Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh
Khoa Toán-Tin học
Học kì 2, Năm học 2014-2015
Giảng viên: Huỳnh Quang Vũ

Giải tích hàm – TTH104 - Lớp TTH1
Kiểm Tra 1

Yêu cầu: Thời gian làm bài là 60 phút. Được sử dụng tài liệu giấy. Không được sử dụng các phương tiện điện tử. Được sử dụng các kết quả trong giáo trình nhưng phải chỉ rõ. Có thể sử dụng kết quả các câu hỏi trước để giải câu hỏi sau.

Xét $X = C([0,1],\mathbb{R})$, không gian các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$ với chuẩn

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}.$$

Đặt $M = \{f \in X \mid f(0) = 0\}$.

1. (2 điểm) Chứng tỏ M là một không gian vectơ con của X. *Đã biết X là không gian vectơ. Chỉ cần kiểm tổng hai phần tử của M nằm trong M và tích một số thực với một phần tử của M nằm trong M.*

2. (1 điểm) Cho ví dụ hai phần tử độc lập tuyến tính của M. *$\{x, x^2\}$, hay $\{x, \sin x\}$, hay $\{\sin x, \sin 2x\}$, hay $\{\sin x, e^x - 1\}$. Cần chứng minh sự độc lập tuyến tính.*

3. (2 điểm) Chứng tỏ nếu một dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trong X hội tụ về f thì với mỗi $x \in [0,1]$ dãy số thực $(f_n(x))_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về số thực $f(x)$. Nói ngắn gọn: hội tụ đều thì hội tụ từng điểm. *Cho $\varepsilon > 0$, có $N \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $n > N$ thì $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$. Do đó với mọi $x \in [0,1]$, khi $n > N$ thì $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Vậy $f_n(x)$ hội tụ về $f(x)$.*

4. (2 điểm) Chứng tỏ M là một tập con đóng của X. *Giả sử dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trong M hội tụ về $f \in X$. Ta cần chứng minh $f \in M$. Vì $f_n(0)$ hội tụ về $f(0)$ (câu trên) nên $f(0) = 0$. Vậy $f \in M$.*

5. (2 điểm) Chứng tỏ với chuẩn thừa hưởng từ X thì M là một không gian Banach. *Không gian con đóng của một không gian Banach là không gian Banach (nếu không chứng minh thì phải chỉ rõ nguồn 1.14, Chương 1.)*

6. (1 điểm) Với chuẩn $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ thì M có là không gian Banach không? *Có thể sửa ví dụ đã thảo luận để được một dãy Cauchy trong M nhưng không hội tụ, ví dụ với $n \geq 1$,*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \\ \frac{1}{\frac{1}{2n}}\left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\right), & \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Các chi tiết lặp lại phần đã học, chỉ cần tóm tắt.

7. (thưởng, 1 điểm) M là không gian vectơ hữu hạn chiều hay vô hạn chiều? *Vô hạn chiều. Chẳng hạn với $n \in \mathbb{Z}^+$, xét $\{x, x^2, \ldots, x^n\} \subset M$. Khi đó $\sum_{i=1}^n \alpha_i x^i = 0$ thì $\alpha_i = 0$ với mọi i, vì một đa thức bậc n có không quá n nghiệm. Vậy với n bất kì M luôn có n vectơ độc lập tuyến tính, do đó M không thể là hữu hạn chiều.*

——— Hết ———