CHƯƠNG 3: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG, TÍCH PHÂN MẶT

Bổ sung

$1^0)$ Đường phẳng (trong $\mathbb{R}^2$) có phương trình

$$y = y(x) \qquad (1) \qquad (a \le x \le b)$$

hoặc $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (2) \qquad (\alpha \le t \le \beta)$

(dạng tham số)

2^0) Cung AB xác định bởi phương trình dạng (1) gọi là cung trơn nếu hàm số $y(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$.

3^0) Cung AB xác định bởi phương trình dạng (2) gọi là cung trơn nếu các hàm số $x(t)$, $y(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha,\beta]$.

$4^0)$ Cung AB được gọi là trơn từng khúc nếu nó gồm hữu hạn cung trơn.

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT

I) TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT TRONG MẶT PHẲNG

1) Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên cung phẳng AB.

Chia AB thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $A \equiv A_0$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \equiv B$.

Trên mỗi cung $A_{i-1}A_i$ chọn một điểm (ξ_i, η_i) tùy ý.

Gọi Δs_i là độ dài cung $A_{i-1}A_i$

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT

Nếu giới hạn $\lim\limits_{\max\Delta s_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$ tồn tại hữu hạn,

không phụ thuộc phép chia AB, phép chọn các điểm

$(\xi_i, \eta_i) \in A_{i-1}A_i$ thì giới hạn đó gọi là tích phân đường

loại một của hàm số $f(x, y)$ trên cung AB.

Kí hiệu: $\int\limits_{AB} f(x, y)ds.$

Khi đó ta nói $f(x, y)$ khả tích trên cung AB.

*** Nhận xét:**

Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên AB và cung AB trơn thì f khả tích trên AB.

2) Tính chất

*) $\int_{AB} ds = l$ (l : Độ dài AB)

*) $\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds$

* Tích phân đường loại một có các tính chất tương tự tích phân hai lớp.

3) Cách tính:

Giả sử $f(x,y)$ liên tục trên cung trơn AB

a) Nếu cung AB có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

thì

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f((x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$$

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT

b) Nếu cung AB có phương trình

$$y = y(x) \quad (a \le x \le b)$$

thì

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

* Tương tự, nếu cung AB có phương trình

$$x = x(y) \quad (c \le y \le d)$$

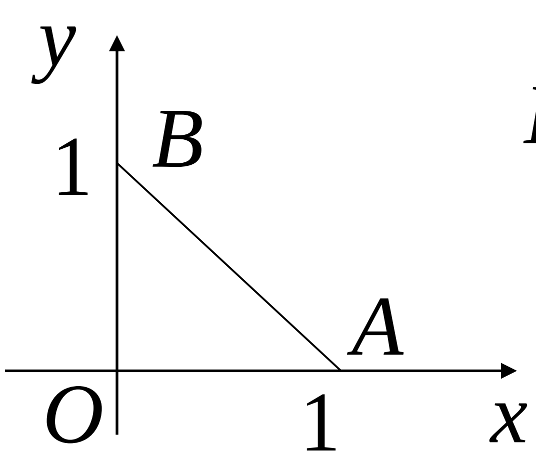
thì

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{c}^{d} f(x(y),y)\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy$$

Ví dụ: Tính $I = \int\limits_L (x+y)ds$

L là biên của tam giác với các đỉnh $O(0,0),\ A(1,0),\ B(0,1).$

Giải:



$$I = \int\limits_{OA} (x+y)ds + \int\limits_{AB} (x+y)ds + \int\limits_{BO} (x+y)ds$$

* OA có phương trình $y = 0 \quad (0 \le x \le 1)$

$$\int_{OA} (x+y)ds = \int_0^1 (x+0)\sqrt{1+0}\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

* AB có phương trình $y = 1 - x \quad (0 \le x \le 1)$

$$\int_{AB} (x+y)ds = \int_0^1 (x+1-x)\sqrt{1+(-1)^2}\, dx = \sqrt{2}.$$

* BO có phương trình $x = 0 \quad (0 \le y \le 1)$

$$\int_{BO} (x+y)ds = \int_0^1 (0+y)\sqrt{1+0}\, dy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Vậy $I = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}.$

Ví dụ: Tính $I = \int_L \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$

L là đường tròn $x^2 + y^2 = ax \ (a > 0)$

Giải:

$$L: \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

PT tham số của L là:

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

$$y = \frac{a}{2}\sin t$$

$$x'(t) = -\frac{a}{2}\sin t, \quad y'(t) = \frac{a}{2}\cos t$$

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{2}(1+\cos t)}\,.\sqrt{\frac{a^2}{4}}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2\frac{t}{2}}\,.\sqrt{\frac{a^2}{4}}\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt - \frac{a^2}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{t}{2}dt$$

$$= a^2\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} - a^2\sin\frac{t}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} = 2a^2.$$

4) Ứng dụng của tích phân đường loại một

$1^0)$ Độ dài AB là $\int_{AB} ds.$

$2^0)$ Nếu cung phẳng AB có khối lượng riêng tại (x,y) là $\rho(x,y)$ thì:

* Khối lượng cung AB là: $m = \int_{AB} \rho(x,y)ds$

* Trọng tâm cung AB là: $M_0(x_0, y_0)$

trong đó: $x_0 = \frac{1}{m}\int_{AB} x\rho(x,y)ds, \quad y_0 = \frac{1}{m}\int_{AB} y\rho(x,y)ds.$

II. Tích phân đường loại một trong không gian

* Tích phân đường loại 1 của hàm số $f(x,y,z)$ trên

AB (trong $\mathbb{R}^3$) kí hiệu là:

$$\int_{AB} f(x,y,z)ds.$$

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT

Cách tính:

Giả sử cung trơn AB có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

và $f(x, y, z)$ liên tục trên AB. Khi đó:

$$\int_{AB} f(x, y, z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

I. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI TRONG MẶT PHẲNG

1) Định nghĩa

a) Định nghĩa:

Cho $P(x,y),\ Q(x,y)$ là các hàm hai biến xác định trên cung phẳng AB.

Chia cung AB thành n cung nhỏ bởi các điểm chia

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

$A \equiv A_0, A_1, ..., A_n \equiv B.$

Trên mỗi cung $A_{i-1}A_i$ chọn một điểm (ξ_i, η_i) tùy ý.

Gọi Δs_i là độ dài cung $A_{i-1}A_i$.

Giả sử $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$

Nếu giới hạn $\lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$

tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc phép chia AB, phép chọn các điểm $(\xi_i, \eta_i) \in A_{i-1}A_i$ thì giới hạn đó được

gọi là tích phân đường loại hai của các hàm số $P(x, y)$,

$Q(x, y)$ dọc theo cung AB.

Kí hiệu: $\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$

b) Nhận xét:

Nếu AB trơn và các hàm số $P(x,y),\ Q(x,y)$ liên tục trên AB thì tồn tại $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$

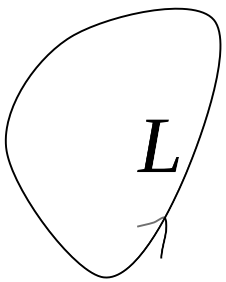
c) Tính chất:

$$1^0)\ \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$2^0)$ Tích phân đường loại hai có các tính chất giống tích phân xác định.

d) Chú ý:

Nếu đường cong L kín thì ta quy ước chiều dương trên L là chiều sao cho khi ta đi trên L theo chiều ấy thì thấy miền giới hạn bởi L ở bên trái.



Khi đó tích phân đường loại hai của các hàm số $P(x,y)$, $Q(x,y)$ dọc trên L theo chiều dương kí hiệu là:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

2) Cách tính:

Tính $\int_{AB} Pdx + Qdy$

$(P, Q$ liên tục trên cung trơn AB)

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

a) Nếu cung trơn AB *có phương trình tham số* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

t_A ứng với điểm A

t_B ứng với điểm B

thì $\displaystyle\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$

$$\int_{t_A}^{t_B} \left[P(x(t),y(t)).x'(t) + Q(x(t),y(t)).y'(t) \right] dt$$

b) Nếu cung trơn AB *có phương trình* $y = y(x)$

x_A là hoành độ điểm A

x_B là hoành độ điểm B

thì $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$

$$\int_{x_A}^{x_B} \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x)).y'(x)\right]dx.$$

Ví dụ: Cho $A(0,0)$, $B(1,1)$. Tính $I = \int\limits_{AB} x^2dx + xydy$ nếu:

a) AB là đoạn thẳng

b) AB là đường $y = \sqrt{x}$.

Giải:

a) AB có phương trình $y = x$

$$x_A = 0, \quad x_B = 1$$

$$I = \int_0^1 \left[x^2 + x.x.1\right]dx = 2\int_0^1 x^2dx = 2\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

b) AB có phương trình $x = y^2$

$$y_A = 0, \quad y_B = 1$$

$$I = \int_0^1 \left[y^4.2y + y^2.y \right] dy = \int_0^1 \left(2y^5 + y^3 \right) dy$$

$$= \left(\frac{y^6}{3} + \frac{y^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Ví dụ: Tính $I = \oint\limits_L xdy - ydx$

L là đường elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Giải:

Phương trình tham số của elip là:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left[a\cos t . b\cos t - b\sin t .(-a\sin t) \right] dt = ab\int_0^{2\pi} dt = 2\pi ab.$$

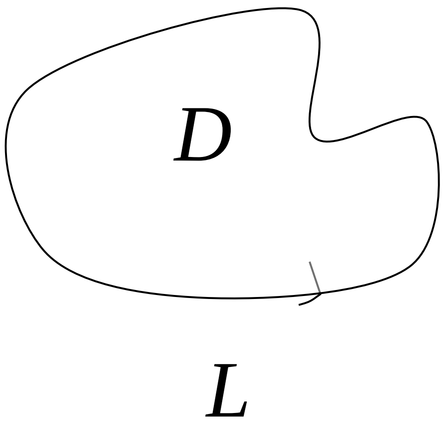
3) Công thức Green

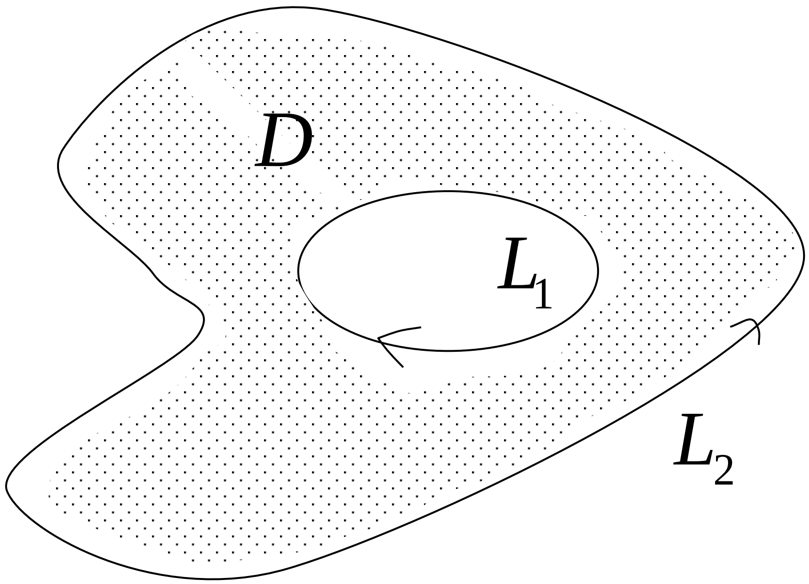
Định lí: Cho D là miền liên thông, bị chặn, có biên L là một hoặc nhiều đường cong kín, trơn từng khúc, rời nhau từng đôi một.

$P(x, y), Q(x, y)$ là các hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên D.

Khi đó: $$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Chiều dương trên L là chiều sao cho khi ta đi trên L theo chiều ấy thì thấy miền D ở bên trái.

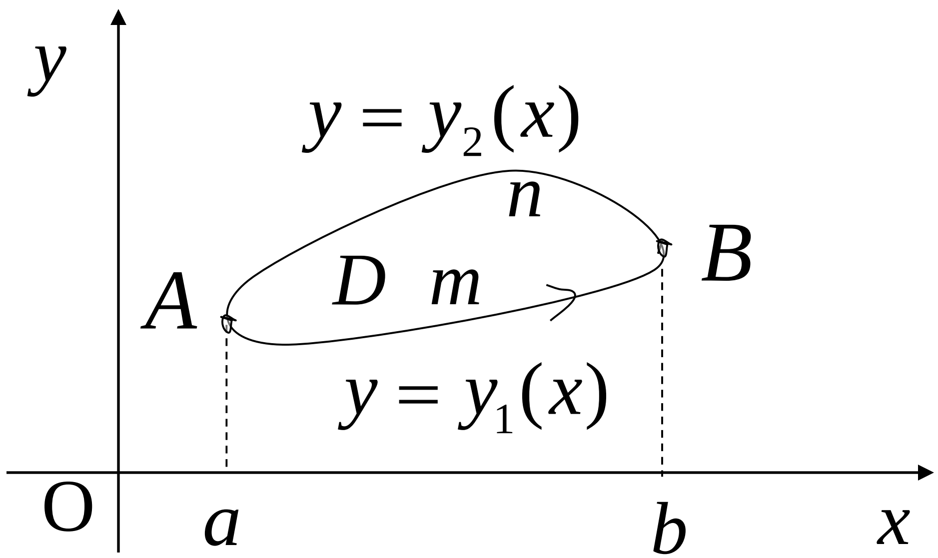




$$L = L_1 \cup L_2$$

Chứng minh:

Trường hợp 1: D là miền đơn liên, mọi đường thẳng song song với Ox,Oy cắt D tại nhiều nhất hai điểm.



D xác định bởi:

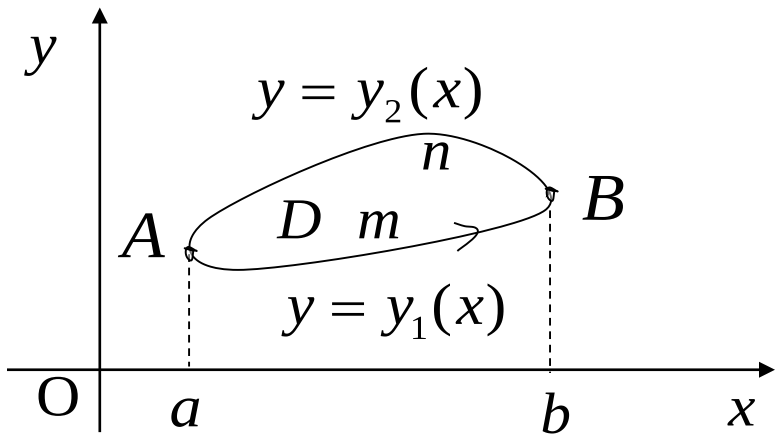
$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy = \int_a^b \left[P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))\right]dx$$

$$= \int_{AnB} P(x,y)dx - \int_{AmB} P(x,y)dx$$

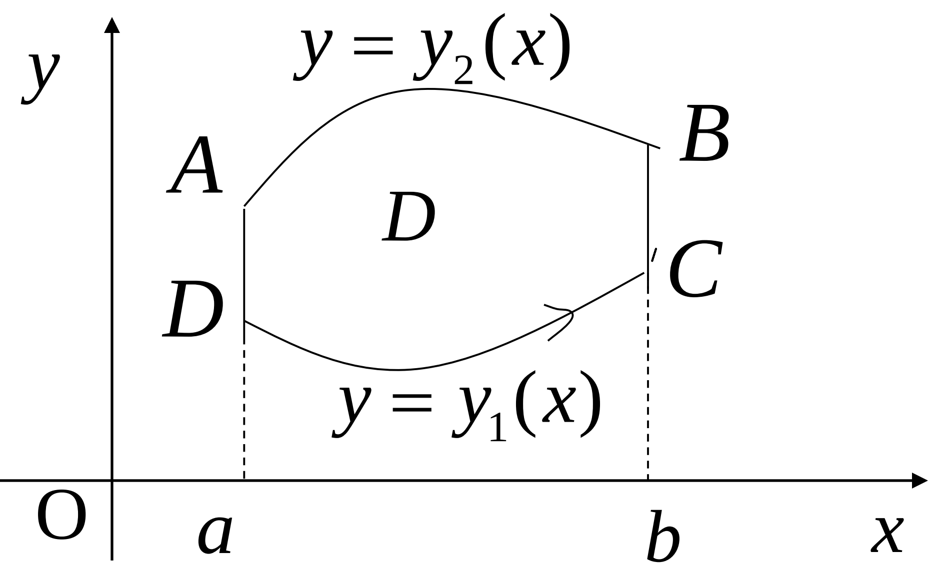
$$= \int_{BmAnB} P(x,y)dx = -\oint_L P(x,y)dx$$



Tương tự, $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint_L Q(x,y)dxdy.$

Vậy $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

Trường hợp 2: D là miền đơn liên, như hình vẽ



$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

$$= \int_a^b \left[P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) \right] dx$$

$$= \int_{AB} P(x,y)dx - \int_{DC} P(x,y)dx$$

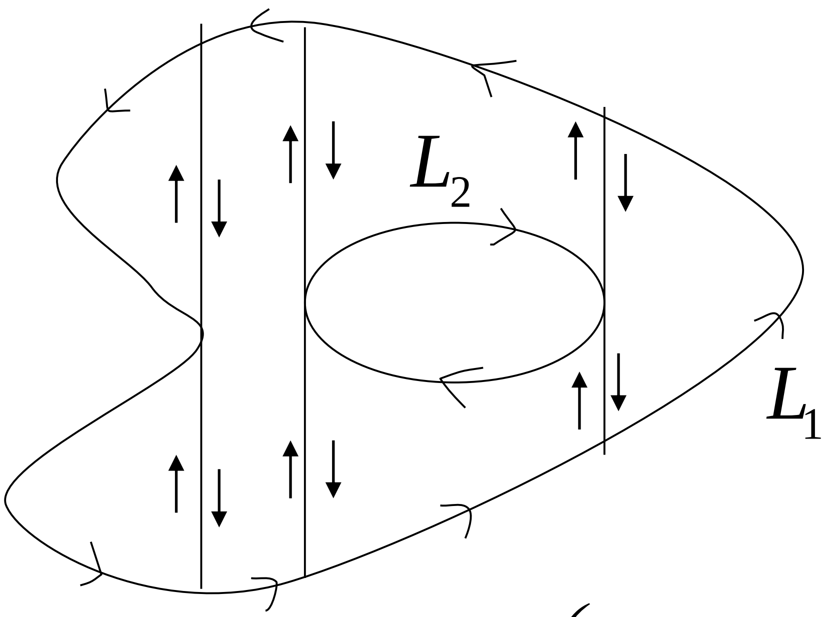
$$= \int_{CD} P(x,y)dx + \int_{DA} P(x,y)dx + \int_{AB} P(x,y)dx + \int_{BC} P(x,y)dx$$

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint_L P(x, y)dx.$$

Tương tự trường hợp 1, $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x, y)dxdy.$

$$\Rightarrow \oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Trường hợp 3: D là miền đa liên, giới hạn bởi các đường L_1, L_2 như hình vẽ.



Ta chia D thành các miền nhỏ như ở các trường hợp 1,2.

Áp dụng công thức Green cho các miền đó rồi cộng lại ta có:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{L = L_1 \cup L_2} Pdx + Qdy$$

Hệ quả:

Nếu đường kín L là biên của miền D thì diện tích miền D là:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L -ydx + xdy.$$

Ví dụ: Tính $I = \oint\limits_C (x+y)dx - (x-y)dy$

C là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$.

Giải:

Đặt $P(x,y) = x + y,\ Q(x,y) = -(x-y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1.$$

Theo công thức Green, $I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$

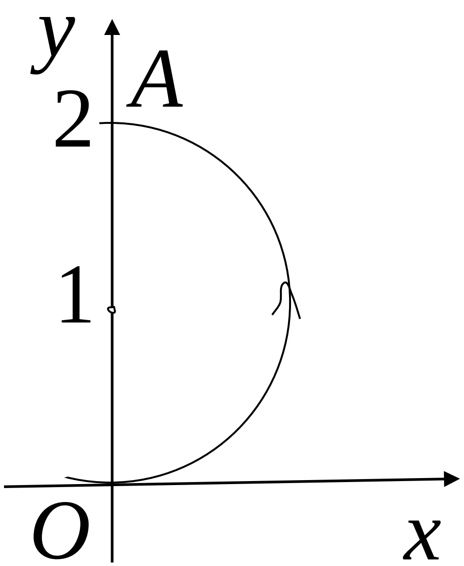
D xác định bởi: $x^2 + y^2 \le R^2$.

$$\Rightarrow I = -2\iint\limits_D dxdy = -2s(D) = -2\pi R^2.$$

Ví dụ: Tính $I = \int\limits_C \left(x\arctan x + y^2\right)dx + \left(x + 2xy + y^2e^{-y^3}\right)dy$

C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2y \quad (x \geq 0)$ từ điểm $O(0,0)$ đến điểm $A(0,2)$.

Giải:



Gọi D là miền giới hạn bởi C và đoạn thẳng AO.

Đặt $P(x,y) = x\arctan x + y^2$

$Q(x,y) = x + 2xy + y^2e^{-y^3}$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + 2y$$

Áp dụng công thức Green, ta có:

$$I + \int_{AO} \left(x \arctan x + y^2 \right) dx + \left(x + 2xy + y^2 e^{-y^3} \right) dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D dxdy = s(D) = \frac{1}{2}\pi$$

AO có phương trình $x = 0$ $\quad (y_A = 2,\ y_O = 0)$

$$\int_{AO} \left(x\arctan x + y^2\right)dx + \left(x + 2xy + y^2 e^{-y^3}\right)dy$$

$$= \int_2^0 y^2 e^{-y^3} dy = \frac{1}{3} e^{-y^3}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{e^8} - 1\right)$$

Vậy $I = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{1}{e^8} - 1\right).$

4) Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân

Định lí:

Giả sử $P(x,y), Q(x,y)$ là các hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên một miền đơn liên D.

Các mệnh đề sau là tương đương:

$1^0)$ $$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \qquad \forall (x,y)\in D$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

$1^0)$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \qquad \forall (x, y) \in D$

$2^0)$ $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường kín L nằm trong D

(miền giới hạn bởi L cũng nằm trong D)

$3^0)$ $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc vào hai điểm A, B mà

không phụ thuộc đường nối chúng $(\forall\ AB \subset D)$

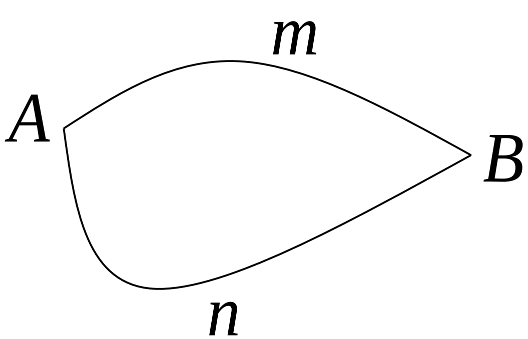
$4^0)$ Biểu thức $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một

hàm số $u(x, y)$ nào đó trên D.

Chứng minh:

$1^0) \Rightarrow 2^0)$ $$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_{D'} 0dxdy = 0$$

$2^0) \Rightarrow 3^0)$ Giả sử $AmB,\ AnB$ là hai cung bất kì trong *D*.



Có $$\int_{AnB} Pdx + Qdy + \int_{BmA} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Rightarrow \int_{AnB} Pdx + Qdy = -\int_{BmA} Pdx + Qdy = \int_{AmB} Pdx + Qdy$$

$3^0) \Rightarrow 4^0)$ Lấy $M_0(x_0, y_0)$ bất kì thuộc D.

Đặt $u(x,y) = \int\limits_{M_0M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C$

$M(x,y) \in D$ $(C:$ hằng số)

Hàm số này hoàn toàn xác định vì tích phân trên cung M_0M chỉ phụ thuộc hai điểm M_0, M mà không phụ thuộc đường nối chúng.

Ta chứng minh được $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P, \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q.$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

$4^0) \Rightarrow 1^0)$ Giả sử $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x, y)$ nào đó trên D.

Có $u'_x = P, u'_y = Q.$

$$\Rightarrow u''_{xy} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad u''_{yx} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Do $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục trên D nên u''_{xy}, u''_{yx} liên tục trên D

$\Rightarrow u''_{xy} = u''_{yx}$ (theo định lí Schwarz)

Vậy $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

Hệ quả 1:

Giả sử $P(x,y), Q(x,y)$ là các hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên một miền đơn liên D.

Nếu $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $f(x,y)$ nào đó trên D thì

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = f(B) - f(A)$$

$$(\forall AB \subset D)$$

Thật vậy:

Giả sử $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của f

$\Rightarrow f(x,y) = u(x,y) + K$ $(K:$ hằng số)

trong đó $u(x,y) = \int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy,$ $M(x,y)$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AM_0} Pdx + Qdy + \int\limits_{M_0B} Pdx + Qdy$$

$$= u(B) - u(A) = f(B) - f(A)$$

Hệ quả 2: Giả sử $P(x,y), Q(x,y)$ là các hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Nếu $Pdx+Qdy$ *là vi phân toàn phần của hàm số* $u(x,y)$ thì $u(x,y)$ *có thể xác định bởi công thức:*

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C$$

hoặc $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C$

trong đó (x_0,y_0) bất kì thuộc $\mathbb{R}^2$, (C: hằng số)

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

Ví dụ: Chứng minh rằng biểu thức

$$6xe^y dx + (3x^2 + y + 1)e^y dy$$

là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x, y)$ nào đó. Tìm hàm số ấy.

Giải:

Đặt $P(x, y) = 6xe^y, \quad Q(x, y) = (3x^2 + y + 1)e^y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xe^y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

P, Q và các ĐHR cấp một của chúng liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow Pdx+Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó trên $\mathbb{R}^2$.

Áp dụng công thức:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C$$

với $x_0=0,\ y_0=0,$ ta có:

$$u(x,y)=\int_0^x 6xe^y dx+\int_0^y (y+1)e^y dy+C$$

$$=3x^2e^y\Big|_0^x+ye^y\Big|_0^y+C \quad =3x^2e^y+ye^y+C.$$

Ví dụ: Cho hai hàm $P(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

Tính $I=\int\limits_L Pdx+Qdy$ nếu:

a) L là cung AB nằm trong góc phần tư thứ nhất và không đi qua gốc tọa độ, với $A(1,0)$, $B(2,2)$.

b) L là đường cong kín bất kì không bao quanh gốc tọa độ và tích phân lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

c) L là đường tròn tâm O bán kính R và tích phân lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

d) L là đường cong kín bao quanh gốc tọa độ và tích phân lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Giải:

a) P,Q và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục

trên miền $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Có $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\left(x^2+y^2\right)(-1)-(x-y)2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

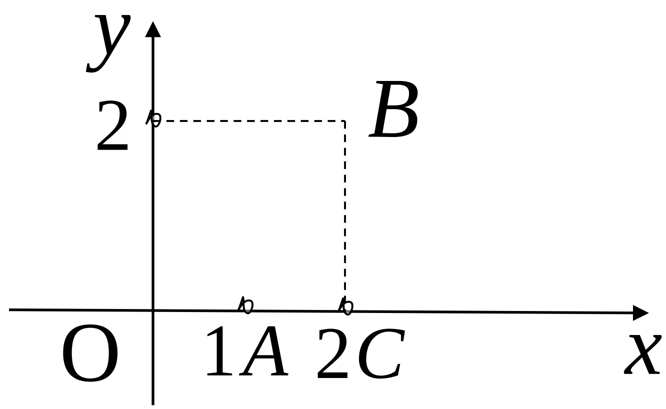
$$=\frac{y^2-2xy-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$\Rightarrow \int\limits_{AB} Pdx+Qdy$ không phụ thuộc đường nối AB nếu

AB không đi qua điểm $O(0,0)$.

Chọn AB là đường gấp khúc ACB trong đó $C(2,0)$

$$I = \int_{AC} + \int_{CB}$$



AC có phương trình $y = 0$ $(x_A = 1,\ x_C = 2)$

$$\int_{AC} \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln 2.$$

CB có phương trình $x = 2 \ (y_C = 0, \ \ y_B = 2)$

$$\int_{CB} \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy = \int_0^2 \frac{y+2}{y^2+4}dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{d(y^2+4)}{y^2+4} + 2\int_0^2 \frac{dy}{y^2+4}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(y^2+4\right)\Big|_0^2 + \arctan\frac{y}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}.$$

Vậy $I = \dfrac{3}{2}\ln 2 + \dfrac{\pi}{4}.$

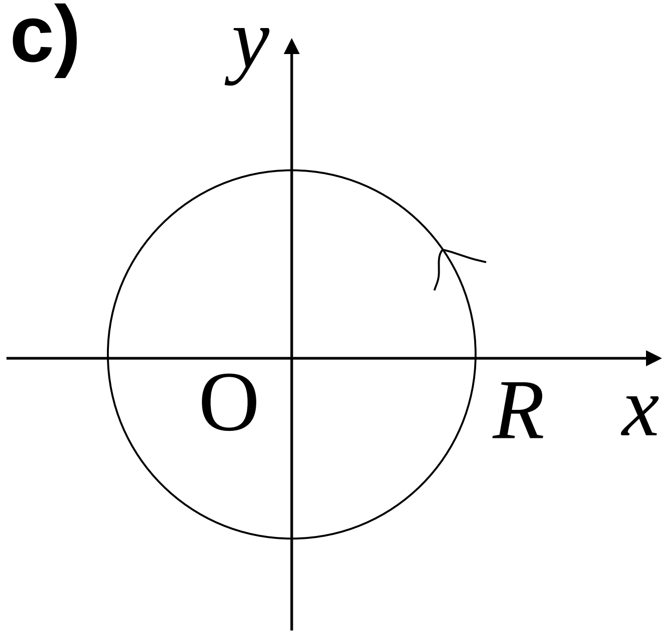
b) L và miền giới hạn bởi L nằm trong D

$$\Rightarrow \oint_L Pdx + Qdy = 0.$$

(Vì P, Q và các ĐHR cấp một của chúng liên tục trên D,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D \text{).}$$

c)



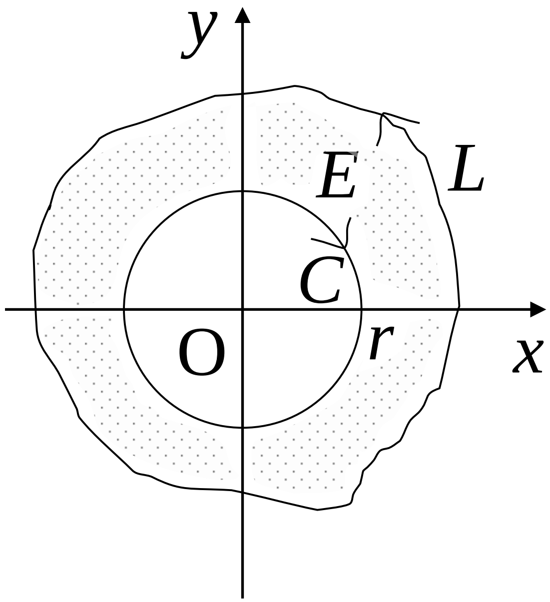
Phương trình tham số của L là:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\frac{R\cos t - R\sin t}{R^2}(-R\sin t) + \frac{R\cos t + R\sin t}{R^2}.R\cos t \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

d)



Gọi C là đường tròn tâm O bán kính r nằm trong miền giới hạn bởi L.

E là miền giới hạn bởi L và C.

$$\iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0 = \int_L Pdx + Qdy + \int_C Pdx + Qdy$$

Chiều lấy tích phân trên L ngược chiều kim đồng hồ.

Chiều lấy tích phân trên C cùng chiều kim đồng hồ.

$$\Rightarrow I = \int_L Pdx + Qdy = -\int_C Pdx + Qdy = -(-2\pi) = 2\pi.$$

II. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI TRONG KHÔNG GIAN

* Giả sử AB là một cung trong trong $\mathbb{R}^3$.

$P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ là các hàm số xác định trên AB.

Tích phân đường loại hai của các hàm số $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ dọc theo cung AB kí hiệu là:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

<u>Cách tính:</u>

Giả sử AB trơn (hoặc trơn từng khúc).

P, Q, R liên tục trên AB.

Nếu AB có phương trình tham số: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

(t_A ứng với điểm A,

t_B ứng với điểm B)

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

thì $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$

$$\int\limits_{t_A}^{t_B}\left[P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big).y'(t)+R\big(x(t),y(t),z(t)\big).z'(t)\right]dt.$$

§3. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ MẶT

1. Mặt trong $\mathbb{R}^3$

* Mặt trong $\mathbb{R}^3$ có phương trình tổng quát là:

$$F(x,y,z)=0 \quad (1) \qquad ((x,y,z)\in S)$$

* Mặt có phương trình dạng (1) được gọi là liên tục nếu hàm số $F(x,y,z)$ liên tục trên S.

§3. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ MẶT

* Cho mặt S xác định bởi phương trình $F(x,y,z)=0.$

Điểm $M_0 \in S$ được gọi là điểm chính quy nếu F'_x, F'_y, F'_z tại M_0 tồn tại và không đồng thời bằng 0.

Điểm không chính quy gọi là điểm kì dị.

§3. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ MẶT

* Pháp tuyến của mặt $F(x,y,z)=0$ tại M_0 có vectơ chỉ phương là: $\left(F'_x(M_0),F'_y(M_0),F'_z(M_0)\right)$.

* Mặt S được gọi là trơn nếu nó liên tục, có pháp tuyến biến thiên liên tục (mọi điểm của S đều là điểm chính quy).

2) Mặt định hướng

* Cho mặt cong S. Lấy điểm M_0 bất kì thuộc S.

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt S tại M_0.

Cho $\vec{n}$ di chuyển theo một đường cong kín L bất kì trên S (L không cắt biên của S) sao cho $\vec{n}$ vẫn là pháp tuyến của mặt S. Khi trở về vị trí M_0, nếu $\vec{n}$ không đổi hướng thì S là mặt có hai phía, nếu $\vec{n}$ đổi hướng thì S là mặt một phía.

Ví dụ: (Lá Mobius)

Xét băng giấy hình chữ nhật $ABCD$.

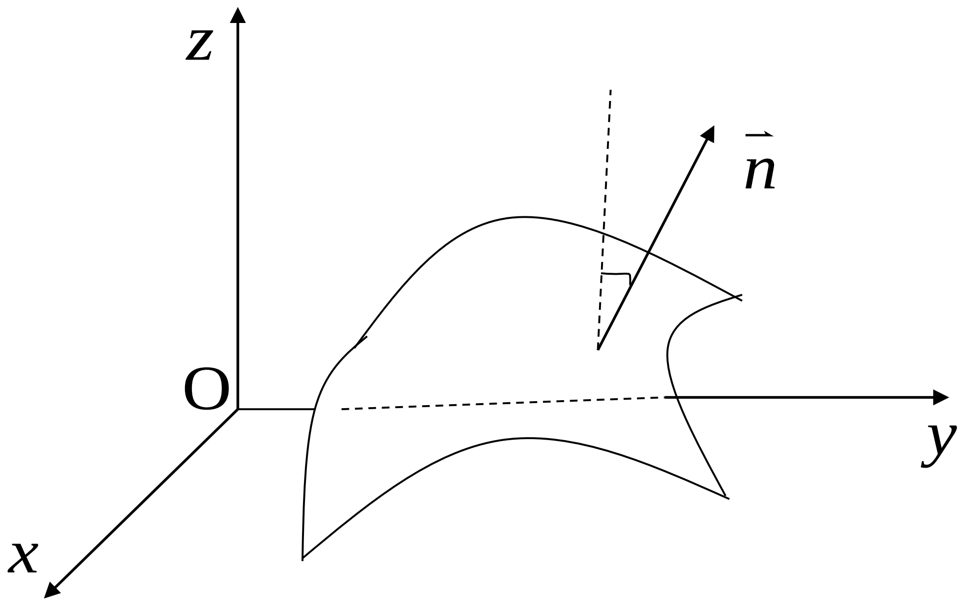
Vặn băng giấy rồi dán hai cạnh AB, CD sao cho $A \equiv C$, $B \equiv D$ ta được mặt một phía.

§3. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ MẶT

* Ta thường gặp những mặt có hai phía. Nếu mặt kín thì có phía trong, phía ngoài. Nếu mặt không kín thì có phía trên, phía dưới.

* Mặt đã xác định phía bằng cách chỉ rõ vectơ pháp tuyến tương ứng gọi là mặt định hướng.

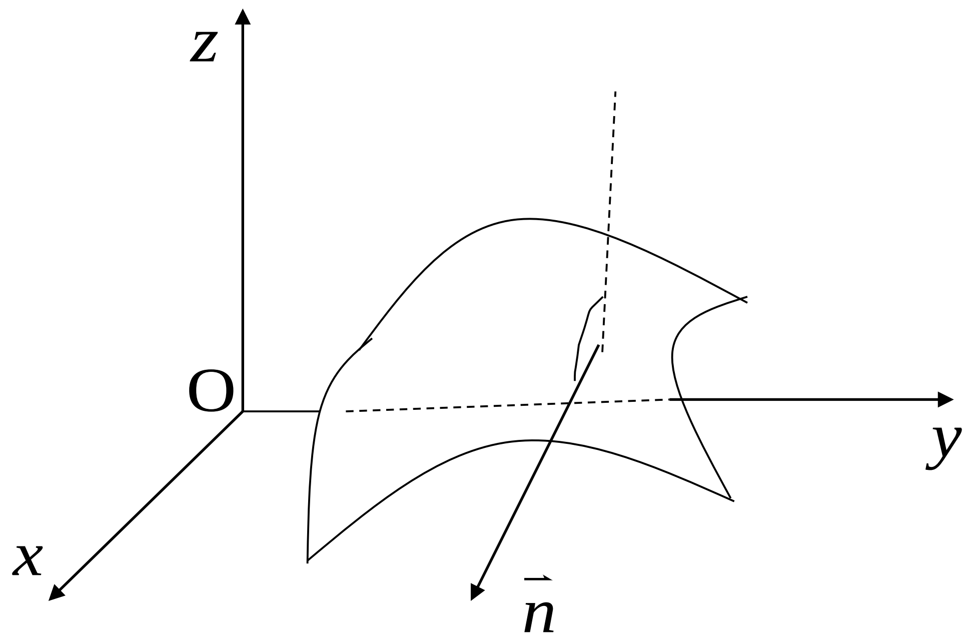
§3. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ MẶT



Mặt trên

Véc tơ pháp tuyến xác định hướng hướng lên trên

(tạo với tia Oz góc nhọn)

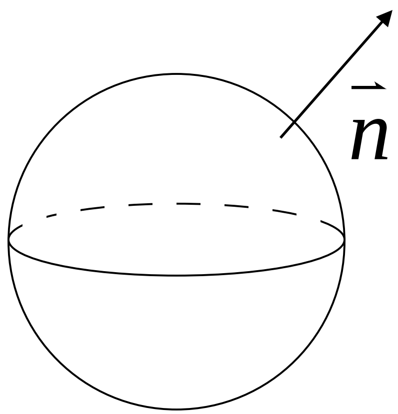


Mặt dưới

Véc tơ pháp tuyến xác định hướng hướng xuống dưới

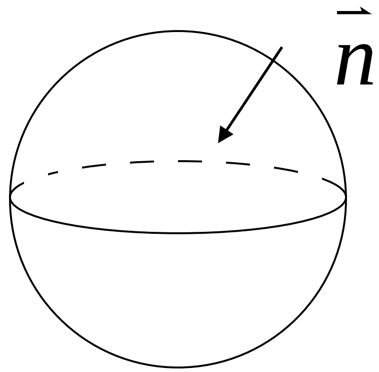
(tạo với tia Oz góc tù)

§3. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ MẶT



<u>Mặt ngoài</u>

Véc tơ pháp tuyến xác định hướng hướng ra ngoài.



<u>Mặt trong</u>

Véc tơ pháp tuyến xác định hướng hướng vào trong.

§4. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT

1) Định nghĩa

a) Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trên mặt S.

Chia S thành n mảnh $S_1, S_2, ..., S_n$ tùy ý.

Trên mỗi mảnh S_i chọn một điểm (x_i, y_i, z_i) tùy ý.

Gọi ΔS_i là diện tích mảnh S_i,

d_i là đường kính mảnh S_i.

§4. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT

Nếu giới hạn $\lim\limits_{\max d_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$ tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc phép chia S, phép chọn các điểm $(x_i, y_i, z_i) \in S_i$ thì giới hạn này gọi là tích phân mặt loại một của hàm $f(x,y,z)$ trên mặt S.

Kí hiệu: $\iint\limits_S f(x,y,z)dS.$

b) Nhận xét:

Nếu mặt S trơn và $f(x, y, z)$ liên tục trên S thì tồn tại

$$\iint_S f(x, y, z)dS.$$

c) Tính chất

$1^0)\ \iint\limits_S dS = s(S)$ ($s(S)$ là diện tích mặt S)

$2^0)$ Tích phân mặt loại một có các tính chất giống tích phân hai lớp.

§4. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT

3^0) Giả sử mặt S có khối lượng riêng tại (x, y, z) là $\rho(x, y, z)$. Khi đó:

* Khối lượng mặt S là: $m = \iint\limits_S \rho(x, y, z)dS$

* Trọng tâm mặt S là điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$

trong đó:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_S x\rho(x, y, z)dS$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_S y\rho(x, y, z)dS, \qquad z_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_S z\rho(x, y, z)dS.$$

2) Cách tính:

Giả sử mặt S có phương trình $z = z(x, y)$

D là hình chiếu của S lên mặt phẳng xOy.

$z(x, y)$, z'_x, z'_y liên tục trên D.

$f(x, y, z)$ liên tục trên S.

Khi đó:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

§4. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_S z^2\left(x^2+y^2\right)dS$

S là phần của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2$ ứng với $x\geq 0, y\geq 0.$

Giải:

$$I = \iint\limits_{S_1} z^2\left(x^2+y^2\right)dS + \iint\limits_{S_2} z^2\left(x^2+y^2\right)dS$$

S_1 là phần mặt $x^2+y^2+z^2=R^2$ với $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$

S_2 là phần mặt $x^2+y^2+z^2=R^2$ với $x\geq 0, y\geq 0, z\leq 0.$

§4. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT

* Tính $I_1 = \iint\limits_{S_1} z^2\left(x^2+y^2\right)dS$

S_1 có phương trình $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

Hình chiếu của S_1 lên mặt phẳng xOy là miền

$$D:\begin{cases} x^2+y^2\le R^2 \\ x\ge 0,\ \ y\ge 0 \end{cases}$$

Có $z'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $\qquad z'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$,

$$I_1 = \iint\limits_D \left(R^2 - x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2\right)\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy$$

Đặt $x = r\cos\varphi$ $\quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le R \end{cases}$

$y = r\sin\varphi$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \left(R^2 - r^2\right).r^2.\frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}.rdr$$

$$= \frac{\pi}{2}.R\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\,.r^3 dr$$

Đặt $r = R\sin t \Rightarrow dr = R\cos t dt$

$$I_1 = \frac{\pi}{2}.R\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos t.R^3\sin^3 t.R\cos t dt$$

$$= \frac{\pi}{2}R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t.\cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{2}R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\left(1-\sin^2 t\right)dt$$

$$= \frac{\pi}{2} R^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt - \frac{\pi}{2} R^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t dt$$

$$= \frac{\pi}{2} R^6 \left(\frac{2!!}{3!!} - \frac{4!!}{5!!} \right) = \frac{\pi}{2} R^6 \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{15} \right) = \frac{\pi R^6}{15}.$$

Do mặt S có tính đối xứng qua mặt phẳng $x\mathrm{O}y$

và biểu thức dưới dấu tích phân chẵn đối với z nên

$I_1 = I_2$ với $I_2 = \iint_{S_2} z^2 \left(x^2 + y^2 \right) dS.$ Vậy $I = \dfrac{2\pi R^6}{15}.$

§5. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

1. Định nghĩa

a) Định nghĩa

Cho S là mặt định hướng.

$\overrightarrow{f}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)$ là hàm vectơ xác định trên S.

(P,Q,R là các hàm ba biến xác định trên S)

Chia S thành n mảnh $S_1,S_2,...,S_n$ tùy ý.

§5. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

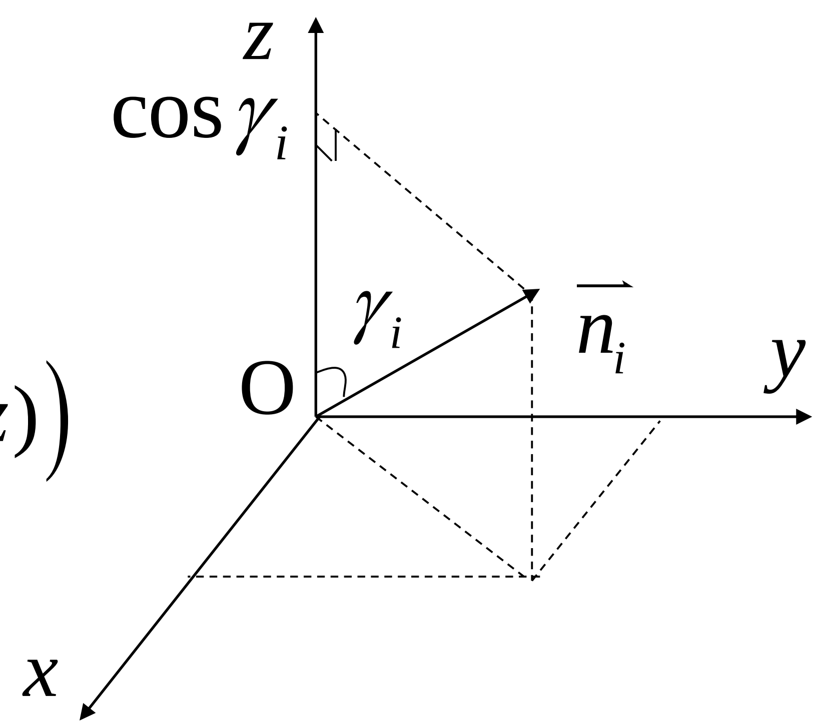
Gọi ΔS_i là diện tích mảnh S_i, d_i là đường kính mảnh S_i.

Trên mỗi mảnh S_i chọn một điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ tùy ý.

Gọi $\overrightarrow{n_i}$ là vec tơ pháp tuyến đơn vị ứng với hướng đã chọn của mặt S tại M_i.

$$\overrightarrow{n_i} = \left(\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i\right)$$

$$\left(\alpha_i = (\overrightarrow{n_i}, \mathrm{O}x),\ \beta_i = (\overrightarrow{n_i}, \mathrm{O}y),\ \gamma_i = (\overrightarrow{n_i}, \mathrm{O}z)\right)$$



§5. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

Xét giới hạn $\lim\limits_{\max d_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{f}(x_i, y_i, z_i).\overrightarrow{n_i}.\Delta S_i$

$$= \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i, z_i).\cos\alpha_i + Q(x_i, y_i, z_i).\cos\beta_i + R(x_i, y_i, z_i).\cos\gamma_i \right] \Delta S_i$$

Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc phép chia S, phép chọn các điểm $M_i \in S_i$ thì nó được gọi là tích phân mặt loại hai của hàm $\overrightarrow{f}(x, y, z)$ trên S

kí hiệu là $\iint\limits_S \overrightarrow{f}(x, y, z)\overrightarrow{dS}$

§5. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

hoặc gọi là tích phân mặt loại hai của các hàm số

$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ trên S.

Kí hiệu: $\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$

b) Nhận xét:

$$1^0)\quad \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_S \left[P(x,y,z).\cos\alpha + Q(x,y,z).\cos\beta + R(x,y,z).\cos\gamma\right]dS$$

trong đó $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là vectơ pháp tuyến đơn vị

ứng với hướng đã chọn của mặt S tại (x,y,z).

$$(\quad \alpha = (\vec{n}, \mathrm{O}x),\ \beta = (\vec{n}, \mathrm{O}y),\ \gamma = (\vec{n}, \mathrm{O}z))$$

$2^0)$ Nếu đổi hướng của mặt lấy tích phân thì tích phân đổi dấu

$3^0)$ Nếu S là một mặt định hướng, liên tục, có véc tơ pháp tuyến tương ứng biến thiên liên tục, P, Q, R là các hàm số liên tục trên S thì

tồn tại $\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

$4^0)$ Tích phân mặt loại hai có các tính chất tương tự tích phân đường loại hai.

2) Cách tính

Tính $I = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$

**** Đưa về tích phân hai lớp***

$$I = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + \iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx + \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$$

§5. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

** Tính* $\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$

Giả sử mặt S có phương trình $z = z(x,y) \quad \big((x,y) \in D\big)$

D là hình chiếu của S lên mặt phẳng $x\mathrm{O}y$

+) Nếu véctơ pháp tuyến xác định hướng của mặt S

*tạo với tia O*z *góc nhọn thì*

$$\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_D R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy$$

§5. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

+) *Nếu véctơ pháp tuyến xác định hướng của mặt* S *tạo với tia O*z *góc tù thì*

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = -\iint_D R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy$$

* Khi tính $\iint_S P(x,y,z)dydz, \iint_S Q(x,y,z)dzdx$ ta làm tương tự.

*** Cách khác:**

Trong nhiều trường hợp, khi tính tích phân mặt loại hai, có thể đưa về tích phân mặt loại một.

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint_S \left[P(x,y,z).\cos\alpha + Q(x,y,z).\cos\beta + R(x,y,z).\cos\gamma\right]dS$$

với $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là vectơ pháp tuyến đơn vị xác định hướng của mặt S tại (x,y,z).

Ví dụ:

Ví dụ 1: Tính $I = \iint_S x\,dy\,dz + dx\,dz + xz^2\,dx\,dy$

S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

Giải:

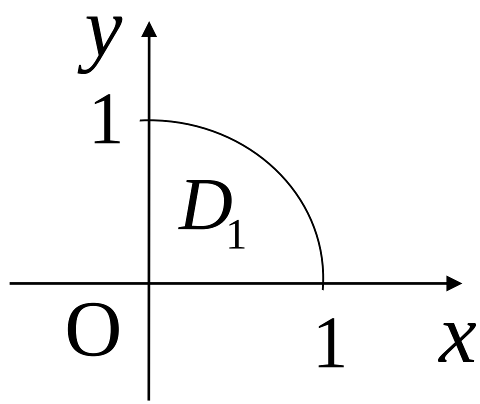
$$I = \iint_S x\,dy\,dz + \iint_S dx\,dz + \iint_S xz^2\,dx\,dy$$

* Tính $I_1 = \iint\limits_S xz^2dxdy$

Mặt S có phương trình $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (x \geq 0,\ y \geq 0)$

Hình chiếu của S lên mặt phẳng xOy là miền:

$$D_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$



Vectơ pháp tuyến xác định hướng của mặt S tạo với tia Oz góc nhọn.

$$\Rightarrow I_1 = \iint_{D1} x\left(1 - x^2 - y^2\right) dx\, dy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $\quad 0 \le r \le 1$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r\cos\varphi\left(1 - r^2\right) r\, dr$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \right) . \int_0^1 \left(r^2 - r^4 \right) dr \qquad = \left(\sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) . \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

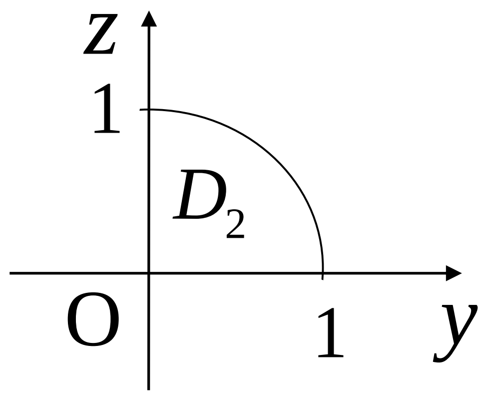
§5. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

* Tính $I_2 = \iint\limits_S x\,dydz$

Mặt S có phương trình $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2} \quad (y \geq 0, z \geq 0)$

Hình chiếu của S lên mặt phẳng $y\mathrm{O}z$ là miền:

$$D_2 : \begin{cases} y^2 + z^2 \leq 1 \\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{cases}$$



Vectơ pháp tuyến xác định hướng của mặt S tạo với tia Ox góc nhọn.

$$\Rightarrow I_2 = \iint_{D_2} \sqrt{1 - y^2 - z^2}\, dydz$$

Đặt $\begin{cases} y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$ $\qquad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $\quad 0 \le r \le 1$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2}.rdr = \frac{\pi}{2}.(-\frac{1}{2})\int_0^1 \left(1 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 - r^2\right)$$

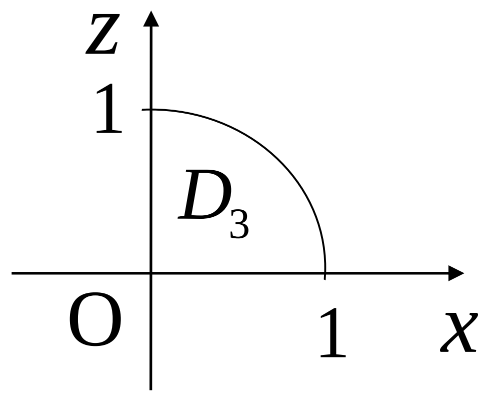
$$= -\frac{\pi}{4}.\frac{2}{3}.\left(1 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

* Tính $I_3 = \iint\limits_S dxdz$

Mặt S có phương trình $y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$ $(x \geq 0, z \geq 0)$

Hình chiếu của S lên mặt phẳng $x\text{O}z$ là miền:

$$D_3 : \begin{cases} x^2 + z^2 \leq 1 \\ x \geq 0,\ z \geq 0 \end{cases}$$



Vectơ pháp tuyến xác định hướng của mặt S tạo với tia Oy góc nhọn.

$$I_3 = \iint_{D_3} dxdz = s(D_3) = \frac{\pi}{4}.$$

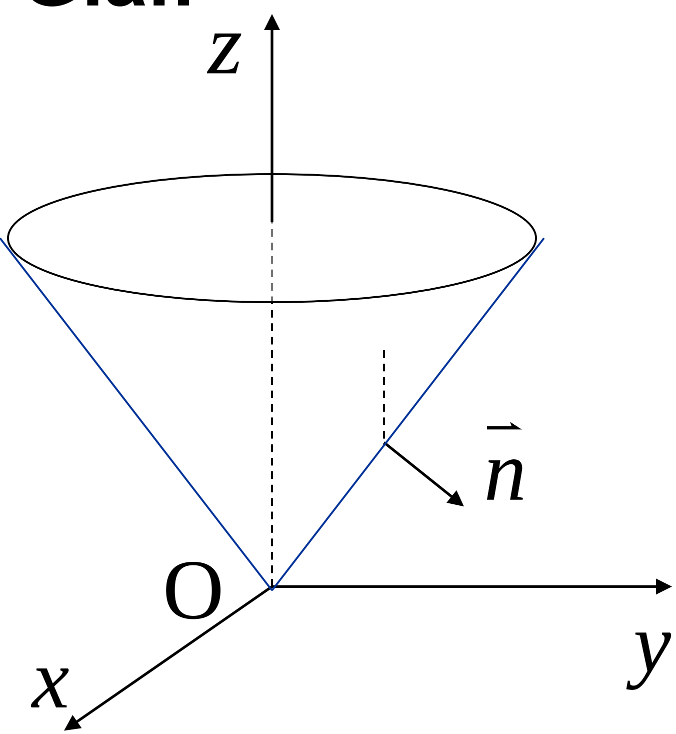
Vậy $I = \dfrac{2}{15} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}.$

Ví dụ 2: Tính $I = \iint\limits_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$

S là phía ngoài của mặt nón $x^2 + y^2 = z^2 \quad (0 \le z \le h)$

(h không đổi)

Giải:



Pháp tuyến của mặt S tại (x, y, z)

có VT chỉ phương là: $(2x, 2y, -2z)$.

Vì VTPT xác định hướng của mặt

S tạo với tia Oz góc tù nên

vectơ pháp tuyến đơn vị xác định hướng của mặt S

tại (x, y, z) là:

$$\left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}, \frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}, \frac{-2z}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} \right)$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{2}\,z}, \frac{y}{\sqrt{2}\,z}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$I = \iint_S \left[(y-z)\frac{x}{\sqrt{2}\,z} + (z-x)\frac{y}{\sqrt{2}\,z} + (x-y)\frac{-1}{\sqrt{2}} \right] dS$$

$$= \sqrt{2}\iint_S (y-x)\,dS.$$

Mặt S có phương trình: $z = \sqrt{x^2+y^2}$

Hình chiếu của S lên mặt phẳng xOy là miền D: $x^2+y^2 \le h^2$.

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

§5. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

$$I=\sqrt{2}\iint_D (y-x)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy.$$

$$=2\iint_D (y-x)dxdy=2\iint_D ydxdy-2\iint_D xdxdy$$

Do miền D có tính đối xứng qua trục Ox và biểu thức

$f(x,y)=y$ lẻ đối với y nên $\iint_D ydxdy=0.$

Tương tự, $\iint_D xdxdy=0.$

Vậy $I=0.$

§5. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

Ví dụ 3: Tính $I = \iint\limits_S z\,dydz + x^2 dxdy$

S là phía trên của mặt cong $z = x^2 + y^2$

$(-1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1)$

Giải:

Pháp tuyến của mặt S tại (x, y, z) có VT chỉ phương là:

$(-2x, -2y, 1)$.

Vì VTPT đơn vị xác định hướng của mặt S tạo với tia Oz

góc nhọn nên đó là vectơ

$$\vec{n} = \left(\frac{-2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{-2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \right)$$

$$I = \iint_S \left(\frac{-2xz}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} + \frac{x^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \right) dS$$

Do mặt S có tính đối xứng qua mặt phẳng $x=0$ và biểu

thức $\frac{-2xz}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$ lẻ đối với x nên

§5. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

$$\iint_S \frac{-2xz}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\,dS = 0$$

$$\Rightarrow I = \iint_S \frac{x^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\,dS$$

Hình chiếu của S lên mặt phẳng xOy là miền:

$$D:\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$I = \iint_D \frac{x^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.\sqrt{1+4x^2+4y^2}\ dxdy$$

$$= \iint_D x^2 dxdy = \int_{-1}^{1} x^2 dx.\int_{-1}^{1} dy \ = 4\int_0^1 x^2 dx \ = \frac{4}{3}.$$

3) Công thức Stokes

a) Định lí: Giả sử S là một mặt định hướng, trơn từng mảnh, có biên L là một đường cong kín, trơn từng khúc.

P,Q,R là các hàm số liên tục, có các ĐHR cấp một liên tục trên S.

Khi đó: $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz =$

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

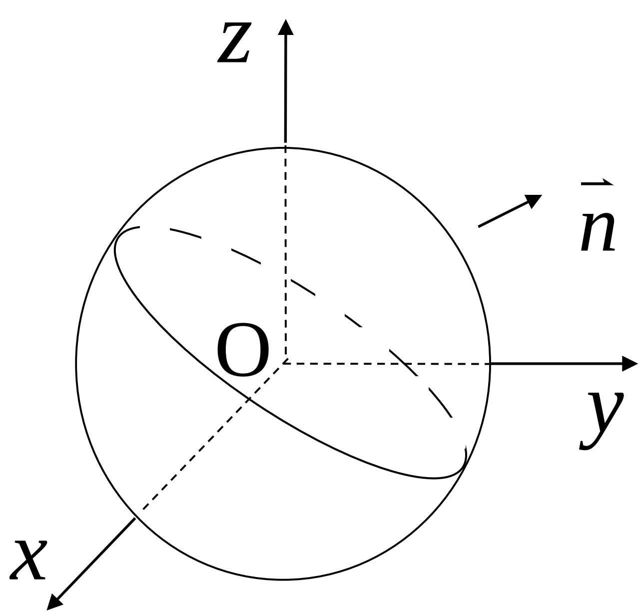
Chiều lấy tích phân trên L là chiều sao cho khi ta đi trên L theo chiều ấy thì thấy mặt S ở bên trái.

Ví dụ: Tính $I = \int\limits_L ydx + zdy + xdz$

L là giao tuyến của hai mặt $x + y + z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$

Chiều trên L là ngược chiều kim đồng hồ nhìn về phía $z > 0.$

Giải:



Gọi S là phần mặt phẳng $x+y+z=0$ nằm trong hình cầu $x^2+y^2+z^2=a^2$

Đặt $P(x,y,z)=y,\ Q(x,y,z)=z,\ R(x,y,z)=x.$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=1,\ \frac{\partial P}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=1,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=1,\ \frac{\partial R}{\partial y}=0.$$

Theo công thức Stokes,

$$I=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_S (0-1)dydz + (0-1)dzdx + (0-1)dxdy$$

$$= -\iint_S dydz + dzdx + dxdy$$

S là phía trên của mặt phẳng $x + y + z = 0.$

Vectơ pháp tuyến xác định hướng của mặt S là $(1,1,1).$

VTPT đơn vị xác định hướng của mặt S là: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$I = -\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right]dS$$

$$= -\sqrt{3}\iint\limits_{S} dS \quad = -\sqrt{3}\; s(S) = -\sqrt{3}\;\pi a^2.$$

($s(S)$ là diện tích mặt S)

b) Chú ý:

$1^0)$ Nếu S là miền phẳng nằm trong mặt phẳng xOy thì công thức Stokes trở thành

$$\int_L Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$2^0)$ Giả sử $V \subset \mathbb{R}^3$ có tính chất:

Mọi đường kín L, trơn từng khúc đều là biên của một mặt định hướng, trơn từng mảnh $S \subset V$.

P, Q, R là các hàm ba biến liên tục, có các ĐHR cấp một liên tục trên V.

Các mệnh đề sau là tương đương:

$i)\quad \dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z},\quad \dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x},\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y},\qquad \forall (x,y,z)\in V.$

$ii)\ \int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=0,$ mọi đường kín L nằm trong V

$iii)$ Tích phân $\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz$ chỉ phụ thuộc hai điểm A, B mà không phụ thuộc đường nối chúng, $(\forall AB\subset V)$

$iiii)$ Biểu thức $Pdx+Qdy+Rdz$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y,z)$ nào đó trên V.

§5. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

* Hàm số $u(x,y,z)$ xác định bởi công thức:

$$u(x,y,z)=\int_{M_0M} Pdx+Qdy+Rdz+C$$

(M_0 bất kì thuộc V, $M(x,y,z)$ C: Hằng số)

* Nếu $V=\mathbb{R}^3$ thì $u(x,y,z)$ xác định bởi công thức:

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz+C$$

$$\forall (x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3.$$

4) Công thức Ostrogradski

Định lí: Giả sử V là một miền đóng, bị chặn, có biên là một mặt kín, trơn từng mảnh S.

P, Q, R là các hàm số liên tục, có các ĐHR cấp một liên tục trên V.

Thế thì:

$$\iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

trong đó tích phân mặt lấy theo mặt ngoài của S.

Hệ quả:

Nếu mặt kín, trơn từng mảnh S là biên của miền V thì thể tích miền V là:

$$\frac{1}{3}\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

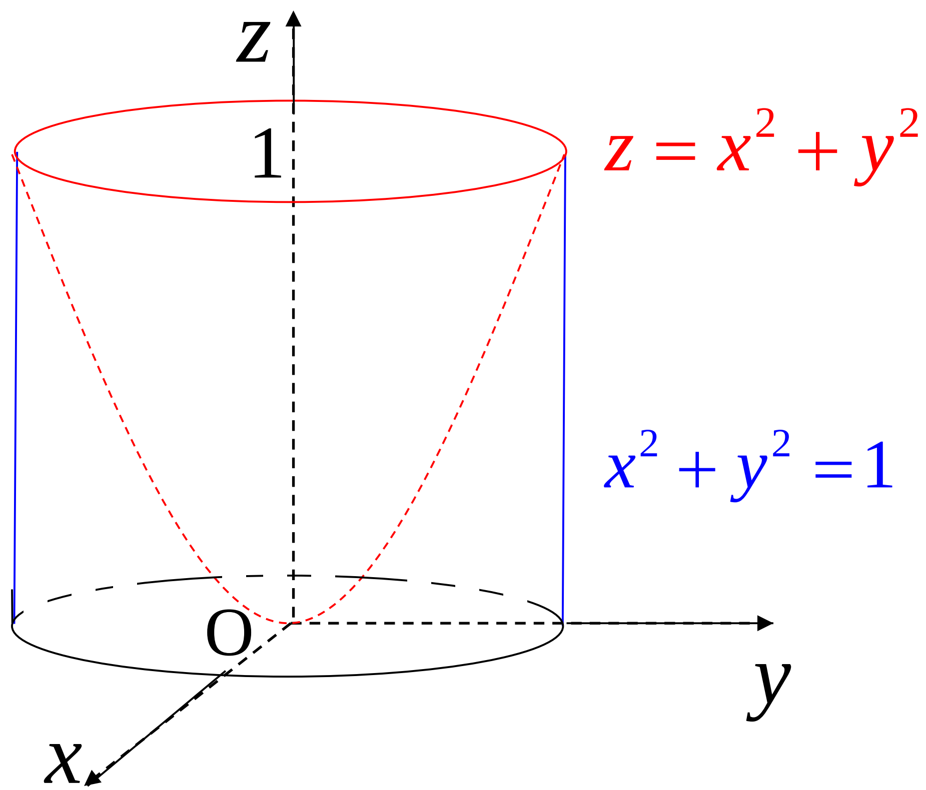
(Tích phân mặt lấy theo mặt ngoài của S)

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_S y^2 z dxdy + xz dydz + x^2 y dzdx$

S là phía ngoài biên của vật thể giới hạn bởi các mặt

$$z = x^2 + y^2\ ,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0.$$

Giải:



Gọi V là vật thể giới hạn bởi S.

Đặt $P = xz, \quad Q = x^2 y, \quad R = y^2 z.$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = z, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = y^2.$$

Theo công thức Ostrogradski,

$$I = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z \right) dxdydz$$

Hình chiếu của V lên mặt phẳng xOy là miền:

$$D: x^2 + y^2 \le 1.$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{matrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le r^2 \end{matrix}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{r^2} \left(r^2 + z\right) r\, dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(r^3 z + r\frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{r^2} dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{3r^5}{2} dr \quad = 2\pi.\frac{3}{2}.\frac{r^6}{6}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

§6. LÍ THUYẾT TRƯỜNG

1) Trường vô hướng

* Cho $V \subset \mathbb{R}^3$.

Hàm số ba biến $u(x, y, z)$ xác định trên V gọi là trường vô hướng trên V.

§6. LÍ THUYẾT TRƯỜNG

* Cho trường vô hướng $u(x, y, z)$

$$\overrightarrow{grad}\, u(x, y, z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

§6. LÍ THUYẾT TRƯỜNG

* Cho trường vô hướng $u(x, y, z)$.

Phương trình $u(x, y, z) = C$ xác định một mặt, gọi là *mặt đẳng mức* (hay mặt đẳng trị) của trường $u(x, y, z)$.

*** Nhận xét:**

$\overrightarrow{grad}\, u(M_0)$ là vectơ pháp tuyến của một mặt đẳng mức của trường $u(x, y, z)$ tại M_0.

2) Trường vectơ

a) Định nghĩa

* Cho $V \subset \mathbb{R}^3$.

Một trường vectơ $\overrightarrow{F}$ trên V là một quy tắc cho tương ứng mỗi điểm $M(x,y,z) \in V$ một vectơ duy nhất

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z),\, Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$$

(P,Q,R là các hàm ba biến xác định trên V)

§6. LÍ THUYẾT TRƯỜNG

* Trường vectơ $\overrightarrow{F}$ được gọi là liên tục trên V nếu các hàm số P, Q, R liên tục trên V.

* Trường vectơ $\overrightarrow{F}$ được gọi là khả vi trên V nếu các hàm số P, Q, R khả vi trên V.

b) Thông lượng

Cho trường vectơ $\overrightarrow{F}(x,y,z)=\left(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\right)$

Thông lượng của trường vectơ $\overrightarrow{F}$ qua mặt định hướng S là:

$$\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

c) Dive, Rôta, lưu số

Cho trường vectơ $\overrightarrow{F}(x,y,z)=\left(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\right)$

* **Dive** của trường vectơ $\overrightarrow{F}$ kí hiệu là $div\overrightarrow{F}$.

$$div\overrightarrow{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

* **Rôta** của trường vectơ $\overrightarrow{F}$ (hay vectơ xoáy của $\overrightarrow{F}$)

kí hiệu là $\overrightarrow{Rot}\,\overrightarrow{F}$

$$\overrightarrow{Rot}\,\overrightarrow{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

* **Lưu số** (hoàn lưu) của trường vectơ $\overrightarrow{F}$ dọc theo AB hay công do lực $\overrightarrow{F}$ sinh ra khi di chuyển chất điểm từ A đến B là:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz.$$

3) Trường thế

* Cho trường vectơ $\overrightarrow{F}(M) = \left(P(M), Q(M), R(M)\right)$ xác định trên V.

Nếu tồn tại một trường vô hướng $u(M)$ trên V sao cho $\overrightarrow{grad}\, u = \overrightarrow{F}$ thì $\overrightarrow{F}$ được gọi là trường thế.

u được gọi là hàm số thế vị của trường $\overrightarrow{F}$.

*** Nhận xét:**

Giả sử P, Q, R và các ĐHR cấp một của chúng liên tục trên V. *Khi đó:*

$\overrightarrow{F}$ **là trường thế** của u

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial u}{\partial z} = R$$

$\Leftrightarrow Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần của $u(x, y, z)$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{Rot}\,\overrightarrow{F} = \vec{0}.$$

4) Nhận xét:

*** *Công thức Ostrogradski***

Thông lượng của trường vectơ $\overrightarrow{F}$ qua mặt ngoài của một mặt kín S bằng tích phân ba lớp của $div\overrightarrow{F}$ trên miền V giới hạn bởi S.

§6. LÍ THUYẾT TRƯỜNG

*** Công thức Stokes**

Lưu số của trường vectơ $\vec{F}$ dọc theo một đường kín L bằng thông lượng của $\overrightarrow{Rot}\,\vec{F}$ qua một mặt định hướng S nào đó có biên L.

Ví dụ :

Chứng minh rằng trường vectơ sau là trường thế.

Tìm hàm số thế vị của trường.

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y+x)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (z+y)\vec{k}$$

Giải:

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y+x,\ x+z,\ z+y)$$

Đặt $P = y + x, \quad Q = x + z, \quad R = z + y$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Vậy $\overrightarrow{F}$ là trường thế.

* Gọi u là hàm số thế vị của trường $\overrightarrow{F}$.

Như vậy, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + z, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = z + y.$

Áp dụng công thức:

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz + C$$

với $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$

ta có:

$$u(x,y,z) = \int_0^x x\,dx + \int_0^y x\,dy + \int_0^z (z+y)\,dz + C$$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x + xy\Big|_0^y + \left.\left(\frac{z^2}{2} + yz\right)\right|_0^z + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + xy + \frac{z^2}{2} + yz + C.$$

Ví dụ:

Tìm thông lượng của trường vectơ

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$$

qua mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ hướng ra ngoài.

Giải:

Thông lượng: $I = \iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$

S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

Đặt $P = x^3, Q = y^3, \quad R = z^3$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2, \ \frac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2, \ \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2$$

Theo công thức Ostrogradski,

$$I = 3\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$$

V xác định bởi: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le r \le 1$

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2.r^2 \sin\theta dr$$

$$= 3.\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\right).\left(\int_0^1 r^4 dr\right)$$

$$= 3.2\pi.\left(\cos\theta\Big|_{\pi}^{0}\right).\left(\frac{r^5}{5}\Bigg|_0^1\right) = 3.2\pi.2.\frac{1}{5} = \frac{12\pi}{5}.$$

Ví dụ:

Tìm thông lượng của trường vectơ

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$$

qua mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = x,$ hướng ra ngoài.

Giải:

Thông lượng: $I = \iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$

S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = x.$

Theo công thức Ostrogradski,

$$I=\iiint\limits_V\left(3x^2+3y^2+3z^2\right)dxdydz=\quad 3\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$

V xác định bởi: $x^2+y^2+z^2\le x$

hay $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2\le\dfrac{1}{4}.$

Đặt $x-\dfrac{1}{2}=u,\ y=v,\ z=w.$

Miền V tương ứng với miền $V':u^2+v^2+w^2\le\dfrac{1}{4}$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = 1.$$

$$I = 3\iiint_{V'}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + v^2 + w^2\right]dudvdw$$

$$= 3\iiint_{V'}\left(u^2 + v^2 + w^2 + u + \frac{1}{4}\right)dudvdw$$

$$= 3\iiint_{V'}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)dudvdw + 3\iiint_{V'} u\,dudvdw + \frac{3}{4}\iiint_{V'} dudvdw$$

§6. LÍ THUYẾT TRƯỜNG

* Tính $I_1 = \iiint\limits_{V'} (u^2 + v^2 + w^2) du dv dw$

Đặt $\begin{cases} u = r\sin\theta\cos\varphi \\ v = r\sin\theta\sin\varphi \\ w = r\cos\theta \end{cases}$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$, $\quad 0 \le \theta \le \pi$, $\quad 0 \le r \le \frac{1}{2}$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} r^2.r^2 \sin\theta dr = 2\pi\left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\right).\left(\int_0^{\frac{1}{2}} r^4 dr\right)$$

$$= 2\pi.\left(\cos\theta\Big|_{\pi}^{0}\right).\left(\frac{r^5}{5}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}\right) = 2\pi.2.\frac{1}{5.2^5} = \frac{\pi}{40}.$$

* Tính $I_2 = \iiint\limits_{V'} u\,du\,dvdw$

Vì miền V' có tính đối xứng qua mặt phẳng $u = 0$ và $f(u,v,w) = u$ lẻ đối với u nên $I_2 = 0.$

* Tính $I_3 = \iiint\limits_{V'} dudvdw$

$$I_3 = \frac{4}{3}.\pi.\frac{1}{2^3} = \frac{\pi}{6}.$$

Vậy $I = 3.\frac{\pi}{40} + \frac{3}{4}.\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{5}.$

§6. LÍ THUYẾT TRƯỜNG

Ví dụ: Cho trường vô hướng $u(x,y)=x^3+y^2$.

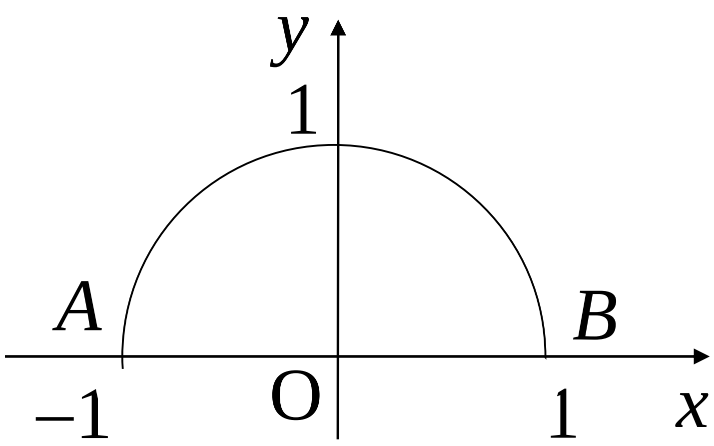
Tính hoàn lưu của $\overrightarrow{grad}\,u$ theo nửa trên đường tròn

$x^2+y^2=1$ từ điểm $A(-1,0)$ đến điểm $B(1,0)$.

Giải:

$$\overrightarrow{grad}\,u=\left(3x^2,2y\right)$$

Hoàn lưu: $I=\displaystyle\int_{AB} 3x^2dx+2y\,dy$



Cung AB có PT tham số:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$I = \int_{\pi}^{0} \left[3.\cos^2 t.(-\sin t) + 2\sin t.\cos t \right] dt$$

$$= \left(\cos^3 t + \sin^2 t \right)\Big|_{\pi}^{0} = 2.$$