HỆ THỨC VI-ÉT

Lí thuyết:

- Nếu $x_1,\ x_2$ là 2 nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$, $a\ \neq 0$ thì: $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ và $x_1.x_2=\frac{c}{a}$
- Muốn tìm 2 số u, v biết u + v = S, u.v = P, ta giải phương trình: $x^2-Sx+P=0$ (u, v tồn tại khi và chỉ khi $S^2-4P\geq 0$)

Đây là dạng bài áp dụng hệ thức vi-ét để giải. Tùy theo trường hợp mà có một số cách giải sau đây:

- Đối với dạng bài yêu cầu không giải phương trình và tính giá trị của một biểu thức cho trước có liên quan đến 2 nghiệm $x_1,\ x_2$: ta cần tính giá trị của biệt thức $\Delta=b^2-4.a.c$ để xác định phương trình có tồn tại nghiệm hay không. Sau khi xác định được phương trình có 2 nghiệm phân biệt, ta sẽ biến đổi biểu thức yêu cầu đề bài sao cho xuất hiện các đa thức liên quan đến tổng như $x_1+x_2, (x_1+x_2)^2$,….. hoặc tích như $x_1.x_2$,… và sử dụng hệ thức vi-ét để tìm ra kết quả.

Bài tập minh họa: cho phương trình bậc hai $x^2+\ 2x-4=0$, không giải phương trình hãy tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\boldsymbol{\Delta=b^2-4.a.c=2^2-4.1.(-4)=4+16=20\geq 0}$

⇨ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\boldsymbol{x_1, x_2}$

Áp dụng hệ thức vi-ét: $\begin{cases} x_1+\ x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-2}{1}=-2 \\ x_1.x_2=\frac{c}{a}=\frac{-4}{1}=\ -4 \end{cases}$

(lúc này, ta có thể tiến hành quy đồng biểu thức đề bài để làm xuất hiện các đa thức tổng, tích)

⇨ $\boldsymbol{\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2.x_2^2}}$ (đối với mẫu, ta đã làm xuất hiện được $\boldsymbol{x_1^2.x_2^2}$, còn ở tử, ta có thể biến đổi $\boldsymbol{x_1^2+\ x_2^2}$ trở thành $(x_1+x_2)^2-2.x_1.x_2$ và thay số vào biểu thức).

⇔ $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1.x_2}{x_1^2.x_2^2}=\frac{(-2)^2-2.(-4)}{(-4)^2}=\frac{4+8}{16}=\frac{3}{4}$

- Đối với dạng bài yêu cầu tính cực trị của các biểu thức có liên quan đến tổng, tích, lũy thừa,…. Của 2 nghiệm $x_1,\ x_2$: dạng bài này thường đi cùng với dạng phương trình tham số. Sau khi đã chứng tỏ được phương trình có nghiệm với mọi giá trị m (hoặc với m thuộc tập con nào đó của tập số thực). Lúc này, sẽ có 2 trường hợp:
  - Nếu bài yêu cầu tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức A nào đó: ta tiến hành áp dụng hệ thức vi-ét như trên và biến đổi biểu thức trở thành dạng tổng của một đa thức bình phương (hoặc mang mũ chẵn) chứa tham số và một số hạng n. Khi đó, ta dễ dàng suy ra được rằng

biểu thức A sẽ luôn lớn hơn hoặc bằng số hạng n. Biểu thức đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi A = n, hay giá trị của đa thức bình phương bằng 0.

- Nếu bài yêu cầu tính giá trị lớn nhất của biểu thức A nào đó: ta tiến hành áp dụng hệ thức vi-ét, biến đổi biểu thức trở thành hiệu của một số hạng n và một đa thức bình phương chứa tham số. Khi đó, biểu thức ban đầu luôn bé hơn hoặc bằng số hạng n. Biểu thức đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi A = n, hay giá trị của đa thức bình phương = 0.

Bài tập minh họa: cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x - 1 = 0$. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị m. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1.x_2$ (1) và giá trị lớn nhất của biểu thức $B = x_1^3.x_2 + x_1.x_2^3$(2)

Giải:

Ta có: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4.a.c = 2^2.(m-1)^2 - 4.1.(-1) = 4(m-1)^2 + 4 \; > \; 0}$ **với mọi m**

⇨ **Phương trình có nghiệm với mọi giá trị m**

Áp dụng hệ thức vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2(m-1)}{1} = 2(m-1) \\ x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1 \end{cases}$

Tiến hành biến đổi biểu thức (1): $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1.x_2$

$$= x_1^2 - x_2^2 + 2.x_1.x_2 - 3.x_1.x_2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 3.x_1.x_2$$

Thay số vào, ta được: $A = [2(m-1)]^2 - 3.(-1) = 4(m-1)^2 + 3 \; \geq 3$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $4(m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 1$$

Tương tự với biểu thức (2): $B = x_1^3.x_2 + x_1.x_2^3 = x_1.x_2(x_1^2 + x_2^2)$

$$\boldsymbol{= x_1.x_2\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2\right]}$$

$$\boldsymbol{= -1.\left[(2m-1)^2 - 2.(-1)\right]}$$

$$\boldsymbol{= -2 - (2m-1)^2 \; \leq -2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\boldsymbol{(2m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}}$

- Đối với dạng bài yêu cầu tìm giá trị của tham số m để phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn 1 số điều kiện: tương tự với các dạng trên, ta cần chứng minh phương trình có nghiệm với mọi giá trị m hoặc với m thuộc tập con nào đó của tập số thực. Sau đó, áp dụng hệ thức vi-ét tìm ra tổng, tích của 2 nghiệm. Ghép tổng/tích của hai nghiệm với phương trình điều kiện của đề bài, từ đó tạo thành một hệ hai phương trình hai ẩn. Giải hệ trên và tìm ra được giá trị của tham số m.

- Đối với dạng bài yêu cầu tìm giá trị m để phương trình chứa hai nghiệm trái dấu: Hai nghiệm của phương trình trái dấu khi $x_1.x_2 < 0$ hay $\frac{c}{a} < 0$

Bài tập minh họa: cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 8 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4.\mathrm{a}.\mathrm{c} = 2^2.(\mathrm{m}-1)^2 - 4.1.(\mathrm{m}-8) = 4(\mathrm{m}-1)^2 - 4\mathrm{m} + 32 = 4\mathrm{m}^2 - 8\mathrm{m} + 4 - 4\mathrm{m} + 32 = 4\mathrm{m}^2 - 12\mathrm{m} + 36 = 4(\mathrm{m}-3)^2 > 0$ với mọi $\mathrm{m} \neq 3$ **(1)**

Áp dụng hệ thức vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2(m-1)}{1} = 2(m-1) \\ x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-8}{1} = m-8 \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm trái dấu ⇔ $\boldsymbol{x_1.x_2 < 0}$ ⇔ $\boldsymbol{m - 8 < 0}$ ⇔ $\boldsymbol{m < 8}$ (2)

Từ (1) và (2) => Phương trình có 2 nghiệm trái dấu với mọi $\boldsymbol{m < 8, m \neq 3}$

- Đối với dạng bài yêu cầu tìm hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm không chứa tham số m: Ta cần sử dụng hệ thức vi-ét để tìm ra tổng, tích của hai nghiệm. Nếu biểu thức tổng và tích đều chứa tham số m, ta tìm cách biến đổi chúng sao cho làm mất đi tham số m.

Bài tập minh họa: cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 8 = 0$. Tìm biểu thức liên hệ giữa 2 nghiệm x_1, x_2 không chứa tham số m.

Ta có: $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4.\mathrm{a}.\mathrm{c} = 2^2.(\mathrm{m}-1)^2 - 4.1.(\mathrm{m}-8) = 4(\mathrm{m}-1)^2 - 4\mathrm{m} + 32 = 4\mathrm{m}^2 - 8\mathrm{m} + 4 - 4\mathrm{m} + 32 = 4\mathrm{m}^2 - 12\mathrm{m} + 36 = 4(\mathrm{m}-3)^2 > 0$ với mọi $\mathrm{m} \neq 3$

Áp dụng hệ thức vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2(m-1)}{1} = 2(m-1) & (1) \\ x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-8}{1} = m-8 & (2) \end{cases}$

Nhận thấy: biểu thức (1) chứa 2m, biểu thức (2) chứa m. Để làm mất m và tạo ra biểu thức liên hệ giữa 2 nghiệm, ta chỉ cần lấy (1) – 2.(2)

Hay: $x_1 + x_2 - 2.x_1.x_2 = 2(m-1) - 2(m-8) = 2m - 2 - 2m + 16 = 14$

Vậy: hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không chứa m là: $x_1 + x_2 - 2.x_1.x_2 = 14$