



## سؤال ۱. تعداد بیشینه ی یال ها

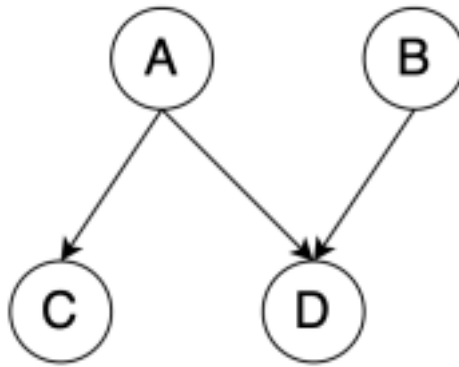
می دانیم که شبکه ی بیز یک گراف جهت دار بدون دور است. بنابراین باید تعداد بیشینه ی یال هایی را که بدون تشکیل دور در آن می توان داشت محاسبه کنیم. تعداد آن برابر با  $n(n-1)/2$  است.

**اثبات:**

یک شبکه ی بیز روی  $X_1, \dots, X_n$  در نظر بگیرید. بین هر  $X_i, X_j$  در صورتی که  $j > i$  باشد، یک یال داریم. تعداد کل یال های این گراف برابر است با:

$$1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) = n(n+1)/2$$

برای این که نشان دهیم چنین شبکه ای وجود دارد، باید اثبات کنیم دور جهت داری در این گراف وجود ندارد. با فرض خلف، تصور می کنیم که یک دور به فرم  $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im}, X_{i1}$  وجود دارد. اما به کمک فرضیات هنگام ساخت گراف، می دانیم که  $i_1 < i_2 < \dots < i_m < i_1$  که بیانگر  $i_1 < i_1$  است و تناقض است. بنابراین ثابت می شود که دوری (جهت دار) وجود ندارد. این مقدار بیشینه نیز هست؛ زیرا هر گراف جهت دار با داشتن بیش از  $n(n-1)/2$  یال باید حداقل از یکی از رئوس بیش از یک یال داشته باشد. این به این معناست که حداقل یک یال در هر دو جهت دارد که منجر به تشکیل یک دور می شود. برای متغیر  $A$  این تعداد برابر با چهار است.



شکل ۱: شبکه‌ی بیز

$$P(A, B, C, D) = P(A) P(B) P(C|A) P(D|A, B)$$

- (آ) کم‌ترین تعداد مقادیر احتمالاتی برای نمایش جدول‌های این شبکه، ۱۰ است. برای هر کدام از دو متغیر C و D، به دلیل داشتن دو مقدار مجاز، یک احتمال کفایت می‌کند (چون طبق اصول احتمال می‌دانیم جمع احتمال‌های Prior باید برابر با یک شود، بنابراین با دانستن یکی از آن‌ها مقدار دیگری را هم می‌دانیم). به همین ترتیب برای  $P(C|A)$  ۲ حالت و برای  $P(D|A, B)$  ۶ حالت نیاز است.

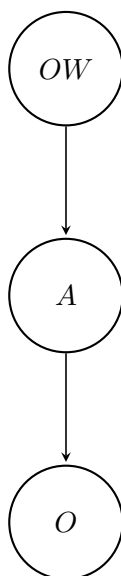
$$1 + 1 + 2 + 6 = 10$$

- (ب) نمی‌دونم درسته یا نه. با توجه شکل ۱، برای محاسبه‌ی عبارت  $P(C|D = d_1)$  فقط به  $P(C)$  نیاز داریم، زیرا C و D از یک‌دیگر مستقل هستند.

- (ج)

$$C \perp\!\!\!\perp D|A, C \perp\!\!\!\perp B|A$$





OW: وزن اضافی، A: صدای آژیر و O: خاموش شدن آسانسور

$$P(OW | \sim a, o) = P(o | \sim a) \times (P(a|ow)P(ow) + P(a | \sim ow)P(\sim ow))$$

$$P(OW | \sim a, o) = 0.02 (0.2 \times 0.1 + 0.9 \times 0.9) = 0.166$$

## سؤال ۵. استقلال

- خیر مستقل نمی باشند؛ زیرا فقط یک مسیر دارند که آن هم از مسیرهای فعال است.

