PHÂN HOẠCH

Bài giảng chuyên đề "*Một số thuật toán tổ hợp*"

Lê Hồng Phương[1]

[1]Khoa Toán–Cơ–Tin học
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội
<*phuonglh@gmail.com*>

08/2012

Nội dung

Nội dung

1. Giới thiệu
   - Phân hoạch
2. Phân hoạch tập hợp
   - Các số Bell
   - Các số Stirling loại hai
   - Các số Stirling loại một
   - Sinh các phân hoạch tập hợp
3. Phân hoạch nguyên
   - Hàm phân hoạch
   - Lược đồ Ferrers
   - Sinh các phân hoạch nguyên
4. Tóm lược

Nội dung

Nội dung

Nội dung

1. Giới thiệu
   - Phân hoạch
2. Phân hoạch tập hợp
   - Các số Bell
   - Các số Stirling loại hai
   - Các số Stirling loại một
   - Sinh các phân hoạch tập hợp
3. Phân hoạch nguyên
   - Hàm phân hoạch
   - Lược đồ Ferrers
   - Sinh các phân hoạch nguyên
4. Tóm lược

Nội dung

1. Giới thiệu
   - Phân hoạch
2. Phân hoạch tập hợp
   - Các số Bell
   - Các số Stirling loại hai
   - Các số Stirling loại một
   - Sinh các phân hoạch tập hợp
3. Phân hoạch nguyên
   - Hàm phân hoạch
   - Lược đồ Ferrers
   - Sinh các phân hoạch nguyên
4. Tóm lược

Nội dung

Nội dung

Nội dung

Nội dung

1. Giới thiệu
   - Phân hoạch
2. Phân hoạch tập hợp
   - Các số Bell
   - Các số Stirling loại hai
   - Các số Stirling loại một
   - Sinh các phân hoạch tập hợp
3. Phân hoạch nguyên
   - Hàm phân hoạch
   - Lược đồ Ferrers
   - Sinh các phân hoạch nguyên
4. Tóm lược

Nội dung

Nội dung

Nội dung

Nội dung

Phân hoạch

- Thuật ngữ phân hoạch
- Các số liên quan tới phân hoạch: số Bell, số Stirling loại hai và loại một.
- Thuật toán sinh các phân hoạch

Giới thiệu

Thuật ngữ "phân hoạch" định nghĩa hai kiểu đối tượng tổ hợp khác nhau:

- Phân hoạch tập hợp (set partition)
- Phân hoạch nguyên (integer partition)

Phân hoạch tập hợp chia các phần tử của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ thành các tập con khác rỗng. Ví dụ, có 15 phân hoạch với $n = 4$.

$$\{1234\}, \{123, 4\}, \{124, 3\}, \{12, 34\}, \{12, 3, 4\},$$
$$\{134, 2\}, \{13, 24\}, \{13, 2, 4\}, \{14, 23\}, \{1, 234\},$$
$$\{1, 23, 4\}, \{14, 2, 3\}, \{1, 24, 3\}, \{1, 2, 34\}, \{1, 2, 3, 4\} :$$

Giới thiệu

Phân hoạch nguyên của số tự nhiên n là các tập số nguyên khác 0 cộng lại đúng bằng n. Ví dụ, có 7 phân hoạch nguyên khác nhau của 5 là

$$\{5\}, \{4, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 1, 1\}, \{2, 2, 1\}, \{2, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Một ứng dụng lí thú của phân hoạch nguyên trong mô phỏng phân rã hạt nhân:

- Khi một nguyên tử bị va chạm mạnh các proton và neutron bị phân rã thành một tập các cụm hạt nhỏ hơn.
- Tổng các hạt trong các cụm này phải bằng khối lượng ban đầu của hạt nhân.
- Như vậy, các phân hoạch nguyên của khối lượng ban đầu này biểu diễn mọi cách phân rã nguyên tử.

Nội dung

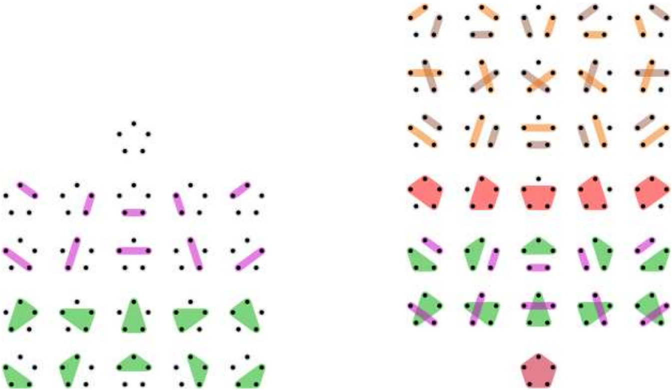
Gọi S là tập có n phần tử. Mỗi phân hoạch của tập S được định nghĩa là tập k tập con $S_1, S_2, \ldots, S_k$ khác rỗng của S đôi một rời nhau và hợp của chúng là S:

$$S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i, \quad S_i \neq \emptyset, S_i \cap S_j = \emptyset, \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, k.$$

Có nhiều bài toán được quy về bài toán phân hoạch tập hợp: tô màu các đỉnh của đồ thị, tìm các thành phần liên thông của đồ thị. . . [1]

[1] S. S. Skiena, *The Algorithm Design Manual*, 2nd ed. Springer-Verlag London, 2008.

Các phân hoạch của 5 phần tử:



Nội dung

Các số Bell

- Số Bell thứ n[2] là số phân hoạch của một tập hợp có n phần tử. Đây chính là số các quan hệ tương đương xác định trên tập này.
- Các số Bell đầu tiên là

$$1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975 \ldots$$

- Gọi B_n là số Bell thứ n. Với $n = 3$, và tập $S = \{a, b, c\}$, ta có $B_3 = 5$ vì có 5 cách phân hoạch

$$\begin{aligned} &\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\} \\ &\{\{a\}, \{b, c\}\} \\ &\{\{b\}, \{a, c\}\} \\ &\{\{c\}, \{a, b\}\} \\ &\{\{a, b, c\}\}. \end{aligned}$$

[2]Được đặt tên theo tên nhà toán học Mỹ Eric Temple Bell (1883–1960).

Các số Bell

- $B_0 = 1$ vì chỉ có 1 phân hoạch của tập rỗng. Mọi tập con của một tập rỗng là tập rỗng và hợp của chúng là tập rỗng. Do đó tập rỗng chính là phân hoạch duy nhất của chính nó.
- Chú ý rằng ở trên ta dùng kí hiệu tập hợp $(\{, \})$ để biểu diễn các phân hoạch nên thứ tự của các phân hoạch cũng như thứ tự của các phần tử trong mỗi phân hoạch là không quan trọng.
- Các cách phân hoạch dưới đây đều tương đương nhau:

$$\{\{b\}, \{a, c\}\}$$
$$\{\{a, c\}, b\}$$
$$\{\{b\}, \{c, a\}\}$$
$$\{\{c, a\}, \{b\}\}.$$

Các số Bell thỏa mãn công thức truy hồi sau:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Ta có thể chứng minh công thức này bằng lập luận như sau:

- B_{n+1} là số cách phân hoạch tập $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Mỗi phân hoạch đều có chứa một tập A nào đó chứa phần tử $n+1$.
- B_{n+1} chính là số cách phân hoạch tập S trong đó có chứa khối A. Nói cách khác, B_{n+1} chính là số cách phân hoạch tập $S \setminus A$.
- Tập $S \setminus A$ có thể có các lực lượng k chạy từ 0 tới n, tương ứng với các trường hợp $A \equiv S$ hoặc $A \equiv \{n+1\}$.
- Với mỗi k ta có $\binom{n}{k}$ cách chọn tập con k phần tử của tập $S \setminus A$ và B_k cách phân hoạch tập con đó nên ta có công thức trên.

Các số Bell thỏa mãn công thức truy hồi sau:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Ta có thể chứng minh công thức này bằng lập luận như sau:

- B_{n+1} là số cách phân hoạch tập $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Mỗi phân hoạch đều có chứa một tập A nào đó chứa phần tử $n+1$.
- B_{n+1} chính là số cách phân hoạch tập S trong đó có chứa khối A. Nói cách khác, B_{n+1} chính là số cách phân hoạch tập $S \setminus A$.
- Tập $S \setminus A$ có thể có các lực lượng k chạy từ 0 tới n, tương ứng với các trường hợp $A \equiv S$ hoặc $A \equiv \{n+1\}$.
- Với mỗi k ta có $\binom{n}{k}$ cách chọn tập con k phần tử của tập $S \setminus A$ và B_k cách phân hoạch tập con đó nên ta có công thức trên.

Các số Bell – Công thức Dobinski

Các số Bell cũng thỏa mãn công thức Dobinski:

$$B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{k!}.$$

Đây chính là moment bậc n của phân phối Poisson với kì vọng bằng 1.
Xem chứng minh các công thức này trong các tài liệu:

- G. Dobinski, "Summirung der reihe $\sum \frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$,," *Grunert's Archiv*, vol. 61, pp. 333–336, 1877.
- G.-C. Rota, "The number of partitions of a set," *American Mathematical Monthly*, vol. 71, no. 5, pp. 498–504, 1964.

Các số Bell cũng thỏa mãn công thức Dobinski:

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Đây chính là moment bậc n của phân phối Poisson với kì vọng bằng 1. Xem chứng minh các công thức này trong các tài liệu:

- G. Dobinski, "Summirung der reihe $\sum \frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$," *Grunert's Archiv*, vol. 61, pp. 333–336, 1877.
- G.-C. Rota, "The number of partitions of a set," *American Mathematical Monthly*, vol. 71, no. 5, pp. 498–504, 1964.

Tam giác Bell

Các số Bell được tính từ lược đồ tam giác như sau:

1				
1	2			
2	3	5		
5	7	10	15	
15	20	27	37	52
...		...		...

Quy tắc điền?

Tam giác Bell

Tam giác này được điền theo lược đồ sau:

- Hàng đầu tiên chứa số 1, là số Bell đầu tiên;
- Với mọi $i \geq 1$, hàng thứ $i+1$ được điền như sau:
    - Chép số cuối cùng của hàng thứ i đặt lên đầu hàng $i+1$;
    - Với mọi $j > 1$, số thứ j của hàng $i+1$ là tổng của số thứ $j-1$ của hàng $i+1$ và số thứ $j-1$ của hàng i.
    - Số cuối cùng của hàng $i+1$ là số Bell của hàng đó.

a	
b	$a+b$

D. Berend và T. Tassa[3] đưa ra các cận sau:

$$B_n < \left(\frac{0.792n}{\ln(n+1)} \right)^n .$$

Ngoài ra, nếu $\epsilon > 0$, thì $\forall n > n_0(\epsilon)$:

$$B_n < \left(\frac{e^{-0.6+\epsilon_n}}{\ln(n+1)} \right)^n ,$$

trong đó

$$n_0(\epsilon) = \max \left\{ e^4, d^{-1}(\epsilon) \right\} ,$$
$$d(x) = \ln\ln(x+1) - \ln\ln x + \frac{1+e^{-1}}{\ln x}.$$

[3] D. Berend and T. Tassa, "Improved bounds on Bell numbers and on moments of sums of random variables," *Probability and Mathematical Statistics*, vol. 30, no. 2, pp. 185–205, 2010.

L. Lovász đưa ra xấp xỉ của các số Bell như sau[4]:

$$B_n \approx \frac{1}{\sqrt{n}}[\lambda(n)]^{n+\frac{1}{2}} e^{\lambda(n)-n-1},$$

với

$$\lambda(n) = \frac{n}{W(n)},$$

trong đó W là hàm Lambert W.[5]
Tham khảo thêm một số tính chất khác của số Bell ở địa chỉ:

`http://mathworld.wolfram.com/BellNumber.html`.

[4] L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*, 2nd ed. Amsterdam, Neitherlands: North-Holland, 1993.

[5] Hàm Lambert W, còn gọi là hàm Omega, là một tập hàm $W(z)$ thoả mãn $z = W(z)e^{W(z)}, \forall z \in \mathbb{Z}$.

Bài tập

Bài tập 1. Viết chương trình tính và hiển thị tam giác Bell.

Bài tập 2. Viết chương trình in ra bảng xấp xỉ cận của các số Bell dựa trên công thức của D. Berend và T. Tassa.

Nội dung

- Các số Stirling[6], xuất hiện trong nhiều bài toán tổ hợp.
- Có hai tập số mang tên ông là các số Stirling loại một và các số Stirling loại hai.
- Các số Stirling loại hai đếm số cách phân hoạch của một tập thành k tập con khác rỗng. Số này thường được kí hiệu là $\left\{ n \atop k \right\}$ hoặc $S(n,k)$.
- Các số này có thể được tính bởi công thức

$$\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n.$$

[6]Được đặt theo tên nhà toán học James Stirling người Scotland, 1692–1770.

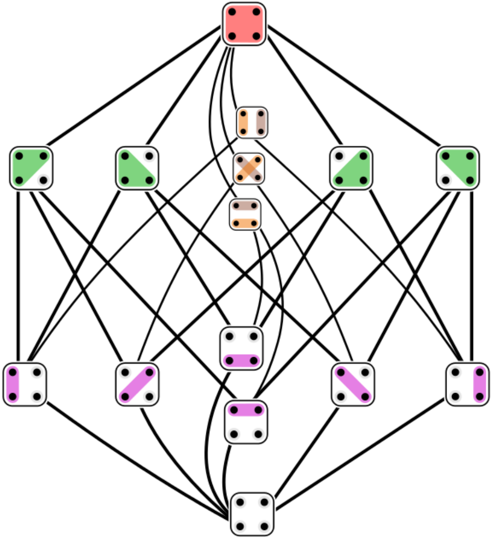
Các số Stirling loại hai

- Các số Stirling[6], xuất hiện trong nhiều bài toán tổ hợp.
- Có hai tập số mang tên ông là các số Stirling loại một và các số Stirling loại hai.
- Các số Stirling loại hai đếm số cách phân hoạch của một tập thành k tập con khác rỗng. Số này thường được kí hiệu là $\left\{ {n \atop k} \right\}$ hoặc $S(n,k)$.
- Các số này có thể được tính bởi công thức

$$\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n.$$

[6]Được đặt theo tên nhà toán học James Stirling người Scotland, 1692–1770.

Sơ đồ Hasse: $S(4,1) = 1, S(4,2) = 7, S(4,3) = 6, S(4,4) = 1$.



Các số Stirling loại hai

- Mỗi số Bell là tổng của các *số Stirling loại hai*:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

- Các số Stirling loại hai thỏa mãn công thức truy hồi sau:

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = k \left\{ {n \atop k} \right\} + \left\{ {n \atop k-1} \right\},$$

với $k > 0$ và điều kiện ban đầu là

$$\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1, \quad \left\{ {n \atop 0} \right\} = \left\{ {0 \atop n} \right\} = 0$$

với $n > 0$.

- Mỗi số Bell là tổng của các *số Stirling loại hai*:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

- Các số Stirling loại hai thỏa mãn công thức truy hồi sau:

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = k \left\{ {n \atop k} \right\} + \left\{ {n \atop k-1} \right\},$$

với $k > 0$ và điều kiện ban đầu là

$$\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1, \quad \left\{ {n \atop 0} \right\} = \left\{ {0 \atop n} \right\} = 0$$

với $n > 0$.

Các số Stirling loại hai

Chứng minh công thức này bằng lập luận: Mỗi phân hoạch của tập $n+1$ phần tử thành k tập con khác rỗng có hai khả năng, hoặc chứa tập con $\{n+1\}$ hoặc không chứa.

- Số cách phân hoạch trong đó có chứa tập con $\{n+1\}$ là $\left\{ {n \atop k-1} \right\}$ vì ta phân hoạch n phần tử còn lại thành $k-1$ tập con.
- Số cách phân hoạch trong đó không chứa tập con $\{n+1\}$ là $k\left\{ {n \atop k} \right\}$ vì ta phân hoạch mọi phần tử khác $n+1$ thành k tập con và sau đó có k cách để chèn phần tử $n+1$ vào một trong các tập con này.
- Tổng của hai giá trị ứng với hai khả năng trên cho ta kết quả cần chứng minh.

$$\boxed{\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = k\left\{ {n \atop k} \right\} + \left\{ {n \atop k-1} \right\}.}$$

Từ công thức truy hồi này, ta có thể tính các số Stirling dựa vào "tam giác Stirling":

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Bài tập 3. Viết chương trình tính và hiển thị tam giác Stirling loại hai.

Một số đẳng thức

Ta có:

$$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}.$$

Dễ thấy đẳng thức này đúng vì việc phân chia một tập n phần tử thành $n-1$ tập con chính là việc phân chia tập đó thành một tập có 2 hai phần tử và $n-2$ tập con khác.
Vì vậy, số cách phân chia chính là số cách chọn 2 phần tử trong số n phần tử.

Ta có:

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1.$$

Công thức này được lí giải như sau:

- Mỗi cách phân hoạch tập $\mathcal{X}$ gồm n phần tử thành hai tập con $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ thì hai tập con đó là các tập bù của nhau, tức là $\mathcal{A} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}$.
- Có 2^n cặp tập $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *có thứ tự*, bao gồm cả hai cặp $(\emptyset, \mathcal{B})$ và $(\mathcal{A}, \emptyset)$. Như vậy, nếu không tính hai cặp này thì có $2^n - 2$ cặp tập bù nhau có thứ tự.
- Vì trong phân hoạch ta không xét thứ tự các cặp nên số cặp không có thứ tự là $(2^n - 2)/2 = 2^{n-1} - 1$.

Tham khảo thêm

Các số Stirling loại hai xuất hiện trong nhiều bài toán tổ hợp và có ứng dụng trong lí thuyết thống kê, xem thêm một số ứng dụng của chúng trong

- A. H. Joarder and M. Mahmood, "An inductive derivation of Stirling numbers of the second kind and their applications in statistics," *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, vol. 1, no. 2, pp. 151–157, 1997.
- P. L. Butzer and M. Hauss, "Stirling functions of the first and second kinds; some new applications," in *Israel Mathematical Conference Proceedings: Approximation, Interpolation, and Summability, in Honor of Amnon Jakimovski on his Sixty-Fifth Birthday*, Ramat Gan, Israel, 1991, pp. 89–108.

Nội dung

Các số Stirling loại một

- Các số Stirling (không dấu) loại một, kí hiệu bởi $\left[{n \atop k}\right]$ hoặc $s(n,k)$, là số hoán vị của n phần tử với k chu trình rời nhau.
- Chu trình của mỗi hoán vị?

Định nghĩa (Định nghĩa số 1 về hoán vị vòng tròn)

Mỗi hoán vị σ trên tập S gồm k phần tử được gọi là một *hoán vị vòng tròn với độ lệch* t khi và chỉ khi có thể sắp các phần tử của tập S theo thứ tự $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ sao cho

$$\sigma(x_i) = x_{i+t}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k-t;$$
$$\sigma(x_i) = x_{i+t-k}, \quad \forall i = k-t+1, k-t+2, \ldots, k.$$

Các số Stirling loại một

- Các số Stirling (không dấu) loại một, kí hiệu bởi $\left[{n \atop k}\right]$ hoặc $s(n,k)$, là số hoán vị của n phần tử với k chu trình rời nhau.
- Chu trình của mỗi hoán vị?

Định nghĩa (Định nghĩa số 1 về hoán vị vòng tròn)

Mỗi hoán vị σ trên tập S gồm k phần tử được gọi là một *hoán vị vòng tròn với độ lệch t* khi và chỉ khi có thể sắp các phần tử của tập S theo thứ tự $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ sao cho

$$\begin{aligned} \sigma(x_i) &= x_{i+t}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k-t; \\ \sigma(x_i) &= x_{i+t-k}, \quad \forall i = k-t+1, k-t+2, \ldots, k. \end{aligned}$$

Hoán vị vòng tròn

Ví dụ, xét hoán vị

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ta có thể sắp lại hoán vị này theo thứ tự sau:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tức là ta sử dụng thứ tự $x_6 = 7, x_7 = 6$ và $x_i = i, \forall i \neq 6, 7$. Ta thấy hoán vị này là hoán vị vòng tròn với độ lệch $t = 2$ như sơ đồ sau:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 3 \arrow[d] & 2 \arrow[r] & 4 \arrow[d] \\ 6 \arrow[u] & 5 \arrow[l] & 8 \arrow[u] & 7 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Ví dụ, xét hoán vị

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ta có thể sắp lại hoán vị này theo thứ tự sau:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tức là ta sử dụng thứ tự $x_6 = 7, x_7 = 6$ và $x_i = i, \forall i \neq 6, 7$. Ta thấy hoán vị này là hoán vị vòng tròn với độ lệch $t = 2$ như sơ đồ sau:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 3 \arrow[d] & 2 \arrow[r] & 4 \arrow[d] \\ 6 \arrow[u] & 5 \arrow[l] & 8 \arrow[u] & 7 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Hoán vị vòng tròn

Ta có

$$\sigma(x_1) = \sigma(1) = 3 = x_3$$
$$\sigma(x_2) = \sigma(2) = 4 = x_4$$
$$\sigma(x_3) = \sigma(3) = 5 = x_5$$
$$\sigma(x_4) = \sigma(4) = 7 = x_6$$
$$\sigma(x_5) = \sigma(5) = 6 = x_7$$
$$\sigma(x_6) = \sigma(7) = 8 = x_8$$

Và

$$\sigma(x_7) = \sigma(6) = 1 = x_1$$
$$\sigma(x_8) = \sigma(8) = 2 = x_2$$

Ta có hai *chu trình* kí hiệu là (1356) và (2478).

Hoán vị vòng tròn

- Chú ý rằng nếu σ là một hoán vị vòng tròn với độ lệch t thì nó có thể được xây dựng với đúng s chu trình có độ dài bằng nhau, trong đó s là ước chung lớn nhất của k và t.
- Ngoài định nghĩa cơ bản trên, ta còn gặp một số định nghĩa khác về hoán vị vòng tròn. Các định nghĩa này tuy hơi khác nhau nhưng cũng có liên quan tới nhau.

Hoán vị vòng tròn

Định nghĩa (Định nghĩa số 2 về hoán vị vòng tròn)

Một hoán vị được gọi là *hoán vị vòng tròn* khi và chỉ khi nó có thể được xây dựng với chỉ một chu trình.

Theo định nghĩa này thì mỗi hoán vị vòng tròn thỏa mãn định nghĩa số 1 và ước chung lớn nhất của k và t là 1.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hoán vị này có chu trình duy nhất là (14625837).

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 2 \arrow[d] \\ 7 \arrow[u] & 3 \arrow[l] & 8 \arrow[l] & 5 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Định nghĩa (Định nghĩa số 2 về hoán vị vòng tròn)

Một hoán vị được gọi là *hoán vị vòng tròn* khi và chỉ khi nó có thể được xây dựng với chỉ một chu trình.

Theo định nghĩa này thì mỗi hoán vị vòng tròn thỏa mãn định nghĩa số 1 và ước chung lớn nhất của k và t là 1.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hoán vị này có chu trình duy nhất là (14625837).

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 2 \\ \uparrow & & & & & & \downarrow \\ 7 & \longleftarrow & 3 & \longleftarrow & 8 & \longleftarrow & 5 \end{array}$$

Định nghĩa (Định nghĩa số 3 về hoán vị vòng tròn)

Một hoán vị được gọi là *hoán vị vòng tròn* khi và chỉ khi chỉ nó chỉ có một chu trình có độ dài lớn hơn 1.

Ví dụ, hoán vị sau là một hoán vị vòng tròn:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 3 & 7 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hoán vị này có các chu trình $(146837)(2)(5)$.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 6 \arrow[d] & & 2 \arrow[loop above] & & 5 \arrow[loop above] \\ 7 \arrow[u] & 3 \arrow[l] & 8 \arrow[l] & & & & \end{tikzcd}$$

Hoán vị vòng tròn

Định nghĩa (Định nghĩa số 3 về hoán vị vòng tròn)

Một hoán vị được gọi là *hoán vị vòng tròn* khi và chỉ khi chỉ nó chỉ có một chu trình có độ dài lớn hơn 1.

Ví dụ, hoán vị sau là một hoán vị vòng tròn:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 3 & 7 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hoán vị này có các chu trình $(146837)(2)(5)$.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 6 \arrow[d] \\ 7 \arrow[u] & 3 \arrow[l] & 8 \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 2 \arrow[loop above] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 5 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Các số Stirling loại một

Định nghĩa

Các số Stirling (không dấu) loại một, kí hiệu bởi $\left[{n \atop k}\right]$ hoặc $s(n,k)$, là số hoán vị của n phần tử với k chu trình rời nhau.

Ví dụ, với $n = 3$, ta có 6 hoán vị, trong đó có

- Một hoán vị với ba chu trình là $123 = (1)(2)(3)$;
- Ba hoán vị với hai chu trình là $132 = (1)(23)$, $213 = (3)(12)$, $321 = (2)(13)$;
- Hai hoán vị với một chu trình là $312 = (123)$, $231 = (132)$.

Do vậy,

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Các số Stirling loại một

Các số Stirling loại một là các hệ số trong khai triển "giai thừa tăng" như sau:

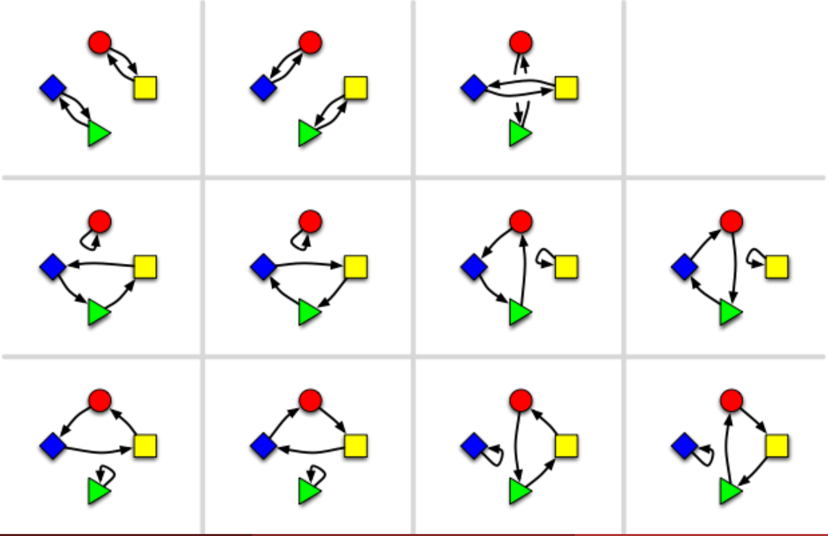
$$x^{(n)} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Ví dụ,

$$x^{(3)} = x(x+1)(x+2) = 1.x^3 + 3.x^2 + 2.x^1,$$

với các hệ số tương ứng với số các chu trình ở ví dụ trên.

Các hoán vị của 4 phần tử có hai chu trình:



Có 11 hoán vị nên $s(4,2) = 11$. Trong đó có

- Ba hoán vị dạng $(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)$, mỗi hoán vị có hai chu trình độ dài 2;
- Tám hoán vị dạng $(\bullet\bullet\bullet)(\bullet)$, một chu trình độ dài 3, một chu trình độ dài 1.

Các số Stirling loại một thỏa mãn công thức truy hồi sau:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix},$$

với $k > 0$ và các điều kiện ban đầu:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = 0, \quad \forall n > 0.$$

Ta có thể chứng minh công thức này bằng lập luận.

Xét việc lập một hoán vị của $n+1$ phần tử từ n phần tử bằng cách thêm vào một phần tử sao cho hoán vị đó có k chu trình. Có hai cách lập:

- Lập một chu trình đơn chỉ gồm phần tử mới thêm vào. Khi đó còn lại $k-1$ chu trình lập từ n phần tử, có $\left[{n \atop k-1}\right]$ chu trình.
- Chèn phần tử mới đó vào một trong các chu trình đã có. Xét hoán vị bất kì của n phần tử $a_1 a_2 \cdots a_n$ trong đó có k chu trình

$$\underbrace{(a_1 \cdots a_{j_1})(a_{j_1+1} \cdots a_{j_2}) \cdots (a_{j_{k-1}+1} \cdots a_n)}_{k \text{ chu trình}}.$$

  Để lập một hoán vị mới của $n+1$ phần tử với k chu trình, ta cần chèn phần tử mới đó vào một trong k chu trình này. Có n cách chèn phần tử mới vào trong dãy n phần tử đó. Từ đó có $n\left[{n \atop k}\right]$ cách.
- Tổng của hai giá trị ứng với hai khả năng trên cho ta kết quả cần chứng minh.

Tam giác Stirling loại một

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

$$\boxed{\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}.}$$

Bài tập

Bài tập 4. Viết chương trình tính và hiển thị tam giác Stirling loại một.

Bài tập 5. Viết chương trình đếm số chu trình của một hoán vị. Một số ví dụ để kiểm tra chương trình:

- Hoán vị sau có ba chu trình là (146837)(2)(5):

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 3 & 7 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Hoán vị sau có hai chu trình là (1356)(2478):

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Hoán vị sau có một chu trình là (14625837):

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nội dung

Bài toán

Xét tập S_n gồm n phần tử, $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Hãy sinh mọi phân hoạch của tập S.

Dễ thấy, bài toán sinh các phân hoạch có cấu trúc đệ quy. Hãy tìm cấu trúc này?

Sinh các phân hoạch tập hợp

- Nếu ta đã xây dựng được một phân hoạch $\pi_{n-1} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ của tập gồm $n-1$ phần tử $S_{n-1} = \{1, 2, \dots, n-1\}$ thì ta dễ dàng tìm được mọi phân hoạch của tập S_n. Đó là các phân hoạch:

$$\begin{cases} \pi_n^1 & = \{S_1 \cup \{n\}, S_2, \dots, S_k\} \\ \pi_n^2 & = \{S_1, S_2 \cup \{n\}, \dots, S_k\} \\ \dots & \dots \\ \pi_n^k & = \{S_1, S_2, \dots, S_k \cup \{n\}\} \\ \pi_n^{k+1} & = \{S_1, S_2, \dots, S_k, \{n\}\} \end{cases} \tag{*}$$

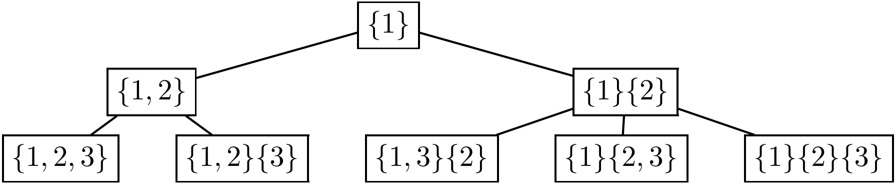
- Các phân hoạch liên tiếp trong danh sách trên khác nhau chỉ ở hai tập con dựa vào hai thao tác: bỏ phần tử n ra khỏi một tập và đưa nó vào tập ngay sau. (Tập nằm sau tập cuối cùng là tập rỗng).

Từ đó, ta có thể tìm các phân hoạch của tập S_n từ các phân hoạch của tập S_{n-1} như sau:

- Giả sử $\mathcal{L}_{n-1}$ là tập tất cả các phân hoạch của tập S_{n-1}.
- Với mỗi phân hoạch $\pi_{n-1} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, ta xây dựng $k+1$ phân hoạch của S_n như trong (*) và đưa vào $\mathcal{L}_n$:

$$\mathcal{L}_n \leftarrow \mathcal{L}_n \cup \pi_n^j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k, k+1.$$

Ví dụ, sơ đồ sinh các phân hoạch của tập gồm ba phần tử $\{1, 2, 3\}$:



Bài tập 6. Hãy vẽ sơ đồ sinh các phân hoạch của tập gồm bốn phần tử $\{1, 2, 3, 4\}$.

Bài tập 7. Viết chương trình sinh các phân hoạch của tập gồm n phần tử.

Cấu trúc dữ liệu

Nếu sử dụng ngôn ngữ lập trình C, ta cần cài đặt kiểu cấu trúc dữ liệu tập hợp trong đó hỗ trợ các phép toán tìm phần tử, thêm vào, bớt phần tử khỏi tập hợp, phép hợp của hai tập hợp.

Các kiểu dữ liệu thông dụng:

- quick-find
- quick-union

Nếu sử dụng ngôn ngữ lập trình Java:

- Sử dụng `Set<Integer>` để biểu diễn một tập con trong phân hoạch, ví dụ tập $\{1\}$ hoặc tập $\{1, 2\}$.
- Sử dụng `List<Set<Integer> >` để biểu diễn một phân hoạch, ví dụ phân hoạch $\{1, 3\}, \{2\}$ hoặc $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.
- Sử dụng `List<List<Set<Integer> > >` để biểu diễn danh sách các phân hoạch.

Cấu trúc dữ liệu

Nếu sử dụng ngôn ngữ lập trình C, ta cần cài đặt kiểu cấu trúc dữ liệu tập hợp trong đó hỗ trợ các phép toán tìm phần tử, thêm vào, bớt phần tử khỏi tập hợp, phép hợp của hai tập hợp.
Các kiểu dữ liệu thông dụng:

- quick-find
- quick-union

Nếu sử dụng ngôn ngữ lập trình Java:

- Sử dụng `Set<Integer>` để biểu diễn một tập con trong phân hoạch, ví dụ tập $\{1\}$ hoặc tập $\{1, 2\}$.
- Sử dụng `List<Set<Integer> >` để biểu diễn một phân hoạch, ví dụ phân hoạch $\{1, 3\}, \{2\}$ hoặc $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.
- Sử dụng `List<List<Set<Integer> > >` để biểu diễn danh sách các phân hoạch.

Nội dung

Phân hoạch nguyên

Nhắc lại:

- Phân hoạch nguyên là việc phân hoạch một số tự nhiên n thành tổng của các số nguyên dương.
- Hai tổng nếu chỉ khác nhau bởi thứ tự các số hạng thì được coi là như nhau.

Ta sử dụng kí hiệu tập hợp để biểu diễn các phân hoạch nguyên: nếu $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$ thì $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ là một phân hoạch nguyên của n. Ví dụ:

- Có năm phân hoạch nguyên của số 4 là:

$$\{4\}, \{3,1\}, \{2,2\}, \{2,1,1\}, \{1,1,1,1\}.$$

- Có bảy phân hoạch nguyên của số 5 là:

$$\{5\}, \{4,1\}, \{3,2\}, \{3,1,1\}, \{2,2,1\}, \{2,1,1,1\}, \{1,1,1,1,1\}.$$

Nhắc lại:

- Phân hoạch nguyên là việc phân hoạch một số tự nhiên n thành tổng của các số nguyên dương.
- Hai tổng nếu chỉ khác nhau bởi thứ tự các số hạng thì được coi là như nhau.

Ta sử dụng kí hiệu tập hợp để biểu diễn các phân hoạch nguyên: nếu $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$ thì $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ là một phân hoạch nguyên của n. Ví dụ:

- Có năm phân hoạch nguyên của số 4 là:

$$\{4\}, \{3, 1\}, \{2, 2\}, \{2, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}.$$

- Có bảy phân hoạch nguyên của số 5 là:

$$\{5\}, \{4, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 1, 1\}, \{2, 2, 1\}, \{2, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Phân hoạch hạn chế:

- Các số hạng của phân hoạch bị hạn chế theo một ràng buộc nào đó.
- Chẳng hạn ràng buộc các số hạng phải là số lẻ, không số hạng nào xuất hiện quá một lần.

Trong số 22 phân hoạch của số 8, chỉ có sáu phân hoạch chứa các số hạng lẻ:

$$\begin{aligned} 8 &= 7+1 \\ &= 5+3 \\ &= 5+1+1+1 \\ &= 3+3+1+1 \\ &= 3+1+1+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1+1+1+1. \end{aligned}$$

Cũng có 6 phân hoạch của số 8 trong đó các số hạng phân biệt:

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \\ &= 7 + 1 \\ &= 6 + 2 \\ &= 5 + 3 \\ &= 5 + 2 + 1 \\ &= 4 + 3 + 1. \end{aligned}$$

Năm 1748 Leonard Euler đã chứng minh rằng: *với mọi số tự nhiên n, số cách phân hoạch nó thành các thành phần lẻ và số cách phân hoạch nó thành các số hạng phân biệt là bằng nhau.*[7]

[7] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*. Cambridge University Press, 1976.

Một số kết quả khác liên quan tới phân hoạch hạn chế:

- Số cách phân hoạch n trong đó số hạng lớn nhất là m bằng số cách phân hoạch của n thành m số hạng.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều nhỏ hơn hoặc bằng m bằng số cách phân hoạch n thành không quá m số hạng.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều giống nhau bằng số ước số của n.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều là 1 hoặc 2 (hoặc một cách tương đương là số cách phân hoạch n thành 1 hoặc 2 số hạng) là $\left[\frac{n}{2}+1\right]$.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều là 1, 2 hoặc 3 (hoặc một cách tương đương là số cách phân hoạch n thành 1, 2 hoặc 3 số hạng) là số nguyên gần số $(n+3)^2/12$ nhất.

Tham khảo: G. H. Hardy, *Some Famous Problems of the Theory of Numbers*. Clarendon Press, 1920.

Phân hoạch nguyên

Một số kết quả khác liên quan tới phân hoạch hạn chế:

- Số cách phân hoạch n trong đó số hạng lớn nhất là m bằng số cách phân hoạch của n thành m số hạng.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều nhỏ hơn hoặc bằng m bằng số cách phân hoạch n thành không quá m số hạng.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều giống nhau bằng số ước số của n.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều là 1 hoặc 2 (hoặc một cách tương đương là số cách phân hoạch n thành 1 hoặc 2 số hạng) là $\left[\frac{n}{2}+1\right]$.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều là 1, 2 hoặc 3 (hoặc một cách tương đương là số cách phân hoạch n thành 1, 2 hoặc 3 số hạng) là số nguyên gần số $(n+3)^2/12$ nhất.

Tham khảo: G. H. Hardy, *Some Famous Problems of the Theory of Numbers*. Clarendon Press, 1920.

Phân hoạch nguyên

Một số kết quả khác liên quan tới phân hoạch hạn chế:

- Số cách phân hoạch n trong đó số hạng lớn nhất là m bằng số cách phân hoạch của n thành m số hạng.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều nhỏ hơn hoặc bằng m bằng số cách phân hoạch n thành không quá m số hạng.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều giống nhau bằng số ước số của n.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều là 1 hoặc 2 (hoặc một cách tương đương là số cách phân hoạch n thành 1 hoặc 2 số hạng) là $\left[\frac{n}{2}+1\right]$.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều là 1, 2 hoặc 3 (hoặc một cách tương đương là số cách phân hoạch n thành 1, 2 hoặc 3 số hạng) là số nguyên gần số $(n+3)^2/12$ nhất.

Tham khảo: G. H. Hardy, *Some Famous Problems of the Theory of Numbers*. Clarendon Press, 1920.

Một số kết quả khác liên quan tới phân hoạch hạn chế:

- Số cách phân hoạch n trong đó số hạng lớn nhất là m bằng số cách phân hoạch của n thành m số hạng.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều nhỏ hơn hoặc bằng m bằng số cách phân hoạch n thành không quá m số hạng.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều giống nhau bằng số ước số của n.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều là 1 hoặc 2 (hoặc một cách tương đương là số cách phân hoạch n thành 1 hoặc 2 số hạng) là $\left[\frac{n}{2}+1\right]$.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều là 1, 2 hoặc 3 (hoặc một cách tương đương là số cách phân hoạch n thành 1, 2 hoặc 3 số hạng) là số nguyên gần số $(n+3)^2/12$ nhất.

Tham khảo: G. H. Hardy, *Some Famous Problems of the Theory of Numbers*. Clarendon Press, 1920.

Một số kết quả khác liên quan tới phân hoạch hạn chế:

- Số cách phân hoạch n trong đó số hạng lớn nhất là m bằng số cách phân hoạch của n thành m số hạng.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều nhỏ hơn hoặc bằng m bằng số cách phân hoạch n thành không quá m số hạng.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều giống nhau bằng số ước số của n.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều là 1 hoặc 2 (hoặc một cách tương đương là số cách phân hoạch n thành 1 hoặc 2 số hạng) là $\left[\frac{n}{2}+1\right]$.
- Số cách phân hoạch n trong đó mọi số hạng đều là 1, 2 hoặc 3 (hoặc một cách tương đương là số cách phân hoạch n thành 1, 2 hoặc 3 số hạng) là số nguyên gần số $(n+3)^2/12$ nhất.

Tham khảo: G. H. Hardy, *Some Famous Problems of the Theory of Numbers*. Clarendon Press, 1920.

Nội dung

Hàm phân hoạch

Gọi $p(n)$ là hàm đếm số lượng phân hoạch nguyên của số n.

- Quy ước $p(n) = 0, \forall n < 0$ và $p(0) = 1$.
- Một số giá trị đầu tiên của $p(n)$ là

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	$\cdots$

Giá trị của $p(n)$ đã được tính toán với n lớn, ví dụ:

- $p(100) = 190,569,292$
- $p(1000) \approx 2.4 \times 10^{31}$.

Tham khảo thêm trang web "*The Online Enclopedia of Integer Sequence*": `http://oeis.org/A070177`.

Hàm phân hoạch

Gọi $p(n)$ là hàm đếm số lượng phân hoạch nguyên của số n.

- Quy ước $p(n) = 0, \forall n < 0$ và $p(0) = 1$.
- Một số giá trị đầu tiên của $p(n)$ là

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	$\cdots$

Giá trị của $p(n)$ đã được tính toán với n lớn, ví dụ:

- $p(100) = 190,569,292$
- $p(1000) \approx 2.4 \times 10^{31}$.

Tham khảo thêm trang web "*The Online Enclopedia of Integer Sequence*": `http://oeis.org/A070177`.

Hàm phân hoạch

Một bài toán (khó) đặt ra là tìm phân bố cũng như tính chất nguyên tố của số $p(n)$. Tham khảo thêm:

- S. Ahlgren and M. Boylan, "Arithmetic properties of the partition function," *Invent. Math.*, vol. 153, no. 3, pp. 487–502, 2003.
- S. Ahlgren, "Distribution of the partition function modulo composite integers m," *Math. Ann.*, vol. 318, no. 4, pp. 795–803, 2000.

Hiện tại (tháng 8/2012), số nguyên tố lớn nhất tìm được là $p(82,352,631)$ gồm $10,101$ chữ số thập phân (tìm được vào tháng 1/2012).

Tham khảo thêm trang web

`http://primes.utm.edu/top20/page.php?id=54`

Hàm phân hoạch

Một bài toán (khó) đặt ra là tìm phân bố cũng như tính chất nguyên tố của số $p(n)$. Tham khảo thêm:

- S. Ahlgren and M. Boylan, "Arithmetic properties of the partition function," *Invent. Math.*, vol. 153, no. 3, pp. 487–502, 2003.
- S. Ahlgren, "Distribution of the partition function modulo composite integers m," *Math. Ann.*, vol. 318, no. 4, pp. 795–803, 2000.

Hiện tại (tháng 8/2012), số nguyên tố lớn nhất tìm được là $p(82,352,631)$ gồm $10,101$ chữ số thập phân (tìm được vào tháng 1/2012).

Tham khảo thêm trang web

http://primes.utm.edu/top20/page.php?id=54

Một bài toán (khó) đặt ra là tìm phân bố cũng như tính chất nguyên tố của số $p(n)$. Tham khảo thêm:

- S. Ahlgren and M. Boylan, "Arithmetic properties of the partition function," *Invent. Math.*, vol. 153, no. 3, pp. 487–502, 2003.
- S. Ahlgren, "Distribution of the partition function modulo composite integers m," *Math. Ann.*, vol. 318, no. 4, pp. 795–803, 2000.

Hiện tại (tháng 8/2012), số nguyên tố lớn nhất tìm được là $p(82,352,631)$ gồm $10,101$ chữ số thập phân (tìm được vào tháng 1/2012).
Tham khảo thêm trang web

`http://primes.utm.edu/top20/page.php?id=54`

Hàm phân hoạch

- Biểu thức tiệm cận của $p(n)$ được tính bằng công thức

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \text{ khi } n \to \infty.$$

  Công thức này được chứng minh bởi Hardy và Ramanujan năm 1918 và Uspensky năm 1920 (độc lập nhau).

- Năm 1942, Paul Erdös đưa ra cách chứng minh sơ cấp cho công thức tiệm cận trên.[8]
- Với $n = 1000$, công thức tiệm cận cho kết quả $p(1000) \approx 2.4402 \times 10^{31}$, khá gần với giá trị đúng của $p(n)$ (lớn hơn giá trị đúng khoảng 1.415%.

[8] P. Erdös, "On an elementary proof of some asymptotic formulas in the theory of partitions," *Ann. Math.*, vol. 43, no. 2, pp. 437–450, 1942.

Hàm phân hoạch

- Biểu thức tiệm cận của $p(n)$ được tính bằng công thức

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \text{ khi } n \to \infty.$$

  Công thức này được chứng minh bởi Hardy và Ramanujan năm 1918 và Uspensky năm 1920 (độc lập nhau).

- Năm 1942, Paul Erdös đưa ra cách chứng minh sơ cấp cho công thức tiệm cận trên.[8]

- Với $n = 1000$, công thức tiệm cận cho kết quả $p(1000) \approx 2.4402 \times 10^{31}$, khá gần với giá trị đúng của $p(n)$ (lớn hơn giá trị đúng khoảng 1.415%.

[8] P. Erdös, "On an elementary proof of some asymptotic formulas in the theory of partitions," *Ann. Math.*, vol. 43, no. 2, pp. 437–450, 1942.

- Biểu thức tiệm cận của $p(n)$ được tính bằng công thức

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \text{ khi } n \to \infty.$$

  Công thức này được chứng minh bởi Hardy và Ramanujan năm 1918 và Uspensky năm 1920 (độc lập nhau).

- Năm 1942, Paul Erdös đưa ra cách chứng minh sơ cấp cho công thức tiệm cận trên.[8]
- Với $n = 1000$, công thức tiệm cận cho kết quả $p(1000) \approx 2.4402 \times 10^{31}$, khá gần với giá trị đúng của $p(n)$ (lớn hơn giá trị đúng khoảng 1.415%.

[8] P. Erdös, "On an elementary proof of some asymptotic formulas in the theory of partitions," *Ann. Math.*, vol. 43, no. 2, pp. 437–450, 1942.

Hàm phân hoạch

Gọi $p(n, k)$ là số cách phân hoạch n trong đó số hạng lớn nhất là k. Vì $p(n, k)$ cũng chính là số cách phân hoạch n thành k số hạng nên ta có

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n, k).$$

Dễ thấy ta có thể tính $p(n, k)$ theo công thức truy hồi:

$$\boxed{p(n, k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k),}$$

với các điều kiện ban đầu là $p(n, 0) = 0$ và $p(n, n) = 1$.

Chứng minh: mỗi phân hoạch của n trong đó số hạng lớn nhất là k chỉ có một trong hai khả năng:

- Phân hoạch đó chứa đúng một số hạng bằng k; hoặc
- Phân hoạch đó chứa nhiều hơn một số hạng bằng k.

Đếm số phân hoạch thuộc từng khả năng:

- Số phân hoạch thuộc khả năng thứ nhất là $p(n-1, k-1)$.
- Số phân hoạch thuộc khả năng thứ hai là $p(n-k, k)$.

Do đó ta có công thức cần chứng minh:

$$\boxed{p(n,k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k),}$$

Chứng minh: mỗi phân hoạch của n trong đó số hạng lớn nhất là k chỉ có một trong hai khả năng:

- Phân hoạch đó chứa đúng một số hạng bằng k; hoặc
- Phân hoạch đó chứa nhiều hơn một số hạng bằng k.

Đếm số phân hoạch thuộc từng khả năng:

- Số phân hoạch thuộc khả năng thứ nhất là $p(n-1, k-1)$.
- Số phân hoạch thuộc khả năng thứ hai là $p(n-k, k)$.

Do đó ta có công thức cần chứng minh:

$$\boxed{p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k),}$$

Hàm phân hoạch

Chứng minh: mỗi phân hoạch của n trong đó số hạng lớn nhất là k chỉ có một trong hai khả năng:

- Phân hoạch đó chứa đúng một số hạng bằng k; hoặc
- Phân hoạch đó chứa nhiều hơn một số hạng bằng k.

Đếm số phân hoạch thuộc từng khả năng:

- Số phân hoạch thuộc khả năng thứ nhất là $p(n-1, k-1)$.
- Số phân hoạch thuộc khả năng thứ hai là $p(n-k, k)$.

Do đó ta có công thức cần chứng minh:

$$\boxed{p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k),}$$

Hàm phân hoạch

Chứng minh: mỗi phân hoạch của n trong đó số hạng lớn nhất là k chỉ có một trong hai khả năng:

- Phân hoạch đó chứa đúng một số hạng bằng k; hoặc
- Phân hoạch đó chứa nhiều hơn một số hạng bằng k.

Đếm số phân hoạch thuộc từng khả năng:

- Số phân hoạch thuộc khả năng thứ nhất là $p(n-1, k-1)$.
- Số phân hoạch thuộc khả năng thứ hai là $p(n-k, k)$.

Do đó ta có công thức cần chứng minh:

$$\boxed{p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k),}$$

Hàm phân hoạch

Chứng minh: mỗi phân hoạch của n trong đó số hạng lớn nhất là k chỉ có một trong hai khả năng:

- Phân hoạch đó chứa đúng một số hạng bằng k; hoặc
- Phân hoạch đó chứa nhiều hơn một số hạng bằng k.

Đếm số phân hoạch thuộc từng khả năng:

- Số phân hoạch thuộc khả năng thứ nhất là $p(n-1, k-1)$.
- Số phân hoạch thuộc khả năng thứ hai là $p(n-k, k)$.

Do đó ta có công thức cần chứng minh:

$$\boxed{p(n,k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k),}$$

Hàm phân hoạch

Chứng minh: mỗi phân hoạch của n trong đó số hạng lớn nhất là k chỉ có một trong hai khả năng:

- Phân hoạch đó chứa đúng một số hạng bằng k; hoặc
- Phân hoạch đó chứa nhiều hơn một số hạng bằng k.

Đếm số phân hoạch thuộc từng khả năng:

- Số phân hoạch thuộc khả năng thứ nhất là $p(n-1, k-1)$.
- Số phân hoạch thuộc khả năng thứ hai là $p(n-k, k)$.

Do đó ta có công thức cần chứng minh:

$$\boxed{p(n,k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k),}$$

Hiện vẫn còn nhiều bài toán chưa có lời giải, ví dụ:

- Tìm một tiêu chuẩn đơn giản để biết $p(n)$ là số chẵn hay là số lẻ. Mặc dù ta đã có thể tính được $p(n)$ với n lớn hàng tỉ nhưng vẫn chưa có lược đồ nào cho quyết định tính chẵn lẻ của $p(n)$.
- Tìm các phương pháp thiết lập các song ánh để đếm các đại lượng hoặc chứng minh các đẳng thức liên quan tới phân hoạch nguyên.[9]

[9] H. S. Wilf, "Lectures on integer partitions," University of Pennsylvania, Tech. Rep., 2000.

Bài tập 8. Viết chương trình in ra bảng xấp xỉ cận của các số $p(n)$ dựa trên công thức của Hardy và Ramanujan.

Bài tập 9. Viết chương trình tính các số $p(n)$ dựa vào công thức truy hồi.

Nội dung

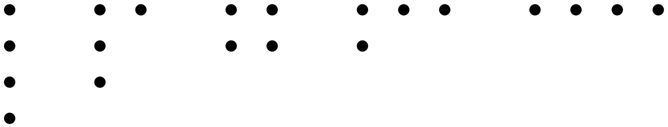
Lược đồ Ferrers

Ferrers[10] đã đưa ra lược đồ biểu diễn phân hoạch nguyên sử dụng các dấu chấm. Ví dụ, phân hoạch $6+4+3+1$ của số 14 được biểu diễn bằng lược đồ Ferrers như sau:

6	4	3	1
●	●	●	●
●	●	●	
●	●	●	
●	●		
●			
●			

[10] Nhà toán học người Anh, Norman Macleod Ferrers (1829–1903).

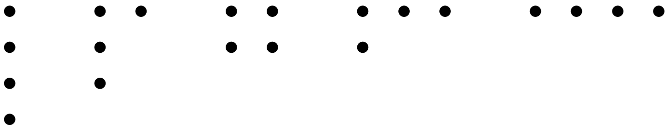
Tương tự, các lược đồ ứng với 5 phân hoạch của số 4 như sau:



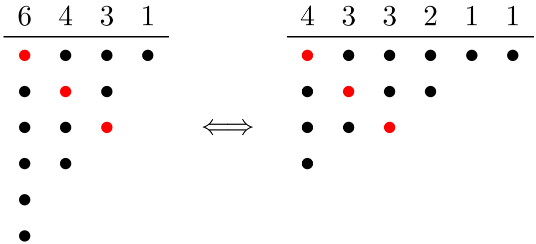
Nếu ta thực hiện phép chuyển vị của phân hoạch số 14 ở trên thì thu được phân hoạch khác như sau:

Lược đồ Ferrers

Tương tự, các lược đồ ứng với 5 phân hoạch của số 4 như sau:



Nếu ta thực hiện phép chuyển vị của phân hoạch số 14 ở trên thì thu được phân hoạch khác như sau:



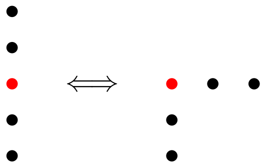
- Khi thực hiện mỗi phép chuyển vị của lược đồ ứng với một phân hoạch, ta thu được một phân hoạch khác, phân hoạch đó được gọi là *phân hoạch đối ngẫu* của phân hoạch ban đầu.
- Trong ví dụ trên, ta có cặp phân hoạch đối ngẫu là $6+4+3+1$ và $4+3+3+2+1+1$.
- Nếu phân hoạch đối ngẫu với chính nó thì ta gọi đó là phân hoạch *tự đối ngẫu*, ví dụ $2+2$ là phân hoạch tự đối ngẫu của 4.

Lược đồ Ferrers

- Ta có khẳng định sau: "*Số phân hoạch tự đối ngẫu bằng số phân hoạch trong đó các số hạng là lẻ và phân biệt.*"
- Khẳng định này có thể được chứng minh dựa trên quan sát: mỗi phân hoạch lẻ đều có thể "gập" lại tại số hạng giữa của nó để tạo thành một phân hoạch tự đối ngẫu. Ví dụ:

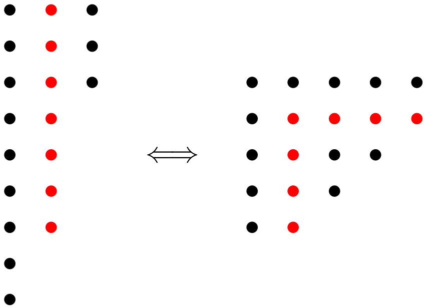
Lược đồ Ferrers

- Ta có khẳng định sau: "*Số phân hoạch tự đối ngẫu bằng số phân hoạch trong đó các số hạng là lẻ và phân biệt.*"
- Khẳng định này có thể được chứng minh dựa trên quan sát: mỗi phân hoạch lẻ đều có thể "gập" lại tại số hạng giữa của nó để tạo thành một phân hoạch tự đối ngẫu. Ví dụ:



Lược đồ Ferrers

- Từ đó, ta có thể lập một song ánh giữa tập các phân hoạch lẻ phân biệt và tập các phân hoạch đối ngẫu. Ví dụ:



Nội dung

Sinh các phân hoạch nguyên

- Có nhiều thuật toán sinh các phân hoạch nguyên.
- Các thuật toán "truyền thống" chủ yếu liệt kê mọi phân hoạch nguyên theo thứ tự từ điển ngược (giảm dần).
- Gần đây, nhiều thuật toán sinh các phân hoạch nguyên theo thứ tự từ điển (tăng dần) đã được đề xuất và chứng minh rằng chúng hiệu quả hơn so với các thuật toán truyền thống.

Sinh các phân hoạch nguyên

- Có nhiều thuật toán sinh các phân hoạch nguyên.
- Các thuật toán "truyền thống" chủ yếu liệt kê mọi phân hoạch nguyên theo thứ tự từ điển ngược (giảm dần).
- Gần đây, nhiều thuật toán sinh các phân hoạch nguyên theo thứ tự từ điển (tăng dần) đã được đề xuất và chứng minh rằng chúng hiệu quả hơn so với các thuật toán truyền thống.

Sinh các phân hoạch nguyên

- Có nhiều thuật toán sinh các phân hoạch nguyên.
- Các thuật toán "truyền thống" chủ yếu liệt kê mọi phân hoạch nguyên theo thứ tự từ điển ngược (giảm dần).
- Gần đây, nhiều thuật toán sinh các phân hoạch nguyên theo thứ tự từ điển (tăng dần) đã được đề xuất và chứng minh rằng chúng hiệu quả hơn so với các thuật toán truyền thống.

- Keller và O'Sullivan đề xuất ba thuật toán sinh các phân hoạch nguyên theo thứ tự từ điển và so sánh chúng với các thuật toán sinh phân hoạch theo thứ tự từ điển ngược truyền thống.

  J. Kelleher and B. O'Sullivan, "Generating all partitions: A comparision of two encodings," *arXiv:0909.2331v1*, 2009.

- Zoghbi và Stojmenovic đề xuất hai thuật toán sinh các phân hoạch, một thuật toán sinh theo thứ tự từ điển, một thuật toán sinh theo thứ tự ngược với thứ tự từ điển và chứng minh rằng hai thuật toán này đều hiệu quả hơn các thuật toán truyền thống.

  A. Zoghbi and I. Stojmenovic, "Fast algorithms for generating integer partitions," *Intern. J. Computer Math.*, vol. 70, pp. 319–332, 1998.

- Các tài liệu này cũng liệt kê (dưới dạng trích dẫn) tương đối đầy đủ các phương pháp sinh phân hoạch nguyên.

Sinh các phân hoạch nguyên

- Keller và O'Sullivan đề xuất ba thuật toán sinh các phân hoạch nguyên theo thứ tự từ điển và so sánh chúng với các thuật toán sinh phân hoạch theo thứ tự từ điển ngược truyền thống.

  J. Kelleher and B. O'Sullivan, "Generating all partitions: A comparision of two encodings," *arXiv:0909.2331v1*, 2009.

- Zoghbi và Stojmenovic đề xuất hai thuật toán sinh các phân hoạch, một thuật toán sinh theo thứ tự từ điển, một thuật toán sinh theo thứ tự ngược với thứ tự từ điển và chứng minh rằng hai thuật toán này đều hiệu quả hơn các thuật toán truyền thống.

  A. Zoghbi and I. Stojmenovic, "Fast algorithms for generating integer partitions," *Intern. J. Computer Math.*, vol. 70, pp. 319–332, 1998.

- Các tài liệu này cũng liệt kê (dưới dạng trích dẫn) tương đối đầy đủ các phương pháp sinh phân hoạch nguyên.

Sinh các phân hoạch nguyên

- Keller và O'Sullivan đề xuất ba thuật toán sinh các phân hoạch nguyên theo thứ tự từ điển và so sánh chúng với các thuật toán sinh phân hoạch theo thứ tự từ điển ngược truyền thống.

  J. Kelleher and B. O'Sullivan, "Generating all partitions: A comparision of two encodings," *arXiv:0909.2331v1*, 2009.

- Zoghbi và Stojmenovic đề xuất hai thuật toán sinh các phân hoạch, một thuật toán sinh theo thứ tự từ điển, một thuật toán sinh theo thứ tự ngược với thứ tự từ điển và chứng minh rằng hai thuật toán này đều hiệu quả hơn các thuật toán truyền thống.

  A. Zoghbi and I. Stojmenovic, "Fast algorithms for generating integer partitions," *Intern. J. Computer Math.*, vol. 70, pp. 319–332, 1998.

- Các tài liệu này cũng liệt kê (dưới dạng trích dẫn) tương đối đầy đủ các phương pháp sinh phân hoạch nguyên.

Nội dung

Tóm lược

Các nội dung chính của bài giảng:

- Hai bài toán phân hoạch: phân hoạch tập hợp và phân hoạch nguyên
- Các số Bell, Stirling loại hai, Stirling loại một
- Thuật toán sinh các phân hoạch của tập hợp
- Hàm phân hoạch
- Lược đồ Ferrers
- Các thuật toán sinh các phân hoạch nguyên
- Các bài tập lập trình để củng cố kiến thức

Tóm lược

Các nội dung chính của bài giảng:

- Hai bài toán phân hoạch: phân hoạch tập hợp và phân hoạch nguyên
- Các số Bell, Stirling loại hai, Stirling loại một
- Thuật toán sinh các phân hoạch của tập hợp
- Hàm phân hoạch
- Lược đồ Ferrers
- Các thuật toán sinh các phân hoạch nguyên
- Các bài tập lập trình để củng cố kiến thức

Tóm lược

Các nội dung chính của bài giảng:

- Hai bài toán phân hoạch: phân hoạch tập hợp và phân hoạch nguyên
- Các số Bell, Stirling loại hai, Stirling loại một
- Thuật toán sinh các phân hoạch của tập hợp
- Hàm phân hoạch
- Lược đồ Ferrers
- Các thuật toán sinh các phân hoạch nguyên
- Các bài tập lập trình để củng cố kiến thức