Projet intermédiaire - Sujet 1 - Indice immobilier

Techniques Numériques - M2 Actuariat - ISFA - Automne 2025

A rendre avant le 28 novembre 2025, 23h

*Difficulté : **. Toutes les réponses doivent être justifiées. Le rendu prendra la forme d'un rapport de quatre pages maximum, sous format pdf et accompagné d'un fichier de code, déposés sur Moodle avant le 28 novembre 2025, 23h.* ***Attention, sujet recto-verso****.*

1 Contexte

Dans ce projet, on cherche à simuler l'évolution du prix d'un indice immobilier. On va procéder en deux temps : utilisation d'un modèle de base pour la calibration en environnement historique, puis simulation à l'aide de ce modèle et d'un modèle enrichi comportant des sauts.

On considère l'indice des prix du logement en France, que l'on souhaite estimer à l'aide du modèle suivant

$$\begin{cases} dI_t = \alpha(\beta - I_t)dt + \sigma dB_t, \\ I_0 = x, \end{cases}$$

où α, β, x et σ sont des paramètres donnés, où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard.

2 Calibration

Pour les données, on pourra utiliser le lien suivant :

https ://www.insee.fr/fr/statistiques/series/105071770.

Il est recommandé de télécharger le csv et d'utiliser la ligne **118** "Indice des prix des logements anciens - France métropolitaine - Ensemble - Base 100 en moyenne annuelle 2015 - Série brute".

1. Donner une estimation de x pour un modèle démarrant en $t = 0$ au 2ème trimestre 2025.
2. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $h > 0$,

$$I_{t+h} = e^{-\alpha h} I_t + \beta\big(1 - e^{-\alpha h}\big) + e^{\alpha(t+h)}\,\sigma \int_t^{t+h} e^{hu} dB_u.$$

3. Réécrire cette équation sous la forme

$$I_{t+h} = \delta_0 + \delta_1 I_t + \delta_2 \epsilon_h, \tag{1}$$

   où ϵ_h suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

4. Exprimer les coefficients α, β, σ en fonction de δ_0, δ_1 et δ_2.
5. En utilisant les données sur la période $2010 - 2025$, effectuer une régression linéaire de la forme (1). En déduire une estimation de α, β et σ.

3 Simulation

6. En utilisant un schéma d'Euler à au moins quinze pas de temps, donner une estimation, basée sur 50000 simulations, de la quantité

$$\mathbb{P}(I_3 < 125),$$

   où I_2 est la valeur de l'indice au deuxième trimestre 2028.

7. On cherche à présent à estimer le modèle de Hull-White

$$\begin{cases} di_t = \alpha(t)(\beta(t) - i_t)dt + \sigma dB_t, \\ i_0 = x, \end{cases}$$

i.e., les paramètres α et β dépendent à présent du temps. Reprendre la question 5 en divisant la période en trois intervalles de temps pour obtenir trois estimations $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Par interpolation linéaire, en déduire une estimation des valeurs futures α_4 et β_4. Utiliser ces deux valeurs pour répéter la question 6, et donner une nouvelle estimation de $\mathbb{P}(I_3 < 125)$.

4 Analyse de risque et validation du modèle

8. On souhaite évaluer la qualité du modèle calibré et le confronter aux données historiques.

   a) Backtesting : Recalibrer le modèle de base en utilisant uniquement les données 2010-2022. Simuler 10 000 trajectoires sur la période 2022-2025. Pour chaque trimestre t de la période de test (T3 2022 à T2 2025) :
      — Calculer les quantiles empiriques à 5%, 50% et 95% de la distribution simulée de I_t ;
      — Vérifier si la valeur observée I_t^{obs} se situe dans l'intervalle de confiance à 90% ;
      — Calculer le pourcentage de trimestres où le modèle capture correctement les observations (i.e., où la valeur observée se trouve dans l'intervalle précédent).

      Représenter graphiquement l'évolution observée et les intervalles de confiance simulés.

   b) Mesures de risque : À partir du modèle calibré sur l'ensemble des données (question 5), calculer pour l'horizon $T = 2$ ans :
      — La Value-at-Risk à 95% : $\text{VaR}_{0.95} = \inf\{x : \mathbb{P}(I_2 < x) \geq 0.05\}$
      — La Conditional Value-at-Risk à 95% : $\text{CVaR}_{0.95} = \mathbb{E}[I_2 | I_2 < \text{VaR}_{0.95}]$

      .

   c) Discuter brièvement la robustesse du modèle et ses limites pour la gestion du risque immobilier.