Tích phân kép

Chuyển sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x \triangleq rCos\varphi \\ y \triangleq rSin\varphi \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cos\varphi & -rSin\varphi \\ Sin\varphi & rCos\varphi \end{vmatrix} = r$$

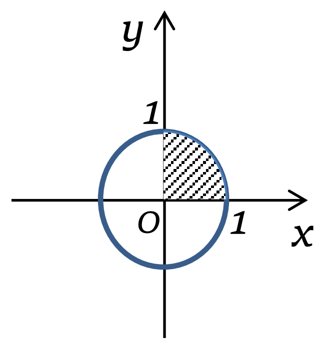
$$I = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(rCos\varphi, rSin\varphi)r.drd\varphi$$

Ví dụ:

$$\mathbf{a.}\ I_1 = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}};\ D: x^2+y^2 \le 1; x \ge 0; y \ge 0$$

$$\mathbf{b.}\ I_2 = \iint\limits_{D} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy;\ D: x^2+y^2 \le a^2; y \ge 0$$

Giải:



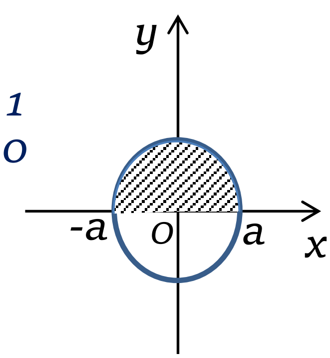
a. $\begin{cases} x \triangleq rCos\varphi \\ y \triangleq rSin\varphi \end{cases}$

D’: $0 \le r \le 1;\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$I_1 = \iint\limits_{D'} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} rdrd\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 d\left(\sqrt{1+r^2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{1+r^2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$



b. $\begin{cases} x \triangleq rCos\varphi \\ y \triangleq rSin\varphi \end{cases}$

D’: $0 \le r \le a;\ 0 \le \varphi \le \pi$

$$I_2 = \iint_D \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr d\varphi = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a} \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr = \pi \int_0^{a} \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr$$

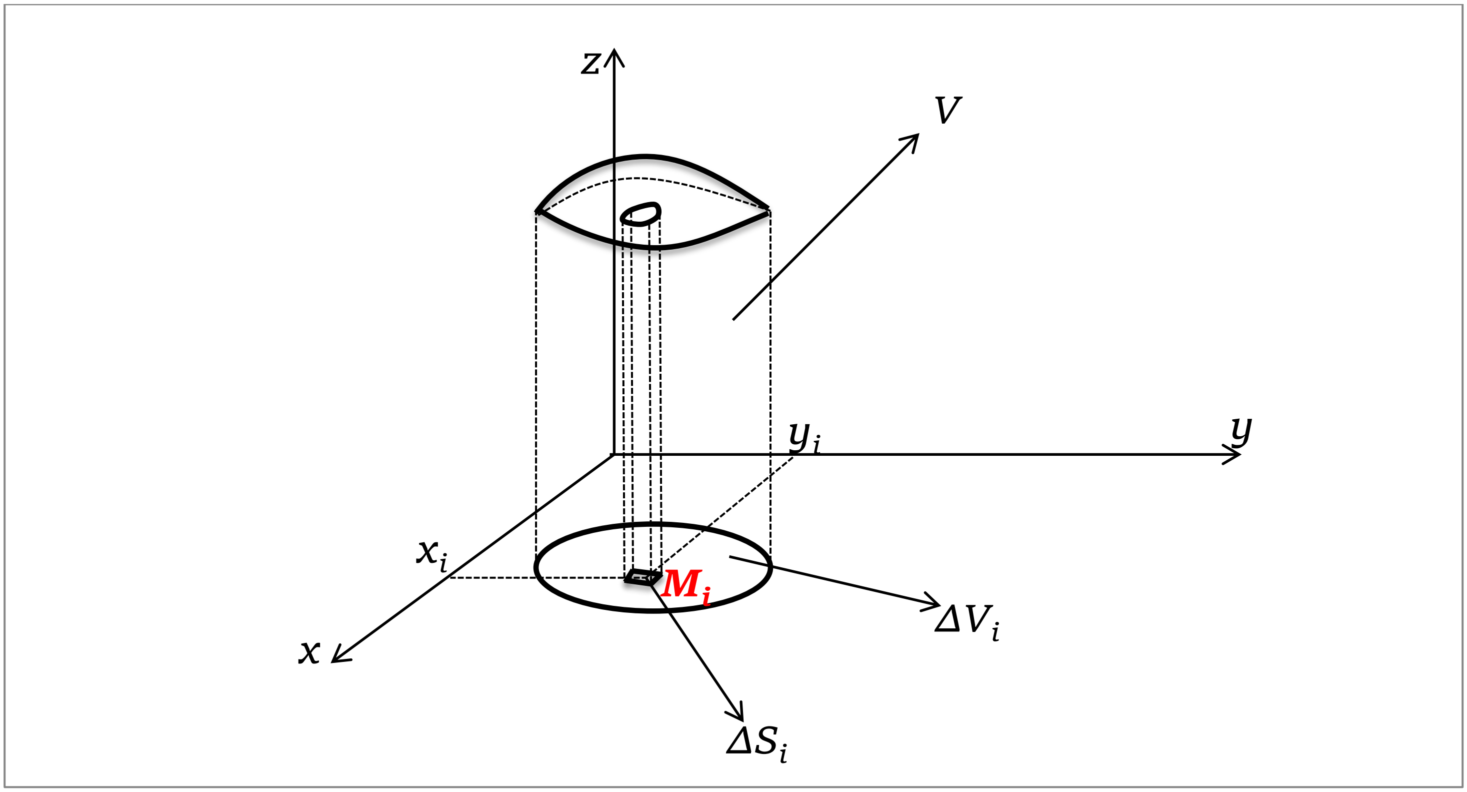
$$u \triangleq \sqrt{a^2 - r^2} \Rightarrow du = \frac{-r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \Rightarrow udu = -rdr$$

$$\Rightarrow I_2 = \pi \int_0^{a} u^2 du = \pi \frac{u^3}{3} \Big|_0^a = \pi \frac{a^3}{3}$$

$f(x, y)$ là hàm xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$

$$I = \iint_D f(x, y) dxdy$$

$z = f(x, y)$



Phân hoạch D thành các miền nhỏ $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$.

Trên mỗi ΔS_i lấy $M_i(x_i, y_i)$

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i$$

$$\iint_D f(x, y) dS = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \max d(\Delta S_i) \to 0}} I_n = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \max d(\Delta S_i) \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i$$

Nhận xét:

1. $dS = dxdy$

$$I = \iint_D f(x,y)dS = \iint_D f(x,y)dxdy$$

2. Nếu chọn $f(x, y) = 1, \forall (x, y) \in D$

$\Rightarrow f(x_i, y_i) = 1, \forall i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow \iint_D dxdy = S(D)$: Công thức tính diện tích hình phẳng

3. $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D$

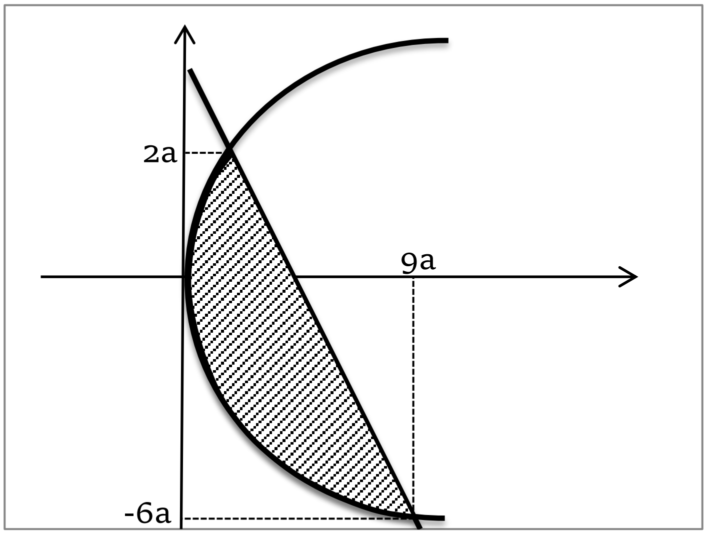
V: hình trụ | Đáy dưới: D
| Đáy trên: Mặt $z = f(x,y)$
| Đường sinh song song với Oz

$V = \iint_D f(x,y)dxdy$: Công thức tính thể tích hình trụ V

Ví dụ: Tính diện tích hình phẳng

D_1 giới hạn bởi: $y^2 = 4ax$; $x + y = 3a$ $(a > 0)$

Giải:



$$S(D_1) = \iint_{D_1} dxdy$$

$y^2 = 4ax = 4a(3a - y) = 12a^2 - 4ay$

$\Leftrightarrow y^2 + 4ay - 12a^2 = 0$

$\Delta' = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2$

$y_1 = 2a \Rightarrow x_1 = a$

$y_2 = -6a \Rightarrow x_2 = 9a$

D_1: $-6a \leq y \leq 2a$; $\frac{y^2}{4a} \leq x \leq 3a - y$

$$S(D_1) = \int_{-6a}^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y} dx = \int_{-6a}^{2a} \left(3a - y - \frac{y^2}{4a}\right) dy = \left|\left(3ay - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12a}\right)\Bigg|_{-6a}^{2a}\right|$$

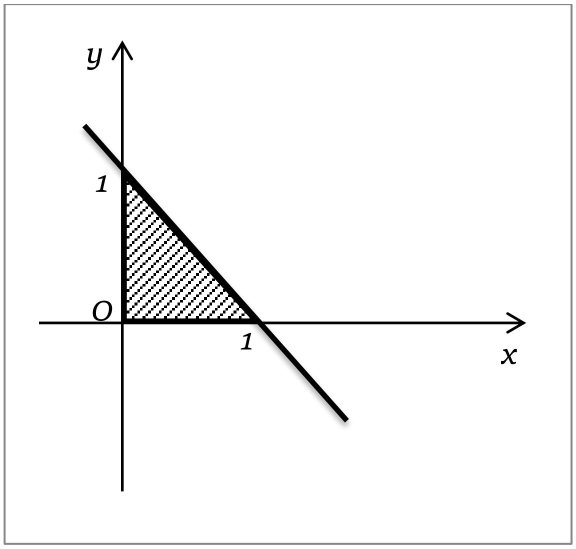
$$= \left|6a^2 - 2a^2 - \frac{2}{3}a^2 + 18a^2 + 18a^2 - 18a^2\right| = \frac{64}{3}a^2$$

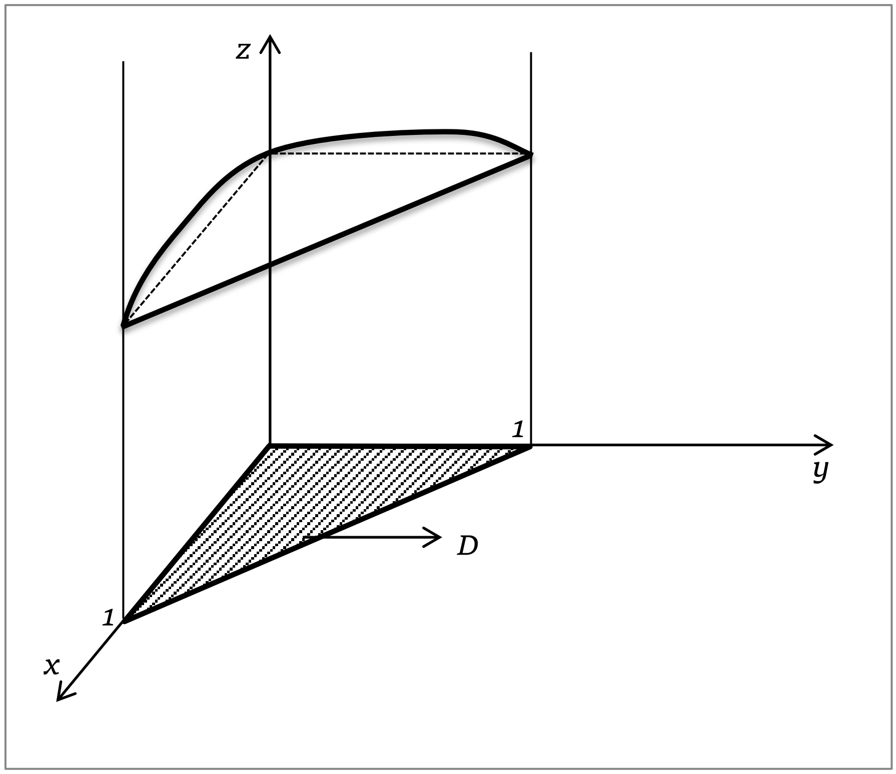
Ví dụ: ***Tính thể tích của hình trụ***

V_1 giới hạn bởi các mặt: $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 1$; $z = 0$; $z = x^2 + xy + 1$

Giải:

$$V_1 = \iint_D (x^2 + xy + 1)dxdy$$





$D: 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1 - x$

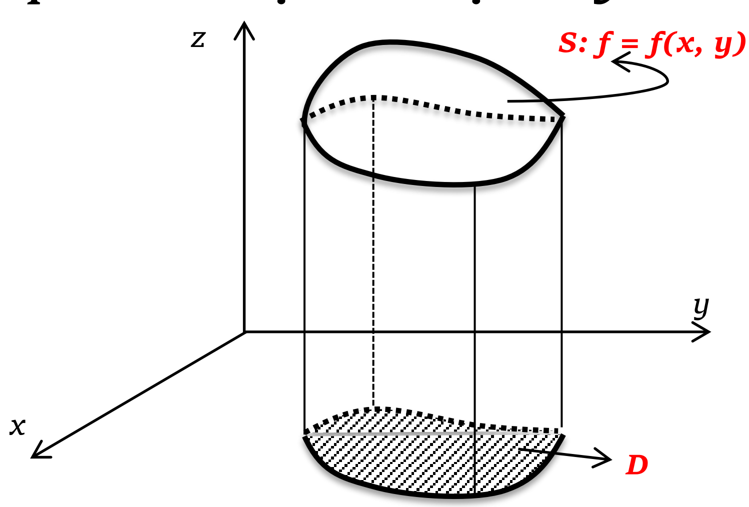
$$V_1 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + xy + 1)dy = \int_0^1 \left[\left(x^2y + \frac{xy^2}{2} + y\right)\Big|_0^{1-x}\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{x(1-x)^2}{2} + 1 - x\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (-x^3 - x + 2)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{8}$$

Ứng dụng của tích phân 2 lớp để tính diện tích mặt cong

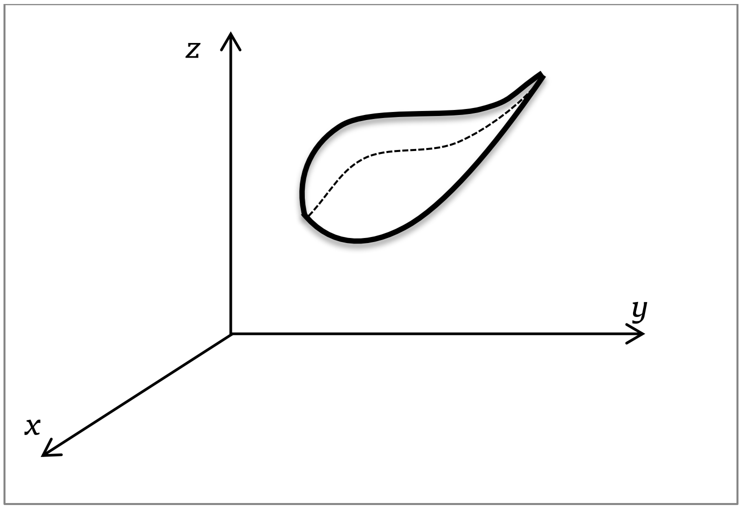
$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dxdy$$



Tích phân bội ba

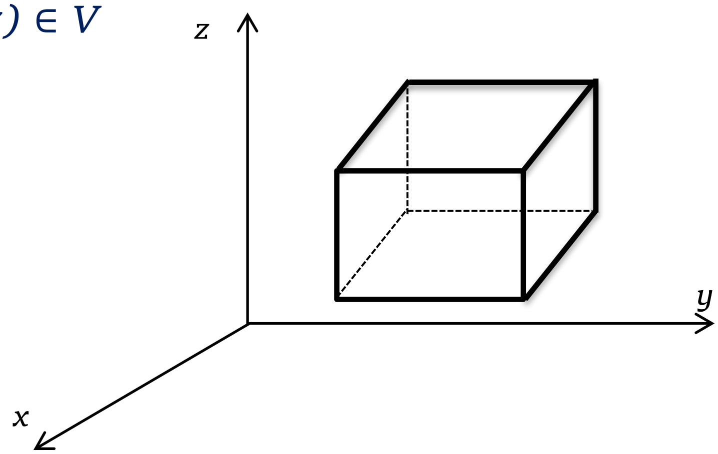
Cho $f(x, y, z)$ là hàm xác định trên $V \subset Oxyz$

$$I = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ d(\Delta V_i) \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$



Nhận xét: $f(x, y, z) = 1 \; \forall(x, y, z) \in V$

$$V = \iiint_V dxdydz$$



Cách tính:

TH1: $V = [a, b]\times[c, d]\times[e, f]$

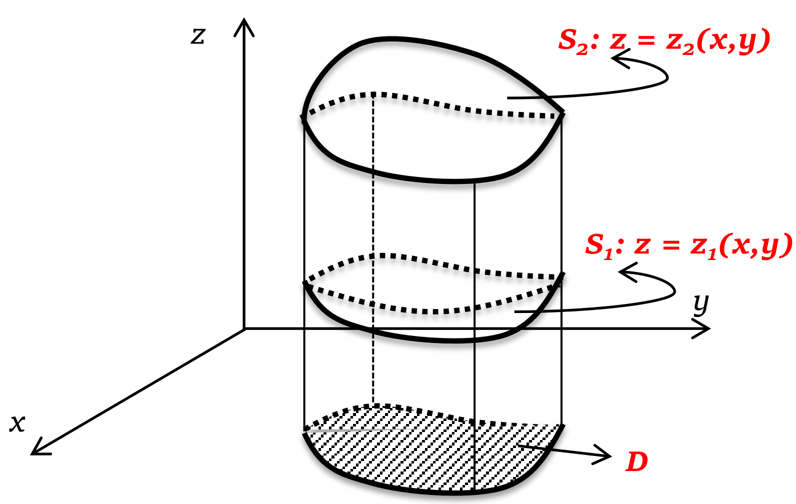
$$I = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z)dz$$

TH2:

$$I = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

$$I = \iint_D dxdz \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)dy$$

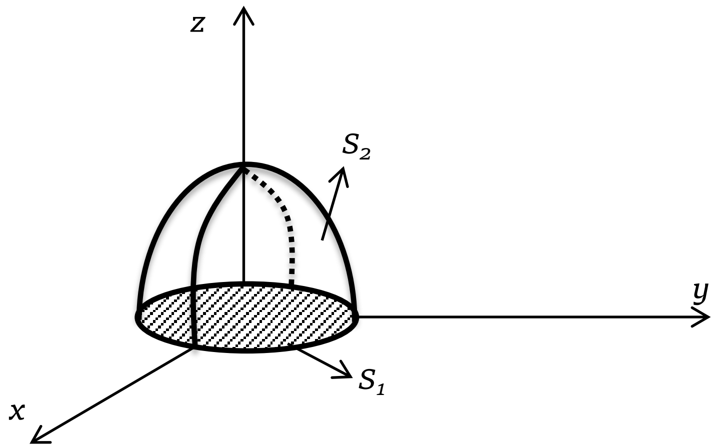
$$I = \iint_D dydz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)dx$$



_Ví dụ:_ Tính tích phân sau:

$$I = \iiint\limits_V z\,dxdydz \qquad V \text{ giới hạn bởi: } z = 0;\ z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Giải:

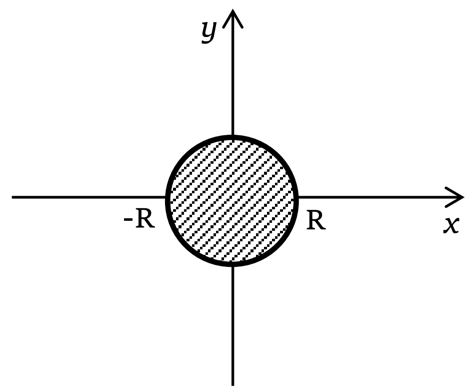


$$I = \iint\limits_D dxdy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} zdz$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_D (R^2-x^2-y^2)dxdy$$

$$\begin{cases} x \triangleq rCos\varphi \\ y \triangleq rSin\varphi \end{cases}$$

$$D': \begin{matrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le R \end{matrix}$$



$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R^2 - r^2)rdr$$

$$= \pi\left(\frac{R^2r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^R = \pi\frac{R^4}{4}$$

TH3: Công thức đổi biến

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \qquad (u, v, w) \in V'$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \forall (u, v, w) \in V'$$

$$I = \iiint\limits_{V'} f\big(x(u, v, w); y(u, v, w); z(u, v, w)\big)|J|dudvdw$$

Các mặt thường gặp

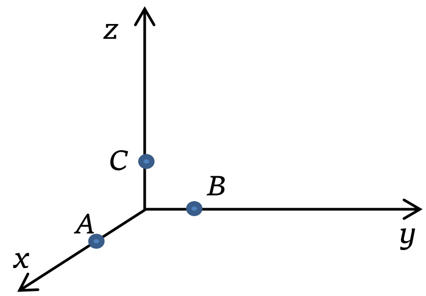
1. Mặt phẳng: $Ax + By + Cz + D = 0$

$Oxy: z = 0; z = a$

$Oyz: x = 0; x = a$

$Oxz: y = 0; y = a$

$(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$



2. Mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$

$A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c)$

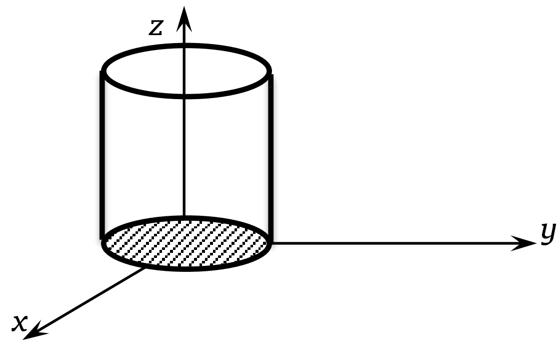
$I(-A, -B, -C), R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$

3. Mặt trụ:

$x^2 + y^2 = R^2$

$y^2 + z^2 = R^2$

$x^2 + z^2 = R^2$

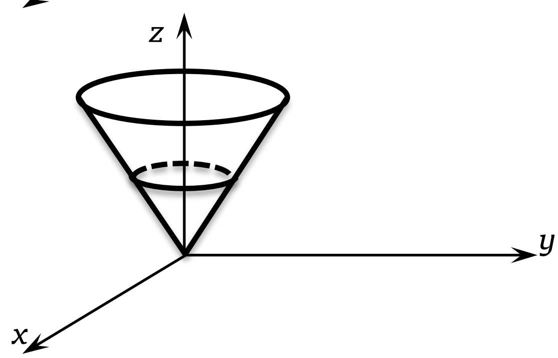


4. Mặt nón:

$x^2 + y^2 = z^2$

$x^2 + z^2 = y^2$

$y^2 + z^2 = x^2$

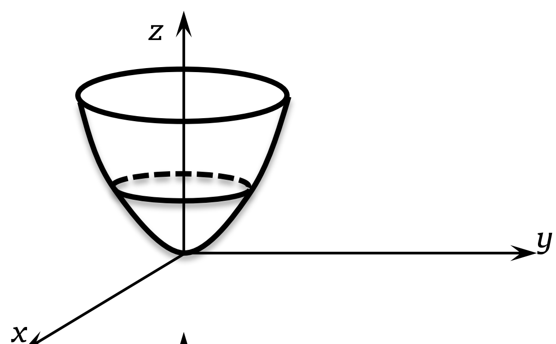


5. Mặt paraboloid:

$x^2 + y^2 = z$

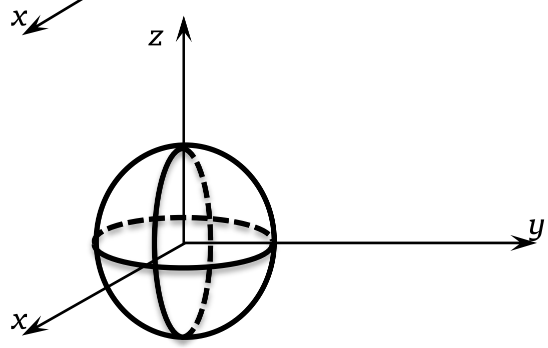
$y^2 + z^2 = x$

$x^2 + z^2 = y$

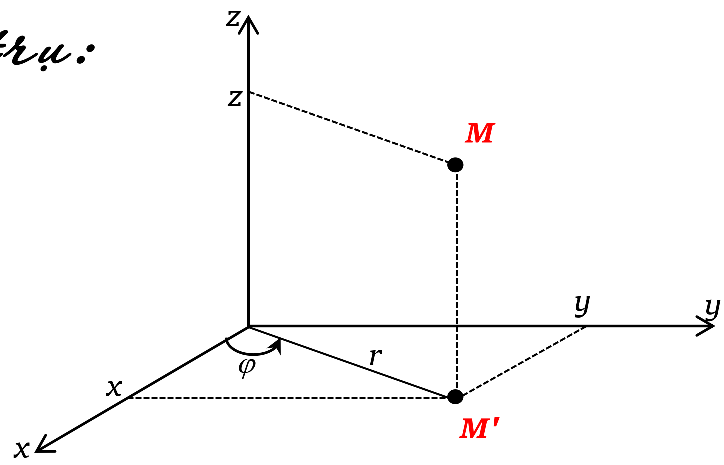


6. Mặt Ellypsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Đổi biến sang tọa độ trụ:



$M(x, y, z) \;=\; M(r, \varphi, z)$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

Tọa độ Descartes   Tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$0 \le r \le +\infty$$
$$-\infty \le z \le +\infty$$

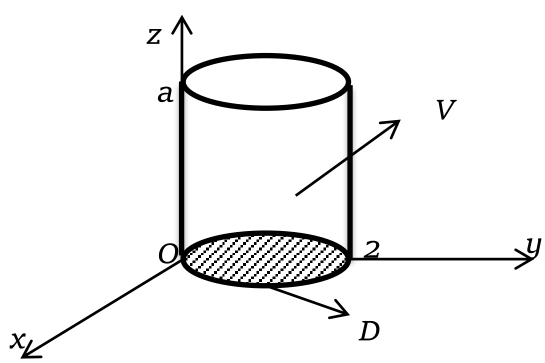
$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$I = \iiint_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Ví dụ: **Tính tích phân**

$$I = \iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$$ **V giới hạn bởi: $x^2 + y^2 = 2y;\ z = 0;\ z = a$**

Giải:



$$I = \iint_D dxdy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$$

$$= \iint_D \left[\left(\frac{z^2}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_0^a\right] dxdy$$

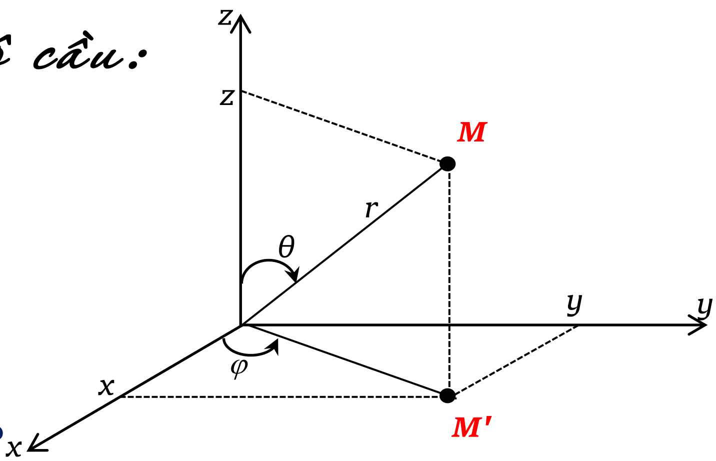
$$= \frac{a^2}{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$\begin{cases} x \triangleq r\cos\varphi \\ y \triangleq r\sin\varphi \end{cases} \qquad D' \left| \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 2\sin\varphi \end{array} \right.$$

$$I = \frac{a^2}{2}\int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r^2 dr = \frac{a^2}{2}\int_0^\pi \left[\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^{2\sin\varphi}\right] d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^\pi \frac{8}{3}\sin^3\varphi\, d\varphi = \frac{4a^2}{3}\int_0^\pi \sin^3\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{16a^2}{9}$$

Đổi biến sang tọa độ cầu:



$$M(x, y, z) = M(r, \theta, \varphi)$$

$\downarrow$ Tọa độ Descartes $\qquad$ $\downarrow$ Tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = rCos\varphi Sin\theta \\ y = rSin\varphi Sin\theta \\ z = rCos\theta \end{cases}$$

$$0 \le r \le +\infty$$
$$0 \le \theta \le \pi$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

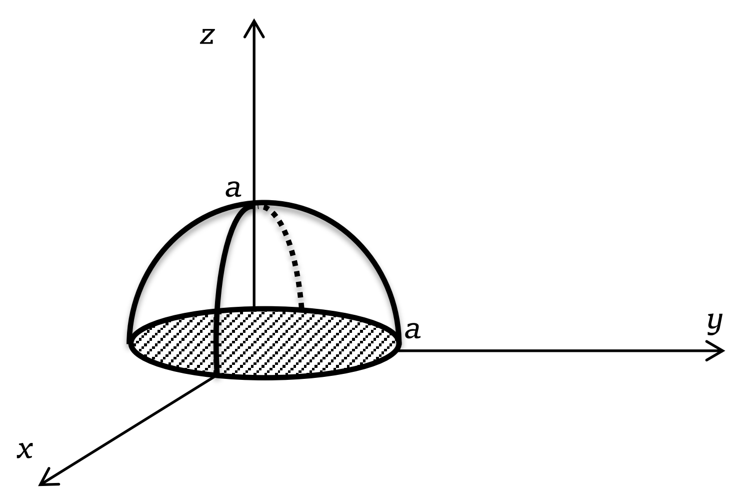
$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = r^2 Sin\theta$$

$$I = \iiint\limits_{V'} f(rCos\varphi Sin\theta, rSin\varphi Sin\theta, rCos\theta) r^2 Sin\theta dr d\theta d\varphi$$

Ví dụ: **Tính tích phân**

$$\mathbf{I = \iiint\limits_{V} (x^2 + y^2) dxdydz} \qquad \textbf{V xác định bởi: } x^2 + y^2 + z^2 \le a^2; z \ge 0$$

Giải:



$$\begin{cases} x \triangleq rCos\varphi Sin\theta \\ y \triangleq rSin\varphi Sin\theta \\ z \triangleq rCos\theta \end{cases} \qquad V' \left| \begin{array}{l} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right.$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 Sin^3\theta d\theta = 2\pi.\frac{a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^3\theta d\theta = \frac{2\pi a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (Sin^2\theta Sin\theta) d\theta$$

$$= -\frac{2\pi a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - Cos^2\theta) d(Cos\theta) = -\frac{2\pi a^5}{5}\left(Cos\theta - \frac{Cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_{\theta = 0}^{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{2\pi a^5}{5}\left(0 - 0 - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi a^5}{15}$$

Ứng dụng của tích phân 3 lớp:

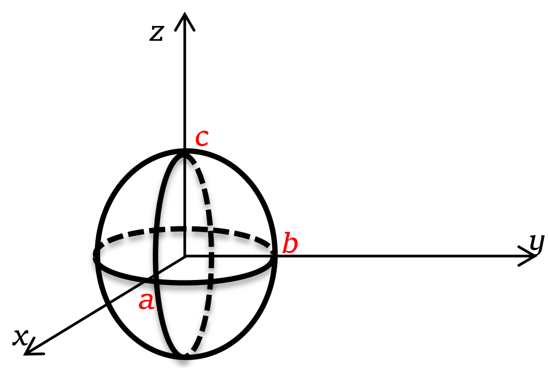
Tính thể tích

$$V = \iiint_V dxdydz$$

Ví dụ: Tính thể tính hình Ellypsoid

$$V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$$

Giải:



$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases} \qquad V': u^2 + v^2 + w^2 \le 1$$

$$J = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

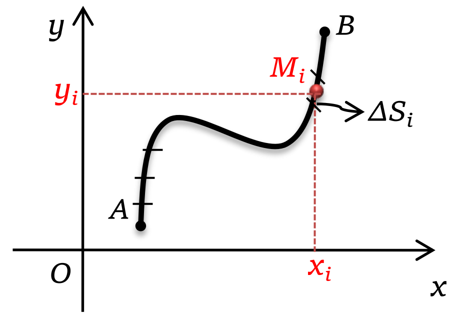
$$V = \iiint_{V'} abc.dudvdw$$

$$\begin{cases} u = rCos\varphi Sin\theta \\ v = rSin\varphi Sin\theta \\ w = rCos\theta \end{cases} \qquad V''\left| \begin{array}{l} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right.$$

$$V = abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\pi} r^2 Sin\theta d\theta = abc.2\pi.\frac{1}{3}Cos\theta\Big|_{\theta = \pi}^{\theta = 0} = \frac{4\pi}{3}abc$$

Tích phân đường loại 1

1. Tích phân đường loại I trên cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$



f(x, y) xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)dS = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ max(\Delta S_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i$$

Nhận xét: Nếu $f(x, y) = 1;\ \forall (x, y)\in \overset{\frown}{AB}$

$\Rightarrow l = \int_{\overset{\frown}{AB}} dS$: Công thức tính độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$

2. Cách tính:

TH1: $\overset{\frown}{AB}$: $y = f(x),\ a \le x \le b$

Hệ số góc của dS là f'(x)

$$dS = \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

$$I = \int_a^b f(x, f(x))\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

TH2: $\overset{\frown}{AB}$: $x = g(y),\ a \le y \le b$

$$I = \int_a^b f(g(y), y)\sqrt{1 + g'^2(y)}dy$$

TH3: $\overset{\frown}{AB}$: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \le t \le b$

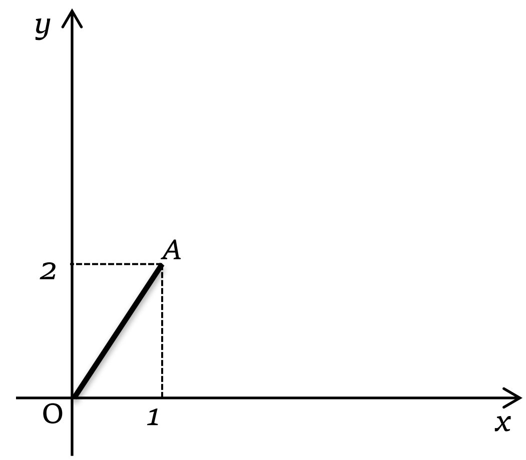
$$I = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

Ví dụ: **Tính các tích phân đường loại I sau:**

a. $I_1 = \int_C \dfrac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$ **, C là đoạn thẳng nối (0;0) và (1;2)**

b. $I_2 = \int_L \sqrt{x^2 + y^2}dS$**, L xác định bởi:** $x^2 + y^2 = ax$

Giải:



a. $OA: y = 2x;\ 0 \le x \le 1$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{5x^2+4}}\sqrt{5}dx$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}\right)\Big|_0^1$$

$$= \ln\left(1+\sqrt{9/5}\right) - \ln\sqrt{4/5} = \ln\left(\frac{1+\frac{3}{\sqrt{5}}}{\sqrt{4/5}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{4}}\right)$$

b. $L: \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Chú ý: } C\left|\begin{array}{l}\text{Tâm } I(a,b)\\ \text{bán kính } R\end{array}\right. \Rightarrow C: (x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \\ \text{Tham số hóa của C: } \begin{cases} x-a = R\text{Cos}t \\ y-b = R\text{Sin}t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi] \end{array}}$$

Đặt:

$$\begin{cases} x-\frac{a}{2} = \frac{a}{2}\text{Cos}t \\ y = \frac{a}{2}\text{Sin}t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi]$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{a}{2}\text{Cos}t+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}\text{Sin}^2t}.\frac{a}{2}dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{4}\text{Cos}^2t+\frac{a^2}{2}\text{Cos}t+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\text{Sin}^2t}.\frac{a}{2}dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\text{Cos}t}.\frac{a}{2}dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\text{Cos}t}\frac{a}{2}.\frac{a}{2}dt = \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\text{Cos}t}dt = \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}\left|2\text{Cos}\frac{t}{2}\right|dt$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi}\left|Cos\frac{t}{2}\right|dt + \frac{a^2}{4}\int_{\pi}^{2\pi}\left|Cos\frac{t}{2}\right|dt = \frac{a^2}{4}\left(\int_0^{\pi}Cos\frac{t}{2}dt - \int_{\pi}^{2\pi}Cos\frac{t}{2}dt\right)$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(2Sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} - 2Sin\frac{t}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2$$

3. Tích phân đường loại I trên cung $\widehat{AB} \subset Oxyz$

$f(x, y, z)$ xác định trên $\widehat{AB} \subset Oxyz$

Giả sử: $\widehat{AB}$ $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $\quad a \le t \le b$

$$I = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$$

***Ví dụ:* Tính tích phân:**

$$I = \int_C \sqrt{2y^2 + z^2}dS, \text{ C xác định: } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x = y \end{cases}$$

Giải:

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z^2 = a^2 - 2t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \pm\sqrt{a^2 - 2t^2} \end{cases}$$

$$a^2 - 2t^2 \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{a}{\sqrt{2}} \le t \le \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$I = \underbrace{\int_{C\cap z\ge 0}\sqrt{2y^2 + z^2}dS}_{A} + \underbrace{\int_{C\cap z\le 0}\sqrt{2y^2 + z^2}dS}_{B}$$

$$A = \int_{C\cap z\ge 0}\sqrt{2y^2 + z^2}dS = \int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} a.\sqrt{2 + \frac{4t^2}{a^2 - 2t^2}}dt = \sqrt{2}a^2\int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}}\frac{dt}{\sqrt{a^2 - 2t^2}}$$

$$= a^2\int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}}\frac{dt}{\sqrt{\frac{a^2}{2} - t^2}}dt = a^2 arcSin\frac{t}{a/\sqrt{2}}\Bigg|_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} = \pi\frac{a^2}{2} + \pi\frac{a^2}{2} = \pi a^2$$

$$B = \int_{C\cap z\le 0} \sqrt{2y^2 + z^2}\,dS = \int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} a.\sqrt{2+\frac{4t^2}{a^2 - 2t^2}}\,dt = \sqrt{2}a^2 \int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 - 2t^2}}$$

$$= a^2 \int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{a^2}{2} - t^2}}dt = a^2 arcSin\frac{t}{a/\sqrt{2}}\Bigg|_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} = \pi\frac{a^2}{2} + \pi\frac{a^2}{2} = \pi a^2$$

$$\Rightarrow I = A + B = 2\pi a^2$$

Cách 2:

$$I = \int_C \sqrt{2y^2 + z^2}\,dS = \int_C \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dS = a\int_C dS = a.l_C = 2\pi a^2$$

Tích phân đường loại 2

1. Định nghĩa:

$P(x, y), Q(x, y)$ là 2 hàm xác định trên $\overset{\frown}{AB}$

A: điểm đầu B: điểm cuối

$\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (x_i - x_{i-1}; y_i - y_{i-1}) = (\Delta x_i; \Delta y_i)$

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$$

Nhận xét:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

2. Cách tính:

TH1: $\overset{\frown}{AB}$: $y = y(x)$

Khi $A \longrightarrow B$ thì x: $x_A \longrightarrow x_B$

$$I = \int_{x_A}^{x_B} [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]dx$$

TH2: $\overset{\frown}{AB}$: $x = x(y)$

Khi $A \longrightarrow B$ thì y: $y_A \longrightarrow y_B$

$$I = \int_{y_A}^{y_B} [P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)]dy$$

TH3: $\overset{\frown}{AB}$ $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Khi $A \longrightarrow B$ thì t: $t_A \longrightarrow t_B$

$$I = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

Ví dụ: **Tính tích phân loại II sau:**

$$I = \int_L (x-y)dx + (x+y)dy,\ \textbf{L nối } O(0,0) \textbf{ tới } A(1,1)$$

Theo các phương trình sau: (i): $y = x$; (ii): $y = x^2$; (iii): $y = \sqrt{x}$

Giải:

$$(i): I_1 = \int_0^1 2xdx = x^2\Big|_0^1 = 1$$

$$(ii): I_2 = \int_0^1 (x - x^2 + (x + x^2)2x)dx = \int_0^1 (2x^3 + x^2 + x)dx$$

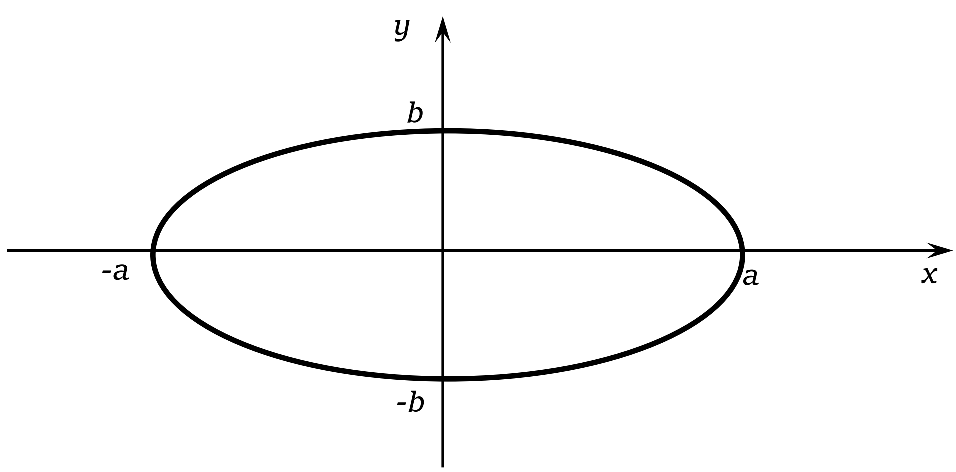
$$= \left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

$$(iii): I_3 = \int_0^1 \left((y^2 - y)2y + y^2 + y\right)dy = \int_0^1 (2y^3 - y^2 + y)dy$$

$$= \left(\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$I = \int_L xdy - ydx,\ \textbf{L: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \textbf{ theo chiều ngược kim đồng hồ}$$

Giải:

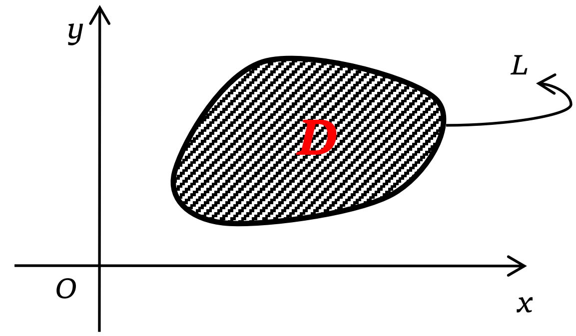


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = aCost \\ y = bSint \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi} [aCost.bCost - bSint(-aSint)]dt = \int_0^{2\pi} \left(abCos^2t + abSin^2t\right)dt = 2\pi ab$$

3. Mối liên hệ giữa tích phân đường loại II và tích phân 2 lớp (Công thức Green):

D là miền cong trong Oxy mà có biên L là 1 đường cong kín:



P(x, y); Q(x, y) là 2 hàm xác định trên D

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy$$

Ví dụ: **Tính các tích phân đường loại II sau:**

a. $I_1 = \int_C (-x^2y)dx + xy^2dy$

C: $x^2 + y^2 = R^2$ **lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ**

b. $\int_C (e^x Siny - my)dx + (e^x Cosy - m)dy$

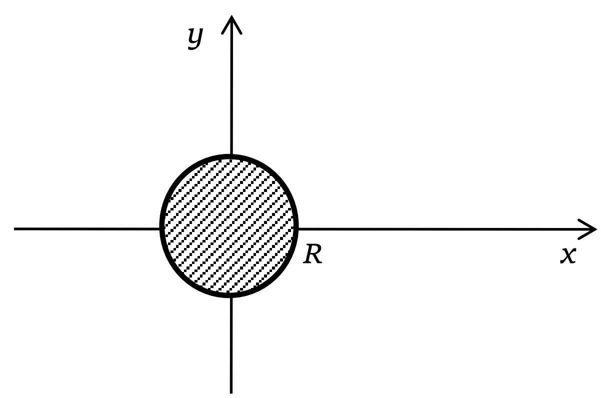
C: $x^2 + y^2 = ax$ **là nửa đường tròn trên trục Ox đi thì A(a, 0) tới O(0, 0)**

Giải:

a. $P(x, y) = -x^2y \Rightarrow P'_y = -x^2$

$Q(x, y) = xy^2 \Rightarrow Q'_x = y^2$

Theo Green:

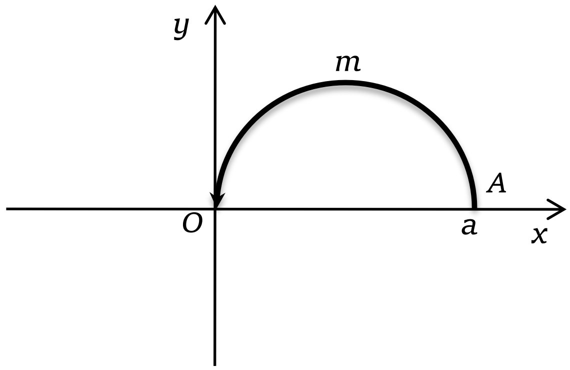


$$I_1 = \iint_D (y^2 + x^2)dxdy$$

$$\begin{cases} x = rCos\varphi \\ y = rSin\varphi \end{cases} \quad D': \begin{vmatrix} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{vmatrix}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3dr = 2\pi\frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

b. $C: \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$



Theo Green: $C = AmOA - OA$

$$I_2 = \underbrace{\int_{AmOA} (e^x Siny - my)dx + (e^x Cosy - m)dy}_{J_1}$$

$$- \underbrace{\int_{OA} (e^x Siny - my)dx + (e^x Cosy - m)dy}_{J_2}$$

$$J_2: OA\Big|_{x:\, 0 \xrightarrow{y = 0} a}$$

$$J_2 = \int_0^a 0dx = 0$$

Tính J_1

$P(x, y) = e^x Siny - my \quad \Rightarrow P'_y = e^x Cosy - m$

$Q(x, y) = e^x Cosy - m \quad \Rightarrow Q'_x = e^x Cosy$

$$J_1 = \iint_D mdxdy = mS_{\text{nửa đường tròn}} = m.\frac{1}{2}\pi\frac{a^2}{4} = m\frac{\pi a^2}{8}$$

$$\Rightarrow I_2 = J_1 + J_2 = m\frac{\pi a^2}{8}$$

Tích phân mặt loại 1

$$I = \iint_S f(x,y,z)dS$$

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy$$

Cách tính:

$$I = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy \quad ①$$

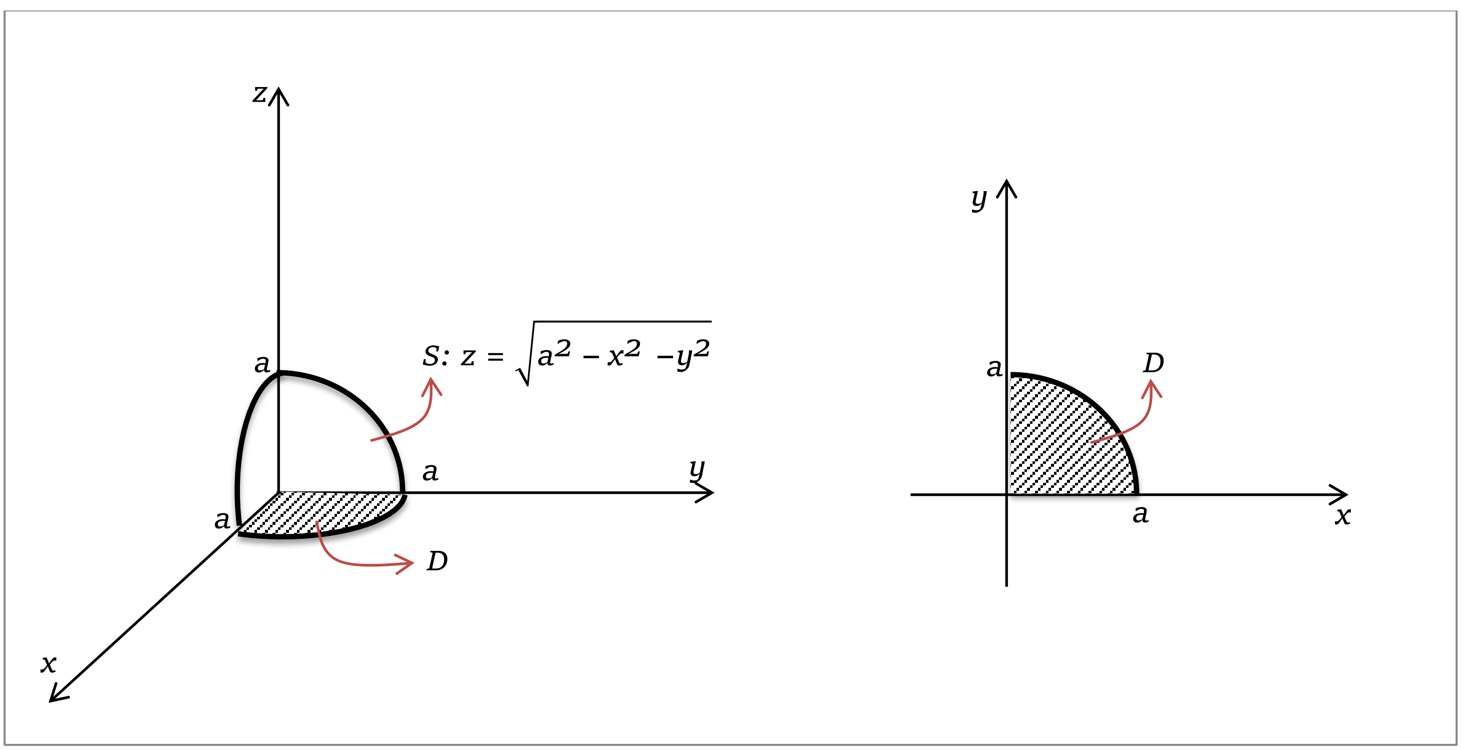
$$I = \iint_D f(x,y(x,z),z)\sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}dxdz \quad ②$$

$$I = \iint_D f(x(y,z),y,z)\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}dydz \quad ③$$

Ví dụ: ***Tính tích phân mặt loại I sau:***

$I = \iint_S z^2(x^2 + y^2)dS$, S là phần mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Giải:



$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$z'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$I = \iint_D (a^2 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dxdy$$

$$= a\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,(x^2 + y^2)dxdy$$

$$\begin{cases} x = rCos\varphi \\ y = rSin\varphi \end{cases} \quad D' \left| \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le a \end{array} \right.$$

$$I = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\,r^3 dr = a\frac{\pi}{2}\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\,r^3 dr$$

$$u \triangleq \sqrt{a^2 - r^2} \Rightarrow u^2 = a^2 - r^2 \Rightarrow udu = -rdr$$

$$I = -a\frac{\pi}{2}\int_a^0 u(a^2 - u^2)udu = a\frac{\pi}{2}\int_0^a (a^2u^2 - u^4)du$$

$$= a\frac{\pi}{2}\left(a^2\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_0^a = a\frac{\pi}{2}\left(\frac{a^5}{3} - \frac{a^5}{5}\right) = \pi\frac{a^6}{15}$$

Tích phân mặt loại 2

$$I = \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Cách tính: Tính từng giá trị

$$\iint\limits_S Pdydz; \iint\limits_S Qdxdz; \iint\limits_S Rdxdy$$

$$\iint\limits_S \mathbf{Rdxdy} = \begin{cases} \iint_D R(x,y,z(x,y))dxdy & (\vec{n},Oz) \le 90^o \\ -\iint_D R(x,y,z(x,y))dxdy & (\vec{n},Oz) > 90^o \end{cases}$$

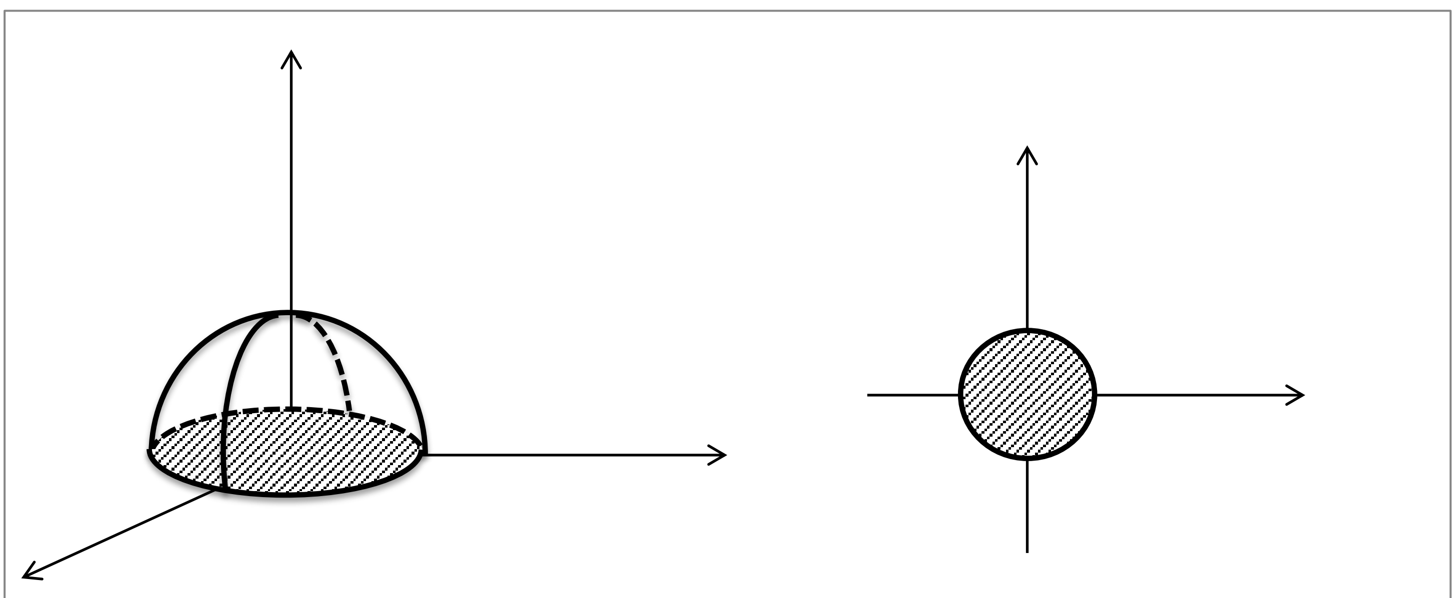
$$\iint\limits_S \mathbf{Qdxdz} = \begin{cases} \iint_D Q(x,y(x,z),z)dxdz & (\vec{n},Oy) \le 90^o \\ -\iint_D Q(x,y(x,z),z)dxdz & (\vec{n},Oy) > 90^o \end{cases}$$

$$\iint\limits_S \mathbf{Pdydz} = \begin{cases} \iint_D P(x(y,z),y,z)dydz & (\vec{n},Ox) \le 90^o \\ -\iint_D P(x(y,z),y,z)dydz & (\vec{n},Ox) > 90^o \end{cases}$$

Ví dụ: ***Tính tích phân mặt loại II sau:***

$I = \iint\limits_D zdxdy$, S là mặt xác định: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \ge 0$ hướng lên

Giải:



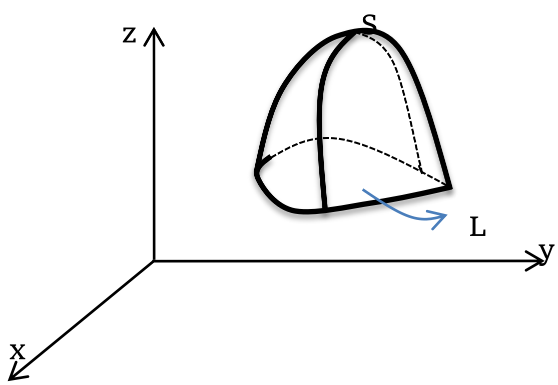
$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$$I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

$$\begin{cases} x = rCos\varphi \\ y = rSin\varphi \end{cases} \qquad D' \left| \begin{matrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \end{matrix} \right.$$

$$I = \iint_{D'} \sqrt{a^2 - r^2}\,rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\,rdr = \ldots = \frac{2\pi a^3}{3}$$

Công thức Stokes:



Mặt cong S có biên là đường cong kín L

P, Q, R xác định trên S

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dxdz + (Q'_x - P'_y)dydx$$

Chiều trên L phải phù hợp với hướng trên S theo quy tắc cái đinh ốc.

Ví dụ: ***Tính tích phân đường loại II sau:***

$$I = \int_L (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$$

L: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x + y + z = 0$ chiều trên L ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương trục Ox.

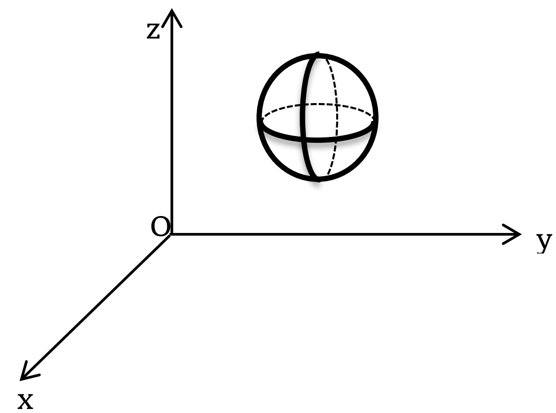
Giải:

Theo Stokes: P = y + z, Q = z + x, R = x + y

$$I = \iint_S (1-1)dydz + (1-1)dxdz + (1-1)dxdy = 0$$

Công thức **Ostrogradsky:** *Tích phân mặt loại II và tích phân 3 lớp.*

V: Miền trong Oxyz có biên là ***mặt cong kín*** *S (hướng ra ngoài)*
P, Q, R là các hàm xác định trên V



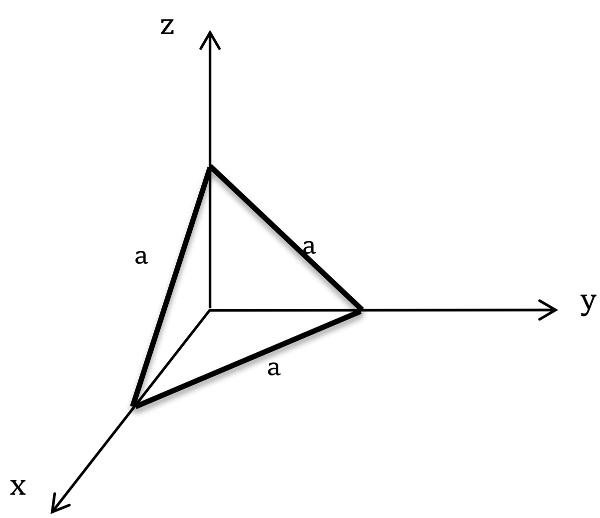
$$\Rightarrow \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right) dxdydz$$

Ví dụ:

$$I = \iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$$

S: phía bên ngoài biên tứ diện giới hạn bởi các mặt: x + y + z = a; x = 0; y = 0; z = 0.

<u>Giải:</u>



Theo Ostrogradsky: P = x, Q = y; R = z

$$\Rightarrow I = 3.\iiint\limits_V dxdydz = 3.\frac{1}{3}a.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3}{2}$$

Phương trình vi phân

Phương trình tuyến tính cấp n:

- Dạng TQ: $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = b(x)$
- Dạng chính tắc: $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$
- Dạng thuần nhất: $b(x) = 0$ hoặc $f(x) = 0$

Nghiệm của PTVP là hàm thuộc 1 trong các dạng sau:

- $\left.\begin{matrix} y = y(x) \\ x = x(y) \end{matrix}\right\}$ **: Nghiệm ở dạng tường minh**
- $\phi(x,y) = 0$**: Nghiệm ở dạng ẩn**
- $\left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}\right\}$ **: Nghiệm ở dạng tham số**

Đồ thị của nghiệm được gọi là đường tích phân

Phương trình vi phân cấp 1: $F(x,y,y') = 0$

Dạng 1: Khuyết y: $F(x,y') = 0$

TH1: $y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx$

TH2: $x = g(y')$, Đặt $y' = t$

+ $x = g(t)$
+ $dy = tdx = tg'(t)dt$

$\Rightarrow y = \int tg'(t)dt$

Vậy nghiệm: $\begin{cases} x = g(t) \\ y = \int tg'(t)dt \end{cases}$

Ví dụ: Giải ptvp sau:

a. $y' = xe^x$

b. $x = y' + y'^2$

Giải:

a. $y = \int xe^x dx = \int x.d(e^x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

b. Đặt $t = y'$

$x = t + t^2$

$dy = tdx = t(1 + 2t)dt$

$\Rightarrow y = \int t(1+2t)dt = \frac{t^2}{2} + \frac{2t^3}{3} + C$

Vậy nghiệm của pt: $\begin{cases} x = t + t^2 \\ y = \frac{t^2}{2} + \frac{2t^3}{3} + C \end{cases}$

Dạng 2: Khuyết x: F(y,y') = 0

TH1: $y' = f(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dx = \frac{dy}{f(x)} \Rightarrow x = \int \frac{dy}{f(x)}$$

TH2: $y = g(y')$, Đặt $y' = t$

$y = g(t)$

$$dx = \frac{dy}{t} = \frac{g'(t)dt}{t} \Rightarrow x = \int \frac{g'(t)dt}{t}$$

Vậy nghiệm: $\begin{cases} y = g(t) \\ x = \int \frac{g'(t)dt}{t} \end{cases}$

Ví dụ: Giải các ptvp sau:

a. $y' = y^2 + 4$

b. $y = y' + y'^3$

Giải:

a. $\frac{dy}{dx} = y^2 + 4 \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{y^2 + 4} \Leftrightarrow x = \int \frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2} + C$

b. Đặt $t = y'$

$y = t + t^3$

$$\frac{dy}{dx} = t \Rightarrow dx = \frac{dy}{t} = \frac{1 + 3t^2}{t}dt \Rightarrow x = \int \frac{1 + 3t^2}{t}dt = \ln|t| + \frac{3t^2}{2} + C$$

Vậy nghiệm của pt: $\begin{cases} x = \ln|t| + \frac{3t^2}{2} + C \\ y = t + t^3 \end{cases}$

Dạng 3: PTVP biến phân ly: f(x)dx = g(y)dy

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int g(y)dy$$

Ví dụ: Giải ptvp sau: $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$

Giải:

$(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0 \Leftrightarrow (1 + x)ydx = (y - 1)xdy$

$x = 0, y = 0$: là 2 nghiệm của pt

$x, y \neq 0$:

$$\frac{1+x}{x}dx = \frac{y-1}{y}dy \Leftrightarrow \int \frac{1+x}{x}dx = \int \frac{y-1}{y}dy \Leftrightarrow \ln|x| + x = y - \ln|y| + C$$

Vậy nghiệm của pt: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \ln|x| + x = y - \ln|y| + C \end{cases}$

Dạng 4: PTVP dạng thuần nhất: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Đặt: $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \ (u = u(x))$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(u) \Rightarrow y' = f(u)$ (1)

$y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$ (2)

(1) = (2) $\Rightarrow u'x + u = f(u)$

$\Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = f(u) - u$

$\Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{f(u) - u}$

Ví dụ: Giải ptvp sau:

$y' = \frac{x + ay}{ax - y}$

Giải:

Đặt: $y = ux$, $u = u(x)$

$y' = \frac{1 + au}{a - u}$

$y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

$\Rightarrow u'x + u = \frac{1 + au}{a - u}$

$\Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow \ln|x| = a.\arctan\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) + C$

Dạng 5: PTVP tuyến tính bậc 1:

- Dạng TQ: $a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)$ ①
- Dạng chính tắc: $y' + p(x)y = f(x)$ ②
- Dạng thuần nhất tương ứng: $y' + p(x)y = 0$ ②'

PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHÍNH TẮC

B1: Giải PTVP ②'

B2: Dùng phương pháp biến thiên hằng số để tìm nghiệm của ②

Ví dụ: Giải ptvp: $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$ ①

Bước 1: Giải ptvp: $y' - 2xy = 0$ ①'

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

$$\Leftrightarrow \ln y = x^2 + C$$

$$\Leftrightarrow y = e^{x^2 + C} = e^{x^2}e^C = e^{x^2}C$$

Vậy nghiệm của ①' là: $y = e^{x^2}C$

Bước 2: $y = e^{x^2}C;\ C = C(x)$

$$\Rightarrow y' = C'e^{x^2} + 2xe^{x^2}C$$

Thay y và y' vào ① ta được:

$$C'e^{x^2} + 2xe^{x^2}C - 2xe^{x^2}C = 2xe^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow C' = 2x$$

$$\Leftrightarrow C = \int 2xdx$$

$$\Leftrightarrow C = x^2 + K$$

Vậy nghiệm của ① là: $y = (x^2 + K)e^{x^2}$

Dạng 6: PTVP dạng Bernoulli:

$y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha}$ (1)

- $\alpha = 0,1$: ptvp tuyến tính
- $\alpha \neq 0,1$: ptvp phi tuyến

- $y = 0$: (1) trở thành ptvp thuần nhất
- $y \neq 0$: (1) $\Leftrightarrow y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = f(x)$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$

$\Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \Rightarrow y^{-\alpha}y' = \dfrac{z'}{1-\alpha}$

$$\Rightarrow \frac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = f(x)$$

$\Leftrightarrow$ **$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)f(x)$** (2)

Ví dụ: Giải ptvp: **$y' + xy = x^3y^3$** ($\alpha = 3$) (1)

$y = 0$ là nghiệm của (1)

$y \neq 0$: $y'y^{-3} + xy^{-2} = x^3$

Đặt: $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y'$

$\Rightarrow \dfrac{z'}{-2} + xz = x^3$

$\Leftrightarrow z' - 2xz = -2x^3$ (2)

Bước 1: *Giải pt: $z' - 2xz = 0$* (2)'

$\Leftrightarrow \dfrac{dz}{dx} = 2xz$

$\Leftrightarrow \dfrac{dz}{z} = 2xdx$

$\Leftrightarrow \ln z = x^2 + C$

$\Leftrightarrow z = e^{x^2}C$

Bước 2: $z = e^{x^2}C$; $C = C(x)$

$\Rightarrow z' = C'e^{x^2} + 2xe^{x^2}C$

Thay z và z' vào (2) ta được:

$C'e^{x^2} + 2xe^{x^2}C - 2xe^{x^2}C = -2x^3$

$\Rightarrow C = \displaystyle\int \frac{-2x^3dx}{e^{x^2}}$

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$

$$\Rightarrow C = \int \frac{-tdt}{e^t} = \int td(e^{-t})$$

$$\Leftrightarrow C = te^{-t} - \int e^{-t}dt$$

$$\Leftrightarrow C = te^{-t} + e^{-t} + K$$

$$\Rightarrow C = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + K$$

$$\Rightarrow z = \left(x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + K\right)e^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow z = x^2 + 1 + e^{x^2}K = y^{-2}$$

Vậy nghiệm của ① là: $\begin{cases} y = 0 \\ y^{-2} = x^2 + 1 + e^{x^2}K \end{cases}$

Dạng 7: PTVP toàn phần

- **Vi phân**: $y = f(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx$

  $w = f(x, y) \Rightarrow dw = f'_x dx + f'_y dy$
- **Phương trình vi phân toàn phần:**

  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ ①

  P, Q thỏa mãn: $P'_y = Q'_x$

Định lý: *Nếu ① là vi phân toàn phần thì* $\exists u(x, y)$ *sao cho:*

$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

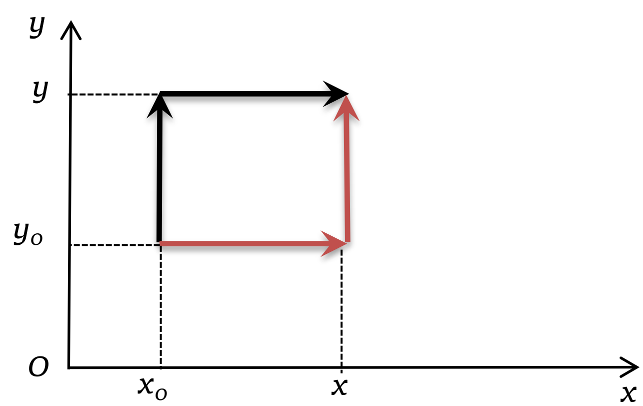
$\Rightarrow u(x, y) = C$

- **Nghiệm của ptvp toàn phần:**

$u(x, y) = C$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy$$

$$u(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx$$



Ví dụ: Giải ptvp sau: $(x + y - 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$

Giải:

$P(x, y) = x + y - 1 \Rightarrow P'_y = 1$

$Q(x, y) = x - y^2 + 3 \Rightarrow Q'_x = 1$

Vậy nghiệm có dạng: $u(x, y) = C$

Chọn $(x_0, y_0) = (1, 1)$

$$u(x,y) = \int_{0}^{x} (x-1)dx + \int_{0}^{y} (x - y^2 + 3)dy$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_0^x + \left(xy - \frac{y^3}{3} + 3y\right)\Big|_0^y = \frac{x^2}{2} - x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y$$

Vậy nghiệm: $\frac{x^2}{2} - x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C$

Phương trình vi phân cấp 2:

- Dạng TQ: $F(x,y,y',y'') = 0$
- Dạng PTVP tuyến tính cấp 2:
  - \+ Tổng quát: $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$ ①
  - \+ Chính tắc: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ ②
  - \+ Thuần nhất: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ②'

Khi $p(x) = p$; $q(x) = q$

② $\Leftrightarrow y'' + py' + qy = f(x)$

②' $\Leftrightarrow y'' + py' + qy = 0$

Phương pháp giải PTVP ②':

$$y'' + py' + qy = 0$$

Giải phương trình đặc trưng: $k^2 + pk + q = 0$ (✳)

- **TH1:** pt (✳) có 2 nghiệm phân biệt: k_1, k_2

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của ②' là: $\boxed{\overline{y} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}}$

- **TH2:** pt (✳) có nghiệm kép: $k = k_0$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của ②' là: $\boxed{\overline{y} = e^{k_0x}(C_1x + C_2)}$

- **TH3:** pt (✳) có 2 nghiệm phức: $k_1 = \alpha + \beta i$; $k_2 = \alpha - \beta i$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của ②' là: $\boxed{\overline{y} = e^{\alpha x}(C_1Cos\beta x + C_2Sin\beta x)}$

Phương pháp giải PTVP ②:

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Bước 1: Giải ptvp thuần nhất tương ứng ②'

$$y'' + py' + qy = 0$$

Giả sử nghiệm TQ của pt ②' là: $\overline{y}$

Bước 2: Tìm 1 nghiệm riêng Y của pt ②

$\Rightarrow$ **Kết luận nghiệm của pt ② là:** $y = \overline{y} + Y$

TH1: $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$; $P_n(x)$: đa thức bậc n

$$\left[\begin{array}{ll} \alpha\text{: không phải là nghiệm của pt}(*) & \rightarrow \boxed{Y = e^{\alpha x}Q_n(x)} \\ \alpha\text{:1 nghiệm đơn của pt}(*) & \rightarrow \boxed{Y = xe^{\alpha x}Q_n(x)} \\ \alpha\text{: nghiệm kép của pt }(*) & \rightarrow \boxed{Y = x^2e^{\alpha x}Q_n(x)} \end{array}\right.$$

TH2: $f(x) = P_m(x)Cos\beta x + Q_n(x)Sin\beta x$

$$\left[\begin{array}{ll} \pm i\beta\text{:không phải là nghiệm của pt }(*) & \rightarrow \boxed{Y = R_l(x)Cos\beta x + S_l(x)Sin\beta x} \\ \pm i\beta\text{:2 nghiệm của pt }(*) & \rightarrow \boxed{Y = x[R_l(x)Cos\beta x + S_l(x)Sin\beta x]} \end{array}\right.$$

$$l = max(m,n)$$

Ví dụ 1: Giải ptvp: $y'' + 3y' - 4y = x$ ① ($\alpha = 0$, $P_1(x) = x$)

Bước 1: Giải ptvp: $y'' + 3y' - 4y = 0$ ①'

$k^2 + 3k - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = -4 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-4x}$$

Bước 2: $Y = Q_1(x) = ax + b$

$\Rightarrow Y' = a$

$\Rightarrow Y'' = 0$

$\Rightarrow 3a - 4(ax + b) = x$

$\Leftrightarrow 3a - 4ax - 4b = x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 4b = 0 \\ -4a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = -\frac{3}{16} \end{cases}$

$$\Rightarrow Y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{16}$$

Vậy nghiệm của pt ① là: $y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}$

Ví dụ 2: Giải ptvp: $y'' + y = xSin2x$ ① ($\beta = 2$, $P_m(x) = 0$, $Q_n(x) = x$)

Bước 1: Giải ptvp $y'' + y = 0$ ①'

$k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i$

$$\Rightarrow \overline{y} = C_1Cosx + C_2Sinx$$

Bước 2: $Y = R_1(x)Cos2x + S_1(x)Sin2x$

$= (ax + b)Cos2x + (cx + d)Sin2x$

$\Rightarrow Y' = aCos2x - 2(ax + b)Sin2x + cSin2x + 2(cx + d)Cos2x$

$= Cos2x(a + 2cx + 2d) + Sin2x(c - 2ax - 2b)$

$\Rightarrow Y'' = 2c\cos 2x - 2(a + 2cx + 2d)\sin 2x - 2a\sin 2x + 2(c - 2ax - 2b)\cos 2x$

$= \cos 2x(4c - 4ax - 4b) - \sin 2x(4a + 4cx + 4d)$

$\Rightarrow \cos 2x(4c - 4ax - 4b) - \sin 2x(4a + 4cx + 4d) + (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x = x\sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x(4c - 3ax - 3b) + \sin 2x(-4a - 3cx - 3d) = x\sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3c = 1 \\ -4a - 3d = 0 \\ -3a = 0 \\ 4c - 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{4}{9} \\ c = -\dfrac{1}{3} \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y = -\frac{4}{9}\cos 2x - \frac{1}{3}x\sin 2x$$

Vậy nghiệm của pt ① là: $y = -\frac{4}{9}\cos 2x - \frac{1}{3}x\sin 2x + C_1\cos x + C_2\sin x$

Chuỗi

Chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_n}_{S_n} + \underbrace{u_{n+1} + \dots}_{R_n:\text{ phần dư}} \quad ①$$

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$: Tổng riêng thứ n

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \left[\begin{array}{l} S: ① \text{ hội tụ và có tổng là } S \\ \nexists;\ \pm\infty: ① \text{ phân kỳ} \end{array}\right.$$

Định lý: Nếu ① hội tụ thì $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Nhận xét: Nếu $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ thì ① phân kỳ

Ví dụ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots \quad (*)\text{: Chuỗi điều hòa}$$

$u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Giả sử (*) hội tụ:

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \ldots + \frac{1}{n+n}$$

$$\Rightarrow S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}; \lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0 \qquad (\text{Vô lý})$$

$\Rightarrow (*)$ phân kỳ

Chuỗi số dương:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad (1)$$

$$u_n > 0; \forall n \geq 1$$

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$: tăng

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} S: (1) \text{ hội tụ} \\ \infty: (1) \text{ phân kỳ} \end{cases}$$

Nhận xét: Nếu $\underbrace{S_n \text{ bị chặn trên}}_{\exists M:\, S_n \leq M,\, \forall n}$ thì (1) hội tụ

1. Định lý so sánh thứ nhất:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1), $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2) :2 chuỗi dương thỏa mãn: $u_n \leq v_n, \forall n > n_o$

Khi đó: Nếu (1) phân kỳ thì (2) phân kỳ

Nếu (2) hội tụ thì (1) hội tụ

Ví dụ: Xét sự hội tụ phân kỳ của các chuỗi:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.3^n}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}$

Giải:

a. Ta có: $u_n = \dfrac{1}{n.3^n} \leq \dfrac{1}{3^n}$

Mà: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ hội tụ $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.3^n}$ hội tụ

b. Ta có: $u_n = \dfrac{1}{2^n + 3} \leq \dfrac{1}{2^n}$

Mà: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$ hội tụ

2. Định lý so sánh thứ hai:

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ ①, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ ② :2 chuỗi dương

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\begin{cases}0\text{: ① hội tụ thì ② hội tụ}\\ +\infty\text{: ② phân kỳ thì ① phân kỳ}\\ C(C\neq 0,\ C\neq+\infty)\text{: ① và ② cùng hội tụ hoặc phân kỳ}\end{cases}$$

Nhận xét: Nếu u_n và v_n là 2 VCB tương đương thì ① và ② cùng hội tụ hoặc phân kỳ

Ví dụ: Xét sự hội tụ phân kỳ của các chuỗi sau:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}Sin\frac{\pi}{2^n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2^{n+1}}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^2+1}{2+\sqrt{n}+2^n}$

Giải:

a. $u_n=Sin\frac{\pi}{2^n}\sim\frac{\pi}{2^n}$

Mà: $\sum\frac{\pi}{2^n}=\sum\pi\left(\frac{1}{2}\right)^n$ hội tụ $\Rightarrow\sum Sin\frac{\pi}{2^n}$ hội tụ

b. $u_n=\arctan\frac{1}{2^{n+1}}\sim\frac{1}{2^{n+1}}$

Mà: $\sum\frac{1}{2^{n+1}}$ hội tụ $\Rightarrow\sum\arctan\frac{1}{2^{n+1}}$ hội tụ

c. $u_n=\frac{3^n+n^2+1}{2+\sqrt{n}+2^n}\sim\frac{3^n}{2^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n$

Mà: $\sum\left(\frac{3}{2}\right)^n$ phân kỳ $\Rightarrow\sum\frac{3^n+n^2+1}{2+\sqrt{n}+2^n}$ phân kỳ

3. Định lý so sánh thứ ba:

$f(x)$ liên tục, dương, giảm trên $[1, +\infty)$

$U_n = f(x)\ \forall n = 1, 2, \ldots$ Khi đó:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ cùng hội tụ hoặc phân kỳ}$$

Nhận xét:

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\ast)$

$\alpha < 0$: $(\ast)$ phân kỳ

$\alpha = 0$: $(\ast)$ phân kỳ

$\alpha = 1$: $(\ast)$ phân kỳ

$\alpha > 0, \alpha \neq 1$: $\alpha > 1$: $(\ast)$ hội tụ

$\alpha \leq 1$: $(\ast)$ phân kỳ

Ví dụ: Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi sau:

a. $\sum Sin\frac{1}{n^2 + n + 1}$

b. $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

c. $\sum \left(1 - Cos\frac{1}{n}\right)$

Giải:

a. $u_n = Sin\frac{1}{n^2 + n + 1} \sim \frac{1}{n^2 + n + 1} \sim \frac{1}{n^2}$

Mà: $\sum \frac{1}{n^2}$ hội tụ $\Rightarrow \sum Sin\frac{1}{n^2 + n + 1}$ hội tụ

b. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

Mà: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ $\Rightarrow \sum \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ phân kỳ

c. $u_n = \left(1 - Cos\frac{1}{n}\right) = 2.Sin^2\frac{1}{2n} \sim 2\left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{2n^2}$

Mà: $\sum \frac{1}{2n^2}$ hội tụ $\Rightarrow \sum \left(1 - Cos\frac{1}{n}\right)$ hội tụ

4. Quy tắc D'Alembert/Cauchy:

$$\sum u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots : ① \text{ dương}$$

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L \end{matrix}\right\} \to \left[\begin{matrix} L > 1: ① \text{ phân kỳ} \\ L < 1: ① \text{ hội tụ} \\ L = 1: \text{Không có kết luận} \end{matrix}\right.$$

Ví dụ: Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi sau:

a. $\sum \frac{n^2}{2^n}$

b. $\sum \frac{a^n}{n^\alpha}$ **(a>0)**

Giải:

a. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{2n^2} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sum \frac{n^2}{2^n}$ hội tụ

b. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{n^\alpha}{a^n} = \frac{a.n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \xrightarrow{n\to+\infty} a$

$a > 1 \Rightarrow \sum \frac{a^n}{n^\alpha}$ phân kỳ

$a < 1 \Rightarrow \sum \frac{a^n}{n^\alpha}$ hội tụ

$a = 1 \Rightarrow \sum \frac{a^n}{n^\alpha} = \sum \frac{1}{n^\alpha} : \begin{cases} \text{hội tụ khi } \alpha > 1 \\ \text{phân kỳ khi } \alpha \le 1 \end{cases}$

Chuỗi số hạng với dấu thay đổi:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \in \mathbf{R}$ ①

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|,\ u_n \in \mathbf{R}$ ②: dương

Định lý: Nếu ② hội tụ thì ① hội tụ.

Ví dụ: Xét hội tụ, phân kỳ của chuỗi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Sin\ n}{n^3}$$

Giải:

$$Xét: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|Sin\ n|}{n^3},\ u_n = \frac{|Sin\ n|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

$$\sum \frac{1}{n^3} \text{ hội tụ} \Rightarrow \sum \frac{Sin\ n}{n^3} \text{ hội tụ}$$

Định lý Leibnitz:

Chuỗi đan dấu: u_n : chuỗi số dương

$\pm(u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots)$

Xét chuỗi đan dấu: $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$

$$\text{Nếu } \begin{cases} u_n \text{ giảm } (u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \dots > 0) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \end{cases}$$

$$\text{Thì } \begin{cases} (1) \text{ hội tụ} \\ \text{Tổng } S \leq u_1 \end{cases}$$

Ví dụ: Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi sau:

a. $\sum \frac{(-1)^n . n^2}{2n^2 + 1}$

b. $\sum \frac{(-5)^n}{3^{2n+1}.(n+4)}$

Giải:

$$a.\ u_n = \frac{n^2}{2n^2+1} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{2} \neq 0 \quad \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n . n^2}{2n^2+1} \text{ phân kỳ}$$

$$b.\ u_n = \frac{5^n}{3^{2n+1}(n+4)} = \frac{5^n}{9^n.3(n+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n \frac{1}{n+4} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \sum \frac{(-5)^n}{3^{2n+1}.(n+4)} \text{ hội tụ}$$

Dãy hàm:

Cho dãy hàm: $\left(u_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}, \; x \in I \subset \mathbb{R}$

1. *Hội tụ điểm:*

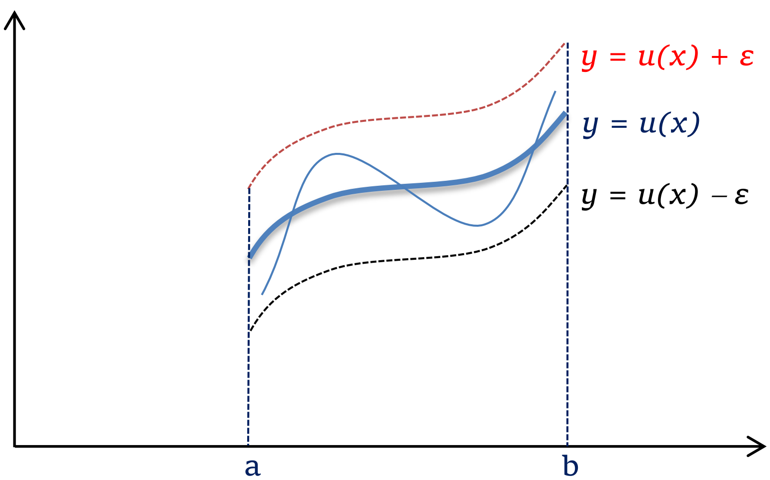
   $u_n(x)$ hội tụ điểm đến $u(x)$

   $u_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} u(x)$ *trên I*

2. *Hội tụ đều:*

   $u_n(x) \xRightarrow{n \to +\infty} u(x)$ *trên I*

Mô tả:



$u(x) - \varepsilon < u_n(x) < u(x) + \varepsilon \quad , \forall n \in [a,b], \; \forall n \geq n_o$

$\Leftrightarrow -\varepsilon < u_n(x) - u(x) < \varepsilon \quad , \forall n \in [a,b], \; \forall n \geq n_o$

$\Leftrightarrow |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon \quad , \forall n \in [a,b], \; \forall n \geq n_o$

Chuỗi hàm:

Cho dãy hàm: $\left(u_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}, \; x \in I \subset \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \underbrace{u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)}_{S_n(x):\ \text{Tổng riêng thứ } n} + \underbrace{u_{n+1}(x) + \ldots}_{R_n(x):\ \text{Phần dư thứ } n} \quad (1)$$

$S_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} u(x)$ *trên I: Chuỗi (1) hội tụ điểm trên I*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u(x)$$

$u_n(x) \xRightarrow{n \to +\infty} u(x)$ *trên I: Chuỗi (1) hội tụ đều trên I*

Định lý:

Xét chuỗi hàm: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ① *thỏa mãn:*

$$\left.\begin{array}{l} |u_n(x)| \le a_n, \quad \forall x \in I, \forall n \ge 1 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hội tụ} \end{array}\right\} \text{① hội tụ đều}$$

Ví dụ: Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sin } nx}{n^2 + x^2} \qquad x \in R$$

Giải:

$$|u_n(x)| = \frac{|\text{Sin } nx|}{n^2 + x^2} \le \frac{1}{n^2 + x^2} \le \frac{1}{n^2} = a_n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Mà: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *hội tụ*

Theo định lý $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sin } nx}{n^2 + x^2}$ *hội tụ*

Chuỗi lũy thừa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots \quad ①$$

$a_0, a_1, a_2, \dots$: *Hệ số của chuỗi* ①

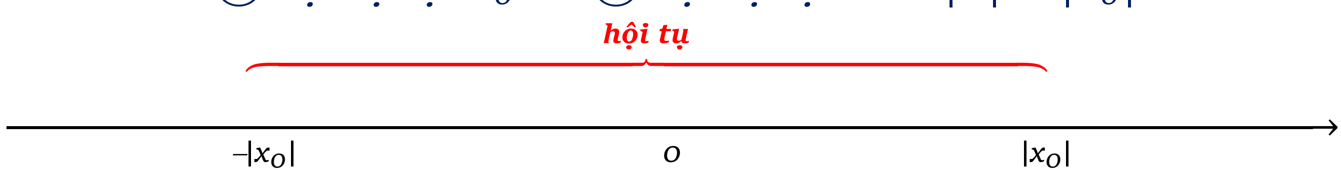
$a_n x^n$: *Số hạng tổng quát của chuỗi* ①

Miền hội tụ: $\mathbf{D} = \{x \in \mathbb{R}, \quad \sum a_n x^n \text{ hội tụ}\}$

$x = 0 \Rightarrow$ ① *hội tụ* $\Rightarrow 0 \in D$

Định lý Abel:

Nếu chuỗi ① *hội tụ tại* x_0 *thì* ① *hội tụ tại* $\forall x$: $|x| < |x_0|$



Nếu chuỗi ① phân kỳ tại x_o thì ① phân kỳ tại $\forall x$: $|x| > |x_o|$

$$\overbrace{\qquad\qquad}^{\text{phân kỳ}} \qquad -|x_o| \qquad\qquad 0 \qquad\qquad |x_o| \qquad \overbrace{\qquad\qquad}^{\text{phân kỳ}}$$

$$\overbrace{\qquad\qquad}^{\text{phân kỳ}}\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\text{hội tụ}}\overbrace{\qquad\qquad}^{\text{phân kỳ}}$$

$$\underbrace{-R}_{\text{chưa xác định}} \qquad\qquad 0 \qquad\qquad \underbrace{R}_{\text{chưa xác định}}$$

R: bán kính hội tụ

Miền hội tụ của ①: $D = \left[\begin{array}{l}(-R,\ R)\\ [-R,\ R)\\ (-R,\ R]\\ [-R,\ R]\end{array}\right.$

Cách tìm bán kính hội tụ:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \rho\end{array}\right\} \to \left[\begin{array}{l}\rho = 0 \Rightarrow R = +\infty \Rightarrow D = \mathbb{R}\\ \rho = +\infty \Rightarrow R = 0 \Rightarrow D = \{0\}\\ \rho \neq 0,\ \rho \neq +\infty \Rightarrow R = \dfrac{1}{\rho}\ (\text{Kiểm tra thêm tại } x = \pm R)\end{array}\right.$$

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{(2n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!} = \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e\\ \lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0\end{array}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{n+1}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}=\frac{n}{n+1}\xrightarrow{n\to+\infty}1$$

$\Rightarrow R = 1$

Xét tại x = R = 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad (*)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n-1}\right)^{-n-1}\right]^{\frac{n}{-n-1}}=\frac{1}{e}\neq 0$$

$\Rightarrow (*)$ *phân kỳ*

Xét tại x = -R = -1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n(-1)^n \qquad (**)$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}|a_n|\neq 0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}a_n\neq 0}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n(-1)^n\right|=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}\neq 0$$

$\Rightarrow (**)$ *phân kỳ*

Vậy miền hội tụ: D = $(-1, 1)$

Khai triển chuỗi lũy thừa của một hàm:

Xét f(x) xác định trên (a, b), $x_o \in (a, b)$:

a **x** **x_o** **b**

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_o)^n=a_o+a_1(x-x_o)+\ldots+a_n(x-x_o)^n+\ldots$$

$x = x_o$: $\underline{f(x_o) = a_o}$

- $f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_o) + \ldots + na_n(x - x_o)^{n-1} + \ldots$

$x = x_o$: $f'(x_o) = a_1 = \frac{f'(x_o)}{1!}$

- $f''(x) = 2a_2 + 2.3a_3(x - x_o) + \ldots + n(n - 1)(x - x_o)^{n-2} + \ldots$

$x = x_o$: $\frac{f''(x_o)}{2} = a_2 = \frac{f''(x_o)}{2!}$

$$\Rightarrow a_n=\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}$$

Khai triển Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Xét $x_0 = 0$: $\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots}$

Khai triển Maclaurin

Một số khai triển Maclaurin quan trọng:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (R = +\infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \quad (R = 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \quad (R = 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \quad (R = 1)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad (R = 1)$$

$$\text{Sin}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad (R = +\infty)$$

$$\text{Cos}x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots (\ R = +\infty)$$

Chuỗi lượng giác:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \text{Cos}\ nx + b_n \text{Sin}\ nx)$$

$$= \frac{a_0}{2} + (a_1\text{Cos}x + b_1\text{Sin}x) + (a_2\text{Cos}2x + b_2\text{Sin}2x) + \ldots + (a_n\text{Cos}\ nx + b_n\text{Sin}\ nx) + \ldots$$

Tổng riêng thứ n:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \text{Cos}\ kx + b_k \text{Sin}\ kx)$$

Một số bài tập quan trọng:

1. $f(x)$ là hàm chẵn:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

2. $f(x)$ là hàm lẻ:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

3. $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $2k$:

$$\int_{-k}^{k} f(x)dx = \int_{0}^{2k} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2k} f(x)dx$$

4. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} Sin(mx)dx = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$

5. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} Cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ 2\pi, & m = 0 \end{cases}$

6. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} Cos(nx)Sin(mx)dx = 0, \quad \forall m,n \in \mathbb{Z}$

7. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} Cos(mx)Cos(nx) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 2\pi, & m = n = 0 \end{cases}$

8. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} Sin(mx)Sin(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 0, & m = n = 0 \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$

Tổng riêng thứ n:

$$\boldsymbol{S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k Coskx + b_k Sinkx)}$$

$\longrightarrow$ Hàm tuần hoàn chu kỳ 2π

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$

$\Rightarrow S(x)$: tuần hoàn chu kỳ 2π

Chuỗi Fourier: $\longrightarrow$ $S(x)$: tuần hoàn chu kỳ 2π

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 Cosx + b_1 Sinx) + \ldots + (a_n Cosnx + b_n Sinnx) + \ldots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Cosnxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Sinnxdx$$

- **Điều kiện để f(x) khai triển được thành chuỗi lượng giác:**

Định lý: *f(x) thỏa mãn:*

+ *f(x) tuần hoàn chu kỳ 2π*
+ *f(x), f'(x): liên tục từng khúc trên $[-\pi, \pi]$*

Khi đó: f(x) được khai triển thành chuỗi Fourier cụ thể:

$$\text{Chuỗi Fourier} = S(x) = \begin{cases} f(x): x \text{ là điểm liên tục} \\ \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]: x \text{ là điểm gián đoạn} \end{cases}$$

Nhận xét: *f(x) liên tục tại a $\Leftrightarrow f(a) = f(a^+) = f(a^-)$*

Hệ quả: *f(x) thỏa mãn:*

+ *f(x) tuần hoàn chu kỳ 2π*
+ *f(x) liên tục trên $[-\pi, \pi]$*
+ *f'(x) liên tục từng khúc trên $[-\pi, \pi]$*

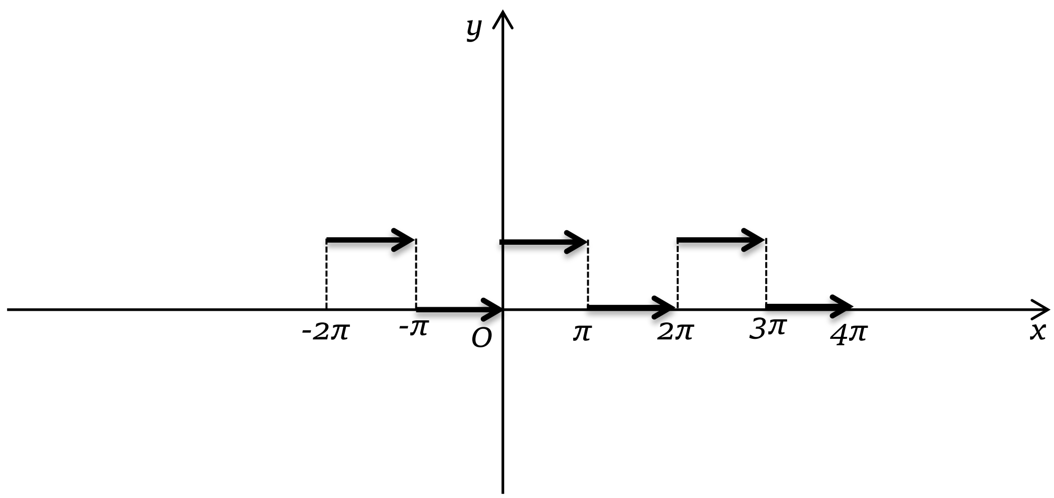
Khi đó: Chuỗi Fourier = f(x)

Ví dụ: Cho f(x) là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π, xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -\pi \le x < 0 \\ 1 & \text{nếu } 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Viết khai triển Fourier của f(x)

Giải:



Các điểm gián đoạn: $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Xét $x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Cosnx.dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} Cosnx.dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Sinnx.dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} Sinnx.dx = -\frac{1}{n\pi}(Cosn\pi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{nếu n chẵn} \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{nếu n lẻ} \end{cases}$$

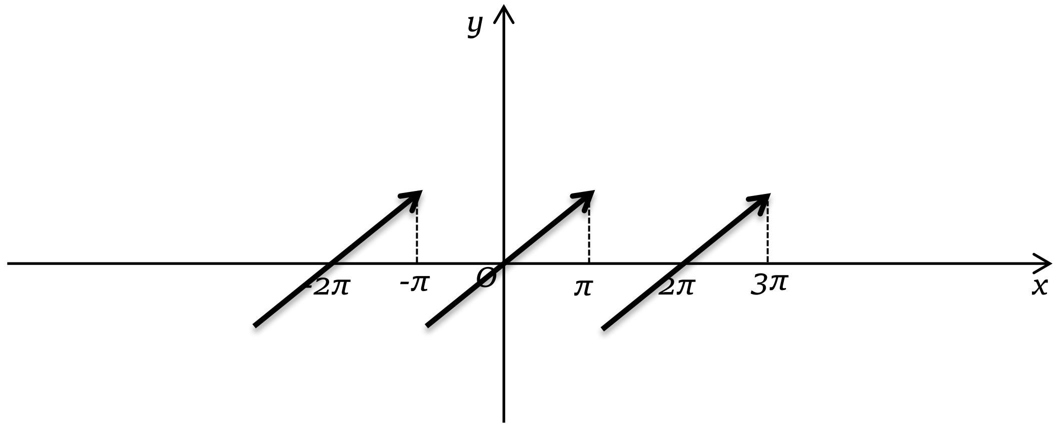
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}Sinx + \frac{2}{3\pi}Sin3x + \ldots + \frac{2}{(2n-1)\pi}Sin(2n-1)x + \ldots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sin(2n-1)x}{2n-1}$$

Xét $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right) = \frac{1}{2}$$

Ví dụ: Cho f(x) tuần hoàn chu kỳ 2π xác định bởi: f(x) = x trên [-π, π]
Viết khai triển Fourier của f(x)
Giải:



Các điểm gián đoạn: $x = (2n - 1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Xét $x \neq (2n - 1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Cosnx.dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xCosnx.dx = 0 \text{ (do xCosnx là hàm lẻ)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Sinnx.dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xSinx.dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xSinx.dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xd\left(-\frac{1}{n}Cosnx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}Cosnx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^1 Cosnxdx\right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}Cosnx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}Sinnx\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= -\frac{2}{n}Cos n\pi = \begin{cases} -\dfrac{2}{n} & \text{nếu n chẵn} \\ \dfrac{2}{n} & \text{nếu n lẻ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{1}Sinx - \frac{2}{2}Sin2x + \frac{2}{3}Sin3x - \frac{2}{4}Sin4x + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2}{n}Sinnx + \ldots$$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}Sinnx}{n}$$

Xét $x = (2n - 1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right) = 0$$

Chú ý: *f(x) tuần hoàn chu kỳ 2k*

Đặt: $F(x) = f\left(\frac{k}{\pi}x\right)$

$\Rightarrow$ *F(x) tuần hoàn chu kỳ 2π*

Thật vậy:

$$F(x) = f\left(\frac{k}{\pi}x\right)$$

$$\Leftrightarrow F(x + 2\pi) = f\left(\frac{k}{\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{k}{\pi}x + 2k\right) = f\left(\frac{k}{\pi}x\right) = F(x)$$

$$\mathbf{F(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n Cosnx + b_n Sinnx)} \qquad (*)$$

Thay $x = \frac{\pi}{k}x$ *vào* $(*)$

$$F\left(\frac{\pi}{k}x\right) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n Cos\left(\frac{n\pi}{k}x\right) + b_n Sin\left(\frac{n\pi}{k}x\right)\right)$$

$$\mathbf{a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{k}{\pi}x\right)dx}$$

$$\mathbf{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{k}{\pi}x\right)Cosnxdx}$$

$$\mathbf{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{k}{\pi}x\right)Sinnxdx}$$