Projet intermédiaire - Sujet 4 - Tables de mortalité et contrat

Techniques Numériques - M2 Actuariat - ISFA - Automne 2025

A rendre avant le 28 novembre 2025, 23h

*Difficulté : **. Toutes les réponses doivent être justifiées. Le rendu prendra la forme d'un rapport de quatre pages maximum, sous format pdf et accompagné d'un fichier de code, déposés sur Moodle avant le 28 novembre 2025, 23h.* ***Sujet recto-verso.***

1 Contexte

Dans ce projet, on cherche à simuler la somme que devra débourser un assureur dans les années à venir pour couvrir des contrats d'assurance-vie. Dans un premier temps, nous allons construire un modèle pour évaluer l'évolution de la mortalité dans le temps. Les données ainsi obtenues seront ensuite utilisées pour la simulation de la somme à provisionner.

On considère le modèle dynamique suivant pour la mortalité

$$\begin{cases} \nu_x(t) = \alpha(t)e^{\beta(t)x}, \\ d\alpha(t) = -\kappa\alpha(t)dt, \\ d\beta(t) = \theta dt + \sigma dW_t, \\ \alpha(0) = \alpha_0, \beta(0) = \beta_0, \end{cases}$$

où $\nu_x(t)$ est le taux de mortalité à la date t pour la population d'âge x, $\alpha(t)$ est le taux de mortalité de la population générale, $\beta(t)$ encode la variation du taux de mortalité avec l'âge. Les paramètres α_0, β_0 et κ sont supposés positifs.

2 Calibration

Pour les données, on pourra utiliser le fichier des taux de mortalité disponible à ce lien (données 2022) :

https ://www.ined.fr/fr/tout-savoir-population/chiffres/france/mortalite-cause-deces/taux-mortalite-sexe-age/

On utilisera le fichier : "Taux de mortalité par sexe et groupe d'âges, France entière, depuis 1994. La situation démographique en 2022. Insee, 15/07/2024" (onglet "Ensemble") téléchargeable sur la page.

1. Estimation des $\beta(t)$: en considérant la variable $\ln(\nu_x(t))$, en déduire une procédure pour estimer la variable $\beta(t)$ à l'aide des données de l'année t via une régression linéaire.
2. En utilisant la question précédente, en déduire une procédure pour estimer les $\alpha(t)$ à l'aide d'une régression linéaire.
3. En déduire une estimation de κ.
4. A partir de vos estimations de $\beta(t)$, donner une estimation de θ et σ. Préciser l'approche utilisée.

3 Simulation

5. Simuler un ensemble de clients (une seule fois) pour un assureur, au 01/01/2025 de la façon suivante : pour chaque âge de 18 à 90 ans, on tire une loi binômiale de paramètre $(0.3, 1000)$.

6. En supposant qu'il n'y a pas de nouveaux clients, et que chaque décès donne lieu au paiement d'un contrat suivant une loi exponentielle de paramètre $1/40$ (la valeur est en millier d'euros), estimer le versement global à effectuer par l'assureur sur les années 2025, 2026 et 2027. On commencera par simuler la dynamique de α, et celle de β à l'aide d'un schéma d'Euler à 15 période de temps. On procèdera ensuite par méthode de Monte-Carlo avec 30000 simulations **sur le portefeuille de la question 5** (on garde le même ensemble de clients pour chaque simulation, seuls les événements de décès sont modifiés).
7. Estimer la probabilité que le versement R_{2025} pour l'année 2025 soit tel que $R_{2025} > 10000$ et la probabilité d'avoir $R_{2025} > 10000$ **et** $R_{2026} > 10000$.
8. À partir de vos simulations Monte-Carlo, calculer la Value-at-Risk (VaR) au niveau 99.5% pour la somme totale des versements sur la période 2025-2027 $R_{2025} + R_{2026} + R_{2027}$.
9. En supposant que l'assureur doit constituer un capital de solvabilité K au 01/01/2025 et que ce capital génère un rendement annuel sans risque de 2%, déterminer le capital minimal K_* tel que :

$$\mathbb{P}(K_*(1.02)^3 < R_{2025} + R_{2026} + R_{2027}) \leq 0.005,$$

   Quel prime de contrat permet alors de l'auto-financer ?