

ĐỀ MINH HOẠ KIỂM TRA ĐỊNH KÌ Học phần: GIẢI TÍCH 1 Mã học phần: MI1111 Thời gian: 30 phút		Họ và tên sinh viên: MSSV: STT Mã lớp học:
Họ, tên và chữ ký cán bộ coi thi	Họ, tên và chữ ký cán bộ chấm thi	Tổng điểm

Mã đề: 26937 (Đề gồm 15 câu)

Chú ý: *Thí sinh không được phép sử dụng tài liệu.*

Trắc nghiệm một đáp án đúng

Câu hỏi 1. Tính khai triển Maclaurin đến cấp 4 của $\sin(2x)$.

☐ $x - \frac{2x^3}{3!} + o(x^4)$

☒ $2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4)$

☐ $x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4)$

☐ $2x - \frac{2x^3}{3!} + o(x^4)$

Câu hỏi 2. Hàm nào sau đây có nhiều hơn 2 điểm gián đoạn?

☐ $\frac{e^x}{x}$
☒ $\frac{x}{\sin x}$

☐ $\frac{\sin x}{x^2 + x}$
☐ $\frac{x}{e^x}$

Câu hỏi 3. Vô cùng bé nào sau đây tương đương với $\sin(x^2 + 2x)$ khi $x \rightarrow 0$?

☐ $x \tan(x + 2)$

☒ $\tan(3x^2 + 2x)$

☐ $\tan(x + 2x^2)$

☐ $x \sin(x + 2)$

Câu hỏi 4. Hàm số nào sau đây xác định trên đoạn $[1, 3]$?

☐ $\sqrt{-x^2 + 3x - 2}$

☐ $\ln\left(\frac{4-x}{x-5}\right)$

☐ $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$

☒ $\sqrt{\frac{x-1}{4-x}}$

Câu hỏi 5. Tính vi phân của $(x^2 + 2)^x$.

☐ $(2x(x^2 + 2)^x + x(x^2 + 2)^{x-1})dx$

☒ $\left(\ln(x^2 + 2) + \frac{2x^2}{x^2 + 2}\right)(x^2 + 2)^x dx$

☐ $x(x^2 + 2)^{x-1}dx$

☐ $x \ln(x^2 + 2)(x^2 + 2)^x dx$

Câu hỏi 6. Cặp giá trị $a, b \in \mathbb{R}$ nào sau đây thoả mãn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{ax} - \frac{1}{b \sin x}\right) = 0$?

☒ $a = -1, b = -1$

☐ $a = 1, b = \frac{1}{6}$

☐ $a = \frac{1}{6}, b = 1$

☐ $a = 0, b = 0$

Câu hỏi 7. Hàm nào sau đây là hàm chẵn?

☒ $\cos x$

☐ $\cos x + \sin 2x$

☐ $\sin 2x$

☐ $e^x - 1$

Câu hỏi 8. Hệ số của x^5 trong khai triển Maclaurin của $\sin(\sin x)$.

☐ $\frac{1}{12}$
☒ $\frac{1}{10}$

☐ $\frac{5}{6}$
☐ $\frac{1}{120}$

Trắc nghiệm nhiều đáp án đúng (sinh viên phải chọn được tất cả các đáp án đúng)

Câu hỏi 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x^2 + 1, & x < 0. \end{cases}$ Xác định tất cả các phát biểu đúng trong các phát biểu dưới đây.

☐ Hàm $f(x)$ liên tục trái tại $x = 0$

☐ $f'(0) = 0$

☒ Hàm $f(x)$ có đạo hàm phải tại $x = 0$

☒ Hàm $f(x)$ liên tục phải tại $x = 0$

☐ $f'(x) = 2x \forall x \in \mathbb{R}$

☐ Hàm $f(x)$ có đạo hàm trái tại $x = 0$

Câu hỏi 10. Tìm tất cả các biểu thức có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow 0$ trong các biểu thức dưới đây.

☒ $\frac{\sin(2x + x^2)}{2x}$

☒ $\sqrt{1+x}$

☐ $\frac{\sin(2x + x^2)}{x^2}$

☒ $\frac{\tan x^2}{1 - \cos x}$

☐ $\frac{\tan x}{1 - \cos x}$

☒ $\frac{\ln(x+1)}{x(x+1)}$

Câu hỏi 11. Tìm tất cả các hàm mà hệ số của x^4 trong khai triển Maclaurin khác 0.

☒ $\cos(x^2) - 1$

☐ $\ln(x^3 + 1)$

☐ $\sin(4x)$

☐ $\sin(x^2)$

☒ $\cos 4x$

☒ $e^{2x} - 1$

Câu hỏi 12. Xác định tất cả tập con $D \subset \mathbb{R}$ trong các tập sau đây sao cho hàm $\ln(x+2)$ liên tục đều trên D .

☒ $D = [1, 2]$

☒ $D = [2, +\infty)$

☐ $D = (-2, +\infty)$

☐ $D = (-2, 1]$

☒ $D = [0, +\infty)$

☐ $D = (-\infty, -2)$

Hoàn thiện các tính toán và các phát biểu sau

Câu hỏi 13. Hàm $y = \sin x$ là hàm xác định trên ... và tuần hoàn với chu kỳ

Câu hỏi 14. Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{x-1}{(x+2)(x-4)}$ là

Câu hỏi 15. Sử dụng vi phân để tính gần đúng giá trị của $\sqrt[4]{e^{0.04} - 0.02^3}$.

$\sqrt[4]{e^{0.04} - 0.02^3} \approx \dots\dots\dots$

Câu hỏi 1. Tính khai triển Maclaurin đến cấp 4 của $\sin(2x)$.

☐ $x - \frac{2x^3}{3!} + o(x^4)$

☒ $2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4)$

☐ $x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4)$

☐ $2x - \frac{2x^3}{3!} + o(x^4)$

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \\ \Rightarrow \sin 2x &= 2x - \frac{8x^3}{3!} + o(x^4) = 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4)\end{aligned}$$

Câu hỏi 2. Hàm nào sau đây có nhiều hơn 2 điểm gián đoạn?

☐ $\frac{e^x}{x}$

☐ $\frac{\sin x}{x^2 + x}$

☒ $\frac{x}{\sin x}$

☐ $\frac{x}{e^x}$

+> $y = \frac{e^x}{x}$ gián đoạn tại $x = 0$

+> $y = \frac{\sin x}{x^2 + x}$ gián đoạn tại $x = 0$ và $x = -1$.

+> $y = \frac{x}{\sin x}$ gián đoạn tại $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

+> $y = \frac{x}{e^x}$ liên tục trên \mathbb{R}

Câu hỏi 3. Vô cùng bé nào sau đây tương đương với $\sin(x^2 + 2x)$ khi $x \rightarrow 0$?

☐ $x \tan(x + 2)$

☒ $\tan(3x^2 + 2x)$

☐ $\tan(x + 2x^2)$

☐ $x \sin(x + 2)$

$$\begin{aligned}+> \sin(x^2 + 2x) &\stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 + 2x \stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} 2x \\ +> \tan(3x^2 + 2x) &\stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} 3x^2 + 2x \stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} 2x\end{aligned}$$

Câu hỏi 4. Hàm số nào sau đây xác định trên đoạn $[1, 3]$?

☐ $\sqrt{-x^2 + 3x - 2}$

☐ $\ln\left(\frac{4-x}{x-5}\right)$

☐ $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$

☒ $\sqrt{\frac{x-1}{4-x}}$

+> $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} : D = [1; 2]$

+> $\ln\left(\frac{4-x}{x-5}\right) : D = (4; 5)$

+> $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}} : D = [1; 3)$

+> $\sqrt{\frac{x-1}{4-x}} : D = [1; 4)$

Câu hỏi 5. Tính vi phân của $(x^2 + 2)^x$.

☐ $(2x(x^2 + 2)^x + x(x^2 + 2)^{x-1})dx$

☒ $\left(\ln(x^2 + 2) + \frac{2x^2}{x^2 + 2}\right)(x^2 + 2)^x dx$

☐ $x(x^2 + 2)^{x-1}dx$

☐ $x \ln(x^2 + 2)(x^2 + 2)^x dx$

+> $y = (x^2 + 2)^x$

$\Rightarrow \ln y = x \ln(x^2 + 2)$

Vi phân 2 vế:

$d \ln y = d(x \ln(x^2 + 2))$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \left[\ln(x^2 + 2) + \frac{2x^2}{x^2 + 2} \right] dx$

$\Leftrightarrow dy = \left[\ln(x^2 + 2) + \frac{2x^2}{x^2 + 2} \right] (x^2 + 2)^x dx$

Câu hỏi 6. Cặp giá trị $a, b \in \mathbb{R}$ nào sau đây thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{ax} - \frac{1}{b \sin x} \right) = 0$?

☒ $a = -1, b = -1$

☐ $a = 1, b = \frac{1}{6}$

☐ $a = \frac{1}{6}, b = 1$

☐ $a = 0, b = 0$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{ax} - \frac{1}{b \sin x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b \sin x - ax}{abx \sin x}$$

$$b \sin x - ax = b \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right) - ax$$

$$= (b - a)x - b \cdot \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$abx \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ab \cdot x^2$$

$$\Rightarrow \text{Để } L = 0 \text{ thì } b - a = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

Câu hỏi 7. Hàm nào sau đây là hàm chẵn?

☒ $\cos x$ **Hàm chẵn**

☐ $\sin 2x$ **Hàm lẻ**

☐ $\cos x + \sin 2x$

☐ $e^x - 1$

Không chẵn, không lẻ

CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP

Câu hỏi 8. Hệ số của x^5 trong khai triển Maclaurin của $\sin(\sin x)$.

☐ $\frac{1}{12}$

☐ $\frac{5}{6}$

☒ $\frac{1}{10}$

☐ $\frac{1}{120}$

$$\Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin(\sin x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{5!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right)^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{6} \left(x^3 - \frac{x^5}{2} \right) + \frac{1}{120} x^5 + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)$$

Câu hỏi 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x^2 + 1, & x < 0. \end{cases}$ Xác định tất cả các phát biểu đúng trong các phát biểu dưới đây.

☐ Hàm $f(x)$ liên tục trái tại $x = 0$

☐ $f'(0) = 0$

☒ Hàm $f(x)$ có đạo hàm phải tại $x = 0$

☒ Hàm $f(x)$ liên tục phải tại $x = 0$

☐ $f'(x) = 2x \forall x \in \mathbb{R}$

☐ Hàm $f(x)$ có đạo hàm trái tại $x = 0$

$$\begin{aligned} +) f(0) &= 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 = f(0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x)$ liên tục phải tại $x = 0$.

$$\begin{aligned} +) f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0 \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x} = -\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x)$ có đạo hàm phải tại 0.

Câu hỏi 10. Tìm tất cả các biểu thức có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow 0$ trong các biểu thức dưới đây.

☒ $\frac{\sin(2x + x^2)}{2x}$

☒ $\sqrt{1+x}$

☐ $\frac{\sin(2x + x^2)}{x^2}$

☒ $\frac{\tan x^2}{1 - \cos x}$

☐ $\frac{\tan x}{1 - \cos x}$

☒ $\frac{\ln(x+1)}{x(x+1)}$

$$+) L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + x^2)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2}{2x} (\sin x \sim x)$$

$$+) L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} = 1$$

$$\rightarrow L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + x^2)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x + x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$$

$$\rightarrow L_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} \left(\tan x \sim_{x \rightarrow 0} x, 1 - \cos x \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} \right)$$

$$= 2$$

$$\rightarrow L_5 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1 - \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = +\infty$$

$$\rightarrow L_6 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + x} \left(\ln(x+1) \sim_{x \rightarrow 0} x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

Câu hỏi 11. Tìm tất cả các hàm mà hệ số của x^4 trong khai triển Maclaurin khác 0.

☒ $\cos(x^2) - 1$

☐ $\sin(x^2)$

CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP

☐ $\ln(x^3 + 1)$

☒ $\cos 4x$

☐ $\sin(4x)$

☒ $e^{2x} - 1$

$$\rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \cos(x^2) - 1 = -\frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + o(x^8)$$

$$\rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + o(x^9)$$

$$\rightarrow \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\Rightarrow \sin(4x) = 4x - \frac{32x^3}{3} + \frac{128x^5}{15} + o(x^5)$$

$$\Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^6)$$

$$\Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \cos 4x = 1 - 8x^2 + \frac{32x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow e^{2x} - 1 = 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$$

Câu hỏi 12. Xác định tất cả tập con $D \subset \mathbb{R}$ trong các tập sau đây sao cho hàm $\ln(x+2)$ liên tục đều trên D .

☒ $D = [1, 2]$

☐ $D = (-2, 1]$

☒ $D = [2, +\infty)$

☒ $D = [0, +\infty)$

☐ $D = (-2, +\infty)$

☐ $D = (-\infty, -2)$

Tập xác định: $D = (-2; +\infty)$

\Rightarrow Ta có: $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ c nằm giữa 0 và x

$\Rightarrow \ln(x) \leq x - 1 \quad \forall x > 0$

Xét trên $[1; +\infty)$ ($a > 0$)

$$\text{Có } |\ln(y) - \ln(x)| = \left| \ln\left(\frac{y}{x}\right) \right| \leq \left| \frac{y}{x} - 1 \right| \quad (y > x \geq 1)$$

$$\leq |y - x|$$

Chọn $\delta = \varepsilon$ khi đó:

$\forall x, y$ thỏa mãn $|x - y| < \delta$, khi đó $|\ln y - \ln x| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \ln x$ liên tục đều trên $[1; +\infty)$.

$\Rightarrow \ln(x+2)$ liên tục đều trên $[1; +\infty)$.

\Rightarrow Xét trên $(0; 1)$

Chọn $x_n = \frac{1}{n^2 + 2}$, $x_n \in (0; 1) \forall n \geq 2$

$y_n = \frac{1}{n}$, $y_n \in (0; 1) \forall n \geq 2$

$$\Rightarrow \ln(y_n) - \ln(x_n) = \ln\left(\frac{n^2 + 2}{n}\right)$$

$$= \ln\left(n + \frac{2}{n}\right)$$

Có $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [\ln(y_n) - \ln(x_n)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(n + \frac{2}{n}\right) = +\infty$$

$\Rightarrow \ln x$ không liên tục đều trên $(0; 1)$

$\Rightarrow \ln(x+2)$ không liên tục đều trên $(-2; -1)$

Câu hỏi 13. Hàm $y = \sin x$ là hàm xác định trên \mathbb{R} và tuần hoàn với chu kỳ 2π

Câu hỏi 14. Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{x-1}{(x+2)(x-4)}$ là

$$y = \frac{x-1}{(x+2)(x-4)} = \frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{2(x-4)}$$

$$\Rightarrow y^{(n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-4)^{n+1}}$$

Câu hỏi 15. Sử dụng vi phân để tính gần đúng giá trị của $\sqrt[4]{e^{0.04} - 0.02^3}$.

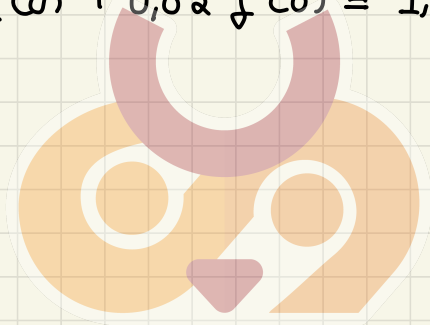
$$\sqrt[4]{e^{0.04} - 0.02^3} \approx \dots\dots\dots$$

Xét hàm $f(x) = \sqrt[4]{e^{2x} - x^3}$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2e^{2x} - 3x^2}{\sqrt[4]{(e^{2x} - x^3)^3}}$$

$$\Rightarrow f(0) = 1 \quad f'(0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{1}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(0,02) \approx f(0) + 0,02 f'(0) = 1,01$$



CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP