BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1. Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề $(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee r) \to (q \vee r)$. Mệnh đề đã cho có phải là hằng đúng không?

Giải

Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề đã cho:

p	q	r	$p \vee q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee r$	$(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee r)$	$q \vee r$	Mệnh đề
0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1

Từ bảng giá trị chân lý có mệnh đề đã cho luôn nhận giá trị 1.

Kết luận: Mệnh đề đã cho là một hằng đúng.

2. Lập bảng giá trị chân lý của mênh đề $[(p \leftrightarrow q) \oplus (\overline{p} \vee \overline{r})] \vee (q \wedge r)$. Mệnh đề đã cho có phải là hằng đúng hay không?

Giải

Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề đã cho:

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$\overline{p}$	$\overline{r}$	$\overline{p} \vee \overline{r}$	$(p \leftrightarrow q) \oplus (\overline{p} \vee \overline{r})$	$q \wedge r$	Mệnh đề
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1

Từ bảng giá trị chân lý có mệnh đề đã cho nhận giá trị cả 0 và 1.

Kết luận: Mệnh đề đã cho không phải là một hằng đúng.

3. Chứng minh mệnh đề sau là một hằng đúng $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$.

Giải

Cách 1: Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề đã cho:

p	q	r	$p \vee q$	$p \to r$	$q \to r$	$[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)]$	Mệnh đề
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Từ bảng giá trị chân lý có mệnh đề đã cho luôn nhận giá trị 1.

Kết luận: Mệnh đề đã cho là một hằng đúng.

Cách 2: Chứng minh bằng phản chứng:

Giả sử mệnh đề đã cho không phải là hằng đúng.

Khi đó tồn tại các giá trị của các mệnh đề p, q và r để $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r = 0$.

Suy ra $(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) = 1$ (1) và $r = 0$ (2).

Từ (1) có $p \vee q = 1$ (3), $p \to r = 1$ (4) và $q \to r = 1$ (5). Từ (2) và (4) có $p = 0$. Từ (2) và (5) có $q = 0$. Do đó $p \vee q = 0$. Điều này mâu thuẫn với (3).

Kết luận: Mệnh đề đã cho là một hằng đúng.

Cách 3: Chứng minh bằng biến đổi tương đương và các mệnh đề tương đương cơ bản:

Có các mệnh đề tương đương cơ bản:

$p \to q = \neg p \lor q$, $p \lor (q \land r) = (p \lor q) \land (p \lor r)$, $p \land (q \lor r) = (p \land q) \lor (p \land r)$, $p \lor 1 = 1$,

$\neg(p \land q) = \neg p \lor \neg q$, $\neg(p \lor q) = \neg p \land \neg q$, $p \lor \neg p = 1$, $p \land \neg p = 0$, $p \land 1 = p$, $p \lor 0 = p$.

Suy ra $p \to r = \neg p \lor r$, $q \to r = \neg q \lor r$.

Từ đó $[(p \lor q) \land (p \to r) \land (q \to r)] \to r = \neg[(p \lor q) \land (\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r)] \lor r = [\neg(p \lor q) \lor \neg(\neg p \lor r) \lor \neg(\neg q \lor r)] \lor r = \neg(p \lor q) \lor (p \land \neg r) \lor (q \land \neg r) \lor r$.

Có $(q \land \neg r) \lor r = (q \lor r) \land (\neg r \lor r) = (q \lor r)$.

Có $(p \land \neg r) \lor (q \lor r) = [(q \lor r) \lor p] \land [(q \lor r) \lor \neg r] = [(p \lor q) \lor r] \land [q \lor (r \lor \neg r)] = (p \lor q) \lor r$.

Có $\neg(p \lor q) \lor (p \land \neg r) \lor (q \land \neg r) \lor r = \neg(p \lor q) \lor (p \lor q) \lor r = 1$

Kết luận: Mệnh đề đã cho là một hằng đúng.

4. Chứng minh: $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Giải

Cách 1: Lập bảng giá trị chân lý các mệnh đề ở hai vế của đẳng thức mệnh đề đã cho:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Từ bảng giá trị chân lý có $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. Đó là điều cần chứng minh.

Cách 2: Chứng minh bằng phản chứng:

Giả sử có $p \wedge (q \vee r) \neq (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. Khi đó tồn tại các giá trị của các mệnh đề p, q và r để có các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: $p \wedge (q \vee r) = 1$ và $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) = 0$. Khi đó có $p = 1$ (1), $q \vee r = 1$ (2), $p \wedge q = 0$ (3), $p \wedge r = 0$ (4).

Từ (1) và (3) có $q = 0$. Từ (1) và (4) có $r = 0$. Suy ra $q \vee r = 0$. Điều này mâu thuẫn với (2).

Trường hợp 2: $p \wedge (q \vee r) = 0$ (1) và $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) = 1$ (2).

Từ (2), nếu $p \wedge q = 1$ thì $p = 1$ và $q = 1$. Khi đó có $p \wedge (q \vee r) = 1$ là trái với (1).

Nếu $p \wedge r = 1$ thì $p = 1$ và $r = 1$. Khi đó có $p \wedge (q \vee r) = 1$ là trái với (1).

Kết luận: $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

5. Không dùng bảng chân lý, chứng minh các mệnh đề dưới đây là hằng đúng:

a) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

b) $[p \wedge (p \to q)] \to q$

c) $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$

Giải

a) Giả sử mệnh đề đã cho không là hằng đúng. Khi đó, có các giá trị của các mệnh đề p, q và r để $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r) = 0$.

Từ đó, $(p \to q) \wedge (q \to r) = 1$ và $p \to r = 0$. Suy ra, $p \to q = 1$ (1), $q \to r = 1$ (2) và $p = 1$ (3), $r = 0$ (4). Từ (1) và (3) có $q = 1$. Từ (2) và (4) có $q = 0$. Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ mệnh đề đã cho là hằng đúng.

b) Giả sử mệnh đề đã cho không là hằng đúng. Khi đó, có các giá trị của các mệnh đề p và q để $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q = 0$.

Từ đó, $p \wedge (p \rightarrow q) = 1$, $q = 0$. Suy ra, $p = 1$ (1), $p \rightarrow q = 1$ (2) và $q = 0$ (3). Từ (1) và (3) có $p \rightarrow q = 0$. Điều này mâu thuẫn với (2).

Kết luận: Mệnh đề đã cho là hằng đúng.

c) Giả sử mệnh đề đã cho không là hằng đúng. Khi đó, có các giá trị của các mệnh đề p, q và r để $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r = 0$.

Từ đó, $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) = 1$ và $r = 0$. Suy ra, $p \vee q = 1$ (1), $p \rightarrow r = 1$ (2), $q \rightarrow r = 1$ (3) và $r = 0$ (4).

Từ (2) và (4) có $p = 0$. Từ (3) và (4) có $q = 0$. Như vậy, $p \vee q = 0$. Điều này mâu thuẫn với (1).

Kết luận: Mệnh đề đã cho là hằng đúng.

6. Không dùng bảng chân lý, chứng minh các cặp mệnh đề sau là tương đương:

a) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$

b) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \rightarrow \bar{p}$

c) $\overline{p \oplus q} \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

d) $\overline{(p \leftrightarrow q)} \Leftrightarrow (\bar{p} \leftrightarrow q)$

Giải

a) Giả sử cặp mệnh đề đã cho không tương đương. Khi đó, có các giá trị của các mệnh đề p và q để xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $p \leftrightarrow q = 1$ (1) và $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) = 0$ (2). Từ (2) có $p \wedge q = 0$ và $(\bar{p} \wedge \bar{q}) = 0$. Suy ra p và q có giá trị khác nhau. Điều này mâu thuẫn với (1).

Trường hợp 2: $p \leftrightarrow q = 0$ (1) và $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) = 1$ (2). Từ (1) có p và q nhận giá trị khác nhau nên $p \wedge q = 0$ và $(\bar{p} \wedge \bar{q}) = 0$. Điều này mâu thuẫn với (2).

Kết luận: Cặp mệnh đề đã cho là tương đương.

b) Có $p \rightarrow q = \bar{p} \vee q$ và $\bar{q} \rightarrow \bar{p} = q \vee \bar{p}$. Từ đó, $p \rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \rightarrow \bar{p}$.

Kết luận: Cặp mệnh đề đã cho là tương đương.

c) Mệnh đề $\overline{p \oplus q} = 1 \Leftrightarrow p \oplus q = 0 \Leftrightarrow$ p và q nhận giá trị như nhau. Mệnh đề $p \leftrightarrow q = 1 \Leftrightarrow$ p và q nhận giá trị như nhau.

Mệnh đề $\overline{p \oplus q} = 0 \Leftrightarrow p \oplus q = 1 \Leftrightarrow$ p và q nhận giá trị khác nhau. Mệnh đề $p \leftrightarrow q = 0 \Leftrightarrow$ p và q nhận giá trị khác nhau.

Kết luận: Cặp mệnh đề đã cho là tương đương.

d) Mệnh đề $\overline{p \leftrightarrow q} = 1 \Leftrightarrow p \leftrightarrow q = 0 \Leftrightarrow$ p và q nhận giá trị khác nhau.

Mệnh đề $\bar{p} \leftrightarrow q = 1 \Leftrightarrow \bar{p}$ và q nhận giá trị như nhau $\Leftrightarrow$ p và q nhận giá trị khác nhau.

Kết luận: Cặp mệnh đề đã cho là tương đương.

7. Sử dụng các phép biến đổi tương đương và các mệnh đề tương đương cơ bản, chứng minh sự tương đương logic sau

$$\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \vee r)$$

Giải

Có mệnh đề tương đương cơ bản: $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$

Mệnh đề $\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r) = p \vee (\neg q \vee r) = p \vee (\neg q) \vee r$.

Mệnh đề $q \Rightarrow (p \vee r) = \neg q \vee (p \vee r) = p \vee (\neg q) \vee r$.

Kết luận: Cặp mệnh đề đã cho là tương đương.

8. Viết biểu thức logic mô tả điều kiện của các số thực a, b, c để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thực dương.

Giải

Đặt t = "Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thực dương".

Phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thực dương nếu có:

Trường hợp 1: Phương trình có vô số nghiệm: $p = (a = 0) \wedge (b = 0) \wedge (c = 0)$.

Trường hợp 2: Phương trình là bậc 1 có nghiệm thực dương: $q = (a = 0) \wedge (b*c < 0)$.

Trường hợp 3: Phương trình là bậc 2 có 1 nghiệm thực dương, 1 nghiệm thực âm: $r = a*c < 0$.

Trường hợp 4: Phương trình là bậc 2 có nghiệm thực dương: $s = (a*b < 0) \wedge (b*b - 4*a*c \geq 0)$.

Kết luận: Điều kiện cần tìm là $(p \vee q \vee r \vee s) \rightarrow t$.

9. Một tập hợp các toán tử logic được gọi là đầy đủ, nếu mỗi mệnh đề phức hợp đều tương đương logic với một mệnh đề chỉ chứa các toán tử logic đó.

a) Chứng minh rằng $\vee, \wedge$ và $\neg$ tạo thành một tập hợp đầy đủ các toán tử logic.

b) Chứng minh rằng $\neg$ và $\vee$ cũng tạo thành một tập đầy đủ các toán tử logic.

Giải

a) Cần chứng minh các toán tử logic kéo theo ($\rightarrow$), tương đương ($\leftrightarrow$) và tuyển loại trừ ($\oplus$) được biểu diễn qua các toán tử $\vee, \wedge$ và $\neg$.

Có $p \rightarrow q = \neg p \vee q$.

Thật vây, $p \rightarrow q$ chỉ nhận giá trị 0 khi và chỉ khi p = 1 và q = 0. Mặt khác, $\neg p \vee q$ chỉ nhận giá trị 0 khi và chỉ khi $\neg p = q = 0$, tức là p = 1 và q = 0.

Có $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

Có $p \oplus q$ nhận giá trị 0 khi và chỉ khi p và q nhận cùng giá trị.

Có $p \leftrightarrow q$ nhận giá trị 1 khi và chỉ khi p và q nhận cùng giá trị. Do đó $p \oplus q = \neg(p \leftrightarrow q)$

Mặt khác, $\neg(p \leftrightarrow q) = (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ cũng nhận giá trị 0 khi và chỉ khi p và q nhận cùng giá trị. Từ đó $p \oplus q = (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$.

Kết luận: Các toán tử $\vee, \wedge$ và $\neg$ tạo thành một tập hợp đầy đủ các toán tử logic.

b) Dụa vào kết quả câu a), cần chứng minh toán tử $\wedge$ biểu diễn qua các toán tử $\vee$ và $\neg$.

Có $p \wedge q$ nhận giá tri 1 khi và chỉ khi p = q = 1. Mặt khác, $\neg p \vee \neg q$ nhận giá trị 0 khi và chỉ khi p = q = 1. Do đó $\neg(\neg p \vee \neg q)$ nhận giá tri 1 khi và chỉ khi p = q = 1.

Từ đó có $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$.

Kết luận: Các toán tử $\vee$ và $\neg$ tạo thành một tập hợp đầy đủ các toán tử logic.

10. Chứng minh

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $\overline{A \cap (B \cup C)} = \overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$

Giải

a) Lập bảng giá trị thuộc hai vế của đẳng thức:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Từ bảng giá trị thuộc có $A \cap (B \cup C)$ và $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ nhận cùng giá trị.

Kết luận: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b) Lập bảng giá trị thuộc hai vế của đẳng thức:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	Vế trái	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B} \cap \overline{C}$	Vế phải
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Từ bảng giá trị thuộc suy ra vế trái và vế phải có cùng giá trị.

Kết luận: $\overline{A \cap (B \cup C)} = \overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

1. Có bao nhiêu biển số xe bắt đầu bằng 2 hoặc 3 chữ cái in hoa và kết thúc là 3 hoặc 4 chữ số, biết rằng có 26 chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh (ví dụ, RS 0912 là 1 biển số).

Giải

Các biển số xe có thể tạo được theo các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Biển số xe bắt đầu bằng 2 chữ cái in hoa trong 26 chữ cái tiếng Anh và kết thúc là 3 chữ số trong 10 chữ số từ 0 đến 9.

Số lượng biển số xe trong trường hợp này là $26^2 \times 10^3 = 676000$.

Trường hợp 2: Biển số xe bắt đầu bằng 2 chữ cái in hoa trong 26 chữ cái tiếng Anh và kết thúc là 4 chữ số trong 10 chữ số từ 0 đến 9.

Số lượng biển số xe trong trường hợp này là $26^2 \times 10^4 = 6760000$.

Trường hợp 3: Biển số xe bắt đầu bằng 3 chữ cái in hoa trong 26 chữ cái tiếng Anh và kết thúc là 3 chữ số trong 10 chữ số từ 0 đến 9.

Số lượng biển số xe trong trường hợp này là $26^3 \times 10^3 = 17576000$.

Trường hợp 4: Biển số xe bắt đầu bằng 3 chữ cái in hoa trong 26 chữ cái tiếng Anh và kết thúc là 4 chữ số trong 10 chữ số từ 0 đến 9.

Số lượng biển số xe trong trường hợp này là $26^3 \times 10^4 = 175760000$.

Theo nguyên lý cộng có số lượng biển xe là

$$676000 + 6760000 + 17576000 + 175760000 = 200772000$$

Kết luận: Số lượng biển số xe tạo được theo yêu cầu của bài ra là 200772000.

2. Có bao nhiêu số nguyên trong khoảng từ 1000 đến 5000 chia hết cho 6 hoặc 9?

Giải

Trước hết nhận xét rằng, các số nguyên trong khoảng từ 1 đến n chia hết cho m là m, 2m, …, km, trong $km \leq n$. Do đó, số lượng các số nguyên trong khoảng từ 1 đến n chia hết cho m là [n/m].

Gọi N_1 là số lượng các số nguyên trong khoảng từ 1 đến 5000 chia hết cho 6 hoặc 9. Khi đó, $N_1 = [5000/6] + [5000/9] - [5000/18] = 833 + 555 - 277 = 1111$.

Gọi N_2 là số lượng các số nguyên trong khoảng từ 1 đến 999 chia hết cho 6 hoặc 9. Khi đó, $N_2 = [999/6] + [999/9] - [999/18] = 166 + 111 - 55 = 222$.

Số lượng các số nguyên trong khoảng từ 1000 đến 5000 chia hết cho 6 hoặc 9 là:

$$N = N_1 - N_2 = 889.$$

Kết luận: Số lượng số cần tìm là 889.

3. Lớp học có 55 bạn nam và 35 bạn nữ. Hãy cho biết có bao nhiêu cách chọn đội văn nghệ của lớp sao cho số bạn nam bằng số bạn nữ, biết rằng đội văn nghệ cần ít nhất 6 thành viên và nhiều nhất 10 thành viên.

Giải

Đội văn nghệ có thể tạo được theo các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Đội văn nghệ gồm 3 nam trong số 55 bạn nam và 3 nữ trong số 35 bạn nữ. Số lượng cách chọn đội văn nghệ trong trường hợp này là $C^3_{55} \times C^3_{35} = 171708075$.

Trường hợp 2: Đội văn nghệ gồm 4 nam trong số 55 bạn nam và 4 nữ trong số 35 bạn nữ. Số lượng cách chọn đội văn nghệ trong trường hợp này là $C^4_{55} \times C^4_{35} = 1785763980$.

Trường hợp 3: Đội văn nghệ gồm 5 nam trong số 55 bạn nam và 5 nữ trong số 35 bạn nữ. Số lượng cách chọn đội văn nghệ trong trường hợp này là $C^5_{55} \times C^5_{35} = 1129317140952$.

Kết luận: Số cách chọn đội văn nghệ thỏa mãn là 1131274613007.

4. Lớp học có 60 bạn nam và 25 bạn nữ. Hãy cho biết có bao nhiêu cách chọn đội văn nghệ của lớp sao cho số bạn nam đúng bằng 2 lần số bạn nữ, biết rằng đội văn nghệ cần ít nhất 3 thành viên và nhiều nhất 9 thành viên.

Giải

Đội văn nghệ có thể tạo được theo các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Đội văn nghệ gồm 1 nữ trong số 25 bạn nữ và 2 nam trong số 60 bạn nam. Số lượng cách chọn đội văn nghệ trong trường hợp này là $C^1_{25} \times C^2_{60} = 44250$.

Trường hợp 2: Đội văn nghệ gồm 2 nữ trong số 25 bạn nữ và 4 nam trong số 60 bạn nam. Số lượng cách chọn đội văn nghệ trong trường hợp này là $C^2_{25} \times C^4_{60} = 146290500$.

Trường hợp 3: Đội văn nghệ gồm 3 nữ trong số 25 bạn nữ và 6 nam trong số 60 bạn nam. Số lượng cách chọn đội văn nghệ trong trường hợp này là $C^3_{25} \times C^6_{60} = 115146878000$.

Kết luận: Số cách chọn đội văn nghệ thỏa mãn là 115293212750.

5. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm sao cho $1 \leq x_1 \leq 5$ và $x_3 \geq 8$.

Giải

Số lượng nghiệm nguyên không âm của cần tìm bằng N là số lượng nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$ thỏa mãn $x_1 \leq 4$.

Số lượng N bằng số lượng nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$ trừ đi số lượng nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$ thỏa mãn $x_1 \geq 5$.

Gọi N_1 là số lượng nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$. Từ n = 6, k = 15 có N_1 = C(20, 15).

Gọi N_2 là số lượng nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$ thỏa mãn $x_1 \geq 5$.

Từ n = 6, k = 15 – 5 = 10 có N_2 = C(15, 10).

Có N = $N_1 - N_2$ = C(20, 15) – C(15, 10) = 15504 – 3003 = 12501.

<u>Kết luận:</u> Số lượng nghiệm nguyên cần tìm là 12501.

6. Hãy tìm số lượng các số tự nhiên có 7 chữ số thỏa mãn:

a) Số có 7 chữ số tạo thành một số thuận nghịch.

b) Số có 7 chữ số tạo thành một số thuận nghịch và có tất cả các chữ số đều khác 0.

c) Số có 7 chữ số có tổng các chữ số là 18.

Giải

a) Số thuận nghịch có 7 chữ số có dạng $x_1x_2x_3x_4x_3x_2x_1$. Trong đó, x_1 nhận giá trị từ 1 đến 9, x_2, x_3, x_4 nhận giá trị từ 0 đến 9. Từ đó, số lượng các số có 7 chữ số tạo thành một số thuận nghịch là 9x10x10x10 = 9000.

b) Số thuận nghịch có 7 chữ số có dạng $x_1x_2x_3x_4x_3x_2x_1$ với các chữ số khác 0. Trong đó, x_1, x_2, x_3, x_4 nhận giá trị từ 1 đến 9. Từ đó, số lượng các số có 7 chữ số khác 0 tạo thành một số thuận nghịch là 9x9x9x9 = 6561.

c) Số có 7 chữ số thỏa mãn có dạng $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$. Trong đó, x_1 nhận giá trị từ 1 đến 9, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 nhận giá trị từ 0 đến 9 và $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 18$.

Số lượng các số thỏa mãn bằng N là số nghiêm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 17$ thỏa mãn $x_1 \leq 8$, $x_{2,3,4,5,6,7} \leq 9$.

Do vế phải k = 17 nên không có hai giá trị x_i và x_j đồng thời ≥ 9.

Gọi N_1 là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 17$. Từ n = 7, k = 17 có N_1 = C(23, 17).

Gọi N_2 là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 17$ thỏa mãn $x_1 \geq 9$. Từ n = 7, k = 17 – 9 = 8 có N_2 = C(14, 8).

Gọi N_3 là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 17$ thỏa mãn $x_2 \geq 10$. Từ n = 7, k = 17 – 10 = 7 có N_3 = C(13, 7).

Từ đó $N = N_1 - N_2 - 6N_3$ = 100947 – 3003 – 6x1716 = 97944 – 10296 = 87648.

Kết luận: Số lượng các số cần tìm là 87648.

7. Tìm hệ thức truy hồi để tính số các xâu nhị phân độ dài n chứa 3 số 1 liên tiếp? Tính số xâu nhị phân thỏa mãn điều kiện với n = 7.

Giải

Gọi a_n là số lượng các xâu nhị phân độ dài n chứa 3 số 1 liên tiếp.

Với n = 1 có 2 xâu nhị phân độ dài 1 là {0, 1}. Từ đó $a_1 = 0$.

Với n = 2 có 4 xâu nhị phân độ dài 2 là {00, 01, 10, 11}. Từ đó $a_2 = 0$.

Với n = 3 có 8 xâu nhị phân độ dài 3 là {000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111}. Từ đó $a_3 = 1$.

Với n > 3, xét xâu nhị phân x độ dài n thỏa mãn điều kiện. Có các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: với x[n] = 0 có a_{n-1} xâu thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: với x[n] = 1 và x[n-1] = 0 có a_{n-2} xâu thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 3: với x[n] = 1, x[n-1] = 1, x[n-2] = 0 có a_{n-3} xâu thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 4: với x[n] = 1, x[n-1] = 1, x[n-2] = 1 có 2^{n-3} xâu thỏa mãn điều kiện.

Từ đó $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2^{n-3}$.

Kết luận: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2^{n-3}$; điều kiện đầu $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$.

Số xâu nhị phân thỏa mãn điều kiện với n = 7 là a_7.

Có $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3$, $a_5 = 8$, $a_6 = 20$, $a_7 = 47$.

Kết luận: Số xâu nhị phân thỏa mãn điều kiện với n = 7 là 47.

8. Một hệ thống máy tính coi một xâu các chữ số hệ thập phân là một từ mã hợp lệ nếu nó chứa một số chẵn chữ số 0. Ví dụ 1231407869 là không hợp lệ, 12098704568 là hợp lệ. Giả sử a_n là ố các từ mã độ dài n. Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu cho a_n.

Giải

Gọi a_n là số lượng các xâu thập phân độ dài n chứa số chẵn chữ số 0.

Với n = 1 có các xâu thập phân độ dài 1 là {0, 1, .., 9}. Từ đó $a_1 = 9$.

Với n > 1, xét xâu thập phân x độ dài n thỏa mãn điều kiện. Có các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Xâu x nhận được bằng cách thêm chữ số khác 0 vào xâu thập phân độ dài n-1 chứa số chẵn chữ số 0. Có $9a_{n-1}$ xâu thỏa mãn.

Trường hợp 2: Xâu x nhận được bằng cách thêm chữ số 0 vào xâu thập phân độ dài n-1 chứa số lẻ chữ số 0. Có $10^{n-1} - a_{n-1}$ xâu thỏa mãn.

Từ đó $a_n = 9a_{n-1} + 10^{n-1} - a_{n-1} = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$.

Kết luận: Số xâu thập phân là từ mã hợp lệ thỏa mãn $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ với $a_1 = 9$.

9. Tìm hệ thức truy hồi để tính số các xâu nhị phân độ dài n, bắt đầu bằng số 1 và có chứa 2 số 0 liên tiếp. Tính số xâu nhị phân thỏa mãn điều kiện với n = 7.

Giải

Gọi a_n là số lượng các xâu nhị phân độ dài n bắt đầu bằng số 1 và có chứa 2 số 0 liên tiếp.

Với n = 1 có 2 xâu nhị phân độ dài 1 là {0, 1}. Từ đó $a_1 = 0$.

Với n = 2 có 4 xâu nhị phân độ dài 2 là {00, 01, 10, 11}. Từ đó $a_2 = 0$.

Với n = 3 có 8 xâu nhị phân độ dài 3 là {000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111}.

Từ đó $a_3 = 1$.

Với n > 3, xét xâu nhị phân x độ dài n thỏa mãn điều kiện. Khi đó x[1] = 1. Có các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Với x[n] = 1 có a_{n-1} xâu thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: Với x[n] = 0, x[n-1] = 1 có a_{n-2} xâu thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 3: với x[n] = 0, x[n-1] = 0 có 2^{n-3} xâu thỏa mãn điều kiện.

Từ đó $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-3}$.

Kết luận: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-3}$, với $a_1 = a_2 = 0$.

Số xâu nhị phân thỏa mãn điều kiện với n = 7 là a_7.

Có $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3$, $a_5 = 8$, $a_6 = 19$, $a_7 = 43$.

Kết luận: Số xâu nhị phân thỏa mãn điều kiện với n = 7 là 43.

10. Giải các hệ thức truy hồi sau:

a) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 8$, $a_1 = 3$.

b) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ với $n \geq 3$ và $a_0 = 7$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$.

c) $a_n = 14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$, $a_1 = 35$.

Giải

a) Hệ thức truy hồi có bậc $k = 2$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.

Phương trình đặc trưng $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = -1, r_2 = 2$.

Nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2(2)^n$.

Tìm α_1, α_2 dựa vào điều kiện đầu:

$a_0 = 8 = \alpha_1 + \alpha_2$

$a_1 = 3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$

Từ đó, $\alpha_1 = 13/3$, $\alpha_2 = 11/3$

Kết luận: $a_n = (13/3)(-1)^n + (11/3)(2)^n$, $n \geq 0$.

b) Hệ thức truy hồi có bậc $k = 3$, $c_1 = 2$, $c_2 = 5$, $c_3 = -6$.

Phương trình đặc trưng $x^3 = 2x^2 + 5x - 6 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1, r_2 = -2, r_3 = 3$.

Nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = \alpha_1(1)^n + \alpha_2(-2)^n + \alpha_3(3)^n$.

Tìm α_1, α_2, α_3 dựa vào điều kiện đầu:

$a_0 = 7 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

$a_1 = -4 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3$

$a_2 = 8 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3$

Từ đó, $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = -1$

Kết luận: $a_n = 5(1)^n + 3(-2)^n - (3)^n$, $n \geq 0$,

c) Hệ thức truy hồi có bậc $k = 2$, $c_1 = 14$, $c_2 = -49$.

Phương trình đặc trưng $x^2 = 14x - 49 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 7$.

Nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = \alpha_1(7)^n + \alpha_2 n(7)^n$.

Tìm α_1, α_2 dựa vào điều kiện đầu:

$a_0 = 3 = \alpha_1$

$a_1 = 35 = 7\alpha_1 + 7\alpha_2$

Từ đó, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$

Kết luận: $a_n = 3(7)^n + 2n(7)^n$, $n \geq 0$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1. Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

a) Sử dụng phương pháp sinh hoán vị theo thứ tự từ điển, tìm 4 hoán vị liền kề tiếp theo của hoán vị (4, 5, 8, 7, 9, 6, 3, 2, 1).

b) Sử dụng phương pháp sinh hoán vị theo thứ tự từ điển, tìm 5 hoán vị liền kề tiếp theo của hoán vị (2, 3, 6, 8, 9, 7, 5, 4, 1).

Giải

a) Có n = 9, hoán vị xuất phát = (4, 5, 8, 7, 9, 6, 3, 2, 1).

Sử dụng phương pháp sinh tìm 4 hoán vị kế tiếp của hoán vị xuất phát:

(1) i = 4, a_i = 7; k = 5, a_k = 9 ⇒ (4, 5, 8, **9, 7,** 6, 3, 2, 1) ⇒ (4, 5, 8, 9, 1, 2, 3, 6, 7)

(2) i = 8, a_i = 6; k = 9, a_k = 7 ⇒ (4, 5, 8, 9, 1, 2, 3, **7, 6**) ⇒ (4, 5, 8, 9, 1, 2, 3, 7, 6)

(3) i = 7, a_i = 3; k = 9, a_k = 6 ⇒ (4, 5, 8, 9, 1, 2, **6**, 7, **3)** ⇒ (4, 5, 8, 9, 1, 2, 6, 3, 7)

(4) i = 8, a_i = 3; k = 9, a_k = 7 ⇒ (4, 5, 8, 9, 1, 2, 6, **7, 3**) ⇒ (4, 5, 8, 9, 1, 2, 6, 7, 3)

b) Có n = 9, hoán vị xuất phát = (2, 3, 6, 8, 9, 7, 5, 4, 1).

Sử dụng phương pháp sinh tìm 5 hoán vị kế tiếp của hoán vị xuất phát:

(1) i = 4, a_i = 8; k = 5, a_k = 9 ⇒ (2, 3, 6, **9, 8**, 7, 5, 4, 1) ⇒ (2, 3, 6, 9, 1, 4, 5, 7, 8)

(2) i = 8, a_i = 7; k = 9, a_k = 8 ⇒ (2, 3, 6, 9, 1, 4, 5, **8, 7**) ⇒ (2, 3, 6, 9, 1, 4, 5, 8, 7)

(3) i = 7, a_i = 5; k = 9, a_k = 7 ⇒ (2, 3, 6, 9, 1, 4, **7,** 8, **5**) ⇒ (2, 3, 6, 9, 1, 4, 7, 5, 8)

(4) i = 8, a_i = 5; k = 9, a_k = 8 ⇒ (2, 3, 6, 9, 1, 4, 7, **8, 5**) ⇒ (2, 3, 6, 9, 1, 4, 7, 8, 5)

(5) i = 7, a_i = 7; k = 8, a_k = 8 ⇒ (2, 3, 6, 9, 1, 4, **8, 7**, 5) ⇒ (2, 3, 6, 9, 1, 4, 8, 5, 7)

2. Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

a) Sử dụng phương pháp sinh tổ hợp chập k của một tập hợp theo thứ tự từ điển, hãy tạo 4 tổ hợp chập 4 liền kề tiếp theo của tổ hợp (4, 6, 7, 9).

b) Sử dụng phương pháp sinh tổ hợp chập k của một tập hợp theo thứ tự từ điển, hãy tạo 5 tổ hợp chập 4 liền kề tiếp theo của tổ hợp (1, 5, 6, 8).

Giải

a) Có n = 9, k = 4, tổ hợp cuối cùng = (6, 7, 8, 9),

tổ hợp xuất phát = (4, 6, 7, 9).

Sử dụng phương pháp sinh tìm 4 tổ hợp kế tiếp của tổ hợp xuất phát:

(1) i = 3, a_i = 7 ⇒ (4, 6, **8, 9**)

(2) i = 2, a_i = 6 ⇒ (4, **7, 8, 9**)

(3) i = 1, a_i = 4 ⇒ (**5, 6, 7, 8**)

(4) i = 4, a_i = 8 ⇒ (5, 6, 7, **9**)

b) Có n = 9, k = 4, tổ hợp cuối cùng = (6, 7, 8, 9),

tổ hợp xuất phát = (1, 5, 6, 8).

Sử dụng phương pháp sinh tìm 5 tổ hợp kế tiếp của tổ hợp xuất phát:

(1) i = 4, a_i = 8 ⇒ (1, 5, 6, **9**)

(2) i = 3, a_i = 6 ⇒ (1, 5, **7, 8**)

(3) i = 4, a_i = 8 ⇒ (1, 5, 7, **9**)

(4) i = 3, a_i = 7 ⇒ (1, 5, **8, 9**)

(5) i = 2, a_i = 5 ⇒ (1, **6, 7, 8**)

3. Cho xâu nhị phân X = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1). Sử dụng phương pháp sinh xâu nhị phân theo thứ tự từ điển, tìm 4 xâu nhị phân liền kề tiếp theo của X.

Giải

Có n = 9, xâu nhị phân xuất phát = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).

Sử dụng phương pháp sinh xâu nhị phân theo thứ tự từ điển, tìm 4 xâu nhị phân liền kề tiếp theo của xâu nhị phân xuất phát:

(1) i = 2, $x_i = 0 \Rightarrow$ (1, **1**, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)

(2) i = 9, $x_i = 0 \Rightarrow$ (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, **1**)

(3) i = 8, $x_i = 0 \Rightarrow$ (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, **1**, 0)

(4) i = 9, $x_i = 0 \Rightarrow$ (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, **1**)

4. Cho xâu nhị phân X = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1). Sử dụng phương pháp sinh xâu nhị phân theo thứ tự từ điển, tìm 5 xâu nhị phân liền kề tiếp theo của X.

Giải

Có n = 9, xâu nhị phân xuất phát = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1).

Sử dụng phương pháp sinh xâu nhị phân theo thứ tự từ điển, tìm 5 xâu nhị phân liền kề tiếp theo của xâu nhị phân xuất phát:

(1) i = 6, $x_i = 0 \Rightarrow$ (1, 0, 1, 1, 0, **1**, 0, 0, 0)

(2) i = 9, $x_i = 0 \Rightarrow$ (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, **1**)

(3) i = 8, $x_i = 0 \Rightarrow$ (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, **1**, 0)

(4) i = 9, $x_i = 0 \Rightarrow$ (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, **1**)

(5) i = 7, $x_i = 0 \Rightarrow$ (1, 0, 1, 1, 0, 1, **1**, 0, 0)

5. Trình bày thuật toán quay lui liệt kê các hoán vị của tập hợp {1, 2, .., n}. Kiểm nghiệm thuật toán với n = 3.

Giải

Kiểm nghiệm thuật toán với n = 3:

Lần lặp	**a[1]**	**a[2]**	**a[3]**
1	1	2	3
2	1	3	2
3	2	1	3
4	2	3	1
5	3	1	2
6	3	2	1

Kết luận: Có 6 hoán vị của tập hợp {1, 2, 3} là:

(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

6. Trình bày thuật toán quay lui liệt kê các tổ hợp chập k của tập hợp {1, 2, .., n}. Kiểm nghiệm thuật toán với n = 5 và k = 3.

Giải

Kiểm nghiệm thuật toán với n = 5, k = 3:

Lần lặp	**a[1]**	**a[2]**	**a[3]**
1	1	2	3
2	1	2	4
3	1	2	5
4	1	3	4
5	1	3	5
6	1	4	5
7	2	3	4
8	2	3	5
9	2	4	5
10	3	4	5

Kết luận: Có 10 tổ hợp chập 3 của tập hợp {1, 2, 3, 4, 5} là:

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5).

7. Trình bày thuật toán quay lui liệt kê các xâu nhị phân có độ dài n. Kiểm nghiệm thuật toán với n = 3.

Giải

Kiểm nghiệm thuật toán với n = 3:

Lần lặp	**x[1]**	**x[2]**	**x[3]**
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	1	0
4	0	1	1
5	1	0	0
6	1	0	1
7	1	1	0
8	1	1	1

Kết luận: Có 8 xâu nhị phân độ dài 3: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 111.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1. Áp dụng thuật toán duyệt toàn thể giải bài toán cái túi dưới đây, chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \le 12 \\ x_i \in \{0, 1\};\ i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Giải

Xác định bài toán:

Có n = 4, b = 12. $f(X) = 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$; $g(X) = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4$.

Lập bảng: Fopt = - ∞; Xopt = ⊘;

X	**g(X)**	**g(X) ≤ 12?**	**f(X)**	**Fopt**
0, 0, 0, 0	0	Yes	0	0
0, 0, 0, 1	4	Yes	1	1
0, 0, 1, 0	6	Yes	2	2
0, 0, 1, 1	10	Yes	3	3
0, 1, 0, 0	3	Yes	3	-
0, 1, 0, 1	7	Yes	4	4
0, 1, 1, 0	9	Yes	5	5
0, 1, 1, 1	13	No	-	-
1, 0, 0, 0	5	Yes	7	7
1, 0, 0, 1	9	Yes	8	8
1, 0, 1, 0	11	Yes	9	9
1, 0, 1, 1	15	No	-	-
1, 1, 0, 0	8	Yes	10	10
1, 1, 0, 1	12	Yes	11	**11**
1, 1, 1, 0	14	No	-	-
1, 1, 1, 1	18	N0	-	-

Kết luận: Fopt = 11; Xopt = (1, 1, 0, 1).

2. Áp dụng thuật toán nhánh cận giải bài toán cái túi dưới đây, chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \le 12 \\ x_i \in \{0, 1\};\ i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Giải

Xác định bài toán: Có n = 4, b = 12.

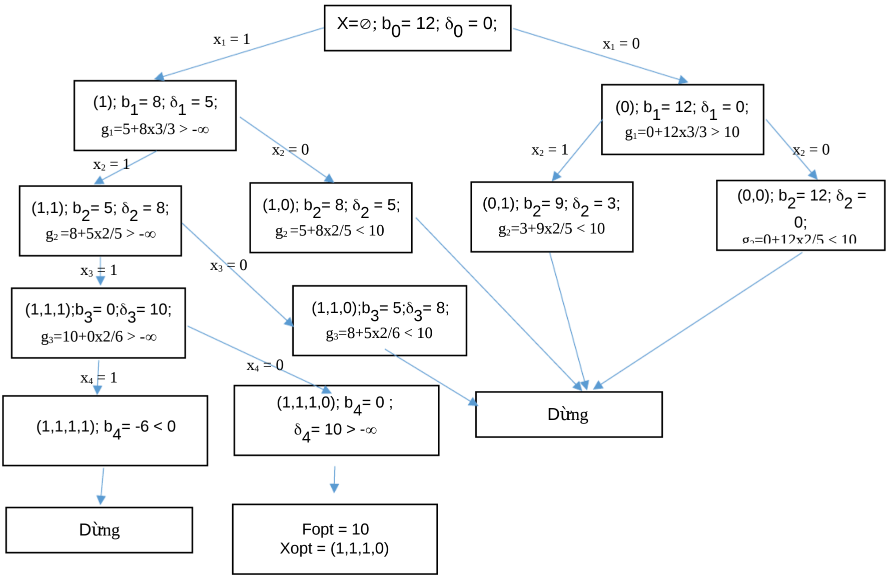
Sắp xếp các đồ vật theo thứ tự giảm: 5/4 ≥ 3/3 ≥ 2/5 ≥ 2/6

Có $f(X) = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4$; $g(X) = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4$.

$a_1 = 4, c_1 = 5; a_2 = 3, c_2 = 3; a_3 = 5, c_3 = 2; a_4 = 6, c_4 = 2$

Lập bảng: Fopt = - ∞; Xopt = ⊘;

$b_0 = 12, b_k = b_{k-1} - a_k x_k$; $\delta_0 = 0, \delta_k = \delta_{k-1} + c_k x_k$, $g_k = \delta_k + b_k(c_{k+1}/a_{k+1})$



Kết luận: Fopt = 10; Xopt = (1, 1, 1, 0)

3. Áp dụng thuật toán nhánh cận, giải bài toán người du lịch với ma trận chi phí như sau:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & 31 & 25 & 23 & 10 & 27 \\ 16 & \mathbf{0} & 2 & 7 & 12 & 12 \\ 3 & 3 & \mathbf{0} & 25 & 54 & 5 \\ 15 & \mathbf{2} & 33 & \mathbf{0} & 50 & 40 \\ 16 & 15 & 32 & 3 & \mathbf{0} & 23 \\ 8 & 20 & 13 & 28 & 21 & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

Giải

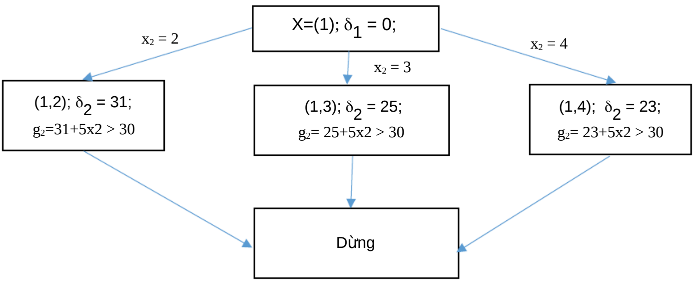
Có n = 6, Cmin = 2.

Chọn phương án xuất phát: 1→ 5: 10; 5→ 4: 3; 4→ 2: 2; 2→ 3: 2; 3→ 6: 5; 6→1: 8

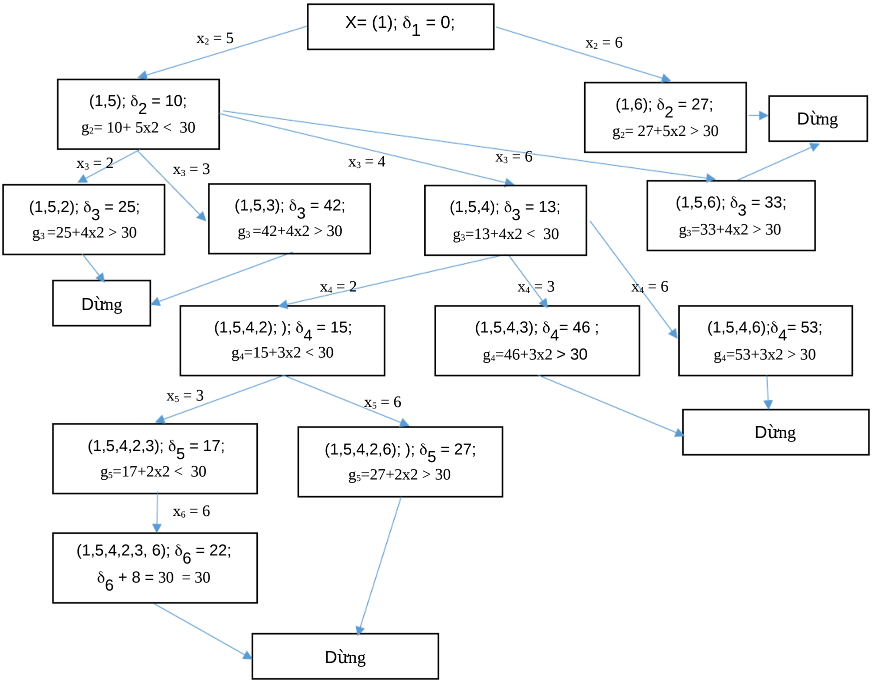
Xopt = (1, 5, 4, 2, 3, 6); Fopt = 30

$\delta_1 = 0, \delta_k = \delta_{k-1} + c[x_{k-1}][x_k]; g_k = \delta_k + (n-k+1)\, c_{min}$

Lập bảng: Fopt = 30; Xopt = (1, 5, 4, 2, 3, 6);



Lập bảng: Fopt = 30; Xopt = (1, 5, 4, 2, 3, 6);



Kết luận:

Fopt = 30

Xopt = (1, 5, 4, 2. 3, 6)

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

1. Trong một kỳ thi, các thí sinh thi trắc nghiệm môn Lý và Hóa, mỗi môn thi có 40 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 5 phương án trả lời và chỉ được lựa chọn tối đa 1 phương án. Mỗi câu trả lời đúng được 0.25 điểm, câu trả lời sai hoặc không trả lời thì không được điểm.

a) Hãy cho biết có bao nhiêu cách điền phiếu trắc nghiệm môn Lý?

b) Cần có ít nhất bao nhiêu thí sinh tham gia để có ít nhất 10 thí sinh có tổng điểm Lý và Hóa bằng nhau? Biết rằng điểm thi không được làm tròn.

Giải

a) Mỗi câu hỏi có 6 cách điền phiếu trắc nghiệm: chọn 1 trong 5 phương án hoặc không chọn phương án nào. Bài thi trắc nghiệm môn Lý có 40 câu hỏi nên số cách điền phiếu trắc nghiệm là 6^{40}.

b) Tổng điểm Lý và Hóa của các thí sinh có thể nhận giá trị khác nhau từ 0 đến 20 và cách nhau 0.25. Do đó số lượng các tổng điểm khác nhau là k = 20/0.25 + 1 = 81. Cần tìm số lượng thí sinh n nhỏ nhất sao cho $\lceil n/81 \rceil \geq 10$.

Có $n \geq 81(10 - 1) + 1 = 729 + 1 = 730$.

Kết luận: Cần có ít nhất 730 thí sinh tham gia để có ít nhất 10 thí sinh có tổng điểm Lý và Hóa bằng nhau.

2. Trong một kỳ thi trắc nghiệm, đề thi gồm có 35 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời và chỉ được lựa chọn tối đa 1 phương án. Thí sinh được 3 điểm cho mỗi câu trả lời đúng, được 0 điểm cho mỗi câu không trả lời và bị trừ 1 điểm cho mỗi câu trả lời sai. Biết rằng, điểm thi thấp nhất là 0. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu thí sinh tham gia kỳ thi để chắc chắn rằng có ít nhất 2 thí sinh có điểm bài thi bằng nhau.

Giải Số câu hỏi ít nhất cần trả lời để nhận được số điểm tương ứng là:

1 điểm = 1 câu đúng + 2 câu sai; 2 điểm = 1 câu đúng + 1 câu sai; 3 điểm = 1 câu đúng.

Do đó, điểm thi của thí sinh nhận giá trị nguyên liên tiếp từ 0 đến 99 và các giá trị 101, 102 và 105. Suy ra, số lượng các giá trị điểm thi khác nhau là k = 100 + 3 = 103. Cần tìm số lượng thí sinh n nhỏ nhất sao cho $\lceil n/103 \rceil \geq 2$.

Có $n \geq 103(2 - 1) + 1 = 104$. Suy ra $n_{min} = 104$.

Kết luận: Cần có ít nhất 104 thí sinh tham gia để chắc nhán có 2 thí sinh có điểm thi bằng nhau.

Ghi chú

Các bài toán trên cần tim n nhỏ nhất sao cho $\lceil n/k \rceil \geq x$, trong đó x là yêu cầu đã cho, k được tính theo các giả thiết của bài toán.

Từ điều kiện $n \geq k(x - 1) + 1$ có $n_{min} = k(x - 1) + 1$.

3. Một lớp học có 45 học sinh đăng ký dự thi đại học vào khối A hoặc khối B. Xếp ngẫu nhiên 45 học sinh này thành một vòng tròn. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai bạn học sinh đứng cạnh nhau và thi cùng khối.

Giải

Giả sử 45 học sinh xếp ngẫu nhiên thành một vòng tròn theo thứ tự liên tiếp ngược chiều quay kim đồng hồ là a_1, a_2, …, a_{45}.

Nếu có hai học sinh đứng cạnh nhau là a_i và a_{i+1} ($1 \leq i \leq 44$) thi đại học cùng khối thì chính là hai học sinh cần tìm.

Nếu mọi cặp học sinh đứng cạnh nhau là (a_i, a_{i+1}) đều thi khác khối với $1 \leq i \leq 44$ thì a_i và a_{i+2} dự thi đại học cùng khối. Như vậy, tất cả học sinh đứng ở vị trí lẻ thi cùng một khối và tất cả học sinh đứng ở vị trí chẵn thi cùng một khối khác. Do đó học sinh thứ 45 và học sinh thứ 1 đứng cạnh nhau và thi cùng khối.

Kết luận: Luôn tồn tại hai bạn học sinh đứng cạnh nhau và thi cùng khối.

4. Một hộp đựng bi chứa các viên bi có kích thước thuộc một trong ba loại to, vừa, nhỏ và màu sắc thuộc một trong ba màu xanh, đỏ, vàng. Giả sử rằng số lượng mỗi loại bi là không hạn chế. Hỏi phải lấy ra ít nhất bao nhiêu viên bi trong hộp để chắc chắn rằng có ít nhất 4 viên bi giống nhau cả kích thước lẫn màu sắc?

Giải

Các viên bi có 3 kích thước và 3 màu sắc. Do đó số loại viên bi có kích thước khác nhau hoặc màu sắc khác nhau là k = 3x3 = 9.

Cần xác định n nhỏ nhất sao cho $\lceil n/9 \rceil \geq 4 \Rightarrow n \geq 9(4-1) + 1 = 28$.

Kết luận: $n_{min} = 28$.

5. Cho S là tập hợp các cặp số nguyên (x,y). Hỏi phải lấy ra từ tập S bao nhiêu phần tử để chắc chắn có hai cặp số (a,b) và (c,d) thỏa mãn (a-c) và (b-d) đều là bội của 100.

Giải

(a – c) và (b-d) là bội của 100 ⇔ a và c, b và d có cùng số dư khi chia cho 100.

Khi chia cho 100 có thể nhận 100 số dư khác nhau từ 0 đến 99.

Số lượng các cắp số (x, y) có số dư khác nhau khi chia cho 100 là k = 100x100 = 10000.

Cần tìm số lượng các phần tử n ít nhất sao cho $\lceil n/10000 \rceil \geq 2 \Rightarrow n \geq 10000(2\text{-}1) + 1$ = 10001.

Kết luận: n_{min} = 10001.