PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

- **Kiến thức cần nhớ:** đây là dạng bài giải phương trình vô tỉ. Đối với loại phương trình này, ta cần xác định điều kiện có nghĩa của căn thức và biến đổi phương trình thành phương trình tương đương không chứa căn để giải. Việc này đa số được thực hiện bằng cách bình phương cả hai vế hoặc biến đổi biểu thức trong căn và sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$
- **Đối với phương trình có dạng** $\sqrt{A} = \mathrm{B}$, với A,B là các đa thức:

Với B < 0: ta kết luận phương trình vô nghiệm dựa trên tính chất của căn thức: $\sqrt{\boldsymbol{A}} \geq \mathbf{0}\ \forall\ \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}$

Với B > 0 ta biến đổi như sau: $\sqrt{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$ (ĐKXĐ: $A \geq 0$)

Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Ví dụ 1: giải phương trình $\sqrt{\mathbf{2}x + \mathbf{1}} = \mathbf{4}\ (\mathbf{1})$

ĐKXĐ: $x \geq -\frac{1}{2}$

$(1) \Rightarrow 2x + 1 = 16$

$\Rightarrow x = \frac{15}{2}$ (thỏa)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{15}{2}$

Ví dụ 2: giải phương trình $\sqrt{\mathbf{2}x + \mathbf{1}} = x - \mathbf{4}\ (\mathbf{2})$

ĐKXĐ: $x \geq -\frac{1}{2}$

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 2x + 1 = (x-4)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 2x - 1 = x^2 - 8x + 16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 2x - 1 = x^2 - 8x + 16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 0 = x^2 - 10x + 17 \end{cases}$

Giải phương trình bậc 2 trên, ta được: $x = 5 + 2\sqrt{2}$ (nhận)

và $x = 5 - 2\sqrt{2}$ (loại vì $x \geq 4$)

Vậy: phương trình có 1 nghiệm $x = 5 + 2\sqrt{2}$

Trong trường hợp không xác định được giá trị của B, ta đặt điều kiện cho $\mathrm{B} \geq 0$ và kết hợp với điều kiện xác định của căn thức để cho ra điều kiện chung.

Ví dụ 3: Giải phương trình $\sqrt{5x^2 - 2x + 1} = 2x$ (*)

Điều kiện của phương trình : $2x \geq 0$ và $5\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ và $x \in \mathrm{R}$

Phương trình (*) tương đương : $5x^2 - 2x + 1 = 4x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ (nhận)

Ví dụ 4: giải phương trình $\sqrt{x^2 - \mathbf{8}x + \mathbf{16}} = x + \mathbf{2}$

PT $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-4)^2} = x + 2 \\ (x-4)^2 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-4| = x+2 \\ (x-4)^2 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-4 = x+2 \text{ với } x \geq 4 \\ x-4 = -x-2 \text{ với } x < 4 \end{array}\right. \\ x \in \mathbb{R} \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0x = 6 \text{ với } x \geq 4 \\ 2x = 2 \text{ với } x < 4 \end{array}\right. \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

- **Đối với phương trình có dạng** $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ với A,B là các đa thức, ta cần tìm điều kiện xác định của căn thức, bằng việc kết hợp điều kiện có nghĩa của 2 biểu thức trong căn ở hai vế. Sau đó, bình phương cả hai vế và giải như dạng trên.
  Ví dụ 1:
  giải phương trình $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+4}$ (3)
  Phương trình có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$
  $(3) \Rightarrow x - 1 = 2x + 4$
  $\Rightarrow x = -5$ $(loại)$
  Vậy phương trình vô nghiệm
  Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt{x^2-5x-6} = \sqrt{2x-18}$ (4)
  ĐK : $2x - 18 > 0 \Leftrightarrow x > 9$
  Từ (4) suy ra : $x^2 - 5x - 6 = 2x - 18$
  $\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$
  Áp dụng các bước giải phương trình bậc 2 một ẩn ta có
  $x_1 = 4$ $(loại)$ và $x_2 = 3$ $(loại)$
  Vậy phương trình (1) vô nghiệm

  Ví dụ 3: Giải phương trình $\sqrt{2x^2-2x+57} = \sqrt{x^2+10x+25}$ (5)
  Bài làm
  Điều kiện : $x^2 + 10x + 25 \geq 0$
  - Ta có (1) $\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 57 = x^2 + 10x + 25$
    $\Leftrightarrow x^2 - 12x + 32 = 0$
    Áp dụng các bước giải phương trình bậc hai một ẩn ta có :
    $x_1 = 8$ $(nhận)$ và $x_2 = 4$
    Vậy phương trình (5) có 2 nghiệm $x_1 = 8, x_2 = 4$
- **Đối với phương trình có dạng** $\boldsymbol{\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = C}$**:** dạng bài này thường được giải bằng cách biến đổi biểu thức trong căn thành một biểu thức bình phương và áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$ để phá căn. Sau đó, ta giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối có dạng $|A| + |B| = C$ bằng cách chuyển hết tất cả về vế trái, sau đó xét dấu của vế trái ở từng khoảng giá trị xác định. Ngoài ra, một số bài cũng có thể được giải bằng cách đặt ẩn phụ nhưng nhìn chung hướng đi cho dạng này là tìm cách phá căn, quy về giá trị tuyệt đối.
  Ví dụ: giải phương trình $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{4x^2-12x+9} = 5$ (6)

Dễ dàng ta thấy: $\begin{cases} x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2.3.x + 3^2 = (x-3)^2 \\ 4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2.2x.3 + 3^2 = (2x-3)^2 \end{cases}$

$(6) \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(2x-3)^2} = 5$

$\Leftrightarrow |x-3| + |2x-3| = 5$

$\Leftrightarrow |x-3| + |2x-3| - 5 = 0$

Nhận xét: $x - 3 \geq 0$ khi $x \geq 3$, $2x - 3 \geq 0$ khi $x \geq \frac{3}{2}$

Vậy ta cần xét 3 khoảng giá trị: $-\infty < x < \frac{3}{2}$ (trường hợp cả hai đa thức đều âm), $\frac{3}{2} \leq x < 3$ (trường hợp 1 đa thức âm 1 đa thức dương) và $3 \leq x < +\infty$ (cả hai đa thức đều dương)

Tương ứng với đó, ta sẽ có 3 trường hợp như sau:

Với $-\infty < \boldsymbol{x} < \frac{3}{2}$**:**

$(1) \Leftrightarrow -(x-3) - (2x-3) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow -3x + 3 + 3 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow -3x = -1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (loại vì $-\infty < \boldsymbol{x} < \frac{3}{2}$**)**

Với $\frac{3}{2} \leq \boldsymbol{x} < \mathbf{3}$**:**

$(1) \Leftrightarrow -(x-3) + (2x-3) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 - 3 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$ (loại vì $\frac{3}{2} \leq \boldsymbol{x} < \mathbf{3}$)

Với $3 \leq x < +\infty$:

$\mathbf{(1)} \Leftrightarrow (\boldsymbol{x} - \mathbf{3}) + (\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}) - \mathbf{5} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{6} - \mathbf{5} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}$ (nhận)

Vậy: $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}$ **là nghiệm của phương trình**

Với các phương trình không thể biến đổi về dạng bình phương trong căn, ta có thể thực hiện bình phương 2 vế 2 lần

Ví dụ: giải phương trình $\sqrt{1-x} - \sqrt{2+x} = 1$

Điều kiện: $\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 2 + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$

Phương trình $\sqrt{1-\mathrm{x}} - \sqrt{2+x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 1 + \sqrt{2+x}$

$\Leftrightarrow 1 - x = 1 + 2\sqrt{2+x} + 2 + x$

$\Leftrightarrow -2 - 2x = 2\sqrt{2+x}$

$\Leftrightarrow -(x+1) = \sqrt{2+x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -(x+1) \geq 0 \\ (x+1)^2 = 2 + x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \leq 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 2 + x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Ngoài ra, dạng này còn có thể được giải bằng cách đánh giá 2 vế của phương trình. Ta có thể biến đổi vế trái thành dạng $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} \geq n$, vế phải trở thành $C \leq n$ (hoặc ngược lại) với n là một giá trị cụ thể. Từ đó suy ra được nghiệm của phương trình.

Ví dụ 4: giải phương trình $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+21}=5-2x-x^2$

Ta có: $\begin{cases} VT = \sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+21} \\ VP = 5-2x-x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} VT = \sqrt{3(x^2+2x+1)+4}+\sqrt{5(x^2+2x+1)+16} \\ VP = 6-(x^2+2x+1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} VT = \sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+16} \geq \sqrt{4}+\sqrt{16}=6 \\ VP = 6-(x+1)^2 \leq 6 \end{cases}$ $vì\ (x+1)^2 \geq 0$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow$ 6 – $(x+1)^2 = 6 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=-1$

(ở đây, ta cũng có thể đặt VT = 6 và biến đổi tương tự, nhưng biến đối vế phải sẽ dễ dàng hơn)

- **Tóm lại, để giải phương trình vô tỉ ta cần vận dụng các phép biến đổi để làm mất dấu căn**. Trong quá trình giải, phương trình vô tỉ có thể được biến đổi thành một phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối tương đương. Tham khảo bài viết về phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối tại đây.