Projet intermédiaire - Sujet 5 - Taux sans risque

Techniques Numériques - M2 Actuariat - ISFA - Automne 2025

A rendre avant le 28 novembre 2025, 23h

*Difficulté : ***. Toutes les réponses doivent être justifiées. Le rendu prendra la forme d'un rapport de quatre pages maximum, sous format pdf et accompagné d'un fichier de code, déposés sur Moodle avant le 28 novembre 2025, 23h. Sujet recto-verso.*

1 Contexte

Dans ce sujet, on se propose de reconstruire une courbe des taux sans risque, essentielle aux calculs des valeurs actualisés en finance et en assurance. On se concentrera sur un horizon à court terme (2 à 5 ans) pour la zone euro à l'aide d'un modèle stochastique, et l'on cherchera à calibrer ce dernier sur des données réels.

On considère le modèle suivant

$$\begin{cases} dX_t & = \kappa(\theta - X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X_t}\mathrm{d}B_t. \\ X_0 & = x_0, \end{cases}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien, $x_0 \in \mathbb{R}$.

2 Calibration

1. En utilisant les taux EURIBOR ou une autre source (à préciser dans tous les cas), donner une estimation de x_0.
2. Montrer que l'on a, pour tout $h > 0$, presque-sûrement
$$\frac{X_{t+h} - X_t}{\sqrt{X_t}} = \kappa(\theta - X_t)\frac{h}{\sqrt{X_t}} + \sigma\sqrt{h}Z$$
où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. Réécrire cette équation sous la forme du modèle linéaire
$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$
en détaillant la correspondance entre $y, x_1, x_2, u, \beta_1, \beta_2$ et $X_t, X_{t+h}, h, \kappa, \theta, \sigma$ et Z.
4. En déduire une estimation des paramètres κ, θ et σ à l'aide des estimateurs MCO $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$, de h et d'un estimateur sans biais de la variance que vous préciserez.
5. Numériquement, construire une matrice M dont chaque ligne est forme $(x_{t+h} - x_t, x_t, h)$ contenant des valeurs réelles de taux sans risque. On pourra travailler à la main à partir des taux EURIBOR **ou** avoir recours au ticker "IRX" du package yfinance (en Python).
6. A l'aide des trois questions précédentes, obtenir une estimation des paramètres du modèle.

3 Simulation

7. En utilisant les paramètres obtenus dans la section précédente, simuler 20000 trajectoires du taux sans risque avec un schéma d'Euler à 20 pas de temps. On utilisera la dynamique réfléchie
$$\begin{cases} dX_t & = \kappa(\theta - R_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{|X_t|}\mathrm{d}B_t. \\ X_0 & = x_0, \end{cases}$$
Donner une estimation du taux à 6 mois et 1 an et comparer aux taux Euribor. Donner une estimation du taux à 3 ans et 5 ans. Calculer la probabilité que le taux à 3 ans soit inférieur à 1%.

On enrichit le modèle en ajoutant des sauts : le modèle devient

$$\begin{cases} dX_t & = \kappa(\theta - X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{|X_t|}\mathrm{d}B_t + dJ_t. \\ X_0 & = x_0, \end{cases}$$

où $(J_t)_{t\geq 0}$ est de la forme

$$J_t := \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

où pour tout $t \geq 0$, N_t est donné par

$$N_t = \sup\left\{k \in \mathbb{N} : t \geq k * 0.25\right\}$$

correspondant aux réunions trimestrielles de la banque centrale (N_t est donc déterministe), et où les $(Y_i)_{i\geq 0}$ sont des variables i.i.d. de densité donnée par une somme de masses de Dirac

$$f_Y(x) = p_1\delta_{\{x=0.025\}} + p_2\delta_{\{x=0.05\}} + (1-p_1-p_2)\delta_{\{x=-0.025\}}.$$

8. Pour $p = 0.5$, $\eta_1 = (1/0.1)$ et $\eta_2 = (1/0.05)$, simuler 50000 trajectoires du taux sans risque à l'aide d'un schéma d'Euler à au moins 10 pas de temps. Donner une estimation du taux à 6 mois et à 1 an. Calculer la probabilité que le taux à 2 ans soit inférieur à 1%. On utilisera les instants exacts de sauts du processus $(N_t)_{t\geq 0}$.