Projet intermédiaire - Sujet 7 - DowJones

Techniques Numériques - M2 Actuariat - ISFA - Automne 2025

A rendre avant le 28 novembre 2025, 23h

*Difficulté : **. Toutes les réponses doivent être justifiées. Le rendu prendra la forme d'un rapport de quatre pages maximum, sous format pdf et accompagné d'un fichier de code, déposés sur Moodle avant le 28 novembre 2025, 23h.* ***Attention, ce sujet est recto-verso.*.**

1 Contexte

Dans ce projet, on cherche à simuler l'évolution du prix d'une quantité financière indexée sur l'indice NASDAQ (NDX). On va procéder en deux temps : utilisation d'un modèle de Black-Scholes pour la calibration, puis enrichissement du modèle avec le modèle sauts-diffusions de Merton.

On rappelle d'abord le modèle de Black-Scholes

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

pour une valeur $x_0 \in \mathbb{R}_+$.

2 Calibration

Pour les données, on pourra utiliser le ticker DJI du package "yfinance" (en Python), ainsi que le lien suivant (on filtrera bien avec la caractéristique *Moneyness* réglée sur *All*) :

https ://www.nasdaq.com/fr/market-activity/stocks/dow/option-chain

1. Donner une estimation de x_0, en précisant la date du relevé.
2. Rappeler, en la justifiant par une démonstration succinte, la formule pour le prix du put en date $t > 0$ de strike $K > 0$ de maturité $T > t$.
3. Utiliser le taux EURIBOR 1 an (à trouver en ligne) pour donner une estimation du taux sans risque r. Préciser la source utilisée.
4. En utilisant les données des options put sur l'indice Dow-Jones (DOW) de maturité fixée au 18 Décembre 2026 (le prix est donné par la colonne "Last/Dernier" la plus à droite au lien ci-dessus) et vos réponses précédentes, calibrer, à l'aide d'un modèle linéaire, le σ. On pourra optimiser une fonction calculant la valeur de l'actif, puis de l'option, à σ donné. Calibrer ensuite le rendement μ à l'aide des données historiques : on pourra utiliser le package *yfinance* de Python.

3 Simulation

5. A l'aide des paramètres précédemment obtenus et d'un schéma d'Euler basé sur 30000 simulations, calculer

$$\mathbb{P}[X_2 > 23].$$

On considère ensuite le modèle de sauts-diffusion de Merton, dont la dynamique est donnée par

$$\begin{cases} dX_t = X_{t-}\Big((\mu - \lambda\kappa)dt + \sigma dB_t + (Z_t - 1)dN_t\Big), \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

où $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ, et les variables de sauts $(Z_i)_{i\geq 1}$ sont i.i.d. de loi log-normales de paramètres $\kappa + 1$, σ_Z^2, i.e. $\ln(Z_1)$ suit une loi normale de moyenne $\kappa + 1$ et de variance σ_Z^2, avec $\kappa > 0$.

6. Pour $\lambda = 3$, $\kappa = 0.03$ et $\sigma_Z^2 = 0.2$, simuler cette dynamique pour estimer X_1 avec 30000 itérations de Monte-Carlo à l'aide d'un schéma d'Euler à au moins dix étapes de temps et des paramètres x_0, μ, σ obtenus précédemment. On utilisera les instants de sauts exacts du processus $(N_t)_{t\geq 0}$ lorsque des sauts surviennent sur $[0, 1]$.
7. Estimer, avec ce modèle, la probabilité $\mathbb{P}[X_2 > 23]$.