BÀI GIẢNG XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ TOÁN HỌC

THỐNG KÊ TOÁN HỌC- KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ

1. Tổng quan

1.1. Giả thuyết thống kê:

- Trong nhiều lĩnh vực đời sống kinh tế - xã hội, ta thường hay nêu ra các nhận xét khác nhau về các đối tượng quan tâm, chẳng hạn như: các nhận xét về thu nhập bình quân của các hộ gia đình,.... Những nhận xét như vậy được gọi là các **giả thuyết**, chúng có thể đúng hoặc sai. Vấn đề xác định tính đúng sai của một giả thuyết sẽ được gọi là **kiểm định**.

- Trong kiểm định, ta đặt hai tình huống sau: **Giả thuyết được đưa ra kiểm định được gọi là giả thuyết gốc** (hay **"giả thuyết không"**), ký hiệu là $\boldsymbol{H_0}$ và **các giả thuyết khác với $\boldsymbol{H_0}$ (hay giả thuyết cạnh tranh với $\boldsymbol{H_0}$) được gọi là đối giả thuyết (hay đối thuyết)**, ký hiệu là $\boldsymbol{H}$**.**

Cặp $(\boldsymbol{H_0}; \boldsymbol{H})$ được gọi là **cặp giả thuyết kiểm định.**

- Khi ta đã chọn được cặp $(\boldsymbol{H_0}; \boldsymbol{H})$ thì ta thừa nhận rằng: **việc chấp nhận (hay không bác bỏ) $\boldsymbol{H_0}$ sẽ chính là bác bỏ $\boldsymbol{H}$ và ngược lại.**

- Việc bác bỏ hay chấp nhận $\boldsymbol{H_0}$ dựa trên thông tin mẫu thống kê, được gọi là **kiểm định thống kê**.

- **Để xây dựng quy tắc kiểm định thống kê,** người ta thường sử dụng hai nguyên lý sau: **nguyên lý xác suất nhỏ** (một sự kiện $\boldsymbol{A}$ nào đó xảy ra với xác suất rất nhỏ, thì có thể coi như $\boldsymbol{A}$ không xảy ra trong một phép thử hoặc một số phép thử) và **nguyên lý phản chứng** (để bác bỏ khẳng định $\boldsymbol{A}$, ta giả sử $\boldsymbol{A}$ đúng và nếu từ $\boldsymbol{A}$ đúng mà ta đưa ra được điều vô lý thì ta bác bỏ $\boldsymbol{A}$).

Cụ thể như sau: Để kiểm định $\boldsymbol{H_0}$, **ta giả sử $\boldsymbol{H_0}$ đúng; từ đó tìm một biến cố A mà xác suất xảy ra A là rất bé và có thể bỏ qua trong một phép thử. Lúc đó, nếu từ một mẫu quan sát cụ thể mà thấy A xảy ra thì ta nhận được mâu thuẫn với nguyên lý xác suất nhỏ. Do đó, $\boldsymbol{H_0}$ sai và bác bỏ nó.**

1.2. Tiêu chuẩn kiểm định, mức ý nghĩa kiểm định, miền bác bỏ và sai lầm trong kiểm định.

• **Miền bác bỏ:** Giả sử ta thiết lập được cặp giả thuyết $(H_0; H)$ và ta tiến hành kiểm định dựa trên mẫu dữ liệu đã cho trước của một mẫu ngẫu nhiên cỡ n.

- Để bác bỏ hay chấp nhận H_0, **ta cố gắng chia miền giá trị có thể có của mẫu ngẫu nhiên đang xét $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ thành hai phần bù nhau W_α và $\overline{W}_\alpha$ sao cho: nếu mẫu dữ liệu $(x_1; x_2; \cdots; x_n) \in W_\alpha$ thì ta bác bỏ H_0 và chấp nhận H và nếu mẫu dữ liệu $(x_1; x_2; \cdots; x_n) \notin W_\alpha$ thì ta chấp nhận H_0 và bác bỏ H.**

Khi đó, W_α được gọi là **miền bác bỏ H_0** và $\overline{W}_\alpha$ gọi là **miền chấp nhận H_0.**

- Giả sử ta xác định được miền bác bỏ W_α, **việc kiểm định thực hiện như sau: Nếu mẫu quan sát đã cho của mẫu thuộc W_α thì ta bác bỏ H_0; nếu ngược lại ta chấp nhận H_0.**

Câu hỏi đặt ra: Xác định miền W_α thế nào từ thông tin của mẫu?

- **Các kết luận về bài toán kiểm định.**

Kết luận \ Thực tế	$\boldsymbol{H_0}$ đúng	$\boldsymbol{H_0}$ sai
Bác bỏ $\boldsymbol{H_0}$	Kết luận sai	Kết luận đúng
Chấp nhận $\boldsymbol{H_0}$	Kết luận đúng	Kết luận sai

Như vậy, trong việc đưa ra kết luận về kiểm định, ta có thể đưa ra kết luận sai so với thực tế.

- **Sai lầm trong quá trình kiểm định.** Khi kiểm định, ta gặp các sai lầm sau:

i) **Sai lầm loại 1:** *Bác bỏ $\boldsymbol{H_0}$ nhưng $\boldsymbol{H_0}$ đúng.*

ii) **Sai lầm loại 2:** *Chấp nhận $\boldsymbol{H_0}$ nhưng $\boldsymbol{H_0}$ sai.*

- **Mức ý nghĩa của kiểm định.**

Đặt $\boldsymbol{\alpha} =$ Xác suất mắc sai lầm loại 1 $= \boldsymbol{P}($Bác bỏ $\boldsymbol{H_0} \mid \boldsymbol{H_0}$ đúng$)$

và $\boldsymbol{\beta} =$ Xác suất mắc sai lầm loại 2 $= \boldsymbol{P}($Chấp nhận $\boldsymbol{H_0} \mid \boldsymbol{H_0}$ sai$)$.

Chú ý:

1) **Khi α tăng (giảm) thì β giảm (tăng).** Như vậy, ta không thể cực tiểu hóa đồng thời cả α và β. **Vì vậy trong thực tế, người ta cố định α là một con số rất nhỏ (thường không quá $0,05$). Người ta gọi α là mức ý nghĩa của bài toán kiểm định và $1-\beta$ là lực lượng của kiểm định.**

2) **Với mỗi mức ý nghĩa α và thông tin đã cho của mẫu,** ta sẽ xây dựng các tiêu chuẩn để tìm được miền bác bỏ W_α sao cho xác suất mắc sai lầm loại **2** nhỏ nhất có thể.

• Hàm tiêu chuẩn kiểm định

Nếu miền bác bỏ W_α được xây dựng từ một hàm thống kê $T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ của mẫu ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ thỏa mãn điều kiện nếu H_0 đúng thì luật phân phối của T hoàn toàn xác định, thì T được gọi là hàm tiêu chuẩn kiểm định (gọi tắt là tiêu chuẩn kiểm định).

- Nếu **ta đã xác định được tiêu chuẩn kiểm định $\boldsymbol{T}$** thì với mức ý nghĩa $\boldsymbol{\alpha}$ và với giả thiết $\boldsymbol{H_0}$ đúng, **ta có thể tìm miền bác bỏ $\boldsymbol{W_\alpha}$** sao cho **xác suất $\boldsymbol{T}$ nhận giá trị trong $\boldsymbol{W_\alpha}$ bằng $\boldsymbol{\alpha}$, hay**

$$\boldsymbol{P(T \in W_\alpha | H_0 \text{ đúng}) = \alpha.}$$

Lúc đó, **ta đưa ra kết luận kiểm định như sau: Từ mẫu quan sát cụ thể, ta tính giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định là $\boldsymbol{T_{qs}}$; nếu $\boldsymbol{T_{qs} \in W_\alpha}$ thì ta bác bỏ $\boldsymbol{H_0}$ và chấp nhận $\boldsymbol{H}$; còn nếu $\boldsymbol{T_{qs} \notin W_\alpha}$ thì ta không bác bỏ $\boldsymbol{H_0}$ (hay ta chấp nhận $\boldsymbol{H_0}$).**

1.3. Kiểm định giả thuyết với tham số

Cho θ là một tham số liên quan đến biến ngẫu nhiên X. Ta sẽ gặp bài toán sau: Từ một mẫu quan sát về X và một mức ý nghĩa kiểm định α cho trước, hãy kiểm định giả thuyết $H_0 : \theta = a$ (với a cho trước) biết rằng miền bác bỏ được xây dựng từ một tiêu chuẩn kiểm định nào đó.

- **Các dạng bài toán kiểm định về θ:** Ta sẽ xem xét hai dạng sau:

i) Kiểm định hai phía: $H_0 : \theta = a$ và $H : \theta \neq a$.

ii) Kiểm định một phía: $H_0 : \theta = a$ và $H : \theta < a$

hoặc $H_0 : \theta = a$ và $H : \theta > a$.

Lưu ý: *Trong bài toán kiểm định với tham số* $\boldsymbol{\theta}$, *cặp giả thuyết* $(\boldsymbol{H_0}, \boldsymbol{H})$ *được thiết lập như sau:*

+) $\boldsymbol{H_0 : \theta = a.}$

+) Xác định $\boldsymbol{H}$ **:** *Thông thường* $\boldsymbol{H}$ *được xác định dựa trên một nghi ngờ hoặc một đối nghịch với tuyên bố nào đó hoặc một quan sát, phân tích về xu hướng.*

- Nếu ta chưa biết rõ trong thực tế $\boldsymbol{\theta < a}$ *hay* $\boldsymbol{\theta > a}$ *thì* $\boldsymbol{H : \theta \neq a.}$

- Nếu qua quan sát, phân tích mà ta biết được xu hướng là $\boldsymbol{\theta > a}$ *thì* $\boldsymbol{H : \theta > a.}$

Hoặc ta biết được khả năng $\boldsymbol{\theta < a}$ *thì* $\boldsymbol{H : \theta < a.}$

Ví dụ: Thiết lập cặp giả thuyết kiểm định (H_0, H) trong các ví dụ sau.

a) Máy $\boldsymbol{A}$ hoạt động bình thường nếu chiều dài trung bình của sản phẩm là **14** cm. Người ta nghi ngờ rằng máy $\boldsymbol{A}$ không còn hoạt động bình thường. Để đánh giá nghi ngờ này, cặp giả thuyết $\boldsymbol{(H_0, H)}$ để kiểm định được đặt như thế nào?

Phân tích: Bài toán có đề cập đến một nghi ngờ. Cụ thể nghi ngờ về máy $\boldsymbol{A}$ không còn hoạt động bình thường. Ta thấy nếu muốn biết máy hoạt động thế nào thì cần biết thông tin về giá trị của "chiều dài trung bình của sản phẩm". Để thuận tiện, ta gọi $\boldsymbol{\mu}$ là "chiều dài trung bình của sản phẩm". Khi đó, "máy hoạt động bình thường" tương ứng với điều kiện $\boldsymbol{\mu = 14}$; còn "máy hoạt động không bình thường" tương ứng với điều kiện $\boldsymbol{\mu \neq 14.}$ Suy ra $\boldsymbol{H : \mu \neq 14}$ và $\boldsymbol{H_0 : \mu = 14.}$

Giải: Gọi $\boldsymbol{\mu}$ là chiều dài trung bình của sản phẩm (hay kỳ vọng về chiều dài của sản phẩm).

Cặp giả thuyết $\boldsymbol{H_0 : \mu = 14}$ và $\boldsymbol{H : \mu \neq 14}$.

Ví dụ: Thiết lập cặp giả thuyết kiểm định (H_0, H) trong các ví dụ sau.

b) Một nhà phân phối lớn tuyên bố rằng trọng lượng trung bình bao ngũ cốc A là 50 kg. Nhiều người mua hàng nghi ngờ rằng con số này không đúng và có thể thấp hơn. Để đánh giá nghi ngờ, cặp giả thuyết $(\boldsymbol{H_0}, \boldsymbol{H})$ được thiết lập như thế nào?

Phân tích: Bài toán có đề cập đến một nghi ngờ. Cụ thể nghi ngờ trọng lượng trung bình bao ngũ cốc theo xu hướng nhỏ hơn công bố. Để thuận tiện, ta gọi $\boldsymbol{\mu}$ là "trọng lượng trung bình bao ngũ cốc". Khi đó, thông tin nghi ngờ này tương ứng với điều kiện $\boldsymbol{\mu < 50}$**.** Suy ra $\boldsymbol{H : \mu < 50}$**.** Ta cũng có $\boldsymbol{H_0 : \mu = 50}$**.**

Giải: Gọi $\boldsymbol{\mu}$ là trọng lượng trung bình bao ngũ cốc (hay kỳ vọng về trọng lượng của mỗi bao ngũ cốc).

Cặp giả thuyết $\boldsymbol{H_0 : \mu = 50}$ và $\boldsymbol{H : \mu < 50}$.

Ví dụ: Thiết lập cặp giả thuyết kiểm định (H_0, H) trong các ví dụ sau.

c) Một trang trại lớn tuyên bố rằng tỷ lệ quả cam loại 1 là 96%. Người ta nghi ngờ rằng tỉ lệ này thấp hơn. Để đánh giá nghi ngờ, cặp giả thuyết $(\boldsymbol{H_0}, \boldsymbol{H})$ được thiết lập như thế nào?

Phân tích: Bài toán có đề cập đến một nghi ngờ. Cụ thể nghi ngờ về tỉ lệ cam loại 1 có xu hướng giảm so với tuyên bố. Để thuận tiện, ta gọi $\boldsymbol{p}$ là "tỉ lệ cam loại 1". Khi đó, thông tin nghi ngờ tương ứng với điều kiện $\boldsymbol{p < 0,96.}$ Suy ra $\boldsymbol{H : p < 0,96.}$ Ta cũng có $\boldsymbol{H_0 : p = 0,96.}$

Giải: Gọi $\boldsymbol{p}$ là tỉ lệ cam loại 1 (hay xác suất chọn một quả cam mà quả này thuộc loại 1).

- Cặp giả thuyết $\boldsymbol{H_0 : p = 0,96}$ và $\boldsymbol{H : p < 0,96}$.

Ví dụ: Thiết lập cặp giả thuyết kiểm định (H_0, H) trong các ví dụ sau.

d) Một nhà máy tuyên bố rằng tỷ lệ sản phẩm lỗi do nhà máy sản xuất là 3%. Người ta nghi ngờ rằng tỷ lệ này phải cao hơn. Để đánh giá nghi ngờ, cặp giả thuyết $(\boldsymbol{H_0}, \boldsymbol{H})$ được thiết lập như thế nào?

Phân tích: Bài toán có đề cập đến một nghi ngờ. Cụ thể nghi ngờ về tỉ lệ sản phẩm lỗi có xu hướng lớn hơn so với tuyên bố. Để thuận tiện, ta gọi $\boldsymbol{p}$ là "tỉ lệ sản phẩm lỗi". Khi đó, thông tin nghi ngờ tương ứng với điều kiện $\boldsymbol{p > 3\% = 0,03.}$ Suy ra $\boldsymbol{H : p > 0,03.}$ Ta cũng có $\boldsymbol{H_0 : p = 0,03.}$

Giải: $\boldsymbol{p}$ là tỉ lệ sản phẩm lỗi (hay xác suất chọn một sản phẩm mà sản phẩm này lỗi).

- Cặp giả thuyết $\boldsymbol{H_0 : p = 0,03}$ và $\boldsymbol{H : p > 0,03}$.

• Quy tắc kiểm đinh được tiến hành như sau:

- Bước 1: Thiết lập cặp giả thuyết (H_0, H).

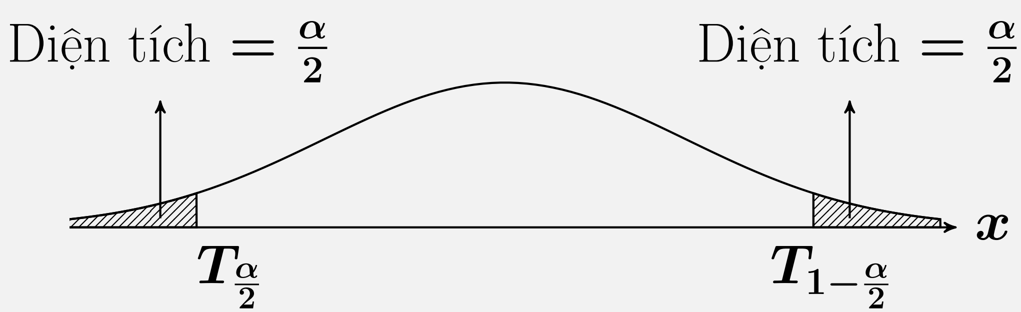
- Bước 2 (Xây dựng tiêu chuẩn kiểm định): Từ mẫu ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, xác định tiêu chuẩn kiểm định $T = T(X_1; X_2; \cdots, X_n, a)$ để sao cho khi H_0 đúng thì T có luật phân phối hoàn toàn xác định.

• **Quy tắc kiểm đinh được tiến hành như sau:**

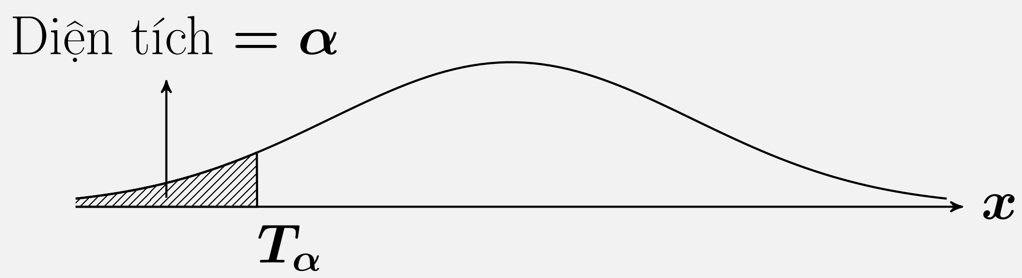
- **Bước 3 (Xây dựng miền bác bỏ): Với mức ý nghĩa α, xác định miền bác bỏ W_α của H_0 thông qua T. Trong thực tế, miền bác bỏ thường được chọn như sau:**

i) Nếu $H_0 : \theta = a$ và $H : \theta \neq a$ thì $W_\alpha = \{T \ : \ T < T_{\frac{\alpha}{2}}$ hoặc $T > T_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ ở đây $T_{\frac{\alpha}{2}}$ và $T_{1-\frac{\alpha}{2}}$ thỏa mãn

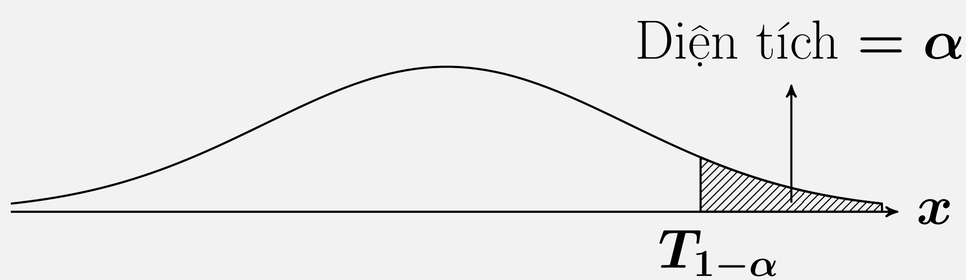
$$P(T > T_{1-\frac{\alpha}{2}} | H_0 \text{ đúng }) = \frac{\alpha}{2} \text{ và } P(T < T_{\frac{\alpha}{2}} | H_0 \text{ đúng }) = \frac{\alpha}{2}.$$



ii) Nếu $H_0 : \theta = a$ và $H : \theta < a$ thì $W_\alpha = \{T : T < T_\alpha\}$, ở đây, ta chọn T_α sao cho $P(T < T_\alpha | H_0 \text{ đúng}) = \alpha$.



iii) Nếu $H_0 : \theta = a$ và $H : \theta > a$ thì $W_\alpha = \{T : T > T_{1-\alpha}\}$, ở đây ta chọn $T_{1-\alpha}$ sao cho $P(T > T_{1-\alpha} | H_0 \text{ đúng}) = \alpha$.



• Quy tắc kiểm đinh được tiến hành như sau:

- Bước 4 (Kết luận): Từ mẫu quan sát đã cho, tính giá trị quan sát T_{qs} của T tại mẫu này.

+) Kết luận: Nếu $T_{qs} \in W_\alpha$ thì ta bác bỏ H_0 và chấp nhận H; Còn nếu $T_{qs} \notin W_\alpha$ thì ta chấp nhận H_0.

2. Kiểm định giả thuyết cho các tham số đặc biệt

2.1. Kiểm định giả thuyết cho giá trị trung bình (Kỳ vọng) μ.

Bài toán: Cho X là biến ngẫu nhiên có $EX = \mu, DX = \sigma^2$. Cho một mẫu quan sát $(X_1, .., X_n)$ có cỡ mẫu n.

Với mức ý nghĩa kiểm định α và dựa vào mẫu đã cho, hãy kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = a$ với đối giả thuyết là H.

i) Trường hợp 1: Phương sai $\sigma^2 = \sigma_0^2$ đã biết và X có phân phối chuẩn.

+) Tiêu chuẩn kiểm định: $K = \dfrac{\overline{X} - a}{\sigma}.\sqrt{n}$, **với n là cỡ mẫu, $\overline{X}$ là trung bình mẫu và $\sigma = \sqrt{DX}$.**

Khi H_0 đúng; tức $\mu = a$, ta có $K = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma}.\sqrt{n} \sim N(0,1)$.

+) Với mức ý nghĩa α, miền bác bỏ W_α có dạng như sau:

a) Nếu đối thuyết $H : \mu \neq a$ thì

$$W_\alpha = \{K \ : \ |K| > U_{\frac{\alpha}{2}}\}$$

b) Nếu đối thuyết $H : \mu > a$ thì

$$W_\alpha = \{K \ : \ K > U_\alpha\}$$

c) Nếu đối thuyết $H : \mu < a$ thì

$$W_\alpha = \{K \ : \ K < -U_\alpha\}.$$

+) Kết luận: Từ mẫu quan sát, tính k_{qs} là giá trị của K tại mẫu này. Nếu $k_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ H_0 và chấp nhận H; còn ngược lại thì chấp nhận H_0 và bác bỏ H.

Chú ý: U_α là giá trị tới hạn chuẩn tắc mức xác suất α, nghĩa là $\Phi[U_\alpha] = 1 - \alpha$.

VD 1. Nếu máy móc hoạt động bình thường thì trọng lượng của sản phẩm (X) là đại lượng ngẫu nhiên tuân theo luật chuẩn với $\mu = 100\,gam$, $\sigma = 2\,gam$. Qua một thời gian sản xuất người ta nghi ngờ trọng lượng sản phẩm tăng lên. Căn cứ 100 sản phẩm thì trọng lượng trung bình của chúng là $100,4\,gam$. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$, hãy kết luận điều nghi ngờ trên.

Hướng dẫn:

+) Gọi $\boldsymbol{X}$ là trọng lượng của một sản phẩm, đặt $\boldsymbol{\mu = EX, \sigma^2 = DX}$. Ta có $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$ vơi $\boldsymbol{\sigma = 2}$.

+) Cặp giả thuyết kiểm định $\boldsymbol{H_0 : \mu = a = 100}$ và $\boldsymbol{H : \mu > 100}$. Ta kiểm định $\boldsymbol{H_0}$ khi biết phương sai ($\boldsymbol{\sigma^2} = 4$).

+) Mẫu quan sát có $\boldsymbol{n = 100}$, $\boldsymbol{\overline{x} = 100,4}$. Giá trị của tiêu chuẩn kiểm định $\boldsymbol{K_{qs} = \dfrac{\overline{x} - a}{\sigma}.\sqrt{n} = \dfrac{\overline{x} - 100}{\sigma}.\sqrt{n} = 2}$; với $\boldsymbol{a = 100}$

+) Mức ý nghĩa $\boldsymbol{\alpha = 0,05}$, miền bác bỏ $\boldsymbol{H_0}$ là $\boldsymbol{W_\alpha = \{K : K > U_\alpha\}}$. Tra bảng chuẩn (tìm phân vị $\boldsymbol{t}$ với mức $\boldsymbol{1 - \alpha}$), ta thu được $\boldsymbol{U_\alpha = U_{0,05} = 1,645}$. Do đó, ta thu được $\boldsymbol{W_\alpha = \{K : K > 1,645\}}$.

+) Kết luận: Ta thấy $\boldsymbol{K_{qs} \in W_\alpha}$, do đó ta bác bỏ $\boldsymbol{H_0}$ chấp nhận $\boldsymbol{H}$, tức là trọng lượng sản phẩm tăng lên.

ii) Trường hợp 2: Phương sai DX chưa biết, X có phân phối chuẩn và cỡ mẫu $n \leq 30$.

+) Tiêu chuẩn kiểm định: $K = \dfrac{\overline{X} - a}{S}.\sqrt{n}$, với n là cỡ mẫu, S là độ lệch mẫu hiệu chỉnh và $\overline{X}$ là trung bình mẫu.

Khi H_0 đúng, tức là $\mu = a$, ta có $K = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S}.\sqrt{n} \sim T(n-1)$.

+) Với mức ý nghĩa α, miền bác bỏ W_α có dạng như sau:

a) Nếu đối thuyết $H : \mu \neq a$ thì

$$W_\alpha = \{K \ : \ |K| > T_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$$

b) Nếu đối thuyết $H : \mu > a$ thì

$$W_\alpha = \{K \ : \ K > T_\alpha(n-1)\}$$

c) Nếu đối thuyết $H : \mu < a$ thì

$$W_\alpha = \{K \; : \; K < -T_\alpha(n-1)\}$$

+) Kết luận: Từ mẫu quan sát, tính k_{qs} là giá trị của K tại mẫu này. Nếu $k_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ H_0 và chấp nhận H; còn ngược lại thì chấp nhận H_0 và bác bỏ H.

Chú ý: $T_\alpha(k)$ là giá trị tới hạn Student với k bậc tự do và mức xác suất α.

VD 2. Trọng lượng trung bình mỗi bao gạo là $\mathbf{49,8}\ \boldsymbol{kg}$. Một người mua hàng nghi ngờ trọng lương trung bình của một bao gạo thấp hơn. Anh ta cân khoảng 25 bao ngẫu nhiên và thu được bảng:

Trọng lượng (Kg)	**49,1**	**49,3**	**49,5**	**49,7**	**49,9**	**50,1**	**50,3**
Số bao	**3**	**4**	**4**	**6**	**2**	**3**	**3**

Với mức ý nghĩa **5%**, kiểm định nghi ngờ trên, biết rằng trọng lương một bao gạo có phân phối chuẩn.

Hướng dẫn:

+) Gọi $\boldsymbol{X}$ là trọng lượng bao gạo, đặt $\boldsymbol{\mu = EX, \sigma^2 = DX}$. Ta có $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$ vơi $\boldsymbol{\sigma^2}$ chưa biết.

+) Cặp giả thuyết kiểm định $\boldsymbol{H_0 : \mu = a = 49,8}$ và $\boldsymbol{H : \mu < 49,8}$. Ta kiểm định $\boldsymbol{H_0}$ khi chưa biết phương sai và cỡ mẫu $\boldsymbol{n = 25 < 30}$.

+) Mẫu quan sát có $\boldsymbol{n = 25}$, $\boldsymbol{\overline{x} = 49,668, s = 0,3816}$. Giá trị của tiêu chuẩn kiểm định $\boldsymbol{K_{qs} = \dfrac{\overline{x} - 49,8}{s}.\sqrt{n} = -1,7296}$.

+) Mức ý nghĩa $\boldsymbol{\alpha = 0,05}$, miền bác bỏ $\boldsymbol{H_0}$ là $\boldsymbol{W_\alpha = \{K \ : \ K < -T_\alpha(n-1)\}}$. Tra bảng, ta thu được $\boldsymbol{T_\alpha(n-1) = T_{0,05}(24) = 1,71}$. Do đó, ta thu được $\boldsymbol{W_\alpha = \{K \ : \ K < -1,71\}}$.

+) Ta thấy $\boldsymbol{K_{qs} \in W_\alpha}$, do đó ta bác bỏ $\boldsymbol{H_0}$ chấp nhận $\boldsymbol{H}$, tức là trọng lượng bao gạo thấp hơn.

iii) Trường hợp 3: Phương sai DX chưa biết và cỡ mẫu n lớn (thường $n > 30$).

+) Tiêu chuẩn kiểm định: $K = \dfrac{\overline{X} - a}{S}.\sqrt{n}$, với n là cỡ mẫu, S là độ lệch mẫu hiệu chỉnh và $\overline{X}$ là trung bình mẫu.

Khi H_0 đúng, tức $\mu = a$, ta có $K = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S}.\sqrt{n} \sim N(0, 1)$.

+) Với mức ý nghĩa α, miền bác bỏ W_α có dạng như sau:

a) Nếu đối thuyết $H : \mu \neq a$ thì

$$W_\alpha = \{K \ : \ |K| > U_{\frac{\alpha}{2}}\}$$

b) Nếu đối thuyết $H : \mu > a$ thì

$$W_\alpha = \{K \ : \ K > U_\alpha\}$$

c) Nếu đối thuyết $H : \mu < a$ thì

$$W_\alpha = \{K \ : \ K < -U_\alpha\}.$$

+) Kết luận: Từ mẫu quan sát, tính k_{qs} là giá trị của K tại mẫu này. Nếu $k_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ H_0 và chấp nhận H; còn ngược lại thì chấp nhận H_0 và bác bỏ H.

VD 3. Theo một công bố của nhà máy sản xuất bóng đèn, tuổi thọ trung bình của một loại bóng đèn sợi đốt là 1100 giờ. Các nhà kiểm định nghi ngờ tuổi thọ trung bình của loại bóng đèn này thấp hơn. Họ tiến hành kiểm tra ngẫu nhiên 100 bóng đèn và thu được tuổi thọ trung bình là 1050 giờ và độ lệch mẫu hiệu chỉnh là 200 giờ. Với mức ý nghĩa **5%**, kiểm định nghi ngờ trên, biết rằng tuổi thọ của loại bóng đèn này là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Hướng dẫn:

Gọi μ là tuổi thọ trung bình của loại bóng đèn này.

Ta có cặp giả thuyết: $H_0 : \mu = a = 1100$ và đối thuyết $H : \mu < 1100.$

Bài toán kiểm định giả thuyết μ khi chưa biết phương sai và cỡ mẫu $n = 100 > 30.$

- Giá trị của tiêu chuẩn kiểm định: $K_{qs} = \dfrac{\overline{x} - a}{s}.\sqrt{n}$.

Thay $a = 1100, \overline{x} = 1050, s = 200, n = 100,$ ta được $K_{qs} = -2,5$

- Mức ý nghĩa $\alpha = 5\% = 0,05$, miền bác bỏ có dạng $W_\alpha = \{K \ : \ K < -U_\alpha\}.$

Ta có $U_\alpha = U_{0,05} = 1,645.$ Do đó $W_\alpha = \{K \ : \ K < -1,645\}.$

- Ta thấy $K_{qs} = -2,5 \in W_\alpha.$ Ta bác bỏ H_0 và chấp nhận H, nghĩa là nghi ngờ các nhà kiểm định là có căn cứ. Nói một cách khác, tuổi thọ trung bình của loại bóng đèn này thấp hơn 1100.

VD 4. Định mức cũ để sản xuất một sản phẩm là 20 phút. Nay do cải tiến kỹ thật người ta sản xuất thử 100 sản phẩm và thu được kết quả sau:

Thời gian sản xuất một sản phẩm	Số sản phẩm tương ứng
16-17	6
17-18	10
18-19	24
19-20	30
20-21	18
21-22	12

Với mức ý nghĩa $\boldsymbol{\alpha = 0,05}$, có thể nói việc cải tiến kĩ thuật có hiệu quả không ? Biết rằng thời gian sản xuất là BNN có phân phối chuẩn.

Hướng dẫn:

+) Gọi $\boldsymbol{X}$ (phút) là thời gian sản xuất một sản phẩm, đặt $\boldsymbol{\mu = EX, \sigma^2 = DX}$. Ta có $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$ vơi $\boldsymbol{\sigma^2}$ chưa biết.

+) Cặp giả thuyết kiểm định $\boldsymbol{H_0 : \mu = a = 20}$ và $\boldsymbol{H : \mu < 20}$. Ta kiểm định $\boldsymbol{H_0}$ khi chưa biết phương sai và cỡ mẫu $\boldsymbol{n = 100 > 30}$.

+) Mẫu quan sát có $\boldsymbol{n = 100}$, $\boldsymbol{\overline{x} = 19,3; s \simeq 1,3484}$. Giá trị của tiêu chuẩn kiểm định $\boldsymbol{K_{qs} = \dfrac{\overline{x} - 20}{s}.\sqrt{n} \simeq -5,1913}$.

+) Mức ý nghĩa $\boldsymbol{\alpha = 0,05}$, miền bác bỏ $\boldsymbol{H_0}$ là $\boldsymbol{W_\alpha = \{K : K < -U_\alpha\}}$. Tra bảng chuẩn, ta thu được $\boldsymbol{U_\alpha = U_{0,05} = 1,645}$. Do đó, ta thu được $\boldsymbol{W_\alpha = \{K : K < -1,645\}}$.

+) Kết luận: Ta thấy $\boldsymbol{K_{qs} \in W_\alpha}$, do đó ta bác bỏ $\boldsymbol{H_0}$ chấp nhận $\boldsymbol{H}$, tức là thời gian sản xuất một sản phẩm đã giảm hay việc cải tiến có hiệu quả.

2.2. Kiểm định giả thuyết cho xác suất (tỉ lệ) p.

Bài toán: Xét tập nền có các phần tử mang dấu hiệu A và không mang dấu hiệu A. Gọi p là tỉ lệ phần tử mang dấu hiệu A (hay là xác suất chọn 1 phần tử mà nó mang dấu hiệu A). Cho một mẫu quan sát $(X_1, .., X_n)$ có cỡ n và tần suất mẫu là f.

Với mức ý nghĩa kiểm định α và dựa vào mẫu đã cho, hãy kiểm định giả thuyết $H_0 : p = p_0$ với đối giả thuyết là H.

+) Tiêu chuẩn kiểm định: $K = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}.\sqrt{n}.$

Trong trường hợp n lớn thỏa mãn $np_0 \geq 5$ và $n(1-p_0) \geq 5$, khi H_0 đúng, tức $p = p_0$, ta có $K = \dfrac{f - p}{\sqrt{p(1-p)}}.\sqrt{n} \sim N(0,1).$

+) Với mức ý nghĩa α, miền bác bỏ W_α có dạng như sau:

a) Nếu đối thuyết $H : p \neq p_0$ thì

$$W_\alpha = \{K \ : \ |K| > U_{\frac{\alpha}{2}}\}$$

b) Nếu đối thuyết $H : p > p_0$ thì

$$W_\alpha = \{K \ : \ K > U_\alpha\}$$

c) Nếu đối thuyết $H : p < p_0$ thì

$$W_\alpha = \{K \ : \ K < -U_\alpha\}.$$

+) Kết luận: Từ mẫu quan sát, tính k_{qs} là giá trị của K tại mẫu này. Nếu $k_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ H_0 và chấp nhận H; còn ngược lại thì chấp nhận H_0 và bác bỏ H.

VD 5. Tỉ lệ các hộ sử dụng mặt hàng A là **60%**. Công ty cung ứng mặt hàng A đã tung chiêu quảng cáo mới để tăng mức sử dụng mặt hàng A. Sau khi quảng cáo, họ điều tra ngẫu nhiên 200 hộ thì chỉ có 130 hộ sử dụng sản phẩm A. Với mức ý nghĩa $\mathbf{0,05}$, kiểm định xem quảng cáo mới có hiệu quả không.

Hướng dẫn:

+) Gọi $\boldsymbol{p}$ là tỉ lệ hộ sử dụng sản phẩm A.

+) Cặp giả thuyết kiểm định $\boldsymbol{H_0 : p = p_0 = 0,6}$ và $\boldsymbol{H : p > 0,6}$. Ta kiểm định $\boldsymbol{H_0}$.

+) Mẫu quan sát có $\boldsymbol{n = 200}$, tần suất mẫu $\boldsymbol{f = \frac{130}{200} = 0,65.}$

+) Giá trị của tiêu chuẩn kiểm định $\boldsymbol{K_{qs} = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}.\sqrt{n}}$.

Thay $\boldsymbol{n = 200, f = 0,65, p_0 = 0,6}$, ta được $\boldsymbol{K_{qs} = 1,4434.}$

+) Mức ý nghĩa $\boldsymbol{\alpha = 0,05}$, miền bác bỏ $\boldsymbol{H_0}$ là $\boldsymbol{W_\alpha = \{K \ : \ K > U_\alpha\}}$. Tra bảng chuẩn, ta thu được $\boldsymbol{U_\alpha = 1,645}$. Do đó, ta thu được $\boldsymbol{W_\alpha = \{K \ : \ K > 1,645\}}$.

+) Kết luận: Ta thấy $\boldsymbol{K_{qs} \notin W_\alpha}$, do đó chấp nhận $\boldsymbol{H_0}$, tức là quảng cáo mới hiệu quả thấp.

VD 6. Theo công bố cũ về chiều cao, một nam thanh niên của vùng $\boldsymbol{A}$ được gọi là có chiều cao đạt tiêu chuẩn nếu chiều cao nằm giữa $\mathbf{1,65}$ và $\mathbf{1,77}$, và tỉ lệ nam thanh niên của cùng $\boldsymbol{A}$ có chiều cao đạt tiêu chuẩn là **45%.** Các nhà thống kê hiện nay nghi ngờ tỉ lệ này hiện nay là cao hơn. Họ khảo sát ngẫu nhiên **100** nam thanh niên vùng $\boldsymbol{A}$ về chiều cao (đơn vị mét) và thu được bảng số liệu sau

Chiều cao	1,53-1,59	1,59-1,65	1,65-1,71	1,71-1,77	1,77-1,83	1,83-1,89	1,89-1,91
Số lượng	9	15	41	15	8	6	6

Với mức ý nghĩa **5%**, hãy kiểm định nghi ngờ của các nhà thống kê hiện nay.

Hướng dẫn:

+) Gọi $\boldsymbol{p}$ là tỉ lệ nam thanh niên vùng $\boldsymbol{A}$ có chiều có đạt tiêu chuẩn.

+) Cặp giả thuyết $\boldsymbol{H_0 : p = p_0 = 0,45}$ và $\boldsymbol{H : p > 0,45.}$ Ta kiểm định $\boldsymbol{H_0.}$

+) Mẫu ngẫu nhiên có $\boldsymbol{n = 100}$ và tần suất mẫu $\boldsymbol{f = 0,56.}$

Giá trị của tiêu chuẩn kiểm định: $\boldsymbol{K_{qs} = \dfrac{f - 0,45}{\sqrt{0,45(1-0,45)}}.\sqrt{n} = 2,21108.}$

+) Mức ý nghĩa $\boldsymbol{\alpha = 0,05}$, miền bác bỏ $\boldsymbol{H_0}$ là $\boldsymbol{W_\alpha = \{K \ : \ K > U_\alpha\}}$. Tra bảng chuẩn, ta thu được $\boldsymbol{U_\alpha = 1,645}$. Do đó, ta thu được $\boldsymbol{W_\alpha = \{K \ : \ K > 1,645\}}$.

+) Kết luận: Ta thấy $\boldsymbol{K_{qs} \in W_\alpha}$, do đó bác bỏ $\boldsymbol{H_0}$, tức là nghi ngờ của các nhà thống kê hiện nay là có lý.