150 bài tập tin học

Bài số 1:

Cho số tự nhiên n (1 <= n <= 10^6), hãy tìm chữ số cuối cùng khác 0 của n!.

Input

N

Output

Số cuối cùng khác 0 cần tìm.

Thuật toán :

Bằng công thức La grăng, ta có thể dễ dàng tính được bậc của luỹ thừa 2, 5 trong n!

Như vậy bài toán tương đương với tìm chữ số cuối cùng của số M bằng cách bỏ tất cả luỹ thừa của 10 trong n!. Rõ ràng trong M chỉ còn lại luỹ thừa của 2, không còn luỹ thừa của 5.

M = f(1)*f(2)*f(3)*…f(n)*luỹ thừa còn lại của 2.

Trong đó f(k) là số tự nhiên nhận được từ k bằng loại bỏ hết các luỹ thừa của 2, 5.

Mặt khác vì chỉ quan tâm đến chữ số cuối cùng của M nên trong các thừa số tạo nên M ta chỉ quan tâm đến chữ số cuối cùng của các thừa số, tức là số lần các chữ số 1, 3, 7, 9
là số cuối cùng của một số nào đó. Việc đếm số lần xuất hiện của 1, 3, 7, 9 có thể đếm được dễ dàng bằng phân lớp các số từ 1 đến n thành các lớp có cùng luỹ thừa 2, 5. Trong mỗi lớp k = 2^x*5^y, ta chia mỗi số p cho k, tức là sẽ nhận được f(p). d•y f(p) nhận được là d•y liên tục từ 1 đến n div k , bỏ đi các số có tận cùng 2, 4, 5, 6, 8
(Tức là 1, 3, 7, 9, 11,1 3, 17, 19 ….). Từ đó ta có thể dễ dàng tìm được chữ số cuối cùng của M bằng lấy tích của các luỹ thừa tìm 1, 3, 7, 9, 2 chia dư cho 10.

Chú ý : ta không tính trực tiếp luỹ thừa của 3, 7, 9, mà chỉ lấy với số mũ là số mũ tìm được chia dư cho 4. (vì 3^4, 7^4, 9^4 có tận cùng là 1).

Mở rộng :

Bài toán có thể mở rồng tìm hai chữ số cuối cùng trong đó chữ số sau khác 0 của n!

Bài số 2 :

Có n người, n việc (1 < n <= 200). Người thứ i thực hiện công viêc j mất C[i,j] đn vị thời gian. Gi sử tất cả bắt đầu vào thời điểm 0, hãy tìm cách bố trí mỗi công việc cho mỗi người sao cho thời điểm hoàn thành công việc là sớm nhất có thể.

Input

N

Ma trận chi phí C[i,j]

Output

Thời điểm sớm nhất có thể.

N số, số thứ i là tên công việc được giao cho người i.

Thuật toán :

Bài toán có thể đưa về bài toán tìm cặp ghép cực đại trên đồ thị hai phía.

Bằng chia nhị phân ta thử với mỗi T xem có tồn tại cách xếp việc sao cho mọi công việc được giao đều hoàn thành không muộn hơn thời điểm T hay không.

```
  L = 0;
  R = Giới hạn các C[i,j]
  For (l < r)
   {
   T = (l + r) / 2;
   if CóCặpGhépĐầyĐủ(T) then r = T
   Else l = T+1;
}
```

Bài số 3 :

Mạng lưới giao thông gồm có n nút, giữa các nút có thể có đường nối hai chiều và không có hai đường cùng nối hai nút. Có tất cả m đường , mỗi đường thuộc môt trong ba loại đánh số 1, 2, 3. Người số 1 chỉ có thể đi trên đường 1, 3; người số hai chỉ có thể đi trên 2,3.

Hệ thống giao thông đảm bảo cho cả người 1 lẫn 2 đều có thể đi từ một nút đến mọt nút bất kì. Hãy tìm cách bỏ đi một số nhiều nhất các đường nối sao cho tính chất liên thông trên vẫn được đảm bảo.

Input :

n, m (n <= 500 ; m <= 10000)

m dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi ba số u v k cho biết có đường nối u với v, thuộc loại k.

Output

P là số đường nhiều nhất có thể loại.

P dòng tiếp theo, mỗi dòng cho biết một đường bị loại ra gồm một số là số thứ tự của đường trong Input.

Thuật toán :

Ta tiến hành loang để tìm các thành phần liên thông chỉ gồm các cạnh 3. Với mỗi thành phần liên thông, ta loại bỏ các cạnh (gồm cả 1, 2, 3) để còn lại là một cây gồm các cạnh 3. Rồi chập c cây đó vào thành một đỉnh. Như vậy lúc này đò thị chỉ còn các cạnh 1, 2.

Sau đó, với mỗi loại 1 (2) ta lần lượt loang để xây dựng các cây chỉ gồm các cạnh 1 (2). Các cạnh không thuộc cây sẽ bị loại bỏ.

Bài số 4 :

Cho một biểu thức chỉ gồm các kí tự (,), [,], {, }, hãy cho biết biểu thức đó có đúng đắn hay không. Nếu không hãy tìm cách thêm một số ít nhất các kí tự thuộc một trong 6 loại trên đề nhận được biểu thức đúng.

VD : ( ]) ({ (}) (

Là biểu thức không đúng, biểu thức cần đưa ra là

([ ]) ({ ( ) }) ( )

Input

Một xâu thể hiện bểu thức gồm n kí tự (n <= 200)

Output

Một dòng ghi xâu kết qu (nếu đã là biểu thức đúng thì giữ nguyên)

Thuật toán :

Ta dùng phưng pháp qui hoạch động : Gọi C[i, j] là số kí tự tối thiểu cần chèn vào đoạn xâu từ kí tự thứ i đến kí tự thứ j để nhận được xâu đúng.

Ta tính lần lượt các đoạn xâu từ ngắn đến dài. Sau đây là đoạn chương trình

```
{
 int k;
 if ( S[i] == S[j] ) return C[ i+1, j-1];
 C[i,j] = Min{C[i,k] + C[k+1,j]    for k = i to j-1 }
}
```

Mở rộng :

Có thể mở rộng cho xâu có nhiều loại kí tự, hay cũng có thể phát biểu khác là tìm cách xoá đi ít nhất thay vì chèn thêm ít nhât.

Bài số 5 : Phát quà Nô en

Trong dịp Nô en, các của hàng có tổ chức phát quà Nô en. Có tất c n+1 cửa hàng (n <= 100) dánh số từ 0 đến n, đường đi từ của hàng i đến của hàng j mất C[i,j] thời gian, và chi phí là D[i,j]. Mỗi khi đến của hàng nào thì phi đợi cho đến khi có đợt phát quà ở của hàng đó mới được đi. Bắt đầu từ thời điểm 0, một người muốn được nhận quà từ các của hàng. Người đó xuất

phát từ thời điểm 0, tại của hàng thứ 0, và phi quay về của hàng xuất phát trước thời điểm M (M <= 60000)
Có tất c k đợt phát quà(k <= 5000), mỗi đợt phát quà gồm :
S là tên của hàng phát
T là thời điểm phát quà (phi đến trước hoặc đúng thời điểm phát quà), thời gian cho một lần phát quà được bỏ qua.
Val : là giá trị của quà.
Cần tìm một hành trình nhận quà sao cho số tiền nhận đựoc là nhiều nhất có thể.
Số tiền := (Tổng giá trị quà) - Chi phí đi đường.

Input :
N m k
Ma trận C[0..n, 0..n]
Ma trận D[0..n, 0..n]
K dòng cuối, mỗi dòng gồm ba số S, T, val như đ• môt t ở trên.

Các só đều nguyên.

Output :
P là số tiền lớn nhất.
Các dòng tiếp theo mô t hành trình gồm thứ tự các đợt nhận quà.

Thuật toán :
Ta dùng phương pháp qui hoạch động. Ta sắp xếp các đợt nhận quà theo thứ tự tăng dần của thời gian phát quà, đánh số lại là 1, 2... k
Gọi F[i] là số tiền lớn nhất nhận được khi nếu đến nhận đợt phát quà thứ i

Ta tính F[i] như sau :

```
F[i] = max;  / giới hạn giá trị quà /
For (j = 0 ; j < i ; j++)
   if  (T[j] + C[j][i] < = T[i])
      if F[i] < F[j] -D[j,i] + val[i] then  F[i] = F[j] - D[j,i] + val[i];
```

Bài số 6 : Bốc bài (bài thi Olympic Trung Âu 2000)
Các quân bài được xếp thành m hàng, hàng thứ i gồm s(i) quân bài liên tiếp.
Có hai người chơi, lần lượt mỗi người đến lượt mình chọn 1 hoặc 2, 3 quân bài liên tiếp thuộc một hàng nào đó và bốc lên. Người nào đến lượt mình không chơi được nữa là thua. Hãy tìm chiến lược chơi tốt nhất cho trò chơi trên.

Thuật toán :
Ta sử dụng hàm Grundy cho bài toán trên.
Gọi G[k] là giá trị hàm Grundy ứng với một trò chỉ gồm một d•y bài liên tiếp gồm k quân bài. Ta có thể dễ dàng tính G[k] theo các G[0], G[1]... G[k-1], bằng việc thử nhấc 1, 2, 3 quân bài liên tiếp, hàm Grundy G[k] nhận được là số tự nhiên nhỏ nhất không xuất hiện trong tập giá trị hàm Grundy nhận được bằng các phép nhấc 1, 2, 3 bài liên tiếp.
Khi đó hàm Grundy ứng với một trạng thái các quân bài là số tự nhiên nhận được bằng phép XOR các giá tri G[k] của các đoạn bài liên tiếp.
Ví dụ : nếu các đoạn bài liên tiếp lần lượt có độ dài là p1, p2, …
Thì hàm Grundy là :
G[p1] XOR G[p2] XOR G[p3] XOR …
Nếu hàm Grundy bằng 0 thì đang ở trạng thái thua, ta đánh ngẫu nhiên, ngược lại ta tìm cách đưa về trạng thái 0 lúc đó ta chắc thắng.

Bài tập số 7:
Đề bài : Nâng cấp đường

Cho một mạng lưới các nút giao thông , và các đương hai chiều nối một số cặp nút. Biết rằng mạng lưới đường đảm bảo cho có thể đi lại giữa hai nút bất kì. Cần chọn một số đường để nâng cấp sao cho mạng gồm các đường nâng cấp thoả mãn :

1. Giữa hai nút bất kì có đúng một đường đi.
2. Số nút chỉ là đầu mút của đúng một đoạn đường nâng cấp là nhỏ nhất.

File Input vào gồm :
Dòng đầu ghi n - số nút, m - số đường (n <= 2000; m <= 10000)
m dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi hai cặp u,v thể hiện đường nối giữa hai nút số hiệu u, v
Output :
Dòng đầu là số nút chỉ là đầu mút của một đúng 1 đường.
Các dòng tiếp theo ghi một đoạng đường cần nâng cấp sao gồm 2 số u, v như mô tả ở Input.
Thuật giải :
đây chính là bài toán dựng cây khung có số đỉnh treo ít nhất. Bài này có thể dùng kết hợp nhiều phương pháp tham lam: một trong số đó là
Khởi tạo cây gồm đỉnh có bậc cao nhất.
Tại mỗi bước, trong tập các đỉnh chưa thuộc cây nhưng kề với một đỉnh thuộc cây, ta chọn đỉnh v có số cạnh nối đến các đỉnh không thuộc cây là lớn nhất, kết nạp vào cây. Nếu có nhiều đỉnh của cây kề với v, ta cố chọn đỉnh u nào đó mà không phải là đỉnh treo của cây, nối u, v.
Lặp lại n-1 bước như vậy ta có thể xây dựng một cây khá tốt theo yêu cầu bài toán.

Bài tập số 8:
Đề bài : Bảo vệ

Một mạng lưới gồm N thành phố, và một số đường một chiều nối các cặp thành phố (giữa hai thành phố có thể có nhiều đường nối một chiều). Quân địch đang tập trung ở thành phố N, định tiến công ta ở thành phố 1, và chúng sẽ tiến công trên tất cả các con đường chưa được bảo vệ để tiến về thành phố 1. Bộ chỉ huy ta cần xác định số quân ít nhất trên các con đường để chặn địch tiến về thành phố 1.
Input bv.inp gồm :
Dòng đầu ghi N (N <= 5000)
Các dòng tiếp theo cho đến hết file, mỗi dòng môt tả 1 đường gồm u, v, s cho biết có đoạn đường một chiều từ u đến v, và phải cần ít nhất s quân để chặn địc h trên đường này
(s <= 65000)
Có không quá 10000 đường.
Output bv.out:
P là số quân ít nhất cần huy động.
Các dòng tiếp theo mõi dòng môt tả việc bố trí quân bao gồm u, v, s với ý nghĩa trên các đường từ u đến v ta bố trí s quân.

Thuật giải :
Coi mỗi thành phố là một đỉnh của đồ thị, đoạn đường u, v, s tương ứng vói một cung u, v với khả năng thông qua s. Đây chính là bài toán tìm lát cắt nhỏ nhất giữa hai cặp đỉnh (N đỉnh phát, 1 là đỉnh thu). Ta có thể dùng thuật toán Ford Fulkerson tìm luồng cực đại từ đó suy ra lát cắt nhỏ nhất.

Bài tập số 10:
Đề bài : Chọn xâu

Cho n (n <= 100) xâu kí tự có cùng độ dài l <= 255 S_1, S_2, S_3, …S_N chỉ gồm các chữ cái thường và một số nguyên dương k <= 255.

Hãy tìm xâu H nhỏ nhất thoả mãn tính chất sau đây : tồn tại k vị trí khác nhau trên xâu H là một vị trí xuất hiện của một trong các xau S1,.. Sn (p là vị trí xuất hiện của xâu S trong H nếu hàm Copy(H,p : vị trí xuất hiện, l : độ dài xâu S) = S).

Input XAU.INP

Dòng đầu ghi n, l, k

N dòng tiếp theo dòng thứ i ghi xâu S(i)

Output XAU.OUT

Dòng đầu ghi độ dài nhỏ nhất.

dòng hai ghi xâu H thoả mãn bài toán.

k dòng tiếp theo, mỗi dòng thể hiên một vị trí xuất hiện gồm hai số p, u cho biết xâu S(u) xuất hiện tại vị trí p trên H.

Thuật giải :

Gọi khoảng cách giữa hai xâu A,B là vị trí p nhỏ nhất > 0 thoả mãn đoạn cuối của xâu A từ p+1 đến L trùng khít với đoạn đầu của xâu B từ 1 đến L-p. Ta xâydựng đồ thị trong đó mỗi xâu tương ứng một đỉnh khoảng cách giũa hai dỉnh bằng khoảng cách hai xâu đúng như định nghĩa ở trên.

Bài toán tương đương với tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị qua đúng k đỉnh (có thể lặp đỉnh). Ta có thể dùng qui hoạch động để giải quyết như sau :

Gọi C(i,j) là độ dài đường ngẵn nhất qua i đỉnh kết thúc tại đỉnh j. Từ đó ta có thể dễ dàng tính các C(i,j) khi đã biết tất cả C(i-1,x).

Sau đây là chương trình : viết bằng C

Bài tập số 11:

Đề bài : Quân mã

Cho một bàn cờ kích thước n*n (n <= 200) trên đó mốt số ô đã bị đánh dấu. Hãy tìm cách đặt các quân mã lên các ô trống của bàn cờ sao cho :

Không có hai con mã đặt trên cùng một ô

Không có hai quân mã nào khống chế nhau.

Số quân mã đặt được là lớn nhất có thể.

Input KNiGHT.INP

Dòng đầu ghi hai số n, m - số ô bị đánh dấu.

M dòng tiếp theo mỗi dòng ghi hai số thể hiện một ô bị đánh dâu gồm hai số x, y là vị trí của ô hàng x, cột y.

Output KNiGHT.OUT

K số quấn mã nhiều nhất.

K dòng tiếp theo mô tả một vị trí quân mã gồm hai số x, y giống như mô tả ở Input.

Thuật giải :

Tô mầu các ô của bàn cờ giống như bàn cờ vua, ta phân chia các ô chưa bị đánh dấu thành 2 lớp : lớp các ô đen, lớp các ô trắng, dễ thấy nếu hai ô mà quân mã ở hai ô khống chế nhau thì hai ô đó phải thuộc hai lớp khác nhau. Ta đưa bàn cờ về đồ thị hai phía có V = (X, Y) trong đó hai đỉnh có cạnh nối nếu quân mã ở hai ô tương ứng đó khống chế được nhau.

Tập hợp các vị trí quân mã thoả mãn bài toán chính là tập ổn định cưc đại của đồ thị hai phía. Bài toán tìm tập ổn trên đồ thị hai phía có   thể giải bằng tìm lát cắt hẹp nhất nếu ta cho nối một đỉnh phát ảo s với mỗi đỉnh thuộc X, đồng thời mỗi đỉnh thuộc Y nối với một đỉnh thu ảo t, Tất cả các cung đặt giá trị thông qua là 1.

Khi đó từ lát cắt hẹp nhất (A, B) cho ta tập ổn định cực đại gồm các phần tử X thuộc A, và các phần tử thuộc Y nhưng không thuộc A.

Bài tập số 12:

Đề bài : Thang máy

Một toà nhà gồm có N tầng đánh số từ 1 đến N, và có chỉ một thang máy để phục vụ. Trong một ngày, có tất cả M yêu cầu vận chuyển bằng thang máy (M <= 100), mỗi thang máy được mô thể hiện bằng 2 số a, b cho biết cần vận chuyển hàng từ tầng a đến tầng b. Do yêu cầu vận chuyển nên thang máy không thể phuc vụ 2 yêu cầu cùng một lúc mà phải xong một yêu cầu mối đến yêu cầu khác. Tuy nhiên m người ta có thể thay đổi thứ tự thực hiện các yêu cầu. Bài toán đặt ra là tìm thứ tự thực hiện các yêu cầu sao cho tổng quãng đường thang máy phải đi là ít nhất.
Thang máy ban đầu xuất phát từ tầng 1.

Input

N, M

M dòng tiếp theo, mỗi dòng thứ i ghi 2 số a, b môt tả yêu cầu thứ i.

Output

Dòng đầu là tổng quãng dường tìm được.

Dòng thứ hai mô tả thứ tự thực hiện các công việc bởi một hoàn vị của 1, 2 … M

Thuật giải :

Ta đưa mỗi yêu cầu với một đỉnh của đồ thị. Bài toán được đưa về tìm chu trình Hamilton có độ dài nhỏ nhất hay bài toán người du lịch. Ta duyệt các phương án có thể để tìm lời giải tối ưu.

Bài tập số 13:

Đề bài : Hình chữ nhật lớn nhất.

Cho một hình chữ nhật C kích thước m x n. Có k điểm nằm trong hình chữ nhật. Hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất nằm trong, có các cạnh song song các cạnh hình chữ nhật C, và không chứa bất kì điểm nào trong số các điểm đã cho.

Input

Dòng đầu ghi m, n, k

K dòng tiếp theo ghi toạ độ của các điểm. Hệ trục toạ độ lấy một đỉnh C làm gốc, Ox, Oy song song với hai cạnh của C, sao cho toàn bộ C nằm trong góc phần tư thứ nhất của trục toạ độ.

Output

Một dòng ghi 5 số : diện tích, 4 số ghi toạ độ đỉnh trái trên, phải dưới của hình chứ nhật tìm được.

Thuật giải

Ta sẽ xây dựng một thuật giải với độ phức tạp cỡ $O(k^2)$.

Trước hết, ta sắp xếp các điểm theo thứ tự tăng dần của hoành độ.

Ta xét từng điểm i. Với mỗi i, ta duyệt danh sách các điểm j có hoành độ lớn hơn i, theo chiều tăng của hoành dộ, với mỗi điểm j mới được duyệt, ta xác định dải lớn nhất hình chữ nhật song song với các trục toạ độ, kéo dài từ xi đến xj. Hình chữ nhật lớn nhất là một trong các dạng đó. Đoạn mã sau đây mô tả quá trình xét một điểm i. (danh sách điểm đã được sắp xếp)

```
Min = 0;
Max = n;
For j = i+1 to k  Begin
     Kiểm tra hình chữ nhật (xi, min, xj, max) so với kết quả tối ưu hiện tại
     if (yj >= yi ) and (max > yj) max = yj;
     if (yj <= yi ) and (min < yj) min = yj;
End;
```

Bài tập số 14:

Đề bài : Light

Một kho xăng dầu là lưới ô vuông hình chữ nhật m x n (m, n <= 100). Trong một số ô có đặt bể xăng. Để quản lý kho, cần một hệ thống các đèn để chiếu sáng. Mỗi đèn chỉ có thể chiếu sáng toàn bộ một hàng hay một cột của lưới, và mỗi đèn cũng có một chi phí.Yêu cầu: Cần chiếu sáng tất cả các ô có bể xăng sao cho tổng chi phí nhỏ nhất.

Input

m n k - số ô có đặt bể xăng

dòng 2 chứa m số tương ứng là chi phí lắp đèn chiếu sáng hàng 1, hàng 2, … hàng m.

dòng 3 chứa n số tương ứng là chi phí lắp đèn chiếu sáng cột 1, cột 2, … cột n.

k dòng tiếp theo mỗi dòng có hai số là vị trí của một ô có đặt bể xăng.

Output

dòng đầu ghi s là tổng chi phí nhỏ nhất.

Dòng 2 ghi chỉ số các hàng được có đèn chiếu.

Dòng 3 ghi chỉ số các cột có đèn chiếu.

Thuật giải

Bài toán có thể đưa về bài toán luồng cực đại. Gọi X là tập các hàng, Y tập đại diện cho các côt.

Từ đỉnh phát giả s có cung đến các đỉnh thuộc X với giá trị bằng chi phí lắp đèn trên hàng tương ứng, từ mỗi đỉnh thuộc Y có một cung nối tới đỉnh thu t với trọng số bằng chi phí lắp đèn trên hàng tương ứng.

Ngoài ra, nếu hàng x, cột y mà ô (x,y) có kho xăng thì trọng số x,y = +vô cùng ngược lại bằng 0.

Gọi A, B là lát cắt nhỏ nhất, ta chọn tập các hàng không thuộc A, các cột thuộc A để chọn mắc đèn.

Chương trình :

Bài tập số 15:

Đề bài : Đựng đồ

Một người có N con vật (N <= 100), một lần anh ta muốn mang tất cả các con vật này đi chỗ khác. Vì vậy anh ta cần mang các con vật vào các chuồng để vận chuyển. Vì một số con không thể chung chuồng với nhau (Ví dụ : chó -mèo, mèo chuột,..) . Giả sử chuồng có thể chứa số lượng không hạn chế các con vật. Hãy tìm cách nhốt các con vật vào một số ít nhất chuồng.

Input

N

Các dòng tiếp theo ghi các cặp xung khắc nhau gồm hai số u, v thể hiện con vật u không thể chung chuồng với v.

Output

K số chuồng ít nhất

Dòng i trong k dòng tiếp theo ghi chỉ số các con vật nhốt vào chuồng thứ i

Thuật giải

Đây chính là bài toán tô màu đồ thị. Với loại bài này ta chỉ có thể tìm cách duyệt cho hiệu quả mà thôi.

Bài tập số 16:

Đề bài : Bro

Có n quán bia (n <= 10000) nằm trên một đường tròn, đánh số 1,2..n theo chiều kim đồng hồ . Thông tin về một quán bia bao gồm A(i) là lượng bia cần cung cấp theo lít , B(i) là khoảng cách đến quán bía tiếp theo theo chiều kim đồng hồ. Chú ý khi đó B(n) là khoảng cách từ quán n đến quán 1. Hàng ngày, nhà máy bia phải cung cấp bia cho các quán, giá chuyên chở 1 lít trên 1 đơn vị khoảng cách. Vì tất cả đều nằm trên đường tròn nên có hai con đường từ nhà máy đến quán, do đó chi phí tính theo đường ngắn hơn trong hai đường.

Cần đặt nhà máy bia tại một vị trí trên đường tròn sao cho tổng chi phí vận chuyển bia là nhỏ nhất.

Input BRO.INP

N

N dòng, dòng thứ i ghi 2 số A(i), B(i) theo như đã mô tả.

Các A(i), B(i) nguyên dương <= 32000

Output BRO.OUT

Một dòng ghi tổng chi phí tối thiểu.

Thuật giải

Dễ thấy luôn có nghiệm tối ưu là nhà máy phải đặt tại một quán nào đó. Do đó ta thử đặt nhà máy tại các quán xem tại vị trí nào ít nhất , nếu chỉ đơn thuần theo cách đó độ phức tạp sẽ là n^2. ở đây ta sẽ lưu một cách khéo léo để lưu lại các kết quả. Cụ thể

Khi thử mỗi vị trí i ta có vị trí j đối xứng quán j qua tâm đường tròn. Khi đó vị trí j sẽ là điểm phân chia các quán thành 2 lớp : Mỗi lớp có đường đi ngắn nhất tới nhà máy theo đường riêng. Tuy nhiên, khi duyệt các quán theo thứ tự trên đường tròn thì vị trí j dịch cuyển đúng 1 vòng, do đó số quán bị chuyển từ lớp này sang lớp khác là tuyến tính với n. Do đó chi phí tính toán tuyến tính theo n,

Bài tập số 17:

Đề bài :

Trên mặt phẳng cho n điểm (3 <= n <= 500), có toạ độ nguyên. Hãy tìm đường tròn nhỏ nhất chứa tất cả n điểm đã cho.

Input TELECOM.INP

N

N dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi x, y là toạ độ của môt điểm.

Output TELECOM.OUT

Một dòng ghi ba số bán kính nhỏ nhất, hoành độ, tung độ của tâm đường tròn tương ứng.

Số thực chính xác đến 3 chữ số sau dấu phảy.

Thuật giải

Ta chú ý rằng : nếu C là đường tròn nhỏ nhất cần tím thì sẽ tồn tại ba điểm sao cho C là đường tròn nhỏ nhất chứa ba điểm đó. Do đó về nguyên tắc ta cứ thử các bộ 3 điểm A , B, C và tìm đường tròn nhỏ nhất chứa 3 điểm như sau :

Nếu ABC là tam giác nhọn thì đường tròn ngoại tiếp, ngược lại đường tròn cần tìm là đường tròn đường kính cạnh lớn nhất.

Ta cũng dễ dàng kiểm tra xem một đường tròn cho trước có bao hết tất cả các điểm hay không.

Ta có thể tìm bao lồi trước sau đó mới tìm đường tròn.

Với nguyên thuật toán trên, thì thuật toán có độ phức tạp $O(n^4)$, tuy nhiên ta có thể giảm xuống n^3 như sau :

Xét tất cả các cặp điểm A,B, ta tìm đường tròn nhỏ nhất qua A, B chứa tất cả các điểm còn lại. Đường thẳng AB phân chia mặt phẳng thành 2 nửa, ta phân chia tập điểm còn lại thành 2 lớp dựa vào điểm đó thuộc nửa mặt phẳng nào trong hai nửa.

Với các điểm ở mỗi nửa, ta tìm xem điểm nào nhìn A B với góc nhỏ nhất. Ta được hai góc a, b tương ứng với mỗi nửa.

+ Nếu a, b đều >= 90^o, đường tròn đường kính AB

+ Nếu a+b >= 180^o , a hoặc b nhọn thì đường tròn qua A, B, và chứa điểm tương ứng góc nhọn

+ a+b < 180^o không tồn tại đường tròn.

Mở rộng

Bài toán có thể mở rộng cho không gian, khi đó là tìm hình cầu nhỏ nhất. Với bài toán này. thay vì xét 3 điểmt ta phải xét 4 điểm.

Bài tập số 18:

Đề bài : Lập lịch thực hiện công việc

Có n công việc (1 <= n <= 200) được làm trên một máy. Biết rằng các cồng việc đều được làm trong 1 đơn vị thời gian như nhau, thời điểm bắt đầu công việc là 0. Tuy nhiên với mỗi công việc i cũng có hai ràng buộc : phải bắt đầu sau thời điểm s(i), và hạn hoàn thành công việc là f(i) (s(i), f(i) nguyên dương và <= 200). Mỗi công việc chỉ có thể bắt đầu ngay, hoặc sau thời điểm s(i), nếu hoàn thành đúng thời hạn f(i) thì được nhận công a(i), nếu trễ hạn thì chỉ đựoc b(i) (0 <

b(i) < a(i) 100000). Hãy tìm lịch thực hiện tất cả các công việc sao cho tổng số tiền nhận là lớn nhất.

Input PC.INP

Dòng đầu chứa N là số việc

N dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi 4 số môt tả 1 công việc bao gồm s(i), f(i), a(i), b(i)

Output PC.OUT

Dòng đầu ghi tổng số tiền

N dong tiếp theo, mỗi dòng ghi một sô, dong thứ i ghi thời điểm bắt đầu thực hiện công việc i

Thuật giải

Bài toán có thể đưa về tìm cặp ghép đầy đử lớn nhất trên đồ thị hai phía : Một phía là tập các công việc, một phía là tập các thời điểm (các thời điểm bắt đầu hiển nhiên là các số nguyên).

Mối công việc i và thòi điểm j có trọng số là chi phí khi làm công viẹc i tại thời điểm j.

Bài tập số 19:

Đề bài : Phân công công việc

Có m công việc và n người làm (m, n <= 500). Ta biết các cặp nguời, việc i, j mà nguòi i có thể làm đuợc việc j. Mõi người làm một công việc trong 1 dơn vị thời gian, thòi điểm bắt đầu thưc hiện công việc là 0. Một người có thể làm nhiều việc nhưng một việc chỉ có thể do 1 người làm. Hãy tìm cách bố trí thực hiện các công việc sao cho nguòi làm nhiều việc nhất là nhỏ nhất, tức cũng chính là thời điểm hoàn thành tất cả các công việc.

Input

Dòng đầu ghi m, n

Các dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi u, v cho biết người u có thể làm công việc v

Output

Dòng đầu ghi thời điểm sớm nhất.

N dòng tiép theo, dòng thứ i ghi danh sách các công việc đượi phân cho người i.

Thuật giải

Bài toán này có thể đưa về bài toán luồng. đỉnh phát giả s có cung trọng số **k** với tất cả N đỉnh tương ứng vớ các người làm, tập M đỉnh của các công việc có cung trọng số 1 tới đỉnh thu ảo t. đỉnh u thuộc tập N có cung với v thuộc M trọng số 1 nếu người u làm được việc v.

Nếu luồng cực đại làm bão hoà các cung về t thì các công việc được phân công hết, ngược lại thì không.

Ta chia nhị phân các số k để tìm k nhỏ nhât thoả mãn sự bão hoà các cung về t002E

Bài tập số 20:

Đề bài : Biến đổi xâu

Một bảng 3 * 3 gồm các chữ cái A B C D như sau :

chỉ số	A	B	C	D
A	B	C	A	D
B	A	B	D	B
C	C	D	C	B
D	D	B	D	C

Cho xâu S chỉ gồm các chữ cái A B C D một phép co xâu là thay xâu con x1x2 bởi 1 kí tự ở hàng x1 cột x2 của bảng trên.

Ví dụ : ABCD dãy biến đổi như sau :

ADD (BC thay bằng D)

DD (AD D)

C (DD thành C)

Cho xâu S và một kí tự x thuộc {A, B, C, D} hay tìm dãy các biến đổi xâu S sao cho cuối cung ta thu được kí tự x

Input

Dòng đầu chứa S

Dòng hai ghi kí tự x

Output

Một dãy các biến dổi, mỗi biến đổi được thẻ hiện bằng 1 số nguyên là vị trí của kí tự x1 (trong biến đổi x1x2) trong xâu S

Thuật giải

Bài toán có thể giải bằng qui hoạch động.

Gọi C(i,j) là tập hợp các kí tự mà chỉ riêng đoạn xâu i đến j của S có thể co về được.

Ta tính C(i,j) như sau :

```
Khởi tạo C(i,j) rỗng.
For k = i to j-1 do
        duyệt các cặp x1 x2 mà x1 thuộc C(i,k) x2 thuộc C(k+1,j)  bổ xung kí tự
        hàng x1 cột x2 của bảng bổ xung vào tập C(i,j).
```

Khi đó C(1,n) sẽ là tập các kí tự mà S có thể co lại được.

Bài tập số 21 : Dãy Catalan

Đề bài :

Cho số nguyên duơng N (N <= 15),dãy Catalan là dãy C1, C2 … C2n+1 gồm các số nguyên không âm thoả mãn : C(1) = C(2n+1) = 0 với i bất kì 1 <= i <= 2n thì C(i), C(i+1) hớn kém nhau 1 đơn vị.

Với mỗi n ta sắp xếp các dãy Catalan theo thú tự từ điển, dánh số từ 1 trở đi . Yêu cầu :

1Cho một dãy Catalan, hãy tìm thứ tự của dãy.

2.Cho só nguyên dương k hãy tìm dãy có thứ tự k

Input CATALAN.INP

Dòng đầu ghi n.

Dòng hai ghi một dãy Catalan cấp n

Dòng 3 ghi một số nguyên dương k (k có thể rất lớn nhưng đảm bảo luôn có nghiệm)

Output CATALAN.OUT

Dòng 1 ghi số thứ tự dãy ở dòng 2 Input

Dòng 2 ghi dãy ứng với số thứ tự

Thuật giải

Ta xây dựng bảng số n+1 * n+1 đánh số (0..n, 0..n), ứng với mỗi dáy Catalan, bắt đầu ở vị trí 0, 0 của bảng ta lướt qua các cặp ci, ci+1 cho i chạy từ 2n về 1 của dãy C, nếu ở ci - 1 = ci+1 tăng 1 thì ở bảng ta đi xuống, ngược lại thì ta sang phải. Cuối cùng bao giờ ta cùng đếnvị trí n,n của bảng.

Ví dụ dãy 0 1 2 3 2 1 2 1 0 (n = 4) ứng với đường đi :

Xuống 1 0				
Xuống 2 0				
Ngang 2 1	Xuống 3 1			
	Xuống 4 1			
	Ngang 4 2	Ngang 4 3	Ngang 4 4	Tới đuợc 4, 4

Với mỗi vị trí i, j của bảng, ta gọi T(i,j) là số các dãy đến được từ 0, 0 đến (i,j) , và ta tính bằng truy hồi : T(i,j) = T(i-1,j) + T(i,j-1).Ta đuợc bảng như sau :

Hàng Cột	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	2	0	0	0
3	1	3	5	5	0	0

4	1	4	9	14	14	0
5	1	5	14	28	42	42

Dãy C tương tứng một dãy gồm xuống và ngang. Ta tính từ n, n về 0, 0, dùng biến s lưu tổng số dãy nhỏ hơn nó khởi tạo = 0. Ta xét các điểm trên đường đi :
Tại i,j nếu đường đi tương ứng qua i,j về 0,0 nếu là sang phải thì ta cộng thêm biến vào T(i,j-1).
Cuối cùng s là tổng só các dãy nhỏ hớn dãy C
Ví dụ : dãy 0 1 2 3 2 1 2 1 0 đường dãy đường đi về 0, 0 là
(4,4)
(4,3) cộng T(3,4) = 0
(4,2) cộng T(3,3) = 5
(4,1) cộng T(3,2) = 5
(3,1)
(3,0) cộng T(2,1) = 2
(2,0)
(1,0)
(0,0)

vậy s = 5 + 5 + 2 = 12 là số các dãy nhỏ hơn. Số thứ tự là s+1 = 13.
Tương tự, áp dụng cách tìm thứ tự ta có thuật toán ngược lại tìm dãy từ số thứ tự

Bài tập số 22: Biến đổi xâu
Đề bài :
Cho một từ điển gồm m (m <= 2000) từ có độ dài không quá 20 và hai từ S1, S2 thuộc từ điển. Một phép biên đổi xâu S có thể là :
chèn thêm 1 kí tự x vào vị trí k của S - kí hiệu C k x
xoá đi 1 kí tự ở một vị trí k - kí hiệu X k
Thay thế kí tự ở vị trí k bởi 1 kí tự c - kí hiệu T k c.
đảo một đoạn xâu con (i,j) bất kì của S. - kí hiệu D i, j
Hãy tìm một cách biến đổi từ S1 thành S2 sau ít nhất lần biến đổi mà mọi xâu trung gian đều thuộc từ điển.
Input
Dòng đầu ghi m, p1, p2 trong đó p1, p2 là thú tự tương ứng của hai xâu trong danh sách.
M dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi 1 từ của từ điển.
Output
Dãy các kí hiệu các biến đổi , mỗi biến đổi 1 dòng.
Thuật giải
Ta dùng phương pháp loang trên tập các từ của từ điển.

Bài tập số 23: So sánh tuổi.
Đề bài : Một khu vực dân cư có n người (n <= 500) dánh số từ 1 đến n.
Giữa một số cặp i,j ta biết quan hệ tuổi ngưòi i và người j gồm <, <=, >, >= =, <> đúng như ý nghĩa toán học của nó. Cho các cặp quan hệ hãy trả lời các câu hỏi sau :
1.Các cặp quan hệ đố có mâu thuẫn không
2.Cho hai cặp i,j hãy cho biết quan hệ tuổi i, j.
Input
.Dòng đầu ghi n, m
m dòng tiếp theo ghi m quan hệ tuổi, mỗi quan hệ trên một dòng gồm :
i, j và quan hệ
cuối cùng là các dòng câu hỏi gồm các cặp i,j
Output
Nếu thông tin cho vào mâu thuẫn ghi -1 và thoát.

Ngược lại phải trả lời các câu hỏi của Input, nếu xác định quan hệ thì ghi qquan hệ, ngược lại ghi ?

Thuật giải

Bài này cùng làm bằng phương pháp đồ thị : Coi mỗi ngườilà một đỉnh của đồ thị, với mỗi cặp quan hệ i,j có cạnh nối một chiều i,j nếu tuổi người i >= ngưòi j. Ta dùng thuật toán Tarjan tìm các thành phần liên thông mạnh. Tù đó suy ra quan hệ (chú ý tuổi i và j bằng nhau khi và chỉ khi i,j thuộc cùng một thành phần liên thông mạnh).

Bài tập số 24:

Đề bài : Sửa đường

Một hệ thống giao thông gồm N nút, M đường hai chiều nối các cặp nút (n<= 500, M<= 20000). Giữa hai nút bất kì có không quá 1 đường nối. Hệ thống bảo đảm sự đi lại giũa hai nút bất kì.

Hệ thống đã bị xuống cấp, tất cả các đươngf đường cần được nâng cấp. Tuy nhiên trong một ngày chỉ có thể nâng cấp không quá k đường, đồng thời trong một ngày bất kì thì các đường được chọn nâng cấp không được đi qua, nhưng vẫn phải bảo đảm sự đi lại giữa hai nút bất kì. Cần lập kế hoạch sửa đường sao cho hoàn thành trong ít ngày nhất.

Input

N M k

M dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi u, v thể hiện đường nối giữa hai nút u, v.

Output

Nếu không sửa được thì ghi -1. Ngược lại :

Dòng 1 ghi p là số ngày tối thiểu.

P dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi các đường được nâng cấp trong ngày thứ i, gồm dãy các thứ tự đường theo file Input.

Thuật giải

Ta có thể áp dụng phương pháp tham làm : tại mỗi bước ta xây dựng cây gồm ít đường chưa sửa nhất, ưu tiên phát triển cây theo chiều sâu, và tiến hành sửa chữa các đường ngoài cây mà chưa được nâng cấp.

Bài tập số 25:

Đề bài : Số Fibonacci

Dãy số Fibonacci F1 F2 …

F1 = F2 = 1

Fn+1 = Fn + Fn-1

được viết liên tục thành dã dài : 11235…

Cho số tự nhiên N (N<= 20000) hãy tìm chữ số thứ N của dãy trên.

Input

N

Output

Chữ số thứ N của dãy.

Thuật giải

Ta cứ sinh hết tất cả 20000 chứ số đầu của dãy trên.

Chương trình

Bài tập số 26:

Đề bài : Xâu Fibonacci

Xét dãy xâu Fibonacci được xác định như sau :

F1 = A

F2 = B

Fn+2 = Fn + Fn+1 (n > 0)

Yêu cầu : Cho n <= 40, và xâu S, hãy tìm số lần xuất hiện của S trong Fn.

Input

N M (M <= 100)

M dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi 1 xâu S có độ dài <= 40

Output

Với mỗi xâu S trong Input, đưa ra số lần xuất hiện tương ứng.

Thuật giải

Giả sử với xâu S, ta gọi k là số nhỏ nhất mà Fk có độ dài >= xâu S.

Gọi X = Fk, Y = Fk+1

Khi đó : Fk+2 = XY, Fk+3 = YXY, …

Ta tính số lần xuất hiện của S trong các Fi kí hiệu là P(i) theo công thức truy hồi :

Giả sử l > k, ta tính P(l+2) theo P(l) và P(l+1)

Vì Fl+2 = Fl + Fl+1 nên P(l+2) = P(l) + P(l+1) + số lần xuất hiện S mà tại vị trí xuất hiện đó S nằm trên vị trí phân cách giữa hai xâu Fl và Fl+1. Vì độ dài S <= X, Y, và Pl luôn có phần đuôi là Y, còn phần đầu Pl+1 có thể là X hoặc Y tuỳ theo tính chẵn lê của l với k.

Như vậy số lần xuất hiện mà S nằm trên điểm cắt sẽ bằng số lần xuất hiện S trên điểm cắt của xâu Y + X hoặc xâu Y + Y tuỳ theo tính khác hay cùng tính chẵn lẻ của k và l.

Bài tập số 27:

Đề bài : Chữ Braille

Bảng chữ cái cho người khiếm thị, được tổ chức dưới dạng các chấm nhỏ trên nền chữ nhật m * n (m * n <= 30).

Vì người khiếm thị không phân biệt biên giới các bảng chữ nên cũng không phân biệt được hai tổ hợp chấm nhận được bằng dịch chuyển tịnh tiến theo hàng và cột. Do đó các chữ cái khác nhau thì tổ hợp chấm tương ứng cũng không giống nhau qua các phép kể trên. Yêu cầu tìm số tất cả các tổ hợp khác nhau có thể tạo ra từ bảng m * n

Input

m n

Output

Số tổ hợp khác nhau.

Thuật giải

Ta chỉ luôn xét các tổ hợp chấm mà hàng 1 cột 1 đều có chấm, như thế sẽ loại đựoc các phép tịnh tiến.Trước hết ta tính số các cách xếp trên dải ô viền gồm hàng 1 cột 1 sao cho hàng1 cột 1 luôn có ít nhất 1 chấm.

Nó sẽ bằng a $= 2^{m+n-2} + (2^{m-1}-1)(2^{n-1} - 1)$

Với mỗi cấu hính viền trên, mỗi cách xếp các chấm ngoài viền sẽ cho ta một cáu hình mới : số cấu hình này bằng :

$b = 2^{(m-1)(n-1)}$

Tổng số cấu hình : a * b

Bài tập số 28 : Trạm vệ tinh.

Đề bài :

Có n thành phố, mỗi thành phố đựoc coi như là 1 điểm trên mặt phẳng với hai toạ độ x, y (n <= 10). Cần đặt các trạm vệ tinh để liên lạc giữa các thành phố. Một thành phố chỉ đựoc liên lạc nếu có cáp nối từ thành phố đến một trạm vệ tinh nào đó, nếu độ dài cáp là l thì chi phí xây dựng cáp là $a*l^2$ trong đó a là hằng số dương cho trứoc. Việc đặt mỗi trạm vệ tinh cũng mất một chi phí b là một số thực dương.

Yêu cầu : tìm cách liên lạc giữa các thành phố sao cho tổng chi phí nhỏ nhất.

Input

Dòng đầu ghi n, a, b

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi toạ độ của thành phố thứ i gồm hai số thực x , y tương ứng là hoành độ và tung độ.

Output

Dòng đầu ghi s là tổng chi phí

Dòng 2 ghi k là số các trạm vệ tinh.

K dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một trạm gồm :

x, y là vị trí của trạm, tiếp theo là danh sách các chỉ số thành phố có cáp nối đến trạm vệ tinh này, tất cả trên một dòng.

Thuật giải

Ta duyệt qua tất cả các phân hoạch của tập 1.. N. Với mỗi phân hoạch thì các thành phố thuộc cùng một lớp sẽ có chung trạm vệ tinh, ta tìm vị trí trạm vệ tinh sao cho tổng chi phí nhỏ nhất, tức là tổng các bình phương khoảng cách là nhỏ nhất. Dễ dàng chứng minh khi đó trạm sẽ đặt ở trọng tâm của lớp các thành phố.

Mở rộng

Bài toán trên đây có thể mở rộng trong không gian mà không ảnh hưởng đến độ phức tạp thuật toán.

Bài tập số 29: Di chuyển rôbốt.

Đề bài :

Trên lưới ô vuông có một con rôbôt. Mỗi bước đi của rôbốt là di chuyển sang một ô kề cạnh. Cần viết chương trình đều khiển rôbốt. Hãy tính số các chương trình có thể viết để di chuyển rôbôt từ vị trí 0, 0 đến vị trí x, y cho trước sau đúng k bước di chuyển.

Input

3 số nguyên x, y, k (|x|, |y| <= 16, k <= 16)

Output

Một dòng duy nhất ghi số các cách di chuyển.

Thuật giải

Nếu ta coi mỗi ô của lưới như một đỉnh của đồ thị (ta chỉ xét các ô mà đường đi độ dài k có thể đi qua mà tới được x, y _ dễ dàng chứng minh được là có không quá (k+1)*(k+1) ô như vậy). Ta lập ma trận quan hệ A(i,j) = 1 nếu đỉnh i có thể di chuyển sang đỉnh j bằng 1 phép di chuyển của Rôbôt,và bằng 0 nếu ngược lại.

Ta tính ma trận là tích k lần của tức A^k khi đó số các đường đi sẽ là $A^k(u,v)$ trong đó u tường ứng với ô 0, 0 và v tương ứng với (x,y).

Bài tập số 30 : Đường đi trên lưới ô vuông.

Đề bài :

Cho lưới ô vuông m * n (m, n <= 20), trên mỗi ô của lưới có ghi một số nguyên dương.

Mỗi bước đi trên lưới là từ một ô di chyển sang ô kề cạnh. Hãy tìm một đường đi trên lưới qua đúng k ô sao cho tổng tất cả các số nhận được khi đi qua các ô là lớn nhất có thể (mỗi ô có thể qua lại nhiều lần).

Input

m n k (k <= 200)

m dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi n số trong đó số thứ j của dòng thứ i là số ghi trên ô i,j của lưới.

Output

S là tổng cực đại.

K dòng tiếp theo ghi danh sách các ô trên đường đi gồm hai số là hàng và cột của ô.

Thuật giải

Gọi C(l,i,j) là tổng lớn nhất thu đươc khi qua k ô, và kết thức tại ô i, j.

C(l,i,j) sẽ được tính như là tổng max của C(l-1,x,y) + Giá trị ô i, j trong đó x,y là một ô thuộc lưới là có thể di chuyển sang i, j bằng 1 bước di chuyển. Từ công thức đó ta sẽ suy ra đường đi có giá trị cực đại, và tìm lại đường bằng truy vết.

Bài tập số 31: Gray Code

Đề bài :

Xét dãy gồm các số 0 , 1, … 2^n - 1. Hãy tìm cách xếp các số này thành một vòng tròn sao cho hai số bất kì cạnh nhau thì trong biểu diễn nhị phân chỉ khác nhau ở đúng 1 bit.

Input

n (n <= 15)

Output

Gồm 1 dòng ghi 2^n số theo vòng tròn tìm được.

Thuật giải

Ta có công thức tính một dãy thoả mãn bài toán :

S(i) = i XOR (i shr 1)

Dễ dàng chứng minh.

Bài tập số 32 : Thay xâu

Đề bài :

Cho N xâu kí tự (N <= 200), mỗi xâu có độ dài L (L <= 20), và chỉ gồm các kí tự 0, 1, và *. Mỗi cách biến đổi một xâu là thay toàn bộ * trong xâu đó bởi 0, hay toàn bộ bởi 1.

Yêu cầu hãy tìm cách biến đổi các xâu sao cho cuối cùng thu được các xâu chỉ gồm 0, 1 và đôi một khác nhau.

Input REPL.INP

N L

N dòng tiếp theo, dong thứ i ghi xâu thứ i.

Output REPL.OUT

Dòng đầu ghi 1 / 0 tương ứng có tìm được nghiệm hay không. Nếu có :

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi một trong 3 số : 0 / 1 / 2 tương ứng với biến đổi toàn bộ * của xâu i thành 0 / 1 / hay không biến đổi gì.

Thuật giải

Với mỗi xâu X việc thay * bằng0 / 1 se tương ứng với hai xâu nhị phân. Như vậy số xâu tạo ra sẽ không quá 2*n. ta đưa bài toán về tìm cặp ghép cực đại trên đồ thị hai phía : tìm cách ghép mỗi xâu ban đầu với một xâu nhị phân.

Bài tập số 33 : Rôbôt

Đề bài :

Cho một đồ thị có hướng N dỉnh . Tại thời điểm 0 ở, một số nút có M con rôbôt. Rôbôt luôn luôn di chuyển, mỗi lần nó chỉ được sang một nút khác có cung nối từ nút nó đang đứng, và thời gian đi trên mỗi cung luôn luôn bằng 1. Cho biết vị trí ban đầu của M rôbôt hãy chỉ ra cách di chuyển của các rôbôt sao cho chúng gặp nhau tại cùng nút nào đó sau thời gian sớm nhất. Tại một nút có thể có nhiều rôbôt cùng một lúc.

Input

N, M (N <= 50 ; M <= 30)

Dòng 2 ghi M số là nút ban đầu của các rôbôt.

Các dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi 2 sô u, v cho biết có cung 1 chiều từ u đến v.

Input đảm bảo có nghiệm với thời gian < 20.

Output

T là thời điểm sớm nhất.

M dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một đường đi của 1 rôbôt bao gồm dãy T+1 nút trên hành trình.

Thuật giải

Gọi C(i,j) là tập các rôbôt có thể đến được nút i tại thời điểm j. Ta có thể tính các C(i,t) dễ dàng từ các C(x,t-1). Cứ tính đén khi nào có C(i,T) chứa tất cả các rôbôt. Đó chính là ví trí và thời điểm sớm nhất các rôbôt gặp nhau.

Bài tập số 34 : Nối mạng máy tính

Đề bài :

Cho một mạng gồm N máy tính , có M kênh nối hai chiều giữa các cặp máy với nhau, mỗi kênh nối có một chi phí. Một cách nối mạng là chọn một tập các kênh nối sao cho hai máy bất kì có thể liên lạc với nhau qua các kênh nối và các máy trung gian.

Hãy tìm hai cách nối khác nhau sao cho tổng chi phí của hai cách nối là nhỏ nhất.

Input

N, M (N <= 100 ; M <= N*(N-1) / 2)

M dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một kênh nối gồm 3 số : u, v, c cho biết có kênh nối u, v với chi phí c.

Output

Dòng đầu ghi 2 số s1, s2

2 dòng tiếp theo , mô tả lần lượt cách nối ứng với chi phí s1, s2. Mỗi cách nối gồm danh sách các cặp máy u, v trên cùng một dòng.

Thuật giải

Dễ thấy đây là bài toán tìm cây khung nhỏ nhất và nhỏ thứ 2 của đồ thị. Dùng thuật toán Prim đẻ tìm cây khung nhỏ nhất, khi đó cây khung thứ 2 sẽ là cây khung lớn nhất của đồ thị sau khi bỏ đi một trong các cạnh của cây khung thứ nhất.

Bài tập số 35 : CiPHER

Đề bài :

Cho xâu kí tự S có độ dài N (N <= 500) và một từ điển gồm M từ (M <= 100), mỗi từ có độ dài không quá 100. Tất cả các xâu đều chỉ gồm các chữ cái thường. Hãy tìm cách xoá đi ít nhất các kí tự của S để xâu nhận được có dạng là dãy ghép liên tiếp các từ trong từ điển (mỗi từ trong từ điển có thể xuất hiện bao nhiêu lần tuỳ ý).

Input

N M

Dòng 2 ghi xâu S

M dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi từ thứ i.

Output

Dòng đầu ghi số ít nhất K các kí tự cần xoá.

K dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi vị trí của kí tự cần xóa thứ i.

Thuật giải

Ta giải bài toán bằng qui hoạch động : Goi C(i) là số kí tự cần xoá tối thiểu đối với xâu con 1 đến i của S, để nhận được xâu là ghép liên tiếp của các từ trong từ điển.

Ta tính C(i) như sau :

```
C[i] = Maxint;
For {W trong  tu dien} do
 Begin
     J = vị trí trước i, lớn nhất mà xâu con S từ j đến i có thể xoá mọt số kí tự để đưọc W.
     P = i - j + 1 - length(W); {so ki tu can xoa}
     if C(j-1) + p < C(i) then C(i)  = C(j-1) + p;
 End;
```

Như vậy số kí tự ít nhất cần xoá chính là C(n).

Bài tập số 36 : Quân cờ.

Đề bài :

Cho x1 < x2 < x3

y1 < y2 < y3

Có 3 quân cờ trên trục toạ độ, có toạ độ nguyên ban đầu là x1, x2, x3.

Một phép biến đổi i, j là đặt quân cờ đang ở vị trí i bằng vị trí đối xứng i qua j, vói điều kiện vị trí mới chưa có quân cờ khác đang đứng, và tại j phải có quân cờ đang đứng.

Yêu cầu : chỉ ra dãy các biến đổi để đưa trạng thái gồm 3 vị trí x1, x2, x3 thành trạng thái y1, y2, y3.

Input

x1 x2 x2

y1 y2 y3

Output

1 / 0 ứng với có hay không có nghiệm.

Néu có các dòng tiếp theo mô tả một biến đổi.

Thuật giải

Ta sẽ chỉ ra điều kiện cần và đủ là UCLN(x2-x1,x3-x2) = UCLN(y2-y1,y3-y2) = d

Và x1+x2+x3 đồng dư y1+y2+y3 môđun 2*d. (1)

Dễ thấy đây là đièu kiện cần vì :

Mỗi phép biến đổi : giả sử x2 x1 thành (2*x1 - x2, x1, x3) = (z1, z2, z3) có

UCLN(z2-z1, z3-z2) = UCLN(x2-x1, x3-x1) = UCLN(x2-x1, x3-x2) = d

đông thời : z1+z2+z3 = x1+x2+x3 + 2*(x1-x2) đồng dư x1+x2+x3 theo môđun 2*d vì x1-x2 chia hết d.

Ta sẽ chỉ ra thuật toán biến đổi khi (1) đựơc thoả mãn.

Trước hết ta đưa về dạng đơn giản hơn.

Với bộ (x1,x2,x3) nếu x2-x1 > x3-x2 ta biến đổi x3 x2 để có (x1, 2*x2 - x3, x2)

Ngược lại x1 x2 để có (x2, 2*x2-x1, x3)

Cứ lặp lại các bước như trên. Chú ý rằng hiệu khoảng cách hai quân liên tiếp (x2-x1, x3-x2) = (a,b) biến đổi dạng : (a,b) thành (a,b-a) hay (a-b, b) giống với thuật toán Euclid, cuối cùng sé có dạng (d,d) vì là UCLN(a,b). Như vậy sau hữu hạn bước ta nhận được trạng thái (z1, z2, z3) 3 quân cách đều nhau một khoảng d. z3 - z2 = z2 - z1 = d.

Ta cũng biến đổi (y1,y2, y3) về dạng đơn giản (t1,t2, t3) có t2 - t1 = t3- t2 = d

Vì z1+z2+z3 và t1+t2+t3 vẫn đảm bảo đồng dư môđun 2*d nên z1 - t1 = z2 - t2 = z3-t3 = số chẵn lần d.

Giả sử z1 < t1, khi đó ta lặp

(z1, z2, z3) - (z2, z3, 2*z3-z1) - (z3, 2*z3-z2, 2*z3-z1) = (z1+2d, z2+2d, z3+2d)

Mối lần lặp lại quá trình này toàn bộ các quân dịch chuyển 2*d, như vậy sau (t1-z1)/2d bước ta nhận được t1, t2, t3. Vì t1, t2, t3 nhận đựơc từ y1, y2, y3 nên bằng biến đổi ngược lại ta nhận được y1y2y3.

Từ chứng minh trên, ta sẽ suy ra thuật toán.

Bài tập số 37: in đĩa CD

Đề bài :

Trong một chuyến khảo sát, một đoàn khảo sát đã thu thập được các dữ liệu quí giá đựơc lưu dưới dạng các file. Để thuận tiện, đoàn quyết định thu đĩa CD các file dữ liệu.

Một file dữ liệu không được chia nhỏ mà phải lưu nguyên trong một đĩa, một đĩa có thể lưu nhiều file miễn là tổng dung lượng <= 640M. Hãy giúp đoàn xắp xếp các file in vào các đĩa sao cho cần dùng ít đĩa CD nhất.

Input

N là số file. (n <= 50)

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi 1 số là dung lượng của một file dữ liệu thú i tính theo Mega Byte.

Dung lượng các file đều <= 640M.

Output

M là số ít nhát đĩa.

M dòng tiếp theo,dòng thú i ghi danh sách các file in vào đĩa thứ i.

Thuật giải

Đây chính là bài toán BiN PACKiNG hiện chưa có thuật toán đa thức cho bài toán này. Chúng ta chỉ có thẻ duyệt tham .

Bài tập số 38 : Cắt hình vuông

Đề bài :

Cho hình chư nhật kích thước m * n chia thành các ô vuông đơn vị. Một phép cắt hình chữ nhật cắt nó thành hai hình chữ nhật bằng một nhát cắt tại một đường kẻ ô vuông nào đó. Một hình chữ nhật được cắt thành hai hình chữ nhật con, sau đó lại thực hiện tiếp với hai hình chư nhật con, cứ cắt cho đến khi còn lại là các hình vuông. Yêu cầu tìm cách cắt sao cho số hình vuông sinh ra là ít nhất.

Ví dụ : m*n = 5*6

1	1	1	2	2	2
1	1	1	2	2	2
1	1	1	2	2	2
3	3	4	4	5	5
3	3	4	4	5	5

Kết quả cắt thể hiện trên hình vè : cácô thuộc cùng hình vuông sau khi cắt sẽ có cùng số.

(5, 6) cắt thành (3,6) và (2,6)

(3, 6) cắt thành 2 hình vuông (3,3)

(2,6) cắt thành 3 hình vuông (2,2)

Input

M n (m,n <= 100)

Output

Môt số là số hình vuông nhỏ nhất

Thuật giải

Ta giải bằng qui hoạch động : Gọi C(i,j) là số nhỏ nhất các hình vuông sinh ra bằng phép cắt hinh chữ nhật i* j. Ta có công thức tính C(i,j) như sau :

Nếu i = j thì C(i,j) = 1

Ngược lại bằng tổng nhỏ nhất của hai hình chữ nhật sinh ra từ i*j bằng 1 phép cắt..

$C(i,j) = \min\{C(i,k) + C(i,j-k), C(k,j) + C(i-k,j)\}$

Bài tập số 39 :

Đề bài :

Trong một đại hội, co n cuộc họp diễn ra . Mỗi cuộc họp xác định bởi s và f là thời điểm bắt đầu và kết thúc. Một phòng họp không thể diễn ra dòng thời hai cuộc họp, mà cuộc họp sau phải bắt đầu ngay hoặc sau khi cuộc họp trước kết thúc.

Yêu cầu bố trí các cuộc họp tại các phòng họp sao cho cần ít phòng họp nhất.

Input

Dòng đầu ghi N là số cuộc họp (N <= 1000).

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi thông tinvề cuộc họp thứ i bao gồm s và f như đã mô tả.

(0 <= s < f <= 32000)

Output

M là số phòng họp.

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi tên phòng họp mà cuộc họp i diễn ra.

Thuật giải

Ta sắp xếp các cuộc họp theo thứ tự tăng dần của s.

Thuật toán tiến hành như sau :
Khởi tạo : 1 phòng họp.
Duyệt lần lượt các cuộc họp theo thứ tự đã xắp xếp : tìm lần lượt các phòng họp, nếu có phòng mà buổi họp cuối cùng (tính đến thời điểm bấy giờ) kết thúc trước khi cuộc họp này bắt đầu thì xếp luôn nó vào phòng họp tương ứng. Nếu không tìm thấy thì ta buộc phải thêm phòng họp mới và xếp vào phòng mới.
Cuối cùng số phòng cần sẽ là nhỏ nhất.

Bài tập số 40 : Hội chợ
Đề bài :
Trong một đợt hội chợ diễn ra N chương trình vui chơi (N <= 1000000), thông tin về mỗi chương trình gồm s là thời điểm bắt đầu và t là thời điểm kết thúc. Người nào khi đã tham gia một chương trình thì phải tham gia cho đến kết thúc. Một người đi thăm hội chợ muốn tham gia nhiều cuộc vui chơi nhất có thể. Bạn hãy giúp anh ta chọn các cuộc vui sao cho anh ta tham gia được nhiều cuộc vui nhất.
Input
N
N dòng môt tả một cuộc vui bao gốm s, f (0 <= s < f < 32000).
Output
M số chương trình nhiều nhất
M số là chỉ số các chương trình được chọn.
Thuật giải
Với mỗi thời điểm i ta xét L(i) là thời điểm bắt đầu muộn nhất trong các chương trình kết thúc lúc i (= -1 nếu không có chương trình nào).

```
i = 0;
fin = 0;
Lặp
   i = thời điểm sớm nhất mà (L(i) >= fin) ;
   Nếu không thấy thì kết thúc.
   Chọn chương trình tương ứng với kết thúc i. mà bắt đầu muộn nhất.
   Fin  = i;
```

Cuối cùng số chương trình đươc chọn sẽ là tối ưu.
Bài tập số 41 : Nối mạng vệ tinh.
Đề bài :
Có N vệ tinh đang bay trong quĩ đạo vòng quanh trái đất, giữa hai vệ tinh bất kí có hoặc không có đường liên lạc hai chiều. Với mỗi vệ tinh i, người ta biết số ki các vệ tinh có đường liên lạc hai chiều với nó. Cho trước các ki , hãy xây dựng một liên lạc các vệ tinh sao cho phú hợp.
Input satellite.inp
Dòng đầu ghi n (n <= 100)
Dòng thứ hai ghi k1, k2 , … kn
Output satellite.out
Gồm n dòng, mỗi dòng gồm n số 0 / 1 biểu diễn ma trận n * n, trong đó số ở dòng i, cột j của ma trận = 1 nếu i,j có liên lạc hai chiều, và 0 nếu không.
Thuật giải
Bài toán tương đương tìm đồ thị vô hướng có bậc cho trước. Ta xây dựng thuật giải như sau :
Tại mỗi bước, ta chọn đỉnh có bậc cao nhất i, sau đó, xét các đỉnh còn lại từ thứ tự bậc cao xuống bậc thấp, gặp đỉnh đầu tiên i mà i, j chưa có liên lạc, ta nối i,j với nhau, giảm bậc i, j đi 1.
Cứ lặp lại cho đến khi hết cạnh thì thôi.
Mở rộng :
Bài toán có thể mở rộng : cho trước một đò thị G = (V, E), và mỗi đỉnh u cho một số nguyên dương d(u). Hãy tìm tập con E’ lớn nhất của tập cạnh E sao cho trong đồ thị G’ = (V,E’) thì deg(u) <= d(u) với mọi đỉnh u. Gọi là bài toán tìm đồ thị bộ phận lớn nhất. Đối với bài toán đó,

người ta cũng đã có thuật giải đa thức nhưng phức tạp hơn nhiều so với thuật toán trình bày ở trên.

Bài tập số 42 : Cấp điện
Đề bài :
Trong một đợt cắm trại, có N trại được cắm. Vị trí của mỗi trại, coi như một điêm trên mặt phẳng, lần lượt là các đỉnh của một đa giác lồi. Người ta cần tiến hành cấp điện cho các trại. Máy phát điện phải đặt tại trại 1 (trại chỉ huy), có một đường dây điện đi qua tất cả N trại, bắt đầu từ trại 1 có máy phát. Yêu cầu : tìm cách mắc điện cho các trại sao cho dây điện cần mắc qua tất cả N trại có độ dài nhỏ nhất.
Input
N (N <= 200)
N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi hai số x, y cho biết toạ đọ trên mặt phẳng của trại thứ i
Output
Dòng đầu là độ dài dây tìm được.
Dòng 2 ghi N số là thứ tự của các trại trên đường dây, bắt đầu từ trại 1.
Thuật giải
Ta giải bài toán trên bằng qui hoạch động : Nếu gọi
A(i,j) là độ dài dây ngắn nhất cần mắc cho các trại i, i+1, … j (các đỉnh theo chiều đánh số tức là sau n là 1) , và bắt đầu từ i
B(i,j) cũng định nghĩa tương tự nhưng thay vì bắt đầu từ i phải bắt đầu từ j.
Giả sử ta tính được hết các A(i,j), B(i,j) mà j-i <k, ta sẽ tiếp tục tính trong trường hợp j-i=k.

Ta chú ý rằng vì đa giác là lỗi nên
tập đỉnh i, … j cùng tạo thành đa giác lồi, do đó đường đi ngắn nhất phải có dạng :
Hoặc đi dến i+1 : độ dài ngắn nhất = độ dài(i,i+1) + A(i+1,j)
Hoặc đi đến j : = độ dài(i,j) + B(i+1,j)
Chú ý phải là B(i+1,j) vì khi đó đường đi tiếp bắt đầu từ j.
A(i,j) = min của hai độ dài trên. Tương tự ta tính B(i,j) cùng với A(i,j)
Như vậy cuối cùng độ dài dây nhỏ nhát chính là A(1,n)

Bài tập số 43:Di chuyển trong mê cung
Đề bài :
Cho mê cung là môt ma trận vuông , trong đó ô trái trên và phải dưới ghi 0, các ô còn lại ghi 1, 2, 3, hoặc 4. Trò chơi như sau : một người cần đi vào từ ô trái trên và đi ra khỏi mê cung tại ô phải dưới. Từ một ô có thể đi sang mộ ô chung cạnh. Các ô trên đường đi phải có dạng 1, 2, 3, 4, 1, 2… từ ô 0 xuất phát chỉ có thể đến ô 1, nhưng từ
ô kề với ô thoát có thể đi tới ô thoát. Yêu cầu : tìm đường đi ngắn nhất cho người chơi.
Input
m, n (m, n <= 500)
m dòng tiếp theo, mỗi dòng n số mô tả ma trận số.
Output
1 / 0 trong trường hợp có hay không có đường đi.
Nếu có các dòng sau ghi các ô lần lượt trên đường đi, kết thúc bằng ô thoát m, n.
Thuật giải
Đây là bài toán áp dụng thuật toán loang thuần tuý.

Bài tập số 44 : Đường một chiều
Đề bài :
Một hệ thống giao thông gồm có N nút giao thông đánh số từ 1 đến N và M đường hai chiều nối một số cặp nút , không có hai đường nối cùng một cặp nút. Hệ thống đảm bảo đi lại giưa hai hút bất kì. Để đảm bảo an toàn, người ta quyết định rằng các đường hai chiều trước đây nay sẽ

thành một chiều, và vấn đề ở chỗ chọn chiều cho mỗi đường như thế nào. Hãy tìm cách định hướng các cạnh sao cho hệ thống vẫn đảm bảo đi lại giữa hai cặp nút bất kì.

Input

Dòng đầu ghi hai số nguyên dương N, M (1 < N < 500, 1 < M < 10000)

M dòng tiếp theo, mỗi dòng thể hiện một đường hai chiều gồm u, v là chỉ số hai nút mà nó nối tới.

Output

Dòng đầu ghi 1 / 0 tương ứng với có tìm được phương án thoả mãn hay không.

Nếu có, M dòng tiếp theo mỗi dòng thể hiện sự định hướng một cạnh bao gồm hai số u, v với ý nghĩa định hướng cạnh (u,v) thành đường một chiều từ u đến v.

Thuật giải

Ta loang theo chiều sâu để xây dựng một cây DFS, các cạnh trên cây sẽ đựoc định hướnh theo chiều từ gốc đến lá. Các cạnh không thuộc cây sẽ được định hướng ngược lại (tức là theo chiều lá về gốc).

Sau khi định hướng như trên, ta kiểm tra xem đồ thị có hướng sau khi định chiều cạnh có còn liên thông hay không, nếu không thì bài toán vô nghiệm, ngược là hiển nhiên đó là nghiệm của bài toán. Để kiểm tra tính liên thông, ta có thể dùng thuật toán Tarjan với độ phức tạp O(n+m) (xem thuật toán Tarjan ở bài 48)

Bài tập số 45 : Kế hoạch sửa chữa.

Đề bài :

Một cửa hàng sửa chứa nhận được N yêu cầu sửa chữa. Thông tin về một yêu cầu gồm hai số nguyên dương : t là thời gian sửa, f là thời hạn hoàn thành. Thời gian bắt đầu làm vệc là 0, trong một thời điểm của hàng chỉ thực hiện được một yêu cầu mà thôi. Hãy giúp của hàng bố trí lịch thực hiện các yêu cầu sửa chữa sao cho số yêu cầu quá hạn là nhỏ nhất.

Input

Dòng đầu ghi N (N <= 100).

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi thông tin về yêu cầu thứ i gồm hai số nguyên dương, t, f đúng như mô tả ở trên.

Output

Dòng đầu ghi số các yêu cầu quá hạn tìm được.

Dòng 2 ghi N số là một hoán vị của (1,2…N), thể hiện thứ tự thực hiện các yêu cầu, trong đó số thứ i là chỉ số yêu cầu thực hiện trong lần sủa thứ i.

Thuật giải

Vì khi một yêu cầu đã bị quá hạn thì ta không quan tâm đến việc nó quá hạn bao lâu, vì đằng nào cũng chỉ tính là quá hạn. Do đó, ta có thể đẩy các công việc quá hạn sang thực hiện sau cùng, và đưa bài toán về tìm dãy nhiều nhất các yêu cầu có thể thực hiệc được đúng hạn.

Dễ thấy nếu a là một dãy tối án tối ưu, nếu có hai yêu cầu thực hiện liên tiếp nhau i, j mà fi > fj thì ta hoàn toàn có thể đổi thứ tự thực hiện thành j trước i sau mà không làm ảnh hưởng tới tính tối ưu. Do đó, ta chỉ tìm các phương án trong đó dãy f tăng dần. Vì vậy, trước hết ta sắp xếp các yêu cầu theo thứ tự tăng dần của thời gian hoàn thành, và đánh số lại : (s1, f1), (s2, f2), …(sn, fn).

Ta giải dựa trên ý tưởng quy hoạch động : Gọi Si là dãy nhiều nhất các yêu cầu có thể thực hiện đúng hạn trong các yêu cầu từ 1 đến i, nếu có nhiều dãy có cùng độ dài thì S sẽ tương ứng với thời hạn hoàn thành các yêu cầu đúng hạn là sớm nhất..

Ta tính Si+1 dựa vào Si như sau :

Nếu thêm yêu cầu i+1 vào Si mà thoả mãn đúng hạn thì hiển nhiên Si+1 = Si + (i+1)

Ngược lại, trong dãy Si + (i+1) phải bỏ một phần tử, dê thấy khi đó ta sẽ bỏ yêu cầu nào có f lớn nhất. Dãy thu được chính là dãy tối ưu cho Si+1

Bài tập số 46 : Đa giâc lồi.

Đề bài :

Ta vẽ trên mặt phẳng một đa giác lồi có N đỉnh (N <= 10000). Mỗi đỉnh được gán một nhãn là một số tự nhiên trong khoảng 1 đến N, hai đỉnh khác nhau có nhán khác nhau. Sau đó lại kẻ thêm M đường chéo của đa giác sao cho hai đường chéo bất kì đôi một không cắt nhau, tuy nhiên có thể có điểm chung là các đỉnh đầu mút của đường chéo. Cho biết nhãn hai của 2 đỉnh hai đầu các đoạn thẳng trên mặt phẳng. Yêu cầu : in ra nhãn của các đỉnh dọc theo các cạnh của đa gíac (có thể thuận hoặc ngược chiều kim đồng hồ)

Input

N M (0 <= M<= N-3)

M+N dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi hai số u, v cho biết có một đoạn thẳng nối hai đỉnh có nhãn u và v.

Output

Một dòng N số là nhãn của các đỉnh lần lượt theo cạnh của đa giác.

Thuật giải

Ban đầu ta tìm một chu trình bất kì C, sau đó lần lượt từng bước ta tiến hành mở rộng chu trình gốc đó.

Tại mỗi bước, bằng thuật toán loang chiều rộng BFS ta tìm một chu trình có một cạnh chung với C, và ta tiến hành mở rộng C bằng cách ghép thêm chu trình mới và bỏ đi cạnh chung. Chú ý rằng vì đồ thị ban đầu đã là song liên thông nên luôn tìm được chu trình như vậy. Cuối cùng ta tìm đựoc chu trình C chứa tất cả N đỉnh. Thứ tự lần lượt trên chu trình cũng là thứ tự trên cạnh của đa giác.

Bài tập số 47 : Lát cắt ít cung nhất.

Đề bài :

Cho một mạng gồm N đỉnh, đỉnh phát 1 và đỉnh thu là N. Mỗi cung có một trọng số là một số nguyên dương. Hãy tìm lát cắt nhỏ nhất, trong số các lát cắt nhỏ nhất tìm lát cắt có số cung thuộc lát cắt là nhỏ nhất.

Input

Dòng đầu ghi N (N <= 100)

Các dòng tiếp theo, mõi dòng ghi u, v,s cho biết có một cung nối u đến v với trọng số s (s nguyên dương <= 10000). Không có hai cung nối cùng 1 cặp điểm

Output

Dòng đầu ghi hai số là giá trị và tổng số cung của lát cắt.

Dòng 2, 3 lần lượt ghi chỉ số các đỉnh của hai tập đỉnh do lát cắt phân hoạch ra

Thuật giải

Ta cộng mỗi cung bằng một một độ lệch d đủ nhỏ sao cho d không làm ảnh hưởng đên luồng cực đại (cụ thể d = 1 / (số cung + 1)). Khi đó lấy phần nguyên lát cắt trong mạng mới sẽ cho lát cắt trong mạng ban đầu, đồng thời số cạnh sẽ nhỏ nhất.

Mở rộng hay bài toán tương tự

Bài toán có thể thay vì tìm lát cắt nhỏ nhất vói ít cạnh nhất bằng lát cắt vơi nhiều cạnh nhất khi đó thay vì cộng d ta trừ mỗi cung đi d.

Bài tập số 48: Thành phần liên thông mạnh - Thuật toán Tarjan

Đề bài :

Cho đồ thị có hướng có N đỉnh, và M cung một chiều. Một thành phần liên thông mạnh của đồ thị là một tập các đỉnh sao cho hai đỉnh u, v thuộc tập đều có thể đi từ u đến v bằng các đường một chiều, đồng thời nếu thêm vào bất kì một đỉnh nào khác ngoài tập hợp thì điều kiẹn vừa nêu không còn đúng. Yêu cầu chỉ ra các thành phần liên thông mạnh của đồ thi

Input

N, M (N <= 100, M <= N*N)

M dòng tiép theo, mỗi dòng ghi hai số u, v cho biết có cung 1 chiều nối u đến v.

Output

K số thành phần son liên thông.

K dòng, mỗi dòng ghi danh sách các đỉnh thuộc một thành phần liên thông mạnh.

Thuật giải

Thuật toán Tarjan : Ta duyệt theo chiều sâu các đỉnh, với mỗi đỉnh ta lưu 2 số :

Low(u) và Number(u), trong đó Number sẽ là thứ tự duyệt đỉnh u còn Low sẽ bằng Number nhỏ nhất trong các đỉnh thuộc thành phần liên thông mạnh với u, tức là được duyệt đầu tiên trong các đỉnh thuộc liên thông mạnh.

Tại bước duyệt dỉnh u :

```
 Khởi tạo Low (u) = Number(u) = thứ tự duyệt
đẩy u vào stack
 For các v mà u có thể tới đựoc :
 {
     nếu  v chưa thăm thì thăm(v);
     Low(u) = min(Low(u) , Low(v))
 }
```

nếu sau khi thăm xong toàn bộ u mà Low(u) = Number(u) thì u là đỉnh tổ tiên của thành phần son liên thông mạnh, ta chỉ việc tìm lại các đỉnh trong stack mà là con của u và chưa được giải phóng. Ngược lại giải phóng stack

Bài tập số 49 : Truyền tin .

Đề bài :

Cho một mạng máy tính gồm N đỉnh, với mỗi máy ta biết danh sách các máy mà nó có thể truyền tin đến. Nếu một máy u nhận được tin, thì các máy trong danh sách của u sẽ nhận đựoc tin do u truyền. Yêu cầu : Biết quan hệ các máy, hãy tìm cách thông báo cho ít máy nhất đề cuối cùng thông tin được truyền đếncác máy.

Input

Dòng đầu ghi N (N <= 500),

Các dòng tiếp theo, mõi dòng ghi u, v cho biết có đường truyền tin một chiều từ máy u đến máy v

Output

Dòng đầu số k là số nhỏ nhất các máy cần phát tin.

K dòng tiếp theo ghi chỉ số các máy cần phát tin đến.

Thuật giải

Ta loang theo chiều sâu 2 lần

```
  For i = 1 to n do
        nếu chưa thăm i thì
        {
           DFS(i)
           Dánh dấu i
        }
```

khởi tạo lại thông số chưa thăm, đẻ thăm hết lại từ đầu

```
for i = n downto 1 do
 nếu đánh dấu i và  chưa thăm i thì
 {
  ghi nhận i là một máy cần đựoc phát tin trực tiêp
  DFS(i)
}
```

Bài tập số 50: Đường đi dài nhất

Đề bài

Một mê cung có dạng là một lưới ô vuông kích thước m * n. Trong đó có một số ô cửa còn lại là các ô cấm. Các ô cửa có thể đi qua còn các ô cấm thì không thẻ, từ một ô chỉ có thể đi sang các ô kề cạnh với ô đang đứng. Biết rằng lưới ô vuông thoả mãn hai ô của bất kì đều có và **duy nhất** một đường đi đơn. Cho bản đồ mê cung, hãy tìm đường đi đơn dài nhất trong mê cung,

Input

Dòng đầu ghi m, n (0 < m, n < =1000).

m dòng tiếp theo, mỗi dòng gồm n số 0, 1 thể hiện bảnđồ mê cung, trong đó số 0 tương ứng ô cấm 1 tương ứng ô cửa.

Output

Một dòng số ô trên đường đi dài nhất.

Thuật giải

Dễ thấy, các ô của tạo thành một cây, bài toán trở thành tìm đường đi dài nhất trên cây.

Ta giải bài toán như sau :

```
Khởi tạo S là tập gồm các ô là đỉnh treo.
Repeat
    Lần lượt xoá các ô trong S, đồng thời loại khỏi S các đỉnh này;
    Lại lấy các ô là đỉnh treo trong cây mới vào S
 Until  S rỗng.
```

{chú ý : do đặc thù của lưới ô vuông nên các đỉnh thuộc lớp tiếp theo, tức là mới kế nạp vào S, sẽ kề với một trong các đỉnh vừa bị xoá, và số ô kề với một ô không quá 4 nên phép tìm tiếp mất 4*số ô cửa, phép loại mất bằng só ô của. Như vậy thời gián tính toán của thuật toán tương đương với số ô cửa, tức là m*n }

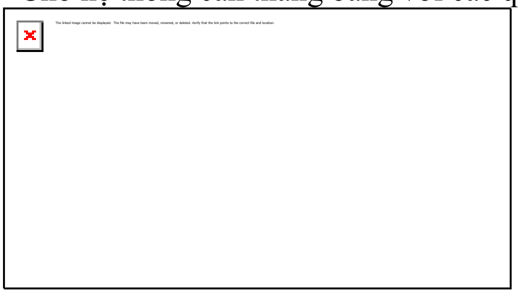
Mở rộng

Thuật toán được áp dụng đề tìm đường đi dài nhất của một cây tổng quát.

Bài tập số 51: Cân

Đề bài

Cho hệ thống cân thẳng bằng với các quả cân như hình vẽ



biết rằng khoảng cách giưa hai điểm đánh dấu trên các thanh thăng bằng đếu bằng 1. Theo định luật về cân bằng trong vật lý ta có :

ở thanh trên : 3*(-3) + 5*(-1) + (1+2+4)*2 = 0

ở thanh dưới   1*(-2) + 2*(-1) + 4*1   = 0

Các hệ số của phương trình cân bằng ô tả bởi một chuỗi kí tư theo khuôn mẫu sau :

các vị trí treo cách nhau một dấu phảy

toàn bộ một thanh thăng bằng, và các thanh con của nó được đặt trong ngoặc ()

Ví dụ : Hệ thống trên hình vẽ trên sẽ mô tả như sau :

(-3, -1, 2(-2, -1, 1))

Biết rằng có N quả cân, các quả cân đều được sử dụng, khối lượng các quả đều khác nhau và là một số tự nhiên trong tập (1,.. N) và N < 17.

Một thanh bất kì có không quá 7 quả cân móc trực tiếp với nó và các hệ số đều nguyên <= 20

Yêu cầu : Cho phương trình hệ số gồm N hệ số, hãy chỉ ra một cách mắc các quả cân sao cho thoả mãn các phương trình cân bằng. Nếu có nhiều nghiệm thì chỉ cần chỉ ra một trong số đó.

Input

Một dòng duy nhất ghi chuỗi các kí tự thể hiện sự mô tả hệ thống cân như đã trình bày ở trên. Input luôn đảm bảo có nghiệm

Output

Một dòng chứa xâu kết quả theo khuôn mẫu giống với khuôn mẫu xâu mô tả hệ số nhưng ở đây thay vì hệ số ta ghi trọng lượng quả cân tương ứng.

Ví dụ : Nếu xâu Input giống như xâu ví dụ ở đề bài thì xâu kết quả là :

(3, 5, (1, 2, 4))

Cho test ví dụ khác :

Input `(-3(-1(-1(-1,1,2),3),2),3(-2,1,2),6(-2,3))`

Output `((((8,6,1),5),10),(9,4,7),(3,2))`

Thuật giải

Hệ thống cân thăng bằng giống như một cây. Ta giải bài toán trên bằng phương pháp qui hoạch động : Với mỗi thanh cân u, ta ghi nhận tất cả các khả năng có thể mắc các quả cân vào thạnh đó và các thanh treo trực tiếp và gián tiếp với nó (chú ý mỗi khả năng là một tập con của trong tập (1, 2... N) và ta chi mất không quá N bit để lưu, vói điều kiện đề bài N < 17, ta sẽ mất không quá 2 Byte = 1 Word) . Ta qui hoạch động từ thấp đến cao, tại mỗi bước ta xét tất cả các khả năng phân hoạch cho các vị trí mắc thoả mãn thăng bằng và lưu lại. Tuy nhiên, thực ra đây chỉ là cách duyệt có nhớ, trường hợp tồi nhất cũng mất bằng phép duyệt (khi hệ thống chỉ có 1 thanh cân).

Bài tập số 52: Biểu thức đúng

Đề bài

Cho một biều thức là một xâu kí kự chỉ gồm các kí tự (,). Tập hợp M các biểu thức đúng được định nghĩa như sau :

+ xâu rỗng là một biểu thức đúng.
+ Nếu A thuộc M thì xâu (A) cũng thuộc M
+ Nếu A và B thuộc M thì xâu AB cũng thuộc M.

Ví dụ : xâu sau là xâu đúng : ()(()()).

Cùng với định nghĩa tập M, ta có định nghĩa độ sâu của một biểu thức đúng như sau :

+xâu rỗng có độ xâu 0
+ Nếu xâu đúng A có độ sâu s thì (A) có độ sâu s+1
+ A, B đúng thì độ sâu của AB = max độ sâu của A và B.

Yêu cầu : Cho n chẵn và một số k. Hãy cho biết có bao nhiêu biểu thức đúng độ dài n và có độ sâu k.

Input

n, k (n <= 64)

Output

Một dòng duy nhất ghi số các xâu kí tự đúng.

Thuật giải

Gọi C(i,j) là số các biểu thức đúng đdài 2*i và cố độ sâu không quá j. Ta áp dụng công thức tính truy hồi ,thể hiện bởi chương trình như sau :

C(i,j) = 0;
For r = 1 to i-1 do
C(i,j) = C(i,j) + C(r,j) + C(i-r-1, j-1).

Kêt quả cần đưa ra sẽ là : C(n/2, k) - C(n/2, k-1)

Bài tập số 53: Chọn khoá học

Đề bài

Tại một số trường đại học, sinh viên muốn lấy được một bằng nào đó phải đáp ứng R yêu cầu. Để đáp ứng các yêu cầu này sinh viên phải chọn một số khoá học để đáp ứng các yêu cầu. Một

khoá học có thể đáp ứng đựoc nhiều yêu cầu khác nhau, và hai khoá học có thể cùng đáp ứng chunh một yêu cầu. Biết rằng mỗi yêu cầu đều luôn có ít nhất một khoá học đáp ứng nó.
Hãy chọn ra một số ít nhất các khoá học đẻ có thể đáp ứng hết tất cả các R yêu cầu.

Input

Dòng đầu ghi R, N trong đó N là số các khoá học (0 < N, R <= 200)
N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi danh sách các yêu cầu mà khoá học thứ i đáp ứng được.

Output

Dòng đầu ghi m là số ít nhất khóa học tìm được
Dòng 2 ghi m số là danh sách các khoá học đựoc chọn.

Thuật giải

Đây chính là bài toán tìm tập phủ nhỏ nhất, hiện nay chưa có thuật toán đa thức cho bài toán bày. Vì vậy, ở đây chúng ta có thể áp dụng một số phương pháp tham và duyệt.

Bài tập số 54 : Ghép xâu

Đề bài

Cho hai tập xâu A và B, tập A có m xâu, B có n xâu. Các xâu thuộc tập A và B chỉ gồm các chữ cái thường và độ dài không quá 100. Bài toán đặt ra là hãy tìm một xâu không rỗng có độ dài ngắn nhất mà có thể biểu diễn dưới dạng tổng của các xâu thuộc A, cũng như dưới dạng tổng các xâu thuộc B, với số lần ghép của một xâu con trong mỗi tập là không hạn chế. Nếu có nhiều xâu như vậy thì chỉ cần chỉ ra một.

Input

Dòng đầu ghi m, n.
m+n dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một xâu, gồm m xâu thuộc A, rồi n xâu thuộc B.

Output

Dòng đầu ghi k là dộ dài nhỏ nhất hoặc -1 nếu không tồn tại xâu thoả mãn bài toán.
Nếu có nghiệm, dòng thứ hai ghi xâu tìm được

Thuật giải

Xét xâu X thoả mãn đề bài có dạng ghép của các xâu thuộc A và các xâu thuộc B.

1	2	3	2	1	4	5
2	4	1	5	4	6	

Xét vị trí ghép giữa các xâu của A và B. Vì X là xâu nhỏ nhất thoả mãn nên các vị trí tiếp giáp sẽ không có vị trí nào giống nhau trong cách ghép bằng tập A và cách ghép bằng tập B. Giả sử w là vị trí ghép hai xâu thuộc B với nhau, và i là xâu tương ứng thuộc B nằm đè lên vị trí w. Vị trí ghép được thể hiện bởi hai thông số : tên xâu (ở đây là iA) và số kí tự còn lại (ở đây là số kí tự kể từ w đến hết vị trí xuất hiện của xâu iA trong lần xuất hiện đó). Dễ thấy, trong xâu X là tối ưu thì hai vị trí ghép bất kì sẽ không có trùng hai thông số như trên. Có thể dễ dàng chứng minh bằng phản chứng : giả sử có vị trí ghép r > w mà cũng xâu iA đè lên, và cũng còn đúng số kí tự từ r đến hết xâu íA trong vị trí xuất hiện đó, thì ta hoàn toàn có thể xoá toàn bộ đoạn xâu X từ w đến r-1, mà xâu thu được vẫn thoả mãn và rõ ràng là tối ưu hơn.
Do đó, bài toán có thể coi là tương đương với tìm đường đi ngắn nhất giữa các trạng thái có dạng (tên xâu, số kí tự còn lại) , và đồ thị tương ứng là đồ thị vô hướng có trọng số. Ta cần đạt đến vị trí mà phần kí tự còn lại có thể lấp kín vừa đủ bởi một xâu thuộc tập khác tập chứa tên xâu (tức là nếu là iA thì phải tim các xâu thuộc tập B). Với dạng tìm đường ngắn nhất này, ta có thể dùng thuật toán Dijstra.

Bài tập số 55 : Phát bưu phẩm.

Đề bài

Một trạm bưu chính trong thành phố nhận được mốt số bưu kiện gửi đến cần được phát đến tay người nhận. Có hai xe đẻ đưa bưu kiện : xe nhỏ và xe lớn. Bưu kiện cũng có hai loại : loại nhỏ có thể chở được bằng xe nhỏ lẫn xe lớn, còn loại lớn chỉ bằng xe lớn. Thông tin về một bưu kiện ngoài lớn nhỏ còn có một số nguyên dương d là số đơn vị thời gian cần thiét đẻ chuyển (cho cả hai loại xe). Trong cùng 1thời điểm một xe chỉ có thể chở mộ bự kiện. Ngoài ra các xe phát bưu kiện phải kết thúc không muộn hơn một thời điểm T nào đó (tình từ thời điểm 0). Yêu cầu : Hãy bố trí các bưu kiện và các xe vận chuyển tương ứng đẻ vần chuyển càng nhiều bưu kiện càng tốt mà không vượt quá thời điểm T.

Input

Dòng đầu ghi số nguyên dương T (1 < = T <= 10000)
Dòng 2 ghi N là số bưu kiện loại nhỏ
Dòng 3 ghi N số là thời gian phát của N bưu kiện loại nhỏ theo thứ tự tăng dần của thời gian.
Dòng 4 ghi M là số bưu kiện loại lớn
Dòng 5 ghi M số là thời gian phát của M bưu kiện loại lớn theo thứ tự tăng dần của thời gian.
(N, M <= 500, thời gian cho các bưu kiện <= 200)

Output

Dòng đàu ghi số các bưu kiện lớn nhất có thể phát đựoc
Dòng 2 ghi danh sách chỉ số (theo thứ tự của Input) các bưu kiện phát bằng xe nhỏ.
Dòng 3 ghi danh sách chỉ số (theo thứ tự của Input) các bưu kiện loại nhỏ phát bằng xe lớn.
Dòng 2 ghi danh sách chỉ số (theo thứ tự của Input) các bưu kiện loại lớn phát bằng xe lớn

Thuật giải

Ta áp dụng thuật giả cho bài toán chia kẹo : Kiểm tra xem với i loại bưu phẩm nhỏ và j loại lớn có thể vận chuyển đựoc hết không. Hiển nhiên ta sẽ chọn các loại bưu phẩm đầu tiên trong danh sách, vì danh sách được xếp theo chiều tăng dần của thời gian. Rõ ràng các loại lớn phải do xe lớn phát, vấn đề còn lại là phân chia các bưu phẩm nhỏ cho hai xe sao cho tổng thời gian chênh lệch nhau nhỏ nhất. Nghiệm nếu có thí phươnh pháp trên sẽ chỉ ra một nghiệm.

Bài tập số 56 : Đường đi Euler nhỏ nhất.

Đề bài

Bài toán 7 cây cầu là một bài toán nổi tiếng, đã được nhà toán học Euler giải quyết từ cách đây hàng thế kỉ và ông đựoc coi là người khai sinh ra lí thuyết đồ thị từ việc giải quyết bài toán này và mở rộng ra là tìm chu trình Euler trên đồ thị bất kì.

Nhiệm vụ của chúng ta ở đây là : Cho một đồ thị vô hướng, hãy tìm trong các chu trình Euler một chu trình có thứ tự từ điển nhỏ nhất.

Input

Dòng đầu ghi n là số đỉnh của đồ thị
Trong n dòng tiếp theo , mỗi dòng ghi n số, trong đó số thứ i của dòng thứ j là số các cạnh nối hai đỉnh i, j.
Đồ thị đã cho luôn đảm bảo có chu trình Euler

Output

Gồm nhiều dòng , mỗi dòng ghi một số là các đỉnh lần lượt trên chu trình Euler tìm được. Cần phải ghi theo cách có thứ tự từ điển nhỏ nhất.

Thuật giải

Ta dựa trên ý tưởng thuật toán Fleury :
Ta bắt đầu bằng đỉnh 1.
Đến mỗi đỉnh, ta tìm trong các đỉnh kề với nó, đỉnh nào có thứ tự nhỏ nhất mà cạnh tương ứng không là cầu của đồ thị hiện thời. Nếu không thì ta buộc phải đi qua cầu.
Sau khi đi qua cạnh nào thì ta lại xoá cạnh đó đi khỏi đồ thị. Cứ như thế cho đén khi hết cạnh là ta đã đi theo chu trình Euler có thứ tự từ điển nhỏ nhát.

Bài tập số 57 : Đường đi dài thứ k

Đề bài

Cho dồ thị vô hướng có trọng số gồm n đỉnh, người ta cần đi từ đỉnh 1 đến đỉnh N. Do nhiều yêu cầu khách quan, người ta không chỉ muốn biết đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh đó mà còn cần biết k đường đi có độ dài ngắn nhất giữa 1 và N. Bạn hãy viết chương trình tìm k đường đi ngắn nhất giữa 1 và N.

Chú ý : đường đi ở dây có thể lặp đỉnh và cạnh.

Input

Dòng đầu ghi N là số đỉnh của đồ thị và số nguyên dương k (0 < k <= N <= 100)

Các dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một cạnh của đồ thị gồm ba số nguyên dương : u, v, c cho biết đường hai chiều nối u với v có độ dài c. Không có hai đường nào cùng nối một cặp điểm.

Output

Dòng đầu ghi d là độ dài đường đi ngắn thứ k.

Dòng thứ hai mô tả đường đi gồm dãy các đỉnh trên đường đi bắt đầu từ 1 kết thúc ở N.

Thuật giải

Gọi F(i,j) độ dài đường đi ngắn thứ j từ 1 đến i. Ta áp dụng thuật toán Dijstra :

Khởi tạo các F(i,j) có giá trịvô cùng trừ C(1,1) bằng 0.

Mỗi lần tìm một (i,j) chưa đánh dấu có nhãn nhỏ nhất.

Từ i cập nhật các đỉnh kề vời nó : Mỗi lần thêm một đương mới đến đỉnh u thì danh sách các đường đi lại được cập nhật và ta chỉ lưu k đường đi đầu tiên mà thôi. Sau khi cập nhật các đỉnh kề thì đánh dấu i,j để lần sau không tìm lại nữa.

Cứ như thế cho đến khi không còn nhãn chưa đánh dấu.

Bài tập số 58: Lập lịch cần ít máy nhất.

Đề bài

Có n công việc cần thực hiện trên các máy. Mỗi công việc i cần bắt đầu tại thời điểm s(i)và kết thúc tại f(i). Mỗi máy chỉ có thể thực hiện lần lượt các công việc, hơn thế nữa, sau khi làm xong công việc i để chuyển sang công việc j cần C(i,j) đơn vị thời gian mới có thể sẵn sàng làm công việc j.

Yêu cầu : Cần lập lịch cho tất cả các công việc thực hiện trên các máy sao cho số máy cần dùng là ít nhất.

Input

Dòng đầu ghi só N (N <= 200)

Dòng thứ i trong N dòng tiếp theo ghi thông tin về công việc thứ i bao gồm hai số nguyên dương s(i) và f(i) .

N dòng cuối cùng, mỗi dòng ghi n só nguyên dương mô tả ma trận C, trong đó C(i,j) là số thứ j của dòng thứ i.

Output

Dòng đầu tiên ghi k là số máy tối thiểu cần dùng.

K dòng tiếp theo, mõi dòng ghi danh sách các công viẹc đưọc làm trên một máy.

Thuật giải

Ta đưa bài toán về tìm cặp ghép cực đại trên đồ thị hai phía. Xây dựng đồ thị hai phía mỗi phía có n đỉnh, i,j có cạnh nối nếu công việc j có thể làm sau công việc i trên cùng một máy.

Giả sử ta có một cách phân công nào đó . Ta chọn tập cạnh (i,j) mà j thực hiện ngay sau i trên cùng một máy. Khi đó tập cạnh sẽ một cặp ghép của đồ thị hai phía.

Chú ý là mỗi lần tìm thêm cặp ghép mới ta lại giảm đưọc số máy đi 1, do đó nếu cặp ghép cực đại có k cạnh thì cần tối thiểu N-k máy, đó là kết quả tối ưu.

Bài tập số 59 : Phân chia dãy.

Đề bài

Một dãy số a nguyên dương gồm n phần tử (n < 10000), hãy tìm cách phân hoạch tập (1..n) thành một số ít nhất các tập con, sao cho nếu i, j bất kì thuộc cùng 1 tập hợp mà i < j thì a(i) < a(j).

Input

N

Dòng thứ hai ghi N số nguyên dương a(1), a(2), … a(n)

Output

Dòng đầu ghi k là số phân hoạch nhỏ nhất tìm đựoc.

K dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi danh sách theo thứ tự tăng dần chí số các phần tử của môt phân hoạch.

Thuật giải

Về nguyên tắc, ta có thể áp dụng thuật toán cặp ghép cực đại như bài 59, tuy nhiên sẽ rất chậm. Với đặc thù cho riêng bài này, ta có thể áp dụng thuật toán sau :

(1) Bắt đầu từ phần tử đầu tiên của dãy, tìm phần tử gần nhất sau nó mà lớn hơn nó, sau đó lại bắt đầu từ phần tử mới tìm được cứ như thế cho đến khi không tìm được thêm nữa.

Khi đó các phần tử xuất hiện trong bước tìm kiếm sẽ tương ứng với một phân hoạch. Chọn phân hoạch rồi xoá đi khởi dãy.

Nếu dãy vẫn còn thì lại tiếp tục bước (1)

Ví du dãy :

(1, 3, 2, 7 , 6, 5, 8)

Lần đầu tiên thực hiện (1) ta có dãy : 1, 3, 7, 8

Dãy ban đầu còn lại : 2, 6, 5

Tìm đựoc : 2,6

Dãy còn lại 5

Tìm được 5, dãy rỗng.

Cuối cùng kết quả là : (1,3,7,8) , (2,6) và (5)

Bài tập số 60: Đặt trạm bưu điện

Đề bài

Trên đường cao tốc (coi như một đường thẳng nằm ngang) có n làng đánh số từ 1đến n dọc theo đường , ví trí của mỗi làng được thể hiện bằng một số nguyên dương s là khoảng cách từ làng đó đến làng 1. Người ta cần đặt k trạm bưu điện tại các làng sao cho tổng khoảng các từ các làng đến trạm bưu điện gần làng nhất là nhỏ nhất.

Input

Dòng đầu ghi hai số n, k (1 <= k < n < 1000)

Dòng thứ hai dòng ghi dãy n-1 số nguyên dương tăng dần là vị trí của các làng 2, 3, … n (vị trí làng 1 bằng 0).

Output

Dòng đầu ghi T là đáp số tối ưu.

Dòng hai ghi k só theo thứ tự tăng dần là danh sách tên các làng được đặ trạm bưu điện.

Thuật giải

Ta giải bài toán này bằng phương pháp qui hoạch động như sau :

Gọi f(i,j) là tổng khoảng cách tối ưu trong i làng đầu tiên và với j trạm bưu điện.

Ta có thể dễ dàng tính F(i,j) từ các (l, j-1) bằng các thử vị trí các trạm bưu điện đặt cuối cùng.

Bài tập số 61 : Cũng là đặt trạm bưu điện

Đề bài

Bài toán 61 cũng tương tự như bài toán 60 (Input, Output), nhưng yêu cầu tối ưu ở đây là tìm cách đặt các trạm bưu điện sao cho khoảng cách làng phải đi xa nhất, là nhỏ nhất.

Tức là số T nhỏ nhất sao cho làng nào cũng chỉ cần đi không quá T đơn vị khoảng cách để đén trạm bưu điện gần nhất.

Input và Output như bài 60

Thuật giải

Ta giải bài toán bằng phương pháp chia nhị phân.

Thử với T cho trước liệu có tồn tại cách đặt sao cho làng bất kì đều chỉ phải đi không quá T. Ta làm như sau :

Bắt đầu từ làng 1 : Ta tìm làng xa nhất trong bán kính T và đặt trạm đầu tiên tại đó.

Tìm làng đầu tiên ngoài tầm bán kính T từ làng vừa đặt trạm bưu điện, và bắt đầu bước tiếp theo từ làng đó. Cứ như thế cho đến hết N làng, nếu số trạm cần thiết <=k tức là cố thể đặt được ngược lại là không.

Ta chia nhị phân theo T để tìm phương án tối ưu.

Bài tập số 62 : Đồ thị k liên thông

Đề bài

Một đồ thị vô hướngvà liên thông gọi là k liên thông nếu như nó không tăng số thành phần liên thông khi bỏ đi bất kì k-1 cạnh. Yêu cầu : Cho một đồ thi liên thông, hãy cho biết nó là k liên thông với k lớn nhất bằng bao nhiêu.

Input

Dòng đầu ghi số nguyên dương n là số đỉnh của đồ thị.

N dòng tiếp theo, mỗi dòng gồm n số 0/1, trong đó số thứ i dòng thứ j = 1 nếu i có cạnh i,j và 0 nếu ngược lại.

Output

Số k lớn nhất.

K dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một cạnh loại bỏ mà sau khi loại bỏ đi k cạnh này đồ thị mất tình liên thông.

Thuật giải

Ta áp dụng thuật toán luồng tìm lát cắt hẹp nhất.

Xét mọi cặp đỉnh u, v tìm lát cắt hẹp nhất giữa u, v. Trong các lát cắt nhỏ nhất của các cặp (u,v), tìm cặp u,v nào có lát cắt nhỏ nhất là nhỏ nhất. Khi đó số cạnh của lát cắt chính là số k cân tìm, và lát cắt tương ứng sẽ cho tập cạnh cần tìm.

Mở rộng

Ta có thể mở rộng thay vì.tìm cách loại bỏ cạnh phải loại bỏ đỉnh. Khi đó vẫn thuật toán luồng nhưng phải tách đỉnh để tìm lát cắt.

Bài tập số 63 : Lắp ráp linh kiện

Đề bài :

Trong dây chuyền lắp ráp, một rôbôt phải lắp ráp lần lượt N linh kiện theo thứ tự từ 1 đến N. Rôbốt có M công cụ để lắp ráp. Biết C(i,j) là thời gian rôbôt lắp linh kiện i bằng công cụ j (1 <= i <= N ; 1 <= j <= M), đồng thòi nếu i, j là hai công cụ được dùng trong lắp ráp hai linh kiện liên tiếp nhau thì rôbôt phải mất thêm D(i,j) thời gian (1 <= i,j <= N). Hãy chỉ ra cho rôbôt lịch trình thực hiện lắp ráp các linh kiện sao cho tổng thời gian là nhỏ nhất.

Input

Dòng dầu ghi hai số N, M (N, M <= 100)

N dòng tiếp theo mô tả ma trận C.

M dòng cuối mỗi dòng M số mô tả ma trận D
(Các số cho trong Input đều là các số nguyên dương <= 32000)

Output
Dòng đầu ghi T là thời gian nhỏ nhất tìm được.
Dòng hai ghi N số, trong đó số thứ i là công cụ thực hiện lắp ráp linh kiện i.
Thuật giải
Ta giải bài toán trên bằng phương pháp Qui hoạch động: Gọi F(i,j) là thời gian tối thiểu cần để lắp ráp i linh kiện đầu tiên trong đó sử dụng công cụ j thực hiện lắp ráp linh kiện i. Ta tính F(i,j) theo công thứ sau :

$$F(i,j) = \min_{1 <= k <= M} \{F(i-1,k) + D(k,j) + C(i,j)\}$$

Bài tập số 64 : Mạng giao thông
Đề bài :
Cho một mạng giao thông gồm có N nút và M đường một chiều nối giữa một số cặp nút. Mạng giao thông hiện tại có thể không đảm bảo đi lại từ một nút bất kì tới mọi nút khác, hãy thêm một số ít nhất các đường một chiều để mạng giao thông đảm bảo yêu cầu trên.
Input
Dòng đầu ghi N, M (N <= 200 ; M <= N*(N-1))
M dòng tiếp theo mỗi dòng ghi 2 số u, v cho biết có đương một chiều nối u đến v.
Output
Dòng đầu ghi k là số tối thiểu các đường một chiều cần thêm.
K dòng sau, mỗi dòng thể hiện một đường một chiều cần nối thêm gồm hai số u, v với ý nghĩa như Input.
Thuật giải
Trước hết ta dùng thuật toán Tarjan tìm các thành phần liên thông mạnh của đồ thị, sau đó chập mỗi thành phần liên thông mạnh thành các siêu đỉnh. Khi đó trên đồ thị thu được sẽ không có chu trình, do đó sẽ tồn tại các đỉnh không có cung đi ra và các đỉnh không có cung đi vào. Các đỉnh cô lập sẽ lấy vào tập Z, còn lại các đỉnh không có cung đi vào tập X, các đỉnh không có cung ra vào tập Y. Khi đó mọi đỉnh v thuộc Y sẽ có u thuộc X mà u đến được v, ngược lại u thuộc X luôn có v thuộc Y mà u đến được v.
(i) Nếu X và Y đều có > 1 đỉnh thì : Xét u1 thuộc X, v1 thuộc Y mà u1 đến được v1. Nếu tồn tại u # u1thuộc X, v # v1 thuộc Y mà u đến được v thì nối v1 đến u, khi đó v1 có cung đi ra, u có cung đi vào. Ngược lại phải tồn tại u khác u1, v khác v1 sao cho u1 đến được v và u đến được v1, ta thêm cung (v1,u1), khi đó u1 có cung đi vào, v1 có cung đi ra. Lặp lại bước (i) cho đến khi X hoặc Y chỉ còn 1 đỉnh duy nhất, đồng thời sau mỗi bước lại cập nhật lại tập X, Y.
Nếu X còn duy nhất u,khi đó u đến được tất cả các đỉnh thuộc Y. Chọn một đỉnh v bất kì thuộc Y, với mỗi v1 khác v thuộc Y thêm cung (v1, u). Trong trường hợp Y còn 1 đỉnh làm tương tự. Cuối cùng X, Y mỗi tập chỉ còn 1 đỉnh duy nhất, ta nối u, v với các đỉnh cô lập trong tập Z thành một vòng tròn có hướng từ v, qua các đỉnh cô lập, rồi quay về u.
Đồ thị thu được sẽ là một thành phần liên thông mạnh duy nhất.
Chú ý : trong trường hợp phép thêm cung, mà có đầu mút là một siêu đỉnh, thì trong đồ thị ban đầu sẽ là một đỉnh bất kì đại diện của thành phần liên thông mạnh tương ứng.
Ví dụ : Nếu siêu đỉnh u đại diện cho (u1,u2,..), v đại diện cho (v1, v2, …) thì phép thêm cung (v,u) tương ứng với (v1, u1) trong đồ thị ban đầu.

Bài tập số 65 : Mạng giao thông.
Đề bài :
Cho mạng giao thông gồm N nút và M đường hai chiều nối một số cặp nút. Trong việc đi lại giữa các cặp nút, người ta nhận thấy có một số vấn đề : Có một số các đường mà mọi đường đi

lại giữa hai nút u, v nào đó luôn phải đi qua, điều này có thể dẫn tới quá tải trên đường đó. Do đó, người ta quyết định làm thêm đường nối một số cặp nút sao cho đảm bảo đi lại giữa hai cặp nút bất kì (1), mà nếu bỏ một đường bất kì nào đó thì tính chất (1) vẫn bảo đảm, đồng thời số đường phải xây dựng thêm là nhỏ nhất.

Input

N, M (N <= 200 ; M <= 10000)

N dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi hai số u, v cho biết có đường hai chiều nối u với v.

Output

K - số đường cần xây dựng thêm.

K dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi hai số u, v cho biết cần xây thêm đường nối u, v.

Thuật giải

Ta tiến hành loang để tìm các thành phần liên thông theo nghĩa trong thành phần đó nếu bỏ đi cạnh bất kì thì vẫn đảm bảo đi lại giữa hai nút bất kì trong thành phần liên thông đó. Ta chập mỗi thành phần liên thông như thế thành một siêu đỉnh lấy một đỉnh bất kì làm đại diện (1). Khi đó trên đồ thị thu được không có chu trình, là rừng gồm các cây. Ta đưa về một cây như sau : Nếu có hai cây thì ta thêm đường nối hai đỉnh treo của hai cây.

Cuối cùng, đồ thị th được là một cây. Ta thực hiện tiếp như sau:

Nếu trên cây có >= 4 đỉnh treo, ta tìm hai đỉnh treo u, v sao cho đường đi từ u đến v có ít nhất hai nhánh của cây móc vào (luôn tồn tại khi số đỉnh treo >= 4), thêm cạnh u với v.

Nếu số đỉnh treo <= 3, thêm cạnh nối hai đỉnh treo bất kì.

Chú ý: Sau mỗi bước thêm cạnh ta lại cập nhật lại đồ thị như bước (1) của thuật toán, để đồ thị chỉ còn là các cây.

Bài tập số 66 : Qua cầu.

Đề bài :

Một đoàn xe gồm N xe tải, đang xếp hàng để qua một chiếc cầu. Với mỗi xe i ta biết W(i) là trọng tải của xe, T(i) là thời gian xe qua cầu. Xe qua cầu phải theo từng tốp, tức là tốp trước sang hẳn thì tốp sau mới được sang,thời gian qua cầu của một tốp sẽ là thời gian của xe qua cầu mất nhiều thời gian nhất trong tốp đó. Cầu có trọng tải L nên tốp xe qua cầu phải có tổng trọng lượng <= T. Hãy tìm cách đưa các xe qua cầu sao cho tổng thời gian là nhỏ nhất.

Xe qua cầu phải theo thứ tự, tức là xe chỉ số nhỏ hơn qua cầu trước xe có chỉ số lớn hơn.

Input

Dòng đầu ghi 2số nguyên dương N, L (N <= 1000)

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi W(i), T(i)

Output

Dòng đầu tiên ghi thời điểm sớm nhất tìm được.

Các dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi số xe đầu tiên của tốp thứ i.

Thuật giải

Ta áp dụng phương pháp Qui hoạc động : Gọi C(i) là thời gian nhỏ nhất đề cho các xe từ 1 đến i qua cầu.

Để tính C(i), ta xét các cách chọn các xe vào tốp mà xe i ở cuối cùng.

C(i) = Min(C(k-1) + thời gian qua cầu của tốp gồm xe k, k+1, …, i) trong đó k <= i và tốp k,k+1,…,i có tổng trọng lượng <= L

Bài tập số 67 : Hình vuông Latin.

Đề bài :

Một hình vuông Latin cấp N là một ma trận N*N trong đó mỗi hàng, mỗi cột đều là một hoán vị của tập {1,2,…,N}. Cho N, hãy cho biết có bao nhiêu hình vuông Latin khác nhau cấp N.

Input

N (N <= 7)

Output

Số các hình vuông Latin cấp N

Thuật giải

Để đếm số các hình vuông Latin không có cách nào khác là ta phải duyệt. Tuy nhiên, ta chú ý : Nếu hoán vị các hàng và các cột của ma trận Latin thì ma trận vẫn là hình vuông Latin. Do đó, ta cố định hàng đầu tiên, cột đầu tiên là 1, 2, …, n, khi đưa ra kết quả, ta chỉ việc nhân với n!(n-1)!.

Bài tập số 68 : Cắt hàng rào.

Đề bài :

Một người nông dân cần rào mảnh vườn của anh ta lại. Để rào mảnh vườn, anh ta cần m đoạn rào với các độ dài a1, a2, …, am. Trong tay anh ta có N đoạn rào với độ dài tương ứng L1, L2, … LN. Để có thể rào, anh ta phải cắt N đoạn rào này thành các đoạn rào trong m đoạn cần thiết (có thể có đoạn thừa, không nhất thiết phải dùng hết). Một đoạn chỉ có thể được sử dụng nếu nó không là ghép của hai đoạn nào, mà phải là từ nguyên một đoạn cắt ra. Hãy giúp anh nông dân cắt các đoạn có sẵn để được nhiều đoạn cần thiết nhất.

Input

N, M (N <= 100, M <= 1000)

Dòng 2 ghi a1,a2,…,aM

Dòng 3 ghi L1,L2,…,LN.

Các độ dài nguyên dương <= 1000.

Output

Dòng đầu ghi k là số đoạn lớn nhất được cắt ra.

K dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi hai số i, j cho biết đoạn cần thiết thứ i được cắt ra từ đoạn có sẵn j.

Thuật giải

Ta chia nhị phân theo số đoạn cần thiết cắt được.

Với mỗi k ta thử xem có cắt thành k đoạn cần thiết được không. Hiển nhiên ta sẽ chỉ quan tâm đến k đọan ngắn nhất mà thôi.

Với k đoạn này, ta phải duyệt để tìm cách cắt thành k đoạn cần thiết.

Bài tập số 69 : Nối điểm.

Đề bài :

Trên vòng tròn cho N điểm đôi một khác nhau, đánh số từ 1 đến N theo chiều kim đồng hồ. Mỗi điểm chỉ được nối với hai điểm kề với nó trên đường tròn. Cần phải nối các điểm sao cho thoả mãn sự liên thông giữa một số cặp điểm cho trước, đồng thời số đoạn cần nối là nhỏ nhất có thể được.

Input

Dòng đầu ghi N là số điểm (N <= 1000) và M là số các yêu cầu (M <= 10000)

M dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi hai số u, v cho biết cách nối phải đảm bảo đi lại giữa u và v.

Output

K là số ít nhất các cạnh cần nối.

K dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một số cho biết cần nối u với đỉnh tiếp theo u theo chiều kim đồng hồ.

Ví dụ :

Input	Output
5 2 1 3 4 5	3 1 2 4

Thuật giải

Xét cách nối mà không nối (1,2), thoả mãn liên thông ít cạnh nối thêm nhất.

Nối cố định (1,2) thử bỏ (2,3), lại thử cách nối thêm với các cạnh còn lại.
Nối cố định thêm (2,3), thử bỏ (3,4), … cứ như thể đến khi bỏ cạnh (n,1).
Ta tìm phương án tốt nhất cho các lần thử bỏ cạnh đó.
Ví dụ: Như ví dụ Input.
Thử bỏ (1,2), các cạnh cần nối là (3,4),(4,5),(5,1).
Nối (1,2), thử bỏ (2,3) cần nối thêm (3,4),(4,5),(5,1)
Nối thêm (2,3) bỏ (3,4) cần thêm (4,5)
…
Cuối cung phương án tối ưu là 3 cạnh.

Bài tập số 70 : Điểm nằm trong đa giác.
Đề bài :
Trên mặt phẳng hệ toạ độ trực chuẩn, cho đa giác lồi N đỉnh và M điểm. Một điểm gọi là thuộc miền đa giác nếu nó nằm trên một cạnh hoặc nằm trong đa giác. Hãy chỉ ra trong M điểm trên, các điểm thuộc miền trong đa giác.
Input
N, M (N,M <= 10000)
N dòng tiếp theo, mỗi dòng gồm hai số thực x,y là toạ độ của các đỉnh lần lượt trên đa giác.
M dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi toạ độ của một điểm trong M điểm cần xét.
Output
Dòng đầu ghi k là số các điểm thuộc đa giác.
Dòng 2 ghi danh sách chỉ số các điểm trên thuộc đa giác.
Thuật giải
Ta chia đa giác thành hai nửa: Một gồm các đỉnh mà hoàn độ tăng dần theo thứ tự đỉnh, nửa kia gồm các đỉnh hoành độ giảm dần.
Với mỗi điểm M cần xét, nếu hoành độ nhỏ nhơn hoành độ nhỏ nhất hay lớn hơn hoành độ lớn nhất của đa giác thì không xét tiếp vì hiển nhiên không thuộc đa giác.
Ngược lại, ta chi nhị phân trên hai nửa để tìm 2 giao của đa giác với đường thẳng qua M song song trục tung. Nếu M nằm giữa hai giao điểm thì M nằm trong, ngược lại M nằm ngoài.

Bài tập số 71 : Phân chia đa giác.
Đề bài :
Trên mặt phẳng cho đa giác lồi N đỉnh (N <= 100). Hãy tìm cách phân chia đa giác thành các tam giác bằng các đường chéo không cắt nhau sao cho tổng độ dài các đường chéo sử dụng là nhỏ nhất.
Input
N
N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi toạ độ của đỉnh i của đa giác.
Output
Dòng đầu ghi tổng độ dài nhỏ nhất.
Các dòng tiếp theo, mỗi dòng thể hiện một đường chéo gồm hai số u, v là hai đỉnh đầu mút của đường chéo.
Thuật giải
Xét cách chia đa giác lồi gồm các đỉnh i, i+1, …, j (i+2 < j) thành các tam giác bằng các đường chéo không cắt nhau sao cho tổng độ dài các đường chéo là nhỏ nhất. Khi đó, trong một cách phân chia bất kì thì cạnh i,j phải thuộc một tam giác nào đó giả sử i, k, j. Khi đó bài toán tối ưu đưa về tính đa giác (i,..k) và (k..j). Từ đó, ta có thể giải quyêt bằng Qui hoạch động : Gọi C(i,j) là tổng đọ dài nhỏ nhất để phân chia đa giác gồm các đỉnh i, i+1, … j thành các tam giác bằng các đường chéo không cắt nhau. Khi đó, ta tối ưu C(i,j) bằng cách xét các tam giác có thể có chứa cạnh (i,j).

Bài tập số 72 : Đường đi ngắn nhất.

Đề bài :
Cho một mạng giao thông gồm N nút (N <= 100) và M đường hai chiều nối một số cặp nút. Với mỗi đương nối u,v ta biết d là độ dài đoạn đường, c là chi phí đi trên đoạn đường đó. Hãy tìm đường đi ngắn nhất từ 1 đến N, mà tổng chi phí <= S cho trước.
Input
Dòng đầu ghi N, M, S
M dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi 4 số nguyên dương u, v, d, c mô tả một đoạn đường.
Output
Dòng đầu ghi p là tổng độ dài nhỏ nhất tìm được hoặc 0 trong trường hợp bài toán vo nghiệm.
Nếu bài toán có nghiệm, các dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một nút trên hành trình.
Thuật giải
Ta dùng một Queue lưu danh sách các đỉnh trong quá trình tìm kiếm. Mỗi phần tử của Queue gồm tên nút, thời gian đến, độ dài ứng với đường đi có thời gian như vậy. Queue được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của thời gian.
Mỗi lần lấy ra một đỉnh từ Queue, ta xét các đỉnh v kề với nó, tính thời gian, khoảng cách đến v từ u, cập nhật v, nếu đường đi đến v không mất quá S chi phí., đông thời > tối ưu hiện có của v, thì bổ sung v vào Queue, sắp xếp lại. Ta cứ mở rộng cho đến khi loang hết Queue,
ta được đường đi tối ưu.

Bài tập số 73 : Cây P đỉnh.
Đề bài :
Cho đồ thị có dạng cây gồm N đỉnh (N <= 150). Hãy tìm cách loại bỏ một số ít nhất cạnh sao cho trên đồ thị thu được có một thành phần liên thông là một cây có P đỉnh.
Input
N
N-1 dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một cạnh của cây gồm 2 số u, v thể hiện cạnh nối hai nút u, v.
Output
Dòng đầu ghi K là số ít nhât cạnh phải loại bỏ
K dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một cạnh cần loại bỏ gồm 2 số u, v với ý nghĩa loại bỏ cạnh nối giữa u và v.
Thuật giải
Ta giải bằng phương pháp Qui hoạch động 2 lần.
Trước hết, ta cây dựng cây từ gốc xuống lá, gọi cây ban đầu là T.
Với mỗi đỉnh i gọi T(i) là nhánh cây con của T có gốc là i.
Gọi F(i,j) là số cạnh ít nhất cần loại bỏ trên cây T(i) để thu được một cây có gốc i và đúng j đỉnh.
Ta tối ưu các F(i,j) theo chiều i từ lá lên gốc, rõ ràng để tính F(i,j) ta chỉ cần biết các F(u,v) trong đó u là một đỉnh con trực tiếp của i, vì ta tối ưu từ lá đến gốc nên khi xét i ta đã xét các F(u,v) rồi. Để tính F(i,j), ta lại qui hoạch động tiếp: Đánh số các nhánh con của i theo thứ tự từ 1 đến k, gọi C(a,b) là số cạnh ít nhất để loại bỏ trên cây gồm gốc i và các nhánh từ 1 đến a (đã được đánh số) và có đúng b đỉnh. Từ công thức qui hoạch động với C(a,b) ta sẽ dễ dáng tính F(i,j): F(i,j) = C(k,j) (k là số nhánh của gốc i).

Mở rộng
Bài toán có thể mở rộng nếu còn cho thêm trọng số cạnh là một số nguyên dương, khi đó bài toán sẽ là bỏ cạnh sao cho tổng trọng số là nhỏ nhất. Với sự mở rộng trên, ta cũng dùng công thức qui hoạc động như trên để giải.

Bài tập số 74 : Ghép tam giác.
Đề bài :
Cho N đoạn thẳng (N <= 40) có tổng chiều dài <= 600. Hãy tìm cách ghép các đoạn thẳng này thành các cạnh của một tam giác có diện tích lớn nhất với các điều kiện sau:

+ Tất cả các đoạn thẳng phải được sử dụng.
+ Mỗi cạnh của tam giác phải là ghép nguyên một số đoạn thẳng.

Input

N

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi si là chiều dài đoạng thẳng thứ i.

Output

Dòng đầu ghi diện tích lớn nhất tìm được, chính xác đến 2 chữ số sau dấu phẩy.

3 dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi danh sách tên các đoạn thẳng được chọn để làm một cạnh của tam giác.

Thuật giải

Ta dùng phương pháp qui hoạch động:

Gọi C(k,i,j,)l có giá trị cho biết có thể phân tích tập các đoạn thẳng từ 1 đến k thành 3 tập trong đó tổng độ dài là i, j và l.

Khi đó, ta dễ dàng có thẻ tính các C(k,i,j,l) từ các C(k-1,x,yz) dơn giản bằng các phép thử ghép đoạn k vào các tập i, j, l.

Khi đó nghiệm của của bài toán sẽ đựoc tìm thấy trên cơ cở duyệt qua các C(n,x,y,z) xem bộ nào xây dựng nên 3 cạnh tam giác có diện tích lớn nhất.

Chú ý:

+ Tính C(k,i,j,l) thực chất là chỉ cần C(k,i,j) với i <= j, vì i+j+l bằng tổng độ dài các đoạn từ 1 đến k.

+ Rõ ràng C(k,i,j) chỉ cần tính từ các C(k-1,x,y) nên không cần phải lưu toàn bộ C(k,i,j) mà chỉ cần lưu 2 màng C(i,j) tính lẫn nhau.

Bài tập số 75 : Đua xe đạp

Đề bài :

Một đội đua xe đạp gồm N người. Đường đua độ dài D km. Đội đua theo nguyên tắc một người đi đầu và cả đội theo sau, nếu vận tốc của đội đua là x km\ phút thì người đi đầu mất x^2 đơn vị năng lượng mỗi phút, còn những người còn lại chỉ mất x. Biết rằng mỗi trạng thái đua gồm người đi đầu và vận tốc đua phải duy trì trong một số nguyên lần phút, và vận tốc x phải nguyên dương. Trong quá trình đua, đội đua có thể loại bỏ những người không còn đủ năng lượng đi tiếp, tuy nhiên không được là người đi đầu. Ban đầu mỗi người đều có năng lượng khởi tạo là E. Hãy cho biết đội đua có thể đến đích sớm nhất trong bao lâu.

Input

N, D, E (N,D,E <= 100)

Output

Một số nguyên duy nhất ghi thời gian tối thiểu cần để đến đích.

Thuật giải

Rõ ràng ta luôn có thể cho người có mức năng lương thấp nhất đi đầu cho đén khi anh ta hết năng lượng rồi loại bỏ, như thế trạng thái năng lượng của đội bao gồm mức của những người đi sau (bằng nhau) và của người đi trước Ta áp dụng phương pháp Qui hoạch động :

Gọi C(i,j) là mức năng lượng lớn của cả đội gồm năng lương của từng ngừơi, đề đi đựoc i km trong thời gian j. Với mỗi trạng thái năng lượng ta luôn chọn người ít năng lượng nhất để đi đầu, nếu không thì loại người này luôn.

Khi đó ta tính thời gian nhỏ nhất là j nhỏ nhất sao cho đến đích sau thời gian j.

Bài tập số 76 : Lập lịch biểu diễn.

Đề bài :

Một đợt giao lưu văn nghệ có N ca sĩ tham gia biểu diễn. Cần lập lịch biểu diễn thoả mãn : Mỗi buổi diễn gồm đúng 3 ca sĩ và hai buổi biểu diễn bất kì có đúng 1 ca sĩ biểu diễn ở cả hai buổi, đồng thời số buổi biểu diễn được tổ chức là nhiều nhất có thể.

Input

N (3 < N <= 100)

Output

1 dòng ghi số buổi nhiều nhất.

Thuật giải

Ta có kết quả như sau :

+ Nếu N <= 4 : có 1 buổi (1,2,3)
+ Nếu N = 5 có 2 buổi (1,2,3)+(1,4,5)
+ Nếu N = 6 có 4 buổi (1,2,3)+(1,4,5)+(2,4,6)+(3,5,6)
+Nếu N <= 16 có 7 buổi:

(1,2,3)
(1,4,5)
(1,6,7)
(2,4,6)
(2,5,7)
(3,4,7)
(3,5,6)

+Nếu N >= 17 có (N-1) div 2 buổi :

(1,2,3)+(1,4,5)+(1,6,7)+(1,7,8)+…

Tất cả những kết quả trên suy ra từ nhận xét sau :

Nếu có >= 8 buổi biểu diễn thoả mãn đầu bài thì tất cả các buổi biểu diễn phải có 1 ca sĩ chung duy nhất.

Bài tập số 77 : Trò chơi bốc sỏi.

Đề bài :

Cho N đống sỏi (N <= 100) có số sỏi ban đầu là s1, s2,…,sn (si nguyên dương và <= 100). Hai người luân phiên nhau chơi, mỗi người đến lượt mình chọn một đống tuỳ ý và bốc ở đống đó mọt số sỏi không quá P (P <= 100). Ngưòi nào đến lượt mình không chơi được tiếp là thua. Hãy tìm phương án tối ưu cho người chơi đầu tiên.

Input

N
Dòng 2 ghi s1, s2, …,sn

Thuật giải

Ta gọi trạng thái chơi là một số d = (s1 mod P) XOR (s2 mod P) … XOR (sn mod P).

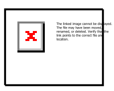
Nếu d = 0 thì người chơi sắp tới đang ở trạng thái thua, ngược lại là thắng.

Nếu ở trạng thái thua, phải đi ngẫu nhiên một bước nào đó, nếu thắng thì luôn tồn tại một nước đi sao cho đưa về trạng thái 0 cho đấu thủ của mình.

Bài tập số 78 : Lát nền.

Đề bài :

Cho một hình vuông kích thước 2N x 2N bị khuyết một ô, trong đó N là một số nguyên dương >= 4 và không chia hết cho 3. Hãy tìm cách lát hình vuông bị khuyết 1 ô đó bằng các hình thước thợ như hình vẽ sau :



Input

N

Dòng 2 ghi u,v là hàng và cột của ô bị khuyết

Output

Ma trận 2Nx2N trong đó mỗi ô ghi một số nguyên s :

s = 0 nếu đó là ô khuyết, ngược lại là thứ tự của viên gạch lát nền.

Thuật giải

Ta giải bằng qui nạp như sau :

+ N = 4,5 : Ta dễ dàng tìm ra nghiệm.

+ N > 5 : Ta xét viền bề rộng 6, men theo hai cạnh của hình vuông sao cho không chứa ô bị khuyết (luôn tìm được vì N >= 6). Dải viền này luông phủ được bằng các viên gạch hình thước thợ việc lát hình vuông còn lại kích thước 2(N-3) x 2(N-3) đưa về bài toán nhỏ hơn.

Bài tập số 79 : Xây cầu.

Đề bài :

Một quần đảo gồm N đảo, mỗi đảo được biểu diễn như 1 điểm trên mặt phẳng. Có M cầu nối giữa một số cặp đảo với nhau, khi đó độ dài sẽ bằng độ dài của đoạn thẳng nối hai điểm tương ứng. Quần đảo có 3 đảo lớn đánh số 1, 2, 3 và các đảo nhỏ còn lại. Độ dài giữa hai đảo là đường đi ngắn nhát giữa hai đảo đó. Hãy tìm phương án xây dựng thêm một cây cầu nối 2 đảo nào đó thoả mãn các điều kiện sau :

+ cây cầu với độ dài <= L.

+ Độ dài giữa đảo 1 đến đảo 2,3 đều được rút ngắn lại.

+ Tổng độ dài đường đi từ 1 đén 2 và từ 1 đến 3 là nhỏ nhất.

Input

Dòng đầu ghi hai số N, M nguyên dương, (N <= 1000 ; M<=5000).

Dòng 2 ghi L.

N dòng tiếp theo, dòng thứ i mô tả vị trí hòn đảo thứ i gồm hai số x, y.

M dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi hai số u, v cho biết có cầu nối hai đảo u và v.

Output

Dòng đầu ghi hai số u, v cho biết cần xây dựng cầu nối hai đảo u, v thoả mãn đề bài hoặc ghi -1 nếu không tồn tại cách xây thêm thoả mãn bài toán.

Thuật giải

Trước hết ta dùng thuật toán Dijstra tìm đường đi ngắn nhất từ đảo 1,2,3 tới tất cả các đảo khác, ta gọi d(i, u) là độ dài đường đi ngắn nhất từ i đến u (i = 1, 2, 3).

Ta duyệt qua tất cả các cách xây cầu thêm x,y:

Nếu độ dài x,y = L(x,y) > L thì bỏ qua, không xét tiếp.

Xét tiếp : Nếu d(2,x) + L(x,y) + d(y,1) < d(2,1) và d(3,x) + L(x,y) + d(y,1) < d(3,1) tức là khi đó việc xây thêm đảm bảo hai điều kiện đầu tiên của đề bài. Khi đó, ta chỉ việc xét tiếp tổng 2 đường đi tối ưu nếu thêm x,y để đảm bảo điều kiện cuối cùng.

Thuật toán vừa nêu có độ phức tạp $O(N^2)$

Bài tập số 80 : Mua hàng khuyến mại.

Đề bài :

Một cửa hàng có N gói hàng, trọng lượng lần lượt là w1,w2,…,wn đơn vị. Nhân cửa hàng mở đợt khuyến mại, một người muốn mua càng nhiều hàng khuyến mại càng tốt. Tuy nhiên túi của anh ta chỉ có thể mang không quá L đơn vị, vì không thích rườm rà cho nên anh ta muốn trong số các phương án mua được nhiều hàng nhất thì chọn phương án có số gói hàng phải mang về là nhỏ nhất. Hãygiúp anh ta đạt được các mong muốn của mình.

Input

Dòng đầu ghi N, L (N <= 50000 ; L <= 5000).

Dòng 2 ghi N số nguyên dương w1, w2,…,wN.

Output

Dòng đầu ghi T là trọng lượng hàng lớn nhất mà anh có thể mua.

Dòng 2 ghi số gói ít nhất cần phải mua với trọng lượng T.

Thuật giải

Ta giải bằng phương pháp Qui hoạch động : Gọi C(i,j) là số gói nhỏ nhất chọn trong các gói từ 1 đến i để được tổng trọng lượng là j.

Khi đó : C(i,j) = Min{ (C(i-1,j-wi)+1 , C(i-1,j)}

Cải tiến: Vì tính C(i,j) chỉ cần biết C(i-1,x) cho nên ta chỉ cần lưu 2 dòng của bảng phương án.

Mở rộng

Có thể mở rộng thay vì số goi nhỏ nhất, ta cần chọn sao cho tổng trọng lượng lớn nhất có thể và tổng giá phải trả của các gói hàng là nhỏ nhất. Khi đó, ta vẫn có thể giai bằng qui hoạch động như trên.

Bài tập số 81 :

Đề bài :

Một người rất yêu các loài động vật hoang dã, vì thế ông ta muốn nuôi một số loài thú trong nhà mình. Mỗi loài động vật i có giá là c(i)

Ông chỉ có không có P đơn vị tiền để mua các loài thú, đồng thời ông ta cũng hiểu rằng có một số cặp động vật không thể cùng nuôi với nhau, tức là đã có con này thì không thể có con kia.

Hãy giúp người yêu động vật kia dùng số tiền của mình một cách hiệu quả nhất theo nghĩa : Số loại động vật lớn nhất có thể được, trong các phương án cùng có số loài lớn nhất, chọn phương án mà số tiền còn lại là ít nhất. Giả thiết mỗi loại chỉ được mua nhiều nhất là một con.

Input

Dòng đầu ghi N là số loài động vật (N <= 30)

Dòng 2 ghi P- số tiền ông có.

Dòng 3 ghi M là số cặp động vật không thể sống cung nhau.

Dòng 4 ghi N số c(1),c(2),…,c(N) là giá của từng loài.

M dòng cuối, mỗi dòng ghi 2 số ngyên dương u,v cho biết hai loài u, v không thể nuôi cùng nhau.

Output

Dòng đầu ghi k là số loài nhiều nhất.

Dòng 2 ghi số tiền dùng để mua.

Dòng 3 ghi danh sách k loài được chọn để nuôi.

Thuật giải

Ta duyệt qua tất cả các phương án có thể đề tìm nghiệm tối ưu.

Bài tập số 82 : Hệ thống đèn

Đề bài :

Cho một hệ thống gồm N đèn, giữa một số cặp đèn này có thể có một số đường dây điện nối chúng. Chính vì có dây nối nên nếu thay dổi trạng thái một bóng nào u đó (bật/ tắt), thì các bóng nối trực tiếp với u bằng dây điện sẽ thay đổi trạng thái, tuy nhiên chỉ các bóng kề với mới xảy tầ như vậy.

Ban đầu trạng thái của các bóng chưa tối ưu, người ta muốn thay đổi trạng thái một số bóng đề hệ thống đèn nhận được là tối ưu. Hãy chỉ ra một cách đề đưa các bóng về trạng thái tối ưu hoặc thông báo nếu không thể đựoc.

Input

Dòng đầu ghi N (N <= 200).

Dòng tiếp theo ghi N số, trong đó số thứ i bằng 0 nếu bóng i không cần thay đổi, bằng 1 nếu cần thay đổi trạng thái.

Dòng 3 ghi M là số dây nối.(M <= 2000)

M dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một dây gồm hai số u, v là hai bóng mà nó nối.

Output

Dòng đầu ghi 0/1 cho biết có thể hay không thể đạt đến trạng thái tối ưu.

Nếu được, dòng 2 ghi danh sách các bóng đựoc thay đổi trạng thái trong phương án tìm được.

Thuật giải

Ta đưa bài toán về giải hệ phương trình đồng dư theo môđun 2, áp dụng các phép khử biến để giải và biện luận.

Bài tập số 83 : Xích

Đề bài :

Một cây gồm N đỉnh gọi là một xích nếu tồn tại một đường đi đơn trên cây sao cho mọi đỉnh của cây hoặc nằm trên đường đi đó, hoặc kề vói một đỉnh thuộc đường đi.

Hãy tìm cách đánh số lại các đỉnh của cây từ 1 đến N sao cho chênh lệch chỉ số của hai đỉnh đầu mút của các cạnh đôi một khác nhau, tức là tập giá trị = tập {1,2,…,N-1)

Input

Dòng đầu ghi N (N <= 10000)

N-1 dòng sau, dòng thứ i mô tả cạnh thứ i của cây gồm 2 số u,v là 2 đầu mút của cạnh,

Output

N dòng, dòng thứ i ghi thứ tự đánh số lại của đỉnh i.

Thuật giải

Ta đi lần lượt từ đầu xích này đến đầu xích kia, đồng thời có 2 biến max và min,
khởi tạo max = N và min = 1.

Nút đầu tiên của xích ta đánh bằng min, lần lượt các nút kề với nó không thuộc xích đánh số từ max trở xuống. Sau khi có 1 đỉnh đánh số max thì giá trị max giảm 1, còn với min thì tăng lên 1.

Đỉnh tiếp theo trên xích làm ngược lại : bản thân nó đánh số max, còn các đỉnh kề không thuộc xích đánh số từ min trở lên.

Cứ đan xen cách đánh số như thế cho đến đỉnh cuối của xích, ta đươch cách đánh số tối ưu.

Bài tập số 84 : Đặt quân xe lên bàn cờ.

Đề bài :

Cho bàn cờ hình vuông kích thước N x N. Hãy tìm cách đặt các quân xe vào các ô của bàn cờ thoả mãn các yêu cầu sau đây:

+ Một ô có không quá 1 quân cờ.

+Một quân xe bất kì chỉ bị khống chế bởi không quá 1 quân xe khác.

+Số quân xe đặt được là nhiều nhất.

Input

N (N <= 100)

Output

Dòng đầu ghi M là số quân xe nhiều nhất đặt được.

M dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi vị trí một quân xe gồm hai số u, thể hiện hàng và cột của ô tương ứng.

Thuật giải

Xét dãy các ô nằm trên đường chéo chính, ta chia các ô thành các nhóm 3 ô liên tiếp. Với từng đoạn 3 ô liên tiếp, xét hình vuông 3x3 tương ứng, ta đặt các quân xe lên các hình này như sau:

X	X	
		X
		X

Trên đường chéo lúc này cón lại r ô chính là số dư phép chia N cho 3, ta đặt r quân xe lên r ô này.

Thuật toán trên cho phép ta đặt lên bàn cờ (4N) div 3 quân xe, đó cũng chính là số quân xe tối đa có thể đặt được.

Bài tập số 85 :

Đề bài :

Cho một xâu kí tự S chỉ gồm các chữ số 0,1,…,9 và các chữ cái A,B,…,Y,Z. Hãy tìm số k nhỏ nhất thoả mãn:

+11 <= k <= 36.

+Số tương ứng với S trong biểu diễn trên hệ cơ số k chia hết cho k-1.

Input

Xâu S gồm không quá 10^6 kí tự.

Output

Số k thoả mãn các yêu cầu của đề bài hoặc -1 nếu không có số k nào thoả mãn.

Chú ý:

Trong dạng biểu diễn số thì A tương ứng 10, B tương ứng 11,…, Z tương ứng 35.

Số k phải thoả mãn số đúng tức là các số của S và các số tương ứng chữ cái phải trong khoảng 0,..k-1.

Thuật giải

Ta có thể dễ dàng chứng minh điều kiện chia hết cho k-1 sẽ tương đương với tổng các chữ số chia hết cho k-1. Vì vậy, ta chỉ việc lấy tổng các chữ số và các số tương ứng chữ cái của của xâu S, sau đó xét các k trong khoảng 10 đến 36 thỏa mãn tổng chia hết k-1.

Bài tập số 86 : Đường tròn may mắn.

Đề bài :

Trên mặt phẳng cho N điểm có toạ độ nguyên, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, không có 4 điểm cùng thuộc một đường tròn. Một đường tròn gọi là may mắn nếu nó đi qua 3 điểm trong N điểm trên và trong các điểm còn lại số điểm nằm trong bằng số điểm nằm ngoài đường tròn. Hãy tìm một đường tròn may mẵn như vậy hoặc chỉ ra không có đường tròn như vậy.

Input

Dòng đầu ghi N (N <= 1000)- N lẻ > 3.

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi toạ độ của điểm thứ i bao gồm 2 số nguyên x,y lần lượt là hoành độ và tung độ của điểm.

Output

Nếu không có đường tròn may mẵn, dòng đầu ghi -1.

Nếu có thì dòng đầu ghi 3 số là thứ tự của 3 điểm tìm được trong.

Thuật giải

Tìm trong N điểm trên hai điểm A,B mà các điểm còn lại nằm trọn về một phía với đường thẳng AB (ta có thể tìm bằng cách lấy A là điểm trái nhất, B sẽ là điểm mà đường thẳng AB có hệ số góc nhỏ nhất).

Khi đó, sắp xếp N-2 điểm còn lại theo thứ tự tăng dần của góc nhìn với đoạn thẳng AB, thực chất ta chỉ phải so sánh cos của góc mà cos có công thức đơn giản để tính). Ta chọn C là điểm ở vị trí chính giữa trong danh sách N-2 điểm được sắp. A,B,C chính là 3 điểm cần tìm.

Bài tập số 87 : Phân nhóm.

Đề bài :

Một hội nghị có N người và có M quan hệ quen biết giữa một số cặp người. Hãy tìm cách phân N người thành nhóm thoả mãn :

+ Mỗi người phải ở một trong hai nhóm.

+ Mỗi nhóm phải có ít nhất một người.

+ Hai ngừoi trong cùng một nhóm thì quen biết nhau.

+ Chêch lệch số người hai nhóm là nhỏ nhất.

Input

Dòng đầu ghi N, M (N <= 100)

M dòng tiếp theo, mỗi dòng thể hiện một quan hệ quen biết gồm hai số u, v thẻ hiện người u quen người v.

Output

Nếu không có cách phân chia thoả mãn đầu bài, thì thông báo vô nghiệm, ngược lại output gồm hai dòn, mỗi dòng là danh sách những người trong môt nhóm.

Thuật giải

Ta xây dựng đồ thị vô hướng gồm N đỉnh, mỗi đỉnh của đồ thị tương ứng 1 người. Hai đỉnh có cạnh nối nếu hai người tương ứng không quen biết nhau.

Ta tìm các thành phần liên thông của đồ thị. Trên mỗi thành phần liên thông, nếu có tồn tại chu trình lẻ thì bài toán vô nghiệm, ngược lại ta có thể phân tập đỉnh thành 2 lớp mà mọi cạnh chỉ có thể nối 2 đỉnh thuộc 2 lớp khác nhau (xem thêm bài 93). Ta có thể chỉ ra rằng, với mỗi thành phần liên thông thì cách phân chia như thế là duy nhất không kể thứ tự, khi đó hai tập từ phép phân lớp trên sẽ phải thuộc hai nhóm trong phép phân nhóm thoả mãn yêu cầu đề bài.

Vấn đề còn lại là tìm cách chọn tập nào trong từng phân lớp để độ chênh lệch là nhỏ nhất. Ta giải tiếp bằng qui hoạch động. Ta đánh số các thành phần liên thông theo thứ tự từ 1 đến m, giả sử a1(i), a2(i) là số phần tử trong từng tập trong phép phân lớp của thành phần liên thông i. Hàm F(i,j) cho biết có thể chọn trong các thành phần liên thông từ 1 đến i, mỗi thành phần liên thông chọn một tập trong phân lớp của nó, để có một tập gồm j đỉnh hay không.

Dễ thấy C(i,j) Chỉ cần được tính từ C(i-1.j-a1(i)) và C(i-1,j-a2(i)), tương ứng chọn tập nào trong thành phần liên thông thứ i.

Bài toán chênh lệch nhỏ nhất tương đương tìm k lớn nhất sao cho k <= n div 2, và C(m,k) nhận giá trị đúng (có cách chọn tập thoả mãn). Khi đó, k là số phần tử của nhóm ít hơn trong hai nhóm của cách phân nhóm tối ưu.

Bài tập số 88 : Các trận thi đấu Olympíc.

Đề bài :

Tại một kỳ Olympíc thể thao, người ta dự tính trong khoảng thời gian từ 0 đến T sẽ tổ chức N trận thi đấu. Thông tin về mỗi trận thi đấu bao gồm thời điểm bắt đầu s, thời điểm kết thúc f (0 <= s < f <= T). Một người rất yêu thích thể thao, anh ta muốn chọn một số trận để xem sao cho thời gian xem càng nhiều càng tốt. Tuy nhiên nếu trong một khoảng thời gian nào đó có hai chương trình anh ta chọn đều đang thi đấu thì (do rối loạn kênh truyền hình) nên anh ta sẽ không xem được gì, điều này có nghĩa là anh ta chỉ xem được trong khoảng thời gian nào đó nếu trong khoảng đó có duy nhất một chương trình anh ta chọn đang phát. Bạn hãy giúp anh chàng yêu thể thao đó đạt được mong ước của mình.

Input

Dòng đầu ghi N (N <= 10000)

Dòng thứ 2 ghi số nguyên dương T (T <= 60000)

N dòng tiếp theo, dòng thứ i mô tả thông tin về trận thi đấu i gồm 2 số nguyên dương s, f

Output

Dòng đầu ghi P là tổng thời lượng anh ta được xem và k là số trận đấu anh ta chọn

k dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một số nguyên dương là thứ tự của trận đấu đựoc chọn.

Thuật giải

Sắp xếp lại các trận thi đấu theo thứ tự tăng dần của f, đánh số lại từ 1 đến N.

Ta có chú ý là trong phương án chọn tối ưu thì không có khoảng thời gian nào thuộc về quá 2 chương trình đựoc chọn (dễ dàng chứng minh). Do đó nếu có hai chương trình trùng nhau một khoảng thời gian nào đó thì đó phải là hai chương trình liên tiếp.

Từ các nhận xét trên, ta có thể áp dụng phương pháp Qui hoạch động để giải quyết bài toán.

Bài tập số 89 : Hai đường đi.

Đề bài :

Một mạng giao thông gồm N nút giao thông, và có M đườn hai chiều nối một số cặp nút, thông tin về một đường gồm ba số nguyên dương u, v là tên hai nút đầu mút của đường, và l là độ dài đoạn đường đó. Biết rằng hai nút giao thông bất kì có không quá 1 đường hai chiều nhận chúng làm hai đầu mút. Cho hai nút giao thông s và f, hãy tìm hai đường đi nối giữa s với f sao cho hai trên hai đường không có cạnh nào được đi qua hai lần và tổng độ dài 2 đường đi là nhỏ nhất.

Input

Dòng đầu ghi N, M (N <= 100)

Dòng 2 ghi hai số s, f

M dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một đường gồm ba số u, v, l.

Output

Dòng đầu ghi T là tổng độ dài nhỏ nhất tìm được hoặc -1 nếu không tìm được.

Nếu có nghiệm, hai dòng sau, mỗi dòng mô tả một đường gồm dãy các nút trên đường đi bắt đầu từ s, kết thúc tại f.

Thuật giải

Ta tiến hành hai bước tìm đường như sau :

Tìm đường đi ngắn nhất từ s đến f (thuật toán Dijstra). Dọc theo các cạnh trên đường đi tìm được, ta loại đi chiều ngược lại (chiều quay về s), giữ nguyên hướng thuận nhưng đổi dấu trọng số cạnh. Ví dụ: cạnh (u,v) trọng số 5, ta loại đi hướng về v, còn hướng (u,v) sẽ có trọng số bằng -(u,v) = -5).

Đồ thị trở thành có hướng, có cạnh âm nhưng không có chu trình âm, ta dùng thuật toán FordBellman tìm đường đi ngắn nhất từ f về s.

Khi đó những cạnh thuộc đúng một trong hai đường đi (đường Dijstra và đường F.B.) sẽ là các cạnh trên hai đường đi tối ưu cần tìm.

Mở rộng

Ta có thể mở rộng tìm k đường đi có tổng nhỏ nhất.

Bài tập số 90 : Xếp tour du lịch.

Đề bài :

Một khu du lịch gồm N địa điểm du lịch đánh số từ 1 đến N, và một vị trí xuất phát đánh số 0, có một số đường hai chiều nối một số cặp địa điểm. Một tour là một đường đi bắt đầu từ vị trí xuất phát, qua một số địa điểm du lịch, mỗi địa điểm không quá 1 lần rồi quay về vị trí xuất phát. Để tránh sự nhàm chán cho du khách, hai tour bất kì không cùng đi qua 1 địa điểm nào, trừ vị trí xuất phát. Hãy tĩm cách bố trí các tour sao cho được nhiều tour nhất.

Input

Dòng đầu ghi N (N <= 100).

N+1 dòng sau, mỗi dòng gồm N+1 số 0/1 thể hiện ma trận C(0..N,0..N), trong đó C(i,j) = 1 nếu i,j có đường nối,bằng 0 nếu ngược lại.

Output

Dòng đầu ghi k là số tour nhiều nhất.

k dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một tour gồm dãy các địa điểm trên đường đi của tour tương ứng.

Thuật giải

Xây dựng mạng gồm N+2 đỉnh 0..N+1, trong đó đỉnh 0 tách làm 2: đỉnh thu và đỉnh phát. Nếu hai địa điểm có cạnh nối thì trong mạng hai vị trí tương ứng có cạnh trọng số 1 (theo cả hai hướng). Bài toán được đưa về tìm luồng cực đại trong mạng,trong đó ta xét cả giới hạn thông qua của mỗi đỉnh là 1 (ta phải tách đỉnh).

Bài tập số 91 : Truyền tin.

Đề bài :

Một lớp học có N học sinh, mỗi một học sinh có một danh sách các học sinh mà mình có thể thông báo tin được, tức là nếu học sinh này biết một tin gì thì những học sinh trong danh sách đó cũng biết. Đồng thời, tin tức chỉ được lan truyền bằng cách này. Ta chú ý là ở đây quan hệ truyền tin không phải hai chiều, tức là a thông báo cho b được không có nghĩa b sẽ thông tin cho a được. Thầy giáo muốn thông báo một tin cho cả lớp, tuy nhiên thầy muốn chỉ cần thông báo cho một số ít nhất học sinh thì cả lớp có thể biết được tin.

Input

Dòng đầu ghi N (N <= 100)

N dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi N số trong đó số thứ j của dòng thứ i là 0 nếu i không thông tin được cho j và bằng 1 nếu ngược lại.

Output

Dòng đầu ghi k là số nhỏ nhất các học sinh cần thông báo.

Dòng 2 ghi k học sinh mà thầy cần thông báo.

Thuật giải

```
  Khởi tạo tất cả các đỉnh chưa thăm, chưa được đánh dấu.
 For i =  1 to n do
  if  Chưa thăm(i) then
  Begin
      Đánh dấu(i).
      DFS(i)
       {duyệt theo chiều sâu tìm tất cả các đỉnh có thể tới từ i, các đỉnh này chưa thăm sẽ bằng
False}
 End;
Khởi tạo chưa thăm tất cả.
For i = n downto 1 do
 if  Đã được đánh dấu(i)  và chưa thăm(i)   then
  Begin
     i sẽ là một học sinh được nhận thông báo trực tiếp từ thầy.
     DFS(i)
  End;
```

Bài tập số 92 :

Đề bài :

Cho N khoảng trên trục số, đánh số từ 1 đến N. Mỗi khoảng được biểu diễn bởi hai số nguyên s,f là ví trí đầu và cuối của khoảng đó. Khoảng A được gọi là nằm trong khoảng B nếu như tập số tương ứng của A là con thực sự của tập ứng với B. Hãy tìm dãy dài nhất các khoảng a1,a2,…,ak sao cho ai nằm trong a(i+1) với mọi 0 < i < k.

Input

Dòng đầu ghi N (N <= 500)

N dòng tiếp theo, dòng thứ i mô tả đoạn thứ i gồm hai số nguyên s,f.

Output

Dòng đầu ghi k

Dòng 2 ghi các số a1, a2,…,ak

Thuật giải

Xây dựng đồ thị một chiều trong đó mỗi đỉnh tương ứng một khoảng, nếu a nằm trong b thì có cung nối a đến b. Đồ thị hiển nhiên không có chu trình, ta dung thuật toán tìm đường đi dài nhất trên đồ thị có hướng không chu trình. Đường đi này sẽ tương ứng dãy các khoảng cần tìm.

Bài tập số 93 : Tô màu bản đồ.

Đề bài :

Bản đồ một nước gồm N tỉnh, mỗi tỉnh có một danh sách các tỉnh có chung đường biên giới với nó. Hãy cho biết có thể chỉ cần dùng hai màu để tô các tỉnh sao cho hai tỉnh có chung biên giới thì khác màu nhau không.

Input

Dòng đầu ghi N (N <= 100)

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi danh sách các tỉnh có chung biên giới với tỉnh i. Chú ý quan hệ chung biên giới là quan hệ hai chiều.

Output

Nếu không thể tô màu bản đồ thì thông báo NO SOLUTiON, ngược lại ghi N số 1 / 2 trong đó số thứ i là màu được tô cho tỉnh i.

Thuật giải

Đưa bản đồ về mô hình đồ thị.

Ta loang để tìm thành phần liên thông. Trên mỗi thành phần liên thông, chọn một đỉnh bất kì thuộc thành phần liên thông đặt màu đó bằng 1, sau đó từ đỉnh này ta duyệt theo chiều sâu, thăm lần lượt các đỉnh khác thuộc thành phần liên thông như sau:

```
Procedure Visit(u)
Begin
   Chua_Tham(u) = false;
   For v = ke(u) do
     if ChuaTham(v) then
       Begin
          Mau(v) = 3- Mau(u);   {Tô màu v khác u }
          Visit(v);                  {Gọi đệ qui thăm tiếp v}
       End
     Else if Mau(u) = Mau(v) then NOSOLUTiON;
End;
```

Bài tập số 94 : Dãy nhị phân

Đề bài :

Một tập hợp S gồm các dãy N bit 0, 1 trong đó không có hai bit 1 nào kề nhau. Ví dụ với N = 5 thì S gồm các dãy 00000, 00001, 000101, …. Tập S được sắp xếp theo chiều tăng dần của số nguyên tương ứng mà dãy bit bieu dien. Cho số N và một số nguyên M hãy cho biết dãy bit thứ M trong S.

Input

N, M (N <= 40, M đảm bảo có nghiệm)

Output

Dãy N số 0, 1 ghi liền nhau mô tả dãy nhị phân tìm được.

Thuật giải

Gọi C(i) là số các phần tử của tập S ứng với N = i.

Công thức tính truy hồi C(i) = C(i-1) + C(i-2)

C(0) = 1; C(1) = 1;

Thuật toán xây dựng dãy M như sau:

```
For i := 1 to N do
 Begin
    if  M  > C(N-i) then
       Begin
          Bit[i] = 1;
          M = M - C(N-i);
       End
     Else Bit[i] = 0;
 End;
```

Bài tập số 95 : Đoạn 1.

Đề bài :

Cho hai số nguyên dương N và k, tập S gồm các dãy nhị phân độ dài N thoả mãn số các đoạn 1 liên tiếp bằng k. Ví dụ N=5, k = 2 tập S gồm các dãy 00101, 01011, 11011,…. Các phần tử của S được sắp xếp theo thú tự tăng dần của số nguyên tương ứng. Hãy cho biết dãy nhị phân thứ M của S.

Input

Một dòng 3 số nguyên N, k, M (N <= 50). Các số cho đảm bảo có nghiệm.

Output

Một dòng gồm các số 0, 1 ghi liền nhau thể hiện dãy nhị phân tìm được.

Thuật giải

Gọi C(i,j) là số các dãy nhị phân độ dài i có j đoạn 1 liên tiếp, ta dùng công thức sau đề tính C(i,j)

```
C(i,j) = 0;
For u = i downto 1 do C(i,j) := C(i,j) + C(u-2,j-1) + C(u-1,j);
```

Sau khi tính các C(i,j), ta xây dựng dãy thứ M như sau:

```
i := 1;
for j := k downto 1 do
 begin
   if M <= C(N-i,j) then
    begin
      Bit[i] := 0;
      i := i + 1;
    end
   else
    begin
      M := M - C(N-i,j);
      repeat
        Bit[i] := 1;
        i := i+1;
        if M > C(N-i,j-1) then M := M-C(N-i,j-1)
        else Break;
      until False;
    end;
 end;
for j := i to N do Bit[j] := 0;
```

Bài tập số 96 : Star

Đề bài :

Trên mặt phẳng có N ngôi sao, mỗi ngôi sao được coi như là một điểm với các tọa độ x, y nguyên dương. Người ta định nghĩa bậc của một ngôi sao là số các ngôi sao có hoành độ và tung độ đều không lớn hơn nó không kể chính ngôi sao đó. Để theo dõi sự phân bố các sao, người ta muốn biết với mỗi bậc có bao nhiêu ngôi sao tương ứng.

Input

Dòng đầu ghi N (N <= 10000)

N dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi hai số nguyên dương x, y là toạ độ của một ngôi sao.

Các x, y <= 32000 và không hai ngôi sao nào trùng nhau.

Output

Gồm các dòng, mỗi dòng ghi hai số u, v cho biết với bậc u có v ngôi sao. Các dòng ghi theo chiều tăng dần của bậc u, và chỉ các u nào mà v > 0 thì mới thông báo.

Thuật giải

Trước hết, ta sắp xếp các ngôi sao theo thứ tự tăng dần của x, trong các ngôi sao có cùng x thì xếp tăng dần y.

Sau khi đã sắp xếp, ta tính bậc của từng đỉnh theo thứ tự đã sắp.

Ta dùng một danh sách A lưu tung độ của các đỉnh. Cứ mỗi lần tính xong bậc một sao mới ta chèn y của nó vào danh sách tại vị trí thích hợp để danh sách luôn tăng dần theo y.

Tại mỗi bước tính bậc của một ngôi sao, thì A là danh sách tung độ đã được săp xếp của các ngôi sao đã được tính bâc.

Khi tính bậc ngôi sao thứ k, ta xét ngôi sao thứ k-1.

Nếu tung độ k >= tung độ ngôi saok-1, bậc của k = bậc(k-1) + số ngôi sao đã xét có tung độ lớn hơn y(k-1) và <= y(k).

Nếu y(k-1) > y(k) bậc của k = bậc của(k-1) - số ngôi sao có tung độ > y(k) và <= y(k-1).

Để tính số ngôi sao có y nằm giữa hai khoảng a,b nào đó, ta chỉ việc tìm vị trí tương ứng của a, b trong danh sách A, khi đó số ngôi sao = vị trí b - vị trí a. Vì bản thân danh sánh A đã sắp nên nếu dùng tìm kiếm nhị phân ta chỉ mất logN cho mỗi lần tìm kiếm.

Thuật toán gồm phần sắp xếp (Quick Sort NlogN), phần tính bậc mỗi ngôi sao tính bậc mất 3 lần tìm kiếm nhị phân nên mất 3logN.

Như vậy thuật toán có thời gian chạy tỉ lệ với NlogN.

Bài tập số 97 : Nối dây.

Đề bài :

Trong không gian cho 3 điểm A, B, C có các toạ độ x,y,z nguyên dương và <= 32000.

Một vật rắn hình khối cầu đường kính R nguyên dương, tâm tại C.Hai điểm A B nằm ngoài khối cầu đó. Hãy dùng mỗi sợi dây nối hai điểm A,B với độ dài nhỏ nhất, sợi dây phải thoả mãn không đi xuyên qua khối cầu rắn.

Input

3 dòng đầu mỗi dòng gồm 3 số x,y,x là toạ độ của lần lượt 3 điểm A,B,C

Dòng 4 ghi R.

Output

Một dòng ghi số thực chính xác 3 chữ số sau dấu phẩy là độ dài nhỏ nhất của sợi dây.

Thuật giải

Đây là một bài toán hình học khá đơn giản. Ta xây dựng mặt phẳng P qua A, B, C (nếu A,B C thẳng hàng thì lấy mặt phẳng bất kì chứa A,B). Ta dễ thấy, sợi dây mắc tối ưu phải nằm hoàn toàn trên mặt phẳng trên. Đưa về bài toán trên mặt phẳng, ta có thể giải quyết dễ dàng.

Bài tập số 98 : Chọn công tắc.

Đề bài :

Một hệ thống gồm N bóng đèn và M công tắc. Mỗi công tắc có một danh sách các bóng đèn mà khi thay đổi trạng thái công tắc này thì bóng sẽ thay đổi trạn thái (bật / tắt). Để quản lý hệ thống đèn, người ta cần chọn ra một số công tắc sao cho tổng chi phí nhỏ nhất. Việc chọn công tắc phải đảm bảo từ một trạng thái bất kì của N đèn luôn có thể dùng sử dụng các công tắc để đưa về trạng thái bất kì khác. Đôi khi có thể không tìm được phương án thoả mãn các yêu cầu trên, khi đó cần thông bào vô nghiệm.

Input

Dòng đầu ghi hai số nguyên dương N, M (N, M <= 50)

M dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một công tắc bao gồm :

Đầu tiên là số nguyên dương s, chi phí cho công tắc.

Sau đó là danh sách các đèn sẽ thay đổi trạng thái khi chuyển trạng thái công tắc.

Output

Nếu vô nghiệm dòng đầu ghi -1 và kết thúc.

Ngược lại, dòng đầu ghi hai số nguyên dương T là tổng chi phí, k là số công tắc chọn,

Dòng 2 ghi k tên các công tắc được chọn.

Thuật giải

Ta chú ý rằng nếu có phương án chọn thì chỉ cần chọn đúng N công tắc là đủ. Khi đó ta phải chọn các công tắc sao các công tắc độc lập tuyến tính với nhau (Ta có thể kiểm tra sự độc lập tuyến tính của các công tắc bằng phép khử như trong giải hệ phương trình đồng dư môđun 2).

Khi đó ta chỉ việc duyệt các tổ hợp chập N của M công tắc, để tìm ngiệm tối ưu.

Bài tập số 99 : Đồ thị không mâu thuẫn

Đề bài :

Cho một hoán vị P của N số {1,2,3…,N}. Một đồ thị có hướng N đỉnh gọi là không mâu thuẫn với hoán vị P nếu nó thỏa mãn các yêu cầu sau đây:

+ Có N đỉnh.
+ Hai đỉnh bất kì u, v có đúng 1 cạnh (từ u -> v hoặc v->u)
+ Không có khuyên (tức là không có u->u)
+ với hai đỉnh bất kì thì u -> v khi và chỉ khi P(u)->P(v).

Hãy tìm số các đồ thị không mẫu thuẫn của hoán vị P.

Input

Dòng đầu ghi số N (N <= 1000)

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi số P(i)

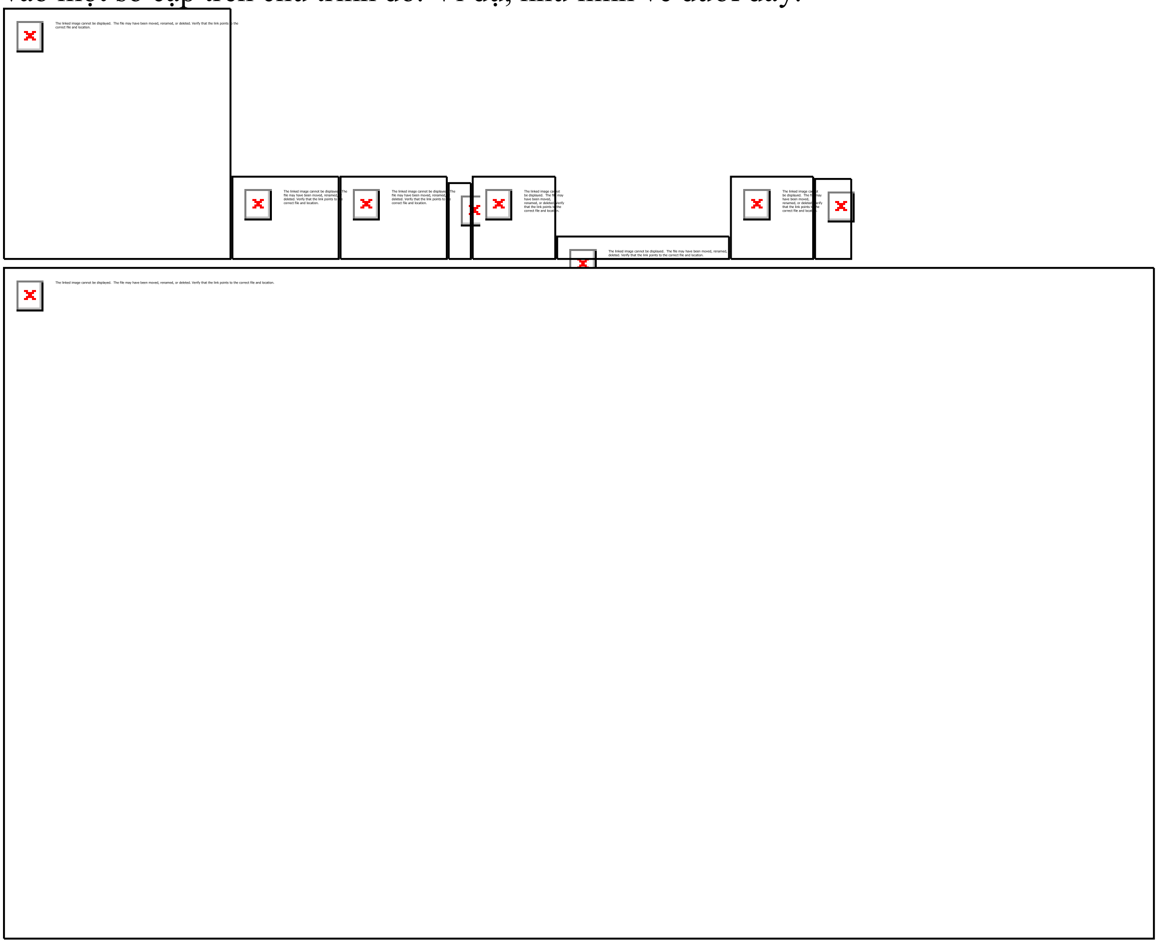
Output

Vì số kêt quả có thể rất lớn cho nên chỉ cần đưa ra phần dư của kết quả cho 1000.

Thuật giải

Với hoán vị P, dễ thấy nếu định chiều một cặp đỉnh nào đó thì cũng dẫn đến một số cặp khác phải định chiều theo nó (u->v khi và chỉ khi P(u)->P(v)). Ta gọi một cặp (u,v) là độc lập với cặp (u1,v1) nếu như việc đánh chiều (u,v) không dẫn đến phải định chiều (u1,v1), tức là có thể định chiều không phụ thuộc vào định chiều (u,v). Ta phân chia các cặp (x,y) thành các lớp không độc lập, tức là định chiều cặp này sẽ dẫn đến định chiều các cặp khác cùng lớp. Vì quan hệ độc lập vừa có tính chất bắc cầu vừa có tính chất hai chiều (dễ dàng chứng minh) nên nếu có k lớp thì số các đồ thị không mâu thuẫn sẽ là 2^k. Vấn đề còn lại là tìm số lớp cạnh như thế.

Ta xét các chu trình trong đường đi u -> P(u), giả sử m chu trình với số đỉnh trên mỗi chu trình là C1, C2, …, Cm. Khi đó dễ thấy mỗi cặp (u,v) mà u,v thuộc cùng một chu trình chỉ phụ thuộc vào một số cặp trên chu trình đó. Ví dụ, như hình vẽ dưới đây:



Trên chu trình (1,2,3,4,5,6) cặp (1,2) cùng lớp với (2,3), (3,4),…; cạnh (1,3) cùng lớp với (2,4),(3,5),…; ….

Ta cũng thấy cặp**(1,4)** cùng lớp với (2,5),(3,6),**(4,1),** như vậy lớp chứa (1,4) bản thân nó cũng tự mâu thuẫn, điều này chỉ xảy ra vơi các chu trình chẵn. Do đó nếu có chu trình chẵn thì bài toán sẽ không có nghiệm và ta không cần phải đếm số lớp nữa.

Trong trường hợp không có chu trình chẵn, đối với các cặp (u,v) mà u, v trên hai chu trình khác nhau giả sử a,b là số độ dài hai chu trình tương ứng trên, d = ước chung lớn nhất của (a,b). Khi đó ta có thể chứng minh số lớp (u,v) mà u thuộc A,v thuộc B là p.

Ta cũng dễ thấy là các cặp nối hai cặp chu trình khác nhau thì độc lập với nhau. Từ đó, ta đếm số lớp bằng cách tính tổng trên từng chu trình một và trên từng cặp chu trình.

Bài tập số 100 : Xe đẩy hàng.
Đề bài :

Một nhà kho có dạng một hình chữ nhật kích thước mxn ô vuông, mỗi ô vuông nền thuộc một trong các dạng sau : ô trống, ô có có hàng(có duy nhất một ô như vậy), ô có vật cản. Một người cần phải đẩy hàng từ vị trí ban đầu tới vị trí đích cho trước. Biết rằng người đó chỉ có thể di chuyển tự do qua các ô kề cạnh và là ô trống, người đó chỉ có thể đẩy hàng nếu đứng tại mộ ô trống kề cạnh với ô có hàng và đẩy hàng đi, tất nhiên ô mà hàng bị đẩy tới phải là ô trống và sau khi đẩy người đó sẽ đứng tại ô vừa bị đẩy hàng đi.

Mỗi bước thực hiện hoặc là một bước di chuyển tự do hoặc là một bước đẩy hàng. Hãy chỉ ra cần ít nhất bao nhiêu bước để đẩy được hàng về vị trí yêu cầu.

Input

M,N (M,N <= 50)

Dòng thứ 2 ghi 2 số là hàng và cột của ô người đẩy hàng xuất phát.

Dòng thứ 3 cũng gồm hai số mô tả vị trí đích.

M dòng tiếp theo, mỗi dòng N số mô tả khu nhà kho trong đó 0 - ô trống, 1- ô hàng, 2- ô có vật cản.

Output

Một dòng ghi -1 nếu không thể đẩy được hoặc ghi số bước ít nhất nếu có nghiệm.

Thuật giải

Gọi (u,v,d) là trạng thái trong đó hàng ở ô u,v và người ở một ô kề cạnh với ô có hàng theo hướng d (trái, phải, trên, dưới). Dễ thấy, quá trình đẩy hàng tương đương với chuyển các trạng thái u,v,d. Ta có thể dễ dàng tìm số bước ít nhất trong chuyển hai trạng thái liên tiếp (bằng loang theo chiều rộng). Từ đó có thể dùng thuật toán Dijstra tìm đường đi ngắn nhất giữa hai trạng thái, từ đó suy ra số bước tối thiểu.

Bài tập số 101 : Các ngôi sao.
Đề bài :

Trên bầu trời có nhiều ngôi sao. Bầu trời đựoc coi như là mặt phẳng với hệ trục toạ độ vuông góc, mỗi ngôi sao được coi như một điểm với các toạ độ nguyên dương. Đặc biệt N ngôi sao có hoành độ lần lượt là 1, 2, 3,…,N. Hãy tìm hai ngôi sao u, v thoả mãn các điều kiện sau:

+ Mọi ngôi sao có hoành độ nằm giữa u, v đó thì sẽ nằm dưới đường thẳng nối u với v.
+ Hệ số góc của đường thẳng nối u, v là lớn nhất có thể.

Input

Dòng đầu ghi N (3 <= N <= 100000)

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi tung độ của ngôi sao thứ i.

Output

Một dòng ghi hai số là hoành độ của hai ngôi sao tìm được, chú ý ngôi sao có hoành độ nhỏ hơn ghi trước.

Thuật giải

Ta chú ý rằng nghiệm của bài toán luông có dạng hai ngôi sao liên tiếp, do đó ta chỉ cần xét hệ số góc của các đường thẳng nối hai ngôi sao có hoành độ liên tiếp là đủ.

Bài tập số 102 : Đoạn trắng.

Đề bài :

Trên trục tọc độ nằm ngang chưa có đoạn nào đựoc tô màu. Người ta tiến hành tô màu trục toạ đô bằng hai màu đen, trắng. Mỗi lần tô màu được thể hiện bằng hai số nguyên dưong u, v, và kí tự c cho biết tô màu trục từ vị trí toạ độ u đến toạ độ v bằng màu c (d -đen, t- trắng). Sau N lần tô màu, hãy tìm đoạn đựoc tô toàn bằng màu trắng và có độ dài lớn nhất.

Input

Dòng đầu ghi số nguyên dương N (N <= 5000)

N dòng tiếp theo, dòng thứ i thể hiện lần sơn thứ i gồm hai số u, v và kí tự c (0 <= u, v < 1000000000).

Output

1 dòng ghi hai số là vị trí đầu và cuối của đoạn trắng tìm được.

Thuật giải

Trước hết ta tìm các vị trí là đầu mút của một lần tô nào đó, có không quá 2N vị trí như vậy. Cứ hai vị trí liên tiếp cho ta một khoảng, và trên khoảng này luôn được tô cùng màu.

Cứ sau mỗi lần tô ta cập nhật màu của các khoảng (ta tìm kiếm nhị phân hau đầu mút). Cuối cùng ta có thể dễ dàng tìm khoảng trắng có độ dài lớn nhất.

Bài tập số 103 : Xếp quân hậu.

Đề bài :

Bài toán xếp hậu trên bàn cờ khá quen thuộc với các bạn. Tuy nhiên trong bài tập này các bạn không phải tìm số tất cả các cách xếp hậu mà yêu cầu ở đây là: Cho trước một cách xếp các hậu trên bàn cờ N x N sao cho các quân hậu đôi một không khống chế nhau, hãy tìm số cách xếp các quân hậu sao cho vẫn thoả mãn các tính chất trên mà chỉ thay đổi vị trí của đúng 3 quân hậu.

Input

Dòng đầu ghi số N (N <= 60)

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi cột của con hâu đứng tại hàng thứ i.

Dữ liệu vào đảm bảo đúng đắn.

Output

Một dòng ghi só cách xếp.

Thuật giải

Bài toán chỉ cần đổi chỗ đúng 3 quân hậu nên có thể duyệt các tổ hợp chập 3 của N quân hậu, với mỗi bộ 3 ta phải duyệt tiếp các cách đặt vị trí mới của 3 quân hậu, chú ý chỉ có 3 cột trống, 3 hàng trống (không có quân hậu cố định trên hàng) nên số cách đặt không quá 5 (không tính chính cách đặt của đề bài).

Bài tập số 104 : Sửa đường.

Đề bài :

Một hệ thống giao thông gồm N nút và M đường hai chiều nối một số cặp nút, hai nút bất kì chỉ có thể đựoc nối với nhau bởi không quá 1 cạnh. Người ta cần tiến hành sửa một số đường sao cho mạng với những đường đựoc sửa luôn đảm bảo sự đi lại giữa hai nút bất kì và nếu bỏ đi một cạnh bất kì trong số các cạnh đó thì tính chất vừa nêu sẽ không còn đúng nữa. Để tìm cách sửa với phương án tối ưu, người ta cần biết số tât cả các phương án có thể. Hãy tính số đó.

Input

Dòng đầu ghi hai số nguyên dương N, M (N <= 20, M <= 50)

M dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi thông tin về một cạnh bao gồm hai số u, v cho biết đường nôi hai nút u và v.

Output

Một dòng duy nhất ghi số các phương án có thể.

Thuật giải

Đây chính là bài toán đếm só cây khung của đồ thị. Ta duyệt để đếm tất cả các phương án chọn cạnh để tạo thành cây, chú ý ta có thể kiểm tra ngay với tập cạnh cho trước có tạo thành chu trình để quay lui.

Bài tập số 105 : Chess

Đề bài :

Một bàn cờ có dạng bảng chữ nhật kích thước mxn, trên đó có một số quân cờ. Một quân cờ chỉ có thể di chuyển sang một ô kề cạnh còn trống, mỗi di chuyển như vậy đuợc gọi là một bước di chuyển. Cho hai trạng thái của bàn cờ, hãy chỉ ra một dãy các bước di chuyển để đưa bảng từ trạng thái ban đầu đến trạng thái đích. Mỗi trạng thái được mô tả là một ma trận mxn trong đó số ở hàng i cột j là 1 nếu tại vị trí i,j tương ứng có quân cờ đang đứng hoặc bằng 0 nếu không có.

Input

Dòng đầu ghi hai số nguyên dương m, n (1 < m, n <= 10)

Tiếp theo là 2m dòng thể hiện ma trận mô tả trạng thái xuất phát và trạng thái đích. m dòng đầu tiên thể hiện ma trận xuất phát, m dòng tiếp theo là ma trận đích.

Input cho đảm bảo luôn có nghiệm.

Output

Dòng đầu ghi K là số ít nhất các phép biến đổi tìm đựoc.

K dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một phép biến đổi, theo đúng thứ tự biến đổi, gồm 4 số nguyên dương u, v, x, y thể hiện di chuyển quân cờ ở vị trí (u,v) sang vị trí (x,y).

Thuật giải

Ta gọi X là tập các ô tại trạng thái xuất phát có quân cờ, còn đích thì không, Y là tập các ô ma trạng thái xuất phát không có mà trạng thái đích có. Dễ thấy bài toán có nghiệm khi và chỉ khi X, Y có cùng số phần từ. Ta xây dựng đô thị hai phía (X,Y) trong đó với mỗi x thuộc X, y thuộc Y thì cạnh (x,y) có trọng số là số các bước di chuyển nhỏ nhất để đi chuyển từ x đến y trên bàn cờ không có vật cản.

Bài toán tìm số bứơc ít nhất tương đương với cặp ghép tổng trọng số nhỏ nhất trên đồ thị hai phía, như đã xây dựng ở trên. Với cặp ghép tối ưu tìm được, ta cho di chuyển quân cờ tại x đến vị trí cặp ghép tương ứng của x.

Mở rộng

Bài toán có thể mở rộng cho bảng kích thước lớn hơn với điều kiện tập X, Y không lớn (có không quá 200 phần tử), và bước quân cờ có thể di chuyển giống quân mã hay quân vua…

Bài tập số 106 : Khoá chữ.

Đề bài :

Một khoá chữ sinh ra từ xâu kí tự S là một xâu kí tự nhận được từ xâu S bằng hoán đổi vị trí các kí tự. Ví dụ: S = 'abbbc' có các khoá chữ 'abbcb', 'bbacb', ….

Để tìm khoá thích hợp, người ta cần biết các khoá chữ có thể sinh ra từ một xâu S cho trước. Các khoá chữ được xếp theo thứ tự tăng dần của thứ tự từ điển. Vì số lượng khoá có thể rất lớn, mà ta chỉ cần quan tâm đến 100 khoá đầu tiên. Yêu cầu : Cho xâu S chỉ gồm các chữ cái thường hãy đưa ra các khoá yêu cầu.

Input

Một dòng chứa xâu kí tự S (độ dài S <= 1000)

Output

Nếu số khoá chữ nhỏ hơn 100 thì đưa ra tất cả, ngược lại đưa ra 100 khoá đầu tiên. Các khoá đưa ra phải theo thứ tự từ điển.

Thuật giải

Ta áp dụng giải thuật sinh khóa tiếp theo từ môt khoá X cho trước.

Lần từ cuối về đầu vị trí i đầu tiên mà X[i] < X[i+1]. Nếu tìm thấy thì ta tìm j lớn nhất sao cho X[j] > X[i], đổi chỗ hai vị trí i,j và sắp xếp lại đoạn từ i+1 đến cuối theo thứ tự tăng dần, xâu nhận được chính là khóa chữ ở vị trí tiếp theo trong thứ tự từ điển.

Ngược lại nếu không tìm thấy i thì X là xâu lớn nhất.

Bài tập số 107 : Các hình vuông.

Đề bài :

Trên mặt phẳng có N hình vuông. Thông tin về một hình vuông bao gồm 3 số nguyên dương x,y,r trong đó x,y là toạ độ góc trái dưới và r là kích thước hình vuông. Hai hình vuông bất kì không có điểm chung. Hãy cho biết có bao nhiêu hình vuông có thể nhìn thấy được từ gốc tọa độ. Một hình vuông được gọi là nhìn thấy đươc nếu tồn tại một đoạn thẳng nối gốc toạ độ với một điểm của hình vuông đó mà không giao với bất kì hình vuông nào khác.

Input

Dòng đầu ghi só nguyên dương N (N <= 100)

N dòng sau mỗi dòng chứa thông tin về một hình vuông gồm ba số nguyên dương x,y,r.

Output

Một dòng cho biết số hình vuông nhìn thấy được từ gốc toạ độ.

Thuật giải

Ta kiểm tra có thể nhìn thấy của từng hình vuông như sau:

Từ gốc O ta quét các tia tới các đỉnh của các hình vuông mà có thể cản được ánh sáng tới hình vuông này. Sau đó tìm vị trí nhìn đươc của hình vuông cần xét qua các khoảng ánh sáng (giữa hai góc quét liên tiếp) có thể lọt tới mà không bị cản. Nếu có một khoảng lọt qua tới đươc hình vuông thì tức là có thể hình thấy được, ngược lại không tìm thấy thì ta có câu trả lời phủ định.

Mở rộng :

Bài toán có thể mở rộng đối với các đa giác lồi không giao nhau thay vì chỉ là các hình vuông. Khi đó điểm chọn để quét từ O là hai điểm ngoài nhất nếu nhìn từ O, phần còn lại tương tự.

Bài tập số 108 : Số người nhiều nhất.

Đề bài :

Trong một cuộc họp diễn ra từ thời điểm 0 cho đến thời điểm T (T <= 1000000000), người ta đã thống kê có N khách ra vào phòng họp. Thông tin về mỗi người khách bao gồm s, f là thời điểm vào và f là thời điểm ra (0 <= s < f <= T). Hãy cho biết khoảng thời gian có nhiều khách trong phòng nhất là bao nhiêu người.

Input

Dòng đầu ghi hai số T, N (N <= 1000)

N dòng tiếp theo, mỗi dòng gồm hai số nguyên dương s,f thể hiện thông tin về ra vào của một người.

Output

Một dòng ghi số người nhiều nhất thống kê được.

Thuật giải

Ta phân chia thời gian họp thành các khoảng liên tiếp, mà vị trí giữa các khoảng liên tiếp là thời điểm có khách ra/vào. Rõ ràng số điểm nút không quá 2N+2 do đó số khoảng không quá 2N-1. Trong một khoảng không có ai ra và vào, nên ta chỉ cần thống kê người trong các khoảng.

Mỗi thông tin vè một người tương ứng với dãy các khoảng thời gian mà người đó xuất hiện trong phòng. Từ các thông tin đó ta chỉ cần duyệt qua các khoảng để tìm số người nhiều nhất xuất hiện trong phòng.

Bài tập số 109 : Dãy số.

Đề bài :

Cho một dãy có N số nguyên dương a1, a2, …, aN có tổng không quá 10000. Một phép co dãy là thay hai vị trí i, i+1 bằng hiệu a(i)-a(i+1) (1 <= i < N). Ví dụ: Dãy (1,4,5,2,3), N = 5

Thực hiện co i = 2 : dãy nhận được (1,2,3,3)

co i = 2 :	(1,2,0)
co i = 1 :	(-1,0)
co i = 1 :	(-1)

Số nhận được là -1.

Hãy cho biết sau N-1 phép biến đổi như trên cuối cùng có thể thu đươc số nguyên C cho trước không. Nếu có, hãy chỉ ra dãy các biến đổi để đưa dãy về C.

Input

N, C (N <= 100)
Dòng 2 ghi N số nguyên dương a1, a2,…, aN.
Output
Dòng đầu ghi 1/0 cho biết có thể hay không thể biến đổi được.
Nếu được, thì N-1 dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một số i là vị trí phép co trong dãy hiện thời.
Thuật giải
Thực hiện N-1 phép co tương đương với đặt dấu +,- vào trước các a(i) sao cho biểu thức nhận được là C, dấu của a(1) luôn là +, của a(2) luôn là -.
Ví dụ: Trong ví dụ đề bài, các phép biến đổi tương đương với:
1-2-5-2-3 = -1
Bài toán có thể giải giống như bài toán chia kẹo. Dùng hàm F(k) kiểm tra xem có thể chọn ra trong tập (a3, a4,…,aN) một số phần tử có tổng bằng k được không (Qui hoạch động).

Bài tập số 110 : Lập lịch trên hai máy.
Đề bài :
Có N công việc cần thực hiện trên hai máy, công việc i thực hiện trên máy j (j = 1, 2) mất a(i,j). Mặt khác vì các công việc cần trao đổi thông tin với nhau nên phải mất thêm chi phí trao đổi, chi phí này bằng tổng các C(i,j) trong đó i làm trên máy 1, j làm trên máy 2. Các chi phí đều nguyên dương, hãy tìm cách bố trí công việc trên các máy sao cho tổng chi phí nhỏ nhất. Tổng chi phí = chi phí thực hiện trên các máy + chi phí trao đổi.
Input
N (N <= 100)
Dòng 2 ghi N số a(1,1), a(2,1),…, a(N,1)
Dòng 3 ghi N số a(1,2), a(2,2),…, a(N,2)
N dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi N số thể hiện ma trận C(i,j).
Output
Dòng đâu tiên ghi tổng chi phí nhỏ nhất.
Dòng thứ 2 ghi danh sách các công việc thực hiện trên máy 1.
Dòng 3 ghi danh sách các công việc thực hiện trên máy 2.
Thuật giải
Bài toán có thể đưa về tìm luồng cực đại. Xây dựng mạng với đỉnh phát s nối với N đỉnh bằng chi phí thực hiện công việc tương ứng trên máy 1, từ đỉnh i có cung đến đỉnh thu t với trọng số bằng chi phí thực hiện công việc i trên máy 2. Hai đỉnh i, j nối với nhau bằng cạnh có trọng số C(i,j).
Lát cắt hẹp nhất (A,B) cho ta phương án tối ưu : các đỉnh thuộc A cho công việc tương ứng làm trên máy 1, B cho biết các công việc đựoc làm trên máy 2.

Bài tập số 111 : Dãy xâu
Đề bài :
Cho một xâu S chỉ gồm các kí tự a, b và một phép sinh a->A, b->B, trong đó A,B cũng chỉ gồm các kí tự a,b hoặc là xâu rỗng. Dãy xâu S0, S1, S2, …được xây dựng như sau:
S0 = S
Si+1 là xâu nhận được từ Si bằng cách thay mỗi kí tự a bởi A, b bởi B.
Bài toán :Cho xâu X, hãy cho biết xâu đầu tiên trong dãy Si chứa nó, tức là hàm Pos(X,Si) cho giá trị dương.
Input
Gồm 4 dòng:
Dòng 1 : xâu A
Dòng 2 : xâu B
Dòng 3 : xâu S
Dòng 4 : xâu X
Các xâu đều chứa không quá 15 kí tự.

Output

Một dòng ghi i nhỏ nhất mà X xuất hiện trong Si, hoặc -1 nếu không tồn tại.

Ví dụ:

Input	Output
aa ab abb aba	1

Thuật giải

Bài toán này có thể giải bằng phương pháp loang theo chiều rộng.

Tập đỉnh là tập các xâu có thể sinh ra xâu chứa xâu X, từ một xâu loang ra các xâu mà xâu sinh từ nó chứa xâu đó, cho đến khi đến một xâu xuất hiện trong xâu S ban đầu. Tuy nhiên ta chỉ quan tâm đến những xâu có độ dài không quá 15.

Ví dụ: xâu X aba

Các xâu có thể sinh ra xâu chứa X : bb, ba

Độ dài đường đi ngắn nhất đến xâu cần tìm chính là số cần đưa ra.

Bài tập số 112 : Xếp hàng.

Đề bài :

Một người đi mua hàng, các hàng mua về có dạng hình hộp chữa nhật có chiều cao h < 1, còn đáy là hình vuông kích thước 1, 2, 3, 4, 5, 6. Anh ta chỉ có các loại hộp kích thước 6x6xh. Hãy tìm cách xếp các hàng mua về vào các hộp sao cho số hộp cần dùng là nhỏ nhất.

Input

Một dòng gồm 6 số trong đó số thứ i là số hàng có kích thước dáy i x i.

Output

Một dòng ghi số hộp nhỏ nhỏ nhất.

Thuật giải

Ta có các nhận xét sau:

+ Nếu có thể xếp bằng các hàng có kích thước đáy > 1 thì cũng có thể xếp bằng các hàng có kích thước 1.

+ Trong một va li chỉ có thể có 1 loại hàng có kích thước đáy trong tập (4,5,6), trong cách chia tối ưu thì các hàng này luôn dồn về một góc. Với 5 thì chỉ có thể xếp thêm 1, với 4 thì luôn xếp được 2.

+ Nếu có >= 4 hàng loại đáy 3 thì luôn xếp 4 hàng này vào 1 hộp.

Từ đó còn lại không quá 3 hàng loại 3, và các loại 1,2 ta dễ dàng xếp vào các hộp tiếp theo sao cho tối ưu.

Bài tập số 113 : Đường rào.

Đề bài :

Một trang trại được rào bởi các đường rào. Đường rào có dạng đoạn thẳng, hai đầu của hàng rào là những điểm có toạ độ nguyên. Hai đoạn rào không cắt nhau, trừ các vị trí đầu mút chung của cả hai đường rào. Các đường rào tạo nên các khoảng đất bị giới hạn bởi các đường rào có dạng đa giác. Hãy cho biết trong các đa giác đó, đa giác có chu vi nhỏ nhất bao nhiêu.

Input

Dòng đầu ghi số N là số các đường rào (N <= 1000)

N dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một đường rào gồm 4 số nguyên x1, y1, x2, y2 cho biết đường rào nối hai điểm có toạ độ (x1, y1) và (x2, y2).

Output

Một dòng ghi chu vi nhỏ nhất, chính xác 2 chữ số sau dấu phẩy.

Thuật giải

Ta xét tất cả các chu trình sơ cấp tạo ra.

Bài tập số 114 : Diện tích lớn nhất.

Đề bài :

Trên mặt phẳng cho N đoạn thẳng, hai đoạn thẳng bất kì chỉ có điểm chung là điểm mút chung của cả hai đoạn thẳng. Một điểm mút bất kì luông thuộc ít nhất hai đoạn thẳng. Các đoạn thẳng tạo thành các miền đa giác. Hãy cho biết diện tích lớn nhất của các miền.

Input

N (3 <= N <= 1000)

N dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một đoạn thẳng gồm 4 số nguyên x1, y1, x2, y2 thể hiên đoạn thẳng nối hai điểm (x1,y1) với (x2, y2).

Output

Một dòng ghi diện tích lớn nhất tìm được.

Thuật giải

Ta xét tất cả cac miền kín đựoc tạo thành từ các đoạn thẳng (Chú ý có không quá 2*N / 3 miền).

Bài tập số 115 : Rào vườn.

Đề bài :

Một vường trồng N cây, vị trí mỗi cây được coi như một điểm. Người ta cần tiến hành rào vườn bằng một đường khép kín sao cho tât cả các cây đều nằm trong miền được tạo ra từ đường khép kín này. Hãy cho biết độ dài tối thiểu của đường rào để có thể thực hiện mục đích trên.

Input

Dòng đầu ghi số N (1 < N <= 1000)

N dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi hai số nguyên x,y là toạ độ của một cây.

Output

Một dòng ghi độ dài nhỏ nhất.

Thuật giải

Bai toán chính là tìm bao lồi nhỏ nhất, ta có thuật toán Graham với độ phức tạp NlogN.

Bài tập số 116 :

Đề bài :

Một mạng máy tính gồm N máy đánh số từ 1 đến N và một số đường truyền tin hai chiều giứa các máy. Người ta cần chuyển thông tin từ máy 1 đến máy N, và với các kênh truyền hiện có đảm bảo có thể truyền được thông tin giữa máy 1 và máy N, tuy nhiên có một số máy mà trên mọi đường truyền tin giữa máy 1 và N luôn phải qua nó, nghĩa là nếu một trong các máy nàu bị hỏng thì đường truyền giữa máy 1 và máy N sẽ bị ngắt. Hãy chỉ ra các máy như thế.

Input

Dòng đầu ghi số 2 số nguyên dương N, M (N <= 100).

M dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một đường truyền tin hai chiều gồm hai số nguyên dương u, v thể hiện đường truyền tin nối hai máy u, v.

Output

Dòng đầu ghi k là số các máy mà nếu bị hỏng thì đường truyền tin giữa máy 1 và N sẽ bị mất.

Dòng thứ hai ghi k số là chỉ số của các máy như vậy.

Thuật giải

Ta có thể giải quyết bài toán bằng cách tìm các đỉnh khớp của đồ thị hoặc tìm lát cắt hẹp nhất. Trên đồ thị tương ứng ta cho trọng số cạnh bằng vô cùng, giới hạn thông qua của đỉnh bằng 1, ta tách mỗi máy thành hai đỉnh có cung nối trọng số 1. Mỗi lát cắt tương ứng 1 máy tìm được, ban đầu tìm luồng 1 đến N, được lát cắt gần 1 nhất tương ứng máy s, xây dựng lại mạng và tìm luồng s,N…

Bài tập số 117: Đánh bom thành phố.

Đề bài :

Mạng lưới giao thông của một quốc gia gồm N thành phố đánh số từ 1 đến N, và có một số đường giao thông hai chiều nối giữa một số cặp thành phố. Trong các thành phố đó thì 1 và N là hai thành phố huyết mạch mà nếu thành phố 1 và N không thể liên lạc được với nhau thì coi như mạng lưới giao thông đã bị tê liệt. Việc làm mất liên lạc giữa 1 và N có thể thực hiện bằng phá huỷ một số thành phố trung gian trên đường liên lạc giữa 1 và N, tuy nhiên việc đánh bom mỗi thành phố đều mất một chi phí và không thể trực tiếp đánh bom hai thành phố 1 và N. Hãy cho biết chi phí tối thiểu để có thể làm tê liệt mạng lưới giao thông của quốc gia trên.

Input

Dòng đầu ghi số N, M (N <= 100)

Dòng tiếp theo ghi N-2 số nguyên dương trong đó số thứ i ghi chi phí đánh bom thành phố i+1.

M dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi 2 số nguyên dương u, v cho biết có đường giao thông trực tiếp nối u, v.

Output

Dòng đầu ghi tổng chi phí nhỏ nhất.

Dòng thứ hai ghi danh sách các thành phố bị đánh bom.

Thuật giải

Ta đưa mô hình mạng giao thông về một mạng trong đó thành phố 1, N tương ứng các đỉnh phát và thu. Các cạnh tương ứng luôn có trọng số lớn vô cùng, cón mỗi đỉnh có trọng số thông qua là chi phí đánh bom thành phố. Ta tìm lát cắt hẹp nhất, lát cắt sẽ cho ta các thành phố tương ứng và gia trị của lát cắt chính là tổng chi phí nhỏ nhất.

Bài tập số 118: Trả tiền.

Đề bài :

Một ngân hàng có N loại tiền mệnh giá S1, S2, … SN, với số lượng mỗi loại không hạn chế. Hãy cho biết số cách cách khác nhau để trả một số tiền cho trước.

Input

Dòng đầu ghi N là số loại tiền (N <= 20)

Dòng thứ hai ghi số S là số tiền cần trả (S <= 1000)

Dòng thứ 3 ghi N số nguyên dương S1, S2,…,SN

Output

Một dòng ghi số các cách có thể.

Thuật giải

Ta tính bằng công thức truy hồi. Gọi C(i,j) là số cách cách trả số tiền j bằng các loại tiền S1, S2,…,Si. Ta có công thức như sau:

C(i,j) = C(i-1,j) + C(i,j-Si)

Bài tập số 119 : Tô màu đồ thị hai phía.

Đề bài :

Cho đồ thị hai phía (X,Y,E), tập X có n đỉnh, Y có m đỉnh. Yêu cầu: Hãy tìm cách tô màu các cạnh của đồ thị bằng các màu sao cho hai cạnh chung đỉnh bất kì thì khác màu nhau, và số màu cần dùng là ít nhất.

Input

Dòng đầu ghi 2 số n, m (n,m <=100).

n dòng tiếp theo, mỗi dòng gồm m số trong đó số thứ j của dòng thứ i bằng 1 nếu đỉnh thứ i của X nối với đỉnh thứ j của Y, và bằng 0 nếu ngược lại.

Output

Dòng đầu tiên ghi số màu ít nhất.

n dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi m số giống như trong Input nhưng thay vì ghi số 1 ta ghi thứ tự màu cần dung để tô cạnh tương ứng (máu đánh số từ 1).

Thuật giải

Tại mỗi bước ta tìm cặp ghép mà mọi đỉnh có bậc cao nhất đều được ghép, ta tô các cạnh của cặp ghép bằng một màu, lần lượt từ màu 1 ở bước 1, màu 2 ở bước 2,…. Chú ý sau mỗi lần tô màu cạnh thì các bước tiếp theo ta không quan tâm đến cạnh này nữa. Như vậy số màu cần tô bằng bậc cao nhất của các đỉnh.

Bài tập số 120 : Dàn đèn mầu.
Đề bài :

Trên một lười ô vuôngm * n, có k đèn. Mỗi đèn được đặt trên một ô của lưới. Người ta cần đặt màu cho mỗi đèn sao cho hai đèn cùng hàng, hoặc cùng cột thì khác màu nhau.

Hãy tìm cách đặt màu sao cho số màu cần dùng là ít nhất có thể.

Input

Dòng đầu ghi hai số m, n (m,n <= 1000)

Dòng thứ 2 ghi số nguyên dương k (k <= 1000)

K dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi hai số nguyên dương u,v là hàng và cột của đèn thứ i.

Output

Dòng đầu ghi p là số màu tối thiểu.

K dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi màu của đèn i.

Các màu đánh số từ 1 đến P.

Thuật giải

Bài này có thể đưa về bài toán tô màu cạnh của đồ thị hai phía, trong đó mỗi đèn tương ứng 1 cạnh (xem bài 119).

Bài tập số 121 : Diện tích các hình chữ nhật.
Đề bài :

Trên mặt phẳng cho N hình chữ nhật, các hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục toạ độ và các đỉnh có toạ độ nguyên. Hãy cho biết tổng diện tích phần mặt phẳng bị các hình chữ nhật chiếm.

Input

Dòng đầu ghi số nguyên dương N (N <= 1000)

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi 4 số nguyên x1, y1, x2, y2 cho biết toạ độ của các đỉnh trái dưới và phải trên của hình chữ nhật thứ i.

Output

Một dòng ghi số nguyên là tổng diện tích của phần mặt phẳng bị các hình chữ nhật chiếm.

Thuật giải

Trước hết ta sắp xếp các hình chữ nhật theo chiều tăng dần của tung độ dưới. Xét các đường thẳng song song trục tung có hoành độ là hoành độ của các đỉnh của các hình chữ nhật, có không quá 2*N đường thẳng như vậy. Hai đường thẳng liên tiếp nhau tạo thành một cột, không có hình chữ nhật nào có đỉnh nằm hoàn toàn trong một cột. Do đó tính phần diện tích các hình chữ nhật tính trong một cột là tổng diện tích các dải bị phủ bởi các hình chữ nhật, vì đã sắp theo chiều tăng dần của tung độ dưới nên việc tính tổng diện tích trên mỗi cột không quá N. Tổng diện tích cần tính bằng tổng diện tích trên các cột.

Bài tập số 122 : Mat trận 0 1.
Đề bài :

Cho ma trận vuôngA kích thước N*N, mỗi phần tử của ma trận có giá trị 0 hoặc 1. Một ma trận con đặc biệt của ma trận A là một ma trận vuông tạo bởi cùng một số hàng và cột liên tiếp của A, trong đó các phần tử trên đường chéo chính bằng 1 còn các phần tử khác của ma trận con bằng 0. Hãy tìm ma trận con đặc biệt lớn nhất của ma trận A.

Input

Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương N (1 <= N <= 200)

N dòng tiếp theo, mỗi dòng N số 0,1 thể hiện ma trận A.

Output

Một dòng ghi 3 số nguyên dương x,y,l trong đó x,y là hàng và cột của ô trái trên, l là kích thước của ma trận vuông con tìm được.

Thuật giải

Ta xét tất cả các phần tử của ma trận con, lần lượt từ trên xuống và phải sang trái. Với mỗi phần tử ta tính ma trận vuông đặc biệt lớn nhất nhận vị trí đó làm ô phải dưới. Ta tính vị trí kích thước lớn nhất C(u,v) như sau:

Nếu A(u,v) = 0 thì C(u,v) = 0.

Nếu A(u,v) = 1 thì C(u,v) tính theo C(u-1,v-1) và hàng thứ u, cột thứ v.

Bài tập số 123 : Xâu duy nhất.

Đề bài :

Cho một danh sách các từ, trong đó các từ xuất hiện một số chẵn lần, trừ một từ duy nhất xuất hiện số lẻ lần. Hãy tìm từ xuất hiện lẻ lần đó.

Input

Dòng đầu ghi số từ xuất hiện N (N <= 1000000)

N dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một từ trong danh sách. Độ dài mỗi từ không quá 15.

Output

Từ xuất hiện số lẻ lần.

Thuật giải

Ta dùng phép XOR: Ta XOR tất cả các xâu kí tự nhận được. Kết quả cuối cùng của các phép này chính là từ cần tìm.

Bài tập số 124 : Biểu thức logic.

Đề bài :

Cho hai biểu thức logic S1, S2 với các biến là các chữ cái thường từ a đến h, dấu ngoặc và các phép tính &(and), | (or), ! (not) theo thứ tự thực hiện là dấu ngoặc trước rồi đến !, &, |. Hai biểu thức được gọi là tương đương với nhau nếu nó nhận cùng một giá trị với mọi bộ giá trị logic của các biến.

Ví dụ : Biểu thức a&(b|c) tương đương với (a&b)|(a&c), không tương đương với (a&b)|c

Input

Hai dòng mỗi dòng chứa một xâu kí tự thể hiện một biểu thức biểu thức.

Xâu kí tự có độ dài không quá 100 kí tự.

Output

Một dòng ghi 1 / 0 cho biết hai biểu thức tương đương/ không tương đương.

Thuật giải

Ta kiểm tra bằng cách thử mọi bộ giá trị của các biến.

Bài tập số 125 : Di chuyển quân mã.

Đề bài :

Trên bàn cờ kích thước N*N, có một số ô có quân mã và một số ô cấm. Một ô chỉ có thể có một quân mã đang đứng hoặc là ô cấm hoặc ô trống. Người ta muốn tập kết tất cả các quân mã vào một ô trên bàn cờ sao cho tổng số bước di chuyển của tất cả các quân mã là ít nhất có thể. Mỗi bước quân mã chỉ có thể di chuyển theo qui tắc trên bàn cờ vua tới một ô trống, trừ trường hợp đến ô tập kết có nhiều quân mã, khi đó ô có quân mã vừa đứng sẽ trở thành ô trống. Hãy cho biết ô cần tập kết và tổng số bước di chuyển nhỏ nhất tương ứng.

Input

Dòng đầu ghi só nguyên dương N

N dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi N số trong đó số thứ j của dòng thứ i bằng 0/1/2 cho biết ô (i,j) trên bàn cờ là ô trống, ô có quân mã đang đứng hay là ô cấm.

Output

Một dòng ghi 3 số nguyên dương u,v,s trong đó u,v là vị trí ô tập kết, s là tổng số bước di chuyển.

Thuật giải

Dùng thuật toán loang chiều rộng tìm đường đi ngắn nhất từ một mỗi ô có quân mã tới mọi ô trên bàn cờ, từ đó xét tất cả các ô tập kết để tìm kết quả.

Bài tập số 126 : Thêm đường.

Đề bài :

Một mạng giao thông gồm N nút giao thông và M đường hai chiều nối một số cặp nút giao thông. Người ta muốn tìm một hành trình qua tất cả các đường mỗi đường đúng một lần rồi lại trở về vị trí xuất phát. Tuy nhiên, với hiện trạng hiện có người ta thấy không thể thực hiện được điều đó, vì vậy người ta phải tìm cách thêm một số đường hai chiều sao cho đảm bảo được yêu cầu kể trên với số đường cần thêm là tối thiểu. Chú ý có thể tồn tại nhiều đường hai chiều nối giữa hai nút giao thông.

Input

Dòng đầu ghi 2 số nguyên dương N, M (N <= 100)

M dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi hai số nguyên dương u, v thể hiện đường hai chiều nối hai nút u, v.

Output

Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương k là số ít nhất các đường cần thêm.

K dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một đường cần thêm gồm hai số nguyên dương u, v với ý nghĩa thêm đường nối hai nút u, v.

Thuật giải

Dễ thấy điều kiện cần và đủ đẻ có thể thực hiện điều kiện trên là đồ thị liên thông và bậc của các đỉnh chẵn. Vì vậy với mỗi thành phần liên thông ta chọn ra các đỉnh lẻ.

Nếu số đỉnh lẻ > 2, giữ lại hai đỉnh lẻ bất kì trong đó, nối tuỳ ý các cặp đỉnh lẻ còn lại.

Nếu không có đỉnh lẻ : ta lấy một đỉnh u bất kì thuộc thành phần liên thông và tưởng tượng thành phần liên thông có hai đỉnh lẻ đều là u.

Sau bước này, mỗi thành phần liên thông đều có đúng 2 đỉnh lẻ, ta nối các đỉnh lẻ trên các thành phần liên thông thành một vòng tròn qua tất cả các thành phần liên thông.

Đồ thị thu đựoc là đồ thị Euler với số cạnh thêm tối thiểu.

Bài tập số 127 : Quân cờ Đôminô.

Đề bài :

Trong bài toán này, một quân cờ đôminô là hình có kích thước 2*1, mỗi ô ghi một số nguyên dương không quá 10. Có N quân cờ đôminô xếp thành hàng ngang như hình vẽ dưới đây.

1 6	6 10	6 2	8 8	6 5	4 2	4 1	3 6	8 9	9 5

Yêu cầu : Cho hiện trạng của các quân Đôminô hãy tìm cách lật các quân Đôminô(đổi chỗ ô trên với ô dưới) sao cho chêch lệch của tổng các số hàng trên với hàng dưới là nhỏ nhất với một số ít nhất các phép lật.

Input

Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương N (N <= 50)

Dòng thứ hai ghi các số ở hàng trên.

Dòng thứ ba ghi các số hàng dưới.

Output

Dòng đầu ghi chêch lệch nhỏ nhất tìm được và số các đôminô cần chuyển.

Dòng thứ hai ghi danh sách thứ tự các quân đô minô cần chuyển.

Thuật giải

Ta giải bài toán bằng phương pháp qui hoạch động.

Gọi C(i,j) là số các phép lật nhỏ nhất vơi các quân từ 1 đến i, để hàng trên có tổng là j

C(i,j) = min{ C(i-1,j-Tren(i)), C(i-1,j-Duoi(i)) + 1}

Từ các C(i,j) ta dễ dàng tìm ra chêch lệch tối thiểu và số lật nhỏ nhất.

Bài tập số 128 : Bắn bi.

Đề bài :

Chúng ta hãy xem xét trò chơi bắn bi như sau : Trên bảng gồm M hàng và N cột, các hàng đánh số từ 1 theo chiều từ trên xuống, các cột từ trái sang phải. Trên đó có một số chướng ngại vật, chướng ngại vật ở một trong hai trạng thái 1 và 2. Đích là một vị trí bên ngoài phía phải của bàng tại hàng h, tức là kề phía phải của ô (h,N). Trò chơi bắn bi diễn ra như sau : một người bắn bi từ một ô tuỳ ý ở cột 1, theo chiều ngang. Bi cứ di chuyển cho đến khi ra ngoài bảng, nếu trên đường gặp chướng ngại vật thì tuỳ từng trạng thái chướng ngại vật :

Nếu chướng ngại vật ở trạng thái 1: Bi rẽ trái và chướng ngại vật chuyển sang trạng thái 2, ngược lại, bi rẽ phải và chướng ngại vật chuyển sang trạng thái 1.

Nếu bi lăn đến vị trí đích thì trò chơi kết thúc, ngược lại nếu ra ngoài bảng mà không đến đích thì phải tiếp tục lần chơi mới.

Hãy chỉ ra các bước bẵn bi sao cho sau số ít nhất lần bắn thì trò chơi kết thúc.

Input

Dòng đầu ghi hai số nguyên dương m, n, h (m,n <= 100; 1 <= h <= m)

Dòng thứ hai ghi k là số các ô có chướng ngại vật (1 <= k <= 15)

K dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi 3 số nguyên dương u,v,s cho biết ô u,v có chướng ngại vật ban đầu ở trạng thái s.

Output

Dòng đầu ghi P là số bước bắn tối thiểu.

P dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một số thể hiện các nước bắn lần lượt từ nước 1 cho đến nước cuối cùng, gồm một số nguyên dương u thể hiện bắt đầu bắn từ ô (u,1).

Thuật giải

Vì số chướng ngại vật không quá 15, mỗi chướng ngại vật có 2 trạng thái nên số cấu hình trạng thái trò chơi không quá 2^15. Do đó, ta có thể dùng phương pháp loang theo chiều rộng để tìm phương án chuyển trạng thái tôi ưu đưa đến trạng thái đích.

Bài tập số 129 : Tô màu bản đồ.

Đề bài :

Bài toán tô màu bản đồ là một bài toán nổi tiếng trong lý thuyết đồ thị cũng như toán học nói chung. Người ta đã chứng minh rằng chỉ cần dùng 4 màu là đủ cho mọi bản đồ. Tuy nhiên việc chỉ ra cách tô bằng 4 màu là không thể.

Trong bài toán này, chúng ta cần phải tô một bản đồ cho trước bằng 5 màu đánh số từ 1 đến 5. Bản đồ có dạng một bảng chữ nhật kích thước m * n trong đó số ở vị trí (u,v) là tên nước chiếm mà vị trí u,v thuộc lãnh thổ nước đó. Mỗi nước sẽ chiếm trọn từng ô một trong bảng và lãnh thổ là một thành phần liên thông gồm các ô cùng số là số hiệu của nước tương ứng. Sô hiệu của nước đánh số từ 1 trở đi, có không quá 100 nước. Yêu cầu hãy tô màu các nước bằng 5 màu sao cho hai nước chung biên giới thì khác màu nhau.

Hai nước a,b gọi là chung biên gới nếu tồn tại cặp ô kề nhau mà một ô thuộc nước a, ô kia thuộc b.

Input

Dòng đầu ghi hai số nguyên dương m,n (m,n <= 1000)

m dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi n số mô tả bản đồ, trong đó số thứ j của dòng thứ i là tên nước có lãnh thổ chứa ô (i,j).

Output

Ghi ma trận tương ứng với ma trận của Input, nhưng thay vì tên nước ghi màu tô của nước đó.

Thuật giải

Ta xây dựng đồ thị mà mỗi đỉnh tương ứng một nước, hai đỉnh có cạnh nếu hai nước tương ứng có chung biên giới, đồ thi tương ứng là đồ thị phẳng. Ta giải bằng qui nạp : giả sử đã tô màu với K-1 đỉnh, ta tô màu đồ thị K đỉnh như sau:

+ Nếu có một đỉnh u bậc <= 4 thì tô K-1 đỉnh còn lại, đỉnh u sẽ được tô màu thích hợp khác màu các đỉnh kề với nó.
+ Ngược lại phải có đỉnh s bậc 5, trong các đỉnh kề nó, phải có hai đỉnh u,v không kề nhau. Chập ba đỉnh u,v,s thành một đỉnh t và tô màu cho K-2 đỉnh. Sau đó tô màu u,v bởi màu của t, còn s kề với 5 đỉnh nhưng có u,v cùng màu nên có thể chọn màu tô sao cho không trùng màu với các đỉnh kề.

Bài tập số 130 : Hiệp sĩ bàn tròn.
Đề bài :
Trong một bữa tiệc có 2N hiệp sĩ tham dự, trong các hiệp sĩ có một số là kẻ thù của nhau. Mỗi hiệp sĩ có không quá N-1 kẻ thù. Hãy tìm cách xếp các hiệp sĩ thành bàn tròn 2N người sao cho không có ai phải ngồi cạnh kẻ thù của mình.
Input
Dòng đầu tiên ghi số N (N <= 100)
2N dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi 2N số 0/1 thể hiện ma trận quan hệ trong đó 0 kẻ thù, 1 ngược lại.
Output
Một dòng ghi danh sách các hiệp sĩ trên bàn tròn trong cách bố trí tìm được.
Thuật giải
Ta tạo ra môt cách xếp bất kì, và gọi mỗi cặp cạnh nhau là kẻ thù của nhau là một chỗ khuyết của cách xếp. Ta tiến hành sửa cách xếp giảm dần từng chỗ khuyết một.
Giả sử ta đang có cách xếp x1, x2, …, x2N. Nếu không có chỗ khuyết thì đây là một cách xếp thoả mãn. Ngược lại, giả sử khuyết tại cặp (x2N, x1) khi đó luôn tồn tại i sao cho (x1,xi) và (xi-1,x2N) không là kẻ thù của nhau, ta chỉnh cách xếp thành :
(x1, x2,…,xi-1,x2N,x2N-1,x2N-2,…,xi). Rõ ràng cách xếp mới giảm số chỗ khuyết đi 1.
Cứ lặp lại các bước trên cuối cùng ta sẽ nhận được cách xếp hợp lệ khi số chỗ khuyết bằng 0.
Mở rộng
Bài toán tương đương với tìm chu trình Hamilton trên đồ thị vô hướng N đỉnh mà bậc của mỗi đỉnh >= N/ 2. Ta có thể mở rộng điều kiện: nếu hai đỉnh bất kì u, v không kề nhau thì tổng bâc u + bậc v >= N.
Bài tập số 131 : Mạng máy tính.
Đề bài :
Một mạng máy tính gồm N máy tính nối với nhau bằng M kênh nối hai chiều. Các máy được đánh số từ 1 đến N. Trong mạng máy tính có 3 máy cần kết nối với nhau thông qua một số kênh của mạng. Các kênh của mạng được chọn phải đảm bảo sự liên lạc giữa ba máy nói trên, đồng thời tổng chi phí của các kênh được chọn là nhỏ nhất có thể.
Input
Dòng đầu tiên ghi hai số nguyên dương N, M (N <= 100)
Dòng thứ hai ghi ba số nguyên dương a,b,c là tên ba máy cần được kết nối.
M dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả về một kênh nối hai chiều gồm 3 số nguyên dương u, v, s thể hiện kênh hai chiều nối hai máy u, v có chi phí là s.
Output
Dòng đầu tiên ghi 2 số nguyên dương P, Q trong đó P là tổng chi phí nhỏ nhất, Q là số kênh hai chiều cần thiết.
Q dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một kênh nối được chọn, gồm hai số nguyên dương u, v là hai máy đầu mút của kênh nối.
Thuật giải
Ta duyệt qua các máy trong mạng, ứng với mỗi máy ta chọn các kênh nối từ đó tới các máy cần kết nối theo đường đi ngắn nhất và tính tổng chi phí nhận được. Hệ thống các kênh được chọn sẽ tương ứng với máy có tổng chi phí nhỏ nhất.

Bài tập số 132 : Cấp nước.

Đề bài :

Một hệ thống phân phối nước của một thành phố gồm N điểm và M đương ống dẫn nước nối một số cặp điểm. Trong một lần đại hội tổ chức tại thành phố, người ta nhận thấy cần phải chọn một số ống nước để cung cấp nước cho K điểm câp nước của thành phố. Các ống dẫn nước đựoc chọn cần phải đảm bảo nếu đặt máy nước tại một điểm bất kì trong K điểm trên thì K-1 điểm khác cũng sẽ được cung cấp nước thông qua các ống dẫn được chọn. Hãy đưa ra một cách dùng các ống dẫn nước thoả mãn yêu cầu trên sao cho tổng độ dài các đường ống dẫn là nhỏ nhất có thể.

Input

Dòng đầu tiên ghi hai số nguyên dương N, M, K (N <= 50)

Dòng thứ hai ghi K số là chỉ số của các điểm cung cấp nước phục vụ đại hội.

M dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi 3 số nguyên dương u, v, s cho biết có đường ống dẫn nước nối hai điểm u, v, với độ dài s.

Output

Dòng đầu tiên ghi hai số nguyên dương P, Q trong đó P là tổng độ dài tìm được, Q là số đường ống trong phương án tìm được.

Q dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một đường ống trong phương án tìm được, gồm hai số nguyên dương u, v thể hiện đường ống nối hai điểm u, v.

Thuật giải

Bài toán này ta có thể giải bằng phương pháp duyệt hoặc tham lam. Có nhiều cách duyệt lần tham, một phương án tham sau đây cho nghiệm khá tốt.

Tìm cây khung của K điểm trên.

Lặp :

xét tất cả các đỉnh u ngoài K đỉnh trên, thử cho thêm vào tập K đỉnh và tìm cây khung tương ứng với K+1 đỉnh này. Trong các đỉnh u thêm vào, tìm đỉnh v cho cây khung nhỏ nhất.

Nếu thêm v vào làm giảm cây khung so với không thêm thì ta thêm luôn vào tập K đỉnh và tiếp tục thực hiện vòng lặp. Ngược lại nếu thêm vào không làm giảm thì dừng lặp.

Bài tập số 133 : Thực hiện song song.

Đề bài :

Một chương trình bao gồm N yêu cầu cần được thực hiện trên các máy tính. Mỗi yêu cầu có một danh sách các yêu cầu khác mà phải thực hiện xong hoàn toàn các yêu cầu đó thì mới có thể thực hiện yêu cầu này,vi dụ: Nhập số liệu,tính toán xong thì mới in kết quả được. Các công việc cần được chia thành các giai đoạn thực hiện, các yêu cầu trong cùng một giai đoạn thì được thực hiện song song, và số máy thực hiện sẽ bằng số yêu cầu trong gia đoạn đó. Hãy tìm các phân các yêu cầu cho từng giai đoạn sao cho số giai đoạn thực hiện, cũng chính là thời gian thực hiện toàn bộ chương trình, và trong các phương án đó tìm phương án có số máy cần dùng, bằnng số máy lớn nhất trong các giai đoạn, là nhỏ nhất.

Input

Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương N (N <= 50)

N dòng tiếp theo, mỗi dòng tương ứng một yêu cầu, dòng thứ i cho yêu cầu thứ i. Mỗi dòng gồm danh sách các yêu cầu cần được thực hiện trước khi yêu cầu tương ứng đựoc thực hiện.

Output

Xây dựng đồ thị có hướng N đỉnh, mỗi đỉnh tương ứng một yêu cầu, trong đó cung (u,v) tương ứng công việc v phải thực hiện trước công việc u.

Thuật toán

Số giai đoạn tối thiểu chính là đường đi dài nhất trong đồ thị, ta giải bằng qui hoạch động.

Số máy tối thiểu ta phải giải bằng phương pháp duyệt toàn bộ.

Bài tập số 134 : Power

Đề bài :

Cho ba số nguyên dương N, M, Y, hãy tìm tất cả các số nguyên dương X trong khoảng 1,M-1 sao cho $X^N \equiv Y \pmod{M}$.

Input

Dòng đầu ghi ba số nguyên dương N, M, Y (1 < N, M, Y < 20000).

Output

Ghi trên một dòng dãy các nghiệm X tìm được theo thứ tự tăng dần.

Thuật giải

Ta có thể bằng cách xét tất cả các X trong khoảng 1,M-1 để tìm nghiệm. Chú ý rằng phép tính luỹ thừa N theo môđun M của X cho trước, có thể tính bằng bình phương liên tiếp và nhân theo môđun, chỉ mất thời gian logN.

Bài tập số 135 : Trò chơi bốc bài

Đề bài :

Xét trờ chơi giữa hai người như sau : Trên bàn có N lá bài xếp thành một hàng, trên mỗi lá bài có ghi một số nguyên dương. Hai người luân phiên nhau chới, mỗi người đến lượt mình chọn một trong hai quân bài ngoài cùng (phải nhất, trái nhất) và bôc quân bài đó lên. Trò chơi kết thúc khi không còn quân bài nào trên bàn, người thắng cuộc là người có tổng các số ghi trên các quân bài mình lớn hơn.

Yêu cầu: Với thông tin về các quân bài ban đầu, cho biết người đi đầu có khả năng chắc thắng hay không, nếu có hãy chỉ ra nước đi đầu tiên cho người đó.

Input

Dòng đầu ghi số nguyên dương N (N <= 100)

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi số ghi trên quân bài thứ i.

Output

Nếu chắc thắng, dòng đầu tiên ghi số hai số 1 và số k = 0/1 tuỳ theo nước đi đầu tiên bốc quân bài 1 hay thứ N. Ngược lại, tức là không chắc thắng thì ghi số 0.

Thuật giải

Ta giải bằng phương pháp qui hoạch động: Gọi C(i,j) là chênh lệch số điểm lớn nhất giữa người đi trước và người đi sau trong trò chơi mà chỉ gồm các quân bài từ i đến j.

C(i,j) = Max(số trên quân bài i - C(i+1,j), số trên quân j - C(i,j-1))

Bài tập số 136 : Contour

Đề bài :

Trên mặt phẳng với hệ trục toạ độ trực chuẩn Oxy, cho N hình chữ nhật, các hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục toạ độ. Hai hình chữ nhật bất kì có thể có điểm chung nhưng không có đỉnh của hình chữ nhật nào nằm trên cạnh của hình chữ nhật khác. Biết rằng từ hai đỉnh của hai hình chữ nhật bất kì luôn có thể đi đến được nhau chỉ trên các cạnh của các hình chữ nhật.

Yêu cầu : Hãy chỉ ra một hành trình đi trên các cạnh của hình chữ nhật, sao cho mọi điểm bất kì trên các cạnh của mọi hình chữ nhật đều được đi qua và tổng độ dài của đường gấp khúc là nhỏ nhất.

Input

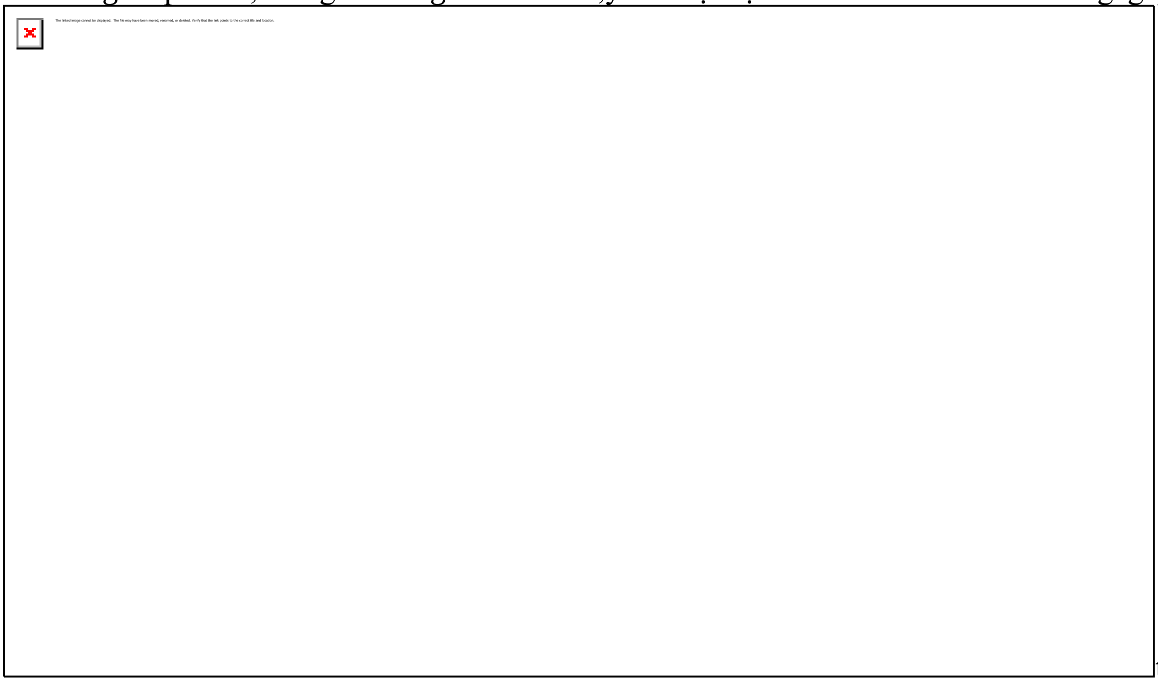
Dòng đầu ghi số nguyên dương N (N <= 100)

N dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một hình chữ nhật gồm bốn số nguyên x1, y1, x2, y2 trong đó (x1,y1) và (x2,y2) là toạ độ của đỉnh trái dưới và phải trên của hình chữ nhật.

Output

Dòng đầu ghi M là số các điểm gấp khúc trên hành trình tìm được.

M dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi hai số x,y là toạ độ của đỉnh thứ i trênđường gấp khúc



tương ứng hành trình tìm được.

Thuật giải

Ta có thể đưa bài toán về tìm chu trình Euler, luôn có theo các dữ kiện của đề bài.

Bài tập số 137 : Phân chia.

Đề bài :

Trong một trò chơi giữa các học sinh, những học sinh tham gia trò chơi chia thành hai đội : đội xanh và đội đỏ. Vị trí mỗi học sinh như một điểm trên mặt phẳng với các toạ độ nguyên. Hãy kẻ một đường thẳng phân chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng, trong đó các học sinh của đội đỏ đứng trong một nửa, đội xanh đứng trong nửa còn lại, trừ các học sinh đứng ngay trên chính đường thẳng đó.

Input

Dòng đầu ghi hai số nguyên dương N, M (N, M <= 10000) trong đó N là số học sinh đội đỏ, M là số học sinh đội xanh.

N dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi hai số nguyên x,y là toạ độ của một học sinh đội đỏ.

M dòng cuối, mỗi dòng mô tả một học sinh đội xanh, gồm hai số nguyên x,y như trong mô tả của đội đỏ.

Output

Một dòng ghi bốn số nguyên x1, y1, x2, y2 trong đó (x1,y1) và (x2,y2) là toạ độ của hai điểm khác nhau trên đường thẳng tìm được.

Thuật giải

Trước hết dùng thuật toán Graham tìm bao lồi trên mỗi tập vị trí các học sinh đội đỏ và đội xanh, ta nhận được hai đa giác lồi (A1,A2,…,Ap) và (B1,B2,…,Bq). Dễ thấy tồn tại đường thẳng thoả mãn đè bài khi và chỉ khi hai đa giác rời nhau. Vì B1 nằm ngoài đa giác A nên ta giả sử đa giác A nằm khác phía với B1 qua đường thẳng A1A2. Nếu toàn bộ đa giác B nằm cùng phía với B1 qua đường thẳng A1A2 thì dễ thấy A1A2 là nghiệm cần tìm, ngược lại giả sử P là điểm cắt của A1A2 với đa giác B mà gần A1 hơn (vì A1A2 cắt B tại hai điểm). Khi đó đường thẳng chứa cạnh của đa giác B chứa điểm P chính là đường thẳng thoả mãn bài toán.

Chú ý: Thuật toán tìm bao lồi có độ phức tạp cỡ NlogN.

Bài tập số 138 : Tổng vectơ

Đề bài :

Trên mặt phẳng với hệ trục toạ độ trực chuẩn Oxy, cho điểm A và N vectơ. Hãy chọn ra một số ít nhất các vectơ trong N vectơ để tổng của các vectơ này bằng vectơ OA. Trong tổng vectơ thì mỗi vectơ được dùng không quá một lần.

Input

Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương N (N <= 30)

Dòng thứ hai ghi hai số nguyên x,y là toạ độ của điểm A.

N dòng tiếp theo, dòng thứ i mô tả vectơ thứ i, gồm hai số nguyên x,y là hai giá trị của vectơ.

Output

Dòng đầu ghi số vectơ trong phương án tìm được hoặc -1 nếu không tìm đựoc nghiệm.

Nếu có nghiệm, trong các dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi thứ tự một vectơ được chọn theo thứ tự tăng dần.

Thuật giải

Ta phải duyệt mọi phương án chọn để tìm phương án tối ưu.

Bài tập số 139 : Khuyến mại

Đề bài :

Một công ty sản xuất máy tính có chi nhánh tại N đại lý trong thành phố. Các đại lý được đánh số từ 1 đến N, và có các đường hai chiều nối M cặp đại lý với nhau. Trong một đợt khuyến mại, công ty muốn đặt các điểm khuyến mại tại các đại lý sao cho một đại lý bất kì hoặc là một điểm khuyến mại hoặc kề với một đại lý có khuyến mại khác. Hãy giúp công ty chọn các đại lý để làm điểm khuyến mại sao cho số điểm khuyến mại là nhỏ nhất.

Input

Dòng đầu chứa hai số nguyên dương N, M (1 < N < 40).

M dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả môt cặp đại lý được nối với nhau bởi đường hai chiều, gồm hai số nguyên dương u, v là tên hai đại lý.

Output

Dòng đầu là số điểm khuyến mại.

Các dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một số là tên đại lý được đặt điểm khuyến mại, theo chiều tăng dần của thứ tự.

Thuật giải

Đây là một bài toán tìm tập ổn định, ta chỉ có thể duyệt nhánh cận để tìm ra lời giải tối ưu.

Bài tập số 140 : Đoạn nhìn thấy được.

Đề bài :

Trên mặt phẳng với hệ trục toạ độ trực chuẩn Oxy, cho N đoạn thẳng. Các đoạn thẳng có các đầu mút là các điểm có toạ độ nguyên dương, và đường thẳng tương ứng với mỗi đoạn thẳng tạo với hai trục toạ độ tam giác vuông cân.

Một đoạn thẳng được gọi là nhìn thấy được từ gôc toạ độ O nếu trên tồn tại X trên đoạn thẳng đó sao cho đoạn thẳng OX không có bất kì điểm chung nào với các đoạn thẳng khác.

Yêu cầu : Hãy cho biết các đoạn thẳng nhìn thấy được.

Input

Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương N (N <= 1000).

N dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi bốn số nguyên dương trong đó hai số đầu và hai số cuối là toạ độ hai đầu mút của một đoạn thẳng. (các toạ độ có giá trị không quá 10000).

Output

Dòng đầu ghi K là số các đoạn thẳng nhìn thấy được.

Dòng thứ hai ghi danh sách thứ tự các đoạn thẳng nhìn thấy được.

Thuật giải

Ta xét các điểm đầu mút của các đoạn thẳng. Với mỗi điểm đầu mút A, ta xét hai tia từ O lệch về hai phía với tia OA, sao cho độ lệch đủ nhỏ (có hệ số góc = hệ số góc của OA cộng, trừ một Epsilon nào đó). Với mỗi tia ta tìm đoạn thẳng nào gặp tia đó đầu tiên, và đánh dấu đoạn thẳng đó.

Mỗi đoạn thẳng nhìn thấy được nếu nó đã được đánh dấu, từ đó ta dễ dàng đưa ra câu trả lời.

Bài tập số 141 : Đặt trạm thu thuế.
Đề bài :
Giữa hai nước X, Y đã kí kết hiệp định thương mại chung. Một vấn đề được đặt ra trong quan hệ thương mại giữa hai nước là đặt các trạm kiểm soát để thu thuế, ngăn chặn hàng buôn lậu,…. Dọc biên giới giữa hai nước có M thành phố của X và N thành phố của Y. Các thành phố của X được đánh số từ 1 đến M, của Y cũng được đánh số từ 1 đến N. Có số đương giao thông nối các thành phố của X với các thành phố của Y, mỗi đường giao thông nối một thành phố của X với một thành phố của Y.
Các trạm kiểm soát phải đặt tại các thành phố sao cho mọi đường giao thông bất kì thì phải có ít nhất một trong hai thành phố đầu mút được đặt trạm kiểm soát. Yêu cầu : Hãy đặt các trạm kiểm soát thoả mãn đầu bài sao cho số trạm kiểm soát là nhỏ nhất.
Input
Dòng đầu ghi hai số nguyên dương M, N (M, N <= 600)
Các dòng tiếp theo, mỗi dòng mô tả một đoạn đường giao thông gồm hai số x, y vối ý nghĩa đường giao thông nối thành phố x thuộc nước X với thành phố y thuộc nước Y.
Output
Dòng đầu tiên ghi hai số P, Q lần lượt là số thành phố đặt trạm kiểm soát của nước X và Y.
P dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một thành phố thuộc X có đặt trạm kiểm soát.
Q dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một thành phố của Y có đặt trạm kiểm soát.
Thuật giải
Ta xây dựng mạng gồm các đỉnh (s, X1, X2, …, XM, Y1,Y2,…,YN,t) với trọng số thông qua của các cung như sau :
s -> Xi = 1 ($1 \le i \le M$)
Yi -> t = 1 ($1 \le i \le N$)
Nếu có đường nối hai thành phố i của X với j của Y thì cung Xi -> Yj có trọng số dương vô cùng.
Dùng thuật tóan Ford Fulkerson tìm lát cắt hẹp nhất trên mạng, giả sử được lát cắt (A,B).
Khi đó tập đỉnh được chọn làm trạm kiểm soát là X - A và Y ầ B.

Bài tập số 142 : Trò chơi bốc sỏi
Đề bài :
Cho một đống sỏi có N viên sỏi, xét trò chơi hai người như sau : Hai người luân phiên nhau đi, mỗi người đến lượt mình bốc bốc tuỳ ý một số k > 0 viên sỏi với điều kiện trước đó đống sỏi còn ít nhất k viên, đồng thời k không vượt quá một số nguyên dương M cho trước. Bên cạnh đó hai lần bốc khác nhau bất kì thì số viện sỏi bốc không được giống nhau bất kể là của người nào. Trò chơi kết thúc khi một người đến lượt mình không còn có thể bốc tiếp được nữa, và người đó là người thua trong trò chơi. Hãy cho biết với các thông tin như trên thì người đi trước có nước chơi chắc thắng hay không, nếu có hãy chỉ ra nước đi đầu tiên cho người chơi.
Input
Một dòng ghi hai số nguyên dương N, M (M < 20; N <=100).
Output
Dòng đầu ghi 1 / 0 nếu người đi trước có chắc thắng hay không.
Nếu có, dòng thứ hai ghi số nguyên dương k là số sỏi bốc trong nước đi đầu tiên để chắc thắng.
Thuật giải
Ta có thể nhận thấy rõ rằng thế chơi chỉ phụ thuộc vào tập hợp các giá trị k có thể bốc k viên sỏi trong các nước đi tiếp theo. Có không quá 2^M trạng thái như vậy. Do đó bằng phương pháp tính trước bảng phương án, ta có thể chỉ ra ai là người sẽ chắc thắng và chiến lược chơi tối ưu.

Bài tập số 143 : Đường cao tốc.
Đề bài :

Hê thống giao thông của thành phố gồm có N nút giao thông. Mỗi nút giao thông được coi là một điểm trên mặt phẳng và độ dài của đường cao tốc nối hai nút giao thông bằng độ dài đoạn thẳng nối hai nút tương ứng. Trên một đường cao tốc chỉ có thể đi về hai nút giao thông đầu mút của đường cao tốc đó không được rẽ sang đường cao tốc khác cho dù vị trí đó có thể là giao của hai đường cao tốc. Hệ thống giao thông hiện có gồm M đường cao tốc, hãy tìm các xây dựng thêm các đường cao tốc sao cho có thể đảm bảo đi lại giữa hai nút bất kì chỉ bằng các đường cao tốc và tổng độ dài các đường cần xây thêm là nhỏ nhất.

Input

Dòng đầu ghi hai số nguyên dương N, M (N <= 1000)

N dòng tiếp theo, dòng thứ i ghi hai số nguyên x, y là tọa độ của nút giao thông thứ i.

M dòng tiếp theo mô tả các đường cao tốc đã có, dòng thứ i ghi hai số nguyên dương u, v cho biết đường cao tốc thứ i nối hai nút giao thông u, v.

Output

Dòng đầu tiên ghi số nguyên K là số đường cao tốc cần thêm.

K dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi hai số nguyên dương là hai đầu mút của một đường cần xây dựng thêm.

Thuật giải

Ta xây dựng đồ thị có trọng số gồm N đỉnh tương ứng N nút giao thông, gọi trọng số giữa hai đỉnh bất kì bằng 0 nếu có đường cao tốc nối hai nút tương ứng hoặc bằng khoảng cách giữa hai nút tương ứng. Bài toán đưa về tìm cây khung nhỏ nhất trên đồ thị, ta dùng thuật toán Prim, hoặc Kruskal.

Sau đây là chương trình viết trên cơ sở thuật toán Prim

```
program Highway;
const
  InputFile  = 'highway.inp';
  OutputFile = 'highway.out';
  max = 750;
type
  TPoint = record
    x, y : Real;
  end;
var
  P : array[1..max] of TPoint;
  Free : array[1..max] of Boolean;
  T, Trace : array[1..max] of integer;
  D : array[1..max] of Real;
  E : array[1..max,1..2] of integer;
  n, m : integer;

 procedure InputData;
 var
   f : Text;
   i,m,j,c : integer;
   u, v : integer;
 begin
   Assign(f, InputFile);
   Reset(f);
   Readln(f,n);
   for i := 1 to n do
    with P[i] do Readln(f, x, y);
   for i := 1 to n do T[i] := i;
   Readln(f,  m);
   for i := 1 to m do
    begin
      Readln(f, u, v);
      if T[u] <> T[v] then
       begin
```

```
        v := T[v]; u := T[u];
        for j := 1 to n do
         if T[j] = v then T[j] := u;
      end;
   end;
  Close(f);
end;

procedure init;
var
  i : integer;
begin
  FillChar(Free, SizeOf(Free), True);
  FillChar(Trace, SizeOf(Trace), 0);
  for i := 2 to n do D[i] := 1E+10;
  D[1] := 0;
  m := 0;
end;

function FindMin : integer;
var
  i, imin : integer;
  min : Real;
begin
  min := 1E+10;
  imin := 0;
  for i := 1 to n do
   if Free[i] and (min > D[i]) then
    begin
      min := D[i];
      imin := i;
    end;
  FindMin := imin;
end;

function Distance(A, B : TPoint) : Real;
begin
  Distance := Sqrt(Sqr(A.x - B.x) + Sqr(A.y - B.y));
end;

procedure Update(u : integer);
var
  i,j : integer;
  temp : Real;
begin
  if Trace[u] <> 0 then
   begin
     inc(m);
     E[m,1] := u; E[m,2] := Trace[u];
   end;
  for i := 1 to n do
   if T[i] = T[u] then Free[i] := False;
  for i := 1 to n do
   if T[i] = T[u] then
    for j := 1 to n do
     if Free[j] then
      begin
        temp := Distance(P[i], P[j]);
        if temp < D[j] then
         begin
           D[j] := temp;
           Trace[j] := i;
         end;
      end;
```

```
 end;

 procedure Process;
 var
   k : integer;
 begin
   init;
   repeat
     k := FindMin;
     if k = 0 then Break;
     Update(k);
   until False;
 end;

 procedure OutputResult;
 var
   f : Text;
   i : integer;
 begin
   Assign(f, OutputFile);
   Rewrite(f);
   Writeln(f, m);
   for i := 1 to m do
    Writeln(f, E[i,1], ' ', E[i,2]);
   Close(f);
 end;

begin
  InputData;
  Process;
  OutputResult;
end.
```

Bài tập số 144 : Biến đổi ma trận số

Đề bài :

Một ma trận vuông kích thước N*N gồm các số 0, 1, trong đó N là một số nguyên dương lẻ < 50. Một phép biến đổi ma trận là chọn một tập S gồm N phần tử của ma trận trong đó mỗi hàng và mỗi cột đều có đúng một phần tử thuộc S, sau đó ta biến đổi mỗi phần tử 0 bởi 1 và ngược lại 1 bởi 0.

Cho ma trận N*N như trên, hãy chỉ ra một dãy các phép biến đổi sao cho trên ma trận thu được số phần tử mang giá trị 1 không vượt quá N-1.

Input

Dòng đầu tiên ghi số nguyên dương N

N dòng tiếp theo, dòng thứ N ghi N số trong đó số thứ j của dòng thứ i ghi giá trị của tại vị trí (i,j) của ma trận.

Output

Dòng đầu ghi K là số phép biến đổi hoặc -1 nếu không tìm được phép biến đổi thoả mãn yêu cầu.

K dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một N số thể hiện một tập S của phép biến đổi ma trận, trong đó số thứ i là vị trí cột của phần tử thuộc tập S trên hàng i của ma trận.

Thuật giải

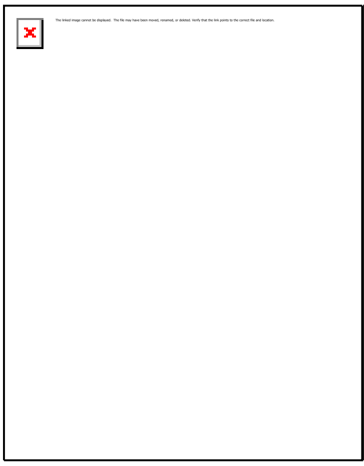
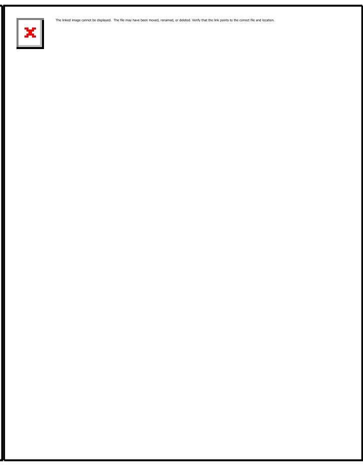
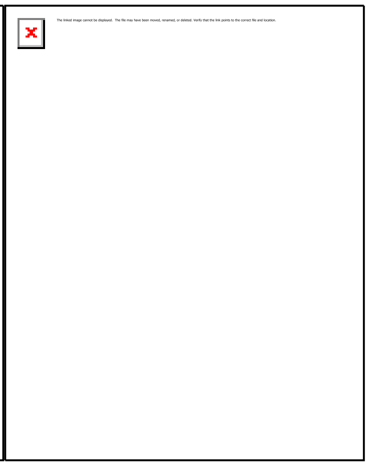
Ta xây dựng đồ thị hai phía X,Y tập X gồm các đỉnh tương ứng với N hàng, Y gồm các đỉnh tương ứng N cột, (x,y) (xẻX, yẻ Y) là cạnh khi và chỉ khi vị trí (x,y) của ma trận là 1.

Bước đầu tiên, ta xét tất cả các đỉnh bậc lẻ trên đồ thị.

Nếu có một trong hai tập X, Y mà ta có thể giả sử là X mà mọi ẻ X đều có bậc lẻ. Vì X là tập lẻ đỉnh (vì N lẻ), nên số đỉnh lẻ của tập Y phải là số lẻ, tức là ít nhất 1 đỉnh lẻ. Ta thực hiện một phép biến đổi bất kì, khi đó mọi đỉnh đều bị thay đổi bậc (chẵn thành lẻ và ngược lại), tức là số đỉnh lẻ trên mỗi tập luôn nhỏ hơn N.

 Như vậy, sau bước đầu tiên, mỗi tập X, Y có nhỏ hơn N đỉnh lẻ.
Ta định nghĩa một thủ tục **giữ lại cạnh** với cặp (x,y) (xẻX, yẻY) như sau:
 1.Nếu (x,y) đã là cạnh thì ta tưởng tượng không có cạnh này, tức là cuối cùng thực tế trên đồ thị còn lại cạnh này.
 2.Nếu (x,y) không là cạnh thì ta tưởng tượng có thêm cạnh này, để khi trong phép biến đổi có cạnh này thì thực tế từ không có cạnh sẽ thành có cạnh.
 Thực chất thủ tục **giữ lại cạnh** chính là giữ lại các cạnh còn lại cuối cùng sau tất cả các phép biến đổi.

 Trở lại bài toán: Sau khi hai tập X,Y có ít hơn N đỉnh lẻ, ta thực hiện tiếp như sau:
 + Nếu còn tồn tại hai đỉnh lẻ x ẻ X, y ẻ Y thì ta tiến hành **giữ lại cạnh (x,y)**, chú ý sau thủ tục này hai đỉnh u,v sẽ là đỉnh chẵn. Sau thủ tục này, các đỉnh lẻ nếu có chỉ thuộc một tập mà thôi ta giả sử là X.
 + Rõ ràng số đỉnh lẻ của X sau khi thực hiện bước trên phải là số chẵn, ta thực hiện thủ tục **giữ lại cạnh (x, 1)** với mỗi đỉnh xẻ X mà x lẻ. Do số đỉnh lẻ thuộc X là số chẵn nên bâc của đỉnh 1 ẻ Y là số chẵn.
 Sau hai bước trên tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn. Ta thực hiện bước cuối cùng như sau:
 Nếu trên đồ thị còn cạnh, vì số đỉnh chẵn nên phải tồn tại một chu trình đơn. Vì là đồ thị hai phía nên chu trình phải có chẵn cạnh, ta đánh số các cạnh liên tiếp chẵn lẻ theo chu trình. Khi đó tập B0 các cạnh chẵn của đồ thị tường ứng với tập con S nào đó của một phép biến đổi ma trận nào đó. Gọi A là phần bù của B0 trong S, thực hiện phép biến đổi ma trận với với tập S, sau đó thay S bằng hợp của A với B1 là tập các vị trí tương ứng cạnh lẻ của chu trình tìm được. Rõ ràng B1 và B0 có cùng tập đỉnh X và Y cho nên tập S mới này cũng thoả mãn cho một phép biến đổi hợp lệ, ta thực hiện tiép phép biến đổi với tập S mới tạo ra

Ta có thể dễ thấy, tập A xuất hiện hai lần trong cả hai phép biến đổi cho nên coi như không biến đổi, như vậy ta đã loại khỏi đồ thị tất cả các cạnh trên chu trình của đồ thị mà không mà ảnh hưởng đến các phần tử khác.
 Cú thực hiện các bước tìm chu trình và xoá khỏi đồ thị, cuối cùng ta sẽ thu được đồ thị không có chu trình. Tuy nhiên trên thực tế, ta hãy xét lại định nghĩa thủ tục **giữ lại cạnh**, ta chú ý rằng tất cả mọi cặp (x,y) trong thủ tục này sẽ là cạnh còn lại trên thực tế. Vì số lần gọi thủ tục này bằng max của số đỉnh lẻ trên hai tập X,Y mà trên hai tập không có tập nào có tất cả đỉnh đều lẻ nên số lần gọi thủ tục không quá N-1. Điều này chỉ ra rằng trên đồ thị còn lại có không quá N-1 cạnh, tức là ma trận nhận được có không quá N-1 vị trí 1.

Bài tập số 145 : Sắp xếp số.
Đề bài :
 Một số tự nhiên M trong biểu diễn dạng thập phân chỉ gồm các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Hãy tìm cách sắp xếp lại các chữ số của M sao cho số nhận được chia hết cho một số nguyên p cho trước.

Input

Dòng đầu ghi số M (M có không có không quá 25 chữ số).

Dòng thứ hai ghi số nguyên p (1 < p < 32).

Output

Một dòng ghi số nhận được sau khi đã được sắp xếp đúng hoặc ghi -1 nếu không tồn tại một cách sắp xếp như vậy.

Thuật giải

Ta có thể nhận thấy rõ số anan-1…a1 trong dạng biểu diễn thập phân chia hết cho p khi và chỉ khi tổng ai * (10^{i-1} mod p) chia hết cho p. Ta giải bài toán trên cơ sở qui hoạch động :

Gọi S(k,n1,n2,n3,n4,n5) là tập các số dư có thể tạo ra từ các số có k chữ số thập phân gồm ni chữ số i (i = 1,…,5) (Thực ra số k chỉ để cho dễ hiểu, còn rõ ràng k = n1 + n2 + n3 + n4 + n5).

Ta có thể tính S(k,n1,…,n5) từ các S(k-1,x1,…,x5) bằng cách thử các số 1, 2, 3, 4, 5 vào vị trí thứ k, việc tính toán hoàn toàn trên môđun p.

Chú ý rằng ta chỉ quan tâm đến các bộ (n1,n2,n3,n4,n5) mà các ni không quá số chữ số i trong số M của Input. Do đó số bộ không quá Q = (p1+1)*(p2+1)*…*(p5+1) với pi là số chữ số i trong biểu diễn M, ta có p1 + p2 + … + p5 <= 25 nên $Q < (5+1)^5 < 10000$.

Bài tập số 146: Mã Prufer

Đề bài :

Cho một đồ thị dạng cây gồm N đỉnh đánh số từ 1 đến N (N > 2), chúng ta định nghĩa mã Prufer của một cây là một dãy P được xác định như sau :

Khởi tạo P rỗng.

Bước 1 : Tìm u nhỏ nhất mà u là một nút lá của cây.

Bước 2 : Gọi v là đỉnh tương ứng kề với nút lá v.

Bước 3 : Viết tiếp v vào cuối dãy P. Xoá đỉnh u và cạnh (u,v) khỏi cây.

Bước 4 : Nếu trên đồ thị còn lại 2 đỉnh thì kết thúc, ngược lại tiếp tục bước 4.

Cuối cùng, dãy P nhận được chính là mã Prufer của cây tương ứng.

Ví dụ:

Đồ thị dạng cây 4 đỉnh với các cạnh (1,3)(2,3),(2,4) thì mã Prufer là (3,3).

Bài toán : Cho mã Prufer hãy xây dựng cây tương ứng.

Input

Dòng đầu ghi số nguyên dương N (N <= 1000)

N-2 dòng tiếp theo lần lượt ghi các số trên mã Prufer.

Output

N-1 dòng mỗi dòng thể hiện một cạnh của cây, gồm hai số là hai đầu mút của cạnh tương ứng.

Thuật giải

Giả sử ta có dãy Prufer P1,P2,…,PN-2.

Dễ thấy, các nút không xuất hiện trong dãy P1,P2,…,PN-2 phải là một lá của cây ban đầu.

Do đó, số u đầu tiên, tức là lá đầu tiên bị loại, sẽ là số nguyên dương u1 nhỏ nhất không xuất hiện trong dãy (P1,…,PN-2).

Tại bước hai:

Tương tự nút u2 là nút bị xoá thứ hai, sẽ là số nguyên dương nhỏ nhất không xuất hiện trong tập (u1, P2,…,PN-2).

Cứ như thế : uk sẽ là số nguyên dương nhỏ nhất không xuất hiện trong tập (u1, u2,…, uk-1, Pk, Pk+1,…,PN-2).

Xác định được các uk, ta dễ dàng xây dựng được cây.

Bài tập số 147 :

Đề bài :

Các viên gạch trong bài toán này có K màu đánh số từ 1 đến K, được xết thành dãy N cột gạch liên tiếp nhau. Một cách lấy gạch ra khỏi các cột là chọn một dãy các cột liên tiếp, mà màu của các viên gạch ở vị trí cao nhất trên mỗi cột giống nhau ta giả sử là c, ta nhấc ở mỗi cột được chọn các viên gạch từ trên xuống nếu của viên gạch trên cùng lúc đó còn là c.

Ví dụ dãy cột như sau : (N = 3, K = 4)

1
2 1 4
3 1 1
4 2 1

bước 1: chọn cột thứ 3 bốc viên 4

1
2 1
3 1 1
4 2 1

bước 2 chọn cả 3 cột có màu trên cùng bằng 1:

2
3
4 2

Cứ thực hiện các bước như thế cuối cùng tất cả các viên sẽ bị nhấc.
Yêu cầu: Hãy cho biết cần ít nhất bao nhiêu phép nhấc để nhấc tất cả các viên.

Input

Dòng đầu ghi hai số nguyên dương N,K

N dòng tiếp theo, dòng thứ i mô tả chồng gạch thứ i từ trái sang, gồm dãy các màu của các viên gạch từ dưới lên.

Output

Một dòng ghi số ít nhất phép nhấc để nhấc hết số gạch trên các chồng.

Thuật giải

Dễ thấy trên mỗi đống nếu có nhiều viên gạch liên tiếp cùng màu thì ta có thể coi như có 1 viên với màu tương ứng. Ta tiến hành tìm dãy con chung dài nhất (ở đây là dãy màu) của các cặp cột liên tiếp.

Xét cột 1, 2 : gọi i,j là vị trí mà C(1,i) = C(2,j) và độ dài dãy con chung của i viên gạch đầu của 1 và j viên gạch đầu của 2 là lớn nhất. Ta bóc cột 1 cho đến khi còn i viên, lại thực hiện bóc đối với cột 2 cho đến khi còn j viên, cuối cùng bóc chung cả hai cột 1, 2.

Ta cần chú ý, việc bóc các viên cột 2 lại phải xét tiếp cột 3, và việc xét này giống như xét cột 1 với cột 2, lại xét tiếp cột 3 với 4, cứ như thế cho đến cột thứ N.

Ta lại lặp lại việc xét, cho đến khi không còn viên gạch nào nữa.

Bài tập số 148 : Tháp Hà Nội mở rộng

Đề bài :

Bài toán tháp Hà Nội với ba cột là một bài toán rất hay và nổi tiếng. Tuy nhiên ở đây ta lại xét đến bài toán mở rộng hơn không chỉ 3 cột đĩa mà M cột đĩa. Ban đầu cột 1 có N đĩa xếp từ lớn đến nhỏ theo chiều từ dưới lên, đánh số từ 1 đến N (đĩa 1 nhỏ nhất ở trên cùng, đĩa 2 nhỏ thứ nhì ở vị trí ngay dưới đĩa 1,…) và các cột khác chưa có đĩa. Một qui tắc chuyển đĩa là chọn một đĩa đang ở trên cùng một cột nào đó và xếp lên trên cùng một cột khác với điều kiện đĩa này phải nhỏ hơn đĩa trên cùng hiện thời của của mới. Ta coi cột chưa có đĩa coi như đĩa trên cùng rất lớn, có thể xếp mọi đĩa lên nó. Hãy cho biết số nhỏ nhất các phép chuyển để đưa N đĩa từ cột 1 sang cột 2.

Input

Dòng đầu ghi hai sô nguyên dương N, M (3 <= N, M <= 30)

Output

Một dòng ghi số nhỏ nhất các phép chuyển cần thiết.

Thuật giải

Ta giải bài toán trên bằng phương pháp qui hoạch động : Gọi C(i,j) là số nhỏ nhất các phép chuyển để chuyển i đĩa từ cột này sang cột khác mà chỉ cần j đĩa, tức là giá trị cần đưa ra với N = i và M = j.

Khởi tạo C(1, k) = 1 với k > 1;

C(n, m) được tính như sau :

C(n,m) = +□;

For i := 1 to n-1 do C(n,m) := Min{C(i,m), C(i,m) + C(n-i,m-1) + C(i, m) }

Bài tập số 149 : Di chuyển theo vectơ

Đề bài :

Bờm có một con chó tên là Mực và Bờm rất quí nó, vì vậy hàng ngày Bờm thường cho chó đi dạo trên một cánh đồng. Cánh đồng được coi như một mặt phẳng với hệ trục toạ độ vuông góc. Con Mực rất thông minh nhưng cũng rất kì quặc, nó chỉ di chuyển bằng các vectơ a1, a2, …, an cho trước. Ví trí xuất phát là nhà của Bờm, và tại bước thứ i con Mực chỉ di chuyển theo vectơ ai hoặc theo vectơ ngược với ai là -ai. Tuy không thể đi tự do nhưng Bờm có khả năng quyết định con Mực sẽ phải chọn cách nào trên mỗi bước i tức là ai hay -ai. Để tránh nguy hiểm, Bờm không muốn con chó đi quá xa nhà mình, vì vậy Bờm cần chọn các hướng di chuyển cho con Mực sao cho vị trí cuối cùng nó đến cách nhà không quá một khoảng bằng Sqrt(2)*L với L cho trước. Bạn hãy giúp Bờm chỉ ra một cách chọn hướng như vậy.

Input

Dòng đầu tiên ghi hai số nguyên dương N, L (N <= 10000; L <= 1000)

N dòng tiếp theo, dòng thứ i mô tả vectơ hướng ai gồm hai số nguyên x,y cho biết ai = (x,y). Độ dài các vectơ không quá L.

Output

Dòng đầu tiên ghi 1/ 0 nếu tìm được phương án thoả mãn yêu cầu, hoặc không có phương án như vậy.

Nếu có, dòng thứ hai ghi N kí tự liên tiếp, trong đó kí tự thứ i bằng '**+**' nếu bước thứ i chọn theo ai và '-' nếu theo hướng -ai.

Thuật giải

Thuật toán sau sẽ chỉ ra rằng bài toán luôn có lời giải.

Đưa gốc các vectơ về gốc của trục toạ độ, xét các đường thẳng đi chứa các vectơ. Nếu tồn tại hai đường thẳng có góc nhọn giữa chúng không quá ế / 3, thì hai vectơ u, v tương ứng có thể chọn dấu +, - thích hợp sao cho góc u,v bằng goc nhọn. Khi đó, vectơ u □ v sẽ có độ dài <= L vì |u|,| v | <= L, ta bỏ hai vectơ u,v đi và thay bằng u □ v, và về sau khi nói đến vectơ này thực chất sẽ là u □ v. Ta chú ý rằng thứ tự các vectơ không quan trọng, và sau mỗi lần thực hiện bỏ 2 vectơ và thay bằng 1 vectơ mới các vectơ vẫn có độ dài <= L, và số vectơ giảm đi 1. Quá trình này sẽ tiếp tục chừng nào vẫn còn nhiều hơn 2 vectơ.

Cuối cùng với hai vectơ u,v ta có thể dễ thấy u-v, hoặc u+v sẽ phải có độ dài <= Sqrt(2)*L vì cả u,v đều có độ dài <= L.

Trên đây là phần cơ sở của thuật toán, còn khi thực hiện, ta có thể tổ chức các vectơ dạng cây nhị phân, trong đó mỗi nút là 1 vectơ và hai nút con tương ứng của một vectơ là hai vectơ đã tạo nên nó (trong phần trên là hai vec tơ u và v).

Bài tập số 150 : Hàng trình trên vòng tròn.

Đề bài :

Vòng quanh một đảo và một đường đi không tự cắt có điểm đầu và cuối trùng nhau. Trên đường có một dãy N trạm xăng đánh số từ 1 đến N theo chiều kim đồng hồ. Trạm xăng thứ i chỉ chứa một lượng xăng đủ để đi ai km, biết rằng a1 + a2 + … + an-1 + an >= S là tổng độ dài con đường. Hãy cho biết một ô tô với bình xăng có dung tích không hạn chế, nhưng ban đầu chưa có xăng, có thể đi toàn bộ con đường quanh đảo theo chiều kim đồng hồ và quay về vị trí xuất phát được không ?

Input

Dòng đầu ghi số nguyên dương N (N <= 1000000)

N dòng tiếp theo, dòng thứ i mô tả trạm xăng i gồm hai số là ai, bi trong đó bi là độ dài quãng đường từ trạm xăng này đến trạm xăng tiếp theo trên đường.

Output

Dòng đầu ghi 1 / 0 nếu có / không thể đi được.

Dòng tiếp theo, ghi k là chỉ số trạm xăng mà ô tô bắt đầu xuất phát.

Thuật giải

Ta giả sử ô tô ngay từ đầu đã được đổ số xăng đủ lớn để đi hết hành trình. Ta bắt đầu đi từ 1 và dọc theo con đường cho đến khi về 1. Qua mỗi trạm xăng ta vẫn tiến hành đổ thêm toàn bộ xăng của trạm đó. Gọi k là trạm xăng mà khi bắt đầu đến trạm thì số xăng trong bình của ô tô là nhỏ nhất, khi đó k chính là vị trí xuất phát. Ta có thể dễ dàng chứng minh điều này.

Bài toán luôn có nghiệm.