ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ ĐỊNH KÌ LẦN 2 - MÔN ĐẠI SỐ

Câu 1: Trong không gian $\mathbb{R}^4$, tìm hạng của hệ vector $B = \{u_1 = (1, 1, 0, -1), u_2 = (-2, 0, 2, 1), u_3 = (3, 1, -1, -1), u_4 = (-2, -2, -1, 1)\}$?

- ◯ 1
- ◯ 3
- ◯ 2
- ◯ 4

Hướng dẫn giải

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_4+H_1 \to H_4]{H_2-H_1 \to H_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_3-H_2 \to H_3]{H_4+0,5.H_2 \to H_4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{H_4-H_3 \to H_4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$

Vậy hạng của hệ vecto B là 3

Câu 2: Cho các vecto $u = (1, -1, -1), u_1 = (m^2 + 2m + 1, m + 1, -1)$. Tìm m để $u \in span\{u_1\}$?

- ◯ 0
- ◯ -2
- ◯ 1
- ◯ -3

Hướng dẫn giải

Để $u \in span\{u_1\} \Leftrightarrow u = ku_1$ với $k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k.(m^2 + 2m + 1) \\ -1 = k.(m + 1) \\ -1 = k.(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ k = 1 \end{cases}$

Vậy $m = -2$

Câu 3: Cho không gian vector $\mathbb{U} = \{(0, y, 0) | y \in \mathbb{R}\}$. Không gian vector nào dưới đây không cùng với $\mathbb{U}$ tạo thành 2 không gian vector con bù nhau của $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$?

- ◯ $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$
- ◯ $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0\}$
- ◯ $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}$
- ◯ $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0\}$

Hướng dẫn giải

Ta có 1 cơ sở của $\mathbb{U}$ là $\{(0,1,0)\}$

-Xét phương trình $x+y+z=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=b \\ y=a \\ x=-y-z=-a-b \end{cases}$

Nghiệm của phương trình là $(-a-b,a,b)=a(-1,1,0)+b(-1,0,1)$.
Do đó 1 cơ sở của $\mathbb{W}=\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$

Xét hạng của hệ vector {(0,1,0),(-1,1,0),(-1,0,1)} = 3 nên $\mathbb{W}$ cùng với $\mathbb{U}$ là 2 không gian con bù nhau của $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$. Do đó đáp án này không thỏa mãn.
- Thực hiện tương tự cho các phương trình $x+y=0, y=0$ ta thấy các đáp án này cũng không thỏa mãn

- Xét phương trình $x+z=0 \Leftrightarrow x=-z \Leftrightarrow \begin{cases} z=b \\ y=a \\ x=-b \end{cases}$

Do đó nghiệm của phương trình trên có dạng $(-b,a,b)=a(-1,0,1)+b(0,1,0)$. Một cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình trên là $\mathbb{W}=\{(-1,0,1),(0,1,0)\}$.

Nhận thấy rằng hệ vector $\{(0,1,0),(-1,0,1),(0,1,0)\}$ có hạng bằng 2, do đó mà không trở thành cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$. Vậy đáp án cần tìm là $x+z=0$

Câu 4: Cho $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ -13 & 8 & -24 \end{bmatrix}$.

Tìm ma trận X sao cho $AXB=2C^T$.

◯ $X=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

◯ $X=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

◯ $X=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

◯ $X=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

Hướng dẫn giải

$$AXB = 2C^T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} .X. \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = 2. \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ -13 & 8 & -24 \end{bmatrix}^T$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 0 & -26 \\ -4 & 16 \\ 10 & -48 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & 0,75 & 0,5 \\ -0,5 & 1,5 & 1,5 \\ -0,5 & 1,25 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -26 \\ -4 & 16 \\ 10 & -48 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2,5 & -1,5 \\ -0,5 & -0,5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 9 & -35 \\ 5 & -15 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2,5 & -1,5 \\ -0,5 & -0,5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Câu 5: Trong không gian véc tơ $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ các ma trận thực vuông cấp 2 cho cơ sở $B = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ với $F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, F_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Tìm tọa độ của $v = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -a & a+2 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở B.

- ○ $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 & -9 & 12 & 10-a \end{bmatrix}^T$
- ○ $[v]_B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 19 & 12-a \end{bmatrix}^T$
- ○ $[v]_B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -19 & a+12 \end{bmatrix}^T$
- ○ $[v]_B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 & a+10 \end{bmatrix}^T$

Hướng dẫn giải

Xét cơ sở chính tắc $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ với $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ma trận chuyển cơ sở từ E sang B là: $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Tọa độ của véc tơ v trong cơ sở E là: $[v]_E = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ -a \\ a+2 \end{bmatrix}$

Áp dúng công thức đổi tọa độ:

$$[v]_B = P^{-1}.[v]_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ -a \\ a+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -1 & 4 \\ -10 & 3 & -2 & 8 \\ -7 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ -a \\ a+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 19 \\ 12-a \end{bmatrix}$$

Vậy $[v]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 19 \\ 12-a \end{bmatrix}$

Câu 6: Trong không gian $P_3[x]$ cho: $v_1 = 1 + 2x - 2x^2 + x^3,\ v_2 = -2 - 3x + 6x^2 - x^3,\ v_3 = 3 + 3x - 11x^2 + 2x^3, v_4 = -3 - 4x + 13x^2 + 5x^3$. Có $V_1 = span\{v_1, v_2\}, V_2 = span\{v_3, v_4\}$. Tìm số chiều của $V_1 + V_2$?

◯ 2 ◯ 3

◯ 4 ◯ 5

Hướng dẫn giải

Ta có: $V_1 = span\{v_1, v_2\}, V_2 = span\{v_3, v_4\} \Rightarrow V_1 + V_2 = span\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Xét ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 3 & 3 & -11 & 2 \\ -3 & -4 & 13 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_4+3H_1 \to H_4]{\substack{H_2+2H_1 \to H_2 \\ H_3-3H_1 \to H_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_4-2H_2 \to H_4]{H_3+3H_2 \to H_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{H_4-3H_3 \to H_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow dim(V_1 + V_2) = 3$

Vậy số chiều của $V_1 + V_2$ là 3

Câu 7: Tìm điều kiện của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x+y-z+2t &= 1 \\ x+2y-3z+4t &= 2 \\ x-y+4z-t &= m \\ 4x+3y-z+mt &= m^2-6m+4 \end{cases}$$

- ◯ $m=7$
- ◯ $m=0$
- ◯ $m\neq 7$
- ◯ $m\neq 0$

Hướng dẫn giải

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & m \\ 4 & 3 & -1 & m & m^2-6m+4 \end{array}\right] \xrightarrow[H_4-4H_1\to H_4]{\substack{H_2-H_1\to H_2 \\ H_3-H_1\to H_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & m-1 \\ 0 & -1 & 3 & m-8 & m^2-6m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[H_4+H_2\to H_4]{H_3+2H_2\to H_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 1 & m-6 & m^2-6m+1 \end{array}\right] \xrightarrow{H_4-H_3\to H_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m^2-7m \end{array}\right]$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Rightarrow m\neq 7$

Câu 8: Hệ vecto nào là độc lập tuyến tính ?

- ◯ $1, 2\sin^2 x, 3\cos^2 x$
- ◯ $e^x+e^{-x}, 1+e^x, 2+e^{-x}$
- ◯ $2-x, 2x-x^2, 6-5x+x^2$
- ◯ $(1,4,5),(6,7,4),(20,29,22)$

Hướng dẫn giải

+) $1-\dfrac{1}{2}(2sin^2x)-\dfrac{1}{3}(3cos^2x)=0 \Rightarrow$ hệ phụ thuộc tuyến tính

+) Xét $a_1(2-x)+a_2(2x-x^2)+a_3(6-5x+x^2)=0$

Có $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2H_2+H_1\to H_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4H_3+H_2\to H_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Hệ phụ thuộc tuyến tính

+) Xét $a_1(e^x+e^{-x})+a_2(1+e^x)+a_3(2+e^{-x})=0$

$\Leftrightarrow (a_2+2a_3)+(a_1+a_2)e^x+(a_1+a_3)e^{-x}=0$

Có $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2-H_3\to H_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1-H_2\to H_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Hệ độc lập tuyến tính

+) Xét A = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 4 \\ 20 & 29 & 22 \end{pmatrix}$ Có det(A) = 0⇒ Hệ phụ thuộc tuyến tính

Câu 9: Khẳng định nào sau đây là đúng ?

- ☐ Một cơ sở của hệ vecto $\{(2,1,3,4),(1,2,0,1),(-1,1,-3,0)\}$ là $\{(2,1,3,4),(0,3,-3,-2),(0,0,0,6)\}$
- ☐ Hệ vecto $\{(0,0),(1,3)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$
- ☐ Họ $\{1-3x+2x^2, 1+x+4x^2, 1-7x\}$ là một cơ sở của P_2
- ☐ Họ $\{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$ là một cơ sở của P_2
- ☐ Hệ vecto $\{(2,1,1),(6,2,0),(7,0,7)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$
- ☐ Hệ vecto $\{(1,4,1),(5,2,3),(-5,16,-1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Hướng dẫn giải

+) Xét A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2H_3+H_1\to H_3]{2H_2-H_1\to H_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3-H_2\to H_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

⇒ Một cơ sở là {(2,1,3,4),(0,3,-3,-2),(0,0,0,6)}

+) Vì hệ có vecto $(0,0)$ nên hệ vecto trên chỉ có 1 chiều ⇒ không phải cơ sở của $\mathbb{R}^2$

+) Xét $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -7 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Có $det(A) = 0$ ⇒ Hệ phụ thuộc tuyến tính ⇒ Hệ vecto trên không phải cơ sở của P_2

+) Xét $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Có $det(A) \neq 0$ ⇒ Hệ độc lập tuyến tính ⇒ Hệ vecto trên là cơ sở của P_2

+) Xét $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Có $det(A) \neq 0 \Rightarrow$ Hệ độc lập tuyến tính $\Rightarrow$ Hệ vecto trên là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

+) Xét $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -5 & 16 & -1 \end{pmatrix}$

Có $det(A) = 0 \Rightarrow$ Hệ phụ thuộc tuyến tính $\Rightarrow$ Hệ vecto trên không phải cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Câu 10: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & a & -2 \\ -1 & 1 & 2 & b \end{bmatrix}$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Kí hiệu $r(A)$ là hạng của ma trận.

Các khẳng định nào sau đây là **đúng**?

☐ Với $b \neq 1$ thì $r(A) = 4$

☐ Tại $a = -3$ và $b = 1$ thì $r(A) = 2$

☐ Tại $b = 1$ thì ma trận A là ma trận suy biến

☐ $r(A) = 3$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$

☐ Với $a = -3$ thì $r(A) = 3$

☐ Với $a \neq -3$ thì $r(A) = 3$ hoặc $r(A) = 4$

Hướng dẫn giải

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & a & -2 \\ -1 & 1 & 2 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2 \leftrightarrow H_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & a & -2 \\ -1 & 1 & 2 & b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[H_3 - H_1 \to H_3 | H_4 + H_1 \to H_4]{H_2 - 2H_1 \to H_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & a-1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & b+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_4 + H_2 \to H_4]{3H_3 - 4H_2 \to H_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3a+9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix}$$

Nhận xét:

* $b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$, khi đó $det(A) = 0$, tức ma trận suy biến, và $r(A) = 3$ với mọi $a \in \mathbb{R}$

* $b - 1 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 1$, khi đó:

+ Nếu $3a + 9 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -3$ thì $det(A) \neq 0$ và $r(A) = 4$

+ Nếu $3a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = -3$ thì $det(A) = 0$ và $r(A) = 3$

Tóm lại, từ những nhận xét trên, ta chọn được các khẳng định **đúng** sau đây:

- Tại $b = 1$ thì ma trận A là ma trận suy biến
- Với $a = -3$ thì $r(A) = 3$
- Với $a \neq -3$ thì $r(A) = 3$ hoặc $r(A) = 4$

Câu 11: Khẳng định nào dưới đây luôn đúng?

☐ Trong một không gian vector $\mathbb{V}$ có n chiều thì mọi tập chứa 1 phần tử đều độc lập tuyến tính

☐ Trong không gian 3 chiều $\mathbb{V}$, mọi hệ sinh chứa 3 vector là tập cơ sở

☐ Tập $\mathbb{M} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ là hệ sinh của KGVT 3 chiều thì có 3 tập con chứa 2 phần tử của M độc lập tuyến tính

☐ Trong không gian $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, bổ sung thêm 1 vector vào tập $\mathbb{A} = \{x_1, x_2\}$ để $\mathbb{A}$ trở thành hệ sinh của $\mathbb{V}$

☐ Một hệ sinh trong một không gian vector có n chiều cần tối thiểu n vector

☐ Số chiều của không gian các tất cả các đa thức bậc n $P_n[x]$ là n+1

Hướng dẫn giải

Trong một không gian vector $\mathbb{V}$ có n chiều thì mọi tập chứa 1 phần tử đều độc lập tuyến tính: Ý này sai, nếu tập chứa duy nhất vector 0 thì nó phụ thuộc tuyến tính

Trong không gian 3 chiều $\mathbb{V}$, mọi hệ sinh chứa 3 vector là tập cơ sở: Ý này đúng vì không gian có 3 chiều thì số vector tối thiểu trong một hệ sinh của nó là 3, và khi số vector của hệ sinh này là 3 thì các vector của nó độc lập tuyến tính và trở thành cơ sở của không gian 3 chiều. Ở đây số vector của hệ bằng đúng 3 nên nó là một tập cơ sở

Tập $\mathbb{M} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ là hệ sinh của KGVT 3 chiều thì có 3 tập con chứa 2 phần tử của M độc lập tuyến tính: Ý này sai. Giả sử x_1, x_2, x_3 độc lập tuyến tính. Nếu ta chọn $x_4 = kx_1$ chẳng hạn, thì từ tập $\mathbb{M}$ ta sẽ có thế chọn ra bất kì 2 phần tử phân biệt nào(trừ việc chọn ra x_1 và $x_4 = kx_1$) từ tập gồm 4 phần tử mà vẫn đảm bảo là 2 phần tử được lấy ra độc lập tuyến tính. Và trong trường hợp mà ta giả sử trên kết quả sẽ là $C_4^2 - 1 = 5$

Trong không gian $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, bổ sung thêm 1 vector vào tập $\mathbb{A} = \{x_1, x_2\}$ để $\mathbb{A}$ trở thành hệ sinh của $\mathbb{V}$: Ý này sai. Nếu vector thêm vào cùng với x_1, x_2 phụ thuộc tuyến tính thì hạng của hệ mới nhỏ hơn 3, do đó không thể sinh ra không gian 3 chiều $\mathbb{R}^3$

Một hệ sinh trong một không gian vector có n chiều cần tối thiểu n vector: Đúng

Số chiều của không gian các tất cả các đa thức bậc n $P_n[x]$ là n+1: Đúng
Vậy có 3 ý (2),(5),(6) là đúng

Câu 12: Cho hệ phương trình sau: $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-1}x_n = 1 \\ x_1 + 3x_2 + \cdots + 3^{n-1}x_n = 1 \\ \cdots \\ x_1 + nx_2 + \cdots + n^{n-1}x_n = 1 \end{cases}$

Hỏi những khẳng định nào sau đây sai?

- ☐ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
- ☐ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ luôn là những số không âm.
- ☐ Tập nghiệm của hệ là 1 cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$.
- ☐ Số nghiệm của hệ luôn không đổi $\forall n$.
- ☐ $x_1 - x_2 + x_3 - \cdots + (-1)^{n+1}x_n = (-1)^n$
- ☐ Số chiều của không gian nghiệm là 1.

Hướng dẫn giải

Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho. Xét đa thức

$$f(X) = x_nX^{n-1} + x_{n-1}X^{n-2} + \cdots + x_2X + x_1 - 1 = 0$$

Vì $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là nghiệm của hệ nên $X = 1, 2, \ldots, n$ là các nghiệm của đa thức trên. vì $f(X)$ có bậc $\leq n-1$ mà lại có n nghiệm phân biệt nên $f(X) \equiv 0$ ($f(X)$ là đa thức không)
Do đó ta có $x_n = x_n - 1 = \cdots = x_2 = 0, x_1 = 1$.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x_1 = 1, x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$.
$\Rightarrow \nexists$ không gian nghiệm vì hệ phương trình chỉ có 1 nghiệm $\neq \theta$.

Từ đó, ta chọn được những khẳng định **sai** sau đây:

- Tập nghiệm của hệ là 1 cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$.
- $x_1 - x_2 + x_3 - \cdots + (-1)^{n+1}x_n = (-1)^n$
- Số chiều của không gian nghiệm là 1

Câu 13: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & m \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Tính $I = b^2 - 4ac$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn khẳng định sau:

"Tại $m = a$ thì ma trận A là ma trận suy biến. Khi ấy $det(A) = b$ và $r(A) = c$."

Hướng dẫn giải

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & m \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[2H_3 - 5H_1 \to H_3]{2H_2 - H_1 \to H_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 2m-3 \\ 0 & 7 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_3 - H_2 \to H_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 2m-3 \\ 0 & 0 & -6-2m \end{bmatrix}$$

A là ma trận suy biến, tức ma trận A không khả nghịch.

Suy ra $detA = 2.7.(-6-2m) = 0$ hay $m = -3$, khi đó $r(A) = 2$.

Từ đây ta nhận được các giá trị $a = -3, b = 0, c = 2$ và $I = b^2 - 4ac =$ **24**.

Câu 14: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các véctơ $v_1 = (1;2;3), v_2 = (3;2;1), v_3 = (2;3;1), v_4 = (6;7;5)$ và $M = \{v_1, v_2, v_3\}, N = \{v_2, v_3, v_4\}$. Biết rằng $[v]_M = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, [v]_N = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$. Tính giá trị $I = \alpha + \beta + \gamma$?

Hướng dẫn giải

Xét hệ phương trình: $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Suy ra $([v_2]_M)^T = (0;1;0)^T$. Hoàn toàn tương tự, ta tính được:

$([v_3]_M)^T = (0;0;1)^T$; $([v_4]_M)^T = (1;1;1)^T$

Suy ra ma trận chuyển cơ sở từ M sang N là: $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$[v]_M = P[v]_N \Rightarrow [v]_N = P^{-1}.[v]_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Vậy $I = \alpha + \beta + \gamma = \mathbf{4}$

Câu 15: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 13x_4 + 16x_5 + 19x_6 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + (2m+7)x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 3x_6 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 + (m+6)x_6 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 12x_4 + 15x_5 + (m+18)x_6 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + (2m+9)x_3 + 9x_4 + 11x_5 + (m+4)x_6 = 0 \end{cases}$$

có không gian nghiệm là $\mathbb{W}$. Biết rằng với mọi cơ sở bất kì của $\mathbb{W}$ ta luôn tìm được 3 tập con chứa 2 phần tử phân biệt lấy từ cơ sở đó. Tổng tất cả các giá trị m thỏa mãn là?

Hướng dẫn giải

Yêu cầu bài toán: Từ một cơ sở bất kì của không gian nghiệm có thể lấy được 2 phần tử phân biệt từ cơ sở đó. Từ đó nếu gọi số chiều không gian nghiệm là x thì ta có $C_x^2 = 3 \Rightarrow x = 3$. Vậy yêu cầu bài toán chuyển về tìm m để ma trận hệ số của hệ phương trình có hạng bằng $6 - 3 = 3$

Xét ma trận hệ số của hệ phương trình: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 \\ 2 & 4 & (2m+7) & 8 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 5 & (m+6) \\ 3 & 6 & 10 & 12 & 15 & (m+18) \\ 1 & 5 & (2m+9) & 9 & 11 & (m+4) \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[i\in\overline{2,6}]{H_i-A_{i1}.H_1\to H_i}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\0&3&4&5&6&7\\0&0&2m+1&0&0&-9\\0&0&1&0&0&m\\0&0&1&0&0&m\\0&3&2m+6&5&6&m-2\end{pmatrix}\xrightarrow{H_6-H_2\to H_6}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\0&3&4&5&6&7\\0&0&2m+1&0&0&-9\\0&0&1&0&0&m\\0&0&1&0&0&m\\0&0&2m+2&0&0&m-9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_6-H_3\to H_6}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\0&3&4&5&6&7\\0&0&2m+1&0&0&-9\\0&0&1&0&0&m\\0&0&1&0&0&m\\0&0&1&0&0&m\end{pmatrix}\xrightarrow[H_6-H_4\to H_6]{H_5-H_4\to H_5}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\0&3&4&5&6&7\\0&0&2m+1&0&0&-9\\0&0&1&0&0&m\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

- Xét với $m=0$ thì không thỏa mãn hạng của ma trận bằng 3
- Với $m\neq 0$, để hạng của ma trận bằng 3 thì ta có :

$$\frac{2m+1}{1}=\frac{-9}{m}\Leftrightarrow 2m^2+m+9=0$$

Từ đó, suy ra tổng tất cả phần tử m thỏa mãn là $\dfrac{-1}{2}$