$|A| = B$

- **Lí thuyết**: để giải phương trình dạng này, ta cần phải biến đổi phương trình thành một phương trình tương đương không còn chứa dấu giá trị tuyệt đối. Điều đó có thể được thực hiện qua một số cách sau:

  Bình phương hai vế

  Đặt ẩn phụ

  Xét điều kiện âm/dương của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối (dùng định nghĩa)

- **Đối với bài có dạng $|A| = B$** với A,B là các nhị thức bậc nhất có thể tiến hành giải như sau:

  Nếu B < 0, ta kết luận ngay phương trình vô nghiệm (ví dụ: $|x-3| = -5$ => phương trình vô nghiệm)

  Nếu B > 0, ta biến đổi như sau: $|\mathbf{A}| = \boldsymbol{B} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} \geq \mathbf{0} \end{cases} \boldsymbol{hoặc} \begin{cases} \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} < \mathbf{0} \end{cases}$

  Ví dụ: $|x-3| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 3 \\ x \geq 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 3 = -3 \\ x < 3 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow x = 6$ hoặc $x = 0$

  Vậy: $x_1 = 6, x_2 = 0$

  Nếu B là một đa thức chưa xác định được dấu, ta đặt điều kiện $B \geq 0$ và giải hệ phương trình $\begin{cases} B \geq 0 \\ \begin{cases} A = B \\ A \geq 0 \end{cases} hoặc \begin{cases} A = -B \\ A < 0 \end{cases} \end{cases}$

  Ví dụ: $|x-3| = 2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ \begin{cases} x - 3 = 2x - 3 \\ x \geq 3 \end{cases} hoặc \begin{cases} x - 3 = -2x + 3 \\ x < 3 \end{cases} \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ \begin{cases} x = 0 \\ x \geq 3 \end{cases} (vô\ lí)\ hoặc \begin{cases} 3x = 6 \\ x < 3 \end{cases} \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x = 2 \end{cases}$

  Nên: phương trình có nghiệm $x = 2$

Nếu A là một đa thức chứa 2 dấu giá trị tuyệt đối lồng vào nhau: ta vẫn biến đổi trở thành $|\mathbf{A}| = \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{hoặc}\ \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{B}$, sau đó ta xét dấu của đa thức trong căn nằm trong A với 2 khoảng giá trị âm dương của đa thức đó.

Nếu A là một đa thức chứa 2 dấu giá trị tuyệt đối lồng vào nhau: ta vẫn biến đổi trở thành $|\mathbf{A}| = \boldsymbol{B} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} \geq \mathbf{0} \end{cases} \boldsymbol{hoặc} \begin{cases} \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} < \mathbf{0} \end{cases}$, sau đó ta xét dấu của đa thức trong căn nằm trong A với 2 khoảng giá trị âm dương của đa thức đó.

Ví dụ: giải phương trình $\big|x - |2x+3|\big| = 3$

PT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - |2x+3| = 3\ (1) \\ x - |2x+3| = -3\ (2) \end{array} \right.$

Xét (1), ta có:

Với $2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-3}{2}$:

(1) $\Leftrightarrow x - 2x - 3 = 3$

$\Leftrightarrow x = -6$ (loại vì $x \geq \frac{-3}{2}$)

Với $2x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{-3}{2}$:

(1) $\Leftrightarrow x + 2x + 3 = 3$

$\Leftrightarrow x = 0$ (loại vì $x < \frac{-3}{2}$)

Xét (2), ta có:

Với $2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-3}{2}$:

(2) $\Leftrightarrow x - 2x - 3 = -3$

$\Leftrightarrow x = 0$ (nhận)

Với $2x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{-3}{2}$:

(2) $\Leftrightarrow x + 2x + 3 = -3$

$\Leftrightarrow x = -2$ (nhận)

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0, x_2 = -2$

- **Đối với phương trình có dạng $\boldsymbol{ax^2 + bx + c + |a'x^2 + b'x + c'| = 0}$:** đối với dạng bài này, ta vẫn có thể giải được bằng cách xét giá trị của $|\boldsymbol{a'x^2 + b'x + c'}|$. Lưu ý: nếu phương trình chứa các dấu giá trị tuyệt đối lồng vào nhau, ta nên xét dấu của biểu thức từ trong ra ngoài để thuận tiện cho việc tính toán

Ví dụ: giải phương trình $x^2 + 3x - 19 + |-x|x| + 5x - 6| = 0$

Giải

Ta xét dấu từ trong ra ngoài, bắt đầu với |x|:

- Với $x \geq 0$: $|-x|x| + 5x - 6| = |-x^2 + 5x - 6| = |x^2 - 5x + 6|$
  $= |(x-2)(x-3)|$

(4)$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 19 + |(x-2)(x-3)| = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Dễ thấy: $(x-2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x < 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 2 \end{array}\right.$

(tích 2 số dương khi 2 số cùng dấu $\Leftrightarrow$ cùng âm hoặc cùng dương)

$$(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 3x - 19 + (x-2)(x-3) = 0 \\ x > 3 \text{ hoặc } x < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 3x - 19 = 0 \\ x = 3 \text{ hoặc } x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 3x - 19 - (x-2)(x-3) = 0 \\ 2 < x < 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+3x-19+x^2-5x+6=0 \\ x>3 \text{ hoặc } x<2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-3\pm\sqrt{85}}{2} \\ x=3 \text{ hoặc } x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+3x-19-x^2+5x-6=0 \\ 2<x<3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2-2x-13=0 \\ x>3 \text{ hoặc } x<2 \end{cases} \\ x\in\emptyset \\ \begin{cases} 8x-25=0 \\ 2<x<3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{1\pm3\sqrt{3}}{2} \\ x>3 \text{ hoặc } x<2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{25}{8} \\ 2<x<3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1\pm3\sqrt{3}}{2} \\ x\in\emptyset \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\left(\text{vì } \frac{1-3\sqrt{3}}{2}<0\right)$$

- Với $x<0$: $|-x|x|+5x-6|=|x^2+5x-6|=|(x-1)(x+6)|$

Dễ thấy: $(x-1)(x+6)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>0 \\ x+6>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<0 \\ x+6<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ x>-6 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ x<-6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \ (\text{loại vì } x<0) \\ x<-6 \end{array}\right.$

$$(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+3x-19+x^2+5x-6=0 \\ x<-6 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+3x-19=0 \\ x=-6 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+3x-19-x^2-5x+6=0 \\ x>-6 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2+8x-25=0 \\ x<-6 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+3x-19=0 \\ x=-6 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x-13=0 \\ x>-6 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{-4-\sqrt{66}}{2} \\ x\in\emptyset \\ x\in\emptyset \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4-\sqrt{66}}{2}$

Vậy: phương trình có 2 nghiệm $x_1 = \frac{1+3\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{-4-\sqrt{66}}{2}$

- **Đối với phương trình có dạng $ax^2 + bx + c + |A| = 0$, với A là nhị thức bậc nhất:** ta sẽ biến đổi phương trình thành phương trình tương đương không chứa dấu giá trị tuyệt đối theo quy tắc:

$$\begin{cases} |A| = A \text{ nếu } A \geq 0 \\ |A| = -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$$

Ví dụ: giải phương trình $x^2 - 3x + 5 + |x - 3| = 0$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 3x + 5 - x + 3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 3x + 5 + x - 3 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 4x + 8 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 3 \\ x \notin \mathbb{R} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ x \notin \mathbb{R} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy: phương trình đã cho vô nghiệm