HOÀNG CÔNG ĐỨC
THIỀU QUANG BÌNH – TRẦN TUẤN KIỆT – NGUYỄN ANH LỘC
(LỚP 12A$_1$ – NĂM HỌC 2012-2013)

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC

LỜI NÓI ĐẦU

Bài toán phương trình, hệ phương trình, bất phương trình (PT-HPT-BPT) trong đề thi tuyển sinh đại học thường được đánh giá là câu khó thứ 2 trong 10 câu mà mỗi thí sinh phải làm. Nó khó bởi vì nó có thể xuất hiện ở rất nhiều dạng khác nhau. Tuy nhiên, trong nhiều tài liệu, chúng tôi thấy các bài toán thường được chia ra thành rất nhiều phương pháp và kĩ thuật giải, gây khó khăn cho người đọc khi muốn nắm rõ hết nội dung, hoặc là không phù hợp với độ khó của đề thi chính thức. Khá nhiều bạn tỏ ra lúng túng khi phải đối mặt với những bài toán này, bởi vì họ không biết nên chọn cách nào để làm trong số rất nhiều cách đã học. Vì lý do đó, chúng tôi làm chuyên đề này với mục đích chia sẻ cho các bạn một số kinh nghiệm và phương pháp mà chúng tôi thấy là cần thiết nhất để giải quyết chúng. Chúng tôi sẽ không đưa ra hàng loạt các phương pháp như ở các tài liệu khác, mà chỉ một số ít những phương pháp hiệu quả nhất, nhưng với một số lượng nhỏ cách đó các bạn vẫn có thể giải được phần lớn các bài PT-HPT-BPT trong các đề thi tuyển sinh đại học. Tuy nhiên, có một khó khăn của các phương pháp này, đó là các bạn sẽ phải tính toán, khai triển biểu thức nhiều hơn so với các cách khác (hay có thể nói đây là các phương pháp "thực dụng"), và do đó, đòi hỏi các bạn phải có kĩ năng tính toán tốt. Luyện tập tính toán để đổi lại việc chỉ phải học một số lượng nhỏ phương pháp, theo chúng tôi thì đó là việc nên làm. Tuy vậy các phương pháp ở đây cũng chỉ giải quyết được phần lớn chứ không phải là toàn bộ, và nói chung là không có bất kì một phương pháp cụ thể nào có thể giải quyết được tất cả các bài toán dạng này cả, nhưng có một điều chúng tôi mong các bạn nhớ rõ, đó là phải quan sát kĩ, rồi dựa vào những kiến thức đã biết để đưa ra hướng tiếp cận cho từng bài toán, chứ không nên cắm đầu vào làm ngay lúc vừa mới đọc đề mà chưa có một ý tưởng nào. Và ngay cả chúng tôi, những người viết chuyên đề này, cũng không đủ khả năng để giải hết chúng! Chuyên đề này chủ yếu mang đến những kinh nghiệm và một vài phương pháp thường được sử dụng khi giải PT-HPT-BPT. Chúng tôi hi vọng nó sẽ là một tài liệu hữu ích cho các bạn đang ôn thi đại học.

Chuyên đề này tập trung vào kinh nghiệm và một số phương pháp giải nên chúng tôi sẽ không nhắc lại kĩ đến những kiến thức cơ bản về dạng toán này, nó đã được đề cập đến đầy đủ trong sách giáo khoa Đại số 10. Chúng tôi sẽ chỉ nhắc lại một số phần mà có nhiều bạn thường hay mắc lỗi. Do đó các bạn nên nắm chắc và hiểu rõ những kiến thức cơ bản về phương trình, bất phương trình, hệ phương trình, đồng thời luyện cho mình một kĩ năng tính toán, khai triển, biến đổi biểu thức tốt để có thể sử dụng tốt chuyên đề này.

Kĩ năng trình bày cũng là một điều rất quan trọng, vì nếu trình bày không tốt, rất có thể bạn sẽ bị mất điểm oan. Ở chuyên đề này chúng tôi đã trình bày hầu hết lời giải một cách cẩn thận, các bạn hoàn toàn có thể tham khảo để làm cách trình bày cho bản thân khi làm bài thi. Lời giải chi tiết không chứa phần chữ in nghiêng, đây là phần phân tích lời giải để các bạn dễ hiểu hơn thôi.

Nhóm thực hiện chuyên đề

PHẦN I – PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Trước tiên chúng ta sẽ tìm hiểu về một kĩ năng rất hữu ích trong việc giải các bài phương trình đa thức. Các bạn sẽ dần dần thấy được sự hữu ích của nó trong suốt chuyên đề này.

1. Sử dụng máy tính cầm tay để giải các phương trình đa thức

Máy tính cầm tay là một công cụ được phép mang vào phòng thi. Việc biết sử dụng nó hiệu quả sẽ là một lợi thế rất lớn khi giải toán, đặc biệt là trong việc giải phương trình. Dưới đây chúng tôi sẽ nói về máy fx-570 ES và fx-570 ES PLUS.

Phương trình đa thức là phương trình có dạng $P(x)=0$, trong đó $P(x)$ là một đa thức biến *x*, là một hàm số biến *x* có dạng $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ với $a_0,a_1,...,a_n$ là các số thực cho trước, $a_n\neq 0$, gọi là các hệ số, *n* là bậc của đa thức, cũng là bậc của phương trình. Chẳng hạn như các phương trình sau:

$$x^2+2x-3=0 \quad (1)$$
$$x^2+4x+6=0 \quad (2)$$
$$x^3-3x^2-5x+7=0 \quad (3)$$
$$x^4-5x^3+7x^2-x-2=0 \quad (4)$$
$$x^4-2x^3-4x^2-17x-20=0 \quad (5)$$

Với 3 phương trình đầu, các bạn có thể dễ dàng sử dụng máy tính để giải, bằng cách sử dụng MODE-5-3 cho phương trình (1), (2) và MODE-5-4 cho phương trình (3). Thế nhưng máy tính cầm tay chỉ cung cấp chức năng giải phương trình bậc 2 và 3, không có bậc cao hơn. Do đó để giải các phương trình như (4) và (5) hoặc bậc cao hơn nữa, ta cần có một số kĩ thuật để sử dụng linh hoạt kết hợp nhiều chức năng của máy tính.

Đối với những phương trình bậc cao này, nếu như các hệ số là số nguyên hoặc ta có thể nhân 2 vế của phương trình cho cùng một số để được các hệ số nguyên (đa phần các trường hợp đều như vậy), ta có thể kiểm tra xem nó có nghiệm hữu tỉ hay không. Nếu có, ta sẽ chia đa thức ban đầu cho đa thức $x-x_0$ với x_0 là nghiệm vừa tìm được, đưa về việc giải phương trình có bậc thấp hơn. Có một tiêu chuẩn để tìm các nghiệm hữu tỉ, đó là nếu $x=\dfrac{a}{b},a,b\in Z,b\neq 0$ là nghiệm của phương trình $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0=0$ thì *a* là ước của a_0 và *b* là ước của a_n. Cụ thể, đối với phương trình (4), ta sẽ làm như sau: Thử lần lượt các số 1,2,-1,-2 (theo tiêu chuẩn ở trên thì chỉ có những số này mới có thể là nghiệm hữu tỉ của phương trình), ta thấy 1 và 2 là nghiệm của (4). Như vậy, đầu tiên ta sẽ chia đa thức đó cho $x-1$ và $x-2$. Chia $x^4-5x^3+7x^2-x-2$ cho $x-1$, ta được x^3-4x^2+3x+2, lại chia đa thức này cho $x-2$, ta được x^2-2x-1. Cuối cùng ta chỉ cần giải nốt phương trình $x^2-2x-1=0$ là kết thúc bài toán. Lời giải chi tiết như sau:

$$(4) \Leftrightarrow (x-1)(x^3-4x^2+3x+2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x^2-2x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x^2-2x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=1\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Lưu ý: Ta nên dùng chức năng CALC của máy tính để việc đoán nghiệm nguyên được thực hiện nhanh và dễ dàng hơn.

Bây giờ ta thử xét tới phương trình (5) xem sao. Đầu tiên ta thử xem phương trình có nghiệm nguyên nào không. Tuy nhiên, tất cả các số $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20$ đều không phải là nghiệm của phương trình. Điều này có nghĩa là phương trình (5) không có nghiệm nguyên, mà như vậy thì không thể làm giống như trên được. Thực tế thì phương trình (5) tương đương với:

$$(x^2-3x-5)(x^2+x+4)=0$$

Như vậy, chỉ cần ta tìm được cách phân tích kiểu như trên là coi như giải quyết xong bài toán. Chẳng hạn, nếu biết được rằng có thể tách được nhân tử x^2-3x-5 thì ta có thể làm như sau:

$$x^4-2x^3-4x^2-17x-20$$
$$=x^4-3x^3-5x^2+x^3-3x^2-5x+4x^2-12x-20$$
$$=x^2(x^2-3x-5)+x(x^2-3x-5)+4(x^2-3x-5)$$
$$=(x^2-3x-5)(x^2+x+4)$$

Tuy nhiên việc tìm được x^2-3x-5 không hề đơn giản. Đây chính là lúc máy tính cầm tay thể hiện rõ ưu thế của nó.

Thử nghĩ xem, phải làm sao để tìm được biểu thức x^2-3x-5? Để ý rằng, 2 nghiệm của phương trình (5) cũng chính là 2 nghiệm của phương trình $x^2-3x-5=0$, mà nếu tìm được 2 nghiệm này thì sẽ tìm được biểu thức trên (bằng định lý Viete). Vậy có thể sử dụng máy tính để tìm tất cả các nghiệm của phương trình (5) này không?

Thử tìm một nghiệm của (5) bằng chức năng SOLVE với giá trị đầu của x là 0, ta được một nghiệm vô tỉ $x_0 \approx -1,192582404$. Bây giờ, nếu như ta có thể chia đa thức ban đầu cho đa thức $x-x_0$ thì ta sẽ đưa về được một phương trình bậc 3 và có thể sử dụng chức năng MODE 5-4 để tìm tất cả các nghiệm còn lại, như vậy là có thể làm được điều ta cần rồi. Nhưng vấn đề là ở chỗ chia cho đa thức $x-x_0$, x_0 là số vô tỉ nên không thể thực hiện "tính tay" như thông thường được. Ta cần có một "công thức" để có thể thực hiện thông qua máy tính cầm tay. Và để tìm "công thức" này, ta sẽ quay lại với những trường hợp đơn giản hơn, chẳng hạn như phương trình (4).

Ở phương trình (4), ta cần chia đa thức $x^4-5x^3+7x^2-x-2$ cho đa thức $x-1$.

Ta có: $x^4-5x^3+7x^2-x-2=(x-1)(x^3-4x^2+3x+2)$.

Hãy nhìn vào bảng sau:

	1	-5	7	-1	-2
1	1	$1.1-5=-4$	$1.-4+7=3$	$1.3-1=2$	$1.2-2=0$

Ta có các điều sau:

+) Các số ở hàng thứ nhất là các hệ số của đa thức $x^4-5x^3+7x^2-x-2$

+) Ở hàng thứ 2, kết quả của phép tính ở các ô từ cột thứ 2 đến thứ 5 lần lượt là các hệ số của đa thức thương (x^3-4x^2+3x+2), ô đầu tiên là số 1 trong biểu thức $x-1$, ô cuối cùng là số dư trong phép chia

+) Các phép tính được thiết lập theo quy tắc: ô ở cột thứ 2 bằng với ô ở ngay trên nó, từ ô ở cột thứ 3 trở đi, ta lấy số ở cột đầu tiên (ở đây là số 1) nhân với số ở cột trước đó rồi cộng với số cùng cột ở hàng trên (nghe có vẻ phức tạp, tuy nhiên các bạn đừng lo, khi thực hiện sẽ thấy đơn giản hơn nhiều).

+) Số 0 ở ô cuối cùng có nghĩa là phép chia này không có dư.

Điều này có nghĩa là, bằng việc thực hiện các phép tính như ở trên (khá dễ), ta có thể hoàn thành được phép chia đa thức mà không cần phải kẻ phép tính cồng kềnh như đã học ở THCS. Để làm rõ hơn, ta sẽ tiếp tục một ví dụ khác.

Ta có: $x^4-5x^3+7x^2-x-2=(x-2)(x^3-3x^2+x+1)$

	1	-5	7	-1	-2
2	1	$2.1-5=-3$	$2.-3+7=1$	$2.1-1=1$	$2.1-2=0$

Thêm một bài nữa: $3x^5+5x^4+x^3+8x^2+2x-1=(x+2)(3x^4-x^3+3x^2+2x-2)+3$

	3	5	1	8	2	-1
-2	3	$-2.3+5=-1$	$-2.-1+1=3$	$-2.3+8=2$	$-2.2+2=-2$	$-2.-2-1=3$

Bây giờ ta sẽ dùng bảng này để thực hiện thử 1 phép chia đa thức. (các bạn đã nắm được quy tắc tính, chúng tôi sẽ không ghi lại nữa mà chỉ ghi kết quả)

- Ví dụ 1.1: Chia đa thức x^4-9x^2+x+5 cho đa thức $x+3$.

Giải

	1	0	-9	1	5
-3	1	-3	0	1	2

Dựa vào bảng trên, ta suy ra đa thức cần tìm là x^3-3x^2+1. Đồng thời, ta cũng tìm được đa thức dư là 2. Vậy: $x^4-9x^2+x+5=(x+3)(x^3-3x^2+1)+2$.

Nếu các bạn cảm thấy chưa thành thạo thì có thể tập làm với bài tập sau:

- Ví dụ 1.2: Thực hiện các phép chia đa thức:

1. $(x^4-6x^3+7x^2+x-3):(x-1)$ (ĐS: x^3-5x^2+2x+3)
2. $(3x^5-5x^4-4x^3+8x^2-9x+2):(x-2)$ (ĐS: $3x^4+x^3-2x^2+4x-1$)
3. $(2x^4+5x^3-2x^2-4x+1):(x+1)$ (ĐS: $2x^3+3x^2-5x+1$)

4. $(x^4 - x^3 - 11x^2 + 8x + 15) : (x+3)$ (ĐS: $x^3 - 4x^2 + x + 5$)

5. $(x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 4) : (x-1)$ (ĐS: $x^3 + 3x^2 + 4x - 1$, dư 3)

6. $(2x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 5x - 2) : (x+2)$ (ĐS: $2x^3 + 5x^2 - 4x + 3$. Dư -8)

Lưu ý: Bảng trên chỉ được dùng để thực hiện phép chia cho đa thức dạng $x-k$, do đó nếu muốn chia cho đa thức $ax-b$ thì thay vào đó, ta sẽ chia cho đa thức $x - \frac{b}{a}$ rồi chia đa thức thương cho a. Một điểm hay nhầm lẫn khác đó là chỗ dấu –, tức là nếu chia cho các đa thức như $x-1$ hay $x-2$ thì số ở cột đầu tiên phải là 1, 2; còn nếu chia cho các đa thức như $x+1$ hay $x+3$ thì số ở cột đầu phải là -1, -3.

Bước tiếp theo, ta sẽ tìm cách thực hiện chia theo quy tắc trên, nhưng hoàn toàn bằng máy tính cầm tay, bởi vì, các kết quả liên quan đến số vô tỉ (viết dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn) không thể ghi ra giấy được. Ta phải tìm cách ghi lại tất cả những số cần thiết vào bộ nhớ của máy. Cụ thể, những số cần thiết ở đây chính là các hệ số của đa thức thương. Và ta sẽ lại bắt đầu với những bài toán cụ thể trước.

Quay trở lại với một bài cũ: *Chia đa thức* $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - x - 2$ *cho đa thức* $x-2$. Ta sẽ thực hiện như sau:

+) Hệ số đầu tiên chắc chắn là 1, do đó ta không cần lưu số này vào bộ nhớ.

+) Hệ số tiếp theo sẽ là $1.2 - 5 = -3$, như vậy ta sẽ bấm 1 × 2 – 5 SHIFT STO A.

+) Lúc này, giá trị của biến Ans cũng đang là giá trị của A (ta cũng có thể sử dụng A nhưng nếu sử dụng cách này thì bạn sẽ phải bấm ít hơn), và tiếp tục như trên, ta sẽ bấm Ans × 2 + 7 SHIFT STO B.

+) Bây giờ Ans lại trở thành giá trị của B, tương tự ta sẽ bấm Ans × 2 – 1 SHIFT STO C.

+) Tiếp tục bấm Ans × 2 – 2 = thì sẽ được kết quả là 0 (chắc chắn sẽ được kết quả là 0 bởi vì đây là ô cuối cùng của bảng, tức số dư của phép chia, mà do $x=2$ là nghiệm của đa thức trên nên số dư chắc chắn là 0). Kết quả này không có ý nghĩa trong việc tìm kết quả nên ta sẽ không lưu nó vào bộ nhớ của máy.

Như vậy, qua các bước trên, ta tìm được đa thức thương là $x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Ta không cần biết cụ thể A, B, C bằng bao nhiêu, máy tính đã ghi nhớ giúp ta. Bây giờ chỉ cần sử dụng MODE 5-4 rồi nhập các hệ số trên vào là có thể tìm được tất cả các nghiệm còn lại của $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - x - 2 = 0$. Tức là ta đã tìm được tất cả các nghiệm của phương trình.

Bây giờ chúng ta đến với công việc còn dang dở khi nãy, đó là giải phương trình (5):

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 17x - 20 = 0$$

+) Cũng như đã làm, ban đầu ta sẽ dùng chức năng SOLVE để tìm được một nghiệm của (5), và nếu lấy giá trị đầu là 0 (giá trị khi máy hỏi SOLVE FOR X ?) thì sẽ tìm được một nghiệm $x_1 \approx -1{,}192582404$ và nghiệm này đang được lưu ở biến X của máy.

+) Nhấn 1 rồi = (1 là hệ số đầu tiên, bước này dùng để lưu giá trị 1 cho biến Ans, làm cho các bước tính các hệ số tiếp theo có cùng một dạng, dễ nhớ).

+) Nhập Ans × X – 2 SHIFT STO A.

+) Nhập Ans × X – 4 SHIFT STO B.
+) Nhập Ans × X – 17 SHIFT STO C.

Nếu các bạn bấm tiếp Ans × X – 20 = thì chắc chắn sẽ được kết quả là 0 (số dư của phép chia), do đó việc này không cần thiết. Tuy nhiên, theo chúng tôi, các bạn nên thử thực hiện phép tính này để kiểm tra xem có sai sót gì không. Nếu kết quả khác 0 thì chắc chắn có sai sót ở các bước trên, phải kiểm tra và làm lại, còn nếu kết quả là 0 thì nhiều khả năng là các bạn đã làm đúng và có thể chuyển sang bước kế tiếp.

+) Lúc này, ta đã có $x^4-2x^3-4x^2-17x-20=(x-x_1)(x^3+Ax^2+Bx+C)$ với A, B, C là các hệ số được lưu trong máy. Để tìm các nghiệm còn lại của phương trình, ta chỉ cần giải phương trình $x^3+Ax^2+Bx+C=0$. Và như đã nói ở trên, ta chỉ việc sử dụng MODE 5-4, nhập các giá trị vào các ô lần lượt là 1, A, B, C. Bằng cách này, ta tìm được thêm một nghiệm nữa của phương trình là $x_2\approx 4{,}192582404$.

+) Bây giờ ta đã có tất cả 2 nghiệm của phương trình. Lại dùng máy tính, ta dễ dàng thấy được $x_1+x_2=3$ và $x_1.x_2=-5$. Các bạn cứ sử dụng số gần đúng để tính vẫn ra được kết quả **rất gần** với số chính xác bởi vì 2 số gần đúng kia cũng sai khác rất ít so với số chính xác (chẳng hạn như trong bài vừa rồi, chúng tôi tính được kết quả của $x_1.x_2$ là -5,000000002). Từ kết quả đó, ta suy ra x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình $x^2-3x-5=0$. Điều này có nghĩa là ta có thể tách được nhân tử x^2-3x-5 từ biểu thức $x^4-2x^3-4x^2-17x-20$. Dựa vào điều này, ta biến đổi phương trình trên thành: $(x^2-3x-5)(x^2+x+4)=0$, tức là ta đã giải quyết xong bài toán!

Sau cả một quá trình dài, ta đã giải được phương trình (5). Tuy nhiên việc trình bày lại đơn giản hơn rất nhiều so với những công việc mà ta đã phải làm. Lời giải chi tiết như sau:

Ta có: $(5)\Leftrightarrow(x^2-3x-5)(x^2+x+4)=0$

$\Leftrightarrow x^2-3x-5=0$ (vì $x^2+x+4=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$

Chú ý: Bước chia đa thức ở bài này có một chút cải tiến so với bài trước, và theo chúng tôi thì việc đó giúp cho chúng ta dễ nhớ và dễ thực hiện hơn. Qua bài trên, có lẽ các bạn đã nắm được rõ cách sử dụng máy tính để chia đa thức cho đơn thức dạng $x-k$ rồi, do đó chúng tôi sẽ không ghi lại các bước tổng quát nữa. Đồng thời, các bạn cần nhớ rằng quy trình chia được thực hiện liên tục, do đó nếu có sai sót ở bất kì bước nào thì phải thay đổi biểu thức cho thích hợp hoặc phải làm lại từ đầu. Nếu các bạn thấy mình chưa thành thạo thì có thể quay lại làm những bài ví dụ ở trên (nếu các bạn có làm thì hãy nhớ thực hiện luôn cả phép tính cuối cùng vì các ví dụ đó không phải luôn luôn chia hết như khi chia đa thức trong lúc giải phương trình!).

Chúng ta sẽ thử với một ví dụ nữa:

Ví dụ 1.3: Giải phương trình: $x^4+2x^3-9x^2-10x-2=0$

Với ví dụ này, chúng ta cũng sẽ làm giống như lần trước.

+) Đầu tiên, dùng chức năng SOLVE để tìm 1 nghiệm của phương trình với giá trị đầu cho X là 0 (làm vậy chỉ để cho kết quả của chúng tôi và các bạn ra giống nhau, tiện lợi cho việc hướng dẫn, còn trên thực tế, ta chọn giá trị đầu sao cho giá trị đó càng gần với nghiệm càng tốt), ta được $x_1\approx -0,267949192$.

+) Nhấn 1 và =.

+) Nhập Ans × X + 2 SHIFT STO A.

+) Nhập Ans × X – 9 SHIFT STO B.

+) Nhập Ans × X – 10 SHIFT STO C.

+) Tính Ans × X – 2 và kiểm tra xem kết quả có bằng 0 hay không (nếu bạn thấy cần thiết).

+) Sử dụng MODE 5-4, nhập các số vào các ô lần lượt là 1, A, B, C, ta tìm được **3** nghiệm nữa là:

$x_2\approx 2,732050808$

$x_3\approx -3,732050808$

$x_4\approx -0,732050807$

+) Tìm 2 nghiệm có tổng và tích là số nguyên. Gọi S, P lần lượt là tổng và tích, khi đó ta sẽ tách nhân tử x^2-Sx+P từ đa thức ban đầu, đưa nó về dạng tích của 2 đa thức bậc 2 rồi giải từng phương trình bậc 2.

Bài trước chỉ có 2 nghiệm thực nên ta dễ dàng kiểm tra tổng và tích của cặp nghiệm đó. Còn ở bài này, ngoài x_1 ra phương trình còn có thêm tới 3 nghiệm nữa. Ta sẽ phải tìm trong 3 số x_2,x_3,x_4 một số sao cho tổng và tích của x_1 và số đó đều là số hữu tỉ. Ta sẽ thử tổng trước rồi đến tích sau. Dễ dàng kiểm tra được $x_1+x_3=-4$ và $x_1+x_4=-1$ là 2 kết quả số nguyên (lần này ta vẫn dùng số gần đúng giống như ở bài trên). Tiếp theo ta thử tính tích của 2 cặp trên thì chỉ có phép tính $x_1.x_3=1$ là cho kết quả số nguyên. Như vậy từ cặp x_1,x_3 ta tìm được một nhân tử là x^2+4x+1. Tách nhân tử này ra là coi như ta đã giải quyết xong bài toán. Lời giải như sau:

$$(5)\Leftrightarrow (x^2+4x+1)(x^2-2x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x+1=0 \\ x^2-2x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x=-2\pm\sqrt{3} \quad \vee \quad x=1\pm\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x=-2\pm\sqrt{3}$ và $x=1\pm\sqrt{3}$.

Có một lưu ý mà trong các bài trên các bạn không thấy đó là trường hợp tổng hoặc tích của 2 nghiệm là 1 số hữu tỉ nhưng không phải số nguyên. Nếu là kết quả số nguyên thì ta có thể dễ dạng nhận ra được, nhưng nếu là số hữu tỉ không phải là số nguyên thì khó nhận ra hơn vì kết quả được hiển thị dưới dạng số thập phân, và cũng không đổi ra phân số được vì ta đang tính gần đúng! Nếu là số thập phân hữu hạn thì cũng không khó, chỉ hơi khác trường hợp số nguyên chút xíu, còn nếu không thì là số thập phân hữu hạn tuần hoàn, nếu trường hợp này xảy ra thì các chữ số ở phần thập phân sẽ thay đổi **tuần hoàn**. Vì vậy khi thấy kết quả không là số nguyên thì cũng đừng kết luận ngay đây không phải là số cần tìm! Tuy nhiên các bạn cũng đừng quá lo lắng vì điều này chỉ xảy ra khi hệ số đầu tiên khác 1 (ở cả 2 bài trên hệ số đầu đều là 1).

Cũng có trường hợp không có cặp nghiệm nào mà có tổng, tích là các số hữu tỉ. Tuy nhiên, theo chúng tôi thì trường hợp đó không thể xảy ra đối với bài toán phương trình, hệ phương trình trong đề thi đại học.

Qua các ví dụ trên, chúng tôi đã cho các bạn thấy được các bước để giải được một phương trình đa thức bậc 4 bằng máy tính cầm tay (các phím trên là của máy fx-570 ES và fx-570-ES PLUS, đối với máy 570 MS thì vẫn làm được tương tự và chỉ khác ở một vài nút). Cách vừa nêu ở trên có thể tìm được tất cả các nghiệm của phương trình đa thức bậc 4, còn việc kiểm tra nghiệm hữu tỉ như ở phần đầu thì các bạn có thể làm hay không tùy thích, có khi nó giúp làm ra nhanh hơn, nhưng cũng có khi chậm hơn vì phải thử một số lượng lớn nghiệm. Còn nếu gặp phương trình bậc 5, thì trên thực tế, theo kinh nghiệm của chúng tôi khi giải phương trình trong các đề thi đại học, thường thì sẽ có nghiệm hữu tỉ. Vì vậy cứ thử tìm nghiệm hữu tỉ rồi chuyển sang giải phương trình bậc 4 như cách ở trên. Còn với phương trình bậc 6 trở lên thì rất khó đoán, và thường thì sẽ có cách giải khác và không cần đưa về giải phương trình bậc 6.

Trên thực tế thì các bạn sẽ không bao giờ gặp một đề bài yêu cầu giải một phương trình bậc 4 cả. Tuy nhiên, có nhiều bài toán có thể giải dễ dàng nếu các bạn biết giải một phương trình đa thức bậc cao, hoặc đôi khi các bạn có thể dùng để phân tích một đa thức thành nhân tử. Như đã nói ở đầu, các bạn sẽ dần thấy được ứng dụng của nó qua suốt chuyên đề này. Cuối cùng chúng tôi xin tóm tắt lại các bước để xử lý một phương trình đa thức bậc cao (lớn hơn 3) như sau:

+) Nếu bậc lớn hơn 4 thì dò nghiệm nguyên, chia đa thức để tách nhân tử đến khi còn bậc 4.
+) SOLVE 1 nghiệm của phương trình, chia đa thức và lưu kết quả vào các biến nhớ.
+) Dùng MODE 5-4 tìm các nghiệm còn lại của phương trình.
+) Dùng định lý Viete để tìm nhân tử từ các nghiệm.
+) Trình bày lời giải.

Để thành thạo kĩ năng hơn, các bạn thử giải một số phương trình sau:

- Ví dụ 1.4: Giải các phương trình:

1. $x^4-2x^3-9x^2+16x-6=0$
2. $x^4-7x^2-24x-15=0$
3. $2x^4+11x^3+22x^2+30x+12=0$
4. $x^4-6x^3+7x^2+2x-3=0$
5. $x^4+x^3-27x^2-8x+12=0$
6. $2x^4+5x^3-2x^2-4x-1=0$
7. $2x^4-x^3-13x^2+5x+12=0$

Đáp số:

1) -3; 1; $2\pm\sqrt{2}$ 2) $\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ 3) $-2\pm\sqrt{2}$ 4) $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$

5) $2\pm2\sqrt{2};\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$ 6) 1; $-\dfrac{1}{2};\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 7) $\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2};\dfrac{3\pm\sqrt{41}}{2}$

Ngoài ra, các bạn cũng có thể tự thực hành bằng cách lấy tùy ý một biểu thức có dạng $(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)$ với các hệ số là các số nguyên, khai triển nó ra thành biểu thức bậc 4 như các bài trên, rồi dùng máy tính để đi tìm lại. Nếu sợ biết trước kết quả thì có thể rủ 2 người cùng thực hành, người này ra đề cho người kia giải.

Tiếp theo, chúng ta bắt đầu đi vào các phương pháp để giải các bài toán phương trình trong đề thi đại học.

2. Phương pháp biến đổi trực tiếp

Ở phương pháp này, chúng ta chỉ thực hiện các biến đổi tương đương hoặc hệ quả để giải các phương trình, còn đối với bất phương trình thì ta chỉ được thực hiện biến đổi tương đương.

Một lưu ý đầu tiên mà chúng tôi muốn nhắc các bạn đó là điều kiện xác định. Đó là thứ đầu tiên các bạn nên ghi vào, và nó cũng khá đơn giản để xác định, cho nên sẽ là rất đáng tiếc nếu như các bạn để mất điểm vì quên làm phần này.

Chúng ta sẽ đến với ví dụ đầu tiên:

Ví dụ 2.1: Giải phương trình:

$$\sqrt{-x^2+4x}+2=2x$$

<u>Giải</u>

ĐK: $0\le x\le 4$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{-x^2+4x}=2x-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2\ge 0 \\ -x^2+4x=4x^2-8x+4 \end{cases} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ 5x^2-12x+4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ (x-2)(5x-2) \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Các bạn hãy chú ý bước (*) của lời giải trên. Trong quá trình biến đổi tương đương, ta đã làm xuất hiện thêm một điều kiện là $x\ge 2$. Điều chúng tôi muốn nhắc các bạn là khi thực hiện biến đổi tương đương, các bạn phải chú ý thật kĩ, đặc biệt là lúc bình phương 2 vế của phương trình. Nhầm lẫn giữa biến đổi tương đương và biến đổi hệ quả sẽ có thể tạo ra thêm nghiệm khác mà không thỏa mãn phương trình (nghiệm ngoại lai), dẫn đến lời giải sai! Để kiểm tra xem một biến đổi có tương đương hay không, bạn có thể thử biến đổi ngược lại xem có đúng không, nếu đúng thì đó là phép biến đổi tương đương.

Tuy nhiên, nếu không muốn làm bằng biến đổi tương đương thì các bạn cũng có thể biến đổi hệ quả ($\Rightarrow$) như sau:

$\sqrt{-x^2+4x}=2x-2$

$\Rightarrow -x^2+4x=4x^2-8x+4$

$\Leftrightarrow 5x^2-12x+4=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(5x-2)=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=\dfrac{2}{5}$

Thử lại ta thấy chỉ có $x=2$ là nghiệm của phương trình.

Có thể dùng biến đổi hệ quả để giải, và nếu dùng cách này thì đến bước cuối phải thử lại xem nghiệm có thỏa mãn phương trình hay không.

Ví dụ 2.2: Giải phương trình:

$$\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-1}=0$$

Giải

ĐK: $x\geq 1$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow 5x-1=4x-3+2\sqrt{(3x-2)(x-1)}$

$\Leftrightarrow x+2=2\sqrt{3x^2-5x+2}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4=12x^2-20x+8$

$\Leftrightarrow 11x^2-24x+4=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(11x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$

(do $11x-2>0$)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Ví dụ 2.3: Giải phương trình:

$$x^2-1=\sqrt{x+1}$$

Giải

ĐK: $x\geq -1$.

Ta có:

$x^2-1=\sqrt{x+1}$

$\Rightarrow x^4-2x^2+1=x+1$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2-x=0$

$\Leftrightarrow x(x+1)(x^2-x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Thử lại, ta thấy chỉ có $x=-1$ và $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=-1$ và $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Qua 2 ví dụ trên, ta có thể rút ra được một kinh nghiệm khi gặp các phương trình có căn thức, đó là có thể bình phương, lập phương, hoặc mũ cao hơn (nhưng thường thì chỉ bình phương), nếu lũy thừa bậc chẵn thì cẩn thận khi biến đổi tương đương. Ta chỉ cần tìm cách phân chia các biểu thức căn vào 2 vế của phương trình sao cho số lần lũy thừa 2 vế càng ít càng tốt. Nếu phương trình thu được sau khi khử hết căn là một phương trình bậc 4,5 hoặc thấp hơn thì ta có thể dễ dàng tìm được tất cả các nghiệm của nó, dựa vào máy tính cầm tay theo phương pháp mà ta đã được biết ở trên.

Chúng ta tiếp tục với một vài ví dụ nữa.

Ví dụ 2.4: Giải phương trình:

$$x^2+\sqrt{x+5}=5$$

<u>Giải</u>

ĐK: $x\geq -5$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$x^2-5=-\sqrt{x+5}\Rightarrow (x^2-5)^2=x+5$$

$$\Leftrightarrow x^4-10x^2-x+20=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-4)(x^2-x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-4=0 \\ x^2-x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy chỉ có 2 giá trị $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ và $x=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ và $x=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$.

Ví dụ 2.5: Giải phương trình:

$$\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$$

<u>Giải</u>

ĐK: $x\geq\frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$x^2 - 3x + 1 = -\sqrt{2x-1}$$
$$\Rightarrow (x^2 - 3x + 1)^2 = 2x - 1$$
$$\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 8x + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 - 5x^2 + 6x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 - 4x + 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy $x = 1$ và $x = 2 - \sqrt{2}$ là 2 giá trị thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x = 1$ và $x = 2 - \sqrt{2}$.

Ví dụ 2.6: Giải phương trình:

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 1} - \sqrt{3x^2 + 5x - 7} = 2$$

Giải

ĐK: $x \le \dfrac{-5 - \sqrt{109}}{6} \vee x \ge \dfrac{-5 + \sqrt{109}}{6}$.

Phương trình đã cho tương đương:

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 2 + \sqrt{3x^2 + 5x - 7}$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 5x + 1 = 3x^2 + 5x - 3 + 4\sqrt{3x^2 + 5x - 7}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 5x - 7} = 1$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 7 = 1$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(3x-8) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \vee \quad x = \frac{8}{3}$$

Các nghiệm trên đều thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = -1$ và $x = \dfrac{8}{3}$.

Có thể thấy, cách chuyển vế và bình phương trong các bài trên được áp dụng chủ yếu đối với các phương trình chứa căn thức. Hầu hết các bài, nếu số lượng biểu thức căn không lớn thì ta có thể sử dụng cách này để làm, miễn là có cách để cho sau khi khử hết các biểu thức căn, phương trình thu được có bậc không quá cao (chỉ khoảng 4,5). Và để biết có tồn tại cách đó không, ta cần một chút quan sát, đánh giá trước khi bắt đầu giải một cách cụ thể.

Có một kinh nghiệm để thực hiện việc này, đó là chú ý đến "bậc" của phương trình. "Bậc" ở đây cũng tương tự như bậc của đa thức, tuy nhiên được hiểu rộng hơn một chút. Nếu biểu thức có dạng đa thức thì bậc của nó giống như bậc đa thức. Nếu biểu thức có chứa mẫu thì tìm cách khử mẫu đi rồi tính tiếp. Nếu biểu thức có dạng căn thức thì bậc bằng với bậc của biểu thức trong căn chia cho bậc căn thức (tức là nếu là căn bậc 2 thì lấy bậc ở trong chia cho 2). Nếu biểu thức có dạng tích của các biểu thức thì bậc của biểu thức bằng tổng các bậc của các thừa số. Bậc của phương trình là bậc của biểu thức có bậc cao nhất sau khi khử hết mẫu. Khi bình phương 2 vế mà không đơn giản được số hạng bậc cao nhất thì bậc của phương trình tăng gấp đôi. Cụ thể với 1 bài như sau:

Ví dụ 2.7: Giải phương trình:

$$(x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12$$

<u>Giải</u>

ĐK: $-\sqrt{10} \le x \le \sqrt{10}$.

Quan sát ta thấy, phương trình chỉ có một căn thức, do đó ta để số hạng có căn thức về một vế, các số hạng còn lại ở vế còn lại. Khi đó, bậc của vế có căn thức là 2, bậc vế còn lại cũng là 2 nên bậc của phương trình cũng là 2. Do có một biểu thức căn nên chỉ cần bình phương một lần là khử được hết căn thức, đồng thời bậc của phương trình khi đó sẽ là 4, tức là có thể giải được. Như vậy ta sẽ bình phương 2 vế phương trình.

Ta có:

$$(x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12$$
$$\Rightarrow (x^2+6x+9)(10-x^2) = (x^2-x-12)^2$$
$$\Leftrightarrow -x^4 - 6x^3 + x^2 + 60x + 90 = x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144$$
$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 18x + 27 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3+3x^2-9x-27) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x^2-9) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x+3)^2$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = 3 \quad \vee \quad x = -3$$

Thử lại ta thấy chỉ có $x = 3$ là nghiệm của phương trình ban đầu.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Để nắm rõ thêm, chúng ta quay lại với các ví dụ trước:

+) Ở ví dụ 2.1, có một biểu thức căn, bậc của phương trình là 1.

+) Ở ví dụ 2.2, có 3 biểu thức căn, bậc của phương trình là 0,5, sau khi bình phương 1 lần thì còn 1 biểu thức căn, bậc của phương trình là 1.

+) Ở ví dụ 2.3, 2.4, 2.5, có 1 biểu thức căn, bậc của phương trình là 2.

+) Ở ví dụ 2.6, có 2 biểu thức căn, bậc của phương trình là 1.

Như vậy ta thấy rằng, nếu có nhiều hơn 1 biểu thức có căn thức thì ta thường phải bình phương 2 lần. Do đó những trường hợp này cần phải chú ý kĩ xem bậc có quá cao không. Còn một điều các bạn cũng nên lưu ý, đó là trong trường hợp có nhiều căn thức thì ta nên ưu tiên phá các biểu thức căn có bậc cao trước.

Lại nói về vấn đề biến đổi tương đương, biến đổi hệ quả. Các lời giải được nêu ra ở trên chủ yếu dùng cách biến đổi hệ quả. Sở dĩ như vậy vì cách này có vẻ “an toàn” hơn, và chỉ cần phải thêm một bước thử lại ở cuối. Vì vậy, khi làm bài thi chính thức, nếu không phải là bất phương trình thì ta nên dùng cách này cho an toàn.

Ví dụ 2.8: Giải phương trình:

$$\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(3+x)(6-x)}=3$$

Giải

ĐK: $-3\le x\le 6$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=3+\sqrt{(3+x)(6-x)}$$
$$\Leftrightarrow 9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}=9+6\sqrt{(3+x)(6-x)}+(3+x)(6-x)$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x-18=4\sqrt{-x^2+3x+18}$$
$$\Rightarrow (x^2-3x-18)^2=-16(x^2-3x-18)$$
$$\Leftrightarrow (x^2-3x-18)(x^2-3x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-18=0 \\ x^2-3x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+3)(x-6)=0 \\ x^2-3x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \vee x=6 \\ x=\dfrac{9\pm\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy chỉ có $x=-3$ và $x=6$ là nghiệm của phương trình.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-3$ và $x=6$.

Cách lập luận để tìm lời giải cho bài trên cũng giống như các ví dụ trước. Tuy nhiên, một điều đặc biệt khiến cho hướng giải này thành công đó là việc tích của 2 biểu thức căn "nhỏ" bằng biểu thức căn "lớn". Nhờ điều này mà sau khi bình phương 2 vế, phương trình thu được chỉ còn một căn thức và có thể phá hết căn thức bằng cách bình phương một lần nữa, đưa về phương trình đa thức bậc 4. Đây là một điều các bạn nên lưu ý.

Ví dụ 2.9: Giải phương trình

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{x^2-4}-2x+2$$

Giải

ĐK: $x\ge 2$

Ta có:

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{x^2-4}-2x+2$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2})^2=(2\sqrt{x^2-4}-2x+2)^2$$
$$\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x^2-4}=8x^2-8x-12-(8x-8)\sqrt{x^2-4}$$
$$\Leftrightarrow (4x-3)\sqrt{x^2-4}=4x^2-5x-6$$
$$\Rightarrow (16x^2-24x+9)(x^2-4)=(4x^2-5x-6)^2$$
$$\Leftrightarrow 16x^4-24x^3-55x^2+96x-36=16x^4-40x^3-23x^2+60x+36$$

$\Leftrightarrow 16x^3 - 32x^2 + 36x - 72 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^3 - 8x^2 + 9x - 18 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(4x^2 + 9) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

Ý tưởng phá căn thức bằng cách lũy thừa 2 vế cũng có thể áp dụng cho bất phương trình. Tuy nhiên, nghiệm của bất phương trình thường là một vài khoảng chứ không phải là một vài giá trị cụ thể như phương trình. Vì thế, ta không thể thử lại nghiệm như đã làm đối với phương trình, và đó chính là lý do khiến ta buộc phải biến đổi tương đương khi làm bất phương trình.

Ví dụ 2.10: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x+4} > \sqrt{x+3}$$

<u>Giải</u>

ĐK: $x \geq -3$

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{x+5} > \sqrt{x+3} + \sqrt{x+4}$

$\Leftrightarrow x + 5 > 2x + 7 + 2\sqrt{(x+3)(x+4)}$

$\Leftrightarrow -x - 2 > 2\sqrt{x^2 + 7x + 12}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x < -2 \\ x^2 + 4x + 4 > 4x^3 + 28x + 48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x < -2 \\ 3x^2 + 24x + 44 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x < -2 \\ \dfrac{-12 - 2\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{-12 + 2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq x < \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[3; \dfrac{-12 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Ở bất phương trình, việc biến đổi tương đương không những chỉ bắt buộc, mà còn khó thực hiện hơn so với phương trình. Khi bình phương 2 vế của phương trình, dấu của bất phương trình (> ; <) cũng tác động đến việc biến đổi tương đương. Do đó có khá nhiều trường hợp khác nhau. Nhưng theo chúng tôi, các bạn không nên cố gắng học thuộc lòng tất cả chúng một cách máy móc làm gì, bởi vì nếu làm theo cách đó các bạn có thể nhầm lẫn các công thức với nhau, hoặc quên một vài công thức, nhất là khi phải làm bài trong dưới áp lực của phòng thi. Các bạn chỉ cần nhớ, tất cả các biến đổi tương đương thường dùng trong các bài toán bất phương trình trong đề thi đại học thường chỉ dựa trên các mệnh đề:

1. $A > B \Leftrightarrow A + C > B + C, \forall C \in \mathbb{R}$ (hay nói cách khác là có thể cộng trừ thoải mái!)
2. $A^2 > B^2 \Leftrightarrow |A| \geq |B|$ (điều này phải chú ý thật kĩ khi biến đổi)

3. Đặt $S = a_1a_2...a_n$ thì $S > 0$ khi và chỉ khi trong các số $a_1, a_2, ...a_n$, số các số âm là một số chẵn, còn $S < 0$ thì số các số âm là một số lẻ. Một hệ quả thường được sử dụng của mệnh đề này là nếu nhân 2 vế với một số âm thì phải đổi dấu của bất phương trình, còn với số dương thì giữ nguyên dấu.

Sử dụng các tiêu chuẩn trên, kết hợp với việc biến đổi ngược lại như đã nói ở trên, các bạn có thể tìm được các biến đổi tương đương đúng.

Ví dụ 2.11 (ĐHKB-2012): Giải bất phương trình:

$$x+1+\sqrt{x^2-4x+1} \geq 3\sqrt{x}$$

Giải

ĐK: $0 \leq x \leq 2-\sqrt{3} \vee x \geq 2+\sqrt{3}$ (I)

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$x-3\sqrt{x}+1 \geq -\sqrt{x^2-4x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x-3\sqrt{x}+1>0 & (1) \\ (x-3\sqrt{x}+1)^2 \leq x^2-4x+1 & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{x} > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} \\ x > \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \qquad \text{(II)}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2-6x\sqrt{x}+11x-6\sqrt{x}+1 \leq x^2-4x+1$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{x}-5x+2\sqrt{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{x} \geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x \leq \dfrac{1}{4} \\ x \geq 4 \end{array}\right. \qquad \text{(III)}$$

Kết hợp (I), (II) và (III), ta tìm được tập nghiệm của bất phương trình là:

$$S = \left[0; \frac{1}{4}\right] \cup [4; +\infty)$$

Một điểm đáng chú ý của lời giải trên là việc kết hợp các nghiệm. Một cách làm hiệu quả đó là biểu diễn các nghiệm trên trục số. Nếu gặp mệnh đề "A và B" thì ta tìm những khoảng **không** thỏa một trong các mệnh đề rồi "bỏ" những khoảng đó. Nếu gặp mệnh đề "A hoặc B" thì tìm những khoảng thỏa mãn một trong các điều kiện đó rồi "chọn" các khoảng đó. Nghiệm tìm được là những khoảng được "chọn" trong các khoảng chưa bị "bỏ".

Ví dụ 2.12 (ĐHKA-2010): Giải bất phương trình:

$$\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}}\geq 1$$

Giải

ĐK: $x\geq 0$.

Ta có: $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}\Rightarrow 1-\sqrt{2(x^2-x+1)}\leq 1-\sqrt{\frac{3}{2}}<0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$x-\sqrt{x}\leq 1-\sqrt{2(x^2-x+1)}$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-1\leq -\sqrt{2(x^2-x+1)}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\sqrt{x}-1\leq 0\\(x-\sqrt{x}-1)^2\geq 2(x^2-x+1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\sqrt{x}-1\leq 0\\x^2+2x\sqrt{x}-x-2\sqrt{x}+1\leq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\sqrt{x}-1\leq 0\\(x-\sqrt{x}-1)^2\leq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-1=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Có thể thấy rằng phương pháp ở trên đã giúp giải quyết được khá nhiều các phương trình vô tỉ thường gặp trong đề thi đại học. Và trong tất cả các lời giải trên, lời giải nào cũng đưa đến việc giải một phương trình đa thức (hoặc tương tự đó là phân tích đa thức đó thành các nhân tử có bậc không lớn hơn 2). Từ đây ta có thể thấy được vai trò to lớn của phương pháp giải phương trình đa thức bằng máy tính cầm tay được nhắc đến ở trên, đó cũng là lý do mà chúng tôi đặt nó làm phần đầu tiên của chuyên đề. Ưu điểm thì đã rõ, đó là có thể áp dụng khá rộng rãi, nhưng yêu cầu của phương pháp này là phải có kĩ năng biến đổi, khai triển biểu thức tốt. Có thể thấy rõ, trong các ví dụ trên, nếu kĩ năng này không tốt thì cũng không dễ dàng thực hiện tốt các biến đổi đó. Vì vậy, các bạn cần thực hành nhiều để rèn luyện cho mình kĩ năng này.

Qua các bài trên, các bạn đã phần nào thấy được những điều mà chúng tôi nhắc đến ở lời nói đầu, đó là tính "thực dụng" của phương pháp. Nó giúp chúng ta giải quyết được một phần lớn các bài toán phương trình, bất phương trình trong các đề thi đại học, nhưng đòi hỏi kĩ năng tính toán tốt. Khối lượng tính toán trong các bài giải trên là khá lớn, và nếu không quen thì cũng phải rất vất vả mới có thể thực hiện chúng một cách chính xác. Vì vậy, việc thực hành giải toán là rất quan trọng. Thông qua việc thực hành, các bạn sẽ rèn được những kinh nghiệm và kĩ năng cần thiết để xử lí chúng. Và để làm việc này, các bạn có thể tham khảo trong các đề thi thử đại học và một số bài chúng tôi đưa ra dưới đây.

Bài tập

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1. $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}$
2. $x^2=\sqrt{2-x}+2$
3. $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$
4. $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$
5. $\sqrt{2x-1}\le 8-x$
6. $\sqrt{5x-1}-\sqrt{4x-1}\le 3\sqrt{x}$
7. $\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2x^2-3x+1}\ge x-1$
8. $\sqrt{x-1}=-x^3-4x+5$
9. $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}=5$
10. $3\sqrt{x+2}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x$ (ĐHKB-2011)

3. Phương pháp đổi biến

Chúng ta bắt đầu bằng một ví dụ.

Ví dụ 3.1: Giải phương trình:

$$18x^2-18x+5=3\sqrt[3]{9x^2-9x+2}$$

Đây cũng là 1 phương trình chứa duy nhất 1 căn thức. Tuy nhiên, ta không thể áp dụng cách lũy thừa hai vế (cụ thể ở đây là mũ 3) để giải được, bởi vì khi đó sẽ trở thành phương trình bậc 6, khá khó để giải quyết (thường thì chỉ bậc 5 trở xuống ta mới dễ dàng giải quyết, còn bậc 6 thì tùy lúc), không những vậy, nếu mũ 3 cả hai vế thì ta còn phải khai triển biểu thức có dạng $(a+b+c)^3$, việc này không hề đơn giản. Tuy nhiên, như đã nói ở đầu chuyên đề, chúng cần có kĩ năng quan sát, đây chính là lúc thể hiện điều đó. Hãy để ý, biểu thức căn và biểu thức còn lại có giống nhau một chút, ở chỗ $9x^2-9x$ và $18x^2-18x$. Vì điều này, ta có thể viết biểu thức còn lại "theo" biểu thức căn như sau:

$$18x^2-18x+5=2(\sqrt[3]{9x^2-9x+2})^3+1$$

Và do đó, ta có thể viết lại phương trình đã cho:

$$2(\sqrt[3]{9x^2-9x+2})^3+1=3\sqrt[3]{9x^2-9x+2}$$

Hay là:

$$2y^3+1=3y \quad (*) \quad \text{với } y=\sqrt[3]{9x^2-9x+2}$$

Tuy nhiên phương trình (*) chỉ là một dạng cơ bản và ta có thể tìm được tất cả các nghiệm y của (*), và mỗi giá trị y ta lại tìm được các nghiệm x của phương trình ban đầu. Như vậy, nếu làm theo cách này thì ta sẽ giải quyết được bài toán. Lời giải cụ thể như sau:

Giải

Đặt $y=\sqrt[3]{9x^2-9x+2}$, khi đó $18x^2-18x+5=2y^3+1$.

Phương trình đã cho trở thành:

$2y^3+1=3y$

$\Leftrightarrow (y-1)(2y^2+2y-1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-1=0 \\ 2y^2+2y-1=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Mặt khác, ta có $y=\sqrt[3]{9x^2-9x+2}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}(2x-1)^2-\frac{1}{4}}\geq-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Do đó $y=1 \quad \vee \quad y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

+) Với $y=1$, ta có:

$\sqrt[3]{9x^2-9x+2}=1$

$\Leftrightarrow 9x^2-9x+1=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{6}$

+) Với $y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, ta có:

$\sqrt[3]{9x^2-9x+2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\Leftrightarrow 9x^2-9x+2=\frac{3\sqrt{3}-5}{4}$

$\Leftrightarrow 36x^2-36x+13-3\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3\sqrt{3}-4}}{6}$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{6}$ và $x=\frac{3\pm\sqrt{3\sqrt{3}-4}}{6}$.

Ở bài trên, ta đã nhờ vào việc có các biểu thức giống nhau để rồi thay tất cả chúng bằng một biểu thức theo một biến khác, bậc thấp hơn, đơn giản hơn, từ đó giải quyết bài toán. Chúng tôi gọi cách làm như vậy là **đổi biến**. Phương pháp này, theo chúng tôi, là khó chịu hơn so với những phương pháp mà chúng ta đã tìm hiểu ở trên. Các bạn phải nhìn ra được những biểu thức giống nhau trong phương trình, để làm được việc này, các bạn phải có kĩ năng quan sát, cùng với đó là một lượng kinh nghiệm nhất định (ở bài trên, chúng tôi phát hiện được sự "giống nhau" của $9x^2-9x$ và $18x^2-18x$ trước, rồi dựa vào kinh nghiệm là cần phải làm cho mất căn trước, từ đó tìm cách biến đổi biểu thức còn lại theo dạng của biểu thức căn). Các kinh nghiệm này có được thông qua việc tự mình giải toán, hoặc suy ngẫm từ lời giải của các bài toán. Những ví dụ trong phần này sẽ chứa đựng tất cả những kinh nghiệm của chúng tôi muốn truyền đạt cho các bạn.

Ví dụ 3.2: Giải phương trình:

$$\frac{1}{(x^2-2x+2)^2} = 2(x-1)^2 + 1$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{(x-2x+2)^2} = 2x^2 - 4x + 3 \qquad (1)$$

Đặt $y = x^2 - 2x + 2$, phương trình (1) trở thành:

$$\frac{1}{y^2} = 2y - 1$$

$$\Leftrightarrow 2y^3 - y^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(2y^2 + y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1$$

(vì $2y^2 + y + 2 = 2\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

Như vậy, ta có:

$$x^2 - 2x + 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài này cũng giống với ví dụ 3.1, nếu ta dùng biến đổi trực tiếp (cụ thể ở đây là quy đồng khử mẫu) để đưa về phương trình đa thức thì sẽ được một phương trình bậc 6, khó giải quyết. Do đó ta thử làm theo ý tưởng giống ví dụ 3.1. Tuy nhiên, ở bài này, các biểu thức giống nhau không xuất hiện ngay từ đầu mà được ẩn giấu thông qua một vài hằng đẳng thức đơn giản, cụ thể, biểu thức $x^2 - 2x$ xuất hiện ở mẫu của phân thức giống với $x^2 - 2x$ có được khi khai triển $(x-1)^2$ ở vế phải. Việc phát hiện sự giống nhau này là rất quan trọng, nó giúp ta tìm ra chìa khóa để giải quyết bài toán, mà để phát hiện được thì ta cần phải bình tĩnh quan sát trước khi giải. Đây chính là lúc mà việc quan sát cho thấy được tầm quan trọng của mình. Vì vậy, các bạn cần rèn luyện để có được kĩ năng này.

Ví dụ 3.3: Giải phương trình:

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$$

Giải

ĐK: $x \geq 1$

Như chúng ta đã biết, phương trình này có thể giải được bằng phương pháp bình phương 2 vế để đưa về phương trình đa thức bậc 4. Tuy nhiên, các bạn thử rồi sẽ thấy, nếu làm theo cách đó thì sẽ tạo ra những biểu thức với những hệ số rất lớn, rất mất công và dễ sai sót. Có một cách đổi biến, giống như 2 bài trên, giúp đưa phương trình về dạng đơn giản hơn nhiều như sau:

Đặt $t = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} \Rightarrow t > 0$. Khi đó: $t^2 = 4x - 3 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$.

Phương trình đã cho trở thành:

$t = t^2 - 6$

$\Leftrightarrow (t+2)(t-3) = 0$

$\Leftrightarrow t - 3 = 0 \qquad (t > 0)$

$\Leftrightarrow t = 3$

Do đó ta có:

$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = 3 - \sqrt{x-1}$

$\Rightarrow 3x - 2 = 9 - 6\sqrt{x-1} + x - 1$

$\Leftrightarrow x - 5 = -3\sqrt{x-1}$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 9(x-1)$

$\Leftrightarrow x^2 - 19x + 34 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-17) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 17 \end{array}\right.$

Thử lại ta thấy chỉ có $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Ví dụ 3.4: Giải phương trình:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{-x^2+3x+4} = 5$$

Giải

ĐK: $-1 \le x \le 4$

Đặt $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}$, khi đó $y^2 = 5 + 2\sqrt{-x^2+3x+4} \Rightarrow \sqrt{-x^2+3x+4} = \dfrac{y^2-5}{2}$.

Phương trình đã cho trở thành:

$y + \dfrac{y^2-5}{2} = 5$

$\Leftrightarrow y^2 + 2y - 15 = 0$

$\Leftrightarrow (y-3)(y+5) = 0$

$\Leftrightarrow y - 3 = 0 \quad (\text{do } y > 0) \quad \Leftrightarrow \qquad y = 3$

Do đó ta có:

$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = 3$

$\Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{-x^2+3x+4} = 9$

$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+3x+4} = 2$

$\Leftrightarrow -x^2 + 3x + 4 = 4$

$\Leftrightarrow x(3-x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = 3$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 0$ và $x = 3$.

Hai biểu thức căn và tích của chúng, một điều đáng lưu ý!

Ví dụ 3.5: Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$$

Giải

Đặt $a=\sqrt[3]{x+34}, b=\sqrt[3]{x-3}$. Ta có:

$$\begin{cases} a-b=1 & (1) \\ a^3-b^3=37 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có $a=b+1$, thay vào (2) ta được:

$$(b+1)^3-b^3=37$$
$$\Leftrightarrow 3b^2+3b+1=37$$
$$\Leftrightarrow b^2+b-12=0$$
$$\Leftrightarrow (b-3)(b+4)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=-4 \end{array}\right.$$

+) $b=3 \quad \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-3}=3 \quad \Leftrightarrow x-3=27 \quad \Leftrightarrow x=30$

+) $b=-4 \quad \sqrt[3]{x-3}=-4 \quad \Leftrightarrow x-3=-64 \quad \Leftrightarrow x=-61$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=30$ và $x=-61$.

Đây là một dạng khác của phương pháp đổi biến. Ở đây, 2 biểu thức chứa *x* của phương trình là $\sqrt[3]{x+34}$, gọi là *a*, và $\sqrt[3]{x-3}$, gọi là *b*, không thể đưa về cùng 1 biến được, và với phương trình đã cho thì ta mới có được $a-b=1$, chưa đủ để tìm ra được *a,b*, ta cần thêm một biểu thức khác giữa *a*, *b* mà không phụ thuộc vào phương trình. Vì cả *a* và *b* đều là biểu thức biến *x* nên biểu thức cần tìm sẽ là một biểu thức liên hệ giữa *a*, *b* không phụ thuộc vào *x* (để thu được hệ 2 ẩn). Dễ dàng thấy được $(x+34)-(x-3)=37$, mà $x+34=a^3, x-3=b^3$, như vậy $a^3-b^3=37$ là hệ thức liên hệ cần tìm. Từ đây ta được hệ phương trình như lời giải trên.

Từ phương trình đưa về hệ phương trình để giải, cách này lúc đầu nghe có vẻ hơi "ngược", bởi vì thông thường thì chỉ có hệ phương trình thường được đưa về hệ phương trình để giải. Tuy nhiên, hệ thu được không khó để giải (cách giải sẽ được đề cập trong phần hệ phương trình, chủ yếu là phương pháp thế), do đó làm đơn giản bài toán. Vì vậy thực ra đây là một phương pháp hữu hiệu trong việc giải phương trình.

Ví dụ 3.6: Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$$

Giải

ĐK: $x \geq -1$

Đặt $a=\sqrt[3]{x-2}, b=\sqrt{x+1}$. Ta có:

$$\begin{cases} a+b=3 & (1) \\ a^3+3=b^2 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow b = 3 - a$, thay vào (2) ta được:

$$a^3 + 3 = (3-a)^2$$
$$\Leftrightarrow a^3 - a^2 + 6a - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)(a^2+6) = 0$$
$$\Leftrightarrow a - 1 = 0 \quad (\text{do } a^2 + 6 > 0) \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

Do vậy,

$$\sqrt[3]{x-2} = 1$$
$$\Leftrightarrow x - 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 3$.

Cũng giống như những bài đầu, những bài dạng này đôi khi cũng được "chế biến" khác đi, và cần một chút quan sát và biến đổi để đưa về dạng đã biết.

Ví dụ 3.7: Giải phương trình:

$$\sqrt[4]{18x-1} + \sqrt[4]{1-x} = 3\sqrt[4]{x}$$

<u>Giải</u>

ĐK: $\frac{1}{18} \le x \le 1$

Nếu làm như những bài trước, đặt a và b là 2 biểu thức căn ở vế trái thì ta vẫn tìm được hệ thức liên hệ giữa a,b không phụ thuộc vào phương trình và không phụ thuộc vào x, nhưng biểu thức thu được từ phương trình vẫn còn $\sqrt[4]{x}$ *, do đó chưa thể giải quyết được bài toán. Tuy nhiên, ta có thể biến đổi phương trình một chút như sau:*

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt[4]{18 - \frac{1}{x}} + \sqrt[4]{\frac{1}{x} - 1} = 3$$

Đến đây thì ta đã làm xuất hiện được phương trình có dạng giống như những bài trước, và dạng này thì ta đã biết cách giải.

Đặt $a = \sqrt[4]{18 - \frac{1}{x}}, b = \sqrt[4]{\frac{1}{x} - 1}$. Ta có:

$$\begin{cases} a + b = 3 & (1) \\ a^4 + b^4 = 17 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có $a = 3 - b$. Thay vào (2) ta được:

$(3-b)^4+b^4=17$

$\Leftrightarrow 2b^4-12b^3+54b^2-108x+64=0$

$\Leftrightarrow b^4-6b^3+27b^2-54x+32=0$

$\Leftrightarrow (b-1)(b^3-5b^2+22b-32)=0$

$\Leftrightarrow (b-1)(b-2)(b^2-3b+16)=0$

$\Leftrightarrow (b-1)(b-2)=0 \qquad (\text{do } b^2-3b+16=\left(b-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{55}{4}>0, \forall b\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b-1=0 \\ b-2=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=2 \end{array}\right.$

+) $b=1 \quad \Leftrightarrow \sqrt[4]{\dfrac{1}{x}-1}=1 \quad \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}-1=1 \quad \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

+) $b=2 \quad \Leftrightarrow \sqrt[4]{\dfrac{1}{x}-1}=2 \quad \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}-1=16 \quad \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{17}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ và $x=\dfrac{1}{17}$.

Ví dụ 3.8: Giải phương trình:

$$(13-4x)\sqrt{2x-3}+(4x-3)\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}$$

<u>Giải</u>

Ở đây ta có $\sqrt{2x-3},\sqrt{5-2x}$*, và tích của chúng,* $\sqrt{16x-4x^2-15}$*. Do đó, một cách tự nhiên, ta nghĩ tới cách làm giống như ví dụ 3.3, 3.4. Tuy nhiên, ta lại không đặt ẩn ngay được vì các biểu thức căn bị "dính" với* $(13-4x)$ *và* $(4x-3)$*. Tất nhiên là ta không thể làm chúng "biến mất" được. Gọi a,b lần lượt là* $\sqrt{2x-3},\sqrt{5-2x}$*, ta không thể làm mất đi 2 thứ "vướng mắt" kia, nhưng nếu ta "đồng hóa" chúng theo a,b thì sao?. Nếu làm được thì có thể đặt ẩn phụ để giải rồi! Thử với số hạng đầu tiên trước. Ta thấy rằng* $13-4x=10-4x+3=2b^2+3$*, như vậy, ta có* $(13-4x)\sqrt{2x-3}=2ab^2+3a$*, biến đổi số hạng thứ nhất thành công! Tới số hạng thứ hai. Ta đã biến đổi* $13-4x=2b^2+3$*, lần này ta sẽ biến đổi* $(4x-3)$ *sao cho có* $2a^2$ *để cho nó "cân" với số hạng thứ nhất. Như vậy ta sẽ tách* $(4x-3)\sqrt{5-2x}=(4x-6+3)\sqrt{5-2x}=2a^2b+3b$*, rất giống với biểu thức đầu tiên! Bây giờ thử viết lại phương trình xem sao:*

$2(5-2x)\sqrt{2x-3}+3\sqrt{2x-3}+2(2x-3)\sqrt{5-2x}+3\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}$

$2\sqrt{2x-3}\sqrt{5-2x}(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x})+3(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x})=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}$

$(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x})(2\sqrt{16-4x^2-15}+3)=2+8\sqrt{16-4x^2-15}$

Chỉ có $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}$ và $\sqrt{16-4x^2-15}$ *thôi! Mà* $\sqrt{16-4x^2-15}$ *lại có thể tính theo* $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}$ *(Giống như ví dụ 3.4). Điều này có nghĩa là tới đây ý tưởng cho bài toán đã rõ ràng rồi! Lời giải như sau:*

ĐK: $\dfrac{3}{2} \le x \le \dfrac{5}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$2(5-2x)\sqrt{2x-3}+3\sqrt{2x-3}+2(2x-3)\sqrt{5-2x}+3\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x})(2\sqrt{16x-4x^2-15}+3)=2+8\sqrt{16x-4x^2=15} \qquad (1)$$

Đặt $y=\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}$, khi đó $y^2=2+2\sqrt{16x-4x^2-15}$ và (1) trở thành:

$$y(y^2+1)=4y^2-6$$

$$\Leftrightarrow y^3-4y^2+y+6=0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y^2-5y+6)=0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y-2)(y-3)=0 \qquad (2)$$

Mặt khác, ta có $y>0$ và $y^2=(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x})^2 \le 2(2x-3+5-2x)=4 \Rightarrow y \le 2$ (theo bất đẳng thức Buhhiacopxki). (*)

Do vậy, từ (2) ta được $y=2$. Do đó:

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=2$$

$$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{16x-4x^2-15}=4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16x-4x^2-15}=1$$

$$\Leftrightarrow 16x-4x^2-15=1$$

$$\Leftrightarrow -4(x-2)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Qua ví dụ trên, chắc các bạn đã thấy được tầm quan trọng của việc quan sát, nhận xét, lập luận khi đứng trước một bài toán. Nhờ nó, từ một phương trình ban đầu có vẻ khá phức tạp, ta đã đưa được nó về dạng quen thuộc và dễ dàng xử lý bằng những phương pháp đã biết.

Ngoài ra, ở bài trên còn một điểm đáng chú ý nữa, đó chính là lập luận ở vị trí (*). Nếu là dạng có các căn thức kiểu như bài trên hay ví dụ 3.3, 3.4, ta có thể sử dụng bất đẳng thức đánh giá ẩn phụ để loại bớt nghiệm khi giải phương trình với ẩn phụ (ở bài trên ta đã chứng minh $0<y\le 2$ để loại hết 2 nghiệm $y=-1$ và $y=3$). Ta còn có thể đánh giá "sát" hơn nữa, đó là $\sqrt{2}\le y\le 2$. Bất đẳng thức bên trái được suy ra từ $y^2\ge 2$, còn bất đẳng thức bên phải có được nhờ vào bất đẳng thức Bunhiacopxki. Các bạn có thể lưu ý điều này, có thể sẽ dùng đến.

Ví dụ 3.9: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{5x^2+10x+1} \ge 7 - x^2 - 2x$$

<u>Giải</u>

ĐK: $x \le \dfrac{-5-2\sqrt{5}}{5} \vee x \ge \dfrac{-5+2\sqrt{5}}{5}$

Đặt $y = \sqrt{5x^2+10x+1}, y \ge 0$. Khi đó:

$y^2 = 5x^2 + 10x + 1 \Rightarrow x^2 + 2x = \dfrac{y^2-1}{5}$.

Phương trình đã cho trở thành:

$y \ge 7 - \dfrac{y^2-1}{5}$

$\Leftrightarrow y^2 + 5y - 36 \ge 0$

$\Leftrightarrow (y-4)(y+9) \ge 0$

$\Leftrightarrow y - 4 \ge 0 \quad (\text{do } y + 9 \ge 9 > 0) \quad \Leftrightarrow \quad y \ge 4$

Do đó:

$\sqrt{5x^2+10x+1} \ge 4$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 10x + 1 \ge 16$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+3) \ge 0$

$\Leftrightarrow x \le -3 \quad \vee \quad x \ge 1$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$

Bài tập

Giải các phương trình sau:

1. $(x-2)^2 = 3\sqrt[3]{x^2-4x+2}$
2. $4x^2 + 10x + 9 = 5\sqrt{2x^2+5x+3}$ (bài này có thể giải được bằng biến đổi trực tiếp, tuy nhiên các bạn hãy dùng cách đổi biến để giải thử)
3. $\sqrt{4x+3} + \sqrt{2x+1} = 6x + \sqrt{8x^2+10x+3} - 16$
4. $3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x$ (ĐHKB-2011)
5. $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$
6. $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$ (ĐHKA-2009)
7. $\sqrt{1-x} + \sqrt{17x-1} = 2\sqrt[4]{x}$
8. $2x^2 + 4x + 3\sqrt{3-2x-x^2} > 1$
9. $3\sqrt{x} + \dfrac{3}{2\sqrt{x}} < 2x + \dfrac{1}{2x} - 7$

4. Phương pháp sử dụng biểu thức liên hợp

Ví dụ 4.1 (ĐHKB-2010): Giải phương trình:

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$$

Giải

Thử xem xét các cách mà ta đã biết. Đầu tiên là biến đổi trực tiếp. Ở đây ta có 2 căn thức, như vậy ta phải bình phương 2 lần mới làm hết căn thức được. Tuy nhiên bậc của phương trình lại là 2, do đó nếu bình phương 2 lần thì ta sẽ thu được một phương trình bậc 8, không thể giải nổi! Còn ý tưởng đổi biến, như ở đây, có vẻ như không có một sự tương quan nào giữa các biểu thức có thể giúp ta đưa bài toán về dạng đơn giản hơn, như vậy cách này cũng không ổn. Cả 2 phương pháp trên đều không hiệu quả, và bây giờ ta cần một cách khác:

ĐK: $-\frac{1}{3}\le x\le 6$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{3x+1}-4-(\sqrt{6-x}-1)+3x^2-14x-5=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}-\frac{5-x}{\sqrt{6-x}+1}+(x-5)(3x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=5$$

(Vì $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1\ge \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}>0,\forall x\in\left[-\frac{1}{3};6\right]$)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=5$.

Phương pháp được sử dụng ở bài trên thường được biết đến với tên "phương pháp nhân lượng liên hợp". Nó giúp ta giải quyết được một khuyết điểm của phương pháp lũy thừa 2 vế, đó là trường hợp bậc quá cao như ở trên. Nó gồm 2 bước chính đó là tách nhân tử theo nghiệm của phương trình (ở bài trên là $x-5$), sau đó dùng bất đẳng thức để chứng minh phần còn lại vô nghiệm. Các bước làm cụ thể như sau (theo ví dụ trên):

+)Việc đầu tiên là phải tìm nghiệm. Nghiệm của những phương trình dạng này thường là những số nguyên hoặc số hữu tỉ, ta có thể tìm được chúng bằng cách tìm những số sao cho các căn thức là các số nguyên hoặc hữu tỉ (với $x=5$ thì $\sqrt{3x+1}$ và $\sqrt{6-x}$ là các số nguyên), hoặc cũng có thể dùng máy tính cầm tay để tìm bằng chức năng SOLVE, cụ thể ta tìm được nghiệm $x=5$. Những bài dạng này thường chỉ có 1 nghiệm hoặc nhiều nhất là 2 nghiệm.

+) Sau khi tìm nghiệm, ta trừ từng căn thức cho từng giá trị của chúng tại $x=5$ (trong bài trên, ta có $\sqrt{3x+1}-4$ và $\sqrt{6-x}-1$ do với $x=5$ thì $\sqrt{3x+1}=4$ và $\sqrt{6-x}=1$). Ta làm như vậy để tách được nhân tử $x-5$. Đối với biểu thức căn thì ta nhân vào biểu thức liên hợp, nếu có phân thức thì cũng trừ giống như đối với căn thức, rồi quy đồng lên rồi tách nhân tử ở biểu thức trên tử số, phần đa thức còn lại thì tách nhân tử như đối với đa thức thông thường.

+) Sau khi tách được hết nghiệm, ta sẽ được một biểu thức còn lại nhìn "khá rắc rối" (biểu thức ở bài trên là $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1$). Đây là những biểu thức luôn dương hoặc luôn âm (nhưng chỉ khi tách hết nghiệm mới có được điều đó). Ta chỉ việc sử dụng một vài đánh giá đơn giản dựa vào tập xác định của phương trình, điều này các bạn có thể thấy được nếu để ý lời giải trên. Đây cũng là điểm đáng chú ý cuối cùng của phương pháp này.

Chúng ta cùng đến với một ví dụ nữa.

Ví dụ 4.2: Giải phương trình:

$$\sqrt{8x+1}+\sqrt{46-10x}=-x^3+5x^2+4x+1$$

Giải

ĐK: $-\frac{1}{8}\le x\le \frac{23}{5}$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{8x+1}-3+\sqrt{46-10x}-6+x^3-5x^2-4x+8=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x-8}{\sqrt{8x+1}+3}+\frac{10-10x}{\sqrt{46-10x}+6}+(x-1)(x^2-4x-8)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{8}{\sqrt{8x+1}+3}-\frac{10}{\sqrt{46-10x}+6}+x^2-4x-8\right)=0 \qquad (1)$$

Với $x\in\left[-\frac{1}{8};\frac{23}{5}\right]$, ta có:

$$46-10x\le 46-10.\left(-\frac{1}{8}\right)<49\Rightarrow \frac{10}{\sqrt{46-10x}+6}>\frac{10}{\sqrt{49}+6}=\frac{10}{13}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{\sqrt{8x+1}+3}-\frac{10}{\sqrt{46-10x}+6}\le \frac{8}{3}-\frac{10}{\sqrt{46-10x}+6}<\frac{8}{3}-\frac{10}{13}<2 \qquad (2)$$

$$-\frac{17}{8}\le x-2\le \frac{13}{5}\Rightarrow |x-2|\le \frac{13}{5}\Rightarrow x^2-4x-8=(x-2)^2-12\le\left(\frac{13}{5}\right)^2-12<3^2-12=-3<-2 \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$\frac{8}{\sqrt{8x+1}+3}-\frac{10}{\sqrt{46-10x}+6}+x^2-4x-8<0,\forall x\in\left[-\frac{1}{8};\frac{23}{5}\right].$$

(*Ở trên nhìn có vẻ khá rắc rối, nhưng thật ra không phải vậy. Thực ra các bạn chỉ cần các bước đánh giá có dấu $\ge;\le$ là đủ. Các bước đánh giá có dấu > ; < của chúng tôi chỉ là để làm tròn kết quả để dễ tính toán khi cộng lại. Nếu không muốn làm giống vậy thì các bạn chỉ cần làm các bước có dấu $\ge;\le$ là đủ, sau đó dùng máy tính để cộng các kết quả lại, và nếu để ý, thì các đánh giá đó không có gì đặc biệt, chỉ dựa vào dấu của bất đẳng thức cần có (>0 hay <0),việc này có thể xác định thông qua việc ước lượng sơ qua hoặc thử một vài giá trị của x, và tập xác định của phương trình. Các bạn làm một vài lần sẽ quen ngay.*)

Do đó: $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách sử dụng lượng liên hợp này đôi khi cũng được dùng trong việc giải bất phương trình.

Ví dụ 4.3: Giải bất phương trình:

$$\frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2} > x-4$$

<u>Giải</u>

ĐK: $x \geq -1$.
Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{x^2\left(1-\sqrt{1+x}\right)^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2\left(1-\sqrt{1-x}\right)^2} > x-4$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{1+x}\right)^2 > x-4$$

$$\Leftrightarrow x+2-2\sqrt{1+x} > x-4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x} < 3$$

$$\Leftrightarrow 1+x<9 \qquad \Leftrightarrow \qquad x<8$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[-1;8)$.

Ở bài trên, ta thấy được thêm một ứng dụng khác của phương pháp nhân lượng liên hợp, đó là giúp đơn giản biểu thức, khử mẫu, đưa bài toán về dạng dễ hơn (bậc thấp hơn).

Ba ví dụ trên đã cho các bạn thấy được tất cả những ứng dụng mà chúng tôi biết của phương pháp nhân lượng liên hợp. Phương pháp này chỉ giải quyết được một lượng nhỏ các bài phương trình, bất phương trình. Tuy nhiên, có những bài nếu như không sử dụng phương pháp này thì sẽ rất phức tạp , điển hình là 3 ví dụ trên. Ngoài ra, gần đây phương pháp này cũng xuất hiện trong đề thi chính thức (ví dụ 1.11). Vì vậy, theo chúng tôi thì các bạn cũng nên biết phương pháp này, nhưng chỉ nên nghĩ đến nó sau cùng, bởi vì nó chỉ giải quyết một lớp riêng các bài phương trình, bất phương trình chứ không áp dụng rộng rãi. Đây cũng là phương pháp cuối cùng mà chúng tôi muốn giới thiệu cho các bạn trong phần này.

Bài tập

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+3}=4-x$
2. $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}=x^2-1$
3. $(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{4-x}+2)=2x$
4. $4(x+1)^2<(2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2$

5. $(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x^2+2x-3})\geq 4$
6. $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$

Bây giờ chúng ta cùng nhìn lại các phương pháp đã được nhắc tới ở trên. Hai phương pháp thường được sử dụng nhất là biến đổi trực tiếp và đổi biến, và xét cho cùng thì cả 2 đều đưa về việc giải một phương trình đa thức. Đôi khi, từ một phương trình đa thức đơn giản, người ta có thể "chế" lại bằng cách thay đổi một chút bằng cách thay biến bởi một biểu thức "rắc rối" nào đó (ví dụ 3.1: $4x^2+10x+9=5\sqrt{2x^2+5x+3}$), nếu "ác ý" thì chỉ ta chỉ giải được khi tìm ra và đi ngược lại bước biến đổi đó bằng phương pháp đổi biến(chẳng hạn $\sqrt{4x+3}+\sqrt{2x+1}=6x+\sqrt{8x^2+10x+3}-16$), nếu không thì ta vẫn có thể giải bằng cách khác. Vì vậy, khi đứng trước một phương trình, ta nên làm như sau:

+) Dành một ít thời gian để quan sát "sơ" qua xem có sự "giống nhau" nào không, chẳng hạn một phương trình với ẩn *x*, ta có thể coi xem có cách nào thay tất cả các biểu thức "giống nhau" đó bằng một biến *y* và sau khi thay xong thì không còn biến *x* nữa. Nếu có thì ta sẽ thực hiện phép đổi biến và đưa về bài toán đơn giản hơn. (bước này không cần thực hiện kĩ quá, chỉ là vài quan sát ban đầu thôi)

+) Tiếp theo ta bắt đầu xét tới cách biến đổi trực tiếp, thông qua "bậc" của phương trình và số lượng căn thức, ta có thể biết được phương trình đang làm có thể giải được bằng phương pháp này hay không.

+) Nếu không được, thì ta quay lại với phương pháp đổi biến. Lần này cần quan sát, xem xét thật kĩ kết hợp với suy luận (giống như đã làm ở ví dụ 3.8).

+) Nếu vẫn không tìm ra giải pháp, ta bắt đầu xem xét tới phương pháp sử dụng lượng liên hợp, bởi vì, như đã nói, nó chỉ giải quyết được một số bài nhất định.

Quy trình trên có thể tóm tắt lại như sơ đồ sau:

Đổi biến (sơ) – Biến đổi trực tiếp – Đổi biến (kĩ) – Liên hợp

Và thông thường, các bài phương trình thi đại học đều có thể giải được ở một bước nào đó trong quy trình trên. Theo chúng tôi, như thế có thể coi là ít, tức là giống như đã nói ở đầu chuyên đề, chỉ cần một số lượng nhỏ phương pháp nhưng có thể giải được phần lớn các bài toán, ít nhất là tất cả những bài phương trình xuất hiện trong các đề thi đại học gần đây.

Tuy nhiên, do không có nhiều tài liệu, chúng tôi không thể cung cấp cho các bạn nhiều bài tập hơn nữa để các bạn rèn luyện cho thuần thục kĩ năng, đồng thời thấy rõ được sự hiệu quả của các phương pháp trên. Do đó các bạn hãy tự mình kiếm các bài tập rồi giải.

Phương trình, bất phương trình đại số kết thúc ở đây, tiếp theo chúng ta sẽ đến với phần tiếp theo, khó hơn nhưng lại thường gặp hơn trong các đề thi chính thức, thi thử đại học, đó là hệ phương trình đại số.

PHẦN II – HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Đã gọi là hệ phương trình, tức là có nhiều hơn một phương trình, do đó ngoài những bước xử lý trên một phương trình như trên, trong nhiều trường hợp, ta còn phải kết hợp các phương trình với nhau. Việc này khiến cho việc giải phương trình trở nên "biến ảo" hơn, và tất nhiên là rắc rối hơn so với giải phương trình. Ở chuyên đề này chúng tôi chỉ giới thiệu một số phương pháp thường gặp nhất và hiệu quả nhất đối với các bài hệ trong đề thi đại học.

1. Phương pháp thế

Chúng ta lại bắt đầu bằng một ví dụ:

Ví dụ 1.1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+4y^2=8 & (1) \\ x+2y=4 & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta có: $(2) \Leftrightarrow x=4-2y$

Thay vào (1) ta được phương trình:

$(4-2y)^2+4y^2=8 \Leftrightarrow y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow (y-1)^2=0$

$\Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;2)$.

Ý tưởng rất đơn giản, từ một phương trình, ta tìm ra được một biểu thức để tính *y* theo *x*, sau đó thay *y* ở phương trình còn lại bởi biểu thức đó, phương trình đó sẽ chỉ còn biến *x*, từ đó áp dụng các phương pháp đã xem ở trên để xử lí, mà thường là đưa về phương trình đa thức.

Ý tưởng cho bài này cũng như vậy:

Ví dụ 1.2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3\left(x^3-y^3\right)=4xy & (1) \\ x^2y^2=9 & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ (2), ta có: $xy=\pm 3 \Rightarrow x,y\neq 0$.

+) Với $xy=3 \Rightarrow y=\dfrac{3}{x}$, thay vào phương trình (1) ta được:

$3\left(x^3-\dfrac{27}{x^3}\right)=12 \Leftrightarrow x^6-4x^3-27=0$

$\Leftrightarrow x^3=2\pm\sqrt{31} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2\pm\sqrt{31}}$

Do đó $\left[\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{2+\sqrt{31}};\, y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2+\sqrt{31}}} \\ x=\sqrt[3]{2-\sqrt{31}};\, y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2-\sqrt{31}}} \end{array}\right.$

+) Với $xy=-3 \Rightarrow y=-\dfrac{3}{x}$, thay vào phương trình (1) ta được:

$$3\left(x^3+\frac{27}{x^3}\right)=-12 \Leftrightarrow x^6+4x^3+27=0$$

(phương trình vô nghiệm do $x^6+4x^3+27=(x^3+2)^2+23>0, \forall x \in \mathbb{R}$)

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{31}};\dfrac{3}{\sqrt[3]{2+\sqrt{31}}}\right),\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{31}};\dfrac{3}{\sqrt[3]{2-\sqrt{31}}}\right)$.

Có thể nói rằng, nếu giải phương trình có phương pháp biến đổi trực tiếp thì giải hệ phương trình có phương pháp thế. Cả 2 đều rất đơn giản về ý tưởng, tuy nhiên có thể sẽ phải tính toán nhiều. Không chỉ vậy, tiếp sau đây, các bạn sẽ thấy được rằng chúng còn giống nhau ở tính hiệu quả cao và một số cách để xử lí.

Ví dụ 1.3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy+x+1=7y & (1) \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 & (2) \end{cases} \qquad \text{(ĐHKB-2009)}$$

Giải

Ta thấy $y=-1$ không phải là nghiệm của hệ đã cho.

Xét $y \neq -1$, ta có: $(1) \Leftrightarrow x=\dfrac{7y-1}{y+1} \qquad (*)$

Thay $(*)$ vào (2), ta được pt:

$$\left(\frac{7y-1}{y+1}\right)^2 \cdot y^2+\frac{7y-1}{y+1}\cdot y+1=13y^2$$

$$\Leftrightarrow (7y-1)^2 y^2+y(7y-1)(y+1)+(y+1)^2=13y^2(y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 36y^4-33y^3-5y^2+y+1=0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(3y-1)(12y^2+5y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(3y-1)=0$$

(Do $12y^2+5y+1=\left(\sqrt{12}y\right)^2+2\left(\sqrt{12}y\right)\dfrac{5}{2\sqrt{12}}+\dfrac{25}{48}+\dfrac{23}{48}=\left(\sqrt{12}y+\dfrac{5\sqrt{3}}{12}\right)^2+\dfrac{23}{48}>0$)

$$\Leftrightarrow y=1 \quad \vee \quad y=\frac{1}{3}.$$

Với $y=1$, ta được $x=3$.

Với $y=\dfrac{1}{3}$, ta được $x=1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(3;1\right),\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$.

Ở phương pháp biến đổi trực tiếp của phương trình, nếu có căn thức thì ta sẽ bình phương lên để phá căn thức, còn ở phương pháp này, chỉ cần tính được một biến theo biến còn lại, ta sẽ áp dụng phương pháp thế. Cụ thể đối với bài trên, từ phương trình $xy+x+1=7y$ ta chắc chắn có thể đưa các biểu thức có *x* về một vế, các biểu thức còn lại về một vế ($x(y+1)=7y-1$), từ đó tính được *x* theo *y*. Như vậy, để áp dụng phương pháp này, ta chỉ cần chuyển tất cả các biểu thức có *x* về một vế, còn lại đem sang vế kia là được. Như vậy, với phương trình trên ta cũng có thể tính *y* theo *x*: $y=\dfrac{x+1}{7-x}, x\neq 7$ rồi thế vào phương trình (2) vẫn giải được như thường. Tuy nhiên, với phương trình (2), nếu muốn tính *x* theo *y*, thì theo trên, ta phải biến đổi $x^2y^2+xy=13y^2-1$. Tuy nhiên, từ đây ta vẫn không thể rút ra được đẳng thức như mong muốn, bởi vì ta không đặt "tất cả" *x* ra làm nhân tử chung được, mà điều này là do số hạng đầu có x^2, trong khi số hạng thứ 2 chỉ có *x*. Như vậy, ta có thể rút ra được một kinh nghiệm để xem có thể được không, đó là một trong các phương trình thuộc hệ đã cho là một phương trình bậc nhất theo một biến nào đó. Các bạn hãy lưu ý điều này!

Ví dụ 1.4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(x-2\right)\left(y-2\right)+x\left(y+6\right)=0\\ \left(x-2\right)^2+x^2=\left(y-2\right)^2+\left(y+6\right)^2\end{cases}$$

<u>Giải</u>

Dựa vào kinh nghiệm ở trên để xem xét hệ này. Phương trình thứ 2 cả x và y đều bậc 2, có lẽ không rút ra được gì nhiều. Chỉ còn phương trình thứ nhất. Số hạng đầu tiên $(x-2)(y-2)$ là biểu thức bậc 1 theo biến x, số hạng thứ hai cũng vậy. Như thế là ổn rồi, chắc chắn ta có thể tính được x theo y giống như những bài trên, giờ chỉ cần tính toán và thay vào phương trình 2 là xong.

Ta thấy $y=-2$ không là nghiệm của hệ.

Xét $y\neq -2$, ta có hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}2x\left(y+2\right)=2y-4 & \left(1\right)\\ 2x^2-2y^2-4x-8y=36 & \left(2\right)\end{cases}$$

Có $\left(1\right)\Leftrightarrow x=\dfrac{2y-4}{2\left(y+2\right)}=\dfrac{y-2}{y+2}$ thay vào $\left(2\right)$ ta được

$$2\left(\frac{y-2}{y+2}\right)^2-2y^2-4\cdot\frac{y-2}{y+2}-8y=36$$

$$\Leftrightarrow y^4+8y^3+39y^2+92y+60=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y+1\right)\left(y+3\right)\left(y^2+4y+20\right)=0$$

$\Leftrightarrow y=-1 \quad \vee \quad y=-3$

Do $y^2+4y+20=(y+2)^2+16>0$ nên phương trình $y^2+4y+20=0$ vô nghiệm.

Suy ra , ta được $\left[\begin{array}{l} x=-3; y=-1 \\ x=5; y=-3 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(-3;-1),(5;-3)$.

Chỉ cần rút biến được là thế ngay!

Có một lưu ý nhỏ cho các bạn, đó là điều kiện $y\neq -1$ ở ví dụ 1.3 và $y\neq -2$ ở ví dụ 1.4. Vì khi biến đổi để thế, có những khi ta phải chia 2 vế cho cùng 1 biểu thức, mà biểu thức đó có thể bằng 0, nên ta phải xét trường hợp nó bằng 0 trước, chỉ khi nào biểu thức đó khác 0 thì biến đổi của ta mới là hợp lệ. Nếu không cẩn thận các bạn có thể mất điểm không đáng có cho việc này.

Ví dụ 1.5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 & (1) \\ x^2+2xy=6x+6 & (2) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Giải

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ đã cho.

Xét $x\neq 0$, ta có:

$(2)\Leftrightarrow y=\dfrac{6+6x-x^2}{2x} \quad (*)$

$(2)\Leftrightarrow x^4+2x^3y=6x^3+6x^2 \quad (**)$

Thay $(*)$, $(**)$ vào phương trình (1), ta được:

$6x^3+6x^2+\dfrac{1}{4}\left(6+6x-x^2\right)^2=2x+9$

$\Leftrightarrow x\left(x^3+12x^2+48x+64\right)=0 \Leftrightarrow x(x+4)^3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & (l) \\ x=-4 & (n) \end{array}\right. \Rightarrow y=\dfrac{1}{4}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(-4;\dfrac{1}{4}\right)$.

Ở trên, ta không thay tất cả y ở phương trình (1) bằng (*) mà chỉ thay biểu thức (*) vào x^2y^2, còn x^4+2x^3y được thay bởi (**), một hệ thức cũng được suy ra từ (2) giống như (*). Thực ra nếu ta không làm việc này thì vẫn giải ra bình thường. Tuy nhiên, nếu làm giống như bài trên thì sẽ giảm được một số phép tính, đỡ mất công hơn. Vì vậy, trước khi bắt tay vào làm cụ thể, hãy chú ý quan sát một chút để tìm ra những điểm chung của 2 phương trình, dựa vào đó để giúp làm giảm số lượng phép tính, nhưng chỉ một chút thôi, tại vì không làm thì vẫn giải ra, và không phải lúc nào cũng có cái để mà rút gọn. Cho dù làm thế nào, thì vẫn phải nhớ mục tiêu của ta khi làm phương pháp này, đó là đưa về phương trình một ẩn.

Còn một vấn đề mà phương pháp này giống với phương pháp biến đổi trực tiếp nữa, đó là xem xét bậc của phương trình. Sau bước thế, ta thử quan sát trước một chút để xem phương trình sau khi thế có bậc thế nào nếu như ta biến đổi thành phương trình đa thức, cách xác định đã được nói đến ở phần giải phương trình bằng cách biến đổi trực tiếp. Nếu là bậc 4 trở xuống thì gần như chắc chắn giải được. Nếu là bậc 5 thì tách nghiệm hữu tỉ ra rồi giải phương trình bậc 4 còn lại. Nếu bậc 6 thì hơi khó, và nói chung, nếu phương trình đa thức thu được là bậc 6 trở lên thì ta nên xem xét tới một phương pháp khác.

Ví dụ 1.6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x\left(x+y+1\right)-3=0 \\ \left(x+y\right)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \end{cases} \quad \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$$ (ĐHKD-2009)

Giải

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{x}-1 \\ \left(\dfrac{3}{x}-1\right)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \quad (1) \end{cases}$$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{2}\vee\frac{1}{x}=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=2\vee x=1$$

$$+)x=2\Rightarrow y=-\frac{3}{2}$$

$$+)x=1\Rightarrow y=1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(2;-\dfrac{3}{2}\right),\left(1;1\right)$.

Ví dụ 1.7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y+y=2 \\ x^2\left(1+y^2\right)=3-\dfrac{1}{x^2} \end{cases} \quad \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$$

Giải

ĐK: $x\neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{x^2+1} \\ x^2\left[1+\left(\dfrac{2}{x^2+1}\right)^2\right]=3-\dfrac{1}{x^2} \quad (*) \end{cases}$$

2 mẫu thức $(x^2+1)^2$ và x^2 có bậc lần lượt là 4 và 2, biểu thức có bậc cao nhất là x^2 có bậc 2. Như vậy, nếu quy đồng (*) thì sẽ được một phương trình bậc 8, tình hình có vẻ không tốt. Tuy *nhiên, để ý một chút thì thấy (*) chỉ chứa toàn x^2 chứ không có x. Điều này có nghĩa là ta có thể thay tất cả các “ x^2 ” bởi một biến t, mà nếu làm vậy thì phương trình thu được sau đó sẽ chỉ còn bậc 4, tức là có thể giải được bằng phương pháp này.*

Đặt $t = x^2$, phương trình (*) trở thành:

$$t\left[1+\left(\frac{2}{t+1}\right)^2\right] = 3-\frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2+\frac{4t^2}{t^2+2t+1} = t-1$$

$$\Leftrightarrow t^4 - t^3 - t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2\left(t^2+t+1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \qquad (\text{do } t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0, \forall t \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1 \qquad (n)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=1 \\ x=-1; y=1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = (1;1), (-1;1)$.

Hãy nhớ rằng, nếu như có cách nào có thể làm đơn giản phương trình, hệ phương trình đã cho, đặc biệt là giảm bậc hoặc giảm tính toán, thì nên làm. Đôi khi nó còn có thể giúp ta đổi từ một dạng phương trình, hệ phương trình chưa giải được trở thành một dạng quen thuộc và có thể giải quyết dễ dàng, ở bài trên là một ví dụ.

Ví dụ 1.8: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4+2x^3-5x^2+y^2-6x-11=0 \\ x^2+x = \dfrac{3\sqrt{y^2-7}-6}{\sqrt{y^2-7}} \end{cases} \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

<u>Giải</u>

ĐK: $y < -\sqrt{7} \vee y > \sqrt{7}$

Đầu tiên, ta thấy trong hệ chỉ có y^2 mà không có y, như vậy ta có thể thay đổi một chút để cho hệ dễ nhìn hơn.

Đặt $z = \sqrt{y^2-7}, z > 0$, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} x^4+2x^3-5x^2-6x-4+z^2=0 & (1) \\ x^2+x = \dfrac{3z-6}{z} & (2) \end{cases}$$

Hệ bây giờ nhìn đỡ phức tạp hơn lúc đầu. Quan trọng hơn, ta có thể thấy được, từ phương trình thứ 2 ta có thể biến đổi về phương trình bậc 1 theo biến z và thực hiện phép thế.

$(2) \Leftrightarrow z(x^2+x-3) = -6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-3 < 0 & (*) \\ z = \dfrac{-6}{x^2+x-3} \end{cases}$$

Thay vào (1) ta được:

$$x^4+2x^3-5x^2-6x-4+\frac{36}{(x^2+x-3)^2}=0 \qquad (3)$$

Phương trình này nếu quy đồng thì sẽ trở thành phương trình bậc 8, chưa thể giải quyết ngay bằng cách giải phương trình đa thức được. Tuy nhiên, như đã nhắc đến nhiều lần trong chuyên đề này, ta tên tìm xem các biểu thức có điểm chung gì hay không trước. Như đã làm ở phương pháp đặt ẩn phụ trong giải phương trình, ta sẽ dựa vào biểu thức x^2+x-3 *ở mẫu thức để làm:*

$$\begin{aligned}&x^4+2x^3-5x^2-6x-4\\&=x^2(x^2+x-3)+x^3-2x^2-6x-4\\&=x^2(x^2+x-3)+x(x^2+x-3)-3x^2-3x-4\\&=x^2(x^2+x-3)+x(x^2+x-3)-3(x^2+x-3)-13\\&=(x^2+x-3)^2-13\end{aligned}$$

Điểm giống nhau đã xuất hiện. Bây giờ mọi việc đã trở nên khá dễ dàng!

Đặt $t=(x^2+x-3)^2, t>0$. Ta có:

$$x^4+2x^3-5x^2-6x-4=(x^2+x-3)^2-13=t-13$$

Phương trình (3) trở thành:

$$\begin{aligned}&t-13+\frac{36}{t}=0\\&\Leftrightarrow t^2-13t+36=0\\&\Leftrightarrow (t-4)(t-9)=0\\&\Leftrightarrow t=4 \quad \vee \quad t=9\end{aligned}$$

+) Với $t=4$, ta có:

$$(x^2+x-3)^2=4$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x^2+x-3=-2\\ z=3\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}x^2+x-1=0\\ \sqrt{y^2-7}=3\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\\ y=\pm 4\end{cases}$$

+) Với $t=9$, ta có:

$$(x^2+x-3)^2=9$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x^2+x-3=-3\\ z=2\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}x^2+x-6=0\\ \sqrt{y^2-7}=2\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x=2 \vee x=-3\\ y=\pm\sqrt{11}\end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x,y)=(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\pm 4);(2,\pm\sqrt{11});(-3,\pm\sqrt{11})$.

Nói chung thì phương pháp thế trong giải hệ phương trình cũng chỉ có vậy. Ý tưởng đơn giản, tìm cách thay biến này bằng một biểu thức của biến còn lại, để đưa về phương trình một ẩn, rồi từ đó áp dụng các phương pháp đã biết để giải phương trình đó. Bài ngay trên đây tuy không dễ nhưng có thể thấy rằng nó phức tạp chủ yếu ở bước giải phương trình chứ không phải ở bước thế! Chủ yếu là ta tìm được một phương trình bậc nhất theo một ẩn số nào đó để rút ra biểu thức thế, nó có thể xuất hiện ngay trong đề bài, hoặc cũng có thể phải qua một vài phép biến đổi (như đổi biến ở bài trên, hoặc đôi khi là cộng trừ giữa các phương trình trong hệ, vấn đề này sẽ được nói đến ở các phần sau). Và sau cùng, thường là ta sẽ phải giải một phương trình đa thức, mà rõ ràng ta có thể làm việc này bằng MTCT.

Sau đây là một vài bài tập để các bạn thử sức với những gì mới học được.

Bài tập

Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} x+y=3 \\ x^3+3=y^2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=3 \\ x^4+y^4=17 \end{cases}$

3. $\begin{cases} xy+x-2=0 \\ 2x^3-x^2y+x^2+y^2-2xy-y=0 \end{cases}$ (ĐHKD-2012)

4. $\begin{cases} xy+y^2+x-7y=0 \\ xy+x^2-12y=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2y+xy^2+x-5y=0 \\ 2xy+y^2-5y+1=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \\ x^2y+x^2+2y-22=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+1+y(x+y)=4y \\ (x^2+1)(y+x-2)=y \end{cases}$

2. Phương pháp đổi biến

Cái tên "đổi biến" có lẽ không còn gì xa lạ với các bạn nữa. Tới bây giờ các bạn chắc đã hình dung được đổi biến là như thế nào. Ở đây chúng tôi sẽ chỉ đưa ra những kinh nghiệm để sử dụng tốt phương pháp này.

Ví dụ 2.1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+xy=3 \\ (x+y)xy=2 \end{cases}$$

Giải

Đặt $a=x+y, b=xy$. Khi đó $a^2 \ge 4b$. Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

$\Leftrightarrow$ *a*, *b* là 2 nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 2 \end{array}\right.$$

Do đó (I) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a = 1; b = 2 & (1) \\ a = 2; b = 1 & (2) \end{array}\right.$

Hệ (1) vô nghiệm do $a^2 < 4b$

$(2) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = (1,1)$.

Nói đến đặt ẩn phụ thì có lẽ cách đặt ẩn phụ theo kiểu tổng-tích cho hệ đối xứng loại 1 như trên là kinh điển nhất. Lợi ích của phép đặt ẩn này chính là việc làm giảm được bậc của hệ, mà theo kinh nghiệm đã học được, thì hệ bậc càng thấp thì sẽ dễ sử dụng phương pháp thế. Vì vậy, tuy phương pháp đặt ẩn phụ tổng-tích không mới nhưng nếu nó được "tiếp thêm sức mạnh" bởi phương pháp thế thì nó sẽ trở thành một công cụ rất hiệu quả đối với những bài đối xứng loại 1, ngay cả khi bậc cao hoặc có căn thức.

Ví dụ 2.2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Đặt $a = x + y, b = xy$. Khi đó $a^2 \geq 4b$. Ta có:

$x^2y + xy^2 = xy(x+y) = ab$

$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = a^3 - 3ab$

Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} ab = 30 \\ a^3 - 3ab = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 30 \\ a^3 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 6 \end{cases}$$

Do đó: $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

Nên x,y là 2 nghiệm của phương trình: $t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; y = 3 \\ x = 3; y = 2 \end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = (2,3); (3,2)$.

Ví dụ 2.3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 3 \\ \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 4 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=3 \\ x^2+y^2+2+2\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}=16 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Đặt $a=x^2+y^2, b=xy$. Khi đó $a\geq 0; a\geq 2b$, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a-b=3 \quad (1) \\ a+2+2\sqrt{b^2+a+1}=16 \quad (2) \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow b=a-3$. Thay vào (2) ta được:

$$a+2+2\sqrt{(a-3)^2+a+1}=16$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-5a+10}=14-a$$
$$\Rightarrow 4(a^2-5a+10)=a^2-28a+196$$
$$\Leftrightarrow 3a^2+8a-156=0$$
$$\Leftrightarrow (3a+26)(a-6)=0$$
$$\Leftrightarrow a-6=0 \quad (\text{do } a>0\Rightarrow 3a+26>0)$$
$$\Leftrightarrow a=6$$

Từ đó ta có $b=a-3=3$

Thử lại ta thấy (6,3) là nghiệm của (II).

Do đó $(I)\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=6 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2xy=0 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm\sqrt{3}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x,y)=(\sqrt{3},\sqrt{3});(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

Không phải lúc nào cũng cứ đặt ẩn phụ theo $x+y$ và xy cũng là sự lựa chọn tốt. Phải quan sát xem đề bài có những biểu thức nào, rồi đặt theo cho phù hợp (ở bài vừa rồi là x^2+y^2 và xy), nhưng dù thế nào thì vẫn luôn là một tổng và một tích.

Ví dụ 2.4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5 \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=49 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

ĐK: $x,y\neq 0$.

Đặt $a=x+y, b=\dfrac{1}{xy}$. Khi đó $b\neq 0, a^2\geq \dfrac{4}{b}$, hệ đã cho trở thành:

(*Đặt như vậy bởi vì* $\dfrac{1}{xy}$ *xuất hiện nhiều hơn xy*)

$$\begin{cases} a(1+b)=5 & (1) \\ \left(a^2-\dfrac{2}{b}\right)(1+b^2)=49 & (2) \end{cases}$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq -1 \\ a=\dfrac{5}{1+b} \end{cases}$

Thay vào (2) ta được:

$$\left(\frac{25}{(1+b)^2}-\frac{2}{b}\right)(1+b^2)=49$$

$$\Leftrightarrow (25b-2(b+1)^2)(b^2+1)=49b(b+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (-2b^2+21b-2)(b^2+1)=49b(b+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2b^4+28b^3+102b^2+28b+2=0$$

$$\Leftrightarrow b^4+14b^3+51b^2+14b+1=0$$

$$\Leftrightarrow (b^2+7b+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow b^2+7b+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad b=\frac{-7\pm 3\sqrt{5}}{2}$$

+) Với $b=\dfrac{-7+3\sqrt{5}}{2}$, ta có:

$$\begin{cases} x+y=a=\dfrac{5}{1+b}=\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2} \\ xy=\dfrac{1}{b}=\dfrac{-7-3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1; y=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}; y=-1 \end{array}\right.$$

+) Với $b=\dfrac{-7-3\sqrt{5}}{2}$, ta có:

$$\begin{cases} x+y=a=\dfrac{5}{1+b}=\dfrac{5-3\sqrt{5}}{2} \\ xy=\dfrac{1}{b}=\dfrac{-7+3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1; y=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}; y=-1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x,y)=\left(-1,\dfrac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}\right);\left(\dfrac{7\pm 3\sqrt{5}}{2},-1\right)$.

Ví dụ 2.5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+2\dfrac{x}{y}=1 \\ x^2+y^2+4\dfrac{y}{x}=22 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

ĐK: $xy \neq 0, x^2+y^2 \neq 1$

Quan sát một chút, không có để nhận ra sự giống nhau giữa $\dfrac{3}{x^2+y^2-1}$ *và* x^2+y^2*, giữa* $\dfrac{x}{y}$ *và* $\dfrac{y}{x}$*. Với việc có nhiều điểm chung như vậy thì đổi biến là một cách hiệu quả để giúp đưa hệ đã cho về dạng dễ nhìn hơn.*

Đặt $a=x^2+y^2-1, b=\dfrac{y}{x}$. Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}=1 \qquad (1) \\ a+4b=21 \qquad (2) \end{cases}$$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow a=21-4b$. Thay vào (1) ta được:

$$\dfrac{3}{21-4b}+\dfrac{2}{b}=1$$
$$\Leftrightarrow 3b+2(21-4b)=b(21-4b)$$
$$\Leftrightarrow 4b^2-26b++42=0$$
$$\Leftrightarrow 2b^2-13b+21=0$$
$$\Leftrightarrow (b-3)(2b-7)=0$$
$$\Leftrightarrow b=3 \quad \vee \quad b=\dfrac{7}{2}$$

+) Với $b=3$, ta có:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a+1=22-4b=10 \\ \dfrac{y}{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(3x)^2=10 \\ y=3x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=3 \\ x=-1; y=-3 \end{array}\right.$$

+) Với $b=\dfrac{7}{2}$, ta có:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a+1=22-4b=8 \\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(\dfrac{7}{2}x\right)^2=8 \\ y=\dfrac{7}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4\sqrt{\dfrac{2}{53}}; y=14\sqrt{\dfrac{2}{53}} \\ x=-4\sqrt{\dfrac{2}{53}}; y=-14\sqrt{\dfrac{2}{53}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x,y)=(1,3);(-1,-3);\left(4\sqrt{\frac{2}{53}},14\sqrt{\frac{2}{53}}\right);\left(-4\sqrt{\frac{2}{53}},-14\sqrt{\frac{2}{53}}\right)$.

Ví dụ 2.6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+1+y(y+x)=4y & (1) \\ (x^2+1)(y+x-2)=y & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta thấy y = 0 không thỏa (1) nên hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+y+x=4 \\ \dfrac{x^2+1}{y}(y+x-2)=1 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Đặt $u=\dfrac{x^2+1}{y}$, $\quad v=y+x-2$.Hệ (I) trở thành:

$$\begin{cases} u+v=2 \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow u=1; v=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=2 \\ x=-2; y=5 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm (1;2) và (-2;5).

Nói chung, mục đích của việc đặt ẩn phụ là để làm cho phương trình dễ nhìn hơn, từ đó ta có thể phát hiện ra được sự “đơn giản” của bài toán, hoặc có thể áp dụng các phương pháp khác (các bài ở trên chủ yếu là phương pháp thế) để giải. Dấu hiệu để đặt ẩn đó là sự xuất hiện của các biểu thức giống nhau. Khi thay các biểu thức đó bởi một biến thì rõ ràng là bài toán trở nên đơn giản hơn. Tuy nhiên, ta cũng cần phải chọn biểu thức cần thay thế cho phù hợp, không nhất thiết là biểu thức đầu tiên đập vào mắt ta. Cần phải chọn sao cho những yếu tố “phiền phức”, như căn thức chẳng hạn, đừng xuất hiện, và khi thay một biểu thức nào đó bởi một biến mới thì số biến không được tăng lên. Những điều đó sẽ làm cho phương trình phức tạp lên, trong khi mục đích chính của ta là phải làm đơn giản nó đi!

Bài tập

Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ 2x+xy+2y=-3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=3 \\ x+y-\sqrt{(x-1)(y-1)}=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2=xy+x+y \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

(Hướng dẫn: $x^2 - y^2 = 3 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 3$, đồng thời ta cũng có $x = \dfrac{(x+y)+(x-y)}{2}$ và $y = \dfrac{(x+y)-(x-y)}{2}$ nên tất cả các biểu thức của *x, y* đều có thể biến đổi được thành biểu thức theo biến $x+y$ và $x-y$. Dựa vào điều này ta có thể đổi biến để giải quyết bài toán).

4. $\begin{cases} x^2+y^2+xy+2x=5y \\ (x^2+2x)(x+y-3)=-3y \end{cases}$

3. Đồng bậc hóa

Ví dụ 3.1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Ở bài này ta không thể rút x theo y hay rút y theo x từ 1 trong 2 phương trình được. Tuy nhiên, ta vẫn có cách để đưa về việc giải một phương trình 1 ẩn như sau:

Ta có:

$5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0$

$\Leftrightarrow 5x^2y-4xy^2+3y^3-(x^2+y^2)(x+y)=0$

$\Leftrightarrow x^3-4x^2y+5xy^2-2y^3=0 \qquad (1)$

Nếu $y=0$ thì từ (1) ta suy ra $x=0$, nghiệm $(x,y)=(0,0)$ không thỏa phương trình thứ nhất của hệ. Do đó với $y=0$ hệ không có nghiệm.

Nếu $y \neq 0$, chia cả 2 vế của (1) cho y^3 và đặt $t = \dfrac{x}{y}$, phương trình (1) trở thành:

$t^3-4t^2+5t-2=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2-3t+2)=0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(t-2)=0$

$\Leftrightarrow t=1 \quad \vee \quad t=2$

+) Với $t=1$, ta có $x=y$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$2x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm 1$

$x=1 \Rightarrow y=1$

$x=-1 \Rightarrow y=-1$

+) Với $t=2$, ta có $x=2y$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$(2y)^2+y^2=2 \quad \Leftrightarrow \quad 5y^2=2 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

$y=\sqrt{\dfrac{2}{5}} \Rightarrow x=2\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

$y = -\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow x = -2\sqrt{\frac{2}{5}}$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x, y) = (1,1); (-1,-1); \left(\sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right); \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, -2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

Điểm mấu chốt của lời giải trên là bước đặt $t = \frac{x}{y}$ rồi tìm được một phương trình một ẩn *t*, từ đó giải phương trình này và các bước sau trở nên khá đơn giản. Điều quan trọng khiến cho phương trình (1) có thể đưa về được phương trình ẩn *t* chính là sự **đồng bậc** của nó. Cụ thể ở bài này, các biểu thức đồng bậc là $x^3, -4x^2y, 5xy^2, -2y^3$, tất cả chúng đều có bậc 3, và do đó ta có thể chia cho y^3 để đưa tất cả về các biểu thức theo *t*. Tất cả những bài đồng bậc như vậy đều có thể giải được theo cách chia cả 2 vế và đổi biến này. Biểu thức đồng bậc là biểu thức mà ở đó tất cả những cái nào mà cộng với nhau thì phải đồng bậc với nhau (ở bài vừa rồi thì các biểu thức trên cộng với nhau, và đều có bậc 3 nên biểu thức đó là biểu thức đồng bậc). Ví dụ các biểu thức sau là đồng bậc: $(x^3 + y^3)$, $(x^2 + xy + y^2)$, $(x^4 + 2y^4 + 4x^3y)$, $(\frac{4}{x+y} + \frac{1}{x})$. Các biểu thức sau là không đồng bậc: $(x^3 + y^3 + 2xy)$, $(x^2 + xy + y^2 + x + y)$, $(\frac{1}{x^2 + y^2 + 2x} + \frac{1}{y^2})$, $(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x^2})$. Phương trình đồng bậc là phương trình có dạng $P = 0$ trong đó *P* là biểu thức đồng bậc. Phương trình đồng bậc thì có thể giải theo cách giống như trên. Do đó, cũng như đã làm, hãy cố gắng đưa về phương trình đồng bậc khi có thể. Tiếp sau đây tôi sẽ chỉ cho các bạn cách để nhận biết các bài có thể đưa về đồng bậc và cách để đưa về đồng bậc.

Ví dụ 3.2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3 + y^2x + 3x - 6y = 0 \\ x^2 + xy = 3 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Ở phương trình đầu thì ta thấy có bậc 3 và bậc 1, còn ở phương trình thứ 2 thì ta thấy có bậc 2 và bậc 0. Cả 2 phương trình đều chưa phải là đồng bậc. Tuy nhiên, nếu như ta thay vào chỗ $3x - 6y$ *của phương trình đầu bằng cách thay 3 bởi* $x^2 + xy$ *thì rõ ràng bậc của nó tăng lên 3, tức là bằng với bậc của 2 cái còn lại luôn, như vậy bằng cách này ta đã có thể tạo ra được một phương trình đồng bậc. Bước giải tiếp theo khá đơn giản.*

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y^3 + y^2x + 3(x - 2y) = 0 \\ x^2 + xy = 3 \qquad (1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^3 + y^2x + (x^2 + xy)(x - 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - y^2x - x^2y + x^3 = 0 \qquad (2)$$

Nếu $x = 0$ thì thay vào (1) ta được $0 = 3$ (vô lý). Do đó với $x = 0$ hệ vô nghiệm.

Với $x \neq 0$, chia cả 2 vế của (1) cho x^3 rồi đặt $t = \frac{y}{x}$, phương trình (2) trở thành:

$t^3 - t^2 - t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(t+1) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \quad \vee \quad t = -1$

+) $t = 1 \Rightarrow y = x$. Thay vào (1) ta được:

$2x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Như vậy trong trường hợp này hệ có nghiệm $x = y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

+) $t = -1 \Rightarrow y = -x$. Thay vào (1) ta được $0 = 3$ (vô lý). Như vậy trong trường hợp này, hệ vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x = y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Để đưa tạo ra phương trình đồng bậc, ta thường thay một hằng số bằng một biểu thức đồng bậc khác có bậc khác 0 (ở trên thay 3 bởi $x^2 + xy$ có bậc 2). Khi làm vậy thì bậc của biểu thức được thế vào sẽ tăng lên để có thể bằng với những biểu thức còn lại, tạo ra biểu thức đồng bậc. Tuy nhiên, để làm được việc này thì ít nhất phải có một phương trình mà chỉ chứa 2 bậc khác nhau, khi đó ta chuyển 2 phần có 2 bậc khác nhau đó về 2 vế của phương trình ($x^2 + xy = 3$ chỉ có 2 bậc là 0 và 2, vế trái đồng bậc 2, vế phải đồng bậc 0), sau đó tìm biểu thức có bậc thấp hơn trong phương trình còn lại, thế biểu thức có bậc thấp hơn bằng biểu thức có bậc cao hơn để tăng bậc cho nó, giúp cho nó có bậc bằng với những biểu thức còn lại trong cùng phương trình (nếu các bạn thấy khó hiểu thì vừa đọc cái này vừa coi ví dụ sẽ dễ hơn).

Ví dụ 3.3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 8x - 2y = 0 & (1) \\ x^2 - 3y^2 = 6 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 - 3y^3 - 6(4x + y) = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 6 \quad (1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x^3 - 3y^3 - (x^2 - 3y^2)(4x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 y - 12xy^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + xy - 12y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 3y)(x + 4y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3y \\ x = -4y \end{array}\right.$$

+) Với $x = 0$, thay vào (1) ta được $y = 0$. Tuy nhiên $x = y = 0$ không thỏa (2). Như vậy, trong trường hợp này hệ vô nghiệm.

+) Với $x = 3y$, thay vào (2) ta được:

$$(3y)^2 - 3y^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 6y^2 = 6 \quad \Leftrightarrow y = \pm 1$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$y = -1 \Rightarrow x = -3$$

+) Với $x = -4y$, thay vào (2) ta được:

$$(-4y)^2 - 3y^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 13y^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{6}{13}}$$

$$y = \sqrt{\frac{6}{13}} \Rightarrow x = -4\sqrt{\frac{6}{13}}$$

$$y = -\sqrt{\frac{6}{13}} \Rightarrow x = 4\sqrt{\frac{6}{13}}$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x, y) = (3,1); (-3,-1); \left(-4\sqrt{\frac{6}{13}}, \sqrt{\frac{6}{13}}\right); \left(4\sqrt{\frac{6}{13}}, -\sqrt{\frac{6}{13}}\right)$.

Thực ra ta không nhất thiết phải đặt thêm ẩn *t* mà có thể ghi trực tiếp ra luôn như bài trên cho gọn. Tuy nhiên các phép tính cũng không có gì thay đổi. Biểu thức sau khi phân tích thành nhân tử đó cũng có được dựa trên việc đổi biến và tìm nghiệm, phân tích nhân tử ngoài nháp.

Ở ví dụ 2.7: $x^3 - 4x^2 y + 5xy^2 - 2y^3$ được đổi thành $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-1)^2(t-2)$ với $t = \frac{x}{y}$. Thay vào đó ta có thể trình bày như sau:

$$x^3 - 4x^2 y + 5xy^2 - 2y^3 = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 (x - 2y) = 0$$

Ở ví dụ 2.8: $y^3 - y^2 x - yx^2 + x^3$ được đổi thành $t^3 - t^2 - t + 1 = (t-1)^2(t+1)$ với $t = \frac{y}{x}$. Thay vào đó ta có thể trình bày:

$y^3-y^2x-yx^2+x^3=0 \Leftrightarrow (y-x)^2(y+x)=0$

Nói chung bước tính vẫn là đổi biến và giải phương trình, chỉ khác ở chỗ là nó được ghi trong nháp, còn trong bài làm thì ta ghi gọn hơn một chút.

Nếu đổi biến thì bắt buộc phải xét trường hợp mẫu số bằng 0 trước, còn nếu làm trực tiếp như trên thì không cần.

Bài tập

Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} 2x^2y+xy^2=15 \\ 8x^3+y^3=35 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 \end{cases}$

4. Xử lí một phương trình của hệ

Đôi khi mấu chốt để làm đơn giản hệ phương trình chỉ là giải quyết một phương trình của hệ một cách riêng biệt (không liên quan tới các phương trình khác của hệ).

Ví dụ 4.1: Giải hệ phương trình: (ĐHKB-2002).

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y} \\ x+y=\sqrt{x+y+2} \end{cases}$$

Ý tưởng bài này đã quá rõ khi từ phương trình thứ nhất ta có thể tìm được giá trị của $x-y$, tới đây thì hệ đã trở thành đơn giản.

Đk: $\begin{cases} x-y\ge 0 \\ x+y\ge -2 \end{cases}$

Hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}(1-\sqrt[6]{x-y})=0 \\ x+y=\sqrt{x+y+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y=\sqrt{x+y+2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=y+1 \\ x+y=\sqrt{x+y+2} \end{cases}$$

$\_TH_1$: $\begin{cases} x=y\ (1) \\ x+y=\sqrt{x+y+2}\ (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2), ta được: $2x=\sqrt{2x+2} \Rightarrow 2x^2-x-1=0 \Rightarrow x=1 \vee x=\dfrac{-1}{2}$. Thử lại ta được $(x;y)=(1;1)$.

$\_TH_2$: $\begin{cases} x=y+1\ (1) \\ x+y=\sqrt{x+y+2}\ (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2) ta được: $2y+1=\sqrt{2y+3} \Rightarrow 2y^2+y-1=0 \Rightarrow y=-1 \vee y=\dfrac{1}{2}$. Thử lại ta được $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Hệ có nghiệm: $(x;y)=(1;1),\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 4.2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \ (1) \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \ (2) \end{cases}$$

Quan sát hệ, ta thấy ở phương trình (2), ta không thể rút biến này theo biến khác, và cũng không thể đưa về phương trình tích được…, vậy nên ta chuyển sang khai thác ở phương trình (1). Trong (1) xuất hiện các đại lượng $x^2+y^2, xy, x+y$, đầu tiên ta sẽ tìm mối quan hệ giữa các đại lượng này, từ đó ta sẽ dễ ghép cặp các hạng tử để tìm được nhân tử chung, ta thấy rằng: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ nên ta viết (1) lại thành:

$[(x+y)^2-2xy](x+y)+2xy-(x+y)=0$

Hay $a(a^2-2b)+2b-a=0$ *(* $a=x^2+y^2; b=xy$ *).*

Tương đương: $a^3-a-2ab+2b=0$.

$a(a-1)(a+1)-2b(a-1)=0$

$(a-1)(a^2+a-2b)=0$

Hay nói cách khác, phương trình (1) của hệ có thể viết lại thành:

$(x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0$.

Từ đây ta có lời giải như sau:

Đk: $x+y>0$.

Hệ pt tương đương:

$$\begin{cases} (x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$$ (do $x^2+y^2+x+y>0$).

Thay $y=1-x$ vào pt thứ 2, ta được: $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2$.

Hệ có nghiệm $(x;y)=(1;0),(-2;3)$

Ví dụ 4.3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2+8y^2-8xy+5x-10y=3 \\ (x-y)^2+y=3 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Lời giải cho bài này, cũng như 2 bài trên, rất ngắn gọn:

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} (x-2y+3)(2x-4y-1)=0 \\ (x-y)^2+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-3 \\ (x-y)^2+y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-4y=1 \\ (x-y)^2+y=3 \end{cases}$$

Trong mỗi trường hợp chỉ cần rút x theo y rồi thế vào phương trình thứ hai, từ đó ta dễ dàng tìm được nghiệm của hệ.

Lời giải có vẻ rất đơn giản, nhưng thực ra, nếu không biết cách thì việc tách được biểu thức $2x^2+8y^2-8xy+5x-10y-3$ thành $(x-2y+3)(2x-4y-1)$ không hề dễ dàng chút nào (nếu không tin thì bạn thử tách $2x^2+3y^2+7xy-5y-2$ xem sao). Như vậy câu hỏi đặt ra là phải làm sao để tách được.

Như ta đã biết phương trình bậc 2 dạng: $ax^2+bx+c=0(i)$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1,x_2 thì ta luôn có thể tách (i) thành phương trình tích: $a(x-x_1)(x-x_2)=0$. Vậy nên ta xem phương trình thứ nhất là phương trình bậc 2 theo ẩn x: $2x^2+(5-8y)x+8y^2-10y-3=0(ii)$. Ta có: $\Delta_{ii}=1$, nên ta tìm được quan hệ tuyến tính của x và y, cụ thể là: $x_1=2y-3\vee x_2=2y+\frac{1}{2}$, từ đó có được phân tích như trên. Trong trường hợp Δ là biểu thức theo biến nào đó thì ta cần Δ là số chính phương, vì nếu không thì khi giải ta sẽ ra nghiệm có chứa căn thức, và khi thế vào phương trình thứ 2 sẽ làm bài toán trở nên phức tạp hơn vì chứa nhiều căn thức.

Vậy ta rút ra kết luận: Nếu một phương trình là phương trình bậc 2 theo biến nào đó và có Δ=*const* hoặc là *bình phương* của một biểu thức thì ta có thể đưa phương trình đó về phương trình tích.

Ví dụ 4.4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}6x^2-3xy+x+y=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

<u>Giải</u>

Hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases}(3x-1)(2x-y+1)=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ x^2+y^2=1\end{cases}\vee\begin{cases}y=2x+1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y^2=\dfrac{8}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=2x+1\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x+1\\ 5x^2+4x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=0\end{cases}\vee\begin{cases}y=-\dfrac{3}{5}\\ x=-\dfrac{4}{5}\end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x;y)=(\frac{1}{3};\frac{2\sqrt{2}}{3}),(\frac{1}{3};\frac{-2\sqrt{2}}{3}),(0;1),(\frac{-4}{5};\frac{-3}{5})$.

Ví dụ 4.5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^4(2x^2+y^2)=y^3(16+2x^2)\quad(1)\\ 2(x+y)+\sqrt{x}+1=\sqrt{2(x+y+11)}\quad(2)\end{cases}$$

<u>Giải</u>

Quan sát hệ phương trình, ta thấy ở (2) khả năng tìm được mối quan hệ của x, y *là rất ít, vậy nên rất có thể ở (1) ta sẽ tìm được nhân tử chung để đưa về phương trình tích. Để dễ nhìn ta chuyển các đại lượng chứa biến sang một vế* $(1) \Leftrightarrow 2x^6 + x^4y^2 - 2x^2y^3 - 16y^3 = 0$*, đến đây ta sẽ thấy được nhân tử chung* $x^2 - 2y$ *, cụ thể là:*

$(1) \Leftrightarrow 2(x^6 - 8y^3) + x^2y^2(x^2 - 2y) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2y)(2x^4 + 4x^2y + 8y^2 + x^2y^2) = 0$. *Ta trình bày như sau:*

Dễ thấy $(x; y) = (0; 0)$ không phải là nghiệm của hệ.

Đk: $x > 0$. Từ (1) suy ra $y > 0$.

Hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} (x^2 - 2y)(2x^4 + 4x^2y + 8y^2 + x^2y^2) \\ 2(x + y) + \sqrt{x} + 1 = \sqrt{2(x + y + 11)} \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2y \quad (*) \\ 2(x + y) + \sqrt{x} + 1 = \sqrt{2(x + y + 11)} \quad (2) \end{cases}$$

Thế (*) vào (2) ta được:

$$x^2 + 2x + \sqrt{x} + 1 = \sqrt{x^2 + 2x + 22} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 + \sqrt{x} - 1 = \sqrt{x^2 + 2x + 22} - 5$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\left(x + 3 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 22} + 5} \right) = 0.$$

Do $\sqrt{x^2 + 2x + 22} + 5 > 1$ nên $x + 3 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 22} + 5} > \frac{1}{\sqrt{x} + 1} > 0 \forall x > 0$, do đó $x = 1$ là nghiệm duy nhất.

Từ đó $y = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}$.

Hệ có nghiệm $(x; y) = (1; \frac{1}{2})$.

Thường thì ta chỉ cần đặt ẩn phụ để đưa phương trình về 1 biến (ví dụ 3.1) hoặc dùng công thức nghiệm của phương trình bậc 2 là có thể xử lí được. Tuy nhiên, vấn đề là ở chỗ, làm sao để biết được ta phải dùng cách này chứ không phải là một cách nào khác, và nếu dùng phương pháp này thì phương trình ta phải xử lí là phương trình nào. Thử xem lại ví dụ 3.2 và ví dụ 3.5. Có một điểm chung ở cả 2 hệ phương trình này, đó là có một phương trình chưa căn thức mà ta không thể tìm được một hệ thức đơn giản nào từ nó, đồng thời không thể rút biến để thế, cũng không có cách đổi biến nào giúp làm đơn giản nó đi cả. Đó chính là dấu hiệu để ta chọn phương pháp này, bởi vì ngoài việc xử lí riêng phương trình còn lại ra thì có vẻ như ta không còn cách nào khác. Ở các ví dụ còn lại, ta chỉ tìm cách tách nhân tử ở một phương trình, bởi vì, nếu các bạn thử sẽ thấy, phương trình còn lại không tách được (có khi cả 2 đều không tách được, trường hợp này sẽ giới thiệu sau, cách xử lí khác, tính toán nhiều hơn). Nói tóm lại, dấu hiệu để nhận biết các bài dạng này chính là sự xuất hiện của 1 phương trình có nhiều biểu thức rắc rối, không xử lí được.

Ví dụ 4.6 (ĐHKA-2011): Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \ (1) \\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 \ (2) \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Ta thử xem phương trình (1) là phương trình bậc 2 theo x*:* $5yx^2-2(2y^2+1)x+3y^3-3y=0$, *nhưng tiếc là* $\Delta'=-11y^4+14y^2+1$ *không phải số chính phương nên phương trình (1) khó tách thành phương trình tích. Xét phương trình (2), như ở ví dụ 3.2 ta sẽ tìm mối quan hệ giữa các đại lượng xuất hiện trong phương trình này:* $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$*, nên (2) được viết lại thành:*

$(2)\Leftrightarrow xy[(x+y)^2-2xy]+2=(x+y)^2 \Leftrightarrow xy(x+y)^2-(x+y)^2-2x^2y^2+2$. *Đến đây ta "bắt" được nhân tử* $xy-1$*, cụ thể là:*

$(xy-1)[(x+y)^2-2(xy+1)]=0 \Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2-2)=0$ *(i). Ngoài ra ta cũng có thể xem (2) là phương trình bậc 2 theo* xy*:* $(2)\Leftrightarrow 2x^2y^2-(x+y)^2xy+(x+y)^2-2=0$*, có:* $\Delta=[(x+y)^2-4]^2$*, từ đó ta cũng có thể phân tích (2) thành (i). Ta tiến hành giải như sau:*

Hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} (xy-1)(x^2+y^2-2)=0 \\ 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=1 \\ 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \end{cases}$$

_TH_1: $\begin{cases} xy=1 \\ 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \end{cases}$

Thay $y=\dfrac{1}{x}$ vào pt thứ 2, ta được: $3y^4-6y^2+3=0 \Leftrightarrow 3(y^2-1)^2=0 \Leftrightarrow y=\pm 1.$

_TH_2: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \end{cases}$

Phương trình thứ 2 tương đương:

$3y(x^2+y^2)+2xy(x-2y)-2(x+y)=0 \Rightarrow 6y+2xy(x-2y)-2(x+y)=0$.

$$\Leftrightarrow 2(xy-1)(x-2y)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ x=2y \end{array}\right.$$

Trường hợp $xy=1$ đã giải ở trên, trường hợp $x=2y$, thay vào pt thứ 1, ta được: $y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Vậy hệ có nghiệm: $(x;y)=(1;1),(-1;-1),(\dfrac{2\sqrt{10}}{5};\dfrac{\sqrt{10}}{5}),(\dfrac{-2\sqrt{10}}{5};\dfrac{-\sqrt{10}}{5})$.

Ví dụ 4.7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\dfrac{y-3}{x} & (1) \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3 & (2) \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Để ý rằng ở (1) nếu ta nhân lượng liên hợp cho đại lượng $\sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}$ ở bên vế trái thì sẽ tạo ra được lượng $y-3$ như bên vế phải, từ đó ta đưa được (1) về thành phương trình tích. Ta giải như sau:

Đk: $x>0, x+y>0$.

Từ phương trình (1) ta có $y>3$ suy ra $\sqrt{x+y}>\sqrt{x+3}$ hay $\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}>0$.

Hệ phương trình trương đương:

$$\begin{cases} (y-3)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}}-\dfrac{1}{x}\right)=0 \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3 \end{cases}$$

Trừ 2 phương trình vế theo vế, ta được: $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;8)$.

Bài tập

Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{y}+2 \\ y(\sqrt{x^2+1}-1)=\sqrt{3x^2+3} \end{cases}$

2. $\begin{cases} xy+x+y=x^2-2y^2 \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y \end{cases}$ *(ĐHKD-2008).*

3. $\begin{cases} 2x^2+4xy+2y^2+3x+3-2=0 \\ x^2+y^2+4xy+2y=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0 \\ x^2+y^2+x+y-4=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x-y}=1 \\ \sqrt{y-x}+2\sqrt{2x+y+3}+3\sqrt{3x+2y+7}=x^2+6x+14 \end{cases}$

5. Nhân chia, cộng trừ các phương trình của hệ

Đây không phải là một phương pháp lạ, có điều nhiều khi ta không biết phải sử dụng nó như thế nào. Để tìm hiểu cách sử dụng hiệu quả, ta sẽ quay lại với một ví dụ có thể coi là cơ bản nhất của phương pháp này.

Ví dụ 5.1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+4y=100 \\ x+y=36 \end{cases}$$

Giải

Cả 2 phương trình đều có x và y nên không thể giải ra ngay được, nhưng nếu nhân phương trình thứ 2 với 2 thì cả 2 phương trình đều có 2x, từ đó có thể trừ đi nhau để rút gọn.

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 2x+4y=100 \\ 2x+2y=72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=100 \\ (2x+4y)-(2x+2y)=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=100 \\ 2y=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=22 \\ y=14 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x,y)=(22;14)$.

Ở bài trên, việc lấy 2 phương trình trừ đi nhau đã làm xuất hiện phương trình chỉ có 1 biến *y*, tức là đã làm bài toán trở nên đơn giản hơn. Đây là tư tưởng của phương pháp này.

Tất nhiên bài trên có thể giải bằng cách khác, nhưng nó cho thấy được tư tưởng của phương pháp này. Bây giờ sẽ là ví dụ cho thấy hiệu quả của phương pháp:

Ví dụ 5.2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)^2+6(x-1)y+4y^2=20 \\ x^2+(2y+1)^2=2 \end{cases}$$

Giải

Cả 2 phương trình đều là phương trình bậc 2 với 2 ẩn x, y, giống như một số bài trong phần trước. Các bạn có thể thử, cả 2 phương trình đó đều không phân tích nhân tử được (Δ không ra bình phương). Như vậy cách xử lí cho 1 phương trình không giải quyết được bài này. Ở bài này, mình không thể được là do có cả x^2, y^2 ở cả 2 phương trình. Tuy nhiên, nếu như áp dụng suy nghĩ như ở bài trên, ta có thể làm mất bớt một vài lượng để cho phương trình đơn giản hơn. Và ở bài này, ta sẽ dùng cách đó để làm ra một phương trình không có x^2, sau đó có thể giải bằng phép thế.

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2-2x+1+6xy-6y+4y^2=20 \\ x^2+4y^2+4y+1=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4y^2+6xy-2x-6y=19 \quad (1) \\ x^2+4y^2+4y=1 \qquad (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ đi (2) theo vế ta được:

$$6xy-2x-10y=18 \quad \Leftrightarrow \quad 3xy-x=5y+9 \quad (3)$$

Dễ thấy $y=\frac{1}{3}$ không thỏa (3).

Với $y\neq\frac{1}{3}$, ta có: $(3)\Leftrightarrow x=\frac{5y+9}{3y-1}$.

Thay vào (2) ta được:

$$\left(\frac{5y+9}{3y-1}\right)^2+(2y+1)^2=2$$
$$\Leftrightarrow (5y+9)^2+(3y-1)^2(2y+1)^2=2(3y-1)^2$$
$$\Leftrightarrow (25y^2+90y+81)-2(9y^2-6y+1)+(9y^2-6y+1)(4y^2+4y+1)=0$$
$$\Leftrightarrow 36y^4+12y^3-4y^2+100y+80=0$$
$$\Leftrightarrow 9y^4+3y^3-y^2+25y+20=0$$
$$\Leftrightarrow (y+1)^2(9y^2-15y+20)=0$$
$$\Leftrightarrow y=-1 \quad (\text{do } 9y^2-15y+20=9\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{55}{4}>0 \quad \forall y\in\mathbb{R})$$

Khi đó $x=\frac{5y+9}{3y-1}=-1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x,y)=(-1,-1)$.

Ví dụ 5.3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+3x=0 & (1)\\ x^2+xy+y^2+3x-3y=1 & (2)\end{cases}$$

Giải

Lấy (1) trừ đi (2) theo vế, ta được:

$xy+y^2+3y+1=0 \qquad (3)$

Với $y=0$ thì (3) trở thành $1=0$ (vô lí). Do đó $y=0$ không phải là nghiệm của hệ.

Với $y\neq 0$, ta có:

$$(3)\Leftrightarrow\begin{cases} xy+y^2=-3y-1\\ x=-\frac{y^2+3y+1}{y}\end{cases}$$

Thay vào (2) ta được:

$$\Leftrightarrow (y^2+3y+1)^2-3y(y^2+3y+1)-2y^2(3y+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (y^2+1)(y^2+3y+1)-2y^2(3y+1)=0$$
$$\Leftrightarrow y^4-3y^3+3y+1=0$$
$$\Leftrightarrow (y^2-2y-1)(y^2-y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2-2y-1=0 \\ y^2-y-1=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=1\pm\sqrt{2} \\ y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

+) $y=1+\sqrt{2} \Rightarrow x=-3-2\sqrt{2}$

+) $y=1-\sqrt{2} \Rightarrow x=-3+2\sqrt{2}$

+) $y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=-3-\sqrt{5}$

+) $y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=-3+\sqrt{5}$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x,y)=(-3-2\sqrt{2},1+\sqrt{2});(-3+2\sqrt{2},1-\sqrt{2});$
$\left(-3-\sqrt{5},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(-3+\sqrt{5},\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Ví dụ 5.4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{3x+2y}=-1 & (1) \\ \sqrt{x+y}+x-y=0 & (2) \end{cases}$$

<u>Giải</u>

ĐK: $x+y\ge 0; 3x+2y\ge 0$.

Ta có:

$(2)\Leftrightarrow \sqrt{x+y}=y-x$

$\Rightarrow x+y=(x-y)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy-x-y=0 \qquad (3)$

Lấy (2) trừ đi (1) theo vế ta được:

$x-y+\sqrt{3x+2y}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+2y}=-x+y+1$

$\Rightarrow 3x+2y=(x-y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy-5x+1=0 \qquad (4)$

Lấy (3) trừ đi (4) theo vế ta được:

$4x-y-1=0 \Leftrightarrow y=4x-1$

Thay vào phương trình $x+y=(x-y)^2$ ta được:

$5x-1=(3x-1)^2$
$\Leftrightarrow 9x^2-11x+2=0$
$\Leftrightarrow (x-1)(9x-2)=0$
$\Leftrightarrow x=1 \quad \vee \quad x=\dfrac{2}{9}$

+) $x=1 \Rightarrow y=3$
+) $x=\dfrac{2}{9} \Rightarrow y=-\dfrac{1}{9}$
Thử lại ta thấy chỉ có $(x,y)=(1,3)$ thỏa hệ ban đầu.
Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x,y)=(1,3)$.

Ví dụ 5.5: (ĐHKB – 2008) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} & (1) \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} & (2) \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Ở bài này, ta có thể thấy rằng số $-\dfrac{5}{4}$ xuất hiện khá "vô duyên", Những số hạng khác đều chứa biến, đều có hệ số nguyên và các hệ số cũng gần như bằng nhau hết, tự nhiên đâm ngang 1 phân số như thế. Cũng chính vì nó mà các phương trình (1) và (2) khó mà phân tích thành nhân tử được. Vì vậy, để làm đơn giản bài toán, ta thử trừ 2 phương trình để làm mất số đó đi rồi tính tiếp.

Lấy (2) trừ đi (1) theo vế ta được:
$x^4+y^2+2x^2y-x^2-y-x^3y-xy^2=0$

Tới đây thì được 1 phương trình có vẻ đơn giản hơn rồi. Nếu các bạn không nhìn ra ngay thì có thể thử tính Δ, coi phương trình trên là phương trình bậc 2 theo y, x là tham số.

$\Leftrightarrow (x^2+y)^2-(x^2+y)-xy(x^2+y)=0$
$\Leftrightarrow (x^2+y)(x^2+y-xy-1)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y=0 \\ x^2+y=xy+1 \end{array}\right.$

+) Với $x^2+y=0$, thay vào (1) ta được:
$(1) \Leftrightarrow x^2+y+xy(x^2+y)+xy=-\dfrac{5}{4}$
$\Leftrightarrow xy=-\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow -x^3=-\dfrac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}$
$\Rightarrow y=-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}$

+) Với $x^2+y=xy+1$, thay vào (1) ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + y + xy(x^2 + y) + xy = -\frac{5}{4}$$
$$\Leftrightarrow 2xy + 1 + xy(xy + 1) = -\frac{5}{4}$$
$$\Leftrightarrow 4(xy)^2 + 12xy + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2xy + 3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y = xy + 1 = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x^3 + xy = -\frac{1}{2}x$$
$$\Rightarrow x^3 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x$$
$$\Leftrightarrow 2x^3 + x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 (\text{do } 2x^2 + 2x + 3 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R})$$
$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2x} = -\frac{3}{2}$$

Thử lại ta thấy các nghiệm vừa tìm được đều thỏa hệ đã cho.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}, -\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right); \left(1, -\frac{3}{2}\right)$.

Các bước biến đổi ở trên (sau khi tìm được 2 đẳng thức của $x^2 + y$) có cũng có thể được làm bằng cách rút *y* theo *x* rồi thế vào (1). Làm như trên chỉ để giảm tính toán một chút.

Ví dụ 5.6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 \\ y + xy^2 = -6x^2 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Để ý rằng nếu nhân x vào phương trình thứ 2 thì vế trái sẽ thành một biểu thức theo biến xy, còn vế phải là x^3, 2 điều này giống với phương trình thứ nhất. Khi đó, ta chỉ cần "khử" x^3 đi là được phương trình một ẩn $t = xy$, khi đó ta sẽ được một hệ thức đơn giản giữa x và y, như vậy sẽ dễ giải hơn.

Ta có: $\begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 \\ y + xy^2 = -6x^2 \end{cases} \quad (1) \quad \Rightarrow \begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 \\ xy + x^2y^2 = -6x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 + x^3y^3}{19} = x^3 \\ \dfrac{xy + x^2y^2}{-6} = x^3 \end{cases}$

Từ đây ta suy ra:

$$\frac{1+x^3y^3}{19}=\frac{xy+x^2y^2}{-6}$$
$$\Leftrightarrow -6(1+x^3y^3)=19(xy+x^2y^2)$$
$$\Leftrightarrow 6x^3y^3+19x^2y^2+19xy+6=0$$
$$\Leftrightarrow (xy+1)(6x^2y^2+13xy+6)=0$$
$$\Leftrightarrow (xy+1)(2xy+3)(3xy+2)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy+1=0 \\ 2xy+3=0 \\ 3xy+2=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} xy=-1 \\ xy=-\frac{3}{2} \\ xy=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

+) Với $xy=-1$, thay vào (1) ta được:
$1+(-1)^3=19x^3 \Leftrightarrow x=0$ (vô lí vì $xy=-1\neq 0$)
Như vậy trường hợp này hệ vô nghiệm
+) Với $xy=-\frac{3}{2}$, thay vào (1) ta được:
$$1+\left(-\frac{3}{2}\right)^3=19x^3 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{19}{8}=19x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{1}{2}$$
$$y=-\frac{3}{2x}=3$$
+) Với $xy=-\frac{2}{3}$, thay vào (1) ta được:
$$1+\left(-\frac{2}{3}\right)^3=19x^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{19}{27}=19x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{3}$$
$$y=-\frac{3}{2x}=-2$$
Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x,y)=\left(-\frac{1}{2},3\right);\left(\frac{1}{3},-2\right)$.

Ví dụ 5.7: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2y+x-xy^2-y=4 \\ x^2-y^2=4 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Trừ 2 phương trình theo vế ta được:
$$x^2y+x-xy^2-y-(x^2-y^2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(xy+1-x-y)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(x-1)(y-1)=0$$

$\Leftrightarrow x = y \quad \vee \quad x = 1 \quad \vee \quad y = 1$

+)Với $x = y$, thay vào phương trình thứ 2 của hệ ta được: $0 = 4$ (vô lí).

Như vậy trong trường hợp này hệ vô nghiệm.

+) Với $x = 1$, thay vào phương trình thứ 2 của hệ ta được: $y^2 = -3$ (vô lí).

Như vậy trong trường hợp này hệ vô nghiệm.

+) Với $y = 1$, thay vào phương trình thứ 2 của hệ ta được:

$x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x, y) = (\sqrt{5}, 1); (-\sqrt{5}, 1)$.

6. Sử dụng đạo hàm

Trước tiên xin đưa ra một vài ví dụ để các bạn hiểu nguồn gốc của phương pháp này.

Ví dụ 6.1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 = y^3 \\ x^4 - 2y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất, ta có ngay $x = y$ (nếu $x > y$ thì $x^3 > y^3$, nếu $x < y$ thì $x^3 < y^3$), từ đó thế vào phương trình thứ 2 và giải quyết bài toán phương trình 1 ẩn.

Ví dụ 6.2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + x + \sqrt[3]{x} = y^3 + y + \sqrt[3]{y} \\ x^3 = 2y^2 - 1 \end{cases}$$

Giải

Nếu $x > y$ thì ta có:

$$\begin{cases} x^3 > y^3 \\ x > y \\ \sqrt[3]{x} > \sqrt[3]{y} \end{cases} \Rightarrow x^3 + x + \sqrt[3]{x} > y^3 + y + \sqrt[3]{y}$$ (mâu thuẫn với phương trình thứ nhất)

Nếu $x < y$ thì ta có:

$$\begin{cases} x^3 < y^3 \\ x < y \\ \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y} \end{cases} \Rightarrow x^3 + x + \sqrt[3]{x} < y^3 + y + \sqrt[3]{y}$$ (mâu thuẫn với phương trình thứ nhất)

Như vậy từ phương trình thứ nhất ta có $x = y$.

Thay vào phương trình thứ 2, giải phương trình theo 1 biến, ta được nghiệm của hệ đã cho.

Điểm chung ở 2 ví dụ trên là: xuất phát từ việc 2 vế của 1 phương trình là 2 biểu thức giống nhau, chỉ khác biến (phương trình thứ nhất của mỗi hệ trên), ta suy ra được 2 biến đó bằng nhau. Rõ ràng việc suy ra được điều này là một bước tiến rất lớn khi giải hệ, bởi vì công việc còn lại chỉ là giải quyết một phương trình 1 ẩn, mà thường thì cũng không phức tạp như những bài là giải phương trình ngay từ đầu. Cách mà ta làm để suy ra được 2 biến bằng nhau đó là chỉ ra *x* không thể lớn hơn và cũng không thể nhỏ hơn *y*. Tuy nhiên, không phải lúc nào nó cũng đơn giản như đã làm ở 2 bài trên. Các bạn hãy xem ví dụ sau:

Ví dụ 6.3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 4x = y^3 - 3y^2 + 4y \\ x^3 = 2y^2 - 1 \end{cases}$$

Ở đây ta cũng có 2 vế là 2 biểu thức giống nhau giống như bài trước, tuy nhiên nếu chỉ dùng những lập luận như ở bài trước, tức là:

Nếu $x > y$ *thì ta có:* $x^3 > y^3$ *và* $4x > 4y$.

Vậy còn $-3x^2$ *và* $-3y^2$ *thì sao? Rõ ràng với* $x, y > 0$ *thì ta có luôn là* $-3x^2 < -3y^2$, *trong khi để làm được như bài trên thì mình phải có dấu "$>$" để gộp với 2 cặp còn lại, suy ra được* $VT > VP$. *Như vậy phải chăng ý tưởng này thất bại?*

Thực ra thì $x^3 + 4x > y^3 + 4y$ *và nó lớn hơn "đủ nhiều" để khi thêm* $-3x^2$ *vào VT,* $-3y^2$ *vào VP thì ta vẫn có* $VT > VP$. *Vấn đề còn lại là phải chứng minh như thế nào.*

Ý tưởng làm từng phần rồi cộng lại như trên đã thất bại. Bây giờ ta nhìn một cách tổng thể hơn, tức là chứng minh $VT > VP$ *ra thẳng luôn chứ không chia thành từng phần nữa. Do biểu thức 2 vế giống nhau nên ta có thể đặt* $f(t) = t^3 - 3t^2 + 4t$, *và cái ta cần chứng minh là* $f(x) > f(y)$ *với* $x > y$. *Tính chất này là của hàm số đồng biến. Như vậy, việc ta cần làm là phải chứng minh* $f(t)$ *đồng biến nữa thôi. Mà để chứng minh 1 hàm số là đồng biến thì công cụ hiệu quả nhất chính là đạo hàm.*

Ta có: $f'(t) = 3t^2 - 6t + 4 = 3(t-1)^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Như vậy là ta đã có $f(t)$ *đồng biến, theo lập luận ở trên thì tới đây ta đã giải quyết được bài toán. Lời giải cụ thể như sau:*

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 + 4t \qquad (t \in \mathbb{R})$

Ta có: $f'(t) = 3t^2 - 6t + 4 = 3(t-1)^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình thứ nhất của hệ có thể viết lại thành: $f(x) = f(y) \qquad (*)$

Do $f(t)$ đồng biến nên:

Nếu $x > y$ thì $f(x) > f(y)$, mâu thuẫn với (*)

Nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$, mâu thuẫn với (*)

Như vậy (*) $\Leftrightarrow x = y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$x^3 = 2x^2 - 1$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2-x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Do $x = y$ nên hệ đã cho có các nghiệm $(x,y) = (1,1); \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right); \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Đoạn (*) có thể ghi là Do $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $(*) \Leftrightarrow x = y$ luôn, không ghi 2 dòng kia cũng được. Và nếu hàm $f(t)$ là một hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì ta cũng có thể suy ra được $x = y$

Điểm mấu chốt của phương pháp này chính là việc có 2 biểu thức giống nhau xuất hiện ở 2 vế của 1 phương trình. Nếu nhận ra được điều đó trong đề bài thì khả năng áp dụng cách này là rất cao. Tuy nhiên, cách này cũng có một số biến thể khiến cho việc thực hiện nó khó hơn.

Ví dụ 6.4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8x^3 + 2x = y^3 + y \\ x^2 - x + 1 = y^2 - y \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại thành $f(2x) = f(y)$ (*)

Do $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $(*) \Leftrightarrow 2x = y$

Thay vào phương trình thứ 2 của hệ ta được:

$x^2 - x + 1 = (2x)^2 - (2x)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$

+) $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \Rightarrow y = \dfrac{1+\sqrt{13}}{3}$

+) $x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6} \Rightarrow y = \dfrac{1-\sqrt{13}}{3}$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x,y) = \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}, \dfrac{1+\sqrt{13}}{3}\right); \left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}, \dfrac{1-\sqrt{13}}{3}\right)$.

Ở bài này, thay vì cho 2 vế của phương trình đầu là $f(x)$ và $f(y)$, người ta đã sửa lại thành $f(2x)$ và $f(y)$ khiến cho việc nhận ra sự giống nhau ở 2 vế trở nên khó hơn, tất nhiên là vẫn có nét giống nhau.

Ví dụ 6.5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - y - 1 = 2\sqrt{2x-1} \\ y^3 - 8x^3 + 3y^2 + 4y - 2x + 2 = 0 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$y^3 + 3y^2 + 4y + 2 = 8x^3 + 2x$

$\Leftrightarrow (y+1)^3 + (y+1) = (2x)^3 + 2x \qquad (*)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t \quad t \in \mathbb{R}$

Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (*) có thể viết lại thành: $f(y+1) = f(2x)$.

Nên $(*) \Leftrightarrow y + 1 = 2x$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được:

$x^2 - 2x = 2\sqrt{2x-1} \qquad (**)$

$\Rightarrow (x^2 - 2x)^2 = 4(2x-1)$

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 8x - 4$

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 8x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 2)(x^2 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 (\text{do } x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$

Thử lại ta thấy chỉ có $x = 2 + \sqrt{2}$ là nghiệm của (**).

$y = 2x - 1 = 3 + 2\sqrt{2}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = (2 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$.

Thường thì những bài kiểu như vậy đều được tạo ra từ cùng một cách. Chẳng hạn với ví dụ trên, xuất phát từ hệ:

$$\begin{cases} x^2 - y - 1 = 2\sqrt{2x-1} \\ 2x = y + 1 \end{cases}$$

Đối với người ra đề thì có vẻ như hệ này còn quá đơn giản. Vì vậy, thay vì cho phương trình thứ 2 như vậy, người ra đề sẽ tìm một hàm số $f(t)$ sao cho nó đồng biến hoặc nghịch biến (cụ thể ở bài trên hàm số được chọn là $f(t) = t^3 + t$), rồi sau đó thay phương trình thứ 2 bởi phương trình $f(2x) = f(y+1)$. Do f đồng biến nên phương trình mới này vẫn tương đương với phương trình ban đầu. Sau đó phương trình mới này được khai triển, tạo ra một phương trình có vẻ không còn nét gì giống với phương trình ban đầu.

Có thể thay hàm $f(t)$ ở trên bởi một hàm số đơn điệu khác, chẳng hạn, nếu thích ta có thể chọn $f(t)=t^3+3t$. Khi đó ta sẽ được phương trình:

$(2x)^3+3.(2x)=(y+1)^3+3(y+1)$

$\Leftrightarrow y^3-8x^3+3y^2+6(y-x)+4=0$

Thêm phương trình đầu của hệ vào nữa là ta đã được một bài toán mới, cùng xuất phát từ hệ ở trên.

Để giải được thì ta buộc phải tìm được con đường mà người ra đề đã tạo ra bài toán. Hàm số (t^3+t, t^3+3t), biểu thức ($2x, y+1$) càng khó thì việc tìm lại được chúng sau khi đã được khai triển ra cũng càng khó. Phải để ý những biểu thức cùng dạng với nhau để tìm được ra hàm số được sử dụng và tìm được các biểu thức ban đầu.

Thực ra các bài kiểu này cũng giống như các bài xử lý trên một phương trình của hệ đã nói ở trước. Do đó, dấu hiệu để nhận biết các bài này cũng là việc 2 phương trình của hệ không có mấy liên hệ với nhau, hoặc là trong phương trình có nhiều biểu thức phức tạp. Có điều, để xử lý được thì ta phải sử dụng tới tính đơn điệu của hàm số.

Có khi ta phải kết hợp các phương trình của hệ với nhau thì mới tạo ra 2 biểu thức giống nhau để xét được.

Ví dụ 6.6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4} \\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 \end{cases}$$

Giải

Cộng 2 phương trình của hệ theo vế ta được:

$x^2-2x+\sqrt{x^2-2x+5}-y^2+3y+1=3y+\sqrt{y^2+4}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+\sqrt{(x-1)^2+4}=y^2+\sqrt{y^2+4}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t+4}$ $(t\geq 0)$

Ta có: $f'(t)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{t+4}}>0, \forall t\geq 0$

Do đó $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Phương trình (1) có thể viết lại thành $f\left((x-1)^2\right)=f(y^2)$

Do đó (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2=y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=y \\ 1-x=y \end{array}\right.$

+) Với $y=x-1$, thay vào phương trình thứ 2 của hệ ta được:

$x^2-(x-1)^2-3x+3(x-1)+1=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$

$y=x-1=\dfrac{1}{2}$

+) Với $y=1-x$, thay vào phương trình thứ 2 của hệ ta được:

$$x^2-(1-x)^2-3x+3(1-x)+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad -4x+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{3}{4}$$

$$y=1-x=\frac{1}{4}$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right);\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$.

Ví dụ 6.7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x^2-2x-5+2x\sqrt{x^2+1}=2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} & (1) \\ x^2+2y^2=2x-4y+3 & (2) \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Ta có: $(2)\Leftrightarrow x^2-2x-3=-2y^2-4y \qquad (3)$

Lấy (1) trừ đi (3) theo vế ta được:

$$2x^2-2+2x\sqrt{x^2+1}=2y^2+4y+2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x\sqrt{x^2+1}=y^2+2y+1+(y+1)\sqrt{y^2+2y+2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x\sqrt{x^2+1}=(y+1)^2+(y+1)\sqrt{(y+1)^2+1} \qquad (4)$$

Đặt $f(t)=t^2+t\sqrt{t^2+1} \qquad (t\in\mathbb{R})$

Ta có: $f'(t)=2t+\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}=2t+\dfrac{2t^2+1}{\sqrt{t^2+1}},\forall t\in\mathbb{R}$

$$(2t^2+1)^2=4t^4+4t^2+1>4t^4+4t^2=4t^2(t^2+1)\Rightarrow 2t^2+1>2|t|\sqrt{t^2+1}\geq -2t\sqrt{t^2+1},\forall t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(t)>0,\forall t\in\mathbb{R}$$

(*Nếu các bạn thử chứng minh f'(t)>0 bằng cách biến đổi tương đương thì sẽ tìm ra cách làm giống như trên*)

Do vậy $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (4) có thể viết lại thành $f(x)=f(y+1)$

Do đó $(4)\Leftrightarrow x=y+1$

Thay vào (2) ta được:

$$(y+1)^2+2y^2=2(y+1)-4y+3$$

$$\Leftrightarrow 3y^2+4y-4=0$$

$$\Leftrightarrow (y+2)(3y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow y=-2 \quad \vee \quad y=\frac{2}{3}$$

+) $y=-2\Rightarrow x=y+1=-1$

+) $y=\dfrac{2}{3}\Rightarrow x=y+1=\dfrac{5}{3}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x,y)=(-1,-2);\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Ví dụ 6.8: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{y}} = 2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{x}} = 2 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Đây là một dạng bài khá quen thuộc ngay từ lớp 10, hệ đối xứng loại 2. Với dạng này, cách giải chung đó là trừ 2 phương trình theo vế để được 2 biểu thức giống nhau của x và y ở 2 vế, sau đó chuyển hết về 1 vế và tách nhân tử $x - y$, suy ra được $x = y$. Tuy nhiên ở đây biểu thức khá là phức tạp, để tách được $x - y$ phải dùng lượng liên hợp và biểu thức còn lại sau khi tách cũng khá phức tạp. Như những bài trước, ở đây ta cũng có 2 biểu thức giống nhau của x và y ở 2 vế, và cũng phải chứng minh $x = y$, tức là ta có thể sử dụng đạo hàm để giải quyết bước này.

ĐK: $x, y \geq \dfrac{1}{2}$

Lấy phương trình thứ nhất trừ đi phương trình thứ 2 theo vế ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}} - \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{y}} - \sqrt{2 - \frac{1}{y}} \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{2 - \dfrac{1}{t}} \qquad (t \geq \dfrac{1}{2})$

Ta có $f'(t) = -\dfrac{1}{2\sqrt{t^3}} - \dfrac{1}{2t^2\sqrt{2 - \frac{1}{t}}}, \forall t > \dfrac{1}{2}$

Nên $f(t)$ liên tục và nghịch biến trên $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

Phương trình (*) có thể viết lại thành $f(x) = f(y)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào hệ, đặt $a = \dfrac{1}{x}$ ($0 < a \leq 2$), ta được:

$$\sqrt{a} + \sqrt{2 - a} = 2$$

$$\Leftrightarrow a + 2 - a + 2\sqrt{a(2-a)} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a(2-a)} = 1$$

$$\Leftrightarrow a(2-a) = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

Do đó: $x = y = \frac{1}{a} = 1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = (1,1)$.

Đây là những dạng thường gặp trong các đề thi đại học mà các bạn có thể sử dụng đạo hàm để giải quyết. Những bài phải sử dụng tới đạo hàm còn có những bài liên quan tới hàm mũ, logarit (sẽ được nhắc tới sau), những bài đó thường dễ nhận dạng hơn, nhưng đôi khi khó xử lí hơn. Nói chung, quan trọng nhất vẫn là sự xuất hiện của các biểu thức giống nhau, nếu thấy chúng thì thử tìm cách tách thành 2 vế giống nhau giống như đã làm ở những bài trên, hoặc nếu chưa được thì thử để ý tiếp phương trình còn lại xem có cộng trừ thêm vào để cho thành 2 biểu thức giống nhau luôn được hay không.

Còn một thứ đáng chú ý, đó là điều kiện để áp dụng phương pháp này, đó là 2 biến đang cần chứng minh bằng nhau phải **cùng thuộc một khoảng K nào đó** (tức là một trong các dạng $[a;b],(a;b],[a;b),(a;b)$ trong đó *a, b* có thể là hằng số hoặc ∞, và hàm số đang xét phải xác định, **liên tục và đơn điệu** (đồng biến hoặc nghịch biến) trên khoảng K đó. Chẳng hạn, với phương trình:

$$x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}$$

Thì nếu ta xét hàm $f(t) = t - \frac{1}{t}$, xác định trên $D_1 = (-\infty;0)$ và $D_2 = (0;+\infty)$ và có:

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0, \forall x \in D_1 \cup D_2$$

Thì ta mới chỉ có $f(t)$ liên tục và đơn điệu trên D_1 và D_2 chứ không có $f(t)$ liên tục và đơn điệu trên $D_1 \cup D_2$. Do đó, nếu chỉ có $x, y \in D_1 \cup D_2$, tức là mới chỉ có $x, y \neq 0$ thì từ phương trình trên không thể suy ra được $x = y$. Điều này chỉ có thể suy ra khi $x, y \in D_1$ hoặc $x, y \in D_2$, tức là cả *x, y* cùng âm hoặc cùng dương, thì mới suy ra được $x = y$ từ phương trình trên.

Khi hệ đã cho có biến *x, y* thì tốt nhất các bạn nên xét $f(t)$ chứ không nên ghi $f(x)$.

Đây là tất cả những điều tôi muốn chia sẻ với các bạn ở phương pháp này.

Các phương pháp vừa rồi cũng là tất cả những phương pháp mà tôi thấy là cần thiết nhất để xử lí các bài hệ phương trình đại số trong đề thi đại học. Mặc dù đã cố nhưng việc số lượng cách vẫn nhiều hơn so với phần phương trình – bất phương trình là không thể tránh khỏi. Dù sao thì so với sự hiệu quả của chúng, thì theo tôi, số lượng này vẫn ổn. Chỉ cần nắm vững những cách này, sử dụng chúng hợp lí, kết hợp với một chút suy luận để tìm ra cách thì các bạn sẽ giải được phần lớn những bài hệ phương trình trong đề thi đại học hiện nay.

Xu hướng chung khi giải vẫn là làm cho bài toán trở nên đơn giản hơn, có nghĩa là giảm căn thức, giảm bậc, đưa về dạng quen thuộc. Ở phần phương trình, phương pháp chủ đạo của ta là bình phương 2 vế để phá căn, đưa về phương trình đa thức, thì ở đây, ta cũng có một phương pháp chủ đạo, đó là phương pháp thế, tức là cứ áp dụng phương pháp này bất cứ lúc nào có thể, tại vì nó rất dễ để nhận ra. Khi đứng trước một bài toán, đầu tiên ta sẽ tìm xem điểm chung của nó để đổi biến nếu có thể, sau đó tìm cách đưa về phương trình đại số và giải, tại vì ta đã biết cách giải phương trình hiệu quả. Cho dù là xử lí một phương trình, sử dụng đạo hàm, nhân chia cộng trừ các phương trình với nhau, thì mục đích chính của ta vẫn là tìm một hệ thức để tính biến này theo biến kia (tính x theo y hoặc tính y theo x), sau đó thế vào 1 phương trình của hệ để trở thành phương trình 1 ẩn, và việc đưa về đồng bậc cũng nhằm mục đích này.

Tất nhiên hướng làm theo kiểu "phép thế bất cứ lúc nào có thể" này thường đưa về một phương trình bậc cao, và có những cách làm khác nhẹ nhàng hơn, chỉ phải đưa về phương trình bậc 2, thỉnh thoảng mới bậc 3, không bao giờ cao hơn. Tuy nhiên, để tìm được những cách làm như vậy thì lại không dễ, và có khi cũng phải tính toán nhiều hoặc phải mò đại! Thay vì vậy, cứ theo cách kia, và dựa vào nó chúng ta đã tạo ra được những phương pháp khá hiệu quả như trên. Phương pháp bình phương để phá căn, phép thế để đưa về phương trình giúp ta giải quyết được rất nhiều bài phương trình, hệ phương trình, và giúp ta xây dựng được những phương pháp khác dựa trên nó, mà 2 cách này đưa về phương trình đa thức bậc cao, để giải phương trình đa thức bậc cao thì cần sử dụng máy tính. Do vậy, kĩ năng sử dụng máy tính để giải các phương trình này là nền tảng rất quan trọng. Nếu bây giờ bạn vẫn chưa rành kĩ thuật này, thì bạn nên tập kĩ lại nó nếu muốn sử dụng những cách mà tôi đã đưa ra trong chuyên đề này.

Phần tiếp theo sẽ nói về vài cách để xử lí các bài có liên quan tới mũ – logarit.

III – VÀI ĐIỀU VỀ PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA HÀM MŨ VÀ LOGARIT

Giống như các phần trước, ở đây tôi sẽ không nhắc lại các công thức cơ bản trong SGK nữa mà chỉ nói về cách sử dụng chúng một cách hiệu quả thôi.

Đầu tiên, khi làm các bài này, phải tìm các biểu thức có cùng cơ số để rút gọn.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$$

Giải

ĐK: $x > 1$

Phương trình đã cho tương đương với:

$\log_2[x(x-1)] = 1$

$\Leftrightarrow x(x-1) = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 2 (\text{do } x+1 > 0)$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 2$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình;

$$\begin{cases} 4x^2 - 9x^2 = 27 \\ \log_3(2x+3y) - \log_3(2x-3y) = 1 \end{cases}$$

Giải

ĐK: $2x+3y > 0, 2x-3y > 0$.

Ta có:

$\log_3(2x+3y) - \log_3(2x-3y) = 1$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{2x+3y}{2x-3y}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+3y}{2x-3y} = 3$

$\Leftrightarrow 2x+3y = 3(2x-3y)$

Do đó, hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (2x+3y)(2x-3y) = 27 \\ 2x+3y = 3(2x-3y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2x-3y)^2 = 27 \\ 2x+3y = 3(2x-3y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y = 3 \\ 2x+3y = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-3y = -3 \\ 2x+3y = -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Nếu các biểu thức chưa có cùng cơ số nhưng có thể đưa về cùng cơ số thì chuyển luôn. Chẳng hạn các cơ số $2,4,8,...,\sqrt{2},\sqrt[4]{2},...,\frac{1}{2},\frac{1}{4}...$ đều có thể đưa về cơ số 2, các cơ số $\frac{1}{3},3,9,27,...,\sqrt{3},\sqrt[3]{3},\sqrt[4]{3},...$ đều có thể đưa về cơ số 3.

Đối với các bài phương trình mũ, sau khi đưa hết các biểu thức mũ về cùng cơ số thì ta thường đặt hàm mũ đó là 1 biến rồi giải phương trình đại số theo biến đó, hoặc đặt nhân tử chung để giải.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$4^x + 2^{x+1} - 8 = 0$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$(2^x)^2 + 2.2^x - 8 = 0 \qquad (1)$

Đặt $y = 2^x$ ($y > 0$), phương trình (1) trở thành:

$y^2 + 2y - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)(y+4) = 0$

$\Leftrightarrow y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2 (\text{do } y + 4 > 0)$

$\Rightarrow 2^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} + 1$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$2^{2x^2+2x} + 2^{1-x^2} - 2^{x^2+2x+1} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2^{2x^2+2x} - 2^{x^2+2x+1} + 2^{1-x^2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+2x+1}(2^{x^2-1} - 1) + 2^{1-x^2}(1 - 2^{x^2-1}) = 0$

$\Leftrightarrow (2^{x^2-1} - 1)(2^{x^2+2x+1} - 2^{1-x^2}) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2-1} = 1 \\ 2^{x^2+2x+1} = 2^{1-x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 1 - x^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ 2x^2 + 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 0 \vee x = -1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x = -1; x = 0; x = 1$.

Với phương trình logarit thì sau khi đưa về cùng cơ số, ta gom các biểu thức đó lại thành 1 biểu thức rồi khử hàm logarit, hoặc đặt biểu thức logarit theo 1 biến rồi giải phương trình đại số theo biến đó.

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$\log_3(2x+1)-\log_{\frac{1}{3}}(3-x)=0$$

<u>Giải</u>

ĐK: $-\frac{1}{2}<x<3$

Phương trình đã cho tương đương với:

$\log_3(2x+1)+\log_3(3-x)=0$

$\Leftrightarrow \log_3[(2x+1)(3-x)]=0$

$\Leftrightarrow (2x+1)(3-x)=1$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x-2=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{4}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{4}$.

Ví dụ 6: (ĐHKD-2011) Giải phương trình:

$$\log_2(8-x^2)+\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})-2=0$$

<u>Giải</u>

ĐK: $-1\le x\le 1$

Phương trình đã cho tương đương với:

$\log_2(8-x^2)-\log_2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})=2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{8-x^2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)=2$

$\Leftrightarrow \dfrac{8-x^2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=4$

$\Leftrightarrow 8-x^2=4(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$ (1)

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$

Ta có: $t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\Rightarrow 8-x^2=\left(\dfrac{t^2-2}{2}\right)^2+7$

Phương trình (1) trở thành:

$\left(\dfrac{t^2-2}{2}\right)^2+7=4t$

$\Leftrightarrow (t^2-2)^2+28=16t$

$\Leftrightarrow t^4-4t^2-16t+32=0$

$\Leftrightarrow (t-2)(t^3+2t^2-16)=0$

$\Leftrightarrow (t-2)^2(t^2+8)=0$

$\Leftrightarrow t = 2(\text{do } t^2 + 8 > 0, \forall t \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2$

$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1-x^2} = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1$

$\Leftrightarrow 1 - x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

Ví dụ 7: Giải phương trình:

$$\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x-1)^2 = 4$$

<u>Giải</u>

ĐK: $x > \frac{1}{2}$.

Ở bài này, các biểu thức có vẻ rất khác nhau. Trước tiên, ta cố gắng làm đơn giản bài toán đi trước, bằng cách tách các biểu thức trong logarit thành nhân tử, rồi tách chúng ra. Các biểu thức bị tách ra đó sẽ đơn giản hơn lúc đầu, nhìn vào đó ta có thể sẽ tìm được cách làm.

Phương trình đã cho tương đương với:

$\log_{2x-1}[(2x-1)(x+1)] + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4$

$\Leftrightarrow 1 + \log_{2x-1}(x+1) + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4$

$\Leftrightarrow \log_{2x-1}(x+1) + 2\log_{x+1}(2x-1) - 3 = 0 \qquad (1)$

Bây giờ thì các biểu thức giống nhau đã xuất hiện, chỉ cần đổi biến nữa là xong.

Đặt $y = \log_{2x-1}(x+1) \Rightarrow \log_{x+1}(2x-1) = \frac{1}{y}$

Phương trình đã cho trở thành:

$y + \frac{2}{y} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (y-1)(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow y = 1 \quad \vee \quad y = 2$

+) Với $y = 1$, ta có:

$\log_{2x-1}(x+1) = 1$

$\Leftrightarrow x + 1 = 2x - 1$

$\Leftrightarrow x = 2$

+) Với $y = 2$, ta có

$\log_{2x-1}(x+1) = 2$

$\Leftrightarrow x + 1 = (2x-1)^2$

$: \Leftrightarrow 4x^2 - 5x = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{4} (\text{do } x > \frac{1}{2} > 0)$

Nếu gặp hệ chứa mũ, logarit thì cách làm cũng giống với những cách ở phương trình đại số, thấy sử dụng phương pháp thế được thì sử dụng ngay, nếu thấy một biểu thức xuất hiện nhiều lần thì có thể là đổi biến, nếu thấy 2 biểu thức tương tự ở 2 vế thì dùng đạo hàm. Nếu thấy không có gì liên quan giữa 2 phương trình thì xử lí riêng 1 cái, cách xử lí giống mấy cách của mấy bài phương trình ở trên

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \dfrac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$$

Giải

Hệ pt đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \dfrac{2^x\left(2^x + 2\right)}{2^x + 2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3x} = 5.2^{2x} - 4.2^x & (1) \\ y = 2^x > 0 \end{cases}$$

Giải phương trình (1)

$$2^{3x} = 5.2^{2x} - 4.2^x \Leftrightarrow \left(2^x\right)^3 - 5\left(2^x\right)^2 + 4.2^x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2^x = 0 & (l) \\ 2^x = 4 & (n) \\ 2^x = 1 & (n) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ pt đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 4), (0; 1)$.

IV – MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC

Chúng ta đã biết các phương pháp để giải các bài phương trình, hệ phương trình rồi, bây giờ chúng ta sẽ thử dùng chúng để giải các bài toán này trong các đề thi đại học để xem tính hiệu quả của chúng.

Bài 1 (ĐHKA-2012) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Đây là hệ phương trình, như vậy đầu tiên ta nghĩ tới phép thế. Tuy nhiên, trong 2 phương trình không có phương trình nào có thể rút được biến này theo biến kia, như vậy hiện giờ chưa sử dụng cách này được. Nếu quan sát một chút thì có thể thấy hệ số của x và y hình như bằng nhau, tức là hoặc là hệ đối xứng loại 1, hoặc là dùng đạo hàm để giải. Thử theo hướng hệ đối xứng loại 1. Chuyển hết các biểu thức ở phương trình đầu về 1 vế:

$$x^3 - y^3 - 3(x^2 + y^2) - 9(x - y) + 22 = 0$$

Cũng khá giống hệ đối xứng loại 1, nhưng có 1 điều, đó là $x - y$ *chứ không phải* $x + y$. *Tuy vậy, ta chỉ cần thay y bởi –y là mọi chuyện sẽ được giải quyết. Hệ lúc đó trở thành đối xứng loại 1, và ta sẽ giải theo cách thông thường. Từ ý tưởng này, ta trình bày như sau:*

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3(x^2 + y^2) - 9(x - y) + 22 = 0 \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Đặt $a = x - y, b = xy$, ta có:

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = a^3 + 3ab$$

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = a^2 + 2b$$

Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a^3 + 3ab - 3(a^2 + 2b) - 9a + 22 = 0 \qquad (1) \\ a^2 + 2b - a = \dfrac{1}{2} \qquad (2) \end{cases}$$

Tới đây chỉ cần sử dụng phương pháp thế nữa là tìm được a,b.

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 - 9a + 22 + 3ab - 6b = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^3 - 12a^2 - 36a + 88 + 12b(a - 2) = 0 \qquad (3)$$

$$(2) \Leftrightarrow 2b = -a^2 + a + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4b = -2a^2 + 2a + 1$$

Thay vào (3) ta được:

$4a^3-12a^2-36a+88+3(a-2)(-2a^2+2a+1)=0$
$\Leftrightarrow -2a^3+6a^2-45a+82=0$
$\Leftrightarrow -(a-2)(2a^2-2a+41)=0$
$\Leftrightarrow a=2(\text{do } 2a^2-2a+41=a^2+(a-1)^2+40>0, \forall a\in\mathbb{R})$
$\Rightarrow b=-\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$

Như vậy ta có:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ xy=\frac{13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2 \\ y^2+2y-\frac{13}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{-2+\sqrt{17}}{2}, x=\frac{2+\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{-2-\sqrt{17}}{2}, x=\frac{2-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x,y)=\left(\frac{2+\sqrt{17}}{2},\frac{-2+\sqrt{17}}{2}\right);\left(\frac{2-\sqrt{17}}{2},\frac{-2-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Bài 2 (Chuyên LHP – lần 2,2013) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y(1+\sqrt{y^2+1})=2x+2\sqrt{x^2+4} \\ 2\sqrt{y^2+3}+\sqrt{4+3x^2}=4x \end{cases}$$

Giải

Cả 2 phương trình đều chứa nhiều căn thức, không sử dụng phép thế ngay được. Phương trình thứ 2 vừa có căn, lại vừa có x,y lộn xộn, khó có khả năng khai thác được gì. Xem kĩ phương trình 1. Để ý có 2 biểu thức căn tương tự nhau. Dựa vào những dữ kiện này, khả năng dùng đạo hàm để xử lí phương trình 1 là rất cao. Nhưng ta vẫn chưa thể tìm được hàm ngay, tại vì 2 vế vẫn còn hơi khác nhau. Thử đưa hết x về 1 vế, y về 1 vế để xem có thu được gì không:

$$y(1+\sqrt{y^2+1})=\frac{2}{x}+\frac{2\sqrt{x^2+4}}{x^2}$$

Ta thấy vị trí của y và $\frac{2}{x}$ tương xứng với nhau, vậy rất có thể đây là 2 biểu thức ta cần chứng minh cho nó bằng nhau. 2 biểu thức căn vẫn chưa giống nhau, ta cần phải đưa $\frac{1}{x}$ vào trong căn, mà để làm vậy thì cần phải biết x âm hay dương. Nhìn xuống phương trình 2, do vế trái dương nên vế phải cũng dương, tức là x dương. Như vậy ta có thể đưa x vào căn mà không bị đổi dấu:

$$\frac{2\sqrt{x^2+4}}{x^2}=\frac{2}{x}.\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}$$

Như vậy, phương trình (1) tương đương với:

$$y+y\sqrt{y^2+1}=\frac{2}{x}+\frac{2}{x}\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}$$

Tới đây thì đặt hàm số để giải được rồi.

Việc còn lại chỉ là xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}$

$$f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}},\forall t\in\mathbb{R}$$

Phần trình bày lời giải chi tiết các bạn tự làm.

Bài 3 (Chu Văn An – lần 2,2013) Giải phương trình:

$$\sqrt{x+1}+1=4x^2+\sqrt{3x}$$

Giải

ĐK: $x\geq 0$

Bài này có 2 biểu thức chứa căn, do đó nếu bình phương để khử căn thì phải bình phương tới 2 lần. Mà bậc của phương trình bây giờ đã là 2, nếu bình phương 2 lần thì sẽ thành bậc 8, quá cao. Như vậy, bài này ta phải sử dụng lượng liên hợp để giải. Dùng máy tính ta có thể tìm được nghiệm của phương trình là $x=\frac{3}{2}$. Tới đây chỉ cần làm như những bài sử dụng liên hợp bình thường là xong.

Phần trình bày lời giải chi tiết các bạn tự làm.

Bài 4 (Chuyên Vĩnh Phúc – lần 4,2013) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1\\3x+2y=4\end{cases}\qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

Giải

Vẫn như thường lệ, phép thế là cách mà ta xem xét đầu tiên. Ở đây, rõ ràng phương trình thứ 2 đã tạo điều kiện thuận lợi để ta sử dụng phương pháp thế. Sau khi thế, có thể giải phương trình đầu bằng cách bình phương khử căn. Bài toán coi như được giải quyết.

Bài 5 (Chuyên Lào Cai – lần 1,2013) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}3^{3x-2y}-5.6^x+4.2^{3x-2y}=0\\\sqrt{x-y}=\sqrt{y}+(\sqrt{2y}-\sqrt{x})(\sqrt{2y}+\sqrt{x})^2\end{cases}$$

Giải

ĐK: $x\geq y\geq 0$.

Nhìn qua 2 phương trình của hệ ta có thể thấy ngay, đó là gần như không có sự liên quan gì giữa 2 phương trình (1 là toàn hàm mũ, 2 là toàn căn thức, biểu số mũ và biểu thức dưới dấu căn cũng khác nhau). Như vậy, cách ta sẽ sử dụng là xử lí riêng từng phương trình.

Coi phương trình 1 trước. Đây là phương trình mũ, số mũ không giống nhau, cơ số cũng không giống nhau nên nếu làm thì cũng chỉ có thể đặt nhân tử chung. Như vậy, có 3 thứ ta cần để ý đó là $3^{3x-2y},6^x,2^{3x-2y}$. Tuy nhiên, 3 thứ này chẳng có một liên hệ đặc biệt nào với nhau cả, như vậy, phương trình 1 chưa xử lí được, nhiều khả năng mấu chốt sẽ ở phương trình 2.

Ở phương trình 2, ta thấy vế phải gồm một tích $(\sqrt{2y}-\sqrt{x})(\sqrt{2y}+\sqrt{x})^2$ và 1 số hạng "lẻ" ra ngoài. Rõ ràng là ta không muốn khai triển hết cái tích ra để tìm liên hệ, vì vậy ta xem kĩ cái tích trước. Để ý là $(\sqrt{2y}-\sqrt{x})(\sqrt{2y}+\sqrt{x})=2y-x$, làm như vậy đỡ được căn thức hơn so với lúc đầu. Cái $\sqrt{y}$ còn lại ở vế phải không liên quan gì, ta cho nó sang vế trái, nhìn có vẻ cân xứng hơn, được biểu thức $\sqrt{x-y}-\sqrt{y}$. Nếu nhân liên hợp cho biểu thức này thì ta được $x-2y$, giống với thứ mà ta vừa có lúc nãy ở vế phải. Vậy đây chính là hướng giải quyết của bài toán, đặt nhân tử $x-2y$. Biến đổi phương trình thứ 2:

$$\frac{x-2y}{\sqrt{x-y}+\sqrt{y}}=(2y-x)(\sqrt{2y}+\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)\left(\frac{1}{\sqrt{x-y}+\sqrt{y}}+\sqrt{2y}+\sqrt{x}\right)=0$$

Tới đây ta có được $x-2y$ rồi, coi như phương trình 2 chỉ có vậy, giờ việc bắt buộc phải làm đó là thay lên phương trình thứ nhất và giải phần còn lại. Thay vào thì ta được:

$$3^{2x}-5.6^{x}+4.2^{2x}=0$$

Đây là phương trình mũ, và như lập luận ở đầu bài, phải giải bằng cách tách nhân tử. Đây là một dạng quen thuộc của phương trình mũ, ta chỉ cần tách nó thành $(3^x-2^x)(3^x-4.2^x)=0$ là xong.

Phần trình bày chi tiết các bạn tự làm.

Bài 6 (Chuyên KHTN HN – lần 4,2013)

$$\begin{cases} x^4-2x^2y+2y^2-1=0 \\ x^2y^2-y^3+x^2-y^2-y+1=0 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Ở đây ta chỉ thấy *x* có số mũ chẵn, không có số mũ lẻ. Như vậy cứ đặt $z=x^2$ trước cho dễ nhìn:

$$\begin{cases} z^2-2zy+2y^2-1=0 \\ zy^2-y^3+z-y^2-y+1=0 \end{cases}$$

Phương trình 1 không xử lí riêng được (muốn biết rõ cứ việc tính Δ), phương trình 2 thì là bậc 1 theo *z*, bậc 3 theo *y* nên cũng không được. Với bậc của 2 phương trình như vậy thì cũng không đồng bậc hóa được. Như vậy, nhiều khả năng là phải cộng trừ 2 phương trình của hệ với nhau. Để ý phương trình 2. Nếu xếp theo từng cặp cùng bậc, thì cặp bậc 3 zy^2-y^3 cho nhân tử $z-y$, cặp bậc 1 cũng là $z-y$, còn dư ra $1-y^2$. Phương trình 1 cũng có thể tách thành $(z-y)^2+y^2-1$, tức là cũng dư ra y^2-1 giống như phương trình 2. Vì thế, ta chỉ cần cộng hoặc trừ 2 phương trình sao cho khử được y^2-1 ở 2 phương trình là ta có thể đặt $z-y$ làm nhân tử chung rồi. Bước tiếp theo sẽ đơn giản hơn.

Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} (z-y)^2+y^2-1=0 \\ y^2(z-y)+z-y-y^2+1=0 \end{cases}$$

Cộng 2 phương trình theo vế ta được:

$$y^2(z-y)+(z-y)^2+z-y=0 \quad \Leftrightarrow (z-y)(y^2+z-y+1)=0$$

Để ý là $z\geq 0$ và $y^2-y+1>0$ nên cái ngoặc thứ 2 luôn dương. Vậy ta chỉ có $z=y$. Tới đây thì dễ giải rồi.

Bài 7 (Chuyên PBC, Nghệ An – lần 1,2013) Giải phương trình:

$$2(x^2-x+6)=5\sqrt{x^3+8}$$

Giải

Bài này chỉ có một căn thức, lại là bậc 2 nên ta chỉ việc bình phương 2 vế là đưa về được phương trình bậc 4, dùng máy tính để giải.

Bài 8 (Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương – lần 1,2013) Giải phương trình:

$$\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\frac{5(x-3)}{\sqrt{2x^2+18}}$$

Giải

Thử thì ta có thể thấy được $x=3$ là nghiệm của phương trình. Ở vế phải đã có sẵn nhân tử $x-3$, vậy chỉ cần tạo được $x-3$ ở vế trái. Với biểu thức dạng căn như thế này thì cách hiệu quả nhất đó là sử dụng lượng liên hợp (vì nó đưa từ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ thành $a-b$, mà $a-b$ thì dễ dàng tách nhân tử). Các bạn có thể làm liên hợp như bình thường, tuy nhiên nếu làm 1 lượt cả 2 căn thức thì sẽ gọn hơn. Cụ thể như sau:

$$\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\frac{x+1-4(4-x)}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-x}}=\frac{5(x-3)}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-x}}.$$

Việc cuối cùng chỉ là giải phương trình 2 mẫu thức bằng nhau: $\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-x}=\sqrt{2x^2+18}$. Mà phương trình này thì có thể dùng cách bình phương 2 vế để giải.

Bài 9 (THPT Hà Trung, Thanh hóa – lần 3,2013)

$$\begin{cases} x^3+y^3=3x^2-6x-3y+4 \\ x^2+y^2-6x+y-10=\sqrt{5+y}-\sqrt{4x+y} \end{cases}$$

Giải

Phương trình 2 khá “lộn xộn”, vừa có đa thức bậc 2, vừa có căn, mà biểu thức trong căn lại cũng chẳng có gì liên quan, thế nên từ phương trình này có vẻ như chẳng thu được gì. Ta sẽ tập trung vào phương trình 1. Ở đây, ta thấy rằng không có biểu thức nào mà *x* “dính” với *y*, đồng thời bậc của *x* và *y* cũng giống nhau. Nếu ai từng làm những bài sử dụng đạo hàm thì có thể thấy bài này có nét giống với những bài đó. Như vậy, đầu tiên ta sẽ đưa *x* và *y* về 2 vế của phương trình trước:

$$x^3-3x^2+6x-4=-y^3-3y$$

Nhìn vào vế phải thì hàm ta cần xét phải là $f(t)=t^3+3t$ (ở đây là $f(-y)$). Như vậy vế trái ta cũng cần tách theo hàm này. Có x^3-3x^2 nên t^3 ở đây sẽ phải là $(x-1)^3$. Do đó để tách theo hàm $f(t)$ thì ta cần tách thành $(x-1)^3+3(x-1)$. Kiểm tra thử thì ta dễ dàng thấy được nó đúng bằng vế trái của phương trình, như vậy, tới đây ta có $f(x-1)=f(-y)$, suy ra $x-1=-y$ (chỉ cần tính đạo hàm là thấy ngay $f(t)$ đồng biến).

Thay vào phương trình 2, ta được:

$$2x^2-9x-8=\sqrt{6-x}-\sqrt{3x+1}$$

Phương trình này bậc 2, có 2 căn thức nên không thể bình phương khử căn. Thử thì thấy được nó có nghiệm đẹp $x=5$. Bây giờ chỉ việc dùng lượng liên hợp để giải thôi.

Bài 10 (Chuyên Trần Phú, Hải Phòng – lần 2,2013) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3^{x+3y-2}+6.3^{y^2+4x-2}=3^{5y-3x}+2.3^{(y+1)^2} \\ 1+2\sqrt{x+y-1}=3\sqrt[3]{3y-2x} \end{cases}$$

Giải

Ở bài này ta cũng có 2 phương trình nhìn không liên quan gì đến nhau, nên cách làm sẽ là xử lí riêng từng phương trình. Phương trình 2 thì vừa có căn bậc 2, vừa có căn bậc 3, biểu thức trong căn lại khác nhau, thế nên không thể làm gì được.

Phương trình 1 là phương trình mũ, lại có cùng cơ số, có 4 số hạng nên chỉ việc chia thành 2 cặp rồi đặt nhân tử chung cho từng cặp là xong.

$$3^{x+3y-2}+6.3^{y^2+4x-2}=3^{5y-3x}+2.3^{(y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 3^{x+3y-2}+6.3^{y^2+4x-2}=3^{5y-3x}+6.3^{(y^2+2y}$$

$$\Leftrightarrow 3^{x+3y-2}(1+6.3^{y^2+3x-3y})=3^{5y-3x}(1+6.3^{y^2+3x-3y})$$

$$\Leftrightarrow 3^{x+3y-2}=3^{5y-3x}$$

$$\Leftrightarrow x+3y-2=5y-3x$$

$$\Leftrightarrow y=2x-1$$

Thay vào phương trình thứ 2, dùng lượng liên hợp là xong.