7.1 KHÁI NIỆM CHUNG KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT THỐNG KÊ

Trong chương này ta sẽ sử dụng phương pháp kiểm định giả thiết thống kê để kiểm định các tham số đặc trưng của tổng thể

7.1.1 Giả thiết thống kê

Giả thiết thống kê là giả thiết về biến ngẫu nhiên gốc của tổng thể, bao gồm: dạng phân bố xác suất, các tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên gốc hoặc giả thiết về sự độc lập của các biến ngẫu nhiên gốc

Giả thiết đưa ra kiểm nghiệm được ký hiệu là H_0, gọi là *"giả thiết không"* (Null hypothesis)

Giả thiết cạnh tranh với H_0 gọi là *đối thiết* (Alternative hypothesis), ký hiệu H_1. Đối thiết H_1 sẽ được chấp nhận khi H_0 bị bác bỏ và ngược lại

7.1.2 Tiêu chuẩn kiểm định giả thiết thống kê

Qui tắc kiểm định dựa trên hai nguyên lý sau

- Nguyên lý xác suất nhỏ: "Nếu một biến cố có xác rất nhỏ thì trong một phép thử biến cố đó được coi như không xảy ra"
- Phương pháp phản chứng: "Để bác bỏ A ta giả sử A đúng; nếu từ giả thiết A đúng dẫn đến một điều vô lý thì ta bác bỏ A"

Dựa vào hai nguyên lý này ta đưa ra phương pháp chung để kiểm định một giả thiết thống kê như sau:

Để kiểm định H_0 trước hết giả sử H_0 đúng từ đó ta tìm được biến cố A mà xác suất xuất hiện biến cố A là rất bé và ta có thể xem A không thể xảy ra trong một phép thử. Lúc đó nếu từ một mẫu cụ thể quan sát được mà biến cố A xảy ra thì điều này trái với nguyên lý xác suất nhỏ. Vậy H_0 sai và bác bỏ nó.

CHƯƠNG VII: KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT THỐNG KÊ

Từ biến ngẫu nhiên gốc X của tổng thể lập mẫu ngẫu nhiên $W = (X_1, X_2, ..., X_n)$. Chọn thống kê

$$T = T(X_1, X_2, ..., X_n, \theta_0)$$

trong đó θ_0 là tham số liên quan đến giả thiết cần kiểm định.

Nếu H_0 đúng thì thống kê T có quy luật phân bố xác suất xác định.

thì Thống kê T được gọi là *tiêu chuẩn kiểm định*.

7.1.3 Miền bác bỏ giả thiết

Sau khi đã chọn tiêu chuẩn kiểm định T, với α bé cho trước (thường α được lấy bằng 0,05 hoặc 0,01) và với giả thiết H_0 đúng ta có thể tìm được miền W_α sao cho T nhận giá trị trong miền W_α với xác suất bằng α

$$P\{T \in W_\alpha \mid \mathrm{H}_0\} = \alpha$$

W_α gọi là *miền bác bỏ giả thiết* H_0 *với mức ý nghĩa* α

7.1.4 Giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định

Thay giá trị thu được mẫu cụ thể $w=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vào thống kê tiêu chuẩn kiểm định ta được giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định

$$T_{qs} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_0)$$

7.1.5 Quy tắc kiểm định giả thiết thống kê

So sánh giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định với miền bác bỏ W_α và kết luận theo quy tắc sau

1. Nếu $T_{qs} \in W_\alpha$, theo nguyên tắc kiểm định thì H_0 sai, do đó ta bác bỏ H_0 thừa nhận H_1

2. Nếu $T_{qs} \notin W_\alpha$ thì điều này chưa khẳng định rằng H_0 đúng mà chỉ có nghĩa là qua mẫu cụ thể này chưa khẳng định được là H_0 sai. Do đó ta chỉ có thể nói rằng qua mẫu cụ thể này chưa có cơ sở để bác bỏ H_0 (trên thực tế là thừa nhận H_0)

7.1.6 Sai lầm loại một và sai lầm loại hai

Với quy tắc kiểm định như trên có thể mắc hai loại sai lầm sau

1. Sai lầm loại I: Đó là sai lầm mắc phải khi bác bỏ giả thiết H_0 trong khi H_0 đúng. Ta thấy xác suất mắc sai lầm loại I đúng bằng mức ý nghĩa α. Thật vậy, xác suất ta bác bỏ H_0 bằng xác suất biến cố $\{T \in W_\alpha\}$, do đó khi H_0 đúng thì xác suất này bằng $P\{T \in W_\alpha | H_0\} = \alpha$. Sai lầm loại I sinh ra do kích thước mẫu quá nhỏ, do phương pháp lấy mẫu v.v…

2. Sai lầm loại II: Đó là sai lầm mắc phải khi thừa nhận giả thiết H_0 trong khi H_0 sai, điều này xảy ra khi giá trị quan sát T_{qs} không thuộc miền bác bỏ W_α trong khi H_1 đúng. Vậy xác suất sai lầm loại II là β xác định như sau: $P\{T \notin W_\alpha | H_1\} = \beta$

Xác suất của biến cố đối của sai lầm loại II: $P\{T \in W_\alpha | H_1\} = 1 - \beta$ gọi là ***lực lượng của kiểm định***

Thực tế / Quyết định	H_0 đúng	H_0 sai
Bác bỏ H_0	**Sai lầm loại I** Xác suất = α	Quyết định đúng Xác suất = $1-\beta$
Không bác bỏ H_0	Quyết định đúng Xác suất = $1-\alpha$	**Sai lầm loại II** Xác suất = β

Ta muốn tìm một qui tắc kiểm định mà cả hai loại sai lầm trên là cực tiểu. Nhưng không tồn tại kiểm định lý tưởng như vậy, vì nói chung khi giảm sai lầm loại I thì sai lầm loại II tăng và ngược lại

Trong bài toán kiểm định thì giả thiết H_0 là giả thiết quan trọng, do đó sai lầm về nó càng nhỏ càng tốt. Vì vậy các nhà thống kê đưa ra phương pháp sau

Sau khi ta chọn sai lầm loại I nhỏ ở **mức ý nghĩa α**, với mẫu kích thước n xác định, ta chọn ra miền bác bỏ W_α sao cho xác suất sai lầm loại II là nhỏ nhất hay lực lượng kiểm định là lớn nhất.

Nghĩa là cần tìm miền bác bỏ W_α thỏa mãn điều kiện

$$P\left\{T \in W_\alpha \middle| \mathrm{H}_0\right\} = \alpha \quad \text{và} \quad P\left\{T \in W_\alpha \middle| \mathrm{H}_1\right\} = 1 - \beta \to \max$$

Định lý Neymann - Pearson chỉ ra rằng nhiều bài toán quan trọng trong thực tiễn có thể tìm được miền bác bỏ W_α thỏa mãn điều kiện trên

7.1.7 Thủ tục kiểm định giả thiết thống kê

Một thủ tục kiểm định giả thiết thống kê bao gồm các bước sau

1. Phát biểu giả thiết H_0 và đối thiết H_1
2. Từ tổng thể nghiên cứu lập mẫu ngẫu nhiên kích thước n
3. Chọn tiêu chuẩn kiểm định T và xác định quy luật phân bố xác suất của T với điều kiện giả thiết H_0 đúng
4. Với mức ý nghĩa α, xác định miền bác bỏ W_α tốt nhất tùy thuộc vào đối thiết H_1
5. Từ mẫu cụ thể tính giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định T_{qs}
6. So sánh giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định T_{qs} với miền bác bỏ W_α và kết luận

7.2 KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT VỀ KỲ VỌNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN CÓ PHÂN BỐ CHUẨN

Giả sử biến ngẫu nhiên gốc X trong tổng thể có phân bố chuẩn $\mathbf{N}(\mu;\sigma^2)$, cần kiểm định kỳ vọng μ

Nếu có cơ sở để giả thiết rằng kỳ vọng μ bằng giá trị μ_0 ta đưa ra giả thiết thống kê

$$H_0: \ \mu = \mu_0$$

Tiêu chuẩn kiểm định và miền bác bỏ phụ thuộc các trường hợp sau

7.2.1 Trường hợp đã biết phương sai

Giả sử phương sai σ^2 của biến ngẫu nhiên gốc X trong tổng thể có phân bố chuẩn $\mathbf{N}(\mu;\sigma^2)$ đã biết

Từ tổng thể rút ra một mẫu ngẫu nhiên kích thước n:

$$W=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Tiêu chuẩn kiểm định $T = \dfrac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}$

Nếu giả thiết H_0 đúng thì thống kê $T = \dfrac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$

có phân bố chuẩn tắc $\mathbf{N}(0;1)$

Bài toán 1: H_0: $\mu = \mu_0$; H_1: $\mu \neq \mu_0$ *bài toán kiểm định hai phía*

Miền bác bỏ $$W_\alpha = \left\{ T = \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}; |T| > U_{\alpha/2} \right\}$$

Bài toán 2: H_0: $\mu = \mu_0$; H_1: $\mu > \mu_0$ *bài toán kiểm định một phía*

Miền bác bỏ $$W_\alpha = \left\{ T = \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}; T > U_\alpha \right\}$$

Bài toán 3: H_0: $\mu = \mu_0$; H_1: $\mu < \mu_0$ *bài toán kiểm định một phía*

Miền bác bỏ $$W_\alpha = \left\{ T = \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}; -T > U_\alpha \right\}$$

7.2.2. Trường hợp chưa biết phương sai, kích thước mẫu $n \geq 30$

Bài toán 1: H_0: $\mu = \mu_0$; H_1: $\mu \neq \mu_0$ *bài toán kiểm định hai phía*

Miền bác bỏ $$W_\alpha = \left\{ T = \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S};\ |T| > U_{\alpha/2} \right\}$$

Bài toán 2: H_0: $\mu = \mu_0$; H_1: $\mu > \mu_0$ *bài toán kiểm định một phía*

Miền bác bỏ $$W_\alpha = \left\{ T = \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S};\ T > U_\alpha \right\}$$

Bài toán 3: H_0: $\mu = \mu_0$; H_1: $\mu < \mu_0$ *bài toán kiểm định một phía*

Miền bác bỏ $$W_\alpha = \left\{ T = \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S};\ -T > U_\alpha \right\}$$

Ví dụ 7.12: Một công ti có một hệ thống máy tính có thể xử lí 1200 hóa đơn trong một giờ. Công ti mới nhập một hệ thống máy tính mới. Hệ thống này khi chạy kiểm tra trong 40 giờ cho thấy số hóa đơn được xử lí trung bình trong 1 giờ là 1260 với độ lệch chuẩn 215. Với mức ý nghĩa 5% hãy nhận định xem hệ thống mới có tốt hơn hệ thống cũ hay không?

Giải: Gọi μ là số hóa đơn trung bình mà hệ thống máy tính mới xử lí được trong 1 giờ

Ta kiểm định: Giả thiết H_0: $\mu = 1200$; Đối thiết H_1: $\mu > 1200$

Tiêu chuẩn kiểm định $T = \dfrac{(\overline{X} - 1200)\sqrt{n}}{S}$

Miền bác bỏ $W_\alpha = \left\{ T = \dfrac{(\overline{X} - 1200)\sqrt{n}}{S}; T > 1,64 \right\}$

Giá trị quan sát $T_{qs} = \dfrac{(1260 - 1200)\sqrt{40}}{215} = 1,76 \in W_\alpha$

7.2.3 Trường hợp chưa biết phương sai, kích thước mẫu $n < 30$

Giả sử giả thiết H_0: $\mu = \mu_0$ đúng

Khi đó thống kê

$$T = \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S}$$

có phân bố Student $n-1$ bậc tự do

Ta xây dựng các miền bác bỏ dựa vào đối thiết H_1

Ký hiệu $t_\alpha(n-1)$, $t_{\alpha/2}(n-1)$ lần lượt là giá trị tới hạn mức α, mức $\alpha/2$ của phân bố Student $n-1$ bậc tự do

Bài toán 1: H_0: $\mu = \mu_0$; H_1: $\mu \neq \mu_0$ *bài toán kiểm định hai phía*

Miền bác bỏ $$W_\alpha = \left\{ T = \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S};\ |T| > t_{\alpha/2}(n-1) \right\}$$

Bài toán 2: H_0: $\mu = \mu_0$; H_1: $\mu > \mu_0$ *bài toán kiểm định một phía*

Miền bác bỏ $$W_\alpha = \left\{ T = \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S};\ T > t_\alpha(n-1) \right\}$$

Bài toán 3: H_0: $\mu = \mu_0$; H_1: $\mu < \mu_0$ *bài toán kiểm định một phía*

Miền bác bỏ $$W_\alpha = \left\{ T = \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S};\ -T > t_\alpha(n-1) \right\}$$

Ví dụ 7.16: Một công ty sản xuất hạt giống tuyên bố rằng một loại giống mới của họ có năng suất trung bình là 21,5 tạ/ha. Gieo thử hạt giống mới này tại 16 vườn thí nghiệm và thu được kết quả:

19,2; 18,7; 22,4; 20,3; 16,8; 25,1; 17,0; 15,8; 21,0; 18,6;
23,7; 24,1; 23,4; 19,8; 21,7; 18,9.

Với mức ý nghĩa 5%, dựa vào kết quả này hãy xác nhận xem quảng cáo của công ty có đúng không. Biết rằng năng suất giống cây trồng là một biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn.

Giải:

Gọi μ là năng suất trung bình của loại giống mới

Ta kiểm định: Giả thiết H_0: $\mu = 21,5$; Đối thiết H_1: $\mu \neq 21,5$

Tiêu chuẩn kiểm định $$T = \frac{(\overline{X} - 21{,}5)\sqrt{n}}{S}$$

Giá trị tới hạn mức 0,025 của phân bố Student 15 bậc tự do là 2,131

Miền bác bỏ $$W_\alpha = \left\{ T = \frac{(\overline{X} - 21{,}5)\sqrt{n}}{S}\ ;\ |T| > 2{,}131 \right\}$$

Giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định

$$\overline{x} = 20{,}406;\ s = 3{,}038 \Rightarrow T_{qs} = \frac{(20{,}406 - 21{,}5)\sqrt{16}}{3{,}038} = -1{,}44$$

Vì $|T_{qs}| = 1{,}44 < 2{,}131$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ H_0

Có nghĩa là với số liệu này thì có thể chấp nhận lời quảng cáo của công ty

7.3 KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT VỀ XÁC SUẤT

Giả sử ta để ý đến một đặc trưng A nào đó mà mỗi cá thể của tổng thể có thể có tính chất này hoặc không

Gọi p là tần suất có đặc trưng A của tổng thể (p cũng là xác suất cá thể có đặc trưng A của tổng thể), dấu hiệu nghiên cứu này là một biến ngẫu nhiên X có phân bố Bernoulli với kỳ vọng bằng p

Nếu p chưa biết, song có cơ sở để giả thiết rằng giá trị này bằng p_0

Ta kiểm định giả thiết

$$H_0: p = p_0$$

Từ tổng thể rút ra một mẫu ngẫu nhiên kích thước n

Gọi f là tần suất mẫu

Tiêu chuẩn kiểm định
$$T = \frac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}$$

Nếu giả thiết H_0 đúng, với n đủ lớn thỏa mãn
$$\begin{cases} np_0 > 5 \\ n(1 - p_0) > 5 \end{cases}$$

thống kê $\boldsymbol{T}$ xấp xỉ phân bố chuẩn tắc $\mathrm{N}(0;1)$

Do đó với mức ý nghĩa α và tùy thuộc đối thiết H_1 ta có thể xây dựng các miền bác bỏ tương ứng

Bài toán 1: H_0: $p = p_0$; H_1: $p \neq p_0$ *bài toán kiểm định hai phía*

Miền bác bỏ
$$W_\alpha = \left\{ T = \frac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}};\ |T| > U_{\alpha/2} \right\}$$

Bài toán 2: H_0: $p = p_0$; H_1: $p > p_0$ *bài toán kiểm định một phía*

Miền bác bỏ
$$W_\alpha = \left\{ T = \frac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}};\ T > U_\alpha \right\}$$

Bài toán 3: H_0: $p = p_0$; H_1: $p < p_0$ *bài toán kiểm định một phía*

Miền bác bỏ
$$W_\alpha = \left\{ T = \frac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}};\ -T > U_\alpha \right\}$$

Ví dụ 7.17: Một đảng chính trị trong một cuộc bầu cử tổng thống ở nước nọ tuyên bố rằng có 45% cử tri sẽ bỏ phiếu cho ứng cử viên A của đảng họ.

Chọn ngẫu nhiên 2000 cử tri để thăm dò ý kiến và cho thấy có 862 cử tri tuyên bố sẽ bỏ phiếu cho A

Với mức ý nghĩa 5%, hãy kiểm định xem dự đoán của đảng trên có đúng không

Giải:

Gọi p là tỉ lệ cử tri sẽ bỏ phiếu cho ứng cử viên A

Ta kiểm định: Giả thiết H_0: $p = 0,45$; Đối thiết H_1: $p \neq 0,45$

Điều kiện n đủ lớn $$\begin{cases} np_0 = 2000 \cdot 0,45 = 900 > 5 \\ n(1 - p_0) = 2000 \cdot 0,55 = 1100 > 5 \end{cases}$$

Tiêu chuẩn kiểm định $T = \dfrac{(f - 0,45)\sqrt{2000}}{\sqrt{0,45 \times 0,55}}$

$\alpha = 5\% \Rightarrow U_{\alpha/2} = 1,96$ Miền bác bỏ $W_\alpha = \left\{ |T| > 1,96 \right\}$

Tần suất mẫu $f = \dfrac{862}{2000} = 0,431$

Giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định

$$T_{qs} = \frac{(0,431 - 0,45)\sqrt{2000}}{\sqrt{0,45 \cdot 0,55}} = -1,708$$

Ta thấy $|T_{qs}| < 1,96$

Vậy chưa có cơ sở để bác bỏ H_0