Projet intermédiaire - Sujet 8 - Courbe des taux

Techniques Numériques - M2 Actuariat - ISFA - Automne 2025

A rendre avant le 28 Novembre 2025, 23h

*Difficulté : *. Toutes les réponses doivent être justifiées. Le rendu prendra la forme d'un rapport de quatre pages maximum, sous format pdf et accompagné d'un fichier de code, déposé sur Moodle avant le 28 novembre 2025, 23h. Sujet recto-verso.*

1 Contexte

Dans ce projet, on cherche à reconstruire la courbe des taux sans risque, utile en particulier pour le calcul des valeurs actualisées. Dans ce sujet, on se concentre sur un horizon court terme (2 à 5 ans) pour la zone euro à l'aide d'un modèle stochastique. On cherche à calibrer le modèle sur des données réelles.

On va d'abord modéliser l'évolution des taux à l'aide de l'EDS suivante

$$\begin{cases} dX_t &= \kappa(\theta - X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t. \\ X_0 &= x_0, \end{cases}$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien, x_0, κ, θ et $\sigma \in \mathbb{R}$ sont des paramètres à déterminer.

2 Calibration

1. Donner une estimation de x_0 à partir d'une source récente. On utilisera les taux EURIBOR.
2. Calculer $\mathbb{E}[X_t]$ en fonction de $x_0, \kappa, \theta, \sigma$ et t. Quelle est la limite de cette quantité quand $t \to \infty$? En consultant la courbe des données EIOPA, en déduire une estimation du paramètre θ.
   Lien EIOPA : `https://www.addactis.com/fr/blog/courbes-taux-sans-risque-donnees-eiopa/`
3. A l'aide de l'espérance précédente et des données EURIBOR, donner une estimation du paramètre κ.
4. Calculer $\mathrm{Var}[X_t]$. Déduire une estimation de σ.

3 Simulation

5. En utilisant les paramètres obtenus dans la section précédente, simuler 20000 trajectoires du taux sans risque avec un schéma d'Euler-Maruyama à 20 pas de temps. Donner une estimation du taux à 6 mois et 1 an et comparer aux taux Euribor. Donner une estimation du taux à 5 ans. Calculer la probabilité que le taux à 2 ans soit supérieur à 3%.

On enrichit le modèle en ajoutant des sauts : le modèle devient

$$\begin{cases} dX_t &= \kappa(\theta - X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t + dK_t \\ X_0 &= x_0, \end{cases}$$

où $(K_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson composé tel que

$$K_t := \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

où $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ, et les $(Y_i)_{i\geq 0}$ sont des variables i.i.d. de densité donnée par une somme de masses de Dirac

$$f_X(x) = p_1 \delta_{\{x=0.025\}} + p_2 \delta_{\{x=0.05\}} + (1 - p_1 - p_2)\delta_{\{x=-0.025\}}.$$

6. Pour $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.41$ et un λ correspondant à une moyenne de 2 sauts par an, simuler 20000 trajectoires du taux sans risque à l'aide d'un schéma d'Euler à au moins 10 pas de temps. Donner une estimation du taux à 6 mois et à 1 an. Donner une estimation du taux à 4 ans. Calculer la probabilité que le taux à 2 ans soit supérieur à 3.5%. On utilisera les instants exacts de sauts du processus $(N_t)_{t\geq 0}$.