CHƯƠNG 2: TÍCH PHÂN BỘI

§1. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

1. Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên $[a,b]\times[c,d]$.

$f(x,y)$ khả tích theo x trên $[a,b]$ với mọi $y\in[c,d]$.

Tích phân $I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ gọi là tích phân phụ thuộc tham số y.

§1. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

Định lí: Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$

thì $I(y)$ là hàm số của y liên tục trên $[c,d]$.

Định lí: Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$

thì $$\int_c^d I(y)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

nghĩa là: $$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Định lí: Nếu

* $f(x,y)$ liên tục theo biến x trên $[a,b]$ với mọi $y \in [c,d]$

* $f'_y(x,y)$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$

thì
$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$$

hay
$$\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)' = \int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Ví dụ: Tính $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (0 < a < b)$

Giải:

Có $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$

Hàm số $f(x, y) = x^y$ liên tục trên $[0,1] \times [a,b]$

$$I = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy$$

$$=\int_a^b \left(\frac{1}{y+1} x^{y+1} \Big|_0^1 \right) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy$$

$$= \ln|y+1| \Big|_a^b = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Ví dụ:

Tính $\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad (y \neq 0)$

Giải:

Xét hàm số $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

$f(x,y)$ liên tục theo x trên $[0,1]$ với mọi $y \neq 0.$

$f'_y = \frac{-2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ liên tục trên $[0,1]\times[c,d]$

$\forall [c,d]$ mà $0 \notin [c,d].$

Có $I(y)=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{1}{y}\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^1=\frac{1}{y}\arctan\frac{1}{y}.$

$$I'(y)=-\frac{1}{y^2}\arctan\frac{1}{y}-\frac{1}{y\left(1+y^2\right)}$$

Mặt khác:

$$I'(y)=\int_0^1 f_y'\,dx=\int_0^1\frac{-2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx=-2y\int_0^1\frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Vậy $\int_0^1\frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{1}{2y^3}\arctan\frac{1}{y}+\frac{1}{2y^2\left(1+y^2\right)}.$

Định lí:

Xét tích phân phụ thuộc tham số $I(y)=\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$

trong đó $f(x,y)$ xác định trên $[a,b]\times[c,d]$

$$a\le a(y)\le b$$

$$a\le b(y)\le b \qquad \forall y\in[c,d]$$

Khi đó: Nếu $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$ và

các hàm $a(y),b(y)$ liên tục trên $[c,d]$ thì $I(y)$ liên tục

trên $[c,d]$.

2. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Định nghĩa:

Tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ được gọi là hội tụ đều đối với $y \in [c,d]$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 : \forall b > B \Rightarrow \left| \int_b^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon \quad \forall y \in [c,d]$$

(Số B chỉ phụ thuộc ε, không phụ thuộc y)

Nhận xét:

Nếu $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ hội tụ đều đối với $y \in [c,d]$ thì

$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ hội tụ với $\forall y \in [c,d]$.

Định lí:

Nếu với $\forall(x,y)\in[a,+\infty)\times\left[c,d\right],$

$$\left|f(x,y)\right|\le g(x)$$ và $$\int_a^{+\infty} g(x)dx$$ hội tụ

thì $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ hội tụ đều đối với $y\in\left[c,d\right].$

Định lí: Nếu

* $f(x,y)$ liên tục trên $[a,+\infty)\times[c,d]$

* $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ hội tụ đều đối với $y\in[c,d]$

thì $I(y)$ là hàm số liên tục trên $[c,d]$

và

$$\int_c^d I(y)dy=\int_c^d\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy=\int_a^{+\infty}\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

Định lí: Nếu

* $f(x,y)$ liên tục theo x trên $[a,+\infty)$ với $\forall y \in [c,d]$

* $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ hội tụ đều đối với $y \in [c,d]$

* $f'_y(x,y)$ liên tục trên $[a,+\infty) \times [c,d]$

* $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ hội tụ đều đối với $y \in [c,d]$

thì

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx.$$

Chú ý:

Các định lí trên được phát biểu tương tự cho trường hợp hàm dưới dấu tích phân có cực điểm.

§1. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

Ví dụ: Tính $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \qquad (0 < a < b)$

Giải:

Nhận xét: $\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$

Xét hàm số $f(x, y) = e^{-xy}$

$f(x, y)$ liên tục trên $[0, +\infty) \times [a, b]$

$$\frac{1}{e^{xy}} \le \frac{1}{e^{ax}}$$ với $\forall(x,y) \in [0,+\infty) \times [a,b]$

và $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{ax}} = -\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{a}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{ax}} - 1\right) = \frac{1}{a}$ hội tụ

nên $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{xy}}$ hội tụ đều đối với $y \in [a,b]$.

Ta có:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b e^{-xy} dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx \right) dy$$

$$= \int_a^b \frac{1}{y} dy = \ln y \Big|_a^b = \ln \frac{b}{a}.$$

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

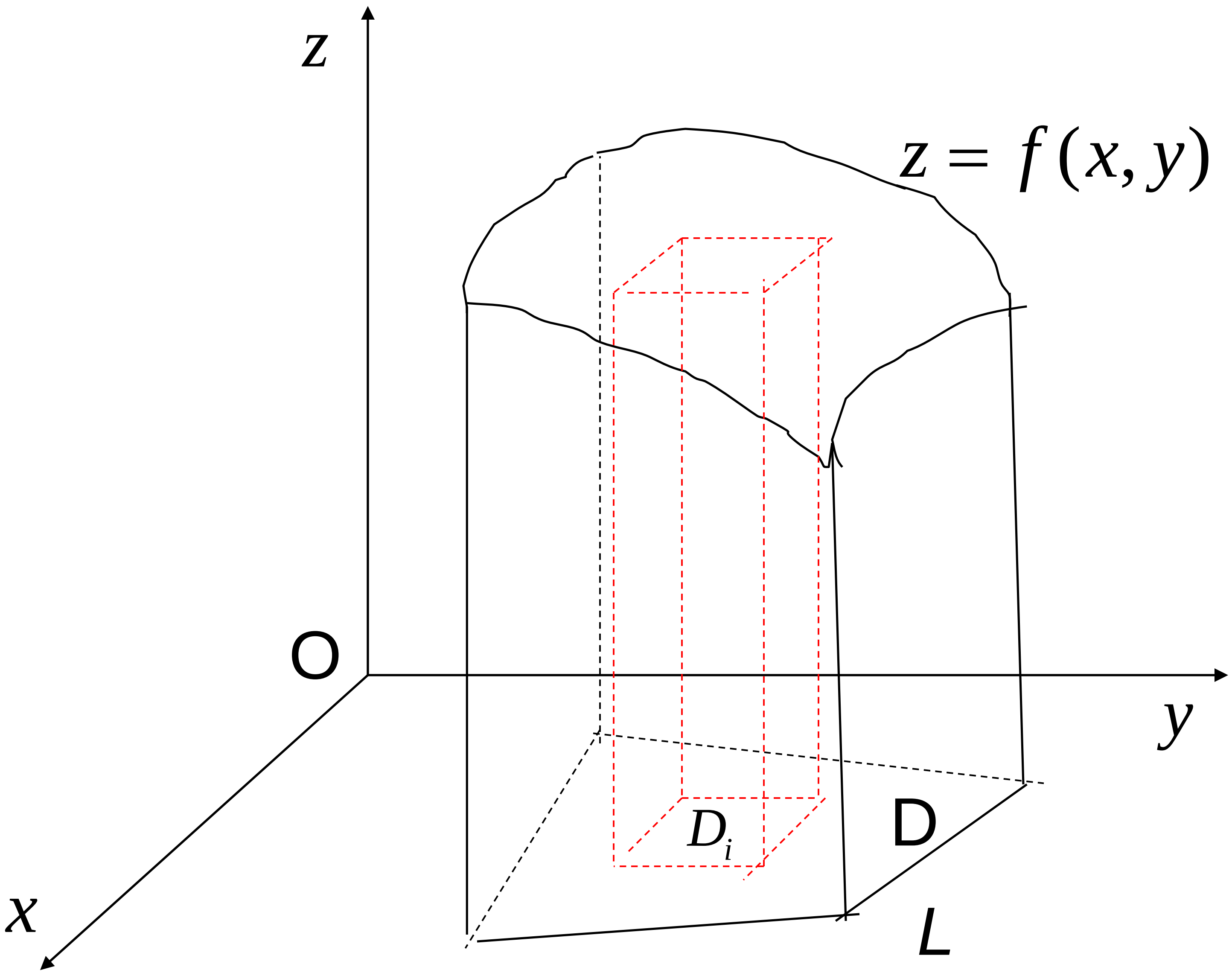
1. Khái niệm tích phân hai lớp

a) Bài toán tính thể tích vật thể hình trụ

Cho $f(x, y)$ là hàm số liên tục, không âm, xác định trên miền D đóng, bị chặn, có biên là đường kín *L*.

Tính thể tích vật thể hình trụ có đáy dưới là miền D, mặt trên có PT $z = f(x, y)$, các đường sinh tựa trên *L* và song song với oz.

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP



§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Chia D thành n miền $D_1, D_2, ..., D_n$ tùy ý.

Gọi $s(D_i)$ là diện tích miền D_i

V_i là vật thể hình trụ giới hạn bởi D_i và mặt $z = f(x, y)$

Đặt $d_i = \max\left\{d(M, N) / \ M, N \in D_i\right\}$

d_i được gọi là đường kính của miền D_i

Trên mỗi miền D_i chọn một điểm $M_i(x_i, y_i)$ tùy ý

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Khi các miền D_i rất nhỏ, có thể coi mỗi hình trụ V_i

có thể tích là: $f(x_i, y_i).s(D_i)$

Như vậy, thể tích vật thể cần tìm là:

$$V = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).s(D_i)$$

b) Định nghĩa tích phân hai lớp

Cho $f(x, y)$ là hàm số xác định trên miền đóng, bị chặn D.

Chia D thành n miền $D_1, D_2, ..., D_n$ tùy ý.

Gọi $s(D_i)$ là diện tích miền D_i

Đặt $d_i = \max\{d(M, N) / \ M, N \in D_i\}$

Trên mỗi miền D_i chọn một điểm $M_i(x_i, y_i)$ tùy ý

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Nếu giới hạn $\lim\limits_{\max d_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).s(D_i)$ tồn tại hữu hạn,

không phụ thuộc phép chia D, phép chọn các điểm

$(x_i, y_i) \in D_i$ thì giới hạn này được gọi là tích phân

hai lớp của hàm $f(x, y)$ trên miền D.

Kí hiệu: $\iint\limits_D f(x, y)dS$ hay $\iint\limits_D f(x, y)dxdy.$

Khi đó ta nói f khả tích trên D.

c) Nhận xét:

Nếu $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn D

thì f khả tích trên D.

d) Tính chất của tích phân hai lớp

Giả sử các tích phân sau tồn tại, ta có:

$1^0)\ \iint\limits_D dxdy = s(D)$ (Diện tích miền D)

$$2^0)\ \iint\limits_D \left[f(x,y) \pm g(x,y) \right] dxdy =$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$$

$3^0)$ $$\iint_D \lambda f(x,y)\,dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dxdy \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$4^0)$ Nếu D được chia thành 2 miền D_1, D_2 không dẫm lên nhau thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

5^0) Nếu $f(x,y) \le g(x,y)$ với $\forall (x,y) \in D$

thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

6^0) Nếu $m \le f(x,y) \le M$ với $\forall (x,y) \in D$

thì $mS \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le MS$

2. Cách tính tích phân hai lớp

* Tính $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (f liên tục trên D)

a) Nếu D là miền hình chữ nhật

$$D = \{(x,y) / a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \overset{k/h}{=} \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \overset{k/h}{=} \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

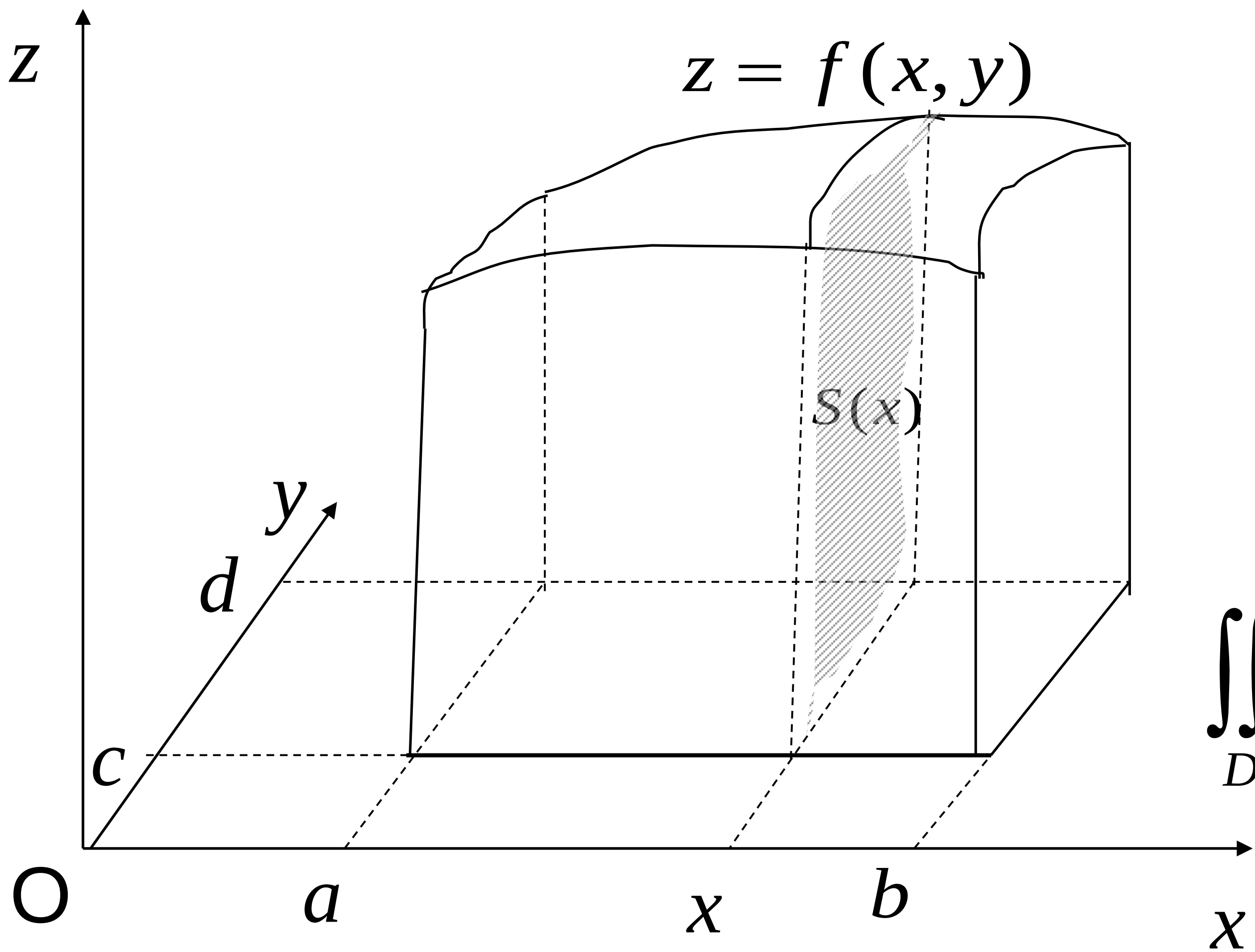
Chứng minh:

Giả sử $f(x,y)$ không âm trên D.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = V$$

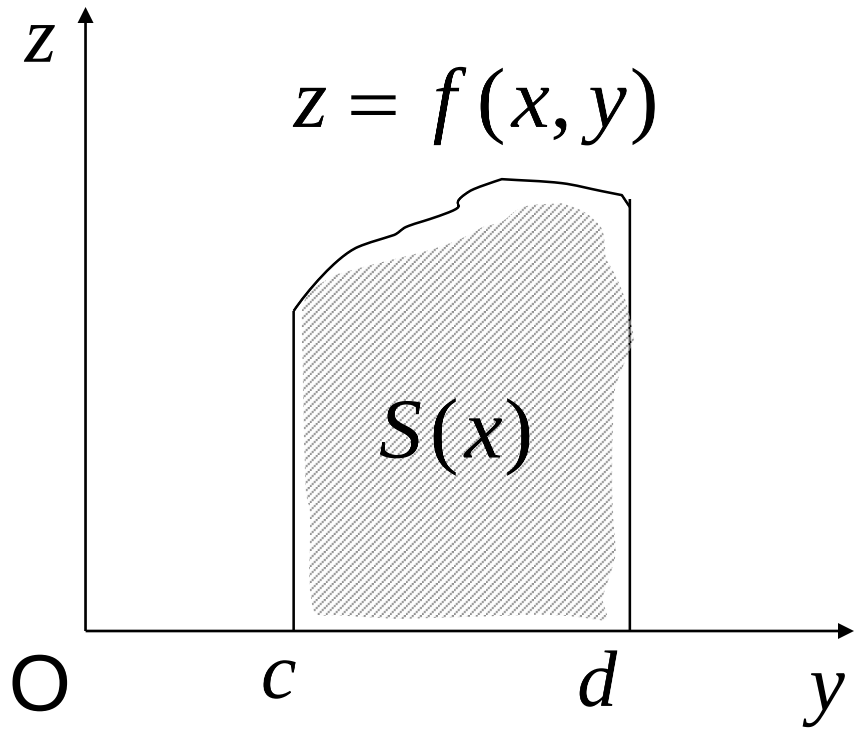
V là thể tích hình trụ đứng có đáy là miền D,

mặt trên có PT $z = f(x,y)$.



$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b S(x)dx$$

$S(x)$ là diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x.



Với mỗi x cố định, ta có:

$$S(x)=\int_c^d f(x,y)dy$$

Vậy

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Công thức vẫn đúng khi f âm trên *D*.

*** Nhận xét:**

Khi $f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$ thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b f_1(x)dx.\int_c^d f_2(y)dy$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$

$$D = \{(x, y) / 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$$

Giải:

$$I = \int_1^2 dx \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{1}{x+y} \Bigg|_0^1 \right) dx = \quad \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \quad \ln \frac{x}{x+1} \Bigg|_1^2 = \ln \frac{4}{3}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D xy\,dxdy$

D xác định bởi: $1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1.$

Giải:

$$I = \left(\int_1^2 x\,dx\right).\left(\int_0^1 y\,dy\right) = \left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2\right).\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1\right) =$$

$$= \frac{3}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

b) Nếu miền D xác định bởi:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

trong đó $y_1(x), \ y_2(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a,b]$

thì $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

$$\overset{k/h}{=} \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

**** Tương tự, nếu miền D xác định bởi:***

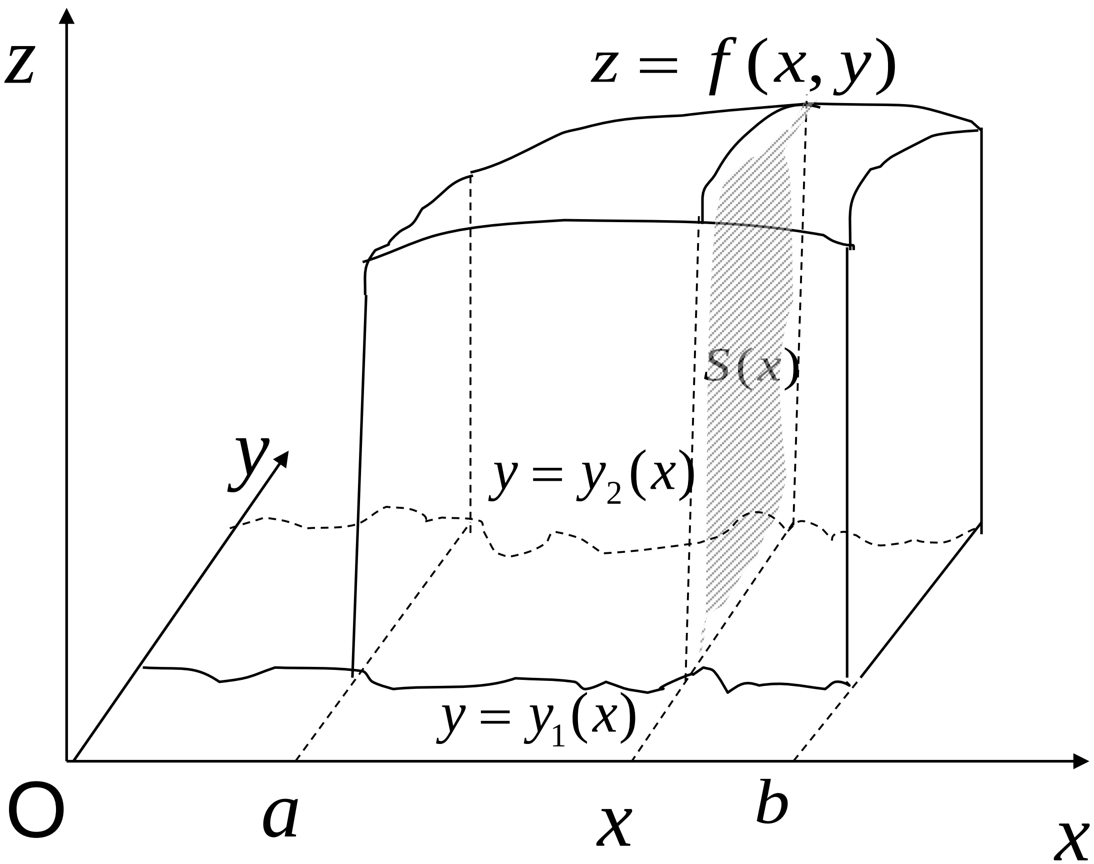
$$\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

trong đó $x_1(y),\ x_2(y)$ là các hàm số liên tục trên $[c,d]$

thì $$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

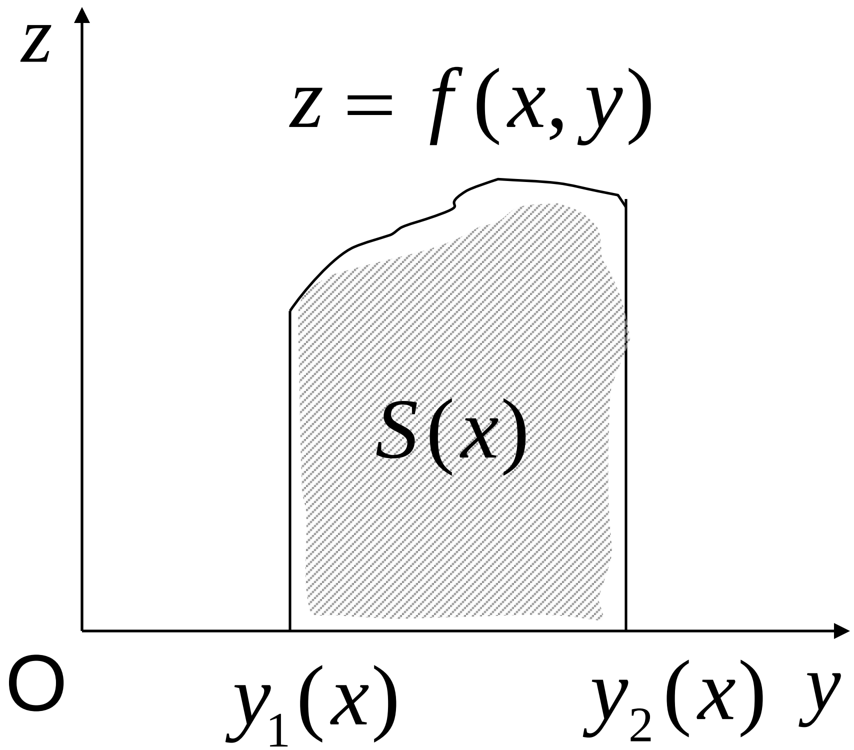
$$\overset{k/h}{=} \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

Chứng minh: (Tương tự khi D là miền hình chữ nhật)



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b S(x)dx$$

$S(x)$ là diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x.



Với mỗi x cố định, ta có:

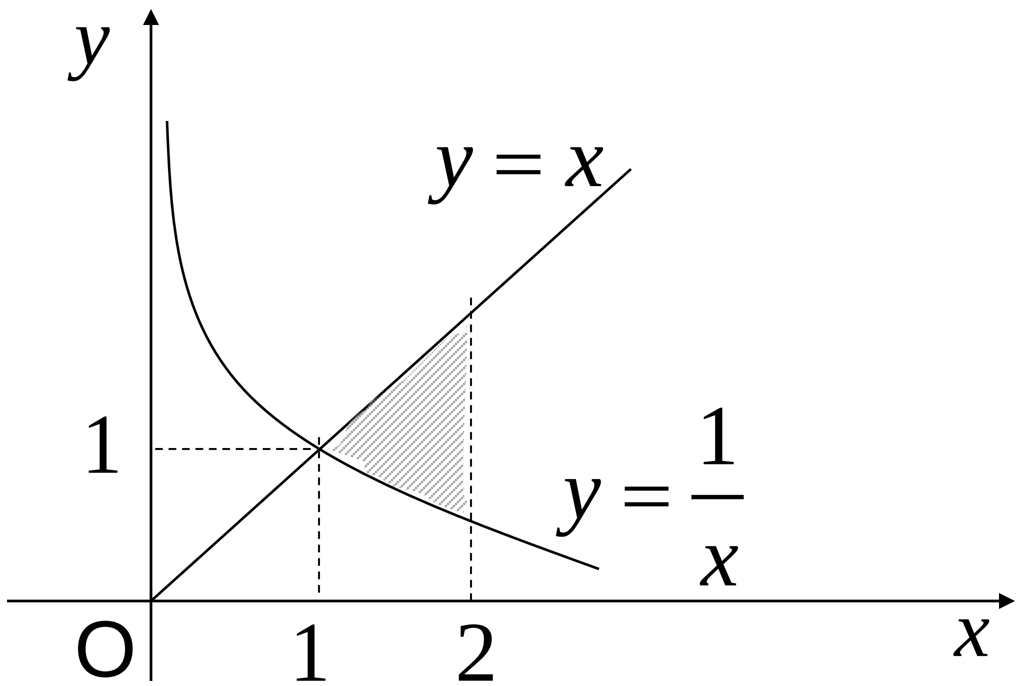
$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

Vậy $$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Ví dụ: Tính tích phân sau: $I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$

D giới hạn bởi các đường $y = x,\ y = \frac{1}{x},\ x = 2.$

Giải:



§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Miền D xác định bởi: $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{x} \le y \le x \end{cases}$

$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left(-\frac{x^2}{y} \Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x} \right) dx =$$

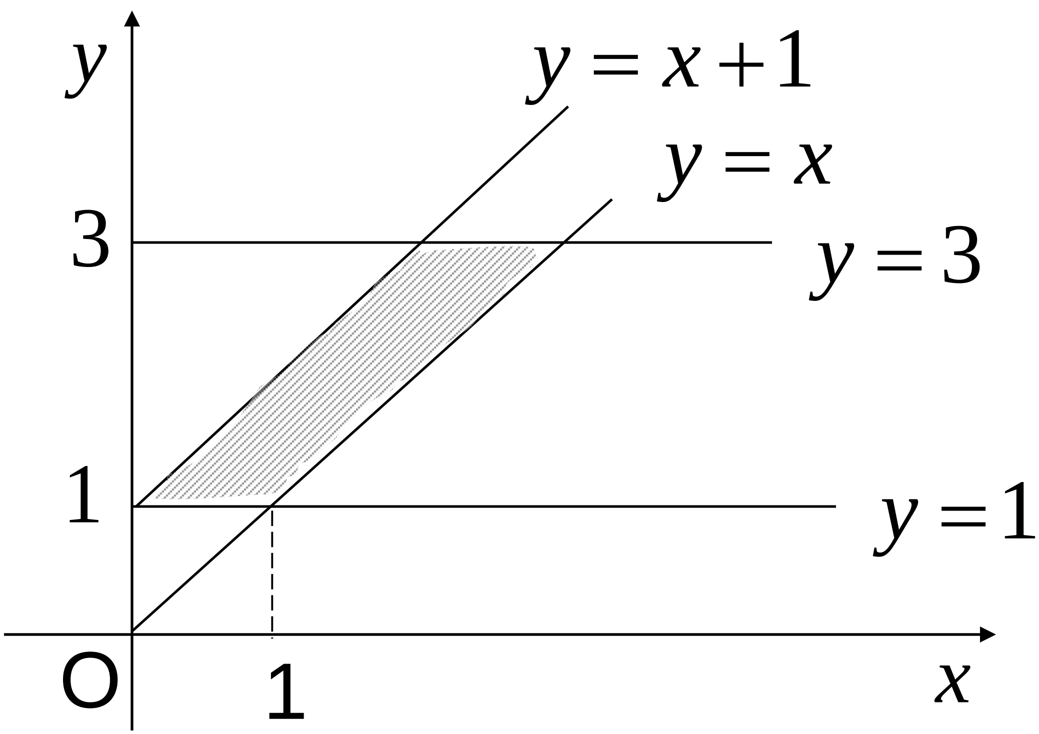
$$= \int_1^2 \left(x^3 - x \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D xy\,dxdy$

D là miền giới hạn bởi các đường

$$y = x,\ \ y = x+1,\ y = 1,\ y = 3.$$

Giải:



Miền D xác định bởi: $\begin{cases} 1 \le y \le 3 \\ y-1 \le x \le y \end{cases}$

$$I = \int_1^3 dy \int_{y-1}^{y} xy\,dx = \int_1^3 \left(\int_{y-1}^{y} xydx \right) dy = \int_1^3 \left(\frac{x^2}{2} y \Big|_{y-1}^{y} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 \left[y^3 - y(y-1)^2 \right] dy = \frac{1}{2} \int_1^3 \left[2y^2 - y \right] dy$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^3 = \frac{20}{3}.$$

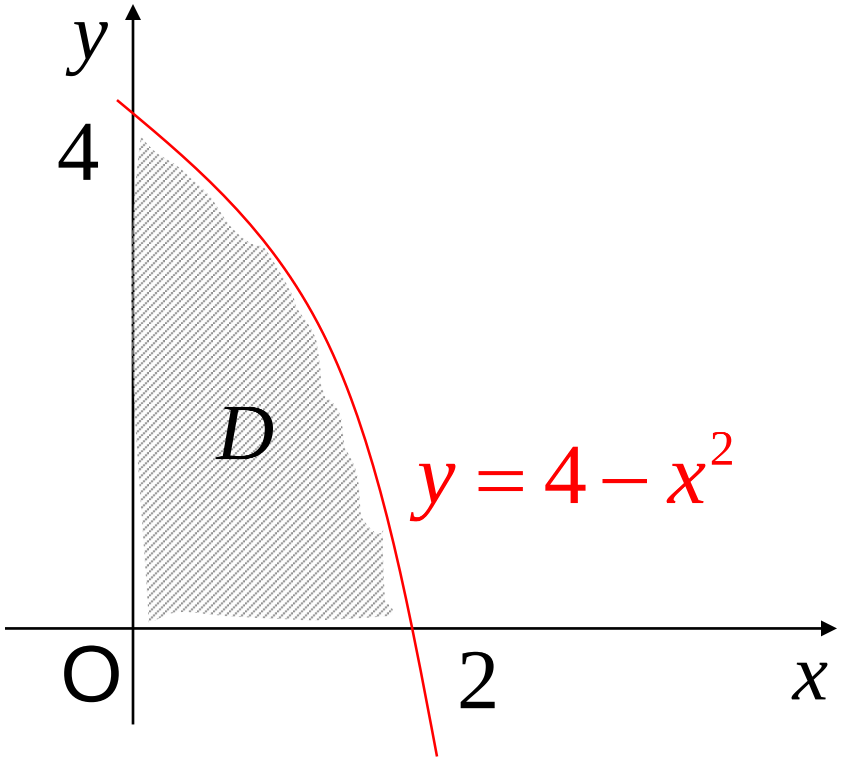
Ví dụ:

Tính tích phân sau: $I = \int_0^2 dx \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy$

Giải:

$$I = \iint_D \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy$$

D xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 - x^2 \end{cases}$



Hay D xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ 0 \le x \le \sqrt{4-y} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dx \quad = \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} \frac{e^{2y}}{4-y} \Bigg|_0^{\sqrt{4-y}} \right) dy$$

$$= \int_0^4 \frac{4-y}{2} \cdot \frac{e^{2y}}{4-y} dy \quad = \frac{1}{2} \int_0^4 e^{2y} dy = \frac{1}{4} e^{2y} \Bigg|_0^4 = \frac{1}{4}\left(e^8 - 1\right).$$

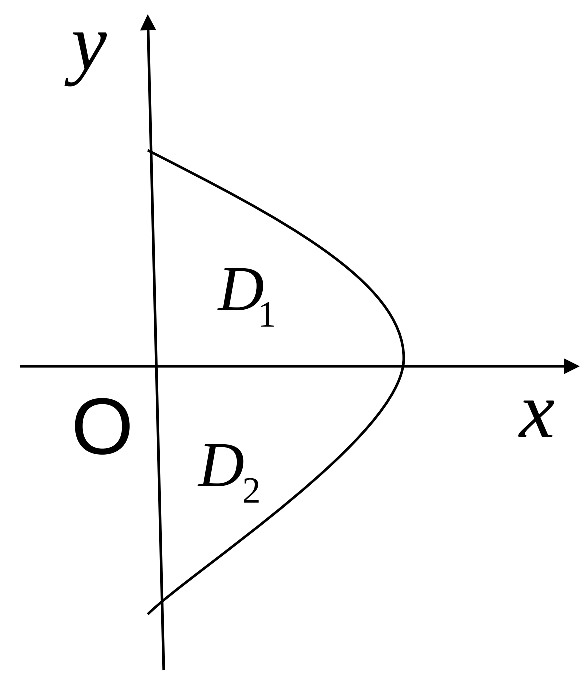
*** Nhận xét:** *Giả sử miền D có tính đối xứng qua trục Ox.*

+ Nếu biểu thức dưới dấu tích phân chẵn đối với y

(nghĩa là $f(x,y)=f(x,-y)$ với mọi $(x,y)\in D$)

thì $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$

$= 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$



(D_1, D_2 lần lượt là nửa trên, nửa dưới của *D*)

+ Nếu biểu thức dưới dấu tích phân lẻ đối với y

(nghĩa là $f(x,y) = -f(x,-y)$ với mọi $(x,y) \in D$)

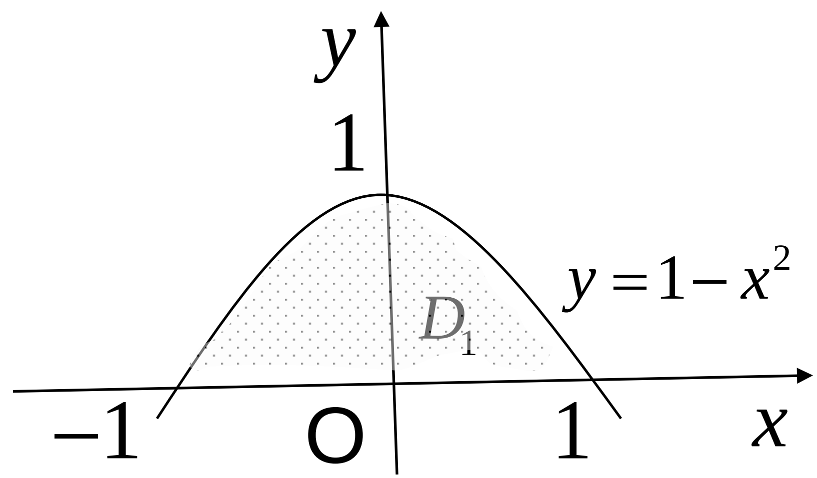
thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0.$

* Nhận xét trên được phát biểu tương tự trong trường hợp miền D có tính đối xứng qua trục Oy.

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D \left(\dfrac{x}{\cos y + 2} - y \right) x^2 dxdy$

D là miền giới hạn bởi các đường: $y = 0,\ y = -x^2 + 1.$

Giải:



§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

$$I = \iint\limits_D \frac{x^3}{\cos y + 2} dxdy - \iint\limits_D yx^2 dxdy$$

Do miền D có tính đối xứng qua trục Oy và biểu thức

$\dfrac{x^3}{\cos y + 2}$ lẻ đối với x nên $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x^3}{\cos y + 2} dxdy = 0.$

Tương tự, biểu thức yx^2 chẵn đối với x nên

$$\iint\limits_D yx^2 dxdy = 2\iint\limits_{D_1} yx^2 dxdy.$$

D_1 xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x^2 \end{cases}$

$$I = -2\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} yx^2 dy = -2\int_0^1 \left(\left. \frac{x^2 y^2}{2} \right|_0^{1-x^2} \right) dx$$

$$= -\int_0^1 x^2 (1 - x^2)^2 dx = -\int_0^1 \left(x^6 - 2x^4 + x^2 \right) dx$$

$$= -\left. \left(\frac{x^7}{7} - 2\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right) \right|_0^1 = -\frac{1}{7} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{8}{105}.$$

3. Công thức đổi biến số trong tích phân hai lớp

a) Công thức đổi biến số

Xét $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (f liên tục trên D)

Thực hiện phép đổi biến $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ sao cho:

* $x(u,v),\ y(u,v)$ là các hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên miền $D' \subset mp(Ouv)$

* Tương ứng $(u,v) \mapsto (x(u,v),\ y(u,v))$ là một song ánh từ D' lên D.

* Định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{tại} \quad \forall (u,v) \in D'$$

Khi đó:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J\right|dudv$$

Chú thích: Công thức trên vẫn đúng khi $J = 0$ tại một số điểm $(u,v) \in D'$.

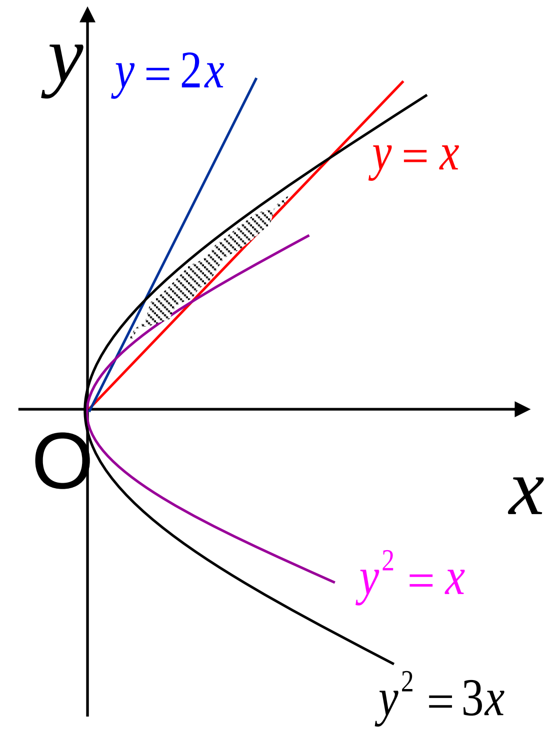
Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D xy\, dxdy$

D giới hạn bởi các đường $y^2 = x,\ y^2 = 3x,\ y = x,\ y = 2x.$

Giải:

Đặt $\dfrac{y^2}{x} = u,\ \dfrac{y}{x} = v$

Có $x = \dfrac{u}{v^2},\ y = \dfrac{u}{v}$



Miền D tương ứng với miền D' *giới hạn bởi các đường* $u = 1, u = 3,\ v = 1, v = 2$

hay D' xác định bởi: $\begin{cases} 1 \le u \le 3 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v^2} & \dfrac{-2u}{v^3} \\ \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{v^4} > 0 \quad \text{tại } \forall (u,v) \in D'.$$

$$I = \int_1^3 du \int_1^2 \frac{u}{v^2}.\frac{u}{v}.\frac{u}{v^4}\, dv = \left(\int_1^3 u^3 du \right).\left(\int_1^2 \frac{1}{v^7} dv \right) =$$

$$\left(\frac{u^4}{4} \Bigg|_1^3 \right) \cdot \left(\frac{-1}{6v^6} \Bigg|_1^2 \right) = \frac{105}{32}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D x^3\, dxdy$

D là miền giới hạn bởi các đường:

$$y = \frac{1}{x},\ y = \frac{2}{x},\ y = x^2,\ y = \frac{x^2}{2}.$$

Giải:

Đặt $u = xy,\ v = \dfrac{y}{x^2}$

Có $$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{2y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{3y}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{x^2}{3y} = \frac{1}{3v},$$

Có $\quad x^3 = \dfrac{u}{v}$

Miền D tương ứng với: $\begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ \dfrac{1}{2} \le v \le 1 \end{cases}$

$$I = \int_1^2 du \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{u}{v}.\frac{1}{3v} dv \quad = \frac{1}{3}\left(\int_1^2 u du\right).\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{v^2} dv\right) = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}.1 = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$

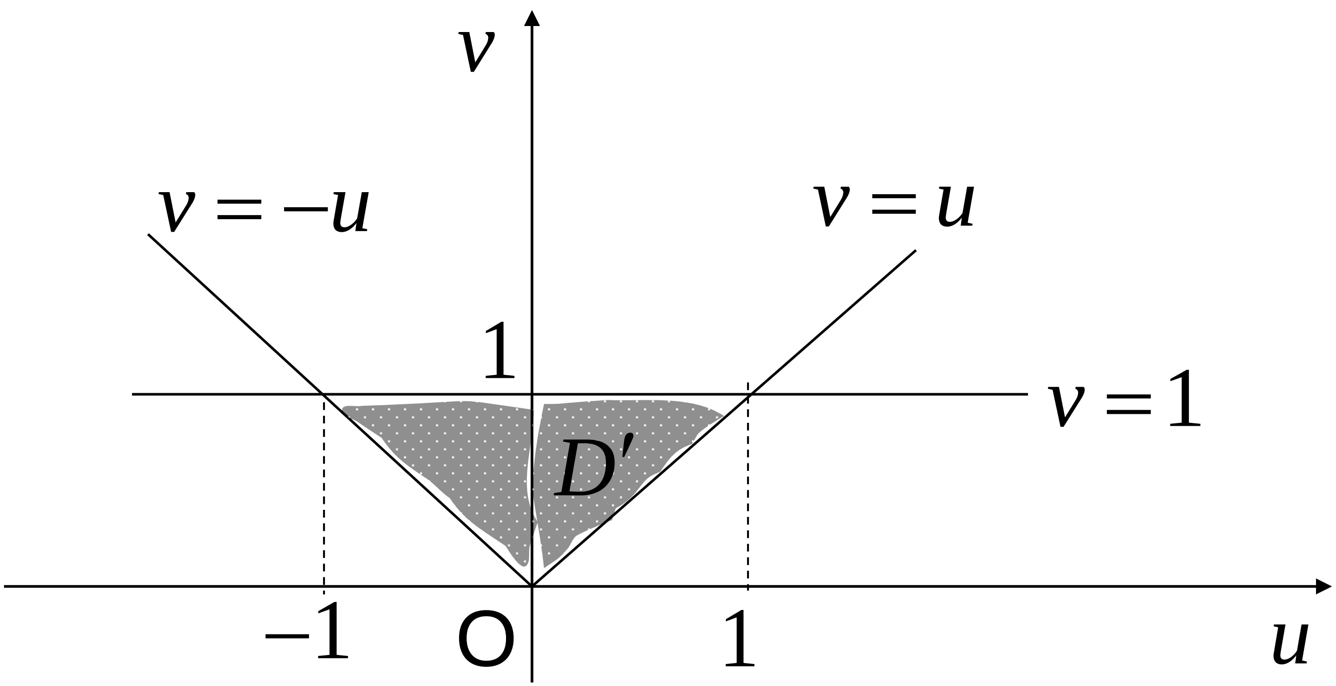
D là miền giới hạn bởi các đường $x = 0, y = 0, x + y = 1.$

Giải:

Đặt $x - y = u,\ x + y = v.$

$$\Rightarrow x = \frac{u+v}{2},\ \ y = \frac{v-u}{2}$$

Miền D' giới hạn bởi các đường $u + v = 0,\ v - u = 0,\ v = 1$



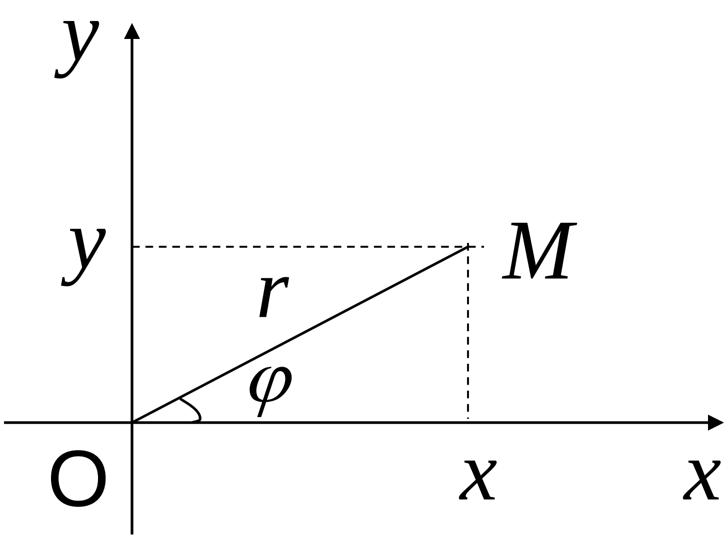
D' xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le v \le 1 \\ -v \le u \le v \end{cases}$

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

$$I=\iint\limits_{D'} e^{\frac{u}{v}}.\frac{1}{2}\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}du=\frac{1}{2}\int_0^1\left(ve^{\frac{u}{v}}\Big|_{-v}^{v}\right)dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(ve-\frac{v}{e}\right)dv=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\frac{v^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

b) Tính tích phân hai lớp trong hệ tọa độ cực



* Tọa độ cực của điểm M

là (r,φ) *trong đó:*

$$\varphi = (\mathrm{O}x, \overrightarrow{OM}),\ r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$$

Trong cả hệ tọa độ cực: $0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ r \ge 0.$

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

* Giả sử M có tọa độ (x, y) trong hệ trục Oxy

Ta có: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \geq 0.$$

* *Công thức tính tích phân trong tọa độ cực là:*

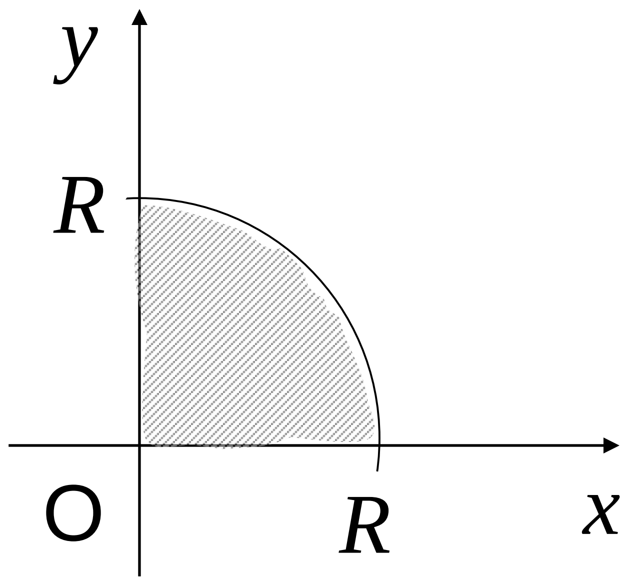
$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,drd\varphi.$$

Nhận xét:

Thường đổi biến sang tọa độ cực khi miền lấy tích phân là hình tròn hoặc một phần hình tròn.

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D x dx dy$

D là một phần tư hình tròn tâm O, bán kính R, nằm trong góc phần tư thứ nhất.



Giải:

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Miền D tương ứng với: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le R \end{cases}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r\cos\varphi . r dr = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \right) . \left(\int_0^R r^2 dr \right) =$$

$$= \left(\sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) . \frac{R^3}{3} = \frac{R^3}{3} .$$

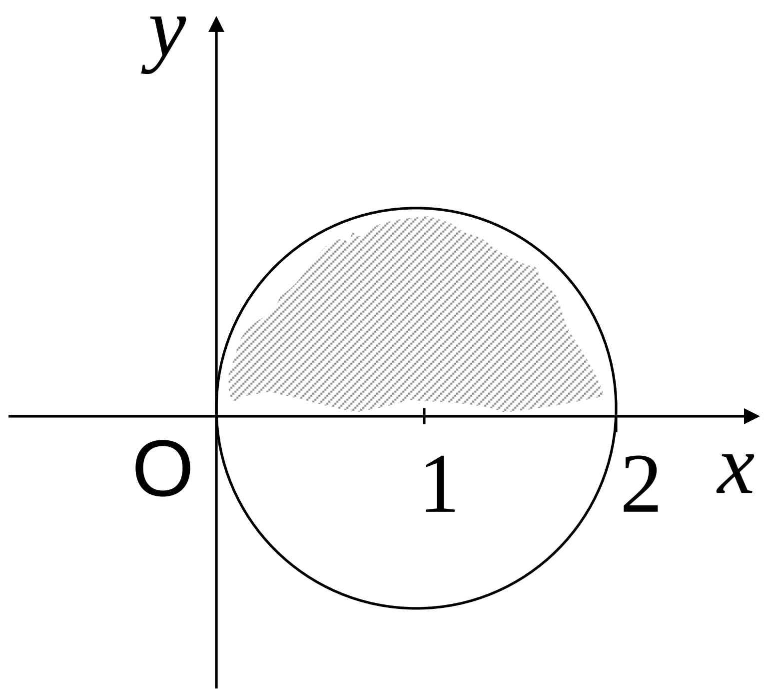
Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D y\,dxdy$

D là miền xác định bởi:

$$x^2 + y^2 \le 2x,\ y \ge 0.$$

Giải:

$* \ x^2 + y^2 \le 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \le 1$

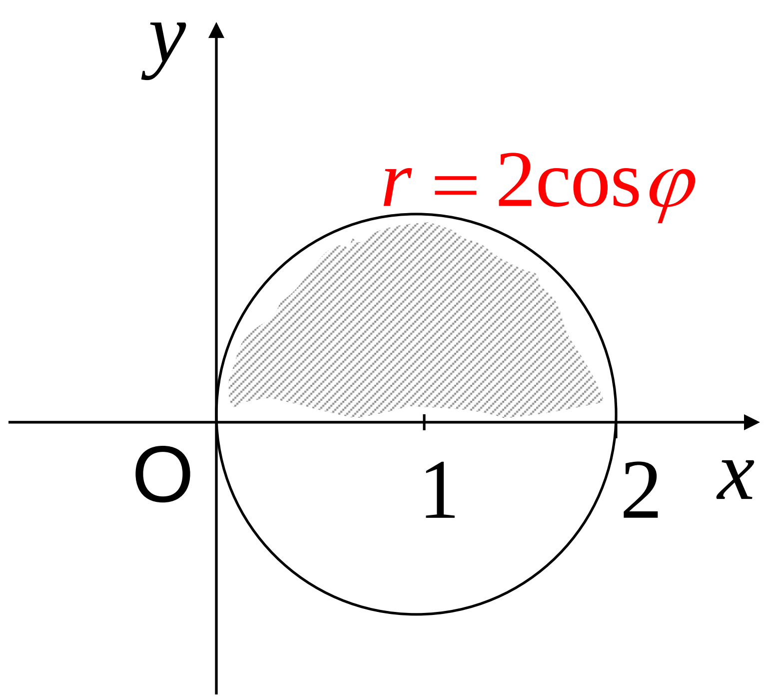


Đổi biến sang tọa độ cực

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Miền D tương ứng với:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$$



$* x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow r^2 = 2r\cos\varphi$

$\Leftrightarrow r = 2\cos\varphi$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\sin\varphi . r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\sin\varphi \Big|_0^{2\cos\varphi} \right) d\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin\varphi d\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\frac{\cos^4\varphi}{4}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D y\,dx\,dy$

D là miền xác định bởi: $x^2 + y^2 \le 2x,\ y \ge 0.$

Giải:

Cách 2: $*\ x^2 + y^2 \le 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \le 1$

Đặt $\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r\sin\varphi . r dr = \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \right) . \left(\int_0^1 r^2 dr \right) =$$

$$= \left(\cos\varphi \Big|_{\pi}^{0} \right) . \left(\frac{r^3}{3} \Bigg|_0^1 \right) = \frac{2}{3}$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$

D là miền xác định bởi:

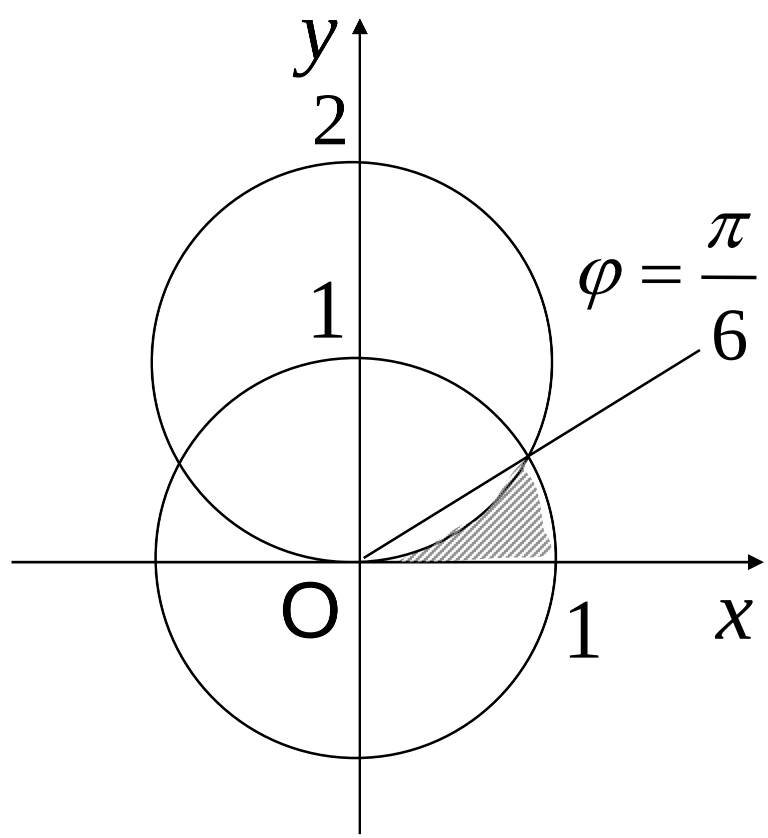
$$x^2 + y^2 - 2y \geq 0,\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Giải:

$$* \ x^2 + y^2 - 2y \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 \geq 1$$

$$* x^2 + y^2 - 2y = x^2 + y^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

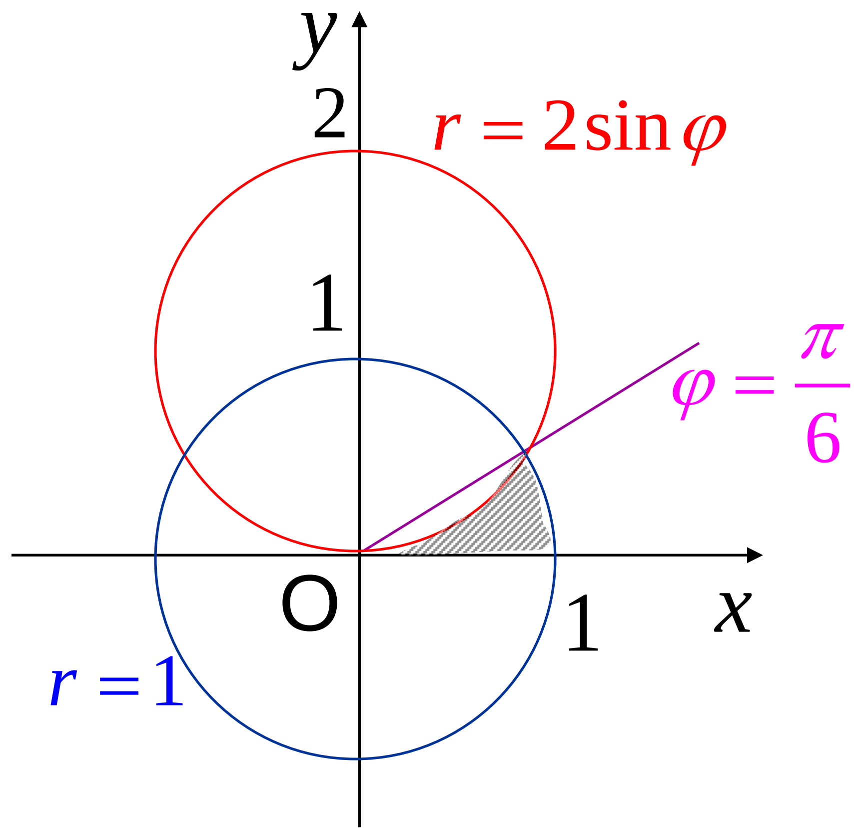


Đổi biến sang tọa độ cực

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Miền D tương ứng với:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6} \\ 2\sin\varphi \le r \le 1 \end{cases}$$



$$* x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow r^2 = 2r\sin\varphi$$
$$\Leftrightarrow r = 2\sin\varphi$$

$$* x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow r = 1.$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_{2\sin\varphi}^{1}r^2dr=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\left.\frac{r^3}{3}\right|_{2\sin\varphi}^{1}\right)d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{3}\sin^3\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\cos^2\varphi\right)d(\cos\varphi)$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{\pi}{6}+\frac{8}{3}\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\pi}{18}+\frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{24}-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{18}+\sqrt{3}-\frac{16}{9}.$$

4. Ứng dụng của tích phân hai lớp

1^0) Tính thể tích vật thể hình trụ

Cho vật thể hình trụ có đáy là miền $D \subset mp(\mathrm{O}xy)$, mặt trên có phương trình $z = f(x, y)$ ($f(x, y) \geq 0$, liên tục trên D), đường sinh tựa trên biên của D, song song với Oz.

Thể tích vật thể là: $V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$

$2^0)$ Tính diện tích hình phẳng

Diện tích hình phẳng xác định trên miền D là:

$$S = \iint_D dx\,dy$$

3^0) Tính diện tích mặt cong

Cho mặt cong S có phương trình $z = f(x, y)$

$f(x, y)$ liên tục, có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên D.

(D là hình chiếu của S lên mặt phẳng xOy)

Diện tích mặt S là:

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy$$

4^0) Ứng dụng trong cơ học

Cho bản phẳng xác định trên miền D.

Giả sử khối lượng riêng của bản phẳng tại (x, y) là $\rho(x, y)$.

Khi đó:

* Khối lượng bản phẳng là: $m = \iint\limits_D \rho(x, y)dxdy$

* Trọng tâm của bản phẳng là: (x_0, y_0)

trong đó:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x, y)dxdy$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x, y)dxdy$$

* Mô men quán tính của bản phẳng đối với các trục Ox, Oy và gốc tọa độ O lần lượt là:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x,y)dxdy$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x,y)dxdy$$

$$I_O = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\rho(x,y)dxdy$$

Ví dụ 1:

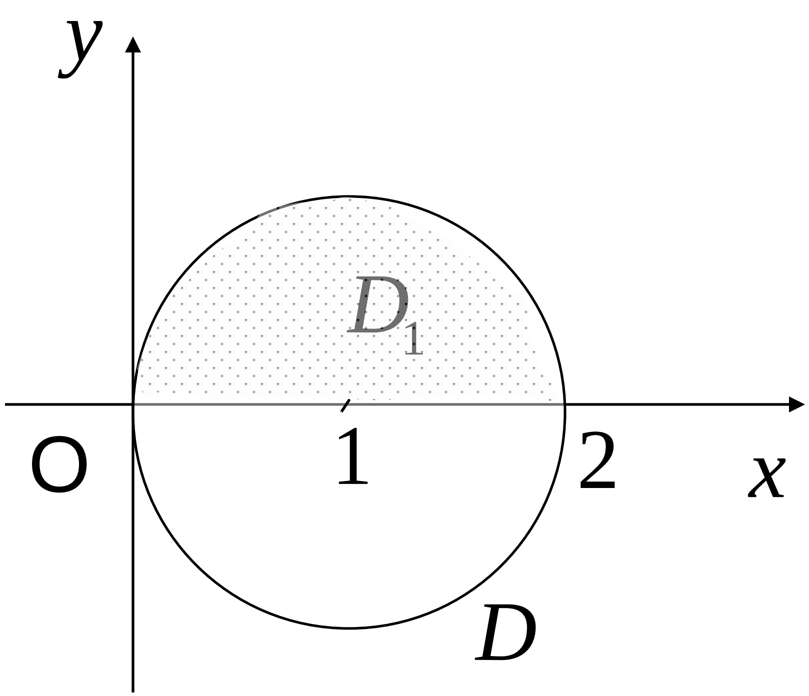
Tính thể tích của phần hình trụ $x^2 + y^2 = 2x$ nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4.$

Giải:

Phần hình trụ có tính đối xứng qua mặt phẳng $z = 0.$

Thể tích phần hình trụ là: $V = 2\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdy$

D là hình tròn $x^2 + y^2 \le 2x.$



Do miền D có tính đối xứng qua trục Ox và biểu thức dưới dấu tích phân chẵn đối với y

nên $V = 4\iint\limits_{D_1} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdy$

D_1 xác định bởi: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2x \\ y \ge 0 \end{cases}$

Đổi biến sang tọa độ cực

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \sqrt{4 - r^2}.r\,dr$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (4 - r^2)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)d(4 - r^2)$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.(4-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2\cos\varphi} \right) d\varphi$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(8\sin^3\varphi - 8 \right) d\varphi$$

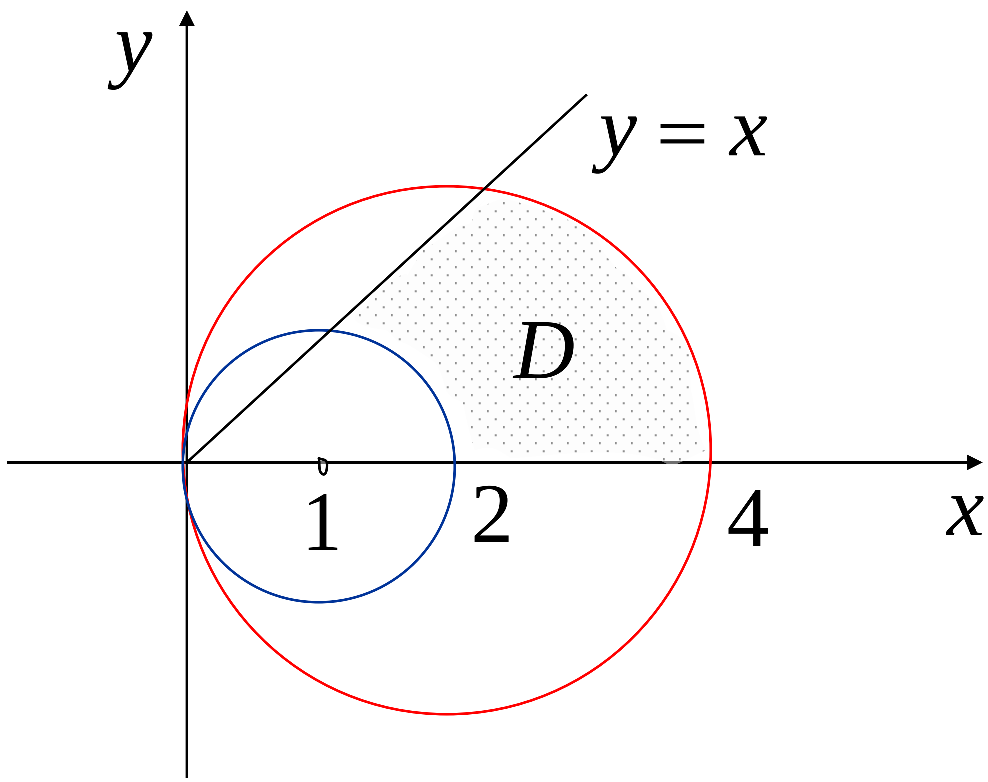
$$= -\frac{32}{3}\left(\frac{2!!}{3!!} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{32}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \quad \text{(đvtt)}$$

Ví dụ:

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1, \qquad (x-2)^2 + y^2 = 4, \qquad y = x, \quad y = 0.$$

Giải:



Diện tích $S = \iint\limits_D dxdy$

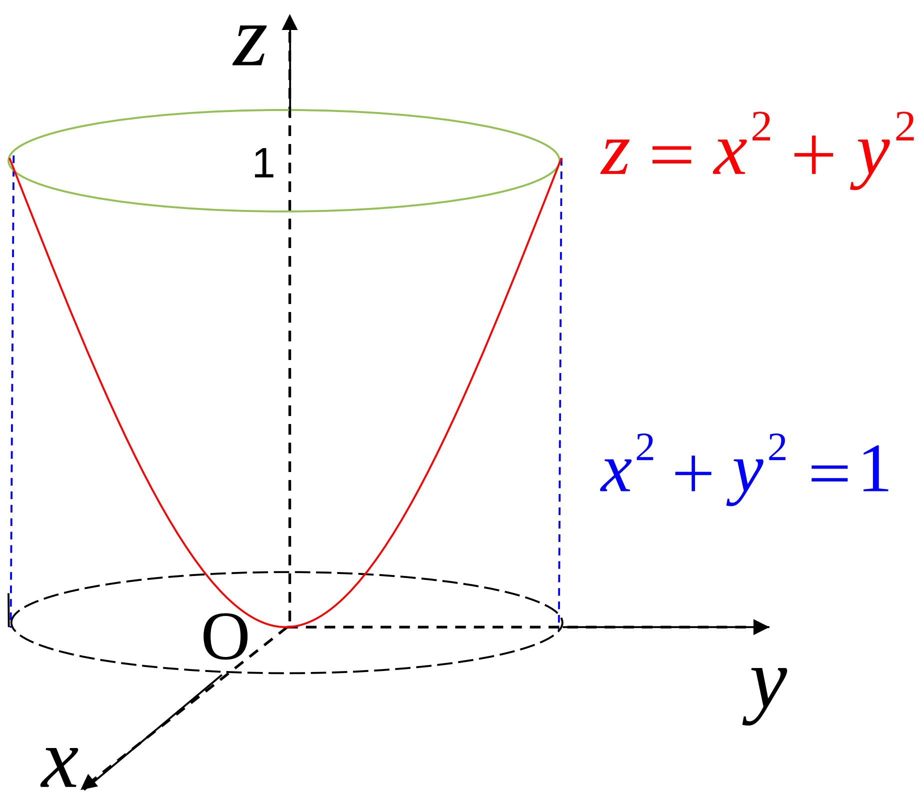
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi \end{cases}$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^2}{2} \Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \right) d\varphi = 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi d\varphi$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\varphi)d\varphi = 3\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$$ (đvdt)

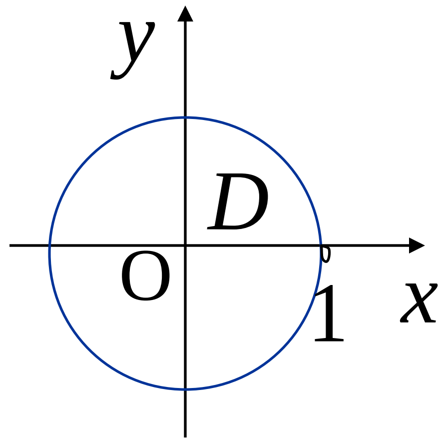
Ví dụ: Tính diện tích phần mặt $z = x^2 + y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1.$

Giải:



Hình chiếu của phần mặt $z = x^2 + y^2$ lên mặt phẳng xOy

là miền $D: x^2 + y^2 \le 1.$



Diện tích:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}.rdr = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right).\left(\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\ rdr\right)$$

$$= 2\pi.\frac{1}{8}\int_0^1 (1+4r^2)^{\frac{1}{2}} d(1+4r^2)$$

$$= \frac{\pi}{4}.\frac{2}{3}.(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \qquad = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) \quad \text{(đvdt)}$$

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

1. Khái niệm tích phân ba lớp

a) Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trên miền đóng, bị chặn V.

Chia V thành n miền nhỏ $V_1, V_2, ..., V_n$ tùy ý.

Gọi ΔV_i là thể tích miền V_i

d_i là đường kính miền V_i

Trên mỗi miền V_i chọn một điểm (x_i, y_i, z_i) tùy ý $(i = \overline{1,n})$

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

Nếu giới hạn $\lim\limits_{\max d_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i).\Delta V_i$ tồn tại hữu hạn,

không phụ thuộc phép chia V, phép chọn các điểm

$(x_i, y_i, z_i) \in V_i$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân

ba lớp của hàm $f(x, y, z)$ trên miền V.

Kí hiệu: $\iiint\limits_V f(x, y, z)dV$ hoặc $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz.$

Khi đó ta nói f khả tích trên V.

b) Nhận xét:

Nếu $f(x,y,z)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn V

thì f khả tích trên V.

c) Tính chất

Tích phân ba lớp có các tính chất tương tự tích phân hai lớp.

Chẳng hạn:

$1^0)\quad \iiint\limits_V dxdydz = v$ (v là thể tích miền V)

$$2^0)\ \iiint\limits_V \left[f(x,y,z) \pm g(x,y,z) \right] dxdydz =$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \pm \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz$$

…

2) Cách tính tích phân ba lớp

a) Công thức

Cho $f(x,y,z)$ là hàm số liên tục trên V.

Giả sử miền V xác định bởi:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$$

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

trong đó $y_1(x),\ y_2(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$

$z_1(x,y), z_2(x,y)$ là các hàm số liên tục trên D

(D là hình chiếu của V lên mặt phẳng xOy)

Khi đó:

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

hay $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy$

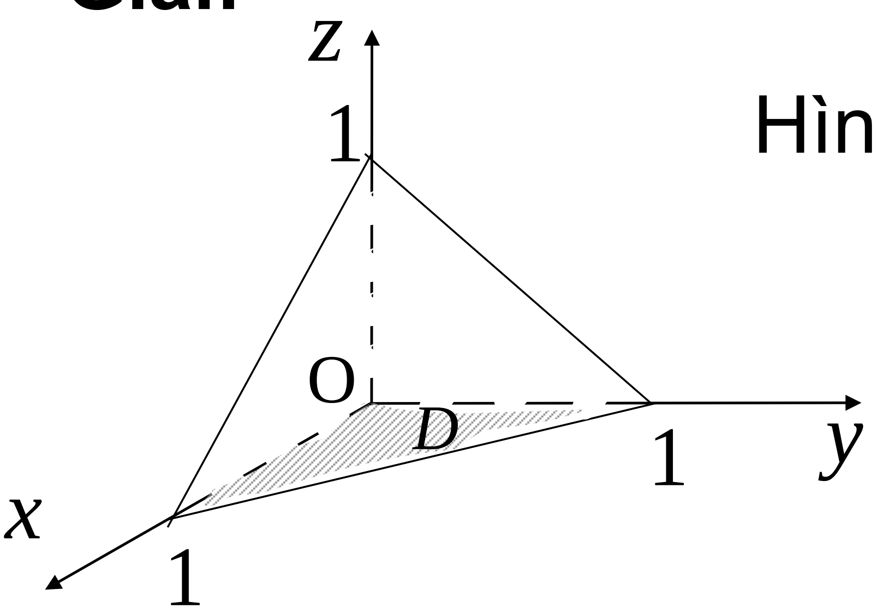
$$\overset{k/h}{=} \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

b) Ví dụ:

Tính $I = \iiint\limits_V (1 - x - y)dxdydz$

V giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x + y + z = 1.$

Giải:



Hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là miền *D.*

V xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le z \le 1 - x - y \end{cases}$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1 - x - y)dz \quad = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} (1 - x - y)dz \right) dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2 \, dy \quad = \int_0^1 \left. \frac{(1 - x - y)^3}{3} \right|_{1-x}^{0} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(1 - x)^3}{3} dx \quad = \frac{1}{3} . \left. \frac{(1 - x)^4}{4} \right|_1^0 = \frac{1}{12}.$$

3) Đổi biến trong tích phân ba lớp

a) Công thức đổi biến số

Xét $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ (f liên tục trên V)

Thực hiện phép đổi biến $x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),$

$z = z(u,v,w)$ sao cho:

* $x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)$ là các hàm số liên tục,

có các ĐHR cấp một liên tục trên miền V' *trong KG* $Ouvw$

* Tương ứng $(u,v,w) \mapsto (x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w))$

là một song ánh từ V' lên V.

* Định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{tại } \forall (u,v,w) \in V'$$

Khi đó:

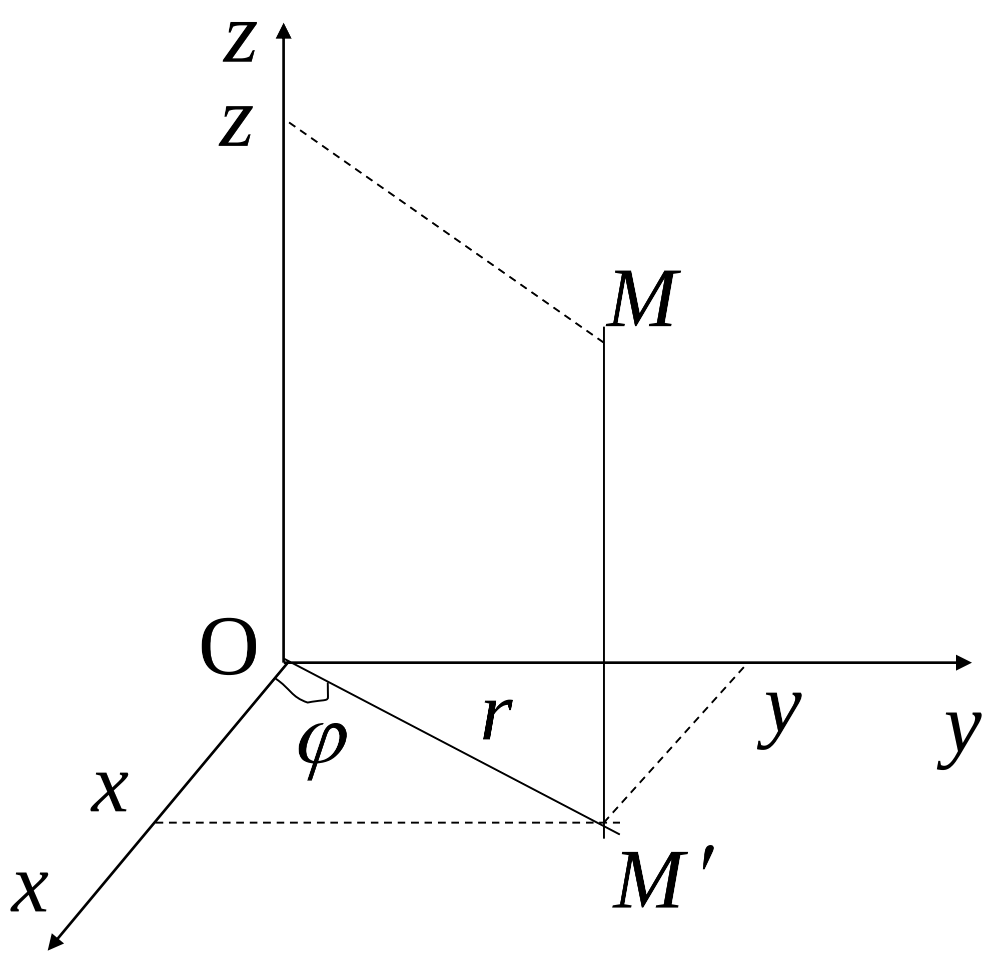
§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|J\right|dudvdw.$$

Chú thích: Công thức trên vẫn đúng khi $J = 0$ tại một số điểm $(u,v,w) \in V'$.

b) Tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ trụ



* Tọa độ trụ của điểm M

là bộ (r,φ,z) <u>*trong đó:*</u>

(r,φ) *là tọa độ cực của* M'

(M' là hình chiếu của M

lên mặt phẳng Oxy)

z là cao độ của M

* Trong cả hệ tọa độ trụ:

$$r \geq 0, \;\; 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \;\; -\infty < z < +\infty$$

* Giả sử M có tọa độ (x, y, z) trong hệ trục $Oxyz$

Có $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \geq 0.$$

* Công thức tính tích phân trong tọa độ trụ là:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

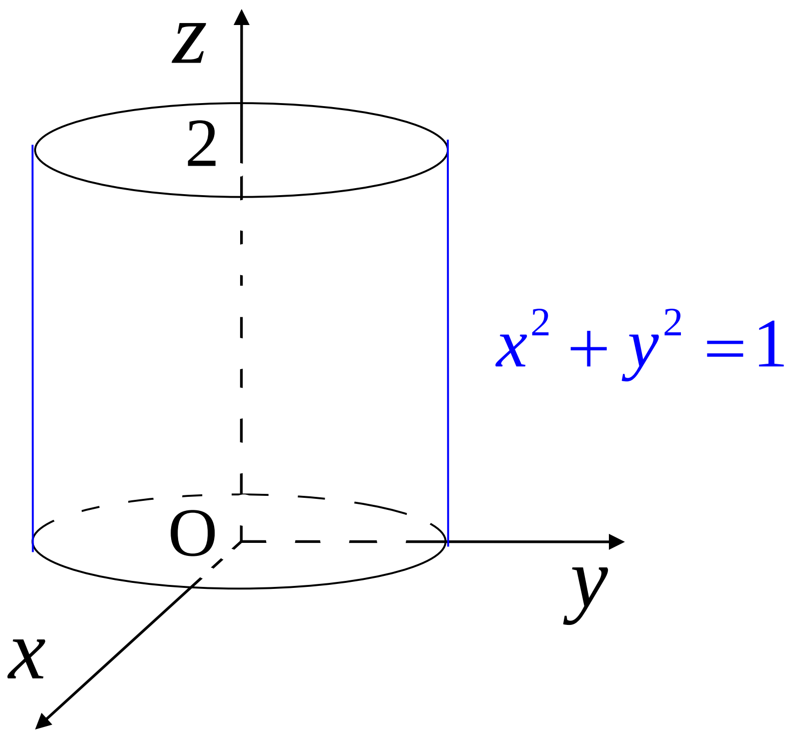
Nhận xét:

Thường đổi biến sang tọa độ trụ khi V có hình chiếu lên mặt phẳng Oxy là hình tròn hoặc một phần hình tròn.

Ví dụ: Tính $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) z \, dxdydz$

V là miền giới hạn bởi các mặt: $x^2 + y^2 = 1, \ z = 0, \ z = 2.$

Giải:



* Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

Miền V tương ứng với: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^2 r^2 z.r dz = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^1 r^3 dr\right).\left(\int_0^2 z dz\right)$$

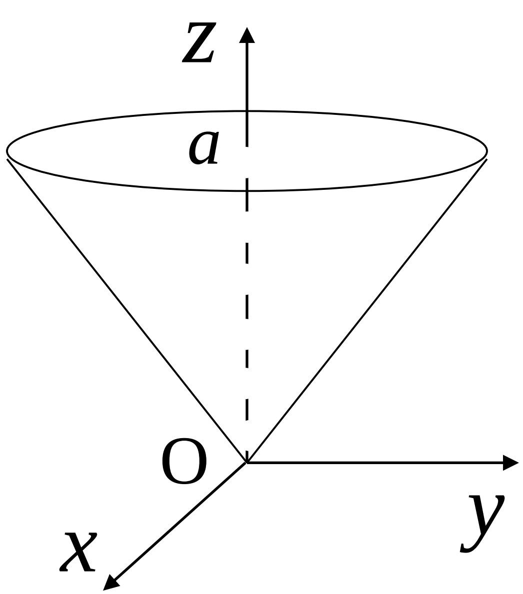
$$= 2\pi.\frac{1}{4}.\frac{z^2}{2}\bigg|_0^2 = \pi.$$

Ví dụ: Tính $I = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz$

V là miền hình nón tròn xoay giới hạn bởi các mặt

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad z = a \quad (a > 0)$$

Giải:



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

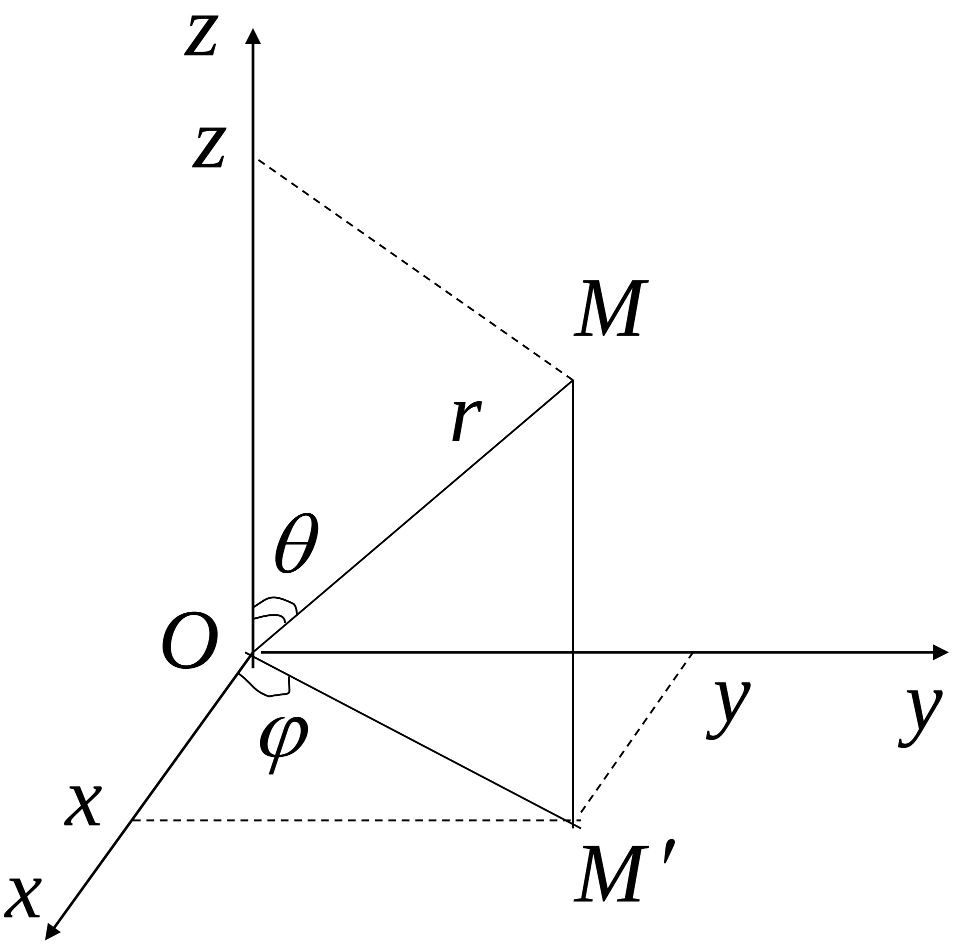
Miền V tương ứng với: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \\ r \le z \le a \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr \int_r^a \left(r^2 + z^2\right) r dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left[\left(r^3 z + r\frac{z^3}{3} \right)\Bigg|_r^a \right] dr \; = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(r^3 a + r\frac{a^3}{3} - \frac{4}{3} r^4 \right) dr =$$

$$= 2\pi \left(a\frac{r^4}{4} + \frac{a^3 r^2}{6} - \frac{4}{15} r^5 \right)\Bigg|_0^a \; = \frac{3\pi a^5}{10}.$$

c) Tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ cầu



* Tọa độ cầu của điểm M là bộ (r,θ,φ) ***trong đó:***

$$r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$$

$$\theta = \left(Oz, \overrightarrow{OM}\right)$$

$$\varphi = \left(Ox, \overrightarrow{OM'}\right)$$

(M' là hình chiếu của M lên mặt phẳng Oxy)

* Trong cả hệ tọa độ cầu:

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,\ r \ge 0$$

* Giả sử M có tọa độ (x, y, z) trong hệ trục $\mathrm{O}xyz$

Có $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta.\cos\varphi & r\cos\theta.\cos\varphi & -r\sin\theta.\sin\varphi \\ \sin\theta.\sin\varphi & r\cos\theta.\sin\varphi & r\sin\theta.\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\theta \geq 0.$$

Công thức tính tích phân trong tọa độ cầu là:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint\limits_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

Nhận xét:

Thường đổi biến sang tọa độ cầu khi V là hình cầu hoặc một phần hình cầu.

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

Ví dụ: Tính $I = \iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdydz.$

V là miền giới hạn bởi hai mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Giải:

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta.\cos\varphi \\ y = r\sin\theta.\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le \theta \le \pi$

$1 \le r \le 2$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_1^2 \frac{1}{r}.r^2 \sin\theta \, dr$$

$$= 2\pi.\left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \right).\left(\int_1^2 r dr \right)$$

$$= 2\pi.\left(\cos\theta \Big|_{\pi}^{0} \right).\left(\frac{r^2}{2} \Bigg|_1^2 \right) = 6\pi.$$

3. Ứng dụng của tích phân ba lớp

1^0) Tính thể tích vật thể

Thể tích vật thể xác định trên miền V là:

$$\iiint\limits_V dxdydz.$$

2^0) Tính khối lượng và trọng tâm của vật thể

Cho vật thể xác định trên miền V.

Giả sử vật thể có khối lượng riêng tại (x, y, z) là $\rho(x, y, z)$.

Khi đó: * Khối lượng vật thể là: $m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz$

* Trọng tâm của vật thể là: $M_0(x_0, y_0, z_0)$

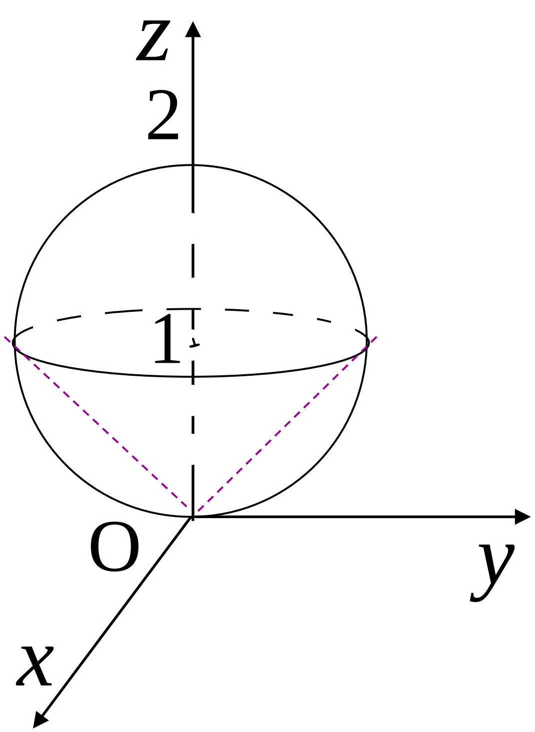
trong đó: $x_0 = \dfrac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x, y, z)dxdydz$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x, y, z)dxdydz, \quad z_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dxdydz.$$

Ví dụ:

Tính thể tích vật thể chứa điểm $(0,0,2)$ và giới hạn bởi các mặt $x^2+y^2+z^2=2z,\quad x^2+y^2=z^2.$

Giải:



$$x^2+y^2+z^2=2z$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+(z-1)^2=1.$$

Thể tích vật thể là: $v = \iiint_V dxdydz$

Hình chiếu của vật thể lên mặt phẳng Oxy là miền

$D: x^2 + y^2 \leq 1.$

Đổi biến sang tọa độ trụ:

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$0 \leq r \leq 1$

$r \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - r^2}$

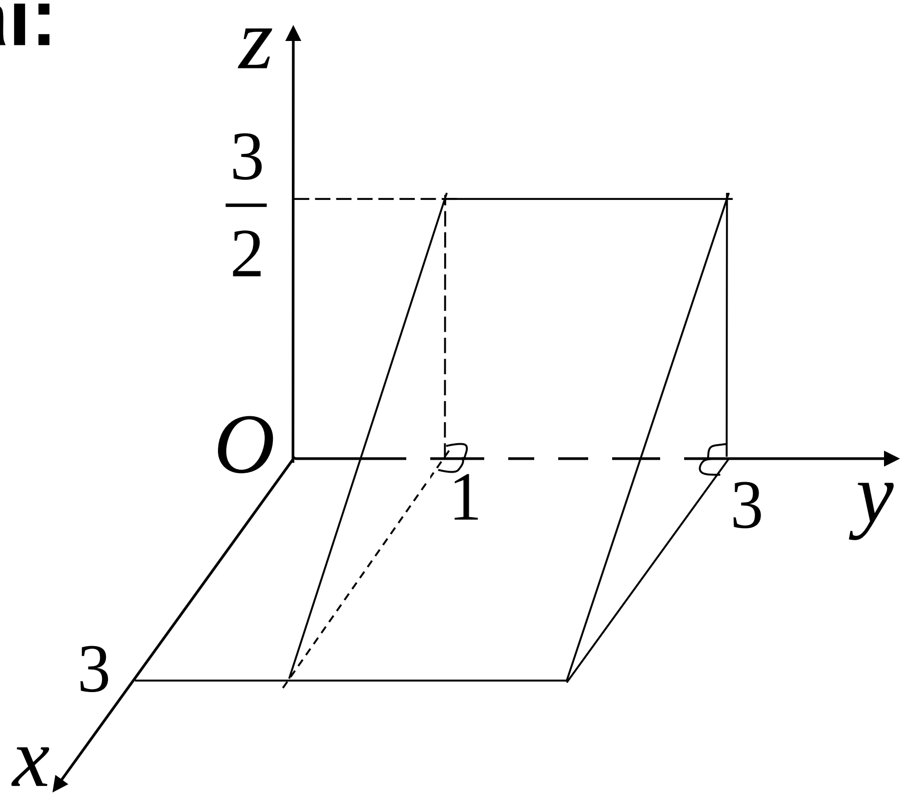
$$v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^{1+\sqrt{1-r^2}} r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1+\sqrt{1-r^2}-r\right) r dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{3}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3} \right]\Bigg|_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \pi \quad \text{(đvtt)}$$

Ví dụ: Tính khối lượng và trọng tâm của hình lăng trụ V giới hạn bởi các mặt $x=0,\ z=0,\ y=1,\ y=3,\ x+2z=3,$ biết khối lượng riêng $\rho(x,y,z)=1.$

Giải:



Miền V xác định bởi:

$$0 \le x \le 3$$

$$1 \le y \le 3$$

$$0 \le z \le \frac{3-x}{2}$$

** Khối lượng:*

$$m=\iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz=\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{3-x}{2}} dz=2\int_0^3 \frac{3-x}{2}dx$$

$$=\frac{(3-x)^2}{2}\bigg|_3^0=\frac{9}{2}.$$

* Trọng tâm: $M_0(x_0,y_0,z_0)$

trong đó

$$x_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V xdxdydz = \frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{3-x}{2}} xdz$$

$$= \frac{2}{9}.2\int_0^3 x.\frac{3-x}{2}dx = \frac{2}{9}\int_0^3 \left(3x - x^2\right)dx$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = 1.$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V ydxdydz = \frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{3-x}{2}} ydz$$

$$= \frac{2}{9}\left(\int_1^3 ydy\right).\left(\int_0^3 \frac{3-x}{2}dx\right)$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^3\right).\left(\frac{(3-x)^2}{4}\Bigg|_3^0\right) = \frac{2}{9}.4.\frac{9}{4} = 2.$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V zdxdydz = \frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{3-x}{2}} zdz$$

$$= \frac{2}{9}.2.\int_0^3\left(\int_0^{\frac{3-x}{2}} zdz\right)dx = \frac{4}{9}\int_0^3\left(\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{\frac{3-x}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^3 \frac{(3-x)^2}{8}dx = \frac{4}{9}.\left.\frac{(3-x)^3}{24}\right|_3^0 = \frac{4}{9}.\frac{27}{24} = \frac{1}{2}.$$

Bài tập về nhà: 2.7 $\longrightarrow$ 2.17

và các bài khác

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP