi $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, trong đó T là thang đo ^oC và thứ nguyên của x, y, z là mét. Theo hướng nào thì nhiệt độ tại điểm (1, 1, -2) tăng nhanh nhất? Giá trị lớn nhất đó bằng bao nhiêu?

Lời giải Véc tơ gradient của T là

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\boldsymbol{k} = -\frac{\mathbf{160}x}{(\mathbf{1}+x^2+\mathbf{2}y^2+\mathbf{3}z^2)^2}\boldsymbol{i} - \frac{\mathbf{320}y}{(\mathbf{1}+x^2+\mathbf{2}y^2+\mathbf{3}z^2)^2}\boldsymbol{j} - \frac{\mathbf{480}z}{(\mathbf{1}+x^2+\mathbf{2}y^2+\mathbf{3}z^2)^2}\boldsymbol{k}$$

$$= \frac{\mathbf{160}}{(\mathbf{1}+x^2+\mathbf{2}y^2+\mathbf{3}z^2)^2}(-\mathrm{x}\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} - 3z\boldsymbol{k})$$

Tại điểm (1, 1, -2) véc tơ gradient là

$$\nabla T(1,1,-2) = \frac{160}{256}(-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}) = \frac{5}{8}(-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})$$

Theo định lý 15, nhiệt độ tăng nhanh nhất theo hướng của véc tơ gradient, hoặc tương đương, theo hướng của véc tơ $-\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$, hoặc véc tơ đơn vị $(-\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k})/\sqrt{41}$.

Tốc độ nhanh nhất của sự tăng là độ lớn của véc tơ gradient:

$$|\nabla T(1,1,-2)| = \frac{5}{8}|-\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}| = \frac{5}{8}\sqrt{41} \approx 4\ (^oC/m)$$

2.6.5. Mặt phẳng tiếp diện của mặt mức

Giả sử S là mặt cong với phương trình F(z, y, z) = k, tức là mặt mức của hàm ba biến F. Giả sử $P(x_0, y_0, z_0)$ là điểm thuộc S và C là đường cong bất kỳ thuộc S và đi qua P. Nhớ lại từ mục 1.1, đường cong C được mô tả bởi hàm véc tơ liên tục $\boldsymbol{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$. Giả sử t_0 là giá trị của tham số ứng với điểm P, tức là $\boldsymbol{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. Boeir vì C thuộc S nên mọi điểm (x(t), y(t), z(t)) phải thỏa mãn phương trình của S, tức là

[16] $F(x(t), y(t), z(t)) = k$

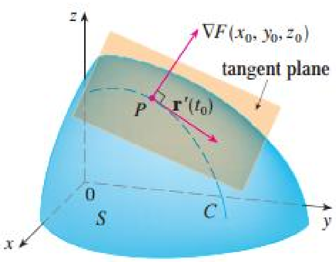
Nếu x, y và z là accs hàm khả vi theo t và F cũng khả vi thì chunga ta có thể sử dụng quy tắc dây chuyền để lấy đạo hàm hai vế của phương trình 16:

[17] $$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Nhưng $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z\rangle$ và $\boldsymbol{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle$, phương trình 17 có thể viết dưới dạng tích vô hướng như sau $\nabla F \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 0$

Trường hợp riêng, khi $t = t_0$ ta có $\boldsymbol{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, vì thế

[18] $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \boldsymbol{r}'(t_0) = 0$



Hình 9

Phương trình 18 nói lên rằng véc tơ gradient tại P, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, vuông góc với véc tơ tiếp tuyến $\boldsymbol{r}'(t_0)$ của mọi đường cong C thuộc S mà đi qua P. (Xem Hình 9.) Nếu $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, một cách tự nhiên để định nghĩa mặt phẳng tiếp diện của mặt mức F(x, y, z) = k tại $P(x_0, y_0, z_0)$ chính là mặt phẳng đi qua P và có véc tơ pháp tuyến $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Chúng ta có thể viết phương trình của mặt phẳng tiếp diện như sau

[19] $F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

Đường pháp tuyến của S tại P là đường đi qua P và vuông góc với mặt phẳng tiếp diện. Hướng của pháp tuyến là xác định bởi véc tơ gradient $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, vì thế phương trình đối xứng (symmetric) của nó là

[20] $$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

Trong trường hợp riêng, phương trình của mặt cong S có dạng $z = f(x, y)$ (tức S là đồ thị của hàm hai biến), chúng ta có thể viết lại dưới dạng $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, và S là mặt mức (với k = 0) của F. Vì vậy

$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$ $\quad F_y(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$ $\quad F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$

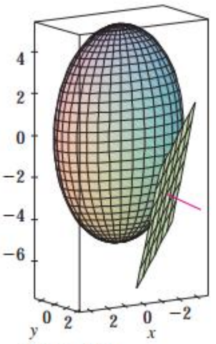
và phương trình 19 trở thành $\quad f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

nó tương đương với phương trình 2.4.2. Do đó, định nghĩa tổng quát này của mặt phẳng tiếp diện là phù hợp với định nghĩa đã có trong trường hợp đặc biệt trong phần 2.4.

Ví dụ 8 Tìm các phương trình của mặt phẳng tiếp diện và véc tơ pháp tuyến tại điểm (-2, 1, -3) của ellipsoid

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

Lời giải Ellipsoid là mặt mức (với k = 3) của hàm $F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$. Do đó ta có



Hình 10

$$F_x(x,y,z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x,y,z) = 2y \qquad F_z(x,y,z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2,1,-3) = -1 \qquad F_y(-2,1,-3) = 2 \qquad F_z(-2,1,-3) = -\frac{2}{3}$$

Từ phương trình 19 suy ra phương trình tiếp diện tại $(-2,1,-3)$ là

$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \frac{2}{3}(x + 3) = 0$, hay $3x - 6y + 2z + 18 = 0$.

Theo phương trình 20, phương trình đối xứng của pháp tuyến là

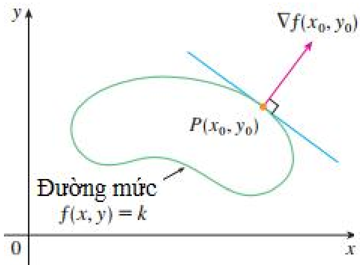
$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} - \frac{z+3}{-\frac{2}{3}}$$

Hình 10 biểu thị ellipsoid, mặt phẳng tiếp diện và pháp tuyến trong Ví dụ 8.

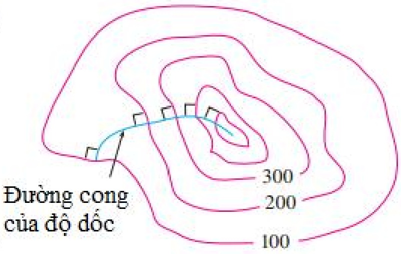
2.6.6. Tầm quan trọng của véc tơ gradient

Chúng ta tóm tắt một số vai trò quan trọng của véc tơ gradient. Trước hết chúng ta xem xét hàm hai biến f và điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ thuộc miền xác định của nó. Một mặt, từ Định lý 15 ta biết rằng véc tơ gradient $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ đưa ra hướng mà f tăng nhanh nhất. Mặt khác, ta biết rằng $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ trực giao với mặt mức S của f tại P. (Tham khảo Hình 9.) Theo trực giác, hai tính chất này tương đối phù hợp bởi khi ta di chuyển rời xa P trên mặt mức, giá trị của f không hề thay đổi. Vì vậy, nó có vẻ hợp lý rằng nếu chúng ta di chuyển theo hướng vuông góc, chúng ta nhận được sự tăng tối đa.

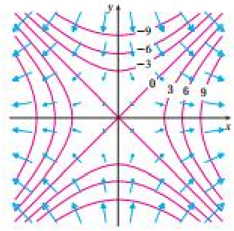
Tương tự như thế, chúng ta xem xét hàm hai biến f và điểm $P(x_0, y_0)$ thuộc miền xác định của nó. Lần nữa, véc tơ gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ xác định hướng tăng nhanh nhất của f. Tương tự như cách xem xét mặt phẳng tiếp diện, chứng tỏ rằng $\nabla f(x_0, y_0)$ vuông góc với đường mức $f(x, y) = k$ mà đi qua P. Một lần nữa, trực giác đáng tin bởi các giá trị của f không đổi khi chúng ta di chuyển dọc theo đường cong (Xem Hình 11.)



Hình 11



Hình 12



Hình 13

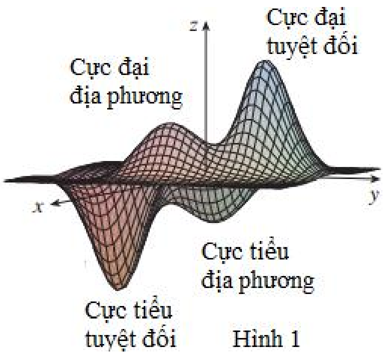
Nếu chúng ta xem xét bản đồ địa hình của một ngọn đồi và giả sử f (x, y) thể hiện cho chiều cao trên mực nước biển tại điểm có tọa độ (x, y), thì một đường cong dốc nhất có thể được vẽ trong Hình 12 bằng cách làm cho nó vuông góc với tất cả các đường đồng mức.

Hệ thống máy tính đại số có các lệnh vẽ mẫu các véc tơ gradient. Mỗi véc tơ gradient $\nabla f(a, b)$ được vẽ bắt đầu tại điểm (a, b). Hình 13 biểu thị trường véc tơ gradient đối với hàm $f(x, y) = x^2 - y^2$ chồng lên bản đồ đồng mức của f. Theo dự kiến, các véc tơ gradient chỉ ra điểm "lên dốc" và là vuông góc với các đường mức.

2.7. Các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

2.7.1. Cực đại địa phương và cực tiểu địa phương

Như đã biết đối với hàm một biến, một trong những ứng dụng của đạo hàm là tìm các giá trị cực đại và cực tiểu, gọi chung là cực trị (extreme values). Trong phần này chúng ta xem xét sự sử dụng các đạo hàm riêng để xác định các giá trị cực trị của hàm hai biến. Đặc biệt, trong Ví dụ 6 chúng ta nhất định sẽ thấy bằng cách nào để cực đại hóa thể tích của khối hộp không có nắp với cùng một diện tích của tấm bìa các tông.



Hình 1

Hãy xem các đỉnh lồi (hill) và lõm (valley) trên đồ thị của f trong Hình 1. Có hai điểm (a, b) mà ở đó f có cực đại địa phương, tức là f(a, b) là lớn hơn các giá trị f(x, y) gần nó. Giá trị lớn nhất trong hai giá trị này là cực đại tuyệt đối. Tương tự, f có hai cực tiểu địa phương, wor đó f(a, b) là nhỏ hơn mọi giá trị gần nó, Giá trị nhỏ hơn trong hai giá trị đó là cực tiểu tuyệt đối.

[1] **Định nghĩa** Hàm hai biến có cực đại địa phương tại (a, b) nếu $f(x, y) \le f(a, b)$ khi (x, y) gần (a, b). [Nghĩa là $f(x, y) \le f(a, b)$ với mọi (x, y) trong hình tròn tâm (a, b).] Số f(a, b) được gọi là giá trị cực đại địa phương. Nếu $f(x, y) \ge f(a, b)$ khi (x, y) gần (a, b) thì f có cực tiểu địa phương tại (a, b) và f(a, b) là giá trị cựa tiểu địa phương.

Nếu các bất đẳng thức trong Định nghĩa 1 đúng cho mọi điểm (x, y) trong miền xác định của f thì f có cực đại tuyệt đối (hoặc cực tiểu tuyệt đối) tại (a, b).

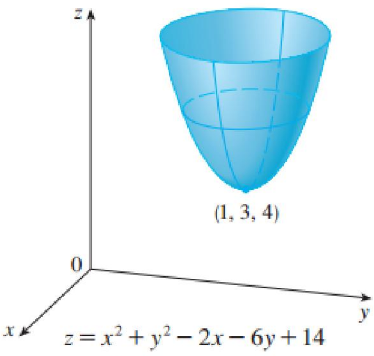
[2] **Định lý** Nếu f có cực đại hoặc cực tiểu địa phương tại (a, b) và các đạo hàm riêng cấp một tồn tại thì $f_x(a, b) = 0$ và $f_y(a, b) = 0$.

Chứng minh Giả sử g(x) = f(x, b). Nếu f có cực đại địa phương (hoặc cực tiểu) tại (a, b) thì g có cực đại địa phương (hoặc cực tiểu) tại a, vì thế g'(a) = 0 theo Định lý Fermat. Nhưng $g'(a) = f_x(a, b)$ nên $f_x(a, b) = 0$. Tương tự, ta nhận được $f_y(a, b) = 0$.

Nếu chúng ta đặt $f_x(a, b) = 0$ và $f_y(a, b) = 0$ vào phương trình của mặt phẳng tiếp diện (Phương trình 2.4.2), ta nhận được $z = z_0$. Vì vậy ý nghĩa hình học của Định lý 2 là nếu đồ thị của f có mặt phẳng tiếp diện tại điểm cực trị thì mặt phẳng tiếp diện đó nằm ngang.

Điểm (a, b) được gọi là điểm tới hạn (critical) hay điểm dừng (stationary) của f nếu $f_x(a, b) = 0$ và $f_y(a, b) = 0$, hoặc một trong hai đạo hàm riêng đó không tồn tại. Định lý 2 nói lên rằng, nếu f có cực trị địa phương tại (a, b) thì (a, b) là điểm tới hạn của f. Tuy nhiên, như với hàm một biến, không phải tất cả các điểm tới hạn đều là điểm cực trị. Tại điểm tới hạn, hàm có thể có cực tiểu địa phương hoặc cực đại địa phương hoặc không.

Ví dụ 1 Giả sử $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Khi đó $f_x(x, y) = 2x - 2$, $f_y(x, y) = 2y - 6$

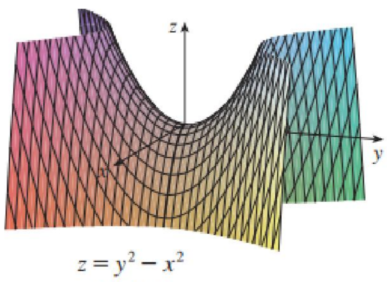


Hình 2

Các đạo hàm riêng này bằng 0 khi x = 1 và y = 3, vì vậy chỉ có duy nhất điểm tới hạn (1, 3). Đưa về dạng bình phương, ta có $f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$. Bởi vì $(x - 1)^2 \geq 0$ và $(y - 3)^2 \geq 0$, ta có $f(x, y) \geq 4$ với mọi giá trị của x và y. Vì vậy f(1, 3) = 4 là cực tiểu địa phương và thực tế nó là cực tiểu tuyệt đối của f. Điều đó có thể được khẳng định hình học từ đồ thị của f, đó là một paraboloid elliptic với đỉnh (1, 3, 4) trong Hình 2.

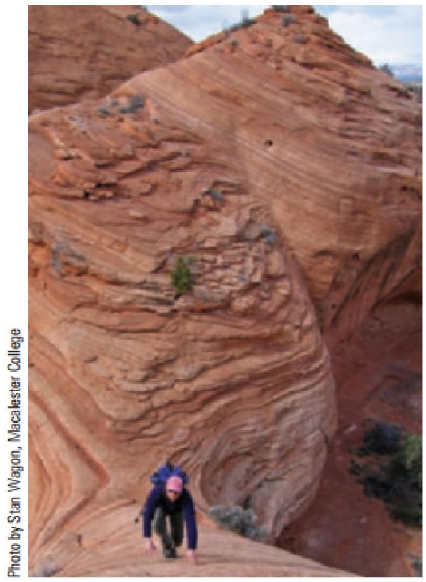
Ví dụ 2 Tìm các giá trị cực trị của $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Lời giải Từ $f_x = -2x$ và $f_y = 2y$, duy nhất điểm tới hạn là (0, 0). Chú ý rằng đối với các điểm trên trục x ta có y = 0, nên $f(x, y) = -x^2 < 0$ (nếu $x \neq 0$). Tuy nhiên, với các điểm trên trục y ta có x = 0 nên $f(x, y) = y^2 > 0$ (nếu $y \neq 0$). Vì vậy mọi hình tròn tâm (0, 0) đều chứa những điểm làm cho f dương và chứa những điểm làm cho f âm. Vì vậy f(0, 0) = 0 không thể là cực trị của f, vì vậy f không có cực trị.



Hình 3

Ví dụ 2 minh họa cho sự kiện hàm không đạt cực trị tại điểm tới hạn. Hình 3 mô tả khi nào thì có thể. Đồ thị của f là một paraboloid hyperbolic $z = y^2 - x^2$, nó có mặt phẳng tiếp diện nằm ngang (z = 0) tại gốc tọa độ. Ta có thể thấy rằng f(0, 0) = 0 là cực đại theo hướng của trục x nhưng là cực tiểu theo hướng của trục y. Gần gốc tọa độ đồ thị có hình dạng cái yên ngựa (saddle), vì vậy (0, 0) được gọi là điểm yên ngựa.



Một đường đi trong núi cũng có hình dạng của yên ngựa. Như bức ảnh của sự hình thành địa chất minh họa, với những người leo núi theo một hướng thì điểm yên ngựa là điểm thấp nhất trên tuyến đường của họ, trong khi đối với những người đi du lịch theo một hướng khác điểm yên ngựa là điểm cao nhất.

Chúng ta cần xác định khi nào một hàm có giá trị cực trị tại điểm tới hạn. Định lý sau đây, được chứng minh ở cuối phần này, tương tự như đối với hàm một biến.

[3] **Định lý** Giả sử các đạo hàm riêng cấp hai của f liên tục trên một hình tròn tâm (a, b), và giả sử rằng $f_x(a, b) = 0$ và $f_y(a, b) = 0$, tức là, (a, b) là điểm tới hạn của f. Giả sử

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(a) Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) > 0$ thì f(a, b) là cực tiểu địa phương

(b) Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) < 0$ thì f(a, b) là cực đại địa phương

(c) Nếu $D < 0$ thì f(a, b) không là cực trị địa phương

Chú ý 1 Trong trường hợp (c) điểm (a, b) được gọi là điểm dừng của f và đồ thị của f bắt chéo qua với mặt phẳng tiếp diện của nó tại (a, b).

Chú ý 2 Nếu D = 0, chúng ta không khẳng định được gì, f có thể có hoặc không cực trị địa phương, hoặc (a, b) là điểm dừng của f.

Chú ý 3 Để dễ nhớ công thức của D, ta viết nó dưới dạng định thức

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Ví dụ 3 Tìm các giá trị cực đại địa phương và cực tiểu địa phương và các điểm yên ngựa của $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Lời giải Trước hết chúng ta xác định các điểm tới hạn: $f_x = 4x^3 - 4y$ $f_y = 4y^3 - 4x$

Đặt các đạo hàm riêng bằng 0 ta nhận được các phương trình

$$x^3 - y = 0 \text{ và } y^3 - x = 0.$$

Để giải hệ này ta thay $y = x^3$ từ phương trình đầu tiên vào phương trình thứ hai.

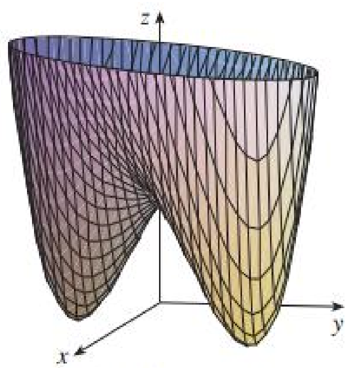
Ta có

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

vì vậy các nghiệm thực là x = 0, x = 1, x = -1. Ba điểm tới hạn là (0, 0), (1, 1) và (-1, -1).

Tiếp theo chúng ta tính các đạo hàm riêng cấp hai và D(x, y):

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2 \qquad D(x, y) = 144x^2y^2 - 16$$

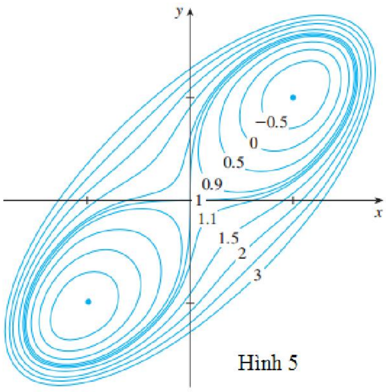


$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$
Hình 4

Bởi vì D(0, 0) = -16 < 0, dẫn tới trường hợp (c) của Định lý 3 nên gốc tọa độ là điểm yên ngựa, tức là f không có cực trị địa phương tại (0, 0).

Bởi vì D(1, 1) = 128 > 0 và $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, từ trường hợp (a) của Định lý 3 suy ra f(1, 1) = -1 là cực tiểu địa phương.

Tương tự, ta có D(-1, -10 = 128 > 0 và $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$ nên f(-1, -1) = -1 cũng là cực tiểu địa phương. Đồ thị của f được thể hiện ở Hình 4.



Hình 5

Một bản đồ đồng mức của hàm f trong Ví dụ 3 được thể hiện trong Hình 5. Các đường mức gần (1, 1) và (-1, -1) là hình bầu dục và chỉ ra rằng khi chúng ta di chuyển ra khỏi (1, 1) hoặc (-1, -1) theo bất kỳ hướng nào thì các giá trị của f tăng lên. Mặt khác, các đường mức gần (0, 0), giống các hyperbola. Chúng nói lên rằng khi chúng ta di chuyển ra khỏi gốc tọa độ (ở đó giá trị của f là 1), các giá trị của f giảm theo một số hướng nhưng tăng theo các hướng khác. Do đó, bản đồ đồng mức cho thấy sự hiện diện của các cực tiểu và điểm yên ngựa mà chúng ta tìm thấy trong Ví dụ 3.

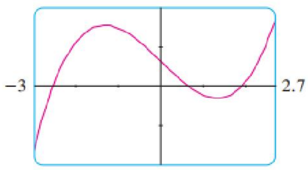
Ví dụ 4 Tìm và phân loại các điểm tới hạn của hàm

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Từ đó tìm điểm cao nhất trên đồ thị của f.

Lời giải Các đạo hàm riêng cấp một là $f_x = 20xy - 10x - 4x^3$ và $f_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$

Vì thế, để tìm các điểm tới hạn ta cần giải các phương trình



Hình 6

[4] $2x(10y - 5 - 2x^2) = 0$

[5] $5x^2 - 4y - 4y^3 = 0$

Từ phương trình 4 ta thấy x = 0 hoặc $10y - 5 - 2x^2 = 0$.

Trong trường hợp thứ nhất (x = 0), phương trình 5 trở thành $-4y(1 + y^2) = 0$, vì thế y = 0 và ta có điểm tới hạn (0, 0).

Trong trường hợp thứ 2 ($10y - 5 - 2x^2 = 0$) ta có

[6] $x^2 = 5y - 2.5$

và thế vào phương trình 5 ta có $25y - 2.5 - 4y - 4y^3 = 0$. Ta phải giải phương trình bậc ba

[7] $4y^3 - 21y + 12.5 = 0$

Sử dụng máy tính để vẽ đồ thị của hàm $g(y) = 4y^3 - 21y + 12.5$ như Hình 6, ta thấy phương trình 7 có ba nghiệm thực: $y \approx -2.5452$ $y \approx 0.6468$ $y \approx 1.8984$

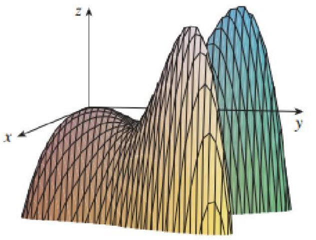
(Chúng ta có thể sử dụng phương pháp Newton để tìm các nghiệm xấp xỉ này).

Từ phương trình 6 giá trị x tương ứng được cho bởi công thức $x = \pm\sqrt{5y - 2.5}$

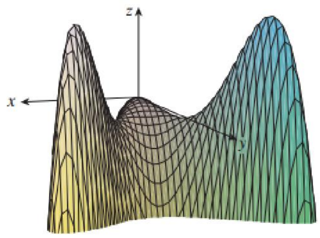
Nếu $y \approx -2.5452$ thì x không có nghiệm thực. Nếu $y \approx 0.6468$ thì $x \approx \pm 0.8567$. Nếu $y \approx 1.8984$ thì $x \approx \pm 2.6442$. Vì thế chúng ta có tất cả 5 điểm tới hạn, được phân tích trong biểu đồ sau. Tất cả được làm tròn tới 2 chữ số thập phân.

Điểm tới hạn	Giá trị của f	f_{xx}	D	Kết luận
(0, 0)	0.00	−10.00	80.00	Cực tiểu địa phương
(±2.64, 1.90)	8.50	−55.93	2488.72	Cực tiểu địa phương
(±0.86, 0.65)	−1.48	−5.87	−187.64	Điểm yên ngựa

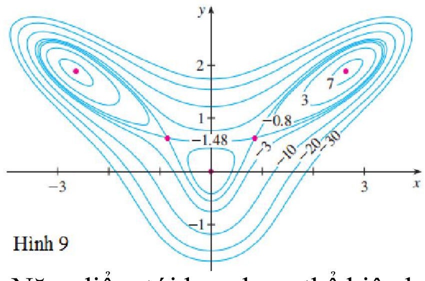
Hình 7 và Hình 8 là hai góc nhìn đồ thị của f và ta thấy mặt cong mở dần xuống phía dưới. [Điều này có thể nhận thấy từ biểu thức của f(x, y): Hạng thức chiếm ưu thế là $-x^4 - 2y^2$ khi |x| và |y| lớn]. So sánh các giá trị của f tại các điểm cực đại địa phương, ta thấy rằng giá trị cực đại tuyệt đối của f là f(±2.64) ≈ 8.50. Nói khác đi, các điểm cao nhất trên đồ thị của f là (±2.64, 1.90, 8.50)



Hình 7



Hình 8



Hình 9

Hình 9 là bản đồ đồng mức của hàm f trong Ví dụ 4. Năm điểm tới hạn được thể hiện bởi các chấm tròn.

Ví dụ 5 Tìm khoảng cách từ điểm (1, 0, -2) tới mặt phẳng x + 2y + z = 4.

Lời giải Khoảng cách từ điểm bất kỳ (x, y, z) tới điểm (1, 0, -2) là

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

nhưng nếu (x, y, z) thuộc mặt phẳng x + 2y + z = 4 thì z = 4 – x – 2y và vì vậy ta có

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$$

Chúng ta có thể cực tiểu d theo biểu thức đơn giản hơn

$$d^2 = f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Bằng cách giải các phương trình

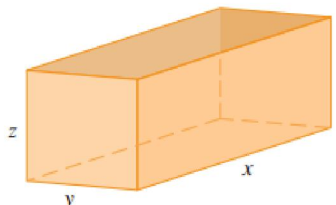
$$f_x = 2(x-1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

chúng ta tìm đường cong duy nhất điểm tới hạn $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Bởi vì $f_{xx} = 4$, $f_{yy} = 4$ và $f_{xy} = 10$, chúng ta có D(x, y0 = $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0$ và $f_{xx} > 0$, nên theo Định lý 3 f có cực tiểu địa phương tại $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Bằng trực giác chúng ta có thể thấy rằng cực tiểu địa phương này thực tế là cực tiểu tuyệt đối bởi vì phải có một điểm trên mặt phẳng đã cho là gần điểm (1, 0, -2) nhất. Nếu $x = \frac{11}{6}$ và $y = \frac{5}{3}$ thì $d = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{6}\sqrt{6}$.

Ví dụ 6 Một khối hộp chữ nhật không nắp được tạo nên từ $12m^2$ bìa các tông. Tìm thể tích cực đại có thể của nó.

Lời giải Giả sử độ dài, độ rộng và chiều cao của hộp (theo m) là x, y và z, như trên Hình 10. Khi đó thể tích của hộp là V = xyz.



Hình 10

Chúng ta có thể xem V là hàm của hai biến x và y bằng cách sử dụng sự kiện rằng diện tích của bốn mặt bên và đáy dưới của hộp là 2xz + 2yz + xy = 12.

Từ đây giải ra z ta được $z = (12 - xy)/[2(x+y)]$, vì thế biểu thức của V là $V = xy\frac{12-xy}{2(x+y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$

Chúng ta tính các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12-2xy-x^2)}{2(x+y)^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12-2xy-y^2)}{2(x+y)^2}$$

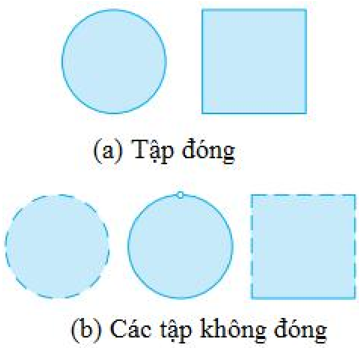
Nếu V đạt cực đại thì $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$, nhưng $x = 0$ hoặc $y = 0$ sẽ cho $V = 0$, nên chúng ta cần giải các phương trình $12 - 2xy - x^2 = 0$ $\quad$ $12 - 2xy - y^2 = 0$

Điều đó bao hàm $x^2 = y^2$ và do đó $x = y$. (Chú ý rằng x và y cần phải dương.) Nếu chúng ta đặt $x = y$ vào một trong hai phương trình ta nhận được $12 - 3x^2 = 0$, giả ra được $x = 2$, dẫn đến $y = 2$ và $z = [12 - (2)(2)]/[2(2 + 2)] = 1$.

Chúng ta cần sử dụng Định lý 3 để chứng tỏ rằng điều đó dẫn đến giá trị cực đại của V, hoặc chúng ta có thể lập luận đơn giản từ lý tính của bài toán rằng đó là giá trị cực đại tuyệt đối của thể tích khi $x = 2$, $y = 2$ và $z = 1$. Vậy $V = 4$, tức là thể tích cực đại của hộp là $4m^3$.

2.7.2. Cực trị tuyệt đối

Với hàm một biến, định lý về giá trị cực trị nói rằng nếu f liên tục trên miền đóng [a, b], thì f có giá trị cực tiểu tuyệt đối và giá trị cực đại tuyệt đối. Các giá trị này có thể là giá trị tới hạn hoặc giá trị tại các mút a và b.



Hình 11

Hàm hai biến cũng có tình trạng tương tự như thế. Cũng như đoạn đóng chứa các điểm mút, tập đóng trong R^2 là tập chứa tất cả các điểm biên của nó. [Điểm biên của D là điểm (a, b) sao cho bất kỳ hình tròn tâm (a, b) đều chứa những điểm thuộc D cũng như không thuộc D.]

Ví dụ hình tròn $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ bao gồm tất cả các điểm trên và trong đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, là tập đóng bởi vì nó chứa tất cả các điểm biên của nó (là những điểm trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$). Nhưng nếu chỉ một điểm trên biên này bị bỏ đi thì tập không còn là đóng nữa. (Xem Hình 11.)

[8] **Định lý cực trị đối với hàm hai biến** Nếu f liên tục trên miền đóng giới nội D trong R^2 thì f đạt giá trị cực đại tuyệt đối $f(x_1, y_1)$ và giá trị cực tiểu tuyệt đối $f(x_2, y_2)$ tại các điểm (x_1, y_1) và (x_2, y_2) trong D.

Để tìm các giá trị cực trị theo Định lý 8, chúng ta chú ý rằng, từ Định lý 2, nếu f có cực trị tại (x_1, y_1) thì (x_1, x_2) hoặc là điểm tới hạn hoặc là điểm biên của D. Vì vậy chúng ta có quy tắc sau đây.

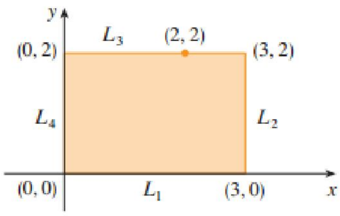
[9] Để tìm cực trị tuyệt đối của hàm liên tục f trên miền đóng giới nội D:

1. Tìm các giá trị của f tại các điểm tới hạn của nó trên miền D.
2. Tìm các giá trị cực trị của f trên biên của D.
3. Giá trị lớn nhất trong các giá trị trên chính là giá trị cực đại tuyệt đối, giá trị nhỏ nhất trong các giá trị trên chính là giá trị cực tiểu tuyệt đối.

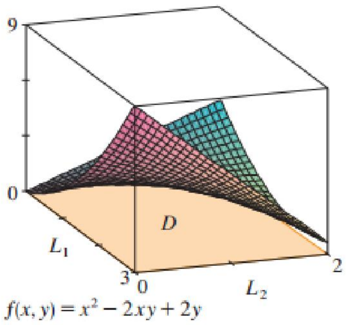
Ví dụ 7 Tìm cực trị tuyệt đối của hàm

$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ trên miền chữ nhật $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \}$.

Lời giải Vì f là đa thức, liên tục trên miền đóng giới nội nên theo Định lý 8, có cả cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối. Theo bước 1 trong [9] chúng ta tìm các điểm tới hạn, xảy ra khi $f_x = 2x - 2y = 0$ và $f_y = -2x + 2 = 0$, vì thế có duy nhất điểm tới hạn là (1, 1), và giá trị là f(1, 1) = 1.



Hình 12



Hình 13

Tại bước thứ 2, chúng ta xem xét các giá trị của f trên biên của D, gồm bốn đoạn thẳng là L_1, L_2, L_3 và L_4 như trên Hình 12. Trên L_1 ta có y = 0 và $f(x, 0) = x^2$, $0 \le x \le 3$. Đây là hàm tăng theo x, nên giá trị cực tiểu của nó là f(0, 0) = 0 và giá trị cực đại của nó là f(3, 0) = 9. Trên L_2 ta có x = 3 và f(3, y) = 9 – 4y, $0 \le y \le 2$. Đây là hàm giảm theo y, nên giá trị cực tiểu của nó là f(3, 2) = 1 và giá trị cực đại của nó là f(3, 0) = 9. Trên L_3 ta có y = 2 và $f(x, 2) = x^2 - 4x + 4$, $0 \le x \le 3$.

Dễ thấy $f(x, 2) = (x - 2)^2$ nên giá trị cực tiểu của nó là f(2, 2) = 0 và giá trị cực đại của nó là f(0, 2) = 4.

Cuối cùng, trên L_4 ta có x = 0 và f(0, y) = 2y, $0 \le y \le 2$. Dễ thấy giá trị cực tiểu của nó là f(0, 0) = 0 và giá trị cực đại của nó là f(0, 2) = 4. Vì thế trên biên, hàm có giá trị cực tiểu là 0 và giá trị cực đại là 9.

Tại bước thứ 3, chúng ta so sánh các giá trị đó với giá trị tại điểm tới hạn f(1, 1) = 1, suy ra rằng giá trị cực tiểu tuyệt đối là f(0, 0) = f(2, 2) = 0 và giá trị cực đại tuyệt đối là f(3, 0) = 9. Hình 13 mô tả đồ thị của f.

Chúng ta kết thúc phần này bằng sự chứng minh phần đầu tiên của Định lý 3. Phần (b) chứng minh tương tự.

Chứng minh Định lý 3, phần (a) Chúng ta tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 của f theo hướng $\boldsymbol{u} = \langle h, k\rangle$. Theo Định lý 2.6.3, $D_u f = f_x h + f_y k$. Áp dụng định lý này lần hai ta có

[10] $$D_u^2 f = D_u(D_u f) = \frac{\partial}{\partial x}(D_u f)h + \frac{\partial}{\partial y}(D_u f)k = (f_{xx}h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k$$

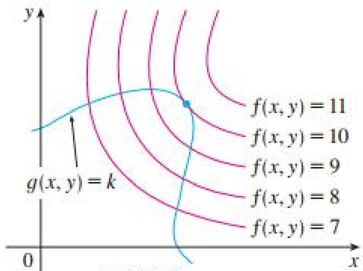
$$= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 = f_{xx}\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}}(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)$$

Chúng ta có $f_{xx}(a, b) > 0$ và D(a, b) > 0. Nhưng f_{xx} và $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ là các hàm liên tục, vì vậy tồn tại hình tròn B tâm (a, b) bán kính δ > 0 sao cho $f_{xx}(x, y) > 0$ và D(x, y) > 0 với mọi (x, y) thuộc B. Do đó từ phương trình 10 ta suy ra rằng $D_u^2 f(x, y) > 0$ với mọi (x, y) thuộc B. Điều đó có nghĩa là nếu đường cong C là giao của đồ thị của f với mặt phẳng nằm ngang đi qua P(a, b, f(a, b)) theo hướng ***u*** thì C lõm lên trên một khoảng có độ dài 2δ. Điều này đúng với mọi hướng ***u***, vì vậy nếu hạn chế trên B, đồ thị của f nằm phía trên mặt phẳng ngang tại P. Vì vậy f(x, y) ≥ f(a, b) với mọi (x, y) thuộc B, nghĩa là f(a, b) là cực tiểu địa phương.

2.8. Nhân tử Lagrange

2.8.1. Phương pháp nhân tử Lagrange

Trong Ví dụ 6 phần 2.7, chúng ta đã làm cực đại hàm thể tích V = xyz chịu ràng buộc (constraint) 2xz + 2yz + xy = 12, là điều kiện để diện tích (không kể nắp) bằng $12m^2$. Trong phần này chúng ta trình bày phương pháp của Lagrange để cực đại hoặc cực tiểu một hàm tổng quát f(x, y, z) chịu ràng buộc dạng g(x, y, z) = k.



Hình 1

Rất dễ giải thích cơ sở hình học của phương pháp Lagrange đối với hàm hai biến. Vì thế chúng ta bắt đầu tìm các giá trị cự trị của f(x, y) chịu ràng buộc dạng g(x, y) = k. Nói khác đi, chúng ta tìm các giá trị cực trị của f(x, y) khi điểm (x, y) bị hạn chế trên đường mức g(x, y) = k. Hình 1 mô tả đường cong này cùng với một vài đường mức của f, chúng có phương trình f(x, y) = c, ở đây c = 7, 8, 9, 10 và 11. Việc cực đại f(x, y) chịu ràng buộc g(x, y) = k là tìm giá trị lớn nhất của c sao cho đường mức f(x, y) = c tiếp xúc với g(x, y) = k. Điều đó được minh họa trên Hình 1, rằng điều đó xảy ra khi các đường cong có tiếp tuyến chung. Điều đó có nghĩa là các đường pháp tuyến tại điểm (x_0, y_0), nơi chúng chạm nhau, là như nhau. Vì vậy các véc tơ gradient là song song, tức là $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ với hằng số λ nào đó.

Cách lập luận như thế cũng áp dụng được cho bài toán tìm cực trị của f(x, y, z) chịu ràng buộc g(x, y, z) = k. Vì thế điểm (x, y, z) bị hạn chế trên mặt mức S với phương trình g(x, y, z) = k. Thay cho các đường mức trong Hình 1, chúng ta xem xét các mặt mức f(x, y, z) = c và lập luận rằng nếu cực trị của f là $f(x_0, y_0, z_0) = c$ thì mặt mức f(x, y, z) = c là tiếp diện của mặt mức g(x, y, z) = k, và vì thế các véc tơ gradient tương ứng là song song với nhau.

Lập luận trực quan đó có thể phát biểu chính xác như sau. Giả sử rằng hàm f có cực trị tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ trên mặt cong S và giả sử C là đường cong với phương trình véc tơ là $\boldsymbol{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ nằm trên S và đi qua P. Nếu t_0 là giá trị tham số tương ứng với điểm P thì $\boldsymbol{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. Hàm hợp h(t) = f(x(t), y(t), z(t)) biểu thị các giá trị mà f có thể trên đường cong C. Vì f có cực trị tại (x_0, y_0, z_0), dẫn đến h có cực trị tại t_0, nên $h'(t_0) = 0$. Nhưng nếu f khả vi, chúng ta sử dụng quy tắc dây chuyền để viết

$$0 = h'(t_0) = f_z(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \boldsymbol{r}'(t_0)$$

Điều đó chứng tỏ rằng véc tơ gradient $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ trực giao với véc tơ tiếp tuyến $\boldsymbol{r}'(t_0)$ với mọi đường cong C. Như chúng ta đã biết trong phần 2.6, rằng véc tơ gradient của g, $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, trực giao vớ $\boldsymbol{r}'(t_0)$ đối với mọi đường cong như thế. (Xem phương trình 2.6.18.) Điều này có nghĩa rằng các véc tơ gradient $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ và $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ song song với nhau. Vì vậy nếu $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, tồn tại số λ sao cho

[1] $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$

Số λ trong phương trình 1 đường cong gọi là nhân tử Lagrang (Lagrange multiplier). Thủ tục dựa trên phương trình 1 như sau.

Phương pháp nhân tử Lagrange Để tìm cực trị của f(x, y, z) chịu ràng buộc g(x, y, z) = k [giả sử rằng các cực trị đó tồn tại và $\nabla g \neq \boldsymbol{0}$ trên mặt cong g(x, y, z) = k]:

(a) Tìm tất cả các giá trị của x, y, z và λ sao cho $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$ và g(x, y, z) = 0

(b) Đánh giá f tại tất cả các điểm (x, y, z) nhận được từ bước (a). Giá trị lớn nhất trong chúng là giá trị lớn nhất của f, giá trị nhỏ nhất trong chúng là giá trị nhỏ nhất của f.

Nếu chúng ta viết phương trình véc tơ $\nabla f = \lambda\nabla g$ ở dạng các thành phần, thì các phương trình trong bước (a) trở thành

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad f_z = \lambda g_z \qquad g(x, y, z) = k$$

Đây là hệ bốn phương trình với bốn ẩn số x, y, z và λ, nhưng không nhất thiết tìm cụ thể các giá trị của λ.

Đối với các hàm hai biến, phương pháp nhân tử Lagrange tương tự như phương pháp đã trình bày. Để tìm các cực trị của f(x, y) chịu ràng buộc g(x, y) = k, ta tìm các giá trị x, y và λ sao cho $\nabla f(x, y) = \lambda\nabla g(x, y)$ và g(x, y) = k.

Điều đó tương đương với giải hệ ba phương trình ba ẩn

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = k$$

Minh họa đầu tiên của chúng ta về phương pháp Lagrange là xem xét lại các vấn đề được đưa ra trong Ví dụ 6 tại mục 2.7.

Ví dụ 1 Một khối hộp chữ nhật không nắp được làm từ $12m^2$ bìa các tông. Tìm thể tích lớn nhất của hộp.

Lời giải Như trong Ví dụ 6 phận 2.7, chúng ta giả sử x, y và z tương ứng là số đo độ dài, độ rộng và chiều cao của hộp (cm). Sau đó chúng ta muốn làm cực đại V = xyz chịu ràng buộc g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12. Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange, ta tìm các giá trị x, y, z và λ sao cho $\nabla V = \lambda\nabla g$ và g(x, y, z) = 12. Điều đó cho ra các phương trình

$$V_x = \lambda g_x \qquad V_y = \lambda g_y \qquad V_z = \lambda g_z \qquad 2xz + 2yz + xy = 12$$

hay

[2] $yz = \lambda(2z + y)$

[3] $xz = \lambda(2z + x)$

[4] $xy = \lambda(2x + 2y)$

[5] $2xz + 2yz + xy = 12$

Không có quy tắc tổng quát để giải hệ phương trình này, nên đôi khi cần đến sựu khéo léo. Trong ví dụ này chúng ta nhân lần lượt [2] với x, [3] với y và [4] với z, dẫn đến các vế trái của các phương trình đó như nhau. Làm như vậy ta có

[6] $xyz = \lambda(2xz + xy)$

[7] $xyz = \lambda(2yz + xy)$

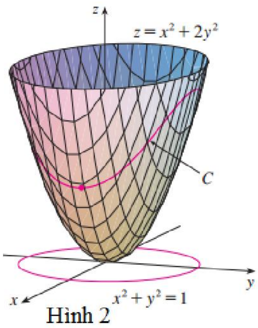
[8] $xyz = \lambda(2xz + 2yz)$

Chúng ta thấy rằng $\lambda \neq 0$, bởi vì nếu $\lambda = 0$ thì từ [2], [3] và [4] kéo theo yz = xz = x y = 0, điều này mâu thuẫn với [5]. Do đó, từ [6] và [7] ta có 2xz + xy = 2yz + xy, dẫn đến xz = yz. Nhưng $z \neq 0$ (vì z = 0 sẽ cho V = 0), vậy x = y. Từ [7] và [8] ta có 2yz + xy = 2xz + 2yz, dẫn đến 2xz = xy và do $x \neq 0$ nên y = 2z. Đặt x = y = 2z vào [5] ta nhận được $12z^2 = 12$, hay $z^2 = 1$.

Vì x, y và z dương nên ta có z = 1, do đó x = 2 và y = 2. Phù hợp với kết quả trong 2.7.

Ví dụ 2 Tìm các cực trị của hàm $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải Chúng ta đã hỏi cực trị của f chịu ràng buộc $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange, chúng ta giải phương trình $\nabla f = \lambda \nabla g$ và $g(x, y) = 1$ được viết lại như sau:



Hình 2

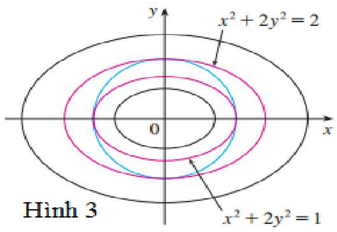
$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = 1$$

cụ thể là

[9] $2x = 2x\lambda$

[10] $4y = 2y\lambda$

[11] $x^2 + y^2 = 1$



Hình 3

Từ [9] ta có x = 0 hoặc $\lambda = 1$. Nếu x = 0 thì từ [11] suy ra $y = \pm 1$. Nếu $\lambda = 1$ thì từ [10] suy ra y = 0, vì vậy từ [11] cho ra $x = \pm 1$. Do đó f có thể có cực trị tại các điểm (0, 1), (0, -1), (1, 0) và (-1, 0). Lượng giá f tại bốn điểm này ta tìm được

$$f(0, 1) = 2 \qquad f(0, -1) = 2 \qquad f(1, 0) = 1 \qquad f(-1, 0) = 1$$

Do đó giá trị lớn nhất của f trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ là $f(0, \pm 1) = 2$ và giá trị nhỏ nhất là $f(\pm 1, 0) = 1$. Kiểm tra trên Hình 2, chúng ta thấy các giá trị đó là phù hợp.

Hình 3 mô tả về phương diện hình học của Ví dụ 2. Các cực trị của $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ tương ứng với các đường mức mà tiếp xúc với đường tròn.

Ví dụ 3 Tìm các giá trị cực trị của $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ trên hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$.

Lời giải Theo thủ tục trong 2.7.9, chúng ta so sánh các giá trị của f tại các điểm tới hạn với các giá trị trên biên. Bởi vì $f_x = 2x$ và $f_y = 4y$ nên chỉ duy nhất điểm tới hạn là (0, 0). Chúng ta so sánh giá trị của f tại điểm này với các cực trị trên biên từ Ví dụ 2:

$$f(0, 0) = 0 \qquad f(\pm 1, 0) = 1 \qquad f(0, \pm 1) = 2$$

Do đó, trên miền hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$, giá trị lớn nhất của f là $f(0, \pm 1) = 2$ và giá trị nhỏ nhất là f(0, 0) = 0.

Ví dụ 4 Tìm các điểm trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ mà khoảng cách từ đó tới điểm (3, 1, -1) là gần nhất và xa nhất.

Lời giải Khoảng cách từ điểm (x, y, z) tới điểm (3, 1, -1) là

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

nhưng để đơn giản, ta tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của bình phương khoảng cách:

$$d^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

Theo phương pháp nhân tử Lagrange, ta giải $\nabla f = \lambda \nabla g$, g = 4.

Dẫn đến

[12] $2(x - 3) = 2x\lambda$

[13] $2(y - 1) = 2y\lambda$

[14] $2(z + 1) = 2z\lambda$

[15] $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Cách đơn giản nhất để giải các phương trình này là giải x, y và z theo λ từ [12], [13] và [14], sau đó thay các giá trị đó vào [15]. Từ [12] ta có

x – 3 = xλ hay x(1 - λ) = 3 hay $x = \frac{3}{1-\lambda}$

Chú ý rằng 1 - λ ≠ 0 bởi vì từ [12] thì không thể λ = 1. Tương tự, từ [13] và [14] ta có

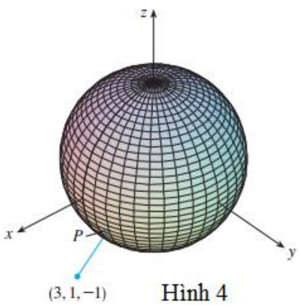
$y = \frac{1}{1-\lambda}$ $\qquad z = \frac{1}{1-\lambda}$

Do đó từ [15] ta có $\frac{3^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1-\lambda)^2} = 4 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = \frac{11}{4} \Rightarrow \lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$

Các giá trị này của λ sẽ cho các giá trị x, y và z tương ứng:

$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}\right)$ và $\left(\frac{-6}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$

Dễ thấy f có giá trị nhỏ nhất tại điểm thứ nhất, vậy điểm gần nhất là $\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}\right)$ và điểm xa nhất là $\left(\frac{-6}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$.



Hình 4

Hình 4 mô tả mặt cầu và điểm P gần nhất trong Ví dụ 4. Ta có thể xác định được điểm P mà không cần tính toán như trên. Thật vậy, vì mặt cầu có tâm là gốc tọa độ nên đường nối gốc tọa độ với điểm (3, 1, -1) sẽ vuông góc với mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu tại điểm P. Nói khác đi, véc tơ pháp tuyến tại đó sẽ song song với véc tơ ⟨3, 1, -1⟩.

Đặt $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ thì véc tơ pháp tuyến tại điểm P(x, y, z) có thể lấy là $\langle F_x, F_y, F_z\rangle = \langle 2x, 2y, 2z\rangle$. Do đó

$\frac{2x}{3} = \frac{2y}{1} = \frac{2z}{-1}$ hay $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$, hay y = x/3 và z = -x/3.

Vì P thuộc mặt cầu nên $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Thay y và z ở trên vào ta được

$x^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(-\frac{x}{3}\right)^2 = 4$, hay $11x^2 = 36$, suy ra $x = \pm\frac{6}{\sqrt{11}}$

Tương ứng, $y = \pm\frac{2}{\sqrt{11}}$ và $z = \mp\frac{2}{\sqrt{11}}$.

Dễ kiểm tra rằng các điểm gần nhất và xa nhất có cùng kết quả như trên.

2.8.2. Hai ràng buộc

Giả sử chúng ta muốn tìm các cực trị của hàm f(x, y, z) chịu hai ràng buộc dạng g(x, y, z) = k và h(x, y, z) = c. Về mặt hình học, điều đó nghĩa là chúng ta tìm các cực trị của f khi (x, y, z) bị hạn chế trên đường cong là giao của các mặt mức g(x, y, z) = k và h(x, y, z) = c. (Xem Hình 5.) Giả sử rằng h có cực trị tại $P(x_0, y_0, z_0)$.

Chúng ta biết rằng ∇f trực giao với C tại P. Nhưng chúng ta cũng biết rằng ∇g trực giao với g(x, y, z) = k và ∇h trực giao với h(x, y, z) = c, vì vậy ∇g và ∇h cùng trực giao với C. Điều đó có nghĩa rằng véc tơ gradient $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ thuộc mặt phẳng được xác định bởi $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ và $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$. (Chúng ta giả thiết rằng các véc tơ đó khác 0 và không song song.) Vì vậy tồn tại các số λ và μ (được gọi là các nhân tử Lagrange) sao cho

[16] $\quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda\nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu\nabla h(x_0, y_0, z_0)$

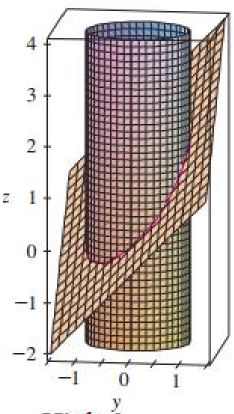
Trong trường hợp này, phương pháp Lagrange là tìm các cực trị bằng cách giải 5 phương trình với 5 ẩn là x, y, z, λ và μ. Các phương trình đó nhận được bằng cách viết phương trình 16 theo biểu thức của các thành phần của nó và sử dụng các phương trình ràng buộc:

$f_x = \lambda g_x + \mu h_x$ $\quad$ $f_y = \lambda g_y + \mu h_y$ $\quad$ $f_z = \lambda g_z + \mu h_z$

$g(x, y, z) = k$ $\quad$ $h(x, y, z) = c$

Ví dụ 5 Tìm giá trị lớn nhất của hàm $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ trên đường cong là giao của mặt phẳng $x - y + z = 1$ với hình trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải Chúng ta cực đại hóa hàm $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ chịu các ràng buộc $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ và $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. Điều kiện Lagrange là $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, vì thế chúng ta giải các phương trình:



Hình 6

[17] $1 = \lambda + 2x\mu$

[18] $2 = -\lambda + 2y\mu$

[19] $3 = \lambda$

[20] $x - y + z = 1$

[21] $x^2 + y^2 = 1$

Thay $\lambda = 3$ vào các phương trình [17] và [18] ta được $x = -1/\mu$ và $y = 5/(2\mu)$. Thay x, y đó vào [21] ta nhận được

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

và vì vậy $\mu = \pm\sqrt{29}/2$.

Do đó $x = \mp 2/\sqrt{29}$ và $y = \pm 5/\sqrt{29}$, và từ [20], $z = 1 \pm 7/\sqrt{29}$.

Giá trị tương ứng của f là

$$\pm\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Do đó giá trị lớn nhất của f trên đường cong đã cho là $3 + \sqrt{29}$.