



# Diseño de experimentos

## Exámen de semana 03

Kevin Heberth Haquehua Apaza

24 de setiembre del 2025

### Table de Contenidos

DISEÑO FACTORIAL $2^3$ .....	1
EJEMPLO: EFECTOS DE VELOCIDAD DE CORTE .....	1
Preguntas .....	1
Solución .....	2

### DISEÑO FACTORIAL $2^3$

#### EJEMPLO: EFECTOS DE VELOCIDAD DE CORTE

Un ingeniero está interesado en los efectos de la velocidad de corte (A), la geometría de la herramienta (B) y el ángulo de corte (C) sobre la vida (en horas) de una máquina herramienta. Se eligen dos niveles de cada factor y se corren 3 réplicas de un diseño factorial  $2^3$ . Los resultados fueron los siguientes:

Combinación de tratamientos	Réplica I	Réplica II	Réplica III
(1)	22	31	25
a	32	43	29
b	35	34	50
ab	55	47	46
c	44	45	38
ac	40	37	36
bc	60	50	54
abc	39	41	47

Realizar el análisis estadístico del experimento.

#### Preguntas

- Hallar el efecto de cada factor y de la interacción (realizar alguna explicación o interpretación).
- Desarrolla e interpreta el análisis de varianza (con sus respectivas pruebas de hipótesis).



- c) Genera el modelo de regresión para verificar cumplimiento de supuestos.
- d) Comprueba los supuestos.
- e) Indique cual seria el modelo de regresión y grafique una superficie de respuesta.

## Solución

- a) **Hallar el efecto de cada factor y de la interacción (realizar alguna explicación o interpretación).**

Se muestran las 8 combinaciones con las letras minúsculas: “(1), a, b, ab, c, ac, bc, abc”, repliquemos los datos en el R

```
y<-c(22, 32, 35, 55, 44, 40, 60, 39, 31, 43, 34, 47, 45, 37, 50, 41, 25, 29, 50,
46, 38, 36, 54, 47)
A<-rep(c(-1,1),12)
B<-rep(c(rep(-1,2),rep(1,2)),6)
C<-rep(c(rep(-1,4),rep(1,4)),3)
```

Ahora realizamos las diferentes interacciones

```
AB <- A*B
BC <- B*C
AC <- A*C
ABC <- A*B*C
```

## Veamos el efecto de A

```
ypA<-tapply(y,A,mean)
ypA

##    -1     1
## 40.66667 41.00000

Aefe<-ypA[2]-ypA[1]
Aefe

##      1
## 0.3333333
```

El efecto de A (velocidad de corte) es positivo y pequeño, esto indica que al incrementar la velocidad de corte, se incrementará la vida de la máquina pero no de una gran manera.

## Veamos el efecto de B

```
ypB<-tapply(y,B,mean)
ypB

##    -1     1
## 35.16667 46.50000

Befe<-ypB[2]-ypB[1]
Befe
```



```
##      1  
## 11.33333
```

El efecto de B (geometría de la herramienta) es positivo y grande, esto indica que al incrementar la geometría de la herramienta, se incrementará la vida de la máquina de gran manera.

### Veamos el efecto de C

```
ypC<-tapply(y,C,mean)  
ypC  
  
##      -1      1  
## 37.41667 44.25000  
  
Cefe<-ypC[2]-ypC[1]  
Cefe  
  
##      1  
## 6.833333
```

El efecto de C (ángulo de corte) es positivo y grande, esto indica que al incrementar el ángulo de corte, se incrementará la vida de la máquina de gran manera.

### Veamos el efecto de la interacción AB

```
ypAB<-tapply(y,AB,mean)  
ypAB  
  
##      -1      1  
## 41.66667 40.00000  
  
ABefe<-ypAB[2]-ypAB[1]  
ABefe  
  
##      1  
## -1.666667
```

El efecto de la interacción AB (velocidad de corte y geometría de la herramienta) es negativo y pequeño, esto indica que la interacción entre la velocidad de corte y geometría de la herramienta, disminuirá la vida de la máquina de forma no tan grande.

### Veamos el efecto de la interacción AC

```
ypAC<-tapply(y,AC,mean)  
ypAC  
  
##      -1      1  
## 45.25000 36.41667  
  
ACefe<-ypAC[2]-ypAC[1]  
ACefe
```



```
##      1
## -8.833333
```

El efecto de la interacción AB (velocidad de corte y ángulo de corte) es negativo y grande, esto indica que la interacción entre la velocidad de corte y el ángulo de corte, disminuirá la vida de la máquina de gran manera.

### Veamos el efecto de la interacción BC

```
ypBC<-tapply(y,BC,mean)
ypBC

##      -1      1
## 42.25000 39.41667

BCefe<-ypBC[2]-ypBC[1]
BCefe

##      1
## -2.833333
```

El efecto de la interacción BC (geometría de la herramienta y ángulo de corte) es negativo y regular, esto indica que la interacción entre la geometría de la herramienta y el ángulo de corte, disminuirá la vida de la máquina.

### Veamos el efecto de la interacción ABC

```
ypABC<-tapply(y,ABC,mean)
ypABC

##      -1      1
## 41.91667 39.75000

ABCEfe<-ypABC[2]-ypABC[1]
ABCEfe

##      1
## -2.166667
```

El efecto de la interacción ABC (velocidad de corte, geometría de la herramienta y ángulo de corte) es negativo y regular, esto indica que la interacción entre la velocidad de corte con la geometría de la herramienta y el ángulo de corte, disminuirá la vida de la máquina.

### b) Desarrolla e interpreta el análisis de varianza (con sus respectivas pruebas de hipótesis).

Obtenemos el modelo

```
mod<-lm(y~A+B+C+ A*B+A*C+B*C + A*B*C)
summary(mod)

##
## Call:
```



```
## lm(formula = y ~ A + B + C + A * B + A * C + B * C + A * B *
## C)
##
## Residuals:
## Min 1Q Median 3Q Max
## -5.667 -3.500 -1.167 3.167 10.333
##
## Coefficients:
##      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 40.8333   1.1211  36.421 < 2e-16 ***
## A          0.1667   1.1211   0.149 0.883680
## B          5.6667   1.1211   5.054 0.000117 ***
## C          3.4167   1.1211   3.048 0.007679 **
## A:B        -0.8333   1.1211  -0.743 0.468078
## A:C        -4.4167   1.1211  -3.939 0.001172 **
## B:C        -1.4167   1.1211  -1.264 0.224475
## A:B:C       -1.0833   1.1211  -0.966 0.348282
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 5.492 on 16 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.7696, Adjusted R-squared:  0.6689
## F-statistic: 7.637 on 7 and 16 DF, p-value: 0.0003977
```

Se observa en el resumen que se obtienen una significancia en relación a los efectos descritos anteriormente: Influencia del efecto B, C y AC.

Realizemos la suma de cuadrados y ANOVA correspondiente

```
# sumas de cuadrados y ANVA
anva<-aov(mod)
summary(anva)

##      Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
## A      1  0.7    0.7    0.022 0.883680
## B      1 770.7  770.7   25.547 0.000117 ***
## C      1 280.2  280.2    9.287 0.007679 **
## A:B     1  16.7   16.7    0.552 0.468078
## A:C     1 468.2  468.2   15.519 0.001172 **
## B:C     1  48.2   48.2    1.597 0.224475
## A:B:C    1  28.2   28.2    0.934 0.348282
## Residuals 16 482.7   30.2
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Nos planteamos las siguientes hipótesis:

### Hipótesis sobre la interacción general

$H_0$ : No existe efecto significativo de la interacción en la vida de la máquina

$H_1$ : Existe efecto significativo de la interacción en la vida de la máquina



$F: 0.934, p_{valor} = 0.35 > 0.05$  no se rechaza  $H_0$

**Conclusión:** No existe un efecto significativo en las interacciones con respecto a la vida de la máquina.

### Hipótesis sobre la interacción entre A y B

$H_0$ : No existe efecto significativo de la interacción entre la velocidad de corte y geometría de la herramienta

$H_1$ : Existe efecto significativo de la interacción entre la velocidad de corte y geometría de la herramienta

$F: 0.552, p_{valor} = 0.47 > 0.05$  no se rechaza  $H_0$

**Conclusión:** No existe un efecto significativo en la interacción de la velocidades de corte y geometría de la herramienta con respecto a la vida de la máquina.

### Hipótesis sobre la interacción entre A y C

$H_0$ : No existe efecto significativo de la interacción entre la velocidad de corte y ángulo de corte

$H_1$ : Existe efecto significativo de la interacción entre la velocidad de corte y ángulo de corte

$F: 15.519, p_{valor} = 0.001 < 0.05$  se rechaza  $H_0$

**Conclusión:** Existe un efecto significativo en la interacción de la velocidad de corte y ángulo de corte con respecto a la vida de la máquina.

### Hipótesis sobre la interacción entre B y C

$H_0$ : No existe efecto significativo de la interacción entre la geometría de la herramienta y ángulo de corte

$H_1$ : Existe efecto significativo de la interacción entre la geometría de la herramienta y ángulo de corte

$F: 1.597, p_{valor} = 0.22 > 0.05$  no se rechaza  $H_0$

**Conclusión:** No existe un efecto significativo en la interacción de la geometría de la herramienta y ángulo de corte con respecto a la vida de la máquina.

### Hipótesis sobre el efecto del factor A

$H_0$ : No existe efecto significativo del factor velocidad de corte sobre la vida de la máquina

$H_1$ : Existe efecto significativo del factor velocidad de corte sobre la vida de la máquina

$F: 0.022, p_{valor} = 0.88 > 0.05$  no se rechaza  $H_0$

**Conclusión:** No existe un efecto significativo del factor velocidad de corte sobre la vida de la máquina.

### Hipótesis sobre el efecto del factor B

$H_0$ : No existe efecto significativo del factor geometría de la herramienta sobre la vida de la máquina

$H_1$ : Existe efecto significativo del factor geometría de la herramienta sobre la vida de la máquina

$F: 25.547, pvalor = 0.0001 < 0.05$  se rechaza  $H_0$

**Conclusión:** Existe un efecto significativo del factor geometría de la herramienta sobre la vida de la máquina.

### Hipótesis sobre el efecto del factor C

$H_0$ : No existe efecto significativo del factor ángulo de corte sobre la vida de la máquina

$H_1$ : Existe efecto significativo del factor ángulo de corte sobre la vida de la máquina

$F: 9.287, pvalor = 0.008 < 0.05$  se rechaza  $H_0$

**Conclusión:** Existe un efecto significativo del factor ángulo de corte sobre la vida de la máquina.

### c) Genera el modelo de regresión para verificar cumplimiento de supuestos.

El modelo de regresión que se considera para realizar el chequeo de supuesto está dado por

$$y = \beta_0 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_5 X_1 X_3$$

Donde:

- $X_1 = -1$ , si la velocidad de corte es 40.67, caso contrario  $X_1 = 1$ , si la velocidad de corte es 41
- $X_2 = -1$ , si la geometría de la herramienta es 35.17, caso contrario  $X_2 = 1$ , si la geometría de la herramienta es 46.5
- $X_3 = -1$ , si el ángulo de corte es 37.42, caso contrario  $X_3 = 1$ , si el ángulo de corte es 44.25

El modelo estaría expresado de la siguiente forma

```
mod1<-lm(y~B+C+A*C)
summary(mod1)

##
## Call:
## lm(formula = y ~ B + C + A * C)
```



```
##
## Residuals:
##   Min     1Q   Median     3Q      Max
## -7.3333 -4.3750 -0.4167  2.9583 11.5000
##
## Coefficients:
##           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 40.8333    1.1236  36.342 < 2e-16 ***
## B           5.6667    1.1236   5.043 7.22e-05 ***
## C           3.4167    1.1236   3.041 0.006724 **
## A           0.1667    1.1236   0.148 0.883641
## C:A        -4.4167    1.1236  -3.931 0.000897 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 5.504 on 19 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.7253, Adjusted R-squared:  0.6674
## F-statistic: 12.54 on 4 and 19 DF, p-value: 3.688e-05
```

El cual el modelo de regresión generado sería el siguiente

$$Y = 40.83 + 5.67X_2 + 3.42X_3 - 4.42X_1X_3$$

Halleemos los errores para realizar los respectivos supuestos posteriores

```
CME<-deviance(mod1)/df.residual(mod1)
beta1<-coefficients(mod1)
I<-rep(1,length(y))
X<-cbind(I,B,C,A,AC)
yest<-X%*%beta1
e<- y-yest
e

##           [,1]
## [1,] -5.1666667
## [2,] -4.3333333
## [3,] -3.5000000
## [4,]  7.3333333
## [5,]  1.1666667
## [6,]  5.6666667
## [7,]  5.8333333
## [8,] -6.6666667
## [9,]  3.8333333
## [10,] 6.6666667
## [11,] -4.5000000
## [12,] -0.6666667
## [13,]  2.1666667
## [14,]  2.6666667
## [15,] -4.1666667
## [16,] -4.6666667
## [17,] -2.1666667
## [18,] -7.3333333
## [19,] 11.5000000
```





```
## [20,] -1.6666667
## [21,] -4.8333333
## [22,] 1.6666667
## [23,] -0.1666667
## [24,] 1.3333333
```

```
H<-X%%solve(t(X)%%X)%%t(X)
ri<-e/sqrt(CME*(1-diag(H)))
ri
```

```
##      [,1]
## [1,] -1.05494671
## [2,] -0.88479402
## [3,] -0.71464132
## [4,] 1.49734372
## [5,] 0.23821377
## [6,] 1.15703833
## [7,] 1.19106887
## [8,] -1.36122156
## [9,] 0.78270240
## [10,] 1.36122156
## [11,] -0.91882456
## [12,] -0.13612216
## [13,] 0.44239701
## [14,] 0.54448863
## [15,] -0.85076348
## [16,] -0.95285509
## [17,] -0.44239701
## [18,] -1.49734372
## [19,] 2.34810720
## [20,] -0.34030539
## [21,] -0.98688563
## [22,] 0.34030539
## [23,] -0.03403054
## [24,] 0.27224431
```

```
H<-X%%solve(t(X)%%X)%%t(X)
ri<-e/sqrt(CME*(1-diag(H)))
ri
```

```
##      [,1]
## [1,] -1.05494671
## [2,] -0.88479402
## [3,] -0.71464132
## [4,] 1.49734372
## [5,] 0.23821377
## [6,] 1.15703833
## [7,] 1.19106887
## [8,] -1.36122156
## [9,] 0.78270240
## [10,] 1.36122156
## [11,] -0.91882456
## [12,] -0.13612216
```



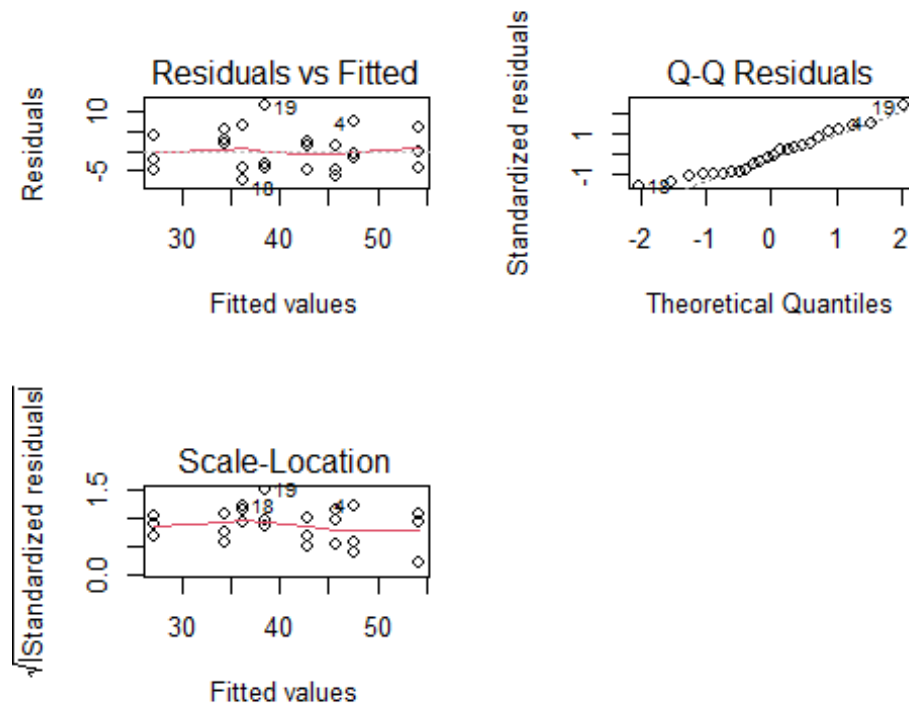
```
## [13,] 0.44239701  
## [14,] 0.54448863  
## [15,] -0.85076348  
## [16,] -0.95285509  
## [17,] -0.44239701  
## [18,] -1.49734372  
## [19,] 2.34810720  
## [20,] -0.34030539  
## [21,] -0.98688563  
## [22,] 0.34030539  
## [23,] -0.03403054  
## [24,] 0.27224431
```

#### d) Comprueba los supuestos.

Veamos un gráfico general de los supuestos

```
par(mfrow=c(2,2))  
plot(mod1)
```

```
## hat values (leverages) are all = 0.2083333  
## and there are no factor predictors; no plot no. 5
```



Se observa que la varianza se mantiene igual indicando que se observa homogeneidad de varianzas y así mismo también se observa una normalidad en el QQ plot, realizemos los supuestos para corroborar estas hipótesis.



### Supuesto de Normalidad de Residuos

Nos planteamos la hipótesis

$H_0$ : Los residuos tienen distribución normal

$H_1$ : Los residuos no tienen distribución normal

```
ri<-rstandard(mod1)
shapiro.test(ri)

##
## Shapiro-Wilk normality test
##
## data: ri
## W = 0.953, p-value = 0.3143

library(nortest)
ad.test(ri)

##
## Anderson-Darling normality test
##
## data: ri
## A = 0.40199, p-value = 0.3323
```

**Conclusión:** se observa que en la prueba de Shapiro Wilk y Anderson Darling se tienen un  $pvalor > 0.05$  por lo que no se rechaza  $H_0$  en el que se concluye que los residuos tienen una distribución normal.

### Supuesto de Varianza constante

Nos planteamos la hipótesis

$H_0$ : La varianza es constante (homogeneidad de varianzas)

$H_1$ : La varianza no es constante (no homogeneidad de varianzas)

```
library(car)

## Loading required package: carData

ncvTest(mod1)

## Non-constant Variance Score Test
## Variance formula: ~ fitted.values
## Chisquare = 0.07052264, Df = 1, p = 0.79058
```

**Conclusión:** se observa que en la prueba de Breusch Pagan se tienen un  $pvalor = 0.79 > 0.05$  por lo que no se rechaza  $H_0$  en el que se concluye que se cumple el supuesto de homogeneidad.

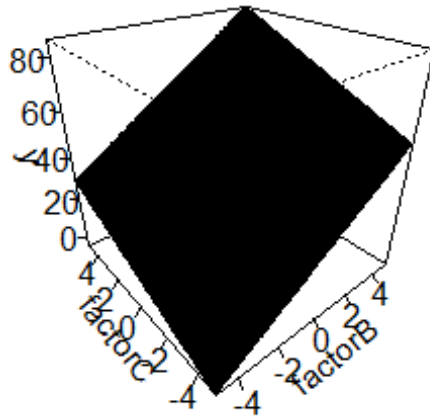
- e) **Indique cual seria el modelo de regresión y grafique una superficie de respuesta.**

Volvamos a traer el modelo de regresión y generemos el gráfico de superficie.

$$Y = 40.83 + 5.67X_2 + 3.42X_3 - 4.42X_1X_3$$

### **FACTOR B y C**

```
modBC<-function(x2,x3){40.83+5.67*x2+3.42*x3}
x2<-seq(-5,5,0.05)
x3<-seq(-5,5,0.05)
z<-outer(x2,x3,modBC)
par(mfrow=c(1,1))
persp(x2,x3,z,theta=-40,phi=30,ticktype="detailed",
      xlab="factorB",
      ylab="factorC",
      zlab="y")
```



En el que se observa que la menor vida se encuentran en niveles bajos de B y C