

ANALISIS PERBANDINGAN KONDUKTIVITAS TERMAL DALAM KEADAAN STEADY STATE PADA MATERIAL KONDUKTOR PANAS COPPER DAN BRONZE DENGAN METODE FINITE DIFFERENCE

Dhinar Hidayath^{1, a)}, Khansa Farras Callista^{1, b)}, Puspa Zuhrotul Kamilah^{2, a)},
Salma Mardhiyah^{2, b)}.

¹*Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta, Jl. Rawamangun Muka, Jakarta 13220.*

Email: ^{a)}dhinarhidayath_1306621054@mhs.unj.ac.id,

^{b)}khansafarrascallistaarmandsyah_1306621067@mhs.unj.ac.id,

^{c)}puspazuhrotulkamilah_1306621058@mhs.unj.ac.id, ^{d)}salmamardhiyah_1306621061@mhs.unj.ac.id

Abstrak

Diferensial parsial (PDE) sering digunakan untuk memodelkan konduktivitas termal bahan. Salah satu implementasinya adalah studi konduktivitas termal yang stabil termistor tembaga dan perunggu menggunakan metode persamaan diferensial parsial. Dalam hal ini, metode finite difference adalah teknik numerik untuk menganalisis konduktivitas termal pada konduktor panas. Untuk membandingkan kedua bahan ini maka dilakukan perbandingan dalam bidang 2 dimensi dan 1 dimensi. Metode finite difference merupakan penyelesaian numerik heat equation dalam 1 dimensi maupun 2 dimensi dengan pendekatan diskritisasi spasial. Dalam 1 dimensi, domain dibagi menjadi titik-titik diskrit dan suhu pada setiap titik diperbarui berdasarkan perbedaan suhu dengan titik-titik. Dalam 2 dimensi, domain dibagi menjadi grid 2D dan persamaan finite difference diterapkan pada setiap titik grid untuk memperbarui suhu secara iteratif. terlihat bahwa tembaga mencapai steady state lebih cepat. Hal ini terbukti bahwa grafik parabolik yang dihasilkan oleh tembaga lebih landai dibandingkan dengan grafik perunggu. Hal ini disebabkan perunggu memiliki konduktivitas termal lebih rendah daripada tembaga. Tembaga memiliki konduktivitas termal yang jauh lebih tinggi. Hal ini membuat tembaga menjadi lebih efisien dalam menghantarkan panas. Dari kedua material yang telah diuji, dapat disimpulkan bahwa tembaga mencapai kondisi steady state lebih cepat dibandingkan dengan material perunggu. Hal ini disebabkan oleh konduktivitas termal yang lebih tinggi dan kemampuan tembaga untuk mendistribusikan panas dengan lebih efisien. Dengan demikian, distribusi suhu dalam sistem tembaga akan lebih cepat mencapai keseimbangan yang stabil.

Kata-kata kunci: Persamaan diferensial parsial (PDE), Konduktivitas termal, Metode *Finite Difference*.

Abstract

Partial Differential Equations (PDEs) are often used to model thermal conductivity of materials. One implementation is the study of thermal conductivity in stable copper and bronze thermistors using the PDE method. In this case, the finite difference method is a numerical technique for analyzing thermal conductivity in heat conductors. To compare these two materials, a comparison is made in both 2-dimensional and 1-dimensional domains. The finite difference method is a numerical solution for the heat equation in 1-dimensional and 2-dimensional spaces using a spatial discretization approach. In 1-dimensional space, the domain is divided into discrete points, and the temperature at each point is

updated based on temperature differences with neighboring points. In 2-dimensional space, the domain is divided into a 2D grid, and the finite difference equations are applied to each grid point iteratively to update the temperature. It can be observed that copper reaches steady state faster. This is evidenced by the parabolic graph produced by copper, which has a shallower slope compared to bronze. This is due to bronze having lower thermal conductivity compared to copper, as copper has significantly higher thermal conductivity. This makes copper more efficient in conducting heat. From the tested materials, it can be concluded that copper reaches steady state faster compared to bronze. This is attributed to its higher thermal conductivity and its ability to distribute heat more efficiently. Thus, the temperature distribution in the copper system will reach stable equilibrium faster.

Keywords: *Partial Difference Equation (PDE), Thermal Conductivity, Finite Difference Method.*

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial parsial (PDE) sering digunakan untuk memodelkan konduktivitas termal bahan [4] (Sohail). Salah satu implementasi permasalahan ini adalah studi konduktivitas termal yang stabil termistor tembaga dan perunggu menggunakan metode persamaan diferensial parsial. Tembaga adalah konduktor panas yang baik dan konduktivitas termalnya telah dipelajari secara ekstensif. Sebaliknya, perunggu adalah paduan tembaga dan logam lain dan konduktivitas termalnya tidak diketahui secara pasti. Penggunaan PDE (*Partial Differential Equation*) dapat membantu memodelkan konduktivitas termal dari bahan-bahan tersebut dan memberikan wawasan tentang sifat-sifatnya. Seperti dalam satu penelitian, strategi elemen hingga Galerkin digunakan untuk menyelidiki kinerja termal campuran nanopartikel tiga-hibrid. Studi lain menyelidiki konduktivitas termal komposit intan menggunakan komposit konduktivitas termal tinggi yang menggunakan partikel intan dan logam seperti aluminium dan tembaga sebagai pengisi [8].

Karena kedua bahan ini banyak digunakan dalam industri dengan komposisi yang berbeda, membandingkan konduktivitas termal perunggu dan tembaga sangat relevan. Studi karakteristik masing-masing bahan ini dapat membantu dalam pengambilan keputusan yang berbasis informasi. Dalam hal ini, metode *finite difference* adalah teknik numerik umum yang dapat diandalkan untuk menganalisis konduktivitas termal pada konduktor panas. Terlebih dikarenakan penelitian mengenai perbandingan konduktivitas termal tembaga dan perunggu dalam keadaan *steady state* masih merupakan topik yang relatif belum banyak dipelajari. Oleh karena itu, penelitian ini akan mengisi celah penelitian yang ada dan memberikan pemahaman yang lebih luas tentang sifat termal kedua konduktor dengan metode *Finite Difference Equation*.

Tembaga (copper) adalah logam yang sangat konduktif. *Copper* telah banyak digunakan di bidang teknik karena sifat konduktivitas listrik dan termal yang tinggi. *Copper* diaplikasikan pada *heat sinks*, *microchips*, *magnetrons* pada *microwaves*, *electrodes*, *electrical switches*. Ketahanan lelah (fatigue resistance), kemampuan kerja dan ketahanan korosi adalah hal yang membedakan sifat - sifat atau karakteristik *copper*. *Copper* memiliki elektrokonduktibilitas yang tinggi, konduktivitas termal, dan stabilitas kimia. Sifat konduktor listrik copper bagus untuk kabel listrik dan elektronik. Selain itu, copper juga mudah dibentuk dan ulet sehingga mudah dibentuk menjadi berbagai bentuk dan ukuran [2].

Pada berbagai bidang seperti Fisika atau Industri melibatkan pemanasan atau pendinginan. Pemanasan ini melibatkan perpindahan panas yang menggunakan konduktivitas termal. Konduktivitas termal merupakan parameter seberapa baik kemampuan suatu bahan dapat menghantarkan panas secara konduksi melalui satuan luas penampang satu bahan ke bahan lainnya. Konduktivitas termal dapat diklasifikasikan sebagai *steady state* ketika panas yang ditransmisikan dalam suatu sistem konstan dan hanya suhu yang bervariasi pada setiap titik dalam sistem, atau

transien, aliran panas dalam suatu sistem dianggap sementara di mana suhu di berbagai titik dalam sistem bervariasi dengan waktu [3].

Salah satu sifat fisika penting, uji konduktivitas panas, menunjukkan seberapa cepat panas mengalir pada suatu bahan. Menguji konduktivitas panas suatu bahan dapat digunakan untuk menentukan apakah bahan itu konduktor atau isolator. Bahan dengan nilai konduktivitas panas yang tinggi dapat digunakan sebagai konduktor dan bahan dengan nilai konduktivitas panas yang rendah dapat digunakan sebagai isolator. Oleh karena itu, desain dan pengujian konduktivitas panas bahan harus dilakukan [2].

Metode *finite difference equation* melibatkan penggantian turunan dari persamaan panas dengan ekspresi beda hingga yang sesuai dengan skema dan akurasi yang sesuai. Pada penelitian kami, metode ini digunakan untuk membandingkan konduktivitas termal tembaga dan perunggu dengan panas yang dihasilkan pada kondisi stabil koordinat kartesius. Diselesaikan dengan menerapkan metode beda hingga ke persamaan panas, mengganti turunannya dengan ekspresi beda hingga yang sesuai dengan skema dan akurasi yang sesuai [1].

Tujuan penelitian kami adalah untuk melakukan analisis perbandingan yang mendalam terhadap konduktivitas termal dalam kondisi *steady state* antara *Copper* dan *Bronze*. Dengan menggunakan metode *Finite Difference* yang terverifikasi secara numerik, melibatkan pemahaman yang lebih baik mengenai kemampuan metode *Finite Difference* dalam menyelesaikan persamaan persamaan diferensial parsial yang kompleks hingga menghasilkan ukuran yang tepat dan efisiensi transfer panas dari kedua material tersebut. Pemilihan output satu dimensi dan dua dimensi dilakukan karena proses codingan yang lebih mudah serta output yang lebih mudah dianalisis.

METODE

Pada paper ini, kami menggunakan metode numerik yang berguna untuk menyelesaikan masalah dinamika fluida, perpindahan panas dan massa, dan persamaan diferensial parsial fisika matematika. Salah satu dari metode numerik ini merupakan metode *finite difference* yang biasa digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial pada *heat*.

Pada bidang 1 dimensi, domain dibagi menjadi grid diskrit yang berjarak di sepanjang sumbu x dengan setiap node mewakili lokasi tertentu di domain. Ruang antar grid ini (Δr) mewakili jarak antara node dengan node lainnya. Kemudian melakukan aproksimasi turunan. Aproksimasi turunan dalam persamaan diferensial parsial ini menggunakan aproksimasi *finite difference*.

Dalam konduktivitas termal, terdapat heat generation dengan temperatur yang tidak berpengaruh terhadap waktu (independen). persamaan 1 disini merupakan persamaan diferensial parsial yang dapat disimplifikasikan menjadi persamaan diferensial biasa seperti persamaan 2 sehingga lebih mudah diselesaikan. Dengan mengintegrasikan persamaan 2 yang kemudian mengintegrasikan kembali persamaan 3 maka didapatkan persamaan 4

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{g}{k} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{g}{k} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{g}{k} x \quad (3)$$

$$T(x) + Ax = \frac{g}{2k} x^2 + Bx \quad (4)$$

Dengan A dan B yang merupakan integrasi konstan. persamaan berikut merupakan BVP atau boundary value problem. untuk menyelesaikan persamaan ini maka dibutuhkan 2 BCs atau boundary condition dimana pada $x=0$, $T=Tend1=100$ (°C) dan pada $x=1m$, $T=Tend2=1000$ (°C)

$$100(0) + A(0) = \frac{g}{2k} (0)^2 + B(0) \quad (5)$$

$$1000(1) + A(1) = \frac{g}{2k} (1)^2 + B(1) \quad (6)$$

Sehingga diketahui nilai A dan B yang kemudian dapat disubstitusikan ke persamaan 4 dan mendapatkan nilai T. Karena kondisi diatas merupakan kondisi sederhana maka dapat diselesaikan secara analitik namun karena pada kondisi yang kami teliti ini kompleks maka diselesaikan dengan metode numerik *finite difference*. Metode *finite difference* mengubah persamaan diferensial menjadi persamaan aljabar sehingga lebih mudah untuk menemukan solusinya.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) * \Delta x + f''(x) * \Delta x^2 / (2!) + \dots \quad (7)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x) * \Delta x + f''(x) * \Delta x^2 / (2!) - \dots \quad (8)$$

Pada metode finite difference, digunakan perluasan deret taylor dari fungsi kontinu. Pada perluasan deret Taylor ini terdapat perluasan forward deret taylor pada persamaan 7 dan perluasan backward deret Taylor pada persamaan 8 dengan Δx memiliki nilai yang kecil dan bisa dianggap tidak ada. Dengan menambahkan persamaan 7 dan 8 serta memotong setelah suku turunan ke-2, kita dapatkan pendekatan aproksimasi *centered-difference* dari suku turunan ke-2 dengan menggunakan pendekatan deret Taylor.

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2 * f(x) + f''(x) * \Delta x^2 \quad (9)$$

$$f''(x) = (f(x - \Delta x) - 2 * f(x) + f(x + \Delta x)) / \Delta x^2 \quad (10)$$

dengan $T''(x) = 0$, $T = T(x)$, $T(x = 0) = Tend1$, $T(x = L) = Tend2$. Mengganti turunan orde kedua menggunakan aproksimasi finite difference, kita dapatkan

$$\left(\frac{T_{i-1,j} - 2 * T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} \right) + \frac{g}{k} = 0 \quad (11)$$

$$T_{i-1,j} - 2 * T_{i,j} + T_{i+1,j} = -\frac{g}{k} \Delta x^2 \quad (12)$$

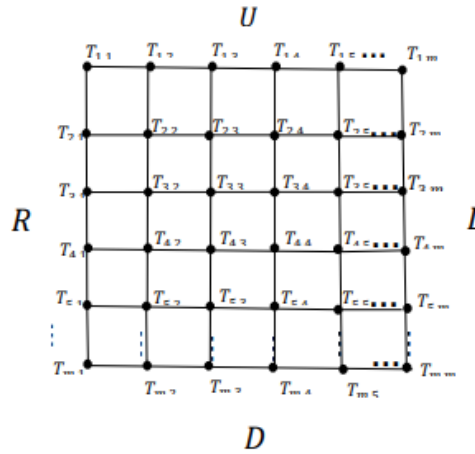
Dengan i mewakili lokasi node pada domain yang terdiskritisasi.



GAMBAR 1. The Finite Difference Stencil

Kemudian mengubah persamaan diferensial parsial menjadi sistem persamaan aljabar. Dengan mendiskritisasi domain ke dalam *grid node* diskrit. Ini mengaproksimasi turunan dalam persamaan menggunakan pendekatan selisih hingga, memungkinkan masalah diubah menjadi sistem persamaan aljabar yang dapat diselesaikan secara iteratif.

Beda hingga didefinisikan sebagai nilai perbedaan dari dua titik. Ide dari metode beda hingga adalah mencari aproksimasi numerik sebuah titik berdasarkan nilai dari titik-titik lain disekitar titik tersebut. Pada kasus perpindahan panas konduksi 2 dimensi sebagai kasus perpindahan panas konduksi 2D pada plat bujur sangkar dengan nilai-nilai suhu sisi-sisi diketahui. Misal plat bujur sangkar tersebut seperti pada gambar berikut:



GAMBAR 2. Titik Node Matriks

Didapat persamaan umum sebagai berikut

$$R + U + T_{1,2} + T_{2,1} - 4T_{1,1} = 0 \quad (13)$$

$$T_{1,1} + U + T_{1,3} + T_{2,2} - 4T_{1,2} = 0 \quad (14)$$

$$T_{1,2} + U + T_{1,4} + T_{2,3} - 4T_{1,3} = 0 \quad (15)$$

$$T_{1,3} + U + T_{1,5} + T_{2,4} - 4T_{1,4} = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & T_{1,m-1} + U + T_{2,m} + L - 4T_{1,m} = 0 \\ & R + T_{1,1} + T_{2,2} + T_{3,1} - 4T_{2,1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & T_{m,m-1} + T_{m-1,m} + L + D - 4T_{m,m} = 0 \end{aligned}$$

Berikut merupakan persamaan poisson dalam dua dimensi

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{g}{k} = 0 \quad (16)$$

Dengan $T = T(x, y)$ dan fungsi kendala tambahan sebagai berikut.

- a) $T(x, y = 0) = T1$
- b) $T(x = m, y) = T2$
- c) $T(x, y = n) = T3$
- d) $T(x = 0, y) = T4$

Metode *finite difference* digunakan untuk menyelesaikan persamaan di atas dengan cara mengganti bagian turunan dengan pendekatan *second order centered difference*

$$\frac{T_{i-1,j}-2T_{i,j}+T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}-2T_{i,j}+T_{i,j+1}}{\Delta y^2} + \frac{g}{k} = 0 \quad (17)$$

dengan menjadikan $\Delta x = \Delta y$, maka

$$T_{i-1,j} + T_{i+1,j} - 4 * T_{i,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} = -\frac{g}{k} \Delta x^2 \quad (18)$$

Persamaan tersebut adalah pendekatan selisih hingga dari persamaan poisson di atas.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pengujian konduktivitas termal dilakukan pada dua material penghantar panas yaitu tembaga (Cu) dan perunggu (CuSn) melalui simulasi python menggunakan metode *finite difference*. Melalui konduktivitas termal, kedua material dapat dianalisis kemampuan material dalam menghantarkan panas hingga mencapai kondisi sistem tunak (*steady state*). Dari hasil simulasi diperoleh besar temperatur pada posisi x dan posisi y yang kemudian di plot dengan library matplotlib.

Metode yang digunakan pada penyebaran panas ini adalah metode *finite difference* yang merupakan pendekatan diskritisasi dari persamaan diferensial parsial (PDE) yang menggambarkan fenomena penyebaran panas. Dalam kasus penyebaran panas, persamaan dasar yang digunakan adalah persamaan panas atau persamaan difusi. Pada tampilan grafik 2D, metode finite difference membagi domain spasial menjadi sebuah grid atau jaringan titik - titik diskrit. Setiap titik pada grid mewakili suatu nilai suhu pada titik tersebut. Nilai suhu pada setiap titik pada grid diperbarui secara iteratif berdasarkan persamaan *finite difference* yang telah diterapkan. Proses ini dilakukan secara berulang - ulang hingga solusi konvergen atau mencapai kondisi *steady state*, di mana suhu pada setiap titik tidak lagi berubah.

Dalam kasus *heat finite difference*, *steady state* dicapai ketika distribusi suhu stabil dan tidak ada perubahan suhu yang terjadi di dalam sistem. Pada titik ini, kita dapat menganggap bahwa suhu pada setiap titik dalam sistem adalah konstan dan tidak lagi berubah seiring waktu berjalan. Dengan menghitung *steady state* maka memungkinkan untuk mencari tau efisiensi sistem terkait transfer panas. Misalnya, dalam sistem pemanas atau pendingin, *steady state* dapat menunjukkan seberapa baik material dapat mempertahankan suhu yang diinginkan tanpa terlalu banyak kehilangan energi ke lingkungan sekitar. Dengan memeriksa *steady state*, kita dapat menganalisis efisiensi material dalam hal konduktivitas panas, daya tahan, konduktivitas listrik, atau parameter lain yang relevan dengan aplikasi material tersebut.

Pengujian dilakukan dengan memberikan besar temperatur yang sama, yaitu 200°C pada batas kanan, kiri, atas, dan bawah material. Panjang dan lebar kedua material juga diatur menjadi 1 meter dengan konduktivitas panas k dan *heat generation* q masing-masing sesuai dengan kemampuan material. Kedua material diatur menjadi 40 segmen sehingga diperoleh 41 node (titik temperatur). Dikarenakan suhu keempat batas material sudah ditentukan, maka *interior* node yang digunakan dimulai dari titik (2,2) sampai (40, 40).

Berdasarkan persamaan 15 maka diperoleh :

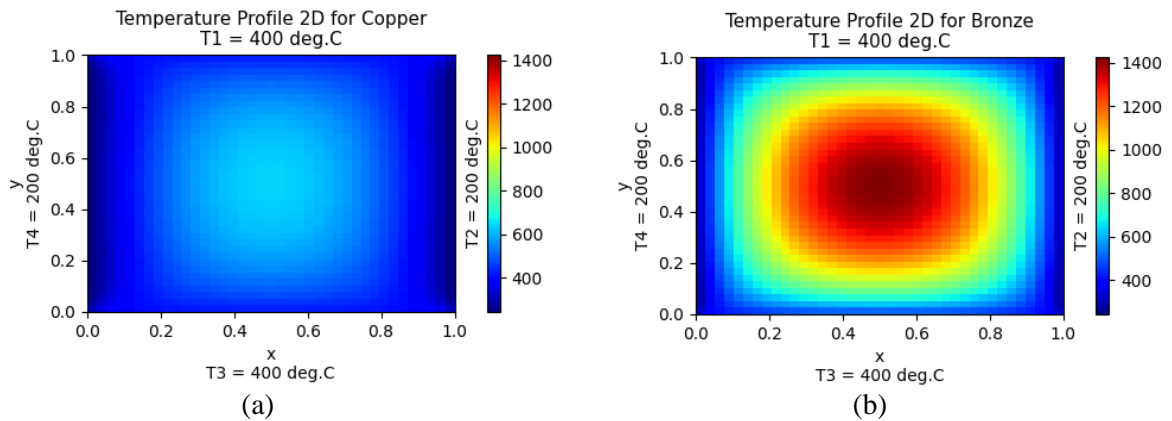
$$\begin{aligned} \text{node (i = 2, j = 2); } T_{1,2} + T_{3,2} - 4T_{2,2} + T_{2,1} + T_{2,3} &= -\frac{g}{k}(\Delta x^2) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

hingga seluruh node telah terhitung (i = 40, j = 40)

Persamaan diatas akan menghasilkan matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \\ T_{5,2} \\ T_{6,2} \\ \dots \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} T_{1,2} + T_{2,1} \\ T_{3,2} \\ T_{4,1} \\ T_{5,1} \\ T_{6,1} \\ \dots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{g}{k}(\Delta x^2) \\ \frac{g}{k}(\Delta x^2) \\ \frac{g}{k}(\Delta x^2) \\ \frac{g}{k}(\Delta x^2) \\ \frac{g}{k}(\Delta x^2) \\ \dots \end{bmatrix}$$

Dari hasil perhitungan, diperoleh suhu minimum dan maksimum pada material tembaga adalah 245.725 °C dan 638.573 °C. Sedangkan pada perunggu yang sebesar 332.324 °C dan 1422.935 °C.



GAMBAR 3. Steady State for (a) Copper and (b) Bronze

Kemampuan kedua material dalam menghantarkan panas ditampilkan dalam bentuk colormap seperti yang ditampilkan pada GAMBAR 3, (a) dan 3, (b). Pada gambar grafik 2D diberikan interval suhu minimum dan maksimum yang sama untuk kedua jenis material yakni tembaga (Cu) dan perunggu (CuSn) sebesar 400°C - 1200°C. Terlihat pada gambar bahwa penyebaran panas pada tembaga (Cu) berlangsung lebih efisien dibandingkan dengan perunggu (CuSn). Hal ini terlihat dari perubahan warna yang ditampilkan oleh kedua material pada grafik 2D. Konduktivitas termal dari perunggu (CuSn) lebih rendah dari pada tembaga (Cu) sehingga penyebaran panas tidak merata. Hal ini ditunjukkan dengan perbedaan warna yang signifikan pada grafik. Berdasarkan grafik, terlihat bahwa bagian tengah perunggu (CuSn) memiliki temperatur yang lebih panas dibandingkan dengan area lainnya. Sedangkan pada tembaga (Cu) perubahan warna tidak begitu signifikan karena tembaga (Cu) memiliki konduktivitas termal yang tinggi sehingga panas tersebar secara merata.

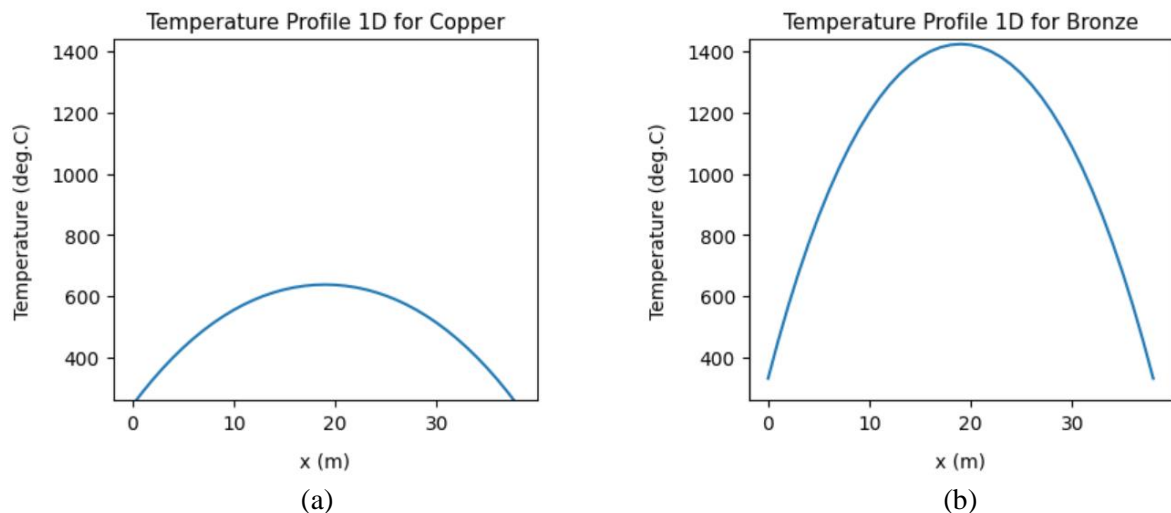


Figure 4. *Steady State 1D for (a) Copper and (b) Bronze*

GAMBAR 4, (a) dan 4, (b) menunjukkan grafik 1 dimensi untuk perbedaan penyebaran temperatur panas ($^{\circ}\text{C}$) pada sumbu y-axis dengan x-axis sebagai panjang dari material (meter). Pada GAMBAR dimensi yang diperoleh, terlihat bahwa tembaga mencapai steady state lebih cepat. Hal ini terbukti bahwa grafik parabolik yang dihasilkan oleh tembaga lebih landai dibandingkan dengan grafik perunggu. Hal ini disebabkan perunggu memiliki konduktivitas termal lebih rendah daripada tembaga yaitu berkisar antara $60\text{--}120\text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$. Tembaga memiliki konduktivitas termal yang jauh lebih tinggi, sekitar $400\text{--}450\text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$. Hal ini membuat tembaga menjadi lebih efisien dalam menghantarkan panas.

Perpindahan panas mempengaruhi waktu yang dibutuhkan untuk mencapai *steady state*. Semakin tinggi konduktivitas pada material, maka waktu yang dibutuhkan untuk mencapai *steady state* akan semakin cepat. Selain itu, konduktivitas termal yang tinggi mengakibatkan distribusi panas yang merata pada material. Sedangkan, pada perunggu yang memiliki konduktivitas rendah mengakibatkan gradien suhu yang lebih besar.

PENUTUP

Kesimpulan

Dari kedua material yang telah diuji, dapat disimpulkan bahwa tembaga mencapai kondisi steady state lebih cepat dibandingkan dengan material perunggu. Hal ini disebabkan oleh konduktivitas termal yang lebih tinggi dan kemampuan tembaga untuk mendistribusikan panas dengan lebih efisien. Dengan demikian, distribusi suhu dalam sistem tembaga akan lebih cepat mencapai keseimbangan yang stabil.

Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan, kami menyarankan beberapa hal, diantaranya

- 1) Selain visualisasi 2D yang telah ditampilkan dalam penelitian ini, peneliti lain dapat mempertimbangkan untuk menghasilkan visualisasi 3D dari distribusi suhu dalam sistem. Ini akan memberikan pemahaman yang lebih komprehensif tentang perbedaan suhu antara perunggu dan tembaga, serta pola aliran panas di dalam material.

- 2) Peneliti lain dapat menerapkan metode *finite difference* ini pada kasus nyata atau aplikasi konkret di dunia nyata. Misalnya, memodelkan sistem panas pada komponen mesin atau perangkat elektronik untuk memahami kinerja termalnya dan mencari solusi yang efisien.
- 3) Selain perunggu dan tembaga, peneliti dapat memperluas studi ini dengan membandingkan material konduktor lainnya. Ini akan memberikan wawasan yang lebih luas tentang perbedaan karakteristik termal antara berbagai jenis material dan bagaimana itu mempengaruhi kecepatan mencapai *steady state*.

REFERENSI

- [1] D. A. Maturi, N. M. Alsulami, & E. S. Alaidarous, "Finite Difference Approximation for Solving Transient Heat Conduction Equation of Copper", *Advances in Pure Mathematics*, 10, 2020. 350-358.
- [2] F. Hidayanti, H. H. Santoso, & G. Baskara, "Design of Metal Heat Conductivity Measurement Using Probe Method", *SPEKTRA: Jurnal Fisika dan Aplikasinya*, 2020. 5(1), 69.
- [3] G. Singh, & P. M. Pandey, "Rapid Manufacturing of Copper-Graphene Composites Using a Novel Rapid Tooling Technique". *Rapid Prototyping Journal*, 26(4), 2020. 765–776.
- [4] M. Sohail, U. Nazir, S. Naz, A. Singh, K. Mukdasai, M. R. Ali, M. J. Khan, A. M. Galal, "Utilization of Galerkin Finite Element Strategy to Investigate Comparison Performance Among Two Hybrid Nanofluid Models". *Scientific Reports*, 12(1), 2022. 18970.
- [5] N. Nurhayati, R. Tiryo, A. Dorrah, & N. Aang, "Pemodelan Matematika Laju Aliran Panas Pada Wajan Pembuatan Arang Aktif-13 dengan Menggunakan Metode Beda Hingga (Finite Difference Method)", 2019.
- [6] S. Adnan, M. Jin, M. S. Bryan, M. E. Manley, D. H. Hurley, & M. Khafizov, "Implications Of Phonon Anisotropy on Thermal Conductivity of Fluorite Oxides", *Journal of Physics: Condensed Matter*, 35(335702), 2023. 12pp.
- [7] S. C. Chapra, *Numerical Methods for Engineers Seventh Edition*. New York, NY: McGraw-Hill, 2014.
- [8] S. V. Kidalov, & F. M. Shakhov, "Thermal Conductivity of Diamond Composites", *Materials*, 2(4), 2009. 2467-2495.
- [9] V. G. D. B. Dos Santos & P. T. G. Dos Anjos, "Finite Difference Method Applied in Two-Dimensional Heat Conduction Problem in the Permanent Regime in Rectangular Coordinates" in *Advances in Pure Mathematics*, 2022, pp. 505-518.
- [10] X. Hu, C. Wang, M. K. Lim, & W. Q. Chen, "Characteristics of The Global Copper Raw Materials and Scrap Trade Systems and The Policy Impacts of China's Import Ban", *Ecological Economics*, 2020. 172, 106626.