Giá trị riêng, véc tơ riêng

I- Một số kiến thức cơ bản Cho A là ma trận vuông cấp n.

1. Số λ là giá trị riêng của $A \Leftrightarrow \exists\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad (A - \lambda I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

   Khi đó $v = (x_1, ..., x_n) \neq \mathbf{0}$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

2. Đa thức đặc trưng của A là $\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

3. λ là giá trị riêng của $A \Leftrightarrow \mathcal{P}_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

4. Ký hiệu V_λ là không gian riêng ứng với giá trị riêng λ, ta có

$$\dim V_\lambda = n - r(A - \lambda I).$$

5. Điều kiện để A chéo hóa được:

   i) Nếu A có n giá trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.

   ii) Nếu A là ma trận đối xứng thì A chéo hóa được.

   iii) Nếu $\mathcal{P}_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, trong đó $m_1 + \ldots + m_k = n$ và $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ đôi một khác nhau, thì A chéo hoá được khi và chỉ khi

$$\dim V_{\lambda_i} = m_i, \forall i = 1, \ldots, k.$$

6. Nếu $A = PDP^{-1}$ thì $A^k = PD^kP^{-1},\ \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Bài tập

Bài 1. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Chứng minh rằng A chéo hóa được.

b) Đặt $B = \dfrac{1}{6}A$. Chứng minh rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$(B + I)^n = (2^n - 1)B + I.$$

Bài 2. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Tìm một ma trận khả nghịch Q sao cho

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bài 3. Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số thực, ta định nghĩa:

$$e^A = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!}.$$

(Ở đây quy ước $0! = 1, A^0$ là ma trận đơn vị, ma trận giới hạn ở vế phải có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng $S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!}$. Ma trận giới hạn này luôn tồn tại.)

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Tìm một ma trận khả nghịch C sao cho $C^{-1}AC$ là ma trận đường chéo.

b) Tìm các phần tử của ma trận e^A.

Bài 4. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 8 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. Chứng minh rằng $\det(I - A^{2023}) \neq 0$.

Bài 5. Cho A là ma trận thực vuông cấp 2 thỏa mãn điều kiện $\det A < 0$. Chứng minh rằng tồn tại hai số thực phân biệt λ_1, λ_2 và hai ma trận A_1, A_2 sao cho

$$A^n = \lambda_1^n A_1 + \lambda_2^n A_2, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Bài 6. Một ma trận vuông được gọi là dương nếu tất cả hệ số của nó là các số thực dương.

a) Chứng minh rằng mỗi ma trận dương cấp 2 đều có hai giá trị riêng là các số thực khác nhau và giá trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn hơn là một số dương.

b) Cho A là một ma trận dương cấp 2. Giả sử $v \in \mathbb{R}^2$ là một véc tơ riêng ứng với giá trị riêng lớn hơn của A. Chứng minh rằng hai thành phần của véc tơ v có cùng dấu.

Bài 7. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n thỏa mãn

$$A^2 - A + AB - B + B^2 = 0.$$

Chứng minh rằng ma trận $A + B$ có giá trị riêng là 1 khi và chỉ khi A hoặc B có giá trị riêng là 1.

Bài 8. Cho A là ma trận vuông cấp n với hệ số thực như sau

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & a_4 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Giả sử $b_i \neq 0$, với mọi i. Chứng minh rằng A có n giá trị riêng phân biệt.

Bài 9. Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ có $a_{ii} = 2; a_{i,i-1} = a_{i,i+1} = -1$, các phần tử khác đều bằng 0. Chứng minh rằng các giá trị riêng của A là các số dương.

II- Đa thức đặc trưng Cho A là ma trận vuông cấp $n > 1$. Ký hiệu $\mathcal{P}_A(\lambda)$ là đa thức đặc trưng của A.

1. $\mathcal{P}_A(\lambda) = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + c_2(-\lambda)^{n-2} + \ldots + c_n$, trong đó c_k là tổng của tất cả các định thức con chính cấp k của ma trận A. (Một định thức con được gọi là chính nếu các chỉ số hàng và chỉ số cột của nó trùng nhau). Hơn nữa, $c_1 = \operatorname{tr}(A), c_n = \det A$.

2. Định lý Cayley-Hamilton: $\mathcal{P}_A(A) = 0$.

3. Nếu A có n giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (các giá trị riêng này có thể trùng nhau), thì
$$\det A = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n, \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$
Với mọi đa thức $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ khác không ta có
   a) $\det(p(A)) = p(\lambda_1)p(\lambda_2)\ldots p(\lambda_n)$,
   b) $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)$ là các giá trị riêng của $p(A)$.

Bài 1. Cho $f(x) = x^{2025} + x^2 - 1$ và $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. Tính $\det(f(A))$.

Bài 2.

a) Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sao cho $A^3 = A + I$.

b) Chứng minh rằng $\det A > 0$ với mọi ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^3 = A + I$.

Bài 3. Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^4 = 7A^3 - 12A^2$. Chứng minh rằng
$$\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{N} \text{ và } \operatorname{tr}(A) \leq 4n.$$

Bài 4. Có tồn tại ma trận vuông cấp ba A sao cho $\operatorname{tr}(A) = 0$ và $A^2 + A^t = I$ không?

Bài 5. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n. Đặt $C = AB - BA$. Giả sử C giao hoán với cả hai ma trận A và B. Chứng minh rằng:

a) $\operatorname{tr}(C^m) = 0, \forall m \in \mathbb{N}^*$,

b) tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $C^m = 0$.

Bài 6. Giả sử A, B là các ma trận vuông cùng cỡ và $r(AB - BA) = 1$. Chứng minh rằng $(AB - BA)^2 = 0$.

Bài 7. Cho A là ma trận vuông cấp 3 có $\operatorname{tr}(A) = 8$, tổng các phần tử trên mỗi hàng của A bằng 4 và $\det A = 16$. Xác định các giá trị riêng của A.

Bài 8. Cho A là ma trận vuông cấp n khả nghịch. Mọi phần tử của các ma trận A, A^{-1} là số nguyên. Chứng minh rằng nếu A có n giá trị riêng đều là các số thực thì
$$|\det(A + A^{-1})| \geq 2^n.$$

Bài 9. Cho $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$. Tìm các giá trị riêng của $A^t A$.

Bài 10. Một ma trận thực có các phần tử chỉ gồm các số 0 và 1 được gọi là ma trận 0-1.

a) Ký hiệu α và β là các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của định thức các ma trận 0-1 vuông cỡ 3×3. Tính α và β.

b) Cho A là một ma trận 0-1 cỡ 3×3. Giả sử A có ba giá trị riêng là các số thực dương. Chứng minh rằng các giá trị riêng của A đều bằng 1.