# *Bài toán giới hạn dãy số, giới hạn hàm số*

# *Mục 1: giới hạn dãy số*

**Định nghĩa 1:** Dãy số $(u_n)$ có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ số hạng nào đó trở đi

**Định nghĩa 2:** Dãy số $(u_n)$ có giới hạn là $a$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$

**Định nghĩa 3:** Dãy số $(u_n)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $u_n$ có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

**Định nghĩa 4:** Dãy số $(u_n)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = -\infty$

***Nhận xét chung:** đối với bài toán yêu cầu tìm giới hạn của dãy đầu tiên ta cần xác định được dãy số đó là hữu hạn hay vô hạn, tăng hay giảm hoặc là Tìm cách biểu diễn tổng quát của dãy $(u_n)$ để nghiên cứu các xu hướng giá trị của $(u_n)$ khi $n$ tăng dần.

Từ đó bằng một số phương pháp như: biến đổi đại số, sử dụng định lí kẹp, so sánh với một dãy có giới hạn đã biết, hoặc sử dụng một số mẹo

**Mẹo giải toán:**

+Nắm được một số giới hạn cơ bản:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ ;
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0,\ |q| < 1$ ;

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k} = 0,\ \ với\ k \in N^*$;

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{q^n} = 0, nếu |q| > 1$ ;

+Đối với giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$ ta có thể sử dụng phương pháp đặt nhân tử chung $n^k$ với k là hệ số cao nhất ở mẫu sau đó áp dụng định lí về giới hạn hữu hạn

+Đối với bài toán yêu cầu tính giới hạn có chứa căn thức, ta có thể nghĩ ngay đến phương pháp nhân lượng liên hợp để khử dạng vô định của giới hạn

+Khi xuất hiện các dạng giới hạn cơ bản nếu trên trong dãy số mà đề bài yêu cầu tìm giới hạn ta mặc nhiên có thể coi chúng bằng 0

***Lưu ý: các bài toán tìm giới hạn của dãy số $(u_n)$ sẽ luôn có điều kiện là $n \geq 0$

**BÀI TẬP khử dạng vô định:**

Ví dụ 1 (dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ ): Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2+n}{n^3+4}$

Giải:

(Phân tích ban đầu: ta thấy đây là bài toán tìm giới hạng có dạng $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$ nên ta sẽ dùng phương pháp đặt nhân tử chung là $n^3$)

Ta có: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2+n}{n^3+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^3(1+\frac{4}{n^3})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n^3}}$ (1)

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}=0,\ \ với\ k\in N^*$ nên:

(1) $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+0+0}{1+0}=\lim\limits_{n\to\infty}3=3$

Vậy: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2+n}{n^3+4}=3$

**Nhận xét: qua ví dụ trên ta có thể thấy, giới hạn có dạng $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$ thực chất là ta xác định bậc luỹ thừa $k$ cao nhất của dãy $(v_n)$ sau đó lấy thương hệ số của bậc $n^k$ của 2 dãy số. Từ đó ta có thể nhẩm nhanh đáp án của những bài toán có dạng tương tự.

Ví dụ 2 (dạng vô định $\infty-\infty$): Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2n}-n$

Giải:

(Phân tích ban đầu: ta nhận thấy giới hạn cần tính có chứa căn thức nên ta nghĩ ngay đến trường hợp nhân thêm lượng liên hợp từ đó biến bài toán trở thành dạng tính giới hạn có dạng $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$)

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

Đặt nhân tử chung $n$ ở mẫu ta được:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ nên:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1}+1}=\lim_{n\to\infty}(1)=1$$

Vậy: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=1$

# *Mục 2: giới hạn hàm số*

***Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm**

**Định nghĩa:** Cho khoảng $K$ chứa điểm $x_0$ và hàm số $y=f(x_0)$ xác định trên $K$ hoặc trên $K\backslash\{x_0\}$. Ta nói hàm số $y=f(x_0)$ có giới hạn là số $L$ khi $x$ dần tới $x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n\in K\backslash\{x_0\}$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L$$

**Giới hạn một bên:**

*Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$. Số $L$ được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$, kí hiệu:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

*Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$. Số $L$ được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$, kí hiệu:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

****Điều kiện tồn tại giới hạn:**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

***Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực:**

Nhận xét: ta có thể coi giới hạn của hàm số tại vô cực tương tự như giới hạn của dãy số nhưng lúc này tập giá trị của hàm số sẽ tính trên tập số thực và ta cũng có các tính chất giống như giới hạn của dãy số

- Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$\lim\limits_{x \to +\infty} c = c;$ $\lim\limits_{x \to -\infty} c = c;$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{c}{x^k} = 0;$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{c}{x^k} = 0;$

***Giới hạn vô cực của hàm số:**

**Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$. Kí hiệu

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (-f(x)) = -\infty$

- Một số giới hạn đặc biệt:

$$\lim_{x \to +\infty} x^k = +\infty, \ \ với\ k\ nguyên\ dương;$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty\ nếu\ k\ chẵn \\ -\infty\ nếu\ k\ lẻ \end{cases};$$

**Nhận xét chung: Đối với bài tìm giới hạn của hàm số tuỳ vào dạng của hàm (phân thức hữu tỷ; hàm chứa căn bậc 2, 3; hàm lượng giác hay hàm tích hợp nhiều dạng) mà ta tiến hành các bước phân tích khác nhau nhưng hướng tư duy phổ biến nhất là làm cho biểu thức cần tính trở nên đơn giản nhất có thể và khử được các dạng vô định $(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty)$. Nhìn chung các bài toán dạng này có thể giải bằng nhiều phương pháp như biến đổi biểu thức, nhân lượng liên hợp, phân tích bậc cao nhất của biểu thức, hoặc sử dụng các mẹo đã được đề cập trong phần giới hạn dãy số.

**Mẹo giải toán:

+Đối với bài toán tính giới hạn có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ nếu $f(x_0)=g(x_0)=0$ thì ta nghĩ đến ngay việc khử dạng vô định này bằng cách phân tích nhân tử $x-x_0$ để chúng triệt tiêu nhau.

+Đối với bài toán tính giới hạn có chứa căn thức đa số trường hợp các bài toán sẽ chỉ cần ta nhân lượng liên hợp bậc 2 hoặc bậc 3 sau đó lặp lại bước triệt tiêu nhân tử làm cho giới hạn có dạng vô định.

**Lưu ý:** khi làm việc với giới hạn của hàm số tại vô cực ta cần hết sức chú ý vào việc dấu của biểu thức khi $x\to x_0^+$ hoặc $x\to x_0^-$

**BÀI TẬP khử dạng vô định:**

Ví dụ 1(khử dạng vô định $\frac{0}{0}$):

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$

Giải:

(Phân tích ban đầu: khi gặp bài toán dạng yêu cầu tìm giới hạn của hàm số tại một điểm trước tiên ta sẽ thực hiện thay giá trị mà $x$ dần tiến về vào hàm số đã cho. Đối với bài này ta thay $-4$ sẽ làm cho biểu thức trở thành dạng vô định $\frac{0}{0}$ nên ta sẽ tìm các triệt tiêu đi phần tử $x-(-4)$ ra ngoài)

Ta có: $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+2x-8}{x^2+4x}=\lim\limits_{x\to -4}\frac{(x-2)(x+4)}{x(x+4)}=\lim\limits_{x\to -4}\frac{x-2}{x}=\lim\limits_{x\to -4}\frac{-4-2}{-4}=\lim\limits_{x\to -4}\frac{3}{2}=1,5$

Vậy: $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+2x-8}{x^2+4x}=1,5$

Ví dụ 2(khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$):

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{5x-2}{3x+1}$

Giải:

(Phân tích ban đầu: Đây là một bài toán tương tự với dạng tính giới hạn của dãy số nên ta nghĩ ngay đến việc phân tích bậc cao nhất ở mẫu của biểu thức. Đối với bài toán này thì đây là giới hạn tại vô cực của một hàm phân thức hữu tỷ, tử số và mẫu số đều là đa thức bậc 1. nhìn sơ lược do giá trị $x$ dần tiến về âm vô cực nên ta sẽ tìm cách khử đi $x$ đồng thời dạng vô định sẽ biến mất và bài toán trở về bài toán dễ dàng hơn)

Ta có: $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{5x-2}{3x+1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x(5-\frac{2}{x})}{x(3+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{5-\frac{2}{x}}{3+\frac{1}{x}}$

Mà $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{c}{x^k}=0$ nên:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{5-\frac{2}{x}}{3+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{5-0}{3+0}=\lim_{x\to -\infty}\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$

Vậy: $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-2}{3x+1}=\frac{5}{3}$

Ví dụ 3(khử dạng vô định $\infty-\infty$):

Tính giới hạn $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2x})$

Giải:

(Phân tích ban đầu: Đây bài toán yêu cầu tính giới hạn tại vô cực của một biểu thức chứa căn thức. Để xử lí được bài toán dạng này phương pháp chung mà ta thường dùng sẽ là nhân lượng liên hợp đưa biểu thức về dạng $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ sau đó thực hiện phân tích bậc cao nhất của $g(x)$)

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x})}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x})}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$$

Mà $\lim_{x\to-\infty}\frac{c}{x^k}=0$ nên:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}$$

Vậy: $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2x})=\frac{-1}{2}$