

Rapport de travail effectué

Un avion survole une zone de relief connu. Sa position horizontale est notée r , son altitude z , et la vitesse horizontale est notée v .

A $t = 0$, $r(0) = r_0$, $v(0) = v_0$. Par ailleurs, $z = z_0$ constante, et $v = v_0$ constante.

On représente pour chaque instant entre 0 et T, la position horizontale exacte r_k de l'avion.

On obtient la figure ci-dessous :

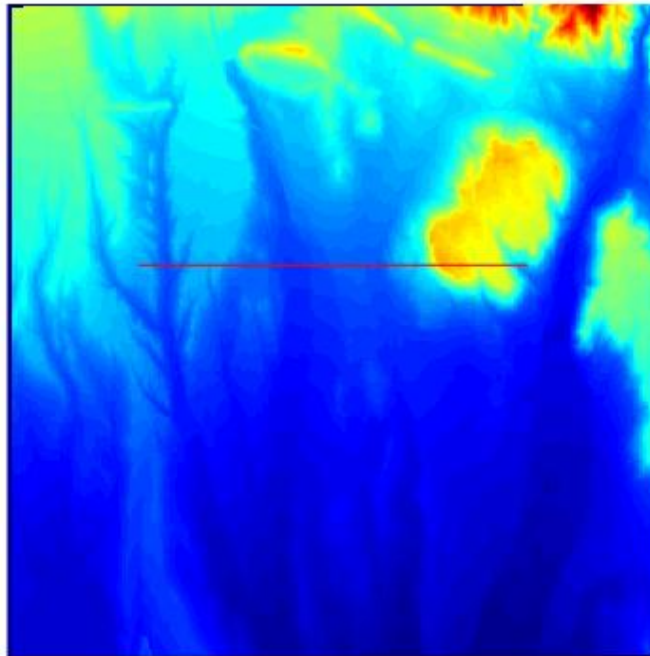


Figure 1: Position horizontale exacte de l'avion

Afin d'estimer la position horizontale r_k et la vitesse horizontale v_k de l'avion à l'instant t_k , on recueille (au moyen d'accéléromètres et de gyroscopes installés à bord) avec un pas de temps $\Delta = t_k - t_{k+1}$ et jusqu'à l'instant T, l'accélération horizontale de l'avion avec une erreur additive modélisée par un bruit gaussien centré da matrice de covariance ${}_{INS}^2 I_2$ (I_2 la matrice identité de dimension 2×2 et on suppose que ${}_{INS}$ est une caractéristique connue de la centrale de navigation inertielle utilisée). Ainsi :

$$a_k^{INS} = a_k + w_k^{INS}$$

où :

- a_k : l'accélération horizontale réelle de l'avion.

- w_k^{INS} : un bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance $\sigma_{INS}^2 I_2$.

Le fichier fourni `ins.mat` contient les mesures inertielles bruitées $(a_1^{INS}, \dots, a_{n_{max}-1}^{INS})$ mesurées par l'avion. A partir de ces mesures inertielles, et à partir de la position r_0 et la vitesse initiale v_0 , on obtient l'estimation de r_k^{INS} de la position horizontale obtenue en intégrant les mesures d'accélération horizontale à l'aide du modèle d'état suivant :

$$\begin{pmatrix} r_k^{INS} \\ v_k^{INS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & \Delta I_2 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{k-1}^{INS} \\ v_{k-1}^{INS} \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} 0 \\ a_k^{INS} \end{pmatrix} \quad avec \quad \begin{pmatrix} r_1^{INS} \\ v_1^{INS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

On représente pour chaque instant entre 0 et T, la position horizontale exacte r_k et son estimation inertielle r_k^{INS} .

On obtient la figure ci-dessus :

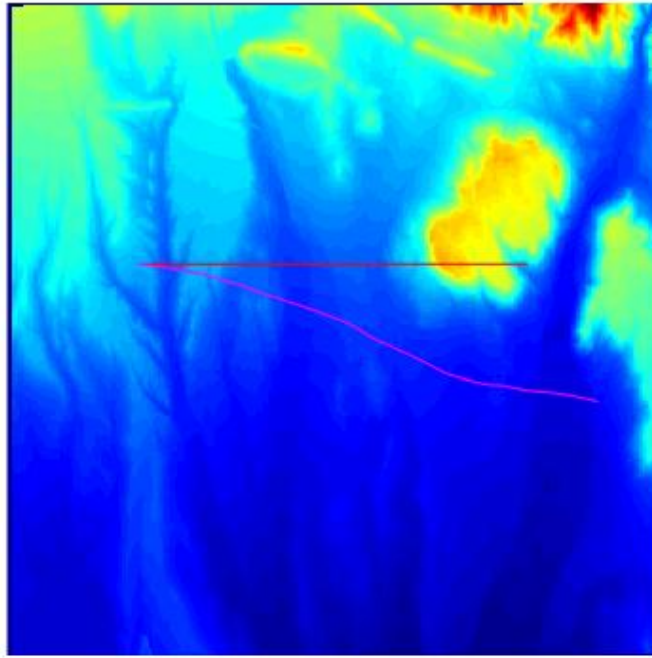


Figure 2: Trajectoire horizontale exacte réelle, et inertielle de l'avion

On remarque que l'estimation inertielle est décalée par rapport à la position exacte, et que cette estimation est de plus en plus éloignée de la réalité quand on évolue dans le temps.

Maintenant, on introduit de nouvelles variables :

$$\begin{cases} \delta r_k = r_k - r_k^{INS} \\ \delta v_k = v_k - v_k^{INS} \end{cases}$$

La position et vitesse inertielles étaient précédemment représentées par le modèle d'état suivant :

$$\begin{pmatrix} r_k^{INS} \\ v_k^{INS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & \Delta I_2 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{k-1}^{INS} \\ v_{k-1}^{INS} \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} 0 \\ a_k^{INS} \end{pmatrix} \quad avec \quad \begin{pmatrix} r_1^{INS} \\ v_1^{INS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

On part de cette équation pour trouver le modèle d'état correspondant à nos nouvelles variables.

On a tout d'abord :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta r_k \\ \delta v_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_k - r_k^{INS} \\ v_k - v_k^{INS} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_k^{INS} \\ v_k^{INS} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_2 & \Delta I_2 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{k-1} \\ v_{k-1} \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} 0 \\ a_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_k^{INS} \\ v_k^{INS} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_2 & \Delta I_2 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{k-1} - r_{k-1}^{INS} \\ v_{k-1} - v_{k-1}^{INS} \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ a_k - a_k^{INS} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_2 & \Delta I_2 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_{k-1} \\ \delta v_{k-1} \end{pmatrix} - \Delta \begin{pmatrix} 0 \\ w_k^{INS} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient donc ce nouveau modèle d'état pour les nouvelles variables :

$$\begin{pmatrix} \delta r_k \\ \delta v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & \Delta I_2 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_{k-1} \\ \delta v_{k-1} \end{pmatrix} - \Delta \begin{pmatrix} 0 \\ w_k^{INS} \end{pmatrix} \quad avec \quad \begin{pmatrix} \delta r_1 \\ \delta v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Afin de corriger la dérive de l'estimation inertielle r_k^{INS} de la position horizontale par rapport à la position horizontale exacte r_k .

On recueille séparément (au moyen d'un radar altimétrique, ou radio-altimètre, installé à bord) avec le même pas de temps Δ une mesure d_k^{ALT} de la hauteur de l'avion au dessus du relief situé à la verticale.

Cette mesure est donnée avec une erreur additive modélisée par un bruit blanc gaussien centré de variance σ_{ALT}^2 .

L'écart-type σ_{ALT} est une caractéristique supposée connue du radio-altimètre utilisé.

On recueille également (au moyen d'un baromètre altimétrique, ou baro-altimètre, installé à bord) avec le même pas de temps Δ une mesure z_k^{BAR} de l'altitude de l'avion, avec une erreur additive modélisée

par un bruit blanc gaussien centré de variance σ_{BAR}^2 . L'écart-type σ_{BAR} est une caractéristique supposée connue du baro-altimètre utilisé.

Afin de représenter la hauteur du relief à chaque instant t_k : $h(r_k)$, on implémente la méthode présentée dans la page 8 dans le programme Matlab suivant :

Algorithm 1: Lecture de la hauteur sur la carte et tracé

```

map_r=zeros(1,nmax); % init z ro du vect des valeurs num riques map(i1,i2)
i1=ceil(N1*(rtrue(1,:)-X1MIN)/(X1MAX- X1MIN)); %calcul de i1 pour chaque r
i2=ceil(N2*(rtrue(2,:)-X2MIN)/(X2MAX- X2MIN)); %calcul de i2 pour chaque r
for i=1:nmax
    map_r(i)=map(i1(i),i2(i)); %identif de la hauteur relief
end

plot(1:nmax,map_r,'b');

```

On représente graphiquement sur un plan vertical le profil du relief survolé : A chaque instant t_k , le

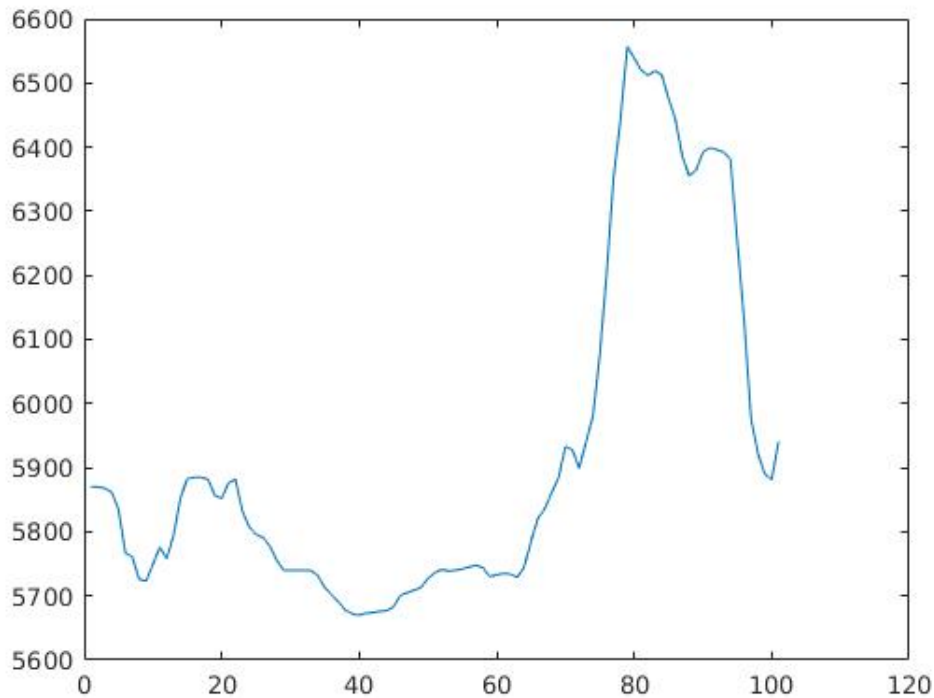


Figure 3: Profil du relief survolé par l'avion entre les instants 0 et T

radio-altimètre fournit une mesure bruitée d_k^{ALT} de la distance entre l'avion et le relief, c'est-à-dire :

$$d_k^{ALT} = (z_k - h(r_k)) + w_k^{ALT}$$

où :

- r_k : la position horizontale réelle de l'avion.
- z_k : l'altitude réelle de l'avion.
- w_k^{ALT} : un bruit blanc gaussien centré de variance σ_{ALT}^2 .

Au même instant t_k , le baro-altimètre fournit une mesure bruitée z_k^{BAR} de l'altitude de l'avion :

$$z_k^{BAR} = z_k + w_k^{BAR}$$

où :

- z_k : l'altitude réelle de l'avion.
- w_k^{BAR} : un bruit blanc gaussien centré de variance σ_{BAR}^2 .

La hauteur du relief survolé à l'instant t_k déduite à partir des mesures fournies par le radio-altimètre et par le baro-altimètre est donc :

$$h_k^{ALT} = z_k^{BAR} - d_k^{ALT} = h(r_k) + w_k^{BAR} - w_k^{ALT}$$

Les mesures bruitées du radio-altimètre ($d_1^{ALT}, \dots, d_{nmax}^{ALT}$) et les mesures bruitées du baro-altimétriques ($z_1^{BAR}, \dots, z_{nmax}^{BAR}$) sont recueillies par l'avion le long de sa trajectoire, les mesures bruitées ($h_1^{ALT}, \dots, h_{nmax}^{ALT}$) de la hauteur du relief survolé sont ensuite calculées à bord de l'avion, et sont fournies dans le fichier alt.mat.

On représente graphiquement sur un plan vertical le profil exact du relief survolé et les mesures bruitées de la hauteur du relief survolé :

Maintenant, on a d'après une expression précédente que :

$$h_k^{ALT} = h(r_k) + w_k^{BAR} - w_k^{ALT}$$

Et on a que : $\delta r_k = r_k - r_k^{INS}$, donc en remplaçant r_k dans la formule précédente.

On arrive à l'expression suivante :

$$h_k^{ALT} = h(r_k^{INS} + \delta r_k) + w_k^{BAR} - w_k^{ALT}$$

D'après le cours, on que si $Y_k = h_k(X_k) + V_k$ avec Y_k les observations, X_k l'état caché et $V_k \sim q_k(v)dv$ l'erreur, alors la fonction de vraisemblance g_k s'écrit comme $g_k(x') = q_k(Y_k - h_k(x'))$.

Dans notre problème les observations sont la hauteur du relief h_k^{ALT} , l'état caché est $(\delta r_k, \delta v_k)$ et l'erreur $w_k^{BAR} - w_k^{ALT}$. Cette erreur est un bruit blanc gaussien qui, dans l'hypothèse de w_k^{BAR} et w_k^{ALT} indépendants, est de variance $\sigma_{ALT}^2 + \sigma_{BAR}^2$.

La fonction densité de ce bruit est égale à $\exp(\frac{-x^2}{2(\sigma_{ALT}^2 + \sigma_{BAR}^2)})$.

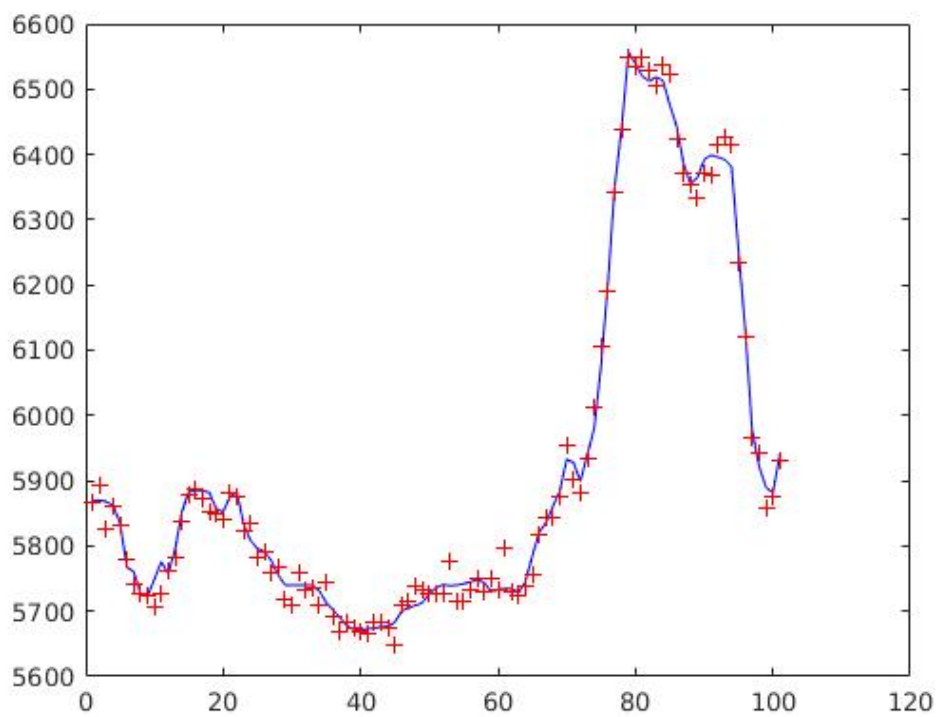


Figure 4: Profil réel du terrain survolé et mesures altimétriques

Donc la fonction vraisemblance de notre problème s'écrit :

$$g_k(x') = \exp\left(\frac{-1}{2} \frac{|Y_k - h_k(r_k^{INS} + x')|^2}{\sigma_{ALT}^2 + \sigma_{BAR}^2}\right)$$

Maintenant, on cherche à mettre en oeuvre des filtres particulières de deux types différents :

- Un filtre SIR : avec rééchantillonnage en redistribution multinomiale à chaque pas de temps.
- Un filtre SIS : sans redistribution

Filtre SIR : Sampling with importance resampling

Algorithme du filtre

- On génère un N-échantillon $(\xi_0^1, \xi_0^2, \dots, \xi_0^N)$ de même loi que $X_0 = (\delta r_0, \delta v_0)$. Le vecteur des conditions initiales $X_0 = (\delta r_0, \delta v_0)$ suit une loi gaussienne d'espérance :

$$\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et de matrice de covariance :

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{r_0}^2 I_2 & 0 \\ 0 & \sigma_{v_0}^2 I_2 \end{pmatrix}$$

- on définit les poids associés au N-échantillon $(\xi_0^1, \xi_0^2, \dots, \xi_0^N)$ comme suit :

$$p_0^i = g(Y_0 - h_0(\xi_0^i))$$

ensuite on les normalise les poids en divisant par $\sum_{j=1}^N p_0^j$ avec g la fonction de vraisemblance.

Étape 2 : pour chaque pas de temps $k \in \{1, \dots, T\}$:

- On génère le bruit blanc gaussien associé à la mesure de l'accélération à l'instant k : w_k^{INS} .
- On applique ensuite la fonction `func_multi` à notre échantillon et les poids qui lui sont associés : étape du rééchantillonnage. On obtient un nouvel échantillon $(\hat{\xi}_{k-1}^1, \hat{\xi}_{k-1}^2, \dots, \hat{\xi}_{k-1}^N)$.
- on prédit notre état à partir du nouvel échantillon :

$$\xi_k = \begin{pmatrix} I_2 & \Delta I_2 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \xi_{k-1} - \Delta \begin{pmatrix} 0 \\ w_k^{INS} \end{pmatrix}$$

- On calcule les poids qui lui sont associés par la formule :

$$p_k^i = g(Y_k - h_k(\xi_k^i))$$

ensuite on les normalise en divisant par $\sum_{j=1}^N p_k^j$ avec g la fonction de vraisemblance.

- on obtient la valeur de l'état X_k par :

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_k^i * \xi_k^i$$

Implémentation en Matlab

On utilise les fonctions suivantes :

- `fct_h` : qui nous donne la hauteur h qui correspond à une position r en utilisant la matrice `map`.
- `fct_vrais` : la fonction de vraisemblance.
- `fct_mult` : utilisé à l'étape du rééchantillonnage.
- `SIR` : implémentation de l'algorithme du filtre SIR à l'aide des fonctions définies ci-dessus.
- `TP1` : définition des paramètres du problème et application du filtre.

Filtre SIS : Sequential Importance Sampling

Algorithme du filtre

L'étape du rééchantillonnage n'est pas effectuée dans cet algorithme, ainsi :

- On génère un N-échantillon $(\xi_0^1, \xi_0^2, \dots, \xi_0^N)$ de même loi que $X_0 = (\delta r_0, \delta v_0)$. Le vecteur des conditions initiales $X_0 = (\delta r_0, \delta v_0)$ suit une loi gaussienne d'espérance :

$$\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et de matrice de covariance :

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{r_0}^2 I_2 & 0 \\ 0 & \sigma_{v_0}^2 I_2 \end{pmatrix}$$

- on définit les poids associés au N-échantillon $(\xi_0^1, \xi_0^2, \dots, \xi_0^N)$ comme suit :

$$p_0^i = g(Y_0 - h_0(\xi_0^i))$$

ensuite on les normalise les poids en divisant par $\sum_{j=1}^N p_0^j$ avec g la fonction de vraisemblance.

Étape 2 : pour chaque pas de temps $k \in \{1, \dots, T\}$:

- On génère le bruit blanc gaussien associé à la mesure de l'accélération à l'instant k : w_k^{INS} .
- on prédit notre état à partir du nouvel échantillon :

$$\xi_k = \begin{pmatrix} I_2 & \Delta I_2 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \xi_{k-1} - \Delta \begin{pmatrix} 0 \\ w_k^{INS} \end{pmatrix}$$

- On calcule les poids qui lui sont associés par la formule :

$$p_k^i = g(Y_k - h_k(\xi_k^i))$$

ensuite on les normalise en divisant par $\sum_{j=1}^N p_k^j$ avec g la fonction de vraisemblance.

- on obtient la valeur de l'état X_k par :

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_k^i * \xi_k^i$$

Implémentation en Matlab

On utilise les fonctions suivantes :

- `fct_h` : qui nous donne la hauteur h qui correspond à une position r en utilisant la matrice `map`.
- `fct_vrais` : la fonction de vraisemblance.
- `SIS` : implémentation de l'algorithme du filtre SIS à l'aide des fonctions définies ci-dessus.
- `TP1` : définition des paramètres du problème et application du filtre.

Résultats

Nous avons représenté les trajectoires réelle et inertielle, ainsi que le nuage de particule et la trajectoire pondérée de ce nuage. Nous pouvons voir les résultats pour un nuage de 5000 particules ci-dessous :

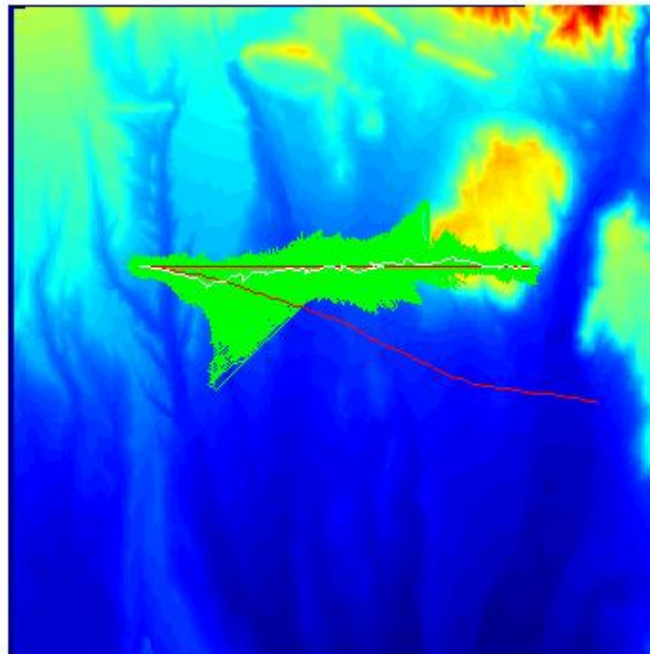
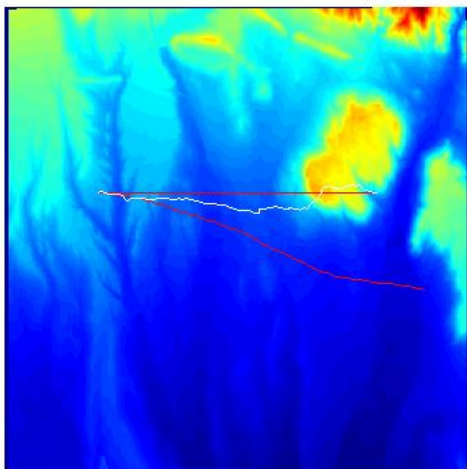
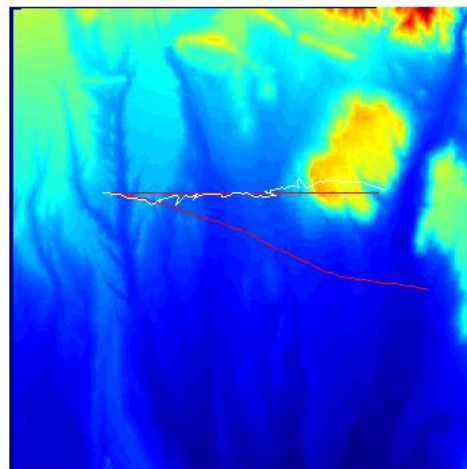


Figure 5: Nuages de particules et trajectoires

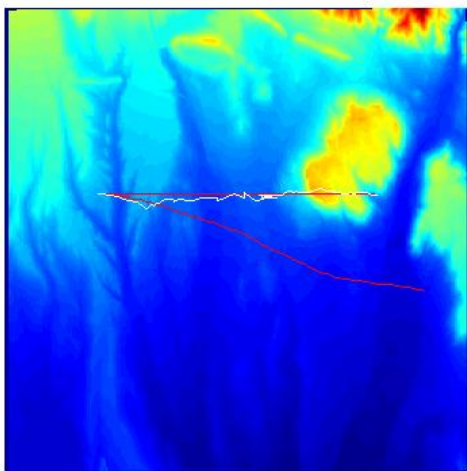
Nous avons également représenté les résultats du filtrage particulaire avec rééchantillonnage pour différentes valeurs du nombre N de particules :



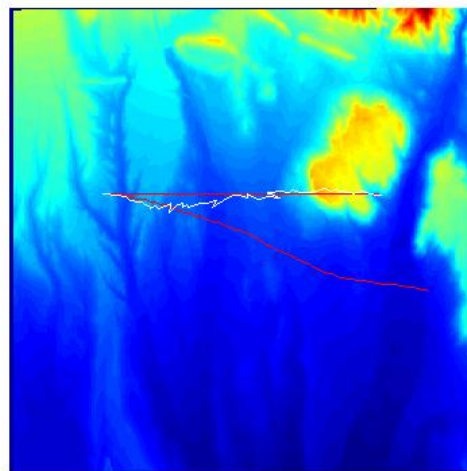
(a) Représentation pour $N=100$



(b) Représentation pour $N=500$



(c) Représentation pour $N=1000$



(d) Représentation pour $N=5000$

La méthode de filtrage particulaire nous a permis d'obtenir une trajectoire nettement proche de la trajectoire réelle. La trajectoire en blanc correspond à la moyenne pondérée des trajectoires obtenues par les générations de particules à chaque instant. Pour certaines particules [5](#), la trajectoire obtenue s'éloigne de la trajectoire réelle de notre avion.

La correction par pondération a donc permis de corriger cet écart en multipliant par les poids d'importance. L'étape de rééchantillonnage a permis également de ne garder que les particules avec un grand poids, soit les particules dont l'estimation est la plus proche de la trajectoire réelle.