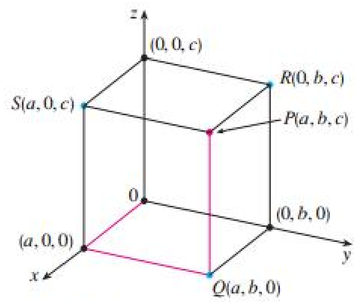
1.0 Nhắc lại một số kiến thức liên quan

1.0.1. Hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian



Hình 1

Trong không gian, hệ trục tọa độ vuông góc xyz bao gồm ba đường thẳng định hướng, gọi là các trục, có tính chất:

(a) Từng đôi một vuông góc với nhau

(b) Cùng giao nhau tại một điểm, gọi là gốc tọa độ

(c) Nếu một người đứng dọc theo trục z sao cho hướng dương là từ chân lên đến đầu sẽ thấy hướng quay trục x quanh gốc tọa độ một góc nhỏ nhất để trùng với vị trí trục y là ngược chiều kim đồng hồ.

(d) Trên mỗi trục có quy ước một đơn vị độ dài (thường trên ba trục là bằng nhau).

Xét một điểm P cố định. Từ P ta hạ đường vuông góc xuống mặt phẳng xy, giao điểm Q của đường này với mặt phẳng xy được gọi là hình chiếu vuông góc của P lên mặt phẳng xy.

Từ P ta hạ đường vuông góc cắt trục x tại điểm nào thì ta gọi điểm đó là chiếu vuông góc của P lên trục x. Tương tự ta có các hình chiếu lên các mặt phẳng và các trục còn lại.

Khi đó, mỗi điểm P bất kỳ trong không gian hoàn toàn được xác định duy nhất bởi một bộ có thứ tự 3 giá trị a, b và c. Các giá trị a, b và c này nhận được bằng cách kẻ các đường vuông góc từ P tới các trục tọa độ x, y và z.

Cũng nhờ có hệ trục tọa độ mà các đường cong hay mặt cong sẽ được xác định bởi các phương trình. Với cùng một đối tượng, nếu xét trên các hệ trục tọa độ khác nhau thì các phương trình tương ứng cũng sẽ khác nhau.

1.0.2 Véc tơ

Khái niệm véc tơ dùng để chỉ những đối tượng có cả độ lớn lẫn hướng (ví dụ như lực, vận tốc, gia tốc, …). Chúng ta thường biểu thị véc tơ bằng mũi tên hoặc đoạn thẳng định hướng.

Trong khuôn khổ tài liệu này, chúng ta sử dụng các chữ cái đậm để biểu thị véc tơ, ví dụ véc tơ **a**, **r**, **T**, **N**, … Nhưng đôi khi để nhấn mạnh điểm đầu A, điểm cuối B của véc tơ, chúng ta sử dụng ký hiệu mũi tên, ví dụ **a** = $\overrightarrow{AB}$.

Khi biểu thị tọa độ của một véc tơ, chúng ta sử dụng cặp ⟨ ⟩, ví dụ **u** = ⟨1, 2, −2⟩

Nếu **u** = ⟨u_1, u_2, u_3⟩ thì độ lớn của **u**, ký hiệu |**u**|, được tính theo công thức

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Véc tơ có độ lớn bằng 1 được gọi là véc tơ đơn vị. Dễ thấy nếu |**u**| ≠ 0 thì **u**/|**u**| là véc tơ đơn vị có phương chiều trùng với **u**.

Người ta quy ước ba véc tơ đơn vị của ba trục x, y và z tương ứng là

i = ⟨1, 0, 0⟩ **j** = ⟨0, 1, 0⟩ **k** = ⟨0, 0, 1⟩

Nếu biết tọa độ (các thành phần) của hai điểm mút của một véc tơ, ta có thể xác định được tọa độ của véc tơ. Ví dụ, với A(x_A, y_A, z_A) và B(x_B, y_B, z_B) thì $\overrightarrow{AB}$ = ($x_B - x_A$, $y_B - y_A$, $z_B - z_A$).

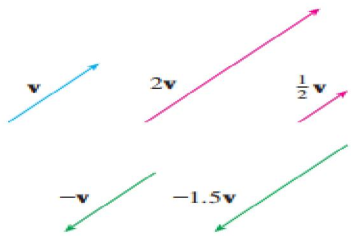
Từ đây ta cũng có công thức để tính khoảng cách giữa hai điểm A và B:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Phép cộng hai véc tơ: **u** = ⟨u_1, u_2, u_3⟩, **v** = ⟨v_1, v_2, v_3⟩, **u** + **v** = ⟨$u_1 + v_1$, $u_2 + v_2$, $u_3 + v_3$⟩

Quy tắc hình bình hành:

Phép nhân vô hướng: λ**u** ⟨λu_1, λu_2, λu_3⟩, là véc tơ có độ lớn bằng |λ| lần độ lớn của véc tơ **u**, có phương trùng với phương của **u**, cùng chiều với **u** nếu λ > 0, ngược chiều nếu λ < 0.



Véc tơ **0** có độ lớn bằng 0, có thể xem là cùng hướng với mọi véc tơ, cũng có thể xem là vuông góc với mọi véc tơ khác.

Các tính chất cơ bản:

1. **a** + **b** = **b** + **a**	2. **a** + (**b** + **c**) = (**a** + **b**) + **c**
3. **a** + **0** = **a**	4. **a** + (-**a**) = **0**
5. c(**a** + **b**) = c**a** + c**b**	6. (c + d)**a** = c**a** + d**a**
7. (cd)**a** = c(d**a**)	8. 1**a** = **a**

1.0.3 Tích vô hướng

Giả sử **u** = ⟨u_1, u_2, u_3⟩, **v** = ⟨v_1, v_2, v_3⟩. Khi đó tích vô hướng là

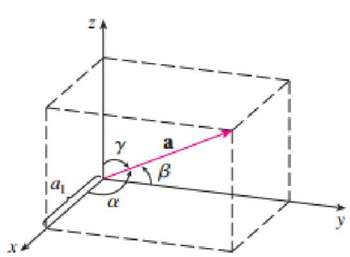
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Gọi θ là góc giữa hai véc tơ **u** và **v** thì **u** · **v** = |**u**||**v**|cos θ. Vì thế nếu hai véc tơ vuông góc với nhau thì tích vô hướng của chúng bằng 0.

Một số tính chất:

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$	2. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$	3. $\mathbf{0}\cdot\mathbf{a} = 0$
4. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$	5. $(c\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot(c\mathbf{b})$	

Các cosine chỉ phương:

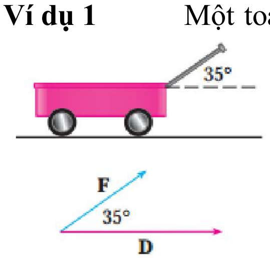


Gọi α, β và γ tương ứng là góc tạo bởi véc tơ **a** = ⟨a_1, a_2, a_3⟩ với ba trục tọ độ x, y và z.

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|} \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\boldsymbol{a}|^2} = 1$$

Ví dụ 1 Một toa xe được kéo khoảng cách **D** = 100 m dọc theo một con đường ngang bởi một lực không đổi **F** = 70 N. Tay đẩy của các toa xe nghiêng một góc 35° so với phương nằm ngang. Tính công sinh ra bởi lực trên.



Giải Công sinh ra được tính theo công thức

W = **F** · **D** = |**F**||**D**|cos35° = (70 N)(100 m)cos35°

≈ 5734 N.m = 5734 J

1.0.4 Tích hữu hướng

Giả sử **u** = ⟨u_1, u_2, u_3⟩, **v** = ⟨v_1, v_2, v_3⟩. Khi đó tích hữu hướng là

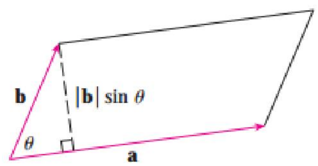
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \langle u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1\rangle$$

Véc tơ **u** × **v** thỏa các tính chất

(a) Vuông góc với cả hai véc tơ **u** và **v**

(b) Độ lớn: |**u** × **v**| = |**u**||**v**|sinθ (Nếu **u** // **v** thì tích này bằng 0)

(c) Tam diện tạo bởi các véc tơ theo trình tự **u**, **v** và **u** × **v** là tam diện thuận.



(ví dụ, nếu **u** và **v** tương ứng đồng phương chiều với các trục x và y thì **u** × **v** đồng phuong chiều với trục z.)

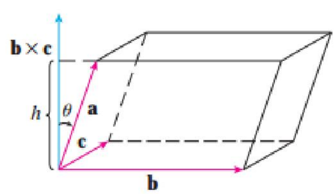
Ứng dụng: Diện tích hình bình hành

|**u** × **v**| = |**u**||**v**|sinθ = A

Một số tính chất:

1. **a** × **b** = -**b** × **a** 2. (c**a**) × **b** = c(**a** × **b**) = **a** × (c**b**)
3. **a** × (**b** + **c**) = **a** × **b** + **a** × **c** 4. (**a** + **b**) × **c** = **a** × **c** + **b** × **c**
5. **a** · (**b** × **c**) = (**a** × **b**) · **c** 6. **a** × (**b** × **c**) = (**a** · **c**)**b** – (**a** · **b**)**c**

Tích hỗn hợp:

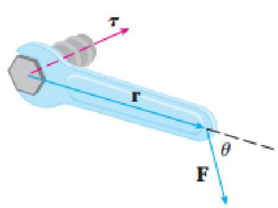


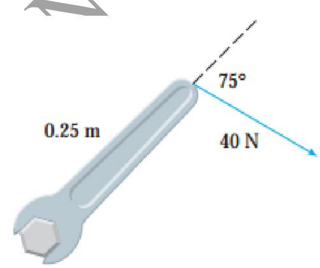
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ứng dụng: Thể tích V = Ah, A – diện tích đáy, h là chiều cao.

Ta thấy A = |**b** × **c**|, h = |**a**|cosθ, vậy ta có

V = |**b** × **c**||**a**|cosθ = |(**b** × **c**) · **a**| = |**a** · (**b** × **c**)|





Mô men xoắn τ đối với gốc tọa độ được định nghĩa bởi tích hữu hướng của véc tơ vị trí và véc tơ lực: **τ** = **r** × **F**

|**τ**| = |**r**||**F**|sinθ

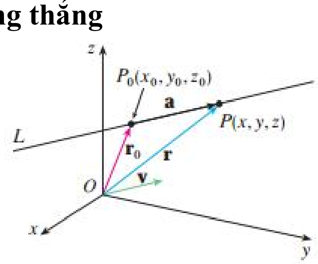
Ví dụ, một bu lông được xiết chặt bởi một lực 40 N với cờ lê dài 0.25 m như hình bên phải. Khi đó độ lớn của mô men xoắn đối với tâm của bu lông là

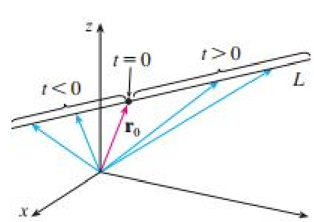
|**τ**| = |**r** × **F**| = |**r**||**F**|sin75° = (0.25 m)(40 N) sin75° = 10sin75° N.m ≈ 9.66 N.m.

Véc tơ mô men xoắn là **τ** = |**τ**|**n** ≈ 9.66**n** (N.m), **n** là véc tơ đơn vị hướng vào phía trong.

1.0.5 Đường thẳng và mặt phẳng

Đường thẳng





Giả sử đường thẳng L đi qua điểm $P_0(x_0, y_0, z_0)$ và song song với véc tơ **v** = ⟨m, n, p⟩.

Giả sử P(x, y, z) là điểm bất kỳ thuộc L. Ký hiệu $\mathbf{r}_0$ là véc tơ vị trí của điểm P_0, **r** là véc tơ vị trí của điểm P và **a** là véc tơ $\overrightarrow{P_0P}$. Khi đó $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$. Nhưng vì $\mathbf{a} \,//\, \mathbf{v}$ nên $\mathbf{a} = t\mathbf{v}$, vì thế phương trình của L là $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} = \langle x_0 + mt, y_0 + nt, z_0 + pt\rangle$. Phương trình tham số là

$$x = x_0 + mt \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}0 + t\mathbf{v} = y = y_0 + nt \quad z = z_0 + pt$$

Hay viết dưới dạng phương trình chính tắc (đối xứng):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

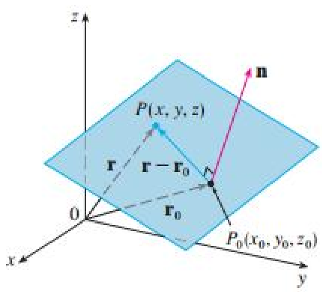
Xét hai véc tơ vị trí $\mathbf{r}_0$ và $\mathbf{r}_1$ của đường thẳng. Thay $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ vào ta được

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$$

Khi t biến thiên từ 0 đến 1 thì véc tơ **r** di chuyển từ $\mathbf{r}_0$ đến $\mathbf{r}_1$. Vì thế phương trình của đoạn thẳng trên đường thẳng có hai đầu là mút của $\mathbf{r}_0$ và $\mathbf{r}_1$ là:

$$r = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \le t \le 1$$

Mặt phẳng



Mặt phẳng được xác định duy nhất bởi một điểm $P_0(x_0, y_0, z_0)$ thuộc nó và một véc tơ **n** vuông góc với nó, gọi là véc tơ pháp tuyến. Giả sử P(x, y, z) là điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng, và giả sử $\mathbf{r}_0$ và **r** tương ứng là các véc tơ vị trí ứng với P_0 và P. Khi đó véc tơ $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vuông góc với **n** nên $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. Đây được gọi là phương trình véc tơ của mặt phẳng.

Nếu $\mathbf{n} = \langle A, B, C\rangle$ thì

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \Leftrightarrow \langle A, B, C\rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0, \text{ hay}$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Ví dụ 2 Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm (1, 2, -3) và vuông góc với véc tơ ⟨-3, 2, 1⟩

Giải Phương trình mặt phẳng cần xác định là $-3(x - 1) + 2(y - 2) + (z + 3) = 0$

hay $3x - 2y - z - 2 = 0$.

Ví dụ 3 Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $P_0(x_0, y_0, z_0)$ và song song với hai véc tơ không đồng phương $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ và $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$.

Giải Đặt $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ thì **n** vuông góc với mặt phẳng cần xác định. Giả sử P(x, y, z) là điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng, khi đó $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$. Nhưng biểu thức của tích hỗn hợp này được xác định bởi định thức sau, và ta có

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Ví dụ 4 Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ và $C(x_C, y_C, z_C)$.

Giải Giả sử P(x, y, z) là điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng. Đặt $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$ và $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$, ta xem mặt phẳng cần tìm song song với **a** và **b**, và đi qua điểm C. Vậy phương trình mặt phẳng là

$$\begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C & z_A - z_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C & z_B - z_C \\ x - x_C & y - y_C & z - z_C \end{vmatrix} = 0$$

CHƯƠNG 1. HÀM VÉC TƠ

Các hàm mà chúng ta sử dụng cho đến nay là các hàm có giá trị là số thực. Bây giờ chúng ta nghiên cứu các hàm có giá trị là các vectơ bởi vì các hàm như vậy là cần thiết để mô tả các đường cong và mặt cong trong không gian. Chúng ta cũng sẽ sử dụng hàm có giá trị véc tơ để mô tả chuyển động của các đối tượng trong không gian. Đặc biệt, chúng ta sẽ sử dụng chúng để nhận lại các định luật của Kepler về sự chuyển động của các hành tinh.

1.1. Hàm véc tơ và đường cong trong không gian

Tổng quát, hàm véc tơ là một hàm xác định trên tập nào đó của trục thực và giá trị của hàm là một véc tơ. Chúng ta thường hay quan tâm đến hàm **r**, mà ứng với mỗi giá trị thực t, giá trị của hàm là một véc tơ trong không gian ba chiều:

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

trong đó các hàm thành phần $x(t)$, $y(t)$ và $z(t)$ là các hàm số một biến số thực, còn **i**, **j** và **k** là các véc tơ đơn vị tương ứng với các trục x, y và z.

Miền xác định của $\mathbf{r}(t)$ là miền mà các hàm thành phần đồng thời xác định (giao của các miền xác định của các hàm thành phần).

Chúng ta sử dụng chữ *t* (*time*) cho biến độc lập bởi vì nó biểu thị thời gian trong hầu hết các ứng dụng của hàm véc tơ.

Ví dụ 1 Nếu $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, ln(3-t), \sqrt{t}\rangle$ thì các hàm thành phần tương ứng sẽ là

$$x(t) = t^3,\ y(t) = \ln(3 - t),\ z(t) = \sqrt{t}$$

Miền xác định của $\mathbf{r}(t)$ là $3 - t > 0$ và $t \geq 0$, tức là nửa đoạn [0, 3).

[1] **Định nghĩa** $\lim\limits_{t\to\alpha}\mathbf{r}(t) = \langle \lim\limits_{t\to\alpha} x(t), \lim\limits_{t\to\alpha} y(t), \lim\limits_{t\to\alpha} z(t)\rangle$

với giả thiết các giới hạn của các hàm thành phần là tồn tại.

Nếu $\lim\limits_{t\to\alpha}\mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ thì ta nói độ lớn và hướng của véc tơ $\mathbf{r}(t)$ dần tới độ lớn và hướng của véc tơ **L**.

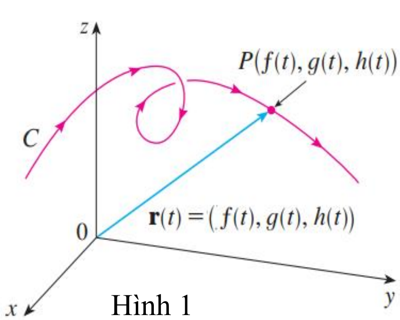
Ví dụ 2 Tìm $\lim\limits_{t\to 0}\mathbf{r}(t)$, với $\mathbf{r}(t) = (1+t)^3\mathbf{i} + te^{-t}\mathbf{j} + \frac{sint}{t}\mathbf{k}$

Lời giải Theo Định nghĩa 1,

$$\lim_{t\to 0}\mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t\to 0}(1+t)^3\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to 0} te^{-t}\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t\to 0}\frac{sint}{t}\right]\mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{k} \qquad \blacksquare$$

Hàm véc tơ $\mathbf{r}(t)$ được gọi là liên tục tại α nếu $\lim\limits_{t\to\alpha}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\alpha)$. Điều này tương đương với tất cả các hàm thành phần đều liên tục tại α.

Có mối liên hệ giữa hàm véc tơ liên tục với đường cong trong không gian.



Hình 1

Giả sử *f*, *g* và *h* là các hàm số một biến số thực cùng liên tục trong miền I. Khi đó tập *C* gồm tất cả các điểm (*x, y, z*) trong không gian với

[2] $x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$

khi *t* biến thiên trong miền I được gọi là đường cong trong không gian (*space curve*). Phương trình [2] được gọi là phương trình tham số (*parametric equations*) của *C* và *t* được gọi là tham số.

Chúng ta cũng có thể xem rằng đường cong C được vẽ ra bởi điểm (f(t), g(t), h(t)) khi t biến thiên trong miền I. Nếu ta coi $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ thì $\mathbf{r}(t)$ chính là véc tơ ứng với điểm P(f(t), g(t), h(t)) trên đường cong C. Do đó mọi hàm véc tơ liên tục xác định một đường cong trong không gian, như Hình 1.

Ví dụ 3 Mô tả đường cong được xác định bởi hàm véc tơ

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t\rangle$$

Lời giải Phương trình tham số tương ứng là

$$x = 1 + t \qquad y = 2 + 5t \qquad z = -1 + 6t$$

Đây chính là phương trình đường thẳng đi qua điểm (1, 2, –1) và song song với véc tơ $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 6\rangle$. Nếu ký hiệu véc tơ $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 2, -1\rangle$ thì $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$ được gọi là phương trình véc tơ của đường thẳng đó. ■

Đường cong phẳng cũng có thể mô tả dưới dạng phương trình véc tơ. Ví dụ, đường thẳng được mô tả bởi phương trình tham số $x = t^2 - 2t$ và $y = t + 1$ có thể mô tả bởi

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 2t, t + 1\rangle = (t^2 - 2t)\,\mathbf{i} + (t + 1)\,\mathbf{j}$$

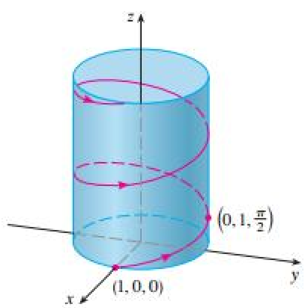
trong đó $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ và $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$.

Ví dụ 4 Phác họa đường cong có phương trình véc tơ là

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

Lời giải Phương trình tham số của đường cong là:

$$x = \cos t \qquad y = \sin t \qquad z = t$$



Hình 2

Vì $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ nên đường cong nằm trên mặt trụ tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Điểm (x, y, z) nằm ngay trên điểm (x, y, 0) khi di chuyển ngược chiều kim đồng hồ trên vòng tròn $x^2 + y^2 = 1$ thuộc mặt phẳng xy (Hình chiếu của đường cong lên mặt phẳng xy có phương trình véc tơ là $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t\rangle$. Đường cong xoắn theo hướng đi lên quanh hình trụ khi t tăng. Đường cong đó được mô tả trong Hình 2, còn được gọi là đường *xoắn ốc* (*helix*). ■


Hình 3

Hình dạng xoắn ốc của đường cong trong Ví dụ 4 là quen thuộc khi ta liên tưởng đến các lò xo. Nó cũng xuất hiện trong mô hình của DNA (deoxyribonucleic acid, vật liệu di truyền của tế bào sống). Năm 1953 James Watson và Francis Crick cho thấy cấu trúc của phân tử DNA là hai liên kết, các đường xoắn ốc song song đan quyện vào nhau như trong Hình 3.

Trong Ví dụ 3 và Ví dụ 4, chúng ta đã đưa ra phương trình véc tơ của các đường cong và yêu cầu mô tả hình học hoặc phác thảo. Trong hai ví dụ sau, chúng ta đưa ra một mô tả hình học của đường cong và yêu cầu tìm phương trình tham số của đường cong.

Ví dụ 5 Tìm phương trình véc tơ và phương trình tham số của đoạn thẳng nối hai điểm P(1, 3, –2) và Q(2, –1, 3).

Lời giải Phương trình véc tơ của đoạn thẳng nối hai mút của các véc tơ $\mathbf{r}_0$ và $\mathbf{r}_1$ là

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \le t \le 1$$

Ở đây chúng ta lấy

$$\mathbf{r}_0 = \langle 1, 3, -2\rangle \text{ và } \mathbf{r}_1 = \langle 2, -1, 3\rangle$$

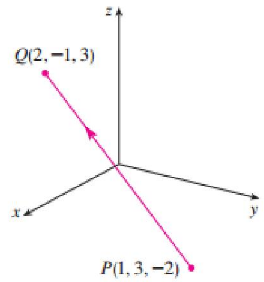
ta nhận được phương trình véc tơ của đoạn thẳng PQ:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 1, 3, -2\rangle + t\langle 2, -1, 3\rangle \qquad 0 \le t \le 1$$

hoặc $\quad \mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3 - 4t, -2 + 5t\rangle \qquad 0 \le t \le 1$

Phương trình tham số tương ứng là

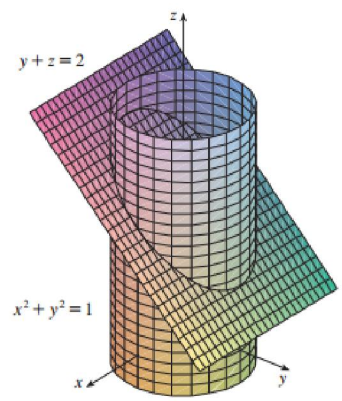
$$x = 1 + t \qquad y = 3 - 4t \qquad z = -2 + 5t \qquad 0 \le t \le 1 \ \blacksquare$$



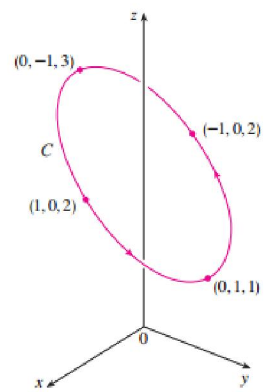
Hình 4

Ví dụ 6 Tìm phương trình véc tơ biểu thị giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ và mặt phẳng $y + z = 2$

Lời giải Hình 5 mô tả sự giao của mặt phẳng với mặt trụ, Hình 6 mô tả giao tuyến C, là một đường ellipse.



Hình 5



Hình 6

Hình chiếu của C lên mặt phẳng xy là đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Phương trình tham số của nó là $\quad x = \cos t \qquad y = \sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi$

Từ phương trình mặt phẳng ta có $\quad z = 2 - y = 2 - \sin t$

Vậy phương trình tham số của C là

$$x = \cos t \qquad y = \sin t \qquad z = 2 - \sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Tương ứng, phương trình véc tơ là

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + (2 - \sin t)\,\mathbf{k} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

❖ **Sử dụng máy tính để vẽ đường cong**

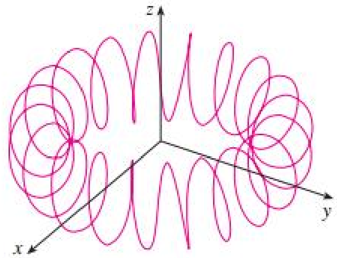
Đường cong không gian vốn khó vẽ bằng tay hơn đường cong phẳng. Để đảm bảo độ chính xác chúng ta cần phải sử dụng công nghệ. Ví dụ, Hình 7 được vẽ bởi máy tính mô tả đường cong với phương trình tham số

$$x = (4 + \sin 20t)\cos t \qquad y = (4 + \sin 20t)\sin t \qquad z = \cos 20t$$

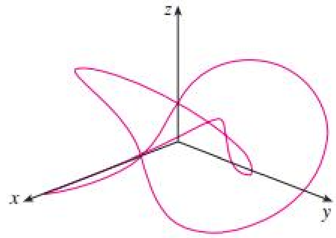
Nó được gọi là một xoắn ốc hình xuyến (*toroidal spiral*) bởi vì nó nằm trên một hình xuyến. Một đường cong thú vị nữa, được gọi là cây chia ba thắt nút (*trefoil knot*), có phương trình

$$x = (2 + \cos 1.5t)\cos t \qquad y = (2 + \cos 1.5t)\sin t \qquad z = \sin 1.5t$$

được mô tả trong Hình 8.



Hình 7



Hình 8

Ngay cả khi một đường cong không gian được vẽ bởi máy tính, ảo giác quang học gây khó khăn để nhận ra đường cong thực sự như thế nào. Điều này đặc biệt đúng trong Hình 8. Ví dụ tiếp theo cho thấy làm thế nào để khắc phục vấn đề này.

Ví dụ 7 Sử dụng máy tính để vẽ đường cong với phương trình véc tơ **r**(t) = $\langle t, t^2, t^3 \rangle$. Đường cong này được gọi là xoắn bậc 3 (*twisted cubic*).

Lời giải Chúng ta sử dụng máy tính để vẽ đường cong được cho bởi phương trình tham số

$$x = t \quad y = t^2 \quad z = t^3 \quad -2 \le t \le 2$$

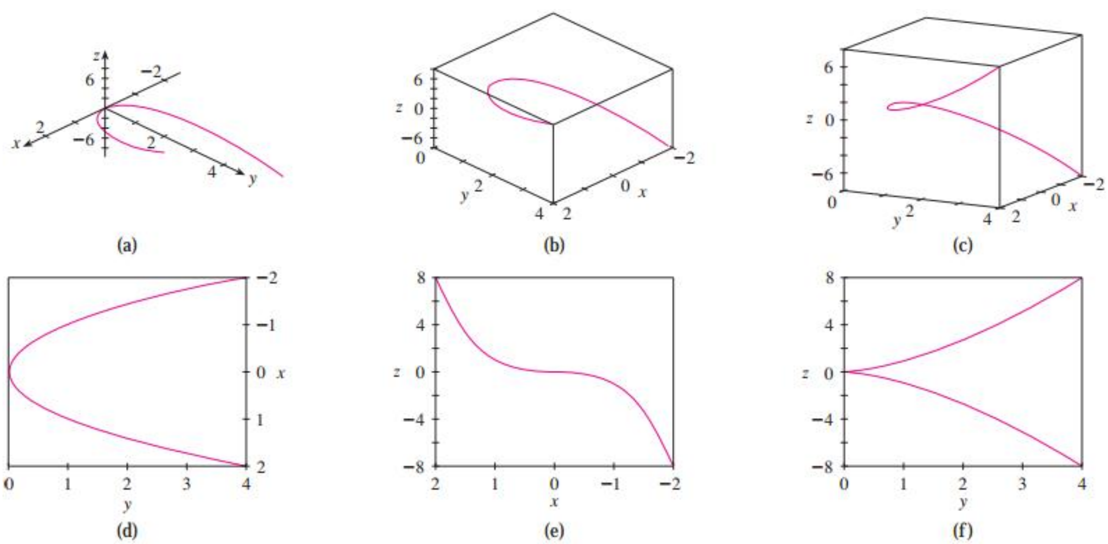
Trong MATLAB, chúng ta dùng hàm plot3():

```
>> x = -2:.01:2; y = x.^2; z = x.^3;
>> plot3(x,y,z)
>> grid on; axis square
```

hoặc dùng hàm ezplot3():

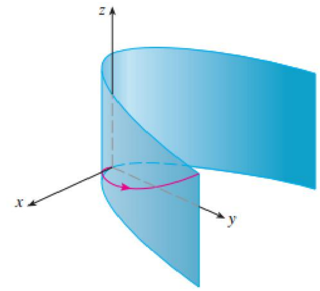
```
>> ezplot3('t', 't^2', 't^3', [-2, 2])
```

Kết quả được thể hiện trong Hình 9(a), nhưng thật khó để nhìn thấy bản chất thật sự của đường cong từ mỗi hình vẽ đó. Hầu hết các chương trình đồ họa ba chiều trên máy tính cho phép người dùng đặt đường cong hoặc mặt cong trong một hộp thay vì hiển thị các trục tọa độ. Khi chúng ta nhìn vào đường cong đặt trong một hộp như Hình 9(b), chúng ta có một hình ảnh rõ ràng hơn về các đường cong. Chúng ta có thể thấy rằng nó leo lên từ một góc dưới của hộp tới góc trên gần chúng ta nhất, và nó vừa xoắn vừa leo.



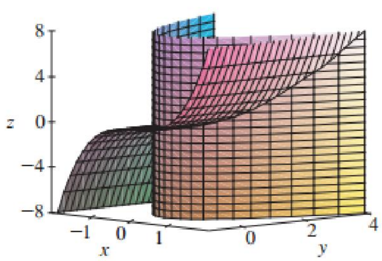
Hình 9 Các góc nhìn của đường xoắn bậc 3

Chúng ta nhận được nhiều đặc tính của đường cong khi chúng ta quan sát nó từ nhiều điểm khác nhau. Phần (c) cho thấy kết quả của quay hộp để nhận được một điểm nhìn khác. Phần (d), (e) và (f) nhận được khi chúng ta nhìn thẳng vào mặt của hộp. Đặc biệt, phần (d) cho thấy nhìn trực tiếp từ trên hộp. Nó là hình chiếu của đường cong trên mặt phẳng xy, một parabol có phương trình $y = x^2$. Phần (e) cho thấy chiếu trên mặt phẳng xz. Đấy chính là lý do tại sao đường cong được gọi là xoắn bậc 3.



Hình 10

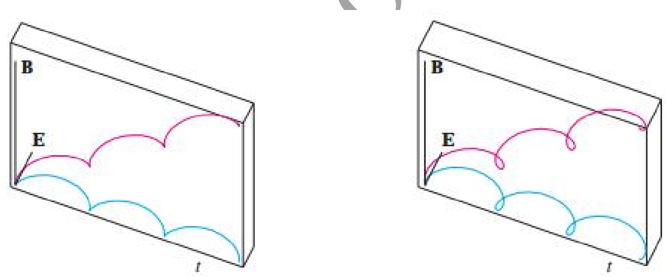
Một phương pháp khác là vẽ đường cong trong không gian trên một mặt cong. Ví dụ, xoắn bậc 3 trong Ví dụ 7 nằm trên mặt trụ parabol $y = x^2$. (Loại bỏ tham số t từ hai phương trình tham số đầu tiên, $x = t$ và $y = t^2$.) Hình 10 mô tả cả mặt trụ và đường xoắn bậc 3, và chúng ta thấy rằng đường cong di chuyển lên trên dọc theo bề mặt của hình trụ. Chúng ta đã sử dụng phương pháp này trong Ví dụ 4 để quan sát đường xoắn nằm trên hình trụ tròn (xem Hình 2).



Hình 11

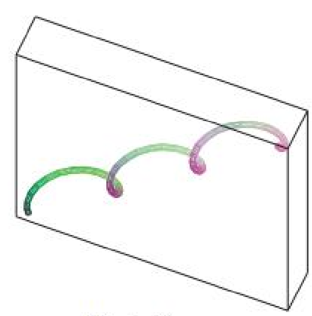
Phương pháp thứ ba để mô tả các xoắn bậc 3 là nhận ra rằng nó cũng nằm trên mặt trụ $z = x^3$. Vì vậy, nó có thể được xem như là giao tuyến của các mặt trụ $y = x^2$ và $z = x^3$ (xem Hình 11).

Một ví dụ điển hình của một đường cong không gian là quỹ đạo của một hạt tích điện dương trong điện trường và từ trường trực giao E and B. Tùy thuộc vào vận tốc ban đầu, đường đi của các hạt hoặc là một đường cong không gian có hình chiếu trên mặt phẳng nằm ngang là cycloid, Hình 12(a), hoặc một đường cong có hình chiếu là trochoid, Hình 12(b). Hình 13 cho thấy đường cong của Hình 12(b) được đưa ra bởi các lệnh tubeplot trong Maple.



(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \sin t, 1 - \cos t, t \rangle$ (b) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2}\sin t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t \rangle$

Hình 12



Hình 13

Trong MATLAB, để vẽ Hình 12(a), dùng hàm plot3:

```
>> x = 0:.1:6*pi;
>> plot3(x-sin(x), 1 - cos(x), x)
>> hold on; grid on
>> plot3(x-sin(x), 1 - cos(x), x.^0)
```

Hoặc dùng hàm ezplot3:

```
>> ezplot3('t-sin(t)','1-cos(t)','t',[0,6*pi])
>> hold on
>> ezplot3('t-sin(t)','1-cos(t)','0',[0,6*pi])
```

Để vẽ Hình 13, dùng hàm tubeplot3:

```
>> x = 0:.1:6*pi;
>> tubeplot3(x-sin(x), 1 - cos(x), x,.5)
>> nice3d
```

1.2. Đạo hàm và tích phân của hàm véc tơ

Trong phần này chúng ta sẽ sử dụng hàm véc tơ để mô tả sự chuyển động của các hành tinh và các vật thể khác trong không gian. Trước hết chúng ta cần mở rộng các phép toán vi phân và tích phân cho hàm véc tơ .

1.2.1. Đạo hàm

Đạo hàm của hàm véc tơ được định nghĩa giống như đối với hàm một biến số thực.

[1] **Định nghĩa**

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$$

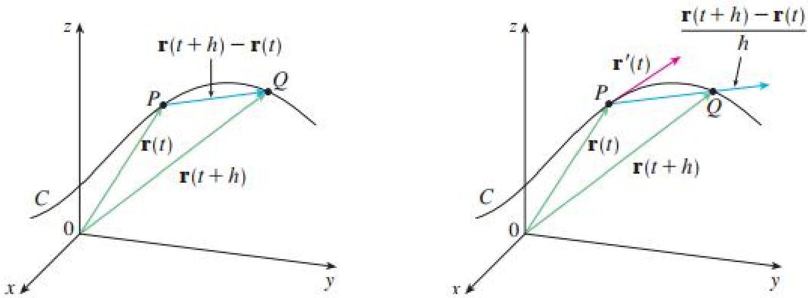
nếu giới hạn đó tồn tại.

Ý nghĩa hình học của định nghĩa này được thể hiện trong Hình 1. Nếu các điểm P và Q tương ứng là các mút của các véc tơ **r**(t) và **r**(t + h) thì $\overrightarrow{PQ}$ biểu thị véc tơ **r**(t + h) – **r**(t), được xem là véc tơ cát tuyến. Nếu h > 0 thì $\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$ cùng hướng với **r**(t + h) – **r**(t).

Khi h → 0, véc tơ này dần đến một véc tơ nằm trên đường tiếp tuyến. Vì vậy, véc tơ **r**′(t) được gọi là véc tơ tiếp tuyến của đường cong tại điểm P. Tiếp tuyến của C tại P là đường thẳng đi qua điểm P và song song với véc tơ **r**′(t).

Nếu **r**′(t) ≠ 0, véc tơ tiếp tuyến đơn vị được xác định bởi

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$



Hình 1 (a) Véc tơ cát tuyến $\overrightarrow{PQ}$ (b) Véc tơ tiếp tuyến **r**′(t)

[2] **Định lý** Nếu **r**(t) = ⟨f(t), g(t), h(t)⟩ = f(t) **i** + g(t) **j** + h(t) **k**, ở đây f(t), g(t) và h(t) là các hàm khả vi thì **r**′(t) = ⟨f ′(t), g′(t), h′(t)⟩ = f ′(t) **i** + g′(t) **j** + h′(t) **k**

Chứng minh

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)]$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[\langle f(t+\Delta t), g(t+\Delta t), h(t+\Delta t)\rangle - \langle f(t), g(t), h(t)\rangle]$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left\langle\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\right\rangle$$

$$= \left\langle \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\right\rangle$$

$$= \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle$$ ■

Ví dụ 1

a) Tìm đạo hàm của $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \sin 2t\,\mathbf{k}$

b) Tìm véc tơ tiếp tuyến đơn vị tại điểm t = 0

Lời giải

a) Theo Định lý 2, $\mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + (1 - t)e^{-t}\,\mathbf{j} + 2\cos 2t\,\mathbf{k}$

b) Vì $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} \neq \mathbf{0}$ và $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ nên véc tơ tiếp tuyến đơn vị tại điểm (1, 0, 0) là

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\boldsymbol{r}'(0)}{|\boldsymbol{r}'(0)|} = \frac{\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

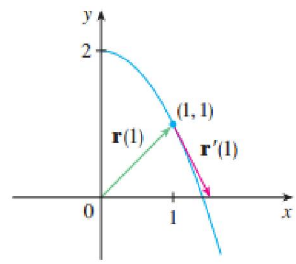
Ví dụ 2 Cho đường cong $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (2-t)\,\mathbf{j}$.

Tìm $\mathbf{r}'(t)$ và phác họa $\mathbf{r}(1)$ và véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{r}'(1)$.

Lời giải Ta có $\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{i} - \mathbf{j}$ và $\mathbf{r}'(1) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j}$

Đây là đường cong phẳng.

Khử t từ hai phương trình $x = \sqrt{t}$, y = 2 – t ta nhận được $y = 2 - x^2$, $x \geq 0$. Trên Hình 2 ta vẽ véc tơ vị trí $\mathbf{r}(1)$ xuất phát tại gốc tọa độ và véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{r}'(1)$ xuất phát tại điểm tương ứng (1, 1). ■



Hình 2

Chúng ta có thể sử dụng MATLAB để vẽ Hình 2 như sau:

```
>> x = 0:.1:2; y = 2-x.^2;      % Chuẩn bị dữ liệu với x trên miền [0, 2]
>> plot(x, y, 'm');             % Vẽ với màu magenta
>> axis([-.5 2 -.5 2.5])        % Đặt độ rộng cho các trục tọa độ
>> hold on                      % Chuyển chế độ giữa hình cũ
>> arrow([0,-.5],[0,3])         % Vẽ trục tung
>> text(.1,2.4,'y')             % Gắn nhãn 'y' lên đầu trục tung
>> arrow([-.5,0],[2.5,0])       % Vẽ trục hoành
>> text(1.9,0.1,'x')            % Gắn nhãn 'x' vào cuối trục hoành
>> text(-.1,-.1,'0')            % Gắn nhãn '0' cạnh gốc tọa độ
>> arrow([1,1],[1/2,-1],'r')    % Vẽ véc tơ tiếp tuyến với màu red
>> arrow([0,0],[1,1],'g')       % Vẽ véc tơ vị trí với màu green
>> text(1.1,1,'(1,1)')          % Gắn nhãn '(1, 1)' cạnh điểm (1, 1)
>> text(1.5,.2,'r''(1)')        % Gắn nhãn r'(1) vào cạnh véc tơ tiếp tuyến
>> text(.6,0.8,'r(1)')          % Gắn nhãn r(1) vào cạnh véc tơ vị trí
```

Ví dụ 3 Tìm phương trình tham số của tiếp tuyến của đường xoắn ốc được cho bởi phương trình tham số: $x = 2\cos t$ $y = \sin t$ $z = t$ tại điểm (0, 1, π/2).

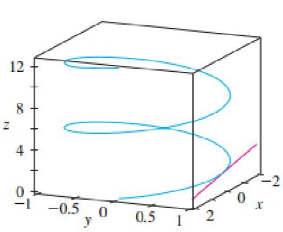
Lời giải Phương trình véc tơ của đường xoắn ốc là $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, \sin t, t\rangle$, vì vậy

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -2\sin t, \cos t, 1\rangle$$

Giá trị của tham số ứng với điểm (0, 1, π/2) là t = π/2, vì vậy véc tơ tiếp tuyến tại đó là $\mathbf{r}'(t) = \langle -2, 0, 1\rangle$

Tiếp tuyến là đường đi qua điểm (0, 1, π/2) và song song với véc tơ ⟨–2, 0, 1⟩, vì vậy phương trình tham số của nó là

$x = -2t$ $y = 1$ $z = \pi/2 + t$ ■



Hình 3

Đường cong và tiếp tuyến được mô tả trong Hình 3.

Để vẽ đường cong trong Hình 3, dùng hàm ezplot3:

```
>> ezplot3('2*cos(t)', 'sin(t)', 't', [0,4*pi])
```

Cũng như đối với hàm một biến số thực, đạo hàm cấp 2 của hàm véc tơ **r**(t) chính là đạo hàm của véc tơ **r**'(t), tức là **r**'' = (**r**')'. Cụ thể, đạo hàm cấp 2 của hàm véc tơ trong Ví dụ 3 là

$$\mathbf{r}''(t) = \langle -2\cos t, -\sin t, 0\rangle$$

1.2.2. Quy tắc tính đạo hàm

Định lý sau đây cho thấy các công thức tính đạo hàm của hàm một biến số vẫn còn đúng cho các hàm véc tơ .

[3] **Định lý** Giả sử ***u*** và ***v*** là các hàm véc tơ khả vi, c là đại lượng vô hướng và f là hàm một biến số khả vi. Khi đó

1. $[\mathbf{u}+\mathbf{v}]' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$
2. $[c\mathbf{u}]' = c\mathbf{u}'$
3. $[f(t)\mathbf{u}]' = f'(t)\mathbf{u} + f(t)\mathbf{u}'$
4. $[\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}]' = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'$
5. $[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]' = \mathbf{u}'\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{v}'$
6. $\left[\mathbf{u}\big(f(t)\big)\right]' = f'(t)\mathbf{u}'\big(f(t)\big)$ (*Quy tắc dây chuyền – Chain Rule*)

Chúng ta chứng minh công thức 4, việc chứng minh các công thức còn lại coi như bài tập.

Chứng minh công thức 4

Giả sử $\mathbf{u}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t)\rangle$, $\mathbf{v}(t) = \langle g_1(t), g_2(t), g_3(t)\rangle$

thì

$$\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^{3} f_i(t)g_i(t)$$

Khi đó

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)] = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3} f_i(t)g_i(t) = \sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dt}[f_i(t)g_i(t)]$$

$$= \sum_{i=1}^{3}[f'_i(t)g_i(t) + f_i(t)g'_i(t)] = \sum_{i=1}^{3} f'_i(t)g_i(t) + \sum_{i=1}^{3} f_i(t)g'_i(t)$$

$$= \mathbf{u}'^{(t)}\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t) \qquad \blacksquare$$

Ví dụ 4 Chỉ ra rằng nếu $|\mathbf{r}(t)| = c$ - hằng số thì **r**′(t) trực giao với **r**(t) đúng với mọi t.

Lời giải Theo công thức 4 của Định lý 3, vì $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$ (hằng số) nên

$$0 = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}'^{(t)}\cdot\mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'^{(t)} = 2\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)$$

Vậy **r**′(t) trực giao với **r**(t) đúng với mọi t. ■

Về mặt hình học, điều này nói lên rằng nếu một đường cong nằm trên một quả cầu với tâm là gốc tọa độ thì tại mọi điểm, các véc tơ tiếp tuyến luôn luôn vuông góc với véc tơ vị trí.

1.2.3. Tích phân

Tích phân xác định của một hàm véc tơ liên tục có thể được định nghĩa giống như đối với hàm một biến số thực, ngoại trừ giá trị của tích phân là một véc tơ. Chúng ta có thể biểu diễn tích phân của **r** theo các tích phân của các hàm thành phần *f*, *g* và *h* của nó như sau.

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} r(t_i^*)\Delta t$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\Delta t\right)\mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} g(t_i^*)\Delta t\right)\mathbf{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} h(t_i^*)\Delta t\right)\mathbf{k}\right]$$
$$= \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\Delta t\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(t_i^*)\Delta t\right)\mathbf{j} + \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} h(t_i^*)\Delta t\right)\mathbf{k}$$

Vì vậy

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)dt\right)\mathbf{k}$$

Điều này có nghĩa rằng chúng ta có thể tính riêng tích phân của mỗi hàm thành phần. Chúng ta có thể mở rộng Định lý cơ bản của giải tích cho hàm véc tơ liên tục như sau

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(t)|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = \mathbf{R}(\mathrm{b}) - \mathbf{R}(\mathrm{a})$$

Trong đó **R**(t) là nguyên hàm (*antiderivative*) của **r**(t), tức là **R**'(t) = **r**(t).

Chúng ta sử dụng ký hiệu $\int \mathbf{r}(t)dt$ để biểu thị tích phân bất định (*indefinite integrals*).

Ví dụ 5 Nếu **r**(t) = 2cost **i** + sint **j** + 2t **k**, thì

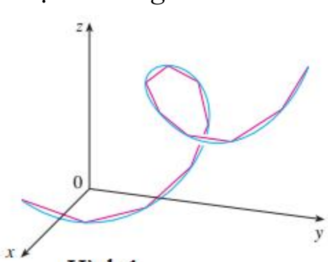
$$\int \mathbf{r}(t)dt = \left(\int_a^b 2costdt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b sintdt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b 2tdt\right)\mathbf{k}$$
$$= 2sint\,\mathbf{i} - cost\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

Trong đó **C** là véc tơ hằng của tích phân và

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t)dt = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4}\mathbf{k}$$ ■

1.3. Độ dài cung và độ cong

1.3.1. Độ dài cung



Hình 1

Với đường cong phẳng được cho bởi phương trình tham số x = f(t), y = g(t), a ≤ t ≤ b, độ dài của nó được định nghĩa là giới hạn của độ dài của các đa giác nội tiếp, với ràng buộc f '(t) và g'(t) là các hàm liên tục, và chúng ta có công thức tính như sau

[1] $$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Độ dài của đường cong trong không gian cũng được định nghĩa giống như vậy (Hình 1). Giả sử đường cong có phương trình véc tơ $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, $a \le t \le b$, hoặc tương đương là phương trình tham số $x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t),\ a \le t \le b$,

ở đây f, g, h là các hàm khả vi liên tục. Khi t tăng từ a đến b mà đường cong không có đoạn nào bị lặp lại thì độ dài của nó được tính theo công thức

[2] $$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

Chú ý rằng các công thức [1] và [2] có thể được gộp lại thành một công thức

[3] $$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|dt$$

với đường cong phẳng, $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j}$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

với đường cong trong không gian, $r(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$

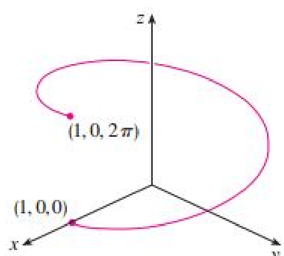
$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

Ví dụ 1 Tính độ dài của cung xoắn tròn có phương trình véc tơ $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ từ điểm (1, 0, 0) đến điểm (1, 0, 2π).

Lời giải Vì $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ta có $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-sint)^2 + cos^2t + 1} = \sqrt{2}$

Theo công thức 3, ta có

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}dt = 2\sqrt{2}\pi \qquad \blacksquare$$



Hình 3

Mỗi đường cong đơn có thể được mô tả bởi nhiều phương trình véc tơ. Ví dụ, với đường cong xoắn bậc 3

[4] $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$, $1 \le t \le 2$

cũng có thể mô tả bởi phương trình véc tơ

[5] $\mathbf{r}(u) = \langle e^u, e^{2u}, e^{3u}\rangle$, $0 \le u \le \ln 2$

Trong đó, mối liên hệ giữa t và u là $t = e^u$. Chúng ta sử dụng công thức [3] để tính độ dài của đường cong C được cho bởi phương trình [4] hay [5] đều nhận được kết quả như nhau.

Bây giờ chúng ta xét đường cong C được cho bởi phương trình véc tơ

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k} \qquad a \le t \le b$$

trong đó $\mathbf{r}'(t)$ là hàm véc tơ liên tục và đường cong C không lặp lại khi t biến thiên từ a đến b.

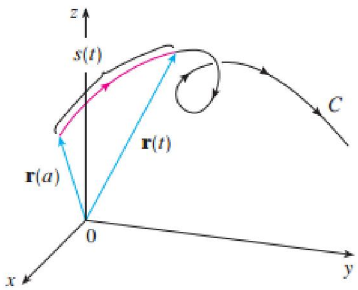
Chúng ta định nghĩa hàm độ dài cung như sau:

[6] $$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\,du$$

Như vậy s(t) là độ dài của phần thuộc đường cong C nằm giữa $\mathbf{r}(a)$ và $\mathbf{r}(t)$.

Đạo hàm hai vế của phương trình [6] ta được

[7] $$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$$



Hình 3

Công thức trên rất hiệu quả trong việc tham số hóa đường cong bởi dựa vào độ dài của cung. Thực tế là độ dài của một đường cong chỉ phụ thuộc vào hình dáng tự nhiên của nó, không phụ thuộc vào hệ trục tọa độ nào. Nếu đường cong **r**(t) phụ thuộc tham số t và s(t) là hàm độ dài được cho bởi công thức [6], thì chúng ta có thể giải t theo s, tức là t = t(s). Như vậy đường cong có thể được tham số hóa theo s, **r** = **r**(t(s)). Như vậy, ví dụ với s = 3 thì **r**(t(3)) là véc tơ vị trí của điểm ứng với 3 đơn vị độ dài tính từ điểm xuất phát.

Ví dụ 2 Tham số hóa lại đường xoắn ốc **r**(t) = cost **i** + sint **j** + t **k** chú ý tới độ dài cung từ điểm (1, 0, 0) theo chiều tăng của t.

Lời giải Điểm (1, 0, 0) ứng với t = 0. Từ Ví dụ 1 ta có

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2} \text{ vì vậy } s = s(t) = \int_0^t \sqrt{\mathbf{2}}du = \sqrt{2}t$$

Do đó $t = s/\sqrt{2}$ và sự tham số hóa lại sẽ là

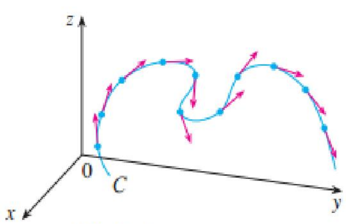
$$\mathbf{r}\big(t(s)\big) = cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{k}$$ ■

1.3.2. Độ cong

Tham số hóa **r**(t) được gọi là trơn (*smooth*) trên miền I nếu **r**'(t) liên tục và khác 0 trên I. Một đường cong được gọi là trơn nếu nó có tham số hóa trơn.

Nếu C là đường cong trơn được xác định bởi phương trình véc tơ **r**, thì véc tơ tiếp tuyến đơn vị được tính theo công thức

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$



Hình 4

và biểu thị hướng của đường cong. Từ Hình 4 ta thấy rằng **T**(t) thay đổi hướng rất chậm khi C khá thẳng, nhưng nó sẽ thay đổi rất nhanh khi C uốn cong hoặc xoắn mạnh. Độ cong của C tại một điểm phản ánh mức độ thay đổi hướng của véc tơ tiếp tuyến tại điểm đó. Cụ thể, chúng ta định nghĩa nó bằng độ lớn của tỷ số giữa độ thay đổi của véc tơ tiếp tuyến đơn vị với độ dài của cung (Chúng ta sử dụng độ dài cung để độ cong độc lập với sự tham số hóa).

[8] **Định nghĩa** Độ cong của một đường cong là $\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$, với **T** là véc tơ tiếp tuyến đơn vị.

Việc tính độ cong rất dễ dàng nếu chúng ta sử dụng tham số t thay cho s:

[9] $$\kappa(t) = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Ví dụ 3 Chứng tỏ rằng độ cong của đường tròn bán kính a bằng 1/a.

Lời giải Chúng ta xem đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, có phương trình tham số là

r(t) = acost **i** + asint **j**

Bởi vì **r'**(t) = -asint **i** + acost **j** và |**r'**(t)| = a nên **T**(t) = **r'**(t)/|**r'**(t)| = -sint **i** + cost **j**

Do đó |**T'**(t)| = 1, thay vào phương trình [9] ta được κ(t) = 1/a. ■

Kết quả của Ví dụ 3 chứng tỏ rằng, đường tròn nhỏ có độ cong lớn và đường tròn lớn có độ cong nhỏ, phù hợp với trực giác của chúng ta. Từ định nghĩa độ cong suy ra rằng đường thẳng có độ cong bằng 0, bởi vì véc tơ tiếp tuyến là không đổi.

Mặc dù công thức [9] có thể sử dụng cho mọi trường hợp để tính độ cong, nhưng công thức được đưa ra bởi định lý sau đây thường được sử dụng thuận tiện hơn.

[10] **Định lý** Độ cong của đường cong được cho bởi hàm véc tơ **r** là

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

Chứng minh Từ **T** = **r**'/|**r**'| và |**r**'| = ds/dt nên **r**' = |**r**'|**T** = $\frac{ds}{dt}$**T**.

Từ công thức 3 trong Định lý 1.2.3 nhận được

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}'$$

Chú ý rằng **T** × **T** = **0** nên

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}') = |\mathbf{r}'|^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}')$$

Vì |**T**(t)| = 1 với mọi t nên **T** và **T**' trực giao (theo Ví dụ 4 trong phần 1.2).

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = |\mathbf{r}'|^2|\mathbf{T}||\mathbf{T}'| = |\mathbf{r}'|^2|\mathbf{T}'|$$

Do đó

$$|\mathbf{T}'| = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^2}$$ ■

Ví dụ 4 Tìm độ cong của đường xoắn ốc bậc 3 **r**(t) = ⟨t, t^2, t^3⟩ tại điểm bất kỳ và tại (0, 0, 0).

Lời giải Trước tiên chúng ta tính toán các thành phần cần thiết:

r'(t) = ⟨1, 2t, $3t^2$⟩ $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + +9t^2}$ **r**"(t) = ⟨0, 2, 6t⟩

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\mathbf{i} - 6t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

Từ Định lý 10 ta có

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{\left(\sqrt{1 + 4t^2 + +9t^2}\right)^{3/2}}$$

Tại gốc tọa độ khi t = 0, độ cong là k(0) = 2. ■

Trong trường hợp đặc biệt đường cong phẳng có phương trình y = f(x), chúng ta coi x là tham số và viết **r**(x) = x **i** + f(x) **j**. Khi đó **r**′(x) = **i** + f '(x) **j** và **r**″(x) = f "(x) **j**.

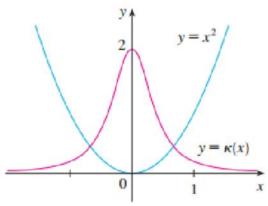
Vì **i** × **j** = k và **j** × **j** = 0 nên **r**' × **r**" = f "(x) **k**, do đó |**r**' × **r**"| = |f "(x)|.

Ta có $|\mathbf{r}'| = \sqrt{1 + f'^2}$ nên theo Định lý 10

[11] $$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'^2]^{3/2}}$$

Ví dụ 5 Tìm độ cong của parabol y = x^2 tại các điểm (0, 0), (1, 1) và (2, 4).

Lời giải Vì y' = 2x và y" = 2 nên từ công thức [11] ta có



Hình 5
Parabol và độ cong của nó

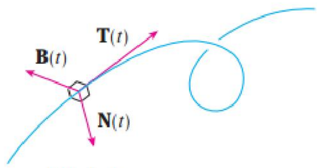
$\kappa(x) = \frac{2}{[1+4x^2]^{3/2}}$

Độ cong tại (0, 0) là k(0) = 2, tại (1, 1) là k(1) = $2/5^{3/2}$, tại (2, 4) là k(2) = $2/17^{3/2}$. ■

Nhìn vào biểu thức của κ(x) hoặc đồ thị của κ(x) trên Hình 5, ta thấy κ(x) → 0 khi x → ±∞. Điều đó tương ứng với sự kiện parabol dần dần trở thành thẳng khi x → ±∞.

1.3.3. Véc tơ pháp tuyến và phó pháp tuyến

Tại mỗi điểm của đường cong trơn **r**(t) trong không gian, có nhiều véc tơ trực giao với véc tơ tiếp tuyến đơn vị **T**(t). Bởi vì |**T**(t)| = 1 nên **T**(t)·**T**′(t) = 0, tức là **T**′(t) trực giao với **T**(t).



Hình 6

Chú ý rằng **T**′(t) không phải là véc tơ đơn vị, nhưng chúng ta luôn có thể xác định một véc tơ pháp tuyến đơn vị chính (*principal unit normal vector*), hay còn gọi là véc tơ pháp tuyến đơn vị (*unit normal vector*) như sau

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

Véc tơ **B**(t) = **T**(t) × **N**(t) được gọi là véc tơ phó pháp tuyến (*binormal vector*). Nó vuông góc với cả **T** và **N** và cũng là một véc tơ đơn vị (Hình 6).

Ví dụ 6 Tìm các véc tơ pháp tuyến và phó pháp tuyến của đường xoắn ốc tròn

r(t) = cost **i** + sint **j** + t **k**

Lời giải Trước tiên chúng ta tính toán các thành phần cho véc tơ pháp tuyến đơn vị:

r' = -sint **i** + cost **j** + **k** |**r**'| = $\sqrt{2}$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-sint\ \mathbf{i} + cost\ \mathbf{j} + \boldsymbol{k})$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-cost\ \mathbf{i} - sint\ \mathbf{j}) \qquad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = (-cost\ \mathbf{i} - sint\ \mathbf{j}) = \langle -cost, -sint, 0\rangle$$

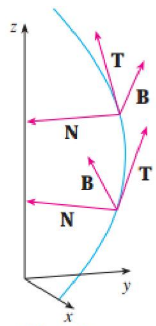
Điều đó chứng tỏ mọi véc tơ pháp tuyến đều nằm ngang và hướng về phía trục z.

Véc tơ phó pháp tuyến là

$$\mathbf{B}(\mathrm{t}) = \mathbf{T}(\mathrm{t}) \times \mathbf{N}(\mathrm{t}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -sint & cost & 1 \\ -cost & -sint & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle sint, -cost, 1\rangle$$ ■

Hình 7 minh họa Ví dụ 6 bằng cách hiển thị các vectơ **T**, **N** và **B** tại hai địa điểm trên đường xoắn ốc. Nhìn chung, các vectơ **T**, **N** và **B** bắt đầu tại các điểm khác nhau trên đường cong, hình thành một tập các vectơ trực giao, được gọi là khung **TNB**, di chuyển dọc theo đường cong khi t biến thiên. Khung **TNB** này đóng vai trò quan trọng trong ngành hình học vi phân và ứng dụng của nó tới chuyển động của tàu vũ trụ. Mặt phẳng được xác định bởi các véc tơ **N** và **B** tại điểm P trên đường cong C được gọi là mặt phẳng pháp diện của C tại P. Nó bao gồm tất cả các đường thẳng trực giao với véc tơ tiếp tuyến **T**.

Mặt phẳng được xác định bởi các véc tơ **T** và **N** được gọi là mặt phẳng mật tiếp (*osculating plane*). Nó là mặt phẳng chứa một phần của đường cong C tại lân cận của P. Với đường cong phẳng, mặt phẳng mật tiếp chính là mặt phẳng chứa đường cong đó.



Hình 7

Đường tròn nằm trong mặt phẳng mật tiếp của C tại P, có chung véc tơ tiếp tuyến với C tại P, nằm về phía lõm của C, có bán kính ρ = 1/κ (nghịch đảo của độ cong), được gọi là đường tròn mật tiếp của C tại P. Đó chính là đường tròn mô tả tốt nhất cho C tại lân cận của P, có cùng véc tơ tiếp tuyến, véc tơ pháp tuyến và độ cong.

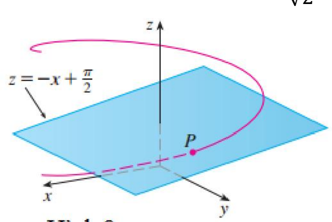
Ví dụ 7 Tìm phương trình mặt phẳng pháp diện và mặt phẳng mật tiếp của đường xoắn ốc cho trong Ví dụ 6 tại điểm (0, 1, π/2).

Lời giải Mặt phẳng pháp diện tại P có véc tơ pháp tuyến **r′**(π/2) = ⟨–1, 0, 1⟩, vì vậy phương trình pháp diện là $-1(x-0)+0(y-1)+1\left(z-\frac{\pi}{2}\right)=0$ hoặc $z=x+\frac{\pi}{2}$.

Mặt phẳng mật tiếp tại P chứa các véc tơ **T** và **B**, vì vậy véc tơ pháp tuyến của nó là

$$\mathbf{T}\times\mathbf{N}=\mathbf{B}.$$

Từ Ví dụ 6 ta có $\mathbf{B}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\langle sint,-cost,1\rangle$ nên $\mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,0,1\rangle$



Hình 8

Véc tơ pháp tuyến đơn giản là ⟨1, 0, 1⟩, vì vậy phương trình của mặt phẳng mật tiếp là

$$1(x-0)+0(y-1)+1\left(z-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

hay $$z=-x+\frac{\pi}{2}$$ ■

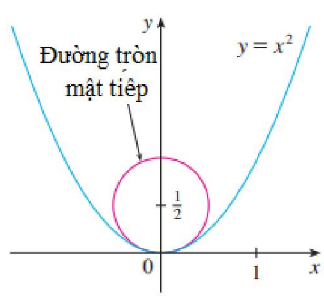
Hình 8 mô tả đường xoắn ốc và mặt phẳng mật tiếp trong Ví dụ 7.

Ví dụ 8 Tìm và vẽ đường tròn mật tiếp của parabol $y = x^2$ tại gốc tọa độ.

Lời giải Theo Ví dụ 5, độ cong của parabol tại gốc tọa độ là κ(0) = 2, vì vậy bán kính của đường tròn mật tiếp là 1/2 và tâm của nó là (0, 1/2). Vậy phương trình của nó là

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Để vẽ đồ thị ta sử dụng phương trình tham số $x=\frac{1}{2}cost, y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}sint$



Hình 9

Sau đây là bảng tóm tắt các công thức của các véc tơ tiếp tuyến, véc tơ pháp tuyến đơn vị, véc tơ phó pháp tuyến và độ cong:

$$\mathbf{T}=\frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}\qquad \mathbf{N}=\frac{\mathbf{T}'}{|\mathbf{T}'|}\qquad \mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}\qquad \boldsymbol{\kappa}=\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|=\frac{\mathbf{T}'}{|\mathbf{r}'|}=\frac{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

1.4. Chuyển động trong không gian: Vận tốc và gia tốc

1.4.1. Vận tốc và gia tốc

Trong phần này, chúng ta trình bày ý nghĩa của véc tơ tiếp tuyến, véc tơ pháp tuyến và độ cong được sử dụng trong vật lý để nghiên cứu chuyển động của các đối tượng, bao gồm cả vận tốc và gia tốc, dọc theo một đường cong trong không gian.

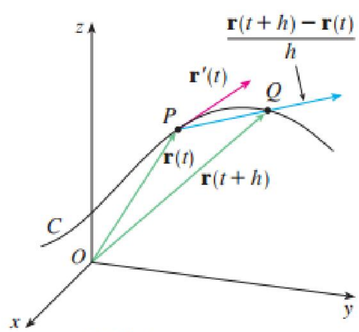
Đặc biệt, chúng ta theo bước chân của Newton bằng cách sử dụng những phương pháp này để nhận được định luật Kepler thứ nhất về chuyển động của các hành tinh.

Giả sử một chất điểm chuyển động trong không gian có véc tơ vị trí tại thời điểm t là **r**(t). Từ Hình 1 ta thấy với h nhỏ, véc tơ

[1] $$\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$$

xấp xỉ với hướng của chất điểm di chuyển dọc theo đường cong **r**(t). Độ lớn của nó là kích thước của véc tơ dịch chuyển trên một đơn vị thời gian. Véc tơ [1] cho ta vận tốc trung bình trong một khoảng thời gian h và giới hạn của nó là véc tơ vận tốc (*velocity*) **v**(t) tại thời điểm t:

[2] $$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}=\mathbf{r}'(t)$$



Hình 1

Vì vậy, véc tơ vận tốc cũng là véc tơ tiếp tuyến và trỏ theo hướng của đường tiếp tuyến. Tốc độ (*speed*) của chất điểm tại thời điểm *t* chính là độ lớn của véc tơ vận tốc, |**v**(t)|, tại đó. Điều này là phù hợp, bởi vì từ công thức [2] và phương trình 1.3.7 ta có

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}$$

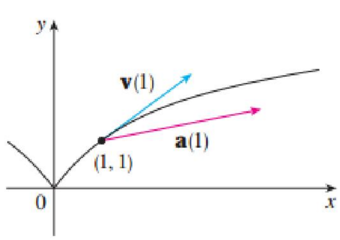
(*Bằng tỷ số giữa độ lệch khoảng cách và thời gian*)

Cũng như chuyển động trong không gian một chiều, gia tốc (*acceleration*) của chất điểm được định nghĩa là đạo hàm của vận tốc

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

Ví dụ 1 Véc tơ vị trí của một đối tượng chuyển động trong mặt phẳng được cho bởi $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$. Tìm và mô phỏng hình học véc tơ vận tốc, vận tốc, véc tơ gia tốc tại t = 1.

Lời giải Véc tơ vận tốc và gia tốc tại thời điểm t là



Hình 2

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$$

và vận tốc là

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

Khi t = 1 ta có

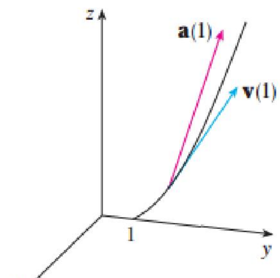
$\mathbf{v}(1) = 3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ $\quad\mathbf{a}(1) = 6\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ $\quad|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{13}$

Các véc tơ vận tốc và véc tơ gia tốc được minh họa trên Hình 2. ■

Ví dụ 2 Tìm véc tơ vận tốc, véc tơ gia tốc và vận tốc của chất điểm với véc tơ vị trí

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, e^t, te^t\rangle$$

Lời giải



Hình 3

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 2t, e^t, (t+1)e^t \rangle$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \langle 2, e^t, (t+2)e^t \rangle$$
$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + e^{2t} + (t+1)^2 e^{2t}}$$

Hình 3 mô tả đường đi của chất điểm trong Ví dụ 2 với véc tơ vận tốc và véc tơ gia tốc tại t = 1. ■

Các tích phân véc tơ đã được giới thiệu tại mục 1.2 có thể được sử dụng để tìm véc tơ vị trí khi biết véc tơ vận tốc hoặc véc tơ gia tốc, như trong ví dụ tiếp theo.

Ví dụ 3 Một chất điểm chuyển động với vị trí ban đầu là $\mathbf{r}(0) = \langle 1,0,0 \rangle$ và véc tơ vận tốc ban đầu là $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Gia tốc của nó là $\mathbf{a}(t) = 4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Xác định véc tơ vận tốc và véc tơ vị trí tại thời điểm t.

Lời giải Vì **a**(t) = **v**'(t) nên $\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)dt = \int (4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})dt =$

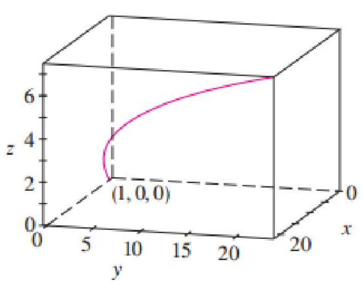
$= 2t^2\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} + \mathbf{C}$

Để xác định hằng số **C**, chúng ta sử dụng điều kiện $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Vì $\mathbf{v}(0) = \mathbf{C}$ nên $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, vì vậy $\mathbf{v}(t) = (2t^2+1)\mathbf{i} + (3t^2-1)\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}$

Vì $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ nên $\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)dt = \int [(2t^2+1)\mathbf{i} + (3t^2-1)\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}]dt$

$$= \left(\tfrac{2}{3}t^3 + t\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\mathbf{j} + \left(\tfrac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k} + \mathbf{D}$$



Hình 4

Đặt t = 0 ta được $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$, vì vậy véc tơ vị trí tại thời điểm t sẽ là

$$\mathbf{r}(t) = \left(\tfrac{2}{3}t^3 + t + 1\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\mathbf{j} + \left(\tfrac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k}$$

Hình 4 mô tả đường đi của chất điểm có véc tơ vị trí ***r***(t) nhận được trong Ví dụ 3. ■

Tổng quát, các tích phân véc tơ cho phép ta nhận được các véc tơ vận tốc khi biết véc tơ gia tốc và véc tơ vị trí khi biết véc tơ vận tốc

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(u)du \qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(u)du$$

Nếu biết lực tác động lên một chất điểm thì ta có thể tìm gia tốc theo định luật thứ hai của Newton về chuyển động. Dạng véc tơ của định luật này nói rằng tại bất kỳ thời điểm t, nếu một lực **F**(t) tác động lên một đối tượng có khối lượng *m* và gia tốc **a**(t), thì

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

Ví dụ 4 Một đối tượng có khối lượng *m* di chuyển trên một đường tròn với vận tốc góc không đổi ω, có véc tơ vị trí $\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\sin\omega t\,\mathbf{j}$.

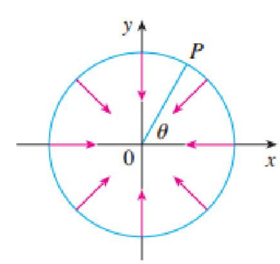
Tìm lực tác động lên đối tượng và chỉ ra rằng nó hướng về gốc tọa độ.

Lời giải Để tìm lực, trước hết chúng ta phải tìm gia tốc

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -a\omega sin\omega t\,\mathbf{i} + a\omega cos\omega t\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = -a\omega^2 cos\omega t\,\mathbf{i} - a\omega^2 sin\omega t\,\mathbf{j}$$

Từ định luật 2 Newton, ta có lực tác dụng

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t) = -m\omega^2(acos\omega t\,\mathbf{i} + asin\omega t\,\mathbf{j})$$



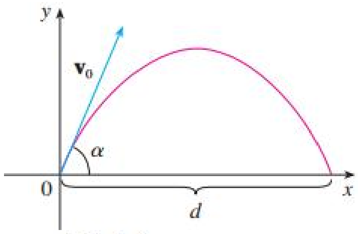
Hình 5

Vì $\mathbf{F}(t) = -m\omega^2\mathbf{r}(t)$ nên lực tác động ngược hướng với véc tơ bán kính **r**(t), do đó nó hướng tới gốc tọa độ (Hình 5). ■

Lực như vậy còn được gọi là lực hướng tâm (*centripetal force*).

Ví dụ 5 Một viên đạn được bắn với góc nghiêng α và vận tốc ban đầu $\mathbf{v}_0$ (Hình 6). Giả định rằng sức cản không khí là không đáng kể và các lực lượng bên ngoài chỉ có trọng lực, tìm véc tơ vị trí **r**(t) của viên đạn. Tìm giá trị của α để viên đạn đi xa nhất.

Lời giải Chúng ta xây dựng hệ trục tọa độ sao cho ban đầu viên đạn nằm tại gốc tọa độ.



Hình 6

Vì lực trọng trường hướng xuống dưới nên ta có

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -mg\,\mathbf{j}$$

trong đó $g = |\mathbf{a}| \approx 9.8\text{m/s}^2$, vì vậy $\mathbf{a} = -g\,\mathbf{j}$

Bởi vì $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}$ nên $\mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{C}$

ở đây $\mathbf{C} = \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Vì vậy $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$

Lấy tích phân ta nhận được $\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{D}$

Nhưng $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ nên

[3] $$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0$$

Nếu chúng ta viết $|\mathbf{v}_0| = v_0$ (Tốc độ ban đầu của viên đạn) thì

$$\mathbf{v}_0 = v_0\cos\alpha\,\mathbf{i} + v_0\sin\alpha\,\mathbf{j}$$

và phương trình [3] trở thành

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 cos\alpha)t\,\mathbf{i} + \left[(v_0 sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}$$

Vì vậy phương trình tham số của quỹ đạo là

[4] $$x = (v_0 cos\alpha)t \quad y = (v_0 sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Khi viên đạn chạm đất thì y = 0. Cho y = 0 ta nhận được t = 0 hoặc t = $(2v_0 sin\alpha)/g$.

Thay giá trị t thứ hai vào x ta được

$$d = x = \frac{(v_0 cos\alpha)(2v_0 sin\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 sin2\alpha}{g}$$

Rõ ràng, d đạt giá trị lớn nhất khi sin2α = 1, tức là $\alpha = \frac{\pi}{4}$. ■

Ta thấy rằng để viên đạn đạt độ cao nhất thì y(t) phải lớn nhất.

Ta có $y'(t) = v_0\sin\alpha - gt = 0$ với $t = (v_0\sin\alpha)/g$, khi đó

$$y = (v_0\sin\alpha)(v_0\sin\alpha)/g - g(v_0\sin\alpha)^2/(2g^2) = (v_0\sin\alpha)^2/(2g)$$

Để y lớn nhất thì sinα = 1 hay α = π/2, tức là bắn theo phương thẳng đứng.

Ví dụ 6 Một viên đạn được bắn ra với tốc độ đầu nòng là 150m/s và góc nghiêng 45° từ một độ cao 10m so với mặt đất. Xác định điểm rơi của viên đạn và tốc độ của nó.

Lời giải Nếu ta đặt gốc tọa độ trên mặt đất, thì vị trí ban đầu của viên đạn là (0, 10) và như vậy chúng ta cần phải điều chỉnh phương trình 4 bằng cách thêm 10 vào biểu thức của y.

Với $v_0 = 150\text{m/s}$, α = 45° và $g = 9.8\text{m/s}^2$ ta có

$$x = 150cos\frac{\pi}{4}t = 75\sqrt{2}t$$

$$y = 10 + 150 sin\frac{\pi}{4}t - \frac{1}{2}(9.8)t^2 = 10 + 75\sqrt{2}t - 4.9t^2$$

Sự kiện xảy ra khi y = 0, tức là $4.9t^2 - 75\sqrt{2}t - 10 = 0$.

Giải phương trình bậc hai này, chú ý đến t dương, ta nhận được

$$t = \frac{75\sqrt{2} + \sqrt{11.250 + 196}}{9.8} \approx 21.74$$

Vì vậy $x \approx 75\sqrt{2}(21.74) \approx 2306$, tức là viên đạn rơi cách xa 2306 m.

Véc tơ vận tốc của viên đạn là

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 75\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \left(75\sqrt{2} - 9.8t\right)\mathbf{j}$$

Vì vậy tốc độ tại thời điểm rơi là

$$|\mathbf{v}(21.74)| = \sqrt{\left(75\sqrt{2}\right)^2 + \left(75\sqrt{2} - 9.8(21.74)\right)^2} \approx 151 m/s \qquad \blacksquare$$

1.4.2. Các thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của gia tốc

Khi nghiên cứu chuyển động của một chất điểm, chúng ta thường phân tích véc tơ gia tốc thành hai thành phần, một theo hướng của véc tơ tiếp tuyến và một theo hướng pháp tuyến.

Nếu ta ký hiệu $v = |\mathbf{v}|$ là vận tốc của chất điểm thì

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

vì vậy $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$

Nếu lấy đạo hàm cả hai vế ta nhận được

[5] $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$

Theo công thức tính độ cong 1.3.9 ta có

[6] $\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{T}'|}{v}$ nên $|\mathbf{T}'| = \kappa v$

Véc tơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|$ nên từ [6] ta có $\mathbf{T}' = |\mathbf{T}'|\mathbf{N} = \kappa v\mathbf{N}$ và phương trình [5] trở thành

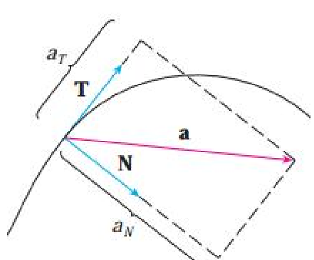
[7] $\mathbf{a} = v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}$

Ký hiệu a_T và a_N là các thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của véc tơ gia tốc, ta có

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$$

trong đó

[8] $a_T = v'$ và $a_N = \kappa v^2$



Hình 7

Phân tích được minh họa trên Hình 7.

Chúng ta hãy nhìn vào những gì có mặt trong công thức 7. Điều đầu tiên cần chú ý đó là véc tơ phó pháp tuyến **B** vắng mặt.

Cho dù như thế nào, một đối tượng di chuyển trong không gian, gia tốc của nó luôn luôn nằm trong mặt phẳng chứa **T** và **N** (mặt phẳng mật tiếp). (Nhớ lại rằng **T** đưa ra hướng của chuyển động và **N** trỏ theo hướng dịch của đường cong.) Tiếp theo chúng ta nhận thấy rằng thành phần tiếp tuyến của gia tốc là v', là tốc độ biến thiên của vận tốc, và thành phần pháp tuyến của gia tốc là kv^2, bằng độ cong nhân với bình phương của vận tốc. Điều này có ý nghĩa nếu chúng ta nghĩ về các hành khách trong một chiếc xe hơi, đột ngột rẽ trên một con đường có độ cong κ lớn. Thành phần gia tốc pháp thay đổi lớn và các hành khách bị dồn vào cửa xe. Tốc độ cao ở thời điểm rẽ cũng có hiệu ứng tương tự, trên thực tế, nếu tốc độ tăng gấp đôi thì a_N tăng gấp bốn.

Mặc dù chúng ta đã có biểu thức cho các thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của véc tơ gia tốc, nhưng chúng ta mong muốn có một biểu thức chỉ phụ thuộc vào **r**, **r'** và **r"**. Để có điều đó, ta nhân vô hướng hai vế của phương trình **v** = v**T** với véc tơ **a** trong phương trình [7]:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = v\mathbf{T}\cdot(v'\mathbf{T}+\kappa v^2\mathbf{N}) = vv'\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}+\kappa v^3\mathbf{T}\cdot\mathbf{N} = vv'$$

(Vì $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$ và $\mathbf{T}\cdot\mathbf{N} = 0$)

Do đó

[9] $$a_T = v' = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v} = \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|}$$

Sử dụng công thức tính độ cong theo Định lý 1.3.10, ta có

[10] $$a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}|\mathbf{r}'|^2 = \frac{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|}$$

Ví dụ 7 Một chất điểm chuyển động với véc tơ vị trí $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^2, t^3\rangle$. Tìm các thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của véc tơ gia tốc.

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 2t, 2t, 3t^2\rangle \qquad \mathbf{r}''(t) = \langle 2, 2, 6t\rangle \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{8t^2+9t^4}$$

Vậy thành phần gia tốc tiếp là $a_T = \frac{8t+18t^3}{\sqrt{8t^2+9t^4}} = \frac{8+18t^2}{\sqrt{8+9t^2}}$

Vì $\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'' = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2t & 2t & 3t^2\\ 2 & 2 & 6t\end{vmatrix} = 6t^2\langle 1, -1\rangle$ nên $a_N = \frac{6\sqrt{2}t^2}{\sqrt{8t^2+9t^4}} = \frac{6\sqrt{2}t}{\sqrt{8+9t^2}}$ ■

1.4.3. Các định luật của Kepler về chuyển động của hành tinh

Bây giờ chúng ta mô tả một trong những thành tựu vĩ đại của giải tích bằng cách chỉ ra nội dung của chương này có thể được sử dụng để chứng minh định luật của Kepler về chuyển động của hành tinh. Sau 20 năm nghiên cứu các quan sát thiên văn của nhà thiên văn học người Đan Mạch Tycho Brahe, nhà toán học và thiên văn học người Đức Johannes Kepler (1571–1630) xây dựng ba luật sau đây.

❖ **Các định luật của Kepler**

1 Các hành tinh xoay quanh Mặt trời theo các quỹ đạo hình elip mà mặt trời ở một tiêu điểm.
2 Đường nối Mặt trời tới hành tinh quét qua những diện tích bằng nhau trong khoảng thời gian bằng nhau.
3 Bình phương chu kỳ quỹ đạo của một hành tinh tỷ lệ với lập phương bán trục lớn của quỹ đạo elip của hành tinh đó.

Trong cuốn sách Nguyên lí toán học năm 1687, Isaac Newton đã chỉ ra rằng ba luật trên là hệ quả của hai định luật của ông, Định luật thứ hai về chuyển động và Định luật vạn vật hấp dẫn. Sau đây chúng ta chứng minh định luật thứ nhất của Kepler, các định luật còn lại coi như bài tập (với gợi ý).

Vì lực hấp dẫn của mặt trời lên một hành tinh là lớn hơn rất nhiều so với lực tác dụng bởi các thiên thể khác, nên chúng ta có thể bỏ qua tất cả các thiên thể khác trong vũ trụ ngoại trừ mặt trời và một hành tinh xoay quanh nó. Chúng ta sử dụng hệ trục tọa độ với Mặt trời ở gốc và giả sử **r** = **r**(t) là véc tơ vị trí của hành tinh. (Giả dụ, **r** có thể là véc tơ vị trí của Mặt trăng hoặc một vệ tinh di chuyển quanh trái đất hoặc một sao chổi di chuyển xung quanh một ngôi sao.) Véc tơ vận tốc là **v** = **r**' và véc tơ gia tốc là **a** = **r**''. Chúng ta sử dụng các định luật sau của Newton:

Định luật thứ hai về chuyển động $\quad \mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Định luật vạn vật hấp dẫn $\quad \mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{u}$

ở đây **F** là lực hấp dẫn lên hành tinh, *m* và *M* tương ứng là khối lượng của hành tinh và Mặt trời, *G* là hằng số hấp dẫn, *r* = |**r**|, **u** = **r** /*r* là véc tơ đơn vị của **r**.

Trước hết chúng ta chỉ ra rằng hành tinh di chuyển trong một mặt phẳng. Bằng cách đồng nhất các biểu thức của **F** trong hai định luật của Newton, ta nhận được

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}$$

vì vậy **a** song song với **r**. Điều đó dẫn tới $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0$. Chúng ta sử dụng công thức 5 trong Định lý 1.2.3 để viết

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r}' \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}' = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Vì vậy $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$, ở đây **h** là véc tơ hằng. (Chúng ta có thể giả thiết **h** ≠ **0**, tức là **r** và **v** là không song song.) Điều đó có nghĩa rằng véc tơ **r** = **r**(t) vuông góc với **h** đối với mọi t, vì vậy hành tinh này luôn luôn nằm trong mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với **h**. Vì thế quỹ đạo của hành tinh là đường cong phẳng.

Để chứng minh định luật thứ nhất của Kepler, chúng ta viết lại véc tơ **h** như sau:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u})' = r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u}' + r'\mathbf{u})$$
$$= r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') + rr'(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$$

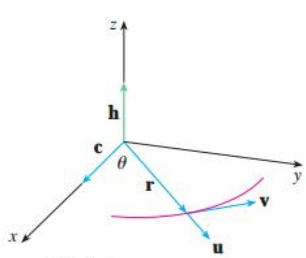
Vì vậy $\mathbf{a} \times \mathbf{h} = \frac{-GM}{r^2}\mathbf{u} \times (r^2\mathbf{u} \times \mathbf{u}') = -GM\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') = -GM[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}']$

Nhưng $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 1$ và bởi vì $|\mathbf{u}(t)| = 1$, nên theo Ví dụ 4 trong phần 1.2, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$

Vì vậy $\mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\mathbf{u}'$ và $(\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\mathbf{u}'$

Tích phân hai vế ta nhận được

[11] $\qquad \mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM\mathbf{u} + \mathbf{c}$, ở đây **c** là véc tơ hằng.



Hình 8

Chúng ta chọn hệ trục tọa độ sao cho véc tơ cơ sở **k** trỏ theo hướng của véc tơ **h**. Vì thế hành tinh di chuyển trên mặt phẳng xy. Vì cả $\mathbf{v} \times \mathbf{h}$ và **u** vuông góc với **h**, phương trình [11] chỉ ra rằng **c** thuộc mặt phẳng xy. Điều đó có nghĩa rằng chúng ta có thể chọn các trục x và y sao cho véc tơ **i** dọc theo hướng của **c**, như Hình 8.

Nếu θ là góc giữa **c** và **r** thì (*r*, *θ*) là tọa độ cực của hành tinh. Từ phương trình [11] ta có

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \mathbf{r} \cdot (GM\mathbf{u} + \mathbf{c}) = GM\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c}$$
$$= GMr\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + |\mathbf{r}||\mathbf{c}|cos\theta = GMr + rccos\theta, \text{ với } c = |\mathbf{c}|.$$

Vì vậy,

$$r = \frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h})}{GM + c\cos\theta} = \frac{1}{GM}\frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h})}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{với } e = c/GM$$

Nhưng

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{h} = \mathbf{h}\cdot\mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 = h^2, \text{với } h = |\mathbf{h}|$$

Vì vậy

$$r = \frac{h^2/(GM)}{1 + e\cos\theta} = \frac{eh^2/c}{1 + e\cos\theta}$$

Ký hiệu $d = h^2/c$, ta nhận được

[12] $$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Phương trình [12] chính là phương trình trong tọa độ cực của một đường conic với tiêu điểm tại gốc tọa độ và tâm sai *e*. Chúng ta biết rằng quỹ đạo của một hành tinh là một đường cong khép kín và do đó, đường conic này phải là một hình elip.

Điều này đã hoàn thành việc chứng minh định luật thứ nhất của Kepler. Chúng tôi hướng dẫn bạn chứng minh hai định luật còn lại trong phần "Đề án ứng dụng". Việc chứng minh ba định luật trên chứng tỏ rằng các phương pháp trong chương này cung cấp một công cụ rất hiệu quả giải thích một số các quy luật tự nhiên.

❖ **Đề án ứng dụng**

Johannes Kepler công bố ba luật sau đây về chuyển động của các thiên thể trên cơ sở số lượng lớn các dữ liệu về vị trí của các hành tinh vào các thời điểm khác nhau.

Các định luật của Kepler

1 Các hành tinh xoay quanh Mặt trời theo các quỹ đạo hình elip mà mặt trời ở một tiêu điểm.

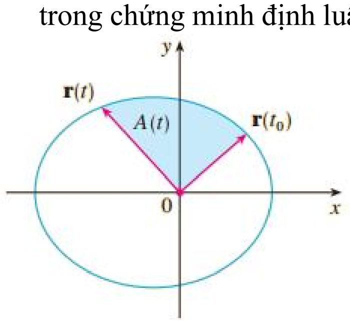
2 Đường nối Mặt trời tới hành tinh quét qua những diện tích bằng nhau trong khoảng thời gian bằng nhau.

3 Bình phương chu kỳ quỹ đạo của một hành tinh tỷ lệ với lập phương bán trục lớn của quỹ đạo ellipse của hành tinh đó.

Tại mục 1.4, chúng ta đã chứng minh định luật đầu tiên của Kepler bằng cách sử dụng các phép tính trên hàm véc tơ. Trong phần này, chúng ta đưa ra hướng dẫn nhằm chứng minh định luật thứ hai và thứ ba và khám phá một số hệ quả của chúng.

1. Sử dụng các bước sau để chứng minh định luật thứ 2 của Kepler. Các ký hiệu giống như trong chứng minh định luật thứ nhất ở phần 1.4. Đặc biệt, sử dụng tọa độ cực

$$\mathbf{r} = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j}$$



(a) Chứng minh rằng $\mathbf{h} = r^2\frac{d\theta}{dt}\mathbf{k}$

Theo trên, $\mathbf{h} = r^2(\mathbf{u}\times\mathbf{u}')$.

Vì $\mathbf{r} = \langle r\cos\theta, r\sin\theta, 0\rangle$ và $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ nên $\mathbf{u} = \langle\cos\theta, \sin\theta, 0\rangle$.

$$\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \langle -\sin\theta, \cos\theta, 0\rangle\frac{d\theta}{dt}$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{u}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{k} \qquad \text{Vậy } \mathbf{h} = r^2\frac{d\theta}{dt}\mathbf{k}$$

(b) Vì $\mathbf{h} = r^2 \frac{d\theta}{dt}\mathbf{k}$ nên h = |**h**| = $r^2 \left|\frac{d\theta}{dt}\right|$.

Nhưng vì θ tăng khi t tăng nên $\frac{d\theta}{dt}$ >0, dó đó $h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$

(c) Gọi A = A(t) là diện tích được quét bởi véc tơ bán kính **r** = **r**(t) trong khảng thời gian [t_0, t] như trên hình vẽ. Trong học phần Giải tích 1 ta đã có $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$, vì vậy

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

(d) Thao phần (b) thì $r^2\frac{d\theta}{dt} = h = |\boldsymbol{h}|$ là hằng số, nên $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h = hằng\ số$

Điều này nói lên rằng tốc độ quét là không đổi và định luật thứ hai của Kepler được chứng minh.

2. Giả sử T là chu kỳ của hành tinh quay quanh Mặt trời, tức T là khoảng thời gian cần thiết để nó di chuyển một vòng theo quỹ đạo của nó. Giả sử rằng độ dài các trục lớn và trục nhỏ của ellipse là 2a và 2b.

(a) Khi hành tinh quay được một chu kỳ mất T thời gian thì nó cũng quét được đúng một lần diện tích của hình ellipse tức là khi dA = πab thì dt = T.

Theo phần (d) ở trên ta có $\frac{\pi ab}{T} = \frac{1}{2}h$ hay $T = \frac{2\pi ab}{h}$.

(b) Ta biết rằng, với hệ tọa độ cực mà gốc cực trùng với một tiêu điểm thì phương trình của ellipse có các bán trục là a và b sẽ là

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,cos\theta}$$

trong đó tâm sai $e = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Vì vậy $1-e^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$, ta viết lại phương trình như sau

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,cos\theta} = \frac{b^2/a}{1+e\,cos\theta}$$

So sánh với phương trình [12] ta suy ra $\frac{h^2}{GM} = ed = \frac{b^2}{a}$, và do đó $\frac{b^2}{h^2} = \frac{a}{GM}$

(c) Theo phần (a) và (b), $T^2 = \left(\frac{2\pi ab}{h}\right)^2 = \frac{4\pi^2a^2b^2}{h^2} = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$

Định luật thứ ba của Kepler được chứng minh. Chú ý rằng hằng số tỷ lệ $\frac{4\pi^2}{GM}$ phụ thuộc vào hành tinh.

3. Chu kỳ của Trái đất xấp xỉ 365.25 ngày. Sử dụng yếu tố này và định luật Kepler thứ ba để tìm độ dài của trục lớn của quỹ đạo của Trái đất. Khối lượng của Mặt trời là $M = 1.99\times10^{30}$ kg, hằng số hấp dẫn $G = 6.67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

T = 365.25 (ngày) = 365.25 × 24×3600 (s)= 31557600 (s),

$GM = 6.67\times10^{-11}(Nm^2/kg^2)\times 1.99\times10^{30}$ (kg) = $6.67\times1.99\times10^{19}(Nm^2/kg)$ =

$= 667\times199\times10^{15}(kg\times m/s^2\times m^2/kg) = 132733\times10^{15}(m^3/s^2)$

Thay vào ta có $a^3 = \frac{T^2GM}{4\pi^2} = \frac{(31557600)^2(132733)\times10^{15}}{4\pi^2}$ (m^3)

$$a = \sqrt[3]{\frac{(31557600)^2(132733)}{4\pi^2}}10^5 \text{ (m)} \approx 207523931.5 \text{ (km)}$$

Độ dài trục lớn là 2a ≈ 415 047 863 km.

4. Có thể đặt một vệ tinh vào quỹ đạo trên trái đất để nó vẫn cố định tại một vị trí nhất định trên đường xích đạo. Tính toán độ cao cần thiết cho một vệ tinh như vậy. Khối lượng của Trái đất là 5.98×10^{24} kg, bán kính của nó là 6.37×10^{6} m. (Quỹ đạo này được gọi là quỹ đạo địa tĩnh Clarke (Clarke Geosynchronous Orbit) sau khi Arthur C. Clarke, người đầu tiên đề xuất ý tưởng vào năm 1945. Vệ tinh đầu tiên như vậy, Syncom II, đã được đưa ra trong tháng 7 năm 1963.)

Lời giải

Trên quỹ đạo địa tĩnh, vệ tinh không bị đẩy về phía Trái Đất mà cũng không bay ra xa hơn. Giả sử khối lượng của vệ tinh là m, khi đó các lực tác động lên vệ tinh phải triệt tiêu lẫn nhau theo Định luật 1 Newton về chuyển động: $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Lực **F** ở đây chủ yếu là lực ly tâm F_{lt} và lực hướng tâm F_{ht} (ở đây coi các lực khác là không đáng kể). Để tính toán độ cao quỹ đạo địa tĩnh, người ta cần phải cân bằng hai lực này:

$$F_{ht} = F_{lt}$$

Theo Định luật 2 Newton về chuyển động, ta có thể thay thế các lực trên bằng khối lượng của vật thể nhân với gia tốc mà vật thể có được do các lực này:

$$F_{ht} = ma_g \qquad F_{lt} = ma_c$$

trong đó a_g là gia tốc hướng tâm sinh ra bởi lực hấp dẫn, $|a_g| = \frac{MG}{r^2}$, với M là khối lượng Trái đất tính theo kg và hằng số hấp dẫn $G = 6.67\times10^{-11}$ $Nm^2/kg^2 = 6.67\times10^{-11}$ $m^3/(s^2.kg)$, r là khoảng cách từ tâm trái đất đến vệ tinh tính theo m (mét). Gia tốc ly tâm, a_c, có được do vệ tinh chuyển động trên quỹ đạo, $|a_c| = \omega^2 r$, ở đây ω là vận tốc góc tính bằng rad/s (radian/giây). Nó được tính theo công thức $\omega = 2\pi/86164 \approx 7.29\times10^{-5}$ (rad/s), trong đó 86164 là số giây để nó thực hiện được một chu kỳ (một góc 2π).

Cân bằng cả hai gia tốc ta thu được $\frac{MG}{r^2} = \omega^2 r$, hay $r = \sqrt[3]{\frac{MG}{\omega^2}}$

$$r = \sqrt[3]{\frac{(5.98)10^{24}(6.67)10^{-11}}{[(7.29)10^{-5}]^2}}\ (m) = \sqrt[3]{\frac{(5.98)(6.67)}{(7.29)^2}}\ 10(m)$$