

## Giải phương trình bậc 2 chứa tham số

Đối với bài toán có chứa tham số m:

- Khi hệ số a chứa tham số m :
  - a) Xác định các hệ số a; b; c .
  - b) Giải phương trình theo m:
    - Với giá trị của m mà  $a = 0$ , giải phương trình bậc nhất.
    - Với giá trị của m mà  $a \neq 0$ , giải phương trình bậc hai: Tính  $\Delta = b^2 - 4ac$ , xét các trường hợp của  $\Delta$  chứa tham số và tìm nghiệm theo tham số.
  - c) Kết luận.
- Biện luận phương trình:
  - Phương trình có nghiệm khi:
    - +) Với giá trị của m mà  $a = 0$ , phương trình bậc nhất có nghiệm.
    - +) Với giá trị của m mà  $a \neq 0$ , phương trình bậc hai có nghiệm.
  - Phương trình có một nghiệm khi:
    - +) Với giá trị của m mà  $a = 0$ , phương trình bậc nhất có nghiệm.
    - +) Với giá trị của m mà  $a \neq 0$ , phương trình bậc hai có nghiệm kép.
  - Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi: Giá trị của m mà  $a \neq 0$ , phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt.

**Ví dụ:** Cho phương trình:  $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 2 = 0$  (1) . Phương trình có nghiệm khi nào.

**Hướng dẫn giải:**

Ta có :  $a=m$  ,  $b=-2(m-1)$  ,  $c=m+2$

Với  $a=0$  (hay  $m=0$ )

Phương trình (1) là phương trình bậc nhất:

$$-2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Phương trình có nghiệm duy nhất  $x=1$

Với  $a \neq 0$  (hay  $m \neq 0$ )

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= [-2(m-1)]^2 - 4.m.(m+2) \\ &= 4 > 0\end{aligned}$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2(m-1) + \sqrt{4}}{2m} = \frac{m+2}{m}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2(m-1) - \sqrt{4}}{2m} = 1$$

Vậy với  $m=0$  thì phương trình có 1 nghiệm  $x=1$

$m \neq 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt  
 $x = \frac{m+2}{m}$  và  $x = 1$

\*Khi hệ số  $a$  không chứa tham số :

- Ta chỉ tính  $\Delta$  và biện luận như các bước trên ( bỏ qua bước xét  $a$  )
- Giải nghiệm theo tham số
- Kết luận

**Ví dụ:** Cho phương trình  $x^2 + (m+1)x + m = 0$  với  $m$  là tham số. Phương trình có nghiệm kép khi nào.

**Hướng dẫn giải**

Ta có :  $a=1$ ,  $b=m+1$ ,  $c=m$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (m+1)^2 - 4.1.m\end{aligned}$$

$$=(m-1)^2$$

Phương trình có nghiệm kép khi :  $\Delta = 0$  hay  $(m-1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow m=1$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(m+1)}{2.1} = \frac{-(1+1)}{2.1} = -1$$

Vậy với  $m=0$  thì phương trình có nghiệm kép  $x=-1$

- **Đối với dạng bài yêu cầu chứng minh phương trình có nghiệm với mọi tham số  $m$ ,** ta cần nhớ về điều kiện để phương trình bậc 2 có nghiệm: phương trình bậc 2 có nghiệm khi và chỉ khi biệt thức  $\Delta$  không âm. Nếu ta tìm được cách chứng minh biệt thức  $\Delta$  không âm thì khi đó ta có thể kết luận phương trình có nghiệm với mọi  $m$ .
- **Để thực hiện điều đó, ta làm các bước sau:**
  - Tính  $\Delta$
  - Chứng minh biệt thức  $\Delta$  luôn dương bằng cách biến đổi biệt thức trở thành tổng của một đa thức bình phương (chứa tham số  $m$ ) và một số hạng
  - Kết luận

**Ví dụ:** chứng minh phương trình  $x^2 - (2m-1)x - m = 0$  luôn có nghiệm với mọi  $m$

**Hướng dẫn giải:**

$$\text{Ta có: } \Delta = (2m-1)^2 - 4m = 4m^2 - 4m + 1 - 4m = 4m^2 + 1 > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

Vậy: phương trình có nghiệm với mọi giá trị  $m$