LỜI GIẢI CHI TIẾT ĐỀ THI THỬ ĐỊNH KỲ LẦN 2 - GT1

Thực hiện bởi Team GT1 - CLB Hỗ trợ Học tập

Câu 1. [1đ] Cho tích phân bất định $I=\int x^2\sqrt{2x+1}dx$. Với phép biến đổi $t=\sqrt{2x+1}$, ta thu được:

$$\bigcap I = \frac{1}{4} \int (t^6 - t^4 + 1)dt$$

$$I = \frac{1}{4} \int (t^6 + 2t^4 - t)dt$$

$$\bigcirc I = \frac{1}{4} \int (t^6 - 2t^4 + t^2) dt$$

$$I = \frac{1}{3} \int (t^6 - t^4 + 1) dt$$

Hướng dẫn giải

Ta có:
$$t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow 2tdt = 2dx \Rightarrow dx = tdt$$

$$\Rightarrow I = \int \left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 t^2 dt$$

$$= \frac{1}{4} \int (t^4 - 2t^2 + 1) t^2 dt$$

$$= \frac{1}{4} \int (t^6 - 2t^4 + t^2) dt$$

Đáp án: $I = \frac{1}{4} \int (t^6 - 2t^4 + t^2) dt$

Câu 2. [1 \mathbf{d}] Tính đạo hàm theo biến x của hàm số:

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} (t + \cos 2t)dt$$

$$(-(x^2 + \cos x).2x + (x^3 + \cos 2x^3).3x^2)$$

$$\bigcirc (2x + \cos 2x).x^2 - (x^3 + \cos 2x^3).3x^2$$

$$\bigcirc -(2x + \cos 2x).x^2 + (x^3 + \cos 2x^3).3x^2$$

$$\bigcirc -(x^2 + \cos 2x^2).2x + (x^3 + \cos 2x^3).3x^2$$

Hướng dẫn giải

Ta có:
$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} (t + \cos 2t) dt$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x^3 + \cos 2x^3).(x^3)' - (x^2 + \cos 2x^2).(x^2)' = (x^3 + \cos 2x^3).3x^2 - (x^2 + \cos 2x^2).2x$$

Đáp án:
$$-(x^2 + \cos 2x^2).2x + (x^3 + \cos 2x^3).3x^2$$

Câu 3. [1đ] Biết
$$I = \int\limits_0^5 \frac{25-5x-x^2}{\sqrt{25-x^2}} dx = \frac{a}{b}\pi + c$$
. Tính $a+b+c$?

Hướng dẫn giải

$$I = \int_{0}^{5} \frac{25 - 5x - x^{2}}{\sqrt{25 - x^{2}}} dx = \int_{0}^{5} \left(\sqrt{25 - x^{2}} - \frac{5x}{\sqrt{25 - x^{2}}} \right) dx$$
$$= \left(\frac{1}{2} x \sqrt{25 - x^{2}} + \frac{25}{2} \arcsin \frac{x}{5} \right) \Big|_{0}^{5} + 5\sqrt{25 - x^{2}} \Big|_{0}^{5}$$
$$= \frac{25}{4} \pi - 25$$

Vay a + b + c = 4

Đáp án: 4

Câu 4. [1d] Tổng số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ là:

 \bigcirc 3 \bigcirc 1

 \bigcirc 2 \bigcirc 4

Hướng dẫn giải

- Ta có:
$$\lim_{x \to 1^+} y = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x \to -1}} y = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x \to -1}} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{-3}{2}$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số}$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số}$$
- Ta có: $\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \infty \Rightarrow \text{Hàm số không có tiệm cận ngang}$
- Ta có: $\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 1}{x^3 - x} = 1$

- Ta có:
$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 1}{x^3 - x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} (y - x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x - 1} = 0$$

 $\Rightarrow y = x$ là tiêm cân xiên của đồ thi hàm số

Đáp án: 2

Câu 5: [1đ] Biết
$$I = \int \frac{10x}{(1+x)(x^2+4)} dx = a \ln \left(\frac{x^2+4}{(x+1)^2} \right) + b \arctan \frac{x}{c} + C$$
. Tính $T = a+b+c$?

 \bigcirc 10

 \bigcirc 5

 \bigcirc 7

O 6

Hướng dẫn giải

$$I = \int \frac{10x}{(1+x)(x^2+4)} dx = \int \left(\frac{-2}{1+x} + \frac{2x+8}{x^2+4}\right) dx$$
$$= \int \left(\frac{-2}{1+x} + \frac{2x}{x^2+4} + \frac{8}{x^2+4}\right) dx$$
$$= \ln \frac{x^2+4}{(x+1)^2} + 4 \arctan \frac{x}{2} + C.$$

Vay T = a + b + c = 7

Đáp án: 7

Câu 6: [1đ] Cho $f'(x) = \sin x$ và f(0) = -1. Đặt

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} f(x) dx - \int\limits_0^{\pi/2} f^3(x) dx = \frac{a}{b} \ \left(\ \frac{a}{b} \ \text{t\'oi giản}, \ a,b \in \mathbb{Z}^* \right).$$

 $\mathsf{T\'{i}nh}\; a.b = ?$

 \bigcirc 3

 \bigcirc 2

 \bigcirc -3

 \bigcirc 10

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x) = -\cos x + C \Rightarrow f(0) = -1 + C = -1 \Rightarrow C = 0$ $\Rightarrow f(x) = -\cos x$.

Do đó,
$$I = \int_{0}^{\pi/2} (-\cos x) dx - \int_{0}^{\pi/2} -\cos^{3} x dx = -\left[\int_{0}^{\pi/2} (\cos x) dx - \int_{0}^{\pi/2} \cos^{3} x dx\right]$$

$$= -\left[\int_{0}^{\pi/2} \cos x (1 - \cos^{2} x) dx\right] = -\int_{0}^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^{2} x dx = -\int_{0}^{\pi/2} \sin^{2} x d(\sin x)$$

$$= -\frac{\sin^{3} x}{3} \Big|_{0}^{\pi/2} = -\frac{1}{3}$$

 $\Rightarrow a.b = -3.$

Đáp án: -3

Câu 7: [1d] Cho hàm số f(x) khả vi trên $\mathbb R$ thỏa mãn: $f(0)=1, f(x)+C=\int 3x^2f(x)dx$.. Gọi a=f(2). Khẳng định nào sau đây là đúng?

$$\bigcirc 2979 < a < 2980$$

$$\bigcirc$$
 2981 < a < 2982

$$\bigcirc$$
 2980 < a < 2981

$$\bigcirc$$
 2982 < a < 2983

Hướng dẫn giải

Đạo hàm hai vế của phương trình $f(x) + C = \int 3x^2 f(x) dx$ ta được:

$$f'(x) = 3x^{2} f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 3x^{2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 3x^{2} dx$$

$$\Rightarrow \ln|f(x)| = x^{3} + C$$

$$\Rightarrow \ln|f(0)| = C \Rightarrow \ln 1 = C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow |f(x)| = e^{x^{3}}$$

Do
$$f(0) = 1 \Rightarrow f(x) = e^{x^3}$$

 $\Rightarrow a = f(2) = e^8 \Rightarrow 2980 < a < 2981$

Đáp án: 2980 < a < 2981

Câu 8: [1đ] Cho hàm số f(x) chẵn, khả vi trên \mathbb{R} và f(1) = 2.

Giá trị của tích phân sau: $I = \int_{-1}^{1} \left((f'(x))^3 + xf'(x) + f(x) \right) dx$ là:

Hướng dẫn giải

Do
$$f(x)$$
 chẵn $\Rightarrow f'(x)$ lẻ $\Rightarrow (f'(x))^3$ lẻ $\Rightarrow \int_{-1}^1 \left((f'(x))^3 \, dx = 0 \right)$ $\Rightarrow I = \int_{-1}^1 \left(x f'(x) + f(x) \right) dx = \int_{-1}^1 \left(x f(x) \right)' dx = x f(x) \bigg|_{-1}^1 = f(1) + f(-1) = 2 + 2 = 4$ Đáp án: 4

Câu 9: [1đ] Tích phân suy rộng nào sau đây hội tụ?

$$\Box \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2x}$$

$$\Box \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Box \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2}+1}$$

$$\Box \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sin x dx}$$

$$\Box \int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{2}} dx$$

Hướng dẫn giải

1.
$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2x}$$

$$\text{Ta có: } \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \ln x \Big|_{1}^{+\infty} = +\infty$$

$$\text{Do dó } \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2x} \text{ phân kỳ}$$
2.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$\text{Ta có: } \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x \Big|_{0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Do dó } \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \text{ hội tụ}$$

3.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$
Ta có:
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \Big|_{0}^{+\infty} = +\infty$$
Do đó
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ phân kỳ}$$
4.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)}$$

Ta có:
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| \bigg|_0^{+\infty} = \ln 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$$
 Do đó
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)} \text{ hội tụ}$$

$$5. \int_{1}^{+\infty} \sin x dx$$

Ta có:
$$\int_{1}^{+\infty} \sin x dx = -\cos x \Big|_{1}^{+\infty} = \cos 1 - \lim_{x \to +\infty} \cos x$$

Xét 2 dãy
$$x_n=2n\pi$$
 và $y_n=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ có $\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n=+\infty$

Lại có:
$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty}\cos x_n=1\\ \lim_{n\to+\infty}\cos y_n=0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\cos x \text{ không tồn tại}$$

Do đó
$$\int_{1}^{\infty} \sin x dx$$
 phân kỳ

6.
$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

Ta có:
$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = \int_{1}^{+\infty} \arctan x d\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{-\arctan x}{x} \Big|_{1}^{+\infty} + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+1)} dx$$

$$= 0 + \frac{\pi}{4} + \int_{1}^{+\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right] dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) \right]_{1}^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)\Big|_1^{+\infty}$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

Do đó
$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$$
 hội tụ

Đáp án:
$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} \ \mathbf{và} \ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)} \ \mathbf{và} \ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \ \mathbf{và} \ \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

Câu 10: [1đ] Đường cong có phương trình nào dưới đây đi qua gốc toa đô?

$$\Box \ r = 2 + 2\cos\varphi$$

$$\square \begin{cases} x(t) = t^3 + 2\sin t + \cosh t - 1 \\ y(t) = \arctan t + t^2 + \tanh t \end{cases}$$

$$\Box y = \int_{0}^{x} t e^{t^{2}} dt$$

$$y = \arccos x + \arcsin x$$

$$\square \begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = 1 - t^3 \end{cases}$$

$$\Box \ r = \cos^2 \varphi$$

Hướng dẫn giải

1.
$$r = 2 + 2\cos\varphi$$

Đưỡng cong $r=2+2\cos\varphi$ đi qua gốc tọa độ khi $r=0 \Leftrightarrow 2+2\cos\varphi=0 \Leftrightarrow \cos\varphi=-1(*)$

Phương trình (*) có nghiệm

Do đó đường cong $r = 2 + 2\cos\varphi$ đi qua gốc tọa độ

2.
$$\begin{cases} x(t) = t^3 + 2\sin t + \cosh t - 1\\ y(t) = \arctan t + t^2 + \tanh t \end{cases}$$

Khi
$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy đường cong
$$\begin{cases} x(t) = t^3 + 2\sin t + \cosh t - 1 \\ y(t) = \arctan t + t^2 + \tanh t \end{cases}$$

đi qua gốc tọa độ

$$3. \ y = \int_{0}^{x} te^{t^2} dt$$

3.
$$y = \int_{0}^{x} te^{t^2} dt$$
Khi $x = 0$ thì $y = \int_{0}^{0} te^{t^2} dt = 0$

Vậy đường cong $y=\int\limits_{\hat{a}}^{\tilde{a}}te^{t^2}dt$ đi qua gốc tọa độ

4.
$$y = \arccos x + \arcsin x$$

Ta có: $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó đường cong $y = \arccos x + \arcsin x$ không đi qua gốc tọa độ

5.
$$\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = 1 - t^3 \end{cases}$$

Ta có:
$$x(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Khi
$$t = -1$$
 thì $y(t) = 2$

Do đó x(t), y(t) không đồng thời bằng 0

Vậy đường cong
$$\begin{cases} x(t)=1+t \\ y(t)=1-t^3 \end{cases}$$
 không đi qua gốc tọa độ

6.
$$r = \cos^2 \varphi$$

Đường cong
$$r=\cos^2\varphi$$
 đi qua gốc tọa độ khi $r=0\Leftrightarrow\cos^2\varphi=0(*)$

Phương trình (*) có nghiệm nên đường cong $r = \cos^2 \varphi$ đi qua gốc toa đô.

Đáp án:
$$r=2+2\cos\varphi$$
 và
$$\begin{cases} x(t)=t^3+2\sin t+\cosh t-1\\ y(t)=\arctan t+t^2+\tanh t \end{cases}$$
 và $y=\int\limits_0^x te^{t^2}dt$ và $r=\cos^2\varphi$

Câu 11: [1đ] Trong những đồ thị hàm số sau, đồ thị hàm số nào có tiệm cận xiên là y = x + 1?

$$\square \ y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 3}$$

$$\Box \ln x$$

$$\square \ y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\Box \sqrt[3]{x^3+1}+1$$

$$\Box \ y = e^x$$

$$\Box x + \arctan x$$

Hướng dẫn giải

1.
$$y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 3}$$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Tập xác định:
$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

Ta có:
$$\lim_{x\to\infty} y = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 3x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} (y - x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 5}{x + 3} = 1$$

 $\Rightarrow y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (thoả mãn).

$$2. \ y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Tập xác định:
$$D = \mathbb{R}$$

Có:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$$
 nên đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

3.
$$y = e^x$$

Tập xác định:
$$D = \mathbb{R}$$

Tạp xác dịnh:
$$D = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

⇒ Đồ thi hàm số không có tiêm cân xiên.

$$4. \ y = \ln x$$

Tập xác định:
$$D = (0, +\infty)$$

$$\begin{split} &\lim_{x\to +\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0\\ \Rightarrow &\text{ D\^{o}$ thị hàm số không có tiệm cận xiên.} \end{split}$$

5.
$$y = \sqrt[3]{x^3 + 1} + 1$$

Tập xác đinh: $D = \mathbb{R}$

Cố:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} + 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (y - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 1} + 1 - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + \sqrt[3]{x^3 + 1} + 1} + 1\right) = 1$$

$$\Rightarrow y = x + 1 \text{ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (thoả mãn).}$$

6.
$$y = x + \arctan x$$

Tập xác đinh: $D = \mathbb{R}$

Ta có:
$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{\arctan x}{x} \right) = 1$$
 (sử dụng nguyên lý kẹp).

$$X\acute{e}t \lim_{x \to +\infty} (y - x) = \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Xét
$$\lim_{x \to -\infty} (y - x) = \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

Vậy 2 đường thẳng $y = x + \frac{\pi}{2}$ và $y = x - \frac{\pi}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Đáp án:
$$y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 3}$$
 và $\sqrt[3]{x^3 + 1} + 1$

Câu 12: [1đ] Tính tích phân $\int \frac{-x + \sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2} dx$ thu được kết quả là:

$$\Box \frac{1}{2}\ln(2-2x^2) + \arcsin(x) + C$$

$$\Box \ln(1-x^2) + \arcsin(x) + C$$

$$\Box \ln(\sqrt{4-4x^2}) - \arccos(x) + C$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{split} I &= \int \frac{-x}{1-x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + \arcsin(x) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(1-x^2) - \arccos(x) + \frac{\pi}{2} + C(\text{do } \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}) \end{split}$$

Đáp án:

a)
$$\ln(\sqrt{1-x^2}) + \arcsin(x) + C$$

b)
$$\frac{1}{2}\ln(1-x^2) - \arccos(x) + C$$

c)
$$\ln(\sqrt{4-4x^2}) - \arccos(x) + C$$
 d) $\frac{1}{2}\ln(2-2x^2) + \arcsin(x) + C$

Câu 13: [1đ] Tính tích phân $\int (x^2 + 2x) \cos x dx$ thu được kết quả có dạng $a\pi + b$ (a và b là các số nguyên). Giá trị của a là:

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$I = \int_{0}^{\pi} (x^{2} + 2x) \cos x dx = \int_{0}^{\pi} (x^{2} + 2x) . d(\sin x)$$

$$= (x^{2} + 2x) \sin x \Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \sin x . d(x^{2} + 2x) = -\int_{0}^{\pi} (2x + 2) . \sin x dx$$

$$= \int_{0}^{\pi} (2x + 2) d(\cos x) = (2x + 2) \cos x \Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \cos x . d(2x + 2)$$

$$= -2\pi - 4$$

 \Rightarrow Ta tìm được a = -2.

Đáp án: -2 Câu 14: [1đ] Một ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -15t + 30 \, (m/s)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng s, kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hặn ô tô còn đi được bao nhiều m?

Hướng dẫn giải

Khi ô tô dừng hẳn thì
$$v(t)=0$$
.
$$\Rightarrow -15t+30=0$$

$$\Rightarrow t=2$$

Quãng đường ô tô đi được là:

$$S = \int_{0}^{2} (-15t + 30) \, dt = 30 \, m$$

Đáp án: 30

$$\textbf{Câu 15: [1d] Cho } A = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \cos \left(\frac{\pi}{2n} \right) + \frac{2}{n^2} \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) + \frac{3}{n^2} \cos \left(\frac{3\pi}{2n} \right) + \ldots + \frac{n}{n^2} \cos \left(\frac{n\pi}{2n} \right).$$

Biết rằng $A = \frac{a}{\pi} + \frac{b}{\pi^2} \, (a, b \in \mathbb{Z})$. Tính giá trị tích a.b = ?

Hướng dẫn giải

Ta viết lai:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{2}{n^2} \cos\left(\frac{2\pi}{2n}\right) + \frac{3}{n^2} \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right) + \dots + \frac{n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2n}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)$$

$$\Rightarrow A = \int_0^1 x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \cdot d\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = \frac{2}{\pi} x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}.$$

 $\Rightarrow a = 2 \text{ và } b = -\frac{4}{4} \text{ hay giá trị tích } a.b = -8.$

Đáp án: -8

CLB HỐ TRỢ HỌC TẬP