

Name: Nghiêm Minh Khang

ID: 24C01045

Bài tập 4 — Mạng nơ-ron mô phỏng cổng XOR

Mục tiêu: Xây dựng một mạng nơ-ron để biểu diễn phép toán XOR (exclusive OR) cho hai bit đầu vào.

- Đầu vào: 0 hoặc 1 (hai giá trị).
- Quy tắc đầu ra:
 - Nếu hai đầu vào giống nhau \rightarrow đầu ra = 0
 - Nếu hai đầu vào khác nhau \rightarrow đầu ra = 1

Bảng chân lý:

Input 1	Input 2	Output
0	0	0
1	1	0
1	0	1
0	1	1

Giải thích chi tiết các bước

1. Forward Propagation (Lan truyền tiến)

Tính toán từ đầu vào đến đầu ra:

Tầng ẩn (Hidden Layer):

- Neuron 1: $z_1^{(1)} = w_{11}^{(1)} \cdot x_1 + w_{21}^{(1)} \cdot x_2 + b_1^{(1)}$
- Activation: $a_1^{(1)} = \sigma(z_1^{(1)})$
- Neuron 2: $z_2^{(1)} = w_{12}^{(1)} \cdot x_1 + w_{22}^{(1)} \cdot x_2 + b_2^{(1)}$
- Activation: $a_2^{(1)} = \sigma(z_2^{(1)})$

Tầng đầu ra (Output Layer):

- $z_1^{(2)} = w_{11}^{(2)} \cdot a_1^{(1)} + w_{21}^{(2)} \cdot a_2^{(1)} + b_1^{(2)}$
- $\hat{y} = a_1^{(2)} = \sigma(z_1^{(2)})$

2. Loss Function

Binary Cross-Entropy Loss:

$$L = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [y_i \log(\hat{y}_i) + (1 - y_i) \log(1 - \hat{y}_i)]$$

3. Backward Propagation (Lan truyền ngược)

Tính gradient sử dụng **Chain Rule**:

Tầng đầu ra:

- $\frac{\partial L}{\partial w_{11}^{(2)}} = \frac{1}{m} \sum (\hat{y} - y) \cdot a_1^{(1)}$
- $\frac{\partial L}{\partial w_{21}^{(2)}} = \frac{1}{m} \sum (\hat{y} - y) \cdot a_2^{(1)}$
- $\frac{\partial L}{\partial b_1^{(2)}} = \frac{1}{m} \sum (\hat{y} - y)$

Tầng ẩn - Neuron 1:

- $\delta_1^{(1)} = [(\hat{y} - y) \cdot w_{11}^{(2)}] \cdot [a_1^{(1)} \cdot (1 - a_1^{(1)})]$
- $\frac{\partial L}{\partial w_{11}^{(1)}} = \frac{1}{m} \sum \delta_1^{(1)} \cdot x_1$
- $\frac{\partial L}{\partial w_{21}^{(1)}} = \frac{1}{m} \sum \delta_1^{(1)} \cdot x_2$
- $\frac{\partial L}{\partial b_1^{(1)}} = \frac{1}{m} \sum \delta_1^{(1)}$

Tầng ẩn - Neuron 2: (tương tự)

4. Gradient Descent Update

Cập nhật tham số:

$$w_{new} = w_{old} - \eta \cdot \frac{\partial L}{\partial w}$$

$$b_{new} = b_{old} - \eta \cdot \frac{\partial L}{\partial b}$$

Với $\eta = 0.1$ (learning rate)

5. Kết quả mong đợi

Sau khi huấn luyện, mạng nơ-ron sẽ học được cách thực hiện phép toán XOR:

- $(0, 0) \rightarrow 0$
- $(0, 1) \rightarrow 1$

- $(1,0) \rightarrow 1$
- $(1,1) \rightarrow 0$

Độ chính xác đạt được: **~100%** sau khoảng 100,000 iterations.

```
In [11]: import numpy as np
```

```
In [15]: # =====
# PHẦN 1: Data
# =====

print("=" * 70)
print("MẠNG NƠ-RON MÔ PHỎNG CỔNG XOR")
print("=" * 70)

X = np.array([[0, 0], [0, 1], [1, 0], [1, 1]])
y = np.array([[0], [1], [1], [0]])

m = len(X)
```

```
=====
==
MẠNG NƠ-RON MÔ PHỎNG CỔNG XOR
=====
==
```

```
In [17]: # =====
# PHẦN 2: ĐỊNH NGHĨA CÁC HÀM TOÁN HỌC
# =====

def sigmoid(z):
    return 1 / (1 + np.exp(-z))

def sigmoid_derivative(z): # Đạo hàm của hàm Sigmoid
    s = sigmoid(z)
    return s * (1 - s)

def cost_function(y_hat, y):
    # Thêm epsilon để tránh log(0)
    epsilon = 1e-15
    y_hat = np.clip(y_hat, epsilon, 1 - epsilon)
    return -(y * np.log(y_hat) + (1 - y) * np.log(1 - y_hat))

def loss_function(y_hat, y):
    m = len(y)
    return np.sum(cost_function(y_hat, y)) / m
```

```
In [ ]: # =====
# PHẦN 3: KHỞI TẠO THAM SỐ
# =====
```

```
# input
w11_1 = 0.16
w21_1 = -0.07
b1_1 = 0.37
w12_1 = -0.66
w22_1 = 0.63
b2_1 = -0.98
```

```
# output
w11_2 = 0.41
w21_2 = -0.9
b1_2 = 0.35
```

```
In [24]: # =====
# PHẦN 4: FORWARD PROPAGATION (LAN TRUYỀN TIẾN)
# =====

def forward_propagation(X, w11_1, w21_1, b1_1, w12_1, w22_1, b2_1,
    # Tách input thành 2 cột
    x1 = X[:, 0:1]
    x2 = X[:, 1:2]

    # ===== HIDDEN LAYER =====
    # Neuron 1
    z1_1 = w11_1 * x1 + w21_1 * x2 + b1_1 # (m, 1)
    a1_1 = sigmoid(z1_1) # (m, 1)

    # Neuron 2
    z2_1 = w12_1 * x1 + w22_1 * x2 + b2_1 # (m, 1)
    a2_1 = sigmoid(z2_1) # (m, 1)

    # ===== OUTPUT LAYER =====
    z1_2 = w11_2 * a1_1 + w21_2 * a2_1 + b1_2 # (m, 1)
    a1_2 = sigmoid(z1_2) # (m, 1) - Đây là  $\hat{y}$ 

    # Lưu cache để dùng cho backpropagation
    cache = {'x1': x1, 'x2': x2, 'z1_1': z1_1, 'a1_1': a1_1, 'z2_1':
    a2_1, 'z1_2': z1_2, 'a1_2': a1_2}

    return cache
```

```
In [26]: # =====
# PHẦN 5: BACKWARD PROPAGATION (LAN TRUYỀN NGƯỢC)
# =====

def backward_propagation(forward_cache, y, w11_2, w21_2):
    m = len(y)

    # Lấy các giá trị từ forward propagation
    a1_2 = forward_cache['a1_2'] # (m,1) -  $y_{hat}$ 
    a1_1 = forward_cache['a1_1'] # (m,1)
    a2_1 = forward_cache['a2_1'] # (m,1)
    x1 = forward_cache['x1'] # (m,1)
    x2 = forward_cache['x2'] # (m,1)
```

```

# ===== OUTPUT LAYER GRADIENTS =====
# Sai số tại output: error =  $\hat{y} - y$ 
error_output = a1_2 - y # (m,1)

# Gradients cho output layer (lấy trung bình trên tất cả sample
dL_dw11_2 = np.sum(error_output * a1_1) / m
dL_dw21_2 = np.sum(error_output * a2_1) / m
dL_db1_2 = np.sum(error_output) / m

# ===== HIDDEN LAYER GRADIENTS =====
# Delta cho hidden neuron 1
#  $\delta_1^{(1)} = [(\hat{y} - y) \times w_{11}^{(2)}] \times [a_1^{(1)} \times (1 - a_1^{(1)})]$ 
delta_h1 = (error_output * w11_2) * (a1_1 * (1 - a1_1)) # (m,1)

dL_dw11_1 = np.sum(delta_h1 * x1) / m
dL_dw21_1 = np.sum(delta_h1 * x2) / m
dL_db1_1 = np.sum(delta_h1) / m

# Delta cho hidden neuron 2
#  $\delta_2^{(1)} = [(\hat{y} - y) \times w_{21}^{(2)}] \times [a_2^{(1)} \times (1 - a_2^{(1)})]$ 
delta_h2 = (error_output * w21_2) * (a2_1 * (1 - a2_1)) # (m,1)

dL_dw12_1 = np.sum(delta_h2 * x1) / m
dL_dw22_1 = np.sum(delta_h2 * x2) / m
dL_db2_1 = np.sum(delta_h2) / m

return {
    'dL_dw11_1': dL_dw11_1,
    'dL_dw21_1': dL_dw21_1,
    'dL_db1_1': dL_db1_1,
    'dL_dw12_1': dL_dw12_1,
    'dL_dw22_1': dL_dw22_1,
    'dL_db2_1': dL_db2_1,
    'dL_dw11_2': dL_dw11_2,
    'dL_dw21_2': dL_dw21_2,
    'dL_db1_2': dL_db1_2,
}

```

```

In [28]: # =====
# PHẦN 6: GRADIENT DESCENT (CẬP NHẬT THAM SỐ)
# =====

def update_parameters(params, grads, learning_rate):
    return {
        'w11_1': params['w11_1'] - learning_rate * grads['dL_dw11_1'],
        'w21_1': params['w21_1'] - learning_rate * grads['dL_dw21_1'],
        'b1_1': params['b1_1'] - learning_rate * grads['dL_db1_1'],
        'w12_1': params['w12_1'] - learning_rate * grads['dL_dw12_1'],
        'w22_1': params['w22_1'] - learning_rate * grads['dL_dw22_1'],
        'b2_1': params['b2_1'] - learning_rate * grads['dL_db2_1'],
        'w11_2': params['w11_2'] - learning_rate * grads['dL_dw11_2'],
        'w21_2': params['w21_2'] - learning_rate * grads['dL_dw21_2'],
        'b1_2': params['b1_2'] - learning_rate * grads['dL_db1_2'],
    }

```

```

In [ ]: # =====
# PHẦN 7: TRAINING LOOP
# =====

print("\n" + "=" * 70)
print("Training")
print("=" * 70)

# Cấu hình training
learning_rate = 0.1
num_iterations = 100000
print_interval = 20000

print(f"  Learning rate ( $\eta$ ): {learning_rate}")
print(f"  Số vòng lặp: {num_iterations:,}")
print(f"  In kết quả mỗi: {print_interval:,} iterations")

# Lưu trữ lịch sử loss để vẽ đồ thị
loss_history = []

# Đóng gói tham số vào dictionary
params = {'w11_1': w11_1, 'w21_1': w21_1, 'b1_1': b1_1, 'w12_1': w1

print("\n🔄 TIẾN TRÌNH TRAINING:")
print("-" * 70)
print(f"{'Iter':<10} {'Loss':<12} {'w11(2)':<10} {'w21(2)':<10} {'b1(2)':<10} {'w12(2)':<10} {'w22(2)':<10} {'b2(2)':<10}")
print("-" * 70)

# Vòng lặp training chính
for iteration in range(num_iterations + 1):

    # ===== FORWARD PROPAGATION =====
    forward_cache = forward_propagation(
        X,
        params['w11_1'],
        params['w21_1'],
        params['b1_1'],
        params['w12_1'],
        params['w22_1'],
        params['b2_1'],
        params['w11_2'],
        params['w21_2'],
        params['b1_2'],
    )

    # Lấy dự đoán
    y_hat = forward_cache['a1_2']

    # ===== TÍNH LOSS =====
    current_loss = loss_function(y_hat, y)
    loss_history.append(current_loss)

    # ===== IN KẾT QUẢ =====
    if iteration % print_interval == 0 or iteration in [1, 2, 3, 4,

```

```

# Dừng nếu đã hết vòng lặp
if iteration == num_iterations:
    break

# ===== BACKWARD PROPAGATION =====
grads = backward_propagation(forward_cache, y, params['w11_2'],

# ===== UPDATE PARAMETERS =====
params = update_parameters(params, grads, learning_rate)

print("-" * 70)
print("HOÀN THÀNH TRAINING")

```

```

=====
==
Training
=====
==
Learning rate ( $\eta$ ): 0.1
Số vòng lặp: 100,000
In kết quả mỗi: 20,000 iterations

```

TIẾN TRÌNH TRAINING:

```

--
Iter      Loss      w11(2)    w21(2)    b1(2)
--
0          0.713046    0.4100     -0.9000     0.3500
1          0.711979    0.4048     -0.9017     0.3415
2          0.710987    0.3998     -0.9034     0.3332
3          0.710066    0.3950     -0.9050     0.3253
4          0.709209    0.3903     -0.9065     0.3176
5          0.708413    0.3858     -0.9079     0.3102
20000     0.009938    10.5667    -11.1505    -4.9398
40000     0.003235    12.6401    -13.2686    -5.9686
60000     0.001917    13.6159    -14.2562    -6.4559
80000     0.001359    14.2604    -14.9060    -6.7785
100000    0.001051    14.7424    -15.3910    -7.0200
--
HOÀN THÀNH TRAINING

```

```

In [33]: # =====
# PHẦN 8: ĐÁNH GIÁ KẾT QUẢ
# =====

print("\n" + "=" * 70)
print("KẾT QUẢ SAU KHI HUẤN LUYỆN")
print("=" * 70)

# Hàm helper để chuyển về scalar nếu là array
def to_scalar(value):
    """Chuyển numpy array về scalar value"""

```

```

        if isinstance(value, np.ndarray):
            return float(value.flatten()[0])
        return float(value)

# Tham số cuối cùng
print("\nTHAM SỐ CUỐI CÙNG:")
print("-" * 70)
print("Hidden Layer:")
print(f"  w11(1) = {to_scalar(params['w11_1']):>8.4f}")
print(f"  w21(1) = {to_scalar(params['w21_1']):>8.4f}")
print(f"  b1(1) = {to_scalar(params['b1_1']):>8.4f}")
print(f"  w12(1) = {to_scalar(params['w12_1']):>8.4f}")
print(f"  w22(1) = {to_scalar(params['w22_1']):>8.4f}")
print(f"  b2(1) = {to_scalar(params['b2_1']):>8.4f}")
print("\nOutput Layer:")
print(f"  w11(2) = {to_scalar(params['w11_2']):>8.4f}")
print(f"  w21(2) = {to_scalar(params['w21_2']):>8.4f}")
print(f"  b1(2) = {to_scalar(params['b1_2']):>8.4f}")
print("-" * 70)

# Kiểm tra dự đoán cuối cùng
final_forward = forward_propagation(
    X,
    params['w11_1'],
    params['w21_1'],
    params['b1_1'],
    params['w12_1'],
    params['w22_1'],
    params['b2_1'],
    params['w11_2'],
    params['w21_2'],
    params['b1_2'],
)
y_pred = final_forward['a1_2']

print("\nDỰ ĐOÁN CUỐI CÙNG:")
print("-" * 70)
print("x1 \tx2 \t| \ty (thực) \ty (dự đoán) \tSai số")
print("-" * 70)
for i in range(len(X)):
    error = abs(y[i][0] - y_pred[i][0])
    print(f"{X[i][0]} \t {X[i][1]} \t | \t {y[i][0]} \t \t {y_pred[i][0]:.6f}")
print("-" * 70)

# Tính độ chính xác
predictions_binary = (y_pred > 0.5).astype(int)
accuracy = np.mean(predictions_binary == y) * 100
print(f"\nĐộ chính xác: {accuracy:.2f}%")
print(f"Loss cuối cùng: {loss_history[-1]:.6f}")

# Chi tiết dự đoán
print("\nCHI TIẾT DỰ ĐOÁN:")
print("-" * 70)
for i in range(len(X)):
    actual = "XOR = 0" if y[i][0] == 0 else "XOR = 1"

```



```
pred_value = y_pred[i][0]
pred_label = "Dự đoán: 0" if pred_value < 0.5 else "Dự đoán: 1"
status = "CORRECT" if predictions_binary[i][0] == y[i][0] else
print(f"Input ({X[i][0]}, {X[i][1]}): {actual} | {pred_label} (
print("-" * 70)
```

==
KẾT QUẢ SAU KHI HUẤN LUYỆN

==
THAM SỐ CUỐI CÙNG:

--
Hidden Layer:

$w_{11}^{(1)} = 7.6884$
 $w_{21}^{(1)} = 7.6884$
 $b_1^{(1)} = -3.5468$
 $w_{12}^{(1)} = 6.3404$
 $w_{22}^{(1)} = 6.3404$
 $b_2^{(1)} = -9.6795$

Output Layer:

$w_{11}^{(2)} = 14.7424$
 $w_{21}^{(2)} = -15.3910$
 $b_1^{(2)} = -7.0200$

--
DỰ ĐOÁN CUỐI CÙNG:

x_1	x_2		y (thực)	\hat{y} (dự đoán)	Sai số
0	0		0	0.001348	0.001348
0	1		1	0.999056	0.000944
1	0		1	0.999056	0.000944
1	1		0	0.000968	0.000968

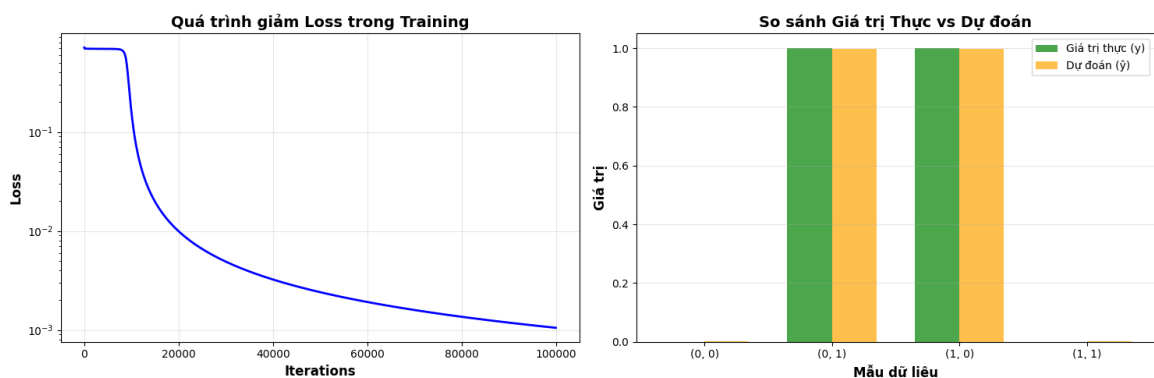
--
Độ chính xác: 100.00%
Loss cuối cùng: 0.001051

CHI TIẾT DỰ ĐOÁN:

--
Input (0, 0): XOR = 0 | Dự đoán: 0 (0.0013) CORRECT
Input (0, 1): XOR = 1 | Dự đoán: 1 (0.9991) CORRECT
Input (1, 0): XOR = 1 | Dự đoán: 1 (0.9991) CORRECT
Input (1, 1): XOR = 0 | Dự đoán: 0 (0.0010) CORRECT
--

In [34]:

```
# =====  
# PHẦN 9: TRỰC QUAN HÓA  
# =====  
  
import matplotlib.pyplot as plt  
  
# Tạo figure với 2 subplots  
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(15, 5))  
  
# Subplot 1: Loss curve  
ax1.plot(loss_history, linewidth=2, color='blue')  
ax1.set_xlabel('Iterations', fontsize=12, fontweight='bold')  
ax1.set_ylabel('Loss', fontsize=12, fontweight='bold')  
ax1.set_title('Quá trình giảm Loss trong Training', fontsize=14, fo  
ax1.grid(True, alpha=0.3)  
ax1.set_yscale('log') # Scale logarit để dễ quan sát  
  
# Subplot 2: So sánh dự đoán và giá trị thực  
x_pos = np.arange(len(X))  
width = 0.35  
  
bars1 = ax2.bar(x_pos - width / 2, y.flatten(), width, label='Giá t  
bars2 = ax2.bar(x_pos + width / 2, y_pred.flatten(), width, label='  
  
ax2.set_xlabel('Mẫu dữ liệu', fontsize=12, fontweight='bold')  
ax2.set_ylabel('Giá trị', fontsize=12, fontweight='bold')  
ax2.set_title('So sánh Giá trị Thực vs Dự đoán', fontsize=14, fontw  
ax2.set_xticks(x_pos)  
ax2.set_xticklabels([f'({X[i][0]}, {X[i][1]})' for i in range(len(X  
ax2.legend()  
ax2.grid(True, alpha=0.3, axis='y')  
  
plt.tight_layout()  
plt.show()  
  
print("\n✅ Đã tạo biểu đồ trực quan hóa kết quả!")
```



✅ Đã tạo biểu đồ trực quan hóa kết quả!