TOÁN RỜI RẠC 1

Bài toán tồn tại

Nội dung

- Giới thiệu bài toán
- Phương pháp phản chứng
- Nguyên lý Dirichlet
- Bài tập

Giới thiệu bài toán tồn tại

- **Bài toán đếm:** Đếm tất cả các cấu hình tổ hợp thỏa mãn các ràng buộc của bài toán. Phương pháp giải mong muốn là xây dựng được một công thức tính nghiệm của bài toán.
- **Bài toán liệt kê:** Xem xét tất cả các cấu hình tổ hợp thỏa mãn các ràng buộc của bài toán. Phương pháp giải thường đưa về một thuật toán vét cạn (thuật toán sinh, thuật toán quay lui,...).
- **Bài toán tối ưu:** Trong số cấu hình tổ hợp thỏa mãn yêu cầu của bài toán, hãy lựa chọn nghiệm có giá trị sử dụng tốt nhất (tối ưu hàm mục tiêu).
- **Bài toán tồn tại**. Xét có hay không tồn tại các cấu hình tổ hợp thỏa mãn những tính chất cho trước. Lời giải của bài toán chỉ đơn thuần là chỉ ra một cấu hình tổ hợp thỏa mãn các tính chất cho trước hoặc chứng minh không tồn tại cấu hình tổ hợp nào thỏa mãn các tính chất đặt ra.

Ví dụ 1 (1/2)

- **Bài toán về 36 sĩ quan (Euler)**: Có một lần người ta triệu tập từ 6 trung đoàn, mỗi trung đoàn 6 sĩ quan có cấp bậc khác nhau thiếu úy, trung úy, thượng úy, đại úy, thiếu tá, trung tá về tham dự duyệt binh ở sư đoàn bộ. Hỏi có thể xếp 36 sĩ quan thành một đội ngũ hình vuông sao cho mỗi hàng ngang, mỗi hàng dọc đều có đại diện của cả 6 trung đoàn với 6 cấp bậc khác nhau.

Ví dụ 1 (2/2)

- **Bài toán về 36 sĩ quan (Euler)**: Có một lần người ta triệu tập từ 6 trung đoàn, mỗi trung đoàn 6 sĩ quan có cấp bậc khác nhau thiếu úy, trung úy, thượng úy, đại úy, thiếu tá, trung tá về tham dự duyệt binh ở sư đoàn bộ. Hỏi có thể xếp 36 sĩ quan thành một đội ngũ hình vuông sao cho mỗi hàng ngang, mỗi hàng dọc đều có đại diện của cả 6 trung đoàn với 6 cấp bậc khác nhau. Dưới đây là một lời giải với $n = 4$.

Ab	Dd	Ba	Cc
Bc	Ca	Ad	Db
Cd	Bb	Dc	Aa
Da	Ac	Cb	Bd

Aa	Dd	Ba	Cc	Ee
Cd	De	Ea	Ab	Bc
Eb	Ac	Bd	Ce	Da
Be	Ca	Db	Ec	Ad
Dc	Ed	Ae	Ba	Cb

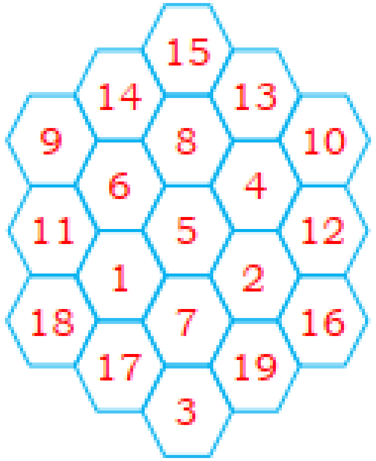
- Euler đã tốn nhiều công sức nhưng không thành công và đưa ra giả thuyết bài toán không tồn tại nghiệm ($n = 6$). Giả thuyết này được Tarri chứng minh năm 1901 bằng cách duyệt toàn bộ.
- Căn cứ vào trường hợp $n = 2, n = 6$ không tồn tại nghiệm, Euler giả thuyết bài toán không tồn tại nghiệm $n = 4k + 2$. Năm 1960 Bloce và Parker chỉ ra một lời giải $n = 10$ và tổng quát hóa cho trường hợp $n = 4k + 2$ (k>1).

Ví dụ 2 (1/2)

- **Bài toán Hình lục giác thần bí (Clifford Adams)**: Trên 19 ô của hình lục giác, hãy điền các con số từ 1 đến 19 sao cho tổng theo 6 hướng của hình lục giác đều bằng nhau (38).

Ví dụ 2 (2/2)

- **Bài toán Hình lục giác thần bí (Clifford Adams)**: Trên 19 ô của hình lục giác, hãy điền các con số từ 1 đến 19 sao cho tổng theo các hướng của hình lục giác đều bằng nhau (38).



- Sau 47 năm Adams đã tìm ra lời giải (1957), sau đó đánh mất bản thảo ông đã tốn thêm 5 năm để khôi phục lại (1962).
- Đây cũng là lời giải duy nhất!!!

Nội dung

- Giới thiệu bài toán
- Phương pháp phản chứng
- Nguyên lý Dirichlet
- Bài tập

Phương pháp phản chứng (1/2)

- **Tư tưởng**: Giả thiết điều cần chứng minh là sai, từ đó sử dụng lập luận dẫn tới mâu thuẫn.

- **Ví dụ 3**: Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn ghép thành một tam giác.

Phương pháp phản chứng (2/2)

- **Tư tưởng**: Giả thiết điều cần chứng minh là sai, từ đó sử dụng lập luận dẫn tới mâu thuẫn.

- **Ví dụ 3**: Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn ghép thành một tam giác.

Gợi ý: Gọi độ dài các đoạn thẳng là $a_1, a_2, \dots, a_7$(sắp theo thứ tự tăng dần)

Giả sử không có 3 đoạn nào ghép thành một tam giác

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 &\le a_3, \\
a_2 + a_3 &\le a_4, \\
a_3 + a_4 &\le a_5, \\
a_4 + a_5 &\le a_6, \\
a_5 + a_6 &\le a_7
\end{aligned}
$$

Từ đó $a_1, a_2 > 10$ dẫn tới $a_7 > 130$

Mâu thuẫn với giả thiết là $a_7 < 100$

Bài tập (PP phản chứng)

- **Bài tập 1**: Các đỉnh của một thập giác đều được đánh số bởi các số nguyên $0,1,\ldots,9$ một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tìm được ba đỉnh liên tiếp có tổng các số lớn hơn 13.

- **Bài tập 2**: Chứng minh rằng không thể nối 31 máy vi tính thành một mạng sao cho mỗi máy được nối với đúng 5 máy khác.

Nội dung

- Giới thiệu bài toán
- Phương pháp phản chứng
- Nguyên lý Dirichlet
- Bài tập

Phát biểu nguyên lý Dirichlet

- Nguyên lý Dirichlet (Nhốt thỏ vào lồng)
  - Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 chiếc lồng sao cho mỗi chiếc lồng chứa không quá 2 con thỏ
- Nguyên lý Dirichlet
  - Nếu đem xếp nhiều hơn n đối tượng vào n cái hộp, thì luôn tìm được một cái hộp chứa không ít hơn 2 đối tượng

Phát biểu nguyên lý Dirichlet

- **Nguyên lý Dirichlet tổng quát:** Nếu đem xếp n đối tượng vào k hộp thì luôn được một hộp chứa ít nhất $\lceil n/k \rceil$ đối tượng.
- Ví dụ: Trong 100 người có ít nhất 9 người cùng tháng sinh nhật

Một năm có 12 tháng. Xếp những người sinh nhật vào cùng một nhóm, theo nguyên lý Dirichlet ta có: $\lceil 100/12 \rceil$=9 người cùng tháng sinh nhật.

Ví dụ 4 (1/2)

- **Bài toán**: Chứng minh rằng trong một nhóm 367 người bao giờ cũng tìm được 2 người có ngày sinh nhật giống nhau.

Ví dụ 4 (1/2)

- **Bài toán**: Chứng minh rằng trong một nhóm 367 người bao giờ cũng tìm được 2 người có ngày sinh nhật giống nhau.

- **Giải**: Số ngày trong năm là 365 hoặc 366 (năm nhuận). Vậy có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau.

Có 367 người và 366 ngày sinh nhật khác nhau, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 người cùng ngày sinh nhật.

Ví dụ 5 (1/2)

- **Bài toán**: Có 5 loại học bổng khác nhau. Hỏi phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là 6 người cùng nhận một loại học bổng (giả thiết tất cả các sinh viên đều được nhận học bổng!!!)?

Ví dụ 5 (2/2)

- **Bài toán**: Có 5 loại học bổng khác nhau. Hỏi phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là 6 người cùng nhận một loại học bổng (giả thiết tất cả các sinh viên đều được nhận học bổng!!!)?

- **Giải**: Gọi n là số sinh viên ít nhất để đảm bảo rằng có ít ra là 6 sinh viên nhận cùng một loại học bổng.

Như vậy n là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn $\frac{n}{5} > 5$, hay $n > 25$.

Vậy cần ít nhất $n = 25 + 1 = 26$ sinh viên.

Bài tập (Dirichlet)

- **Bài tập 1**: Chứng minh rằng trong một phòng họp bao giờ cũng tìm được hai người có số người quen trong số những người dự họp là bằng nhau.

- **Bài tập 2**: Trong mặt phẳng cho 6 điểm được nối với nhau từng đôi một bởi các cung màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 điểm sao cho các cạnh nối giữa chúng có cùng một màu.

- **Bài tập 3**: Trong một tháng gồm 30 ngày một đội bóng chuyền thi đấu mỗi ngày ít nhất một trận, nhưng cả tháng chơi không quá 45 trận. Chứng minh rằng tìm được một giai đoạn gồm một số ngày liên tục nào đó trong tháng sao cho trong giai đoạn đó đội chơi đúng 14 trận.