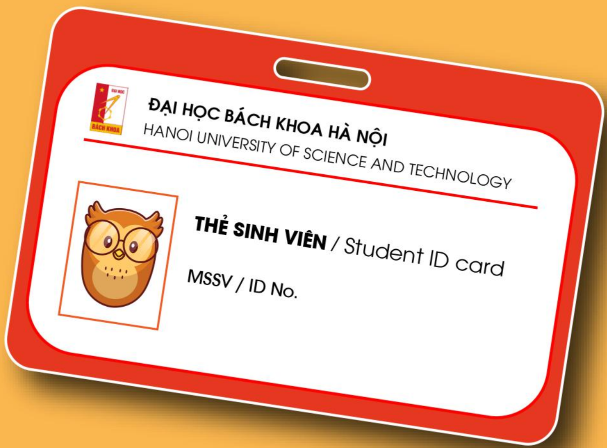
# BỘ KĨ NĂNG A+

# ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH





SCAN ME

TÀI LIỆU ĐƯỢC TỔNG HỢP VÀ BIÊN SOẠN BỞI
CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP BÁCH KHOA

BIÊN SOẠN BỞI CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP BÁCH KHOA

CLB.HTHT-WEBSITE.COM

Tài liệu là món quà nhân dịp năm mới Giáp Thìn 2024 của CLB Hỗ trợ Học tập dành cho các bạn sinh viên lớp đại cương. CLB xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất đến các bạn vì đã tin tưởng đồng hành cùng lớp Đại cương của CLB trong suốt thời gian vừa qua. Sự ủng hộ của các bạn chính là nguồn động lực lớn nhất để chúng mình phấn đấu đưa CLB ngày một phát triển hơn. Cuối cùng, xin chúc các bạn một kỳ học tập hiệu quả và thành công.

*Bản in lần thứ nhất, tháng 1 năm 2024*


# Mục lục

## I Mục 1 - Tóm tắt lý thuyết

# Mục 1 - Tóm tắt lý thuyết


# 1. Lôgic, tập hợp, ánh xạ, số phức

## 1.1 Logic

### 1.1.1 Các phép toán logic

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $p\wedge q$ | $p\vee q$ | $p\to q$ | $p\leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 |

### 1.1.2 Các tính chất

1. Giao hoán: $p\wedge q \Leftrightarrow q\wedge p, p\vee q \Leftrightarrow q\vee p$
2. Kết hợp: $(p\wedge q)\wedge r \Leftrightarrow p\wedge(q\wedge r), (p\vee q)\vee r \Leftrightarrow p\vee(q\vee r)$
3. Phân phối: $p\wedge(q\vee r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(p\wedge r), p\vee(q\wedge r) \Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(p\vee r)$
4. Phép kéo theo: $p\to q \Leftrightarrow \overline{p}\vee q$
5. Phép tương đương: $p\leftrightarrow q \Leftrightarrow (p\to q)\wedge(q\to p)$
6. Luật De Moorgan: $\overline{p\vee q}=\overline{p}\wedge\overline{q}$
   $\overline{p\wedge q}=\overline{p}\vee\overline{q}$



## 1.2 Tập hợp

### 1.2.1 Các phép toán trên tập hợp

1. Phép hợp: $x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A$ hoặc $x\in B$.
2. Phép giao: $x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A$ và $x\in B$.
3. Phép trừ: $x\in A\backslash B \Leftrightarrow x\in A$ và $x\notin B$.
4. Nếu $A\subset B$ thì $\overline{A}=X\backslash A$ được gọi là phần bù của $A$ trong $X$.

### 1.2.2 Các tính chất

1. Giao hoán: $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$
2. Kết hợp: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
3. Phân phối: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C), A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
4. Phép trừ: Nếu $A,B\subset X$ thì $A\backslash B=A\cap\overline{B}$
5. Luật De Moorgan: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
   $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

# 1.3 Ánh xạ

► Cho ánh xạ $f: X \to Y$. Giả sử $A \subset X, B \subset Y$.

1. Tập ảnh: $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$
2. Tập nghịch ảnh: $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$
3. $f$ là đơn ánh nếu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ hay $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
4. $f$ là toàn ánh nếu $\forall y \in Y$ , $\exists x \in X$ để $f(x) = y$
5. $f$ là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh, tức là phương trình $f(x) = y$ có nghiệm duy nhất với $\forall y \in Y$.

## 1.3.1 Tích hai ánh xạ

Cho 2 ánh xạ $f: E \to F$ và $g: F \to G$. Khi đó, ánh xạ $h: E \to G$ sao cho $h(x) = g(f(x))$ với $\forall x \in E$, được gọi là tích của $f$ và $g$ (kí hiệu: $h = g \text{ o } f$).

## 1.3.2 Ánh xạ ngược

Nếu ánh xạ $f: E \to F$ là song ánh, khi đó ánh xạ $f^{-1}: F \to E$ xác định bởi $f^{-1}(y) = x$ gọi là ánh xạ ngược của $f$.

# 1.4 Cấu trúc đại số

## 1.4.1 Phép toán 2 ngôi (Luật hợp thành)

$$\begin{aligned} \circ : G \times G &\to G \\ (x,y) &\mapsto x \circ y \end{aligned}$$

## 1.4.2 Nhóm (Group)

► $(G,\circ)$ là nhóm $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Kết hợp:} & \forall x,y,z \in G: (x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z) \\ \text{Phần tử trung hòa } e: & \exists e \in G, \forall x \in G: x\circ e = e\circ x = x \\ \text{Phần tử nghịch đảo:} & \forall x \in G, \exists x' \in G: x\circ x' = x'\circ x = e \end{cases}$

► $(G,\circ)$ là nhóm Abel nếu $\forall x,y \in G: x\circ y = y\circ x$ (giao hoán)



## 1.4.3 Vành (Ring)

► $(R,+,.)$ là vành $\Leftrightarrow \begin{cases} (R,+) \text{ là nhóm Abel} & \\ \text{Nhân kết hợp:} & \forall x,y,z \in R: (xy)z = x(yz) \\ \text{Phân phối:} & \forall x,y,z \in R: \begin{cases} (x+y)z &= xz+yz \\ z(x+y) &= zx+zy \end{cases} \end{cases}$

► $(R,+,.)$ là vành Abel nếu $\forall x,y \in R: xy = yx$ (Nhân giao hoán)
► $(R,+,.)$ là vành có đơn vị nếu $\exists 1 \in R, \forall x \in R: x1 = 1x = x$

## 1.4.4 Trường (Field)

► $(F,+,.)$ là trường $\Leftrightarrow \begin{cases} (F,+,.) \text{ là vành Abel} \\ (F,+,.) \text{ là vành có đơn vị } 1 \neq 0 \\ \text{Khả nghịch: } \forall x \in F \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in F: x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1 \end{cases}$

# 1.5 Số phức

► Số phức là số có dạng $a+bi$ với $(a,b \in \mathbb{R})$, $i$ thỏa mãn $i^2 = -1$. Modun của số phức $a+bi$ là $\sqrt{a^2+b^2}$.

## 1.5.1 Các phép toán trên dạng chính tắc

► Với hai số phức ở dạng chính tắc: $\begin{cases} z_1 = a+bi \\ z_2 = c+di \end{cases}, \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R})$

1. $z_1 \pm z_2 = (a \pm b) + (b \pm d)i$
2. $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
3. $\dfrac{a+bi}{c+di} = (a+bi)\cdot(c+di)^{-1} = (a+bi)\cdot\left(\dfrac{-c}{c^2+d^2} + \dfrac{d}{c^2+d^2}i\right)$

## 1.5.2 Các phép toán trên dạng lượng giác

► Điểm $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a+bi$ trong mặt phẳng Oxy. Đặt $\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right| \\ \varphi = \left(Ox, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \end{cases}$

Khi đó $z = a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ được gọi là dạng lượng giác của số phức.

► Với hai số phức ở dạng lượng giác: $\begin{cases} z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \end{cases}, \quad (r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R})$

1. $z_1.z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$
3. $z_1^n = r_1^n(\cos(n\varphi_1) + i\sin(n\varphi_1))$
4. $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1}\left(\cos\dfrac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right), \quad \left(k = \overline{0,\ n-1}\right)$

## 1.5.3 Số phức liên hợp

► Số phức liên hợp của số phức $z = a+bi$ là $\bar{z} = a - bi$

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $z + \bar{z} = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$
3. $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
4. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$
5. $|\bar{z}| = |z|$
6. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
7. $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$
8. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$


# 2. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính

## 2.1 Ma trận

### 2.1.1 Định nghĩa

► Cho $\mathbb{K}$ là một trường ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

- Một ma trận là một mảng hình chữ nhật gồm các số thuộc trường $\mathbb{K}$, được bỏ ngoặc vuông $[\quad]$ hoặc ngoặc tròn $(\quad)$
- Véc tơ là một ma trận chỉ có đúng 1 hàng (véc tơ hàng) hoặc 1 cột (véc tơ cột)

### 2.1.2 Các kiểu ma trận đặc biệt

► Ma trận vuông
- Ma trận $\mathbf{A}$ kích thước $m \times n$ là ma trận vuông $\Leftrightarrow m = n$
- Đường chéo chính: Là đường chéo của ma trận $\mathbf{A}$ chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$

► Ma trận chuyển vị
- Cho ma trận $\mathbf{A}$ kích thước $m \times n \Rightarrow$ ma trận chuyển vị của $\mathbf{A}$ là $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ kích thước n x m Khi đó dòng đầu tiên của $\mathbf{A}$ sẽ là cột đầu tiên của $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, dòng thứ hai của $\mathbf{A}$ sẽ là cột thứ hai của $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, ...
- Ví dụ: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

► Ma trận tam giác: là một ma trận vuông, được chia ra làm hai loại:
- Ma trận tam giác trên: Mọi phần tử nằm ở phía **dưới** đường chéo chính $= 0$
- Ma trận tam giác dưới: Mọi phần tử nằm ở **trên** dưới đường chéo chính $= 0$

► Ma trận đường chéo: Một ma trận vuông mà có tất cả các phần tử nằm bên trên và bên dưới đường chéo chính đều = 0 ($a_{jk} = 0 \forall j \neq k$) được gọi là ma trận đường chéo

► Ma trận đối xứng và ma trận phản đối xứng:
- $\mathbf{A}$ là ma trận đối xứng $\Leftrightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}$ là ma trận phản đối xứng $\Leftrightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$

### 2.1.3 Tính toán ma trận

► Phép cộng hai ma trận:

- **Định nghĩa.** Cho $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$ là hai ma trận có cùng kích thước $m \times n$. Khi đó tổng của chúng $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ sẽ được tính bằng cách cộng các phần tử tương ứng lại với nhau

- **Lưu ý.** Hai ma trận không cùng kích thước thì không thể cộng với nhau

► Phép nhân 2 ma trận:

- **Định nghĩa.** Cho ma trận $\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right]$ cỡ $m \times n$, ma trận $\mathbf{B} = \left[b_{jk}\right]$ cỡ $n \times p$. Khi đó, $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (theo đúng thứ tự này) là một ma trận cỡ $m \times p$ được tính bởi công thức:

$$\mathbf{C} = \left[c_{jk}\right]$$

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \ldots + a_{jn}b_{nk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}b_{lk} \quad \text{với} \quad j = 1,2,3,...m;\ k = 1,2,3,...,p$$

- **Lưu ý.** ma trận **A** chỉ có thể nhân được với ma trận **B** khi số cột của $\mathbf{A}$ = số hàng của **B**.
$\rightarrow$ Phép nhân ma trận không có tính giao hoán, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ xét trên trường hợp tổng quát và $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ không có nghĩa $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ hoặc $\mathbf{B} = \mathbf{O}$.

## 2.2 Định thức của ma trận vuông

### 2.2.1 Định nghĩa

► Cho ma trận vuông cấp $n$: $\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right]$. Định thức của **A** là một số được kí hiệu là $\det(\mathbf{A})$, hay:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

### 2.2.2 Một số công thức tính định thức:

$$\left|a\right| = a$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

### 2.2.3 Khai triển định thức theo hàng hay cột bất kì

► Khai triển định thức theo hàng:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{M}_{ij})$$

Trong đó $\mathbf{M}_{ij}$ là ma trận thu được từ ma trận **A** bằng cách bỏ đi hàng $i$ và cột $j$.
► Khai triển định thức theo cột:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{M}_{ij})$$

Trong đó $\mathbf{M}_{ij}$ là ma trận thu được từ ma trận **A** bằng cách bỏ đi hàng $i$ và cột $j$.

### 2.2.4 Các tính chất của định thức

1. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$
2. Một định thức có hai hàng (hay cột) bằng nhau thì bằng không.
3. Nếu đổi chỗ hai hàng (hay cột) của một ma trận thì định thức của nó đổi dấu.
4. Nếu thêm vào một hàng (hay cột) một tổ hợp tuyến tính của các hàng (hay cột) khác thì định thức không đổi.
5. Một định thức có một hàng (hay cột) bằng 0 thì bằng 0.
6. Nếu nhân các phần tử của một hàng (hay cột) với một số $k$ thì được một định thức mới bằng định thức cũ nhân với $k$.

7. Định thức của một ma trận tam giác bằng tích của các phần tử trên đường chéo.
8. $\det(k\mathbf{A}) = k^n \det(\mathbf{A})$
9. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$

# 2.3 Hạng của ma trận, ma trận nghịch đảo

## 2.3.1 Hạng của ma trận, hạng của ma trận bậc thang

► **Định nghĩa 1.** Hạng của ma trận **A** là cấp cao nhất của các định thức con khác không của **A**, kí hiệu là $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ hay $\mathrm{rank}(\mathbf{A})$
Từ định nghĩa ta có:

- **A** là ma trận cỡ $m \times n$ thì $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) \leq \min(m,n)$
- **A** là ma trận vuông cấp $n$ thì **A** khả nghịch khi và chỉ khi $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$

► **Định nghĩa 2.** Ma trận bậc thang là ma trận có 2 tính chất sau

- Các hàng khác không luôn ở trên các hàng bằng không
- Trên hai hàng khác không thì phần tử đầu tiên khác không ở hàng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở hàng trên.

► **Định nghĩa 3.** Hạng của ma trận bậc thang bằng số hàng khác 0 của nó.

## 2.3.2 Tính hạng của ma trận bằng phương pháp biến đổi sơ cấp

► Muốn tìm hạng của ma trận **A**, ta sử dụng các phương pháp biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa **A** về ma trận bậc thang và đếm số hàng khác không của nó.

## 2.3.3 Ma trận nghịch đảo, tính chất, điều kiện khả đảo

### 2.3.3.1 Định nghĩa

► Cho **A** là một ma trận vuông cấp $n$, nếu tồn tại ma trận **B** vuông cấp **B** sao cho

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

thì ta nói ma trận **A** khả đảo (khả nghịch) và gọi **B** là ma trận nghịch đảo của ma trận **B**.
► Ma trận nghịch đảo của ma trận **A** được kí hiệu là $\mathbf{A}^{-1}$.

### 2.3.3.2 Định lý

► **Định lý 1.** Ma trận nghịch đảo của ma trận **A** nếu có thì duy nhất.
► **Định lý 2.** Cho ma trận **A** vuông cấp n, nếu $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ thì ma trận **A** khả nghịch và ma trận nghịch đảo của nó được tính theo công thức:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \mathbf{C}^T = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó $\mathbf{C} = [C_{ij}]$ với $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\mathbf{M}_{ij})$.
► **Định lý 3.** Giả sử $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n$ là hai ma trận khả đảo. Khi đó **AB** cũng khả đảo và

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

► **Định lý 4.** Nếu $\mathbf{A} \in M_n$ khả đảo và có nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1}$ thì

- $\mathbf{A}^{-1}$ cũng khả đảo và $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}^m$ cũng khả đảo và $(\mathbf{A}^m)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^m$ với $m \in \mathbb{Z}, m > 0$.
- $\forall k \neq 0$ ta có $k\mathbf{A}$ cũng khả đảo và $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$

► **Định lý 5.** Nếu $\mathbf{A} \in M_n$ khả đảo tức là có nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1}$ thì $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

# 2.4 Hệ phương trình tuyến tính

## 2.4.1 Khái niệm hệ phương trình tuyến tính

### 2.4.1.1 Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

▶ **Định nghĩa.** Hệ phương trình dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

được gọi là một hệ phương trình tuyến tính tổng quát.
▶ Các số $a_{ij}$ là các hệ số, các số $b_j$ là các hệ số tự do của hệ phương trình.

### 2.4.1.2 Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

▶ Đặt $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ là ma trận hệ số của hệ và $\mathbf{b} = [b_1\ b_2\ \ldots\ b_m]^T$ là ma trận cột vế phải, $x = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$ là ma trận ẩn, ta có dạng ma trận của hệ: $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$

## 2.4.2 Hệ phương trình Cramer

▶ **Định nghĩa.** Hệ phương trình tuyến tính (1) gọi là hệ Cramer nếu $m = n$ và $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

▶ **Định lí Cramer.** Hệ phương trình Cramer có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với $x_j = \dfrac{\det(\mathbf{A}_j)}{\det(\mathbf{A})}, j = \overline{1,n}$ với $\mathbf{A}_j$ là ma trận nhận được bằng cách thay cột $j$ của $\mathbf{A}$ bởi hệ số tự do $\mathbf{b}$.

## 2.4.3 Hệ thuần nhất n phương trình n ẩn

▶ Xét hệ thuần nhất:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

- Hệ có dạng ma trận $\mathbf{A}x = 0$
- Hệ thuần nhất luôn có nghiệm $x = [0, 0, 0, 0 \ldots 0]^t$
- Hệ thuần nhất có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $\det(\mathbf{A}) = 0$

## 2.4.4 Định lý Kronecker-Capelli, phương pháp Gauss giải hệ phương trình.

### 2.4.4.1 Định lý Kronecker-Capelli

▶ Định lý: Hệ (2.1) có nghiệm khi và chỉ khi $\mathrm{r}(\overline{\mathbf{A}}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$, trong đó $\overline{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ là ma trận bổ sung của $\mathbf{A}$
▶ Hệ quả:

- Nếu $\mathrm{r}(\overline{\mathbf{A}}) \neq \mathrm{r}(\mathbf{A})$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $\mathrm{r}(\overline{\mathbf{A}}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$ thì hệ phương trình (1) có nghiệm duy nhất.
- Nếu $\mathrm{r}(\overline{\mathbf{A}}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) < n$ thì hệ phương trình (1) vô số nghiệm.

### 2.4.4.2 Phương pháp Gauss giải hệ phương trình

▶ **B1.** Viết ma trận **A** cạnh vector cột **b** ta được ma trận bổ xung $\overline{\mathbf{A}}$.
▶ **B2.** Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận **A** về ma trận bậc thang.
▶ **B3.** Biện luận theo kết quả thu được.


# 3. Không gian vector (KGVT)

## 3.1 Định nghĩa

► Tập hợp $V \neq \emptyset$ được gọi là một KGVT trên $\mathbb{R}$ nếu nó được trang bị 2 phép toán gồm:

- Phép cộng vector: $+ : V \times V \to V, \quad (u,v) \mapsto u+v$
- Phép nhân vector với vô hướng: $\times : \mathbb{R} \times V \to V, \quad (k,u) \mapsto ku$

và thỏa mãn các tính chất sau:

1. $(V,+)$ là nhóm Abel.
2. Phép nhân có tính phân phối với phép cộng vector và cộng vô hướng.
3. $k_1(k_2u) = (k_1k_2)u \ \forall k_1,k_2 \in \mathbb{R}, u \in V$ (Kết hợp số thực).
4. $1u = u \ \forall u \in V$ (Chuẩn hóa).

## 3.2 Không gian vector con, hệ sinh

### 3.2.1 Không gian vector con



► **Định nghĩa.** Cho $V$ là một KGVT. Tập $\emptyset \neq W \subset V$, là một KGVT con của $V$ nếu $W$ là một KGVT.

► **Điều kiện cần và đủ.** $W$ là KGVT con của $V$ khi và chỉ khi $W$ khép kín với 2 phép toán trên $V$: $k_1u + k_2v \in W \ \forall k_1,k_2 \in \mathbb{R}, u,v \in W$.

► **Hệ quả.** Mọi KGVT con đều chứa phần tử $\theta$ của KGVT "mẹ".

### 3.2.2 Hệ sinh

► $V$ là một KGVT, tập $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là một họ các vector của $V$. Tập $S$ gọi là hệ sinh của $V$ khi và chỉ khi: $V = span(S) = \{c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n | c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}\}$

► **Hệ quả.** $span(S)$ là một KGVT con của $V$.

## 3.3 Hệ vector độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính, cơ sở và tọa độ

### 3.3.1 Tính chất tuyến tính

► Xét hệ $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ và hệ thức: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ...k_n\alpha_n = 0$. Khi đó:

- Hệ $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ **độc lập tuyến tính** nếu hệ thức trên chỉ xảy ra khi $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$

- Nếu không thì hệ $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ **phụ thuộc tuyến tính**.

### 3.3.2 Cơ sở – tọa độ

► **Cơ sở:** Hệ vector $S = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ là cơ sở của $V \Leftrightarrow S$ là hệ sinh của $V$ và hệ $S$ độc lập tuyến tính

► **Không gian vector hữu hạn sinh:** Khi nó có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử. Nếu $V \neq \varnothing$ là không gian vector hữu hạn sinh thì mọi cơ sở của nó đều có cùng một hữu hạn số phần tử.

► **Tọa độ** của $v$ trong cơ sở $(v_1, v_2, ..., v_n)$: là bộ số $(k_1, k_2, ..., k_n)$ xác định bởi: $v = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n$

## 3.4 Số chiều, hạng của họ vector

### 3.4.1 Hạng của một họ vector

► Xét họ $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset V$. Số vector độc lập tuyến tính tối đa có thể rút ra từ họ $S$ gọi là hạng của họ $S$, kí hiệu : $r(S) = r(A)$ (với A là ma trận tọa độ hàng của họ $S$ trong một cơ sở của $V$)

### 3.4.2 Số chiều và cơ sở của KG con sinh bởi họ vector

► Cho $V$ là một KGVT với $V = span(S)$. Khi đó: $\dim V = r(S)$. Đặc biệt hơn, $\forall B = \{v_1, v_2, ..., v_{r(S)}\} \subset S, B$ độc lập tuyến tính thì $B$ là một cơ sở của $V$.

## 3.5 Bài toán đổi cơ sở

► Cho hai cơ sở của KGVT $n$ chiều $V$: $B = \{e_1; e_2; ...; e_n\}$ và $B' = \{e'_1; e'_2; ...; e'_n\}$. Kí hiệu:

$$[v]_X = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}^T \text{ là ma trận tọa độ cột của vector } v \in V \text{ trong cơ sở } X$$

Nếu tồn tại ma trận $P$ sao cho $[v]_B = P \cdot [v]_{B'}$ $\forall v \in V$ thì $P$ gọi là ma trận chuyển cơ sở từ $B$ sang $B'$.

Ma trận $P$ này được xác định duy nhất bởi công thức: $P = \begin{bmatrix} [e'_1]_B & [e'_2]_B & \dots & [e'_n]_B \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P$ là ma trận chuyển cơ sở từ $B$ sang $B'$ thì $\det B \neq 0$ và $P^{-1}$ là ma trận chuyển cơ sở từ $B'$ sang $B$.


# 4. Ánh xạ tuyến tính

## 4.1 Định nghĩa

► Cho $V$ và $W$ là hai KGVT trên cùng 1 trường $\mathbb{K}$. Ánh xạ $f: V \to W$ được gọi là *ánh xạ tuyến tính* khi và chỉ khi nó thỏa mãn: $\forall u, v \in V, f(u+v) = f(u) + f(v)$ và $\forall k \in \mathbb{K}, v \in V : f(kv) = kf(v)$

## 4.2 Hạt nhân và Ảnh (Kernel and Image)

### 4.2.1 Ảnh (Image)

► Cho ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$. Khi đó, tập ảnh của $f$ là tập:

$$Imf = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\} \text{ hoặc } f(V) = \{u \in W \mid \exists v \in V \text{ thỏa mãn } F(v) = u\}$$

### 4.2.2 Hạt nhân (Kernel)

► Cho ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$. Khi đó, hạt nhân $f$ là tập: $Kerf = \{v \in V \mid f(v) = O\}$



### 4.2.3 Hạng của ánh xạ tuyến tính

► Hạng của $f$, kí hiệu là $\operatorname{rank} f$, được định nghĩa bởi số chiều của tập ảnh của $F$: $\operatorname{rank} f = \dim \operatorname{Im} f$

### 4.2.4 Số vô hiệu của ánh xạ tuyến tính

$$\operatorname{null} f = \dim Kerf$$

► **Các định lí.**

- Giả sử $v_1, v_2, \ldots, v_m$ là hệ sinh của không gian vector $V$ và cho ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$, khi đó: $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_m)$ là hệ sinh của $Imf$
- Cho $V$ là một không gian vector với số chiều hữu hạn và ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$. Khi đó:

$$\dim V = \dim Imf + \dim Kerf$$

## 4.3 Ma trận của AXTT

### 4.3.1 Định nghĩa

► Cho AXTT giữa các vector hữu hạn chiều $f: V \to W$. Giả sử $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ và $B_W = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\})$ lần lượt là cơ sở của $V$ và $W$.

▶ Ma trận A có cột $j$ là tọa độ của $f(v_j)$ trong cơ sở $B_W$ gọi là ma trận của $f$ đối với cặp cơ sở $B_V$ và $B_W$:

$$A = \begin{pmatrix} [f(v_1)]_W & [f(v_2)]_W & \dots & [f(v_m)]_W \end{pmatrix}$$

▶ **Mệnh đề 1.** $r(A) = r(f) = \dim \operatorname{Im}(f)$

### 4.3.2 Công thức tọa độ

▶ Với $f: V \to W$ là AXTT có ma trận $A$ đối với cặp cơ sở $B_V$ và $B_W$ thì $\forall u \in V : [f(u)]_{B_W} = A[u]_{B_V}$

**Nhận xét.** Nếu $\dim V = n$, $\dim W = m$ thì $f: V \to W$ có ma trận cỡ $m \times n$

### 4.3.3 Ma trận của ánh xạ tổng và ánh xạ tích

▶ **Định lí 1.** Nếu $f, g: V \to W$ là các AXTT có ma trận đối với cặp cơ sở $B_V$ và $B_W$ lần lượt là $A$ và $B$ thì ma trận của $f+g$ và $\lambda f$ đối với cặp cơ sở $B_V$ và $B_W$ tương ứng là $A+B$ và $\lambda A$.

▶ **Định lí 2.** Nếu $f: V \to W, g: W \to U$ là các AXTT, $f$ có ma trận $A$ đối với cặp cơ sở $B_V$ và $B_W$, $g$ có ma trận $B$ đối với cặp cơ sở $B_W$ và $B_U$ thì ma trận của $g \circ f$ đối với cặp cơ sở $B_V$ và $B_U$ là $BA$.

### 4.3.4 Ma trận của toán tử tuyến tính theo một cơ sở

▶ **Định nghĩa.** Cho toán tử tuyến tính $f: V \to V$ trên không gian $n$ chiều $V$ và $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là một cơ sở của $V$. Ma trận của $f$ đối với cặp cơ sở $B$ và $B$ gọi là ma trận của toán tử $f$ đối với cơ sở $B$ và được xác định bởi: $A = \begin{pmatrix} [f(v_1)]_B & [f(v_2)]_B & \dots & [f(v_n)]_B \end{pmatrix}$

▶ **Mệnh đề.** Cho $f$ là một toán tử tuyến tính trên KGVT $V$. $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ và $\alpha' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là 2 cơ sở của $V$. Nếu ma trận chuyển cơ sở từ $\alpha$ sang $\alpha'$ là $C$, ma trận của $f$ đối với cơ sở $\alpha$ và cơ sở $\alpha'$ lần lượt là $A$ và $B$ thì ta có: $B = C^{-1}AC$

## 4.4 Trị riêng và vector riêng của một toán tử tuyến tính (TTTT)

### 4.4.1 Trị riêng và vector riêng

▶ **Định nghĩa 1.** Cho $f$ là TTTT trên KGVT $V$ trên trường $K$. Phần tử $\lambda \in K$ gọi là giá trị riêng (trị riêng) của $f$ nếu $\exists \theta \neq x \in V : f(x) = \lambda x$. Khi đó, $x$ gọi là vector riêng của $f$ ứng với trị riêng $\lambda$.

▶ **Định nghĩa 2.** Nếu $\lambda$ là một trị riêng của $f$ thì $V_\lambda(f)$ là không gian riêng ứng với trị riêng $\lambda$.

### 4.4.2 Thuật toán tìm trị riêng và vector riêng của toán tử tuyến tính

- Tìm ma trận $A$ của $f$ đối với một cơ sở nào đó của $V$ (thông thường ta chọn cơ sở chính tắc).
- Tìm đa thức đặc trưng của $f: det(A - \lambda E)$.
- Giải phương trình $det(A - \lambda E) = 0$. Nghiệm của phương trình $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là các trị riêng của $f$.
- Với mỗi $\lambda_i$, giải hệ $(A - \lambda_i E)x = 0$. Nghiệm khác 0 là tọa độ các vector riêng ứng với trị riêng $\lambda_i$.

## 4.5 Chéo hoá ma trận

### 4.5.1 Định nghĩa

▶ Cho $A$ là ma trận vuông. Nếu tồn tại ma trận khả đảo $P$ sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận chéo thì ta nói ma trận $A$ chéo hoá được và ma trận $P$ làm chéo hoá ma trận $A$

### 4.5.2 Các bước chéo hoá ma trận

▶ Xét tại 1 cơ sở, $T(x) = Ax$

B1: Tìm các trị riêng $\lambda$ của $A$ bằng việc giải phương trình đặc trưng.

B2: Với mỗi trị riêng $\lambda_i$ (nhớ bội số $s$), ta tìm vector riêng của $A$ bằng việc giải phương trình: $Ax = \lambda_i x$. Nghiệm $x$ phụ thuộc vào $k$ tham số

- Nếu $k < s$ thì số vector riêng không đủ nên ma trận không chéo hoá được.

- Nếu $k = s$ thì ta viết lần lượt các vector riêng theo quy tắc thay một tham số bằng 1 và các tham số còn lại bằng 0

Kết luận ứng với trị riêng $\lambda_i$, ma trận có một số vector riêng là: $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{is}$

B3: Xác định ma trận làm chéo hoá ma trận A là: $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_n \end{bmatrix}$

Với $v_i$ là vector riêng (viết theo cột) ứng với trị riêng $\lambda_i$

B4: Kết luận, ma trận $A$ chéo hoá được và:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_3)$$

### 4.5.3 Ứng dụng phép chéo hoá tính luỹ thừa của ma trận

► Chéo hoá ma trận: $P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1}$ với $D$ là ma trận đường chéo

$\implies A^n = AA^{n-1} = PDP^{-1}AA^{n-2} = PDP^{-1}PDP^{-1}A^{n-3} = \dots = PD^nP^{-1}$

$\implies A^n = P\,\text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_3^n)P^{-1}$

# 5. Dạng toàn phương, không gian Euclide

## 5.1 Dạng song tuyến tính, Dạng toàn phương

### 5.1.1 Định nghĩa

#### 5.1.1.1 Dạng song tuyến tính

► **Định nghĩa.** Cho $V$ là một không gian vector trên trường $\mathbb{R}$. Ánh xạ $\varphi : V \times V \to R$ được gọi là dạng song tuyến tính trên V nếu thỏa mãn:

$$\varphi(ax_1 + bx_2, y) = a\varphi(x_1, y) + b\varphi(x_2, y) \ \forall x_1, x_2 \in V, a, b \in \mathbb{R}$$
$$\varphi(x, ay_1 + by_2) = a\varphi(x, y_1) + b\varphi(x, y_2) \ \forall x_1, x_2 \in V, a, b \in \mathbb{R}$$

► Dạng song tuyến tính $\varphi$ được gọi là đối xứng nếu $\varphi(x,y) = \varphi(y,x) \ \forall x, y \in V$

#### 5.1.1.2 Dạng toàn phương

► **Định nghĩa.** Giả sử $\varphi$ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên V. Khi đó ánh xạ $H : V \to \mathbb{R}$ xác định bởi $H(x) = \varphi(x,x)$ được gọi là một dạng toàn phương trên V



► **Phân loại dạng toàn phương:** $H(x) = \varphi(x,x)$

- Xác định dương: $H(x) > 0 \ \forall x \in V, x \neq 0$
- Nửa xác định dương: $H(x) \geq 0 \ \forall x \in V, x \neq 0$
- Xác định âm: $H(x) < 0 \ \forall x \in V, x \neq 0$
- Nửa xác định âm: $H(x) \leq 0 \ \forall x \in V, x \neq 0$
- Không xác định dấu: $\exists x, y \in V : H(x)H(y) < 0$

### 5.1.2 Dạng ma trận

► **Ma trận của dạng song tuyến tính:** Cho dạng song tuyến tính $\varphi(x,y)$ trên $V_n$ là không gian vector n chiều. Gọi $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của $V_n$. Khi đó $\varphi(x,y)$ được biểu diễn dưới dạng:

$$\varphi(x,y) = [x]_S^T A [y]_S \text{ với } A = \begin{bmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \varphi(e_1,e_2) & \dots & \varphi(e_1,e_n) \\ \varphi(e_2,e_1) & \varphi(e_2,e_2) & \dots & \varphi(e_2,e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(e_n,e_1) & \varphi(e_n,e_2) & \dots & \varphi(e_n,e_n) \end{bmatrix} \text{ là ma trận của } \varphi \text{ trong cơ sở } S.$$

Nếu $A$ đối xứng thì dạng song tuyến tính đối xứng.

► **Ma trận của dạng toàn phương:** Cho dạng toàn phương $H(x) = \varphi(x,x)$ trên $V_n$ là không gian vector n chiều. Gọi $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của $V_n$. Khi đó $H(x)$ được biểu diễn dưới dạng:

$H(x) = [x]_S^T A [x]_S$ với $A$ xác định như phần trên là ma trận của $H(x)$ trong cơ sở S .

### 5.1.3 Rút gọn dạng toàn phương

► **Phương pháp Langrange:**

- **TH1.** Tồn tại $a_{ii} \neq 0$. Giả sự $a_{11} \neq 0$ (ứng với $x_1^2$), ta nhóm tấ cả số hạng có chứa $x_1$

$$Q = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n) + ... = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a12x_2 + ... + a_{1n}x_n)^2 + Q_2 = \frac{1}{a_{11}}\xi^2 + Q_2$$

Với $Q_2$ là dạng toàn phương tách từ Q không còn $x_1$. Tiếp tục biến đổi Langrange $Q_2$ cho đến khi đưa về dạng chính tắc.

- **TH2.** Toàn bộ $a_{ii} = 0$. Ta chọn $x_i, x_j$ mà $a_{ij} \neq 0$ và đặt: $x_i = y_i + y_j; x_j = y_i - y_j; x_k = y_k \forall k \neq i, j$ Dạng toàn phương $Q(x,x)$ chuyển thành $Q_y(y,y)$ là dạng ở **TH1**. Từ đây làm tương tự **TH1**.

► **Phương pháp Jacobi:** Dạng toàn phương $H(x) = \varphi(x,x)$ có ma trận trong cơ sở nào đó của không gian $n$ chiều V là $A$.
$H(x)$ xác định dương khi và chỉ khi tất cả các định thức con chính (trái nhất) của A đều dương.
► **Phương pháp chéo hóa trực giao** (sẽ được nói ở phần sau)

## 5.2 Không gian Euclide

### 5.2.1 Các định nghĩa

- **Tích vô hướng:** $V$ là KGVT với tích vô hướng trên V là một ánh xạ <.,.>: $V \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:
  1. $< u,v >$ với mọi $u, v \in V$
  2. $< u,v > = < v,u >$
  3. $< u_1 + u_2, v > = < u_1, v > + < u_2, v >$
  4. $< ku, v > = k. < u, v >$
  5. $< u, u > \geq 0$ (Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $u = 0$)
- **Độ dài (chuẩn) của vector:** $||a|| = \sqrt{< a, a >}$
- **Khoảng cách giữa hai vector:** $d(u,v) = ||u - v||$
- **Góc giữa hai vector:** $\cos(u,v) = \dfrac{< u,v >}{||u||.||v||}$
- **Họ vector trực giao:** Hệ $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ có các vector đôi một vuông góc với nhau.
- **Họ vector trực chuẩn:** Hệ $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là cơ sở trực giao có độ dài mọi vector bằng 1

### 5.2.2 Trực chuẩn hóa Schmidt cơ sở $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$

- **Bước 1.** Chọn $u_1 = v_1$
- **Bước k.** ($k = \overline{2..n}$): Đặt $u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1}\left(\dfrac{< v_k, u_i >}{||u_i||^2}u_i\right)$
- **Bước n+1.** Chuẩn hóa các vector ta được cơ sở trực chuẩn: $\left\{\dfrac{u_1}{||u_1||}, \dfrac{u_2}{||u_2||}, ..., \dfrac{u_n}{||u_n||}\right\}$

### 5.2.3 Hình chiếu

► Giả sử $U$ là một KGVT con của không gian Euler $E$ và có một **cơ sở trực chuẩn** $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$. Khi đó hình chiếu của một vector $x$ bất kì thuộc $E$ được xác định:

$$Ch_U(x) = < x, u_1 > .u_1 + < x, u_2 > .u_2 + ... + < x, u_n > .u_n$$

## 5.3 Chéo hóa trực giao ma trận - Phương pháp chéo hóa trực giao

### 5.3.1 Chéo hóa trực giao ma trận

► **Định nghĩa.**

- **Ma trận trực giao:** là ma trận vuông $P$ thỏa mãn: $PP^T = E$
- **Ma trận** $A$ **chéo hóa trực giao được:** Tồn tại ma trận trực giao $P$ sao cho $P^TAP$ là ma trận chéo

► **Điều kiện cần và đủ** để $A$ chéo hóa trực giao được: $A$ đối xứng ► Quy trình chéo hóa trực giao ma trận đối xứng $A$:

- **B1:** Tìm các trị riêng và cơ sở không gian riêng tương ứng của $A$
- **B2:** Trực chuẩn hóa Schmidt các cơ sở ở B1, ta được $n$ vector riêng trực chuẩn ứng với $n$ trị riêng
- **B3:** Lập $P$ là ma trận với các cột là các vector ở B2, được: $P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$

### 5.3.2 Phương pháp chéo hóa trực giao rút gọn dạng toàn phương $H = [x]^T A[x]$

- **B1:** Chéo hóa ma trận $A$ bởi ma trận trực giao $P$
- **B2:** Thực hiện phép đổi biến $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T = P\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{bmatrix}^T$
- **B3:** Khi đó dạng toàn phương được viết lại thành: $H = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + ... + \lambda_n\xi_n^2$

### 5.3.3 Nhận dạng đường cong phẳng: $f : ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + gx_1 + hx_2 + d = 0$

► Ma trận dạng toàn phương $H = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ có 2 trị riêng $\lambda_1, \lambda_2$

- Nếu $\lambda_1, \lambda_2$ cùng dấu thì $f$ là elip (thực, tiêu biến, ảo). Đặc biệt $f$ là đường tròn khi $\lambda_1 = \lambda_2$
- Nếu $\lambda_1, \lambda_2$ khác dấu thì $f$ là hyperbol (thực, ảo) hoặc 2 đường thẳng cắt nhau.
- Nếu $\lambda_1 = 0$ thì $f$ là parabol (thực, tiêu biến, ảo)

### 5.3.4 Nhận dạng mặt bậc 2: $f : ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2rx_1x_2 + 2sx_2x_3 + 2tx_3x_1 + mx_1 + nx_2 + px_3 + d = 0$

► Ma trận dạng toàn phương $H = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2rx_1x_2 + 2sx_2x_3 + 2tx_3x_1$ có 3 trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

- Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ cùng dấu thì $f$ là elipsoid (thực, tiêu biến, ảo). Đặc biệt $f$ là cầu khi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$
- Nếu $\lambda_1, \lambda_2$ cùng dấu, $\lambda_3$ khác dấu thì $f$ là hyperbol 1 tầng, 2 tầng hoặc nón
- Nếu $\lambda_1, \lambda_2$ cùng dấu, $\lambda_3 = 0$ thì $f$ là paraboloic eliptic hoặc trụ eliptic
- Nếu $\lambda_1, \lambda_2$ khác dấu, $\lambda_3 = 0$ thì $f$ là paraboloic hyperbolic hoặc trụ hyperbolic
- Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ thì $f$ là 2 mặt phẳng (song song, trùng nhau, ảo)

# Mục 2 - Các đề luyện tập


# 6. Đề bài

## 6.1 Minitest số 1

**Câu 1.** Mệnh đề $A$:" Ma trận $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ có định thức bằng $-13$ và số phức $z = \dfrac{6+3i}{-1+2i}$ có phần thực bằng 0" và mệnh đề $B$:" Nếu số thực $x$ thỏa mãn $3x^2 - x + 1 = 0$ thì $x$ là số dương" có tương đương logic không? Vì sao?

**Câu 2.** Chứng minh rằng:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Đây được gọi là phép hiệu đối xứng trên tập hợp $(A \triangle B)$.

**Câu 3.** Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (y+1, x-2)$. Chứng minh $f$ là một song ánh. Xác định $f(A)$ với $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$

**Câu 4.** Cho $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0\}$ và ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to A$, với $f(x,y) = (x^2, x+y)$.
Ánh xạ $f$ có phải là toàn ánh hay không? Tại sao?

**Câu 5.** Giải phương trình sau trên tập số phức: $(z+2i)^{25} = 6(z-i)^{25}$.

## 6.2 Minitest số 2

**Câu 1.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ và ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
Tìm ma trận $X$ thỏa mãn $A^T X^T = B^T + X^T$.

**Câu 2.** Tính định thức của ma trận sau theo $x \in \mathbb{R}$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{pmatrix}$.

**Câu 3.** Tìm $a$ để hạng của ma trận sau là nhỏ nhất:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2a & 3 & 4 \\ 5 & 6 & a \end{pmatrix}$$

**Câu 4.** Biện luận số nghiệm của hệ sau theo $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 1 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 & = b \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 2b \end{cases}$$

**Câu 5.** Giải và biện luận hệ phương trình sau theo $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} 2x + y + az & = 1 \\ 3x + 2y + z & = 3 \\ 4x + 3y + (a+1)z & = b \end{cases}$$

## 6.3 Minitest số 3

**Câu 1.** Cho tập $M = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+a & 0 \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$. Chứng minh tập trên cùng các phép toán thông thường với ma trận là không gian vector con của không gian các ma trận vuông cấp 2, tìm một cơ sở và số chiều của không gian đó.

**Câu 2.** Trong không gian véctơ $P_3[x]$, cho hệ véctơ $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, trong đó $v_1 = 1 - x + 2x^2 + 3x^3, v_2 = -1 + x - x^2 + x^3, v_3 = 1 - 2x + x^2 + 3x^3$, $v_4 = m + 5x + 2mx^2 + 3x^3$. Tìm $m$ để hệ $B$ độc lập tuyến tính.

**Câu 3.** Cho hệ vecto $B = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \right.$
$\left. v_4 = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \right\}$

a) Chứng minh rằng $B$ là một cơ sở của $\mathscr{M}_2(R)$ - không gian các ma trận vuông cấp 2.

b) Cho $v = \begin{bmatrix} 5 & -13 \\ -26 & -10 \end{bmatrix}$ tìm tọa độ của $v$ đối với cơ sở $B$ theo 2 cách.

**Câu 4.** Gọi $W_1$ và $W_2$ lần lượt là không gian con nghiệm của các hệ phương trình sau trên $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 & = 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_4 & = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

Tìm cơ sở và số chiều của không gian con $W_1 + W_2$.

**Câu 5.** Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm hệ phương trình thuần nhất:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 & = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 & = 0 \\ 8x_1 + 9x_2 - 2x_3 - 6x_4 + 4x_5 & = 0 \end{cases}$$

## 6.4 Minitest số 4

**Câu 1.** Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ xác định bởi

$$f(x_1,x_2,x_3) = (-x_1 + 2x_2 - 3x_3, 3x_2 - 4x_3, 2x_1 + 5x_3)$$

a) Chứng minh $f$ là toán tử tuyến tính.

b) Xác định ma trận của $f$ đối với cơ sở chính tắc $B = \{e_1, e_2, e_3\}$.

c) Xác định ma trận của $f$ đối với cơ sở $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ với $u_1 = (1,4,0), u_2 = (3,1,0), u_3 = (-1,4-1)$.

**Câu 2.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Biết

$$f(1,0,0) = (3,0,3); f(1,1,0) = (5,2,9); f(1,2,3) = (7,7,21)$$

a) Tìm ma trận của ánh xạ $f$ với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

b) Tìm số chiều và một cơ sở của $\mathrm{Im} f$

c) Cho $v = (a,2,b)$. Tìm $a,b$ sao cho $v \in \mathrm{Im} f$

**Câu 3.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ và các véctơ $u_1 = (1,1,1); u_2 = (-1,2,1); u_3 = (1,3,2)$ thỏa mãn $f(u_1) = (3,6,11); f(u_2) = (-3,6,13); f(u_3) = (3,13,25)$.

a) Tìm $f(x_1,x_2,x_3)$.

b) Tìm $m$ để véctơ $v = (0,m,4)$ thuộc $\mathrm{Ker} f$.

**Câu 4.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) Tìm trị riêng, vecto riêng của $A$

b) Ứng dụng phương pháp chéo hóa tìm $A^{2024}$

**Câu 5.** Cho 2 ma trận đồng dạng $A, B$

a) Chứng minh rằng ma trận $A, B$ có cùng tập trị riêng.

b) Xét trường hợp cụ thể $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Hỏi có tồn tại ma trận chéo $B$ đồng dạng với ma trận $A$ không? Nếu có, tìm ma trận $B$ đó và kiểm tra lại xem mệnh đề chứng minh ở ý $a)$ trong trường hợp này.

## 6.5 Minitest số 5

**Câu 1.** Trong $\mathbb{R}^3$ cho dạng song tuyến tính $\varphi$ : $\varphi(x,y) = -x_1y_3 + x_2y_1 - x_2y_3 + x_3y_3$.

a) Xác định ma trận của $\varphi$ đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Xác định ma trận của $\varphi$ đối với cơ sở $V = \{u_1, u_2, u_3\}$, trong đó $u_1 = (5,3,4), u_2 = (2,5,0), u_3 = (2,2,2)$.

**Câu 2.** Trong không gian Euclide $P_2[x]$ với tích của 2 véctơ được định nghĩa như sau:

$$\langle u, v\rangle = 2\int_0^1 u(x)v(x)dx$$

a) Chứng minh rằng tích của 2 véctơ đã cho là 1 tích vô hướng trong $P_2[x]$.

b) Cho $u_1 = x^3$, $u_2 = 1 - \frac{5}{4}x$, $u_3 = ax^2 + bx + 2$. Tìm $a, b$ để hệ 3 véctơ $u_1, u_2, u_3$ tạo thành 1 hệ trực giao.

**Câu 3.** Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ cho tích vô hướng $\langle x, y\rangle = 2.x_1y_1 + x_2y_2 + 2.x_3y_3$ và không gian $W = span\Big\{(1,0,-1);(2,1,-1);(2,2,3)\Big\}$.

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của $W$.

b) Cho $u = (2,1,-2)$, tìm $\omega \in W$ sao cho $||u-\omega|| \leq ||u-v||$ với mọi véctơ $v \in W$.

**Câu 4.** Nhận dạng mặt bậc 2 có phương trình $5x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 8xz = 36$.

**Câu 5.** Cho $A(x_1,x_2,x_3) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

Tìm $\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=9}{\text{Max}} A(x_1,x_2,x_3)$, $\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=9}{\text{Min}} A(x_1,x_2,x_3)$. Với giá trị nào thì $A(x_1,x_2,x_3)$ đạt Max, Min.

## 6.6 Đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 1 - Học kỳ 2022.1

**ĐỀ THI THỬ CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 2022.1**

**Nhóm ngành 1 Thời gian làm bài: 90 phút**

***Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.***

**Câu 1. [1đ]** Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ f(x)=\left(x^2+3x,\ 2x+3\right)$, tập $A=[-2,+\infty)\times(0;2)$.

Xác định $f^{-1}(A)$.

**Câu 2. [1đ]** Cho các tập hợp $A,B,C$. Chứng minh rằng: $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

**Câu 3. [2đ]** Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vector:

$$u_1=(1,0,1,0),\ u_2=(0,1,-1,1),\ u_3=(1,1,1,2),\ u_4=(0,0,1,1)$$

Đặt $U=\operatorname{span}\{u_1,u_2\},V=\operatorname{span}\{u_3,u_4\}$

a) Hệ vector $u_1,u_2,u_3,u_4$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.
b) Tìm số chiều và một cơ sở của không gian $U\cap V$.

**Câu 4. [3đ]** Cho toán tử tuyến tính trên $P_2[x]$ xác định bởi:

$$f(1+x)=11-x+3x^2,\ f(1+2x+x^2)=14+4x^2,\ f(1+2x+3x^2)=8+2x+2x^2$$

a) Tìm ma trận của $f$ đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$
b) Tìm $Ker(f)$
c) Xác định các giá trị riêng và vector riêng của ma trận của $f$ đối với cơ sở chính tắc

**Câu 5. [2đ]** Không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng $xy=x^TAy\ (x,y\in\mathbb{R}^3),A=\begin{bmatrix}3&-2&2\\-2&6&1\\2&1&3\end{bmatrix}$

a) Tính khoảng cách giữa hai vector $v_1=(0,3,2)$ và $v_2=(1,-1,1)$.
b) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian con $V=\operatorname{span}\{v_1,v_2\}$ bằng phương pháp trực chuẩn hóa Gram-Schmidt.
c) Tìm vector thuộc $V$ sao cho khoảng cách từ vector này tới $w=(1,1,1)$ là nhỏ nhất.
d) Với ma trận $A$ nào thì tích vô hướng đã cho trở thành tích vô hướng chính tắc?

**Câu 6. [1đ]** Cho $A$ là ma trận thực, vuông cấp $n$ có các trị riêng đều là số thực và thỏa mãn:

$$A+A^k=A^T\ \forall k\geq n$$

Chứng minh rằng $A$ là ma trận chéo hóa trực giao được.

## 6.7 Đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 2 - Học kỳ 2022.1

**ĐỀ THI THỬ CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 2022.1**
**Nhóm ngành 2 Thời gian làm bài: 90 phút**

***Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.***

**Câu 1. [1.5đ]** Cho hai ánh xạ:

$$f:\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|+1 \qquad\qquad g:\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (x+4, x-1)$$

1. Kiểm tra tính đơn ánh, toàn ánh của $f$, $g$.
2. Xác định ánh xạ $h = g \circ f$.

**Câu 2. [1đ]** Tìm các giá trị riêng, vectơ riêng và chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

**Câu 3. [2đ]** Cho các vectơ $u_1 = (1;0;-1;2), u_2 = (2;0;2;0), u_3 = (0;4;0;5), u_4 = (-3;8;0;8)$ trong không gian $\mathbb{R}^4$

1. Xác định toạ độ của $u_1, u_3$ đối với cơ sở $S = \{e_1 = (1;0;0;1), e_2 = (0;1;0;1),$ $e_3 = (1;1;1;1), e_4 = (0;0;0;1)\}$.
2. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian $U = span\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

**Câu 4. [2.5đ]** Cho toán tử tuyến tính $f$: $P_2[x] \to P_2[x]$ thoả mãn:
$f(x-3x^2) = -x+3x^2$, $f(2+x+3x^2) = 1+2x-x^2$,
$f(1+x+2x^2) = 2+3x+x^2$

1. Tìm ma trận của $f$ đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$
2. Tìm các giá trị riêng và vector riêng của $f$
3. Tìm ma trận của $f^2 = f \circ f$ theo cơ sở chính tắc của $P_2[x]$

**Câu 5. [2đ]** Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho vector $v = \left(4;5;-\dfrac{6}{m};-2\right)$.
Cho $H = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x \perp v\}$.

1. Xác định số chiều và một cơ sở của $H$.
2. Tìm hình chiếu trực giao của vector $u = \left(3;-1;\dfrac{m}{2};2\right)$ lên $H$ bằng 2 cách.

**Câu 6. [1đ]** Chứng minh rằng với mọi ma trận vuông $A, B, C$ cấp 2 ta luôn có

$$(AB-BA)^{2n}.C - C.(AB-BA)^{2n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

## 6.8 Đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 1 - Học kỳ 2023.1

**ĐỀ THI THỬ CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 2023.1**

**Nhóm ngành 1 Thời gian làm bài: 90 phút**

***Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.***

**Câu 1. [1đ]** Cho ánh xạ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=2z^3+6(2+3i)z+9(1-i)^2$. Xác định $f^{-1}(\{14\})$.

**Câu 2. [1đ]** Tìm tất cả các số thực $\lambda$ sao cho tồn tại ma trận $X$ thỏa mãn:

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 1 \\ -1 & \lambda-3 & 3-\lambda \\ 1 & 5 & \lambda \end{pmatrix} \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 2\lambda+3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Câu 3. [2đ]** Trong không gian véctơ $M_2(\mathbb{R})$ các ma trận vuông cấp 2, cho các véctơ:

$$u_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix};\ u_2=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix};\ u_3=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix};\ u_4=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Đặt $W_1=span\{u_1,u_2\}$, $W_2=span\{u_3,u_4\}$.

a) Tìm số thực $m$ để véctơ $u=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3m^2-6m & 2m-15 \end{bmatrix}$ thuộc không gian véctơ $W=W_1+W_2$.

b) Xác định một cơ sở và số chiều của không gian con $W_1\cap W_2$.

**Câu 4. [2,5đ]**: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\ \mathbb{R}^3\ \to\mathbb{R}^4$ . Biết:

$$f(1,0,0)=(1,0,1,1);\ f(1,2,1)=(3,3,2,4);\ f(2,5,6)=\ (7,11,8,13)$$

a) Tìm ma trận của $f$ với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^4$.

b) $f$ có phải là một đơn cấu không ?

c) Với tích vô hướng chính tắc trên $\mathbb{R}^4$, tìm hình chiếu trực giao của $v=(1,1,4,1)$ lên $\mathrm{Im}f$.

**Câu 5. [2,5đ]** Trên $\mathbb{R}^3$, cho dạng toàn phương:

$$w(x)=2ax_1^2+6x_2^2+(8-a)x_3^2-4x_1x_2-(a-1)x_1x_3-2x_2x_3$$

a) Với giá trị nào của $a$, tồn tại tích vô hướng tương ứng với dạng toàn phương đã cho?

b) Cho $a=3$, tìm một cơ sở mà $w$ có dạng chính tắc, từ đó nhận dạng mặt bậc hai $(S)$ có phương trình $w(x)=2$ trong hệ tọa độ Descartes vuông góc.

**Câu 6. [1đ]** Giả sử tồn tại các ma trận thực, vuông cấp $n$ là $A$ và $B$ thỏa mãn: $AB=5A+6B$.
Chứng minh rằng $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

## 6.9 Đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 2 - Học kỳ 2023.1

### ĐỀ THI THỬ CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 20231

**Nhóm ngành 2** **Thời gian làm bài: 90 phút**

***Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.***

**Câu 1. [1đ]** Cho ánh xạ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}: \ (x,y) \to \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x-2y \end{pmatrix}$. Trong đó $\mathbb{M}$ là không gian ma trận đường chéo cấp 2. Ánh xạ trên có phải là ánh xạ song ánh không? Vì sao?

**Câu 2. [1đ]** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & m & m+8 \\ 3 & 7 & m+1 \end{pmatrix}$. Tìm $m$ để $r(A) = 2$.

**Câu 3. [1.5đ]** Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho hệ véctơ $B = \{v_1 = (1,1,2,1);\ v_2 = (3,0,7,4);\ v_3 = (2,2,m,3),\ v_4 = (1,1,2,2)\}$.

a) Tìm $m$ để hệ $B$ lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

b) Cho $m = \dfrac{11}{3}$, tìm tọa độ của véctơ $v = (1,4,1,2)$ đối với cơ sở $B$ thông qua công thức đổi tọa độ.

**Câu 4. [2.5đ]** Trên không gian $P_2[x]$ cho ánh xạ tuyến tính $f$ và cơ sở $B = \{v_1 = 3+x-x^2, v_2 = 2+3x-x^2, v_3 = 1+2x+3x^2\}$, biết: $f(v_1) = 6+2x-2x^2;\ f(v_2) = 5+4x-2x^2;\ f(v_3) = 2+3x-x^2$.

a) Tìm ma trận $A$ của ánh xạ tuyến tính trên với cặp cơ sở $B$.

b) Chéo hóa ma trận $A$.

c) Cho biết $f^k = f \circ f \circ \ldots \circ f$ ($k$ lần). Hãy tìm ma trận của $f^{2024}$.

**Câu 5. [2đ]** Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho tích vô hướng $\langle x,y \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ và không gian $V = span\{v_1 = (2;-3;-1);\ v_2 = (0;\ m;\ 1);\ v_3 = (m+2;\ 4;\ 3)\}$.

a) Tìm số thực $m$ để khoảng cách giữa 2 véctơ $v_2$ và $v_3$ là nhỏ nhất.

b) Với $m$ ở câu a, tìm một cơ sở trực chuẩn của $V$ và hình chiếu trực giao của $w = (-2;-8;13)$ lên $V$.

**Câu 6. [1đ]** Tìm cơ sở và số chiều không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 & = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 & = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 & = 0 \\ 7x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 4x_4 & = 0 \\ 10x_1 + 12x_2 - 5x_3 - 5x_4 & = 0 \end{cases}$$

**Câu 7. [1đ]** Cho 3 số phức $z_1,\ z_2,\ z_3$ và : $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_3} + \dfrac{z_3}{z_1} = 1 \end{cases}$. Tính $T = \left| z_1^{2024} + z_2^{2024} + z_3^{2024} \right|$.

## 6.10 Đề thi cuối kì nhóm ngành 1 - Học kỳ 2022.1

**ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ - HỌC KÌ 2022.1**

**Mã HP: MI1141, nhóm ngành 1. Thời gian: 90 phút**

***Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.***

**Câu 1 (1đ).** Giải phương trình sau trong trường số phức:

$$(z-3)^7+5(z-3)^2=0$$

**Câu 2 (1đ).** Tìm tất cả các số thực $m$ để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} mx_1+x_2+(m+1)x_3=0, \\ x_1+(m+1)x_2+mx_3=0, \\ (m+1)x_1+mx_2+x_3=0. \end{cases}$$

**Câu 3 (1đ).** Trong $P_2[x]$, không gian vectơ tất cả các đa thức với hệ số thực bậc không quá 2, cho các vectơ: $v_1=1+3x+x^2; v_2=2+6x+2x^2; v_3=2+5x+x^2; v_4=-1+2x^2$.
Xác định một cơ sở và số chiều của không gian con $W=\text{span}\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ trong $P_2[x]$.

**Câu 4 (3đ).** Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ biết rằng

$$f(1,0,0)=(1,2,4); f(1,1,0)=(2,3,7) \text{ và } f(1,1,1)=(1,4,6).$$

a) Viết ma trận của $f$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Tìm tất cả các số thực $m,n$ để vectơ $v=(m,n,1)$ thuộc $\text{Ker}(f)$.
c) Với tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{R}^3$, tìm hình chiếu trực giao của vectơ $u=(2,3,4)$ lên $\text{Ker}(f)$.

**Câu 5 (2đ).** Trong hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho mặt bậc hai có phương trình là:

$$x^2+z^2-2xy+2yz-4y=3.$$

a) Viết phương trình trên dưới dạng ma trận và tìm tất cả các giá trị riêng của ma trận đối xứng tương ứng với dạng toàn phương xuất hiện trong phương trình.
b) Đưa mặt bậc hai trên về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao và tịnh tiến.

**Câu 6 (1đ).** Tìm định thức của ma trận $X$ biết rằng

$$3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = E_3,$$

trong đó $E_3$ là ma trận đơn vị cấp 3.

**Câu 7 (1đ).** Chứng minh rằng không tồn tại một ma trận thực $A$ vuông cấp 3 thỏa mãn $A^6+5E=0$, trong đó $E,0$ lần lượt là ma trận đơn vị và ma trận không có cùng cấp 3.

## 6.11 Đề thi cuối kì nhóm ngành 2 - Học kỳ 2022.1

### ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ - HỌC KÌ 2022.1

**Mã HP: MI1142, nhóm ngành 2. Thời gian: 90 phút**

***Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.***

**Câu 1 (1đ).** Tìm tất cả các số phức $z$ thỏa mãn: $z^5 = (\sqrt{3} - i)^{15}$.

**Câu 2 (1đ).** Tìm tất cả số thực $m$ để ma trận sau có hạng bằng 2:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 0 & m+2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Câu 3 (1đ).** Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, chứng minh rằng $B = \{v_1 = (-1;2;1), v_2 = (1;3;2), v_3 = (6;1;1)\}$ là một cơ sở. Tìm tọa độ của $u = (25;12;9)$ đối với $B$.

**Câu 4 (3đ).** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x]$ có ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ đối với cơ sở chinh tắc $E = \{1, x, x^2\}$.

a) Xác định $f(1-x)$ và $f^2(1-x)$, ở đó $f^2 = f \circ f$.

b) Tìm một cơ sở của $\mathbb{P}_2[x]$ để ma trận của $f$ đối với cơ sở đó có dạng chéo. Viết ma trận chéo đó.

**Câu 5 (3đ).** Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, cho các vectơ

$$v_1 = (0;-1;1), v_2 = (1;0;1), v_3 = (2;-1;3)$$

và không gian con $W = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

a) Xác định góc giữa hai vectơ $v_1$ và $v_2$.

b) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con $W$.

c) Tìm hình chiếu trực giao của $v = (3;-4;1)$ lên $W$.

**Câu 6 (1đ).** Cho $A$ là ma trận vuông cấp 20, thỏa mãn $A^{23} = 0$. Chứng minh rằng ma trận $(A + 2023E)$ không suy biến, trong đó $0, E$ lần lượt là ma trận không và ma trận đơn vị cùng cấp với $A$.


# 7. Đáp án

## 7.1 Đáp án Minitest số 1

**Câu 1**: Mệnh đề $A$ :" Ma trận $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ có định thức bằng $-13$ và số phức $z = \dfrac{6+3i}{-1+2i}$ có phần thực bằng 0" và mệnh đề $B$ :" Nếu số thực $x$ thỏa mãn $3x^2 - x + 1 = 0$ thì $x$ là số dương" có tương đương logic không? Vì sao?

<u>**Hướng dẫn**</u>

*** Xét mệnh đề $A$:**
Gọi các mệnh đề:
$A1$ :" Ma trận $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ có định thức bằng $-13$"
$A2$ :" Số phức $z = \dfrac{6+3i}{-1+2i}$ có phần thực bằng 0"
$\Rightarrow$ Mệnh đề $A = A1 \wedge A2$
Ta có:
$det(A) = -13 \Rightarrow$ Mệnh đề $A1$ đúng.
$z = \dfrac{6+3i}{-1+2i} = -3i \Rightarrow Re(z) = 0 \Rightarrow$ Mệnh đề $A2$ đúng.
$\Rightarrow A = A1 \wedge A2$ là mệnh đề đúng. $(1)$
*** Xét mệnh đề $B$:**
Gọi các mệnh đề:
$B1$ : " Số thực $x$ thỏa mãn $3x^2 - x + 1 = 0$"
$B2$ : " $x$ là số dương"
$\Rightarrow B = B1 \rightarrow B2$
Phương trình $3x^2 - x + 1 = 0$ không có nghiệm thực (do $\Delta = (-1)^2 - 4.3.1 = -11 < 0$)
$\Rightarrow$ Mệnh đề $B1$ sai.
$\Rightarrow B = B1 \rightarrow B2$ là mệnh đề đúng. $(2)$
Từ $(1)$ và $(2) \Rightarrow$ Hai mệnh đề $A$ và $B$ tương đương logic.
**Nhận xét**: Đối với những bài toán tìm giá trị chân lý của mệnh đề, ta sẽ biểu diễn mệnh đề đó bằng các ký hiệu mệnh đề và sau đó sử dụng các phép toán mệnh đề đã học để tìm ra được giá trị chân lý của mệnh đề đang xét. Lưu ý rằng trong phép kéo theo $A \rightarrow B$ sai khi và chỉ khi $A$ đúng, $B$ sai.

**Câu 2**: Chứng minh rằng:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Đây được gọi là phép hiệu đối xứng trên tập hợp ($A \triangle B$).

**Hướng dẫn**

***Cách 1**: Biến đổi tương đương VT thành VP:

VT = $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$\Leftrightarrow (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

$\Leftrightarrow (A \cup (B \cap \overline{A})) \cap (\overline{B} \cup (B \cap \overline{A}))$

$\Leftrightarrow ((A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})) \cap ((\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}))$

$\Leftrightarrow (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})$

$\Leftrightarrow (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$

$\Leftrightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ = VP (*đpcm*)

***Cách 2**: Biến đổi tương đương VP thành VT:

VP = $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$\Leftrightarrow (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$

$\Leftrightarrow (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

$\Leftrightarrow (A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \cup (B \cap (\overline{A} \cup \overline{B}))$

$\Leftrightarrow ((A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})) \cup ((B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}))$

$\Leftrightarrow (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

$\Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ = VT (*đpcm*)

***Cách 3**: Dùng phương pháp phần tử:

Xét phần tử $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (A \setminus B) \\ x \in (B \setminus A) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \\ \begin{cases} x \in B \\ x \notin A \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in A \\ \begin{cases} x \in B \\ x \notin A \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \notin B \\ \begin{cases} x \in B \\ x \notin A \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \notin A \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \notin B \\ x \in B \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \notin B \\ x \notin A \end{array}\right. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \notin B \\ x \notin A \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \\ \left[\begin{array}{l} x \in \overline{B} \\ x \in \overline{A} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \\ x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \\ x \in \overline{A \cap B} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \ (\textit{đpcm})$$

**Nhận xét**: Một bài toán tập hợp có thể làm theo nhiều cách. Chúng ta có thể lựa chọn cách làm phù hợp với bài toán cũng như với bản thân. Phương pháp phần tử có thể gây khó khăn với việc sử dụng các dấu ngoặc, trong khi phương pháp biến đổi tương đương lại yêu cầu sinh viên nắm chắc các công thức cơ bản. Chẳng hạn như:

- $A \cup \overline{A} = X$ (cả không gian)
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $B \cap X = B$
- $B \cup X = X$

**Câu 3**: Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (y+1, x-2)$. Chứng minh $f$ là một song ánh. Xác định $f(A)$ với

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$

**Hướng dẫn**

-Xét phương trình $f(x,y) = (u,v)$, với $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=u \\ y+1=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=u+2 \\ y=v-1 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x,y) = (y+1, x-2) = (u,v)$ luôn có nghiệm với mọi $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ toàn ánh.
Với mỗi $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2) \Leftrightarrow (y_1+1, x_1-2) \neq (y_2+1, x_2-2)$ với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ đơn ánh.
Ánh xạ $f$ vừa là toàn ánh vừa là đơn ánh nên thoả mãn là một song ánh
$f(A) = \{(y+1, x-2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$
Đặt $\begin{cases} y+1=a \\ x-2=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a-1 \\ x=b+2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow f(A) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a-1)^2 + (b+2)^2 = 1\}$
**Nhận xét**: Yêu cầu sinh viên nắm vững phương pháp chứng minh 1 ánh xạ là đơn ánh hay toàn ánh. Ngoài ra cần phân biệt rõ 2 tập ảnh và nghịch ảnh, tránh việc khi làm bài kết quả bị ngược.

**Câu 4**: Cho $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0\}$ và ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to A$, với $f(x,y) = (x^2, x+y)$.
Ánh xạ $f$ có phải là toàn ánh hay không? Tại sao?

**Hướng dẫn**

Xét phương trình $f(x,y) = (u,v)$, trong đó: $\begin{cases} (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ (u,v) \in A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u \geq 0, v \in \mathbb{R} \end{cases}$
$f(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow (x^2, x+y) = (u,v)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = u \\ x+y=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{u} \ \ (u \geq 0) \\ y = v-x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{u} \\ y = v-\sqrt{u} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{u} \\ y = v+\sqrt{u} \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow$ phương trình $f(x,y) = (u,v)$ luôn có nghiệm trên $\mathbb{R}^2$ với mọi $(u,v) \in A$
$\Longrightarrow f$ toàn ánh
**Nhận xét**: Ở bài này khi trình bày nhiều bạn có thể sẽ mắc lỗi khi thiếu điều kiện của $u \geq 0$ và khi giải phương trình $f(x,y) = (u,v)$ xét thiếu nghiệm $x$. Vì vậy khi làm những dạng chứng minh ánh xạ các bạn nên quan sát đặc điểm ở tập nguồn và tập đích.

**Câu 5:** Giải phương trình sau:$(z+2i)^{25} = 6(z-i)^{25}$

**Hướng dẫn**

-Với $z = i$, phương trình đã cho $\Leftrightarrow (3i)^{25} = 0$ (Không thỏa mãn)
-Với $z \neq i$, chia cả 2 vế cho $(z-i)^{25}$, ta được: $\dfrac{(z+2i)^{25}}{(z-i)^{25}} = 6.$

Tới đây, đặt $\dfrac{z+2i}{z-i} = u$, ta được phương trình mới $u^{25} = 6$

$\Leftrightarrow u^{25} = 6(\cos 0 + i\sin 0) \Leftrightarrow u = \sqrt[25]{6}\left(\cos\dfrac{k2\pi}{25} + i\sin\dfrac{k2\pi}{25}\right), k \in \overline{0,24}$

$$\Leftrightarrow \frac{z+2i}{z-i} = \sqrt[25]{6}\left(\cos\frac{k2\pi}{25} + i\sin\frac{k2\pi}{25}\right) \Leftrightarrow z+2i = (z-i)\sqrt[25]{6}\left(\cos\frac{k2\pi}{25} + i\sin\frac{k2\pi}{25}\right)$$

$$\Leftrightarrow z\left(1 - \sqrt[25]{6}\left(\cos\frac{k2\pi}{25} + i\sin\frac{k2\pi}{25}\right)\right) = i\left(-2 - \sqrt[25]{6}\left(\cos\frac{k2\pi}{25} + i\sin\frac{k2\pi}{25}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{i\left(-2 - \sqrt[25]{6}\left(\cos\frac{k2\pi}{25} + i\sin\frac{k2\pi}{25}\right)\right)}{\left(1 - \sqrt[25]{6}\left(\cos\frac{k2\pi}{25} + i\sin\frac{k2\pi}{25}\right)\right)}, \quad k \in \overline{0,24}$$

**Nhận xét:** Đây là một dạng bài khá quen thuộc, nhưng trong khi làm sẽ có một số lưu ý sau:
+ Phải xét trường hợp $(z-i) = 0$ (tức $z = i$) trước khi chia 2 vế, mặc dù trường hợp này thường không có nghiệm thỏa mãn nhưng nếu thiếu bước này thì khó mà ăn trọn điểm bài làm
+Về đáp án cuối cùng có thể rút gọn (trong trường hợp biểu cuối cùng dễ biến đổi tiếp) hoặc để nguyên ( như bài trên) đều nhận được số điểm như nhau. Nhiều bạn khi làm ra nháp thấy kết quả cuối cùng có phần hơi cồng kềnh tưởng mình làm sai nên lúng túng.

## 7.2 Đáp án Minitest số 2

**Câu 1:** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ và ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Tìm ma trận $X$ thỏa mãn $A^T X^T = B^T + X^T$.

**Hướng dẫn**

Ta có $A^T X^T = B^T + X^T \Leftrightarrow (XA)^T = (B+X)^T \Leftrightarrow XA = B + X \Leftrightarrow X(A-E) = B$

Xét $C = A - E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Do $\det C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ nên tồn tại $C^{-1}$ :

$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1; C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1; C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1; C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3; C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$

$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

Suy ra $C^{-1} = \dfrac{1}{\det C} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Khi đó $X = B.C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -13 & 9 \\ 10 & -19 & 12 \end{pmatrix}$

Vậy $X = \begin{pmatrix} 5 & -13 & 9 \\ 10 & -19 & 12 \end{pmatrix}$.

**Nhận xét:** Nếu như trước đây tính toán ma trận đặc biệt là ma trận nghịch đảo các bạn chỉ việc bấm casio thì hiện giờ cần trình bày rõ ràng ra như trên, nếu không sẽ rất dễ mất điểm. Khi trình bày nên viết như lời giải để tránh việc quên chuyển vị, quên dấu âm, dương hay quên $1/\det$. Ngoài ra cần chú ý công thức chuyển vị quen thuộc: $(AB)^T = B^T A^T$.

**Câu 2:** Tính định thức của ma trận sau theo $x \in \mathbb{R}$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{pmatrix}$

**Hướng dẫn**

**TH1:** $x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det A = 0$ do có các hàng giống nhau.

**TH2**: $x \neq 0$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&x&x\\1&x&0&x\\1&x&x&0\end{vmatrix}=x^3\begin{vmatrix}0&1&1&1\\\frac{1}{x}&0&1&1\\\frac{1}{x}&1&0&1\\\frac{1}{x}&1&1&0\end{vmatrix}\xrightarrow[h_4-h_2\to h_4]{h_3-h_2\to h_3}x^3\begin{vmatrix}0&1&1&1\\\frac{1}{x}&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&1&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=x^3(-1)^{2+1}\frac{1}{x}.\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=-3x^2$$

**Nhận xét:** Tính định thức bậc 4 ta hoàn toàn có thể tính theo hàng hoặc theo cột được, trong đề thi thường thì sẽ cho ma trận có quy luật cấp n, nên ta xem xét các đặc trưng của các hàng và các cột và biến đổi để ra được các quy luật cụ thể, hoặc cố gắng tìm các hàng hoặc cột có nhiều số 0, tránh việc phải tính toán dài cũng như dính tới tham số.

**Câu 3:** Tìm $a$ để hạng của ma trận sau là nhỏ nhất:

$$A=\begin{pmatrix}a&1&2\\2a&3&4\\5&6&a\end{pmatrix}$$

**Hướng dẫn**

**Cách 1:** Biến đổi sơ cấp

$$\begin{pmatrix}a&1&2\\2a&3&4\\5&6&a\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix}1&a&2\\3&2a&4\\6&5&a\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2\leftrightarrow C_3}\begin{pmatrix}1&2&a\\3&4&2a\\6&a&5\end{pmatrix}\xrightarrow[H_3-6H_1\to H_3]{H_2-3H_1\to H_2}\begin{pmatrix}1&2&a\\0&-2&-a\\0&\lambda-12&5-6a\end{pmatrix}$$

+ Với $a=0\Rightarrow r(A)=3$
+ Với $a\neq 0$, yêu cầu bài toán muốn cho hạng của ma trận là nhỏ nhất, từ đó ta có:



$$\frac{a-12}{-2}=\frac{5-6a}{-a}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=\sqrt{10}\\a=-\sqrt{10}\end{array}\right.$$

Khi đó, hạng của ma trận là 2. Suy ra để hạng của ma trận A là nhỏ nhất thì $a=\sqrt{10}$ hoặc $a=-\sqrt{10}$

**Cách 2:** Nhận thấy bên trong ma trận $A$ đã tồn tại sẵn một định thức con $\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}$ khác 0, do đó mà $r(A)$ chỉ có thể $\geq 2$. Từ đó, để hạng của $A$ là nhỏ nhất thì $det(A)=0$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}a&1&2\\2a&3&4\\5&6&a\end{vmatrix}=0\Rightarrow(3a^2+2=+24a)-(30+24a+2a^2)=0\Rightarrow a^2=10\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=\sqrt{10}\\a=-\sqrt{10}\end{array}\right.$$

**Nhận xét:** Đây là dạng bài rất quen thuộc, tuy nhiên nếu ta khéo léo nhìn nhanh ra rằng chỉ cần $det(A)=0$ là thỏa mãn thì bài toán sẽ đơn giản hơn rất nhiều so với việc ta phải biến đổi sơ cấp để biện luận. Một số bài khác có thể cấp của ma trận sẽ lớn hơn và chứa nhiều tham số hơn, trước khi tiến hành biến đổi sơ cấp ta nên nhìn qua xem từ yêu cầu bài toán có thể dẫn về làm như cách 2 được không, đôi khi sẽ gỡ rối cho ta rất nhiều vì không phải lúc nào việc biện luận cũng dễ, nhất là khi tham số được cài vào những vị trí mà sau khi biến đổi sơ cấp ta phải xét khá nhiều trường hợp khó (Như bài trên thì trường hợp còn khá đơn giản)

**Câu 4:** Biện luận số nghiệm của hệ sau theo $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 &= b \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2b \end{cases}$$

**Hướng dẫn**

Xét ma trận hệ số mở rộng:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & b \\ 1 & 2 & 3 & 2b \end{array}\right] \xrightarrow{H_1 \leftrightarrow H_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2b \\ 1 & a & 3 & b \\ a & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[H_2 - H_1 \to H_2]{H_3 - aH_1 \to H_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2b \\ 0 & a-2 & 0 & -b \\ 0 & 2-2a & 3-3a & 1-2ab \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2H_2 + H_3 \to H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2b \\ 0 & -2 & 3-3a & -2b+1-2ab \\ 0 & 2-2a & 3-3a & 1-2ab \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{H_3 + (1-a)H_2 \to H_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2b \\ 0 & -2 & 3-3a & -2b+1-2ab \\ 0 & 0 & 3a^2-9a+6 & 2a^2b-2ab-a-2b+2 \end{array}\right]$$

**TH1:** Nếu $3a^2 - 9a + 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{cases}$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 3 =$ số ẩn

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất

**TH2:** Nếu $\begin{cases} 3a^2 - 9a + 6 = 0 \\ 2a^2b - 2ab - a - 2b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \vee a = 2 \\ 2a^2b - 2ab - a - 2b + 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \end{array}\right.$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 2 <$ số ẩn$\Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm

**TH3:** Nếu $\begin{cases} 3a^2 - 9a + 6 = 0 \\ 2a^2b - 2ab - a - 2b + 2 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2 \\ b \neq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ thì $r(A) = 2 \neq r(\overline{A}) = 3 \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm

Vậy ta có:

Với $a \neq 2$ và $a \neq 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất

Với $a = 2$ và $b = 0$ hoặc $a = 1$ và $b = \dfrac{1}{2}$ thì hệ có vô số nghiệm

Với $a = 2$ và $b \neq 0$ hoặc $a = 1$ và $b \neq \dfrac{1}{2}$ thì hệ vô nghiệm

**Nhận xét:** Quy trình làm dạng bài này sẽ là xét ma trận bổ sung sau đó các bạn sẽ biến đổi về ma trận chéo (nếu có thể). Dựa vào mối quan hệ giữa $r(A)$ và số ẩn của hệ để biện luận các khả năng. Các bạn nên nắm chắc quy trình làm và luyện biến đổi ma trận tránh việc lạm dụng casio nhé.

**Câu 5:** Giải và biện luận hệ phương trình sau theo $a,b \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} 2x+\ y\ +az &= 1 \\ 3x+2y+z &= 3 \\ 4x+3y+(a+1)z &= b \end{cases}$$

**Hướng dẫn**

Xét ma trận hệ số bổ sung:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & a+1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[H_3-2H_1 \to H_3]{2H_2-3H_1 \to H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2-3a & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & b-2 \end{array}\right] \xrightarrow{H_3-H_2 \to H_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2-3a & 3 \\ 0 & 0 & 2a-1 & b-5 \end{array}\right]$$

**TH1:** $2a-1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \dfrac{1}{2}$.

Khi đó $r(A) = r(\overline{A}) = 3$ nên hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} 2x\ +\ y\ +\ az &= 1 \\ y\ +(2-3a)z &= 3 \\ (2a-1)z &= b-5 \end{cases}$

$$\Rightarrow z = \frac{b-5}{2a-1} \Rightarrow y = 3-(2-3a)z = 3 - \frac{(2-3a)(b-5)}{2a-1} = \frac{3ab-9a-2b+7}{2a-1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-y-az}{2} = \frac{1-\dfrac{3ab-9a-2b+7}{2a-1} - \dfrac{a(b-5)}{2a-1}}{2} = \frac{-2ab+7a+b-4}{(2a-1)}$$

**TH2:** $2a-1 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$

+) $b-5 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 5$. Khi đó $r(A) = 2 < r(\overline{A}) = 3$ nên hệ đã cho vô nghiệm.

+) $b-5 = 0 \Leftrightarrow b = 5$. Khi đó $r(A) = r(\overline{A}) = 2$ nên hệ đã cho vô số nghiệm: $\begin{cases} 2x+y+\frac{1}{2}z &= 1 \\ y+\frac{1}{2}z &= 3 \\ 0z &= 0 \end{cases}$

Đặt $y = t$ thì hệ tương đương: $\begin{cases} x = -1 \\ y = t \qquad ,t \in \mathbb{R} \\ z = 6-2t \end{cases}$.

**Kết luận:** $a \neq \dfrac{1}{2}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x,y,z) = \left(\dfrac{-2ab+7a+b-4}{(2a-1)}, \dfrac{3ab-9a-2b+7}{2a-1}, \dfrac{b-5}{2a-1}\right)$.

$a = \dfrac{1}{2}$, $b \neq 5$ thì hệ vô nghiệm.

$a = \dfrac{1}{2}$, $b = 5$ thì hệ vô số nghiệm $(x,y,z) = (-1,\ t,\ 6-2t)$ $(t \in \mathbb{R})$.

**Nhận xét:** Khi đi thi ta cần đọc kĩ đề bài xem đề hỏi biện luận thôi hay cả giải lẫn biện luận. Đối với dạng giải và biện luận nhìn chung các bước làm cũng giống dạng ở câu 4, tuy nhiên ở câu 5 này các bạn phải thêm bước đi tìm nghiệm cho từng trường hợp, công việc này khá mất thời gian và dễ nhầm, vì vậy mọi người cần chú ý kĩ. Có điều không nhất thiết phải rút gọn hết các nghiệm, ví dụ như ở TH1 tìm $y$ ta chỉ cần giải tới $y = 3 - \dfrac{(2-3a)(b-5)}{2a-1}$.

## 7.3 Đáp án Minitest số 3

**Câu 1:** Cho tập $M = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+a & 0 \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$. Chứng minh tập trên cùng các phép toán thông thường với ma trận là không gian vector con của không gian các ma trận vuông cấp 2, tìm một cơ sở và số chiều của không gian đó

**Hướng dẫn**

- $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$ thì $\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+a & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(K)$
- $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ v_1 = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1+c1 \\ c_1+a_1 & 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} a_2+b_2 & b_2+c_2 \\ c_2+a_2 & 0 \end{pmatrix}$, ta có :

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \begin{pmatrix} \alpha(a_1+b1)+\beta(a_2+b_2) & \alpha(b_1+c_1)+\beta(b_2+c_2) \\ \alpha(c_1+a_1)+\beta(c_2+a_2) & 0 \end{pmatrix} \in M$$

$\Rightarrow$ Tập $M$ cùng với các phép toán thông thường đối với ma trận là không gian vector con của $\mathscr{M}_2(K)$

$v = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+a & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

- Xét ma trận tọa độ hàng: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2-H_1 \to H_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3-H_2 \to H_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

- Vậy số chiều của không gian trên là 3 và một cơ sở của nó là $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

**Nhận xét:** Dạng bài không gian các ma trận là một trong các không gian cơ bản, tuy nhiên khá ít xuất hiện trong bài tập và đề thi nên khi gặp phải dạng này nhiều bạn tỏ ra khá lúng túng, về thực chất thì các công việc tính hạng, tìm cơ sở cũng giống hệt như làm cho các không gian các đa thức và không gian $\mathbb{R}^n$, tuy nhiên hơi khác một chút là để thuận tiện và chính xác, ta nên xét như bài trên: Viết các phần tử của ma trận vào ma trận tọa độ hàng theo một hàng ngang, với thứ tự là $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, rồi sau đó tính toán như bình thường. Lưu ý sau khi đưa về ma trận bậc thang rồi thì ở bước kết luận cơ sở phải trả các hàng về dạng ma trận vuông cấp 2 (như bài trên).

**Câu 2:** Trong không gian véctơ $P_3[x]$, cho hệ véctơ $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, trong đó $v_1 = 1 - x + 2x^2 + 3x^3$, $v_2 = -1 + x - x^2 + x^3, v_3 = 1 - 2x + x^2 + 3x^3, v_4 = m + 5x + 2mx^2 + 3x^3$. Tìm $m$ để hệ $B$ độc lập tuyến tính.

**Hướng dẫn**

Đối với cơ sở chính tắc $E$ của $P_3[x]$, ma trận tọa độ hàng của hệ $B$ là $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ m & 5 & 2m & 3 \end{bmatrix}$

Ta có: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ m & 5 & 2m & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ m & 5 & 2m & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2.1.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 5 & 2m & 3 \end{vmatrix} + (-1)^5.m.\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow \det(A) = m + 23$

Hệ $B$ độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -23$

Vậy hệ $B$ độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow m \neq -23$

**Nhận xét:** Dạng bài này có thể giải theo định nghĩa hoặc có thể sử dụng tính chất hệ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi định thức ma trận đối với một cơ sở khác 0 như trên. Một số bạn có thể biện luận theo hạng nhưng về bản chất tất cả những cách này là như nhau. Vì vậy, ta nên lựa chọn cách làm nào dễ tính toán và nhanh nhất.

**Câu 3**: Cho hệ vecto $B = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \right\}$

a) Chứng minh rằng $B$ là một cơ sở của $\mathscr{M}_2(R)$ - không gian các ma trận vuông cấp 2.

b) Cho $v = \begin{bmatrix} 5 & -13 \\ -26 & -10 \end{bmatrix}$ tìm tọa độ của $v$ đối với cơ sở $B$ theo 2 cách.

**Hướng dẫn**

Cơ sở chính tắc của không gian các ma trận vuông cấp 2 là $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

a) Ma trận tọa tọa độ hàng của hệ vecto $B$ đối với cơ sở $E$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & -8 & -12 & -4 \end{bmatrix}$

Ta có: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & -8 & -12 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & -12 \\ 0 & -8 & -12 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = 48 \neq 0 \Rightarrow B$ độc lập tuyến tính

Mà $\dim(\mathscr{M}_2) = 4 =$ Số vecto trong $B \Rightarrow B$ là một cơ sở của $\mathscr{M}_2$ *(đpcm)*

b) Giả sử tọa độ của $v$ đối với cở sở $B$ là $(x_1, x_2, x_3, x_4)$

**Cách 1:** Dùng định nghĩa

Ta có: $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -13 \\ -26 & -10 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 5 \\ -x_2 + 6x_3 - 8x_4 = -13 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - 12x_4 = -26 \\ 2x_1 - 6x_3 - 4x_4 = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

**Cách 2:** Chuyển cơ sở

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc $E$ sang cở sở $B$:

$$P = \begin{bmatrix} [v_1]_B & [v_2]_B & [v_3]_B & [v_4]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -8 \\ -1 & -1 & 3 & -12 \\ 2 & 0 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Ta có: $[v]_E = P[v]_B$

Mà tọa độ của $v$ đối với cơ sở chính tắc $E$ là: $[v]_E = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ -26 \\ -10 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ -26 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -8 \\ -1 & -1 & 3 & -12 \\ 2 & 0 & -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -8 \\ -1 & -1 & 3 & -12 \\ 2 & 0 & -6 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ -26 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vậy tọa độ của $v$ đối với cơ sở $B$ là $[v]_B = (2,3,1,2)^T$.

**Nhận xét:** Vẫn là một bài toán chứng minh cơ sở và tìm tọa độ thông thường tuy nhiên hệ véctơ được biểu diễn trên không gian ma trận. Vì vậy cần lưu ý thứ tự viết ma trận theo hàng hay ma trận chuyển khi tính tọa độ.

**Câu 4:** Gọi $W_1$ và $W_2$ lần lượt là không gian con nghiệm của các hệ phương trình sau trên $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 &= 0 \end{cases} \text{và} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

Tìm cơ sở và số chiều của không gian con $W_1 + W_2$.

**Hướng dẫn**

Ta có : $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= a+b \\ x_2 &= a-b \\ x_3 &= a \\ x_4 &= b \end{cases}$ , với mọi $a,b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow W_1 = \Big(x = (x_1,x_2,x_3,x_4)\Big) = (a+b,\ a-b,\ a,\ b) = a\,(1,1,1,0) + b\,(1,-1,0,1) = span((1,1,1,0);(1,-1,0,1))$

Lại có: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= 2a \\ x_2 &= a+b \\ x_3 &= a \\ x_4 &= b \end{cases}$ , với mọi $a,b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow W_2 = \Big(x = (x_1,x_2,x_3,x_4)\Big) = (2a,\ a+b,\ a,\ b) = a\,(2,1,1,0) + b\,(0,1,0,1) = span((2,1,1,0);(0,1,0,1))$

$\Rightarrow W_1 + W_2 = span\Big((1,1,1,0);(1,-1,0,1);(2,1,1,0);(0,1,0,1)\Big)$

Xét: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Một cơ sở của không gian con $W_1 + W_2$ là $\left\{(1,1,1,0);(0,-2,-1,1);(0,0,-1,-1);(0,0,0,4)\right\}$ và $\dim(W_1 + W_2) = 4$

**Nhận xét:** Lỗi sai thường gặp nhất của các dạng bài không gian nghiệm đó là sinh viên đọc thiếu chữ "nghiệm" ở đề bài dẫn đến đi sai hướng làm. Ngoài ra cần chú ý không được ghép 2 đề bài cho vào làm 1 để biểu diễn không gian $W_1 + W_2$. Đồng thời do một không gian có nhiều cơ sở tùy thuộc vào cách đặt ẩn nên nếu tìm ra cơ sở khác đáp án cũng đừng lo lắng quá nhé.

**Câu 5:** Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm hệ phương trình thuần nhất:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 & = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 & = 0 \\ 8x_1 + 9x_2 - 2x_3 - 6x_4 + 4x_5 & = 0 \end{cases}$$

**Hướng dẫn**

Xét ma trận hệ số:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 8 & 9 & -2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_3-4H_1\to H_3,\ H_4-8H_1\to H_4]{H_2-3H_1\to H_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & -6 & -5 & 5 & -9 \\ 0 & -7 & -10 & 10 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[H_4-7H_2\to H_4]{H_3-6H_2\to H_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 25 & -25 & 9 \\ 0 & 0 & 25 & -25 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_4-H_3\to H_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 25 & -25 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nhận xét: $r(A) = 3 < 5 =$ số ẩn $\Rightarrow$ Hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 & = 0 \\ -x_2 - 5x_3 + 5x_4 - 3x_5 & = 0 \\ 25x_3 - 25x_4 + 9x_5 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = a \\ x_4 = b \\ x_5 = \dfrac{-25a}{9} + \dfrac{25b}{9} \\ x_2 = \dfrac{10a}{3} - \dfrac{10b}{3} \\ x_1 = \dfrac{-19a}{9} + \dfrac{28b}{9} \end{cases} \text{, với mọi } a, b \in \mathbb{R}$$

Ta được tập nghiệm của hệ:

$$S = \left\{ x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = a\left(\frac{-19}{9};\frac{10}{3};1;0;\frac{-25}{9}\right) + b\left(\frac{28}{9};\frac{-10}{3};0;1;\frac{25}{9}\right) \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

Vậy $\dim S = 2$ và 1 cơ sở của $S$ là $\left\{ \left(\frac{-19}{9};\frac{10}{3};1;0;\frac{-25}{9}\right);\left(\frac{28}{9};\frac{-10}{3};0;1;\frac{25}{9}\right) \right\}$

**Nhận xét:** Đây là một bài gần giống với câu số 4 và làm tương đối tốn sức. Tuy nhiên cũng cần chú ý 1 số lỗi thường gặp như đã trình bày ở trên, đồng thời các cơ sở là tùy thuộc vào cách đặt ẩn. Một mẹo nhỏ là nên đặt ẩn có hệ số lớn hơn, ví dụ đối với phương trình $25x_3 - 25x_4 + 9x_5 = 0$ ta nên ưu tiện biểu diễn $x_5$ qua $x_3$ và $x_4$.

## 7.4 Đáp án Minitest số 4

**Câu 1:** Cho $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ là ánh xạ xác định bởi $f(x_1,x_2,x_3)=(-x_1+2x_2-3x_3,3x_2-4x_3,2x_1+5x_3)$

a) Chứng minh $f$ là toán tử tuyến tính.

b) Xác định ma trận của $f$ đối với cơ sở chính tắc $B=\{e_1,e_2,e_3\}$.

c) Xác định ma trận của $f$ đối với cơ sở $B'=\{u_1,u_2,u_3\}$ với $u_1=(1,4,0),u_2=(3,1,0),u_3=(-1,4-1)$.

**Hướng dẫn**

a) Với bất kì $x=(x_1,x_2,x_3),y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3,\forall k\in\mathbb{R}$, ta có:

$$\begin{aligned}
(1)\ \ f(x+y)&=f((x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3))\\
&=(-(x_1+y_1)+2(x_2+y_2)-3(x_3+y_3),3(x_2+y_2)-4(x_3+y_3),2(x_1+y_1)+5(x_3+y_3))\\
&=((-x_1+2x_2-3x_3)+(y_1+2y_2-3y_3),(3x_2-4x_3)+(3y_2-4y_3),(2x_1+5x_3)+(2y_1+5y_3))\\
&=(-x_1+2x_2-3x_3,3x_2-4x_3,2x_1+5x_3)+(y_1+2y_2-3y_3,3y_2-4y_3,2y_1+5y_3)\\
&=f(x)+f(y)\\
(2)\quad f(kx)&=f((kx_1,kx_2,kx_3))\\
&=(-kx_1+2kx_2-3kx_3,3kx_2-4kx_3,2kx_1+5kx_3)\\
&=(k(-x_1+2x_2-3x_3),k(3x_2-4x_3),k(2x_1+5x_3))\\
&=k(-x_1+2x_2-3x_3,3x_2-4x_3,2x_1+5x_3)\\
&=kf(x)
\end{aligned}$$

Từ $(1)$ và $(2)\Rightarrow f$ là toán tử tuyến tính.

b)

$f(e_1)=f(1,0,0)=(-1,0,2)=-e_1+2e_3$
$f(e_2)=f(0,1,0)=(2,3,0)=2e_1+3e_2$
$f(e_3)=f(0,0,1)=(-3,-4,5)=-3e_1-4e_2+5e_3$

Ma trận của $f$ đối với cơ sở $B$ là $A=\begin{bmatrix}-1&2&-3\\0&3&-4\\2&0&5\end{bmatrix}$

c) Ta có:
$u_1=(1,4,0)=e_1+4e_2$
$u_2=(3,1,0)=3e_1+e_2$
$u_3=(-1,4,-1)=-e_1+4e_2-e_3$

Từ đó, ma trận chuyển cơ sở từ $B$ sang $B'$ là $P=\begin{bmatrix}1&3&-1\\4&1&4\\0&0&-1\end{bmatrix}$

Ma trận của $f$ đối với cơ sở $B'$ là $B=P^{-1}.A.P=\begin{bmatrix}1&3&-1\\4&1&4\\0&0&-1\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}-1&2&-3\\0&3&-4\\2&0&5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&3&-1\\4&1&4\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow B=\begin{bmatrix}5&8&-5\\0&-5&8\\-2&-6&7\end{bmatrix}$

**Nhận xét:** Bài toán này là bài toán cơ bản, câu a) và b) chúng ta sử định nghĩa. Câu c) chúng ta có thể sử dụng định nghĩa để tìm ra ma trận $B$ nhưng điều này sẽ mất thời gian, dễ tính toán sai hơn cách sử dụng công thức chuyển cơ sở. Nhìn chung, những dạng toán như này không khó nhưng chúng ta phải tính toán cẩn thận.

**Câu 2:** Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. Biết $f(1,0,0)=(3,0,3); f(1,1,0)=(5,2,9); f(1,2,3)=(7,7,21)$

a) Tìm ma trận của ánh xạ $f$ với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

b) Tìm số chiều và một cơ sở của $\mathrm{Im}f$

c) Cho $v=(a,2,b)$. Tìm $b$ sao cho $v\in\mathrm{Im}f$

**Hướng dẫn**

a)

$f(1,0,0)=(3,0,3)$

$f(1,1,0)=f(1,0,0)+f(0,1,0)=(5,2,9)\Rightarrow f(0,1,0)=(2,2,6)$

$f(1,2,3)=f(1,0,0)+2f(0,1,0)=3f(0,0,1)=(7,7,21)\Rightarrow f(0,0,1)=(0,1,2)$

-Suy ra ma trận của $f$ trong cơ sở chính tắc là:

$$A=\begin{pmatrix}3&2&0\\0&2&1\\3&6&2\end{pmatrix}$$

b)

$f(1,0,0)=(3,0,3); f(0,1,0)=(2,2,6); f(0,0,1)=(0,1,2)$

- Xét ma trận tọa độ hàng

$$A'=\begin{pmatrix}3&0&3\\2&2&6\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{H_2\leftrightarrow H_3}\begin{pmatrix}3&0&3\\0&1&2\\2&2&6\end{pmatrix}\xrightarrow{H_3-\frac{2}{3}H_1\to H_3}\begin{pmatrix}3&0&3\\0&1&2\\0&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{H_3-2H_2\to H_3}\begin{pmatrix}3&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

- Vậy số chiều của $\mathrm{Im}f=r(A')=2$ và một cơ sở của $\mathrm{Im}f$ là: $\{(3,0,3),(0,1,2)\}$

c)

- Để $v\in\mathrm{Im}f$ thì $v\in\mathrm{Span}\{(3,0,3),(0,1,2)\}\Rightarrow v=m(3,0,3)+n(0,1,2)$

$$\Rightarrow\begin{cases}3m=a\\n=2\\3m+2n=b\end{cases}\quad\Rightarrow b=3m+2n=a+2.2=a+4$$

**Nhận xét:** Đây là dạng bài rất cơ bản, đúng chất "áp dụng công thức là ra". Tuy nhiên, theo kinh nghiệm của mình thì nhiều khi hay bị nhầm chỗ ma trận của ánh xạ, đáng nhẽ phải viết tọa độ theo cột nhưng đôi khi ta bị nhầm thành viết theo hàng. Phần tìm số chiều của $\mathrm{Im}f$ có thể dùng trực tiếp ma trận $A$, nhưng để tìm một cơ sở của nó thì ta cần phải viết ma trận tọa độ dạng hàng, tức là chuyển vị ma trận của ánh xạ (như ở trên) và biến đổi sơ cấp để thu được cơ sở tương ứng. Ngoài ra câu c) có thể sử dụng nhân ma trận trực tiếp sau đó cũng thu được hệ phương trình như trên, nhưng không khuyến khích vì nhân ma trận có chứa tham số rất dễ nhầm !

**Câu 3:** Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ và các véctơ $u_1=(1,1,1); u_2=(-1,2,1); u_3=(1,3,2)$ thỏa mãn $f(u_1)=(3,6,11); f(u_2)=(-3,6,13); f(u_3)=(3,13,25)$.

a) Tìm $f(x_1,x_2,x_3)$.

b) Tìm $m$ để véctơ $v=(0,m,4)$ thuộc $\mathrm{Ker}f$.

**Hướng dẫn**

a) Gọi $E = \left\{e_1 = (1,0,0);\ e_2 = (0,1,0);\ e_3 = (0,0,1)\right\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Ta có: $\begin{cases} f(u_1) = f(1,1,1) & = \quad f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (3,6,11) \\ f(u_2) = f(-1,2,1) & = -f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) = (-3,6,13) \\ f(u_3) = f(1,3,2) & = \quad f(e_1) + 3f(e_2) + 2f(e_3) = (3,13,25) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3f(e_2) + 2f(e_3) & = (0,12,24) \\ f(e_1) + 3f(e_2) + 2f(e_3) & = (3,13,25) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(e_1) = (3,1,1) \\ f(e_2) + f(e_3) & = (0,5,10) \\ 2f(e_2) + f(e_3) & = (0,7,14) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(e_1) = (3,1,1) \\ f(e_2) = (0,2,4) \\ f(e_3) = (0,3,6) \end{cases}$

Khi đó $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3) = (3x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ x_1 + 4x_2 + 6x_3)$.

b) $v = (0,m,4)$ thuộc Ker$f \Leftrightarrow f(v) = f(0,m,4) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3.0 & = 0 \\ 1.0 + 2.m + 3.4 & = 0 \\ 1.0 + 4.m + 6.4 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 12 = 0 \\ 4m + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -6.$

Vậy $m = -6$ thì $v = (0,m,4)$ thuộc Ker$f$.

**Nhận xét:** Đây là một bài toán khá nhẹ nhàng tuy nhiên câu hỏi có phần lạ với sinh viên. Đối với câu a) là dạng bài làm ngược với dạng bình thường, ta cần nắm qua để tránh lúng túng khi gặp lần tiếp theo. Trong khi câu b) cần chú ý Ker$f$ chính là không gian nghiệm của AXTT $f$, tránh nhầm với việc tìm Im$f$ có cách làm khác.

**Câu 4:** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) Tìm trị riêng, vecto riêng của $A$

b) Ứng dụng phương pháp chéo hóa tìm $A^{2024}$

**Hướng dẫn**

a) Xét $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1+\lambda)^2$

Phương trình đặc trưng $\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \end{array} \right.$

+) Với $\lambda_1 = 2$. Khi đó $A - \lambda_1 E = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Đặt $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ thỏa mãn $(A - \lambda_1 E)x = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow x$ có dạng $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ với $t \in \mathbb{R}$

Chọn $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ là vecto riêng của $A$

+) Với $\lambda_2 = -1$. Khi đó $A - \lambda_2 E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Đặt $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ thỏa mãn $(A - \lambda_2 E)x = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow x$ có dạng $a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ với $a, b \in \mathbb{R}$

Chọn $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ là các vecto riêng của $A$

Đặt $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Ma trận chéo $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) Ta có $D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

Có $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{2024} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2^{2024}+2 & 2^{2024}-1 & 2^{2024}-1 \\ 2^{2024}-1 & 2^{2024}+2 & 2^{2024}-1 \\ 2^{2024}-1 & 2^{2024}-1 & 2^{2024}+2 \end{bmatrix}$$

Vậy $A^{2024} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2^{2024}+2 & 2^{2024}-1 & 2^{2024}-1 \\ 2^{2024}-1 & 2^{2024}+2 & 2^{2024}-1 \\ 2^{2024}-1 & 2^{2024}-1 & 2^{2024}+2 \end{bmatrix}$

**Nhận xét:** Ở dạng bài này các bạn cần nắm được các bước của bài toán chéo hóa ma trận. Sau khi tìm được ma trận chéo bằng phép biến đổi hai vế ma trận sẽ rút được ma trận $A$ theo ma trận chéo từ đó việc tính $A^n$ trở nên đơn giản hơn.

**Câu 5:** Cho 2 ma trận đồng dạng $A, B$

a) Chứng minh rằng ma trận $A, B$ có cùng tập trị riêng.

b) Xét trường hợp cụ thể $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Hỏi có tồn tại ma trận chéo $B$ đồng dạng với ma trận $A$ không? Nếu có, tìm ma trận $B$ đó và kiểm tra lại xem mệnh đề chứng minh ở ý $a$) trong trường hợp này.

**Hướng dẫn**

a) Ma trận $A$ và $B$ đồng dạng, nghĩa là tồn tại ma trận $P$ không suy biến ($detP \neq 0$) sao cho: $B = P^{-1}AP$
Xét đa thức đặc trưng của $B$:

$$\begin{aligned} det(B-\lambda I) &= det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP) \\ &= det(P^{-1}(A-\lambda I)P) \\ &= det(P^{-1})det(A-\lambda I)det(P) \\ &= det(A-\lambda I)det(P^{-1})det(P) \\ &= det(A-\lambda I)det(P^{-1}P) \\ &= det(A-\lambda I)det(I) \\ &= det(A-\lambda I) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Đa thức đặc trưng của ma trận $A$ và $B$ trùng nhau
$\Rightarrow$ Hai ma trận $A$ và $B$ có cùng tập trị riêng (*đpcm*).

b) $P(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ -3 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$

Ta có $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = 3$, đây chính là 3 trị riêng của $A$.

+) Với trị riêng $\lambda = 1$, xét phương trình: $(A-E)X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= t \\ x_2 &= t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ x_3 &= t \end{cases}$$

Chọn $t = 1 \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ là 1 vecto riêng của $A$ ứng với $\lambda = -1$.

Tương tự với trị riêng $\lambda = 2$ và $\lambda = 3$ ta cũng thu được $X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ là vecto riêng ứng với $\lambda = 2$ và $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ là vecto riêng ứng với $\lambda = 3$

$\Rightarrow$ ma trân làm chéo hóa $A$ là $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ với $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = B$

$\Rightarrow$ Vì ma trận chéo $B$ thỏa mãn $B = P^{-1}AP$

$\Rightarrow$ Tồn tại ma trận chéo $B$ đồng dạng với ma trận $A$

*Kiểm tra lại mệnh đề

Phương trình đặc trưng của $B$: $det(B - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = 3$

$\Rightarrow$ Cùng tập trị riêng với ma trận $A$

$\Rightarrow$ Mệnh đề chứng minh ở ý a) là đúng trong trường hợp này.

**Nhận xét:** Bài này thực chất là một bài toán hết sức quen thuộc (chéo hóa ma trận) nhưng yêu cầu các bạn phải nhớ được là 2 ma trận đồng dạng khi nào: Ma trận $A$, $B$ đồng dạng với nhau khi tồn tại ma trận $P$ không suy biến sao cho $B = P^{-1}AP$. Ở bài này nếu các bạn không chứng minh được ý a) thì vẫn có thể thực hiện chéo hóa làm ý b) như bình thường vẫn được full điểm của phần này nha.

## 7.5 Đáp án Minitest số 5

**Câu 1:** Trong $\mathbb{R}^3$ cho dạng song tuyến tính $\varphi$ : $\varphi(x,y) = -x_1y_3 + x_2y_1 - x_2y_3 + x_3y_3$.

a) Xác định ma trận của $\varphi$ đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Xác định ma trận của $\varphi$ đối với cơ sở $V = \{u_1, u_2, u_3\}$, trong đó $u_1 = (5,3,4), u_2 = (2,5,0), u_3 = (2,2,2)$.

**Hướng dẫn**

a)

Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ trong đó $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$

Gọi ma trận của $\varphi$ đối với cơ sở chính tắc $E$ là $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$a_{11} = \varphi(e_1,e_1) = 0, a_{12} = \varphi(e_1,e_2) = 0, a_{13} = \varphi(e_1,e_3) = -1$
$a_{21} = \varphi(e_2,e_1) = 1, a_{22} = \varphi(e_2,e_2) = 0, a_{23} = \varphi(e_2,e_3) = -1$
$a_{31} = \varphi(e_3,e_1) = 0, a_{32} = \varphi(e_3,e_2) = 0, a_{33} = \varphi(e_3,e_3) = 1$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Nhận xét:** Đây là một câu cơ bản, ý a) có giải chi tiết theo định nghĩa, tuy nhiên khi vào bài thi nếu quá cơ bản mình có thể không cần giải chi tiết ra mà chỉ cần ghi là "Dễ thấy ma trận của $\varphi$ đối với cơ sở chính tắc $E$ là $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$".

b)

**Cách 1:** Theo định nghĩa

Gọi ma trận của $\varphi$ đối với cơ sở $V$ là $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

$b_{11} = \varphi(u_1,u_1) = -1, b_{12} = \varphi(u_1,u_2) = 6, b_{13} = \varphi(u_1,u_3) = -2$
$b_{21} = \varphi(u_2,u_1) = -3, b_{22} = \varphi(u_2,u_2) = 10, b_{23} = \varphi(u_2,u_3) = -4$
$b_{31} = \varphi(u_3,u_1) = 2, b_{32} = \varphi(u_3,u_2) = 4, b_{33} = \varphi(u_3,u_3) = 0$

$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -3 & 10 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

**Cách 2:** Theo công thức đổi cơ sở

Ma trận chuyển cơ sở từ $E$ sang $V$ là: $P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ma trận của $\varphi$ đối với cơ sở $V$ là $B = P^T.A.P = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -3 & 10 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

**Nhận xét:** Ý b) chúng ta có 2 cách làm. Cách làm thứ hai nhanh hơn so với cách làm thứ nhất trong phần lớn các bài toán. Tuy nhiên, chúng ta nên linh hoạt chọn cách làm nào phù hợp nhất khi làm bài thi.

**Câu 2:** Trong không gian Euclide $P_2[x]$ với tích của 2 véctơ được định nghĩa như sau:

$$\langle u,v\rangle = 2\int_0^1 u(x)v(x)dx$$

a) Chứng minh rằng tích của 2 véctơ đã cho là 1 tích vô hướng trong $P_2[x]$.

b) Cho $B=\left\{u_1=x^3,\ u_2=1-\dfrac{5}{4}x,\ u_3=ax^2+bx+2\right\}$. Tìm $a,b$ để $B$ tạo thành 1 hệ trực giao.

**Hướng dẫn**

a)

$(i)\ \langle u,v\rangle = 2\int_0^1 u(x)v(x)dx = 2\int v(x)u(x)dx = \langle v,u\rangle$

$(ii)\ \langle u+v,w\rangle = 2\int_0^1 (u(x)+v(x))w(x)dx = 2\int_0^1 u(x)w(x)dx + 2\int_0^1 v(x)w(x)dx = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$

$(iii)\ \langle \alpha u,v\rangle = 2\int_0^1 \alpha u(x)v(x)dx = \alpha.2\int_0^1 u(x)v(x)dx = \alpha\langle u,v\rangle\ \forall\ \alpha\in\mathbb{R}$

$(iv)\ \langle u,u\rangle = 2\int_0^1 u(x)u(x)dx = 2\int_0^1 (u(x))^2dx \geqslant 0\ \forall\ u\in P_2[x]$

Từ đó suy ra tích của 2 véctơ đã cho là 1 tích vô hướng trong $P_2[x]$

b)

Để hệ trực giao thì các véctơ trong hệ đôi một trực giao, nghĩa là tích vô hướng giữa các véctơ trong nó đôi một bằng 0, lại có $\langle u_1,u_2\rangle = 2\int_0^1 u_1(x)u_2(x)dx\ = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases}\langle u_1,u_3\rangle = 0\\ \langle u_2,u_3\rangle = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\int_0^1 u_1(x)u_3(x)dx = 0\\ 2\int_0^1 u_2(x)u_3(x)dx = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{a}{6}+\dfrac{b}{5} = -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{a}{48}+\dfrac{b}{12} = -\dfrac{3}{4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = \dfrac{78}{7}\\ b = \dfrac{-165}{14}\end{cases}$$

**Nhận xét:** Đây là dạng bài tích vô hướng đơn thuần, tuy nhiên không ít bạn gặp khó khăn trong việc tiếp cận vì các bạn ít gặp và không thường xuyên luyện tập dạng này. Nhưng nếu để ý sẽ thấy hướng làm và quy trình vẫn giống tương tự. Do vậy cần thiết phải rà soát dạng bài tích vô hướng trong các không gian khác ngoài $\mathbb{R}^n$, tránh trường hợp bị động khi gặp dạng bài với các không gian ta không hay xét đến !



**Câu 3:** Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ cho tích vô hướng $\langle x,y\rangle = 2.x_1y_1 + x_2y_2 + 2.x_3y_3$ và không gian $W = span\left\{(1,0,-1);\ (2,1,-1);\ (2,2,3)\right\}$.

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của $W$.

b) Cho $u=(2,1,-2)$, tìm $\omega\in W$ sao cho $||u-\omega||\leq||u-v||$ với mọi véctơ $v\in W$.

**Hướng dẫn**

a) Xét ma trận tọa độ theo hàng:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&-1\\2&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow[H_3-2H_1\to H_3]{H_2-2H_1\to H_2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&2&5\end{bmatrix}\xrightarrow{H_3-2H_2\to H_3}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r(A)=3$ và $W = span\left\{u_1=(1,0,-1);\ u_2=(0,1,1);\ u_3=(0,0,3)\right\} = spanU$.

Trực chuẩn hóa hệ $U$, ta có:

+) $v_1 = u_1 = (1,0,-1)$

+) $v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1\rangle}{||v_1||^2}.v_1 = (0,1,1) - \dfrac{-2}{4}(1,0,-1)$

$= (0,1,1) + \left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{-1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{2}\right)$

+) $v_3 = u_3 - \dfrac{\langle u_3, v_1\rangle}{||v_1||^2}.v_1 - \dfrac{\langle u_3, v_2\rangle}{||v_2||^2}.v_2$

$= (0,0,3) - \dfrac{-6}{4}(1,0,-1) - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{2}\right) = (0,0,3) + \left(\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{-3}{2}\right) - \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$

$= \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{-3}{2}, \dfrac{3}{4}\right).$

Từ đây ta thu được một cơ sở trực chuẩn của $W$:

$$V = \left\{ v'_1 = \frac{v_1}{||v_1||};\ v'_2 = \frac{v_2}{||v_2||};\ v'_3 = \frac{v_3}{||v_3||} \right\}$$

$$= \left\{ v'_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}\right);\ v'_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right);\ v'_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \right\}.$$

b) $\omega \in W$ cần tìm chính là hình chiếu trực giao của $u$ lên không gian $W$.

Suy ra $\omega = Ch_W(u) = \langle u, v'_1\rangle.v'_1 + \langle u, v'_2\rangle.v'_2 + \langle u, v'_3\rangle.v'_3$

$$= (2,0,-2) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

$$= (2,1,-2).$$

**Nhận xét:**

- Đối với câu a), đề hỏi tìm cơ sở trực chuẩn nghĩa là cần đi tìm 1 cơ sở của không gian $W$ trước đã, không được dùng luôn hệ các véctơ đề bài cho. Đồng thời cần chú ý trường hợp đề cho **tích vô hướng không chính tắc**, tránh việc tính sai tích vô hướng cũng như sai chuẩn.
- Đối với câu b), cần nhớ được tính chất rút ra từ câu hỏi khi ấy bài toán sẽ trở nên dễ dàng hơn.

**Câu 4:** Nhận dạng mặt bậc 2 có phương trình $5x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 8xz = 36$



**Hướng dẫn**

Xét dạng toàn phương $q(x,y,z) = 5x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 8xz$ có ma trận trong cơ sở chính tắc $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Phương trình đặc trưng $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 49\lambda + 36 = 0$

$\Rightarrow A$ có ba trị riêng là $\lambda = 1, \lambda = 4, \lambda = 9$

+) $\lambda_1 = 1 \Rightarrow (A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 4x_3 = 0 \\ 3x_2 = 0 \\ 4x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_1 = 1$.

Trực chuẩn hoá $v_1$, ta được: $u_1 = \dfrac{v_1}{||v_1||} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

+) $\lambda_2 = 4 \Rightarrow (A - 4I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_2 = 4$.

Trực chuẩn hoá $v_2$, ta được: $u_2 = \dfrac{v_2}{||v_2||} = v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

+) $\lambda_3 = 9 \Rightarrow (A - 9I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + 4x_3 = 0 \\ -5x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_3 = 9$.

Trực chuẩn hoá $v_3$, ta được: $u_3 = \dfrac{v_3}{||v_3||} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Đặt $P = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

Đổi biến $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$

Phương trình mặt bậc 2 trở thành: $X^2 + 4Y^2 + 9Z^2 = 36 \Leftrightarrow \dfrac{X^2}{36} + \dfrac{Y^2}{9} + \dfrac{Z^2}{4} = 1$

$\Rightarrow$ Đây là một ellipsoid

**Nhận xét:** Ở dạng bài này các bạn cần làm thuần thục phương pháp chéo hóa ma trận kết hợp với trực chuẩn hóa. Các bạn cần nhớ được phương trình chuẩn tắc của các mặt để kết luận được mặt bậc 2 có dạng gì.

**Câu 5:** Cho $A(x_1,x_2,x_3) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

Tìm $\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=9}{\text{Max}} A(x_1,x_2,x_3)$, $\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=9}{\text{Min}} A(x_1,x_2,x_3)$. Với giá trị nào thì $A(x_1,x_2,x_3)$ đạt Max, Min.

<u>**Hướng dẫn**</u>

Xét $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P(\lambda) = \det(B - \lambda I) = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0$

$\Rightarrow B$ có 3 trị riêng là $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$

+) $\lambda_1 = 3 \Rightarrow (B - 3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_1 = 3$.

+) $\lambda_2 = 6 \Rightarrow (A - 6I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = t \\ x_3 = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_2 = 6$.

+) $\lambda_3 = 9 \Rightarrow (B - 9I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} -2t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_3 = 9$.

Và các vecto riêng trực chuẩn tương ứng:

$$u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; u_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ta thực hiện phép đổi biến

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Ta được

$$A(u_1,u_2,u_3) = 3u_1^2 + 6u_2^2 + 9u_3^2$$

Có: $A(u_1,u_2,u_3) = 3u_1^2 + 6u_2^2 + 9u_3^2 = 3(u_1^2+u_2^2+u_3^2) + 3u_2^2 + 6u_3^2 = 27 + 3u_2^2 + 6u_3^2 \geqslant 27$

$\Rightarrow A(u_1,u_2,u_3)$ min $= 27$ khi $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hoặc $u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ hoặc $x_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Có : $A(u_1,u_2,u_3) = 3u_1^2 + 6u_2^2 + 9u_3^2 = 9(u_1^2+u_2^2+u_3^2) - 6u_1^2 - 3u_2^2 = 81 - 6u_1^2 - 3u_2^2 \leqslant 81$

$\Rightarrow A(u_1,u_2,u_3)$ max $= 81$ khi $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ hoặc $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hoặc $x_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

**Nhận xét:** Ở bài này trực chuẩn hóa để đưa về dạng chính tắc và áp dụng giả thiết $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$ để biện luận min, max.

## 7.6 Đáp án đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 1 - Học kỳ 2022.1

**Câu 1. [1đ]** Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ f(x)=\left(x^2+3x,\ 2x+3\right)$, tập $A=[-2,+\infty)\times(0;2)$.

Xác định $f^{-1}(A)$.

**Hướng dẫn**

Ta có:
$f^{-1}(A)=\{x\in\mathbb{R},f(x)\in A\}=\left\{x\in\mathbb{R},\left(x^2+3x,2x+3\right)\in A\right\}$
Ta lại có:

$$\left(x^2+3x,2x+3\right)\in A\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3\in(0;2)\\x^2+3x\in[-2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{1}{2}\\x\geqslant -1\end{cases}\Leftrightarrow -1<x<-\dfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(A)=\left[-1;-\frac{1}{2}\right)$$

**Câu 2. [1đ]** Cho các tập hợp $A,B,C$. Chứng minh rằng: $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

**Hướng dẫn**

1. Chứng minh:$A\times(B\cap C)\subset(A\times B)\cap(A\times C)$

   Lấy $(x,y)\in A\times(B\cap C)\Longrightarrow\begin{cases}x\in A\\y\in B\cap C\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\in A\\\begin{cases}y\in B\\y\in C\end{cases}\end{cases}$

   $$\Longrightarrow\begin{cases}\begin{cases}x\in A\\y\in B\end{cases}\\\begin{cases}x\in A\\y\in C\end{cases}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(x,y)\in(A\times B)\\(x,y)\in(A\times C)\end{cases}\Longrightarrow(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$$

   Nên: $A\times(B\cap C)\subset(A\times B)\cap(A\times C)$
2. Chứng minh: $(A\times B)\cap(A\times C)\subset A\times(B\cap C)$
   Lấy $(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$

   $$\Longrightarrow\begin{cases}(x,y)\in(A\times B)\\(x,y)\in(A\times C)\end{cases}$$

   $$\Longrightarrow\begin{cases}\begin{cases}x\in A\\y\in B\end{cases}\\\begin{cases}x\in A\\y\in C\end{cases}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\in A\\\begin{cases}y\in B\\y\in C\end{cases}\end{cases}$$

   $$\Longrightarrow\begin{cases}x\in A\\y\in B\cap C\end{cases}\Longrightarrow(x,y)\in A\times(B\cap C)$$

   Nên: $(A\times C)\cap(A\times C)\subset A\times(B\cap C)$
3. Từ 1 và 2 suy ra điều phải chứng minh.

**Câu 3. [2đ]** Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vector:

$$u_1=(1,0,1,0),\ u_2=(0,1,-1,1),\ u_3=(1,1,1,2),\ u_4=(0,0,1,1)$$

Đặt $U=\operatorname{span}\{u_1,u_2\},V=\operatorname{span}\{u_3,u_4\}$

a) Hệ vector $u_1,u_2,u_3,u_4$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

b) Tìm số chiều và một cơ sở của không gian $U \cap V$.

**Hướng dẫn**

a) Xét: $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0 \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R})$
$\Leftrightarrow \lambda_1(1;0;1;0) + \lambda_2(0;1;-1;1) + \lambda_3(1;1;1;2) + \lambda_4(0;0;1;1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 = \lambda_1 \\ \lambda_4 = \lambda_1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = t(1,1,-1,1)(t \in \mathbb{R})$.
$\Rightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0;0;0;0)\} : \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0$
$\Rightarrow$ Hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ phụ thuộc tuyến tính.

b) Giả sử $x \in U \cap V \Rightarrow x = x_1 u_1 + x_2 u_2 = x_3 u_3 + x_4 u_4 \quad (x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_1 - x_2 = x_3 + x_4 \\ x_2 = 2x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 \\ x_4 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow x = x_1 u_1 + x_2 u_2 = x_1(1;1;0;1)$$

$\Rightarrow U \cap V = \{t(1;1;0;1) | t \in \mathbb{R}\}$
$\Rightarrow \dim U \cap V = 1$ và một cơ sở của $U \cap V$ là $\{(1;1;0;1)\}$

**Câu 4. [3đ]** Cho toán tử tuyến tính trên $P_2[x]$ xác định bởi:

$$f(1+x) = 11 - x + 3x^2, \; f(1+2x+x^2) = 14 + 4x^2, \; f(1+2x+3x^2) = 8 + 2x + 2x^2$$

a) Tìm ma trận của $f$ đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$
b) Tìm $Ker(f)$
c) Xác định các giá trị riêng và vector riêng của ma trận của $f$ đối với cơ sở chính tắc

**Hướng dẫn**

a) (1đ)
Cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ là: $\{e_1 = 1; e_2 = x; e_3 = x^2\}$
Ta có:
$f(1+x) = 11 - x + 3x^2 \Leftrightarrow f(1) + f(x) = 11 - x + 3x^2$
$f(1+2x+x^2) = 14 + 4x^2 \Leftrightarrow f(1) + 2f(x) + f(x^2) = 14 + 4x^2$
$f(1+2x+3x^2) = 8 + 2x + 2x^2 \Leftrightarrow f(1) + 2f(x) + 3f(x^2) = 8 + 2x + 2x^2$
Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(1) + f(x) = 11 - x + 3x^2 \\ f(1) + 2f(x) + f(x^2) = 14 + 4x^2 \\ f(1) + 2f(x) + 3f(x^2) = 8 + 2x + 2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 5 - x + x^2 \\ f(x) = 6 + 2x^2 \\ f(x^2) = -3 + x - x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ma trận của $f$ đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ : $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

b) Xét $f(a + bx + cx^2) = 0 \Leftrightarrow af(1) + bf(x) + cf(x^2) = 0$
$\Leftrightarrow (5a + 6b - 3c) + (-a + 0b + c)x + (a + 2b - c)x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a+6b-3c=0 \\ -a+0b+c=0 \\ a+2b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$

Vậy: $Kerf=0$

c) Ma trận của $f$ đối với cơ sở chính tắc là: $A=\begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Xét phương trình: $det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow A=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -3 \\ -1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow -\lambda^3+4\lambda^2-2\lambda-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=2 \\ \lambda=1-\sqrt{3} \\ \lambda=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$

+) Với $\lambda=2$, xét hệ phương trình:

$\begin{pmatrix} 5-2 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1+6x_2-3x_3=0 \\ -x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2 \\ x_3=0 \end{cases}$

Vậy: $u_1=(-2t,t,0)$ với $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ là các vector riêng ứng với trị riêng $\lambda=2$

+) Với $\lambda=1-\sqrt{3}$, xét hệ phương trình:

$\begin{pmatrix} 5-1+\sqrt{3} & 6 & -3 \\ -1 & -1+\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2 & -1-1+\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (4+\sqrt{3})x_1+6x_2-3x_3=0 \\ -x_1+(\sqrt{3}-1)x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+(\sqrt{3}-2)x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-3x_2 \\ x_3=(-2-\sqrt{3})x_2 \end{cases}$

Vậy: $u_2=(-3t,t,(-2-\sqrt{3})t)$ với $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ là các vector riêng ứng với trị riêng $\lambda=1-\sqrt{3}$

+) Với $\lambda=1+\sqrt{3}$, xét hệ phương trình:

$\begin{pmatrix} 5-1-\sqrt{3} & 6 & -3 \\ -1 & -1-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2 & -1-1-\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (4-\sqrt{3})x_1+6x_2-3x_3=0 \\ -x_1+(-1-\sqrt{3})x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2-(2+\sqrt{3})x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-3x_2 \\ x_3=(\sqrt{3}-2)x_2 \end{cases}$

Vậy: $u_1=(-3t,t,(\sqrt{3}-2)t)$ với $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ là các vector riêng ứng với trị riêng $\lambda=1+\sqrt{3}$

**Câu 5. [2đ]** Không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng $xy=x^TAy$ $(x,y\in\mathbb{R}^3), A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) Tính khoảng cách giữa hai vector $v_1=(0,3,2)$ và $v_2=(1,-1,1)$.
b) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian con $V=\text{span}\{v_1,v_2\}$ bằng phương pháp trực chuẩn hóa Gram-Schmidt.
c) Tìm vector thuộc $V$ sao cho khoảng cách từ vector này tới $w=(1,1,1)$ là nhỏ nhất.
d) Với ma trận $A$ nào thì tích vô hướng đã cho trở thành tích vô hướng chính tắc?

**Hướng dẫn**

a) Ta có:
$v_1 - v_2 = (-1,4,1)$
$d(v_1,v_2) = v_1 - v_2 = \sqrt{v_1 - v_2 v_1 - v_2} = \sqrt{(v_1-v_2)^T \cdot A \cdot (v_1 - v_2)} = \sqrt{122}$

b) Dễ thấy $B = \{v_1, v_2\}$ là một hệ vector độc lập tuyến tính và là cơ sở của $V$.
Ta thực hiện trực chuẩn hóa Gramm-Schmidt như sau:

- $u_1 = \dfrac{v_1}{v_1} = \dfrac{1}{\sqrt{v_1 v_1}} v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{v_1^T \cdot A \cdot v_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{78}} v_1 = \left(0, \dfrac{3}{\sqrt{78}}, \dfrac{2}{\sqrt{78}}\right)$.
- $\overline{v_2} = v_2 - v_2 u_1 u_1 = v_2 + \dfrac{13}{\sqrt{78}} u_1 = \left(1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}\right)$
$u_2 = \dfrac{\overline{v_2}}{v_2} = \dfrac{\sqrt{570}}{95} \overline{v_2} = \left(\dfrac{\sqrt{570}}{95}, -\dfrac{\sqrt{570}}{190}, \dfrac{4\sqrt{570}}{285}\right)$.

Vậy một cơ sở trực chuẩn của $V$ là $B' = \{u_1, u_2\}$.

c) Vector cần tìm là hình chiếu trực giao của $w$ xuống $V$.

$$\begin{aligned} Pr_V(w) &= w u_1 u_1 + w u_2 u_2 \\ &= \frac{27}{\sqrt{78}} u_1 + \frac{17\sqrt{570}}{190} u_2 \\ &= \left(\frac{51}{95}, \frac{951}{1235}, \frac{1739}{1235}\right) \end{aligned}$$

Vậy vector cần tìm là $\left(\dfrac{51}{95}, \dfrac{951}{1235}, \dfrac{1739}{1235}\right)$

d) Tích vô hướng đã cho trở thành tích vô hướng chính tắc khi $A = I_3$.

**Câu 6. [1đ]** Cho $A$ là ma trận thực, vuông cấp $n$ có các trị riêng đều là số thực và thỏa mãn:
$$A + A^k = A^T \; \forall k \geq n$$
Chứng minh rằng $A$ là ma trận chéo hóa trực giao được.

**Hướng dẫn**

Nếu $\lambda$ là một trị riêng của $A \Rightarrow \lambda + \lambda^k$ là một trị riêng của $A^T = A + A^k$
$\Rightarrow \lambda + \lambda^k$ là một trị riêng của $A$.
Ta sẽ chứng minh $A$ nếu có các trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ thì $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$
Thật vậy, xét $A + A^k = A^T$, ta có:

- Với $k$ lẻ, giả sử $\exists i : \lambda_i \neq 0$. Xét trị riêng $\lambda$ thỏa mãn $|\lambda| = \max\{|\lambda_i|, i = \overline{1,n}\}$
Khi đó, do $\lambda + \lambda^k$ cũng là trị riêng của $A$ mà do $k$ lẻ, $|\lambda + \lambda^k| = |\lambda| + |\lambda|^k > |\lambda|$
$\Rightarrow \exists \lambda' = \lambda + \lambda^k : |\lambda'| > |\lambda|$ và $\lambda'$ là trị riêng của $A$. (mâu thuẫn với giả thiết)
$\Rightarrow$ Với $k$ lẻ, $\forall i = \overline{1,n}, \lambda_i = 0$
- Với $k$ chẵn, ta có: $tr(A) = tr(A^T) = tr(A + A^k) \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda_i^k)$
$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0 \Rightarrow \forall i = \overline{1,n}, \lambda_i = 0$

Từ 2 trường hợp trên, ta chứng minh được $A$ có trị riêng $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ do đó $A$ là ma trận lũy linh.
Mà $k \geq n \Rightarrow A^k = 0 \Rightarrow A = A^T \Rightarrow A$ là ma trận chéo hóa trực giao được.(đpcm!)

## 7.7 Đáp án đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 2 - Học kỳ 2022.1

**Câu 1. [1.5đ]** Cho hai ánh xạ:

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$$
$$x \mapsto |x| + 1 \qquad\qquad x \mapsto (x+4, x-1)$$

**Hướng dẫn**

1. Kiểm tra tính đơn ánh, toàn ánh của $f$, $g$.
2. Xác định ánh xạ $h = g \circ f$.

1. • Xét ánh xạ f.
     – Với $x_1 = 1$ hay $x_2 = -1$ thì $f(x_1) = f(x_2) = 2$. Do đó f không đơn ánh
     – Xét $f(x) = 0,5$, điều này tương đương với:
       $|x| + 1 = 0,5 \Leftrightarrow |x| = -0,5$ vô nghiệm thực. Suy ra f không toàn ánh
   • Xét ánh xạ g
     – Xét với $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow (x_1+4, x_1-1) = (x_2+4, x_2-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+4 &= x_2+4 \\ x_1-1 &= x_2-1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$. Suy ra g đơn ánh
     – Với $y(1,1)$, ta có:
       $g(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+4=1 \\ x_1-1=1 \end{cases}$ vô nghiệm thực. Suy ra g không toàn ánh
2. Ta có: $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(|x|+1) = (|x|+5, |x|)$ Từ đó ta có ánh xạ $g \circ f$ là:

$$g \circ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$$
$$x \mapsto (|x|+5, |x|)$$

**Câu 2. [1đ]** Tìm các giá trị riêng, vectơ riêng và chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

**Hướng dẫn**

Xét $\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 10-\lambda & -8 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 6 \end{array}\right.$

Ma trận $A$ có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 6$

- Với $\lambda_1 = 2$:
  $(A-2E)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = a \end{cases}$
  $\Rightarrow u_1 = (1,1)$ là một véc tơ riêng của $A$
- Với $\lambda_2 = 6$:
  $(A-6E)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a \\ y = a \end{cases} \Rightarrow u_2 = (2,1)$ là một véc tơ riêng của $A$

Ma trận làm chéo hóa $A$ : $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ma trận $A$ sau khi chéo hóa là: $P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

**Câu 3. [2đ]** Cho các vectơ $u_1 = (1;0;-1;2), u_2 = (2;0;2;0), u_3 = (0;4;0;5), u_4 = (-3;8;0;8)$ trong không gian $\mathbb{R}^4$

**Hướng dẫn**

1. Xác định toạ độ của $u_1, u_3$ đối với cơ sở $S = \{e_1 = (1;0;0;1), e_2 = (0;1;0;1), e_3 = (1;1;1;1), e_4 = (0;0;0;1)\}$.
2. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian $U = span\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

1. Xét: $u_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow [u_1]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Xét: $u_3 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow [u_1]_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Ta có:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ -3 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_4+3h_1 \to h_4]{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_4-2h_2 \to h_4]{h_3-2h_1 \to h_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy $dimU = r(A^T) = 3$ với $\{(1;0;-1;2),(0;4;0;5),(0;0;3;-4)\}$ là một cơ sở.

**Câu 4. [2.5đ]** Cho toán tử tuyến tính $f\colon P_2[x] \to P_2[x]$ thoả mãn:
$f(x-3x^2) = -x+3x^2$, $f(2+x+3x^2) = 1+2x-x^2$,
$f(1+x+2x^2) = 2+3x+x^2$

1. Tìm ma trận của $f$ đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$
2. Tìm các giá trị riêng và vector riêng của $f$
3. Tìm ma trận của $f^2 = f \circ f$ theo cơ sở chính tắc của $P_2[x]$

**Hướng dẫn**

a) Từ giả thiết ta có:

$$\left[[f(1)]_E \quad [f(x)]_E \quad [f(x^2)]_E\right] . \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ($E$ là cơ sở chính tắc của $P_2[x]$)}$$

$$\Rightarrow \text{Ma trận của } f \text{ đối với } E \text{ là } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-9}{4} & \frac{11}{4} & \frac{5}{4} \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Từ định nghĩa của vectơ riêng v tương ứng với giá trị riêng $\lambda$ ta có:
$Av = \lambda v \to (A - \lambda I_n)v = 0$

$$\Rightarrow det(A-\lambda I_n) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{-7}{4} - \lambda & \frac{9}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-9}{4} & \frac{11}{4} - \lambda & \frac{5}{4} \\ -2 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-2) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 0, \lambda = -1, \lambda = 2$
Với mỗi $\lambda$ chúng ta tìm các vector riêng ứng với nó:
Với $\lambda = 0$

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} \frac{-7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-9}{4} & \frac{11}{4} & \frac{5}{4} \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$Av = \lambda v \to (A - \lambda I_n)v = 0$ . Ta giải hệ bằng phép khử Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{-7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{-9}{4} & \frac{11}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 . \frac{-4}{7} \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-9}{7} & \frac{-3}{7} & 0 \\ \frac{-9}{4} & \frac{11}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 + \frac{9}{4} R_1 \to R_2]{R_3 + 2R_1 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-9}{7} & \frac{-3}{7} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{-6}{7} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 + 3R_2 \to R_3]{R_1 - 9R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Suy ra: $x_1 = 3x_3, x_2 = 2x_3, x_3 = x_3$ Vậy $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Tương tự với $\lambda = 2$ thì $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$. Tương tự với $\lambda = -1$ thì $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

Suy ra ma trận $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ làm chéo hoá ma trận $A = D.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.D^{-1}$

c) Ma trận của $f$ theo cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ là: $A$
$\Rightarrow [f(x)]_E = A[x]_E$
$\Rightarrow \left[f^2(x)\right]_E = f(f(x)_E)_E = f(A[x]_E)_E = A^2[x]_E$

$\Rightarrow$ Ma trận của $f \circ f$ theo cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ là: $A^2 = \begin{bmatrix} \frac{-7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-9}{4} & \frac{11}{4} & \frac{5}{4} \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^2$

$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} \frac{-7}{2} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-19}{4} & \frac{25}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{-13}{4} & \frac{15}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$.

**Câu 5. [2đ]** Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho vector $v = \left(4; 5; -\frac{6}{m}; -2\right)$.
Cho $H = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x \perp v\}$.

a) Xác định số chiều và một cơ sở của $H$.
b) Tìm hình chiếu trực giao của vector $u = \left(3; -1; \frac{m}{2}; 2\right)$ lên $H$ bằng 2 cách.

**Hướng dẫn**

a) Ta có: $H = \left\{x = \{x_1; x_2; x_3; x_4\} \in \mathbb{R}^4 \mid x \perp v\right\} \Rightarrow \langle x, v\rangle = 0$

$$\Leftrightarrow 4x_1 + 5x_2 - \frac{6}{m}x_3 - 2x_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = t_1 \\ x_2 & = t_2 \\ x_3 & = t_3 \\ x_4 & = 2t_1 + \frac{5}{2}t_2 - \frac{3}{m}t_3 \end{cases}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} x &= \left(t_1; t_2; t_3; 2t_1 + \frac{5}{2}t_2 - \frac{3}{m}t_3\right) \\ &= t_1(1;0;0;2) + t_2\left(0;1;0;\frac{5}{2}\right) + t_3\left(0;0;1;-\frac{3}{m}\right) \\ &= t_1(1;0;0;2) + \frac{t_2}{2}(0;2;0;5) + mt_3(0;0;m;-3) \end{aligned}$$

Vậy $\dim H = 3$ và một cơ sở của $H$ là $\{(1;0;0;2), (0;2;0;5), (0;0;m;-3)\}$

b) • Cách 1: Tìm cơ sở trực giao của $H$:

$$\begin{aligned}
u_1 &= e_1 = (1;0;0;2)\\
u_2 &= e_2 - \frac{\langle e_2, u_1\rangle}{||u_1||^2}u_1\\
&= (0;2;0;5) - \frac{10}{5}(1;0;0;2) = (-2;2;0;1)\\
u_3 &= e_3 - \frac{\langle e_3, u_1\rangle}{||u_1||^2}u_1 - \frac{\langle e_3, u_2\rangle}{||u_2||^2}u_2\\
&= (0;0;m;-3) - \frac{-6}{5}(1;0;0;2) - \frac{-3}{9}(-2;2;0;1)\\
&= \left(\frac{8}{15};\frac{2}{3};m;-\frac{4}{15}\right)
\end{aligned}$$

Suy ra: Hình chiếu trực giao của vector $u$ lên $H$ là:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}_H u &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\langle u, u_k\rangle}{||u_k^2||}u_k\\
&= \frac{7}{5}(1;0;0;2) + \frac{-6}{9}(-2;2;0;1) + \frac{\frac{2}{5}+\frac{m^2}{2}}{\frac{4}{5}+m^2}\left(\frac{8}{15};\frac{2}{3};m;-\frac{4}{15}\right)\\
&= \left(3;-1;\frac{m}{2};2\right)
\end{aligned}$$

• Cách 2: Ta thấy: $\langle u, v\rangle = 12-5-3-4 = 0 \Rightarrow u \perp v$
Do đó: $u \in H \Rightarrow$ Hình chiếu trực giao của vector $u$ lên $H$:

$$\mathrm{Ch}_H u = u = \left(3;-1;\frac{m}{2};2\right)$$

**Câu 6. [1đ]** Chứng minh rằng với mọi ma trận vuông $A, B, C$ cấp 2 ta luôn có:

$$(AB-BA)^{2n}.C - C.(AB-BA)^{2n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

**Hướng dẫn**

Gọi $Tr(A)$ là tổng tất cả các phần tử trên đường chéo chính của $A$
Ta có: $Tr(AB-BA) = 0$. (chứng minh)
Nên: $AB - BA = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}$
Ta có: $(AB-BA)^2 = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+yz & 0 \\ 0 & x^2+yz \end{bmatrix} = (x^2+yz).I$
$\Rightarrow \begin{cases} (AB-BA)^{2n}.C = [(x^2+yz).I]^n.C = (x^2+yz)^n.C \\ C.(AB-BA)^{2n} = C.[(x^2+yz).I]^n = (x^2+yz)^n.C \end{cases}$
Nên: $(AB-BA)^{2n}.C - C.(AB-BA)^{2n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (đpcm)

## 7.8 Đáp án đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 1 - Học kỳ 2023.1

Video chữa chi tiết xem TẠI ĐÂY

**Câu 1. [1đ]** Cho ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = 2z^3 + 6(2+3i)z + 9(1-i)^2$. Xác định $f^{-1}(\{14\})$.

**Hướng dẫn**

$f^{-1}(\{14\}) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 14\}$

$f(z) = 14 \Leftrightarrow 2z^3 + 6(2+3i)z + 9(1-i)^2 = 14$

$\Leftrightarrow z^3 + (6+9i)z - 7 - 9i = 0$

$\Leftrightarrow z^3 - 2z^2 + 2z^2 - 2z + 14z + 18i - 18i - 14 = 0$

$\Leftrightarrow (z-1)(z^2 + z + 7 + 9i) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z^2 + z + 7 + 9i = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Xét phương trình $(*)$: $\Delta = 1^2 - 4.1.(7+9i) = -27 - 36i = (3-6i)^2 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3 - 6i$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+3-6i}{2} = 1-3i \\ z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-(3-6i)}{2} = -2+3i \end{cases}$$

Vậy $f^{-1}(\{14\}) = \{1,\ 1-3i,\ -2+3i\}$

**Câu 2. [1đ]** Tìm tất cả các số thực $\lambda$ sao cho tồn tại ma trận $X$ thỏa mãn:

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 1 \\ -1 & \lambda-3 & 3-\lambda \\ 1 & 5 & \lambda \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2\lambda+3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Hướng dẫn**

Ma trận $X$ phải là ma trận có kích cỡ $3 \times 1$. Do đó, ma trận $X$ tồn tại nếu hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 1 \\ -1 & \lambda-3 & 3-\lambda \\ 1 & 5 & \lambda \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2\lambda+3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ma trận hệ số bổ sung của hệ phương trình là:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 10 & 1 & 2\lambda+3 \\ -1 & \lambda-3 & 3-\lambda & 5 \\ 1 & 5 & \lambda & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{H_1 \leftrightarrow H_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & \lambda & 2 \\ -1 & \lambda-3 & 3-\lambda & 5 \\ 2 & 10 & 1 & 2\lambda+3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[H_3-2H_1 \to H_3]{H_2+H_1 \to H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & \lambda & 2 \\ 0 & \lambda+2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1-2\lambda & 2\lambda-1 \end{array}\right]$$

- Nếu $\lambda \neq \frac{1}{2}$ và $\lambda \neq -2$ thì $2\lambda - 1 \neq 0$ và $\lambda + 2 \neq 0$. Do đó, ta có $r(A) = r(\overline{A}) = 3$. Lúc này, hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
- Nếu $\lambda = \frac{1}{2}$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 2$. Lúc này, hệ phương trình có vô số nghiệm.
- Nếu $\lambda = -2$ thì $r(A) = 2 \neq r(\overline{A}) = 3$. Lúc này, hệ phương trình vô nghiệm.

Như vậy, với mọi $\lambda \neq -2$ thì tồn tại ma trận $X$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 3. [2đ]** Trong không gian véctơ $M_2(\mathbb{R})$ các ma trận vuông cấp 2, cho các véctơ:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix};\ u_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix};\ u_3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix};\ u_4 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Đặt $W_1 = span\{u_1, u_2\}$, $W_2 = span\{u_3, u_4\}$.

a) Tìm số thực $m$ để véctơ $u = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3m^2 - 6m & 2m - 15 \end{bmatrix}$ thuộc không gian véctơ $W = W_1 + W_2$.

b) Xác định một cơ sở và số chiều của không gian con $W_1 \cap W_2$.

**Hướng dẫn**

a)

$W = W_1 + W_2 \Rightarrow W = span\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

Xét: $u = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + k_4u_4$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3m^2 - 6m & 2m - 15 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 - 2k_2 - k_3 - 2k_4 = 3 \\ k_1 - k_2 - 2k_3 - k_4 = 2 \\ -k_1 + 2k_2 + 4k_3 + 5k_4 = 3m^2 - 6m \\ -5k_1 + 4k_2 + 9k_3 + 2k_4 = 2m - 15 \end{cases} \quad (*)$$

Xét ma trận hệ số bổ sung:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 5 & 3m^2 - 6m \\ -5 & 4 & 9 & 2 & 2m - 15 \end{array}\right] \xrightarrow[H_3 + H_1 \to H_3,\ H_4 + 5H_1 \to H_4]{H_2 - H_1 \to H_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3(m-1)^2 \\ 0 & -6 & 4 & -8 & 2m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{H_4 + 6H_2 \to H_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & (m-1)^2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2m - 6 \end{array}\right] \xrightarrow{H_4 + 2H_3 \to H_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & (m-1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m^2 - 2m - 4 \end{array}\right]$$

Hệ phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A}) = 3 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -1 \end{array}\right.$

Vậy $u \in W$ khi $m \in S = \{2, -1\}$

b)

Với bất kỳ $w \in W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow \begin{cases} w \in W_1 \\ w \in W_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = k_1u_1 + k_2u_2 \\ w = k_3u_3 + k_4u_4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow k_1u_1 + k_2u_2 = k_3u_3 + k_4u_4$

$\Leftrightarrow k_1u_1 + k_2u_2 - k_3u_3 - k_4u_4 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 - 2k_2 + k_3 + 2k_4 = 0 \\ k_1 - k_2 + 2k_3 + k_4 = 0 \\ -k_1 + 2k_2 - 4k_3 - 5k_4 = 0 \\ -5k_1 + 4k_2 - 9k_3 - 2k_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 - 2k_2 + k_3 + 2k_4 = 0 \\ k_2 + k_3 - k_4 = 0 \\ k_3 + k_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 3t \\ k_2 = 2t \\ k_3 = -t \\ k_4 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow w = k_3u_3 + k_4u_4 = -t\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 4 & 9\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -7\end{bmatrix}$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2 = \left\{ w = t\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -7\end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 1$ và 1 cơ sở của $W_1 \cap W_2$ là $\left\{ \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -7\end{bmatrix} \right\}$.

**Câu 4. [2,5đ]** Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Biết:

$$f(1,0,0) = (1,0,1,1);\ f(1,2,1) = (3,3,2,4);\ f(2,5,6) = (7,11,8,13)$$

a) Tìm ma trận của $f$ với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^4$.
b) $f$ có phải là một đơn cấu không ?
c) Với tích vô hướng chính tắc trên $\mathbb{R}^4$, tìm hình chiếu trực giao của $v = (1,1,4,1)$ lên Im$f$.

**Hướng dẫn**

a)

Gọi $E = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$ và $E' = \{e'_1 = (1,0,0,0), e'_2 = (0,1,0,0), e'_3 = (0,0,1,0),\ e'_4 = (0,0,0,1)\}$ lần lượt là các cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^4$. Ta có:

$$\begin{cases} f(1,0,0) = f(e_1) = (1,0,1,1)\\ f(1,2,1) = f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) = (3,3,2,4)\\ f(2,5,6) = 2f(e_1) + 5f(e_2) + 6f(e_3) = (7,11,8,13)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (1,0,1,1)\\ f(e_2) = (1,1,0,1)\\ f(e_3) = (0,1,1,1)\end{cases}$$

Vậy ma trận của $f$ với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^4$ là: $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

b)

Xét định thức con cấp 3 của $A$ là $\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 = \dim \mathrm{Im} f$.

Theo định lý về số chiều: $\dim\ \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = 3 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker} f = 3 - \dim \mathrm{Im} f = 0$

Suy ra $f$ là một đơn cấu.

**Cách giải khác:** Xét $A^T \to$ đưa về ma trận bậc thang $\to$ tìm được một cơ sở của Im$f$ và kết luận được số chiều của Im$f$ $\to$ số chiều của Ker$f$ và kết luận tính đơn cấu.

c)

Do $r(A) = 3$ nên ta có một cơ sở của Im$f$ là $\left\{ f(e_1), f(e_2), f(e_3) \right\}$

Đặt $v_1 = (1,0,1,1),\ v_2 = (1,1,0,1),\ v_3 = (0,1,1,1)$. Ta đi trực chuẩn hóa cơ sở này:

+) $v'_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,1)$

+) $\overline{v_2} = v_2 - \langle v_2, v'_1\rangle v'_1 = \left(\dfrac{1}{3}, 1, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow v'_2 = \dfrac{\overline{v_2}}{\|\overline{v_2}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}(1,3,-2,1)$

+) $\overline{v_3} = v_3 - \langle v_3, v'_2\rangle v'_2 - \langle v_3, v'_1\rangle v'_1 = \left(\dfrac{-4}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{1}{5}\right) \Rightarrow v'_3 = \dfrac{\overline{v_3}}{\|\overline{v_3}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{35}}(-4,3,3,1)$

$\Rightarrow V' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ là một cơ sở trực chuẩn của Im$f$.

Gọi $w$ là hình chiếu trực giao của $v$ lên Im$f$, khi đó:

$w = \langle v_1', v\rangle v_1' + \langle v_2', v\rangle v_2' + \langle v_3', v\rangle v_3' = 2(1,0,1,1) - \dfrac{1}{5}(1,3,-2,1) + \dfrac{12}{35}(-4,3,3,1)$

$= \left(\dfrac{3}{7}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{24}{7}, \dfrac{15}{7}\right)$

Vậy $w = \left(\dfrac{3}{7}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{24}{7}, \dfrac{15}{7}\right)$.

**Câu 5. [2,5đ]** Trên $\mathbb{R}^3$, cho dạng toàn phương:

$$w(x) = 2ax_1^2 + 6x_2^2 + (8-a)x_3^2 - 4x_1x_2 - (a-1)x_1x_3 - 2x_2x_3$$

a) Với giá trị nào của $a$, tồn tại tích vô hướng tương ứng với dạng toàn phương đã cho?
b) Cho $a = 3$, tìm một cơ sở mà $w$ có dạng chính tắc, từ đó nhận dạng mặt bậc hai $(S)$ có phương trình $w(x) = 2$ trong hệ tọa độ Descartes vuông góc.

**Hướng dẫn**

a) $w(x)$ sinh bởi dạng song tuyến tính đối xứng $\varphi(x,y)$

$\varphi(x,y)$ trở thành tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow w(x)$ là dạng toàn phương xác định dương.

Gọi A là ma trận của dạng toàn phương theo cơ sở chính tắc:

$$\begin{bmatrix} 2a & -2 & -\dfrac{a-1}{2} \\ -2 & 6 & -1 \\ -\dfrac{a-1}{2} & -1 & 8-a \end{bmatrix}$$

Xét các định thức con chính cấp $k$ của A: $\begin{cases} \Delta_1 = 2a \\ \Delta_2 = 12a - 4 \\ \Delta_3 = \dfrac{9}{2}(3a-1)(7-a) \end{cases}$

Theo tiêu chuẩn Sylvester, $w(x)$ là dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 2a > 0 \\ \Delta_2 = 12a - 4 > 0 \\ \Delta_3 = \dfrac{9}{2}(3a-1)(7-a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < a < 7$$

Vậy với $a \in \left(\dfrac{1}{3}, 7\right)$, tồn tại tích vô hướng tương ứng với dạng toàn phương đã cho.

b) Với $a = 3$ ta có ma trận của dạng toàn phương là:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Xét đa thức đặc trưng: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 6-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 17\lambda^2 - 90\lambda + 144$

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 17\lambda^2 - 90\lambda + 144 = 0$

$\Leftrightarrow -(\lambda-8)(\lambda-6)(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 8, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 3$

+) $\lambda_1 = 8 \Rightarrow (A - 8I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 & = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 & = 0 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_1 = 8$.

Trực chuẩn hoá $v_1$, ta được: $u_1 = \dfrac{v_1}{||v_1||} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$

+) $\lambda_2 = 6 \Rightarrow (A - 6I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_2 - x_3 & = 0 \\ -2x_1 - x_3 & = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = -2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ -2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_2 = 6$.

Trực chuẩn hoá $v_2$, ta được: $u_2 = \dfrac{v_2}{||v_2||} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

+) $\lambda_3 = 3 \Rightarrow (A - 3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 & = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 & = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_3 = 3$.

Trực chuẩn hoá $v_3$, ta được: $u_3 = \dfrac{v_3}{||v_3||} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

Suy ra $P = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{-2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ là ma trận làm chéo hoá trực giao ma trận A và:

$D = P^T AP = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Vậy với cơ sở trực chuẩn $U = \left\{ p_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right); p_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right); p_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$

ta thu được dạng toàn phương chính tắc:

$$w'(y) = 8y_1^2 + 6y_2^2 + 3y_3^2$$

Khi đó, phương trình mặt bậc hai (S): $w(x) = 2 \Leftrightarrow w'(y) = 2$

$$\Leftrightarrow 8y_1^2 + 6y_2^2 + 3y_3^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{y_3^2}{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = 1$$

Vậy (S) là Elipsoid.

**Câu 6. [1đ]** Giả sử tồn tại các ma trận thực, vuông cấp $n$ là $A$ và $B$ thỏa mãn: $AB = 5A + 6B$.
Chứng minh rằng $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

**Hướng dẫn**

Từ phương trình $AB = 5A + 6B$, ta suy ra:

$AB - 5A - 6B + 30I = 30I \Leftrightarrow A(B - 5I) - 6(B - 5I) = 30I$

$\Leftrightarrow (A - 6I)(B - 5I) = 30I \Leftrightarrow \left(\frac{A}{6} - I\right)\left(\frac{B}{5} - I\right) = I$

Như vậy , $\frac{A}{6} - I$ và $\frac{B}{5} - I$ là hai ma trận nghịch đảo. $\Rightarrow I = \left(\frac{B}{5} - I\right)\left(\frac{A}{6} - I\right)$ (*)

Xét các véctơ $u$ thỏa mãn $Au = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{A}{6} - I\right) u = \frac{Au}{6} - u = -u$. Nhân cả hai vế của phương trình (*) với $u$, ta được:

$$u = \left(\frac{B}{5} - I\right)\left(\frac{A}{6} - I\right) u = \left(\frac{B}{5} - I\right) \cdot -u = u - \frac{Bu}{5}.$$

Như vậy, $Bu = 0$ hay $u$ cũng là nghiệm của hệ phương trình $Bx = 0$. Tương tự, giả sử $v$ là một nghiệm của hệ phương trình $Bx = 0$ thì $v$ cũng sẽ là nghiệm của phương trình $Ax = 0$.

Từ đó, suy ra $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

## 7.9 Đáp án đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 2 - Học kỳ 2023.1

**Câu 1. [1đ]** Cho ánh xạ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}: \ (x,y) \to \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x-2y \end{pmatrix}$. Trong đó $\mathbb{M}$ là không gian ma trận đường chéo cấp 2. Ánh xạ trên có phải là ánh xạ song ánh không? Vì sao?

**Hướng dẫn**

Với m = $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M$ trong đó $a, b \in \mathbb{R}$ ta xét:

$$\begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ x-2y=b \end{cases}$$

Hệ phương trình trên là hệ Cramer vì $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Vậy ánh xạ f là ánh xạ song ánh.

**Câu 2. [1đ]** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & m & m+8 \\ 3 & 7 & m+1 \end{pmatrix}$. Tìm $m$ để $r(A) = 2$.

**Hướng dẫn**

Ta có: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & m & m+8 \\ 3 & 7 & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_3-3H_1\to H_2]{H_2-2H_1\to H_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & m-4 & m+4 \\ 0 & 1 & m-5 \end{pmatrix}$

+) $m-4=0 \Leftrightarrow m=4 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2 \leftrightarrow H_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Khi đó $r(A) = 3$ **(loại)**.

+) $m-4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$, khi đó: $A \xrightarrow{(m-4)H_3-H_2\to H_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & m-4 & m+4 \\ 0 & 0 & m^2-10m+16 \end{pmatrix}$

Để $r(A) = 2 \Leftrightarrow m^2-10m+16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=8 \end{array}\right.$

Vậy với $m=2$ hoặc $m=8$ thì $r(A) = 2$.

**Câu 3. [1.5đ]** Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho hệ véctơ $B = \{v_1 = (1,1,2,1);\ v_2 = (3,0,7,4);\ v_3 = (2,2,m,3),\ v_4 = (1,1,2,2)\}$.

a) Tìm $m$ để hệ $B$ lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

b) Cho $m = \dfrac{11}{3}$, tìm tọa độ của véctơ $v = (1,4,1,2)$ đối với cơ sở $B$ thông qua công thức đổi tọa độ.

**Hướng dẫn**

a) Ma trận các véctơ viết theo hàng là:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & m & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_3-2H_1\to H_3,\ H_4-H_1\to H_4]{H_2-3H_1\to H_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & m-4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Nhận xét:**
+) Nếu $m-4=0 \Leftrightarrow m=4$ thì $r(A) = 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4 \Rightarrow$ hệ $B$ không lập thành cơ sở.

+) Nếu $m-4\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 4$ thì $r(A)=4=\dim\mathbb{R}^4 \Rightarrow$ hệ $B$ lập thành cơ sở.

Vậy $\forall m\neq 4$ thì hệ $B$ đã cho lập thành cơ sở.

b) Gọi cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ là $E=\{e_1=(1,0,0,0);\ e_2=(0,1,0,0);\ e_3=(0,0,1,0);\ e_4=(0,0,0,1)\}$

+) Xác định ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc $E$ sang cơ sở $B$:

Ta có $v_1=(1,1,2,1)=1.e_1+1.e_2+2.e_3+1.e_4 \Rightarrow [v_1]_E=[1\quad 1\quad 2\quad 1]^T$

$v_2=(3,0,7,4)=3.e_1+0.e_2+7.e_3+4.e_4 \Rightarrow [v_2]_E=[3\quad 0\quad 7\quad 4]^T$

$v_3=\left(2,2,\frac{11}{3},3\right)=2.e_1+2.e_2+\frac{11}{3}.e_3+3.e_4 \Rightarrow [v_3]_E=\begin{bmatrix}2 & 2 & \frac{11}{3} & 3\end{bmatrix}^T$

$v_4=(1,1,2,2)=1.e_1+1.e_2+2.e_3+2.e_4 \Rightarrow [v_4]=[1\quad 1\quad 2\quad 2]^T$

Suy ra ma trận chuyển cơ sở từ $E$ sang $B$ là $P=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 7 & \frac{11}{3} & 2\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$

+) Ta có $v=(1,4,1,2)=1.e_1+4.e_2+1.e_3+2.e_4 \Rightarrow [v]_E=[1\quad 4\quad 1\quad 2]^T$

Do $[v]_E=P.[v]_B \Rightarrow [v]_B=P^{-1}.[v]_E=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 7 & \frac{11}{3} & 2\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}1\\4\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$

Vậy tọa độ của $v$ đối với $B$ là $[v]_B=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$

**Câu 4. [2.5đ]** Trên không gian $P_2[x]$ cho ánh xạ tuyến tính $f$ và cơ sở $B=\{v_1=3+x-x^2, v_2=2+3x-x^2, v_3=1+2x+3x^2\}$, biết: $f(v_1)=6+2x-2x^2;\ f(v_2)=5+4x-2x^2;\ f(v_3)=2+3x-x^2$.

a) Tìm ma trận $A$ của ánh xạ tuyến tính trên với cặp cơ sở $B$.

b) Chéo hóa ma trận $A$.

c) Cho biết $f^k=f\circ f\circ\ldots\circ f$ ($k$ lần). Hãy tìm ma trận của $f^{2024}$.

**Hướng dẫn**

a) Gọi $A$ là ma trận của AXTT đối với cặp cơ sở $B$.

$A=[[f(v_1)]_B\quad [f(v_2)]_B\quad [f(v_2)]_B]$

+) $f(v_1)=6+2x-2x^2=2(3+x-x^2)=2v_1+0v_2+0v_3 \Rightarrow [f(v_1)]_B=[2\quad 0\quad 0]^T$

+) $f(v_2)=5+4x-2x^2=av_1+bv_2+cv_3=a(3+x-x^2)+b(2+3x-x^2)+c(1+2x+3x^2)\ \ (a,b,c\in\mathbb{R})$.

$$\Rightarrow \begin{cases}3a+2b+c &= 5\\ a+3b+2c &= 4\\ -a-b+3c &= -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a &= 1\\ b &= 1\\ c &= 0\end{cases}$$

$\Rightarrow f(v_2)=5+4x-2x^2=v_1+v_2+0v_3 \Rightarrow [f(v_2)]_B=[1\quad 1\quad 0]^T$

+) $f(v_3)=2+3x-x^2=v_2 \Rightarrow [f(v_3]_B=[0\quad 1\quad 0]^T$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

**Nhận xét:** Khi tính $[f(v_1)]_B, [f(v_3)]_B$ nếu chưa nhìn ra luôn tọa độ thì ta cũng có thể tính tổng quát như khi tính $[f(v_2)]_B$ ở trên.

b) Xét phương trình đặc trưng: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-1)\lambda$

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda-1)\lambda = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right.$

+) Với $\lambda_1 = 2 \Rightarrow (A-2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_1 = 2$.

+) Với $\lambda_2 = 1 \Rightarrow (A-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_2 = 1$.

+) Với $\lambda_3 = 0 \Rightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{t}{2} \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} \frac{t}{2} \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_3 = 0$.

$\Rightarrow$ Ma trận $A$ chéo hóa được và ma trận làm chéo hóa $A$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Với $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) Vì ánh xạ $f$ có ma trận theo cơ sở $B$ là $A$, nên ma trận của $f^{2024}$ theo cở sở $B$ là $A^{2024}$.

Theo b), ta có $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = P \,.\, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .\, P^{-1}$

Sử dụng tính chất của ma trận đồng dạng và $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ta có:

$$A^{2024} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2024} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^{2024} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{2024} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{2024} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{2024} & 2^{2024}-1 & 2^{2023}-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận của $f^{2024}$ theo cơ sở $B$ là $A^{2024} = \begin{bmatrix} 2^{2024} & 2^{2024}-1 & 2^{2023}-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Câu 5. [2đ]** Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho tích vô hướng $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ và không gian $V = span\{v_1 = (2;-3;-1);\ v_2 = (0;\ m;\ 1);\ v_3 = (m+2;\ 4;\ 3)\}$.

a) Tìm số thực $m$ để khoảng cách giữa 2 véctơ $v_2$ và $v_3$ là nhỏ nhất.

b) Với $m$ ở câu a, tìm một cơ sở trực chuẩn của $V$ và hình chiếu trực giao của $w = (-2;-8;13)$ lên $V$.

**Hướng dẫn**

a) Khoảng cách giữa 2 véctơ $v_2$ và $v_3$ là:

$$d(v_2,v_3) = \| v_3 - v_2 \| = \| (m+2;\ 4-m;\ 2) \|$$
$$= \sqrt{(m+2)^2 + 2(4-m)^2 + 12} = \sqrt{3m_2 - 12m + 48}$$
$$= \sqrt{3(m-2)^2 + 36} \geq 6\ \ \forall m \in \mathbb{R}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 2$.

Vậy $m = 2$ thì khoảng cách giữa $v_2$ và $v_3$ đạt GTNN bằng 6.

b) Với $m = 2$ thì $V = span\left\{v_1 = (2;\ -3;\ -1);\ v_2 = (0;\ 2;\ 1);\ v_3 = (4;\ 4;\ 3)\right\}$

Gọi A là ma trận tọa độ của $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3-2H_1\to H_3} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3-5H_2\to H_3} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ V có 1 cơ sở là $B = \left\{b_1 = (2;-3;-1);\ b_2 = (0;\ 2;\ 1)\right\}$

Trực chuẩn hóa cơ sở $B$ bằng thuật toán Gram - Schmidt:

$u_1 = b_1 = (2;-3;-1)$

$$u_2 = b_2 - \frac{\langle b_2;\ u_1\rangle}{\| u_1 \|^2}\, u_1 = (0;\ 2;\ 1) - \frac{-3}{5}(2;-3;-1) = \left(\frac{6}{5};\ \frac{1}{5};\ \frac{2}{5}\right)$$

Chuẩn hóa các véctơ $u_1;\ u_2;\ u_3$ thu được:

$$u_1' = \frac{u_1}{\| u_1 \|} = \frac{1}{5}\,(2;-3;-1)$$

$$u_2' = \frac{u_2}{\| u_2 \|} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\,(6;\ 1;\ 2)$$

$\Rightarrow$ V có 1 cơ sở trực chuẩn là $U = \left\{u_1' = \frac{1}{5}\,(2;-3;-1);\ u_2' = \frac{1}{5\sqrt{2}}\,(6;\ 1;\ 2)\right\}$

Gọi $w'$ là hình chiếu trực giao của $w$ lên không gian V, khi đó ta có:

$$\begin{aligned}w' &= \langle w,\ u_1'\rangle .\ u_1' \ + \ \langle w,\ u_2'\rangle .\ u_2' \ + \ \langle w,\ u_3'\rangle .\ u_3' \\ &= \left(\frac{2}{5};\ \frac{-3}{5};\ \frac{-1}{5}\right) + (6;\ 1;\ 2) \\ &= \left(\frac{32}{5};\ \frac{2}{5};\ \frac{9}{5}\right)\end{aligned}$$

Vậy hình chiếu trực giao của $w$ lên không gian V là $w' = \left(\frac{32}{5};\ \frac{2}{5};\ \frac{9}{5}\right)$.

**Câu 6. [1đ]** Tìm cơ sở và số chiều không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 7x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 10x_1 + 12x_2 - 5x_3 - 5x_4 &= 0 \end{cases}$$

**<u>Hướng dẫn</u>**

Xét ma trận hệ số $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ 7 & 7 & -3 & -4 \\ 10 & 12 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_4-7H_1\to H_4,\ H_5-10H_1\to H_5]{H_2-3H_1\to H_2,\ H_3-4H_1\to H_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & -6 & -5 & 5 \\ 0 & -7 & -10 & 10 \\ 0 & -8 & -15 & 15 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[H_4-7H_2\to H_4,\ H_5-8H_2\to H_5]{H_3-6H_2\to H_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 25 & -25 \\ 0 & 0 & 25 & -25 \\ 0 & 0 & 25 & -25 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_5-H_3\to H_5]{H_4-H_3\to H_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 25 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Do $r(A) = 3 < 4 =$ số ẩn $\Rightarrow$ Hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -x_2 - 5x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 25x_3 - 25x_4 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = t \\ x_4 = t \\ x_2 = 0 \\ x_1 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Ta được tập nghiệm của hệ: $S = \left\{ x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = t(1,0,1,1) \ \middle|\ t \in \mathbb{R} \right\}$

Vậy $\dim S = 1$ và 1 cơ sở của $S$ là $\left\{(1,0,1,1)\right\}$.

**Câu 7. [1đ]** Cho 3 số phức $z_1,\ z_2,\ z_3$ và : $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1 \end{cases}$. Tính $T = \left| z_1^{2024} + z_2^{2024} + z_3^{2024} \right|$.

**<u>Hướng dẫn</u>**

Vì $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_2}{z_3}\right| = \left|\frac{z_3}{z_1}\right| = 1$ .

Đặt $\frac{z_1}{z_2} = \cos x + i\sin x,\ \frac{z_2}{z_3} = \cos y + i\sin y$

Suy ra $\frac{z_3}{z_1} = \frac{z_3}{z_2}.\frac{z_2}{z_1} = \cos(-x-y) + i\sin(-x-y)$

Mà $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1$ nên: $\begin{cases}\cos x+\cos y+\cos(-x-y)=1\\ \sin x+\sin y+\sin(-x-y)=0\end{cases}$. Ta có:

$$0=\sin x+\sin y+\sin(-x-y)=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)=4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}$$

Suy ra $x=k2\pi$ hoặc $y=k2\pi$ hoặc $x+y=k2\pi$
Do đó hai trong ba số $z_1$, $z_2$, $z_3$ bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử $z_1=z_2$.

Khi đó $\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=0\Rightarrow\frac{z_1}{z_3}=-\frac{z_3}{z_1}\Rightarrow\left(\frac{z_3}{z_1}\right)^2=-1\Rightarrow z_3=\pm iz_1$

Do đó $\left|z_1^{2024}+z_2^{2024}+z_3^{2024}\right|=\left|z_1^{2024}+z_1^{2024}+(\pm iz_1)^{2024}\right|=3|z_1|^{2024}=3$

Tương tự với $z_2=z_3$ và $z_1=z_3$.

Vậy $T=3$.

## 7.10 Đáp án đề thi cuối kì nhóm ngành 1 - Học kỳ 2022.1

Video chữa chi tiết xem TẠI ĐÂY

**Câu 1 (1đ).** Giải phương trình sau trong trường số phức:

$$(z-3)^7+5(z-3)^2=0$$

**Hướng dẫn**

$$(z-3)^7+5(z-3)^2=0$$

Đặt $z-3=t$, phương trình đã cho trở thành:

$$t^7+5t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t^5=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t^5=5(\cos\pi+i\sin\pi) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\sqrt[5]{5}\left(\cos\dfrac{\pi+k2\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi+k2\pi}{5}\right) k=\overline{0,4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z-3=0 \\ z-3=\sqrt[5]{5}\left(\cos\dfrac{\pi+k2\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi+k2\pi}{5}\right) k=\overline{0,4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3 \\ z=3+\sqrt[5]{5}\left(\cos\dfrac{\pi+k2\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi+k2\pi}{5}\right) k=\overline{0,4} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $z=\left\{3;\ 3+\sqrt[5]{5}\left(\cos\dfrac{\pi+k2\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi+k2\pi}{5}\right), k=\overline{0,4}\right\}$.

**Nhận xét:** Với dạng bài giải phương trình số phức như trên các bạn làm cần lưu ý:
+ Về hướng làm: Đây không phải là một bài toán khó, chúng ta sẽ tiến hành phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0 chúng ta có thể chia bài toán thành các trường hợp nhỏ hơn để tìm được $z$.
+ Trong quá trình biến đổi, các bạn có thể làm đơn giản biểu thức bằng cách đặt $z-3=t$. Tuy nhiên đến đây, nhiều bạn mắc sai sót sau khi đặt ẩn giải phương trình xong không thay lại để tìm nghiệm $z$. Vì vậy các bạn cần để ý điểm này.
+ Ngoài ra trong bài này, các bạn cần biết cách chuyển đổi giữa sô phức dạng lượng giác và dạng chính tắc (nội dung này rất quan trọng trong hầu hết các bài tập liên quan tới số phức) và cần thuộc công thức lũy thừa và khai căn số phức.

**Câu 2 (1đ).** Tìm tất cả các số thực $m$ để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} mx_1+x_2+(m+1)x_3=0, \\ x_1+(m+1)x_2+mx_3=0, \\ (m+1)x_1+mx_2+x_3=0. \end{cases}$$

**Hướng dẫn**

Xét ma trận hệ số: $A=\begin{pmatrix} m & 1 & m+1 \\ 1 & m+1 & m \\ m+1 & m & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3-H_1\leftrightarrow H_3} \begin{pmatrix} m & 1 & m+1 \\ 1 & m+1 & m \\ 1 & m-1 & -m \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{H_3-H_2\leftrightarrow H_3}\begin{pmatrix} m & 1 & m+1 \\ 1 & m+1 & m \\ 0 & -2 & -2m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A)=(-2).(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & m \end{vmatrix}+(-2m).(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m+1 \end{vmatrix}=-2m^3-2$$

Hệ phương trình có nghiệm không tầm thường:

$\Leftrightarrow \det(A)=0 \Leftrightarrow -2m^3-2=0 \Leftrightarrow m=-1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm không tầm thường khi $m=-1$.

**Nhận xét:** Ở bài này để có được lời giải hiệu quả các bạn lưu ý:
+ Thứ nhất, cần nhận diện được dạng của phương trình đã cho. Đây là hệ vuông tuyến tính thuần nhất.
+ Thứ hai, phân biệt thế nào là nghiệm tầm thường và không tầm thường. Nghiệm tầm thường của hệ $n$ phương trình $n$ ẩn có dạng $(0,0,0,0...,0)$ tức là tập nghiệm toàn là số 0. Còn nghiệm không tầm thường là nghiệm phụ thuộc vào ít nhất 1 tham số.
+ Từ đây, điều kiện để hệ đã cho có nghiệm không tầm thường sẽ là $\det(A)=0$. Nếu không nhớ được điều kiện này, nhiều bạn sẽ đi biện luận hạng của ma trận bổ sung theo định lí Kronecker-Capelli khiến bài toán trở nên rắc rối và lãng phí thời gian không cần thiết.

**Câu 3 (1đ).** Trong $P_2[x]$, không gian vectơ tất cả các đa thức với hệ số thực bậc không quá 2, cho các vectơ: $v_1=1+3x+x^2; v_2=2+6x+2x^2; v_3=2+5x+x^2; v_4=-1+2x^2$.
Xác định một cơ sở và số chiều của không gian con $W=\operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ trong $P_2[x]$.

**Hướng dẫn**

Xét ma trận tọa độ theo hàng:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow[H_4+H_1\to H_4]{H_2-2H1\to H_2|H_3-2H_1\to H_3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow{H_4\leftrightarrow H_2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_3+\frac{1}{3}H_2\to H_3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Từ đó suy ra $r(A)=2$ và một cơ sở của nó là: $S=\left\{1+3x+x^2,\ 3x+3x^2\right\}$.

**Nhận xét:** Một số lưu ý khi gặp dạng bài tìm số chiều và cơ sở của một không gian vecto con sinh bởi hệ vecto là:
+ Các bạn dễ nhầm lẫn khi không nắm chắc mình cần xét ma trận của hệ vecto theo hàng hay theo cột.
+ Hay mắc lỗi trong quá trình biến đổi sơ cấp và xác định tọa độ của vecto theo cơ sở.
+ Ở bài này vecto có dạng là $a+bx+cx^2$ thì tọa độ tương ứng trong cơ sở chính tắc là $[a,b,c]^T$. Đây là dạng bài duy nhất mà ma trận tọa độ của các vecto BẮT BUỘC phải xét theo hàng, mọi biến đổi sơ cấp cũng chỉ được thực hiện theo hàng thôi. Các bạn chú ý kẻo sai nhé.

**Câu 4 (3đ).** Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ biết rằng

$$f(1,0,0)=(1,2,4); f(1,1,0)=(2,3,7) \text{ và } f(1,1,1)=(1,4,6).$$

a) Viết ma trận của $f$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Tìm tất cả các số thực $m,n$ để vectơ $v=(m,n,1)$ thuộc $\operatorname{Ker}(f)$.
c) Với tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{R}^3$, tìm hình chiếu trực giao của vectơ $u=(2,3,4)$ lên $\operatorname{Ker}(f)$.

**Hướng dẫn**

a) Theo bài ra:

$$\begin{cases} f(1,0,0)=(1,2,4) \\ f(1,1,0)=f(1,0,0)+f(0,1,0)=(2,3,7) \\ f(1,1,1)=f(1,0,0)+f(0,1,0)+f(0,0,1)=(1,4,6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1,0,0)=(1,2,4) \\ f(0,1,0)=(1,1,3) \\ f(0,0,1)=(-1,1,-1) \end{cases}$$

Suy ra ma trận của $f$ trong cơ sở chính tắc là:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

**Nhận xét:** Vấn đề lớn nhất của các bạn khi gặp đề bài này là việc nhầm lẫn khi xác định tọa độ của các vecto theo một cơ sở và chuyển đổi tọa độ của vecto giữa các cơ sở.
Các bạn lưu ý đây là một dạng bài rất điển hình, hầu như có mặt trong đề thi tất cả các năm. Để "xử đẹp" bài toán này, các bạn cần nắm rõ ma trận của ánh xạ tuyến tính đối với cặp cơ sở nguồn và đích được định nghĩa và xác định như thế nào, cùng với đó ghi nhớ công thức đổi tọa độ theo cơ sở đã học ở chương 3.

b) Từ ma trận của $f$ trong cơ sở chính tắc suy ra

$f(x,y,z)=(x+y-z,\ 2x+y+z,\ 4x+3y-z)$.

$\operatorname{Ker} f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(x,y,z)=0\right\}$

Từ đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 4x+3y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -y+3z=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

Suy ra nghiệm của hệ phương trình có dạng $(x,y,z)=(-2t,\ 3t,\ t)=t(-2,\ 3,\ 1)$, với $t\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\operatorname{Ker} f=\left\{ t(-2,3,1) \;\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}$.

Để $(m,n,1)\in\operatorname{Ker} f$ thì $(m,n,1)\in span\{(-2,\ 3,\ 1)\}\Rightarrow(m,n,1)=t(-2,\ 3,\ 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=-2t \\ n=3t \\ 1=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-2 \\ n=3 \end{cases}$$

Vậy $m=-2$ và $n=3$ thì véctơ $v\in\operatorname{Ker} f$.

**Nhận xét:** Với câu b, chắc chắn các bạn phải nắm được định nghĩa của $\operatorname{Ker} f$. Bài toán tìm $\operatorname{Ker} f$ sau đó sẽ được quy về bài toán tìm không gian nghiệm của một hệ thuần nhất. Đến đây, các bạn tìm các vecto cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ và vecto đã cho muốn thuộc $\operatorname{Ker} f$ thì phải là được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vecto trong cơ sở rồi.

c) Ta trực chuẩn hóa cơ sở $\{(-2,3,1)\}$ của $\ker f$ thành $\left\{v=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(-2,3,1)\right\}$.

Suy ra hình chiếu trực giao của $u$ lên $\ker f$ là:

$$\langle v,u\rangle.v=\left\langle\frac{1}{\sqrt{14}}(-2,3,1),\ (2,3,4)\right\rangle.\frac{1}{\sqrt{14}}(-2,3,1)=\frac{9}{14}(-2,3,1)=\left(\frac{-9}{7},\frac{27}{14},\frac{9}{14}\right).$$

**Nhận xét:** Ở bài này các bạn cần lưu ý đến tích vô hướng đề bài cho có ở dạng thông thường không. Vì đa phần các bạn có thói quen tính toán bằng tích vô hướng chính tắc nên chỉ cần đề bài cho một tích vô hướng không chính tắc thì các bạn rất dễ mắc lỗi khi tính toán. Ngoài ra muốn tìm hình chiếu thì trước đó chúng ta còn cần có cơ sở trực chuẩn nữa, đừng quên bước trực chuẩn hóa cơ sở. Các bạn để ý những điều này để tránh gặp sai sót nhé.

**Câu 5 (2đ).** Trong hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho mặt bậc hai có phương trình là:

$$x^2+z^2-2xy+2yz-4y=3.$$

a) Viết phương trình trên dưới dạng ma trận và tìm tất cả các giá trị riêng của ma trận đối xứng tương ứng với dạng toàn phương xuất hiện trong phương trình.
b) Đưa mặt bậc hai trên về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao và tịnh tiến.

**Hướng dẫn**

a) Ta có: $x^2+z^2-2xy+2yz-4y=3$

$\Rightarrow (x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+(0\ \ -4\ \ 0)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}-3=0$

Đặt $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Ta có $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ -1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2$

Phương trình đặc trưng $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2=0$

$\Leftrightarrow \lambda=1 \vee \lambda=2 \vee \lambda=-1.$

Vậy ma trận $A$ có tất cả 3 trị riêng: $\lambda=\{1,\ 2,\ -1\}$.

b)

+) $\lambda_1=1 \Rightarrow (A-I)X=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-x_2 &=0\\ -x_1-x_2+x_3 &=0\\ x_2 &=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=t\\ x_2=0\\ x_3=t\end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow X_1=\begin{bmatrix}t\\ 0\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_1=1$.

Trực chuẩn hoá $v_1$, ta được: $u_1=\dfrac{v_1}{||v_1||}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

+) $\lambda_2=2 \Rightarrow (A-2I)X=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-x_1-x_2 &=0\\ -x_1-2x_2+x_3 &=0\\ x_2-x_3 &=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-t\\ x_2=t\\ x_3=t\end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow X_2=\begin{bmatrix}-t\\ t\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow v_2=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_2=2$.

Trực chuẩn hoá $v_2$, ta được: $u_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

+) $\lambda_3 = -1 \Rightarrow (A+I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ là một véctơ riêng ứng với $\lambda_3 = -1$.

Trực chuẩn hoá $v_3$, ta được: $u_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

Thực hiện phép đổi tọa độ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$. Khi đó phương trình mặt bậc hai có dạng:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i^2 + (0 \ \ -4 \ \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow X_1^2 + 2X_2^2 - X_3^2 - \frac{4}{\sqrt{3}} X_2 - \frac{8}{\sqrt{6}} X_3 - 3 = 0$$

Đặt: $\begin{cases} X = X_1 \\ Y = X_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ Z = X_3 + \frac{4}{\sqrt{6}} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt bậc hai trở thành:$X^2 + 2Y^2 - Z^2 = 1$

$\Rightarrow$ Mặt Hyperboloid 1 tầng.

**Nhận xét:** Ở dạng bài này các bạn cần nắm chắc phương pháp chéo hóa trực giao cũng như cần tính toán cẩn thận vì bài toán khá nhiều bước. Sau khi đưa mặt bậc 2 về dạng chính tắc các bạn cần phải nhớ dạng tổng quát của các mặt thông dụng để kết luận nhé.

iết rằng

$$3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = E_3,$$

trong đó $E_3$ là ma trận đợn vị cấp 3.

**Hướng dẫn**

$$3\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&-2&1\\1&2&3\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}-2&0&2\\0&1&2\\-1&1&0\end{bmatrix}^T+\begin{bmatrix}0&-2&-3\\-3&-3&1\\0&0&2\end{bmatrix}=E_3$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}3&-3&6\\0&-6&3\\3&6&9\end{bmatrix}\text{X}\begin{bmatrix}-2&0&-1\\0&1&1\\2&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}3&-3&6\\0&-6&3\\3&6&9\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&-1\\0&1&1\\2&2&0\end{bmatrix}^{-1}$$

Đặt $A=\begin{bmatrix}3&-3&6\\0&-6&3\\3&6&9\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&-1\\0&0&-1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}-2&0&-1\\0&1&1\\2&2&0\end{bmatrix}$

Nhận xét: $\det A=-135\neq 0$ và $\det C=6\neq 0$

$\Rightarrow$ Tồn tại $A^{-1}$ và $C^{-1}$ thỏa mãn $\det A=\det A^{-1}$ và $\det C=\det C^{-1}$.

Khi đó $\det X=\dfrac{1}{\det A}.\det B.\dfrac{1}{\det C}=\dfrac{-1}{405}$.

Vậy $\det X=\dfrac{-1}{405}$.

**Nhận xét:** Dạng bài này các bạn cần xác định được ma trận nghịch đảo nhân thêm bên trái hay bên phải. Và nhớ tính chất của định thức $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$.

**Câu 7 (1đ).** Chứng minh rằng không tồn tại một ma trận thực $A$ vuông cấp 3 thỏa mãn $A^6+5E=0$, trong đó $E,0$ lần lượt là ma trận đơn vị và ma trận không có cùng cấp 3.

**Hướng dẫn**

Ta có: $A^6+5E=0\Leftrightarrow A^6=-5E$

$\Leftrightarrow \det(A^6)=\det(-5E)\Leftrightarrow \det(A)^6=(-5)^3=-125$

Do $A$ là ma trận thực vuông cấp 3 nên $\det(A)\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \nexists \det(A)^6=-125$

$\Rightarrow$ không thể tồn tại $A$ thoả mãn $A^6+5E=0$.

**Nhận xét:** Bài toán này các bạn cần quan sát xem đề cho ma trận $A$ có tính chất gì. Nếu là ma trận phức thì sẽ khác đó nhé.

## 7.11 Đáp án đề thi cuối kì nhóm ngành 2 - Học kỳ 2022.1

Video chữa chi tiết xem TẠI ĐÂY

**Câu 1 (1đ).** Tìm tất cả các số phức $z$ thỏa mãn: $z^5 = (\sqrt{3}-i)^{15}$.

**Hướng dẫn**

Ta có $z^5 = (\sqrt{3}-i)^{15} = 2^{15}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)^{15} = 2^{15}\left(\cos\dfrac{-\pi}{6}+i\sin\dfrac{-\pi}{6}\right)^{15}$

$$= 2^{15}\left(\cos\frac{-15\pi}{6}+i\sin\frac{-15\pi}{6}\right) = 2^{15}\left(\cos\frac{-5\pi}{2}+i\sin\frac{-5\pi}{2}\right).$$

Suy ra $z = 2^3\left(\cos\dfrac{\frac{-5\pi}{2}+k2\pi}{5}+i\sin\dfrac{\frac{-5\pi}{2}+k2\pi}{5}\right)$

$$= 2^3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{k2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{k2\pi}{5}\right)\right), \text{với } k \in \overline{0,\ 4}.$$

Vậy $z = 2^3\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{2}+\dfrac{k2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{2}+\dfrac{k2\pi}{5}\right)\right)$, với $k \in \overline{0,\ 4}$.

**Nhận xét:** Để giải dạng bài phương trình số phức này thì các bạn cần phải nhớ được phép tính lũy thừa và khai căn đối với số phức. Nhớ là 2 phép toán này áp dụng cho số phức ở dạng lượng giác nên nếu gặp các dạng bài như trên yêu cầu áp dụng 2 phép toán này mà số phức ban đầu chưa ở dạng lượng giác thì chúng ta đưa về dạng lượng giác rồi tiến hành tính như ở bài trên.

**Câu 2 (1đ).** Tìm tất cả số thực $m$ để ma trận sau có hạng bằng 2:



$$A = \begin{pmatrix} -1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 0 & m+2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Hướng dẫn**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 0 & m+2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2+H_1\to H_2} \begin{pmatrix} -1 & m & 1 \\ 0 & m+2 & m+1 \\ 0 & m+2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3-H_2\to H_3} \begin{pmatrix} -1 & m & 1 \\ 0 & m+2 & m+1 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$$

Trong ma trận xét $H_1$ có $-1 \neq 1$ và $H_2$ có $m+2 \neq m+1$ với mọi $m \in \mathbb{R}$ nên $r(A) \geq 2$.

Khi đó để $r(A) = 2$ thì $\det A = 0$.

$\Rightarrow -(m+2)(1-m) = 0 \Leftrightarrow m = -2$ hoặc $m = 1$.

Vậy $m = -2$ hoặc $m = 1$ thì $r(A) = 2$.

**Chú ý:** Ta cũng có thể dùng cách biện luận hạng như thông thường.

**Nhận xét:** Khi làm theo cách biện luận hạng chúng ta hết sức lưu ý tránh để sót trường hợp. Đặc biệt là khi đưa về ma trận bậc thang có có những hàng toàn ẩn như trên. Thông thường các bạn sẽ bị thiếu mất trường hợp $m = -2$ tại nghĩ rằng chỉ cần có 2 hàng khác 0 như bình thường là được. Nhưng với giá trị $m = -2$ thì hàng 2 và 3 có thể biến đổi tiếp để 1 trong 2 hàng về hàng gồm toàn 0. Để không bị sót trường hợp thì các bạn nên thử với tất cả giá trị của m để 1 hàng về toàn 0 hoặc giá trị để ma trận thu được không phải là ma trận bậc thang nữa.

**Câu 3 (1đ).** Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, chứng minh rằng $B = \{v_1 = (-1;2;1), v_2 = (1;3;2), v_3 = (6;1;1)\}$ là một cơ sở. Tìm tọa độ của $u = (25;12;9)$ đối với $B$.

**Hướng dẫn**

+) Xét ma trận tọa độ của hệ vecto $B$ đối với cơ sở chính tắc $E$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có: $\det A = (-1)(3.1-2.1) - 1.(2.1-1.1) + 6.(2.2-3.1) = 4 \neq 0$

Suy ra $r(A) = r(B) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ nên B là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

+) Tìm tọa độ:

**Cách 1:** Tìm trực tiếp:

Xét phương trình $u = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$

$\Leftrightarrow k_1(-1;2;1) + k_2(1;3;2) + k_3(6;1;1) = (25;12;9)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -k_1 + k_2 + 6k_3 & = 25 \\ 2k_1 + 3k_2 + k_3 & = 12 \\ k_1 + 2k_2 + k_3 & = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tọa độ của $u$ đối với cơ sở $B$ là $[u]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

**Cách 2:** Dùng công thức đổi tọa độ:

Gọi $E = \left\{ e_1 = (1,0,0);\ e_2 = (0,1,0);\ e_3 = (0,0,1) \right\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, khi đó:

$v_1 = (-1;2;1) = -1.e_1 + 2.e_2 + 1.e_3 \Rightarrow [v_1]_E = [-1 \quad 2 \quad 1]^T$

$v_2 = (1;3;2) = 1.e_1 + 3.e_2 + 2.e_3 \Rightarrow [v_2]_E = [1 \quad 3 \quad 2]^T$

$v_3 = (6;1;1) = 6.e_1 + 1.e_2 + 1.e_3 \Rightarrow [v_3]_E = [6 \quad 1 \quad 1]^T$

$\Rightarrow$ Ma trận chuyển cơ sở từ $E$ sang $B$ là $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Ta có $u = (25;12;9) = 25e_1 + 12e_2 + 9e_3 \Rightarrow [u]_E = [25 \quad 12 \quad 9]^T$

$$[u]_E = P[u]_B \Rightarrow [u]_B = P^{-1}[u]_E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 25 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vậy tọa độ của $u$ đối với cơ sở $B$ là $[u]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

**Nhận xét:** Có một tính chất để chứng minh một hệ vecto là cơ sở của không gian vecto rất hay dùng là: Chỉ cần hệ độc lập tuyến tính và có số vecto bằng số chiều của không gian thì chúng ta có thể kết luận hệ vecto là một cơ sở của không gian rồi. Tiếp đến ý tìm tọa độ thì các bạn lựa chọn cách phù hợp với mình, nếu làm theo ma trận thì đừng nhầm lẫn giữa ma trận hàng và cột. Ma trận tọa độ chúng ta dùng ở đây viết theo cột nha.

**Câu 4 (3đ).** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x]$ có ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ đối với cơ sở chinh tắc $E = \{1, x, x^2\}$.

a) Xác định $f(1-x)$ và $f^2(1-x)$, ở đó $f^2 = f \circ f$.
b) Tìm một cơ sở của $\mathbb{P}_2[x]$ để ma trận của $f$ đối với cơ sở đó có dạng chéo. Viết ma trận chéo đó.

**Hướng dẫn**

a)

Vì $A$ là ma trận của cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2\}$ nên:

$$\begin{cases} f(1) &= 1+4x+2x^2 \\ f(x) &= 1-2x^2 \\ f(x^2) &= 1+2x \end{cases}$$

Sử dụng tính chất ánh xạ tuyến tính, suy ra $f(1-x) = f(1) - f(x) = 4x + 4x^2$.

$$\begin{aligned} f^2(1-x) &= f(f(1-x)) = f(4x+4x^2) = 4f(x) + 4f(x^2) \\ &= 4(1-2x^2) + 4(1+2x) = 8 + 8x - 8x^2. \end{aligned}$$

b)

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 4 & -\lambda & 2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda.$$

Ta có $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = 0 \vee \lambda = 2$, đây chính là 3 trị riêng của $f$.

- Với trị riêng $\lambda = -1$, xét phương trình: $(A+E).X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c &= 0 \\ 4a+b+2c &= 0 \\ 2a-2b+c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= t \\ b &= 0, \quad t \in \mathbb{R}. \\ c &= -2t \end{cases}$$

  Chọn $t = 1 \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ là 1 véctơ riêng của $A$ ứng với $\lambda = -1$.

  $\Rightarrow Y_1 = 1 - 2x^2$ là một véctơ riêng của $f$ ứng với $\lambda = -1$.

- Với trị riêng $\lambda = 0$, xét phương trình: $(A - 0.E).X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ 4a+2c &= 0 \\ 2a-2b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= t \\ b &= t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ c &= -2t \end{cases}$$

  Chọn $t = 1 \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ là 1 véctơ riêng của $A$ ứng với $\lambda = 0$.

  $\Rightarrow Y_2 = 1 + x - 2x^2$ là một véctơ riêng của $f$ ứng với $\lambda = 0$.

- Với trị riêng $\lambda = 2$, xét phương trình: $(A - 2E).X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b+c &= 0 \\ 4a-2b+2c &= 0 \\ 2a-2b-2c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 2t \\ b &= 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ c &= -t \end{cases}$$

  Chọn $t = 1 \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ là 1 véctơ riêng của $A$ ứng với $\lambda = 2$.

  $\Rightarrow Y_3 = 2 + 3x - x^2$ là một véctơ riêng của $f$ ứng với $\lambda = 2$.

Suy ra 1 cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của $f$ đối với cơ sở đó có dạng chéo là $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$.

Ma trận chéo khi đó là $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

**Nhận xét:** Ở bài này ý a) yêu cầu chúng ta nắm được tính chất cơ bản của ánh xạ tuyến tính $\left(f(c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n) = c_1f(v_1) + c_2f(v_2) + \ldots + c_nf(v_n)\right)$, ma trận một AXTT đối với cơ sở và vận dụng một cách linh hoạt. Ý b) yêu cầu chéo hóa ma trận, các bạn chú ý tính toán cẩn thẩn ngay từ bước tính trị riêng tránh trường hợp sai ngay từ đầu.

**Câu 5 (3đ).** Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, cho các vectơ

$$v_1 = (0;-1;1), v_2 = (1;0;1), v_3 = (2;-1;3)$$

và không gian con $W = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

a) Xác định góc giữa hai vectơ $v_1$ và $v_2$.
b) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con $W$.
c) Tìm hình chiếu trực giao của $v = (3;-4;1)$ lên $W$.

**Hướng dẫn**

a)

Ta có: $||v_1|| = \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} = \sqrt{2}$, $||v_2|| = \sqrt{\langle v_2, v_2\rangle} = \sqrt{2}$

Gọi $\varphi$ là góc giữa 2 véctơ $v_1$ và $v_2$. Ta có:

$$\cos\varphi = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{||v_1||.||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Vậy góc giữa 2 véctơ $v_1$ và $v_2$ là $\varphi = \frac{\pi}{3}$

b)

Đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, ma trận tọa độ hàng của hệ véc tơ $\{v_1, v_2, v_3\}$ là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H1 \leftrightarrow H2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H3-2H1-H2 \to H3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = 2 = \dim(W)$ và $W$ có 1 cơ sở gồm 2 véctơ là $V = \left\{v_1 = (0,-1,1),\ v_2 = (1,0,1)\right\}$

c)

Trực chuẩn hóa cơ sở $V = \{v_1; v_2\}$ ta thu được cơ sở trực chuẩn $U = \{u_1, u_2\}$

$$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\overline{u_2} = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle.u_1 = (1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}.\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$u_2 = \frac{\overline{u_2}}{||\overline{u_2}||} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$\Rightarrow W$ có 1 cơ sở trực chuẩn là: $U = \left\{u_1 = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ u_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$

Gọi $w$ là hình chiếu trực giao của véctơ $v$ lên $W$.

$$w = \langle v, u_1\rangle.u_1 + \langle v, u_2\rangle.u_2 = \frac{5}{\sqrt{2}}.\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = (1,-2,3)$$

Vậy hình chiếu trực giao của $v$ lên $W$ là $w = (1,-2,3)$

**Nhận xét:** Với bài toán yêu cầu tìm hình chiếu trực giao của 1 vecto lên một không gian thì trước tiên chúng ta phải trực chuẩn hóa cơ sở của không gian ấy (nếu cơ sở chưa là cơ sở trực chuẩn) rồi ta mới áp dụng công thức hình chiếu.

**Câu 6 (1đ).** Cho $A$ là ma trận vuông cấp 20, thỏa mãn $A^{23} = 0$. Chứng minh rằng ma trận $(A + 2023E)$ không suy biến, trong đó $0, E$ lần lượt là ma trận không và ma trận đơn vị cùng cấp với $A$.

**Hướng dẫn**

Giả sử: $\det(A+2023E)=0 \Rightarrow \lambda=-2023$ là giá trị riêng của $A$.

$\Rightarrow \lambda^{23}=(-2023)^{23}$ là giá trị riêng của $A^{23}$.

$\Rightarrow$ Phương trình đặc trưng: $\det(A^{23}+2023^{23}E)=0$.

Ta có: $A^{23}=0 \ \Rightarrow A^{23}+2023^{23}E=2023^{23}E \ \Rightarrow \ \det(A^{23}+2023^{23}E)=2023^{23}$.

$\Rightarrow$ Điều giả sử là sai $\Rightarrow$ $A+2023E$ không là ma trận suy biến.

**Nhận xét:** Để làm được bài này thì trước tiên chúng ta cần hiểu ma trận không suy biến là gì. Ma trận $A$ được gọi là không suy biến nếu $detA \neq 0$. Tiếp theo chúng ta chứng minh bằng phản chứng (thông thường mấy bài chứng minh det rất hay dùng phản chứng).

# Tài liệu tham khảo


[1] Nguyễn Đình Trí - Giáo trình Toán cao cấp, nhà xuất bản giáo dục.

[2] Bùi Xuân Diệu - Bài giảng Đại số tuyến tính, Đại học Bách khoa Hà Nội.

[3] Đề cương môn đại số, Khoa Toán ứng dụng và Tin học, Đại học Bách khoa Hà Nội.

[4] Lê Tuấn Hoa - Đại số tuyến tính qua các ví dụ & bài tập, nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.