Mục lục

Chương 5

Véctơ ngẫu nhiên

5.1 Tóm tắt lý thuyết

5.1.1 Một số kết quả về véctơ ngẫu nhiên

1. Véc tơ ngẫu nhiên.

Định nghĩa: Mỗi véc tơ $W = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$, với $X_1, X_2, \cdots, X_n$ là n biến ngẫu nhiên trên cùng một không gian xác suất, được gọi là véc tơ ngẫu nhiên n chiều.

Mỗi giá trị của $W = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ có thể nhận là một bộ n số thực dạng $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thỏa mãn đồng thời $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$. Gọi $R_{X_1,X_2,\ldots,X_n}$ là miền giá trị của $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. Nó là miền trong $\mathbb{R}^n$.

Trong trường hợp véc-tơ ngẫu nhiên hai chiều, ta thường ký hiệu là (X, Y). Ta chỉ xem xét một số kết quả quan trọng đối với các véc tơ ngẫu nhiên hai chiều có các thành phần của nó hoặc cùng là các biến ngẫu nhiên rời rạc hoặc cùng là các biến ngẫu nhiên liên tục .

2. Hàm phân phối xác suất đồng thời của véc tơ ngâu nhiên hai chiều.

Xét véc tơ ngẫu nhiên (X, Y). Với mỗi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ta đặt

$$F(x, y) = P(\{X < x\}\{Y < y\}) = P(X < x; Y < y),$$

khi đó hàm số $F(x, y)$ được gọi là *hàm phân phối xác suất* của véc tơ ngâu nhiên (X, Y).

Một số kết quả về hàm phân phối xác suất $F(x, y)$ *của* (X, Y) :

a) $0 \leq F(x, y) \leq 1$.

b) $F(x,y)$ không giảm theo từng biến x và y và nếu $x < x', y < y'$ thì $F(x,y) \leq F(x',y')$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} F(x,y) = 1$.

d) Các hàm $\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y) = F_X(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y) = F_Y(y)$, lần lượt là các hàm phân phối xác suất riêng của X và Y.

Định nghĩa: Nếu $F(x,y) = F_X(x).F_Y(y)$ thì ta nói X, Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập.

3. Bảng phân phối xác đồng thời của véc tơ ngẫu nhiên hai chiều.

Cho (X,Y) có các thành phần là các biến ngẫu nhiên rời rạc. Gọi $R_{XY} = \{(x_i,y_j) \mid i \geq 1, j \geq 1\}$ là miền giá trị của (X,Y).

Hàm khối lượng xác suất đồng thời của (X,Y) có dạng

$$p_{xy}(x_i,y_j) = P(X = x_i; Y = y_j), \forall (x_i,y_j) \in \mathbb{R}^2.$$

Một số tính chất của hàm khối lượng xác suất đồng thời:

1) $p_{xy}(x_i,y_j) = 0$ nếu $(x_i,y_j) \notin R_{XY}$.

2) $\sum\limits_{(x_i,y_j)\in R_{XY}} p_{xy}(x_i,y_j) = \sum\limits_{x_i\in R_X} \sum\limits_{y_j\in R_Y} p_{xy}(x_i,y_j) = 1$

3) Hàm phân phối xác suất đồng thời có dạng $F_{xy}(x,y) = \sum\limits_{\substack{x_i\in R_X \\ x_i<x}} \sum\limits_{\substack{y_j\in R_Y \\ y_j<y}} p_{xy}(x_i,y_j)$

Bảng phân phối xác xuất của (X,Y) được cho như sau

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$\sum$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$\sum\limits_{j\geq1} p_{1j}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$\sum\limits_{j\geq1} p_{2j}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$\sum\limits_{j\geq1} p_{ij}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sum$	$\sum\limits_{i\geq1} p_{i1}$	$\sum\limits_{i\geq1} p_{i2}$	$\cdots$	$\sum\limits_{i\geq1} p_{ij}$	$\cdots$	1

,

ở đây $x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots$, $y_1 < y_2 < \cdots < y_j < \cdots$, $p_{ij} = P(\{X = x_i\}\{Y = y_j\}) = P(X = x_i; Y = y_j)$ và $\sum\limits_{i\geq1}\sum\limits_{j\geq1} p_{ij} = 1$.

Bảng phân phối xác suất riêng

Ta có $P(X = x_i) = \sum_{y_j \in R_Y} P(X = x_i; Y = y_j)$ (tổng các giá trị xác xuất trên hàng x_i của bảng phân phối xác suất đồng thời). Ta thu được bảng phân phối xác suất của X là

X	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	$P(X = x_1)$	$\cdots$	$P(X = x_i)$	$\cdots$

Tương tự $P(Y = y_j) = \sum_{x_i \in R_X} P(X = x_i; Y = y_j)$ (tổng các giá trị xác xuất trên cột y_j của bảng phân phối xác suất đồng thời). Ta thu được bảng phân phối xác suất của Y là

Y	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$
P	$P(X = y_1)$	$\cdots$	$P(X = y_j)$	$\cdots$

Ta có X, Y độc lập khi và chỉ khi $P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$; với mọi $(x_i, y_j) \in R_{XY}$.

4. Hàm mật độ xác suất đồng thời của véc tơ ngẫu nhiên hai chiêu.

Cho (X, Y) có X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục và có $F(x, y)$ là hàm phân phối xác suất. Hàm số $f(x, y)$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $f(x, y) \geq 0$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

ii) $F(x, y) = \iint_{\{(u,v): u<x, v<y\}} f(u, v)dudv = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)dudv$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

được gọi là *hàm mật độ xác suất đồng thời* của (X, Y).

Một số kết quả về hàm mật độ xác suất đồng thời $f(x, y)$ của (X, Y) với X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục:

a) $f(x, y) \geq 0$ và $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)dudv = 1$.

b) $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y)$, nếu $f(x, y)$ liên tục.

c) $P[(X, Y) \in D] = \iint_D f(u, v)dudv$.

Hàm mật độ xác suất riêng: Các hàm số $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$ và $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$ lần lượt là **hàm mật độ xác xuất riêng** của X và Y.

Ta cũng có X, Y độc lập khi và chỉ khi $f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$.

5. Luật phân phối xác suất có điều kiện của các thành phần trong véc tơ ngẫu nhiên hai chiều.

Cho biến ngẫu nhiên X và biến cố B trong cùng một phép thử và $P(B) > 0$. Biến ngẫu nhiên X được xét trong điều kiện B đã xảy ra được gọi là **biến ngẫu nhiên với điều kiện** B, ký hiệu $X|B$. Ta cũng nghiên cứu phân bố xác suất, các đặc trưng của nó.

+) Khi X là BNN rời rạc, ta có:

Hàm khối lượng xác suất của $X|B$:

$$p(x_i|B) = P(X = x_i|B) = \frac{P(\{X = x_i\}B)}{P(B)}$$

Kỳ vọng của $X|B$:

$$E(X|B) = \sum_{x_i} x_i p(x_i|B).$$

+) Khi X là BNN liên tục, ta có:

Hàm phân bố xác suất của $X|B$:

$$F(x|B) = P(X < x|B) = \frac{P(\{X < x\}B)}{P(B)}$$

Hàm mật độ xác suất của $X|B$:

$$f(x|B) = \frac{dF(x|B)}{dx}$$

Kỳ vọng của $X|B$:

$$E(X|B) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x|B) dx.$$

a) Nếu (X, Y) có X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc và có bảng phân phối xác suất đồng thời đã xác định thì

$$P(x_i|y_k) = P(X = x_i|Y = y_k) = \frac{P(X = x_i; Y = y_k)}{P(Y = y_k)},$$

và

$$P(y_k|x_i) = P(Y = y_k|X = x_i) = \frac{P(X = x_i; Y = y_k)}{P(X = x_i)},$$

lần lượt được gọi là *xác suất để* $X = x_i$ *với điều kiện* $Y = y_k$ *và xác suất để* $Y = y_k$ *với điều kiện* $X = x_i$. Từ đây ta đưa ra luật phân phối có điều kiện của X biết Y nhận một giá trị cụ thể và luật phân phối có điều kiện của Y biết X nhận một giá trị cụ thể.

Ta cũng có các kỳ vọng điều kiện: $E(X|Y = y_k) = \sum\limits_{x_i \in R_X} x_i P(x_i|y_k)$ và $E(Y|X = x_i) = \sum\limits_{y_j \in R_Y} y_j P(y_j|x_i)$

b) Nếu (X, Y) có X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục và có hàm mật độ xác suất đồng thời $f(x, y)$ đã xác định thì các hàm

$$f(x|y) = f(x|Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \text{ và } f(y|x) = f(y|X = x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)},$$

lần lượt được gọi là *hàm mật độ có điều kiện của* X *biết* $Y = y$ và *hàm mật độ có điều kiện của* Y *biết* $X = x$, ở đây $f_X(x), f_Y(y)$ là các hàm mật độ xác suất riêng của X, Y.

Ta cũng có các kỳ vọng điều kiện: $E(X|Y = y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x|y)dx$ và $E(Y|X = x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f(y|x)dy$

6. Một số đặc trưng của véc tơ ngẫu nhiên hai chiều.

Cho véc tơ ngẫu nhiên (X, Y).

a) *Các đặc trưng của các thành phần* X *và* Y.

Ta có công thức cho EX và DX, còn EY và DY có công thức tương tự (ta đổi vai trò X cho Y).

Nếu (X, Y) với X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc , đã cho bảng phân phối xác suất đồng thời thì

$$EX = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} x_i p_{ij}, \quad DX = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} x_i^2 p_{ij} - (EX)^2.$$

Nếu (X, Y) với X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục , đã cho hàm mật độ xác suất đồng thời $f(x, y)$ thì

$$EX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y)dxdy, \quad DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y)dxdy - (EX)^2.$$

b) *Hiệp phương sai* $cov(X,Y) = \mu_{xy} = E[(X - EX)(Y - EY)]$. Ta có $cov(X,Y) = cov(Y,X)$.

Nếu (X,Y) với X,Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc , đã cho bảng phân phối xác suất đồng thời thì $\mu_{xy} = \sum\limits_{i\geq 1}\sum\limits_{j\geq 1} x_i y_j p_{ij} - EX.EY$.

Nếu (X,Y) với X,Y là các biến ngẫu nhiên liên tục , đã cho hàm mật độ xác suất đồng thời $f(x,y)$ thì $\mu_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy - EX.EY$.

Định nghĩa: Ma trận hiệp phương sai của véc tơ ngâu nhiên (X,Y) là ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} DX & \mu_{xy} \\ \mu_{yx} & DY \end{pmatrix}.$$

c) *Hệ số tượng quan* $\rho(X,Y) = \rho_{xy} = \dfrac{\mu_{xy}}{\sqrt{DX.DY}} = \dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_X.\sigma_Y}$.

Định nghĩa: Nếu $\rho_{xy} = 0$ thì ta nói X và Y không tương quan và nếu $\rho_{xy} \neq 0$ thì ta nói X và Y tương quan với nhau.

Ta có một số kết quả về hệ số tương quan như sau:

i) $|\rho_{xy}| \leq 1$.

ii) Nếu $|\rho_{xy}| = 1$ thì ta có X và Y tương quan dạng tuyến tính (tức là có hai số a,b sao cho $Y = aX + b$).

Chú ý: Nếu $|\rho_{xy}|$ rất gần 0 thì ta nói X và Y tương quan yếu và nếu $|\rho_{xy}|$ rất gần 1 thì ta nói X và Y tương quan chặt (hiểu theo nghĩa gần tuyến tính).

d) *Kỳ vọng điều kiện.*

Kỳ vọng có điều kiên của X biết Y nhận giá trị xác định là y, là số được ký hiệu $E(X|y)$. Tương tự $E(Y|x)$ là kỳ vọng có điều kiện của Y biết $X = x$. Ta đưa công thức tính cho $E(X|y)$, còn $E(Y|x)$ được tính tương tự.

Nếu (X,Y) với X,Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc , đã cho bảng phân phối xác suất đồng thời thì

$$E(X|y_j) = \sum_{i\geq 1} x_i p(x_i|y_j).$$

Nếu (X,Y) với X,Y là các biến ngẫu nhiên liên tục , đã cho hàm mật độ xác suất đồng thời $f(x,y)$ thì

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x|y)dx.$$

Chú ý: $E(X|y)$ và $E(Y|x)$ lần lượt là các hàm phụ thuộc vào y và x, và các hàm này được gọi các hàm hồi quy. Ta ký hiệu các hàm hồi quy này lần lượt là $E(X|Y)$ và $E(Y|X)$. Khi đó $E(X|Y)$ và $E(Y|X)$ là các biến ngẫu nhiên.

e) *Tỷ số tương quan.*

Tỷ số tương quan X theo Y được xác định bởi công thức

$$\eta^2_{X|Y} = 1 - \frac{E[(X - E(X|Y))^2]}{DX}.$$

Tỷ số tương quan Y theo X được xác định bởi công thức

$$\eta^2_{Y|X} = 1 - \frac{E[(Y - E(Y|X))^2]}{DY}.$$

Chú ý: Hệ số tương quan ρ_{xy} dùng để đo mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa Y, X; còn các tỷ số tương quan $\eta^2_{Y|X}, \eta^2_{X|Y}$ dùng để đo mức độ tương quan phi tuyến (hay tương quan không tuyến tính) giữa X, Y.

Một số kết quả về tỷ số tương quan $\eta^2_{Y|X}$, tương tự với $\eta^2_{X|Y}$:

i) $0 \leq \eta^2_{Y|X} \leq 1$.
Nếu $\eta^2_{Y|X} = 1$ thì Y có mối quan hệ hàm với X hay $Y = f(X)$ với xác suất gần 1.
Nếu $\eta^2_{Y|X} = 0$ thì Y, X không có mối quan hệ hàm.

ii) $\rho^2_{xy} \leq \eta^2_{Y|X}$.
Nếu $\eta^2_{Y|X} = \rho^2_{xy}$ thì X, Y chỉ có tương quan tuyến tính và không có tương quan phi tuyến nào khác.

Chú ý: Nếu $\eta^2_{Y|X} - \rho^2_{xy}$ càng lớn thì giữa Y và X có tương quan phi tuyến càng mạnh.

7. Phân phối chuẩn hai chiều.

Véc tơ ngẫu nhiên (X, Y) được gọi là có phân phối theo quy luật chuẩn nếu X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục và hàm mật độ xác suất đồng thời được cho bởi công thức

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi.\sqrt{DX.DY.(1-\rho^2_{xy})}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2_{xy})}\left[\frac{(x-EX)^2}{DX} - \frac{2\rho_{xy}.(x-EX)(y-EY)}{\sqrt{DX.DY}} + \frac{(y-EY)^2}{DY}\right]\right),$$

với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ và $\exp(x) = e^x$.

Chú ý: Nếu (X, Y) có phân phối theo quy luật chuẩn thì X, Y độc lập khi và chỉ khi X, Y không tương quan.

5.2 Một số dạng bài tập cơ bản

5.2.1 Các quy luật phân phối xác suất và một số đặc trưng của véc tơ ngẫu nhiên hai chiều

Phương pháp: Áp dụng các công thức tính toán liên quan đến quy luật phân phối xác suất và các đặc trưng của véc tơ ngẫu nhiên hai chiều.

Ví dụ 5.1. Cho X và Y là hai ĐLNN có phân phối xác suất đồng thời như sau:

X \ Y	-1	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

.

a) Lập bảng phân phối xác suất cho X và Y.

b) Hãy tính $EX, EY, DX, DY, Cov(X,Y)$ và ρ_{xy}.

c) Lập bảng phân phối có điều kiện của Y biết $X = 0$. Sau đó tính $E(Y|X = 0) = E(Y|0)$.

d) Lập hàm phân phối xác suất đồng thời $F(x, y)$ của (X, Y).

Giải.

a) Bảng phân phối xác suất riêng:

Với X,

X	-1	0	1
P(X)	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{24}$

.

Với Y,

Y	-1	1
P(Y)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

.

b) $EX = -1(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4}) + 1(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8}) = -\dfrac{1}{8}$; $DX = \dfrac{133}{192}$.

$EY = -1.3.\dfrac{1}{6} + 1.(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}) = 0$; $DY = 1$.

$Cov(X, Y) = E(XY) - EX.EY$. Ta có bảng phân phối xác suất của XY:

XY	-1	0	1
P(XY)	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{24}$

Vậy $E(XY) = -\dfrac{1}{8} \Rightarrow cov(X, Y) = -\dfrac{1}{8}$;

$\rho_{xy} = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \simeq -0,15.$

c) Ta có $P(-1|0) = \dfrac{4}{7}$; $P(1|0) = \dfrac{3}{7}$.

Bảng phân phối có điều kiện của Y biết $X = 0$:

Y|0	-1	1
P(Y|0)	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

.

Suy ra $E(Y|0) = -\dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{7} = -\dfrac{1}{7}$.

d) Hàm phân phối xác suất đồng thời $F(x,y)$ được xác định như sau:

i) Nếu $x \leq -1$ hoặc $y \leq -1$ thì $F(x,y) = 0$.

ii) Nếu $-1 < x \leq 0$ và $-1 < y \leq 1$ thì $F(x,y) = \dfrac{1}{6}$.

iii) Nếu $-1 < x \leq 0$ và $y > 1$ thì $F(x,y) = \dfrac{5}{12}$.

iv) Nếu $0 < x \leq 1$ và $-1 < y \leq 1$ thì $F(x,y) = \dfrac{1}{3}$.

v) Nếu $0 < x \leq 1$ và $y > 1$ thì $F(x,y) = \dfrac{17}{24}$.

vi) Nếu $x > 1$ và $-1 < y \leq 1$ thì $F(x,y) = \dfrac{1}{2}$.

vii) Nếu $x > 1$ và $y > 1$ thì $F(x,y) = 1$.

Ví dụ 5.2. Giả sử $X \sim B(2;0,4)$và $Y \sim B(2;0,7)$ là hai biến ngẫu nhiên độc lập.

a) Lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X,Y).

b) Tìm phân phối xác suất của $X + Y$;

c) Chứng minh rằng $X + Y$ không có phân phối nhị thức.

Giải.

a) Bảng phân phối xác suất của X và Y như sau:

X	0	1	2
P(X)	$0,36$	$0,48$	$0,16$

,

và

Y	0	1	2
P(Y)	$0,09$	$0,42$	$0,49$

.

Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) là

X \ Y	0	1	2
0	0,0324	0,1512	0,1764
1	0,0432	0,2016	0,2352
2	0,0144	0,0672	0,0784

.

b) Đặt $Z = X + Y$, ta có:

$P(Z = 0) = P(X = 0).P(Y = 0) = 0,0324;$

$P(Z = 1) = P(X = 0)P(Y = 1) + P(X = 1)P(Y = 0) = 0,1944;$

Tương tự: $P(Z = 2) = 0,3924$; $P(Z = 3) = 0,3024$; $P(Z = 4) = 0,0784$.

Từ đo ta có bảng phân phối xác suất của $Z = X + Y$:

Z	0	1	2	3	4
P(Z)	$0,0324$	$0,1944$	$0,3924$	$0,3024$	$0,0784$

c) Giả sử ngược lại, $Z = X + Y$ có phân phối nhị thức, $Z = B(4, p)$.

Khi đó $P(Z = 4) = p^4 = 0,0784$.

Mặt khác $P(Z = 0) = (1 - p)^4 = 0,0324$, suy ra phải có $p = \sqrt[4]{0,0784}$ và $p = 1 - \sqrt[4]{0,0324}$, vô lí.

Vậy $X + Y$ không có phân phối nhị thức.

Ví dụ 5.3. Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên có hàm mật độ đồng thời là:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{nếu } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm $EX, EY, DX, DY, cov(X, Y), \rho_{xy}$.

b) Tính $P[(X, Y) \in D]$ với $D = \{(x, y) : -1 < x < 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

c) Tìm hàm mật độ xác xuất riêng của X và Y. Sau đó chứng minh rằng X và Y độc lập.

d) Tìm hàm phân phối xác suất đồng thời của (X, Y).

e) Tìm hàm mật độ của $U = X + Y,\ V = \dfrac{X}{X+Y}$;

f) Chứng tỏ rằng U và V độc lập.

Giải.

a) ta có $EX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x-y}dxdy = 1$; $DX = 1$.

$EY = 1$ và $DY = 1$.

Mặt khác $E(XY) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} xye^{-x-y}dxdy = 1$. Suy ra $cov(X,Y) = E(XY) - EX.EY = 0$ và do đó $\rho_{xy} = 0$.

b) $P[(X,Y) \in D] = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{1} f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{1} e^{-x}dx \int\limits_{0}^{1} e^{-y}dy = (1-e^{-1})^2$.

c) Ta có $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \le 0 \\ e^{-x} & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$.

Và ta cũng có $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } y \le 0 \\ e^{-y} & \text{nếu } y > 0 \end{cases}$.

Ta thấy $f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$, do đó X, Y là biến ngẫu nhiên độc lập.

d) Ta có $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$ với $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Nếu $x \le 0$ hoặc $y \le 0$ thì $F(x,y) = 0$.

Nếu $x > 0$ và $y > 0$ thì $F(x,y) = (1-e^{-x})(1-e^{-y})$.

e) Phép đổi biến $u = x + y,\ v = \dfrac{x}{x+y} \Leftrightarrow x = uv,\ y = u(1-v)$, với $x, y > 0$ ta có $u > 0, 0 < v < 1$, Jacobian $|J| = u$.

Hàm mật độ đồng thời của U và V là: $f_{uv}(u,v) = e^{-uv-u+uv}u = u.e^{-u}$ nếu $u > 0, 0 < v < 1$ và $f_{uv}(u,v) = 0$ nếu trái lại.

Hàm mật độ của U là $f_u(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{uv}(u,v)dv = \int_0^1 u.e^{-u}dv = ue^{-u}$ nếu $u > 0$ và $f(u) = 0$ nếu trái lại;

Hàm mật độ của V là $f_v(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{uv}(u,v)du = \int_0^{+\infty} u.e^{-u}du = 1$ nếu $0 < v < 1$ và $f(v) = 0$ nếu trái lại.

f) Dễ thấy rằng $f_{uv}(u,v) = f_u(u)f_v(v)$ nên U và V độc lập.

Ví dụ 5.4. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên có hàm mật độ đồng thời là

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{k}{x} & \text{nếu } 0 < y \le x \le 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}.$$

a) Tìm k và ρ_{xy}.

b) Tìm hàm mật độ có điều kiện $f(y|x)$.

c) Tìm $P(X^2 + Y^2 \le 1)$.

Giải:

a) Ta có $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$; do đó, ta tính được $k = 1$.

Mặt khác, ta cũng có $EX = \dfrac{1}{2}, DX = \dfrac{1}{12}, EY = \dfrac{1}{4}, DY = \dfrac{7}{144}$ và $E(XY) = \dfrac{1}{6}$. Suy ra $\rho_{xy} \simeq 0,65465$.

b) Trước tiên, ta có $f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in (0;1] \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$.

Do đó, ta nhận được:

Nếu $x \notin (0;1]$ thì $f(y|x) = 0$.

Nếu $x \in (0;1]$ thì $f(y|x) = f(x,y)$.

c) Tính $P(X^2 + Y^2 \le 1) = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

5.3 Bài tập

Bài tập 5.1. Cho các biến ngẫu nhiên X và Y có bảng phân phối xác suất đồng thời như sau:

X \ Y	1	2	3
1	0,12	0,15	0,03
2	0,28	0,35	0,07

a) Lập bảng phân phối xác suất riêng của X và Y.

b) Chứng minh rằng X và Y độc lập.

c) Tìm quy luật phân phối của $Z = XY$ và tính EZ.

Bài tập 5.2. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối xác suất như sau:

X	0	1	2	3
P(X)	0,4	0,3	0,2	0,1

và

Y	0	1	2	3	4
P(Y)	0,1	0,3	0,4	0,15	0,05

a) Tìm hàm phân phối xác suất riêng của X và Y.

b) Lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y).

c) Tính $P(X > Y)$.

Bài tập 5.3. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên có phân phối xác suất đồng thời như sau:

X \ Y	-1	0	1
-1	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	0	$\frac{2}{15}$	0

a) Tính $EX, EY, cov(X, Y)$ và $\rho(X, Y)$;

b) X và Y có độc lập hay không?

Bài tập 5.4. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập.

a) Giả sử $X \sim B(1; 0,2)$ và $Y \sim B(2; 0,2)$. Lập bảng phân phối xác suất của (X, Y) và bảng phân phối xác suất của $X + Y$;

b) Giả sử $X \sim B(1; 0,5)$ và $Y \sim B(2; 0,2)$. Lập bảng phân phối xác suất của $X + Y$. Biến ngẫu nhiên $X + Y$ có phân phối nhị thức hay không?

Bài tập 5.5. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên có hàm mật độ đồng thời là

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\pi} & \text{nếu } \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} < 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm hàm mật độ xác suất riêng của X và của Y.

b) Tính $\rho(X, Y)$.

Bài tập 5.6. Cho hai biến ngẫu nhiên X và Y có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x^2 + \dfrac{xy}{2}) & \text{nếu } 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tìm hàm phân phối đồng thời của X và Y.

Bài tập 5.7. Cho hai biến ngẫu nhiên X và Y có hàm mật độ đồng thời: $f(x,y) = \dfrac{k}{(1+x^2)(1+y^2)}$

a) Tìm hằng số k.

b) Tìm hàm phân phối đồng thời của X và Y.

c) X và Y có độc lập không?

d) Tính xác suất để điểm ngẫu nhiên (X, Y) rơi vào hình chữ nhật với các đỉnh là $A(1,1)$, $B(\sqrt{3}, 1)$, $C(1, 0)$, $D(\sqrt{3}, 0)$.

Bài tập 5.8. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn đồng thời với $EX = 35, EY = 20, DX = 36, DY = 16$ và $\rho(X, Y) = 0,8$.

a) Chứng minh X và Y có phân phối xác suất tuân theo quy luật chuẩn.

b) Tìm hàm mật độ xác suất đồng thời của (X, Y).

c) Tìm kì vọng và phương sai của $2X - 3Y$.

Bài tập 5.9. Cho véc tơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm phân phối xác suất

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y} & \text{nếu } x > 0 \text{ và } y > 0 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm hàm mật độ xác suất đồng thời của (X, Y).

b) Tìm xác xuất để đại lượng ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) nhận giá trị trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 1; x = 2; y = 3; y = 5$.

5.4 Hướng dẫn giải bài tập

Bài 5.1:

a) Bảng phân phối xác suất của X

X	1	2
P(X)	0,3	0,7

Bảng phân phối xác suất của Y

Y	1	2	3
P(Y)	0,4	0,5	0,1

b) Dễ dàng kiểm tra được $P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i).P(Y = y_j)$. Do đó X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập.

c) Bảng phân phối của $Z = XY$

Z=XY	1	2	3	4	6
P(Z)	0,12	0,43	0,03	0,35	0,07

Ta có $EZ = 2,89$.

Bài 5.2: a) Hàm phân phối xác suất của X

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq 0 \\ 0,4 & \text{nếu } 0 < x \leq 1 \\ 0,7 & \text{nếu } 1 < x \leq 2 \\ 0,9 & \text{nếu } 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{nếu } x > 3 \end{cases}$$

Hàm phân phối xác suất của Y

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq 0 \\ 0,1 & \text{nếu } 0 < x \leq 1 \\ 0,4 & \text{nếu } 1 < x \leq 2 \\ 0,8 & \text{nếu } 2 < x \leq 3 \\ 0,95 & \text{nếu } 3 < x \leq 4 \\ 1 & \text{nếu } x > 4 \end{cases}$$

b) Bảng phân phối xác suất đồng thời

X \ Y	0	1	2	3	4
0	0,04	0,12	0,16	0,06	0,02
1	0,03	0,09	0,12	0,045	0,015
2	0,02	0,06	0,08	0,03	0,01
3	0,01	0,03	0,04	0,015	0,005

c) $P(X > Y) = 0,19$.

Bài 5.3:

a) $EX = -\dfrac{7}{15}$ và $EY = 0$

Ta cũng có $DX = \dfrac{1}{3} - \dfrac{49}{225} = \dfrac{26}{225}$ và $DY = \dfrac{2}{3}$.

Bảng phân phối xác suất của $Z = XY$ là

Z=XY	-1	0	1
P(Z)	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$

Suy ra $E(XY) = 0$. Do đó $cov(X, Y) = E(XY) - EX.EY = 0$ và $\rho(X, Y) = 0$.

b) Ta có $P(X = -1) = \dfrac{3}{5}$, $P(Y = -1) = \dfrac{1}{3}$ và $P(X = -1; Y = -1) = \dfrac{4}{15}$.

Suy ra $P(X = -1).P(Y = -1) \neq P(X = -1; Y = -1)$, hay X, Y không độc lập.

Bài 5.4:

a) Bảng phân phối xác suất của X

X	0	1
P(X)	0,8	0,2

Bảng phân phối xác suất của Y

Y	0	1	2
P(Y)	0,64	0,32	0,04

Bảng phân phối xác suất đồng thời của X và Y

X \ Y	0	1	2
0	0,512	0,256	0,032
1	0,128	0,064	0,008

Bảng phân phối xác suất của $Z = X + Y$

Z=X+Y	0	1	2	3
P(Z)	0,512	0,384	0,096	0,008

b) Bảng phân phối xác suất của X

X	0	1
P(X)	0,5	0,5

Bảng phân phối xác suất của Y

Y	0	1	2
P(Y)	0,64	0,32	0,04

Bảng phân phối xác suất của $Z = X + Y$

Z=X+Y	0	1	2	3
P(Z)	0,32	0,48	0,18	0,02

Giả sử $X + Y \sim B(3; p)$. Ta có $P(X + Y = 0) = (1 - p)^3 = 0,32$, suy ra $p = 1 - \sqrt[3]{0,32}$.

Mặt khác, ta lại có $P(X + Y = 3) = p^3 = 0,02$, suy ra $p = \sqrt[3]{0,02}$.

Do đó, $X + Y$ không có phân phối nhị thức.

Bài 5.5:

a) Hàm mật độ xác suất của X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \dfrac{2}{3\pi}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9}} & \text{nếu } x \in (-3; 3) \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Hàm mật độ xác suất của Y

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sqrt{1-\frac{y^2}{4}} & \text{nếu } y \in (-2;2) \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

b) Ta có $EX = 0$ và $EY = 0$.

Mặt khác $E(XY) = \frac{1}{6\pi} \iint\limits_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1} xydxdy = 0$, suy ra $cov(X,Y) = 0$. Do đó, $\rho(X,Y) = 0$.

Bài 5.6:

a) Ta có $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = k\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 (x^2 + \frac{xy}{2})dy = \frac{7}{6}.k$. Suy ra $k = \frac{6}{7}$.

b) Hàm phân phối xác suất đồng thời $F(x,y)$ được cho bởi công thức

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv,$$

và do đó ta tính được:

i) Nếu $x \le 0$ hoặc $y \le 0$ thì $F(x,y) = 0$.

ii) Nếu $0 < x \le 1$ và $0 < y \le 2$ thì $F(x,y) = \frac{6}{7}\left(\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{8}\right)$.

iii) Nếu $0 < x \le 1$ và $y > 2$ thì $F(x,y) = \frac{6}{7}\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)$.

iv) Nếu $x > 1$ và $0 < y \le 2$ thì $F(x,y) = \frac{6}{7}\left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{8}\right)$.

v) Nếu $x > 1$ và $y > 2$ thì $F(x,y) = 1$.

Bài 5.7:

a) Ta có $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = k.\pi^2$. Suy ra $k = \frac{1}{\pi^2}$.

b) Hàm phân phối xác suất đồng thời

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv = \frac{1}{\pi^2}\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right).\left(\arctan y + \frac{\pi}{2}\right).$$

c) Hàm mật độ xác suất của X là $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Hàm mật độ xác suất của Y là $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$.

Ta có $f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$, do đó X và Y là độc lập.

d) Tính $P((X,Y) \in D)$ với $D = \{(x,y) : 1 \le x \le \sqrt{3}, 1 \le y \le \sqrt{3}\}$.

Do đó $P((X,Y) \in D) = \int\limits_1^{\sqrt{3}} dx \int\limits_1^{\sqrt{3}} \dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} dy = \dfrac{1}{144}$.

Bài 5.8:

a) Ta có (X,Y) có hàm mật độ phân phối đồng thời là

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi.\sqrt{DX.DY.(1-\rho_{xy}^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left[\frac{(x-EX)^2}{DX} - \frac{2\rho_{xy}.(x-EX)(y-EY)}{\sqrt{DX.DY}} + \frac{(y-EY)^2}{DY}\right]\right),$$

với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ và $\exp(x) = e^x$.

Dễ dàng chứng minh được $X \sim N(EX; DX)$ và $Y \sim N(EY; DY)$.

b) Ta có $EX = 35, EY = 20$ và $DX = 36, DY = 16$, $\rho_{xy} = 0,8$.

Hàm mật độ xác suất đồng thời là

$$f(x,y) = \frac{5}{144\pi} exp\left(-\frac{25}{18}\left[\frac{(x-35)^2}{36} + \frac{(y-20)^2}{16} - \frac{(x-35)(y-20)}{15}\right]\right).$$

c) Do đó $E(2X-3Y) = 2EX - 3EY = 10$.

Mặt khác, ta có $D(2X-3Y) = 4DX + 9DY - 12cov(X,Y)$. Mà $cov(X,Y) = \rho_{xy}.\sqrt{DX.DY} = 19,2$, suy ra $D(2X-3Y) = 57,6$.

Bài 5.9:

a) Hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{-x-y}\ln^2 2 & \text{nếu } x > 0 \text{ và } y > 0 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

b) $P[(X,Y) \in D]$ với $D = (x,y : 1 \le x \le 2, 3 \le y \le 5\}$.

Do đó

$$P[(X,Y) \in D] = F(2,5) - F(1,5) + F(1,3) - F(2,3) = \frac{3}{128}.$$