PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

- **Lí thuyết**: để giải phương trình dạng này, ta cần phải biến đổi phương trình thành một phương trình tương đương không còn chứa dấu giá trị tuyệt đối. Điều đó có thể được thực hiện qua một số cách sau:
  Bình phương hai vế
  Đặt ẩn phụ
  Xét điều kiện âm/dương của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối (dùng định nghĩa)
- **Đối với bài có dạng $|A| = B$** với A,B là các nhị thức bậc nhất có thể tiến hành giải như sau:
  Nếu B < 0, ta kết luận ngay phương trình vô nghiệm (ví dụ: $|x-3| = -5$ => phương trình vô nghiệm)
  Nếu B > 0, ta biến đổi như sau:$|\mathbf{A}| = \boldsymbol{B} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} \geq \mathbf{0} \end{cases} \boldsymbol{ho\breve{a}c} \begin{cases} \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} < \mathbf{0} \end{cases}$

  Ví dụ: $|x-3| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 3 \\ x \geq 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 3 = -3 \\ x < 3 \end{cases}$
  $\Leftrightarrow x = 6$ hoặc $x = 0$
  Vậy: $x_1 = 6, x_2 = 0$

  Nếu B là một đa thức chưa xác định được dấu, ta đặt điều kiện $B \geq 0$ và giải hệ phương trình $\begin{cases} B \geq 0 \\ \begin{cases} A = B \\ A \geq 0 \end{cases} ho\breve{a}c \begin{cases} A = -B \\ A < 0 \end{cases} \end{cases}$

  Ví dụ: $|x-3| = 2x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ \begin{cases} x - 3 = 2x - 3 \\ x \geq 3 \end{cases} ho\breve{a}c \begin{cases} x - 3 = -2x + 3 \\ x < 3 \end{cases} \end{cases}$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ \begin{cases} x = 0 \\ x \geq 3 \end{cases} (v\hat{o}\ l\acute{i})\ ho\breve{a}c \begin{cases} 3x = 6 \\ x < 3 \end{cases} \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

Nên:phương trình có nghiệm $x = 2$

Nếu A là một đa thức chứa 2 dấu giá trị tuyệt đối lồng vào nhau: ta vẫn biến đổi trở thành $|\mathbf{A}| = \boldsymbol{B} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} \geq \mathbf{0} \end{cases} \boldsymbol{ho\breve{a}c} \begin{cases} \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} < \mathbf{0} \end{cases}$, sau đó ta xét dấu của đa thức nằm trong A với 2 khoảng giá trị âm dương của đa thức đó.

Ví dụ: giải phương trình $\big|x - |2x+3|\big| = 3$

PT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - |2x+3| = 3\ (1) \\ x - |2x+3| = -3\ (2) \end{array}\right.$

Xét (1), ta có:

Với $2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-3}{2}$:

(1) $\Leftrightarrow x - 2x - 3 = 3$
$\Leftrightarrow x = -6$ (loại vì $x \geq \frac{-3}{2}$)

Với $2x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{-3}{2}$:

(1) $\Leftrightarrow x + 2x + 3 = 3$
$\Leftrightarrow x = 0$ (loại vì $x < \frac{-3}{2}$)

Xét (2), ta có:

Với $2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-3}{2}$:

(2) $\Leftrightarrow x - 2x - 3 = -3$
$\Leftrightarrow x = 0$ (nhận)

Với $2x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{-3}{2}$:

(2) $\Leftrightarrow x + 2x + 3 = -3$
$\Leftrightarrow x = -2$ (nhận)

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0, x_2 = -2$

- **Đối với phương trình có dạng $|A| = |B|$, trong đó A, B là những nhị thức bậc nhất:** ta có thể biến đổi như sau: $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B$ hoặc $A = -B$

Ví dụ: $|x - 3| = |2x - 3| \Leftrightarrow x - 3 = 2x - 3$ hoặc $x - 3 = -2x + 3$
$\Leftrightarrow x - 2x = 3 - 3$ hoặc $x + 2x = 3 + 3$
$\Leftrightarrow -x = 0$ hoặc $3x = 6$
$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$
Vậy: phương trình có nghiệm $x_1 = 0, x_2 = 2$

Ngoài ra, dạng phương trình này còn có một biến thể với A,B là các đa thức bậc cao hơn. Về cơ bản, cách giải của các bài này tương tự như trên, ta chỉ cần đặt ra 2 trường hợp $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B$ hoặc $A = -B$ và giải với mỗi trường hợp tương ứng

Ví dụ: $|x^2 - 3x| = 2|x - 3| \Leftrightarrow x^2 - 3x = 2x - 6$ hoặc $x^2 - 3x = -2x + 6$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ hoặc $x^2 - x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$ hoặc $(x - 3)(x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Vậy: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -2$

- **Đối với phương trình có dạng $|A| + |B| = C$, trong đó A, B, C là những nhị thức bậc nhất:** một hướng tiếp cận cho dạng toán này là chuyển hết tất cả về vế trái, sau đó xét dấu của vế trái ở từng khoảng giá trị xác định.
- **Đối với các phương trình có dạng $|A| + |B| + |C| + \ldots\ldots$** = X, ta cũng chuyển tất cả sang vế trái và xét dấu của vế trái trên n + 1 khoảng xác định, với n là số lượng nhị thức bậc nhất của bài toán

Ví dụ: giải phương trình $|x-3|+|2x-3|=5 \Leftrightarrow |x-3|+|2x-3|-5=0(1)$

Nhận xét: $x \ - \ 3 \ \geq 0 \ khi \ x \ \geq 3$, $2x-3 \geq 0 \ khi \ x \geq \frac{3}{2}$

Vậy ta cần xét 3 khoảng giá trị: $-\infty < x < \frac{3}{2}$ (trường hợp cả hai đa thức đều âm), $\frac{3}{2} \leq x < 3$ (trường hợp 1 đa thức âm 1 đa thức dương) và $3 \ \leq x < +\infty$ (cả hai đa thức đều dương)

Tương ứng với đó, ta sẽ có 3 trường hợp như sau:

Với $-\infty < \boldsymbol{x} < \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$**:**

$(1) \Leftrightarrow -(x-3)-(2x-3)-5=0$

$\Leftrightarrow -3x \ + \ 3+3 \ - \ 5 \ = \ 0$

$\Leftrightarrow -3x \ = \ -1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (loại vì $-\infty < \boldsymbol{x} < \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$**)**

Với $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \leq \boldsymbol{x} < \mathbf{3}$**:**

$(1) \Leftrightarrow -(x-3)+(2x-3)-5=0$

$\Leftrightarrow x \ + \ 3 \ - \ 3 \ - \ 5 \ = \ 0$

$\Leftrightarrow x \ = \ 5$ (loại vì $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \leq \boldsymbol{x} < \mathbf{3}$)

Với $3 \ \leq x < +\infty$:

$(\mathbf{1}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}-\mathbf{3})+(\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{3})-\mathbf{5}=\mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \mathbf{3}\boldsymbol{x} \ - \ \mathbf{6} \ - \ \mathbf{5} \ = \ \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}$ (nhận)

Vậy: $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}$ **là nghiệm của phương trình**

- **Đối với dạng bài giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối ở mẫu:** tương tự như các dạng trên, ta tìm cách biến đổi phương trình thành phương trình tương đương và làm mất dấu giá trị tuyệt đối (lưu ý thêm điều kiện mẫu khác không).

Ví dụ 1: $\frac{1}{|x-3|} = \frac{1}{|2x-3|} \Leftrightarrow |2x-3| = |x-3|$ (và giải tương tự như ví dụ trên)

Ví dụ 2: $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = \left|\frac{x-2}{x+2}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \ \pm 2 \\ \frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2}{x+2} \ hoặc \ \frac{x+2}{x-2} = -\frac{x-2}{x+2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ (x+2)^2 = \ (x-2)^2 \text{ hoặc } (x+2)^2 = \ -(x-2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \ \pm 2 \\ x = 0 \ hoặc \ x \ \epsilon \ \emptyset \end{cases}$

$\Leftrightarrow \ \ x = 0$

- **Đối với phương trình có dạng $\boldsymbol{ax^2+bx+c+|A|=0}$, với A là nhị thức bậc nhất:** ta sẽ biến đổi phương trình thành phương trình tương đương không chứa dấu giá trị tuyệt đối theo quy tắc:

$$\begin{cases} \boldsymbol{|A| = A \text{ nếu } A \geq 0} \\ \boldsymbol{|A| = -A \text{ nếu } A < 0} \end{cases}$$

Ví dụ: giải phương trình $x^2-3x+5+|x-3|=0$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 3 \\ x^2-3x+5-x+3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-3x+5+x-3=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 3 \\ x^2-4x+8=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-2x+2=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 3 \\ x \notin \mathbb{R} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ x \notin \mathbb{R} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy: phương trình đã cho vô nghiệm

- **Đối với phương trình có dạng $\boldsymbol{ax^2+bx+c+|A|+|B|=0}$, với A,B là các nhị thức bậc nhất:** ta vẫn có thể xử lí bằng cách xét dấu của từng đa thức trong các khoảng giá trị xác định, hoặc ta có thể xử lí bằng cách lập bảng xét dấu hoặc xét giá trị của biểu thức trong các khoảng cho trước.

Ví dụ: giải phương trình $x^2-3x+5+|x-3|+|2x-3|=0$ (3)

Nhận xét: $|x-3| \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

$|2x-3| \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

Vậy ta cần xét giá trị của vế trái trong 3 khoảng:

$$x < \frac{3}{2},\ \frac{3}{2} \leq x < 3 \text{ và } 3 \leq x$$

- Với $x < \frac{3}{2}$:

(3) $\Leftrightarrow x^2-3x+5-x+3-2x+3=0$

$\Leftrightarrow x^2-6x+11=0$

$\Leftrightarrow x \in \emptyset$

- Với $\frac{3}{2} \leq x < 3$:

(3)$\Leftrightarrow x^2-3x+5-x+3+2x-3=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+5=0$

$\Leftrightarrow x \in \emptyset$

- Với $x \geq 3$

(3)$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 + x - 3 + 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$ (loại vì $x \geq 3$)

Vậy phương trình vô nghiệm

- **Đối với phương trình có dạng $ax^2 + bx + c + |a'x^2 + b'x + c'| = 0$:** đối với dạng bài này, ta vẫn có thể giải được bằng cách xét giá trị của $|a'x^2 + b'x + c'|$. Lưu ý: nếu phương trình chứa các dấu giá trị tuyệt đối lồng vào nhau, ta nên xét dấu của biểu thức từ trong ra ngoài để thuận tiện cho việc tính toán

Ví dụ: giải phương trình $x^2 + 3x - 19 + |-x|x| + 5x - 6| = 0$

Giải

Ta xét dấu từ trong ra ngoài, bắt đầu với |x|:

- Với $x \geq 0$: $|-x|x| + 5x - 6| = |-x^2 + 5x - 6| = |x^2 - 5x + 6|$
$= |(x-2)(x-3)|$

(4)$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 19 + |(x-2)(x-3)| = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Dễ thấy: $(x-2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x < 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 2 \end{array}\right.$

(tích 2 số dương khi 2 số cùng dấu $\Leftrightarrow$ cùng âm hoặc cùng dương)

$$(4)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 3x - 19 + (x-2)(x-3) = 0 \\ x > 3 \text{ hoặc } x < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 3x - 19 = 0 \\ x = 3 \text{ hoặc } x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 3x - 19 - (x-2)(x-3) = 0 \\ 2 < x < 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 3x - 19 + x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x > 3 \text{ hoặc } x < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{-3 \pm \sqrt{85}}{2} \\ x = 3 \text{ hoặc } x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 3x - 19 - x^2 + 5x - 6 = 0 \\ 2 < x < 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 - 2x - 13 = 0 \\ x > 3 \text{ hoặc } x < 2 \end{cases} \\ x \in \emptyset \\ \begin{cases} 8x - 25 = 0 \\ 2 < x < 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{1 \pm 3\sqrt{3}}{2} \\ x > 3 \text{ hoặc } x < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{25}{8} \\ 2 < x < 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1 \pm 3\sqrt{3}}{2} \\ x \in \emptyset \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \left(vì\ \frac{1-3\sqrt{3}}{2} < 0 \right)$$

- Với $x < 0$: $|-x|x| + 5x - 6| = |x^2 + 5x - 6| = |(x-1)(x+6)|$

Dễ thấy: $(x-1)(x+6) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 6 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x + 6 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x > -6 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x < -6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1\ (loại\ vì\ x < 0) \\ x < -6 \end{array}\right.$

$$(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 3x - 19 + x^2 + 5x - 6 = 0 \\ x < -6 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 3x - 19 = 0 \\ x = -6 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 3x - 19 - x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x > -6 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 + 8x - 25 = 0 \\ x < -6 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 3x - 19 = 0 \\ x = -6 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x - 13 = 0 \\ x > -6 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{-4-\sqrt{66}}{2} \\ x \in \emptyset \\ x \in \emptyset \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4-\sqrt{66}}{2}$$

Vậy: phương trình có 2 nghiệm $x_1 = \frac{1+3\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{-4-\sqrt{66}}{2}$