EPSILON

2015
№ 1

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu Toán

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu Toán

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu Toán

EPSILON

Chủ biên: TRẦN NAM DŨNG

Biên tập viên: VÕ QUỐC BÁ CẨN

LÊ PHÚC LỮ

Số 1, ngày 13 tháng 02 năm 2015

LỜI NGỎ

Ban biên tập Epsilon

Epsilon, tức là rất nhỏ, nhưng không bằng 0. Và nhiều epsilon cộng lại có thể trở thành những cái đáng kể. Có thể là 1, là 2, có thể là vô cùng. Điều quan trọng là ta có biết cách kết hợp các epsilon khác nhau lại hay không. Epsilon là tờ báo của cộng đồng, dành cho cộng đồng. Nó là một sự khởi đầu. Còn tiếp nối như thế nào sẽ hoàn toàn phụ thuộc vào sự đón nhận, ủng hộ, trợ giúp, tham gia của cộng đồng. Để có được sự xuất hiện đều đặn, đúng hạn, Epsilon sẽ không có bất cứ một giới hạn về số trang của một kỳ, số trang của một bài, và cũng không giới hạn chủ đề, không bắt buộc phải có mục này, mục kia.

Chủ đề của Epsilon đa dạng nhưng sẽ chủ yếu là về toán và các vấn đề liên quan, mức độ thường thức phổ thông, truyền bá toán học.

Epsilon luôn mong muốn nhận được sự đóng góp từ phía các nhà toán học, các nhà khoa học, các thầy cô giáo, các bạn sinh viên, các bạn học sinh và tất cả những người yêu toán và những người yêu những người yêu toán. Để nâng cao chất lượng tạp chí, chúng tôi xin được phép sẽ trao đổi với từng tác giả, cùng biên tập lại các bài báo phù hợp.

Số báo mà các bạn đang đọc là số 1 của tạp chí. Trong số này, chúng tôi có tổng cộng 9 bài viết. Bên cạnh các bài liên quan đến kỳ thi HSG cấp quốc gia (VMO) 2015 vừa qua, chúng tôi cũng giới thiệu một số bài viết thường thức, lý thuyết Toán cổ điển và hiện đại.

Epsilon sẽ cố gắng ra đều đặn 2 tháng 1 lần, vào các ngày 13 của các tháng chẵn. Chọn ngày 13 để thể hiện sự quyết tâm. Vạn sự khởi đầu nan. Chúng ta hãy cố gắng khởi đầu. Và cố gắng đi tiếp. Đi nhiều người, bạn sẽ đi rất xa. . .

MỤC LỤC

SỐ PHỨC VÀ ĐA THỨC

Trần Nam Dũng (*ĐHKHTN, ĐHQG Tp HCM*)

Tóm tắt

Trong kỳ thi chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia năm học 2014-2015 vừa qua, có 2 bài toán có thể giải rất hiệu quả và ngắn gọn nếu dùng đến số phức. Thế nhưng, số học sinh nắm vững số phức để sử dụng một cách hiệu quả lại không nhiều, và các bạn đã rất vất vả giải các bài toán đã cho bằng các phương pháp khác.

Trong bài viết nhỏ này, chúng tôi muốn giới thiệu trước hết là các ứng dụng của số phức trong bài toán về đa thức, sau đó là ứng dụng của số phức và đa thức trong các bài toán tổ hợp đếm.

1. Số phức trong các bài toán về đa thức

Nghiệm của đa thức đóng vai trò quan trọng trong việc xác định một đa thức. Cụ thể nếu đa thức $P(x)$ bậc n có n nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì $P(x)$ có dạng $P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$. Tuy nhiên, nếu chỉ xét các nghiệm thực thì trong nhiều trường hợp sẽ không có đủ số nghiệm.

Hơn nữa, trong các bài toán phương trình hàm đa thức, nếu chỉ xét các nghiệm thực thì lời giải sẽ là không hoàn chỉnh. Định lý cơ bản của đại số vì vậy đóng một vai trò hết sức quan trọng trong dạng toán này. Và ta sử dụng cách phát biểu đơn giản nhất của nó: một đa thức với hệ số phức (thực) luôn có ít nhất một nghiệm phức. Dưới đây ta xem xét một số áp dụng.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các đa thức* $P(x)$ *khác hằng sao cho:*

$$P(x) \cdot P(x+1) = P(x^2 + x + 1). \tag{1}$$

Lời giải. Giả sử α là nghiệm của $P(x) = 0$. Khi đó $\alpha^2 + \alpha + 1$ cũng là nghiệm. Thay x bằng $x - 1$ trong (1), ta thấy rằng

$$P(x-1) \cdot P(x) = P(x^2 - x + 1).$$

Vì $P(\alpha) = 0$ nên $\alpha^2 - \alpha + 1$ cũng là nghiệm của $P(x) = 0$.

Chọn α là nghiệm có mô-đun lớn nhất (nếu tồn tại vài nghiệm với mô-đun lớn nhất, ta chọn một trong số các nghiệm đó). Cách chọn α như vậy suy ra $|\alpha^2 + \alpha + 1| \leqslant |\alpha|$ và $|\alpha^2 - \alpha + 1| \leqslant |\alpha|$ vì cả $\alpha^2 + \alpha + 1$ và $\alpha^2 - \alpha + 1$ đều là nghiệm của $P(x) = 0$.

Ta nhận xét rằng $\alpha \neq 0$. Tiếp theo, ta có

$$2|\alpha| = \left|(\alpha^2 + \alpha + 1) - (\alpha^2 - \alpha + 1)\right| \leqslant |\alpha^2 + \alpha + 1| + |\alpha^2 - \alpha + 1| \leqslant 2|\alpha|.$$

Vế đầu và vế cuối của bất đẳng thức trên bằng nhau nên dấu bằng phải xảy ra, từ đây ta suy ra $\alpha^2 + \alpha + 1 = -\lambda(\alpha^2 - \alpha + 1)$ với một hằng số dương λ nào đó. Hơn nữa từ tính lớn nhất của $|\alpha|$ ta cũng có $|\alpha^2 + \alpha + 1| = |\alpha^2 - \alpha + 1| = |\alpha|$. Như vậy $\lambda = 1$ và ta có

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = -(\alpha^2 - \alpha + 1)$$

suy ra $\alpha^2 + 1 = 0$. Từ đó $\alpha = \pm i$ và $x^2 + 1$ là thừa số của $P(x)$. Như vậy ta có thể viết $P(x)$ dưới dạng:

$$P(x) = (x^2 + 1)^m \cdot Q(x)$$

trong đó $Q(x)$ là đa thức không chia hết cho $x^2 + 1$. Thế ngược trở lại vào phương trình (1), ta thấy $Q(x)$ cũng thoả mãn:

$$Q(x) \cdot Q(x+1) = Q(x^2 + x + 1).$$

Nếu $Q(x) = 0$ lại có nghiệm thì lý luận trên đây suy ra nghiệm có mô-đun lớn nhất của nó phải là $\pm i$. Điều này không thể xảy ra vì $x^2 + 1$ không chia hết $Q(x)$. Ta suy ra rằng $Q(x)$ là một hằng số, giả sử là c. Thay vào phương trình của Q, ta được $c = 1$. Như vậy lớp các đa thức thoả mãn phương trình (1) là $P(x) = (x^2 + 1)^m$ với m là một số nguyên dương nào đó. □

Bài toán 2. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ khác hằng sao cho:*

$$P(x) \cdot P(x+1) = P(x^2).$$

Lời giải. Giả sử α là nghiệm của $P(x) = 0$. Khi đó từ phương trình suy ra $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \ldots$ cũng là nghiệm của $P(x) = 0$. Từ đây suy ra rằng $|\alpha| = 0$ hoặc $|\alpha| = 1$, vì nếu ngược lại ta sẽ thu được dãy vô hạn các nghiệm của $P(x)$. Tương tự, bằng cách thay $x = \alpha - 1$, ta suy ra $(\alpha - 1)^2$ cũng là nghiệm của $P(x)$. Bằng các lý luận tương tự, ta cũng được $\left|(\alpha - 1)^2\right| = 0$ hoặc $\left|(\alpha - 1)^2\right| = 1$.

Giả sử rằng $|\alpha| = 1$ và $\left|(\alpha - 1)^2\right| = 1$. Viết $\alpha = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$, ta có

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= (1 - \cos\varphi) - i \cdot \sin\varphi \\ &= 2 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2} - 2i \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \\ &= 2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \left(\sin\frac{\varphi}{2} - i \cdot \cos\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

nên $(1 - \alpha)^2 = -4 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2} \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, suy ra

$$\left|(1 - \alpha)^2\right| = 4 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2} = 2 - 2 \cdot \cos\varphi.$$

Do $\left|(1 - \alpha)^2\right| = 1$ nên $2 \cdot \cos\varphi = 1$. Từ đây suy ra $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, ta tính được $\varphi = \frac{\pi}{3}$ hoặc $\frac{5\pi}{3}$. Giả sử $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Xét α^2 cũng là nghiệm của $P(x) = 0$. Như vậy $(\alpha^2 - 1)^2$ cũng là nghiệm của $P(x) = 0$ và $\left|(\alpha^2 - 1)^2\right| = 2 - 2 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = 3$. Mâu thuẫn vì mọi nghiệm của $P(x) = 0$ có mô-đun bằng 0 hoặc 1. Tương tự với trường hợp $\varphi = \frac{5\pi}{3}$.

Như vậy, ta có thể kết luận rằng $\alpha = 0$, hoặc $\alpha - 1 = 0$. Từ đây $P(x)$ có dạng $cx^m(1 - x)^n$, với c là một hằng số khác 0 nào đó và m, n là các số nguyên không âm không đồng thời bằng 0.

Thay vào phương trình đã cho, ta dễ dàng kiểm tra được rằng $c = 1$ và $m = n$. Như vậy lớp các đa thức thoả mãn điều kiện đã cho là $P(x) = x^m(1 - x)^m$ trong đó m là một số tự nhiên. □

Nghiệm phức của đa thức với hệ số nguyên, trong nhiều trường hợp là chìa khoá để chứng minh tính bất khả quy (trên $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{Q}$) của đa thức đó. Chúng ta tìm hiểu các lý luận mẫu trong vấn đề này thông qua các ví dụ sau:

Bài toán 3 (IMO, 1993). *Chứng minh rằng với mọi $n > 1$, đa thức $x^n + 5x^{n-1} + 3$ không thể phân tích thành tích của hai đa thức có bậc không nhỏ hơn 1 với hệ số nguyên.*

Lời giải. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là tất cả các nghiệm của $P(x)$. Khi đó ta có $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$. Suy ra $3 = (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n$. Ta có với mỗi i thì $x_i^n + 5x_i^{n-1} + 3 = 0$, suy ra

$$3 = |x_i|^{n-1} \cdot |x_i + 5|, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Giả sử ngược lại rằng đa thức $P(x)$ khả quy, tức là $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$ với $Q(x)$, $S(x)$ là các đa thức không hằng với hệ số nguyên. Thế thì rõ ràng $Q(x)$ sẽ là tích của một số thừa số $x - x_i$ và $S(x)$ là tích của các thừa số còn lại.

Không mất tính tổng quát, giả sử:

$$Q(x) = (x - x_1)\cdots(x - x_k), \quad S(x) = (x - x_{k+1})\cdots(x - x_n).$$

Suy ra $|x_1 x_2 \cdots x_k|$ và $|x_{k+1} \cdots x_n|$ là các số nguyên có tích là 3. Như vậy một số bằng 1 và một số bằng 3. Không mất tính tổng quát, giả sử $|x_1 x_2 \cdots x_k| = 3$ và $|x_{k+1} \cdots x_n| = 1$.

Trong (1) cho i chạy từ 1 đến k rồi nhân vế theo vế, ta được

$$3^k = |x_1 \cdots x_k|^{n-1} \cdot \big|(x_1 + 5)\cdots(x_k + 5)\big| = 3^{n-1}\big|Q(-5)\big|.$$

Suy ra $k \geqslant n - 1$. Như vậy $S(x)$ là nhị thức bậc nhất, suy ra $P(x)$ có nghiệm nguyên. Nhưng nghiệm nguyên của $P(x)$ chỉ có thể là -1, 1, -3, 3. Kiểm tra lại thì chúng đều không là nghiệm của $P(x)$. Mâu thuẫn. Điều này chứng tỏ điều giả sử là sai, tức là đa thức $P(x)$ bất khả quy. □

Bài toán 4 (Nhật Bản, 1999). *Chứng minh rằng đa thức:*

$$f(x) = (x^2 + 1^2)(x^2 + 2^2)\cdots(x^2 + n^2) + 1$$

không thể phân tích thành tích của hai đa thức hệ số nguyên bậc lớn hơn hay bằng 1.

Lời giải. Giả sử ngược lại $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ với $g(x)$, $h(x)$ là các đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1. Khi đó, để ý rằng $f(\pm ki) = 1$ với $k = 1, 2, \ldots, n$, ta có

$$1 = g(ki) \cdot h(ki), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n.$$

Chú ý rằng 1 chỉ có 4 cách phân tích thành tích của các số nguyên trong $\mathbb{Z}[i]$ là $1 \cdot 1$, $(-1)\cdot(-1)$, $i \cdot (-i)$ và $(-i)\cdot i$ nên ta có với mọi $k \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$ thì

$$\big(g(ki), h(ki)\big) \in \big\{(1, 1), (-1, -1), (i, -i), (-i, i)\big\}.$$

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có $g(ki) = \overline{h(ki)} = h(-ki)$. Như thế đa thức $g(x) - h(-x)$ có $2n$ nghiệm phân biệt, trong khi bậc của nó nhỏ hơn $2n$. Vậy ta phải có $g(x) - h(-x)$ là đa thức hằng 0, tức là $g(x) = h(-x)$. Từ đó $\deg(g) = \deg(h) = n$.

Vì $f(x)$ là đa thức đơn khởi nên ta có thể giả sử $g(x)$, $h(x)$ đơn khởi. Khi đó đa thức $g^2(x) - h^2(x)$ có bậc nhỏ hơn $2n$. Đa thức này có ít nhất $2n$ nghiệm ki với $k \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$. Suy ra $g^2(x) - h^2(x) = 0$. Ta không thể có $g(x) = -h(x)$ vì g và h đơn khởi. Vậy ta phải có $g(x) = h(x)$. Như thế $f(x) = g^2(x)$.

Từ đây suy ra $g^2(0) = f(0) = (n!)^2 + 1$. Điều này là không thể vì $g(0)$ là số nguyên và $n \geqslant 1$. $\square$

Bài toán 5. *Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x) = (x^2-7x+6)^{2n}+13$ có thể phân tích thành tích của hai đa thức $Q(x)$, $S(x)$ với hệ số nguyên thì $Q(x)$ và $S(x)$ đều có bậc $2n$.*

Lời giải. Thật vậy, giả sử $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$. Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{4n}$ là các nghiệm phức của $P(x)$ thì $Q(x)$ và $S(x)$ sẽ là tích của các thừa số $(x - x_i)$. Đánh số lại nếu cần, ta giả sử:

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k) \text{ với } 1 \leqslant k < 4n.$$

Ta có $\left[(x_i - 1)(x_i - 6)\right]^{2n} = -13$. Từ đây suy ra

$$\left|(x_i - 1)(x_i - 6)\right| = 13^{\frac{1}{2n}}. \qquad (*)$$

Mặt khác, $(1-x_1)\cdots(1-x_k) = Q(1)$ nguyên nên $\left|(1-x_1)\cdots(1-x_k)\right|$ cũng nguyên. Tương tự $|(6 - x_1)\cdots(6 - x_k)|$ nguyên. Từ đây suy ra $m = \left|(x_1 - 1)(x_1 - 6)(x_2 - 1)(x_2 - 6)\cdots(x_k - 1)(x_k - 6)\right|$ nguyên. Nhưng theo $(*)$ thì $m = 13^{\frac{k}{2n}}$. Suy ra $k = 2n$. Vậy $Q(x)$, $S(x)$ đều phải có bậc là $2n$. $\square$

Chú ý từ kết quả bài toán này dễ dàng suy ra kết quả bài 2 của đề thi học sinh giỏi Toán Quốc gia năm học 2013-2014:

Bài toán 6 (VMO, 2014). *Cho đa thức $P(x) = (x^2 - 7x + 6)^{2n} + 13$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ không thể biểu diễn được dưới dạng tích của $n+1$ đa thức khác hằng số với hệ số nguyên.*

Nếu đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$ thì mọi nghiệm của $Q(x)$ đều là nghiệm của $P(x)$. Tính chất đơn giản này là chìa khoá để giải nhiều bài toán về sự chia hết của đa thức. Chúng ta xem xét một số ví dụ.

Bài toán 7. *Với giá trị nào của n thì đa thức $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$?*

Lời giải. Ta có $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}$ là nghiệm của đa thức $Q(x) = x^2 + x + 1$. Vì đa thức $x^2 + x + 1$ là bất khả quy nên đa thức $P(x) = x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho $Q(x)$ khi và chỉ khi $P(\varepsilon) = 0$. Điều này tương đương với

$$\cos\frac{4n\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{4n\pi}{3} + \cos\frac{2n\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2n\pi}{3} + 1 = 0,$$

hay

$$\begin{cases} \cos\dfrac{2n\pi}{3} \cdot \left(2 \cdot \cos\dfrac{2n\pi}{3} + 1\right) = 0 \\ \sin\dfrac{2n\pi}{3} \cdot \left(2 \cdot \cos\dfrac{2n\pi}{3} + 1\right) = 0 \end{cases}$$

Từ hệ phương trình trên, ta dễ dàng suy ra $2 \cdot \cos\frac{2n\pi}{3} + 1 = 0$, tức n phải là số không chia hết cho 3. Vậy với $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$ thì $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$. $\square$

Trong ví dụ dưới đây, một lần nữa, căn của đơn vị lại đóng vai trò then chốt trong việc đi đến lời giải.

Bài toán 8 (USAMO, 1976). *Cho $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ là các đa thức sao cho*

$$P(x^5) + x \cdot Q(x^5) + x^2 \cdot R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot S(x). \qquad (1)$$

Chứng minh rằng $P(x)$ chia hết cho $x - 1$.

Lời giải. Đặt $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ thì $\omega^5 = 1$. Thay x lần lượt bằng ω, ω^2, ω^3, ω^4, ta được các phương trình:

$$\begin{aligned} P(1) + \omega \cdot Q(1) + \omega^2 \cdot R(1) &= 0, \\ P(1) + \omega^2 \cdot Q(1) + \omega^4 \cdot R(1) &= 0, \\ P(1) + \omega^3 \cdot Q(1) + \omega^6 \cdot R(1) &= 0, \\ P(1) + \omega^4 \cdot Q(1) + \omega^8 \cdot R(1) &= 0. \end{aligned}$$

Nhân các phương trình từ 1 đến 4 lần lượt với $-\omega$, $-\omega^2$, $-\omega^3$, $-\omega^4$, ta được các phương trình sau:

$$\begin{aligned}
&-\omega\cdot P(1)-\omega^2\cdot Q(1)-\omega^3\cdot R(1)=0,\\
&-\omega^2\cdot P(1)-\omega^4\cdot Q(1)-\omega\cdot R(1)=0,\\
&-\omega^3\cdot P(1)-\omega\cdot Q(1)-\omega^4\cdot R(1)=0,\\
&-\omega^4\cdot P(1)-\omega^3\cdot Q(1)-\omega^2\cdot R(1)=0.
\end{aligned}$$

Cộng tất cả 8 phương trình lại theo vế và sử dụng tính chất của ω là $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$, ta được $5\cdot P(1)=0$, tức $x-1\mid P(x)$. □

Bài toán 9 (VMO, 2015)**.** *Cho dãy đa thức $f_n(x)$ được xác định bởi $f_0(x)=2$, $f_1(x)=3x$, $f_n(x)=3x\cdot f_{n-1}(x)+(1-x-2x^2)f_{n-2}(x)$ với mọi $n\geqslant 2$. Tìm tất cả các giá trị n để đa thức $f_n(x)$ chia hết cho đa thức x^3-x^2+x.*

Lời giải. Với mỗi x cố định, ta xét dãy số $a_i=f_i(x)$, khi đó ta có $a_0=2$, $a_1=3x$, $a_n=3xa_{n-1}+(1-x-2x^2)a_{n-2}$ với mọi $n\geqslant 2$. Xét phương trình đặc trưng $X^2-3xX+2x^2-x-1=0$ có hai nghiệm là $x+1$ và $2x-1$. Từ đó ta có dạng tổng quát của (a_n) là $a_n=c_1(x+1)^n+c_2(2x-1)^n$. Từ các điều kiện ban đầu ta suy ra $c_1=c_2=1$, tức là $a_n=(x+1)^n+(2x-1)^n$. Điều này đúng với mọi giá trị của x, do đó ta có $f_n(x)=(x+1)^n+(2x-1)^n$.

Bây giờ, ta tìm n sao cho $f_n(x)=(x+1)^n+(2x-1)^n$ chia hết cho đa thức $Q(x)=x^3-x^2+x$. Vì 0 và $\alpha=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ là nghiệm của $Q(x)$ nên điều này xảy ra khi và chỉ khi 0 và α là nghiệm của $f_n(x)$. Để có điều này ta phải có:

i) $1^n+(-1)^n=0$, suy ra n lẻ.

ii) $\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(i\sqrt{3}\right)^n=0$, tức $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n+i^n=0$. Chuyển các số phức sang dạng lượng giác và dùng công thức lũy thừa, ta được $\cos\frac{n\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{n\pi}{6}+\cos\frac{n\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{n\pi}{2}=0$, tức n phải là số chia hết cho 3.

Kết hợp hai điều kiện i) và ii), ta suy ra điều kiện cần và đủ để $f_n(x)$ chia hết cho $Q(x)$ là $n=6m+3$ với m nguyên không âm. □

2. Số phức và đa thức trong bài toán đếm

Số phức có những ứng dụng rất hiệu quả trong các bài toán đếm. Và vai trò trung tâm trong kỹ thuật ứng dụng số phức vào các bài toán đếm tiếp tục là căn nguyên thuỷ của đơn vị. Chú ý là nếu ε là căn nguyên thuỷ bậc n của đơn vị thì ta có

i) $1 + \varepsilon + \cdots + \varepsilon^{n-1} = 0$.

ii) $1 + \varepsilon^k + \cdots + \varepsilon^{k(n-1)} = 0$ với $(k, n) = 1$.

Đây chính là tính chất quan trọng của căn nguyên thuỷ thường được sử dụng trong giải toán.

Bài toán 10 (Chọn đội tuyển PTNK, 2009)**.** *Tìm số tất cả các số có n chữ số lập từ các chữ số $3, 4, 5, 6$ và chia hết cho 3.*

Lời giải. Gọi c_n là số các số có n chữ số lập từ các chữ số $3, 4, 5, 6$ và chia hết cho 3. Gọi α là một nghiệm của phương trình $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Khi đó $\alpha^3 = 1$ và $\alpha^{2k} + \alpha^k + 1$ nhận giá trị $= 0$ nếu k không chia hết cho 3 và $= 3$ nếu k chia hết cho 3.

Xét đa thức $P(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n$. Dễ thấy c_n chính là bằng tổng các hệ số của các số mũ chia hết cho 3 trong khai triển của $P(x)$. Nói cách khác, nếu $P(x) = \sum_{k=0}^{6n} a_k x^k$ thì $c_n = \sum_{k=0}^{2n} a_{3k}$. Mặt khác ta có

$$P(1) + P(\alpha) + P(\alpha^2) = \sum_{k=0}^{6n} a_k(1 + \alpha + \alpha^2) = 3\sum_{k=0}^{2n} a_{3k}.$$

Cuối cùng, do $P(1) = 4^n$, $P(\alpha) = P(\alpha^2) = 1$ nên ta có

$$c_n = \sum_{k=0}^{2n} a_{3k} = \frac{4^n + 2}{3}. \qquad \square$$

Bài toán 11 (VMO, 2015)**.** *Cho $K \in \mathbb{N}^*$. Tìm số các số tự nhiên n không vượt quá 10^K thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

i) *n chia hết cho 3.*

ii) *Tất cả các chữ số trong biểu diễn thập phân của n đều thuộc tập hợp $\mathcal{A} = \{2, 0, 1, 5\}$.*

Lời giải. Vì 10^K không chia hết cho 3 nên ta chỉ cần xét các số từ 0 cho đến $99\cdots9$ (K chữ số 9). Bổ sung các chữ số 0 vào trước nếu cần thiết, ta đưa về xét các số có dạng $\overline{a_1a_2\cdots a_K}$ với a_i thuộc $\{2, 0, 1, 5\}$. Ta cần đếm các số như vậy và chia hết cho 3.

Chú ý là $\overline{a_1\cdots a_K}$ chia hết cho 3 khi và chỉ khi $a_1+\cdots+a_K$ chia hết cho 3, ta đưa bài toán về việc đếm số các bộ $(a_1, a_2, \ldots, a_K) \in \mathcal{A}^K$ sao cho $a_1 + a_2 + \cdots + a_K$ chia hết cho 3.

Tiếp theo, hoàn toàn tương tự như ở bài trên, xét đa thức:

$$P(x) = (x^2 + 1 + x + x^5)^K.$$

Ta có

$$P(x) = (x^2 + x + 1 + x^5)^k = \sum_{(a_1, a_2, \ldots, a_K) \in \mathcal{A}^k} x^{a_1+a_2+\cdots+a_K}.$$

Tổng các hệ số của $P(x)$ bằng số các bộ $(a_1, \ldots, a_K) \in \mathcal{A}^K$ và bằng 4^K. Hơn nữa số các bộ $(a_1, \ldots, a_K) \in \mathcal{A}^K$ sao cho $a_1 + a_2 + \cdots + a_K$ bằng tổng các hệ số của các số mũ chia hết cho 3 trong $P(x)$.

Đặt $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$. Ta cần tính:

$$S = a_0 + a_3 + a_6 + \cdots.$$

Gọi ε là nghiệm của phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ thì ta có $\varepsilon^3 = 1$. Từ đó dễ dàng suy ra $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k}$ nhận giá trị bằng 0 với mọi k không chia hết cho 3 và bằng 3 với k chia hết cho 3. (∗)

Ta có

$$\begin{aligned}
P(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots,\\
P(\varepsilon) &= a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + a_4\varepsilon^4 + \cdots,\\
P(\varepsilon^2) &= a_0 + a_1\varepsilon^2 + a_2\varepsilon^4 + a_3\varepsilon^6 + a_4\varepsilon^8 + \cdots.
\end{aligned}$$

Áp dụng tính chất (∗), ta suy ra

$$P(1) + P(\varepsilon) + P(\varepsilon^2) = 3a_0 + 3a_3 + 3a_6 + \cdots$$

Suy ra $S = \frac{P(1)+P(\varepsilon)+P(\varepsilon^2)}{3} = \frac{4^k+\varepsilon^{2K}+\varepsilon^{4K}}{3}$. Cuối cùng, lại áp dụng tính chất (∗), ta suy ra $S = \frac{4^K-1}{3}$ nếu K không chia hết cho 3 và $S = \frac{4^K+2}{3}$ nếu K chia hết cho 3. □

Khi ta làm việc với các tập con, tức là các tổ hợp không lặp thì mô hình những đa thức trên đây không sử dụng được nữa. Với các bài toán này, ta cần đến một mô hình khác.

Bài toán 12. *Cho* $X = \{0, 1, \ldots, 25\}$. *Tìm số các tập con* 7 *phần tử có tổng các phần tử chia hết cho* 19.

Lời giải. Với mỗi tập con $A \subset X$, gọi $S(A)$ là tổng các phần tử của A. Ta cũng quy ước $S(\emptyset) = 0$. Với mỗi $i = 0, 1, \ldots, 18$, đặt:

$$P(i) = \left\{A \subset X \,|\, |A| = 7 \text{ và } S(A) \equiv i \pmod{19}\right\}.$$

Ta cần tính $P(0)$. Gọi a là căn nguyên thủy bậc 19 của 1. Khi đó $1 + a + a^2 + \cdots + a^{18} = 0$ và $x^{19} - 1 = (x-1)(x-a)\cdots(x-a^{18})$.

Xét đa thức $Q(x) = (x-1)(x-a)(x-a^2)\cdots(x-a^{25})$. Ta tính hệ số của x^{19} trong $Q(x)$ bằng 2 cách. Một mặt, nếu khai triển $Q(x)$ ra thì để được x^{19}, ta cần lấy x từ 19 dấu ngoặc, còn 7 dấu ngoặc khác sẽ lấy các số có dạng a^k với k thuộc $\{0, 1, \ldots, 25\}$. Như thế, ta sẽ có tổng các số có dạng $a^{S(A)}$ với A chạy qua tất cả các tập con 7 phần tử của X. Chú ý rằng $a^{S(A)}$ chỉ phụ thuộc vào số dư khi chia $S(A)$ cho 19 (đó là lý do tại sao ta lấy căn bậc 19 của đơn vị) nên từ đây dễ dàng suy ra tổng nói trên bằng:

$$-\Big[\big|P(0)\big| + P(1)\cdot a + \cdots + P(18)\cdot a^{18}\Big].$$

Mặt khác, $P(x) = (x^{19}-1)(x-1)(x-a)\cdots(x-a^6)$. Suy ra hệ số của x^{19} bằng $-1\cdot a\cdot a^2\cdots a^6 = -a^2$. Từ đây suy ra

$$\big|P(0)\big| + \big|P(1)\big|a + \big[\big|P(2)\big| - 1\big]a^2 + \cdots + \big|P(18)\big|a^{18} = 0.$$

Điều này đúng với mọi a là nghiệm của phương trình:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{18} = 0.$$

Suy ra đa thức $\big|P(0)\big| + \big|P(1)\big|x + \big[\big|P(2)\big| - 1\big]x^2 + \cdots + \big|P(18)\big|x^{18}$ tỷ lệ với đa thức $1 + x + \cdots + x^{18}$ và vì thế:

$$\big|P(0)\big| = \big|P(1)\big| = \big|P(2)\big| - 1 = \cdots = \big|P(18)\big|.$$

Như vậy, tất cả các $\big|P(i)\big|$, $i \neq 2$, bằng nhau và bằng $\frac{C_{19}^7 - 1}{19}$. Riêng $|P(2)|$ lớn hơn đúng 1 đơn vị! Vậy đáp số là $\frac{C_{19}^7-1}{19}$. $\square$

Cuối cùng, ta áp dụng hiệu quả phương pháp trên đây vào một bài toán thi vô địch Quốc tế, một bài toán đẹp của IMO 1995.

Bài toán 13 (IMO, 1995). *Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con A của tập hợp $\{1, 2, \ldots, 2p\}$, biết rằng:*

i) *A chứa đúng p phần tử;*

ii) *Tổng các phần tử của A chia hết cho p.*

Lời giải. Xét đa thức $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$. Đa thức này có $p-1$ nghiệm phức phân biệt. Gọi α là một nghiệm bất kỳ của $P(x)$. Chú ý rằng $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{p-1}$ là $p-1$ nghiệm phân biệt của $P(x)$ và $\alpha^p = 1$. Do đó, theo định lý Vieta:

$$x^p - 1 = (x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{p-1}).$$

Xét đa thức $Q(x) = (x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{2p})$ và gọi:

$$H = \big\{A \subset \{1, 2, \ldots, 2p\} \,\big|\, |A| = p\big\}.$$

Giả sử $Q(x) = \sum_{i=0}^{2p} a_i x^i$. Khi đó:

$$a_p = -\sum_{A \in H} \alpha^{S(A)}, \; S(A) = \sum_{x \in A} x.$$

Vì nếu $S(A) \equiv i \pmod p$ thì $\alpha^{S(A)} = \alpha^i$ nên

$$a_p = -\sum_{i=0}^{p-1} n_i \alpha^i,$$

trong đó n_i là số các $A \in H$ sao cho $S(A) \equiv i \pmod p$. Mặt khác, $Q(x) = (x^p - 1)^2$, suy ra $a_p = -2$. Thành thử:

$$\sum_{i=0}^{p-1} n_i \alpha^i = 2. \tag{$*$}$$

Xét đa thức $R(x) = \sum_{i=1}^{p-1} n_i x^i + n_0 - 2$. Từ đẳng thức $(*)$ suy ra α là một nghiệm của $R(x)$. Vì $\deg P = \deg R$ và α là một nghiệm bất kỳ của $P(x)$ nên $P(x)$ và $R(x)$ chỉ sai khác nhau hằng số nhân. Từ đó $n_{p-1} = n_{p-2} = \cdots = n_1 = n_0 - 2$, suy ra

$$n_0 - 2 = \frac{n_{p-1} + n_{p-2} + \cdots + n_1 + n_0 - 2}{p} = \frac{C_{2p}^p - 2}{p}.$$

Vậy đáp số của bài toán là $n_0 = 2 + \frac{C_{2p}^p - 2}{p}$. □

3. Bài tập

Bài toán 1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$P(x) \cdot P(x+1) = P(x^2+1).$$

Bài toán 2. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng đa thức $x^n + 4$ khả quy khi và chỉ khi n chia hết cho 4.

Bài toán 3. Chứng minh rằng đa thức $(x^2 - 7x + 6)^{2n} + 13$ bất khả quy với mọi n nguyên dương. (Chú ý rằng bài này mới chỉ là giả thiết, bạn đọc có thể phủ định bài toán nếu kết quả sai.)

Bài toán 4. Với giá trị nào của n thì đa thức $(x+1)^n + x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$?

Bài toán 5. Có bao nhiêu tập con của $X = \{1, 2, \ldots, 2015\}$ có tổng các phần tử chia hết cho 3?

Bài toán 6 (IMO 2014 Training Camp)**.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số không chứa chữ số 0 và chia hết cho 11?

Bài toán 7. Cho ba số nguyên dương m, n, p, trong đó $m > 1$ và $n + 2 \equiv 0 \pmod{m}$. Tìm số bộ $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ gồm p số nguyên dương sao cho tổng $(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)$ chia hết cho m, trong đó mỗi số $x_1, x_2, \ldots, x_p$ đều không lớn hơn m.

THUẬT TOÁN PHỤC HỒI SỐ HỮU TỈ

Nguyễn Hùng Sơn (*University of Warsaw*)

1. Mở đầu

Cách đây không lâu tôi có đố các bạn trẻ một bài toán đố nhỏ, nhưng mang tính thực tế, như sau:

> Một vị giáo sư toán-tin rất cẩn thận nhưng đãng trí. Cách đây vài hôm ngân hàng gửi ông một bức thư thông báo mật khẩu của thẻ tín dụng. Mật khẩu là một số có 6 chữ số: $\overline{abcdef}$. Ông không muốn giữ lại bức thư vì sợ nó có thể lọt vào tay kẻ gian. Vì vậy ông đã dùng 1 chiếc máy tính xách tay đơn giản (gồm 4 phép tính $+.-, \times, \div$ và 10 chữ số) để tính tỉ số $\overline{abc} \div \overline{def}$. Ông đã nhận được kết quả gần đúng là $0,195323246$ và ghi nhớ lại lên một tờ giấy.
>
> Làm thế nào để vị giáo sư có thể tìm lại được mật khẩu trong thời gian ngắn nhất nếu ông chỉ có trong tay chiếc máy tính xách tay đơn giản và mật khẩu là gì?

Thực ra bài toán này liên quan đến một số ứng dụng của thuật toán Euclid và lý thuyết về phân số chuỗi trong số học. Sau đây chúng ta sẽ lần lượt tìm hiểu các lý thuyết liên quan, lời giải của bài toán trên, và thử làm các bài tập tương tự.

2. Thuật toán Euclid

Đây là một trong các phương pháp tìm ước số chung lớn nhất ƯSCLN(a, b) của hai số tự nhiên. Khoảng 300 năm trước Công Nguyên, Euclid – nhà toán học cổ người Hy lạp – đã mô tả thuật toán này trong cuốn ”cơ sở” (*Elements*).

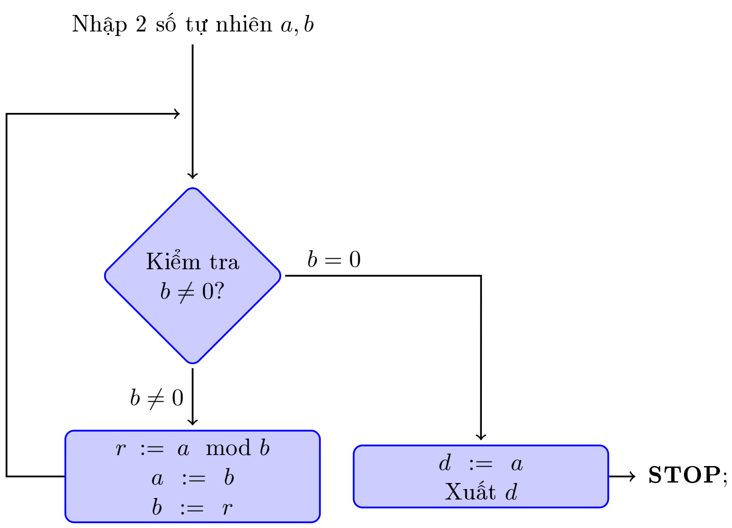
Ý tưởng chính của thuật toán này là:

Nếu k, r là hai số nguyên sao cho $a = kb + r$ thì:

$$\text{ƯSCLN}(a,\ b) = \text{ƯSCLN}(r,\ b).$$

Trong thuật toán Euclid, ta sẽ chọn k là phần nguyên của phép chia a cho b ($k = \lfloor a/b \rfloor$), còn r là phần dư khi chia a cho b ($r = a - \lfloor a/b \rfloor \cdot b$). Thuật toán này được mô tả dạng biểu đồ ở Hình 3.1. Ví dụ nếu muốn tìm ƯSCLN của 2 số 324 và 918 thì các bước của thuật toán sẽ như sau:

STT	a	b	$\lfloor a/b \rfloor$	$r = a \bmod b$	d
1.	324	918	0	576	
2.	918	324	2	270	
3.	324	270	1	54	
4.	270	54	5	0	
5.	54	0			**54**



Hình 3.1: Thuật toán Euclid để tìm ước số chung lớn nhất của hai số tự nhiên a, b.

3. Liên phân số

Liên phân số hữu hạn là một biểu thức có dạng:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \frac{1}{a_n}}}}$$

trong đó $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \ldots, a_n$ là các số nguyên dương và $a_n > 1$. Liên phân số trên được ký hiệu là $[a_0 : a_1, a_2, \ldots, a_n]$, trong đó n chính là độ dài của liên phân số.

Như ta đã biết mọi số hữu tỉ đều có thể được viết dưới dạng $\frac{a}{b}$, trong đó $a \in \mathbb{Z}$ là số nguyên còn $b \in \mathbb{N} - \{0\}$ là số nguyên dương.

Một phân số có thể chuyển thành liên phân số theo phương pháp lặp đi lặp lại 2 bước (1) và (2) sau đây: (1) tách ra phần nguyên, (2) nghich đảo phần phân số.

Ví dụ phân số $\dfrac{1517}{1073}$ có thể chuyển thành liên phân số như sau:

$$\frac{1517}{1073} = 1 + \frac{444}{1073} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{185}{444}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{74}{185}}}$$

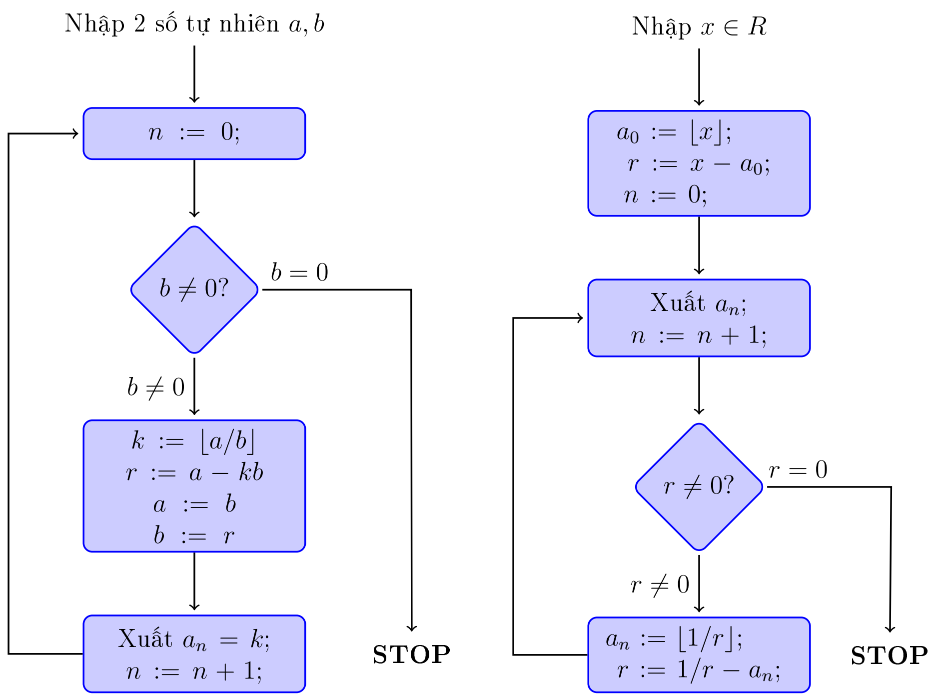
$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{37}{74}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$$

Như vây ta đã chuyển $\frac{1517}{1073}$ thành liên phân số $[1 : 2, 2, 2, 2, 2]$.

Bạn đọc tinh ý có thể thấy nhiều điểm tương tự giữa phương pháp tìm liên phân số và thuật toán Euclid. Thực vậy, nếu ta áp dụng thuật toán Euclid cho hai số 1517 và 1073 thì quá trình tính toán sẽ như sau:

STT	a	b	$\lfloor a/b \rfloor$	$r = a \bmod b$	d
1.	1517	1073	1	444	
2.	1073	444	2	185	
3.	444	185	2	74	
4.	185	74	2	37	
5.	74	37	2	0	
6.	37	0			**37**

Dễ dàng nhân ra sự trùng hợp giữa liên phân số $[1 : 2, 2, 2, 2, 2]$ và cột $\lfloor a/b \rfloor$ của thuật toán Euclid. Như vậy nếu áp dụng thuật toán Euclid cho a và b, nhưng trong mỗi bước ta viết ra giá trị của $\lfloor a/b \rfloor$ thì ta sẽ được khai triển của phân số $\frac{a}{b}$ thành dạng liên phân số.



Hình 3.2: Thuật toán Euclid tìm liên phân số cho phân số $\frac{a}{b}$ (trái) và cho số thực $x \in \mathcal{R}$ (phải).

Thuật toán trên được mô tả ở Hình 3.2.a (trái). Dựa vào thuật toán đó ta có thể chứng minh định lý sau:

> *Mọi số hữu tỉ đều có thể khai triển dưới dạng một liên phân số hữu hạn $[a_0 : a_1, a_2, \ldots, a_n]$, ở đây a_0 là phần nguyên của số hữu tỉ đã cho.*

Liên phân số đã được các nhà toán học như *Rafael Bombelli* (1572), *Pietro Catldi* (1613), *Daniel Schwenter* (1625), *Wallis* (1695) hoặc nhà thiên văn học *Christian Huygens* (1698) biết đến từ thế kỷ XVI và XVII.

Tuy nhiên phải đến thế kỷ XVIII nhà toán học *Leonhard Euler* (1707-1783) mới bắt đầu nghiên cứu một cách hệ thống liên phân số. Euler không chỉ đưa ra thuật toán mà còn tìm ra rất nhiều liên phân số.

Thực ra thuật toán của Euler là trường hợp tổng quát của thuật toán chuyển số hữu tỉ thành liên phân số. Nó có thể áp dụng cho một số thực x bất kỳ (xem Hình 3.2.b (phải)). Áp dụng thuật toán này cho $x = \sqrt{2}$ ta sẽ có:

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\sqrt{2}-1}} = \cdots = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}.$$

Như vậy số $\sqrt{2}$ có thể biểu diễn dưới dạng liên phân số vô hạn tuần hoàn $= [1 : 2, 2, 2, \ldots] = [1 : \overline{2}]$.

Euler đã phát hiện ra rằng nếu một số có thể biểu diễn dưới dạng liên phân số vô hạn tuần hoàn (từ một vị trí nào đó) thì số đó phải có dạng $a + b\sqrt{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (hay còn gọi là số đại số bậc hai). Ví dụ tỉ lệ vàng $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ có thể biểu diễn ở dạng liên phân số gồm toàn số 1 (xem bài tập 2).

Hoặc nếu $x = [2 : 2, 2, 2, \ldots] = [2 : \overline{2}]$, thì ta có $x = 2 + \frac{1}{x}$ từ đó suy ra $x = 1 + \sqrt{2}$. Nhưng phải 20 năm sau địch lý đảo mới được chứng minh bởi *Lagrange* (1768):

> *Mọi số đại số bậc 2 đều có thể khai triển thành liên phân số tuần hoàn (bắt đầu từ một vị trí nào đó).*

Chúng ta vừa nhận ra rằng khai triển liên phân số của các số hữu tỉ và cả các số vô tỉ trông có vẻ như tiện lợi hơn khai triển thập phân. Một câu hỏi có tính triết lý và lịch sử được đặt ra là: tại sao trong trường phổ thông chúng ta sử dụng số thập phân nhưng lại không dùng liên phân số? Câu trả lời có lẽ là do phép cộng và nhân các liên phân số không hề dễ dàng gì. Mà cũng có thể thiếu các phương pháp (thiếu các thuật toán hữu hiệu) là do các nhà toán học (tin học) chưa tìm kĩ. Ta chỉ có thể kết luận rằng hình ảnh của toán học ngày nay không phải là duy nhất, và nó hoàn toàn đã có thể chuyển sang hướng khác.

4. Phục hồi số hữu tỉ

4.1. Ví dụ minh họa

Chúng ta hãy quay lại bài toán ban đầu. Vị giáo sư có thể kiểm tra tất cả các phân số dạng $\overline{abc} \div \overline{def}$ cho đến khi tìm được phân số có giá trị như yêu cầu. Tuy nhiên phương pháp này không hiệu quả vì mất quá nhiều thời gian.

Trước hết chúng ta có thể chú ý rằng nếu $\frac{p}{q}$ và $\frac{r}{s}$ là hai phân số có tử số và mẫu số đều là các số có ba chữ số và hai phân số đó giống nhau ít nhất là đến chữ số thứ 6 sau dấu phẩy thì $\left|\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right| < 10^{-6}$. Từ đó suy ra

$$|ps - qr| \leqslant qs \cdot 10^{-6} < 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 1.$$

Vì p, s, q, r là các số nguyên và $0 \leqslant |ps - qr| < 1$, từ đó suy ra $ps - qr = 0$. Điều này tương đương với $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$.

Phương pháp hiệu quả hơn chính là khai triển số $x = 0,195323246$ thành dạng liên phân số $x = [a_0 : a_1, a_2, \ldots]$.

Nếu đặt $x_n = [a_0 : a_1, \ldots, x_n]$ là liên phân số dùng n số hạng đầu tiên của liên phân số $x = [a_0 : a_1, a_2, \ldots]$, ta sẽ thấy x_n là xấp xỉ của x và n càng lớn thì x_n càng có giá trị gần x. Vì vậy ta sẽ sử dụng thuật toán trên cho đến khi được một liên phân số gần giống với phân số cần tìm.

Sử dụng thuật toán ở Hình 3.2.b (phải) ta lần lượt có:

$a_0 = 0$	$r = 0,195323246$	$x_0 = 0$
$a_1 = 5$	$r = 0,119718315$	$x_1 = \frac{1}{5}$
$a_2 = 8$	$r = 0,352940538$	$x_2 = \frac{1}{5+\frac{1}{8}} = \frac{8}{41}$
$a_3 = 2$	$r = 0,833338458$	$x_3 = \frac{1}{5+\frac{1}{8+\frac{1}{2}}} = \frac{17}{87}$
$a_4 = 1$	$r = 0,199992620$	$x_4 = \frac{1}{5+\frac{1}{8+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}}} = \frac{25}{128}$
$a_5 = 5$	$r = 0,000184506$	$x_5 = \frac{1}{5+\frac{1}{8+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}}} = \frac{142}{727}$

Kiểm tra lại ta thấy rằng $\frac{142}{727} = 0.195323246\ldots$ Vậy mã số vị giáo sư cần tìm là $\boxed{142727}$.

4.2. Trường hợp tổng quát

Để tổng quát hóa bài toán trên chúng ta xét vấn đề sau đây:

VẤN ĐỀ PHỤC HỒI SỐ HỮU TỈ: Cho hai số nguyên dương K, M hãy tìm hai số nguyên dương u, v sao cho:

$$\text{DK1}: \quad 0 \leqslant u, v < N \qquad (N \text{ là số nguyên dương cho trước}) \qquad (1)$$

$$\text{DK2}: \quad \left|\frac{u}{v} - \frac{K}{M}\right| \leqslant \frac{1}{M} \qquad \left(2 \text{ phân số } \frac{u}{v}, \frac{K}{M} \text{ gần bằng nhau}\right) \qquad (2)$$

Paul Wang đã nghiên cứu vấn đề phục hồi số hữu tỉ trong trường hợp $N = \sqrt{\frac{M}{2}}$. Với lựa chọn này ta có thể chứng minh rằng nếu tồn tại lời giải cho vấn đề phục hồi số hữu tỉ thì lời giải này là duy nhất.

Thực vậy, giả sử tồn tại 2 lời giải (u_1, v_1) và (u_2, v_2) thỏa mãn các điều kiện (1) và (2). Ta có:

$$\left|\frac{u_1}{v_1} - \frac{u_2}{v_2}\right| \leqslant \left|\frac{u_1}{v_1} - \frac{K}{M}\right| + \left|\frac{u_1}{v_1} - \frac{K}{M}\right| \leqslant \frac{2}{M},$$

từ đó suy ra

$$|u_1v_2 - u_2v_1| \leqslant \frac{2v_1v_2}{M} < \frac{2N^2}{M}.$$

Trong trường hợp $N = \sqrt{\frac{M}{2}}$, ta có $|u_1v_2 - u_2v_1| < 1$. Ngoài ra, do $|u_1v_2 - u_2v_1|$ là số nguyên nên ta suy ra rằng $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$ hay $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$. Hơn nữa, từ điều kiện (2) suy ra

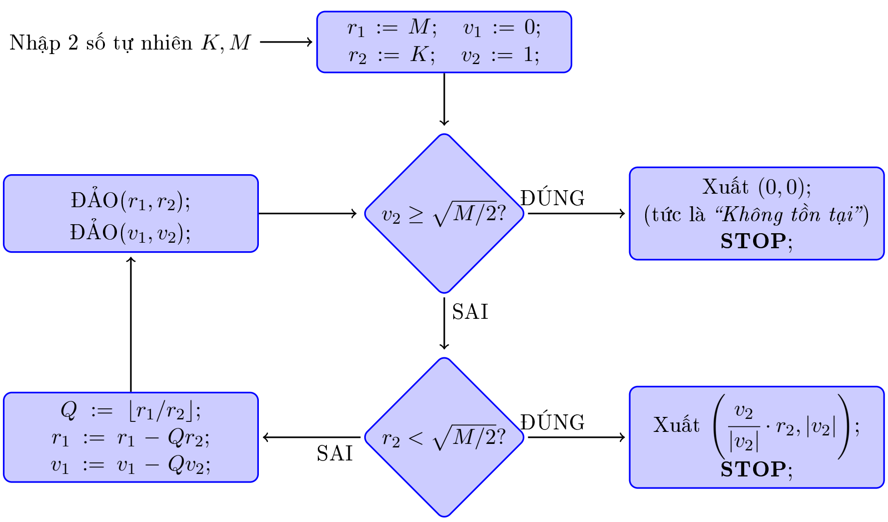
$$|Mu - Kv| \leqslant v < N \Leftrightarrow -N < r = Mu - Kv < N.$$

Từ đó suy ra nếu hai phân số $\frac{u}{v}$, $\frac{K}{M}$ gần bằng nhau thì tồn tại một số nguyên r sao cho $|r| < N$ và $r \equiv Kv \bmod M$. Lúc đó K được gọi là đồng dư với phân số $\frac{r}{v}$ modulo M và được ký hiệu là $\frac{r}{v} \equiv K \bmod M$. Như vậy vấn đề **phục hồi số hữu tỉ** có thể phát biểu một cách tương đương như sau:

VẤN ĐỀ PHỤC HỒI SỐ HỮU TỈ (biến thể): Cho trước hai số nguyên dương K, M, hãy tìm cặp số nguyên (r, v) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

$$\text{DK3}: \quad 0 \leqslant |r| < \sqrt{M/2} \text{ và } 0 < v < \sqrt{M/2} \tag{3}$$

$$\text{DK4}: \quad r \equiv Kv \pmod{M} \tag{4}$$



Hình 3.3: Thuật toán phục hồi số hữu tỉ RATCONVERT.

Dễ thấy rằng nếu tồn tại cặp số (r, v) thỏa mãn hai điều kiện (3) và (4) thì cặp số (u, v), trong đó $u = \frac{Kv-r}{M}$ cũng sẽ thỏa mãn cả hai điều kiện (1) và (2).

P. Wang (1981) còn đã đề xuất một thuật toán giải quyết vấn đề phục hồi số hữu tỉ trong trường hợp lời giải tồn tại. Thuật toán này dựa vào ý tưởng của thuật toán Euclid và được mang tên *RATCONVERT* (xem Hình 3.3).

Bảng 1.1 được trình bày trang sau minh họa thuật toán RATCONVERT qua ví dụ ở chương 1.

5. Một số bài tập tham khảo

Bài toán 1. Chứng minh rằng mọi số hữu tỉ đều có thể biểu diễn bằng đúng hai cách khác nhau dưới dạng liên phân số hữu hạn.

Bài toán 2. Chứng minh rằng $[1 : \overline{1}] = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Bài toán 3. Với a là số nguyên dương hãy tìm khai triển liên phân số của số $\sqrt{a^2+1}$.

Bài toán 4. Hãy kiểm chứng rằng phương pháp phục hồi số hữu tỉ (cả hai phương pháp trình bày ở chương 4.1 và 4.2) vẫn hiệu quả khi ta chỉ dùng 6 chữ số sau dấu phẩy (tức là $0,195323$) nhưng nếu chỉ dùng năm chữ số ($0,19532$) thì sẽ không thể phục hồi được mã số ban đầu.

Bài toán 5. Áp dụng thuật toán phục hồi số hữu tỉ để tìm xấp xỉ hữu tỉ $\frac{p}{q}$ của số $\sqrt{2} \simeq 1,414213562373$ sao cho $\left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right| < 0,001$.

$M = 1000000000$	$K = 195323246$	$\sqrt{M/2} = 22360,7$

Lượt	**Bắt đầu**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Q		5	8	2	1	5	
r_1	1000000000	195323246	23383770	8253086	6877598	1375488	Xuất
r_2	195323246	23383770	8253086	6877598	1375488	158	$(-158, 727)$;
v_1	0	1	-5	41	-87	128	
v_2	1	-5	41	-87	128	-727	**STOP**;

$r = -158$	$v = 727$	$u = \dfrac{Kv - r}{M} = 142$

Bảng 1.1: Ví dụ minh họa cho thuật toán RATCONVERT.

TOÁN HỌC GIẢI TRÍ VÀ CÁC BÀI TOÁN ĐỘI NÓN

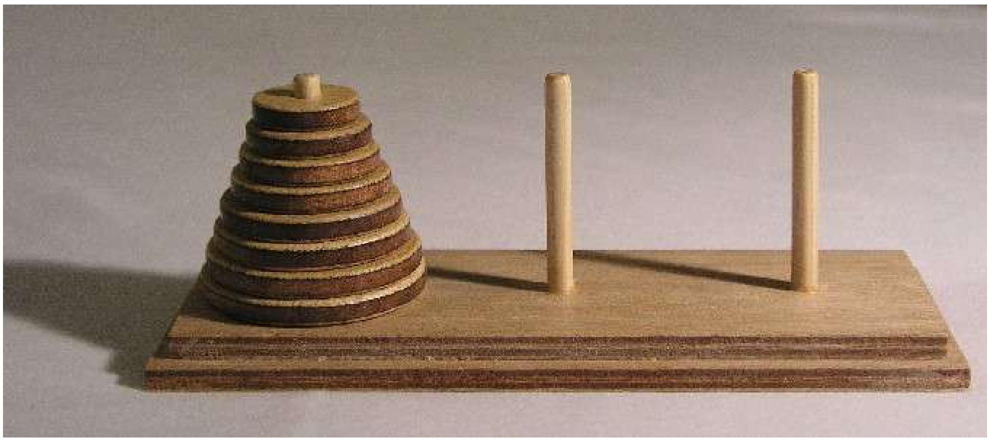
Đặng Nguyễn Đức Tiến (*Trento, Italy*)

1. Toán học giải trí

Toán học giải trí (Recreational Mathematics) là một thuật ngữ chung cho những vấn đề toán học mà mục đích chủ yếu dùng để giải trí. Đôi khi những bài toán giải trí này được xuất hiện dưới dạng giai thoại hay những chủ đề có liên quan đến nghệ thuật và toán, nhưng phổ biến nhất là dưới dạng những câu đố mà lời giải đa phần chỉ cần những kiến thức toán học sơ cấp. Tuy không phải là một ngành nghiên cứu nghiêm túc, nhưng xuyên suốt chiều dài phát triển của toán học, ta luôn thấy sự song hành của những bài toán giải trí đi cùng với những phát minh của toán học, đôi khi một bài toán đố cũng có thể là đề bài mở đầu cho cả một lĩnh vực nghiên cứu.

Những ví dụ tiêu biểu có thể kể đến bài toán đoán tuổi của Đi-ô-phăng (Diophantus, nhà toán học Hi Lạp, thế kỷ thứ 3 sau công nguyên) và sự ra đời của phương trình nghiệm nguyên; hay bài toán đếm thỏ của Leonardo Bonacci cùng mối liên hệ với dãy số mang tên ông: Fibonacci; rồi một trường hợp khác là bài toán bảy cây cầu ở Königsberg (hay còn được gọi là bảy cây cầu Euler) với lý thuyết đồ thị; và rất nhiều ví dụ khác.

Nguồn gốc tuy đã từ xa xưa như thế, nhưng toán học giải trí chỉ thật sự được hệ thống và phổ biến vào khoảng cuối thế kỷ 19 nhờ công của những người tiên phong như Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), nhà văn, nhà toán học, nhà thần học, nhiếp ảnh gia người Anh được rất nhiều người biết đến với bút danh Lewis Carroll, tác giả của "Alice lạc vào xứ thần tiên"; rồi tiếp theo là Yakov Perelman (1882-1942), nhà toán học Xô-Viết, tác giả của các bộ sách "Toán học vui" hay "Vật lý vui" rất quen thuộc với độc giả Việt Nam; hay bởi Samuel Loyd (1841-1911), nhà toán học, kỳ thủ cờ vua người Mỹ, đã có công tập hợp và sáng tạo hơn 5000 bài toán giải trí; và cuối cùng thì không thể không nhắc đến Martin Gardner (1914-2010), nhà toán học người Mỹ có công đóng góp có thể nói là quan trọng nhất trong lịch sử phát triển của toán học giải trí.



Hình 4.1: Tháp Hà Nội, một trong những bài toán kinh điển của toán học giải trí, lần đầu tiên được đăng bởi nhà toán học người Pháp François-Édouard-Anatole Lucas (1842-1894), trong "Toán học giải trí" (Récréation Mathématiques).

2. Các bài toán đội nón

Toán học giải trí xuất hiện rộng khắp các nhánh của toán học, và cả trong các ngành khoa học khác. Trong chuyên mục mở đầu này, chúng tôi giới thiệu với độc giả một nhóm bài toán kinh điển, thường được gọi là nhóm "Bài toán đội nón".

Dạng thức chung của các bài toán đội nón như sau: một số người sẽ được đội một hoặc một số nón. Các nón này có màu trong một tập hợp các màu cho trước. Cá nhân mỗi người không biết màu nón của mình, nhưng có thể thấy được nón của các người khác. Nhiệm vụ của họ là phải đoán được màu nón của mình, và không được trao đổi thông tin sau khi nón đã được đội. Bài toán đôi khi xuất hiện dưới dạng trò chơi trên truyền hình với người dẫn trò và người tham gia trò chơi; có khi xuất hiện dưới dạng bài toán về những nhà logic; có khi là cai ngục và tù nhân... nhưng cốt lõi bài toán là tìm chiến lược cho những người này trước khi được đội nón, sao cho khi nhìn thấy màu nón của những người trong nhóm thì họ sẽ có chiến thuật để đoán đúng càng nhiều màu nón càng tốt.

Có rất nhiều cơ sở cho thấy rằng bài toán đã được lưu truyền trong dân gian từ rất lâu, nhưng kể từ năm 1961 nhóm bài toán đội nón mới được chính thức ghi nhận bởi Martin Gardner. Bài toán sau đó được phát triển với rất nhiều biến thể, với các kết quả và phương pháp giải rất khác nhau. Một trong những phiên bản kinh điển của bài toán được đề xuất bởi Konstantin Knop trong kỳ thi Olympic toán toàn quốc ở Nga lần thứ 23, năm 1997. Sau đó, bài toán được khảo sát chi tiết trong luận án tiến sĩ của Todd Ebert vào năm 1998.

Đến năm 2001, bài toán được đăng lại bởi cây bút Sara Robinson trong chuyên mục Khoa học của thời báo New York số ngày 10 tháng 4. Đến năm 2009, một lần nữa một mở rộng của bài toán được đăng lại cũng ở thời báo New York, số ngày 23 tháng 3. Cho đến năm 2011, Lionel Levine làm mới bài toán với trường hợp vô hạn nón, thu hút được nhiều phương pháp giải mới lạ. Gần đây nhất, vào năm 2013, trong một kỳ thi toán tại Nga, một lần nữa bài toán được làm mới với một phiên bản tuyệt đẹp của Konstantin Knop. Đây cũng là phiên bản mở rộng cuối cùng mà chúng tôi ghi nhận được tính đến thời điểm viết bài này.

Với những phát biểu vốn khá khô khan, như một trò chơi trên truyền hình, hay thậm chí phi lý như thử thách giữa cai ngục và tù nhân, vì sao các bài toán giải trí về đội nón lại thu hút sự quan tâm của các nhà toán học đến như vậy? Vì sự hấp dẫn, tính sáng tạo của bản thân bài toán cũng như lời giải? Hay vì kết quả của bài toán dẫn đến những ứng dụng quan trọng, đặc biệt là trong lý thuyết mã hóa? Chúng tôi xin mời độc giả hãy cùng tìm ra câu trả lời bằng một cuộc du ngoạn qua những bài toán đội nón này.

2.1. Bài toán đội nón số 1: Hai chàng rể

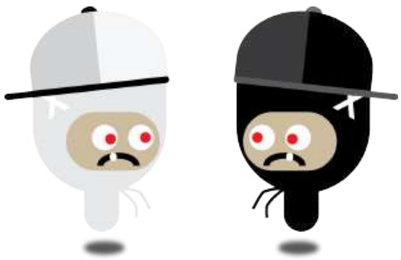
Đây có lẽ là phiên bản cổ nhất trong số các bài toán đội nón. Ở đây, chúng tôi giới thiệu một dị bản như sau: Ngày xưa có nhà đại gia kén rể cho hai cô con gái. Kén chọn mãi được hai chàng tuấn tú văn hay chữ tốt. Người cha một lần nữa muốn thử tài trí của hai chàng rể tương lai bèn bày ra thách đố.

Ông cho mỗi người một chiếc nón. Mỗi người không được nhìn thấy nón của mình mà chỉ nhìn thấy nón của người còn lại. Sau đó cùng lúc cả hai phải viết ra màu nón của mình cho người cha xem. Nếu ít nhất có một người đoán đúng, ông sẽ chọn cả hai chàng rể, nếu cả hai đều đoán sai thì phải ra về không.

Biết là nón có hai màu, trắng hoặc đen.

Hai chàng trai trẻ vốn là bạn của nhau. Trước khi thách đố bắt đầu, họ ngầm ngầm trao đổi chiến thuật và cuối cùng cưới được hai nàng tiểu thư xinh đẹp.

Theo độc giả, hai chàng trai đã nói gì với nhau?



2.2. Bài toán đội nón số 2: Bách niên thượng thọ

Bài toán số 2 là một dạng mở rộng của bài toán số 1, có một dị bản như sau:Vào năm mừng thượng thọ trăm tuổi của nhà vua, ngài mời đến một trăm người khách, phát cho mỗi người một chiếc nón có màu trắng hoặc đen và bày một trò chơi với nón. Mỗi người chỉ thấy màu của 99 người khác nhưng không thấy được màu nón của mình. Cùng lúc họ phải đoán màu nón của mình và không được có bất kỳ trao đổi gì với nhau. Ai đoán trúng sẽ được ban bổng lộc.

Bổng lộc của nhà vua rất lớn nên có một người khách lạ ma mãnh nhanh chóng nắm bắt thời cơ. Hắn rỉ tai những người khách khác rằng chỉ cần làm theo cách của hắn thì số người giành được phần thưởng sẽ là cao nhất. Và mỗi kẻ nhận thưởng phải chia một phần tiền cho Kẻ Lạ đó.

Cách của hắn là gì để có được món lời to nhất? Bạn đọc hãy cùng đoán thử xem.

2.3. Bài toán đội nón số 3: Mặt nạ cười của quỷ

Trong rừng sâu có một con quỷ dữ năm nào cũng bắt về mười linh hồn sống. Nó gom hết đám linh hồn lại với nhau, đeo cho mỗi linh hồn một chiếc mặt nạ cười màu sắc rực rỡ. Luôn có mười màu, nhưng số lượng các màu thì thay đổi theo từng năm. Có năm mười cái mặt nạ có mười màu, có năm lại xen kẽ, có năm lại hoàn toàn giống nhau. Đó là những chiếc mặt nạ dành cho trò chơi của quỷ.

Trò chơi quy định kẻ đeo mặt nạ chẳng thể nhìn thấy màu mặt nạ của mình mà chỉ có thể nhìn thấy màu mặt nạ của những linh hồn xung quanh. Và thế là tất cả cùng bắt đầu trò phỏng đoán. Cùng một lúc các linh hồn phải nói lên màu mặt nạ của mình. Chỉ cần duy nhất một kẻ đoán đúng thì tất cả được tha, bằng không tất cả những linh hồn đó mãi mãi phải trở thành nô lệ cho quỷ dữ.

Một năm nọ, có một nhóm linh hồn thông minh, trước khi trò chơi bắt đầu, họ đã nói với nhau. . .

Và rồi những linh hồn đã thắng.

Chiến thuật của họ là gì? Bạn đoán được không?

2.4. Bài toán đội nón số 4: Thử thách 3 chiếc nón

Đây là một phiên bản rất nổi tiếng của nhóm bài toán này. Ở đây chúng tôi giới thiệu với độc giả phiên bản trên thời báo New York ngày 10 tháng 4 năm 2001: Có 3 người tham gia một trò chơi, trong đó mỗi người được đội ngẫu nhiên một nón có màu đỏ hoặc xanh dương. Họ nhìn thấy màu nón của 2 bạn mình nhưng không biết màu của mình. Mỗi người cần phải đoán ra màu nón của mình, hoặc chọn bỏ qua nếu không đoán được.

Nếu ít nhất một người đoán đúng màu nón và những người còn lại không đoán sai, họ thắng trò chơi. Họ sẽ thua nếu có người đoán sai hoặc cả 3 cùng chọn bỏ qua. Họ được trao đổi chiến thuật với nhau trước khi chơi nhưng trong khi tham gia thì không được trao đổi bất cứ thông tin gì. Tìm chiến thuật có xác suất thắng cao nhất.

2.5. Bài toán đội nón số 5: Bài ca của 15 gã say

Bài toán số 5 là một trường hợp tổng quát của bài toán số 4 với một dị bản như sau: Quanh một chiếc hòm cướp biển, có mười lăm gã say rượu đội nón ngồi cười. Một gã vừa cười vừa hát về màu nón của những kẻ kế bên. Bài hát như sau:

> Trắng và đen hay im lặng
>
> Này những gã say
>
> Hoặc nói hoặc câm lặng
>
> Ngoài biển khơi kho báu quỷ đang chờ.

Truyền thuyết nói đó là một bài hát và cũng là một câu đố. Mỗi người chỉ thấy nón của 14 người khác và không thấy nón của mình và có ba lựa chọn để nói lên màu nón của mình, trắng hoặc đen, hoặc bỏ qua. Chỉ cần tất cả các gã nói trúng màu nón của mình thì chiếc hòm cướp biển sẽ mở ra.

Hãy tìm chiến thuật tốt nhất cho mười lăm tên say.

2.6. Bài toán đội nón số 6: Người dẫn trò chơi "Xảo quyệt"

Ở bài toán này, chúng tôi mời độc giả cùng quay lại bài toán đội nón số 4. Với bài toán này, nếu một người chọn ngẫu nhiên màu nón bất kỳ và 2 người còn lại chọn bỏ qua, họ sẽ thắng với xác suất $\frac{1}{2}$. Tuy nhiên, luận án của Ebert đã trình bày một lời giải tốt hơn, trong đó nếu một người thấy 2 bạn mình đội nón khác màu nhau, sẽ chọn bỏ qua và nếu 2 bạn đội cùng màu nón, người này sẽ chọn màu còn lại. Với chiến thuật này, xác suất thắng trò là $\frac{3}{4}$.

Lời giải trên đã khởi nguồn cho bài toán đội nón số 5: sau nhiều lần chơi đi chơi lại, người dẫn trò láu cá hơn và thấy rằng người chơi sẽ thua nếu cả 3 đội nón cùng màu, do vậy người dẫn trò chọn cách đội nón không thật sự ngẫu nhiên nữa. Liệu rằng có chiến thuật nào để người chơi vẫn giữ được khả năng chiến thắng là $\frac{3}{4}$ trong tình huống này?

Cả 6 bài toán đội nón được giới thiệu ở trên đều có cùng điều kiện là mỗi người chơi đều thấy được màu nón của tất cả những người chơi khác, do vậy, nhóm bài toán này còn hay được phát biểu dưới dạng người chơi xếp thành vòng tròn. Bài toán hiện vẫn còn được phát triển và các lời giải đẹp hiện chỉ xuất hiện ở các trường hợp đặc biệt, ví dụ trường hợp bài toán đội nón số 5. Các trường hợp tổng quát với n người chơi và m màu nón hiện chỉ dừng ở mức xác định chặn trên của khả năng chiến thắng.

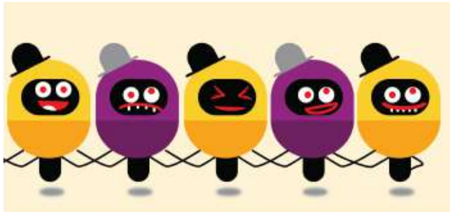
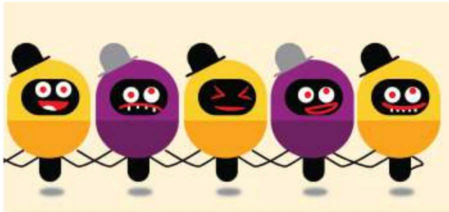
Tiếp theo đây là ba bài toán đội nón mà ở đó, người chơi chỉ được thấy nón của một số người khác, thông thường là những người đứng trước mình khi xếp thành hàng.

2.7. Bài toán đội nón số 7: Bài toán 100 người

Bài toán này với trường hợp 2 màu và 3 màu lần đầu tiên được đưa ra bởi Konstantin Knop ở kỳ thi Olympic toán toàn quốc ở Nga lần thứ 23, năm 1997. Phát biểu của bài toán như sau:

Có 100 người được xếp thành một hàng, mỗi người được đội một nón có màu trắng hoặc đen. Mỗi người chỉ nhìn thấy màu nón của những người đứng trước mình mà không thấy nón của mình và những người đứng sau. Lần lượt mỗi người sẽ phải đoán màu nón của mình và hô to cho những người khác nghe. Người đứng cuối cùng (là người thấy màu nón của toàn bộ 99 người trước) là người bắt đầu phải đoán.

Người chơi không được trao đổi bất kỳ thông tin gì với nhau ngoại trừ lắng nghe màu nón từ người đoán trước. Đúng sai cũng chỉ được biết khi người cuối cùng đã đoán xong. Hãy tìm chiến chuật sao cho số người đoán sai là ít nhất.

Hãy giải bài toán với trường hợp 100 người chơi, 3 màu nón. Liệu có thể tổng quát lên với N người chơi và $M < N$ màu nón?

2.8. Bài toán đội nón số 8: Vào cổng thiên đàng mọi thiên thần đều phải cài hoa!

Tương tự với bài toán đội nón số 6, nhưng bài toán này có một tích chuyện khá thú vị với mười thiên thần xếp hàng vào cổng thiên đàng. Mỗi thiên thần đều cài trên tóc một đoá hoa trắng hoặc đỏ và chỉ những thiên thần đứng sau mới nhìn thấy màu hoa trên tóc những thiên thần đứng trước. Để thử thách lòng nhẫn nhịn và tính đoàn kết của các thiên thần, nhà Trời ra lệnh cho họ lần lượt đoán màu hoa trên tóc của mình theo thứ tự từ sau ra trước. Tuy nhiên các thiên thần vẫn có quyền không đoán mà chọn bỏ qua. Tất cả sẽ được vào cổng thiên đàn nếu không có ai đoán sai và ít nhất một thiên thần đoán đúng. Trong quá trình đoán màu các thiên thần không được trao đổi bất cứ thông tin gì với nhau. Những thiên thần này đã qua cổng nhà Trời bằng phương thức nào?

2.9. Bài toán đội nón số 9: Bài toán 101 màu

16 năm sau khi bài toán đội nón với 100 người và 2 màu nón (bài toán đội nón số 7) ra đời, Konstantin Knop lại làm mới bài toán với 101 màu, phát biểu như sau:

Có 100 người xếp thành hàng, mỗi người được đội một nón trong số 101 nón khác màu nhau. Mỗi người chỉ thấy nón của những người đứng trước mình và không thấy nón của mình cũng như những người đứng sau. Lần lượt mỗi người từ sau ra trước phải đoán màu nón của mình và hô to cho mọi người cùng nghe. Màu nào đã hô rồi sẽ không được hô lại nữa. Người chơi không được trao đổi thông tin với nhau. Tìm chiến thuật sao cho khả năng tất cả đều đoán đúng là cao nhất.

Trong 9 bài toán đội nón trước, người chơi đều tham gia với vai trò hỗ trợ cho nhau. Tiếp theo, dưới đây chúng tôi xin giới thiệu một dạng khác của bài toán, mà ở đó người chơi sẽ phải cạnh tranh với nhau.

2.10. Bài toán đội nón số 10: Kho báu nhà vua

Bài toán được ghi nhận từ rất sớm bởi Martin Gardner vào năm 1961. Một dị bản của bài toán được thuật lại như sau: Ba người đào mộ được thần chết bịt mắt dẫn vào vào một hầm mộ tối. Trên đầu mỗi người được quấn một băng đỏ hoặc băng đen. Cuối đường hầm là kho báu của nhà vua.

Thần chết cho phép ba tên trộm mộ mở mắt ra. Khi mở mắt bọn chúng chỉ thấy được màu khăn của hai đồng bọn và không thấy màu của mình. Thần chết nói kẻ nào đoán đúng sớm nhất màu khăn của mình sẽ giành được kho tàng. Bằng không sẽ bị giết. Luật chơi của thần chết còn quy định nếu có kẻ nào thấy khăn bịt đầu của hai tên đồng bọn có màu đen thì phải giơ tay lên. Theo bạn có tên trộm mộ nào có thể lấy được kho báu của nhà vua không?

2.11. Bài toán đội nón số 11: Qua ải tử thần

Có 20 tử tù được nhận một cơ hội để cùng sống sót như sau: 20 người này được xếp thành vòng tròn, bị che mắt và mỗi người được đội nón trắng hoặc đen. Tử tù chỉ được biết có ít nhất một nón đen trong số 20 nón đã được đội. Sau khi mở mắt, mỗi người thấy được màu nón của 19 người còn lại. Sau mỗi phút, nếu có người nghiệm ra được màu nón của mình thì người này sẽ được phép đoán. Nếu sau 20 phút, nếu không ai đoán ra, toàn bộ sẽ bị xử tử. Nếu như trong 20 phút có người đoán sai, họ cũng bị xử tử. Họ chỉ được tự do nếu như trong 20 phút phải có người đoán, và tất cả các người đoán đều phải đoán đúng. Hãy tìm chiến thuật sao cho tất cả đều sống sót.

Ở hai bài toán đội nón tiếp theo, chúng tôi giới thiệu các trường hợp mở rộng mà ở đó số lượng hoặc người chơi, hoặc số nón được nâng lên vô hạn (đếm được).

2.12. Bài toán đội nón số 12: Vô hạn người chơi

Có vô hạn (đếm được) người chơi xếp thành một hàng, trong đó mỗi người được đội một nón có màu trắng hoặc đen và người đứng sau thấy được toàn bộ nón của những người đứng trước. Lần lượt mỗi người từ sau ra trước sẽ nói lên màu nón của mình. Hãy tìm chiến thuật để số người đoán đúng là cao nhất. Lưu ý, để có lời giải cho bài toán này, độc giả cần phải sử dụng tiên đề chọn.

2.13. Bài toán đội nón số 13: Vô hạn nón

Bài toán này được đề ra bởi Lionel Levine (đại học Cornell) vào năm 2011 như sau: Bốn người cùng tham gia một trò chơi đoán nón như sau: Người dẫn trò sẽ đội vô hạn các nón có màu trắng hoặc đen lên đầu mỗi người với xác suất nón trắng và đen là như nhau và bằng $\frac{1}{2}$. Các nón của mỗi người được đánh số lần lượt $1, 2, \ldots$ Mỗi người chơi chỉ thấy được toàn bộ nón của 3 người khác nhưng nón của mình thì họ không thấy.

Mỗi người sẽ được phát một tờ giấy và họ được phép ghi vào đó một con số, ứng với chỉ số của nón của họ mà họ đoán là màu đen. Sau khi nhận đủ trả lời, người dẫn trò sẽ kiểm tra số được ghi trên giấy của mỗi người.

Nếu cả 4 người cùng đoán đúng (tức là 4 người đều ghi được con số ứng với nón màu đen của mình), họ thắng trò chơi, ngược lại, chỉ cần một người đoán không đúng, họ thua. Bốn người được thảo luận trước chiến thuật trước khi chơi và không có bất kỳ trao đổi nào sau đó. Họ cũng không biết được thời điểm mà những người khác đưa giấy cho người dẫn trò. Hãy tìm chiến thuật để xác suất thắng là cao nhất.

Ví dụ: họ đều ghi số 2015 vào các mảnh giấy. Khi đó, cơ hội chiến thắng sẽ là $\frac{1}{16}$ vì xác suất nón thứ 2015 của mỗi người là $\frac{1}{2}$.

Tổng quát hóa cho N người liệu cách giải có khác?

Những bài toán đội nón khác: Trong những bài trước, tất cả đều liên quan đến việc đoán màu của nón, trong nhóm bài cuối cùng này chúng tôi giới thiệu với độc giả một vài dạng khác của bài toán đội nón.

2.14. Bài toán đội nón số 14: Bài toán 3 chiếc nón

Ba người chơi, mỗi người được đội mỗi chiếc nón, trên mỗi chiếc nón có ghi một số nguyên dương. Mỗi người chỉ thấy 2 số của 2 người chơi khác mà không biết số của mình. Họ được cho biết là 1 trong 3 số là tổng của 2 số còn lại. Lần lượt từng người, hoặc đoán ra con số của mình, hoặc chọn bỏ qua. Sau đây là đoạn đoán số của họ:

- Người 1: bỏ qua.
- Người 2: bỏ qua.
- Người 3: bỏ qua.
- Người 1: bỏ qua.
- Người 2: bỏ qua.
- Người 3: bỏ qua.
- Người 1: bỏ qua.
- Người 2: bỏ qua.
- Người 3: số của tôi là 60.

Hỏi rằng con số trên 2 nón còn lại có thể là bao nhiêu?

2.15. Bài toán đội nón số 15: Xếp hàng

Có 10 người tham gia trò chơi như sau: mỗi người sẽ được đội một chiếc nón, trên đó có một con số nguyên dương. Người chơi không được cho biết giới hạn của các số, họ chỉ biết 10 số này phân biệt với nhau. Mỗi người không biết số của mình nhưng thấy được số của 9 người còn lại. Sau khi quan sát xong các số của những người khác, mỗi người sẽ phải chọn nón của mình là màu trắng hoặc đen. Việc chọn màu này cũng không được cho các người chơi khác biết.

Sau khi chọn xong màu nón, những người chơi sẽ được vxếp thành một hàng, theo thứ tự tăng dần của giá trị con số trên nón. Nếu như họ có thể xếp thành một hàng trắng/đen xen kẽ nhau, họ chiến thắng trò chơi, ngược lại họ thất bại. Hãy tìm chiến thuật để xác suất chiến thắng là cao nhất.

3. Lời kết

Bài toán đội nón thứ 15 ở trên cũng đã kết thúc chuyên mục kỳ này. Chúng tôi hi vọng rằng sau cuộc du ngoạn xuyên suốt hơn nửa thế kỷ phát triển của những bài toán đội nón, tạp chí của chúng tôi đã có thể giới thiệu được với độc giả vẻ đẹp và sự hấp dẫn của nhóm bài toán này. Bản thân mỗi bài toán đội nón thường là những thử thách toán học hàng tuần, nên để tránh làm mất đi cảm xúc của những độc giả mong muốn thử sức, chúng tôi chỉ chọn đăng gợi ý hoặc đáp án vắn tắt của mỗi bài và sẽ trình bày lời giải chi tiết vào những số tiếp theo.

Chúng tôi tin rằng với phần lời giải, độc giả sẽ được tiếp tục chuyến hành trình kỳ thú cùng những ứng dụng thực tế từ nhóm bài toán giải trí này. Chúng tôi cũng rất hoan nghênh mọi đóng góp của quý vị độc giả về lời giải cũng như những phiên bản khác của nhóm bài toán đội nón.

Để thêm phần thú vị cho một số bài toán, chúng tôi đã đặt lại phần lớn tình tiết đề bài nhưng vẫn giữ nguyên bản chất toán học. Để tiện tra cứu và tham khảo, độc giả có thể truy tìm lại nguồn gốc của từng bài thông qua những tài liệu sau:

1) *A Dozen Hat Problems:* Cho các bài 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 11.

2) *Colored Hats and Logic Puzzles:* Cho các bài 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 và 11.

3) *A Line of Sages:* Cho các bài 7 và 9.

4) *An introduction to infinite hat problems:* Cho bài 12, 13.

5) *Problem of the week 1179*: Cho bài 13.

6) *The Three-Hat Problem:* Cho bài 14.

7) *Another black and white hats puzzle:* Cho bài 15.

4. Gợi ý lời giải

Bài 1. Người 1 chọn màu ngược lại với màu nón của người 2; Người 2 chọn màu của người 1.

Bài 2. Ghép thành từng cặp và áp dụng bài 1.

Bài 3. Gán số các màu từ 0 đến 9 và từng linh hồn từ 0 đến 9. Khi đó linh hồn thứ k sẽ đoán màu sao cho màu đó và tổng 9 màu khác bằng $k \pmod{10}$.

Bài 4. Đáp án ở phát biểu từ bài 6.

Bài 5. Dựa trên từ tưởng từ bài 3, liên kết với mã Hamming.

Bài 6. Có 8 trường hợp cho 3 người với 2 màu nón, khi đó chiến thuật hiện tại sẽ thất bại ở 2 trường hợp các nón cùng màu Đỏ-Đỏ-Đỏ hoặc Xanh-Xanh-Xanh và thành công ở 6 trường hợp còn lại. Liệu có chiến thuật luôn thất bại ở cặp trường hợp Xanh-Đỏ-Đỏ và Đỏ-Xanh-Xanh nhưng thành công ở 6 trường hợp còn lại? Với 2 cặp còn lại (Xanh-Đỏ-Xanh, Đỏ-Xanh-Đỏ) và (Xanh-Xanh-Đỏ, Đỏ-Đỏ-Xanh), liệu có chiến thuật tương ứng? Khi đó, nếu ta ngẫu nhiên chọn chiến thuật xuất phát thì việc chọn giá trị ban đầu không ngẫu nhiên sẽ gặp thất bại. Xác suất thành công được bảo toàn là 75%.

Bài 7. Cho trường hợp 2 màu: người cuối sẽ nói màu đen nếu số nón đen anh ta thấy là số lẻ và nói trắng nếu số nón đen là chẵn. Những người khác, căn cứ vào đó sẽ đoán được.

Với trường hợp $M < N$ màu, người cuối sẽ chọn màu là tổng $\pmod{N}$ những màu anh ta quan sát được.

Bài 8. Với lựa chọn bỏ qua, khả năng thắng lên đến $\frac{1023}{1024}$. Chỉ sai khi tất cả nón đều cùng màu trắng (hoặc đen).

Bài 9. Sử dụng tổ hợp thay vì modulo. Chúng tôi sẽ phân tích bộ ba bài 7, 8 và 9 này trong những số tiếp theo.

Bài 10. Nếu tất cả đều nón trắng, sẽ không có tên nào giơ tay, và bọn chúng sẽ suy ra được nón mình màu trắng.

Nếu chỉ có một nón đen, cả hai tên đội nón trắng sẽ cùng lúc biết nón mình màu trắng vì tên còn lại không giơ tay.

Nếu có hai nón đen, cả ba tên sẽ cùng giơ tay. Lúc này, những tên đội nón đen sẽ cùng biết mình đội nón đen, vì chúng sẽ suy luận: “nếu nón mình màu trắng, thì tên đội nón đen kia không thể giơ tay”.

Tình huống không thể đoán được ngay lập tức là khi cả 3 đều đội nón đen. Nhưng sau sự chần chừ của cả 3, cả 3 sẽ cùng đoán được tất cả đều đội nón đen.

Bài 11. Nếu một người thấy k nón trắng, anh ta sẽ đoán nón mình màu đen ở phút thứ $(20-k)$. Sau khi đã có người đoán thì không ai đoán nữa.

Bài 12, 13. Chúng tôi sẽ phân tích chi tiết vào các số tiếp theo.

Bài 14. Các đáp án có thể có là:

$$[25, 35, 60],\ [35, 25, 60],\ [42, 18, 60],\ [18, 42, 60]$$
$$[10, 50, 60],\ [50, 10, 60],\ [44, 16, 60],\ [16, 44, 60].$$

Bài 15. Tồn tại chiến thuật luôn luôn thắng. Hãy thử với những trường hợp nhỏ.

VỀ BÀI HÌNH HỌC THI VMO 2015

Trần Quang Hùng (*Trường THPT Chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Tóm tắt

Bài viết sẽ xoay quanh khai thác bài hình học thi quốc gia Việt Nam ngày đầu tiên.

Kỳ thi học sinh giỏi quốc gia Việt Nam năm 2015 có bài toán hình học như sau:

Bài toán 1. *Cho đường tròn* (O) *và hai điểm* B, C *cố định trên* (O) *với* BC *không là đường kính. Một điểm* A *thay đổi trên* (O) *sao cho tam giác* ABC *nhọn. Gọi* E, F *lần lượt là chân đường cao kẻ từ* B, C *của tam giác* ABC. (I) *là đường tròn thay đổi đi qua các điểm* E, F *và có tâm là* I.

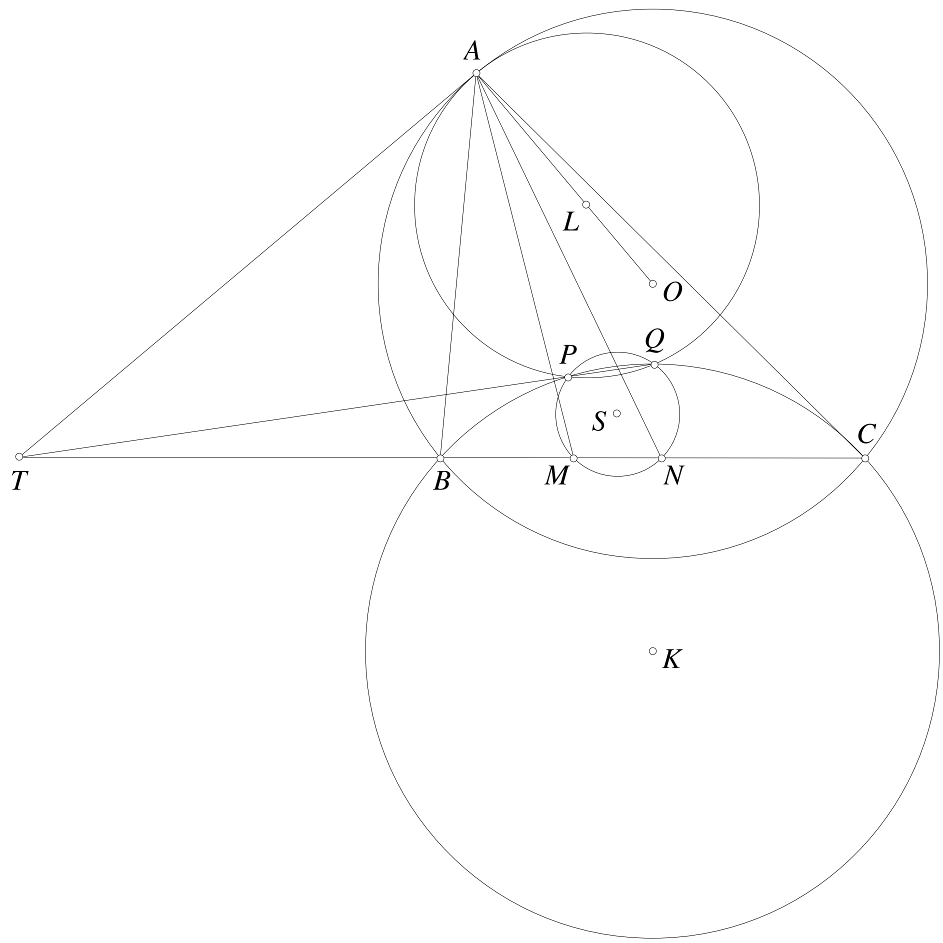
a) *Giả sử* (I) *tiếp xúc* BC *tại* D. *Chứng minh rằng* $\frac{DB}{DC} = \sqrt{\frac{\cot B}{\cot C}}$.

b) *Giả sử* (I) *cắt cạnh* BC *tại* M, N. *Gọi* H *là trực tâm tam giác* ABC *và* P, Q *là giao điểm của* (I) *với đường tròn ngoại tiếp tam giác* HBC. *Đường tròn* (K) *đi qua* P, Q *tiếp xúc* (O) *tại* T *với* T, A *cùng phía* BC. *Chứng minh rằng phân giác trong của góc* $\angle MTN$ *luôn đi qua điểm cố định.*

Nhận xét. Đây là bài toán ở vị trí số 4 là bài được đánh giá là khó. Hai ý của bài toán không liên quan nhiều tới nhau, chúng tôi sẽ giải và phân tích từng ý. Với ý b) của bài toán thực chất các yếu tố về trực tâm và chân đường cao là không cần thiết. Chúng tôi xin đưa ra một bài toán tổng quát hơn và thực ra về mặt cấu hình sẽ đơn giản hơn đồng thời phát biểu lại cho thấy ý nghĩa thực của nó.

Bài toán 2. *Cho* BC *là dây cung của đường tròn* (O). *Đường tròn* (K) *bất kỳ qua* B, C. P, Q *là hai điểm thuộc* (K) *và ở trong* (O). *Đường tròn* (L) *qua* P, Q *tiếp xúc trong* (O) *tại* A *sao cho* A, K *khác phía* BC. *Đường tròn* (S) *qua* P, Q *cắt* BC *tại* M, N. *Chứng minh rằng* $\angle BAM = \angle CAN$.

Lời giải. Theo tính chất tâm đẳng phương dễ thấy tiếp tuyến chung tại A của (O) và (L), PQ và BC đồng quy tại T.



Từ đó dễ có $TA^2 = TP.TQ = TM.TN$. Từ đó dễ suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cũng tiếp xúc (O). Từ đây, ta dễ dàng suy ra $\angle BAM = \angle CAN$ (điều phải chứng minh). □

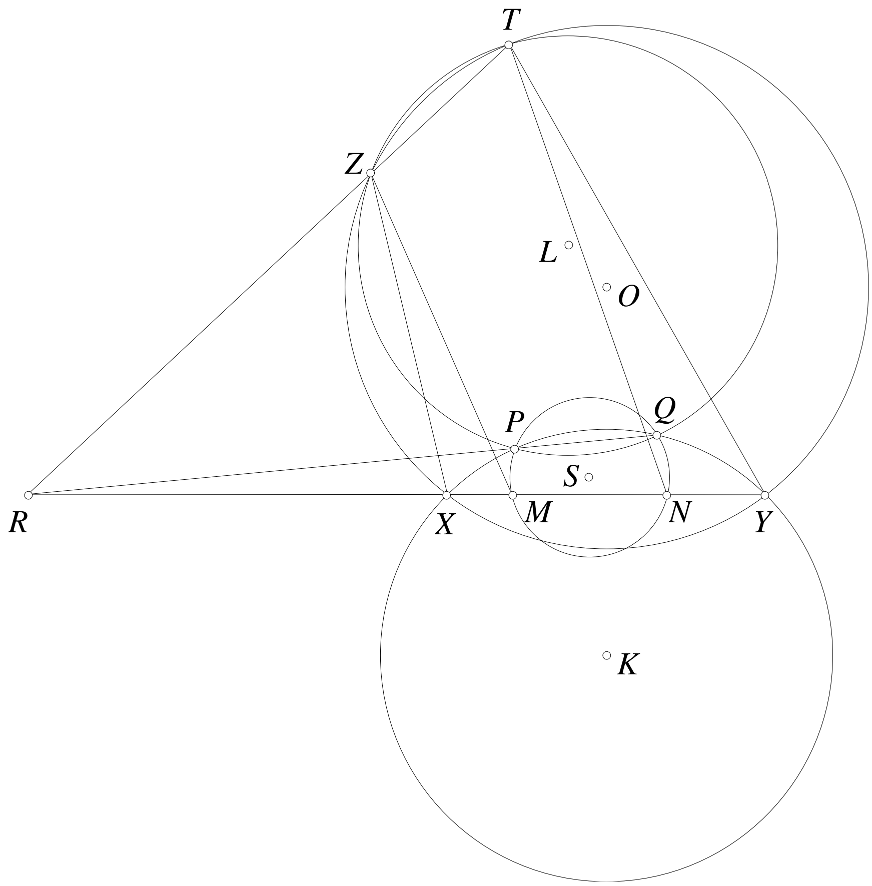
Nhận xét. Bài toán là áp dụng trực tiếp của các tính chất về phương tích và trục đẳng phương. Bài toán có thể thay thế điều kiện tiếp xúc thành cắt nhau như sau

Bài toán 3. *Cho XY là dây cung của đường tròn (O). Đường tròn (K) bất kỳ qua X, Y. Đường tròn (L) cắt (O) tại Z, T và cắt (K) tại P, Q. Đường tròn (S) qua P, Q cắt BC tại M, N. Chứng minh rằng*

$$\angle XZM = \angle YTN.$$

Lời giải. Ta cũng dễ thấy XY, ZT, PQ đồng quy tại R. Suy ra

$$RM \cdot RN = RP \cdot RQ = RZ \cdot RT.$$



Kết quả này chứng tỏ tứ giác $ZTMN$ nội tiếp. Từ đó, ta có

$$\angle XZM = \angle RZM - \angle RZZ = \angle TNM - \angle TYM = \angle YTN.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán mở rộng tiếp theo này xem ra còn đơn giản hơn cả trường hợp tiếp xúc. Thực ra điều chúng tôi muốn nói ở những bài toán sau này là khi tổng quát bài toán thì đó cũng là một cách hay cho chúng ta tìm ra lời giải đơn giản hơn là các trường hợp riêng. Khi nhìn qua cái nhìn tổng quát bỏ bớt các dữ kiện không cần thiết bài toán trở nên không khó nữa. Ta có thể viết lại bài toán theo cách khác mang tính đối xứng hơn:

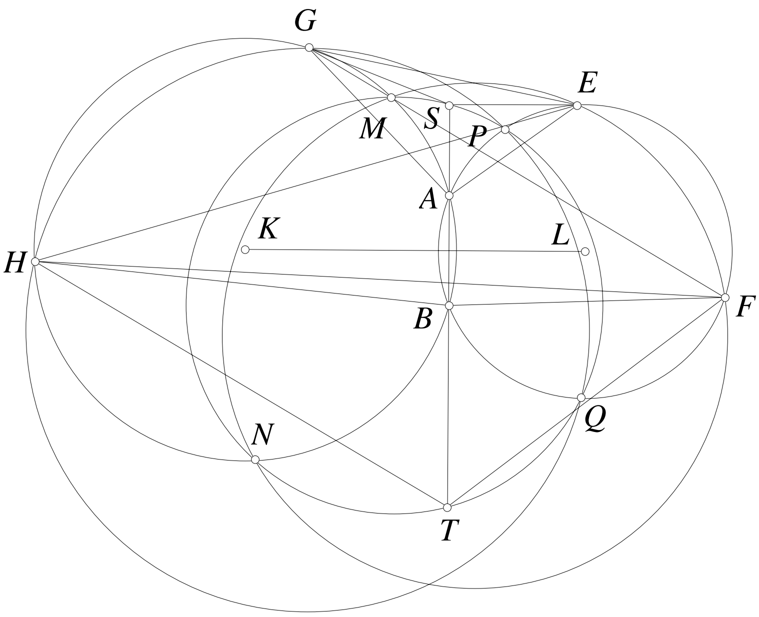
Bài toán 4. *Cho đường tròn* (K) *và* (L) *cắt nhau tại* A, B. *Một đường tròn bất kỳ cắt* (K) *tại* M, N *cắt* (L) *tại* P, Q *và cắt* AB *tại* S, T. *Một đường tròn qua* M, N *cắt* (L) *tại* E, F. *Một đường tròn qua* P, Q *cắt* (K) *tại* G, H.

a) *Chứng minh rằng* E, F, G, H *cùng thuộc một đường tròn.*

b) *Chứng minh rằng* $\angle SEA = \angle TFB$ *và* $\angle SGA = \angle THB$.

c) *Giả sử* G, E, M, P, S, A *cùng phía với* KL. *Chứng minh rằng*

$$\angle HBF + \angle GAE = \angle HTF + \angle GSE.$$

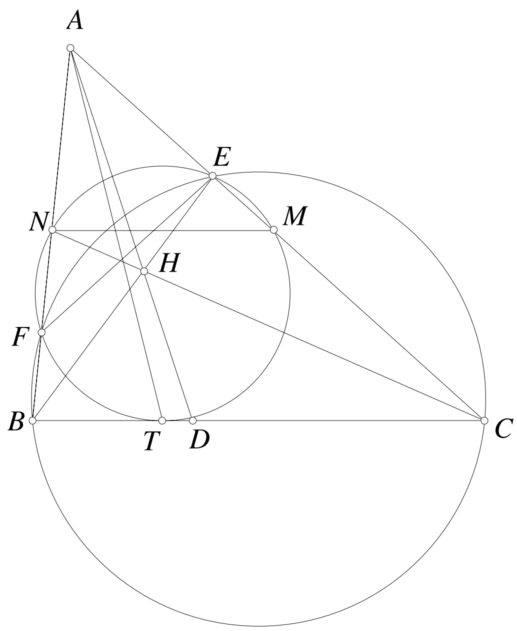


Lời giải đơn giản chỉ áp dụng bài tập trên. Chúng tôi nhận thấy bài toán này ý nghĩa nằm nhiều ở câu a). Tuy rằng theo đánh giá thì ý a) là ý dùng để gỡ điểm nhưng thực ra ẩn sau nó có nhiều yếu tố thú vị. Chúng ta thấy là việc phát biểu kết luận bằng một biểu thức lượng giác không đẹp. Ta hoàn toàn có thể thay thế biểu thức lượng giác $\frac{\cot B}{\cot C} = \frac{KB}{KC}$ với AK đường cao từ A, như vậy ta cần chứng minh $\frac{DB^2}{DC^2} = \frac{KB}{KC}$. Đến đây ta có thể đề xuất bài tổng quát hơn như sau:

Bài toán 5. *Cho tam giác* ABC. *Một đường tròn* (K) *qua* B, C *cắt* CA, AB *tại* E, F. BE *cắt* CF *tại* H. AH *cắt* BC *tại* D. *Một đường tròn qua* E, F *tiếp xúc đoạn* BC *tại* T. *Chứng minh rằng*

$$\frac{TB^2}{TC^2} = \frac{DB}{DC}.$$

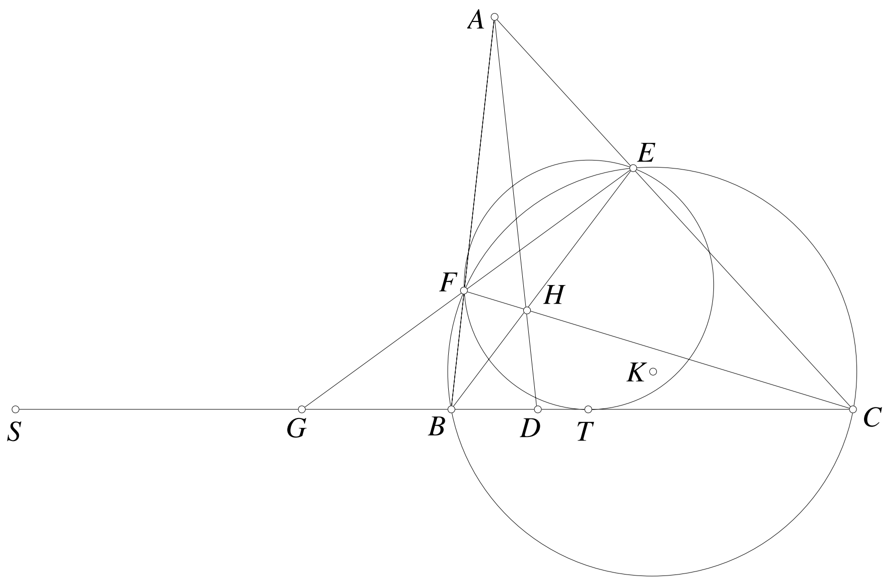
Lời giải 1. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cắt CA, AB tại M, N khác E, F.



Ta có $\angle EMN = \angle EFN = \angle ECB$, suy ra $MN \parallel BC$. Từ đó:

$$\frac{TB^2}{TC^2} = \frac{BF \cdot BN}{CE \cdot CM} = \frac{BF}{CE} \cdot \frac{AN}{AM} = \frac{BF}{CE} \cdot \frac{AE}{AF} = \frac{DB}{DC}.$$

Ta có điều phải chứng minh. □



Lời giải 2. Gọi EF cắt BC tại G. Gọi S đối xứng T qua G. Từ tính chất phương tích ta thấy $GS^2 = GT^2 = GE \cdot GF = GB \cdot GC$, suy ra hàng $(ST, BC) = -1$ cũng dễ có hàng $(GD, BC) = -1$. Từ đó ta có $\overline{CB} \cdot \overline{CG} = \overline{CT} \cdot \overline{CS}$ và $\overline{BC} \cdot \overline{BG} = \overline{BT} \cdot \overline{BS}$, suy ra

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{BG} \cdot \overline{BC}}{\overline{CG} \cdot \overline{CB}} = \frac{\overline{BT}.\overline{BS}}{\overline{CT}.\overline{CS}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{CT}} \cdot \frac{\overline{BS}}{\overline{CS}} = -\frac{TB^2}{TC^2}.$$

Từ đó dễ có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải thứ nhất mang nhiều tính hình học và sơ cấp. Tuy vậy khi bài toán nhìn qua cách của hàng điều hòa khá dễ hiểu, tất cả hoàn toàn là biến đổi tỷ số trên đường thẳng. Có thể giải mà không dựng điểm S tuy vậy việc dựng thêm hàng điều hòa (BC, ST) để sử dụng các hệ thức đã biết trên hàng điều hòa làm ta giải quyết bài toán nhanh hơn. Bài toán hoàn toàn chưa dừng lại ở việc tổng quát. Nếu ta để ý kỹ ở bài toán gốc, khi dựng ra các tiếp điểm tương tự trên CA, AB sẽ dẫn đến một bài toán đồng quy rất thú vị như sau:

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AD, BE, CF. Đường tròn qua E, F tiếp xúc đoạn BC tại X. Tương tự có Y, Z. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.*

Ý tưởng tương tự khi tiếp điểm ở ngoài cạnh:

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AD, BE, CF. Đường tròn qua E, F tiếp xúc BC tại X ở ngoài đoạn BC. Tương tự có Y, Z. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.*

Kết hợp cả hai ý của bài toán trên ta có một bài toán rất thú vị như sau (tham khảo [2]):

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Hai đường tròn đường tròn qua E, F tiếp xúc BC tại X_1, X_2 sao cho X_1 nằm giữa B, C. Tương tự có Y_1, Y_2, Z_1, Z_2. Chứng minh rằng:*

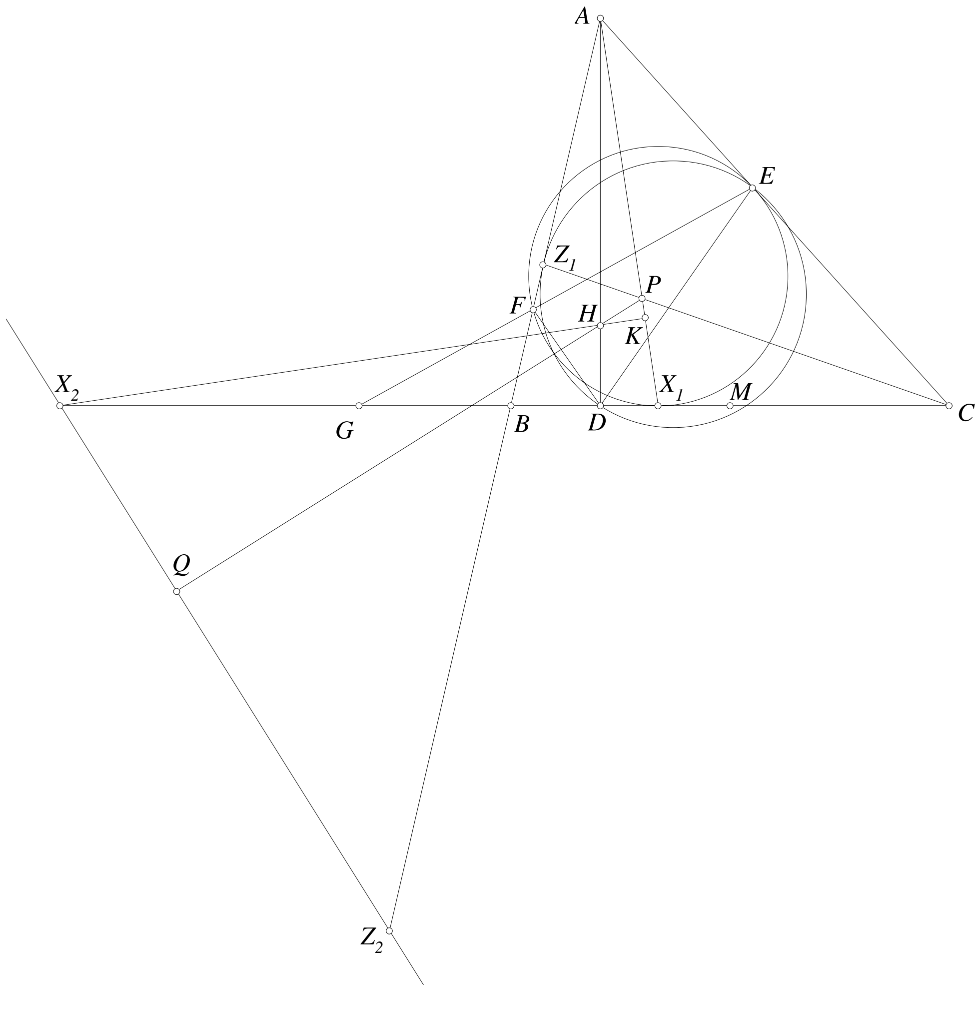
a) *AX_1, BY_1, CZ_1 đồng quy tại P.*

b) *X_2, Y_2, Z_2 thẳng hàng trên đường thẳng d.*

c) *PH và d vuông góc.*

Lời giải. Các ý a) và b) đã có ở các bài trên, ta tập trung chứng minh ý c) là ý thú vị nhất của bài toán này. Theo tính chất tiếp tuyến dễ thấy EF cắt BC tại G là trung điểm X_1X_2. Gọi M là trung điểm BC chú ý E, F, D, M cùng nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC nên ta có $GX_1^2 = GX_2^2 = GE \cdot GF = GD \cdot GM$. Từ đó hàng $(X_1X_2, DM) = -1$. Ta cũng có hàng $(BC, DG) = -1$. Suy ra

$$\overline{DH} \cdot \overline{DA} = \overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DG} \cdot \overline{DM} = \overline{DX_1} \cdot \overline{DX_2}.$$



Từ đó H là trực tâm tam giác AX_1X_2 nên X_2H vuông góc AX_1 tại K. Gọi Q là hình chiếu của X_2 lên PH, từ kết quả trên, ta có

$$\overline{HP} \cdot \overline{HQ} = \overline{HK} \cdot \overline{HX_2} = \overline{HD} \cdot \overline{HA} = \overline{HB} \cdot \overline{HE} = \overline{HC} \cdot \overline{HF} = k.$$

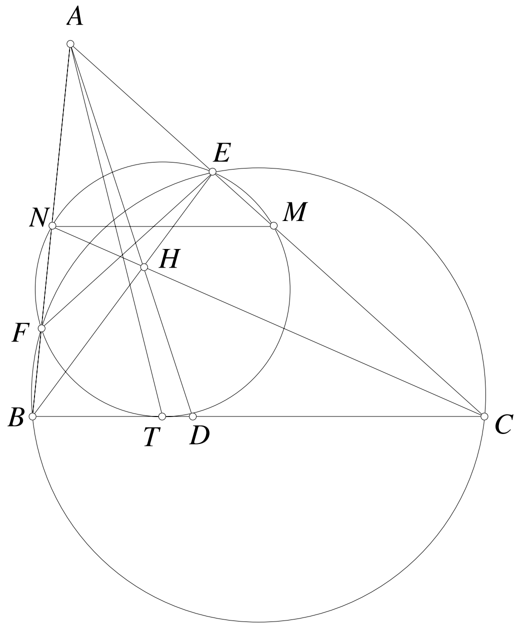
Từ đây, bằng cách chứng minh tương tự, ta có hình chiếu của Y_2, Z_2 lên PH cũng là Q. Như vậy PH vuông góc d tại Q. □

Ta hoàn toàn có thể có bài toán đảo như sau:

Bài toán 9. *Cho tam giác* ABC *với các điểm* D, E, F *thuộc cạnh* BC, CA, AB *sao cho* AD, BE, CF *đồng quy. Giả sử có đường tròn* (K) *qua* E, F *tiếp xúc đoạn* BC *tại* T *sao cho* $\frac{TB^2}{TC^2} = \frac{DB}{DC}$. *Chứng minh rằng bốn điểm* B, C, E, F *thuộc một đường tròn.*

Lời giải 1. Từ giả thiết AD, BE, CF đồng quy và chú ý tứ giác $MENF$ nội tiếp, ta suy ra

$$\frac{TB^2}{TC^2} = \frac{DB}{DC} = \frac{EA}{EC} \cdot \frac{FB}{FA} = \frac{EA \cdot AM}{FA \cdot AN} \cdot \frac{FB}{EC} \cdot \frac{AN}{AM} = \frac{FB}{EC} \cdot \frac{AN}{AM}. \tag{1}$$



Mặt khác, ta lại có

$$\frac{TB^2}{TC^2} = \frac{BF \cdot BN}{CE \cdot CM}. \tag{2}$$

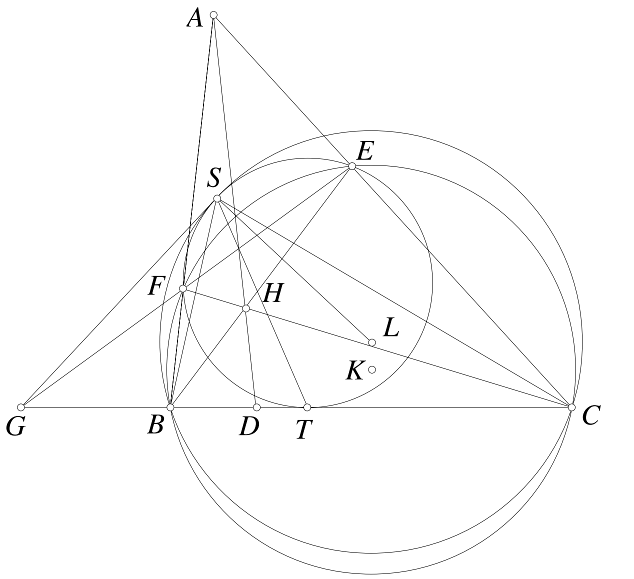
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BN}{CM} = \frac{AN}{AM}$. Vậy $MN \parallel BC$. Từ đó:

$$\angle ACB = \angle AMN = \angle EFA,$$

suy ra tứ giác $BCEF$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải 2. Gọi (L) là đường tròn qua B, C và tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác TEF tại S. Tiếp tuyến chung tại S cắt BC tại G. Ta dễ thấy ST là phân giác $\angle BSC$, suy ra

$$\frac{GB}{GC} = \frac{SB^2}{SC^2} = \frac{TB^2}{TC^2} = \frac{DB}{DC}.$$



Như thế, ta có $(BC, DG) = -1$ mà AD, BE, CF đồng quy nên suy ra EF đi qua G. Từ đó $GE \cdot GF = GS^2 = GB \cdot GC$ suy ra E, F, B, C thuộc một đường tròn. Ta có điều phải chứng minh. □

Từ bài toán tổng quát trên, ta lại có thể tổng quát bài toán đồng quy hơn nữa như sau:

Bài toán 10. *Cho tam giác* ABC *các điểm* K, L, N *lần lượt thuộc trung trực* BC, CA, AB *sao cho* AK, BL, CN *đồng quy. Đường tròn* (K) *qua* B, C *cắt đoạn* CA, AB *tại* A_b, A_c*. Đường tròn qua* A_b, A_c *tiếp xúc cạnh* BC *tại* A_a*. Tương tự có* B_b, C_c*. Chứng minh rằng* AA_a, BB_b, CC_c *đồng quy.*

Nếu thay các yếu tố tiếp xúc thành cắt nhau, ta cũng có một số bài toán tương tự, các bạn hãy làm như các bài luyện tập:

Bài toán 11. *Cho tam giác* ABC *có* E, F *lần lượt thuộc đoạn* CA, AB*.* BE *cắt* CF *tại* H*.* AH *cắt* BC *tại* D*.* S *là một điểm trên đoạn* BC*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác* SEF *cắt* BC *tại* T *khác* S*. Chứng minh rằng* $\frac{BS \cdot BT}{CS \cdot CT} = \frac{DB}{DC}$ *khi và chỉ khi* B, C, E, F *cùng thuộc một đường tròn.*

Bài toán 12. *Cho tam giác* ABC *nhọn có đường cao* AD, BE, CF *đồng quy tại* H. *Các điểm* X, Y, Z *thuộc đoạn* BC, CA, AB *sao cho* AX, BY, CZ *đồng quy. Đường tròn ngoại tiếp tam giác* XEF *cắt* BC *tại* U *khác* X. *Tương tự có các điểm* V, W. *Chứng minh rằng:*

a) AU, BV, CW *đồng quy tại* P.

b) YZ, ZX, XY *lần lượt cắt* BC, CA, AB *theo ba điểm thuộc một đường thẳng vuông góc với* PH.

Tài liệu tham khảo

[1] Đề thi VMO năm 2015.

[2] Các bài viết của Buratinogigle:
`artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=620287`

VỀ BÀI BẤT ĐẲNG THỨC TRONG ĐỀ THI VMO 2015

Võ Quốc Bá Cẩn (*Hà Nội*)

Tóm tắt

Trong kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán năm 2015, đề thi ngày thứ nhất có bài toán bất đẳng thức sau:

Bài toán 1. *Cho* $a, b, c \geqslant 0$. *Chứng minh rằng*

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqslant \mathcal{P} \geqslant (a+b+c)^2,$$

với $\mathcal{P} = (a+b+c)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.

Bài viết này chúng tôi trình bày các ý kiến của mình về bài toán cũng như nêu ra các hướng tiếp cận khác nhau để đi đến lời giải. Bên cạnh các phân tích bình luận, chúng tôi cũng sẽ đề xuất một số bài toán với ý tưởng tương tự cho từng hướng tiếp cận để bạn đọc có thể tự rèn luyện thêm.

Ở cuối bài viết, chúng tôi sẽ giới thiệu nguồn gốc, phát biểu và giải bài toán tổng quát của bài VMO nói trên.

1. Nhận xét chung

Với ý kiến chủ quan của mình, chúng tôi cho rằng đây là một bài toán khá hợp lý tương xứng với vị trí của nó trong đề thi. Trong thời gian 180 phút, các thí sinh phải làm 4 bài toán với các thể loại: *Giải tích, Đại số, Tổ hợp và Hình học.*

Số lượng câu hỏi khá nhiều nhưng thời gian làm bài lại hạn chế, thế nên các bài toán đầu tiên không thể ra quá khó vì như thế sẽ tạo áp lực cho thí sinh.

Bài toán này ở mức độ trung bình, không dễ cũng không khó. Hình thức phát biểu cũng gọn gàng, đơn giản chứ không cồng kềnh phức tạp so với đề VMO năm 2014. Ngoài ra, bài toán này cũng có khá nhiều hướng để tiếp cận chứ không mẹo mực phức tạp như đề thi năm ngoái. Chính vì thế, việc chọn nó làm bài số 2 là khá phù hợp.

Tuy nhiên, điều đó không có nghĩa là bài toán này thực sự tốt. Ý tưởng của nó không mới nếu không muốn nói là đã khá quen thuộc với các em học sinh. Vì vậy, do quen dạng nên nhiều em "trúng tủ" có thể nhìn vào ngay và giải mà không cần phải nghĩ suy nhiều. Rõ ràng điều này sẽ khiến cho việc đánh giá chất lượng cũng như kết quả sẽ không được khách quan. Sẽ thật tuyệt nếu đề thi là những bài toán với ý tưởng mới mẻ nhưng lại nhẹ nhàng, tinh tế và không mẹo mực. Mong rằng các đề VMO sắp tới sẽ đáp ứng được điều này.

2. Các hướng tiếp cận cho bài toán

Vế trái của bất đẳng thức khá đơn giản. Dạng phát biểu của nó với tổng các bình phương gợi cho ta nghĩ đến đồng nhất thức Lagrange – một hằng đẳng thức quen thuộc được dùng để chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geqslant 0.$$

Cụ thể hơn, ta có đẳng thức sau:

$$3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Do đó, bất đẳng thức vế trái có thể được viết dưới dạng:

$$(a+b+c)^2 \geqslant (a+b+c)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right).$$

Đến đây thì có lẽ bạn nào cũng sẽ nghĩ đến việc sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$ (áp dụng cho $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$ và $z=\sqrt{c}$) để hoàn tất phép chứng minh.

Ở đây, ta sẽ dành sự quan tâm nhiều hơn cho bất đẳng thức vế phải. Nhận xét ban đầu cho thấy đây là một bất đẳng thức tương đối chặt vì dấu bằng xảy ra tại hai trường hợp $a=b=c$ và $a=b$, $c=0$ (cùng các hoán vị tương ứng). Do đó, ta cần phải rất cẩn trọng trong các đánh giá của mình.

Ngoài ra, ta cũng thấy rằng chỗ khó của bài toán chính là ở các căn thức. Nếu ta có thể phá được dấu căn đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn thì chắc chắn bài toán cũng sẽ trở nên sáng sủa hơn. Đến đây, có hai ý tưởng chính như sau:

1. *Đặt ẩn phụ để khử căn:* Đây là một hướng đi khá tự nhiên vì các căn thức ở đây cũng đơn giản, các biểu thức dưới dấu căn chỉ có dạng bậc một. Do đó, chỉ cần một lần đặt ẩn phụ $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$ là ta có thể khử được hết các căn thức và đưa về xét một bất đẳng thức thuần nhất bậc 4 đối với x, y, z. Bậc của bất đẳng thức mới cũng không quá cao nên đây là hướng đi hoàn toàn khả thi.

2. *Sử dụng đánh giá để khử căn:* Đây là ý tưởng thường thấy khi xử lý các bài toán có căn. Vấn đề được đặt ra ở đây là ta phải lựa chọn đánh giá đủ chặt sao cho các điều kiện dấu bằng phải được đảm bảo.

Các hướng tiếp cận được trình bày dưới đây hầu hết đều sử dụng hai ý tưởng trên làm tư tưởng chủ đạo:

2.1. Hướng 1: Khai triển trực tiếp

Đây có lẽ là hướng đi tự nhiên nhất cho bài toán này. Ta chỉ việc đặt $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$ rồi nhân tung hết ra. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại dưới dạng:

$$\sum x^4 + xyz\sum x + \sum xy(x^2+y^2) \geqslant 4\sum x^2y^2. \qquad (1)$$

Đến đây, nếu bạn nào có tìm hiểu sẽ nghĩ ngay đến bất đẳng thức Schur bậc 4:

$$x^2(x-y)(x-z) + y^2(y-z)(y-x) + z^2(z-x)(z-y) \geqslant 0.$$

Dạng khai triển của nó chính là:

$$\sum x^4 + xyz\sum x \geqslant \sum xy(x^2+y^2). \qquad (2)$$

Sự tương đồng giữa hai bất đẳng thức (1) và (2) gợi cho ta nghĩ đến việc dùng (2) để đánh giá cho (1). Ngoài ra, (2) cũng có dấu bằng tại $x = y = z$ và $x = y$, $z = 0$ (cùng các hoán vị) tương ứng với trường hợp đẳng thức của (1). Do đó, đây sẽ là một đánh giá khá ổn và ta có thể yên tâm về độ an toàn của nó. Thật vậy, sau khi đánh giá, ta chỉ cần xét bất đẳng thức:

$$2\sum xy(x^2+y^2) \geqslant 4\sum x^2y^2 \Leftrightarrow \sum xy(x^2+y^2) \geqslant 2\sum x^2y^2$$

và nó chỉ là một hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức AM-GM:

$$\sum xy(x^2+y^2) \geqslant \sum (xy \cdot 2xy) = 2\sum x^2y^2. \qquad \square$$

Lời bình. Đặt ẩn phụ là một trong những kỹ năng cơ bản cần có trong bất đẳng thức. Nhiều bài toán có hình thức cồng kềnh phức tạp, tuy nhiên sau những bước đặt ẩn phụ đơn giản, ta có thể đưa bài toán trở về dạng mới mà ở đó nhiều ý tưởng (mà trong đó cũng có thể là gốc của bài toán) sẽ được phơi bày ra.

Có nhiều kiểu đặt ẩn phụ, trong đó có ba kiểu sau rất thông dụng: Đặt ẩn phụ để làm đơn giản hình thức bài toán, đặt ẩn phụ để thuần nhất hóa hoặc đối xứng hóa, và đặt ẩn phụ lượng giác dựa vào dấu hiệu từ điều kiện giả thiết.

Dưới đây là một số ví dụ:

Bài toán 2. *Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\sum \sqrt{(x+y)(x+z)} \geqslant x+y+z+\sqrt{3(xy+yz+zx)}.$$

Lời giải. Đặt $a=\sqrt{y+z}$, $b=\sqrt{z+x}$ và $c=\sqrt{x+y}$. Khi đó, ta dễ thấy a, b, c là ba cạnh của một tam giác và:

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}, \quad y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}, \quad z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

Thay vào, ta viết được bất đẳng thức dưới dạng:

$$2\sum ab-\sum a^2 \geqslant \sqrt{3\left(2\sum a^2b^2-\sum a^4\right)},$$

hay

$$2\sum ab-\sum a^2 \geqslant \sqrt{3(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

Đến đây, ta lại đặt $a=n+p$, $b=p+m$ và $c=m+n$ với m, n, $p>0$. Bất đẳng thức được viết lại thành:

$$mn+np+pm \geqslant \sqrt{3mnp(m+n+p)}.$$

Một kết quả đã quá quen thuộc. $\square$

Bài toán 3 (IMO, 2001)**.** *Cho* $a, b, c > 0$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

Lời giải. Đặt $x = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}$ và $z = \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$. Khi đó, bằng các biến đổi đơn giản, ta dễ thấy $0 < x, y, z < 1$ và:

$$\frac{8bc}{a^2} = \frac{1-x^2}{x^2}, \quad \frac{8ca}{b^2} = \frac{1-y^2}{y^2}, \quad \frac{8ab}{c^2} = \frac{1-z^2}{z^2}.$$

Từ đó suy ra

$$512x^2y^2z^2 = (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2).$$

Theo yêu cầu của bài toán, ta cần chứng minh $x+y+z \geqslant 1$. Nếu điều này không đúng, tức $x+y+z < 1$, thì ta có

$$1 - x^2 > (x+y+z)^2 - x^2 = (y+z)(2x+y+z).$$

Đánh giá tương tự cho các biểu thức còn lại, ta thu được

$$512x^2y^2z^2 > \left[\prod(y+z)\right]\left[\prod(2x+y+z)\right].$$

Bằng cách sử dụng bất đẳng thức quen thuộc:

$$(m+n)(n+p)(p+m) \geqslant 8mnp, \quad \forall m, n, p > 0$$

lần lượt cho các bộ (x, y, z) và $(x+y, y+z, z+x)$, ta có

$$\prod(2x+y+z) \geqslant 8\prod(x+y) \geqslant 64xyz.$$

Từ đó suy ra

$$\left[\prod(y+z)\right]\left[\prod(2x+y+z)\right] \geqslant 8xyz \cdot 64xyz = 512x^2y^2z^2.$$

Mâu thuẫn nhận được cho ta kết quả bài toán. □

Bài toán 4. *Cho* a, b, c *là các số thực thỏa mãn điều kiện* $abc = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{1+a+a^2} + \frac{1}{1+b+b^2} + \frac{1}{1+c+c^2} \geqslant 1.$$

Lời giải. Do $abc = 1$ nên ta có thể chứng minh được tồn tại các số thực x, y, z thỏa mãn $a = \frac{yz}{x^2}$, $b = \frac{zx}{y^2}$ và $c = \frac{xy}{z^2}$ (chẳng hạn, ta có thể chọn $x = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$, $y = \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{3c}}$). Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành:

$$\frac{x^4}{x^4 + x^2yz + y^2z^2} + \frac{y^4}{y^4 + y^2zx + z^2x^2} + \frac{z^4}{z^4 + z^2xy + x^2y^2} \geqslant 1.$$

Đến đây, bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\text{VT} \geqslant \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x^4 + y^4 + z^4) + xyz(x + y + z) + (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)},$$

ta đưa được bài toán về xét một kết quả đã quá thuộc:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geqslant xyz(x + y + z). \qquad \square$$

Bài toán 5. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx + 2xyz = 1$. Giả sử $z = \max\{x, y, z\}$, chứng minh rằng*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 4(x + y + z) \geqslant \frac{(2z - 1)^2}{z(2z + 1)}.$$

Lời giải. Giả thiết $xy + yz + zx + 2xyz = 1$ có thể được viết lại dưới dạng $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$. Từ đó, ta dễ dàng chứng minh được tồn tại các số dương a, b, c sao cho:

$$x = \frac{a}{b + c}, \quad y = \frac{b}{c + a}, \quad z = \frac{c}{a + b}.$$

Ngoài ra, do $z = \max\{x, y, z\}$ nên ta có $c = \max\{a, b, c\}$. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành:

$$\frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} + \frac{a + b}{c} - 4\left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b}\right) \geqslant \frac{(2c - a - b)^2}{c(2c + a + b)}.$$

Do $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{4a}{b+c} = \frac{a(b-c)^2}{bc(b+c)}$ nên bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{a(c - b)^2}{bc(b + c)} + \frac{b(c - a)^2}{ca(c + a)} + \frac{c(a - b)^2}{ab(a + b)} \geqslant \frac{(2c - a - b)^2}{c(2c + a + b)}.$$

Và ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là:

$$\frac{a(c - b)^2}{bc(b + c)} + \frac{b(c - a)^2}{ca(c + a)} \geqslant \frac{(2c - a - b)^2}{c(2c + a + b)},$$

hay
$$\frac{a(c-b)^2}{b(b+c)}+\frac{b(c-a)^2}{a(c+a)}\geqslant\frac{(2c-a-b)^2}{2c+a+b}.$$
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng cộng mẫu, ta có
$$VT\geqslant\frac{\left[\sqrt{\frac{a}{b}}(c-b)+\sqrt{\frac{b}{a}}(c-a)\right]^2}{2c+a+b}.$$
Từ đó, bài toán được đưa về chứng minh
$$\sqrt{\frac{a}{b}}(c-b)+\sqrt{\frac{b}{a}}(c-a)\geqslant 2c-a-b,$$
hay
$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2\right)c+a+b-2\sqrt{ab}\geqslant 0.$$
Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo AM-GM. $\square$

Bài toán 6 (Việt Nam TST, 2001)**.** *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $2x+4y+7z=2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:*
$$P=x+y+z.$$

Lời giải. Đặt $x=\sqrt{7}a$, $y=\frac{\sqrt{7}}{2}b$, $z=\frac{2\sqrt{7}}{7}c$, ta có $a+b+c=abc$ và:
$$P=\frac{\sqrt{7}}{14}(14a+7b+4c).$$
Do $a, b, c>0$ và $a+b+c=abc$ nên tồn tại $A, B, C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $A+B+C=\pi$ và $a=\tan A$, $b=\tan B$, $c=\tan C$, suy ra
$$P=\frac{\sqrt{7}}{14}(14\tan A+7\tan B+4\tan C).$$
Biểu thức P có dạng tổng hàm. Điều này gợi cho ta nhớ đến bất đẳng thức tiếp tuyến như sau: *Nếu hàm số $f(x)$ khả vi bậc hai và lồi trên khoảng (a, b) thì với mọi $x, y\in(a, b)$, ta đều có*
$$f(x)\geqslant f(y)+f'(y)\cdot(x-y).$$
Do hàm số $f(x)=\tan x$ khả vi bậc hai và lồi trên $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ nên theo bất đẳng thức trên, với mọi $x, y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ta có
$$\tan x\geqslant\tan y+(\tan y)'(x-y)=\tan y+(\tan^2 y+1)(x-y).$$

Trong bất đẳng thức trên, lần lượt thay cặp số (x, y) bởi các cặp $\left(A, \arctan\frac{3}{\sqrt{7}}\right)$, $\left(B, \arctan\frac{5}{\sqrt{7}}\right)$ và $\left(C, \arctan\sqrt{7}\right)$, ta thu được

$$\begin{aligned} \tan A &\geqslant \frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{16}{7}\left(A - \arctan\frac{3}{\sqrt{7}}\right), \\ \tan B &\geqslant \frac{5}{\sqrt{7}} + \frac{32}{7}\left(B - \arctan\frac{5}{\sqrt{7}}\right), \\ \tan C &\geqslant \sqrt{7} + 8\left(C - \arctan\sqrt{7}\right). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra (chú ý rằng $\arctan\frac{3}{\sqrt{7}} + \arctan\frac{5}{\sqrt{7}} + \arctan\sqrt{7} = \pi$):

$$\begin{aligned} P &\geqslant \frac{\sqrt{7}}{14}\left[15\sqrt{7} + 32\left(\sum A - \arctan\frac{3}{\sqrt{7}} - \arctan\frac{5}{\sqrt{7}} - \arctan\sqrt{7}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{7}}{14}\left[15\sqrt{7} + 32(A + B + C - \pi)\right] = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 3$, $y = \frac{5}{2}$, $z = 2$. $\square$

Nhận xét. Bất đẳng thức tiếp tuyến là một trong những kết quả quan trọng của hàm lồi. Nó là mấu chốt để xây dựng nên bất đẳng thức Karamata, một công cụ rất mạnh để xử lý các bất đẳng thức dạng tổng hàm. Bạn đọc có thể tìm đọc thêm về hai kết quả thú vị này trong bài viết chuyên đề của chúng tôi ở *Tài liệu Chuyên Toán, Giải tích 12* (Nhà xuất bản Giáo Dục, 2011).

Các số $\arctan\frac{3}{\sqrt{7}}$, $\arctan\frac{5}{\sqrt{7}}$, $\arctan\sqrt{7}$ được sử dụng ở trên không phải là những số ngẫu nhiên "mò" được. Vì yêu cầu bài toán là tìm $\min$ nên ta cần phải đánh giá P lớn hơn hoặc bằng một hằng số nào đó. Do đó, khi sử dụng bất đẳng thức tiếp tuyến để đánh giá, ta cần chọn các hằng số thích hợp sao cho hệ số của A, B, C phải bằng nhau để có thể tận dụng được giả thiết $A + B + C = \pi$ và biến đổi vế bé thành hằng số.

Như vậy, các số được sử dụng trong lời giải trên thực chất chính là nghiệm thu được từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} 0 < x, y, z < \dfrac{\pi}{2}, \ x + y + z = \pi \\ 14(\tan^2 x + 1) = 7(\tan^2 y + 1) = 4(\tan^2 z + 1) \end{cases}$$

Bài toán 7 (Kiên Giang, 2014). *Cho* 2014 *số thực* $x_1, x_2, \ldots, x_{2014}$ *thuộc đoạn* $[-1, 1]$ *thỏa mãn* $\left|\sum_{i=1}^{2014} x_i\right| > 1$. *Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương* k *sao cho:*

$$\left|\sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=k+1}^{2014} x_i\right| \leqslant 1.$$

Lời giải. Ta thay 2014 bởi một số $n > 2$ tổng quát hơn. Với mỗi $1 \leqslant k \leqslant n$, ta đặt $a_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$, khi đó từ giả thiết suy ra

$$|a_k - a_{k-1}| \leqslant 1 < |a_n|, \forall k = 1, \ldots, n \text{ (ở đây } a_0 = 0).$$

Theo yêu cầu đề bài, ta cần chứng minh tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$|a_n - 2a_k| \leqslant 1. \tag{3}$$

Nếu có số $1 \leqslant k \leqslant n-1$ sao cho $(a_n - 2a_k)(a_n - 2a_{k+1}) \leqslant 0$ thì

$$|a_n - 2a_k| + |a_n - 2a_{k+1}| = \left|(a_n - 2a_k) - (a_n - 2a_{k+1})\right| = 2|a_{k+1} - a_k| \leqslant 2.$$

Từ đó suy ra số nhỏ nhất trong hai số $|a_n - 2a_k|$, $|a_n - 2a_{k+1}|$ sẽ có giá trị không vượt quá 1 và bài toán được chứng minh.

Xét trường hợp $(a_n - 2a_k)(a_n - 2a_{k+1}) > 0$ với mọi $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Ta chứng minh (3) bằng phản chứng. Giả sử không tồn tại số k nói trên, khi đó ta có

$$|a_n - 2a_k| > 1, \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{4}$$

Nếu $a_n > 2a_{n-1}$ thì do $(a_n - 2a_{n-1})(a_n - 2a_n) > 0$ nên ta suy ra $a_n < 0$. Mặt khác, do $|a_n| > 1$ nên ta có $a_n < -1$.

Do $a_n - 2a_k$ và $a_n - 2a_{k+1}$ có cùng dấu với mọi $1 \leqslant k \leqslant n-1$ nên từ bất đẳng thức $a_n > 2a_{n-1}$, ta cũng suy ra $a_n > 2a_1$ và do đó $1 + 2a_1 < a_n < -1$ (theo (4)), tức $a_1 < -1$. Kết quả này đưa đến $|a_1| > 1$, mâu thuẫn với giả thiết bài toán.

Lý luận tương tự, trường hợp $a_n < 2a_{n-1}$ cũng không thể xảy ra. Những mâu thuẫn thu được cho ta kết quả của bài toán. □

Sau đây là một số bài toán khác dành cho bạn đọc tự luyện:

Bài toán 8 (VMO, 2005). *Xét các số thực* x, y *thỏa mãn điều kiện:*

$$x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

Bài toán 9 (Olympic Nữ sinh Trung Quốc, 2004). *Cho* a, b, c *là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}.$$

Bài toán 10 (Thổ Nhĩ Kỳ, 2006). *Cho* x, y, z *là các số thực dương thỏa mãn* $xy + yz + zx = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant \left(\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}\right)^2 \geqslant 6\sqrt{3}.$$

Bài toán 11. *Cho* a, b, c *là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{4a+4b+c} + \frac{b}{4b+4c+a} + \frac{c}{4c+4a+b} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Bài toán 12 (IMO, 1983). *Cho* a, b, c *là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0.$$

Bài toán 13 (Chọn đội tuyển Moldova, 2006). *Cho* a, b, c *là độ dài ba cạnh của một tam giác. Gọi* p *là nửa chu vi của tam giác đó, chứng minh bất đẳng thức sau:*

$$a\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} + b\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}} + c\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \geqslant p.$$

Bài toán 14 (IMO, 2008). *Cho* x, y, $z \neq 1$ *là các số thực thỏa mãn điều kiện* $xyz = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{y}{y-1}\right)^2 + \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \geqslant 1.$$

Bài toán 15. *Cho* a, b, c *là các số dương thỏa mãn* $abc = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geqslant 1.$$

Bài toán 16. *Cho* a, b, c *là các số thực dương thỏa mãn* $abc = 1$. *Chứng minh rằng*

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5a+4}} + \dfrac{1}{\sqrt{5b+4}} + \dfrac{1}{\sqrt{5c+4}} \leqslant 1.$

b) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3a+1}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{3b+1}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{3c+1}} \leqslant 1.$

Bài toán 17. *Cho* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là các số thực dương thỏa mãn:*

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} \geqslant (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right).$$

Bài toán 18. *Cho* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là các số thực dương thỏa mãn:*

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = \frac{n}{2}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_i + x_j}.$$

Bài toán 19 (Nga, 2004)**.** *Cho số tự nhiên* $n > 3$. *Xét các số thực dương* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *có tích bằng* 1. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1.$$

Bài toán 20 (Trung Quốc, 2004)**.** *Cho* a, b, c, d *là các số thực dương thỏa mãn* $abcd = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geqslant 1.$$

Bài toán 21. *Cho* $a, b, c > 0$ *thỏa mãn* $abc = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{a+b+1} + \frac{b}{b+c+1} + \frac{c}{c+a+1} \geqslant 1.$$

Bài toán 22. *Cho* x, y, z *là các số thực dương thỏa mãn điều kiện*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$$

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $xyz \leqslant \frac{1}{8}$.

b) $x + y + z \leqslant \frac{3}{2}$.

c) $xy + yz + zx \leqslant \frac{3}{4} \leqslant x^2 + y^2 + z^2$.

d) $xy + yz + zx \leqslant \frac{1}{2} + 2xyz$.

Bài toán 23. *Cho* x, y, z *là các số thực dương thỏa mãn điều kiện*

$$xyz = x + y + z + 2.$$

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $xy + yz + zx \geqslant 2(x + y + z)$.

b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{xyz}$.

Bài toán 24 (APMO, 2004)**.** *Cho* a, b, c *là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geqslant 9(ab + bc + ca).$$

Bài toán 25 (Trung Quốc, 1996). *Cho* $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = 0$, $x_i > 0$ *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, n$ *và* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. *Chứng minh rằng*

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1}}\sqrt{x_i + \cdots + x_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

Bài toán 26 (Trung Quốc, 2003). *Cho* $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ *là các số thực thỏa mãn* $\sum_{i=1}^{2n-1}(a_i - a_{i+1})^2 = 1$. *Tìm giá trị lớn nhất của:*

$$P = (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Bài toán 27 (IMO, 2006). *Tìm số* M *nhỏ nhất để bất đẳng thức:*

$$\left|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)\right| \leqslant M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

đúng với mọi số thực a, b, c.

Trước khi kết thúc phần này, xin được nói thêm một chút về bất đẳng thức Schur bậc 4:

$$\sum x^4 + xyz\sum x \geqslant \sum xy(x^2 + y^2).$$

Đây là một bất đẳng thức rất chặt (chặt hơn cả bất đẳng thức Schur bậc 3), nó đúng với mọi bộ số thực x, y, z chứ không đòi hỏi các biến phải không âm. Thật vậy, bằng cách sử dụng phương pháp SOS được trình bày ở phần sau, ta viết được

$$\sum x^2(x - y)(x - z) = \frac{1}{2}\sum (x - y)^2(x + y - z)^2 \geqslant 0.$$

Chính vì điều này, bất đẳng thức có thể được dùng để xử lý rất hiệu quả cho các bài toán đối xứng ba biến với dấu bằng biên, đặc biệt là các bất đẳng thức thuần nhất bậc 4.

Dưới đây là một số ví dụ:

Bài toán 28. *Cho* a, b, c *là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{(b+c)^2}{a^2 + bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2 + ca} + \frac{(a+b)^2}{c^2 + ab} \geqslant 6.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$VT \geqslant \frac{\left[(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2\right]^2}{(b+c)^2(a^2+bc)+(c+a)^2(b^2+ca)+(a+b)^2(c^2+ab)}.$$

Từ đó, bài toán được đưa về chứng minh

$$2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^2 \geqslant 3\sum (b+c)^2(a^2+bc).$$

Sau khi khai triển và rút gọn, bất đẳng thức trên có dạng:

$$2\sum a^4+\sum ab(a^2+b^2)+2abc\sum a \geqslant 6\sum a^2b^2,$$

hay

$$2\left[\sum a^4+abc\sum a-\sum ab(a^2+b^2)\right]+3\sum ab(a^2+b^2) \geqslant 6\sum a^2b^2.$$

Đến đây, bằng cách sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 4 và một số đánh giá đơn giản, ta dễ có điều phải chứng minh. □

Bài toán 29. *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab} \geqslant \frac{8}{(a+b+c)^2}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$VT \geqslant \frac{4(a+b+c)^2}{(b+c)^2(2a^2+bc)+(c+a)^2(2b^2+ca)+(a+b)^2(2c^2+ab)}.$$

Từ đó, bài toán được đưa về chứng minh

$$(a+b+c)^4 \geqslant 2\left[(b+c)^2(2a^2+bc)+(c+a)^2(2b^2+ca)+(a+b)^2(2c^2+ab)\right].$$

Sau khi khai triển và rút gọn, bất đẳng thức trên có dạng:

$$\sum a^4+2\sum ab(a^2+b^2)+4abc\sum a \geqslant 6\sum a^2b^2.$$

Đến đây, bằng cách sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 4, ta đưa được về xét một bất đẳng thức mới là:

$$3\sum ab(a^2+b^2)+3abc\sum a \geqslant 6\sum a^2b^2.$$

Một kết quả khá hiển nhiên. □

Nhận xét. Cách đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz có một kỹ thuật riêng của nó chứ không phải ta ngẫu nhiên chọn thêm các đại lượng $(b+c)^2$, $(c+a)^2$, $(a+b)^2$ để nhân vào.

Chú ý rằng bất đẳng thức đã cho có dấu bằng tại trường hợp $a = b$, $c = 0$ (và các hoán vị) nên nếu đánh giá theo lối thông thường (chẳng hạn như $\sum \frac{1}{2a^2+bc} \geqslant \frac{9}{\sum(2a^2+bc)}$), ta sẽ không đảm bảo được dấu bằng. Thế nên, ta cần phải có sử điều chỉnh. Để thu được lời giải như trên, chúng tôi đã sử dụng Cauchy-Schwarz với kèm thêm tham số phụ:

$$\left(\sum \frac{1}{2a^2+bc}\right)\left[\sum (2a^2+bc)(ma+nb+nc)^2\right] \geqslant (m+2n)^2(a+b+c)^2$$

rồi chọn m, n sao cho hệ tỉ lệ khi xét dấu bằng cũng thỏa mãn tại trường hợp $a = b$, $c = 0$ (và các hoán vị). Kỹ thuật này giống như một phép cân bằng hệ số cho các bất đẳng thức mà ta đã đoán trước được dấu bằng.

Giống như ở trên, chúng tôi cũng xin đưa ra một số bài tập để bạn đọc tự rèn luyện thêm kỹ năng này:

Bài toán 30. *Cho* a, b, c *là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\sum \frac{1}{a^2+ab+b^2} \geqslant \frac{21}{2(a^2+b^2+c^2)+5(ab+bc+ca)}.$$

Bài toán 31. *Cho* a, b, c *là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\sum \frac{1}{4a^2-ab+4b^2} \geqslant \frac{9}{7(a^2+b^2+c^2)}.$$

Bài toán 32. *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{22a^2+5bc}+\frac{1}{22b^2+5ca}+\frac{1}{22c^2+5ab} \geqslant \frac{1}{(a+b+c)^2}.$$

Bài toán 33. *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$\frac{2a^2-bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{2b^2-ca}{c^2-ca+a^2}+\frac{2c^2-ab}{a^2-ab+b^2} \geqslant 3.$$

Bài toán 34. *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2-bc}{2b^2-3bc+2c^2}+\frac{b^2-ca}{2c^2-3ca+2a^2}+\frac{c^2-ab}{2a^2-3ab+2b^2} \geqslant 0.$$

2.2. Hướng 2: Phương pháp SOS

Đây là hướng đi tự nhiên thứ hai sau phương pháp khai triển. Trước hết, ta cũng sẽ đặt ẩn phụ x, y, z như hướng 1 ở trên để khử căn tiện cho việc quan sát. Ta đưa bài toán về chứng minh:

$$(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)+\sum(x^2-y^2)^2 \geqslant (x^2+y^2+z^2)^2.$$

Trong bất đẳng thức trên, có hai số hạng cùng chứa nhân tử $x^2+y^2+z^2$. Một cách tự nhiên, ta nghĩ đến việc ghép hai số hạng đó với nhau. Lúc này, bất đẳng thức được viết lại thành:

$$\sum(x^2-y^2)^2 \geqslant (x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

Sự xuất hiện của tổng bình phương $\sum(x^2-y^2)^2$ bên vế trái và phân tích đã quá quen thuộc:

$$\sum x^2 - \sum xy = \frac{1}{2}\sum(x-y)^2$$

gợi cho ta nghĩ ngay đến việc dùng phương pháp phân tích bình phương SOS để xử lý bài toán. Cụ thể, ta viết được bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng:

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2 \geqslant 0,$$

trong đó $S_x = f(x, y, z) = 2(y+z)^2-(x^2+y^2+z^2) = y^2+z^2+4yz-x^2$, còn $S_y = f(y, z, x)$, $S_z = f(z, x, y)$ được định nghĩa tương tự.

Đến đây, ta chỉ việc sử dụng các tiêu chuẩn của phương pháp là được. Giả sử $x \geqslant y \geqslant z$, khi đó ta có

$$S_y = z^2+x^2+4zx-y^2 \geqslant 0, \quad S_z = x^2+y^2+4xy-z^2 \geqslant 0$$

và

$$S_x+S_y = 2z^2+4zx+4yz \geqslant 0.$$

Do $x-z \geqslant y-z \geqslant 0$ nên $(z-x)^2 \geqslant (y-z)^2$. Từ đó suy ra

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2 \geqslant (S_x+S_y)(y-z)^2 \geqslant 0. \qquad \square$$

Lời bình. Một điều cần chú ý là khi sử dụng phương pháp SOS, các bạn cần phải chứng minh lại các tiêu chuẩn của nó. Nhiều bạn cẩu thả chỉ ghi gọn là $S_x+S_y \geqslant 0$, $S_y+S_z \geqslant 0$ rồi suy ra điều phải chứng minh. Như thế là chưa được.

Ngoài cách sử dụng các tiêu chuẩn SOS như trên, ta cũng có cách biến đổi mà không phải sử dụng tiêu chuẩn nào dựa trên đồng nhất thức đơn giản:

$$\sum (x-y)^2(x-z)(y-z) = 0. \tag{3}$$

Có thể thấy điểm mấu chốt gây khó khăn trong việc xử lý tổng:

$$\sum (x-y)^2(x^2+y^2+4xy-z^2) \geqslant 0$$

chính là phần số âm ở mỗi số hạng, chẳng hạn như $-z^2$ trong số hạng $(x-y)^2(x^2+y^2+4xy-z^2)$. Nếu ta đem cộng với tổng $\sum (x-y)^2(x-z)(y-z)$ với một số lượng thích hợp vào sẽ làm tăng số lượng z^2 lên ở số hạng này và rất có thể sẽ thu được một đại lượng không âm. Cụ thể, ta hy vọng sẽ có số k sao cho:

$$\begin{gathered} x^2+y^2+4xy-z^2+k(x-z)(y-z) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow (x+y)^2+(2+k)xy-kz(x+y)+(k-1)z^2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Quan sát một chút, cho thể thấy ngay nếu chọn $k=2$ thì ta sẽ viết được biểu thức $(x+y)^2-kz(x+y)+(k-1)z^2$ dưới dạng bình phương. Từ đó, ta thu được một lời giải ngắn gọn thú vị sau: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum (x-y)^2(x^2+y^2+4xy-z^2)+2\sum (x-y)^2(x-z)(y-z) \geqslant 0,$$

hay

$$\sum (x-y)^2\left[(x+y-z)^2+4xy\right] \geqslant 0.$$

Đồng nhất thức (3) đã giúp chúng ta xử lý được bài toán theo một lối SOS rất thú vị để đưa đến một bất đẳng thức hiển nhiên. Đây cũng là một kinh nghiệm của chúng tôi tích lũy được khi tìm hiểu về phương pháp SOS. Tất nhiên, đồng nhất (3) chỉ hiệu quả ở các bất đẳng thức đối xứng bậc 4. Với các bất đẳng thức bậc cao, chúng ta cần một đồng nhất thức tổng quát hơn để tăng cường tính hiệu quả. Chúng ta có một kết quả thú vị sau (bạn đọc có thể tự chứng minh): *Cho $f(x, y, z)$ là một đa thức đối xứng với hai biến x, y. Khi đó, ta có thể phân tích:*

$$\sum \left[(x-y)^2(x-z)(y-z)\cdot f(x, y, z)\right] = (x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2\cdot g(x, y, z)$$

trong đó $g(x, y, z)$ là một đa thức đối xứng với ba biến x, y, z.

Nhờ vào đồng nhất thức trên mà chúng tôi đã xử lý thành công rất nhiều bất đẳng thức bằng phương pháp SOS rất đơn giản chứ không cần phải dùng tiêu chuẩn phức tạp nào.

Dưới đây là một số ví dụ:

Bài toán 35. *Cho* $a, b, c > 0$ *có tổng bằng* 3. *Chứng minh rằng*

$$9\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-3\right) \geqslant 8(a^2+b^2+c^2-3).$$

Lời giải. Ta có các biến đổi quen thuộc sau:

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-3\right) = (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9 = \sum\frac{(a-b)^2}{ab},$$
$$a^2+b^2+c^2-3 = a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}\sum(a-b)^2.$$

Do đó, bất đẳng thức có thể được viết lại dưới dạng:

$$\sum(a-b)^2\left(\frac{9}{ab}-8\right) \geqslant 0,$$

hay

$$\sum c(a-b)^2(9-8ab) \geqslant 0.$$

Đến đây, ta có để ý rằng:

$$\begin{aligned} 9-8ab &= (a+b+c)^2-8ab \\ &= (a+b)^2-8ab+2c(a+b)+c^2 \\ &= (a+b)^2-6c(a+b)+9c^2-8(a-c)(b-c) \\ &= (a+b-3c)^2-8(a-c)(b-c). \end{aligned}$$

Từ đó, ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau:

$$\sum c(a-b)^2(a+b-3c)^2 - 8\sum c(a-b)^2(a-c)(b-c) \geqslant 0.$$

Vì $\sum c(a-b)^2(a-c)(b-c) = 0$ và $\sum c(a-b)^2(a+b-3c)^2 \geqslant 0$ nên bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. □

Bài toán 36 (Iran, 1996)**.** *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right] \geqslant \frac{9}{4}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum \left[\frac{4(ab+bc+ca)}{(a+b)^2} - 3\right] \geqslant 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
VT &= \sum \frac{4bc+4ca-3a^2-3b^2-2ab}{(a+b)^2} \\
&= \sum \frac{(c-a)(3a+b)-(b-c)(a+3b)}{(a+b)^2} \\
&= \sum \frac{(c-a)(3a+b)}{(a+b)^2} - \sum \frac{(b-c)(a+3b)}{(a+b)^2} \\
&= \sum (a-b)\left[\frac{3b+c}{(b+c)^2} - \frac{3a+c}{(a+c)^2}\right] \\
&= \sum \frac{(a-b)^2(3ab+ac+bc-c^2)}{(a+c)^2(b+c)^2}.
\end{aligned}$$

Từ đó, bất đẳng thức được đưa về chứng minh

$$\sum (a^2-b^2)^2(3ab+ac+bc-c^2) \geqslant 0.$$

Do $3ab+ac+bc-c^2 = 4ab-(a-c)(b-c)$ nên bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành:

$$4\sum ab(a^2-b^2)^2 - \sum (a^2-b^2)^2(a-c)(b-c) \geqslant 0.$$

Mặt khác, ta lại có

$$\sum (a^2-b^2)^2(a-c)(b-c) = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$4\sum ab(a^2-b^2)^2 \geqslant (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

Đến đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
VT &\geqslant \frac{4\left[ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right]^2}{ab+bc+ca} \\
&= \frac{4(a+b+c)^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{ab+bc+ca} \\
&\geqslant 12(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2,
\end{aligned}$$

từ đó dễ dàng suy ra kết quả cần chứng minh. □

Bài toán 37. *Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{a^2+b^2+3c^2}+\frac{bc}{b^2+c^2+3a^2}+\frac{ca}{c^2+a^2+3b^2}\leqslant\frac{3}{5}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum\left(1-\frac{5ab}{a^2+b^2+3c^2}\right)\geqslant 0.$$

Đến đây, bằng cách tách SOS tương tự như trên, ta viết được bất đẳng thức dưới dạng:

$$\sum(a-b)^2(9a^2+9b^2+5c^2-2ab-10ac-10bc)(a^2+b^2+3c^2)\geqslant 0.$$

Ta có

$$9a^2+9b^2+5c^2-2ab-10c(a+b)=(3a+3b-5c)^2-20(a-c)(b-c)$$

và

$$\sum(a-b)^2(a-c)(b-c)(a^2+b^2+3c^2)=2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2,$$

do đó bất đẳng thức trên tương đương với

$$\sum(a-b)^2(3a+3b-5c)^2(a^2+b^2+3c^2)\geqslant 40(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\text{VT}&\geqslant\frac{1}{5}\sum(a-b)^2(3a+3b-5c)^2(a+b-3c)^2\\&\geqslant\frac{1}{15}\left[\sum(a-b)(3a+3b-5c)(a+b-3c)\right]^2\\&=\frac{1024}{15}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2,\end{aligned}$$

từ đó dễ dàng suy ra kết quả cần chứng minh. □

Chú ý rằng mỗi một bất đẳng thức trong ba ví dụ nêu trên đều có những hai trường hợp dấu bằng. Điều này chứng tỏ chúng là những bất đẳng thức khá chặt. Thế nhưng, với phương pháp tách SOS mới này, công việc xử lý lại trở nên khá nhẹ nhàng.

Dưới đây, chúng tôi xin được nêu thêm một số bài toán áp dụng khác để bạn đọc thử sức và so sánh với phương pháp cũ.

Bài toán 38 (Việt Nam TST, 2006)**.** *Cho* a, b, c *là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

Bài toán 39. *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab} \geqslant \frac{6}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}.$$

Bài toán 40. *Cho* a, b, c *là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}+\frac{1}{2}.$$

Bài toán 41 (Làm chặt Việt Nam TST 1996)**.** *Cho* a, b, c *là các số thực. Chứng minh bất đẳng thức sau:*

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 \geqslant \frac{4}{7}\left[a^4+b^4+c^4+(a+b+c)^4\right].$$

Bài toán 42 (Tổng quát đề chọn Olympic Iran 2009)**.** *Cho các số thực* a, b, c *có tổng bằng* 3. *Chứng minh rằng với mọi* $k \geqslant \frac{8}{5}$, *ta có*

$$\frac{1}{a^2+b^2+k}+\frac{1}{b^2+c^2+k}+\frac{1}{c^2+a^2+k} \leqslant \frac{3}{2+k}.$$

(*Trường hợp* $k = 2$ *kèm thêm điều kiện* $a, b, c > 0$ *chính là bài bất đẳng thức trong đề chọn đội tuyển Iran năm 2009*).

Bài toán 43 (Tổng quát đề Olympic Toán Ba Lan 1996)**.** *Cho* a, b, c *là các số thực có tổng bằng* 1. *Chứng minh rằng với mọi số thực* k *thỏa mãn* $9k^2-26k+1 \leqslant 0$, *ta đều có*

$$\frac{a}{a^2+k}+\frac{b}{b^2+k}+\frac{c}{c^2+k} \leqslant \frac{9}{1+9k}.$$

(*Trường hợp* $k = 1$ *kèm thêm điều kiện* $a, b, c \geqslant -\frac{3}{4}$ *chính là bài bất đẳng thức trong đề thi Olympic Toán Ba Lan năm 1996*).

Bài toán 44. *Cho* $p > 0$ *và các số thực* a, b, c. *Đặt:*

$$F(a, b, c) = \sum \frac{p(3-p)a^2+2(1-p)bc}{pa^2+b^2+c^2} - \frac{3(1+p)(2-p)}{2+p}.$$

Chứng minh rằng $(p-1) \cdot F(a, b, c) \geqslant 0$.

2.3. Hướng 3: Đánh giá khử căn

Một hướng đi khác thay cho đặt ẩn phụ là tìm cách đánh giá phá căn thức. Cụ thể, ta sẽ tìm các đánh giá thích hợp cho $\sqrt{ab}$, $\sqrt{bc}$, $\sqrt{ca}$ với chiều $\geqslant$ để phá dấu căn. Thường thì với các dạng căn tích như thế này, cách phá căn thông dụng là sử dụng bất đẳng thức AM-GM. Tuy nhiên, ở bài toán này, nó lại cho đánh giá với chiều ngược lại:

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \quad \sqrt{bc} \leqslant \frac{b+c}{2}, \quad \sqrt{ca} \leqslant \frac{c+a}{2}$$

không phải chiều ta cần. Có cách nào để điều chỉnh không nhỉ?

Một ý tưởng thú vị ở đây là sử dụng nghịch đảo. Như đã biết, với bất đẳng thức dương thì nghịch đảo của nó sẽ đảo chiều. Do đó, ta có thể nghĩ đến việc viết $\sqrt{ab}$ thành $\frac{ab}{\sqrt{ab}}$ rồi đánh giá:

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b}. \tag{4}$$

Như vậy là sẽ phá được căn thức với chiều ta muốn. Tuy nhiên, một điều cần lưu ý ở đây là số 0 không có nghịch đảo. Thế nên nếu một trong các căn thức có một số bằng 0 thì ta không thể dùng cách này được. Do đó, cần phải xét trường hợp để loại trừ tình huống ngoài ý muốn này.

Nếu trong a, b, c có một số bằng 0, chẳng hạn $c = 0$, thì bất đẳng thức cần chứng minh sẽ trở thành:

$$(a+b)\sqrt{ab} + (a-b)^2 + a^2 + b^2 \geqslant (a+b)^2.$$

Công việc ở đây là khá đơn giản vì ta đã có $(a+b)\sqrt{ab} \geqslant 2ab$.

Tiếp theo, ta xét trường hợp $a, b, c > 0$. Lúc này, ta đã có thể sử dụng được (4). Bài toán được đưa về chứng minh

$$2\Big(\sum a\Big)\Big(\sum \frac{ab}{a+b}\Big) + \sum (a-b)^2 \geqslant \Big(\sum a\Big)^2.$$

Sau khi thu gọn, nó có dạng:

$$2\Big(\sum a\Big)\Big(\sum \frac{ab}{a+b}\Big) \geqslant 4\sum ab - \sum a^2.$$

Vì $a+b+c$ có thể tách ra các đại lượng $a+b$, $b+c$, $c+a$ liên quan đến mẫu của các số hạng của tổng $\sum \frac{ab}{a+b}$ nên ta có thể xử lý rút gọn vế trái theo cách sau:

$$\begin{aligned} VT &= 2\sum \frac{ab(a+b+c)}{a+b} = 2\sum ab\left(1+\frac{c}{a+b}\right) \\ &= 2\sum ab + 2abc\sum \frac{1}{a+b}. \end{aligned}$$

Khi đó, bất đẳng thức có thể viết lại thành:

$$2abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geqslant 2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2.$$

Đến đây thì ý tưởng tự nhiên là sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng cộng mẫu để làm giảm số lượng các phân thức:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}$$

và đưa bài toán về xét một bất đẳng thức mới:

$$\frac{9abc}{a+b+c} \geqslant 2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2.$$

Tuy nhiên, đây chính là bất đẳng thức Schur bậc ba. □

Lời bình. Ở đây, chúng tôi muốn chú ý với các bạn về cách tách các tích ab, bc, ca, abc được sử dụng trong lời giải trên.

Như ta đã biết, những bất đẳng thức mà trong các trường hợp dấu bằng của chúng có trường hợp không tại tâm thì thường khó đánh giá hơn các bất đẳng thức bình thường. Nguyên nhân là ở các bộ hoán vị. Một bất đẳng thức đối xứng (hoặc hoán vị) nếu có dấu bằng tại bộ (A, B, C) thì cũng sẽ đạt được dấu bằng tại các hoán vị của nó là (B, C, A) và (C, A, B). Do đó, để đánh giá thành công thì ta phải tìm được một đánh giá sao cho nó đảm bảo được cả ba trường hợp. Rõ ràng rất khó!

Đối với các bài toán có dấu bằng tại biên thì cách tách trên cho ta một kỹ thuật xử lý đặc biệt hiệu quả. Thật vậy, giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức $f(a, b, c) \geqslant 0$ với dấu bằng là $a = kb\,(k \neq 0)$, $c = 0$ (và các hoán vị) chẳng hạn (ở đây chỉ xin lấy ví dụ một trường hợp cụ thể để phân tích, còn nhiều trường hợp khác cũng có thể xử lý tương tự). Khi đó, nếu viết được bất đẳng thức trên dưới dạng:

$$ab \cdot g(a, b, c) + bc \cdot g(b, c, a) + ca \cdot g(c, a, b) \geqslant 0$$

thì ta chỉ cần quan tâm đánh giá biểu thức đại diện $g(a, b, c)$ theo dấu bằng $a = kb$, $c = 0$ là đủ mà không cần chú ý nhiều đến các hoán vị của bộ này. Nếu đánh giá thành công thì sau khi nhân thêm ab vào hai vế, ta sẽ thu được một đánh giá cho số hạng $ab \cdot g(a, b, c)$ với dấu bằng xảy ra tại $ab = 0$ và $a = kb$, $c = 0$. Hiển nhiên đánh giá này sẽ đảm bảo được cả ba trường hợp hoán vị của $a = kb$, $c = 0$.

Từ đây, ta thấy rằng các điều kiện sẽ càng thuận lợi hơn nếu ta tách ra được số hạng có dạng $abc \cdot h(a, b, c)$. Lúc này, $h(a, b, c)$ có thể được đánh giá khá là "vô tư", bởi lẽ tại trường hợp biên thì tích abc đã bằng 0 mất rồi, thế nên khi nhân vào thì kiểu gì cũng đảm bảo được dấu bằng biên. Sau đây là một số ví dụ mà chúng tôi đã áp dụng thành công ý tưởng này để xử lý:

Bài toán 45 (VMO, 1996)**.** *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh rằng*

$$a + b + c \geqslant ab + bc + ca.$$

Lời giải. Điều kiện giả thiết có thể được viết lại thành:

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1.$$

Từ đó, ta chứng minh được tồn tại các số thực dương x, y, z sao cho $a = \frac{2x}{y+z}$, $b = \frac{2y}{z+x}$ và $c = \frac{2z}{x+y}$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geqslant 2\sum \frac{xy}{(y+z)(z+x)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \text{VP} &\leqslant \sum xy\left[\frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right] = \sum \frac{xy}{(y+z)^2} + \sum \frac{xy}{(z+x)^2} \\ &= \sum \frac{xy}{(y+z)^2} + \sum \frac{zx}{(y+z)^2} = \sum \frac{xy+zx}{(y+z)^2} = \text{VT}. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 46. *Cho* a, b, c *là các số không âm. Chứng minh rằng*

$$\sum a\sqrt{a^2+2bc} \geqslant (2-\sqrt{3})\sum a^2 + 2(\sqrt{3}-1)\sum ab.$$

Lời giải. Dễ thấy bất đẳng thức hiển nhiên đúng nếu trong a, b, c có hai số cùng bằng 0, do đó ta chỉ cần xét trường hợp $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại dưới dạng:

$$\begin{aligned} &\sum a\left(\sqrt{a^2+2bc}-a\right) \geqslant (\sqrt{3}-1)\left(2\sum ab - \sum a^2\right) \\ \Leftrightarrow\ & 2abc\sum \frac{1}{\sqrt{a^2+2bc}+a} \geqslant (\sqrt{3}-1)\left(2\sum ab - \sum a^2\right). \end{aligned}$$

Đến đây, bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{\sqrt{a^2+2bc}+a} &\geqslant \frac{9}{\sum \sqrt{a^2+2bc}+a+b+c} \\ &\geqslant \frac{9}{\sqrt{3\sum(a^2+2bc)}+a+b+c} \\ &= \frac{9\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(a+b+c)} \end{aligned}$$

ta đưa được bài toán về chứng minh:

$$\frac{9abc}{a+b+c} \geqslant 2(ab+bc+ca) - a^2 - b^2 - c^2.$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur bậc ba quen thuộc. □

Bài toán 47. *Cho* x, y, z *là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$(x+y+z)^2(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2) \geqslant 8(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)^2.$$

Lời giải. Đặt $a = x^2$, $b = y^2$ và $c = z^2$. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca} \\ &\geqslant a+b+c+\frac{4ab}{a+b}+\frac{4bc}{b+c}+\frac{4ca}{c+a}. \end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh:

$$(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)+4\sum ab(a+c)(b+c) \geqslant 8(ab+bc+ca)^2.$$

Sau khi khai triển và rút gọn, bất đẳng thức trên có dạng:

$$ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2) \geqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2),$$

hay

$$ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2 \geqslant 0. \qquad \square$$

Bài toán 48. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Lời giải. Nhân hai vế bất đẳng thức cho $4(a+b+c)$ với chú ý:

$$\frac{4a(a+b+c)}{4a+4b+c} = a + \frac{3ca}{4a+4b+c},$$

ta biến đổi được nó về dạng:

$$\frac{ca}{4a+4b+c}+\frac{ab}{4b+4c+a}+\frac{bc}{4c+4a+b} \leqslant \frac{a+b+c}{9}.$$

Đến đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{1}{4a+4b+c} = \frac{1}{2(2a+b)+(2b+c)} \leqslant \frac{1}{9}\left(\frac{2}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}\right).$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} VT &\leqslant \frac{2}{9}\sum \frac{ca}{2a+b} + \frac{1}{9}\sum \frac{ca}{2b+c} \\ &= \frac{2}{9}\sum \frac{ab}{2b+c} + \frac{1}{9}\sum \frac{ca}{2b+c} \\ &= \frac{1}{9}\sum \frac{2ab+ca}{2b+c} = VP. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. $\square$

Bài toán 49 (IMO, 1999). *Cho số tự nhiên $n \geqslant 2$. Tìm hằng số C nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức:*

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C(x_1+x_2+\cdots+x_n)^4$$

đúng với mọi $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$. Với hằng số tìm được, hãy xác định xem đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Đặt $A = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j(x_i^2 + x_j^2)$. Khi đó, bằng cách sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
A &\leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j\left(x_i^2 + x_j^2 + \sum_{k\neq i,\, k\neq j} x_k^2\right) = \left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{2}\right]^2 = \frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4.
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_ix_j(x_i^2+x_j^2) = x_ix_j(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$ với mọi $i < j$ và $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$. Để có được điều này thì trong các số x_i phải có $n-2$ số bằng 0, hai số còn lại bằng nhau. Vì có thể tìm được bộ số x_i để dấu bằng có thể xảy ra nên ta dễ dàng suy ra $C_{min} = \frac{1}{8}$. □

Sau đây là một số bài toán khác để bạn đọc tự rèn luyện:

Bài toán 50. *Cho a, b, c là các số không âm. Chứng minh rằng*

$$a\sqrt{a^2 + 3bc} + b\sqrt{b^2 + 3ca} + c\sqrt{c^2 + 3ab} \geqslant 2(ab + bc + ca).$$

Bài toán 51 (Mỹ, 2001)**.** *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng*

$$0 \leqslant ab + bc + ca - abc \leqslant 2.$$

Bài toán 52. *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \leqslant \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}.$$

Bài toán 53. *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3abc}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Bài toán 54. *Cho* $n \in \mathbb{N}^*$. *Xét các số thực không âm* a, b, c *thay đổi thỏa mãn* $a+b+c=1$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{(ab)^n}{1-ab} + \frac{(bc)^n}{1-bc} + \frac{(ca)^n}{1-ca}.$$

Bài toán 55. *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện* $a^2+b^2+c^2=1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a+b}{1-ab} + \frac{b+c}{1-bc} + \frac{c+a}{1-ca} \leqslant 3(a+b+c).$$

Bài toán 56. *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện* $a+b+c=3$. *Chứng minh rằng*

$$5\left[\frac{a(b+c)}{a+1} + \frac{b(c+a)}{b+1} + \frac{c(a+b)}{c+1}\right] \geqslant 4(ab+bc+ca)+3abc.$$

Bài toán 57. *Cho* a, b, c *là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

Bài toán 58. *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện* $a+b+c=1$. *Chứng minh rằng*

$$a\sqrt{b^2+4c^2} + b\sqrt{c^2+4a^2} + c\sqrt{a^2+4b^2} \leqslant \frac{3}{4}.$$

2.4. Hướng 4: Sử dụng hàm lồi

Chắc hẳn bạn đọc yêu Toán đều biết đến tính chất thú vị sau của hàm lồi: *Nếu hàm số* $f(x)$ *liên tục và lồi trên đoạn* $[a, b]$ *thì giá trị lớn nhất của nó sẽ đạt được một trong hai điểm* $x = a$ *hoặc* $x = b$, *còn đối với hàm lõm thì sẽ là giá trị nhỏ nhất.*

Thế nhưng, lại không có nhiều bạn nghĩ đến việc sử dụng tính chất này vào giải toán. Một trong những nguyên nhân có lẽ là ở tính chất của hàm lồi. Như ở trên đã đề cập, hàm lồi sẽ đạt cực đại tại biên và hàm lõm sẽ đạt cực tiểu tại biên. Nhưng ở bài toán này thì lại không có biên rõ ràng, các biến có biên dưới nhưng lại không có biên trên.

Một điều nữa cũng cần phải nói đến là hầu hết các bạn học sinh đều chỉ có tầm nhìn “vĩ mô” mà chưa có đến cái nhìn “vi mô”. Có nghĩa là đề bài cho bất đẳng thức bao nhiêu biến thì các bạn chỉ nhìn bằng đúng bấy nhiêu biến chứ không nghĩ đến tầm nhìn khác đi. Đó là một tầm nhìn sai lầm. Trên thực tế, để có được lời giải thành công thì ta nên bắt đầu bằng những thứ nhỏ nhặt nhất, chú ý đến mọi khía cạnh.

Bất đẳng thức đã cho có dạng đối xứng với ba biến a, b, c, thế thì nó cũng là bất đẳng thức đối xứng với hai biến bất kỳ nào đó trong ba biến trên. Chắn hẳn các bạn vẫn con nhớ chúng ta đã học từ cấp 2 rất nhiều rằng các bài toán đối xứng hai ẩn có thể được xử lý hiệu quả bằng phép đặt ẩn phụ tổng-tích $S = x + y$, $P = xy$ nhờ vào quan hệ của chúng: $S^2 \geqslant 4P$.

Cụ thể hơn, nếu ta cố định c thì bất đẳng thức sẽ có dạng đối xứng với a và b. Khi đó, nhờ phép đặt $S = a + b$, $P = ab$, ta có thể chuyển bất đẳng thức về dạng:

$$g(S, P) \geqslant 0.$$

Khi đó, nếu ta cố định S nữa thì đây sẽ chỉ còn là một bất đẳng thức với một biến là P và lúc này P đã được chặn miền với đủ biên trên lẫn biên dưới là $\left[0, \frac{S^2}{4}\right]$.

Đến đây, nếu ta có thể suy xét được tính đơn điệu hoặc tính lồi lõm của $g_P(S, P)$ thì cũng có thể đưa ra được kết luận về tính chất các cực trị của nó để rồi từ đó đi đến lời giải.

Lời giải chi tiết theo hướng này như sau: Đặt $f(a, b, c) = \text{VT} - \text{VP}$. Khi đó, ta phải chứng minh $f(a, b, c) \geqslant 0$. Cố định c và $S = a + b$. Đặt $P = ab$ thì ta có $0 \leqslant P \leqslant \frac{S^2}{4}$. Ta có biến đổi:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

và $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 - (a + b + c)^2 = h(P)$, trong đó $h(P)$ là một biểu thức bậc nhất của P. Do đó:

$$f(a, b, c) = (S + c)\left(\sqrt{P} + \sqrt{S + 2\sqrt{P}}\right) + h(P) = g(P).$$

Nếu cả hai số a, b đều bằng 0 thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng nên ta chỉ cần xét trường hợp $S > 0$ là đủ (lý luận này là để đảm bảo khoảng $\left(0,\, \frac{S^2}{4}\right)$ tồn tại, đảm bảo cho việc xét đạo hàm của $g(P)$). Dễ thấy hàm số $g(P)$ liên tục trên $\left[0,\, \frac{S^2}{4}\right]$. Ngoài ra, với mỗi $P \in \left(0,\, \frac{S^2}{4}\right)$, ta tính được:

$$g'(P) = (S+c)\left(\frac{1}{2\sqrt{P}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{P}}}{2\sqrt{S+2\sqrt{P}}}\right) + k$$

trong đó k là hệ số cao nhất của $h(P)$. Rõ ràng $g'(P)$ là hàm giảm ngặt trên $\left(0,\, \frac{S^2}{4}\right)$ nên $g(P)$ là hàm lõm trên $\left[0, \frac{S^2}{4}\right]$. Từ đó suy ra

$$g(P) \geqslant \min\left\{g(0),\, g\left(\frac{S^2}{4}\right)\right\}, \quad \forall P \in \left[0,\, \frac{S^2}{4}\right].$$

Như thế, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh $g(0) \geqslant 0$ và $g\left(\frac{S^2}{4}\right) \geqslant 0$. Mặt khác, ta lại dễ thấy:

$$g(0) = f(S,\, 0,\, c), \quad g\left(\frac{S^2}{2}\right) = f\left(\frac{S}{2},\, \frac{S}{2},\, c\right).$$

Do đó, từ những lý luận ở trên, có thể thấy rằng ta chỉ cần xét bất đẳng thức tại hai trường hợp: có một số bằng 0 hoặc có hai số bằng nhau, là đủ. Ở hướng 3, ta đã chứng minh được bất đẳng thức đúng tại trường hợp thứ nhất. Như vậy, ta chỉ còn phải kiểm tra trường hợp thứ hai nữa là được.

Giả sử $a = b$. Khi đó, bất đẳng thức trở thành

$$(2a+c)\left(a + 2\sqrt{ac}\right) + 2(a-c)^2 \geqslant (2a+c)^2.$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta phải chứng minh

$$4a\sqrt{ac} + 2c\sqrt{ac} + c^2 \geqslant 7ac.$$

Vế lớn có dạng tổng, còn vế bé có dạng tích gợi cho ta nghĩ ngay đến bất đẳng thức AM-GM để đánh giá:

$$4a\sqrt{ac} + 2c\sqrt{ac} + c^2 \geqslant 7\sqrt[7]{\left(a\sqrt{ac}\right)^4\left(c\sqrt{ac}\right)^2 c^2} = 7ac. \qquad \square$$

Lời bình. Bằng cách sử dụng hàm lồi và bất đẳng thức Karamata[1], ta sẽ có thêm cách nhìn nhận tổng quan hơn cho nhiều vấn đề, nắm bắt được bản chất tốt hơn.

Bài toán 59. *Cho* $a, b, c \in [1, 2]$. *Chứng minh rằng*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leqslant 10.$$

Lời giải. Cố định b, c. Đặt $f(a) = (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, ta có

$$f'(a) = \frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{b+c}{a^2}, \quad f''(a) = \frac{2(b+c)}{a^3} > 0.$$

Do vậy $f(a)$ là hàm lồi, suy ra giá trị lớn nhất của $f(a)$ trên đoạn $[1, 2]$ sẽ đạt được tại biên, tức là tại $a = 1$ hoặc $a = 2$.

Lập luận tương tự, ta cũng có kết luận như thế với b và c. Từ đó với chú ý ở sự đối xứng của các biến, ta suy ra chỉ cần kiểm tra tính đúng đắn của bất đẳng thức trong các trường hợp sau:

1. Cả ba biến bằng nhau (cùng bằng 1 hoặc 2);
2. Có hai biến bằng 1 và một biến bằng 2;
3. Có hai biến bằng 2 và một biến bằng 1.

Những tính toán đơn giản cho thấy trong cả ba trường hợp này, bất đẳng thức của ta đều đúng. □

---

[1]Bất đẳng thức Karamata được xây dựng dựa trên khái niệm bộ trội và tính chất tiếp tuyến của hàm lồi:

Cho hai bộ số không tăng $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *và* $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, *trong đó* a_i, b_i *đều cùng thuộc vào một miền* $\mathbb{I}$. *Ta nói rằng* A *trội hơn* B, *ký hiệu* $A \succ B$, *nếu các điều kiện sau được thỏa mãn đồng thời:*

$$\begin{cases} a_1 \geqslant b_1 \\ a_1 + a_2 \geqslant b_1 + b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \geqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n \end{cases}$$

Lúc này, nếu $f(x)$ *là một hàm khả vi bậc hai và lồi trên* $\mathbb{I}$ *thì:*

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \geqslant f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n).$$

Bài toán 60. *Cho* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$. *Chứng minh rằng*

$$(1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \geqslant 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Lời giải. Cố định $x_2, \ldots, x_n$. Đặt:

$$f(x_1) = 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n + 1)^2.$$

Ta thấy ngay $f''(x_1) = 8 - 2 = 4 > 0$, suy ra $f(x_1)$ là hàm lồi. Và như vậy, $f(x_1)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x_1 = 0$ hoặc $x_1 = 1$, suy ra ta chỉ cần xác lập tính đúng đắn của hai bất đẳng thức, thu được bất đẳng thức ban đầu với $x_1 = 0$ và $x_1 = 1$.

Lặp lại các lý luận này với mỗi một trong hai bất đẳng thức thu được, ta nhận được kết quả tương tự: chỉ cần kiểm tra tính đúng đắn của mỗi một trong hai bất đẳng thức tại $x_2 = 0$ và $x_2 = 1$. Tiếp tục lý luận tương tự, ta thu được là chỉ cần kiểm tra tính đúng đắn của tất cả 2^n bất đẳng thức, thu được từ bất đẳng thức ban đầu với một phần (có thể là rỗng) các biến số bằng 0 và phần còn lại bằng 1. Do tính đối xứng của bất đẳng thức ban đầu, có thể xét:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1, \quad x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Với các giá trị như vậy của biến số, bất đẳng thức có dạng:

$$(k + 1)^2 \geqslant 4k.$$

Một kết quả hiển nhiên, nó tương đương với $(k - 1)^2 \geqslant 0$. □

Bài toán 61 (Bất đẳng thức Turkevici)**.** *Cho* a, b, c, d *là các số thực không âm. Chứng minh rằng*

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geqslant a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2.$$

Lời giải. Đặt $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$ và $t = d^2$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\sqrt{xyzt} \geqslant xy + xz + xt + yz + yt + zt,$$

hay

$$(x + y)^2 + z^2 + t^2 + 2\sqrt{xyzt} \geqslant 3xy + (x + y)(z + t) + zt.$$

Cố định z, t, $x + y = S$ và đặt $xy = P$ thì ta có $0 \leqslant P \leqslant \frac{S^2}{4}$. Bất đẳng thức trên có thể viết lại dưới dạng:

$$f(P) = 2\sqrt{ztP} + S^2 + z^2 + t^2 - 3P - S(z + t) - zt.$$

Vì $g(P) = \sqrt{P}$ là hàm liên tục và lõm trên $[0, +\infty)$ nên ta cũng dễ thấy $f(P)$ cũng là hàm liên tục và lõm trên $[0, +\infty)$. Do đó:

$$f(P) \geqslant \min\left\{f(0),\, f\left(\frac{S^2}{4}\right)\right\}, \quad \forall P \in \left[0,\, \frac{S^2}{4}\right].$$

Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần xét hai bất đẳng thức $f(0) \geqslant 0$ và $f\left(\frac{S^2}{4}\right) \geqslant 0$. Một cách tương ứng, ta đưa được bài toán về xét tại hai trường hợp: $xy = 0$ và $x = y$.

Tương tự, ta cũng chỉ cần xét hai trường hợp: $zt = 0$ và $z = t$. Kết hợp các lý luận lại, ta thấy chỉ cần xét 2 trường hợp lớn sau:

Trường hợp 1: *Trong* 4 *số* x, y, z, t *có một số bằng* 0. Giả sử $t = 0$, khi đó bất đẳng thức trở thành:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx.$$

Một kết quả đã quá quen thuộc.

Trường hợp 2: $x = y$ *và* $z = t$. Khi đó, ta dễ thấy bất đẳng thức có thể viết được dưới dạng $(x - z)^2 \geqslant 0$. □

Bài toán 62 (VMO, 1992)**.** *Cho* n $(n > 2)$ *số thực* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *thuộc đoạn* $[-1, 1]$ *có tổng bằng* $n - 3$. *Chứng minh rằng*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n - 1.$$

Lời giải. Do tính đối xứng nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $1 \geqslant x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant -1$. Ta chứng minh:

$$(1, 1, \ldots, 1, 0, -1) \succ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n). \tag{5}$$

Dễ thấy, từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} 1 \geqslant x_1 \\ 1 + 1 \geqslant x_1 + x_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1 + 1 + \cdots + 1 \geqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} \\ 1 + 1 + \cdots + 1 + 0 + (-1) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n \end{cases}$$

Do vậy, để chứng minh (5), ta chỉ cần chứng minh

$$n - 2 = 1 + 1 + \cdots + 1 + 0 \geqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = n - 3 - x_n.$$

Bất đẳng thức này tương đương với $x_n \geqslant -1$, hiển nhiên đúng theo giả thiết. Vậy (5) được chứng minh.

Từ đó, sử dụng bất đẳng thức Karamata với chú ý rằng hàm $f(x) = x^2$ liên tục và lồi trên $\mathbb{R}$, ta được

$$(n-2)f(1)+f(0)+f(-1) \geqslant f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-2})+f(x_{n-1})+f(x_n),$$

hay

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n - 1.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. □

Bài toán 63 (Việt Nam TST, 2011)**.** *Cho số tự nhiên $n \geqslant 3$. Xét n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

- **i)** $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$;
- **ii)** $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$;
- **iii)** $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n(n-1)$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng $S = x_1 + x_2$.

Lời giải. a) Tìm max S: Từ giả thiết, ta có

$$x_1 + x_2 = -(x_3 + x_4 + \cdots + x_n).$$

Từ đó, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta thu được

$$\begin{aligned} S^2 &= (x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^2 \leqslant (n-2)(x_3^2 + x_4^2 + \cdots + x_n^2) \\ &= (n-2)\big[n(n-1) - (x_1^2 + x_2^2)\big] \leqslant (n-2)\left[n(n-1) - \frac{S^2}{2}\right]. \end{aligned}$$

Giải bất phương trình trên, ta được $S \leqslant \sqrt{2(n-1)(n-2)}$. Mặt khác, dễ thấy đẳng thức xảy ra khi:

$$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2(n-1)(n-2)}}{2}, \quad x_3 = \cdots = x_n = -\frac{\sqrt{2(n-1)(n-2)}}{n-2}.$$

Do đó, ta đi đến kết luận $maxS = \sqrt{2(n-1)(n-2)}$.

b) Tìm min S: Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp $n = 3$: Do $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3$ nên ta có $(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \geqslant 0$, từ đó suy ra $x_3^2 - (x_1 + x_2)x_3 + x_1x_2 \geqslant 0$. Mà $x_3 = -(x_1 + x_2)$ nên bất đẳng thức trên cho phép ta ước lượng:

$$x_1x_2 \geqslant -2(x_1 + x_2)^2.$$

Sử dụng đánh giá này và giả thiết $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$, ta thu được

$$\begin{aligned} 2(x_1 + x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2 \\ &= 2x_1x_2 + 6 \geqslant -4(x_1 + x_2)^2 + 6. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $S = x_1 + x_2 \geqslant 1$ (chú ý rằng $S > 0$). Mặt khác, dễ thấy dấu bằng có thể đạt được khi $x_1 = 2$ và $x_2 = x_3 = -1$ nên đáp số của bài toán trong trường hợp này là 1.

Trường hợp $n \geq 4$: Dễ thấy với giả thiết của đề bài thì:

$$\big(x_2, x_2, \ldots, x_2, x_2 + x_3 + \cdots + x_n - (n-2)x_2\big) \succ (x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Mặt khác, ta lại có chú ý rằng hàm số $f(x) = x^2$ liên tục và lồi trên $\mathbb{R}$. Do đó, theo bất đẳng thức Karamata thì:

$$\begin{aligned} x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 &\leqslant (n-2)x_2^2 + \big[x_2 + x_3 + \cdots + x_n - (n-2)x_2\big]^2 \\ &= (n-2)x_2^2 + \big[x_1 + (n-2)x_2\big]^2. \end{aligned}$$

Kết hợp với giả thiết iii), ta thu được

$$x_1^2 + (n-2)x_2^2 + \big[x_1 + (n-2)x_2\big]^2 \geqslant n(n-1). \tag{6}$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh:

$$\frac{n(n-1)}{4}(x_1 + x_2)^2 \geqslant x_1^2 + (n-2)x_2^2 + \big[x_1 + (n-2)x_2\big]^2. \tag{7}$$

Cố định x_1 và đặt $g(x_2) = \text{VT} - \text{VP}$. Ta thấy $g(x_2)$ là hàm bậc hai với hệ số cao nhất bằng $\frac{n(n-1)}{4} - (n-2) - (n-2)^2 = -\frac{(n-1)(3n-8)}{4} < 0$ nên nó là hàm lõm. Ta lại có chú ý rằng:

$$x_1 + (n-1)x_2 \geqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0,$$

thế nên từ giả thiết ta suy ra $-\frac{x_1}{n-1} \leqslant x_2 \leqslant x_1$. Vì $g(x_2)$ là hàm lõm nên giá trị nhỏ nhất của nó sẽ là giá trị nhỏ nhất của $g(-\frac{x_1}{n-1})$ và $g(x_1)$. Kiểm tra trực tiếp, ta có

$$g(x_1) = 0, \quad g\Big(-\frac{x_1}{n-1}\Big) = \frac{n^2(n-4)x_1^2}{4(n-1)} \geqslant 0.$$

Do đó $g(x_2) \geqslant 0$, $\forall x_2 \in \big[-\frac{x_1}{n-1}, x_1\big]$. Đánh giá (7) được chứng minh.

Kết hợp hai bất đẳng thức (6) và (7), ta thu được ngay $S \geqslant 2$ (chú ý rằng $S > 0$). Mặt khác, dễ thấy dấu bằng có thể đạt được khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$ và $x_n = 1 - n$ nên ta suy ra kết quả của bài toán trong trường hợp này là 2. □

Sau đây là một số bài toán tự luyện:

Bài toán 64. *Cho* $a, b, c \in [0, 1]$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} + abc \leqslant \frac{5}{2}.$$

Bài toán 65. *Cho* $a, b, c \in [0, 1]$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{1+b+c} + \frac{b}{1+c+a} + \frac{c}{1+a+b} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1.$$

Bài toán 66. *Cho* $a, b, c, d \in [1, 2]$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a+b}{c+d} + \frac{c+d}{a+b} - \frac{a+c}{b+d} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Bài toán 67. *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện* $a+b+c = 3$. *Chứng minh rằng*

$$2(a^2+b^2+c^2) + 3abc \geqslant 9.$$

Bài toán 68. *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng* 0 *và* $a+b+c = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\Big(bc + \frac{a}{b+c}\Big)\Big(ca + \frac{b}{c+a}\Big)\Big(ab + \frac{c}{a+b}\Big) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Bài toán 69. *Cho* a, b, c, d *là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện* $a+b+c+d=4$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{10-ab}+\frac{1}{10-ac}+\frac{1}{10-ac}+\frac{1}{10-bc}+\frac{1}{10-bd}+\frac{1}{10-cd}\leqslant\frac{2}{3}.$$

Bài toán 70. *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng* 0. *Tìm hằng số* k *lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}+\frac{k\cdot\max\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}}{ab+bc+ca}.$$

Bài toán 71 (Kiểm tra đội tuyển KHTN, 2014)**.** *Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi* $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d>0$*:*

$$\left(1+\frac{a}{b+c}\right)\left(1+\frac{b}{c+d}\right)\left(1+\frac{c}{d+a}\right)\left(1+\frac{d}{a+b}\right)\geqslant\frac{81}{16}.$$

Bài toán 72. *Cho* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là các số thực dương thỏa mãn điều kiện* $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1+x_1}{1-x_1}\cdot\frac{1+x_2}{1-x_2}\cdots\frac{1+x_n}{1-x_n}\geqslant\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

Bài toán 73 (Trung Quốc, 2005)**.** *Cho* a, b, c *là các số thực dương có tổng bằng* 1. *Chứng minh rằng*

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\geqslant 1.$$

Bài toán 74. *Cho* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện* $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$. *Chứng minh rằng*

$$2(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)+n^2\leqslant(2n+1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2).$$

Bài toán 75 (Trung Quốc, 2013)**.** *Cho số tự nhiên* $n\geqslant 2$. *Xét hai bộ số thực không âm bất kỳ* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *và* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\sum_{i=1}^n a_i^2+\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2\geqslant n^2\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n(a_i^2+b_i^2)}.$$

Bài toán 76 (Mỹ, 1994). *Cho* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *là các số thực dương thỏa mãn điều kiện* $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geqslant \sqrt{k}$ *với mọi* $k = 1, 2, \ldots, n$. *Chứng minh rằng*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Bài toán 77 (Trung Quốc, 1997). *Cho* $x_1, x_2, \ldots, x_{1997} \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$ *thỏa mãn điều kiện* $x_1 + x_2 + \cdots + x_{1997} = -318\sqrt{3}$. *Tìm giá trị lớn nhất của tổng* $S = x_1^{12} + x_2^{12} + \cdots + x_{1997}^{12}$.

Bài toán 78. *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện* $a + b + c = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + \sqrt{\frac{1-b}{1+b}} + \sqrt{\frac{1-c}{1+c}} \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

3. Xuất xứ của bài toán

Qua tìm hiểu và nghiên cứu tài liệu, chúng tôi suy đoán rằng bài toán này có xuất xứ từ bài toán sau đây:

Bài toán 79. *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện* $a + b + c = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a + (b-c)^2} + \sqrt{b + (c-a)^2} + \sqrt{c + (a-b)^2} \geqslant \sqrt{3}. \tag{8}$$

Tất nhiên, đây chỉ là những suy đoán có tính chủ quan, nhưng nếu suy xét kỹ, các bạn sẽ thấy bài VMO 2015 chính là một mấu chốt quan trọng trong chứng minh bất đẳng thức (8). Thật vậy, bình phương hai vế của (8), ta thấy nó tương đương với

$$2\sum\sqrt{\left[a + (b-c)^2\right]\left[b + (a-c)^2\right]} + \sum(a-b)^2 \geqslant 2.$$

Đến đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\sum\sqrt{\left[a + (b-c)^2\right]\left[b + (a-c)^2\right]} &\geqslant \sum\left[\sqrt{ab} + (a-c)(b-c)\right]\\ &= \sum\sqrt{ab} + \sum(a-c)(b-c)\\ &= \sum\sqrt{ab} + \frac{1}{2}\sum(a-b)^2.\end{aligned}$$

Do đó, để chứng minh (8), ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum \sqrt{ab} + \sum (a-b)^2 \geqslant 1,$$

hay

$$\left(\sum a\right)\left(\sum \sqrt{ab}\right) + \sum (a-b)^2 \geqslant \left(\sum a\right)^2.$$

Đây chính là bất đẳng thức vế phải trong bài số 2 của đề VMO năm nay. Còn vế trái có lẽ tác giả đã đặt thêm ra với mục đích "gỡ điểm" cho các thí sinh tham dự kỳ thi.

Nói riêng về bất đẳng thức (8), nó cũng có một xuất xứ rất thú vị... từ hình học. Chính xác hơn là từ sự tương tự hóa một bất đẳng thức về đường trung tuyến của tam giác. Ta biết rằng, trong một tam giác với độ dài ba cạnh là a, b, c thì:

$$m_a + m_b + m_c \leqslant 2p.$$

Xét các tam giác có nửa chu vi $p = 1$. Đặt $a = y + z$, $b = z + x$ và $c = x + y$ với x, y, $z > 0$. Khi đó, ta có $x + y + z = 1$ và:

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{2(z+x)^2 + 2(x+y)^2 - (y+z)^2}{4} \\ &= x(x+y+z) + \frac{(y-z)^2}{4} = x + \frac{(y-z)^2}{4}. \end{aligned}$$

Từ phép biến đổi này, ta thu được bất đẳng thức

$$\sqrt{x + \frac{(y-z)^2}{4}} + \sqrt{y + \frac{(z-x)^2}{4}} + \sqrt{z + \frac{(x-y)^2}{4}} \leqslant 2.$$

Có thể thấy bất đẳng thức (8) chính là một sự tương tự hóa bằng cách thay đổi hệ số của các bình phương dưới dấu căn. Với cách làm này và một số thủ thuật thay đổi cấu trúc biểu thức, ta cũng có thể tạo ra được nhiều bất đẳng thức "anh em" khác của (8) như sau (bạn đọc có thể thử sức):

Bài toán 80. *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sum \sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} \leqslant \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sum (a-b)^2}.$$

Bài toán 81. *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện* $a+b+c=1$. *Chứng minh rằng*

$$\sum \sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}} \leqslant \sqrt{3}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sum |a-b|.$$

Bài toán 82 (Crux Mathematicorum)**.** *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện* $a+b+c=1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}}+\frac{1}{\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{4}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}}} \geqslant 5.$$

Bài toán 83. *Cho* a, b, c *là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện* $a+b+c=1$. *Chứng minh rằng với mọi* $0 \leqslant k \leqslant 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, *ta có*

$$\sqrt{a+k(b-c)^2}+\sqrt{b+k(c-a)^2}+\sqrt{c+k(a-b)^2} \leqslant \sqrt{3}.$$

4. Bài toán tổng quát

Như đã đề cập, ở phần cuối này, chúng tôi xin được đề xuất một tổng quát cho bất đẳng thức vế phải trong đề VMO năm nay như sau (trường hợp bài VMO chính là ứng với $n=3$):

Bài toán 84 (Tổng quát VMO 2015)**.** *Cho số tự nhiên* $n \geqslant 2$. *Xét* n *số thực không âm* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{2}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sqrt{x_ix_j}\right)+(n-2)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j.$$

Lời giải. Đặt $a_i=\sqrt{x_i}$, $\forall i=1, 2, \ldots, n$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j\right)+(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i^4 \geqslant 4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i^2a_j^2,$$

hay

$$\frac{2}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j\right)+n\sum_{i=1}^{n} a_i^4 \geqslant 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2. \qquad (1)$$

Nếu tất cả các số a_i đều bằng 0 thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $a_1 + \cdots + a_n > 0$. Lúc này, với chú ý ở tính thuần nhất của bất đẳng thức, ta có thể chuẩn hóa cho $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$.

Với điều kiện này, ta dễ dàng đánh giá được

$$n \leqslant a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leqslant n^2.$$

Do vậy, ta có thể đặt $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n + n(n-1)t^2$ với $0 \leqslant t \leqslant 1$. Vì $2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 = n(n-1)(1-t^2)$ nên bất đẳng thức (1) có thể được viết lại dưới dạng:

$$n^2\left[1 + (n-1)t^2\right](1-t^2) + n\sum_{i=1}^n a_i^4 \geqslant 2n^2\left[1 + (n-1)t^2\right]^2,$$

hay

$$a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 \geqslant n\left[1 + (n-1)t^2\right]\left[1 + (2n-1)t^2\right].$$

Bây giờ, ta chứng minh các bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$ và $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n + n(n-1)t^2$ $(t \geqslant 0)$. Khi đó, với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$, ta có*

$$1 - (n-1)t \leqslant a_i \leqslant 1 + (n-1)t.$$

Chứng minh. Do các biến có vai trò như nhau nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $i = 1$ là đủ. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$n + n(n-1)t^2 \geqslant a_1^2 + \frac{(a_2 + \cdots + a_n)^2}{n-1} = a_1^2 + \frac{(n-a_1)^2}{n-1}.$$

Giải bất phương trình với ẩn a_1, ta thu được ngay kết quả. ■

Bổ đề 2. *Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực thỏa mãn các điều kiện của bổ đề 1. Khi đó, ta có bất đẳng thức sau:*

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 \geqslant (n-1)(1+t)^3 + \left[1 - (n-1)t\right]^3.$$

Chứng minh. Dễ thấy với $t = 0$ thì $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ và bất đẳng thức hiển nhiên đúng nên trong chứng minh dưới đây (và cho cả bổ đề sau), ta chỉ xét trường hợp $t > 0$. Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i^3 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2\big[a_i + (n-1)t - 1\big] + \big[1-(n-1)t\big]\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2\big[a_i + (n-1)t - 1\big] + n\big[1-(n-1)t\big]\big[1+(n-1)t^2\big].\end{aligned}$$

Theo bổ đề 1, dễ thấy $a_i + (n-1)t - 1 \geqslant 0$. Do vậy, ta có đủ điều kiện để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz như sau:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^2\big[a_i + (n-1)t - 1\big]\right\}\left\{\sum_{i=1}^{n}\big[a_i + (n-1)t - 1\big]\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\big[a_i + (n-1)t - 1\big]\right\}^2.$$

Do $\sum_{i=1}^{n}\big[a_i + (n-1)t - 1\big] = n(n-1)t$ và:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i\big[a_i + (n-1)t - 1\big] &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \big[(n-1)t - 1\big]\sum_{i=1}^{n} a_i \\ &= n + n(n-1)t^2 + n\big[(n-1)t - 1\big] \\ &= n(n-1)t(1+t)\end{aligned}$$

nên từ đánh giá trên, ta suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2\big[a_i + (n-1)t - 1\big] \geqslant n(n-1)t(1+t)^2.$$

Và như thế, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i^3 &\geqslant n(n-1)t(1+t)^2 + n\big[1-(n-1)t\big]\big[1+(n-1)t^2\big] \\ &= (n-1)(1+t)^3 + \big[1-(n-1)t\big]^3.\end{aligned}$$

■

Bổ đề 3. *Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm thỏa mãn các điều kiện của bổ đề 1. Khi đó, nếu $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n-1}$ thì ta có*

$$a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 \geqslant (n-1)(1+t)^4 + \big[1-(n-1)t\big]^4.$$

Chứng minh. Ta có biến đổi sau:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^4 = \sum_{i=1}^{n} a_i^3\big[a_i + (n-1)t - 1\big] + \big[1-(n-1)t\big]\sum_{i=1}^{n} a_i^3. \qquad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^3\big[a_i+(n-1)t-1\big]\right\}\left\{\sum_{i=1}^{n}\big[a_i+(n-1)t-1\big]\right\}^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\big[a_i+(n-1)t-1\big]\right\}^3.$$

Từ đó, sử dụng các kết quả biến đổi của bổ đề 2, ta suy ra:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3\big[a_i+(n-1)t-1\big] \geqslant n(n-1)t(1+t)^3.$$

Sử dụng kết quả này kết hợp với bổ đề 2 vào biến đổi (2), ta thu được ngay kết quả cần chứng minh. ■

Trở lại bài toán đã cho, có thể thấy rằng: Nếu $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n-1}$ thì bằng cách sử dụng bổ đề 3, ta chỉ cần chứng minh

$$(n-1)(1+t)^4 + \big[1-(n-1)t\big]^4 \geqslant n\big[1+(n-1)t^2\big]\big[1+(2n-1)t^2\big].$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$nt^2\big[1-(n-1)t\big]\big[3n-4-(n-1)(n-4)t\big] \geqslant 0,$$

hiển nhiên đúng do $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n-1}$.

Với $\frac{1}{n-1} < t \leqslant 1$: Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^4\right)\left(\sum_{i=1} a_i\right)^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^3,$$

từ đó ta suy ra

$$a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 \geqslant n\big[1+(n-1)t^2\big]^3.$$

Và như thế, ta chỉ cần chứng minh được

$$n\big[1+(n-1)t^2\big]^3 \geqslant n\big[1+(n-1)t^2\big]\big[1+(2n-1)t^2\big].$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$t^2\left[(n-1)t-1\right]\left[(n-1)t+1\right] \geqslant 0,$$

hiển nhiên đúng do $t \geqslant \frac{1}{n-1}$. $\square$

Nhận xét. Có thể thấy bài toán tổng quát là một bất đẳng thức khá chặt với dấu bằng xảy ra tại hai trường hợp $a_1 = \cdots = a_n$ và $a_1 = \cdots = a_{n-1}$, $a_n = 0$ (và các hoán vị). Ngoài ra, các công cụ xử lý cho bất đẳng thức nhiều biến vẫn còn nhiều hạn chế. Chính điều này đã tạo nên độ khó của bài toán.

Ngoài lời giải trên, chúng ta cũng có thể sử dụng hàm lồi và một bổ đề dồn biến phụ để chứng minh. Lời giải theo cách này sẽ gọn gàng hơn. Tuy nhiên, ở đây chúng tôi chọn cách dài hơn để trình bày cũng có nguyên nhân của nó.

Bổ đề 1 trong lời giải cho phép ta chặn miền biến theo tham số với những đánh giá rất chặt, từ đó nếu ta biết cách sử dụng hợp lý sẽ thu được nhiều kết quả thú vị. Chẳng hạn, trong các bổ đề 2 và 3, chúng tôi đã sử dụng kỹ thuật thêm – bớt của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz kết hợp với bổ đề 1 để làm tăng tính hiệu quả của các đánh giá.

Bạn đọc nào quan tâm có thể tìm đọc bài viết "*Nhỏ mà không nhỏ*" của chúng tôi trong *Chuyên đề Toán học số 9* của trường PTNK (Tp. Hồ Chí Minh), phát hành tháng 10 năm 2010.

PHÂN TÍCH VÀ MỞ RỘNG TRONG CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP

Lê Phúc Lữ (*Tp HCM*)

Tóm tắt

Như chúng ta đều biết, các bài toán tổ hợp đòi hỏi tư duy nhiều, nhất là tư duy trừu tượng, sáng tạo không theo lối mòn. Trong phòng thi có thời gian ít, áp lực cao, ít có thí sinh nào dám mạo hiểm làm tổ hợp khi các câu đại số, giải tích (thường có mô hình sẵn) vẫn chưa xong. Tuy nhiên, nói đi thì cũng phải nói lại, tổ hợp cũng như hình học và số học, bên cạnh các nội dung định tính thì vẫn có các câu định lượng. Chẳng hạn như xét riêng trong chủ đề hình phẳng, nếu bạn nào học hình chưa tốt nhưng lại sử dụng tốt các công cụ phụ trợ như đại số, lượng giác, tọa độ, ... vào bài toán thì chỉ cần một tí cố gắng nào đó để đưa bài toán định tính thuần túy về định lượng là coi như có thể tự tin xử lý được rất nhiều bài khó. Tuy nhiên, đó lại là một câu chuyện dài khác.

Đi vào vấn đề chính, chúng ta có thể thấy rằng tổ hợp cũng thế, bên cạnh các bài chứng minh đòi hỏi sử dụng các lập luận logic, các nguyên lý tổ hợp một cách bài bản thì vẫn có các bài định lượng như thế.

1. Phân tích để tìm lời giải

Trong phần này, chúng ta sẽ cùng xem xét một số bài toán liên quan đến cực trị rời rạc và thông qua các đánh giá với số nhỏ, trường hợp đặc biệt để cố gắng phát hiện ra quy luật rồi từ đó giải quyết được vấn đề. Chú ý rằng có một số bài chỉ nêu hướng xử lý chứ không đi sâu vào lời giải chi tiết.

Bài toán 1. *Trên một bàn tròn, có $n \geqslant 3$ người ngồi. Biết rằng trong số họ, ai cũng luôn nói dối hoặc luôn nói thật và ngay lúc* *này, họ nói rằng: "Cả 2 người ngồi cạnh tôi đều là kẻ nói dối". Hỏi trên bàn có nhiều nhất và ít nhất bao nhiêu người nói dối?*

Lời giải. Đây là một bài mình phát triển từ một câu đố vui dành cho học sinh Tiểu học trong trường hợp $n = 5$ (hoàn toàn có thể thử các trường hợp nhỏ).

Tất nhiên bài toán này không phải quá dễ dàng để nhìn vào là ra ngay, nhất là khi đòi hỏi phải xây dựng một cách bài bản. Chúng ta hãy thử với các trường hợp nhỏ để cố gắng tìm cách xử lý và có thể dễ dàng hình dung cách tiếp cận hơn.

- Với $n = 3$ thì $min = 2$, $max = 2$. (Chú ý rằng phủ định của với mọi là tồn tại!)
- Với $n = 4$ thì $min = 2$, $max = 2$.
- Với $n = 5$ thì $min = 3$, $max = 3$.

Các giá trị đầu thì lớn nhất và nhỏ nhất bằng nhau rồi, nhưng như thế thì đồng nghĩa với việc tồn tại duy nhất số lượng người nói dối trên bàn, có vẻ không hợp lý lắm, ta thử tiếp tục:

- Với $n = 6$ thì $min = 3$, $max = 4$.
- Với $n = 7$ thì $min = 4$, $max = 4$.
- Với $n = 8$ thì $min = 4$, $max = 5$.
- Với $n = 9$ thì $min = 5$, $max = 6$.
- Với $n = 10$ thì $min = 5$, $max = 6$.

Đến đây chắc các bạn có thể dễ dàng nhận ra quy luật của hai dãy min và max. Với dãy min thì $2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5$ rất dễ nhận ra. Tuy nhiên, phải mô tả được công thức tổng quát của nó chứ không thể dừng lại ở đó. Một kinh nghiệm cho thấy rằng khi sự thay đổi theo các cụm có độ dài 2 như thế thì 90% công thức có dạng phần nguyên của một hàm tuyến tính theo n khi chia cho 2. Ta có thể làm chậm hơn một chút:

- Với $n = 2k$ thì $min = k$.
- Với $n = 2k - 1$ thì $min = k$.

Như thế, công thức có thể viết gộp lại là: $min = \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Tương tự với dãy max, ta đoán được $max = \left[\frac{2n}{3}\right]$.

Như thế, đến đây, ta đã có được gì trong tay? Nếu viết hết nội dung ở trên vào thì có điểm nào chưa? Thật khó nói nhưng có lẽ muốn có điểm thì ta phải cố gắng thêm nữa. Có thể chứng minh các giá trị kia tốt nhất là điều không dễ nhưng trước mắt, việc xây dựng đã khá đơn giản.

Ta chỉ cần chia trường hợp ra và "bắt chước" theo cách đã làm với các số nhỏ. Chẳng hạn trường hợp $n = 2k$ thì cho những người nói dối thật ngồi xen kẽ là có được ngay kết quả. Đây cũng là một kinh nghiệm nữa khi xử lý dạng này. Khi chứng minh điều kiện đủ, tức là xây dựng cấu hình thỏa mãn thì phải chia từng trường hợp ra xét cho dễ. Nếu để nguyên công thức dạng phần nguyên thì rất khó, nhiều khi không xây dựng được.

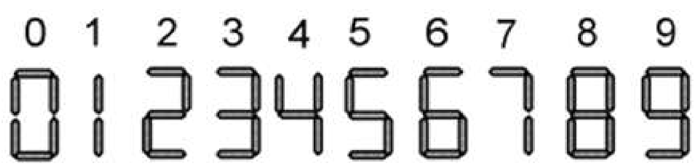
Còn phần chứng minh điều kiện cần thì cũng tương đối nhẹ nhàng và có thể nói chính kết quả trên đã gợi ý cho phần này. Ta chỉ nêu nhận xét dưới đây là coi như xong:

1. Trong 2 người liên tiếp, phải có ít nhất một người nói dối.

2. Trong 3 người liên tiếp, phải có ít nhất một người nói thật.

Hai nhận xét này có vẻ rất hiển nhiên nhưng dễ nghĩ ra được hay không thì cũng tùy người. Tính khó dễ đến đây cũng không còn khách quan nữa khi mọi chuyện đã rõ ràng cả. □

Bài toán 2. *Tèo dùng $n \geqslant 2$ que diêm để xếp thành các con số như hình bên dưới:*



Hỏi số lớn nhất và số nhỏ nhất mà Tèo có thể nhận được khi xếp các que diêm là bao nhiêu?

Lời giải. Ở bài này, ta chỉ cần dùng một ý tưởng tham lam (greedy strategy) đơn giản sau: số càng có nhiều chữ số thì càng lớn và có càng ít chữ số thì càng nhỏ. Nhờ đó mà trường hợp số lớn nhất, Tèo có thể dễ dàng thực hiện được như sau:

- Nếu n chẵn thì xếp $\frac{n}{2}$ số 1.
- Nếu n lẻ thì xếp 1 số 7 ở đầu tiên và $\frac{n-3}{2}$ số 1.

Rõ ràng cách xếp này cho nhiều chữ số nhất và hiển nhiên số tương ứng sẽ lớn nhất.

Tuy nhiên, trường hợp nhỏ nhất lại không đơn giản như vậy. Mình đã phải viết đến n gần 30 mới dự đoán được quy luật. Còn lí do tại sao có sự khác nhau này giữa lớn nhất và nhỏ nhất thì dễ thôi, vì đặc điểm của số lượng các que diêm để xếp các số.

Gọi $f(n)$ là số nhỏ nhất thu được. Ta thử liệt kê các kết quả xếp được bằng tay như sau:

$$f(2) = 1,\ f(3) = 7,\ f(4) = 4,\ f(5) = 2,\ f(6) = 0,\ f(7) = 8,\ f(8) = 10,$$
$$f(9) = 18,\ f(10) = 22,\ f(11) = 22,\ f(12) = 28,\ f(13) = 80,\ f(14) = 88,$$
$$f(15) = 108,\ f(16) = 188,\ f(17) = 200,\ f(18) = 208,\ f(19) = 288,$$
$$f(20) = 688,\ f(21) = 888,\ f(22) = 1088,\ f(23) = 1888,\ f(24) = 2008.$$

Đến đây ta mới thấy được có một quy luật bắt đầu rõ ràng từ 14 và nó có chu kỳ 7. Việc chứng minh hầu như chỉ mang tính hình thức (quy nạp) vì kết quả trên đã quá cụ thể. □

Chúng ta thử sức với một bài tương tự dưới đây để thấy rõ hơn ý nghĩa của việc liệt kê này:

Bài toán 3. *Cho số nguyên dương n. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất có n chữ số và chia hết đồng thời cho $2, 3, 5, 7$.*

Lời giải. Chú ý rằng số chia hết cho $2, 3, 5, 7$ thì chia hết cho 210. Cũng bằng cách thử tương tự như trên, ta gọi $f(n)$ là số thỏa mãn ứng với n cho trước thì có kết quả như sau:

$$f(1) = 0,\ f(2) \text{ không tồn tại},\ f(3) = 210,\ (4) = 1050,$$
$$f(5) = 10080,\ f(6) = 100170,\ f(7) = 1000020,\ f(8) = 10000200,$$
$$f(9) = 100000110,\ f(10) = 1000000050.$$

Đến đây, ta thấy ngay đặc điểm của các số cần tìm là gồm 1 chữ số 1 ở hàng cao nhất, tiếp theo là một loạt số 0, số cuối cùng là 0 và các số hàng chục, hàng trăm sẽ thay đổi phù hợp để được số chia hết cho 7. Đến $f(10)$, ta thấy quy luật đã quy về giống $f(4)$. Lý do đơn giản là vì $10^{k+6} - 10^k = 10^k(10^6 - 1) \vdots 7$ với mọi k nguyên dương, theo định lý Fermat nhỏ.

Như vậy, bằng việc xây dựng như trên và tính tuần hoàn của công thức, ta có thể dễ dàng hoàn tất bài toán. □

Ta xét ví dụ tiếp theo, công thức phức tạp hơn nhiều:

Bài toán 4. *Có một con thỏ ăn n củ cà rốt trong một số ngày theo quy luật sau:*

1) *Ngày đầu tiên và ngày cuối cùng, nó phải ăn 1 củ cải.*

2) *Hai ngày liên tiếp nhau, con thỏ phải ăn số củ cải chênh lệch không quá 1.*

Hỏi số ngày ít nhất mà con thỏ ăn hết số củ cải là bao nhiêu?

Lời giải. Mô tả của bài toán khá rõ ràng và việc xây dựng tương đối đơn giản, thậm chí là trong trường hợp n khá lớn. Gọi $f(n)$ là số ngày ít nhất cần tìm, ta có dãy sau:

$$f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 3,\ f(4) = 3,\ f(5) = 4,\ f(6) = 4,\ f(7) = 5,$$
$$f(8) = 5,\ f(9) = 5,\ f(10) = 6,\ f(11) = 6,\ f(12) = 6,\ f(13) = 7,$$
$$f(14) = 7,\ f(15) = 7,\ f(16) = 7,\ f(17) = 8,\ f(18) = 8.$$

Quan sát quy luật của dãy số, ta thấy rằng:

- Giá trị của f thay đổi tại các số có dạng $k^2 + 1$.
- Trong khoảng từ $(k-1)^2 + 1$ đến k^2, giá trị của f thay đổi một lần nữa tại điểm chính giữa.

Từ đó suy ra:

- Với $(k-1)^2 + (k-1) + 1 \leqslant n \leqslant k^2$ thì giá trị $f(n) = 2k - 1$.
- Với $k^2 + 1 \leqslant n \leqslant k^2 + k$ thì giá trị $f(n) = 2k$.

Cách xây dựng thì cũng dễ thấy do ta có thể dựa theo mô hình tam giác Pascal và lựa chọn khi nào cần phải có tam giác đỉnh nhọn, đỉnh bằng phù hợp.

Nếu tìm công thức trên một cách tổng quát thì ta có $\left[\sqrt{4n-3}\right]$. Rõ ràng bằng một lập luận thú vị nào đó, ta có thể tìm ra được công thức này nhưng ở đây, mọi việc hoàn toàn có thể làm một cách thủ công và trong thời gian không quá lâu. Rõ ràng công việc này đáng được xem xét và áp dụng! □

Ở ví dụ dưới đây, chính việc kiểm tra kết quả trong trường hợp nhỏ đã cho mình cách chứng minh cho bài toán.

Bài toán 5. *Cho số nguyên dương n. Xét dãy số nguyên dương hữu hạn (a_k) gồm k số hạng sao cho với mọi $1 \leqslant i < j \leqslant n$ thì tồn tại t với $1 \leqslant t \leqslant k$ sao cho $a_t = i$, $a_{t+1} = j$ hoặc $a_t = j$, $a_{t+1} = i$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của k là bao nhiêu?*

Lời giải. Bài toán phát biểu hơi rắc rối nhưng nếu ngẫm nghĩ kĩ thì mọi chuyện cũng tương đối rõ ràng (đề yêu cầu rằng mọi cặp số từ 1 đến n đều phải là hai số cạnh nhau nào đó của dãy). Ta thử xét các trường hợp nhỏ:

- Với $n = 1$ thì $k = 1$.
- Với $n = 2$ thì $k = 2$ ứng với dãy $1, 2$.
- Với $n = 3$ thì $k = 4$ ứng với dãy $1, 2, 3, 1$.
- Với $n = 4$ thì $k = 8$ ứng với dãy $1, 2, 3, 4, 1, 3, 2, 4$.
- Với $n = 5$thì $k = 11$ ứng với dãy $1, 2, 3, 4, 5, 1, 4, 2, 5, 3, 1$.

Trong quá trình xây dựng này, ta sẽ gặp một số vấn đề sau:

Do có tất cả C_n^2 cặp số và có $C_2^2 = 1$, $C_3^2 = 3$ nên dự đoán kết quả là $C_n^2 + 1$. Trường hợp $n = 5$ hoàn toàn hợp lý nhưng $n = 4$ thì lại không xây dựng được với $k = 7$.

Để kiểm tra cẩn thận và trực quan, thử vẽ ra mô hình có các số và các cạnh nối chúng nếu cặp đó thỏa mãn điều kiện đề bài. Từ đó phát hiện ra bài toán này có liên hệ mật thiết với bài toán về chu trình Euler trong đồ thị đầy đủ và dãy số (a_k) trên chính là sự liệt kê thứ tự đỉnh trong chu trình đó.

Việc cộng thêm 1 ở đây là do dãy không tạo thành mô hình khép kín nên cần liệt kê dư ra 1 đỉnh. Từ điều kiện về tồn tại đường đi Euler, ta thấy cần phải chia thành 2 trường hợp chẵn lẻ mới có thể giải quyết được bài toán. Cụ thể là:

- Nếu n lẻ thì tất cả các đỉnh đều bậc chẵn nên thỏa mãn điều kiện có chu trình Euler, số k cần tìm là $C_n^2+1=\frac{n^2-n+2}{2}$.
- Nếu n chẵn thì tất cả các đỉnh đều bậc lẻ nên phải thêm vào $\frac{n}{2}$ cạnh nữa để có được đa đồ thị có các bậc đều chẵn và số k cần tìm là $C_n^2+\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}$. □

Bài toán 6 (VNTST, 2006). *Trong không gian cho 2006 điểm mà trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Người ta nối tất cả các điểm đó lại bởi các đoạn thẳng. Số tự nhiên m gọi là số tốt nếu ta có thể gán cho mỗi đoạn thẳng trong các đoạn thẳng đã nối bởi một số tự nhiên không vượt quá m sao cho mỗi tam giác tạo bởi ba điểm bất kì trong số các điểm đó đều có hai cạnh được gán bởi hai số bằng nhau và cạnh còn lại gán bởi số lớn hơn hai số đó. Tìm số tốt có giá trị nhỏ nhất.*

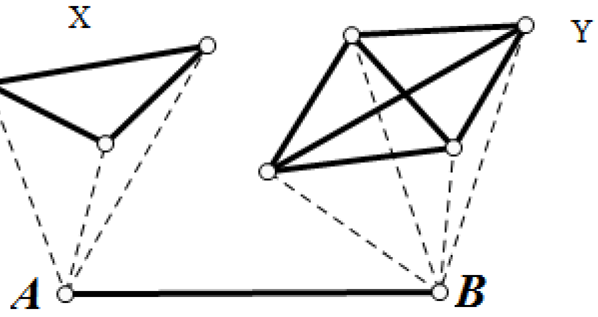
Lời giải. Cũng như nhiều bài toán khác, ở bài này, ta thấy số 2006 không có ý nghĩa lớn lắm và thử tổng quát trong trường hợp $n \geqslant 2$ tùy ý. Tư tưởng *"chia nhị phân"* là một trong các đại diện quan trọng của ứng dụng chiến lược chia để trị, thay vì xử lý bài toán lớn, ta chia nó ra và giải quyết từng phần nhỏ.

Ở bài này, ta sẽ chỉ ra một tình huống mà khi không phân tích thấu đáu, dựa theo các xây dựng cục bộ và thử với vài số nhỏ, ta sẽ dễ dàng rơi vào một ngộ nhận nào đó dẫn đến kết quả sai. Ta cũng tiến hành tương tự như các ví dụ đã nêu, xét các tình huống với số nhỏ:

- Với $n=2$ thì chỉ cần $m=0$ là được.
- Với $n=3$ thì cần đến 2 số để đánh nên chọn $m=1$.
- Với $n=4$ thì cũng chỉ cần 2 số nên $m=1$.
- Với $n=5$ thì ta cần 3 số và $m=2$.

Đến đây dễ thấy rằng luôn tồn tại một cạnh nào đó được đánh số 0, giả sử cạnh đó nối A và B. Ta chia $n-2$ đỉnh còn lại thành

2 phần thì rõ ràng mỗi đỉnh đó đều phải nối với A hoặc B bởi cạnh đánh số 0. Ta lại chia chúng thành 2 tập hợp: X chứa các đỉnh nối với A bởi cạnh đánh số 0, Y chứa các đỉnh nối với B bởi các cạnh đánh số 0.



Khi đó ta có thể cho:

- Từ mỗi đỉnh tập X sang mỗi đỉnh tập Y, cạnh nối với nhau đánh số 0.
- Từ đỉnh A sang tập Y và từ đỉnh B sang tập X, cạnh nối với nhau đánh số 1.
- Còn lại trong X và Y, ta cần sử dụng $\max\{f(|X|),\, f(|Y|)\}$. Tuy nhiên, do cần chọn nhỏ nhất nên

$$f(n) = 2 + \min\Big\{\max\{f(|X|),\, f(|Y|)\}\Big\}.$$

Hơn nữa, $f(n)$ là hàm đơn điệu và $|X| + |Y| = n - 2$ nên

$$\min\Big\{\max\{f(|X|),\, f(|Y|)\}\Big\} = f\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]\right).$$

Từ đó đi đến kết luận:

$$f(n) = 2 + f\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]\right).$$

Lập luận có vẻ phù hợp nhưng đáng tiếc là kết luận này lại sai và với phản ví dụ khi xây dựng trong trường hợp $n = 7, n = 8$, ta dễ dàng phát hiện ra vấn đề nằm ở chỗ cách xây dựng mô hình.

Trên thực tế, ta có thể chia ra ngay từ đầu chứ không cần phải xét thêm điểm A, B và công thức đúng là:

$$f(n) = 1 + f\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]\right).$$

Bạn đọc hãy thử tự phân tích xem tại sao công thức truy hồi lại được thay thế như trên nhé!

Bài này cho ta thấy rằng trong nhiều trường hợp, ta xây dựng các mô hình dựa theo kinh nghiệm nhưng cũng có lúc cần phải xét các giá trị cụ thể trong trường hợp nhỏ thì mới phát hiện ra được vấn đề. □

Ngoài ra, việc xây dựng cho các giá trị nhỏ tạo thành dãy rồi tìm quy luật như đã nêu trên không chỉ áp dụng được cho dạng toán cực trị rời rạc mà một số bài toán định tính khác vẫn được. Thử thử xét bài toán kinh điển sau:

Bài toán 7. *Có hai người A, B chơi trò chơi bốc sỏi và ban đầu có n viên sỏi, A đi trước. Mỗi người có thể bốc 2, 3 hoặc 6 viên và ai bốc được viên cuối cùng thì thắng. Nếu chỉ còn 1 viên thì người chơi ở lượt đó bốc và thắng luôn. Hỏi với những giá trị nào của n thì A có chiến lược thắng?*

Lời giải. Trước khi tiến hành xây dựng tương tự như trên, các bạn có thể cần hai định nghĩa sau về trò chơi tổ hợp cân bằng (tức là hai bên có cách chơi như nhau):

- Vị trí thắng: là vị trí mà tồn tại một cách đi đến vị trí thua (vị trí ở đây ý nói giá trị n hiện tại, thắng này chỉ người chơi hiện tại và đi đến chỉ số sỏi còn lại sau lượt chơi đó).
- Vị trí thua: là vị trí mà luôn phải đi đến một vị trí thắng.

Có vẻ hơi mơ hồ, ta thử phân tích với bài toán cụ thể ở trên. Đặt $f(n) : \mathbb{N}^* \to \{0, 1\}$ và nó nhận giá trị 1 khi A có chiến lược thắng, 0 khi B có chiến lược thắng. Hiển nhiên A thắng thì B thua và ngược lại nên ta có $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 1$.

Đến đây để tính $f(4)$, ta thấy rằng nếu A bốc 2 hoặc 3 thì đều dẫn đến vị trí thắng của đối phương nên theo định nghĩa ở trên, 4 chính là vị trí thua và $f(4) = 0$.

Cứ thế, ta tính tiếp được:

$$f(5) = 0,\ f(6) = 1,\ f(7) = 1,\ f(8) = 1,\ f(9) = 0,\ f(10) = 0,\ \ldots$$

Dễ thấy quy luật: nếu n chia 5 dư $0, 1, 2$ thì A thắng; và ngược lại thì B thắng. $\square$

Để nghĩ ra được điều này thì rõ ràng không dễ nhưng để đoán ra được thì lại quá dễ dàng. Chứng minh được thực hiện một cách nhanh chóng bằng quy nạp.

Bài toán 8 (Cuộc thi Brilliant.org)**.** *Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, xét tập hợp S gồm các điểm thỏa mãn:*

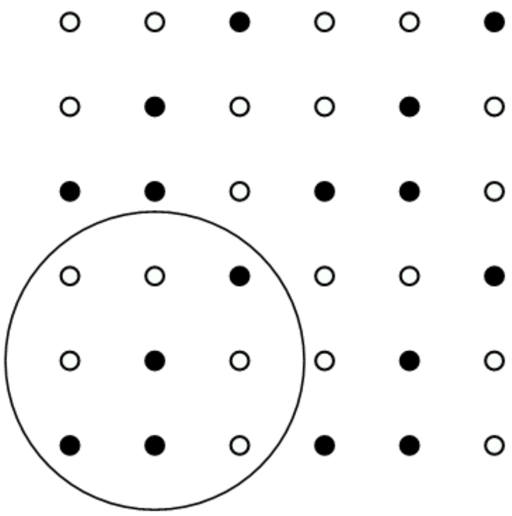
$$\{(x, y) \mid 0 \leqslant x, y \leqslant 999;\ x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Hai bạn A, B chơi một trò chơi như sau: Ban đầu, có 1 quân cờ ở vị trí nào đó thuộc tập hợp S và họ di chuyển quân cờ theo cách sau:

- *Bạn A đi trước và có thể di chuyển quân cờ xuống dưới 1 đơn vị hoặc sang trái 2 đơn vị.*
- *Bạn B đi sau và có thể di chuyển quân cờ xuống dưới 2 đơn vị hoặc sang trái 1 đơn vị.*

Hai bạn luân phiên chơi và ai buộc phải di chuyển quân cờ khỏi góc phần tử thứ nhất thì thua. Hỏi có tất cả bao nhiêu vị trí mà A có chiến lược để thắng trò chơi?

Lời giải. Ta sẽ thực hiện kiểm tra trực tiếp các vị trí gần gốc tọa độ để thử tìm một quy luật nào đó:



Trong hình trên, ta quy ước các điểm trắng là người A có chiến lược thắng, điểm đen là người B có chiến lược để thắng. Ta thấy rằng dựa vào một số kiểm tra trực tiếp vét cạn với các vị trí $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, ... thì có quy luật là các vị trí thắng thua ô hình vuông 3×3 ở ngay sát gốc tọa độ được lặp lại.

Điều này có thể giải thích được thông qua đặc điểm: A sang trái 1 đơn vị thì B sang trái 2 đơn vị, tổng cộng là 3 đơn vị; tương tự khi đi xuống dưới. Từ đó dễ dàng giải quyết được bài toán. $\square$

Dưới đây là một số bài toán tương tự, các bạn có thể tự lặp lại các thao tác trên để dự đoán kết quả, một công việc hết sức thú vị, thủ công nhưng lại mang đến những hiệu quả bất ngờ.

Bài toán 9. *Có n chiếc cốc được úp thành một vòng tròn và dưới 1 trong các chiếc cốc này, có một đồng xu. Ở mỗi lượt, người chơi có thể chọn ra 4 chiếc cốc liên tiếp và mở lên. Nếu có đồng xu thì trò chơi kết thúc. Nếu không thì người chơi sẽ trả 4 chiếc cốc về vị trí cũ và bằng một cách nào đó, đồng xu sẽ di chuyển sang một trong hai cốc kề nó. Người chơi luôn suy luận, phân tích kĩ trong quá trình bốc. Hỏi trong trường hợp xấu nhất thì số lần cần phải thao tác là bao nhiêu?*

Bài toán 10. *Ở một cửa hàng nọ, người chủ chỉ sử dụng các đồng tiền có giá trị là lũy thừa tự nhiên của 3. Có một người khách cần mua một món hàng có giá trị là n. Dù đã chuẩn bị sẵn một số loại đồng tiền có giá trị là lũy thừa của 3 (mỗi loại có số lượng tùy ý) nhưng không may là với các loại đồng tiền đó không thể nào trả được vừa đúng giá tiền n. Người bán cũng không muốn thối lại tiền thừa. Thế là người khách đành phải trả nhiều hơn giá trị của món hàng. Để tiết kiệm, ông đã trả số tiền $m > n$ với m nhỏ nhất có thể. Hỏi trong các cách trả số tiền m đó, số đồng tiền nhiều nhất đã sử dụng là bao nhiêu?*

Bài toán 11. *Để mở một cánh cửa, tên trộm cần phải bấm đúng thứ tự của n cái nút mà người chủ quy định trước. Nếu bấm nút đúng thứ tự thứ thì các nút sẽ giữ nguyên vị trí, nếu chỉ cần bấm sai một nút thì toàn bộ các nút đã bấm sẽ bị bật lên và tên trộm sẽ phải thử lại từ đầu.*

Chẳng hạn với $n = 3$ và thứ tự các nút cần bấm là $2, 3, 1$. Nếu ban đầu, tên trộm bấm nút 1 hoặc 3 thì nút sẽ bật lên ngay lập *tức. Nếu hắn bấm nút 2 thì nút sẽ giữ nguyên (do nút 2 có thứ tự đầu tiên). Tiếp theo, nếu hắn bấm nút 1 thì do sai thứ tự nên cả nút 2 đã bấm trước đó và nút 1 sẽ bị bật lên. Nếu hắn bấm nút 3 tiếp theo nút 2 thì cả hai nút sẽ giữ nguyên và còn lại hắn chỉ cần bấm nút 1. Dù một tên trộm có thông minh đến đâu thì trong tình huống xấu nhất, hắn cũng phải bấm nút 7 lần. Hỏi với n nút trong trường hợp xấu nhất, tên trộm phải bấm nút bao nhiêu lần để mở được cái cửa?*

Bài toán 12. *Hai người chơi một trò chơi như sau: Đầu tiên, có một số n được chọn từ tập hợp $\{2, 3, 4, \ldots, 999\}$. Người chơi thứ nhất chọn một điểm trong mặt phẳng có tọa độ là (x, y) sao cho $-n \leqslant x, y \leqslant n$. Hai người thay phiên nhau chọn đủ n số thỏa mãn điều kiện trên. Tiếp theo, họ tiến hành nối các điểm này lại. Người thứ nhất chọn ra hai điểm vào nối chung bởi một đường cong sao cho đường này không đi qua bất cứ điểm nào trong các điểm còn lại và cũng không cắt bất cứ đường cong nào có trước đó. Cứ như thế. Hỏi trong 998 số ban đầu, có bao nhiêu số để người thứ nhất có chiến lược thắng?*

2. Xây dựng mô hình trong giải Toán

Song ánh là một công cụ mạnh để giải nhiều bài toán chứng minh và bài toán đếm trong tổ hợp. Ý tưởng chính của phương pháp này chính là thay đổi cách tiếp cận trong đề bài bằng một con đường, một cách nhìn khác có các đặc điểm tương đồng với giả thiết ban đầu mà với nó, ta có thể dễ dàng xử lí hơn. Dưới đây, chúng ta sẽ cùng phân tích một số dạng Toán về việc xây dựng mô hình thường gặp.

2.1. Sử dụng biểu đồ Venn

Bài toán 13. *Có bao nhiêu cách chia tập hợp S có n phần tử thành 2 tập con (có tính tập rỗng) sao cho hợp của chúng bằng S?*

Lời giải. Ta thấy rằng vấn đề đặt ra ở đây khá tổng quát và các ý tưởng đếm bằng truy hồi, chứng minh bằng quy nạp xuất hiện đầu tiên trong trường hợp này. Tuy nhiên, nếu chúng ta thử vẽ một mô hình ra để hình dung thì vấn đề có thể sáng tỏ hơn: Ta có thể biểu diễn hai tập A, B như thế bởi các vòng tròn và công việc cần làm là ứng với mỗi phần tử $x \in S$, xếp nó vào trong các vòng tròn đó. Rõ ràng ta có 4 cách để xếp:

- x thuộc A nhưng không thuộc B.
- x thuộc B nhưng không thuộc A.
- x thuộc cả A và B (nằm trong phần giao).
- x không thuộc cả A và B.

Nhưng vì yêu cầu của bài toán là *"hợp của hai tập con là S"* nên không thể tính trường hợp thứ 4 ở trên được. Do đó, ứng với mỗi phần tử, ta có đúng 3 cách xếp vào hai tập hợp.

Từ đây, ta có thể tính ra đáp số của bài toán là:

$$\frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^n + 1}{2}.$$

Giải thích thêm về kết quả này, ta thấy rằng có một vấn đề cần giải quyết khi đếm là các trường hợp bị trùng nhau. Nếu đề ban đầu đã cho sẵn hai tập con A và B rồi thì kết quả sẽ là 3^n rõ ràng. Tuy nhiên, yêu cầu ở đây là chia tập S ra thành hai tập con, như thế thì việc chia ở đây có tính đối xứng giữa A và B (tức là cách đếm *"x thuộc A nhưng không thuộc B"*, *"x thuộc B nhưng không thuộc A"* ở trên là giống nhau).

Chú ý thêm có một trường hợp đặc biệt là khi $A = B$ thì buộc phải có $A = B = S$ nên chỉ có một cách chia. Bỏ trường hợp đó ra, chia đôi số trường hợp rồi lại cộng nó vào thì sẽ được số cách chia cần tìm.

Công thức ở đây hoàn toàn có thể kiểm tra với các giá trị n nhỏ. Dựa vào phân tích trên, các bạn thử giải các bài toán sau: *"Có bao nhiêu cách phân hoạch tập hợp S gồm n phần tử thành hai tập con?"* (tập hợp S phân hoạch thành hai tập hợp A và B khi $A \cap B = \varnothing, A \cup B = S$). $\square$

Mô hình quen thuộc trên chính là biểu đồ Venn trong lý thuyết tập hợp, tiếp theo là một bài toán liên quan được giải bằng cách vẽ mô hình tương tự:

Bài toán 14. *Khi điều tra kết quả học tập của một lớp học có 45 học sinh ở các môn Toán, Lí, Hóa, người ta thấy rằng:*

- *Có 8 học sinh giỏi đúng 1 trong 3 môn.*
- *Có 17 học sinh giỏi môn Toán và Lý nhưng không giỏi Hóa.*
- *Có 6 học sinh giỏi Lý và Hóa nhưng không giỏi Toán.*
- *Có 12 học sinh giỏi Hóa và Toán nhưng không giỏi Lý.*
- *Có 1 học sinh không giỏi môn nào.*

Hỏi có tất cả bao nhiêu học sinh giỏi ở cả 3 môn?

Lời giải. Dưới đây là một lời giải theo hướng lập luận trực tiếp: Gọi T là tập hợp các thí sinh và A, B, C lần lượt là các thí sinh giải được câu Toán, Lý, Hóa. Theo giả thiết thì:

$$\begin{cases} |A\backslash(B\cup C)|+|B\backslash(C\cup A)|+|C\backslash(A\cup B)|=19 \\ |(A\cup B)\backslash C|=18, |(B\cup C)\backslash A|=10, |(C\cup A)\backslash B|=12 \\ |T\backslash(A\cup B\cup C)|=1 \end{cases}$$

Suy ra $|A\cup B\cup C|=45-1=44$. Ta cũng có

$$\begin{aligned} |A\backslash(B\cup C)| &= |A|-|A\cap(B\cup C)| = |A|-(|A|+|B\cup C|-|A\cup B\cup C|) \\ &= |A\cup B\cup C|-|B\cup C| = |A\cup B\cup C|-|B|-|C|+|B\cap C| \end{aligned}$$

và

$$|(B\cap C)\backslash A| = |B\cap C|-|(B\cap C)\cap A| = |B\cap C|-|A\cap B\cap C|.$$

Do đó:

$$|A\backslash(B\cup C)|+|(B\cup C)\backslash A| = |A\cup B\cup C|-|A\cap B\cap C|-|B|-|C|+2|B\cap C|.$$

Tương tự, ta cũng có

$$|B\backslash(C\cup A)|+|(C\cup A)\backslash B| = |A\cup B\cup C|-|A\cap B\cap C|-|C|-|A|+2|C\cap A|,$$

$$|C\backslash(A\cup B)|+|(A\cup B)\backslash C| = |A\cup B\cup C|-|A\cap B\cap C|-|A|-|B|+2|A\cap B|.$$

Cộng các đẳng thức trên lại, ta được

$$3|A \cup B \cup C| - 3|A \cap B \cap C| - 2(|A \cup B \cup C| - |A \cap B \cap C|) = 43,$$

hay

$$|A \cup B \cup C| - |A \cap B \cap C| = 43.$$

Từ kết quả này, ta suy ra $|A \cap B \cap C| = 44 - 43 = 1$. Vậy có đúng 1 học sinh giỏi cả 3 môn. □

Cách khác. Rõ ràng việc lập luận trên không sáng sủa lắm và đòi hỏi biến đổi các phép tính trên tập hợp khá phức tạp. Ta sẽ dùng biểu đồ Venn để giải quyết bài toán này nhanh gọn hơn.

Ký hiệu tập hợp các học sinh giỏi như các vùng trong mô hình trên. Theo giả thiết, ta có

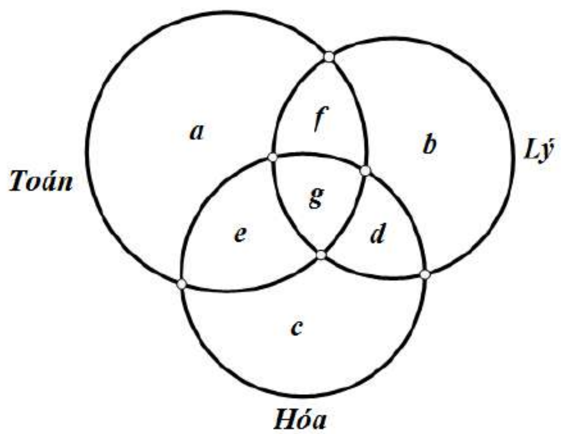
$$\begin{cases} a + b + c = 8 \\ f = 17,\ d = 6,\ e = 12 \\ a + b + c + d + e + f + g = 45 - 1 = 44 \end{cases}$$

Suy ra

$$g = 44 - (8 + 17 + 6 + 12) = 1.$$

Vậy có đúng 1 học sinh giỏi cả 3 môn. □

Bài toán 15. *Trong một kì thi Toán, người ta cho 3 bài 1, 2, 3 và có 100 thí sinh giải được ít nhất một bài. Trong các thí sinh giải được bài 2 thì số thí sinh giải được bài 1 nhiều gấp đôi số thí sinh giải được bài 3, còn số thí chỉ giải được bài 2 thì nhiều gấp ba lần số thí sinh còn lại. Số thí sinh giải được ít nhất một bài nhưng không giải được bài 2 là 40. Hỏi có ít nhất bao nhiêu thí sinh giải được cả bài 2 lẫn bài 3?*



Lời giải. Tương tự bài trên, ta ký hiệu các vùng như hình vẽ. Ta sẽ biểu diễn lần lượt các quan hệ trong đề bài cho. Số thí sinh giải được ít nhất 1 bài là $a + b + c + d + e + f + g = 100$.

Trong các thí sinh giải được bài 2, số thí sinh giải được bài 1 nhiều gấp đôi số thí sinh giải được bài 3 thì:

$$f + g = 2(d + g) \Leftrightarrow f = 2d + g.$$

Trong các thí sinh giải được bài 2, số thí chỉ giải được bài 2 thì nhiều gấp ba lần số thí sinh còn lại thì $b = 3(f + g + d)$.

Số thí sinh giải được ít nhất một bài nhưng không giải được bài 2 là $a + e + c = 40$. Do đó, $b + d + f + g = 60$ và:

$$\begin{cases} f + g + d = 15 \\ f = 2d + g \end{cases} \Rightarrow 3d + 2g = 15.$$

Ta có số thí sinh giải được bài 2 và 3 là:

$$d + g = \frac{1}{3}(3d + 3g) \geqslant \frac{1}{3}(3d + 2g) = 5.$$

Vậy có ít nhất 5 thí sinh giải được cả bài 2 lẫn bài 3. □

Dưới đây là một số bài tập tương tự:

Bài toán 16 (IMO, 1996)**.** *Trong một cuộc thi toán, có tổng cộng 3 bài toán là A, B, C. Biết rằng có 25 thí sinh giải được ít nhất một trong các bài. Trong các thí sinh không giải được bài A, số thí sinh giải được bài B nhiều gấp đôi số thí sinh giải được bài C. Số thí sinh chỉ giải được bài A nhiều hơn 1 đơn vị so với số thí khác giải được bài A và một bài khác nữa. Ngoài ra, có một nửa trong số các thí sinh giải được chỉ một bài là không giải được bài A. Hỏi có bao nhiêu người giải được bài B?*

Bài toán 17. *Cho tập hợp* $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *là tập hợp* n *số nguyên dương đầu tiên.*

a) *Hãy tìm số cách chia* S *thành* 3 *tập con* A, B, C *sau cho* $A \cap B \neq \varnothing$, $B \cap C \neq \varnothing$, $C \cap A \neq \varnothing$ *và* $A \cap B \cap C = \varnothing$.

b) *Hãy tìm số các bộ ba các tập con* A, B, C *thỏa mãn*

$$A \cup B \cup C = S \text{ và } B \cap S = \varnothing.$$

c) *Hãy tìm số các bộ bốn các tập con* A, B, C, D *thỏa mãn*

$$A \cup B \cup C \cup D = S \text{ và } B \cap S \cap D = \varnothing.$$

d) (Gặp gỡ Toán học 2013) *Chứng minh rằng có* 5^n *bộ ba tập hợp có thứ tự* (X, Y, Z) *thỏa mãn đồng thời các tính chất:*

i) $X, Y, Z \subset S$.

ii) $X \subset ((Y \cap Z) \cup (S \backslash Y))$

iii) $Y \subset ((Z \cap X) \cup (S \backslash Z))$

iv) $Z \subset ((X \cap Y) \cup (S \backslash X))$.

2.2. Xây dựng bảng ô vuông

Tiếp theo, chúng ta sẽ tìm hiểu một mô hình khá thông dụng nữa để giải các bài Toán đếm là xây dựng một bảng thích hợp và đếm theo hai chiều của bảng đó. Trước tiên, ta thử xét bài trong đề thi chọn đội tuyển của trường Phổ Thông Năng Khiếu TPHCM năm 2011:

Bài toán 18. *Cho hàm số* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *thỏa mãn* $f(0,0) = 0$ *và*

$$f(a, b) = \begin{cases} f\left(\left[\frac{a}{2}\right], \left[\frac{b}{2}\right]\right) & \text{khi } a + b \vdots 2 \\ 1 + f\left(\left[\frac{a}{2}\right], \left[\frac{b}{2}\right]\right) & \text{khi } (a + b - 1) \vdots 2 \end{cases}$$

a) *Có bao nhiêu số tự nhiên* m *sao cho* $f(2011, m) = 5$*?*

b) *Cho số lẻ* p *và số* $n \in \mathbb{N}$ *sao cho* $1 < p < 2^n$ *và* A *là tập hợp gồm* p *số tự nhiên không vượt quá* $2^n - 1$. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{\{a, b\} \subset A} f(a, b) \leqslant n\left(\frac{p^2 - 1}{4}\right).$$

Lời giải. **a)** Ta xét lời giải bằng cách xây dựng bảng như sau:

- Hàng 1 gồm 2 ô: 2011 và k.
- Hàng 2 gồm 2 ô: 1005 và $\left[\frac{k}{2}\right]$.
- Hàng 3 gồm 2 ô: 502 và $\left[\frac{[k/2]}{2}\right]$.

Cứ như thế, ta có 9 hàng tiếp theo mà các số ở cột đầu tiên là $251, 125, 62, 31, 15, 7, 3, 1, 0$ và các số ở cột tiếp theo được xây dựng bằng cách lấy phần nguyên của một nửa số liền trước.

Ta có $f(2011, m)$ đúng bằng số hàng mà trong 2 số trong hàng đó khác tính chẵn lẻ (chú ý rằng với mỗi cách quy định tính chẵn lẻ cho số ở mỗi hàng thì luôn tồn tại k thỏa mãn). Có C_{11}^5 cách chọn ra 5 hàng như thế và đây cũng là đáp số cần tìm.

b) Giả sử p số chọn ra là $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Khi đó:

- $f(a_i, a_j) = f\left(\left[\frac{a_i}{2}\right], \left[\frac{a_j}{2}\right]\right)$ nếu a_i, a_j có cùng tính chẵn lẻ.
- $f(a_i, a_j) = f\left(\left[\frac{a_i}{2}\right], \left[\frac{a_j}{2}\right]\right) + 1$ nếu a_i, a_j khác tính chẵn lẻ.

Ta lại tiếp tục xét bảng như sau (có p cột, và nhiều nhất là $n+1$ hàng, trong đó ở hàng cuối cùng thì các số đều bằng 0).

- Hàng đầu tiên gồm a_p và a_1.
- Hàng thứ hai gồm $\left[\frac{a_p}{2}\right]$ và $\left[\frac{a_1}{2}\right]$ và cứ thế.

Xét hai số $a_i, , a_j$, tại hàng bất kì mà hai phần tử tương ứng của a_i, a_j khác tính chẵn lẻ thì f của hai phần tử đó bằng f của hai phần tử ngay dưới nó cộng 1. Hiển nhiên sau nhiều nhất n bước thì đạt đến $f(0, 0) = 0$.

Do đó, $f(a_i, a_j)$ đúng bằng với số lượng phần tử tương ứng của hai số đó nằm trong cùng một hàng mà khác tính chẵn lẻ.

Xét 1 hàng bất kì gồm p ô (trừ hàng cuối cùng), để có số lượng các số đôi một khác tính chẵn lẻ nhiều nhất thì sẽ có $\frac{p-1}{2}$ số khác tính chẵn lẻ với $\frac{p+1}{2}$ số còn lại. Khi đó qua hàng này, thì $\sum f(a, b)$ tăng thêm $\frac{p^2-1}{4}$. Vì có n cột như vậy nên

$$\max \sum f(a, b) = n\left(\frac{p^2-1}{4}\right).$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán tiếp theo khá điển hình cho phương pháp này xuất hiện trong kì thi chọn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2001 (số 2001 xuất hiện trong bài toán có thể thay bằng một số nguyên dương bất kì nào khác).

Bài toán 19 (VNTST, 2001). *Cho dãy số (a_n) thỏa mãn*

$$0 < a_{n+1} - a_n \leqslant 2001.$$

Chứng minh rằng tồn tại vô số cặp số nguyên dương (p, q) thỏa mãn nếu $p < q$ thì $a_p \mid a_q$.

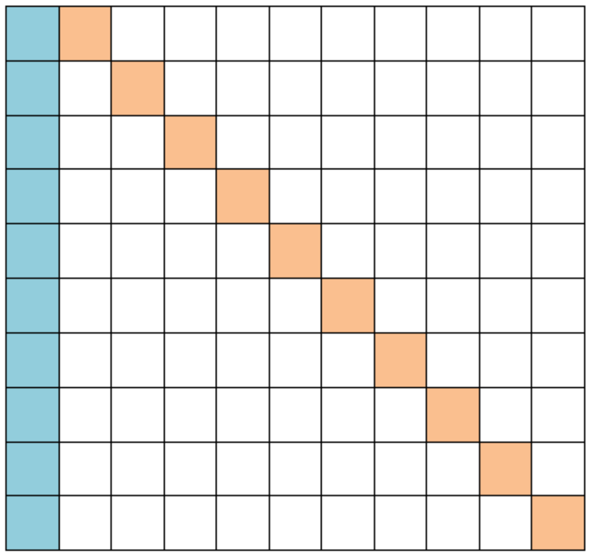
Lời giải. Từ cách xác định dãy, ta thấy rằng số hạng tiếp theo sẽ không lớn hơn số hạng liền trước nó cộng thêm 2001 đơn vị. Như thế, chỉ cần xét 2002 số nguyên dương liên tiếp thì sẽ có ít nhất một số hạng thuộc dãy, đặt số đó là a. Ta xây dựng bảng như sau (với ký hiệu $a_{(i,j)}$ là số ở hàng i, cột j):

- $a_{(1,1)} = a$, $a_{(1,2)} = a + 1$, $\ldots$, $a_{(1,2002)} = a + 2001$;
- $a_{(2,1)} = \prod_{i=1}^{2002} a_{(1,i)} + a_{(1,1)}$, $a_{(2,2)} = \prod_{i=1}^{2002} a_{(1,i)} + a_{(1,2)}$, $\ldots$, $a_{(2,2001)} = \prod_{i=1}^{2002} a_{(1,i)} + a_{(1,2001)}$;
- $\ldots$;
- $a_{(2002,1)} = \prod_{i=1}^{2001} a_{(2001,i)} + a_{(2001,1)}$, $\ldots$, $a_{(2002,2002)} = \prod_{i=1}^{2002} a_{(2001,i)} + a_{(2001,2002)}$.

Bảng này có tất cả 2002 cột và 2002 hàng; trong đó, mỗi số hạng ở hàng thứ 2 trở đi bằng tích của tất cả số hạng ở hàng liền trước nó cộng với số hạng cùng cột với nó. Rõ ràng, trong mỗi hàng, có ít nhất một số hạng thuộc dãy đã cho. Từ đó theo nguyên lí Dirichlet, ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 20. *Petya và Vasya chơi trò chơi như sau: Ban đầu trên bàn có 11 đống sỏi, mỗi đống có 10 viên sỏi. Hai người thay phiên nhau đi, bắt đầu từ Petya. Mỗi một nước đi, người chơi bốc $1, 2$ hoặc 3 viên sỏi, nhưng Petya mỗi lần bốc tất cả các viên sỏi từ một đống sỏi bất kỳ, còn Vasya luôn bốc các viên sỏi từ các đống khác nhau (nếu như Vasya bốc nhiều hơn một viên). Người nào đến lượt mình không đi được nữa sẽ thua. Hỏi ai là người luôn đảm bảo được thắng lợi, không phụ thuộc vào cách đi người kia?*

Lời giải. Ta xếp 11 đống sỏi đó thành bảng 10×11 (11 cột tương ứng với 11 đống sỏi và mỗi đống có 10 viên sỏi) rồi gọi 10 viên sỏi ở cột đầu là bộ A, 10 viên sỏi trên đường chéo của hình vuông tạo bởi 10 cột sau là bộ B.



Ta sẽ chứng minh rằng Vasya có chiến lược thắng bằng cách bốc sỏi như sau: Mỗi khi Petya bốc x viên sỏi ở A thì Vasya sẽ bốc tương ứng x viên sỏi ở B. Khi Petya bốc x viên sỏi ở một trong 10 cột còn lại (theo chiều dọc) thì Vasya sẽ bốc x viên sỏi tương ứng (đối xứng qua đường chéo theo chiều ngang). □

Tiếp theo, ta xét bài toán trong đề thi *VMO 2015* vừa qua. Một bài toán khá dài và rắc rối mà thông qua việc mô hình hóa, ta có thể xử lý một cách nhẹ nhàng hơn rất nhiều.

Bài toán 21 (VMO, 2015)**.** *Có m học sinh nữ và n học sinh nam $(m, n \geqslant 2)$ tham gia một liên hoan song ca. Tại liên hoan song ca, mỗi buổi biểu diễn một chương trình văn nghệ. Mỗi chương trình văn nghệ bao gồm một số bài hát song ca nam-nữ mà trong đó, mỗi đôi nam-nữ chỉ hát với nhau không quá một bài và mỗi học sinh đều được hát ít nhất một bài.*

Hai chương trình được coi là khác nhau nếu có một cặp nam-nữ hát với nhau ở chương trình này nhưng không hát với nhau ở chương trình kia. Liên hoan song ca chỉ kết thúc khi tất cả các chương trình khác nhau có thể có đều được biểu diễn, mỗi chương trình được biểu diễn đúng một lần.

a) *Một chương trình được gọi là lệ thuộc vào học sinh X nếu như hủy tất cả các bài song ca mà X tham gia thì có ít nhất một học sinh khác không được hát bài nào trong chương trình đó. Chứng minh rằng trong tất cả các chương trình lệ thuộc vào X thì số chương trình có số lẻ bài hát bằng số chương trình có số chẵn bài hát.*

b) *Chứng minh rằng ban tổ chức liên hoan có thể sắp xếp các buổi biểu diễn sao cho số các bài hát tại hai buổi biểu diễn liên tiếp bất kỳ không cùng tính chẵn lẻ.*

Lời giải. a) Ta đánh số các học sinh nữ theo thứ tự từ 1 đến m và các học sinh nam từ 1 đến n. Ứng với mỗi chương trình văn nghệ, ta biểu diễn việc ghép cặp của các cặp nam nữ song ca thành một bảng $m \times n$ gồm m hàng n cột. Bảng sẽ được đánh số 1 hoặc 0, trong đó ô nằm ở hàng i cột j được điền số:

- Số 1 nếu bạn học sinh nữ thứ i và bạn học sinh nam thứ j có hát song ca với nhau.
- Số 0 nếu bạn học sinh nữ thứ i và bạn học sinh nam thứ j không hát song ca với nhau.

0	0	1	0	1
1	1	0	0	0
0	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	0	1	1	1

Một bảng gọi là ***tốt*** nếu trên mỗi hàng và mỗi cột đều phải có ít nhất một số 1. Rõ ràng theo đề bài thì tất cả các bảng biểu diễn cho chương trình đều là tốt vì học sinh nào cũng có biểu diễn.

Xét một học sinh X nào đó, giả sử đó là nữ; trường hợp học sinh nam chứng minh tương tự. Chương trình nào đó lệ thuộc học sinh X nếu như trên bảng tương ứng của nó, tồn tại ít nhất 1 cột có đúng một số 1 nằm trên hàng của X, ta gọi bảng này là lệ thuộc X và cột như thế là cột lệ thuộc X.

Ta cần chứng minh rằng, trong các bảng lệ thuộc X, số bảng có số các số 1 chẵn bằng số bảng có số các số 1 lẻ.

Thật vậy, xét trường hợp trong bảng có k cột lệ thuộc X thì rõ ràng $k < n$ vì nếu không, ngược lại, $k = n$ thì toàn bộ các ô trên hàng X đều là 1, còn tất cả các ô còn lại của bảng đều là 0. Do $m \geqslant 2$ nên tồn tại một dòng toàn là số 0, mâu thuẫn.

Với $k < n$, ta bỏ k cột đó ra khỏi bảng thì trên bảng sẽ mất đi đúng k số 1. Mỗi ô trong $n - k$ ô còn lại của hàng X sẽ được điền số 0 hoặc 1 tùy ý vì các cột còn lại đều còn ít nhất một số 1 nữa không thuộc hàng X. Do đó, nếu ta bỏ luôn hàng X đi thì bảng còn lại vẫn là tốt. Suy ra số bảng lệ thuộc X trong trường hợp này sẽ là 2^{n-k} nhân với số lượng bảng tốt có kích thước $(m-1) \times (n-k)$ còn lại. Trong mỗi bảng đó, ta chọn một ô bất kỳ của hàng X và thay đổi số từ $0 \to 1$, $1 \to 0$ thì sẽ dẫn đến thay đổi tính chẵn lẻ của số các số 1 trên bảng. Do đó, rõ ràng tồn tại một song ánh đi từ tập hợp các bảng lệ thuộc X có số các số 1 chẵn đến tập hợp các bảng lệ thuộc X có số các số 1 lẻ.

Do đó, số lượng hai loại bảng này là bằng nhau. Ứng với mỗi $k = \overline{1, n-1}$ và các cách chọn k cột phụ thuộc X thì số lượng bảng có số 1 lẻ và chẵn đều bằng nhau, vì thế nên tổng số bảng có số các số 1 lẻ bằng với bảng có số các số 1 chẵn. Ta có điều phải chứng minh.

b) Tiếp theo, ta đặt $f(m, n)$ và $g(m, n)$ lần lượt là số các bảng tốt $m \times n$ có chẵn và lẻ các số 1. Xét một học sinh nữ tùy ý, đặt là X. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu tồn tại một cột nào đó lệ thuộc X thì theo câu a, số bảng có số các 1 chẵn bằng số bảng có số các số 1 lẻ, đặt giá trị này là $h(m, n)$.
- Nếu không tồn tại cột nào lệ thuộc X thì bỏ hàng tương ứng của X đi, ta còn lại một bảng tốt có $m - 1$ hàng, n cột.

Mặt khác, số trường hợp mà hàng X có số lẻ và có số chẵn ô điền số 1 lần lượt là

$$L = \sum_{a \equiv 1 \pmod 2} C_n^a$$

và

$$C = \sum_{a \equiv 0 \pmod 2,\, a>0} C_n^a \text{ (do hàng X không thể toàn là số 0).}$$

Ta biết rằng $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$ nên với $x = -1$, ta có ngay $L = C + 1$. Chú ý là tính chẵn lẻ của số các số 1 thuộc dòng X sẽ quyết định đến tính chẵn lẻ của bảng còn lại nên ta có công thức truy hồi sau:

$$\begin{cases} f(m, n) = h(m, n) + L \cdot g(m-1, n) + C \cdot f(m-1, n) \\ g(m, n) = h(m, n) + L \cdot f(m-1, n) + C \cdot g(m-1, n) \end{cases}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} f(m, n) - g(m, n) &= (L - C)\left[g(m-1, n) - f(m-1, n)\right] \\ &= g(m-1, n) - f(m-1, n). \end{aligned}$$

Lặp lại quá trình này đến khi số hàng và số cột nhỏ nhất có thể, tức là $m = n = 2$, ta có

$$f(m, n) - g(m, n) = (-1)^{m+n-4}\left[f(2, 2) - g(2, 2)\right].$$

Đếm trực tiếp, ta thấy có $f(2, 2) = 3$, $g(2, 2) = 4$ nên suy ra

$$f(m, n) - g(m, n) = (-1)^{m+n-3}.$$

Từ đó ta thấy rằng số lượng của hai loại bảng không vượt quá 1 và có thể sắp xếp các bảng theo thứ tự chẵn, lẻ đan xen để được điều kiện đề bài. Ta cũng có điều phải chứng minh. □

Để tiến hành xử lý bài toán, ta cần phải tìm cách mô hình hóa nó thành dạng thích hợp, trong đó, mọi ràng buộc đều có thể biểu diễn được. Ở đây, việc lập thành bảng nhị phân cho một chương trình cụ thể như trên có lẽ là lựa chọn sáng sủa, đơn giản nhất. Cách này cũng quen thuộc với hầu hết các học sinh vì bài toán về tô màu bảng, điền số trên bảng cũng tương đối quen thuộc (ít nhất là trong đề kiểm tra của Viện Toán trong tháng 12 vừa qua cũng có một bài như thế).

Bên cạnh đó, ta cũng có thể dùng các cách tiếp cận khác như:

- Dùng bipartite graph hay còn gọi là đồ thị lưỡng phân, đồ thị 2 phe rồi thao tác trên các đỉnh và cạnh.
- Dùng cách chia thành các bộ (nam, nữ, chương trình) rồi đếm bằng 2 cách và tính tổng, hoặc cách nói khác là xét hàm số $f(a, b, c) : (A \times B \times C) \to \{0, 1\}$ với A, B, C lần lượt là tập hợp nữ, nam và các chương trình.

Suy cho cùng, các cách này cũng là song ánh, chuyển đổi cách tiếp cận nhưng bản chất vẫn thế: bảng tốt chính là một ma trận cạnh kề của đồ thị và nó cũng chính là tổng hợp các giá trị mà hàm ở trên nhận được với cùng một giá trị $c \in C$.

Một nhận xét cơ bản nhưng mang tính quyết định trong cả hai ý a và b của bài toán là: Trong các tập hợp con của một tập hợp có $n \geqslant 1$ phần tử, số tập hợp con có lẻ phần tử bằng số tập hợp con có chẵn phần tử và cùng bằng 2^{n-1}. Ý này có thể giải quyết dễ dàng bằng song ánh hoặc đếm trực tiếp và dùng nhị thức Newton.

So sánh với các bài toán trong những năm gần đây, có thể coi đây là bài toán mà phần a hỗ trợ rất tốt cho phần b với việc chia một *"trường hợp lớn"* thành hai trường hợp nhỏ. Phần a vừa có tác dụng gợi ý, vừa đóng góp một phần vào lập luận của phần b. Cái khó của bài toán này có lẽ ở chỗ sử dụng ý tưởng truy hồi quy nạp, và đi đến cùng.

Chúng ta sẽ đặt ra câu hỏi sau đây một cách tự nhiên: "Có tất cả bao nhiêu chương trình trong liên hoan văn nghệ?" Đây là một bài toán không dễ và không cho ra kết quả dạng tường minh nhưng có thể đã có thí sinh nào đó mà trong bài thi của mình, đã cố gắng đếm số lượng này.

Ta có thể giải quyết bằng nguyên lý bù trừ như sau (ta vẫn xét bảng có m hàng và n cột): Ta gọi một bảng mà mỗi hàng đều có ít nhất một số 1 là bảng "tốt theo hàng", gọi tập hợp các bảng này là P. Gọi A là tập hợp các bảng tốt theo hàng nhưng lại có một cột nào đó không có số 1 nào, A_i là tập hợp các bảng tốt theo hàng nhưng cột thứ i lại không có số 1 nào. Ta thấy:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n.$$

Rõ ràng số bảng tốt cần tìm chính là $|P| - |A|$. Trước hết, ta tính số bảng tốt theo hàng. Chú ý rằng mỗi ô có hai cách điền là 0 hoặc 1 nên hàng có n ô sẽ có 2^n cách, tuy nhiên, loại trừ trường hợp tất cả các ô đều là 0 ra thì có $2^n - 1$ cách. Các hàng khác cũng tương tự thế nên có tổng cộng $(2^n - 1)^m$ bảng tốt theo hàng hay $|P| = (2^n - 1)^m$. Do các cột bình đẳng với nhau nên ta có thể đếm đại diện một trường hợp nào đó để suy ra các trường hợp còn lại.

Giả sử có k cột nào đó trong các cột $1, 2, 3, \ldots, n$ là không chứa số 1 nào với $1 \leqslant k < n$. Trên mỗi hàng sẽ còn lại $n - k$ ô để điền vào các số 0 hoặc 1 sao cho có ít nhất một số 1 (do k ô thuộc các cột kia đều được điền số 0), số cách điền cho mỗi hàng là $2^{n-k} - 1$ và cho cả bảng là $(2^{n-k} - 1)^m$. Từ đó, theo nguyên lý bù trừ, ta có

$$|A| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^k \left(2^{n-k} - 1\right)^m.$$

Do đó, ta được số bảng tốt cần tìm là:

$$(2^n - 1)^m - \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^k (2^{n-k} - 1)^m = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k (2^{n-k} - 1)^m.$$

Với tính bình đẳng của m, n, ta cũng suy ra được kết quả sau:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k (2^{n-k} - 1)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^k \left(2^{m-k} - 1\right)^n.$$

Dưới đây là một số bài tập áp dụng:

Bài toán 22. *Cho các số thực dương phân biệt $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Chứng minh rằng tồn tại số thực a sao cho các tổng sau $a + x_1$, $a + x_2$, $a + x_3$, $\ldots$, $a + x_n$ đều là các số vô tỉ.*

Bài toán 23 (Russia, 1996)**.** *Ở Duma, có 1600 đại biểu tham gia vào 16000 ủy ban và mỗi ủy ban có đúng 80 người tham gia. Chứng minh rằng, trong các ủy ban trên, có 2 ủy ban nào đó mà có ít nhất 4 đại biểu tham gia chung.*

Bài toán 24 (CMO, 1996)**.** *Có 8 ca sĩ tham gia văn nghệ với tổng cộng m buổi hòa nhạc. Mỗi buổi có 4 ca sĩ tham gia và số lần tham gia của mỗi cặp ca sĩ là như nhau. Tính giá trị nhỏ nhất của m.*

2.3. Chuyển đổi mô hình

Trên thực tế, nhiều bài toán có thể có sự chuyển đổi qua lại giữa việc phát biểu dạng tập hợp như trên và việc xây dựng mô hình. Điển hình như bài toán trong đề VMO ở trên có thể đã xuất phát từ một bài toán trong đồ thị nào đó để xây dựng theo tình huống thực tế ở trên. Việc chuyển đổi mô hình đó có tinh tế hay không tùy thuộc vào tình huống sử dụng tương đồng bao nhiêu so với bài toán gốc.

Xuất phát từ bài toán quen thuộc: *"Chứng minh rằng không thể lát một nền nhà 10×10 bằng cách viên gạch 1×4."*

Cách giải của bài này là tô màu các ô có dạng (lẻ, lẻ) trong bảng, như thế thì tô được 25 ô. Tuy nhiên, mỗi viên gạch 1×4 như trên phải chiếm 2 ô được tô màu, tức là số ô được tô màu nằm trong đó phải chẵn. Điều mẫu thuẫn này cho thấy ta không thể lát gạch nền nhà theo cách trên được.

Bài toán này có thể thay số 10 (số chẵn nhưng không chia hết cho 4) thành các số tương tự như $50, 2010, 2014, \ldots$ thì vẫn cho câu trả lời tương tự với cách giải tương tự.

Ta thử thay đổi bài toán theo kiểu nối các điểm trong mặt phẳng để thu được bài toán sau:

Bài toán 25. *Trong mặt phẳng, cho tập hợp A gồm 2010^2 điểm phân biệt được đánh số từ 1 đến 2010^2 sao cho ba điểm bất kì nào trong chúng cũng không thẳng hàng. Một tứ giác (lồi hoặc lõm) được gọi là "đẹp" nếu các đỉnh của nó thuộc A và được đánh số bằng 4 số thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:*

- *Đó là 4 số tự nhiên cách nhau 2010 đơn vị.*
- *Đó là 4 số tự nhiên liên tiếp và nếu trong đó có chứa số chia hết cho 2010 thì số đó phải là lớn nhất.*

Nối tất cả các điểm thuộc tập hợp A lại với nhau sao cho điểm nào thuộc A cũng thuộc đúng một tứ giác. Tìm số lớn nhất tứ giác "đẹp" được tạo thành.

Rõ ràng cách nối các điểm như trên có thể được mô phỏng bằng 4 số nằm trên một viên gạch 1×4 như trên.

Ta có thể giải chi tiết bài toán này như sau:

Lời giải. Xét một bảng ô vuông gồm 2010×2010 ô vuông con được điền các số theo thứ tự từ trên xuống và từ trái sang (xem trang tiếp) như sau:

1	2	3	...	2009	2010
2011	2012	2013	...	4019	4020
4021	4022	4023	...	6029	6030
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	2010^2

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng không thể chia tất cả 2010^2 điểm đã cho thành các tứ giác "đẹp" được. Rõ ràng 4 số trên các đỉnh của các tứ giác "đẹp" tương ứng với 4 số bị che đi trên bảng ô vuông khi đặt một mảnh bìa hình chữ nhật kích thước 1×4 vào đó. Ta sẽ chứng minh rằng không thể che hết toàn bộ bảng ô vuông này bằng các hình chữ nhật 1×4. Thật vậy, ta tô màu các ô vuông nằm ở cột chẵn và hàng chẵn. Do bảng có 2010^2 ô vuông nên số ô vuông bị tô màu là $\frac{2010^2}{4}$, là số lẻ.

Giả sử ngược lại rằng ta có thể lấp kín được cả bảng ô vuông bằng các mảnh bìa. Khi đó, mỗi mảnh bìa sẽ che đi hoặc hai ô vuông hoặc không có ô vuông nào của bảng ô vuông, tức là luôn có một số chẵn ô vuông bị che đi; do đó, số ô vuông bị che đi trên bảng là một số chẵn. Từ đó ta thấy có mâu thuẫn. Do đó, không thể che hết bảng ô vuông này bằng các hình chữ nhật 1×4 được.

Bây giờ, gọi k là số tứ giác đẹp lớn nhất cần tìm thì $k \leqslant 1010024$. Ta sẽ chứng minh $k = 1010024$ bằng cách chỉ ra cách dùng các mảnh bìa che kín bảng ô vuông. Thật vậy, chia bảng ô vuông thành hai phần:

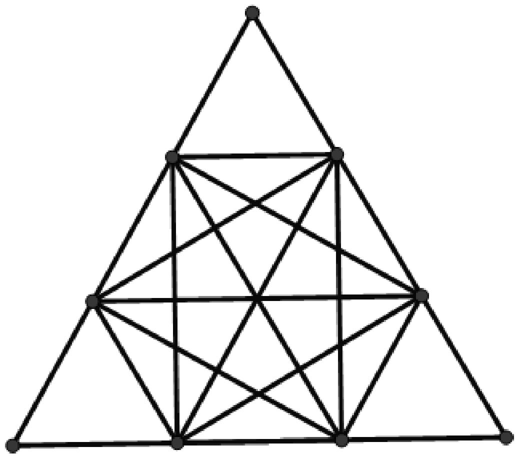
- Phần 1 gồm 2008 cột đầu, ta xếp các mảnh bìa theo các hàng, mỗi hàng có đúng 502 mảnh bìa. Khi đó, ta sẽ có thể che kín hết phần 1 bởi các mảnh bìa.

- Phần 2 gồm 2 cột cuối, ta xếp nối tiếp các mảnh bìa từ trên xuống dưới thì cuối cùng sẽ còn lại một ô vuông 2×2 ở góc dưới cùng của bảng.

Như vậy, ta dùng 1010024 mảnh bìa che được tối đa $2010^2 - 4$ ô vuông của bảng. Từ đó, ta thấy, số tứ giác "đẹp" lớn nhất cần tìm là $k = 1010024$. □

Chúng ta thử xét bài toán sau: *Có bao nhiêu cách lát một hình chữ nhật kích thước $2 \times n$ bởi các viên gạch: hình chữ* I (*hình chữ* *nhật kích thước 1×2) và hình chữ L (hình vuông 2×2 bỏ đi một ô)? Nếu thay hình chữ nhật $2 \times n$ bằng một hình khác thì số cách lát thu được sẽ là bao nhiêu?*

Qua đó, ta thấy rằng việc chuyển đổi các mô hình, từ các điểm, các hình trong mặt phẳng đến các số trong một tập hợp và ngược lại giúp cho bài toán có một dáng vẻ mới khá thú vị. Chúng ta thử nhắc đến một bài toán trong kì thi IMO 1983: *Tô tất cả các điểm nằm trên cạnh của tam giác đều bởi hai màu là xanh và đỏ. Hỏi với mọi cách tô màu như thế, có luôn tồn tại một tam giác vuông có ba đỉnh được tô cùng màu hay không?*



Bài toán này có thể giải quyết không quá khó khăn bằng cách xét các điểm chia các cạnh của tam giác ABC theo tỉ số $2:1$, có khá nhiều tam giác vuông được tạo thành từ 6 điểm này và nhờ vậy mà ta có thể áp dụng nguyên lí Dirichlet để giải quyết bài toán. Tuy nhiên, nếu chúng ta thay đổi cách phát biểu thành tọa độ trong mặt phẳng thì bài toán sẽ thú vị hơn nhiều.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, một tam giác đều ABC có tọa độ của các đỉnh lần lượt là $A\left(0, \sqrt{3}\right)$, $B\left(-1, 0\right)$, $C\left(1, 0\right)$ thì phương trình đường thẳng chứa các cạnh AB, AC có thể viết là $\left|\sqrt{3}x\right| + y = \sqrt{3}$, đường thẳng chứa cạnh BC trùng với trục Ox. Hơn nữa, rõ ràng độ dài của BC có thể thay bằng một số bất kì nào khác nên ta có bài toán sau:

Bài toán 26. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét phần mặt phẳng giới hạn bởi đồ thị của $y = \sqrt{3}\left(a - |x|\right)$, trong đó $a > 0$ và trục hoành. Gọi S là tập hợp các điểm nằm trên biên của miền đó.*

Chứng minh rằng với mọi cách chia S thành hai tập hợp con rời nhau thì luôn tồn tại ba điểm là đỉnh của một tam giác vuông.

Cách giải bài này cũng hoàn toàn tương tự như bài kia. Vấn đề mấu chốt ở đây là nhìn nhận được bao lồi ở trên thực chất là một tam giác đều và cách chia tập con cũng giống như việc tô các điểm bởi hai màu.

Xuất phát từ bài toán phân hoạch số nguyên: *"Hỏi có bao nhiêu cách biểu diễn số nguyên dương n thành tổng có tính thứ tự các của các số nguyên dương không vượt quá k?"*, ta có thể phát biểu thành một bài toán khá thú vị như sau:

Bài toán 27. *Cho một cây k-phân đầy đủ mà mỗi đỉnh không phải lá đều có đúng k đỉnh con. Mỗi cạnh nối 1 đỉnh với các đỉnh con của nó được đánh số từ 1 đến k. Hỏi có bao nhiêu đường đi từ gốc đến lá sao cho tổng các số đánh trên các cạnh thuộc đường đi đúng bằng n?*

Tất nhiên có nhiều cách để chuyển mô hình mà cách đặc sắc, thú vị nhất vẫn là chuyển đổi theo graph, tuy nhiên, đó là một câu chuyện dài khác. Ở đây, ta chỉ xét một số mô hình chuyển đổi và bài toán mô phỏng một góc độ nào đó của vấn đề này.

3. Khai thác và mở rộng bài toán

Trong phần này, ta sẽ xét một số bài toán đơn giản và từ đó phát triển lên thành các bài khó dần dần hoặc các dạng liên quan. Khai thác các bài toán luôn giúp ta chủ động hơn trong quá trình xử lý các bài toán, không sợ gặp các dạng Toán lạ và có thể tìm được các liên kết giữa bài toán mới với những hiểu biết có sẵn của mình.

Bài toán 28 (Một số vấn đề về tô màu và điền số)**.**

1) *Bàn cờ 7×7 có các ô được điền các số là -1, 1. Hỏi có xảy ra trường hợp tổng các số ở các hàng, cột và đường chéo đều phân biệt hay không?*

Không thể xảy ra do giá trị của các tổng nhận được là từ -7 đến 7, có 15 số; trong khi các giá trị cần phân biệt của 7 hàng, 7 cột và 2 đường chéo thì có đến 16.

2) *Câu hỏi tương tự nếu không tính hai đường chéo.*

Ta chứng minh được trường hợp trên cũng không thể xảy ra do các tổng trên chỉ nhận giá trị lẻ từ -7 đến 7. Rõ ràng có tất cả 8 giá trị như thế là -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7.

3) *Tương tự 2) nhưng tìm số giá trị phân biệt lớn nhất mà các tổng của hàng và của cột có thể nhận được.*

Ta sẽ xây dựng một bảng để chỉ ra rằng tồn tại một bảng số có thể nhận 8 giá trị đã liệt kê ở trên như sau:

1	1	1	1	1	1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1

Ta thấy rằng 6 cột đầu nhận các giá trị lẻ từ 7 đến -3, cột cuối nhận giá trị là -7; trong khi đó, hàng cuối nhận giá trị là -5 nên thỏa mãn.

4) *Câu hỏi tương tự 3) nhưng thay bảng 7×7 bởi 2015×2015.*

Từ bài toán trên, ta dự đoán kết quả là 2016. Vấn đề là phân bố các số thích hợp sao cho đảm bảo nhận đủ 2016 số.

Ta có thể áp dụng ý tưởng xây dựng cho bảng 7×7 vào bài toán này; cụ thể là cho các cột nhận các giá trị thích hợp từ 2015 đến -2011, thêm số -2015 ở cột cuối. Chú ý rằng số còn lại là -2013 tạo thành bởi 2014 số -1 và 1 số 1 và được sắp xếp cho xuất hiện ở hàng cuối bằng cách đưa các số -1 ở mỗi cột xuống cuối là hoàn tất.

5) *Vẫn là vấn đề điền số vào bảng 7×7 nhưng giờ ta sẽ quan tâm đến tích. Hỏi có thể xảy ra trường hợp tích các số thuộc các hàng đều là 1 và các cột đều là -1 hay không?*

Không được do nếu lấy tích của các hàng nhân lại với nhau thì được $A = -1$; còn lấy tích của các số của các cột nhân lại với nhau thì được $B = 1$. Tuy nhiên, A, B lại đều là tích của tất cả các số trên bảng nên vô lý.

6) *Câu hỏi tương tự 5) nhưng thay điều kiện thành tích mỗi hàng và mỗi cột đều là 1. Hỏi có bao nhiêu bảng như thế?*

Ta thấy rằng trong tình huống này, bảng là tồn tại (vì ít nhất, ta có bảng gồm toàn số 1). Quan sát cách điền vào bảng với kích thước nhỏ hơn, chẳng hạn 3×3, 4×4, $\ldots$ ta thấy rằng việc điền số chỉ phụ thuộc vào bảng con ở góc trên bên trái; hàng cuối và cột cuối đều có thể điền một cách xác định và duy nhất (chú ý rằng ô ở cuối cùng điền được). Từ đây suy ra số bảng cần tìm là 2^{36} (do mỗi ô của bảng ở trên có hai cách điền là 1 hoặc -1).

7) (Đề thi thử VMO Viện Toán) *Cho bảng $m \times n$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu các ô vuông của bảng sao cho số lượng ô được tô ở mỗi cột và mỗi hàng đều chẵn?*

Rõ ràng bài này với bài trên là một, chẳng qua khác nhau ở cách xây dựng vấn đề. Bằng cách lặp lại lập luận tương tự, ta có đáp số là $2^{(m-1)\times(n-1)}$.

8) (Colombia MO) *Có bao nhiêu cách điền số vào bàn cờ kích thước 8×8 bởi các số -1 và 1 sao cho tổng các số ở các hình vuông con 2×2 đều bằng 0?*

Tương tự ý tưởng của hai bài trên nhưng ở đây, yếu tố quyết định không phụ thuộc vào bảng ô vuông như trên nữa mà lại là một hàng nào đó của bảng, chẳng hạn là hàng đầu tiên. Nếu hàng đó có các số $-1, 1$ xen kẽ nhau thì rõ ràng các hàng còn lại cũng sẽ được điền tương tự hoặc ngược lại và như thế thì mỗi hàng sẽ có hai cách điền, ta sẽ có 2^8 cách điền.

Trong trường hợp tồn tại hai số giống nhau đứng cạnh nhau thì dễ thấy các số còn lại xác định duy nhất theo hàng đó, ở đây ta có $2^8 - 2$ cách điền (loại đi hai cách điền xen kẽ). Vậy tổng cộng có $2^8 + 2^8 - 2 = 510$ cách điền.

Còn lại là hai bài tập tự luyện:

9) *Có bao nhiêu cách điền số vào bàn cờ 4×4 bởi số -1 và 1 sao cho tổng các số ở mỗi hàng và mỗi cột đều bằng 0?*

10) (AIME, 2007) *Có bao nhiêu cách tô màu 12 ô của bảng 6×4 sao cho mỗi hàng có hai ô và mỗi cột có ba ô được tô?*

Bài toán 29 (Về tập con và hoán vị)**.**

1) *Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. Hỏi có bao nhiêu tập con T của S sao cho T không chứa hai phần tử a, b mà $|a - b| = n$?*

Ta chia các số vào bảng như bên dưới:

1	2	3	$\ldots$	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\ldots$	$2n$

Rõ ràng mỗi cột sẽ cho ta 3 cách tạo tập con là: chỉ chọn số ở trên, chỉ chọn số ở dưới hoặc không chọn số nào cả. Chú ý thêm rằng chúng có một yếu tố quan trọng là các cột độc lập với nhau nên đáp số bài toán sẽ là 3^n.

2) *Câu hỏi tương tự nếu thay điều kiện là $a + b = 2n + 1$.*

Xây dựng bảng tương tự nhưng đổi việc ghép cặp trong các cột lại (các số i và $2n+1-i$ sẽ được ghép với nhau), đáp số bài toán vẫn là 3^n.

3) *Câu hỏi tương tự 1) nếu thay $2n$ bởi số n tùy ý, cụ thể là: Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots n\}$. Hỏi có bao nhiêu tập con T của S sao cho T không chứa hai phần tử a, b mà $|a - b| = \left[\frac{n}{2}\right]$?*

Ta xét hai trường hợp:

- Nếu $n = 2m$ là số chẵn thì tương tự 1, đáp số là 3^m.
- Còn nếu $n = 2m + 1$ là số lẻ thì rõ ràng các số trong bộ $(1, m+1, 2m+1)$ sẽ có liên hệ với nhau; ta thấy có 5 cách chọn cho các số trong bộ này: chọn từng số hoặc không chọn số nào hoặc chọn số 1 và $2m + 1$; các số còn lại vẫn như cũ. Đáp số là $5 \cdot 3^{m-1}$.

4) *Câu hỏi tương tự 2) nếu thay $2n$ bởi n tùy ý.*

Trong trường hợp chẵn, đáp số vẫn như cũ; nếu $n = 2m+1$ lẻ, ta thấy số $m+1$ có được chọn vào tập con hay không cũng không ảnh hưởng nên đáp số là $2 \cdot 3^m$.

5) *Giải lại câu đầu tiên bằng cách sử dụng nguyên lý bù trừ.*

Ta thấy rằng ý tưởng chia bảng như trên là một dạng xây dựng mô hình khá tốt. Tuy nhiên, ta hoàn toàn có thể sử dụng một cách đếm tự nhiên là dùng nguyên lý bù trừ để thực hiện công việc này.

Gọi A là tập hợp các tập con chứa ít nhất một cặp số (a, b) mà $|a-b| = n$. Gọi A_i là tập con có chứa cặp $(i, i+n)$ với $1 \leqslant i \leqslant n$. Khi đó, ta có

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n.$$

Theo nguyên lý bù trừ thì:

$$|A| = \sum_{\text{1 set}} |A_i| - \sum_{\text{2 sets}} |A_i \cap A_j| + \sum_{\text{3 sets}} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

Tuy nhiên, do tính bình đẳng nên ta chỉ cần tính đại diện một tập hợp nào đó. Ta có $|A_1| = 2^{2n-2}$ (do đã cố định hai số 1 và $n+1$ vào tập con, các phần tử còn lại có 2 cách chọn là thuộc tập con hay là không). Tương tự $|A_1 \cap A_2| = 2^{2n-4}$ và cứ như thế. Khi đó, số tập hợp con cần tính sẽ là:

$$2^{2n} - |A| = 2^{2n} - C_n^1 2^{2n-2} + C_n^2 2^{2n-4} - C_n^3 2^{2n-6} + \cdots + C_n^n (-1)^n 2^0.$$

Chú ý rằng tổng cuối chính là khai triển nhị thức Newton của $(2^2-1)^n = 3^n$.

6) (IMO, 1989) *Câu hỏi tương tự nếu thay tập con bởi hai phần tử liên tiếp của hoán vị. Chứng minh rằng số hoán vị này nhiều hơn số hoán vị không thỏa mãn tính chất tương ứng.*

Ta cũng thực hiện việc đặt tương tự trên và được kết quả là $C_n^1 \cdot 2 \cdot (2n-1)! - C_n^2 \cdot 2^2 \cdot (2n-2)! + C_n^3 \cdot 2^3 \cdot (2n-3)! - \cdots$

Tuy nhiên, để đánh giá trực tiếp cho tổng này là không dễ. Ta có thể "cắt" tổng ngay đoạn trừ và đưa về đánh giá:

$$C_n^1 \cdot 2 \cdot (2n-1)! - C_n^2 \cdot 2^2 \cdot (2n-2)! > \frac{1}{2} \cdot (2n!).$$

Tuy nhiên, điều này có thể được thực hiện dễ dàng bằng các biến đổi đại số.

7) *Với $n \geqslant 2$, tính số hoán vị của $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ của các số $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ thỏa $a_{i+1} - a_i \leqslant 1$ với mọi $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$.*

Gọi S_n là số các hoán vị dạng này. Giả sử $a_i = n$ thì do điều kiện $a_{i+1} - a_i \leqslant 1$ nên $a_{i-1} = n-1$ và cứ thế, suy ra $a_1 = n-i$, các số còn lại là $1, 2, 3, \ldots, n-i-1$ tạo thành hoán vị thỏa mãn điều kiện đã cho nhưng có $n-i-1$ phần tử và là S_{n-i-1}. Do $1 \leqslant i \leqslant n$ nên ta có

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} S_{n-i} = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{n-1}.$$

Ta cũng có $S_1 = 0$, $S_2 = 2$ nên bằng quy nạp, ta chứng minh được $S_n = 2^{n-1}$ với mọi $n \geqslant 1$.

8) (Đề chọn đội tuyển KHTN, 2010) *Câu hỏi tương tự 7) nhưng bổ sung thêm điều kiện $a_i \neq i$ với mọi $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.*

Đây là một bài khó và để tìm được đáp số đúng cũng vô cùng rắc rối. Để giải quyết, ta sẽ đếm các hoán vị thỏa mãn điều kiện ở bài 7) nhưng không thỏa mãn điều kiện ở bài 8), đặt là điều kiện T, tức là trong hoán vị có ít nhất một chỉ số i mà $a_i = i$.

Ta thấy rằng nếu tồn tại $i \neq j$ mà $a_i = i$, $a_j = j$ thì với mọi k mà $i \leqslant k \leqslant j$ thì $a_k = k$. Gọi x, y lần lượt là số nhỏ nhất, lớn nhất thỏa mãn $a_i = i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ với $1 \leqslant x < y \leqslant n$. Ta nhận xét rằng với các số a_k mà $k < x$ thì chỉ có thể nhận các giá trị từ $y+1$ đến n; tương tự, với các số a_k mà $k > y$ thì chỉ có thể nhận các giá trị từ 1 đến $x-1$.

Khi đó, dễ thấy rằng nếu hai đại lượng $x-1$, $n-y$ khác nhau thì không thể tồn tại cách sắp xếp nên ta phải luôn có $x-1 = n-y$ hay $x+y = n+1$.

Với mỗi x mà $1 \leqslant x \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$, tương tự cách tính số hoán vị thỏa mãn điều kiện bài 7) ở trên, ta thấy số hoán vị thỏa mãn là $2^{2(x-2)}$ nếu $x \geqslant 2$ và bằng 1 nếu $x = 1$. Khi đó, số hoán vị thỏa mãn điều kiện T là:

$$1 + \sum_{i=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} 2^{2(x-2)} = 1 + \sum_{i=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} 4^{x-2} = 1 + \frac{4^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} - 1}{3} = \frac{4^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} + 2}{3}.$$

Vậy số hoán vị cần tìm chính là:

$$2^{n-1} - \frac{4^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} + 2}{3}.$$

9) (VMO, 2009) *Cho số nguyên dương $n > 1$. Kí hiệu T là tập hợp $2n$ số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có bao nhiêu tập con S của T thỏa mãn tính chất: trong S không tồn tại hai số a, b mà $|a - b| \in \{1, n\}$?*

Đáp số của bài toán này là:

$$\frac{(3+\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)^n + (3-\sqrt{2})\left(1-\sqrt{2}\right)^n - 2(-1)^n}{4}.$$

Bài toán 30 (Một số bài toán đếm hình học)**.**

1) *Cho bảng ô vuông 6×6. Có bao nhiêu hình chữ nhật?*

Chỉ cần chọn ra 2 hàng, 2 cột trong bảng là được hình chữ nhật, đáp số là $\left(C_6^2\right)^2$.

2) *Câu hỏi tương tự nếu thay hình chữ nhật bởi hình vuông.*

Đếm các loại hình vuông kích thước 1×1, 2×2, $\ldots$, 6×6 để phát hiện ra quy luật về số lượng của chúng là 6^2, 5^2, 4^2, $\ldots$, 1^2 rồi cộng lại.

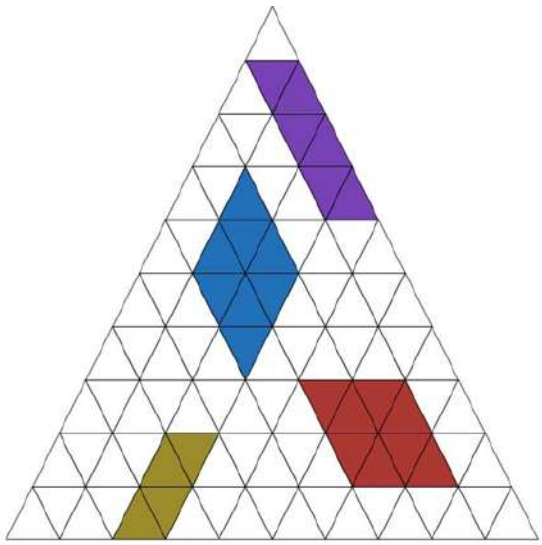
3) *Câu hỏi tương tự 1) nếu hình chữ nhật thay bởi tam giác vuông, tam giác vuông cân.*

Chú ý số lượng hình vuông gấp 4 lần số tam giác vuông cân và số lượng hình chữ nhật cũng gấp 4 lần số tam giác vuông thông thường.

4) *Câu hỏi tương tự nếu thay bởi hình vuông có cạnh không nhất thiết song song với cạnh của hình vuông ban đầu.*

Chú ý rằng sẽ có một số hình vuông nghiêng, chúng sẽ nội tiếp trong các hình vuông thông thường. Ta chỉ cần tính xem với mỗi hình vuông thông thường, có tất cả bao nhiêu hình vuông nghiêng là có được câu trả lời.

5) *Cho lưới tam giác như hình vẽ bên dưới. Hỏi trong đó có bao nhiêu hình bình hành?*



Ta chiếu các điểm lên một đường thẳng song song với 1 trong các cạnh của tam giác đã cho, giả sử là cạnh BC. Đếm các hình bình hành có 2 cạnh song song với 2 cạnh còn lại của tam giác ban đầu, giả sử là AB, AC bằng cách chọn ra 4 điểm theo thứ tự trên đường thẳng đã chiếu.

Rõ ràng với tam giác có cạnh được chia thành n phần thì số cách sẽ là C_{n+2}^4 nên tổng cộng có tất cả $3C_{n+2}^4$.

6) *Cũng lưới tam giác trên, hỏi có bao nhiêu tam giác đều?*

Đếm bằng truy hồi và bù trừ, đặt S_n là số tam giác trong trường hợp chia cạnh thành n phần thì ta có công thức là:

$$\begin{cases} S(2n) = 3 \cdot S(2n-1) - 3 \cdot S(2n-2) + S(2n-3) + 2 \\ S(2n+1) = 3 \cdot S(2n) - 3 \cdot S(2n-1) + S(2n-2) + 1 \end{cases}$$

Công thức trên có thể hiểu dễ dàng là việc thu nhỏ số cạnh lại 1 đơn vị thì tương ứng với mỗi đỉnh, ta có 1 tam giác; khi thực hiện cộng số tam giác ở các đỉnh thì có phần chung, trừ ra, rồi lại bù vào. Sau cùng, ta cộng thêm tam giác lớn ở ngoài. Tuy nhiên, chú ý rằng trong trường hợp số chẵn, tam giác tạo bởi trung điểm 3 cạnh chưa được xét vào nên thay vì cộng 1, ta cộng thêm 2. Đáp số bài toán sẽ là:

$$\begin{cases} S(n) = \dfrac{n(n+2)(2n+1)}{8}, & n \equiv 0 \pmod 2 \\ S(n) = \dfrac{n(n+2)(2n+1)-1}{8}, & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

7) *Câu hỏi tương tự 6) nhưng cho phép vẽ thêm cạnh.*

Đáp số của bài toán này khá thú vị. Số tam giác đều bằng $\frac{1}{3}$ số hình bình hành và là C_{n+2}^4.

8) *Khi chia một đa giác lồi hoặc lõm có n cạnh thành các tam giác thì có bao nhiêu tam giác tổng cộng?*

Đáp số bài toán là $n-2$. Có thể chứng minh bằng quy nạp.

9) *Hỏi có bao nhiêu cách chia một đa giác lồi thành các tam giác một cách tùy ý?*

Đây là một bài toán khá rắc rối, chứng minh bằng quy nạp và đáp số chính là số Catalan nổi tiếng $\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$.

10) *Câu hỏi tương tự 9) nhưng thay tam giác tùy ý bởi tam giác có ít nhất một cạnh là cạnh của đa giác ban đầu?*

CÁC VẤN ĐỀ CỔ ĐIỂN VÀ HIỆN ĐẠI

Trần Nam Dũng (*ĐHKHTN, ĐHQG Tp HCM*)

Chuyên mục này dành cho các vấn đề cổ điển và hiện đại được trình bày dưới dạng các bài toán xâu chuỗi. Đó có thể là chuỗi các bài để giải bài toán đẳng chu, chứng minh đẳng thức Euler kỳ hiệu $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$, một chuỗi bài toán vận trù... Cách trình bày xuất phát từ những vấn đề đơn giản, dễ hiểu, những khái niệm mới sẽ được định nghĩa luôn trong bài để có thể đọc tương đối độc lập. Và mỗi một chuỗi bài sẽ nêu ra những vấn đề nhất định, có thể là giải quyết một bài toán kinh điển hay nêu ra những giả thuyết mới, những vấn đề mới.

1. Phương trình Diophant 1

Đề toán đề nghị cho Hội nghị mùa hè của cuộc thi toán giữa các thành phố năm 2013, đề xuất bởi S.Grigoriev, K.Kuyumzhiyan, A.Petukhov, A.Semchenkov.

Định lý 1 (Gauss)**.** *Một số nguyên dương có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của ba bình phương khi và chỉ khi nó có không có dạng* $4^n(8m-1)$.

Bài toán 1. Chứng minh rằng các phương trình

$$2x^2 + 2xy - y^2 = 1, \tag{1}$$
$$x^2 - xy + y^2 = 2 \tag{2}$$

không có nghiệm nguyên.

Bài toán 2. Chứng minh rằng phương trình:

$$x^2 + 1000xy + 1000y^2 = 2001$$

có vô số nghiệm nguyên.

Bài toán 3. Chứng minh rằng các phương trình:

$$x^2 - 2y^2 = 1, \quad (1)$$
$$x^2 - 3y^2 = 1, \quad (2)$$
$$x^2 - 6y^2 = 1 \quad (3)$$

có vô số nghiệm nguyên.

Bài toán 4. Cố định số nguyên tố lẻ p. Chứng minh rằng phương trình $x^2 - py^2 = -1$ có nghiệm nguyên khi và chỉ khi p có số dư là 1 khi chia cho 4.

Bài toán 5. Chứng minh rằng với mọi m, số nghiệm của các phương trình sau là như nhau:

$$x^2 - xy + y^2 = m, \quad (1)$$
$$3x^2 + 9xy + 7y^2 = m. \quad (2)$$

Bài toán 6. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}$, phương trình:

$$x^2 + y^2 = n$$

có nghiệm nguyên khi và chỉ khi nó có nghiệm hữu tỷ.

Bài toán 7. Hãy nêu ví dụ một phương trình bậc hai với hệ số nguyên, có nghiệm hữu tỷ nhưng không có nghiệm nguyên.

Bài toán 8. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương a, b, tồn tại vô số các số tự nhiên m sao cho phương trình $ax^2 + by^2 = m$ không có nghiệm nguyên.

Bài toán 9. Chứng minh rằng với mọi số nguyên m phương trình $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = m$ không có nghiệm nguyên.

2. Các dạng toàn phương

Một đa thức thuần nhất bậc hai của n biến số được gọi là một dạng toàn phương. Theo định nghĩa, dạng toàn phương f đại diện số m nếu phương trình $f = m$ có nghiệm nghuyên khác 0 (tức là nghiệm mà trong đó không phải tất cả các biến đều bằng 0, lưu ý, không phải dạng toàn phương nào cũng đại diện 0). Hai dạng toàn phương được gọi là tương đương nếu chúng cùng đại diện một tập hợp số.

Bài toán 10. Hãy mô tả tất cả các số nguyên, được đại diện bởi các dạng x^2+y^2, x^2-y^2 và x^2+xy+y^2.

Bài toán 11. Chứng minh rằng các dạng toàn phương: $f(x, y)$, $f(x-y, y)$, $f(x, y-x)$, $f(-x, y)$, $f(x, -y)$ đôi một tương đương nhau.

Bài toán 12.

1) Chứng minh rằng các dạng toàn phương x^2+y^2, x^2+xy+y^2 không tương đương.

2) Chứng minh rằng các dạng toàn phương $4x^2-6xy+5y^2$ không tương đương với dạng toàn phương ax^2+by^2 với mọi số nguyên a và b.

Định nghĩa 1. *Dạng toàn phương được gọi là:*

1) *Xác định dương nếu nó chỉ đại diện cho các số dương.*

2) *Xác định không âm nếu nó chỉ đại diện cho các số $\geqslant 0$.*

3) *Xác định âm nếu nó chỉ đại diện cho các số âm.*

4) *Không xác định nếu nó đại diện cả số dương lẫn số âm.*

Bài toán 13. Hãy nêu ví dụ một dạng xác định không âm mà không phải xác định dương.

3. Số học mở rộng: số p-adic

Định lý 2 (Legendre)**.** *Mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng bình phương của 4 số nguyên.*

Bài toán 14. Cho m và n là các số nguyên không chính phương. Nếu phương trình:

$$z^2-mx^2-ny^2=0 \tag{1}$$

có nghiệm hữu tỷ khác 0 thì các điều kiện sau được thỏa mãn:

1) Ít nhất một trong hai số m, n dương.

2) m là thặng dư bình phương theo modulo n.

3) n là thặng dư bình phương theo modulo m.

Bài toán 15. Hãy đưa định lý tổng quát về dạng toàn phương hai biến về lời giải của phương trình dạng (1).

Định nghĩa 2. *Biểu thức dạng:*

$$a_{-k}p^{-k} + a_{-k+1}p^{-k+1} + \cdots + a_n p^n + \cdots \tag{2}$$

(k *là số nguyên bất kỳ,* $a_i \in \mathbb{Z}$) *được gọi là số* p*-adic. Nếu* $k \leqslant 0$*, thì ta gọi (2) là số nguyên* p*-adic.*

Bài toán 16. Chứng minh rằng phương trình với hệ số nguyên $f = 0$ có nghiệm trong $\mathbb{Z}_p$ nếu và chỉ nếu nó có nghiệm trong hệ thặng dư modulo p^n với mọi $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Bài toán 17. Khi nào số p-adic dạng (2) bằng 0?

Bài toán 18. Chứng minh rằng tích của hai số p-adic khác 0 không bằng 0.

Bài toán 19. Chứng minh rằng $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ với mọi số nguyên tố p (chứng minh rằng với mọi cặp số nguyên (m, n) khác 0, tồn tại số p-adic x sao cho $nx = m$).

Bài toán 20. Chứng minh rằng -1 là số chính phương trong tập hợp các số p-adic khi và chỉ khi p đồng dư 1 theo modulo 4.

Bài toán 21. Hãy mô tả các số p-adic là số chính phương.

Bài toán 22. Chứng minh rằng mọi số 3-adic khác 0 có dạng x^2, hay $2x^2$, hay $3x^2$, hay $6x^2$ với số 3-adic x nào đó.

Bài toán 23. Cho p là số nguyên tố lẻ, còn $x_1, \ldots, x_5$ là các số p-adic khác 0. Chứng minh rằng $\frac{x_i}{x_j}$ là số chính phương trong tập các số p-adic với i, j nào đó $(1 \leqslant i < j \leqslant 5)$.

Bài toán 24. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố lẻ p tồn tại các số p-adic khác 0 là $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}$ sao cho:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{p-1}^2 + 1 = 0.$$

Bài toán 25. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ có đúng hai nghiệm trong tập các số nguyên 7-adic.

Bài toán 26. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 = -1$ có nghiệm trong các số p-adic với mọi số nguyên tố lẻ p.

Định lý 3 (Nguyên lý Minkowsky-Hasse). *Phương trình bậc hai $f = 0$ của một số biến có nghiệm hữu tỷ khi và chỉ khi nó đồng thời có nghiệm trong:*

- *Tập hợp các số thực.*
- *Tập hợp các số p-adic ($:= \mathbb{Q}_p$) với mọi số nguyên tố p.*

Bài toán 27. Chứng minh nguyên lý Minkowsky-Hasse cho phương trình 1 hoặc 2 ẩn số.

Định nghĩa 3. *Đặt $(a, b)_p = 1$, nếu $z^2 - ax^2 - by^2 = 0$ có nghiệm p-adic, và đặt $(a, b)_p = -1$ trong trường hợp ngược lại. Giá trị $(a, b)_p$ được gọi là ký hiệu Hilbert của cặp (a, b) đối với số nguyên tố p.*

Bài toán 28. Chứng minh rằng với ký hiệu Hilbert, ta có:

1) $(a, b)_p = (b, a)_p$.

2) $(a, c^2)_p = 1$,

3) $(a, -a)_p = 1$, $(a, 1-a)_p = 1$.

4) $(a, b)_p = (a, -ab)_p = \big(a, (1-a)b\big)_p$.

Bài toán 29. Giả sử $(a, b)_p = 1$. Chứng minh rằng với mọi a', ta đều có $(a', b)_p = (aa', b)_p$.

Định nghĩa 4. *Để viết gọn công thức tường minh cho ký hiệu Hilbert, ta cần đến ký hiệu Legendre $\left(\frac{x}{p}\right)$ xác định với mọi số nguyên x và số nguyên tố p. Nó bằng 1, -1 hay 0 tùy thuộc vào x có phải là thặng dư bình phương, không thặng dư bình phương hay 0 theo môđun p. Với số nguyên tố lẻ p, ký hiệu Legendre được tính theo công thức $\left(\frac{x}{p}\right) = x^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.*

Bài toán 30. Cho p là số nguyên tố lẻ, $a = p^\alpha u$, $b = p^\beta v$, trong đó α, β, u, v là các số nguyên sao cho u và v nguyên tố cùng nhau với p. Chứng minh rằng

$$(a, b)_p = (-1)^{\frac{\alpha\beta(p-1)}{2}} \left(\frac{u}{p}\right)^\beta \left(\frac{v}{p}\right)^\alpha.$$

Bài toán 31. Tìm công thức tường minh cho $(a, b)_2$ với mọi cặp số nguyên a, b.

Bài toán 32. Chứng minh rằng $(a, b)_p \cdot (a, b')_p = (a, bb')_p$ với mọi số nguyên a, b, b'.

Bài toán 33. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + by^2 = c$ (a, b, c là các tham số, còn x, y là các ẩn số) có nghiệm trong tập hợp các số p-adic nếu và chỉ nếu $(c, -ab)_p = (a, b)_p$.

Bài toán 34. Cố định đa thức thuần nhất:

$$f = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 \ (n \geqslant 2),$$

trong đó $a_1, \ldots, a_n \neq 0$. Đặt $d = a_1a_2\cdots a_n$ và

$$\varepsilon = \prod_{i<j} (a_i, a_j)_p. \tag{3}$$

Chứng minh rằng phương trình $f = 0$ có nghiệm khác 0 trong tập các số p-adic khi và chỉ khi xảy ra một trong các điều sau:

1) $n = 2$ và d là số chính phương trong $\mathcal{Q}_p$.

2) $n = 3$ và $(-1, d) = \varepsilon$.

3) $n = 4$ và $d \neq \alpha^2$, hoặc là $d = \alpha^2$ và $\varepsilon = (-1, -1)_p$.

4) $n \geqslant 5$ (tức là nếu f phụ thuộc vào 5 hay nhiều biến thì phương trình $f = 0$ có nghiệm khác 0 trong $\mathcal{Q}_p$ với mọi p.)

Từ định lý 34 hãy suy ra mệnh đề sau:

Bài toán 35. Cố định đa thức thuần nhất:

$$f = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 \ (n \geqslant 2),$$

trong đó $a_1, \ldots, a_n \neq 0$ và số nguyên $a \neq 0$. Định nghĩa d và ε bởi công thức (3). Chứng minh rằng phương trình $f = a$ có nghiệm trong tập các số p-adic khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

1) $n = 1$, và số $\frac{a}{d}$ là số chính phương trong Q_p;

2) $n = 2$ và $(a, -d)_p = \varepsilon$;

3) $n = 3$ và ad không chính phương trong Q_p hoặc là ad chính phương và $\varepsilon = (-1, -d)_p$;

4) $n > 4$ (điều này có nghĩa là nếu f phụ thuộc vào 4 hay nhiều hơn biến số thì phương trình $f = a$ có nghiệm khác 0 trong Q_p với mọi p).

Bài toán 36. Chứng minh nguyên lý Minkowsky-Hasse.

Bài toán 37. Sử dụng bài toán 35 và nguyên lý Minkowsky-Hasse, hãy chứng minh rằng số nguyên n biểu diễn được dưới dạng tổng bình phương của ba số hữu tỷ khi và chỉ khi nó không có dạng $4^a(8b-1)$, tức là khi $-n$ không phải là số chính phương trong Q_2.

Bài toán 38. Cố định số nguyên n. Chứng minh rằng nếu tồn tại các số hữu tỷ x, y, z sao cho $x^2+y^2+z^2=n$, thì cũng tồn tại các số nguyên x', y', z' sao cho $(x')^2+(y')^2+(z')^2=n$. Từ đây hãy suy ra kết luận của định lý Gauss.

Bài toán 39. Từ định lý Gauss hãy suy ra định lý Legendre.

BÀI TOÁN CHUYẾN XE BUS

Lê Tạ Đăng Khoa (*Đại học FPT, Tp HCM*)

1. Mở đầu

Xe buýt là một trong những phương tiện giao thông huyết mạch của thành phố, xấp xỉ lên đến 33 nghìn chuyến mỗi ngày. Vì vậy, lập tuyến xe buýt mới và tối ưu tuyến xe buýt cũ là một trong những ưu tiên hàng đầu của thành phố.

Mỗi tuyến xe buýt thường được biểu diễn bởi một đoạn thẳng có độ dài cố định và một số trạm xe buýt nằm giữa hai đầu mút. Người dân muốn các trạm nằm sao đó để tối ưu thời gian di chuyển của họ. Vì vậy, đối tượng cần được tối ưu là thời gian di chuyển trung bình của tất cả người dân.

2. Mô hình

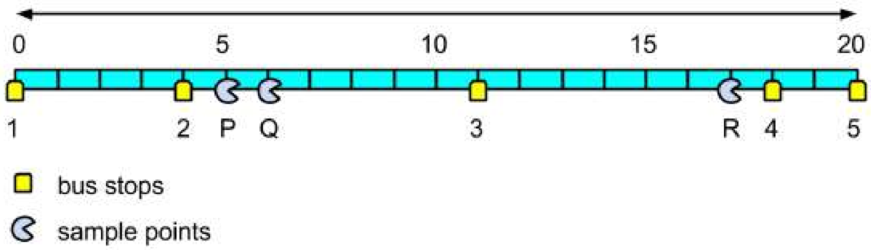
Chúng ta xét mô hình sau:

Giả sử có một con đường dài L km. Dân số được phân bố đều nhau trên suốt con đường này. Chúng ta cần tìm số trạm xe buýt và vị trí tối ưu của chúng để giảm thiểu thời gian di chuyển trung bình mà một hành khách phải bỏ ra, để đi từ một điểm bất kỳ trên đường đến một điểm bất kỳ khác.

Để đi từ P đến Q, một hành khách phải đi bộ đến trạm xe buýt gần P nhất, sau đó lên xe và dừng lại ở trạm xe buýt gần Q nhất, rồi đi bộ đến Q. Nếu có hai trạm xe buýt cách P một khoảng như nhau, hành khách sẽ chọn trạm để giảm thiểu số trạm phải đi (tương tự nếu có hai trạm cách Q một khoảng như nhau).

Tốc độ đi bộ là W km/h, tốc độ của xe buýt là B km/h, và một chiếc xe buýt phải dành khoảng S giờ để nhận thêm hoặc bỏ ra các hành khách ở mỗi trạm. Chúng ta ký hiệu $T(P,Q)$ là thời gian mà hành khách phải bỏ ra để đi từ P đến Q.

Chẳng hạn ta xét bản đồ sau với độ dài quãng đường $L = 20$ km:



Có 5 trạm xe buýt và 3 vị trí ngẫu nhiên trên bản đồ, ta tính thời gian di chuyển giữa các vị trí này:

1. Để đi từ P đến R, hành khách cần đi 1 km đến trạm 2, sau đó qua 2 trạm với độ dài 14 km xuống trạm 4, rồi đi bộ 1 km đến R. Tổng thời gian là:
$$T(P,R) = \frac{1}{W} + \frac{14}{B} + 2S + \frac{1}{W} = \frac{2}{W} + \frac{14}{B} + 2S.$$

2. Tương tự, để đi từ Q đến R, ta cần thời gian:
$$T(Q,R) = T(P,R) + \frac{1}{W} = \frac{3}{W} + \frac{14}{B} + 2S.$$

3. Để đi từ P đến Q, hành khách sẽ đi bộ 1 km đến trạm 2, đi xe buýt 0 km đến trạm 2 (nghĩa là không làm gì cả), rồi đi bộ 2 km đến Q. Tổng thời gian là:
$$T(P,Q) = \frac{1}{W} + \frac{0}{B} + 0S + \frac{2}{W} = \frac{3}{W}.$$
(Trường hợp này chỉ dùng để minh họa thuật Toán đi, không có ý nghĩa thực tế.)

Chúng ta thống nhất một vài điều kiện và ký hiệu:

- Luôn có một trạm xe buýt ở 2 đầu mút của đoạn đường.
- Giả sử vị trí của các trạm là $0 = x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = L$, khi đó ta biểu diễn tuyến xe buýt A qua bộ sắp xếp trạm là $A = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$.

- Tuyến xe buýt A cũng có thể được biểu diễn thông qua bộ $A = (d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n)$, với $d_i = x_i - x_{i-1}$ và $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Ký hiệu $E(A)$ là thời gian trung bình để đi từ một điểm bất kỳ này đến một điểm bất kỳ khác trên tuyến xe buýt A, khi bộ sắp xếp trạm của tuyến này được cố định.

3. Câu hỏi

Bài toán 1.

1) Cố định n và bỏ qua thời gian đón và thả hành khách ở mỗi trạm. Chứng minh rằng bộ sắp xếp tối ưu xảy ra khi các trạm xe buýt cách đều nhau. Nghĩa là $E(A)$ đạt giá trị tối thiểu khi $d_1 = d_2 = \ldots = d_{n-1} = d_n$.

2) Xét trường hợp $L = 20$, $W = 5$, $B = 20$, $S = 0.05$. Tìm giá trị của n để tối ưu hóa $E(A)$, biết A có $n+1$ trạm xe buýt cách đều nhau. (Do S khác 0 nên không đảm bảo đây là cách sắp xếp tối ưu nhất với một giá trị n bất kỳ.)

Bài toán 2. Mô hình của chúng ta còn nhiều khuyết điểm:

1) Hành khách hoàn toàn có thể đi bộ trực tiếp nếu 2 điểm đi và đến gần nhau.

2) Hành khách thường xuyên đến một số nơi như siêu thị, cơ quan, nhà riêng, .v.v. hơn một số điểm trung gian khác.

3) Dân số phân bố chưa hẳn đã đồng đều trên toàn tuyến.

Dựa trên câu **1.1)** và **1.2)**, hãy đưa ra một mô hình có thể giải quyết ba vấn đề trên. Để đơn giản, bạn vẫn có thể giả sử tuyến xe buýt là một đường thẳng.

NHẬN XÉT VỀ KỲ THI VMO 2015

1. Về đề thi

Kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán năm học 2014-2015 (VMO 2015) diễn ra trong 2 ngày 08 và 09/01/2015. Về tổng quan, ta có thể thấy rằng đề thi năm nay hay, phù hợp với việc tuyển chọn học sinh giỏi.

Các vấn đề đặt ra trong đề khá căn bản, quen thuộc nhưng cũng có những khó khăn nhất định ở từng bài. Ví dụ bài tổ hợp khai thác chủ đề quen thuộc về các số chia hết cho 3 có các chữ số thuộc 1 tập hợp (dùng căn bậc 3 của đơn vị hoặc truy hồi), nhưng đưa chữ số 0 vào gây chút rắc rối. Bài 6 số học thì khai thác định lý Sylvester về biểu diễn dạng tổ hợp tuyến tính $ax + by$. Bài bất đẳng thức rất nhẹ nhàng (so với bất đẳng thức khủng năm ngoái), có thể giải bằng kiến thức THCS nhưng cũng gây khó cho không ít thí sinh.

Năm nay có một điểm đặc biệt là chỉ có một bài hình học, lại là bài khá khó nên có thể sẽ khiến một số bạn giỏi hình chưa có cơ hội bộc lộ hết sở trường của mình. Thay vào một bài hình là một bài tổ hợp dài, không quá khó về bản chất nhưng đòi hỏi khả năng đọc hiểu của thí sinh. Nhiều thí sinh đã chia sẻ rằng: *"Em không hiểu bài tổ hợp họ hỏi gì?"*. Quả thật, khả năng đọc hiểu, xây dựng và chuyển đổi mô hình là điểm yếu cố hữu của học sinh Việt Nam.

Đi vào chi tiết, ta có thể điểm qua từng bài như sau:

Ngày 1 khá cơ bản, gồm các vấn đề ít nhiều đều đã có giới thiệu trong chương trình Toán chuyên một cách đại trà.

- **Bài 1 (dãy số)** có câu a quá dễ và quen thuộc, câu b lại khó khăn kỹ thuật nhất định, cần sử dụng định lý kẹp, đơn điệu hoặc bổ đề ánh xạ co. Nhiều thí sinh bị lấn sâu vào câu b của bài toán dẫn đến thiếu thời gian để giải quyết các câu còn lại.

- **Bài 2 (bất đẳng thức)** thì không quá dễ cũng không quá khó, nó là một bất đẳng thức đối xứng, đồng bậc, dạng tương đối phổ biến với các học sinh. Đổi biến để khử căn xong là có thể nhìn ngay ra bất đẳng thức Schur bậc 4 và AM-GM. Bài này có rất nhiều cách giải nên sẽ rất tiếc cho học sinh nào bỏ vế sau, vì đây là vế chính của bài toán. Đây là một bài toán khá hợp lý tương xứng với vị trí của nó trong đề thi.

- **Bài 3 (tổ hợp)** khai thác chủ đề quen thuộc (đã xuất hiện trong các đề thi Romania 2003, Phổ thông năng khiếu 2009, Lâm Đồng 2014). Có hơi rắc rối ở chỗ số 0 nhưng lại được "giải" bằng điều kiện $n < 10^k$ (chứ không phải có m chữ số). Phương pháp căn đơn vị giải quyết gọn nhưng cũng cần trình bày chặt chẽ. Phương pháp truy hồi sẽ gây khó một chút vì có đến 3 dãy. Ở bài này, có lẽ thí sinh làm trọn vẹn không nhiều, nhưng giám khảo chấm sẽ khá mệt.

- **Bài 4 (hình học phẳng)** là bài hình duy nhất, có hai câu đều ở mức độ trung bình khó, nhưng số học sinh làm trọn vẹn bài này sẽ không nhiều. Có thể thấy chủ đề về phương tích, trục đẳng phương vẫn đóng vai trò chủ đạo trong suốt các năm gần đây.

Ở ngày thi thứ hai, đề thi so với ngày đầu tiên đã "gây sốc", khó cả về kỹ thuật lẫn tư duy. Nguyên nhân là không có bài hình và bài tổ hợp phát biểu quá dài. Hai bài 5, 6 tuy quen thuộc nhưng lại là phần mà các thí sinh ít để ý. Về ý tưởng thì đề ngày 2 hay hơn ngày 1.

- **Bài 5 (dãy số, đa thức)** tương đối cơ bản. Dùng phương trình đặc trưng hoặc quy nạp dễ dàng tìm được công thức $f_n = (2x-1)^n + (x+1)^n$. Kiểu bài toán chia hết này khá giống với những bài chia hết trong số nguyên. Cách làm truyền thống là khai thác tính tuần hoàn của số dư. Tuy nhiên, thực tế nhiều thí sinh không có phương hướng gì.

- **Bài 6 (số học)** sẽ không khó khăn để làm nếu đã quen với định lý Sylvester. Có hai bài toán mẫu trước đó là IMO

1983 và Vietnam TST 2000. Cũng như các năm, bài số học ít khi xuất hiện, nhưng nếu có thì nó sẽ là một bài khó. Tuy nhiên, nếu chưa biết định hướng sử dụng định lý này thì đây quả là một thử thách thực sự.

- **Bài 7 (tổ hợp)** đề khá dài, quan hệ giữa các khái niệm khá rối và dễ dẫn đến hiểu nhầm. Học sinh cần chuyển về một mô hình toán học nào đó (bảng, graph hoặc hàm số) để thấy rõ hơn vấn đề. Thực ra về bản chất thì nó chỉ là một bài toán đếm có thể giải bằng song ánh và quy nạp.

Như vậy, nhìn chung thì đề năm nay hay. Ngày 1 ra thật cơ bản và quen để cho đại trà. Ngày 2 gây khó và phân loại. Qua khảo sát một số đội tuyển, thí sinh đánh giá đề này vừa sức và ít nhiều cũng giải quyết được một số nội dung trong đề bài. Dự đoán năm nay điểm đạt giải khuyến khích sẽ ở vào khoảng 13-15, còn điểm lọt vào vòng 2 để thi chọn đội tuyển IMO là 24. Năm nay chắc sẽ ít giải nhất.

2. Về kết quả

Công tác chấm thi được triển khai 1 tuần sau kỳ thi. Kết quả cho thấy dù đề bài ngày 1 khá cơ bản nhưng các thí sinh vẫn gặp rất nhiều khó khăn. Với ngày 2, bài số 7 hầu như bị bỏ trắng. Một số thí sinh có tiếp cận nhưng không có tiến triển gì đáng kể trong lời giải. Điều này một mặt nói lên điểm yếu cố hữu của học sinh Việt Nam về tổ hợp nhưng cũng gợi lên một suy nghĩ rằng việc đưa bài toán ở mức độ trừu tượng cao như bài 7 ở mức độ thi HSG quốc gia là chưa cần thiết.

Thực tế chấm thi cho thấy bài toán này hoàn toàn không có ý nghĩa trong việc phân loại học sinh, kể các các học sinh ở tốp trên. Nói cách khác, có thể bỏ bài này mà không ảnh hưởng đến thứ bậc. Với tình huống là thực tế chỉ còn 34 điểm như vậy, điểm trung vị rơi vào 12-13 điểm, chính là điểm mà BGK chọn lấy để xét giải.

Kết quả có tổng cộng 222 giải, trong đó có 1 giải nhất (dành cho các thí sinh có điểm từ 30.0 trở lên), 47 giải nhì (dành cho các thí sinh có điểm từ 21.5 đến 29.5) 80 giải ba (dành cho các thí sinh có điểm từ 17 đến 21.0) và 94 giải khuyến khích (dành cho các thí sinh có điểm từ 13 đến 16.5).

Trong kỳ thi năm nay, thành tích xuất sắc nhất thuộc về trường THPT chuyên ĐHQG Hà Nội với 1 giải nhất, 3 giải nhì, 5 giải ba, 1 khuyến khích. Giải nhất duy nhất ĐHQG HN, cũng là duy nhất của kỳ thi thuộc về Nguyễn Tuấn Hải Đăng, học sinh lớp 12 chuyên Toán.

Các đội khác cũng cũng có thành tích ấn tượng bao gồm: Nghệ An (8 nhì, 1 ba, 1 KK), Đà Nẵng (4 nhì, 3 ba, 1 KK), ĐHSP Hà Nội (4 nhì, 1 ba, 4 khuyến khích) Hà Tĩnh (3 nhì, 6 ba, 1 KK). Tiếp theo là các đội PTNK ĐHQG Tp HCM, Nam Định, Hải Dương, Bắc Ninh. Đặc biệt Bình Định, sau nhiều năm có thành tích không mấy nổi bật cũng có 2 giải nhì, 2 giải ba, 2 giải KK.

Kỳ thi năm nay ghi nhận sự vươn lên của các đội vốn ít được nhắc tên ở mức độ thi HSG quốc gia môn Toán: Tuyên Quang, Điện Biên, Lai Châu, Lào Cai, Bình Dương, Vĩnh Long, Lâm Đồng. Đặc biệt đội tuyển Đắk Nông (một trong những đội tuyển trẻ nhất) đã có 2 giải quốc gia đầu tiên về môn toán: 2 giải khuyến khích. Một sự khích lệ lớn lao cho các bạn trẻ yêu toán vùng cao xa xăm.

Tiếp nối theo kỳ thi HSG quốc gia, theo kế hoạch của Bộ giáo dục và Đào tạo, vào cuối tháng 3 tới đây, 49 thí sinh bao gồm các học sinh đạt giải nhất và giải nhì của kỳ thì HSG quốc gia và em Nguyễn Thế Hoàn, thành viên đội tuyển Việt Nam dự IMO 2014 (huy chương vàng) sẽ tham dự kỳ thi chọn đội tuyển Olympic Toán Việt Nam (Vietnam TST) tham dự IMO 2015 tổ chức tại Thái Lan vào tháng 7-2015.

Phân bố địa lý của Top 49 như sau: Các trường THPT chuyên cấp Bộ chiếm 11 suất, các trường đồng bằng Bắc Bộ và duyên hải chiếm 17 suất, các trường Bắc Trung bộ chiếm 12 suất, các trường từ Đà Nẵng trở vào (trừ PTNK thuộc ĐHQG Tp HCM) chiếm 9 suất. Với tính chất hoàn toàn độc lập của kỳ thi chọn đội tuyển, khả năng là cả 4 khối này đều sẽ đóp góp đại diện vào Top 6 năm nay.