Bài 6

ĐỒ THỊ HỮU HẠN VÀ ỨNG DỤNG

MỤC TIÊU VÀ YÊU CẦU

- Nắm vững các khái niệm ban đầu về đồ thị
- Từ đó biết vận dụng giải các bài toán về đồ thị và một số bài toán thực tế.

NỘI DUNG BÀI HỌC

Giới thiệu các khái niệm cơ bản về đồ thị có hướng và đồ thị vô hướng

- Đỉnh
- Cung, cạnh
- Đỉnh kề, cạnh kề
- Đường đi, mạch kín, xích, chu trình
- Đồ thị liên thông, đồ thị bộ phận, đồ thị con
- Cây, cây bao trùm

ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

❖ Định nghĩa

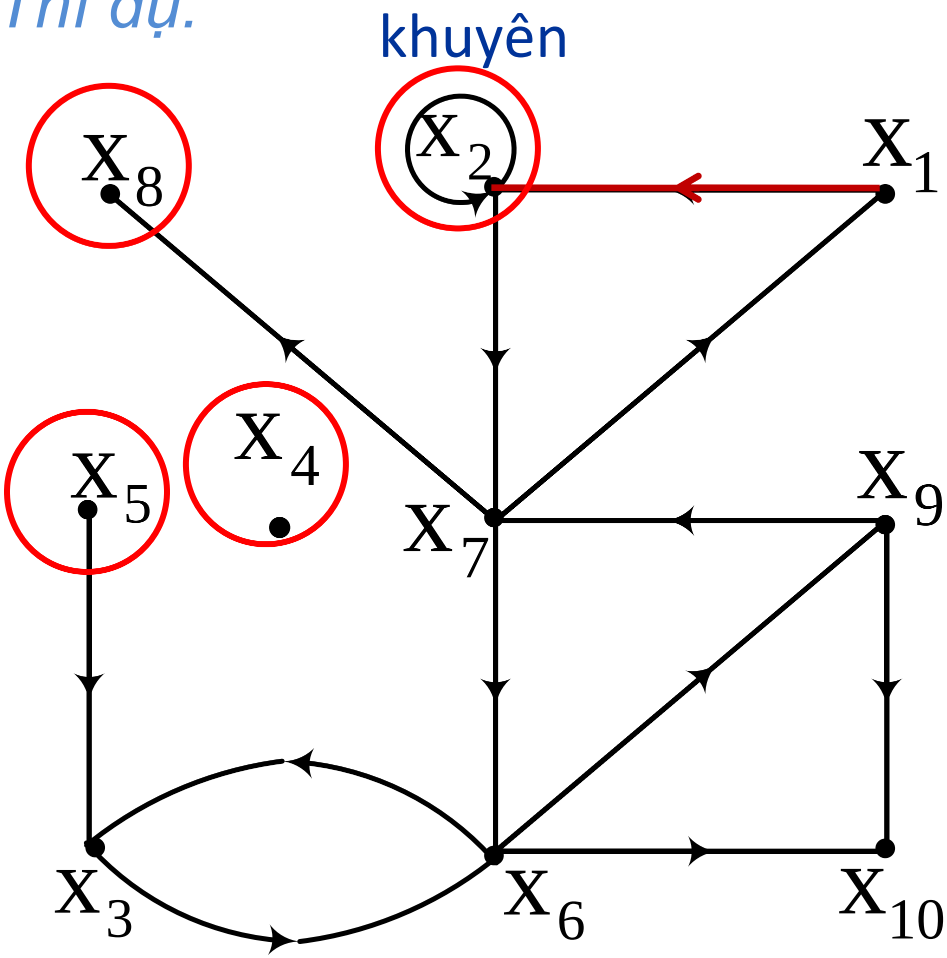
- X là một tập hợp rời rạc, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$: gọi là tập các đỉnh
- U là tập các cặp có thứ tự gồm 2 phần tử của X, mỗi cặp phần tử đó gọi là một cung.
- Khi đó $G = (X, U)$ gọi là đồ thị có hướng.
- X và U là các tập rời rạc nên G gọi là đồ thị hữu hạn.

❖ Biểu diễn hình học một đồ thị

- Mỗi đỉnh được biểu diễn bằng một điểm
- Mỗi cung $u = (x_i, x_j)$ được biểu diễn bởi một mũi tên, nối x_i với x_j

ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

Thí dụ.



10 đỉnh

13 cung

Hình 6.1

ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

- Đồ thị ở hình trên có 10 đỉnh và 13 cung.
- Cung (x_1, x_2) có x_1 là đỉnh gốc, x_2 là đỉnh ngọn.
- Cung (x_2, x_2) gọi là một khuyên.
- Đỉnh x_4 không có cung đến cũng không có cung đi, gọi là đỉnh cô lập.
- Đỉnh không có cung đến gọi là đỉnh vào của đồ thị (đỉnh x_5).
- Đỉnh không có cung đi gọi là đỉnh ra của đồ thị (đỉnh x_8).

ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

- Nếu đồ thị không có khuyên và giữa 2 đỉnh không có nhiều hơn 1 cung thì ta gọi đó là đồ thị đơn.

Trong chương trình ta chỉ nghiên cứu các đồ thị đơn.

Do đó để ngắn gọn ta nói: cho đồ thị có hướng $G = (X, U)$ thì hiểu ngầm đó là đồ thị đơn.

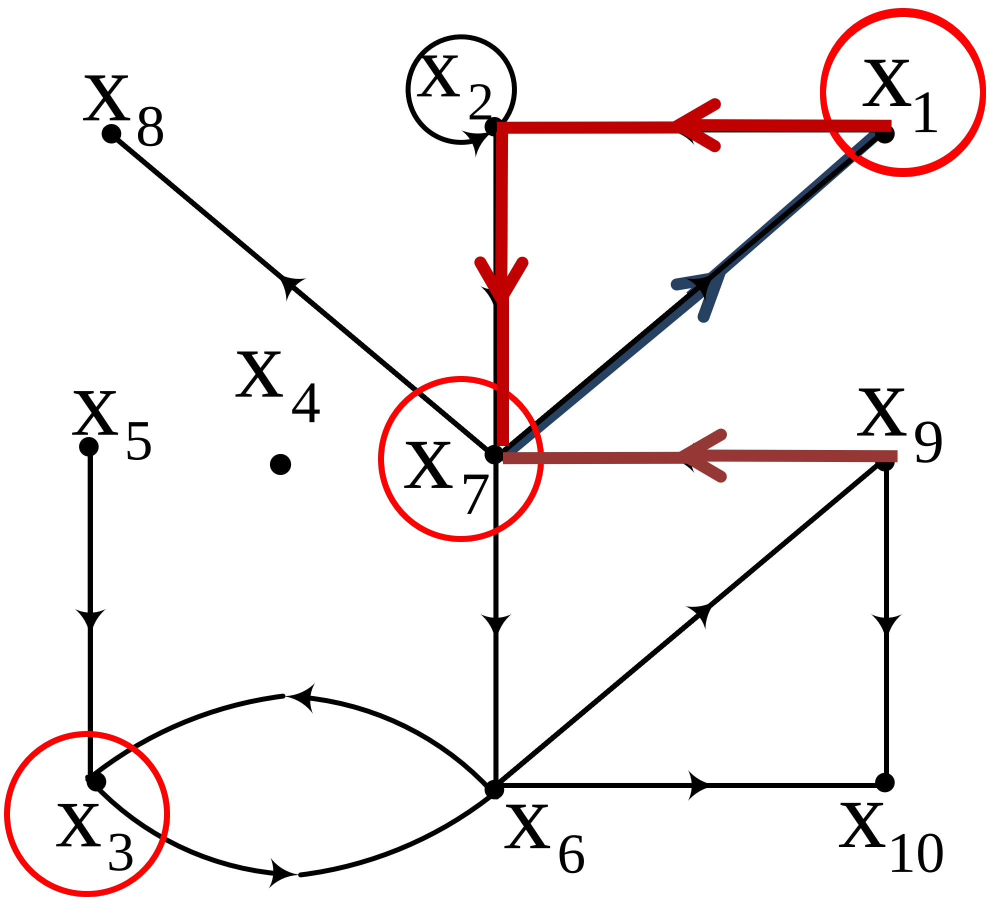
- Hai đỉnh có cung nối gọi là 2 đỉnh kề, trong đó 1 đỉnh là gốc còn đỉnh kia là ngọn.
- Hai cung gọi là kề nhau nếu ngọn của cung này là gốc của cung kia.

ĐƯỜNG ĐI VÀ MẠCH

- Dãy các cung liên tiếp kề nhau xuất phát từ x, kết thúc tại y gọi là một đường đi từ x đến y. Đường đi đó là sơ cấp nếu mỗi đỉnh chỉ qua một lần.

- Nếu đường đi là khép kín, nghĩa là $x \equiv y$ ta gọi đó là một mạch kín. Đường sơ cấp khép kín gọi là mạch sơ cấp.

THÍ DỤ



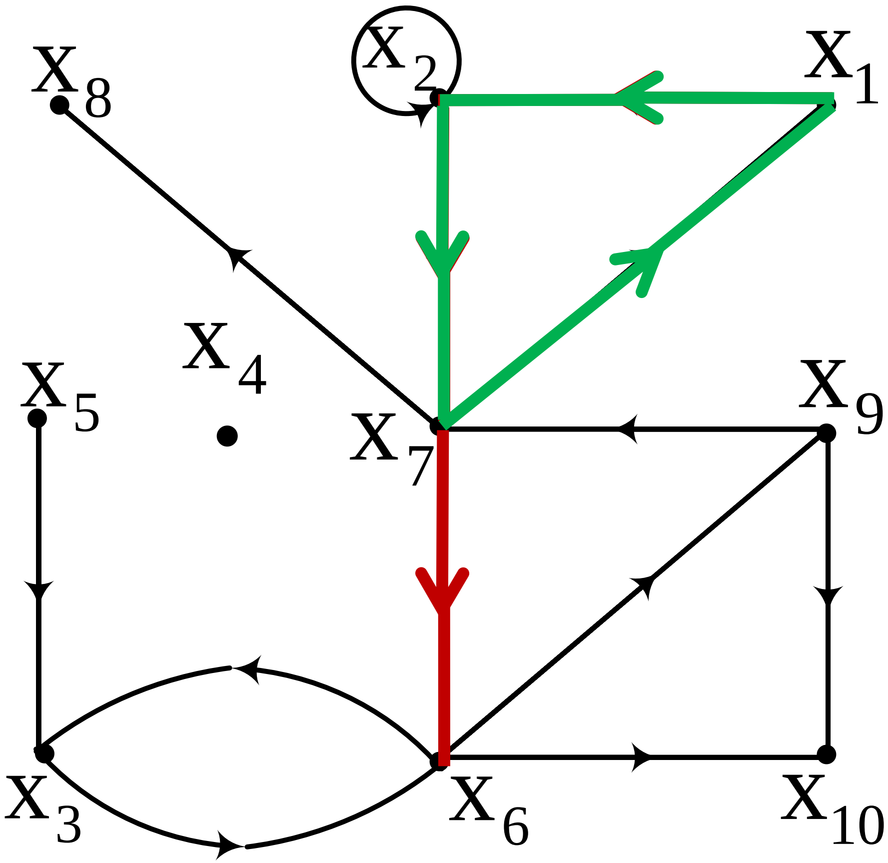
x_1 và x_7 là 2 đỉnh kề

x_1 và x_3 không phải là 2 đỉnh kề

Hai cung (x_1, x_2) và (x_2, x_7) là 2 cung kề nhau

Hai cung (x_9, x_7) và (x_2, x_7) không phải là 2 cung kề

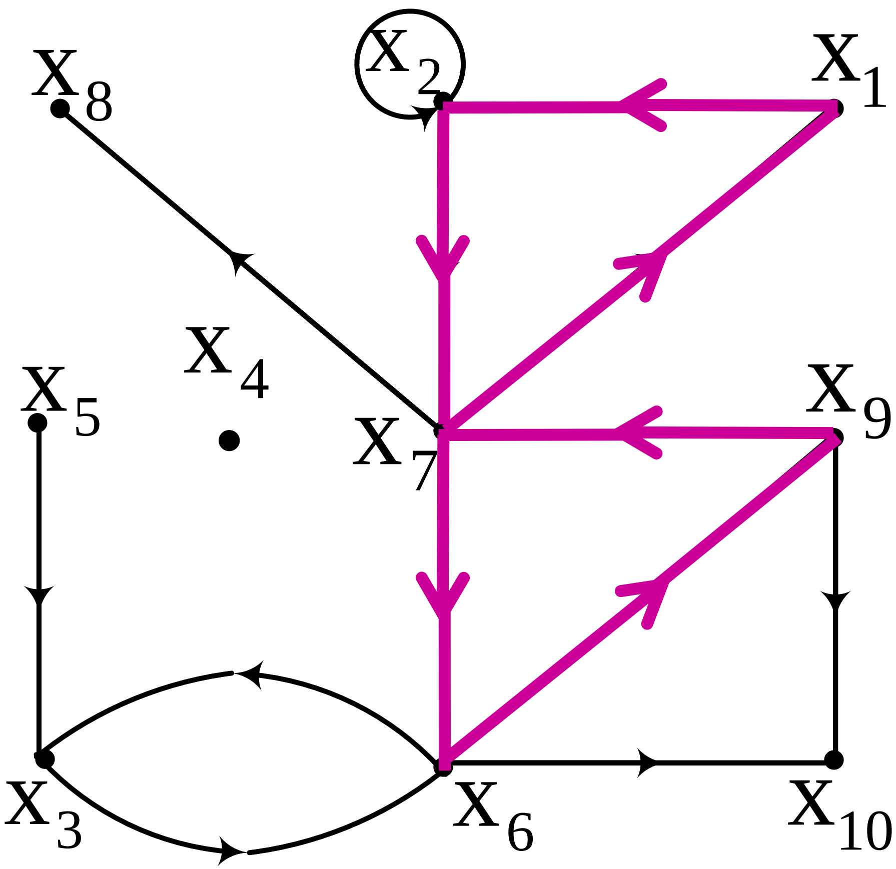
THÍ DỤ



- Các cung $(x_1, x_2)(x_2, x_7)(x_7, x_6)$ là đường đi từ x_1 đến x_6; đó là một đường đi sơ cấp.

- Các cung $(x_1, x_2),(x_2, x_7),(x_7, x_1)$ là một mạch sơ cấp.

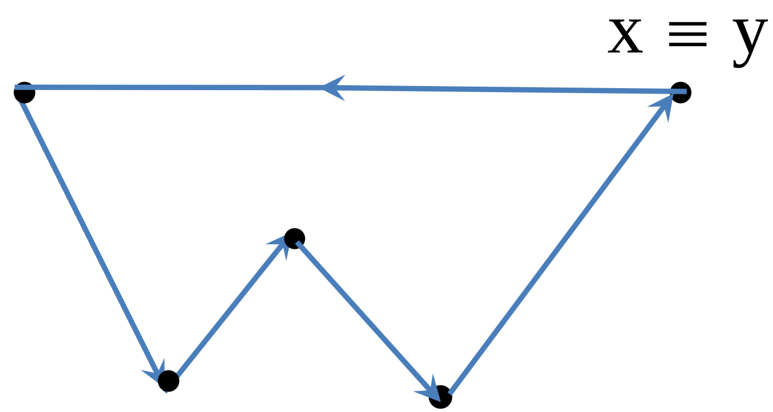
THÍ DỤ



- Các cung $(x_1, x_2),(x_2, x_7),$ $(x_7, x_6),(x_6, x_9)$ $(x_9, x_7),(x_7, x_1)$ là một mạch, nhưng không phải là mạch sơ cấp vì đi qua đỉnh x_7 hai lần.

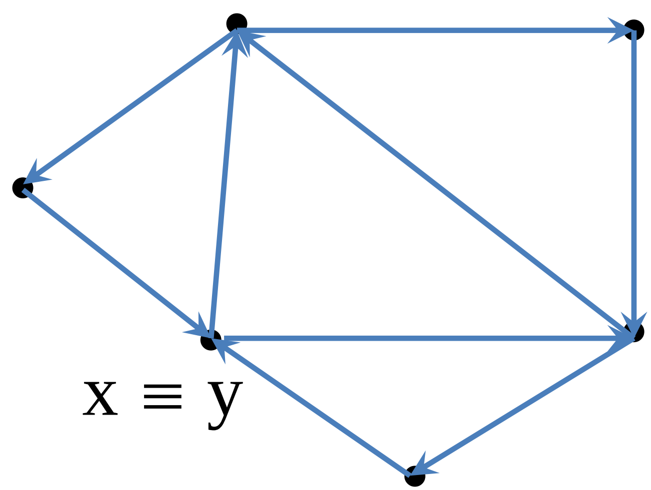
MẠCH EULER VÀ MẠCH HAMILTON

- *Mạch đi qua tất cả các cung mỗi cung một lần là mạch Euler*
- *Mạch đi qua tất cả các đỉnh mỗi đỉnh một lần là mạch Hamilton*



- Là mạch Euler
- Là mạch Hamilton

Hình 6.2

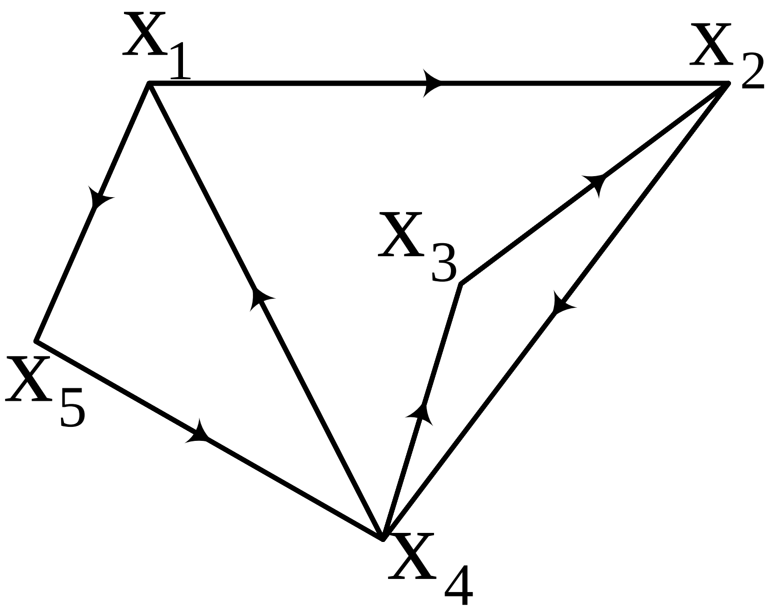


- Là mạch Euler
- Không phải là mạch Hamilton

Hình 6.3

ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

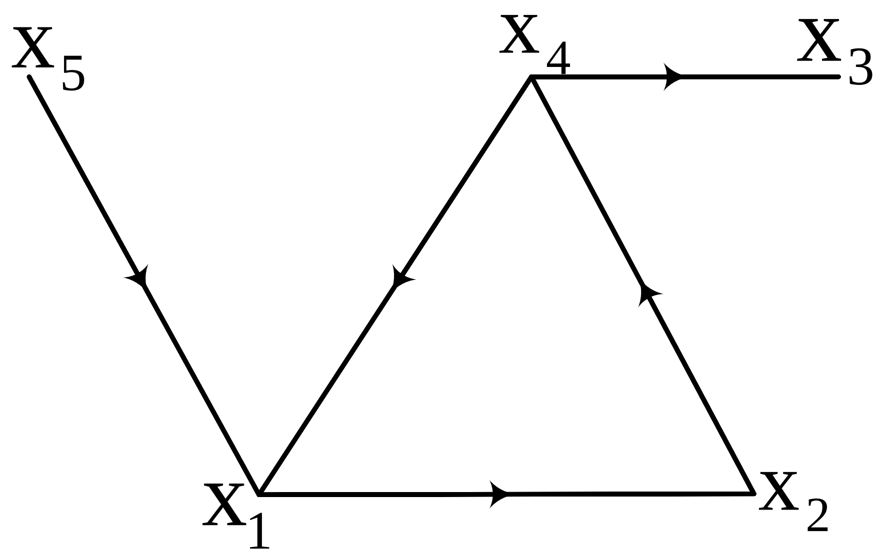
- $G = (X, U)$ gọi là liên thông mạnh (liên thông 2 chiều) nếu với mọi cặp đỉnh (x, y) đều có đường đi từ x đến y.



Hình 6.4

ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

- $G = (X, U)$ gọi là liên thông yếu (liên thông 1 chiều) nếu với mọi cặp đỉnh (x, y)mà không có đường đi từ x đến y thì có đường đi từ y đến x.



Hình 6.5

ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

Nếu 2 đồ thị $G_1 = (X_1, U_1)$ và $G_2 = (X_2, U_2)$ thỏa mãn:

- Là hai đồ thị liên thông
- $X_1 \cap X_2 = \varnothing$
- $U_1 \cap U_2 = \varnothing$

thì đồ thị $G(X, U)$ trong đó $X = X_1 \cup X_2$ và $U = U_1 \cup U_2$ là đồ thị không liên thông nhưng có 2 thành phần liên thông.

ĐỊNH NGHĨA KHÁC VỀ ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

Nếu ta ký hiệu Γx là tập các đỉnh có cung đến từ x thì Γ chính là phép biến đổi $\Gamma : X \rightarrow X$.

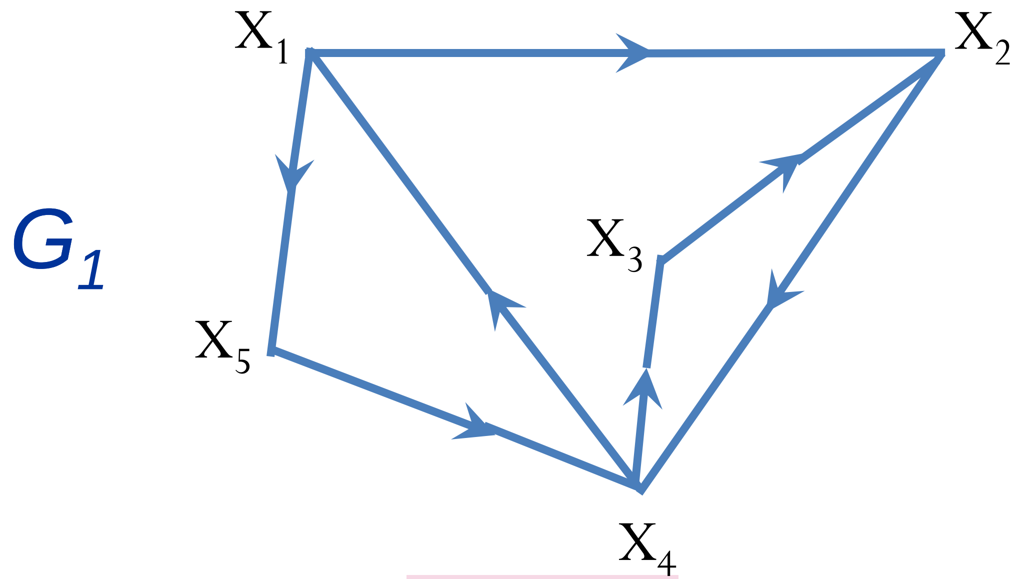
Khi đó một đồ thị có hướng $G = (X, U)$ cũng có thể định nghĩa như là: $G = (X, \Gamma)$ trong đó X là tập đỉnh và Γ là phép biến đổi X vào X.

ĐỒ THỊ CON

Cho 2 đồ thị $G(X, \Gamma)$ và $G_1(X_1, \Gamma_1)$. Ta nói rằng G_1 là đồ thị con của đồ thị G nếu:

$$X_1 \subset X \text{ và } \Gamma_1 x = \Gamma x \cap X_1$$

Bớt đi 1 số đỉnh và các cung liên hệ với đỉnh đó ⟹ *Đồ thị con*

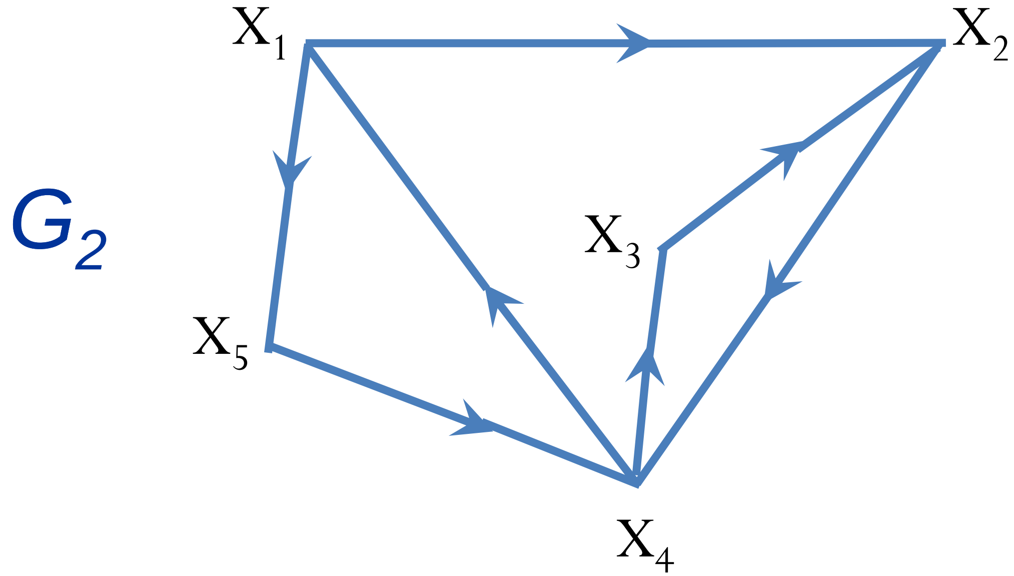


Hình 6.6

ĐỒ THỊ BỘ PHẬN

Nếu $X = X_1$ và $U_1 \subset U$ thì $G_1(X_1, U_1)$ là đồ thị bộ phận của $G = (X, U)$

Bớt đi 1 số cung mà giữ nguyên số đỉnh ⟹ *Đồ thị bộ phận*



Hình 6.6

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN

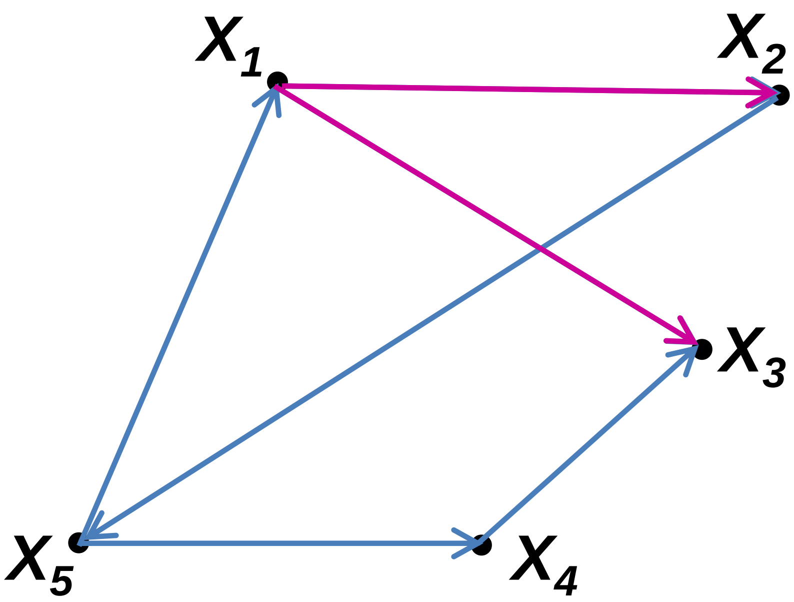
a) Ma trận kề

Cho đồ thị $G = (X, U)$ trong đó $|X| = n$.

Ma trận $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận kề của đồ thị G được xác định như sau:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{khi } (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{khi } (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

THÍ DỤ



Hình 6.7

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	1	0	0
X_2	0	0	0	0	1
X_3	0	0	0	0	0
X_4	0	0	1	0	0
X_5	1	0	0	1	0

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN

b) Ma trận trọng số

$$x_i \xrightarrow{\ell(x_i, x_j)} x_j$$

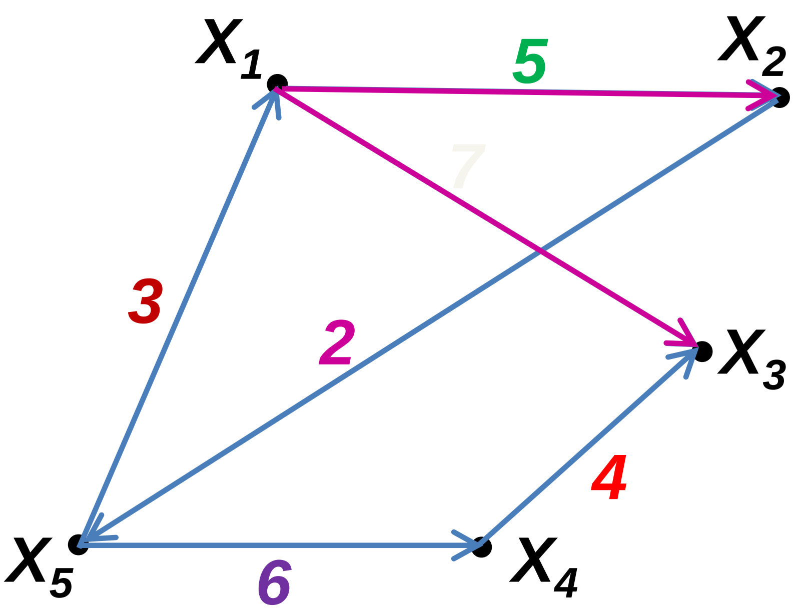
Độ dài cung (x_i, x_j)

Chi phí cho hành trình đi từ x_i đến x_j

Khi đó ma trận trọng số của đồ thị được xác định như sau:

$$b_{ij} = \begin{cases} \ell(x_i, x_j) & \text{khi } (x_i, x_j) \in U \\ \infty & \text{khi } (x_i, x_j) \notin U \\ 0 \ \ \forall j = i; \ (i = \overline{1, n}) & \end{cases}$$

THÍ DỤ



Hình 6.8

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	5	7	∞	∞
X_2	∞	0	∞	∞	2
X_3	∞	∞	0	∞	∞
X_4	∞	∞	4	0	∞
X_5	3	∞	∞	6	0

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

Định nghĩa:

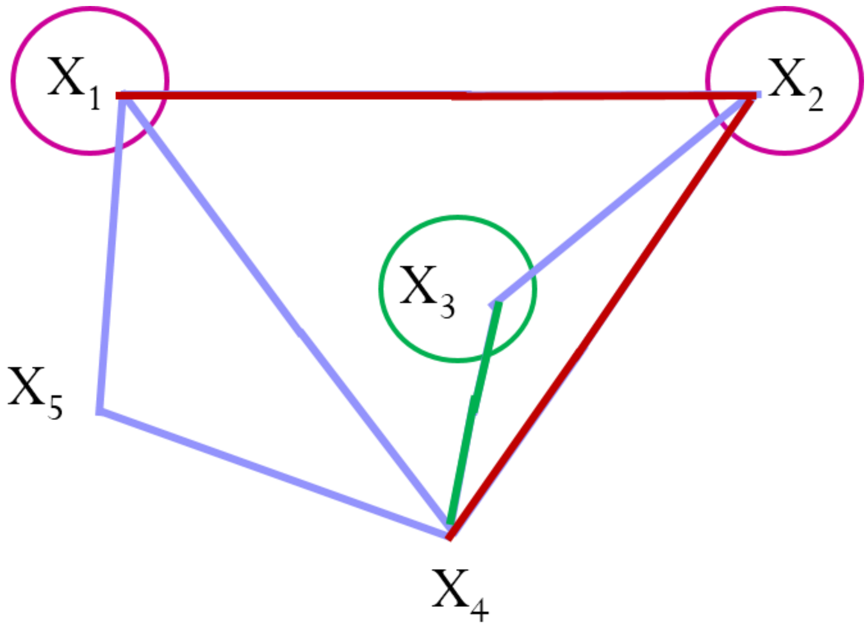
- $G = (X, V)$ là một đồ thị vô hướng trong đó X là tập các đỉnh và V là tập các cạnh.
- Mỗi $v \in V$ là một đoạn thẳng nối 2 đỉnh.

Đồ thị có hướng	Đồ thị vô hướng
Đường đi từ x đến y	Xích nối x và y
Chu trình	Xích nối khép kín
Chu trình sơ cấp	Xích sơ cấp khép kín (đi qua mỗi đỉnh 1 lần)
Chu trình Euler	Xích khép kín Euler
Chu trình Hamilton	Xích khép kín Hamilton

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

Hai đỉnh kề nhau là 2 đỉnh có cạnh nối

Hai cạnh kề nhau là 2 cạnh có 1 đỉnh chung



x_1, x_2 kề nhau

x_1, x_3 không kề nhau

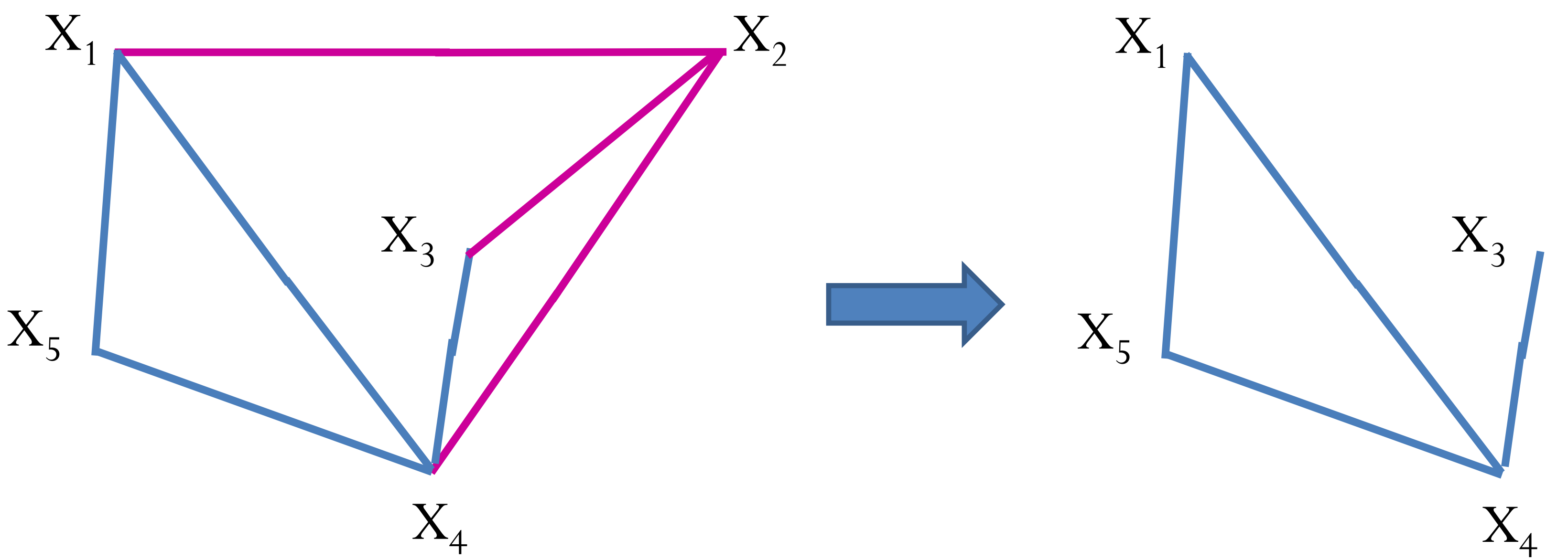
2 cạnh (x_1, x_2), (x_2, x_4) là 2 cạnh kề nhau

2 cạnh (x_1, x_2), (x_3, x_4) không phải là 2 cạnh kề

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

Nếu bớt đi 1 số đỉnh và những cạnh liên quan đến đỉnh đó ta được một đồ thị con

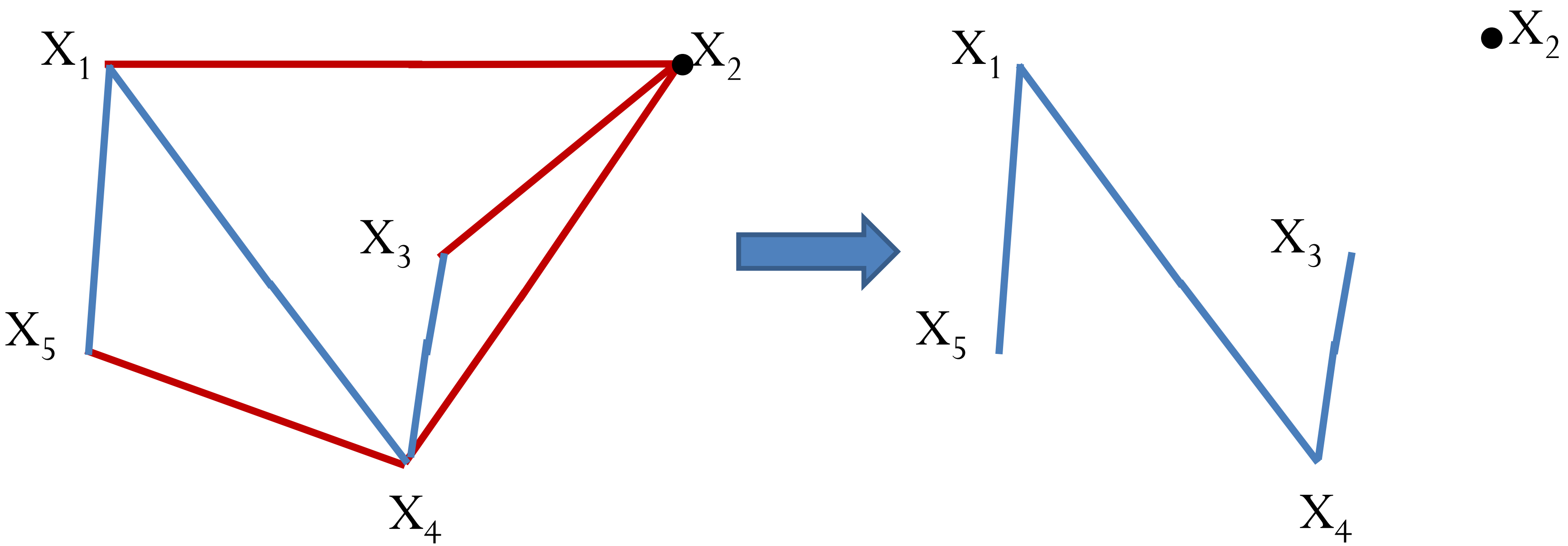
Thí dụ: Bớt đỉnh x_2 và các cạnh liên quan



ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

Nếu giữ nguyên các đỉnh và bớt đi 1 số cạnh ta được một đồ thị bộ phận

Thí dụ:



- Đồ thị vô hướng gọi là liên thông nếu mọi cặp đỉnh (x, y) đều có 1 xích nối. Trong đồ thị vô hướng không có khái niệm liên thông mạnh và liên thông yếu.

ĐỒ THỊ ĐỦ

Định nghĩa

Đồ thị $G(X, V)$ gọi là đồ thị đủ nếu mọi cặp đỉnh đều kề nhau; nghĩa là $(x, y) \in V \ \forall x, y \in X$.

Nếu $|X| = n$ thì số cạnh sẽ là:

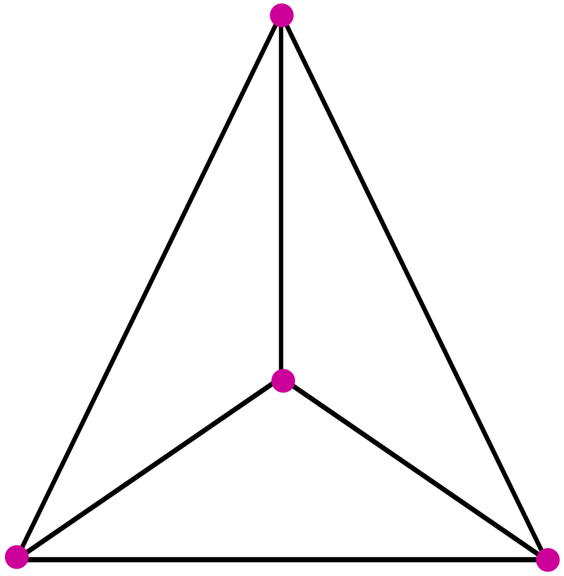
$$|V| = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Tính chất

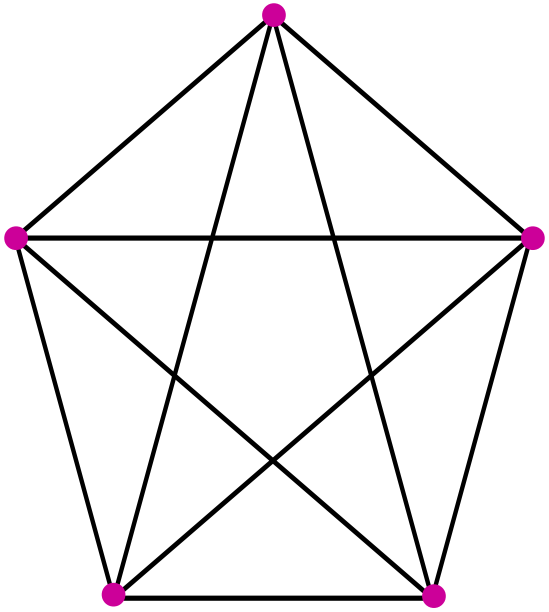
- ❖ Đồ thị đủ không có đỉnh cô lập.
- ❖ Đồ thị đủ là đồ thị liên thông.
- ❖ Mọi đồ thị con của đồ thị đủ cũng là đồ thị đủ.

ĐỒ THỊ ĐỦ

Thí dụ



Hình 6.9

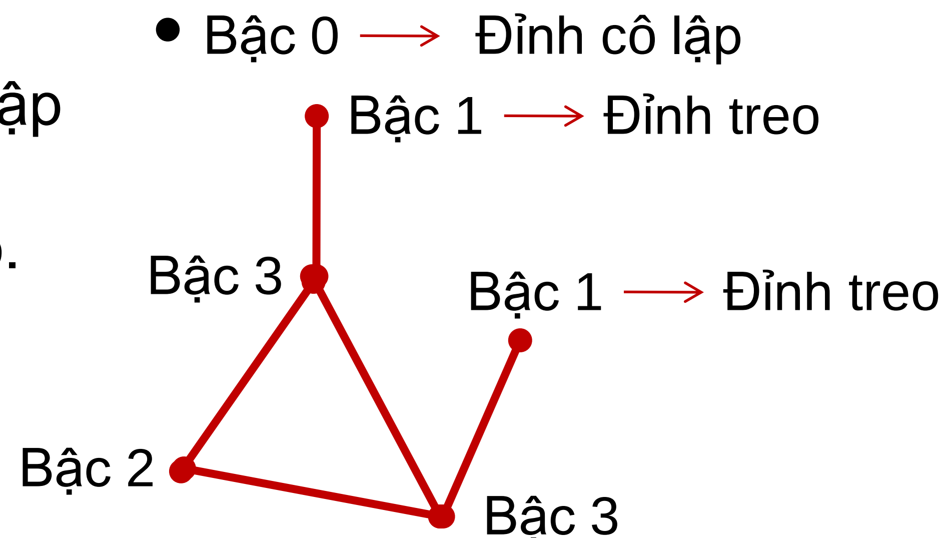


Hình 6.10

BẬC CỦA ĐỈNH

Bậc của đỉnh là số cạnh nối đỉnh đó với các đỉnh khác, kí hiệu là $\alpha(x)$.

- Nếu $\alpha(x) = 0$ thì x là đỉnh cô lập
- Nếu $\alpha(x) = 1$ thì x là đỉnh treo.

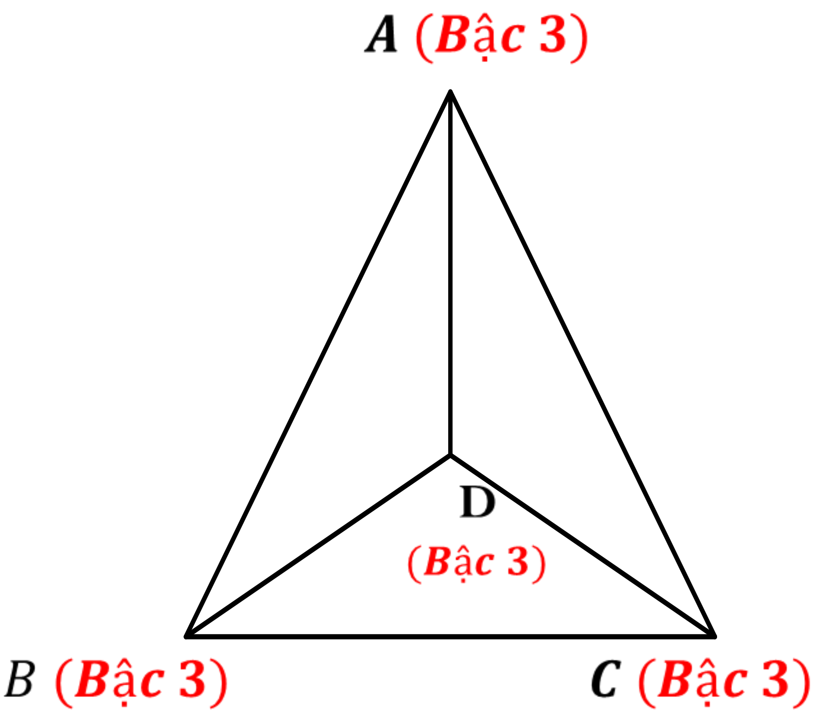


- Nếu $\alpha(x) = r \ \forall x \in X$ thì $G(X, V)$ là đồ thị chính quy (còn gọi là đồ thị đều) bậc r.
- Nếu $G(X, V)$ là đồ thị đủ có n đỉnh thì đó là đồ thị chính quy bậc $(n-1)$.

BẬC CỦA ĐỈNH

Đồ thị đủ 4 đỉnh

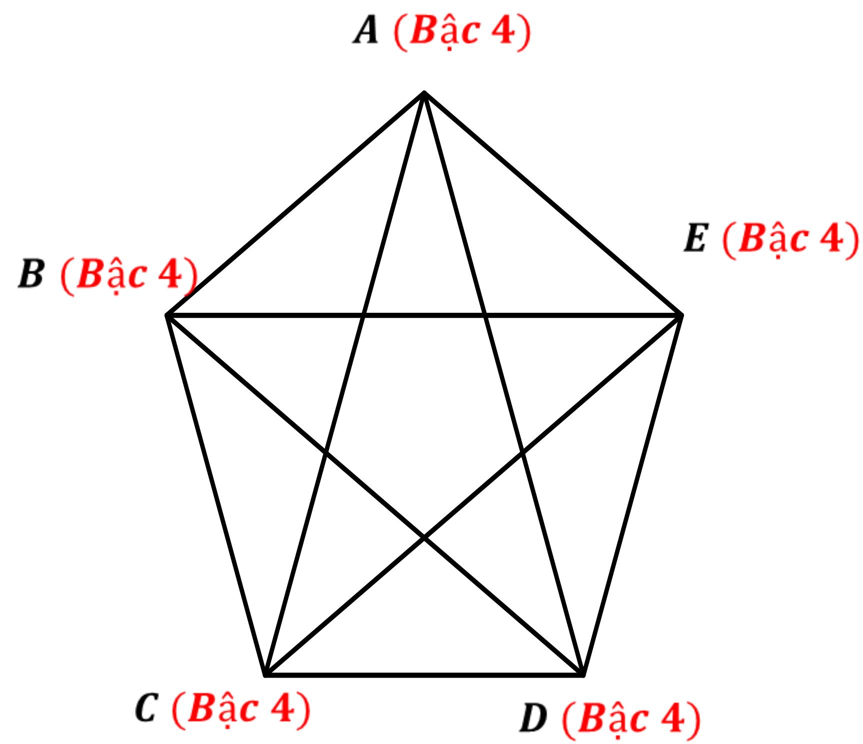
Đồ thị chính quy bậc 3



Hình 6.9

Đồ thị đủ 5 đỉnh

Đồ thị chính quy bậc 4



Hình 6.10

ĐỒ THỊ EULER

Các định nghĩa

Cho G(X, V) là đồ thị liên thông

- Một xích đi qua tất cả các cạnh của G, mỗi cạnh 1 lần gọi là xích Euler
- Một xích Euler khép kín gọi là chu trình Euler
- Đồ thị G(X, V) chứa một chu trình Euler gọi là đồ thị Euler
- Đồ thị G(X, V) chứa một xích Euler gọi là đồ thị nửa Euler

ĐỒ THỊ EULER

Thí dụ

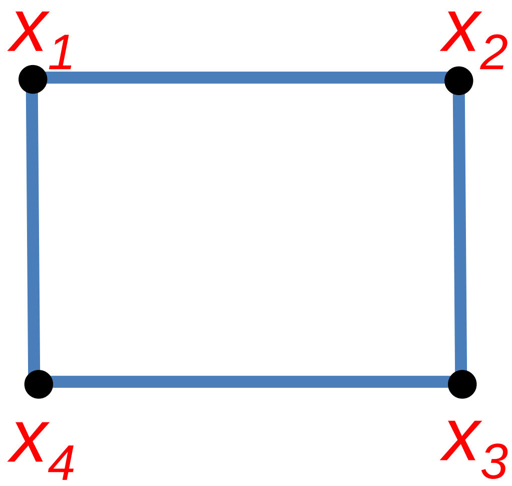
Chu trình Euler:

$x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_1$

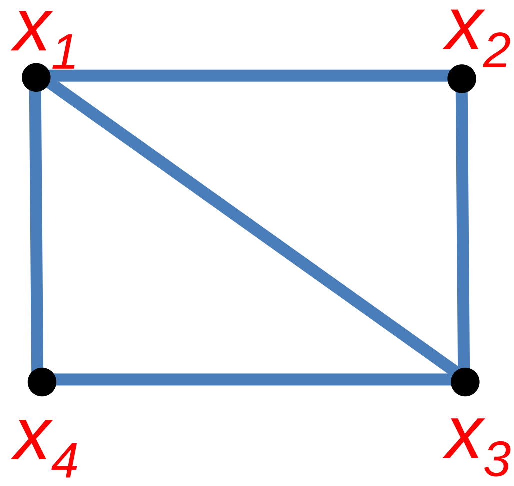
→ *Là đồ thị Euler*

Không có chu trình Euler

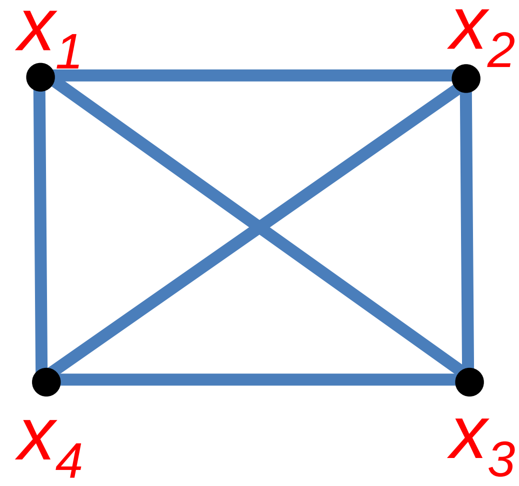
→ *Không phải là đồ thị Euler*



Hình 6.11



Hình 6.12



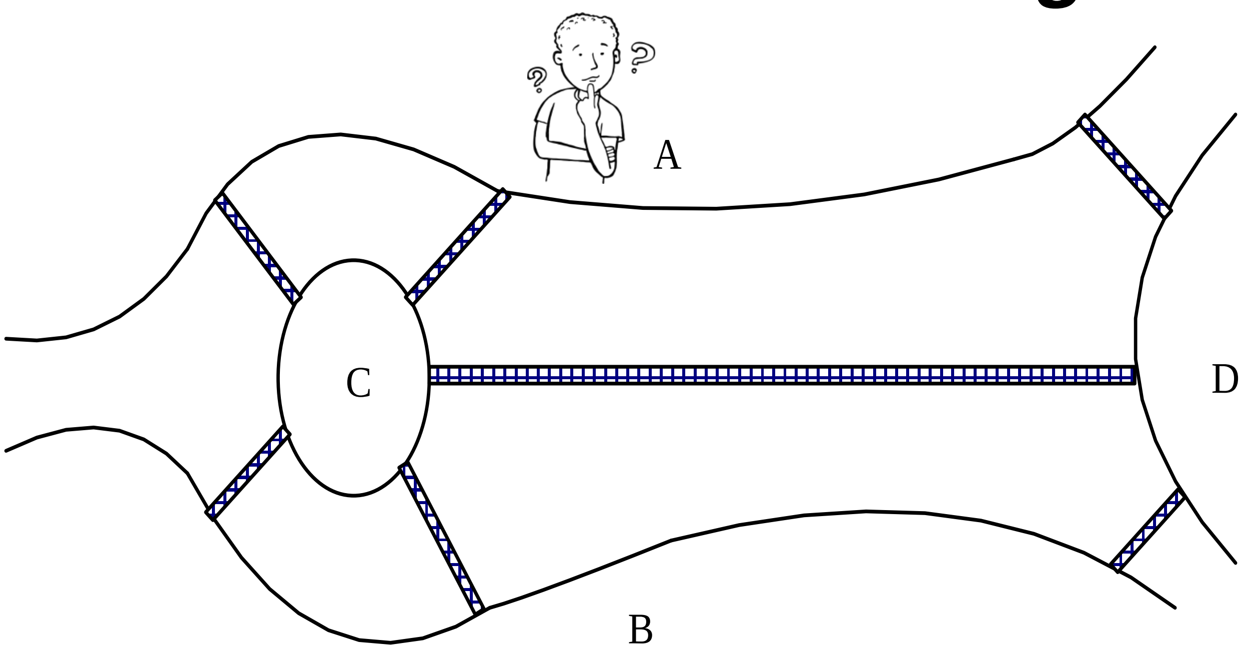
Hình 6.13

CÁCH NHẬN BIẾT 1 ĐỒ THỊ LÀ ĐỒ THỊ EULER

Định lý Euler

Đồ thị liên thông G(X, V) là đồ thị Euler
khi và chỉ khi mọi đỉnh của X đều có bậc chẵn

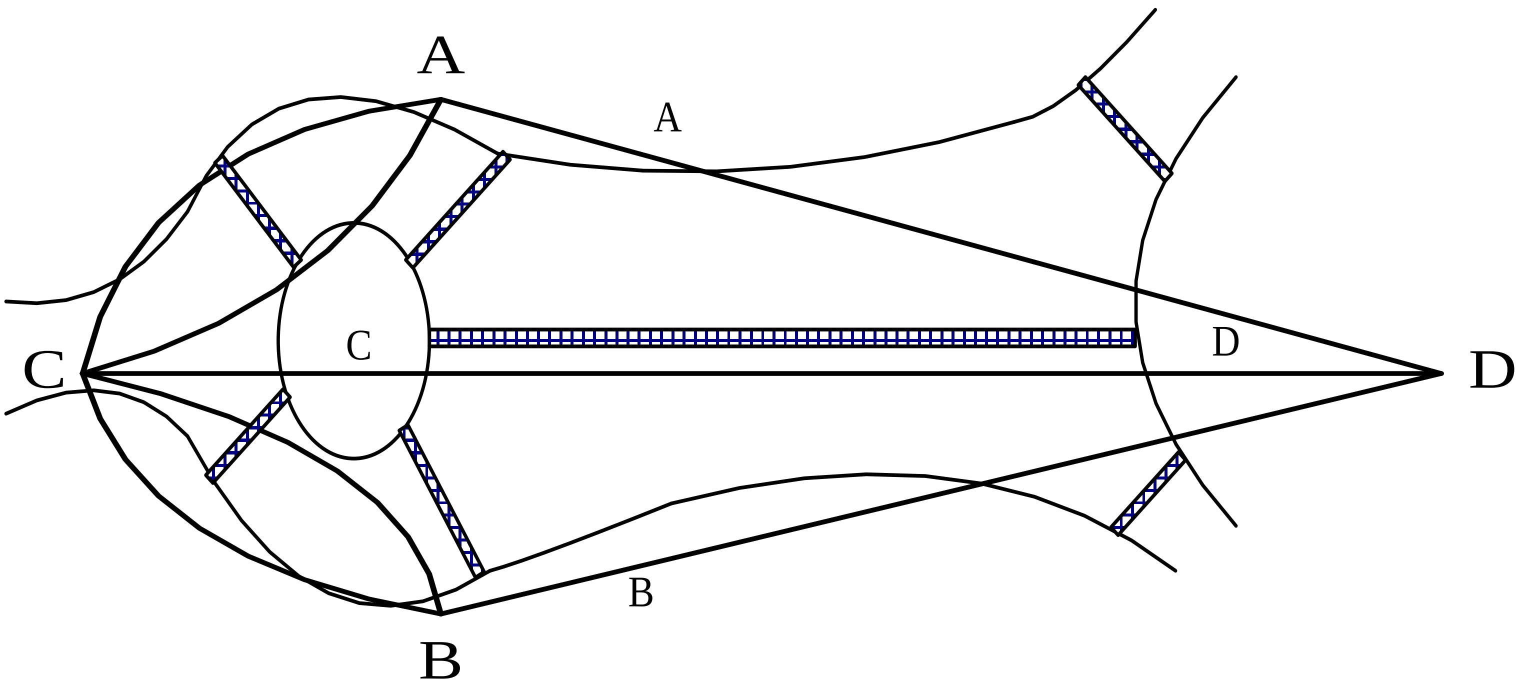
Bài toán 7 chiếc cầu ở Koenigsberg



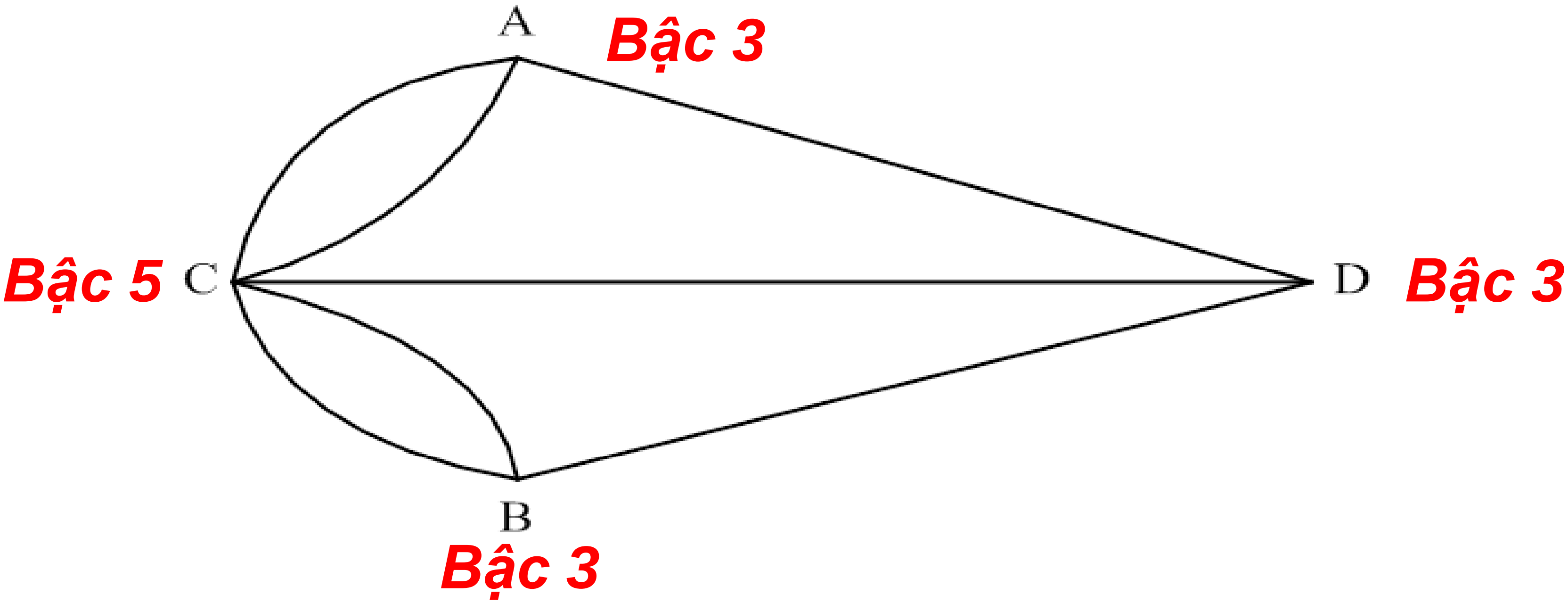
BÀI TOÁN 7 CHIẾC CẦU Ở KOENIGSBERG

Năm 1736 nhà toán học Euler đã công bố lời giải bài toán này.

Biểu diễn bản đồ trên bởi một đồ thị phẳng trong đó mỗi cạnh nối hai đỉnh tương ứng với 1 chiếc cầu.



BÀI TOÁN 7 CHIẾC CẦU Ở KOENIGSBERG



Hành trình đi qua tất cả 7 chiếc cầu, mỗi cầu 1 lần, tương ứng với một chu trình Euler của đồ thị. Nhưng đồ thị trên không phải là đồ thị Euler vì có đỉnh bậc lẻ (ở đây tất cả các đỉnh đều có bậc lẻ).

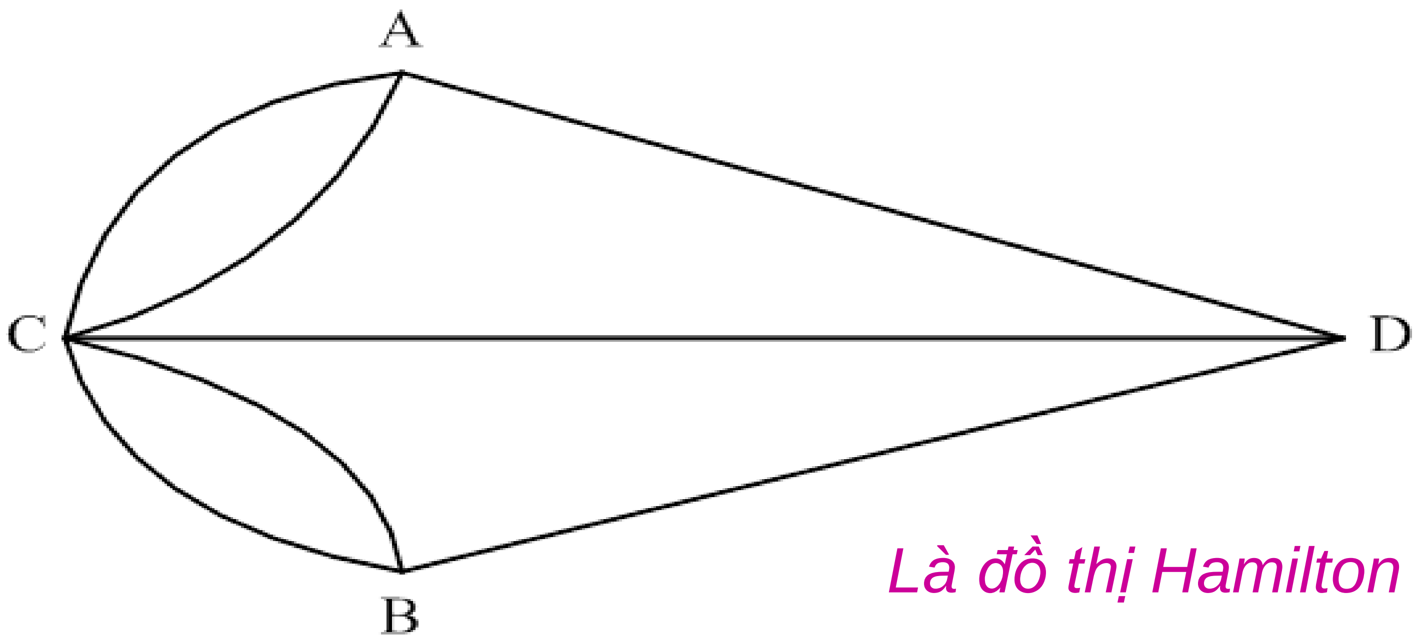
Do đó hành trình thỏa mãn các điều kiện đặt ra là không có. Bài toán đã được giải quyết.

ĐỒ THỊ HAMILTON

Định nghĩa.

Đồ thị G(X, V) liên thông gọi là đồ thị Hamilton nếu nó chứa một chu trình đi qua tất cả các đỉnh, mỗi đỉnh một lần.

Thí dụ



Là đồ thị Hamilton

Không phải là đồ thị Euler

Hình 6.14

CÁCH NHẬN BIẾT 1 ĐỒ THỊ LÀ ĐỒ THỊ HAMILTON

Điều kiện đủ - Định lý Dirac (1952)

Cho $G(X, V)$ là một đồ thị đơn; liên thông và có n đỉnh.

Nếu $\alpha\left(x\right) > \dfrac{n}{2}\ \forall x \in X$ thì $G(X, V)$ là đồ thị Hamilton.

ỨNG DỤNG CỦA ĐỒ THỊ HAMILTON

- ***Bài toán người đưa thư:*** Một nhân viên bưu điện, xuất phát từ trạm bưu điện mà anh ta làm việc, cần chuyển n bức thư đến n địa chỉ khác nhau, mỗi nơi chỉ đến 1 lần rồi trở về trạm bưu điện, hãy tìm một hành trình ngắn nhất?

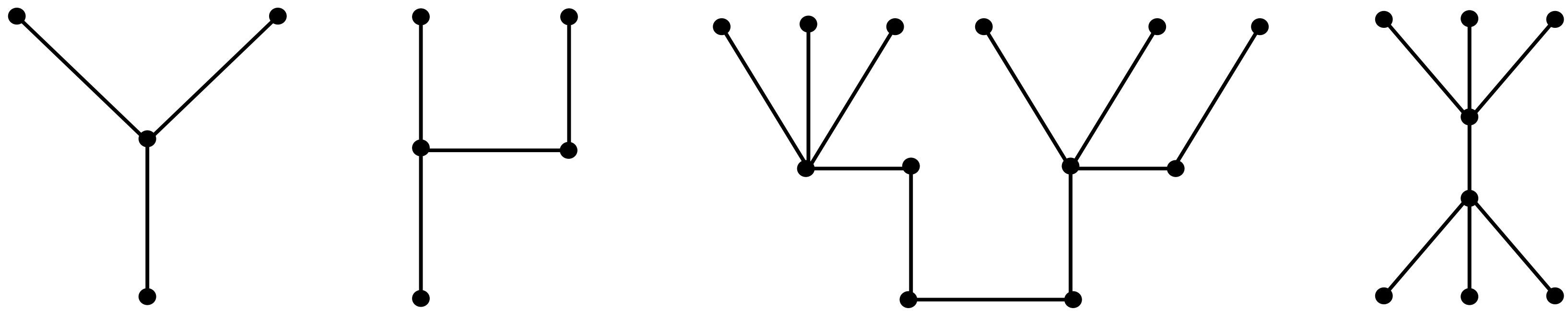
  Mỗi hành trình như thế là một chu trình Hamilton. Theo định lý Dirac nếu bậc của tất cả các đỉnh đều > n/2 thì bài toán có lời giải. Nhưng đây chỉ là điều kiện đủ; nếu có một đỉnh nào đó có bậc <=n/2 thì vẫn chưa thể khẳng định được rằng đồ thị không phải là đồ thị Hamilton.

  → Do đó vấn đề đặt ra trước tiên là có chu trình Hamilton hay không, nếu không có thì bài toán trở nên vô nghĩa.

CÂY

Định nghĩa

Cây là đồ thị vô hướng, liên thông và không có chu trình.



Hình 6.15

- Độ dài của một cây là số cạnh của cây đó.
- Một cây chứa tất cả các đỉnh của đồ thị gọi là cây bao trùm hoặc là cây khung của đồ thị đó.
- Một đồ thị liên thông có thể chứa nhiều cây bao trùm khác nhau.

ĐỊNH LÝ 6 MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG

Cho $G = (X, V)$ là đồ thị vô hướng liên thông có n đỉnh và m cạnh. Khi đó ta có các mệnh đề tương đương:

- G là 1 cây tức là G liên thông và không chứa chu trình
- G không chứa chu trình và có $m = (n - 1)$ cạnh.
- G liên thông và có $m = (n - 1)$ cạnh.
- G không chứa chu trình và nếu thêm 1 cạnh nối 2 đỉnh không kề nhau thì xuất hiện đúng 1 chu trình.
- G liên thông và nếu bỏ đi 1 cạnh tùy ý thì sẽ được một đồ thị bộ phận không liên thông
(nghĩa là mất tính liên thông).
- Mỗi cặp đỉnh của G được nối với nhau bởi một xích (hay dây chuyền) duy nhất!

SỐ LƯỢNG CÂY BAO TRÙM

Cho một đồ thị vô hướng đủ, có n đỉnh:

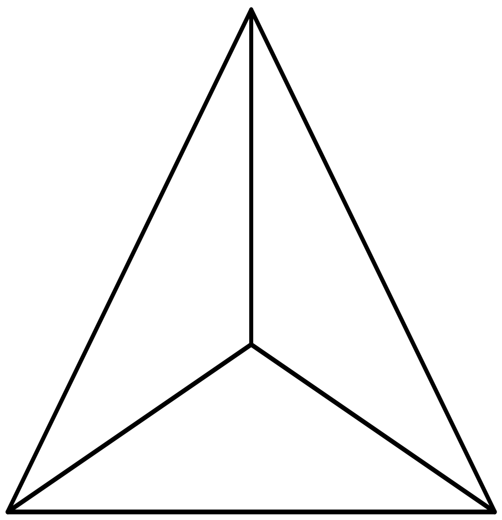
$$G = (X, V); \quad |X| = n; \quad |V| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Định lý Kelly (1889)

Với n đỉnh cho trước thì có đúng n^{n-2} cây bao trùm khác nhau.

Thí dụ: *Đồ thị đủ 4 đỉnh*

Có: $T_4 = 4^{4-2} = 4^2 = 16$ *cây*



Hình 6.16

TÓM LƯỢC BÀI HỌC

1. Đồ thị có hướng

2. Đồ thị vô hướng

3. Cây