CHƯƠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

§1. KHÁI NIỆM CHUNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

* Phương trình vi phân là phương trình có dạng:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

trong đó: x là biến số độc lập

$y = y(x)$ là hàm số phải tìm.

(y là hàm số xác định, khả vi trên $(a,b) \subset \mathbb{R}$.)

* **Cấp** của PTVP là cấp cao nhất của đạo hàm của y trong phương trình.

Ví dụ: $y'' + y = x$ là PTVP cấp hai.

$y' + 3x = 0$ là PTVP cấp một.

* Hàm số $y = y(x)$ là một **nghiệm** của PTVP nếu nó thỏa mãn PT.

Ví dụ:

Các hàm số dạng $y = \dfrac{x^2}{2} + C$ là nghiệm của PTVP $y' = x.$

* ***Nghiệm*** của PT ***có thể xác định dưới dạng***:

$$y = f(x)$$

hoặc $\phi(x, y) = 0$ (dạng ẩn)

hoặc $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ (dạng tham số)

* PTVP được gọi là **tuyến tính** nếu nó là bậc nhất đối với y và các đạo hàm của y.

Dạng:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \quad (*)$$

Nếu $b(x) \equiv 0$ thì $(*)$ gọi là *PT tuyến tính thuần nhất*

Nếu $b(x) \neq 0$ thì $(*)$ gọi là *PT tuyến tính không thuần nhất.*

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

A. ĐẠI CƯƠNG VỀ PTVP CẤP MỘT

* Phương trình vi phân cấp một có dạng:

$$F(x, y, y') = 0$$

hoặc $y' = f(x, y)$

*** Định lí tồn tại và duy nhất nghiệm**

Xét PT $y' = f(x,y)$

Giả sử $f(x,y)$ liên tục trên miền D và $(x_0, y_0) \in D.$

Khi đó, trong một lân cận nào đó của $x_0,$ tồn tại ít nhất một hàm số $y = y(x)$ là nghiệm của PT, nó nhận giá trị $y = y_0$ khi $x = x_0.$

Ngoài ra, nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ cũng liên tục trên D thì nghiệm đó là duy nhất.

* Bài toán tìm nghiệm của PT thỏa mãn điều kiện $y = y_0$ khi $x = x_0$ gọi là *bài toán Cauchy*.

Điều kiện $y = y_0$ khi $x = x_0$ gọi là ĐK ban đầu.

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

* **Nghiệm tổng quát** của PTVP cấp một là hàm số

$$y = \varphi(x, C)$$

trong đó C là hằng số tùy ý, sao cho:

1. *Nó thỏa mãn PT với mọi giá trị thừa nhận được của* C

2. *Với* $\forall (x_0, y_0) \in D$ *ở đó các điều kiện của định lí tồn tại và duy nhất nghiệm được thỏa mãn, tìm được* $C = C_0$ *sao cho* $y = \varphi(x, C_0)$ *là nghiệm của PT thỏa mãn điều kiện* $y = y_0$ *khi* $x = x_0$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

* Nghiệm $y = \varphi(x, C_0)$ lấy từ họ nghiệm tổng quát khi cho $C = C_0$ gọi là **nghiệm riêng** của PT.

* Hệ thức $\Phi(x, y, C) = 0$ xác định nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn gọi là **tích phân tổng quát** của PT.

* Hệ thức $\Phi(x, y, C_0) = 0$ xác định nghiệm riêng dưới dạng ẩn gọi là **tích phân riêng** của PT.

* PTVP có thể có các nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát, gọi là nghiệm kì dị.

B) CÁCH GIẢI MỘT SỐ PTVP CẤP MỘT

1) Phương trình với biến số phân li

a) Phương trình với biến số phân li là PTVP có dạng:

$$f(x)dx = g(y)dy$$

b) Cách giải

Lấy tích phân hai vế của phương trình

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$

Vậy $F(x) = G(y) + C$ là tích phân tổng quát của PT

$(F(x), G(y)$ lần lượt là các nguyên hàm của $f(x), g(y))$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$x^3(y+1)dx + (x^4-1)(y-2)dy = 0$$

Giải:

Có $x^3(y+1)dx = -(x^4-1)(y-2)dy$

$$\frac{x^3}{x^4-1}dx = -\frac{y-2}{y+1}dy \qquad (y \neq -1)$$

$$\int \frac{x^3}{x^4-1}dx = -\int \frac{y-2}{y+1}dy$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4-1)}{x^4-1} = -\int \left(1 - \frac{3}{y+1}\right)dy$$

Vậy $$\frac{1}{4}\ln\left|x^4-1\right| = -y + 3\ln\left|y+1\right| + C$$

là tích phân tổng quát của phương trình.

Ngoài ra, hàm số $y=-1$ cũng là nghiệm của PT

(nghiệm kì dị).

Ví dụ: Tìm nghiệm của bài toán Cauchy

$$y' = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$y(0) = 0.$$

Giải:

$$y' = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + (\cos x \cos y + \sin x \sin y)$$

$$y' = 2\cos x \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos x \cos y$$

$$\frac{dy}{\cos y} = 2\cos x dx \quad (\cos y \neq 0 \text{ hay } y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \frac{dy}{\cos y} = 2\int \cos x dx$$

$$\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2\sin x + C$$ là tích phân tổng quát của PT

Vì nghiệm cần tìm phải thỏa mãn ĐK $y(0) = 0$ nên

$$\ln\left|\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right| = C \Rightarrow C = 0$$

Vậy nghiệm cần tìm là $\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2\sin x.$

Chú ý:

1^0) Phương trình dạng $y' = f(ax + by + c)$ có thể đưa về dạng biến số phân li bằng cách đặt $z = ax + by + c$

2^0) PT dạng $y' = f\left(\dfrac{k(ax+by)+c_1}{ax+by+c_2}\right)$ hoặc

$y' = f\left(\dfrac{ax+by+c_1}{k(ax+by)+c_2}\right)$ có thể đưa về dạng biến số phân li bằng cách đặt $z = ax + by$.

Ví dụ: Tìm tích phân tổng quát của phương trình:

$$(2x-2y-1)dx+(x-y+1)dy=0.$$

Giải:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-2y-1}{x-y+1}$$

Đặt $z=x-y \Rightarrow z'=1-y'$

Có $1-z'=-\frac{2z-1}{z+1}$

$$z'=\frac{3z}{z+1}$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3z}{z+1}$$

$$\frac{z+1}{z}dz = 3dx$$

$$\int \frac{z+1}{z}dz = \int 3dx$$

$$z + \ln|z| + C = 3x$$

$$x - y + \ln|x-y| + C = 3x$$

Vậy $2x + y - \ln|x-y| = C$ là tích phân tổng quát của PT.

2. Phương trình đẳng cấp

a) Phương trình đẳng cấp (hay PT thuần nhất) có dạng

$$y' = g(x, y)$$

trong đó $g(x, y)$ là hàm số thuần nhất bậc 0, nghĩa là:

$$g(tx, ty) = t^0 g(x, y) = g(x, y), \forall t > 0$$

b) Cách giải:

Đưa phương trình về dạng $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Đặt $\frac{y}{x} = u$

Ta có $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

$u'x + u = f(u)$ hay $\dfrac{du}{dx}x = f(u) - u$

…

Ví dụ: Giải phương trình $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

Giải:

Phương trình có dạng $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$

$$y' = \frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\dfrac{y}{x}} \qquad (x \neq 0)$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

Thay vào phương trình đã cho, ta có:

$$u'x+u=\frac{u^2-1}{2u}$$

$$\frac{du}{dx}.x=-\frac{u^2+1}{2u}$$

$$\frac{2udu}{u^2+1}=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{2udu}{u^2+1}=-\int\frac{dx}{x}$$

$\ln(1+u^2)=-\ln|x|+\ln|C|$ hay $\ln|x|+\ln(1+u^2)=\ln|C|$

Vậy $x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=C$ là tích phân tổng quát của PT.

Ví dụ: Giải phương trình $y' = \dfrac{x+y}{x-y}.$

Giải:

Có $y' = \dfrac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}} \quad (x \neq 0)$

Đặt $\dfrac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

$u'x + u = \dfrac{1+u}{1-u}$ hay $u'x = \dfrac{u^2+1}{1-u}$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{u^2+1}{1-u}$$

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1-u}{1+u^2}du = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\mathrm{arctg}\,u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \ln C = \ln|x| \qquad (C > 0)$$

$$\ln e^{\mathrm{arctg}\,u} + \ln C = \ln|x| + \ln\sqrt{1+u^2} \qquad (C > 0)$$

$$\ln\left(|x|\sqrt{1+u^2}\right) = \ln\left(Ce^{\operatorname{arctg} u}\right)$$

$$|x|\sqrt{1+u^2} = Ce^{\operatorname{arctg} u}$$

$$|x|\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

Chú ý:

$1^0)$ Trong nhiều trường hợp, có thể không cần phải đưa phương trình về dạng $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ mà đặt ngay $y = ux$

2^0) Các phương trình dạng $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

trong đó $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ có thể đưa về dạng PT thuần nhất.

Thật vậy, gọi α, β là các số mà

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

Đặt $x = t + \alpha, \qquad y = z + \beta$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}$$

Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z}{a_2 t + b_2 z}\right)$$

Đây là PT thuần nhất đối với z và t.

Giải PT này, tìm z theo t, suy ra y theo x.

Ví dụ: Tìm tích phân tổng quát của phương trình:

$$(x+y-2)dx-(x-y+4)dy=0.$$

Giải:

Có $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-2}{x-y+4}$

Giải hệ $\begin{cases}\alpha+\beta-2=0\\ \alpha-\beta+4=0\end{cases}$

Tìm được $\alpha=-1,\ \ \beta=3.$

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

Đặt $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = z + 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}$$

Có $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{t+z}{t-z}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1 + \frac{z}{t}}{1 - \frac{z}{t}}$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

Đặt $\dfrac{z}{t} = u \Rightarrow z = tu$

$$z' = tu' + u$$

Có $tu' + u = \dfrac{1+u}{1-u}$

$$\frac{du}{dt}.t = \frac{u^2+1}{1-u}$$

$$\frac{1-u}{u^2+1}du = \frac{dt}{t}$$

$$\arctan u - \frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) = \ln|t| + \ln C$$

$$\ln e^{\arctan u} = \ln\left(|t|.\sqrt{u^2+1}\right) + \ln C$$

$$e^{\arctan\frac{z}{t}} = C\sqrt{z^2+t^2}$$

Vậy tích phân tổng quát của PT là:

$$e^{\arctan\frac{y-3}{x+1}} = C\sqrt{(y-3)^2+(x+1)^2}$$

3. Phương trình tuyến tính

a) Định nghĩa: PTVP tuyến tính cấp một là phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (3)$$

Nếu $q(x) \neq 0$ *thì (3) gọi là PTVP tuyến tính không thuần nhất.*

Nếu $q(x) = 0$ *thì (3) gọi là PTVP tuyến tính thuần nhất.*

b) Cách giải

Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right] \quad (C \text{ là hằng số})$$

Chú ý: Ở công thức nghiệm tổng quát trên, không lấy các hằng số trong kết quả của các tích phân bất định.

Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình

$$\frac{dy}{dx} - y\cot x = 2x\sin x \quad (1) \qquad (x \neq k\pi)$$

thỏa mãn điều kiện $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}.$

Giải:

PT có nghiệm tổng quát là: $y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$

Với $p(x) = -\cot x,\quad q(x) = 2x\sin x,$ ta có:

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{\int \cot x dx} = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x}dx} = e^{\ln\sin x} = \sin x \Rightarrow e^{\int p(x)dx} = \frac{1}{\sin x}$$

$$y = \sin x\left[C + \int 2x dx\right] = \sin x\left[C + x^2\right].$$

Vậy nghiệm tổng quát của PT là $y = \left[C + x^2\right]\sin x.$ (C là hằng số)

Vậy nghiệm tổng quát của PT là $y=\left[C+x^2\right]\sin x.$ (C là hằng số)

Với điều kiện $y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}$ ta có:

$$\frac{\pi^2}{4}=\left(C+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin\frac{\pi}{2}\Rightarrow C=0.$$

Vậy nghiệm cần tìm: $y=x^2\sin x.$

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình

$$\frac{dy}{dx} - y\cot x = 2x\sin x \quad (1) \qquad (x \neq k\pi)$$

thỏa mãn điều kiện $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$.

Giải:

PT có nghiệm tổng quát là: $y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$

Với $p(x) = -\cot x$, $\quad q(x) = 2x\sin x$, ta có:

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{\int \cot x dx} = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x}dx} = e^{\ln|\sin x|} = |\sin x|$$

*Nếu $\sin x > 0$, $\quad e^{-\int p(x)dx} = \sin x \Rightarrow e^{\int p(x)dx} = \frac{1}{\sin x}$

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

$$y = \sin x\left[C + \int 2x\,dx\right] = \sin x\left[C + x^2\right].$$

* Nếu $\sin x < 0,\quad e^{-\int p(x)dx} = -\sin x \Rightarrow e^{\int p(x)dx} = -\dfrac{1}{\sin x}$

$$y = -\sin x\left[C - \int 2x\,dx\right] = \sin x\left[-C + x^2\right].$$

Vậy nghiệm tổng quát của PT là $y = \sin x\left[C + x^2\right]$. ($C$ là hằng số)

* Với điều kiện $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$ ta có:

$$\frac{\pi^2}{4} = \left(C + \frac{\pi^2}{4}\right)\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 0.$$

Vậy nghiệm cần tìm: $y = x^2\sin x.$

Chú ý: Khi giải PTVP cấp 1 (thường là đối với PT tuyến tính và PT Bernoulli), trong một số trường hợp, người ta coi $x = x(y)$ là hàm số của y.

Ví dụ: Giải phương trình

$$e^y dx + (xe^y - 1)dy = 0.$$

Giải:

Coi $x = x(y)$ là hàm số của y.

Chia cả hai vế của phương trình cho $e^y dy$

Có $\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{xe^y - 1}{e^y} = 0.$

$$\frac{dx}{dy} + x = \frac{1}{e^y}$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

$$\frac{dx}{dy} + x = \frac{1}{e^y}$$

$$x = e^{-\int p(y)dy}\left[C + \int q(y)e^{\int p(y)dy}dy\right]$$

trong đó $p(y) = 1,\ q(y) = \dfrac{1}{e^y}$

Có $e^{-\int p(y)dy} = e^{-\int dy} = e^{-y} \Rightarrow e^{\int p(y)dy} = e^y$

$$x = e^{-y}\left[C + \int dy\right] = e^{-y}[C + y]$$

Vậy nghiệm tổng quát của PT đã cho là $x = e^{-y}\left[C + y\right]$ (C là hằng số)

4. Phương trình Bernoulli

a) Dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

b) Cách giải:

* Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì PT trên là PT tuyến tính.

* Nếu $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$

Nhân cả hai vế của phương trình với $y^{-\alpha}$

(hay chia cho y^{α}) $(y \neq 0)$

Ta có $y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$

Đặt $y^{1-\alpha} = z \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$$

Đây là PT tuyến tính, giải phương trình, tìm z, *từ đó suy ra* y.

Ví dụ: Giải phương trình

$$y' + \frac{2}{x+1} y + (x+1)^3 y^2 = 0$$

Giải:

Có $y' + \frac{2}{x+1} y = -(x+1)^3 y^2$

$$y' y^{-2} + \frac{2}{x+1} y^{-1} = -(x+1)^3 \quad (y \neq 0)$$

Đặt $y^{-1} = z \Rightarrow z' = -y^{-2} y'$

$$z' - \frac{2}{x+1} z = (x+1)^3 \quad (1)$$

$$z' - \frac{2}{x+1} z = (x+1)^3 \quad (1)$$

$$z = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

trong đó $p(x) = -\frac{2}{x+1}$ $\quad q(x) = (x+1)^3$

Có $e^{-\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x+1}dx} = e^{2\ln(x+1)} = (x+1)^2 \Rightarrow e^{\int p(x)dx} = \frac{1}{(x+1)^2}$

$$z = (x+1)^2\left[C + \int (x+1)dx\right] =$$

$$(x+1)^2\left[C + \frac{(x+1)^2}{2}\right] = \frac{2C(x+1)^2 + (x+1)^4}{2}$$

Vậy nghiệm tổng quát của PT đã cho là $y = \frac{2}{K(x+1)^2 + (x+1)^4}$

(K là hằng số)

Ngoài ra, PT còn có nghiệm $y = 0$ (nghiệm kì dị)

5. Phương trình vi phân toàn phần

a) *Định nghĩa:* Xét PTVP

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (5)$$

Nếu $P(x,y),\ Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên miền D,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},\ \forall (x,y) \in D$$

thì PT (5) được gọi là PTVP toàn phần.

b) Cách giải

Biểu thức $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *là vi phân toàn phần của một hàm số* $u(x,y)$ *nào đó trên* D.

Phương trình (5) tương đương với PT $du = 0$

Vậy tích phân tổng quát của PT có dạng

$$u(x,y) = C \quad (C\text{: hằng số})$$

Chú ý:

Nếu $D = \mathbb{R}^2$ *thì hàm số* $u(x,y)$ *xác định bởi công thức:*

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$$

hoặc $$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

với (x_0, y_0) *bất kì thuộc D.*

Ví dụ: Giải PTVP

$$(x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2y + y^3)dy = 0$$

Giải:

Đặt $P = x^3 + 3xy^2,\ Q = 3x^2y + y^3$

P, Q và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy,\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm số

$u(x,y)$ nào đó trên $\mathbb{R}^2$.

Áp dụng công thức $u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$

với $x_0=0, y_0=0$ ta có:

$$u(x,y)=\int_0^x (x^3+3xy^2)dx+\int_0^y y^3dy$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2\right)\Bigg|_0^x+\frac{1}{4}y^4\Bigg|_0^y=\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4.$$

Vậy tích phân tổng quát của PT là

$$\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4=C \qquad (C\text{: hằng số}).$$

Ví dụ: Giải PTVP $(3x-4y)dx+(\frac{1}{y^2}-4x)dy=0$

Giải:

Đặt $P = 3x-4y,\qquad Q = \frac{1}{y^2}-4x$

P,Q và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên miền

$D=\{(x,y)\ /\ y\neq 0\}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-4,\quad \forall (x,y)\in D$$

$\Rightarrow P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm số

$u(x,y)$ nào đó trên D.

Ta tìm hàm số $u(x,y)$ sao cho

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x - 4y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{y^2} - 4x \end{cases}$$

Có $u(x,y) = \dfrac{3}{2}x^2 - 4xy + f(y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -4x + f'(y) = -4x + \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow f'(y) = \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow f(y) = -\frac{1}{y} + K$$

$$u(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - 4xy - \frac{1}{y} + K$$

Vậy tích phân tổng quát của PT đã cho là

$$\frac{3}{2}x^2 - 4xy - \frac{1}{y} = C$$ (C: hằng số)

c) Thừa số tích phân

Giả sử PT (5) không là PTVP toàn phần, tức là $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

* Nếu tồn tại hàm số $\alpha(x, y)$ để phương trình:

$$\alpha\left(Pdx + Qdy\right) = 0 \quad (5a)$$

là PTVP toàn phần, tức là

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha Q) = \frac{\partial}{\partial y}(\alpha P),\ \forall (x, y) \in D$$

thì hàm số $\alpha(x, y)$ được gọi là thừa số tích phân của PT (5).

Khi đó, tích phân tổng quát của phương trình (5a) là tích phân tổng quát của phương trình (5).

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

Chú ý: Có thể tìm thừa số tích phân $\alpha(x,y)$ trong một số trường hợp như sau:

* Nếu $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{Q}=\varphi(x)$ chỉ là hàm số của x thì tìm

$$\alpha(x,y)=e^{-\int \varphi(x)dx}.$$

* Nếu $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}=\psi(y)$ chỉ là hàm số của y thì tìm

$$\alpha(x,y)=e^{\int \psi(y)dy}.$$

* Nếu $$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{xP-yQ}=\varphi(xy)$$ là hàm số của xy thì tìm

$$\alpha(x,y)=e^{\int \varphi(u)du}$$ với $u=xy.$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân:

$$(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0 \quad (1)$$

Giải

Đặt $P(x,y) = 2xy^2 - 3y^3, Q(x,y) = 7 - 3xy^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - 9y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3y^2$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{6y^2 - 4xy}{-3y^3 + 2xy^2} = \frac{-2}{y}$$ chỉ phụ thuộc y

Chọn $\alpha(x,y) = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln|y|} = \frac{1}{y^2}.$

Nhân hai vế của PT (1) với $\frac{1}{y^2}$ $(y \neq 0)$

$$\frac{1}{y^2}\left[(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy\right] = 0 \quad (2)$$

$$PT\ (2) \Leftrightarrow (2x - 3y)dx + (\frac{7}{y^2} - 3x)dy = 0$$

Đây là phương trình vi phân toàn phần

Ta tìm hàm số $u(x,y)$ sao cho

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{7}{y^2} - 3x \end{cases}$$

Có $u(x,y) = x^2 - 3xy + f(y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -3x + f'(y) = -3x + \frac{7}{y^2}$$

$$\Rightarrow f'(y) = \frac{7}{y^2}$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

$$\Rightarrow f(y) = -\frac{7}{y} + K$$

$$u(x,y) = x^2 - 3xy - \frac{7}{y} + K$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình (2) là

$$x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = C$$

Đó chính là tích phân tổng quát của PT đã cho.

Ngoài ra, PT đã cho còn có nghiệm $y = 0$ *(nghiệm kì dị)*

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

A. Đại cương về phương trình vi phân cấp hai

* PTVP cấp 2 có dạng: $F(x, y, y', y'') = 0$

hoặc $y'' = f(x, y, y')$

*** Định lí tồn tại và duy nhất nghiệm:**

Xét phương trình $y'' = f(x, y, y')$

Giả sử $f(x, y, y'), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y'), \dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ liên tục trên miền $D \subset \mathbb{R}^3$ và $(x_0, y_0, y_0') \in D$.

Thế thì trong một lân cận nào đó của x_0, tồn tại duy nhất một hàm số $y = y(x)$ là nghiệm của phương trình, nó thỏa mãn điều kiện $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$.

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

* Nghiệm tổng quát của PTVP cấp 2 có dạng

$$y = \varphi(x, C_1, C_2)$$

trong đó $C_1,\ C_2$ là các hằng số

* Nghiệm $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ lấy từ họ nghiệm tổng quát

khi cho $C_1,\ C_2$ các giá trị xác định C_1^0, C_2^0 gọi là

một nghiệm riêng của PT.

B. CÁCH GIẢI MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

1. Phương trình tuyến tính

a. Phương trình tuyến tính thuần nhất

Dạng $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1a)$

($p(x), q(x)$ *liên tục*)

Định lý: Nếu y_1 và y_2 là hai nghiệm của PT ($1a$) thì

$C_1y_1 + C_2y_2$ cũng là nghiệm của ($1a$).

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

Định nghĩa:

* Hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ khác 0 được gọi là độc lập tuyến tính trên (a,b) nếu $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ khác hằng số trên (a,b).

* Hai hàm số không độc lập tuyến tính trên (a,b) gọi là phụ thuộc tuyến tính trên (a,b)

Ví dụ:

$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = \sin x$ là các hàm số đltt.

$z_1(x) = 2x+1, \ z_2(x) = 4x+2$ là các hàm số pttt.

Định nghĩa:

Cho hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ trên (a,b).

Định thức $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ gọi là định thức Wronski của hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$.

Định lí:

Nếu các nghiệm $y_1(x), y_2(x)$ của phương trình (1a) độc lập tuyến tính trên (a,b) thì $W(y_1,y_2)\neq 0$ với $\forall x\in(a,b).$

Định lý: Nếu y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của PT $(1a)$ thì nghiệm tổng quát của PT $(1a)$ là:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Định lý: Nếu $y_1(x) \neq 0$ là nghiệm của PT (1a) thì

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx$$

cũng là một nghiệm của PT (1a), nó độc lập tuyến tính với $y_1(x)$.

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình (1a) là:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx$$

(C_1, C_2 là các hằng số)

Tóm lại: Cách giải PT ($1a$):

- Tìm (đoán,…) nghiệm $y_1(x) \neq 0.$

- Tìm nghiệm $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx$

-Nghiệm tổng quát của PT (1a) là

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Chú ý: Trong công thức tính $y_2(x)$, các hằng số trong kết quả của các tích phân bất định đều bằng 0.

Ví dụ: Giải phương trình:

$$(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Giải:

Phương trình có dạng:

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 0 \qquad (x \neq \pm 1)$$

Dễ thấy PT có một nghiệm riêng là $y_1(x) = x.$

Xét $y_2(x) = \quad y_1\int \frac{1}{y_1^{\ 2}} e^{-\int p(x)dx} dx$

$$= x\int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{2x}{1-x^2}dx} dx = x\int \frac{1}{x^2} e^{\ln(x^2-1)} dx = x\int \frac{x^2-1}{x^2} dx$$

$$= x\left(x + \frac{1}{x} \right) = x^2 + 1.$$

$y_2(x)$ cũng là một nghiệm của phương trình đã cho, nó độc lập tuyến tính đối với $y_1(x)$.

Vậy nghiệm tổng quát của PT đã cho là:

$$y = C_1 x + C_2(x^2 + 1).$$

b. Phương trình tuyến tính không thuần nhất

* Dạng $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1b)$

$(p(x), q(x), f(x)$ *liên tục)*

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

Định lý (*Nguyên lý chồng nghiệm):*

Nếu $y_1(x)$ là một nghiệm riêng của PT

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

và $y_2(x)$ là một nghiệm riêng của PT

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

thì $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ là một nghiệm riêng của PT

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

Cách giải phương trình (1b)

**** Cách 1:***

Nghiệm tổng quát của PT tuyến tính không thuần nhất $(1b)$ bằng một nghiệm riêng bất kì của nó cộng nghiệm tổng quát của PT tuyến tính thuần nhất (1a).

Cách 2: **(Dùng phương pháp biến thiên hằng số)**

Để tìm nghiệm của PT tuyến tính không thuần nhất ($1b$), trước tiên ta tìm nghiệm tổng quát của PT tuyến tính thuần nhất ($1a$).

Giả sử PT ($1a$) có nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (y_1, y_2 \text{ đltt})$$

Coi $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$ là các hàm số của x

sao cho

$$\begin{cases} C_1{}' y_1(x) + C_2{}' y_2(x) = 0 \\ C_1{}' y_1'(x) + C_2{}' y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm do $W(y_1, y_2) \neq 0$ vì y_1, y_2 đltt.

Giải hệ, tìm được $C_1' = \varphi_1(x),\ C_2' = \varphi_2(x)$

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx = g_1(x) + K_1$$

$$C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx = g_2(x) + K_2$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (1b) là:

$$y = \left(g_1(x) + K_1\right)y_1(x) + \left(g_2(x) + K_2\right)y_2(x)$$

(K_1, K_2 : hằng số)

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

Ví dụ: Giải phương trình

$$\left(1-x^2\right)y''+2xy'-2y=1-x^2$$

Giải:

Có $y''+\dfrac{2x}{1-x^2}y'-\dfrac{2}{1-x^2}y=1$

Phương trình $y''+\dfrac{2x}{1-x^2}y'-\dfrac{2}{1-x^2}y=0$ có nghiệm

tổng quát là: $y=C_1x+C_2\left(x^2+1\right)$

Coi $C_1 = C_1(x),\ C_2 = C_2(x)$ là các hàm số thỏa mãn

$$\begin{cases} C_1'(x).x + C_2'(x).\left(x^2+1\right) = 0 \\ C_1'(x) \quad + C_2'(x).2x \quad = 1 \end{cases}$$

Tìm được

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2+1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2+1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \frac{-\left(x^2+1\right)}{x^2-1}, \quad C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2+1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \frac{x}{x^2-1}.$$

$$C_1(x) = -\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx = -\int\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx$$

$$= -\int\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = -\left(x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)+K_1.$$

$$C_2(x) = \int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+K_2.$$

Vậy nghiệm tổng quát của PT đã cho là:

$$y = K_1x + K_2\left(x^2+1\right) - x\left(x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\ln\left|x^2-1\right|$$

(K_1, K_2 : hằng số)

2. PT VP tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi

a) PTVP tuyến tính thuần nhất với hệ số không đổi

- Dạng: $y'' + py' + qy = 0 \quad (2a)$ (p, q *là các hằng số*)
- Cách giải:

Xét phương trình $k^2 + pk + q = 0 \quad (*)$

PT (*) được gọi là phương trình đặc trưng của PT (2a).

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

+) *Nếu PT đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt* $k_1,\ k_2$

thì nghiệm tổng quát của PT (2a) là:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

\+ Nếu PT đặc trưng *có nghiệm thực kép* $k_1 = k_2 = k$

thì PT (2a) có nghiệm tổng quát là:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

+ Nếu PT đặc trưng có hai *nghiệm phức* $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

thì PT (2a) có nghiệm tổng quát là:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Giải:

PT đặc trưng của PT đã cho là: $k^2 + 5k + 6 = 0$

có các nghiệm $k_1 = -3, k_2 = -2.$

Vậy nghiệm tổng quát của PT đã cho là:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

Ví dụ: Giải phương trình $y'' - 2y' + y = 0$

Giải:

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 2k + 1 = 0$ có nghiệm kép

$$k_1 = k_2 = 1$$

Vậy nghiệm tổng quát của PT đã cho là

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x$$

Ví dụ: Tìm nghiệm của bài toán Côsi:

$$y'' + 2y' + 2y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$$

Giải:

PT đặc trưng $k^2 + 2k + 2 = 0$ có nghiệm $k_{1,2} = -1 \pm i$

Nghiệm tổng quát của PT đã cho là

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Với điều kiện $y(0) = y'(0) = 1$ ta có:

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Nghiệm cần tìm là $y = e^{-x}(\cos x + 2\sin x)$

b) PTVP tuyến tính không thuần nhất với hệ số không đổi

- Dạng: $y'' + py' + qy = f(x) \quad (2b)$

$(p, q$ là các hằng số)

- **Cách giải:**

Cách 1: Dùng phương pháp biến thiên hằng số

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

Ví dụ: Giải phương trình:

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad (1)$$

Giải:

Xét phương trình $y'' - y = 0 \quad (2)$

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 1 = 0$ có nghiệm $k = \pm 1.$

Nghiệm tổng quát của PT (2) là $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

Dùng phương pháp biến thiên hằng số, coi C_1, C_2 là các hàm số của x sao cho

$$\begin{cases} C_1{}'e^x + C_2{}'e^{-x} = 0 \\ C_1{}'e^x - C_2{}'e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x+1} \end{cases}$$

Ta có: $C_1' = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^x+1}$ $\qquad C_2' = -\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$

Từ đó:

$$C_1 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^x+1}dx = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x-\ln\left(e^x+1\right)\right]+K_1$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = -\frac{1}{2}\int\left(e^x-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right]+K_2$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \frac{1}{2}\left[x-\ln\left(e^x+1\right)\right]e^x + K_1e^x - \frac{1}{2}\left[e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right]e^{-x} + K_2e^{-x}$$

hay

$$y = K_1e^x + K_2e^{-x} + \frac{1}{2}\left[x-\ln\left(e^x+1\right)\right]e^x - \frac{1}{2}\left[e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right]e^{-x}$$

Cách 2:

Nghiệm tổng quát của PT tuyến tính không thuần nhất $(2b)$ bằng một nghiệm riêng bất kì của nó cộng với nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất $(2a)$.

*** Khi tìm nghiệm riêng của PT tuyến tính không thuần nhất ($2b$), ta chú ý các trường hợp đặc biệt sau:**

Trường hợp 1:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$

trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n, α là hằng số.

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

i) Nếu α *<u>không là nghiệm của PT đặc trưng</u>*

$$k^2 + pk + q = 0$$

thì ta tìm một nghiệm riêng của (2b) dạng:

$$Y = e^{\alpha x} Q_n(x)$$ ($Q_n(x)$ là đa thức bậc n)

(Tìm $Q_n(x)$ bằng cách viết dưới dạng tổng quát của đa thức bậc n, tính Y', Y'', thay vào PT rồi cân bằng hệ số hai bên)

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

ii) Nếu α ***<u>là nghiệm đơn của PT đặc trưng</u>*** *thì ta tìm*

một nghiệm riêng của (2b) dạng:

$$Y = xe^{\alpha x}Q_n(x)$$

iii) Nếu α ***<u>là nghiệm kép của PT đặc trưng</u>*** *thì ta tìm*

một nghiệm riêng của (2b) dạng:

$$Y = x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$$

Trường hợp 2:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right]$$

trong đó $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P_m(x)$, $Q_n(x)$ lần lượt là các đa thức

bậc m, n với hệ số thực.

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

i) Nếu $\alpha \pm i\beta$ *không là nghiệm của PT đặc trưng thì tìm một nghiệm riêng của PT (2b) dạng:*

$$Y = e^{\alpha x}\left[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right]$$

trong đó $R_l(x),\ S_l(x)$ là các đa thức bậc $l = \max(n, m)$

ii) Nếu $\alpha \pm i\beta$ *là nghiệm của PT đặc trưng thì tìm một nghiệm riêng của PT (2b) dạng:*

$$Y = xe^{\alpha x}\left[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right]$$

Ví dụ: Giải phương trình

$$y'' + 2y' + y = x \quad (1)$$

Giải:

Xét phương trình $y'' + 2y' + y = 0 \qquad (2)$

PT đặc trưng: $k^2 + 2k + 1 = 0$ có nghiệm kép $k = -1$

Nghiệm tổng quát của PT (2) là $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$

Có $f(x) = x = e^{0x} P_1(x)$

Vì $\alpha = 0$ không là nghiệm của PT đặc trưng nên ta tìm

nghiệm riêng của PT (1) dạng $Y = e^{0x} Q_1(x) = Ax + B$

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

Có $Y' = A, \quad Y'' = 0$

Thay vào phương trình (1), ta có:

$$2A + Ax + B = x$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y = x - 2$$

Vậy nghiệm tổng quát của PTVP đã cho là

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + x - 2.$$

Ví dụ: Giải PT vi phân: $y'' + 2y' - 3y = e^x x \qquad (1)$

Giải:

Xét phương trình $y'' + 2y' - 3y = 0 \;\; (2)$

PT đặc trưng: $k^2 + 2k - 3 = 0$ có nghiệm $k = 1, k = -3$

Nghiệm tổng quát của PT (2) là $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$

Có $f(x) = e^x x = e^{1x} P_1(x)$

Vì $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của PT đặc trưng nên ta tìm

nghiệm riêng của PT (1) dạng

$$Y = xe^x Q_1(x) = xe^x (Ax + B) = e^x (Ax^2 + Bx)$$

Có $Y' = e^x\left[Ax^2 + (2A+B)x + B\right]$

$$Y'' = e^x\left[Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B\right]$$

Thay vào PT (1), ta có: $8Ax + 2A + 4B = x$

$$\begin{cases} 8A = 1 \\ 2A + 4B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{8} \\ B = -\dfrac{1}{2}A = -\dfrac{1}{16} \end{cases}$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

$$\Rightarrow Y = e^{x}\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right)$$

Nghiệm tổng quát của PT đã cho là

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} + e^{x}\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right)$$

Ví dụ: Tìm nghiệm của PT $y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$ (1)

thỏa mãn điều kiện $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

Giải:

Xét PT thuần nhất: $y'' - 4y' + 4y = 0$ (2)

PT đặc trưng $k^2 - 4k + 4 = 0$ có nghiệm kép $k_1 = k_2 = 2$

Nghiệm tổng quát của PT (2) là $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$

Có $f(x) = 4e^{2x} = e^{2x} P_0(x)$

Vì $\alpha = 2$ là nghiệm kép của PT đặc trưng nên

ta tìm nghiệm riêng của PT (1) dạng:

$$Y = Ax^2e^{2x}$$

Có $Y' = e^{2x}\left[2Ax^2 + 2Ax\right]$

$$Y'' = e^{2x}\left(4Ax^2 + 8Ax + 2A\right)$$

Thay vào PT đã cho, ta có:

$$4Ax^2 + 8Ax + 2A - 8Ax - 8Ax^2 + 4Ax^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2A = 4$$

$$\Leftrightarrow A = 2$$

$$\Rightarrow Y = 2x^2e^{2x}$$

Nghiệm tổng quát của PT đã cho là:

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + 2x^2 e^{2x}$$

Với điều kiện $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ ta có:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ 2C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm cần tìm là $y = (2x^2 + x)e^{2x}$

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

Ví dụ: Giải phương trình $y'' - y' = 2\cos^2 x$

Giải:

Ta có: $y'' - y' = 1 + \cos 2x$

Xét PT $y'' - y' = 0$ (1)

PT đặc trưng $k^2 - k = 0$ có nghiệm $k = 0, k = 1$

Nghiệm tổng quát của PT (1) là $y = C_1 + C_2 e^x$

Dễ thấy PT $y'' - y' = 1$ có một nghiệm riêng là $Y_1 = -x$

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

Xét PT $y'' - y' = \cos 2x$ (2)

Có $f(x) = \cos 2x = P_0(x)\cos 2x + Q_0(x)\sin 2x$

Vì $\pm i\beta = \pm 2i$ không là nghiệm của PT đặc trưng nên

ta tìm nghiệm riêng của PT (2) dạng

$$Y_2 = A\cos 2x + B\sin 2x$$

Có $Y_2' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$

$$Y_2'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

Thay vào (2), ta có:

$$(-4A-2B)\cos 2x+(2A-4B)\sin 2x=\cos 2x$$

Cân bằng các hệ số của $\sin 2x, \cos 2x$

$$\begin{cases}-4A-2B=1\\ 2A-4B=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{2}{10}\\ B=-\dfrac{1}{10}\end{cases}$$

$$\Rightarrow Y_2=-\frac{2}{10}\cos 2x-\frac{1}{10}\sin 2x$$

Theo nguyên lí chồng nghiệm, PT đã cho có một nghiệm riêng là:

$$Y = Y_1 + Y_2 = -x - \frac{2}{10}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 + C_2 e^x - x - \frac{2}{10}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x.$$

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của PTVP

$$y'' + y' = x\cos x$$

Giải:

Xét PT thuần nhất $y'' + y' = 0$ (1)

PT đặc trưng $k^2 + k = 0$ có nghiệm $k = 0,\ k = -1$

Nghiệm tổng quát của PT (1) là $y = C_1 + C_2 e^{-x}$

Có $f(x) = x\cos x = x\cos x + 0.\sin x =$

$$= P_1(x)\cos x + Q_0(x)\sin x$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

Vì $\pm i\beta = \pm i$ không là nghiệm của PT đặc trưng nên

ta tìm nghiệm riêng của PT đã cho dạng

$$Y = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$$

$$\Rightarrow Y' = (Cx + A + D)\cos x + (-Ax - B + C)\sin x$$

$$Y'' = (-Ax - B + 2C)\cos x + (-Cx - 2A - D)\sin x$$

Thay vào phương trình đã cho, ta có:

$$\left[(C-A)x+A-B+2C+D\right]\cos x-$$
$$-\left[(A+C)x+2A+B-C+D\right]\sin x = x\cos x$$

Cân bằng hệ số hai bên, ta có

$$\begin{cases}(C-A)x+A-B+2C+D = x\\(A+C)x+2A+B-C+D = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C - A = 1 \\ A - B + 2C + D = 0 \\ A + C = 0 \\ 2A + B - C + D = 0 \end{cases}$$

Giải hệ, tìm được $A = -\dfrac{1}{2}, B = 1, C = \dfrac{1}{2}, D = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow Y = -\frac{1}{2}(x-2)\cos x + \frac{1}{2}(x+1)\sin x$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}(x-2)\cos x + \frac{1}{2}(x+1)\sin x.$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

Ví dụ: Giải phương trình $y'' + y' = e^{-x}(\sin x - 3\cos x)$ (1)

Giải:

$$y'' + y' = 0 \quad (2)$$

PT đặc trưng $k^2 + k = 0$ có nghiệm $k = 0, k = -1.$

Nghiệm tổng quát của PT (2) là $y = C_1 + C_2 e^{-x}$

$$f(x) = e^{-x}(\sin x - 3\cos x) = e^{-1x}\left[P_0(x)\cos x + Q_0(x)\sin x\right]$$

Vì $-1 \pm i$ không là nghiệm PT đặc trưng nên PT đã cho

có nghiệm

$$Y = e^{-1x}\left[R_0(x)\cos x + S_0(x)\sin x\right] = e^{-x}\left[\mathrm{A}\cos x + B\sin x\right]$$

Có $\quad Y' = e^{-x}\left[(B-A)\cos x - (A+B)\sin x\right]$

$$Y'' = e^{-x}\left[-2B\cos x + 2A\sin x\right]$$

Thay vào PT đã cho, ta có:

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

$$z'' - z' = \sin x - 3\cos x \qquad (*)$$

Xét PT $z'' - z' = 0 \qquad (**)$

PT đặc trưng $k^2 - k = 0$ có nghiệm $k = 0, k = 1$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của PT (**) là $z = C_1 + C_2 e^x$

Ta tìm nghiệm riêng của (*) dạng $Z = A\cos x + B\sin x$

$$Z' = -A\sin x + B\cos x$$

$$Z'' = -A\cos x - B\sin x$$

Thay vào phương trình (*), ta có:

$$(-A-B)\cos x+(A-B)\sin x=\sin x-3\cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -A-B=-3 \\ A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z = 2\cos x+\sin x$$

Nghiệm tổng quát của PT (*) là

$$z = C_1+C_2e^x+2\cos x+\sin x$$

3. Phương trình Euler

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \quad (3)$$

Cách giải:

(Đổi biến để đưa về PT tuyến tính hệ số không đổi)

Đặt $|x| = e^t$

$$\Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}.\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right).\frac{dt}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

Thay vào PT (3), ta có:

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0$$

Đây là PT tuyến tính thuần nhất hệ số không đổi.

Giải PT, tìm y theo t, từ đó suy ra y theo x

Ví dụ: Giải phương trình $x^2y'' - xy' - 3y = 0$

Giải:

Đặt $|x| = e^t$

Ta có: $y'' - 2y' - 2y = 0 \ (*)$

PT đặc trưng $k^2 - 2k - 2 = 0$ có nghiệm $k = 1 \pm i$

Nghiệm tổng quát của PT (*) là: $y = e^t\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right)$

Nghiệm tổng quát của PT đã cho là:

$$y = x\left(C_1 \cos \ln|x| + C_2 \sin \ln|x|\right)$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của PTVP

$$x^2y'' + 4xy' - 4y = x^2 \ln x$$

Giải:

Đặt $x = e^t$

Có $y'' + 3y' - 4y = te^{2t} \quad (*)$

Nghiệm tổng quát của PT $(*)$ là:

$$y = C_1e^t + C_2e^{-4t} + \frac{1}{6}te^{2t} - \frac{7}{36}$$

Nghiệm tổng quát của PT đã cho là:

$$y = C_1x + \frac{C_2}{x^4} + \frac{1}{6}x^2 \ln x - \frac{7}{36}$$

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1. Đại cương về hệ PTVP

*** Hệ PTVP chuẩn tắc cấp 1 có dạng:**

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

x là biến số độc lập

$y_1, y_2, ..., y_n$ là các hàm số phải tìm

*** Định lí tồn tại và duy nhất nghiệm**

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

* **Nghiệm tổng quát** của hệ là bộ n hàm số $y_1, y_2, ..., y_n$

có dạng $y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n)$

trong đó $C_1, C_2, ..., C_n$ là các hằng số

sao cho….

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

* Nghiệm riêng của hệ là nghiệm lấy từ họ nghiệm tổng quát khi cho $C_1, C_2, ..., C_n$ các giá trị cụ thể

2) Cách giải:

Đưa hệ PTVP chuẩn tắc cấp 1 về dạng PTVP cấp cao đối với một hàm số nào đó bằng cách khử các hàm số còn lại từ các PT của hệ ***(Phương pháp khử)***

Ví dụ: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y' = 5y + 4z & (1) \\ z' = 4y + 5z & (2) \end{cases}$$

Giải:

$$y'' = 5y' + 4z' = 5y' + 16y + 20z$$

Từ (1), $z = \dfrac{y' - 5y}{4}$

Có $y'' = 5y' + 16y + 5y' - 25y$

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

$$y'' - 10y' + 9y = 0 \quad (*)$$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 10k + 9 = 0$

có nghiệm $k = 1, k = 9$

Nghiệm tổng quát của PT $(*)$ là $y = C_1e^x + C_2e^{9x}$

Từ đó $z = \dfrac{C_1e^x + 9C_2e^{9x} - 5C_1e^x - 5C_2e^{9x}}{4}$

$$= -C_1e^x + C_2e^{9x}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ PT đã cho là

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{9x} \\ z = -C_1 e^x + C_2 e^{9x} \end{cases}$$

(C_1, C_2 là các hằng số)

*** Chú ý:**

Trong một số trường hợp, có thể tổ hợp các PT của hệ để được một hệ dễ giải ***(Phương pháp tổ hợp)***

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của hệ

$$\begin{cases} y' = y^2 + yz \ (1) \\ z' = yz + z^2 \ \ (2) \end{cases}$$

Giải:

Lấy (1) chia (2) ta có: $\dfrac{y'}{z'} = \dfrac{y}{z}$

$$\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$$

$$\ln|y| = \ln|z| + \ln|C_1|$$

$$y = C_1 z$$

Lấy (1) cộng (2): $y' + z' = (y+z)^2$

$$\frac{(y+z)'}{(y+z)^2} = 1$$

$$-\frac{1}{y+z} = x + C_2$$

$$y+z=-\frac{1}{x+C_2}$$

$$(C_1+1)z=-\frac{1}{x+C_2}$$

$$z=-\frac{1}{(C_1+1)(x+C_2)}$$

$$y=-\frac{1}{x+C_2}+\frac{1}{(C_1+1)(x+C_2)}=\frac{-C_1}{(x+C_2)(C_1+1)}$$

Vậy hệ có nghiệm tổng quát là:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{C_1}{(C_1+1)(x+C_2)} \\ z = -\dfrac{1}{(C_1+1)(x+C_2)} \end{cases}$$

3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số không đổi