

Projet intermédiaire - Sujet 3 - Actions corrélées

Techniques Numériques - M2 Actuariat - ISFA - Automne 2025

A rendre avant le 28 novembre 2025, 23h

*Difficulté : **. Toutes les réponses doivent être justifiées. Le rendu prendra la forme d'un rapport de quatre pages maximum, sous format pdf et accompagné d'un fichier de code, déposés sur Moodle avant le 28 novembre 2025, 23h.*

1 Contexte

Dans ce projet, on cherche à simuler l'évolution du prix des actions de deux grands acteurs du marché des technologies : Amazon et Netflix. On procèdera en deux temps : utilisation d'un modèle de Black-Scholes pour la calibration de chaque modèle, estimation de la corrélation par un modèle linéaire, puis simulation.

On rappelle d'abord le modèle de Black-Scholes, donné pour $t \geq 0$ par

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \\ S_0 = s_0 \end{cases}$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien, $s_0 \in \mathbb{R}_+$.

2 Calibration

Pour les données, on pourra utiliser le lien suivant :

<https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/amzn/option-chain> (Amazon)

<https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/nflx/option-chain> (Netflix).

On s'intéresse d'abord à l'action Netflix.

1. Donner une estimation de s_0 , en précisant la date du relevé. On notera cette valeur x_N dans la suite.
2. Rappeler, en la justifiant par une démonstration succincte, la formule pour le prix du put en date $t > 0$ de strike $K > 0$ de maturité $T > t$ dans le modèle de Black-Scholes.
3. Utiliser le taux EURIBOR 1 an (à trouver en ligne) pour donner une estimation du taux sans risque r . Préciser la source utilisée.
4. En utilisant les données des options put sur l'action Netflix (NFLX) de maturité fixée au 18 Décembre 2026 (le prix est donné par la **deuxième** colonne "Last") et vos réponses précédentes, calibrer, le paramètre σ . A l'aide des données historiques sur l'actif, donner une estimation du rendement historique μ : on pourra utiliser le package *yfinance* de Python. On les notera μ_N et σ_N dans la suite.

On s'intéresse ensuite à l'action Amazon.

5. Reprendre l'ensemble des questions précédentes pour estimer x_A , μ_A et σ_A , la valeur initiale, le rendement historique et la volatilité pour l'action Amazon (AMZN).
6. En utilisant dix points historiques (séparés d'au moins un mois, les données historiques sont disponibles sur les liens ci-dessus en utilisant l'onglet "Historical Quotes à gauche"), estimer la régression

$$S_t^N = \beta_0 + \beta_1 S_t^A + u.$$

Donner en particulier une estimation du paramètre β_1 . Commenter la significativité statistique. En déduire une estimation de la corrélation entre S_t^N et S_t^A . Elle sera notée ρ dans la suite.

3 Simulation

7. Dans cette question, on utilise un modèle à bruit corrélé

$$\begin{cases} dS_t^N = \mu_N S_t^N dt + \sigma_N S_t^N dW_t^{(1)} \\ dS_t^A = \mu_A S_t^A dt + \sigma_A S_t^A dW_t^{(2)} \\ S_0^N = x_N, \quad S_0^A = x_A \end{cases}$$

où $(W_t)_{t \geq 0} = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)})_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien bi-dimensionnel de corrélation ρ (i.e. $\text{Cov}(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}) = \rho t$ pour tout $t \geq 0$). À l'aide d'un schéma d'Euler avec 30000 simulations de ce modèle et au moins dix pas de temps, donner une estimation des valeurs suivantes :

- S_1^N prix de l'action Netflix à 1 an, S_2^N prix de l'action à 2 ans ;
- S_1^A prix de l'action Amazon à 1 an, S_2^A prix de l'action à deux ans ;
- $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{5 * S_1^A > S_1^N\}}]$.

On utilisera à nouveau les paramètres $(x_N, x_A, \mu_N, \mu_A, \sigma_N, \sigma_A, \rho)$ issus de la calibration.