UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA

EJERCICIOS DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIADA

MODELOS LINEALES

AUTOR:
Br. KEVIN HEBERTH HAQUEHUA APAZA

DOCENTE:
Mgt. CARLA PATRICIA ZUÑIGA VILCA

CUSCO - PERÚ

NOVIEMBRE - 2024

1. Problema

Sea el vector aleatorio $\mathbf{v} \sim N_4(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$,

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{v}$ es particionada como $\mathbf{v} = (y_1, y_2, x_1, x_2)'$,

$$\mu_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mu_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_{yy} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{yx} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{xx} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Obtener

1.1. Esperanza

$\mathbb{E}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$

1.1.1. Solución

Utilizando el teorema 4:

Teorema 4: Si y y x son normales multivariadas conjuntas con $\Sigma_{yx} \neq 0$, entonces la distribución condicional de y dado x, $f(y|x)$, es normal multivariada con vector de medias y matriz de covarianzas.

$$\mathbb{E}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \mu_y + \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}(\mathbf{x} - \mu_x)$$

1. **Invertir** $\Sigma_{xx} = \Sigma_{xx}^{-1}$, usando la fórmula de inversa de una matriz

$$\Sigma_{xx}^{-1} = \frac{1}{\det(\Sigma_{xx})} \begin{pmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_{11} \end{pmatrix}.$$

   Calculamos el determinante de Σ_{xx}

$$\det(\Sigma_{xx}) = (6)(7) - (-3)(-3) = 42 - 9 = 33.$$

   De tal forma que tenemos

$$\Sigma_{xx}^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{33} & \frac{3}{33} \\ \frac{3}{33} & \frac{6}{33} \end{pmatrix}$$

2. **Multiplicar** $\Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}$

$$\Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{33} & \frac{3}{33} \\ \frac{3}{33} & \frac{6}{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{33} & \frac{27}{33} \\ -\frac{1}{33} & \frac{9}{33} \end{pmatrix}$$

3. **Calcular** $(\mathbf{x} - \mu_x)$

$$\mathbf{x} - \mu_x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

4. **Calcular** $\Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}(\mathbf{x} - \mu_x)$

$$\Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}(\mathbf{x} - \mu_x) = \begin{pmatrix} \frac{30}{33} & \frac{27}{33} \\ -\frac{1}{33} & \frac{9}{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_x) = \begin{pmatrix} \frac{30}{33}(x_1+2)+\frac{27}{33}(x_2-1) \\ (-\frac{1}{33})(x_1+2)+\frac{9}{33}(x_2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{33}x_1+\frac{27}{33}x_2+1 \\ -\frac{1}{33}x_1+\frac{9}{33}x_2-\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

5. **Sumar** μ_y

$$\mathbb{E}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \mu_y + \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_x)$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{30}{33}x_1+\frac{27}{33}x_2+1 \\ -\frac{1}{33}x_1+\frac{9}{33}x_2-\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{33}x_1+\frac{27}{33}x_2+3 \\ -\frac{1}{33}x_1+\frac{9}{33}x_2+\frac{154}{33} \end{pmatrix}$$

1.2. Covarianza

$\mathrm{cov}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$

1.2.1. Solución

De la misma forma utilizamos la definición del teorema 4 de covarianza.

$$\mathrm{cov}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \Sigma_{yy} - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy}$$

1. **Hallar la transpuesta** del vector que tenemos Σ_{yx}^T

$$\Sigma_{xy} = \Sigma_{yx}^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. **Calcular** $\Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy}$

$$\Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{7}{33} & \frac{3}{33} \\ \frac{3}{33} & \frac{6}{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy} = \begin{pmatrix} \frac{21}{33}+\frac{9}{33} & \frac{9}{33}+\frac{18}{33} \\ -\frac{7}{33}+\frac{6}{33} & -\frac{3}{33}+\frac{12}{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{33} & \frac{27}{33} \\ -\frac{1}{33} & -\frac{9}{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy} = \begin{pmatrix} \frac{90}{33}+\frac{81}{33} & -\frac{30}{33}+\frac{54}{33} \\ -\frac{3}{33}+\frac{27}{33} & \frac{1}{33}+\frac{18}{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{171}{33} & \frac{24}{33} \\ \frac{24}{33} & \frac{19}{33} \end{pmatrix}$$

3. **Calcular:** $\mathrm{cov}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \Sigma_{yy} - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy}$

$$\mathrm{cov}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{171}{33} & \frac{24}{33} \\ \frac{24}{33} & \frac{19}{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{cov}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 9-\frac{171}{33} & 0-\frac{24}{33} \\ 0-\frac{24}{33} & 1-\frac{19}{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{126}{33} & -\frac{24}{33} \\ -\frac{24}{33} & \frac{14}{33} \end{pmatrix}$$

1.3. Correlación

ρ_{12}

1.3.1. Solución

Tomando la fórmula de correlación se tiene

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}$$

Teniendo la matriz de covarianzas

$$\Sigma_{yy} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Sustituimos la relación que pide el problema por lo que se tiene

$$\rho_{12} = \frac{0}{\sqrt{(9)(1)}} = 0$$

El coeficiente de correlación $\rho_{12} = 0$ lo que indica que las variables y_1 y y_2 no están correlacionadas

1.4. Correlación parcial

$\rho_{12,34}$

1.4.1. Solución

Utilizando la fórmula de correlación parcial

$$\rho_{ij.rs\cdots q} = \frac{\sigma_{ij.rs\cdots q}}{\sqrt{\sigma_{ii.rs\cdots q}\sigma_{jj.rs\cdots q}}}$$

Especificando para $q = 4$ se tiene la siguiente forma

$$\rho_{12,34} = \frac{\sigma_{12,34}}{\sqrt{\sigma_{11,34}\sigma_{22,34}}}$$

Por lo cual se necesita calcular:

- $\sigma_{11,34} = \sigma_{11} - \Sigma_{13}\Sigma_{33}^{-1}\Sigma_{31}$
- $\sigma_{22,34} = \sigma_{23} - \Sigma_{33}\Sigma_{33}^{-1}\Sigma_{32}$
- $\sigma_{11,34} = \sigma_{11} - \Sigma_{13}\Sigma_{33}^{-1}\Sigma_{32}$

Teniendo la matriz de covarianzas completa Σ

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Se extraen las submatrices

$$\Sigma_{33} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{31} = \Sigma_{13}^{T} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $\Sigma_{33}^{-}1$

$$\Sigma_{33}^{-}1 = \frac{1}{det(\Sigma_{33})} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos los $\sigma_{11,34}$

$$\sigma_{11,34} = \sigma_{11} - \Sigma_{13}\Sigma_{33}^{-1}\Sigma_{31}$$

$$\sigma_{11,34} = 9 - \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11,34} = \frac{126}{33}$$

De la misma forma los otros valores

$$\sigma_{22,34} = \frac{126}{33}$$

$$\sigma_{12,34} = -\frac{63}{33}$$

Finalmente reemplazamos los valores en la ecuación y tenemos

$$\rho_{12,34} = \frac{-\frac{63}{33}}{\sqrt{\frac{126}{33}\frac{126}{33}}} = -\frac{63}{126} = -0{,}5$$