BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2 (Nhóm 2 áp dụng từ 06-2018)

CHƯƠNG 1
Hàm số nhiều biến số

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$. b) $z = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

c) $z = \arcsin \dfrac{y-1}{x}$. d) $z = \sqrt{x \sin y}$.

2. Tìm giới hạn (nếu có) của các hàm số sau:

a) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+3xy}$ $(x \to 0, y \to 0)$. b) $f(x,y) = \sin \dfrac{\pi x}{2x+y}$ $(x \to \infty, y \to \infty)$.

c) $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^4+y^2}$ $(x \to 0, y \to 0)$. d) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$ $(x \to 0, y \to 0)$.

3. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau:

a) $z = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$. b) $z = y^2 \sin \dfrac{x}{y}$. c) $z = \arctan \sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

d) $z = x^{y^3}$ $(x > 0)$. e) $u = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$. f) $z = \sqrt[3]{x^3+2y^3}$.

4. Khảo sát sự liên tục và sự tồn tại của các đạo hàm riêng của các hàm số sau:

a) $z = \begin{cases} x \arctan \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$ b) $z = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y \sin x}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0;0), \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0;0). \end{cases}$

5. Giả sử $z = yf(x^2-y^2)$, trong đó f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z hệ thức sau luôn thỏa mãn

$$\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}.$$

6. Tìm đạo hàm riêng của các hàm số hợp sau đây

a) $z = e^{u^2-2v^2}$, $u = \cos x$, $v = \sqrt{x^2+y^2}$. b) $z = \ln(u^2+v^2)$, $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

c) $z = \arcsin(x-y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$.

7. Cho f là hàm số khả vi đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số $w(x,t) = f(x-3t)$ thỏa mãn phương trình truyền sóng $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

8. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số sau

a) $z = \sin(x^2+y^3)$. b) $z = \ln \tan \dfrac{y}{x}$. c) $z = \arctan \dfrac{x+y}{x-y}$. d) $u = x^{y^2 z}$.

9. Tính gần đúng

a) $A = \sqrt{(2.02)^3 + e^{0.03}}$. b) $B = (1.02)^{1.01}$.

10. Tìm đạo hàm, đạo hàm riêng của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau

a) $x^3y - xy^3 = a^4$, tính y'. b) $x^2 + y + z^3 + e^z = 0$, tính z'_x, z'_y.

c) $\arctan\dfrac{x+y}{a} = \dfrac{y}{a}$, tính y'. d) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, tính z'_x, z'_y.

11. Cho hàm số ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $2x^2y + 4y^2 + x^2z + z^3 = 3$. Tính $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0; 1)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0; 1)$.

12. Cho $u = \dfrac{x+z}{y+z}$, tính u'_x, u'_y biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định bởi phương trình $ze^z = xe^x + ye^y$.

13. Phương trình $z^2 + \dfrac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, xác định hàm số ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng

$$x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{z}.$$

14. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

a) $z = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$. b) $z = x^2 \ln(x+y)$. c) $z = \arctan\dfrac{y}{x}$. d) $z = \sin(x^3 + y^2)$.

15. Tính vi phân cấp hai của các hàm số sau

a) $z = xy^3 - x^2y$. b) $z = e^{2x}(x + y^2)$. c) $z = \ln(x^3 + y^2)$.

16. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $z = 4x^3 + 6x^2 - 4xy - y^2 - 8x + 2$. b) $z = 2x^2 + 3y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$.

c) $z = 4xy - x^4 - 2y^2$. d) $z = \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{xy}{12}$. e) $z = e^{2x}(4x^2 - 2xy + y^2)$.

17. Tìm cực trị có điều kiện $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $3x - 4y = 5$.

18. Tìm một điểm thuộc elip $4x^2 + y^2 = 4$ sao cho nó xa điểm $A(1; 0)$ nhất.

19. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a) $z = x^2 + y^2 + xy - 7x - 8y$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$ và $x + y = 6$.

b) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi/2$, $y = 0$ và $y = \pi/2$.

CHƯƠNG 2

Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

Ứng dụng trong hình học phẳng

1. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong:

   a) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ tại điểm $(-2; 5)$.

   b) $y = e^{1-x^2}$ tại giao điểm của đường cong với đường thẳng $y = 1$

   c) $x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t$ tại điểm ứng với $t = \pi/2$.

2. Tính độ cong của:

   a) $y = \ln(\cos x)$ tại điểm ứng với $x = \pi/4$.

   b) $\begin{cases} x = t^3 + 2 \\ y = \ln(2t-1) \end{cases}$ tại điểm $M(3; 0)$.

3. Tìm điểm M trên parabol $P : y = x^2 - 4x + 6$ sao cho độ cong của P tại M đạt lớn nhất.

Ứng dụng trong hình học không gian

1. Giả sử $\vec{p}(t), \vec{q}(t), \alpha(t)$ là các hàm khả vi. Chứng minh rằng:

   a) $\dfrac{d}{dt}(\vec{p}(t) + \vec{q}(t)) = \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} + \dfrac{d\vec{q}(t)}{dt}$.

   b) $\dfrac{d}{dt}(\alpha(t)\vec{p}(t)) = \alpha(t)\dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} + \alpha'(t)\vec{p}(t)$.

2. Đường cong C được biểu diễn bởi hàm vectơ $\vec{r}(t)$. Giả sử $\vec{r}(t)$ là hàm khả vi và $\vec{r}\,'(t)$ luôn vuông góc với $\vec{r}(t)$. Chứng minh rằng C nằm trên một mặt cầu tâm tại gốc tọa độ.

3. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

   a) $x = a\sin^2 t,\ y = b\sin t\cos t,\ z = c\cos^2 t$ tại điểm ứng với $t = \pi/4,\ (a, b, c > 0)$.

   b) $x = 2\cos t,\ y = 4\sin t,\ z = 4\cos^2 t + 1$ tại điểm $M(\sqrt{2}; 2; 4)$.

4. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong:

   a) $x^2 + 3y + 2z^3 = 3$ tại điểm $(2; -1; 1)$.

   b) $z = \ln(2 + 3x^2 - 4y^2)$ tại điểm $(1; 1; 0)$.

   c) $2x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$ tại điểm $(1; -1; 1)$.

   d) $x^2 + 2y^3 - yz = 0$ tại điểm $(1; 1; 3)$.

   e) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$ tại điểm $(4; 1; -4)$.

5. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

   a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$ tại điểm $(4; -3; 0)$.

   b) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ tại điểm $(-2; 1; 6)$.

CHƯƠNG 3
Tích phân kép

Tích phân kép

1. Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau

a) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$ b) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$

c) $\int_0^{\pi/2} dy \int_{\sin y}^{1+y^2} f(x,y)dx.$ d) $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_{\sqrt{2}}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx.$

2. Tính các tích phân sau

a) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$, trong đó $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

b) $\iint\limits_{\mathcal{D}} (2y-x)dxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường cong $y = x^2$ và $y = 1$.

c) $\iint\limits_{\mathcal{D}} |x-y|dxdy$, trong đó $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

d) $\iint\limits_{\mathcal{D}} x\sqrt{y^2-x^2}dxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường $y = x$, $x = 0$ và $y = 1$.

e) $\iint\limits_{\mathcal{D}} 2xydxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ giới hạn bởi các đường $x = y^2, x = -1, y = 0$ và $y = 1$.

f) $\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} (|x|+|y|)dxdy.$ g) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt[4]{x}}^1 \frac{dy}{y^5+1}.$

3. Tìm cận lấy tích phân trong toạ độ cực của $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, trong đó D là miền xác định như sau

a) $a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2.$ b) $x^2+y^2 \geq x,\ x^2+y^2 \leq 2x,\ x \leq y,\ y \leq \sqrt{3}x.$

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,\ y \geq 0, (a, b > 0).$

4. Dùng phép đổi biến trong hệ toạ độ cực, hãy tính các tích phân sau

a) $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{Rx-x^2}}^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{Rx-x^2-y^2}dy,\ (R > 0).$ b) $\iint\limits_{\mathcal{D}} x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, với $D : x^2+y^2 \leq x.$

c) $\iint\limits_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)dxdy$, với $\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$.

d) $\iint\limits_{\mathcal{D}} xydxdy$, với

1) D là mặt tròn: $(x-2)^2+y^2 \leq 1$. 2) D là nửa mặt tròn: $(x-2)^2+y^2 \leq 1, y \geq 0$.

e) $\iint\limits_D |x-y|dxdy$ với $D: x^2+y^2 \leq 1$.

5. Chuyển tích phân sau theo hai biến u và v:

a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{-x}^{x} f(x,y)dy$, nếu đặt $\begin{cases} u = x+y, \\ v = x-y. \end{cases}$ b) Áp dụng tính với $f(x,y) = (2-x-y)^2$.

6. Tính các tích phân sau

a) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, trong đó $\mathcal{D}: \begin{cases} y \leq x^2+y^2 \leq 2y, \\ x \leq y \leq \sqrt{3}x. \end{cases}$

b) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, trong đó $\mathcal{D}: x^2+y^2 \leq 1$.

c) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$, trong đó $\mathcal{D}: \begin{cases} 2x \leq x^2+y^2 \leq 12, \\ x^2+y^2 \geq 2\sqrt{3}y, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$

d) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} |9x^2-4y^2|dxdy$, trong đó $\mathcal{D}: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1$.

e) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} (4xy+3y)dxdy$, trong đó $\mathcal{D}:\ 1 \leq xy \leq 4,\ x \leq y \leq 9x$.

Ứng dụng của tích phân kép

1. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y^2 = x, y^2 = 2x, \\ x^2 = y, x^2 = 2y. \end{cases}$

2. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi $\begin{cases} y = 0,\ y^2 = 4ax, \\ x+y = 3a,\ y \leq 0, (a > 0). \end{cases}$

3. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ xác định bởi $\begin{cases} 2x \leq x^2+y^2 \leq 4x, \\ 0 \leq y \leq x. \end{cases}$

4. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ xác định bởi $r \geq 1,\ r \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cos\varphi$.

5. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi đường $r = a(1+\cos\varphi)$, $(a > 0)$.

6. Chứng minh rằng diện tích miền D xác định bởi $x^2 + (\alpha x - y)^2 \leq 4$ không đổi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

7. Tính thể tích của miền xác định bởi

$$x+y \geq 1, \quad x+2y \leq 2, \quad y \geq 0, \quad 0 \leq z \leq 2-x-y.$$

8. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $z = 4-x^2-y^2$, $2z = 2+x^2+y^2$.

9. Tính thể tích của miền xác định bởi $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$, $x \leq y \leq \sqrt{3}x$.

10. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $z = 1 + x^2 + y^2$, mặt trụ $4x^2 + y^2 = 4$ và mặt phẳng Oxy.

11. Tính thể tích của miền giới hạn bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ và nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 - 2ay = 0, (a > 0)$.

12. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2x}{a}$, $(a, b > 0)$.

13. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}, (a > 0)$.

CHƯƠNG 4
Tích phân đường

Tích phân đường loại 1

Tính các tích phân sau:

1. $\int\limits_C (xy + x + 2y)ds$, trong đó C là đường cong $x = \cos t$, $y = \sin t$ với $0 \leq t \leq \pi/2$.

2. $\int\limits_C xyds$, trong đó C là nửa đường elip $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $y \geq 0$.

3. $\int\limits_C (x - y)ds$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$.

4. $\int\limits_C y^2 ds$, trong đó C là đường có phương trình $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0). \end{cases}$

Tích phân đường loại 2

Tính các tích phân sau:

1. $\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + (3xy + 1)dy$, trong đó L là cung parabol $y = x^2$ đi từ $O(0;0)$ đến $M(1;1)$.

2. $\int\limits_C (2x - y)dx + xdy$, trong đó C là đường cong $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ theo chiều tăng của $t, (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$.

3. $\int\limits_{ABCA} 2(x^2 + y^2)dx + x(4y + 3)dy$, trong đó $ABCA$ là đường gấp khúc đi qua $A(0;0)$, $B(1;1)$, $C(0;2)$.

4. $\int\limits_{ABCDA} \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$, trong đó $ABCDA$ là đường gấp khúc đi qua $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$.

5. Tính tích phân sau

$$\int\limits_{C} (xy+x+y)dx + (xy+x-y)dy$$

bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả, với C là đường:

a) $x^2+y^2=R^2$. b) $x^2+y^2=2x$. c) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, (a,b>0)$.

6. $\oint\limits_{x^2+y^2=2x} x^2(y+\dfrac{x}{4})dy - y^2(x+\dfrac{y}{4})dx$.

7. $\oint\limits_{OABO} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$, trong đó $OABO$ là đường gấp khúc qua $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;2)$.

8. $\oint\limits_{x^2+y^2=2x} (xy+e^x\sin x+x+y)dx-(xy-e^{-y}+x-\sin y)dy$.

9. $\oint\limits_{C}(xy^4+x^2+y\cos(xy))dx-\left(\dfrac{x^3}{3}+xy^2-x+x\cos(xy)\right)dy$, trong đó C là đường cong $x=a\cos t$, $y=a\sin t, (a>0)$.

10. Dùng tích phân đường loại hai tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp xycloit : $x=a(t-\sin t); y=a(1-\cos t)$ và trục Ox, $(a>0)$.

11. $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$. 12. $\int\limits_{(1;\pi)}^{(2;2\pi)} \left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)dy$.

13. Tính tích phân đường $\int_C (y^2-e^y\sin x)dx+(x^2+2xy+e^y\cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $x=\sqrt{2y-y^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $P(0;2)$.

14. Tìm hằng số a, b để biểu thức $(y^2+axy+y\sin(xy))dx+(x^2+bxy+x\sin(xy))dy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó. Hãy tìm hàm số $u(x,y)$ đó.

15. Tìm hàm số $h(y)$ để tích phân

$$\int\limits_{AB} h(y)[y(2x+y^3)dx-x(2x-y^3)dy]$$

không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với $h(y)$ vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ $A(0;1)$ đến $B(-3;2)$.

CHƯƠNG 5
Lý thuyết trường

1. Tính đạo hàm theo hướng $\vec{\ell}$ của hàm $u = 3x^3 + y^2 + 2z^3 - 2xyz$ tại điểm $A(1;2;1)$ với $\vec{\ell} = \overrightarrow{AB}, B(2;4;2)$.

2. Cho hàm số $u(x,y,z) = x^3 + 3x^2y + 2yz^3$. Tính đạo hàm $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ tại điểm $A(1;1;-1)$, trong đó $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến hướng ra ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ tại điểm A.

3. Tính môđun của $\overrightarrow{grad u}$, với

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$$

tại $A(2;1;1)$. Khi nào thì $\overrightarrow{grad u}$ vuông góc với Oz, khi nào thì $\overrightarrow{grad u} = 0$?

4. Tính $\overrightarrow{grad u}$, với

$$u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r, \quad \text{với } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

5. Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số $u = x\sin z - y\cos z$ từ gốc $O(0;0;0)$ là lớn nhất?

6. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{grad z}$ của các hàm số $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ tại $(3;4)$.

7. Trong các trường vectơ sau đây, trường nào là trường thế? Tìm hàm thế vị (nếu có).

a) $\vec{F} = (x^2 - 4xy)\vec{i} + (2x^3 - 2z)\vec{j} + e^z\vec{k}$.

b) $\vec{F} = (yz + 1)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + (xy - 3)\vec{k}$.

c) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (z + y)\vec{k}$.

d) $\vec{F} = C\dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, $C \neq 0$ hằng số.

e) $\vec{F} = (3x^2 + 2yz)\vec{i} + (y^2 + 2xz + e^y)\vec{j} + (9z^2 + 2xy)\vec{k}$.