

## Bài tập 1 - Tìm phân tích suy biến svd của một ma trận

Sử dụng hàm **svd** của package **scipy** trong Python để viết một chương trình cho phép tính dạng phân tích suy biến của ma trận dưới đây:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

# Thuật toán

- ▶ Đầu vào: Ma trận  $A$ .
- ▶ Đầu ra: Ma trận  $U$ ,  $V^T$  và  $\Sigma$ .

## Các bước làm bài:

1. Khai báo thư viện cần dùng, thư viện `scipy.linalg`
2. Nhập ma trận  $A$
3. Dùng hàm `svd` lên ma trận  $A$  để tính ma trận  $U$ ,  $V^T$  và vector  $S\_diag$ . Lưu ý: các phần tử của vector  $S\_diag$  đều không âm và được sắp xếp theo thứ tự giảm dần.
4. Tạo ra ma trận  $\Sigma$  từ vector  $S\_diag$ 
  - 4.1 Tạo ma trận không cấp  $k \times k$ .
  - 4.2 Thay đường chéo của ma trận không bằng các phần tử của  $S\_diag$ .
  - 4.3 Thêm hàng/cột 0 vào  $\Sigma$  để cùng dạng với ma trận  $A$  ban đầu.
5. Xuất kết quả.

## Compact SVD

Giả sử trên đường chéo chính của ma trận  $\Sigma$  có  $r$  giá trị khác 0. Nghĩa là

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0.$$

Ta có thể biểu diễn SVD dưới dạng tổng của các vector cột  $u_i \in \mathbb{R}^n$  của  $U$  và vector dòng  $v_i \in \mathbb{R}^n$  của  $V^T$  như sau:

$$A = \sum_{i=1}^r u_i \lambda_i v_i. \quad (2)$$

Từ đó, ta có một dạng SVD gọn hơn gọi là **compact SVD**

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T \quad (3)$$

trong đó

- ▶  $U_r$  và  $V_r$  lần lượt là ma trận được tạo bởi  $r$  cột đầu tiên của  $U$  và  $V$ .
- ▶  $\Sigma_r$  là ma trận được tạo bởi  $r$  hàng đầu tiên và  $r$  cột đầu tiên của  $\Sigma$ .