

Projet intermédiaire - Sujet 2 - Modèles multi-actions

Techniques Numériques - M2 Actuariat - ISFA - Automne 2025

A rendre avant le 28 novembre 2025, 23h

*Difficulté : **. Toutes les réponses doivent être justifiées. Le rendu prendra la forme d'un rapport de quatre pages maximum, sous format pdf et accompagné d'un fichier de code, déposés sur Moodle avant le 28 novembre 2025, 23h. Sujet recto-verso.*

1 Contexte

Dans ce projet, on cherche à simuler l'évolution du prix des actions de deux grands acteurs du marché de l'intelligence artificielle : META et NVIDIA. On va procéder en deux temps : utilisation d'un modèle de Black-Scholes pour la calibration de chaque modèle, puis enrichissement du modèle à l'aide d'un bruit commun.

On rappelle d'abord le modèle de Black-Scholes, donné pour $t \geq 0$ par

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien, $x_0 \in \mathbb{R}_+$.

2 Calibration

Pour les données, on pourra utiliser le lien suivant :

<https://www.nasdaq.com/fr/market-activity/stocks/meta/option-chain> (META)

<https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/nvda/option-chain> (NVIDIA).

On s'intéresse d'abord à l'action META.

1. Donner une estimation de x_0 , en précisant la date du relevé. On notera cette valeur s_M dans la suite.
2. Rappeler, en la justifiant par une démonstration succincte, la formule pour le prix du put en date $t > 0$ de strike $K > 0$ de maturité $T > t$ dans le modèle de Black-Scholes.
3. Utiliser le taux EURIBOR 1 an (à trouver en ligne) pour donner une estimation du taux sans risque r . Préciser la source utilisée.
4. En utilisant les données des options put sur l'action META (META) de maturité fixée au 19 Décembre 2025 (le prix est donné par la seconde colonne "Last/Dernier" au lien ci-dessus) et vos réponses précédentes, calibrer, à l'aide d'un modèle linéaire, le paramètre σ . On pourra procéder par optimisation, à l'aide d'une fonction fournissant le prix de l'actif, puis de l'option à σ fixés. A l'aide des données historiques sur l'actif, donner une estimation du rendement historique μ : on pourra utiliser le package *yfinance* de Python. On les notera μ_M et σ_M dans la suite.
5. Reprendre l'ensemble des questions précédentes pour estimer s_N , μ_N et σ_N , la valeur initiale, le rendement historique et la volatilité pour l'action NVIDIA (NVDA).

3 Simulation

Pour toute cette partie, on suppose que les mouvement Browniens dans les deux modèles sont indépendants.

6. En passant au log et à l'aide d'un schéma d'Euler avec 50000 simulations et au moins dix pas de temps et des paramètres précédemment estimés, donner une estimation des valeurs suivantes :
- S_1^M prix de l'action META à 1 an, S_2^M prix de l'action META à 2 ans ;
 - S_1^N prix de l'action Nvidia à 1 an, S_2^N prix de l'action Nvidia à 2 ans ;
 - $\mathbb{P}(S_1^M > 5S_1^N)$.
7. Soit $\sigma_C = \max(\sigma_M, \sigma_N)$. Dans cette question, on utilise un modèle à bruit commun :

$$\begin{cases} dS_t^M = \mu_M S_t^M dt + 0.3 * \sigma_M S_t^M dW_t^M + 0.7 * \sigma_C S_t^M dW_t^0, \\ dS_t^N = \mu_N S_t^N dt + 0.3 * \sigma_N S_t^N dW_t^N + 0.7 * \sigma_C S_t^N dW_t^0, \\ S_0^M = x_M, \quad S_0^N = x_N \end{cases}$$

- où $(W_t^M)_{t \geq 0}$, $(W_t^N)_{t \geq 0}$ et $(W_t^0)_{t \geq 0}$ sont trois mouvement Browniens indépendants.
- A l'aide de la formule d'Itô, écrire un système pour l'évolution de $\log(S_t^M)$ et $\log(S_t^N)$.
 - Utiliser un schéma d'Euler avec au moins dix pas de temps et 50000 simulations basée sur la question précédentes pour donner une nouvelle estimation des valeurs demandées à la question 6. On utilisera à nouveau les paramètres $(x_M, x_N, \mu_M, \mu_N, \sigma_M, \sigma_N)$ issus de la calibration.