Universidad José Carlos Mariátegui

Escuela Profesional de Ingeniería Agronómica

EXPERIMENTACIÓN AGRÍCOLA

MOQUEGUA – PERÚ

2009

INTRODUCCION

La Universidad Jose Carlos Mariategui, entre muchos de sus objetivos academicos, es precisamente la formacion de Investigadores, que puedan aportar nuevos conocimientos tecnico - cientifico y con esto contribuir al desarrollo sostenible de la agricultura de la Region y del pais.

Para esto dentro del plan de estudios curricular de la Carrera Profesional de Ingenieria Agronomica tiene insertado el curso de Diseños Experimentales con la finalidad de darle a los estudiantes las herramientas y tecnicas necesarias para investigacion.

Podemos decir también que los diseños experimentales son las formas que se han ideado para arreglar las parcelas y satisfacer las necesidades de cada experimento, sus objeti vos y el cultivo de que se trate. No es más que el esquema de distribución de las variantes en el experimento.

El objetivo fundamental que se persigue la tasignatura es conocer los fundamentos teoricos y practicos para interpretar las evaluaciones de la poblacion.

El contenido esta orientado a estudiar las tecnicas y principios para planear y ejecutar experimentos, analisis de regresion, diseños en bloques, cuadrado latino, parcelas divididas o parcelas separadas entre otras.

INDICE

DISEÑOS EXPERIMENTALES

En la experimentación Agrícola, conjuntamente con la adecuada definición de los elementos fundamentales que componen el experimento, la decisión acerca del diseño experimental que deberá ser aplicado constituye uno de los aspectos decisivos dentro de la fase de planificación de las investigaciones.
El diseño experimental como tal puede ser definido como la disposición en tiempo y espacio de las variantes o tratamientos.
Podemos decir también que los diseños experimentales son las formas que se han ideado para arreglar las parcelas y satisfacer las necesidades de cada experimento, sus objetivos y el cultivo de que se trate.
No es más que el esquema de distribución de las variantes en el experimento.
El objetivo fundamental que se persigue al seleccionar el diseño experimental es asegurar condiciones iguales para la comparación de las variantes, eliminando al máximo la variabilidad de la fertilidad del suelo.
Requisitos que debe satisfacer un diseño experimental:

1) Debe asegurar condiciones iguales para todas las variantes experimentales.
2) De ajustarse a los principios de la aleatoriedad que permitan analizar los mismos por métodos estadísticos.
3) Debe ser simple y que posibilite la conducción adecuada de los mismos.

DISEÑOS DE BLOQUES

En este grupo se encuentran los diseños de mayor utilización en la práctica de la experimentación agrícola actual.
Estos diseños poseen tres características fundamentales.

1. La replicación.
2. El control local o técnicas de los bloques.
3. La aleatorización.

La influencia de la replicación de los tratamientos experimentales fue analizada por Cochran y Cox (1965) quienes señalan que la réplica resultan importantes para hacer coincidir el resultado estadístico y biológico de los datos experimentales bajo ciertas condiciones de investigaciones. La repetición de cada tratamiento en el experimento reduce, de forma general el error típico y por tanto incrementa la precisión experimental.
La característica del control local o técnicas de bloqueo le confiere a estos diseños la ventaja de poder detectar y la posibilidad de eliminar o remover del error experimental, en el caso de los experimentos de campo, la variabilidad por la heteroneidad del suelo entre esos bloque.
La aleatorización de los tratamientos permite la utilización de métodos estadísticos en el procesamiento de los datos, ofrece la posibilidad de cualquier unidad elemental tenga la misma probabilidad de recibir un tratamiento u otro, puede tener otra ventaja como es evitar el efecto de la variante vecina, puesto que no siempre un tratamiento experimental tendrá a su lado el mismo tratamiento.
Los diseños de bloques pueden ser agrupados en diseño de bloques completos y diseño de bloques incompleto.
Los diseños de bloque completo contienen en cada bloque todos los tratamientos experimentales, por lo que cada bloque constituye una réplica del experimento.
Los diseños de bloques incompletos contienen solo una parte de los tratamientos experimentales en cada bloque, por ello cada bloque no constituye una réplica del experimento.

TRANSFORMACIONES DE DATOS.

Entre las suposiciones del análisis de varianza están las siguientes:
a). Que las distintas muestras se han sacado de poblaciones cuyas distribuciones son normales.
b). Que las poblaciones de dichas muestras cuentan con varianza iguales.

Existen ciertos casos en los cuales desde un principio se puede afirmar que los datos disponibles no cuentan con una distribución normal, por lo que se deben llevar a cabo transformaciones para acercar dichos datos a una distribución normal.
Para verificar si los datos siguen una distribución normal se somete a una prueba de X^2 .

I. NÚMEROS DÍGITOS.
A veces se obtienen resultados con números pequeños, en su mayoría números dígitos ejemplo conteo de frutos, conteo de insectos en campos bien tratados etc. En este caso los datos originales (números dígitos se sustituyen por su raíz cuadrado. Cuando hay valores de cero, se añade 0,5 a todos los datos originales antes de sacar la raíz cuadrada.

Transformaciones para números dígitos
$X' = \sqrt{X}$ (sin valores cero)
$X' = \sqrt{0.5 + X}$ (con valores de cero)

Ejemplo:

Conteo de números de frutos por plantas:
a). Datos originales:

Variedades			
V1	V2	V3	V4
5	0	2	7
6	3	1	3
1	2	0	8

b). Datos transformados: $X' = \sqrt{0.5 + X}$

Variedades			
V1	V2	V3	V4
2.34	0.71	1.58	2.74
2.55	1.97	1.22	1.67
1.22	1.58	0.71	2.92

Con estos datos transformados, se realiza el análisis de varianza de la forma habitual.

II. CAMPO GRANDE DE VARIACIÓN.

En los casos donde existen diferencias muy grandes entre los diferentes valores de los tratamientos se recomienda una transformación logarítmica. Por ejemplo se pueden encontrar unos pocos insectos en una parcela tratada con una sustancia efectiva, mientras que en otras no tratadas la cantidad de insectos pudren alcanzar valores muy grandes.

Transformaciones para un campo grande de variación en los datos
$X' = \log . X$ (sin valores cero)
$X' = \log(X + 1)$ (con valores de cero)

Ejemplo:
Conteos de insectos en 8 parcelas.
100; 1000; 200; 500; 300; 50; 2000 y 400.
Estos datos no presentan una distribución normal, sin embargo si se consideran los logaritmos se aproximan a una distribución normal.

Log. 2.0; 3.0; 2.3; 2.7; 2.5; 1.7; 3.3 y 2.6.

III. FRECUENCIAS RELATIVAS.

Las frecuencias relativas, están sujetas a la distribución binomial que a veces puede diferir notablemente de una distribución normal, sobre todo cuando los datos son muy pequeños y muy grandes. Se debe realizar la transformación de los datos si la mayoría de estos no se encuentran entre un 30 y 70%.

Transformaciones para porcentajes
X' = $2\,arcsen\sqrt{P}$ P = %

Ejemplo:
Porciento de germinación de 3 variedades
a). Datos originales

Variedades		
V1	V2	V3
85	90	90
88	92	93
87	94	92

b). Datos transformados.

Variedades		
V1	V2	V3
2.3462	2.4981	2.4981
2.4341	2.5681	2.6062
2.4039	2.6467	2.5681

PROCESAMIENTO ESTADÍSTICO E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS EXPERIMENTALES.

DISEÑO COMPLETAMENTE AL AZAR CON DESIGUAL NÚMERO DE OBSERVACIONES POR TRATAMIENTO.

Este diseño constituye una excepción dentro de los diseños de bloque por el hecho de que en su estructura no existe una organización en bloques de los tratamientos experimentales.
Exige unidades experimentales homogéneas.
Los tratamientos y las réplicas se asignan al azar a las unidades experimentales.
Este diseño puede ser utilizado para experimentos unifactoriales y multifactoriales.
Es propio para experimentos de laboratorios y semilaboratorios.
La principal dificultad del mismo es su bajo grado de precisión, por cuanto no tiene restricciones en lo que se refiere a la ubicación de los tratamientos, por lo que éstos no aparecen en grupos más homogéneos. Como la aleatorización no es restringida de manera alguna, para asegurar que las unidades que reciben un tratamiento sean similares a las que reciben otro tratamiento, toda la variación entre las unidades experimentales se refleja en el error experimental. Sin embargo esto es compensado en parte por el mayor número de grados de libertad que se logran para el error, con un mismo número de tratamientos y unidades experimentales.

Modelo matemático.

$Y_{ij} = \mu + T_i + e_{ij}$

Y_{ij}= es el j ésimo elemento perteneciente al i ésimo tratamiento.

μ = es la media general.

T_i = efecto debido al i ésimo tratamiento.

E_{ij}= error experimental asociado al j ésimo elemento del i ésimo tratamiento.

EJEMPLO:

En un experimento bajo el diseño completamente al azar se compararon 4 cepas nativas de Azotobacter, en el cultivo del pimiento variedad Verano 1, donde se evaluó como variable principal la altura de las plantas a los 35 días

TRATAMIENTOS					
	Tunas1	**Tunas 19**	**Tunas 52**	**Tunas 27**	$\sum$
	45	46	45	38	
	47	48	43	39	
	42	51	47	40	
	44	52	44	37	
		50	45	38	
				40	
$\sum$	178	247	224	232	881

De acuerdo al modelo, los datos pueden representarse en una tabla de la siguiente forma:

TRATAMIENTOS			
1	**2**	**3**	**4**
X_{11}	X_{21}	X_{31}	X_{41}
X_{12}	X_{22}	X_{32}	X_{42}
X_{13}	X_{23}	X_{33}	X_{43}
X_{14}	X_{24}	X_{34}	X_{44}
	X_{25}	X_{35}	X_{45}
			X_{46}

La hipótesis que se va a probar es:
H_0: $T_1 = T_2 = T_3 = T_4$ vs H_1 : Al menos 2 tratamientos diferentes.
Esta hipótesis se prueba con un análisis de varianza, como se muestra a continuación:

$$SDC_{Total} = \sum X_i^2 - \frac{\left(\sum X_i\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Total} = 45^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 40^2 - \frac{881^2}{20}$$

$= 372.95$

$$SDC_{Trat.} = \frac{\sum\left(\sum trat.\right)^2}{\#\text{ de obs. en cada trat.}} - \frac{\left(\sum X_i\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Trat.} = \frac{178^2}{4} + \frac{247^2}{5} + \frac{224^2}{5} + \frac{232^2}{6} - \frac{881^2}{20}$$

$= 320.61667$

$$SDC_{error} = SDC_{total} - SDC_{Trat.}$$

$= 372.95\text{-}320.616679$
$= 52.333333$

$$Gl_{total} = N - 1$$

$= 20 – 1 = 19$

$$Gl_{trat.} = \#Trat. - 1$$

$= 4 – 1 = 3$

$$Gl_{error} = Gl_{total} - Gl_{Trat.}$$

$= 19 – 3 = 16$

$$S^2_{trat.} = \frac{SDC_{trat.}}{Gl_{trat}} = \frac{320.61667}{3} = 106.87222$$

$$S^2_{error} = \frac{SDC_{error}}{Gl_{error}} = \frac{52.33333}{16} = 3.27083$$

$$Fcal_{trat.} = \frac{S^2_{trat}}{S^2_{error}} = \frac{106.87222}{3.27083} = 32.67$$

F. de variación	Gl	SDC	S^2	Fcal	Ftab	
					5%	1%
Tratamientos	3	320.61667	106.87222	32.67	3.24	5.19
Error	16	52.33333	3.27083			
Total	19	372.95				

En la tabla de análisis de varianza se encontró que la **Fcal** es mayor que la **Ftab** a ambos niveles de significación, por lo tanto se rechaza la hipótesis nula, entonces se concluye que al menos un tratamiento es diferente a los demás, sin embargo, no se sabe que tratamientos son iguales o diferentes, por lo que es necesario hacer una comparación de medias.

Para comparar las medias de los tratamientos hay diferentes métodos los que estudiaremos con más detalle después del diseño bloques al azar.

Desarrollaremos el más simple que es el de la mínima diferencia significativa.

Calculamos las medias de todos los tratamientos.

$$\bar{x}_{trat.1} = \frac{\sum Trat.1}{n_1} = \frac{178}{4} = 49.5$$

$$\bar{x}_{trat.2} = \frac{\sum Trat.2}{n_2} = \frac{247}{5} = 44.80$$

$$\bar{x}_{trat.3} = \frac{\sum Trat.3}{n_3} = \frac{224}{5} = 44.5$$

$$\bar{x}_{trat.4} = \frac{\sum Trat.4}{n_4} = \frac{232}{6} = 38.67$$

Calculamos el error estándar de la media.

$$EE = \sqrt{\frac{2 \cdot S^2_{error}}{\# deobs.por\ trat.}}$$

Para el caso de desigual número de observacion4es por tratamiento lo calculamos:

$$EE = \sqrt{S^2_{error} \cdot \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

ni = # de observaciones en el tratamiento *i*
n_j = # de observaciones en el tratamiento *j*

Buscamos el valor en la tabla de t de student.
$t_{\propto,gle}$ = t de student se busca en la tabla con el nivel de significación dado y los grados de libertad del error.
Para $\propto$ = 0.05 y gl del error = 16, el valor de la tabla es 2.12

Calcular el valor de diferencia mínima significativa

$DMS = t_{\propto,gl} \cdot EE$
Comparar las diferencias entre las medias de los tratamientos con el valor de la *DMS*.
Si la diferencia entre las medias es mayor que DMS entonces las medias difieren significativamente.

En el caso del ejemplo:
Para la comparación de los tratamientos 2 y 3:

$$DMS = 2.12 \cdot \sqrt{3.27083\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)}$$

=2.42

49.50 – 44.80 = 4.6>2.42 por lo que existe diferencia entre los tratamientos 2 y 3.

Para la comparación de los tratamientos 3 y 1:

$$DMS = 2.12 \cdot \sqrt{3.27083\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)}$$

$$= 2.57$$

44.80 – 44.50 = 0.3<2.57 por lo que no existe diferencia entre los tratamientos 3 y 1.

Para la comparación de los tratamientos 3 y 4:

$$DMS = 2.12 \cdot \sqrt{3.27083\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)}$$

$$= 2.32$$

44.80 – 38.67 = 6.13> 2.32 por lo que existe diferencia entre los tratamientos 3 y 4.

Para la comparación de los tratamientos 1 y 4:

$$DMS = 2.12 \cdot \sqrt{3.27083\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)}$$

$$= 2.47$$

44.50 – 38.67 = 5.83> 2.47 por lo que existe diferencia entre los tratamientos 1 y 4.

Los resultados de la comparación de medias se presentan en una tabla identificando con letras diferentes a las medias que difieren significativamente.

Tratamientos	n_i	**Medias**	**Significación**
Tunas 19	5	49.50	a
Tunas 52	5	44.80	b
Tunas 1	4	44.50	b
Tunas 27	6	38.67	c

Las cepas 52 y 1 tienen un comportamiento similar existiendo diferencias entre estas y las demás, siendo la de mejor comportamiento la 19 al recibir una mayor estimulación en el crecimiento las plantas y la peor la 27.

DISEÑO COMPLETAMENTE AL AZAR CON IGUAL NÚMERO DE OBSERVACIONES POR TRATAMIENTO.

Modelo matemático.

$Y_{ij} = \mu + T_i + e_{ij}$

Y_{ij}= es el j ésimo elemento perteneciente al i ésimo tratamiento.

μ = es la media general.

T_i = efecto debido al i ésimo tratamiento.

E_{ij}= error experimental asociado al j ésimo elemento del i ésimo tratamiento.

EJEMPLO:

1.-Se realizó un experimento en el cultivo del plátano fruta (Musa AAAB), clon FHIA 01v1 utilizando un diseño completamente al azar con el objetivo de evaluar 3 frecuencias de riego. Los tratamientos fueron los siguientes:

T1: Regar diariamente (7riegos).

T2: Regar interdiario (3,5 riegos)

T3: Regar cada 3 días (2 riegos semanales).

Se probó cada frecuencia en un campo de una unidad rotacional en un sistema de riego localizado. En cada campo se muestrearon 20 plantas.

Para evaluar los tratamientos se utilizó como variable:

a) **Peso del racimo en Kg.**

Trat 1	Trat 2	Trat 3	Total
35.5	35.5	28.6	
36.1	38.9	29.1	
38.3	43.3	25.5	
33.7	46.7	33.2	
39.2	40.1	24.3	
42.3	38.2	25.5	
45.1	36.5	26.2	
36.7	34.2	25.1	
35.1	33.8	24.7	
36.9	33.9	23.2	
42.3	35.1	21.4	
45.6	32.1	25.6	
40.1	32.3	28.7	
38.7	36.6	29.3	
39.1	35.7	22.5	
33.7	44.3	27.7	
38.9	41.1	29.9	
33.2	40.6	28.6	
36.6	33.5	27.2	
45.1	34.7	25.7	
772.2	**747.1**	**532.4**	**2051.7**

$$SDC_{Total} = \sum X_i^2 - \frac{\left(\sum X_i\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Total} = 35.3^2 + ... + 25.7^2 - \frac{2051.7^2}{60}$$

=2503.669333

$$SDC_{Trat.} = \frac{\sum\left(\sum trat.\right)^2}{\#\text{ de obs. en cada trat.}} - \frac{\left(\sum X_i\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Trat} = \frac{772.2^2 + 747.1^2 + 532.4^2}{20} - \frac{2051.7^2}{60}$$

= 1742.101333

$$SDC_{error} = SDC_{total} - SDC_{Trat.}$$

=2503.669333 - 1742.101333

=761.568

$$Gl_{total} = N - 1$$

= 60 – 1 = 59

$$Gl_{trat.} = \# Trat. - 1$$

= 3 – 1 = 2

$$Gl_{error} = Gl_{total} - Gl_{Trat.}$$

= 59 – 2 = 57

$$S^2_{trat.} = \frac{SDC_{trat.}}{Gl_{trat}} = \frac{1742.101333}{2} = 871.050667$$

$$S^2_{error} = \frac{SDC_{error}}{Gl_{error}} = \frac{761.568}{57} = 13.360842$$

$$Fcal_{trat.} = \frac{S^2_{trat}}{S^2_{error}} = \frac{871.050667}{13.360842} = 65.19$$

Fuentes de variación	Gl	SDC	S^2	Fcal	Ftab	
					5 %	1 %
Tratamiento	2	1742.101333	871.050667	65.19	3.17	5.01
Error	57	761.568	13.360842			
Total	59	2503.669333				

Como se observa en la tabla 1 la Fcal es mayor que la Ftab por lo que podemos concluir diciendo que existen diferencias significativas entre los tratamientos, pero no sabemos entre cuales por lo que debemos aplicar una prueba de comparación de medias.
Nota: la explicación en detalles de cada prueba de comparación de medias aparece después del diseño de bloques al azar.

Comparación de medias por la prueba de Duncan.

Tratamientos	Medias	Significación	EE
1	38.6	A	0.817338.
2	37.36	A	
3	26.6	B	

Como podemos observar en la prueba de comparación de medias entre el tratamiento 1 y 2 no existen diferencias; ambos tratamientos difieren del tratamiento 3, por lo que podemos aplicar cualquiera de los dos normas de riego o sea T1 o T2.

DISEÑO DE BLOQUES AL AZAR

Es el de más fácil ejecución.
El bloque es la unidad básica y es igual a las réplicas porque contiene todas las variantes, las que están distribuidas al azar. La forma de los bloques puede ser cuadrada o rectangular.
El diseño es idóneo para experimentos de variedades, así como experimentos agrotécnicos.
Puede ser utilizado en experimentos unifactoriales y multifactoriales.
La forma, el tamaño y la orientación de los bloques se deben hacer buscando la homogeneidad dentro de ellos.
Los tratamientos se asignan al azar dentro de cada bloque.
El número de tratamientos no deben ser muy grande, con el fin de garantizar la homogeneidad de cada bloque.
Este diseño tiene el inconveniente que solo se puede eliminar la variabilidad entre réplicas.
Entre sus ventajas podemos señalar:

- Economía en el trabajo experimental.
- Puede utilizarse tanto un numero pequeño o grande de variantes.
- Puede aplicársele anova a loa datos (elimina el efecto de la desigualdad de la fertilidad y establece la diferencia entre variantes con mayor seguridad.

El diseño tiene el inconveniente, que solo se puede eliminar la variabilidad de la fertilidad del suelo entre réplicas, siendo en este sentido inferior a otros diseños más complejos.

Modelo matemático.

$Y_{ij} = \mu + T_i + \beta_j + e_{ij}$

Y_{ij}= es la j ésima parcela dentro del i ésimo tratamiento.
μ = es la media general.
T_i = efecto debido al i ésimo tratamiento.
β_j = efecto del j ésimo bloque
E_{ij}= error experimental asociado al j ésimo bloque del i ésimo tratamiento.

EJEMPLO:

1.- En un experimento bajo el diseño de bloques al azar se compararon 4 normas de riego en el cultivo del plátano fruta clón “Cavendish gigante”en el ciclo de fomento.

Los tratamientos evaluados fueron:
T1- Regar cuando la humedad en el suelo llegue a 0,40 bar (40 centibar).
T2- Regar cuando la humedad en el suelo llegue a 0,45 bar.(45 centibar)
T3- Regar cuando la humedad en el suelo llegue a 0,5 bar (50 centibar).
T4- No regar.

Para evaluar los tratamientos se utilizó como variable principal:

Rendimiento expresado en toneladas por hectárea, los datos son los siguientes.

	Réplicas					
Tratamientos	I	II	III	IV	V	$\sum$
1	47,99	48,0	47,98	48,78	47,20	239.95
2	44,22	44,01	44,45	44,13	44,31	221.12
3	42,58	42,30	42,86	42,11	43,06	212.91
4	37,66	37,30	38,02	37,25	37,0	187.23
$\sum$	172.45	171.61	173.31	172.27	171.57	861.21

De acuerdo al modelo los datos pueden expresarse en una tabla de la siguiente forma:

	RÉPLICAS				
TRATAMIENTOS	I	II	III	IV	V
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}
3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	X_{35}
4	X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}	X_{45}

Las hipótesis que se van a probar son:

H_0 : T1 = T2 = T3 = T4 vs Al menos un tratamiento desigual
H_0 : R1 = R2 = R3 = R4 vs Al menos una réplica desigual.

Estas hipótesis se prueban mediante un análisis de varianza.
Realizaremos el análisis del rendimiento expresado en toneladas por hectárea.
Pasos a seguir:

Cálculo de las sumas de las desviaciones cuadradas.

$$SDC_{Total} = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{N}$$

$$SDC_{Total} = 47.99^2 + ... + 37^2 - \frac{861.21^2}{20}$$

$= 289.6289$

$$SDC_{Trat.} = \frac{\sum(\sum trat.)^2}{\#\ \text{de obs. en cada trat.}} - \frac{(\sum X_i)^2}{N}$$

$$SDC_{Trat} = \frac{239.95^2 + 221.12^2 + 212.91^2 + 187.23^2}{5} - \frac{861.21^2}{20}$$

$=287.0274.$

$$SDC_{Re\,p.} = \frac{\sum(\sum Re\,p.)^2}{\#\ \text{de obs. en cada Rep.}} - \frac{(\sum X_i)^2}{N}$$

$$SDC_{\mathrm{Re}\,p} = \frac{172.45^2 + 171.61^2 + 173.31^2 + 172.27^2 + 171.57^2}{4} - \frac{861.21^2}{20}$$

$= 0.5117188$

$$SDC_{error} = SDC_{total} - (SDC_{trat.} + SDC_{Re\,p.})$$

$=289.6289 – (287.0274 + 0.5117188)$
$=2.089844$

$$Gl_{total} = N - 1$$

$= 20 – 1$
$= 19$

$$Gl_{trat.} = \#Trat. - 1$$

$= 4 – 1$
$= 3$

$$Gl_{Re\,p.} = \#\,Re\,p. - 1$$

$= 5 – 1$
$= 4$

$$Gl_{error} = Gl_{total} - (Gl_{Trat.} - Gl_{Re\,p})$$

$= 19 – (3 + 4)$

= 12

$$CM_{trat.} = \frac{SDC_{trat.}}{Gl_{trat}} = \ . \frac{287.0274}{3} = 95.6778$$

$$CM_{\operatorname{Re} p.} = \frac{SDC_{\operatorname{Re} p}}{Gl_{\operatorname{Re} p}} = \frac{0.5117188}{4} = 0.129297$$

$$CM_{error} = \frac{SDC_{error}}{Gl_{error}} = \frac{2.089844}{12} = 0.1741536$$

$$Fcal_{trat.} = \frac{S^2_{trat}}{S^2_{error}} = \frac{95.6778}{0.171536} = 549.376$$

$$Fcal_{\operatorname{Re} p.} = \frac{S^2_{\operatorname{Re} p}}{S^2_{error}} = \frac{0.129297}{0.1741536} = 0.735$$

La tabla de análisis de varianza es:

CAUSAS DE VARIACIÓN	GL	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADO MEDIO	Fcal	Ftab.	
					5 %	1 %
RÉPLICA	4	0.5117188	0.1279297	0.735	3.26	5.41
TRATAMIENTO	3	287.0274	95.6778	549.376	3.49	5.95
ERROR	12	2.089844	0.1741536			
TOTAL	19	289.6289				

CV = 0.9691 %

En el análisis de varianza podemos observar que para el caso de los 3 tratamientos, en este caso las 4 normas de riego, existen diferencias ya que la Fcal es mayor que la Ftab, con probabilidad de error menor de 0.01. Por lo tanto al menos uno de los tratamientos es diferente a los demás. Para encontrar cuales tratamientos difieren significativamente es necesario hacer una comparación de medias. Entre las réplicas no existen diferencias.

Como no sabemos entre cuales tratamientos existen diferencias, debemos aplicar una prueba de comparación de medias.

COMPARACIONES DE MEDIAS

En el caso de los tratamientos sin estructura, que son los tratamientos entre los cuales no existe ninguna relación entre ellos, ejemplo un conjunto de variedades se pueden comparar por cualquiera delos métodos de comparación de medias como son: MDS, Duncan, Tukey, SNK, Scheffé, etc.
Los tratamientos cualitativos con estructura, que son los tratamientos que pueden ser agrupados en cuanto a alguna característica, por ejemplo un conjunto de 4 variedades, dos precoces y dos tardías, se comparan con contrastes ortogonales.
En los tratamientos cuantitativos, por ejemplo niveles de fertilización (0, 40, 80, Kg./ha de N), se utilizan los polinomios ortogonales, para estudiar las tendencias: lineal, cuadrática, cúbica, etc
No quiere esto decir que no podamos aplicar en cada uno de estos casos otros métodos de comparación de medias, siendo recomendable para tratamientos cualitativos la prueba de Duncan, y para cuantitativos Tukey u otra prueba.
La MDS debe ser aplicada para pocos tratamientos.

MÉTODO DE COMPARACIÓN DE MEDIAS POR LA MÍNIMA DIFERENCIA SIGNIFICATIVA

Calculamos las medias de todos los tratamientos.

$$\bar{x}_{trat.1} = \frac{\sum Trat.1}{n_1} = \frac{239.95}{5} = 47.99$$

$$\bar{x}_{trat.2} = \frac{\sum Trat.2}{n_2} = \frac{221.12}{5} = 44.224$$

$$\bar{x}_{trat.3} = \frac{\sum Trat.3}{n_3} = \frac{212.91}{5} = 42.582$$

$$\bar{x}_{trat.4} = \frac{\sum Trat.4}{n_4} = \frac{187.23}{5} = 37.446$$

Calculamos el error estándar de la media.

$$EE = \sqrt{\frac{2 \cdot S^2_{error}}{\#de\,obs.por\,trat.}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.1741536}{5}} = 0.2639$$

Buscamos el valor en la tabla de t de student.

$t_{\propto,gle}$ = t de student se busca en la tabla con el nivel de significación dado y los grados de libertad del error.
Para $\propto$ = 0.05 y gl del error = 12, el valor de la tabla es 2.18

Calcular el valor de diferencia mínima significativa

$DMS = t_{\propto,gl} \, . \, EE$

$DMS = 2.18 \; X \; 0.2639 = 0.575302$

Comparar las diferencias entre las medias de los tratamientos con el valor de la *DMS.*
Si la diferencia entre las medias es mayor que DMS entonces las medias difieren significativamente y lo identificamos con un asterisco, de no haber diferencias ponemos NS.

Confeccionamos una tabla de doble entrada.

	T4 37.446	T3 42.582	T2 44.224
T1 47.99	10.544 *	5.408 *	3.766 *
T2 44.224	6.778 *	1.642 *	
T3 42.582	5.136 *		

Los resultados de esta tabla los mostramos de la forma siguiente:

TRATAMIENTOS	**MEDIAS**	**SIGNIFICACIÓN**	
		5 %	1 %
T1	47.99	A	a
T2	44.224	B	b
T3	42.582	C	c
T4	37.446	D	d
DMS		0.5751	0.8063

Como resultado de la comparación de medias podemos observar que existen diferencias entre las 4 normas de riego aplicadas, siendo la mejor regar cuando la humedad del suelo sea de 0,40 bar.

COMPARACIÓN DE MEDIAS POR DUNCAN

Pasos a seguir:
Calculamos las medias
Se calcula el error Standard

$$EE = \sqrt{\frac{S^2_{error}}{\#\, de\, obs.\, por\, trat.}} = \sqrt{\frac{0.1741536}{5}} = 0.1866$$

Buscamos los percentiles en la tabla de Duncan con:
Nivel de significación $\propto$
p (pasos entre las medias) = 2; 3; .....t
Grados de libertad del error

En nuestro ejemplo

$\propto$ = 5 %		**$\propto$ = 1 %**	
p	q	p	q
2	3.08	2	4.32
3	3.22	3	4.50
4	3.31	4	4.62

Se obtienen los rangos mínimos estudentizados (RME) multiplicando q por el error standard.

$\propto$ = 5 %			**$\propto$ = 1 %**		
p	**q**	**RME**	**p**	**q**	**RME**
2	3.08	0.574728	2	4.32	0.806112
3	3.22	0.600852	3	4.50	0.8397
4	3.31	0.617646	4	4.62	0.862092

Se comparan las medias, de tal forma de que si el valor absoluto de la diferencia de dos medias es mayor que el RME correspondiente, entonces hay diferencias entre los tratamientos y se simboliza con un asterisco.

Confeccionamos una tabla de doble entrada.

	T4 37.446	**T3** 42.582	**T2** 44.224
T1 47.99	10.544 *	5.408 *	3.766 *
T2 44.224	6.778 *	1.642 *	
T3 42.582	5.136 *		

Los resultados obtenidos se muestran en la tabla siguiente:

TRATAMIENTOS	MEDIAS	SIGNIFICACIÓN	
		5 %	1 %
T1	47.99	a	a
T2	44.224	b	b
T3	42.582	c	c
T4	37.446	d	d
EE		0.1866	0.1866

Como podemos observar existen diferencias entre los 4 tratamientos, siendo el de mejor comportamiento regar cuando la humedad del suelo es de 0.40 bar

COMPARACIÓN DE MEDIAS POR TUKEY
Pasos a seguir:
Cálculo de las medias
Se calcula el error standard de igual forma que en Duncan

$$EE = \sqrt{\frac{S^2_{error}}{\#\, de\, obs.por\, trat.}} = \sqrt{\frac{0.1741536}{5}} = 0.1866$$

Se busca en la tabla de Tukey, con el nivel de significación, los grados de libertad del error y el número de medias que estamos comparando el valor de Tukey (rango estudentizado, RE)
RE = 4.20

Se obtiene el rango mínimo estudentizado (RME) multiplicando RE por el error standard.

RME = RE x EE = 4.20 x 0.1866 = 0.78372

Confeccionamos una tabla de doble entrada.

	T4 37.446	**T3** 42.582	**T2** 44.224
T1 47.99	10.544 *	5.408 *	3.766 *
T2 44.224	6.778 *	1.642 *	
T3 42.582	5.136 *		

Los resultados de esta tabla se muestran a continuación:

TRATAMIENTOS	**MEDIAS**	**SIGNIFICACIÓN**	
		5 %	1 %
T1	47.99	a	a
T2	44.224	b	b
T3	42.582	c	c
T4	37.446	d	d
VALORES DE LA TABLA		4.20	5.50
TUKEY		0.7838	1.0276

Como resultado de la comparación de medias podemos observar que existen diferencias entre las 4 normas de riego aplicadas, siendo la mejor regar cuando la humedad del suelo sea de 0,40 bar.

COMPARACIÓN DE MEDIAS POR EL MÉTODO DE STUDENT- NEWMAN- KEULS (SNK)

Esta prueba es similar a la prueba de Duncan pero con las tablas de Tukey.

Pasos a seguir:
Calculo de las medias,

Se calcula el error standard de igual forma que en Duncan

$$EE = \sqrt{\frac{S^2_{error}}{\#\, de\, obs.\, por\, trat.}} = \sqrt{\frac{0.1741536}{5}} = 0.1866$$

Se obtiene en la tabla de Tukey, con el nivel de significación, los pasos entre las medias y los grados de libertad del error los rangos estudentizados (RE).

En nuestro ejemplo

∝ = 5 %		**∝ = 1 %**	
p	RE	p	RE
2	3.08	2	4.32
3	3.77	3	5.05
4	4.20	4	5.50

Se obtienen los rangos mínimos estudentizados (RME) multiplicando q por el error standard.

∝ = 5 %			**∝ = 1 %**		
p	RE	**RME**	**p**	RE	**RME**
2	3.08	0.574728	2	4.32	0.806112
3	3.77	0.703482	3	5.05	0.94233
4	4.20	0.78372	4	5.50	1.0263

Se comparan las medias, de tal forma de que si el valor absoluto de la diferencia de dos medias es mayor que el RME correspondiente, entonces hay diferencias entre los tratamientos y se simboliza con un asterisco.

Confeccionamos una tabla de doble entrada.

	T4 37.446	**T3** 42.582	**T2** 44.224
T1 47.99	10.544 *	5.408 *	3.766 *
T2 44.224	6.778 *	1.642 *	
T3 42.582	5.136 *		

Los resultados de esta tabla se muestran a continuación:

TRATAMIENTOS	MEDIAS	SIGNIFICACIÓN	
		5 %	1 %
T1	47.99	a	a
T2	44.224	b	b
T3	42.582	c	c
T4	37.446	d	d
VALORES DE LA TABLA		4.20	5.50
TUKEY		0.7838	1.0276

Como resultado de la comparación de medias podemos observar que existen diferencias entre las 4 normas de riego aplicadas, siendo la mejor regar cuando la humedad del suelo sea de 0,40 bar.

COMPARACIÓN DE MEDIAS POR EL MÉTODO DE SCHEFFÉ.

El procedimiento de la prueba es el siguiente:
Se ordenan las medias de mayor a menor:

Tratamientos	Medias
T1	47.99
T2	44.224
T3	42.582
T4	37.445

Se calcula

$$Scheff\acute{e} = \sqrt{(t-1)F_{\alpha,t-1,n}\frac{CM_e}{r}}$$

$F\alpha, t-1, n$ =VALOR TABULADO DE F CON T-1 Y N GRADOS DE LIBERTAD DEL ERROR CON UN NIVEL DE SIGNIFICACIÓN $\propto$
t-1= No de tratamientos – 1= 4 – 1 = 3.
CM_e= cuadrado medio del error.
r= No de observaciones en cada tratamiento.
Si el nivel de significación es del 1 %, entonces F=5.95

$$Scheff\acute{e} = \sqrt{3(5.95)\frac{0.1741536}{5}} = 0.79$$

Se comparan las medias, de tal forma que si el valor absoluto de la diferencia de dos medias es mayor que Scheffé entonces hay diferencias.

	T4 37.446	**T3** 42.582	**T2** 44.224
T1 47.99	10.544 *	5.408 *	3.766 *
T2 44.224	6.778 *	1.642 *	
T3 42.582	5.136 *		

Los resultados de esta tabla se muestran a continuación:

TRATAMIENTOS	**MEDIAS**	**SIGNIFICACIÓN**	
		5 %	1 %
T1	47.99	a	a
T2	44.224	b	b
T3	42.582	c	c
T4	37.446	d	d
VALORES DE LA TABLA		3.49	5.95
Scheffé		0.871	1.0276

Como resultado de la comparación de medias podemos observar que existen diferencias entre las 4 normas de riego aplicadas, siendo la mejor regar cuando la humedad del suelo sea de 0,40 bar.

BLOQUE AL AZAR CON UNA PARCELA FALTANTE.

En los experimentos de campo en algunos casos debido a baja emergencia de plantas, daños de animales, daños de maquinaria u otros daños mecánicos, se puede perder la información de alguna parcela experimental.
Cuando se pierde información de alguna parcela, no es posible analizar el experimento debido a que el diseño requiere para su análisis de igual número de repeticiones por tratamiento. Por lo que es necesario hacer una estimación de la observación faltante.

EJEMPLO:
Se realizó un experimento con un diseño de bloques al azar con el objetivo de evaluar el Biostín comercial en 4 variedades de tomate. La segunda réplica del tratamiento 2 hubo que eliminarlo. Estime el valor de la parcela faltante y realice el análisis de varianza.

I	T2	T1	T3	T4
II	T1	T3	T4	T2
III	T3	T4	T2	T1
IV	T4	T2	T1	T3

T A B L A   D E   D A T O S

VARIABLE: rendimiento

	Bloques				Total
Tratamientos	I	II	III	IV	
1	15	20	25	18	78
2	21		16	15	52
3	20	18	25	15	79
4	17	15	19	22	73
Total	73	58	85	70	281

La observación del tratamiento 2 de la réplica 2 será estimada mediante la siguiente ecuación:

$$Y_{ij} = \frac{tT_i + rR_j - G}{(t-1)(r-1)}$$

Donde:
Y_{ij}= Valor estimado.
T_i Valor del tratamiento que contiene a la parcela perdida.

R_j Valor de la réplica que contiene a la parcela perdida.
G Total de todas las observaciones.
Número de tratamientos = t
Número de réplicas = r

Para estimar el dato perdido.

$$Y_{ij} = \frac{4(52) + 4(53) - 281}{(4-1)(4-1)}$$

=15.4444

VARIABLE: rendimiento

	Bloques			
Tratamientos	I	II	III	IV
1	15	20	25	18
2	21	15.444	16	15
3	20	18	25	15
4	17	15	19	22

A N A L I S I S D E V A R I A N Z A

Fuentes de Variación	Gl	SDC	CM	Fcal	Ftab	
					5%	1%
Tratamientos	3	18.980957	6.326986	0.4444	3.34	5.56
Bloques	3	42.202637	14.067546	0.9882	3.34	5.56
Error	8	113.889648	14.236206			
Total	14	175.073242				

Como Fcal es menor que Ftab no existen diferencias entre tratamientos ni entre réplicas.
De encontrarse diferencias, o sea si Fcal es mayor que Ftab para el caso de los tratamientos realizamos la comparación de medias.
Para la comparación de medias de tratamientos con todas las observaciones completas se utiliza:

$$DMS = t_{(\alpha;gle)}\sqrt{\frac{2CMerror}{Nodeobserv.encadaTto.}} \qquad (1)$$

Para la comparación de medias del tratamiento que contiene la parcela perdida contra cualquier otro tratamiento se utiliza:

$$DMS = t_{(\alpha,Glerror)}\sqrt{CM_e\left[\frac{2}{r} + \frac{t}{r(r-1)(t-1)}\right]} \qquad (2)$$

El criterio de prueba es: si el valor absoluto de la diferencia entre dos medias de tratamientos en donde no esté incluido el tratamiento de la parcela perdida es mayor que la DMS calculada en (1) entonces las medias son diferentes. Si el tratamiento de la parcela perdida está incluido en la prueba, entonces el valor de la DMS para la comparación se calcula por (2).

CONTRASTES ORTOGONALES.

Los contrastes ortogonales se utilizan cuando se tienen un conjunto de tratamientos cualitativos con estructura, de tal forma que es conveniente comparar un tratamiento contra el promedio de otros tratamientos o un conjunto de tratamientos contra otro conjunto de tratamientos. Es decir, se prueban hipótesis de la forma:

H_O: $3T_1 - T_2 - T_3 - T_4 = 0$ vs Hl : $3T_1 - T_2 - T_3 - T_4 \neq 0$

Esta hipótesis compara el efecto del tratamiento 1 contra el promedio de los efectos de los tratamientos 2, 3, 4.

H_O: $T_1 + T_2 - T_3 - T_4 = 0$ vs Hl : $T_1 + T_2 - T_3 - T_4 \neq 0$

Esta hipótesis compara el efecto conjunto del tratamiento 1 y 2 contra el efecto conjunto de los tratamientos 3 y 4.

En general se prueban hipótesis de la forma:

$$H_0 : \sum_{i=1}^{t} \lambda_i t_{i=0} \text{ vs } H_l : \sum_{i=1}^{t} \lambda_i t_{i\neq 0} ; con \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 0$$

A la combinación lineal de tratamientos $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i t_i$ se le llama contraste, en donde los λ_i son los coeficientes del contraste.

Dos contrastes (C1 y C2) son ortogonales si $\sum_{i=1}^{t} \lambda_{i1}\lambda_{i2} = 0$

Por ejemplo si los contrastes son:

C1 = T1 + T2 – T3 – T4

C2 = T1 – T2

C3 = T3 – T4

Entonces la tabla de coeficientes de los contrastes es:

	T1	T2	T3	T4
C1	1	1	-1	-1
C2	1	-1	0	0
C3	0	0	-1	1

Los contrastes C1 y C2 son ortogonales porque:

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_{i1}\lambda_{i2} = \lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22} + \lambda_{31}\lambda_{32} + \lambda_{41}\lambda_{42}$$

$$= (1)(1) + (1)(-1) + (-1)(0) + (-1)(0) = 0$$

Los contrastes C1 y C3 son ortogonales porque:

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_{i1}\lambda_{i3} = \lambda_{11}\lambda_{13} + \lambda_{21}\lambda_{23} + \lambda_{31}\lambda_{33} + \lambda_{41}\lambda_{43}$$

$$= (1)(0) + (1)(0) + (-1)(-1) + (-1)(1) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_{i2}\lambda_{i3} = \lambda_{12}\lambda_{13} + \lambda_{22}\lambda_{23} + \lambda_{32}\lambda_{33} + \lambda_{42}\lambda_{43}$$

$$= (1)(0) + (-1)(0) + (0)(-1) + (0)(1) = 0$$

En un conjunto de tratamientos se pueden obtener conju7nto de t-1 contrastes ortogonales.

EJEMPLO:

Consideremos un experimento donde se compararon 4 variedades de maíz con un diseño de bloques al azar.

Variedad 1. Precoz resistente.
Variedad 2. Precoz susceptible.
Variedad 3. Tardía resistente.
Variedad 4. Tardía susceptible.
Los datos del rendimiento son:

	Tratamientos				
Réplica	T1	T2	T3	T4	Total
I	6	5	7	8	26
II	7	6	7	9	29
III	7	7	8	8	30
IV	8	8	9	10	35
V	7	8	9	9	33
Total	35	34	40	44	153

El análisis de varianza se calcula de acuerdo al análisis del diseño de bloques al azar:

Fuentes de variación	Gl	SDC	CM	Fcal	Ftab	
					5%	1%
Réplicas	4	12.30	3.075	11.18	3.26	5.41
Tratamientos	3	12.95	4.3166	15.70	3.49	5.95
Error	12	3.3	0.2750			
Total	19	28.55				

Las hipótesis que se desean probar son:

H_0: T1 + T2 – T3 – T4 = 0 vs Hl : T1 + T2 – T3 – T4 ≠ 0
H_0: T1 - T2 = 0 vs Hl : T1 - T2 ≠ 0
H_0: T3 – T4 = 0 vs Hl : T3 – T4 ≠ 0

La primera hipótesis compara las variedades precoces contra tardías la segunda hipótesis compara las dos variedades precoces y la tercera hipótesis compara las dos variedades tardías.

Estas hipótesis se prueban en un análisis de varianza.

La suma de cuadrados de tratamientos se particiona en tres partes, una para cada contraste.

La tabla de los contraste es la que vimos anteriormente.

La suma de cuadrados para contraste es:

$$SC(contrastej) = \frac{C_j^2}{r\sum_{i=1}^{t} C_{ij}^2}$$

Donde:

$$C_j = \sum_{i=1}^{t} C_{ij} T_i$$ C_{ij} = coeficiente del tratamiento i en el contraste j

T_i = Total del tratamiento i.

La suma de los cuadrados son:

$$SC_{(Contraste1)} = \frac{C_1^2}{r\sum_{i=1}^{t} C_{i1}^2} = \frac{(T_1 + T_2 - T_3 - T_4)^2}{r\left(C_{11}^2 + C_{21}^2 + C_{31}^2 + C_{41}^2\right)}$$

$$= \frac{(35 + 34 - 40 - 44)^2}{5\left[(1)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2\right]} = 11.25$$

$$SC_{(Contraste2)} = \frac{C_2^2}{r\sum_{i=1}^{t} C_{i2}^2} = \frac{(T_1 - T_2)^2}{r\left(C_{12}^2 + C_{22}^2 + C_{32}^2 + C_{42}^2\right)}$$

$$= \frac{(35 - 34)^2}{5\left[(1)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (0)^2\right]} = 0.1$$

$$SC_{(Contraste3)} = \frac{C_1^2}{r\sum_{i=1}^{t} C_{i3}^2} = \frac{(T_3 - T_4)^2}{r\left(C_{13}^2 + C_{23}^2 + C_{33}^2 + C_{43}^2\right)}$$

$$= \frac{(40 - 44)^2}{5\left[(0)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (-1)^2\right]} = 1.6$$

La tabla de análisis de varianza es:

Fuentes de Variación	Gl	SC	CM	Fcal	Ftab	
Bloques	4	12.30	3.0750	11.18	3.26	5.41
Tratamientos	3	12.95	4.3166	15.70	3.49	5.95
C_1	1	11.25	11.2500	40.90	4.75	9.33
C_2	1	0.10	0.1000	0.36	4.75	9.33
C_3	1	1.60	1.6000	5.82	4.75	9.33
Error	12	3.30	0.2750			
Total	19	28.55				

El análisis de varianza muestra que el efecto conjunto de los tratamientos 1 y 2 es diferente al efecto conjunto de los tratamientos 3 y 4. Los tratamientos 1 y 2 no son diferentes. Los tratamientos 3 y 4 difieren significativamente.

POLINOMIOS ORTOGONALES

Los polinomios ortogonales se utilizan cuando se tiene un conjunto de tratamientos cuantitativos y nos interesa saber la tendencia de la respuesta. Las tendencias pueden ser lineal, cuadrática, cúbica, etc.
En el análisis de polinomios ortogonales, la suma de cuadrados de tratamientos se descompone en t-1 suma de cuadrados, cada una con un grado de libertad. Cada suma de cuadrados representa un efecto: lineal, cuadrático, etc. La tendencia para la partición de la suma de cuadrados de tratamientos es igual a la de contrastes ortogonales.
Cuando los tratamientos están igualmente espaciados, los coeficientes de los tratamientos de los contrastes son:
Para tres tratamientos:

Efecto	T1	T2	T3
Lineal	-1	0	1
Cuadrático	1	-2	1

Para cuatro tratamientos:

Efecto	T1	T2	T3	T4
Lineal	-3	-1	1	3
Cuadrático	1	-1	-1	1
Cúbico	-1	3	-3	1

Para cinco tratamientos:

Efecto	T1	T2	T3	T4	T5
Lineal	-2	-1	0	1	2
Cuadrático	2	-1	-2	-1	2
Cúbico	-1	2	0	-2	1
Cuártico	1	-4	6	-4	1

Para seis tratamientos:

Efecto	T1	T2	T3	T4	T5	T6
Lineal	-5	-3	-1	1	3	5
Cuadrático	5	-1	-4	-4	-1	5
Cúbico	-5	7	4	-4	-7	5
Cuártico	1	-3	2	2	-3	1
Quinto	-1	5	-10	10	-5	1

Para más de 6 tratamientos los coeficientes aparecerán al final del ejercicio resuelto (es importante aclarar que aparecerán los coeficientes en sentido vertical).

EJEMPLO:
Se realizó un experimento con un diseño de bloques al azar, con el objetivo de comparar 4 normas de riego en plátano fruta, clon "Cavendish gigante". Las normas fueron:

T1: 20 mm semanales
T2: 40 mm semanales
T3: 60 mm semanales
T4: 80 mm semanales

T A B L A   D E   D A T O S

VARIABLE: Rendimiento final

	Réplicas			
Tratamientos	I	II	III	IV
1	38.3	37.8	38.1	38.4
2	69.2	65.6	67.8	69.1
3	53.7	52.8	54.1	55.6
4	45.6	44.3	46.1	44.8

A N A L I S I S   D E   V A R I A N Z A

F. de variación	Gl	SDC	CM	Fcal	Ftab	
					5 %	1 %
Tratamientos	3	1976.332031	658.777344	914.3512	3.86	6.99
Réplicas	3	8.179688	2.726563	3.7843	3.86	6.99
Error	9	6.484375	0.720486			
Total	15	1990.996094				

C.V. = 1.653602%

T A B L A   D E   M E D I A S

Tratamientos	Medias
1	38.150002
2	67.924995
3	54.050003
4	45.200001

T A B L A   D E   COEFICIENTES

Tratamiento	T1	T2	T3	T4
C1	-3	-1	1	1
C2	1	-1	-1	1
C3	-1	3	-3	1

La suma de cuadrados de los contrastes es:

$$SDC(Lineal) = \frac{C_1^2}{r\sum_{i=1}^{t} c_{i1}^2} = \frac{(-3T1 - T2 + T3 + T4)}{r(C_{11}^2 + C_{21}^2 + C_{31}^2 + C_{41}^2)}$$

$$SDC_{(Lineal)} = \frac{[-3(152.6) - 271.7 + 216.2 + 3(180.8)]^2}{4[(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2]}$$

=10.599710

$$SDC(Cuadrática) = \frac{C_2^2}{r\sum_{i=1}^{t} C_{i2}^2} = \frac{(T1 - T2 - T3 + T4)^2}{r(C_{12}^2 + C_{22}^2 + C_{32}^2 + C_{42}^2)}$$

$$SDC_{(Cuadrática)} = \frac{(152.6 - 271.7 - 216.2 + 180.8)^2}{4[1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2]}$$

=1491.503784

$$SDC_{(Cúbica)} = \frac{C_3^2}{r\sum_{i=1}^{t} C_{i3}^2} = \frac{(-T1 + 3T2 - 3T3 + T4)}{4[C_{13}^2 + C_{23}^2 + C_{33}^2 + C_{43}^2]}$$

$$SDC_{(Cúbica)} = \frac{[-152.6 + 3(271.7) - 3(216.2) + 180.8]^2}{4[(-1)^2 + 3^2 + (-3)^2 + 1^2]}$$

=473.558899

A N A L I S I S   D E   V A R I A N Z A

F. de variación	Gl	SDC	CM	Fcal	Ftab	
Lineal	1	10.599710	10.599710	14.711889	5.12	10.56
Cuadrático	1	1491.503784	1491.503784	2072.135734	5.12	10.56
Cúbico	1	473.558899	473.558899	657.277044	5.12	10.56
Error	9	6.484374	0.720486			

Los resultados muestran que los efectos lineal, cuadrático y cúbico son altamente significativos, por lo que los datos se pueden ajustar al siguiente modelo de regresión:

$$Y_{ij} = B_0 + B_1 N_i + B_2 N_i^2 + e_{ij}$$

i = 1, 2......t
j = 1, 2......r

Donde:

Y_{ij} es la observación del tratamiento i en la réplica j

B_0, B_1 y B_2 son los coeficientes de regresión

N_i es la norma de riego aplicada a la unidad experimental ij

e_{ij} es el error experimental.

Con este modelo se puede hacer una estimación de la dosis óptima fisiológica.

Coeficientes de polinomios ortogonales.

Para N = 7.

-3	5	-1	+3	-1
-2	0	+1	-7	+4
-1	-3	+1	+1	-5
0	-4	0	+6	0
1	-3	-1	+1	+5
2	0	-1	-7	-4
3	5	+1	+3	+1

N = 8

-7	+7	-7	+7	-7
-5	+1	+5	+13	+23
-3	-3	+7	-3	-17
-1	-5	+3	+9	-15
+1	-5	-3	+9	+15
+3	-3	-7	-3	+17
+5	+1	-5	-13	-23
+7	+7	+7	-7	+7

N = 9

-4	+28	-14	+14	-4
-3	+7	+7	-21	+11
-2	-8	+13	-11	-4
-1	-17	+9	+9	-9
0	-20	0	+18	0
+1	-17	-9	+9	+9
+2	-8	-13	-11	+4
+3	+7	-7	-21	-11
+4	+28	+14	+14	+4

N = 10

-9	+6	-42	+18	-6
-7	+2	+14	-22	+14
-5	-1	+35	-17	-1
-3	-3	+31	+3	-11
-1	-4	+12	+18	-6
+1	-4	-12	+18	+6
+3	-3	-31	+3	+11
+5	-1	-35	-17	+1
+7	+2	-14	-22	-14
+9	+6	+42	+18	+6

N = 11

-5	+15	-30	+6	-3
-4	+6	+6	-6	+6
-3	-1	+22	-6	+1
-2	-6	+23	-1	-4
-1	-9	+14	+4	-4
0	-10	0	+6	0
+1	-9	-14	+4	+4
+2	-6	-23	-1	+4
+3	-1	-22	-6	-1
+4	+6	-6	-6	-6
+5	+15	+30	+6	+3

N = 12

-11	+55	-33	+33	-33
-9	+25	+3	-27	+57
-7	+1	+21	-33	+21
-5	-17	+25	-13	-29
-3	-29	+19	+12	-44
-1	-35	+7	+28	-20
+1	-35	-7	+28	+20
+3	-29	-19	+12	+44
+5	-17	-25	-13	+29
+7	+1	-21	-33	-21
+9	+25	-3	-27	-57
+11	+55	+33	+33	+33

CUADRADO LATINO.

Este diseño presenta las siguientes características:
La disposición de las variantes del experimento sobre el terreno se hace en dos direcciones perpendiculares recíprocas y esto es lo que lo diferencia del bloque al azar.
En este las variantes se agrupan además de bloques en columnas lo que es un nuevo elemento en éste diseño.
Se puede utilizar en experimentos agrotécnicos, así como de selección de variedades, pero no es recomendable en experimentos donde se utilice la mecanización.
Elimina la variabilidad de la fertilidad del suelo en dos direcciones.
En este diseño el número de filas y columnas y de tratamientos son iguales.
Presenta la dificultad de que el mismo no se puede estudiar un número grande de variante o tratamiento.

El modelo matemático de este diseño es el siguiente:
$Y_{ijk} = \mu + T_i + F_j + C_K + \varepsilon_{ijk}$
Donde:
μ = media general
Ti = es el efecto del i-ésimo tratamiento.
Fj =es el efecto de la j-ésima fila.
Ck =es el efcto de la k-ésima columna.
ε_{ijk} =es la variación aleatoria del i-ésimo tratamiento, la j-ésima fila y la k-ésima columna (error experimental.

EJEMPLO:
En un experimento bajo el diseño de Cuadrado Latino se compararon 5 tipos de fertilizantes:
F1- NPK + 30 mg bb-16
F2- NPK + 45 mg bb-16
F3- NPK + 60 mg bb-16
F4-NPK.
F5- Sin fertilizantes.
La tabla siguiente muestra los datos del rendimiento de la soya para los 5 fertilizantes.

Filas	Columnas					
	1	2	3	4	5	Total
I	22(F1)	20(F2)	19(F3)	10(F4)	10(F5)	81
II	24(F2)	17(F3)	12(F4)	6(F5)	21(F1)	80
III	19(F3)	14(F4)	8(F5)	20(F1)	23(F2)	84
IV	16(F4)	4(F5)	25(F1)	21(F2)	16(F3)	82
V	5(F5)	23(F1)	25(F2)	11(F3)	14 (F4)	78
Total	86	78	89	68	84	405

En la tabla anterior obtenemos los totales de filas y columnas, pero debemos obtener los totales por cada tratamiento.

Tratamientos	Totales
F1	111
F2	113
F3	82
F4	66
F5	33

$$SDC_{Total} = \sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Total} = 22^2 + ... + 14^2 - \frac{405^2}{25} = 1010.000$$

$$SDC_{Trat} = \frac{\sum\left(\sum Trat^2\right)}{Nodedatosportramiento} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Trat} = \frac{111^2 + 113^2 + 82^2 + 66^2 + 33^2}{5} - \frac{405^2}{25} = 890.797$$

$$SDC_{Fila} = \frac{\sum\left(\sum Fila^2\right)}{NodedatosporFila} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Fila} = \frac{81^2 + 80^2 + 84^2 + 82^2 + 78^2}{5} - \frac{405^2}{25} = 3.997$$

$$SDC_{Columna} = \frac{\sum\left(\sum Columna^2\right)}{NodedatosporColumna} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Columna} = \frac{86^2 + 78^2 + 89^2 + 68^2 + 84^2}{5} - \frac{405^2}{25} = 55.197$$

$$SDC_{Error} = SDC_{Total} - SDC_{Trat} - SDC_{Fila} - SDC_{Columna.}$$

$$SDC_{Error} = 1010.00 - 890.797 - 3.997 - 55.197 = 60.006$$

$$Gl_{total} = N - 1$$
$= 25 – 1$
$= 24$

$$Gl_{trat.} = \#Trat. - 1$$
$= 5 – 1$
$= 4$

$$Gl_{Fila} = Nodefila - 1$$
$= 5 – 1$
$= 4$

$$GL_{Col} = NodeColumna - 1$$
$= 5 – 1$
$= 4$

$$Gl_{Error} = Gl_{Total} - Gl_{Trat} - GL_{fila} - Gl_{Col}$$
$$= 24 - (4 + 4 + 4)$$
$$= 12$$

$$CM_{trat.} = \frac{SDC_{trat.}}{Gl_{trat}} = \frac{890.797}{4} = 222.699$$

$$CM_{COL} = \frac{SDC_{Col}}{Gl_{Col}} = \frac{55.197}{4} = 13.799$$

$$CM_{Fila} = \frac{SDC_{Fila}}{Gl_{Fila}} = \frac{3.997}{4} = 0.999$$

$$CM_{Error} = \frac{SDC_{Error}}{Gl_{Error}} = \frac{60.006}{12} = 5.00$$

$$F_{Trat} = \frac{CM_{Trat}}{CM_{Error}} = \frac{222.699}{5.00} = 44.536$$

$$F_{Col} = \frac{CM_{Col}}{CM_{Error}} = \frac{13.799}{5.00} = 2.76$$

$$F_{Fila} = \frac{CM_{Fila}}{CM_{Error}} = \frac{0.999}{5.00} = 0.200$$

Tabla de análisis de varianza.

Fuentes de Variación.	Gl	SDC	CM	Fcal	Ftab	
					5%	1%
Total	24	1010.000	-			
Filas	4	3.997	0.999	0.200	3.26	5.41
Columnas	4	55.197	13.799	2.760	3.26	5.41
Tratamientos	4	890.797	222.699	44.536	3.26	5.41
Error	12	60.006	5.000			

CV = 13.80 %

Para el caso de los tratamientos existen diferencias, por lo que debemos aplicar una prueba de comparación de medias.

Prueba de comparación de medias por el método de Duncan.

Tratamientos	Medias	Significación.	$S_{\overline{X}}$
NPK + 30 mg bb-16	22.2	A	1.00
NPK + 45 mg bb-16	22.6	A	
NPK + 60 mg bb-16	16.4	B	
NPK	13.2	C	
Sin fertilizantes	6.6	D	

$P \leq 0.01$

Como podemos observar entre el tratamiento 1 y 2 no existen diferencias, pero si entre estos dos y los restantes.

PARCELA FALTANTE EN DISEÑO CUADRADO LATINO.

Al igual que para el diseño de bloques al azar la fórmula para determinar aproximadamente un dato que se perdiese en un experimento conducido con el diseño cuadrado latino es la siguiente:

$$y = \frac{r(F+C+T)-2G}{(r-1)(r-2)}$$

Donde:

Y=es el valor calculado para el dato perdido.

r =Número de réplicas.

F = es la suma de todos los datos de la fila donde se encontraba el dato perdido.

C = es la suma de todos los datos de la columna donde se perdió el dato.

T = es la suma de todos los datos restantes del tratamiento al que se le perdió el dato.

G = es la suma de todos los datos del experimento que se quedaron.

La determinación del error estándar de la diferencia para comparar la media del tratamiento que posee el dato perdido y cualesquier otro tratamiento es la siguiente:

$$ES_D = \sqrt{S^2\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{(r-1)(r-2)}\right)}$$

Donde:

S = es el cuadrado medio del error o varianza del error.

R = No de réplicas.

RECTÁNGULO LATINO.

El diseño rectángulo latino o cuadrado latino modificado tiene las características de que abarca la variabilidad de la fertilidad del suelo en dos sentidos, en el sentido de la fila y la columna, permite el uso de un número grande de tratamientos, en este el número de columnas es igual al número de filas, pero desigual al número de tratamientos, siendo este un múltiplo de filas y columnas, cada columna está formado por más de una hilera, los tratamientos no se pueden repetir ni en el sentido de las columnas, ni las filas.

Ejemplo.
Los datos obtenidos por parcela en el rendimiento industrial de 8 variedades de caña montada en un diseño rectángulo latino es el siguiente:

Réplicas	Col 1		Col 2		Col 3		Col 4		Total
I	V6 12.3	V2 15.3	V4 11.2	V3 13.6	V5 15.6	V1 12.7	V7 13.8	V8 14.3	108.8
II	V3 13.4	V1 12.1	V8 14.1	V5 15.2	V7 13.4	V6 12.2	V2 15.2	V4 11.5	107.1
III	V7 13.7	V4 11.2	V2 15.5	V1 12.6	V8 14.1	V3 13.5	V6 12.7	V5 15.3	108.6
IV	V5 15.4	V8 14.1	V6 12.4	V7 13.7	V2 15.5	V4 11	V3 13.5	V1 12.6	108.2
Total	107.5		108.3		108		108.9		432.7

Determine si existen diferencias significativas en cuanto al comportamiento de las variedades.

Variedades	Total
V1	50
V2	61.5
V3	54
V4	44.9
V5	61.5
V6	49.6
V7	54.6
V8	56.6

$$SDC_{Total} = \sum X^{''2} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Total} = 12.3^2 + \ldots + 12.6^2 - \frac{432.7^2}{32} = 60.214844$$

$$SDC_{Trat} = \frac{\sum Trat^2}{Noobservenc/Trat} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Trat} = \frac{50^2 + \ldots. + 56.6^2}{4} - \frac{432.7^2}{32} = 59.432129$$

$$SDC_{Fila} = \frac{\sum Fila^2}{NodedatosporFila} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Fila} = \frac{108.8^2 + 107.1^2 + 108.6^2 + 108.2^2}{8} - \frac{432.7^2}{32} = 0{,}2159375$$

$$SDC_{Columna} = \frac{\sum Columna^2}{NodedatosporColumna} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Columna} = \frac{107.5^2 + 108.3^2 + 108^2 + 108.9^2}{8} - \frac{432.7^2}{32} = 0{,}1284375$$

$$SDC_{Error} = SDC_{Total} - SDC_{Trat} - SDC_{Fila} - SDC_{Columna.}$$

SDC_{Error}= 60.214844 - 59.432129 - 0,2159375 - 0,1284375 = 0,44268375

Fuente de variación	Gl	SDC	CM	Fcal	Ftab	
					5%	1%
Total	31	60.214844	-			
Tratamiento	7	59.432129	8.49	339.6	2.58	3.85
Fila	3	0,2159375	0.072	2.88	3.16	5.09
Columna	3	0,1284375	0.043	1.72	3.16	5.09
Error	18	0,44268375	0.025			

Como podemos observar en el análisis de varianza existen diferencias entre los tratamientos por lo que debemos aplicar la comparación de medias.

Comparación de medias por el método de DUNCAN.

Prueba de Duncan			
Tratamientos	Medias	Significación	EE
T2	15.4	a	0.079
T4	15.3	a	
T8	14.1	b	
T7	13.6	c	
T1	12.5	d	
T6	12.3	d	
T5	12.3	d	
T3	11.2	e	

Como podemos observar en la prueba de Duncan no existen diferencias entre los tratamientos 2 y 4, pero estos difieren de los restantes tratamientos, entre los tratamientos 1, 6 y 5 no existen diferencias, siendo el de peor comportamiento el 3.

EXPERIMENTO BIFACTORIAL CON DISEÑO COMPLETAMENTE AL AZAR.

Modelo matemático.

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + e_{ijk}$$

Donde:

Y_{ijk}= es el k ésimo elemento perteneciente al j ésimo nivel del factor B y al i ésimo tratamiento del nivel del factor A.

μ = es la media general.

A_i = es el efecto debido al i ésimo nivel del factor A.

B_j = es el efecto debido al j ésimo nivel del factor B.

$(AB)_{ij}$= efecto de la interacción entre el j ésimo nivel del factor B y el i ésimo del factor B.

EJEMPLO:

Se realizó un experimento en el cultivo del plátano fruta (*Musa* AAAB) con el objetivo de evaluar 2 clones con 3 normas riego.

Los clones fueron:

C1 FHIA 01

C2 FHIA 18

Las normas de riego fueron:

N1: 25 mm semanales

N2: 44 mm semanales

N3: 80 mm semanales

Se muestreó un campo por cada tratamiento midiéndose el peso del racimo (expresado en kg) en 10 m plantones de cada campo.

Los resultados son los siguientes:

C1N1	33.0	33.2	32.9	33.7	33.4	32.6	34	33.5	33.9	32.9
C1N2	26.8	26.7	25.9	26	26.9	27.0	27.8	26.5	25.9	25
C1N3	30.0	31.0	30.8	30.7	31.8	31.9	30.6	30.3	31.1	32.2
C2N1	40.0	40.6	39.6	40.8	38.6	39.9	40.3	41.2	40.6	40.0
C2N2	30.0	29.9	29.8	30.3	30.4	39.2	30.8	31.6	31.5	31.7
C2N3	33.0	33.6	33.2	33.9	34.8	33.6	33.1	30.5	30.4	33.4

	TOTAL
C1N1	333.1
C1N2	264.5
C1N3	310.4
C2N1	401.6
C2N2	315.2
C2N3	329.5
TOTAL	1954.3

	N1	N2	N3	$\sum$
C1	333.1	264.5	310.4	908.0
C2	401.6	315.2	329.5	1046.3
$\sum$	734.7	579.7	639.9	1954.3

$$SDC_{total} = \sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{total} = 33^2 + ... + 33.4^2 - \frac{(1954.3)^2}{60}$$

$$SDC_{total} = 1096.941833$$

$$SDC_{trat} = \frac{\sum TRAT^2}{\#obs \text{ en cada trat}} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{60}$$

$$SDC_{trat} = \frac{333.3^2 + ... + 329.5^2}{10} - \frac{1954.3^2}{60}$$

$$SDC_{trat} = 991.978833$$

$$SDC_{FactorA}(clon) = \frac{\sum Niveles \text{ de A}^2}{\#\text{ obs. en c/nivel A}} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{FactorA} = \frac{908.0^2 + 1046.3^2}{30} - \frac{1954.3^2}{60} = 318.7815$$

$$SDC_{FactorB}(Riego) = \frac{\sum Niveles \text{ de B}^2}{\#\text{ obs. en c/nivel B}} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{FactorB} = \frac{734.7^2 + 579.7^2 + 639.9^2}{20} - \frac{1954.3^2}{60} = 610.601333$$

$$SDC_{InterAxB} = SDC_{Trat} - (SDC_{FactorA} + SDC_{FactorB})$$

$$SDC_{InterAxB} = 991.978833 - (318.7815 + 610.601333) = 62.596$$

$$SDC_{Error} = SDC_{total} - SDC_{Trat}$$
$$SDC_{Error} = 1096.941833 - 991.978833 = 104.963$$

O también

$$SDC_{Error} = SDC_{total} - \left(SDC_{InterAxB} + SDC_A + SDC_B\right)$$

$$SDC_{Error} = 1096.941833 - \left(62.596 + 318.7815 + 610.601333\right) = 104.963$$

Gl total = N-1 = 60-1= 59

Gl factor A(clones)= Niveles de A – 1= 2-1=1

Gl factor B (normas de riego)= Niveles de B – 1= 3-1=2

Gl interacción AxB= Gl A x Gl B = 1 x 2 = 2

Gl error= Gl total – (Gl a + Gl B + Gl AxB)

Gl error=59 – (1+2+2) = 54

$$CM_A = \frac{SDC_A}{Gl_A} = \frac{318.7815}{1} = 318.7815$$
$$CM_B = \frac{SDC_B}{Gl_B} = \frac{610.601333}{2} = 305.300667$$

$$CM_{AxB} = \frac{SDCAxB}{GlAxB} = \frac{62.596}{2} = 31.298$$

$$CM_{error} = \frac{SDC_{error}}{Gle} = \frac{104.963}{54} = 1.943759$$

Fcal A= $\dfrac{CM_A}{CM_{error}} = \dfrac{318.7815}{1.943759} = 164.00$

F cal B= $\dfrac{CM_B}{CM_{error}} = \dfrac{305.300667}{1.943759} = 157.07$

F cal AxB= $\dfrac{CM_{AxB}}{CM_{error}} = \dfrac{31.298}{1.943759} = 16.10$

ANÁLISIS DE VARIANZA.

Fuentes de Variación	GL	SDC	CM	Fcal	Ftab	
Total	59	1096.941833				
Tratamientos	5	991.978833	198.395767	102.07		
Factor A	1	318.781500	318.781500	164.00	4.02	7.12
Factor B	2	610.601333	305.300667	157.07	3.17	5.01
Int A x B	2	62.596000	31.29800	16.10	3.17	5.01
Error	54	104.96300	1.943759			

Media General = 32.571667
Desviación Standard = 1.394188
Coeficiente de variación 4.280369
Se puede observar que para el caso de los tratamientos no buscamos la significación ya que en los experimentos factoriales en los tratamientos están incluidos los factores en estudio y la interacción entre los factores.

Como resultado del análisis de varianza podemos observar que existen diferencias entre la interacción entre los factores clones y normas de riego así como entre los clones y entre las normas de riego.
La interpretación de un análisis de varianza de un experimento factorial se inicia observando el efecto de la interacción. Puede ocurrir cualquiera de los siguientes casos:

1) Si la interacción es significativa entonces debe de compararse las medias de los niveles de un factor dentro de los niveles del otro factor. En el ejemplo, se deben de comparar las medias de las dosis dentro de cada variedad; y/o las medias de las variedades dentro de cada densidad. También podemos comparar todas las medias entre sí. El error estándar para la comparación de medias es

$EE = \sqrt{\frac{2CM_{Error}}{r}}$ Para aplicar MDS

$EE = \sqrt{\frac{CM_{Error}}{r}}$ Para aplicar otra prueba que no sea MDS

r = No de réplicas.

2) Si la interacción no es significativa y los efectos principales si lo son, entonces debe de compararse las medias de los efectos principales. El error estándar para la comparación de las medias es:

Para comparar medias del factor A:

$EE = \sqrt{\frac{2CM_{Error}}{rb}}$ Para aplicar MDS.

$EE = \sqrt{\frac{CM_{Error}}{rb}}$ Para aplicar otra prueba que no sea MDS.

rb= No de réplicas por Niveles de A.

Para comparar medias del factor B:

$EE = \sqrt{\frac{2CM_{Error}}{ra}}$ Para aplicar MDS.

$EE = \sqrt{\frac{CM_{Error}}{ra}}$ Para aplicar otra prueba que no sea MDS.

rb = No de réplicas por Niveles de A.

3) Si no hay diferencia en la interacción ni en los efectos principales, no se comparan las medias. En nuestro ejemplo se encontró diferencia significativa en la interacción, por lo que es necesario comparar las medias de la s normas de riego dentro de cada clon y/o las medias de cada clon dentro de cada norma o también comparar todas contra todas..

Factor A

	Clones	Media	ES
A1	FHIA 01	30.266667	0.254543
A2	FHIA 18	34.876667	0.254543

Factor B

	Normas de riego	Media	ES
B1	25 mm semanales	36.735	0.311750
B2	44 mm semanales	28.985	0.311750
B3	80 mm semanales	31.995	0.311750

Interacción A X **B**

Tratamientos	Medias	Significación	ES
A2B1	40.16	a	0.440881
A1B1	33.31	b	
A2B3	32.95	b	
A2B2	31.52	c	
A1B3	31.04	c	
A1B2	26.45	d	

Medias con letras diferentes difieren significativamente, $P < 0.05$
Como podemos observar existen diferencias entre la combinación A2B1 con el resto de las combinaciones, no existen diferencias entre A1B1 y A2B3, ni entre A2B2 y A1B3, así como entre A1B2 y el resto de las combinaciones resultando la mejor combinación A2B1 y la peor A1B2.

EXPERIMENTO BIFACTORIAL CON DISEÑO DE BLOQUES AL AZAR.

Modelo matemático.

$Y_{ijkl} = \mu + R_i + A_j + B_k + (AB)_{jk} + e_{ijk}$

Donde:

Y_{ijk}= es la observación perteneciente al k ésimo nivel del factor B, al j ésimo nivel del factor A, en la réplica i.

μ = es la media general.

R_i = es el efecto del i ésimo bloque o réplica.

A_j = es el efecto debido al j ésimo nivel del factor A.

B_k= es el efecto debido al k ésimo nivel del factor B.

$(AB)_{ij}$= efecto de la interacción entre el k ésimo nivel del factor B y el j ésimo del factor B.

e_{ijk} = es el error experimental.

EJEMPLO.

En el CAI Majibacoa se realizó un experimento en la cepa de caña planta, en un suelo pardo sin carbonatos para evaluar la efectividad del Biobrás 16 en el crecimiento de dos variedades de caña de azúcar. El diseño utilizado fue de bloques al azar con 4 réplicas.

Las variedades utilizadas fueron: V1= C 1051-73 y V2=Ja 60-5.

Las dosis de Biobrás: D1=0.5 mg/ha y D2=1.0 mg/ha

La variable analizada fue el rendimiento en T/Ha.

Esquema del experimento:

Réplicas	Tratamientos			
I	T2	T4	TI	T3
II	T4	T1	T3	T2
III	T1	T2	T4	T3
IV	T4	T3	T1	T2

Para cada una de las variables que se desea estudiar en el experimento, se prueban las siguientes hipótesis:

Ho: V1 = V2 vs Hl: V1 $\neq$ V2

Ho: D1 = D2 vs Hl: D1 $\neq$ D2

Ho: No hay interacción vs Hl: si hay interacción.

	I	II	III	IV	$\sum$
V1D1	70	71	72	68	281
V1D2	75	74	76	75	300
V2D1	72	68	71	69	280
V2D2	70	69	72	71	282
$\sum$	287	282	291	283	1143

Efecto de los factores aislados y combinados.

	D1	D2	$\sum$
V1	281	300	581
V2	280	282	562
$\sum$	561	582	1143

$$SDC_{Total} = \sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Total} = 70^2 + \dots\dots\dots + 71^2 - \frac{1143^2}{16} = 93.9375$$

$$SDC_{\mathrm{Re}\,p} = \frac{\sum \mathrm{Re}\,p^2}{NoobservencadaRép} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{\mathrm{Re}\,p} = \frac{287^2 + 282^2 + 291^2 + 283^2}{4} - \frac{1143^2}{16} = 12.6875$$

$$SDC_{Tto} = \frac{\sum Tto^2}{NoobservencadaTto} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Tto} = \frac{281^2 + 300^2 + 280^2 + 282^2}{4} - \frac{1143^2}{16} = 68.1875$$

$$SDC_{V} = \frac{\sum Var^2}{NoobservencadaVar} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Var} = \frac{581^2 + 562^2}{8} - \frac{1143^2}{16} = 22.5625$$

$$SDC_{Dosis} = \frac{\sum Dosis^2}{NoobservencadaDosis} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Dosis} = \frac{561^2 + 582^2}{8} - \frac{1143^2}{16} = 27.5625$$

$$SDC_{VarxDosis} = SDC_{Tto} - SDC_{VAr} - SDC_{Dosis}$$

$SDC_{Var\ x\ Dosis}$=68.1875 – 22.5625 – 27.5625= 18.0625

SDC_{Error}= SDC_{Total} – SDC_{Tto} - SDC_{Rep}
SDC_{Error} =93.9375 – 68.1875 – 12.6875 = 13.0625

Gl_{Total}= No observ. Total – 1 = 16 – 1 = 15
Gl_{Rep}= No Rép – 1 = 4 – 1 = 3
Gl_{Var}= Niveles de V – 1 = 2 – 1 = 1
Gl_{Dosis}= Niveles de D – 1 = 2 – 1 = 1
$Gl_{Var\ x\ Dosis}$=Gl_{Var} x Gl_{Dosis}= 1 x 1 = 1
Gl_{Error}= Gl_{Total} – $Gl_{Rép}$ – Gl_{V} – GL_{Dosis} – $Gl_{Var\ x\ Dosis}$
Gl_{Error}= 15 – 3 – 1 – 1 – 1 = 9

$$CM_{Rép} = \frac{SDC_{Rép}}{Gl_{Rép}} = \frac{12.6875}{3} = 4.229167$$

$$CM_{Var} = \frac{SDC_{Var}}{Gl_{Var}} = \frac{22.5625}{1} = 22.5625$$

$$CM_{Dosis} = \frac{SDC_{Dosis}}{Gl_{Dosis}} = \frac{27.5625}{1} = 27.5625$$

$$CM_{VarxDosis} = \frac{SDC_{VarxDosis}}{Gl_{VarxDosis}} = \frac{18.0625}{1} = 18.0625$$

$$CM_{Error} = \frac{SDC_{Error}}{Gl_{Error}} = \frac{13.0625}{9} = 1.451389$$

$$F_{Rép} = \frac{CM_{Rép}}{CM_{Error}} = \frac{4.229167}{1.451389} = 2.9139$$

$$F_{Var} = \frac{CM_{Var}}{CM_{Error}} = \frac{22.5625}{1.451389} = 15.5455$$

$$F_{Dosis} = \frac{CM_{Dosis}}{CM_{Error}} = \frac{27.5625}{1.451389} = 18.9904$$

$$F_{Int.} = \frac{CM_{Int.}}{CM_{Error}} = \frac{18.0625}{1.451389} = 12.4450$$

A N A L I S I S D E V A R I A N Z A

Ftes de Variación	Gl	SDC	CM	Fcal	Ftab	
					5%	1%
Réplica	3	12.6875	4.229167	2.9139	3.86	6.99
Tratamiento	3	68.1875				
Var	1	22.5625	22.5625	15.5455	5.12	10.56
Dosis	1	27.5625	27.5625	18.9904	5.12	10.56
Interacción	1	18.0625	18.0625	12.445	5.12	10.56
Error	9	13.0625	1.451389			
Total	15	93.9375				

C.V. = 1.686420%

La interpretación de los resultados es similar al ejemplo para bifactorial para bloques al azar.

TABLA DE MEDIAS DEL FACTOR A

Variedades	Media
C 1051-73	72.625000
Ja 60-5	70.250000

TABLA DE MEDIAS DEL FACTOR B

Dosis de Biobrás	Media
0.5 mg/ha	70.125
1.0 mg/ha	72.750

Como se conoce en los experimentos factoriales, cuando existe diferencias en la interacción podemos aplicar las pruebas de comparación de medias comparando las medias todas contra todas, o también comparando los niveles de un factor dentro del otro factor y es lo que realizaremos en este caso.

Comparación de medias por la MDS.

	D1	D2	Media
V1	70.250A	75.000 A	72.625
V2	70.000A	70.500B	70.250
Media	70.125	72.750	71.4375

Los resultados muestran que no hay diferencias entre las variedades cuando se aplica la dosis 1, sin embargo cuando se aplica la dosis 2 la mejor variedad es la 1.

EXPERIMENTO TRIFACTORIAL CON DISEÑO COMPLETAMENTE AL AZAR

Los experimentos factoriales pueden conducirse con diseños completamente al azar, bloques al azar o cuadrado latino, al igual que los bifactoriales. Analizaremos el modelo lineal basado en un diseño completamente aleatorizado.

El modelo matemático es el siguiente:

$$Y_{ijkl} = \mu + A_i + B_j + C_K + (AB)_{ij} + (AC)_{ik} + (BC)_{jk} + (ABC)_{ijk} + E_{ijkl.}$$

Y_{ijk} = es la observación l, en el nivel i del factor A, nivel j del factor B, nivel k del factor C
μ = es la media general.
A_i es el efecto del nivel i del factor A.
B_j es el efecto del nivel j del factor B.
C_k es el efecto del nivel k del factor C.
AB_{ij} es el efecto de la interacción del nivel i del factor A y el nivel j del factor B.
AC_{ik} es el efecto de la interacción del nivel i del factor A y el nivel k del factor C.
BC_{jk} es el efecto de la interacción del nivel j del factor B y el nivel k del factor C.
ABC_{ijk} es el efecto de la interacción del nivel i del factor A, el nivel j del factor B y el nivel k del factor C.
E_{ijkl} es el error experimental.

EJEMPLO.
Se realizó un experimento el cultivo del plátano fruta con el objetivo de evaluar 3 dosis de mutágeno físico, 2 porciento de humedad de la semilla y 2 edades de la semilla.
Las dosis del mutágeno físico fueron las siguientes: Rayos Ganma: D1 100 gy; D2 200gy y D3 300 gy.
Los porcientos de humedad fueron: H1: 40 % y H2 20 %.
Las edades de la semilla; E1 6 meses y E2 12 meses.
Se utilizó un diseño completamente al azar con 4 observaciones por tratamiento.
Se ofrecen los datos del porciento de supervivencia de plantas en la generación M2.

TRATAMIENTOS	RÉPLICAS				$\sum$
	i	II	III	IV	
D1H1E1	80.1	82.3	82.5	78.5	323,4
D1HIE2	75.3	75.6	76.2	75	302,1
DIH2E1	75.3	74.8	74.5	76.7	301,3
DIH2E2	73.1	70.3	72.7	71.8	287,9
D2H1E1	54.6	56.6	54.7	55.1	221
D2HIE2	50.8	51.3	52.6	50.9	205,6
D2H2E1	74.7	73.8	74	72.6	295,1
D2H2E2	69.5	68.6	70.1	68	276,2
D3HIE1	64.3	62.6	63	63.8	253,7
D3HIE2	60.6	61.1	62	61	244,7
D3H2E1	43.2	45.4	44	44.9	177,5
D3H2E2	40.8	39.9	40	40.1	160,8
$\sum$	810	819	796	807	3049,3

Para cada una de las variables que se desea estudiar en el experimento, se prueban las siguientes hipótesis:
H_0: D1=D2 = D3 vs Hl: D1 $\neq$ D2 $\neq$ D3
H_0: H1=H2 vs Hl: H1 $\neq$ H2
H_0: E1=E2 vs Hl: E1 $\neq$ E2
H_0: no hay interacción DH vs Hl: hay interacción DH
H_0: no hay interacción DE vs Hl: hay interacción DE
H_0: no hay interacción HE vs Hl: hay interacción HE
H_0: no hay interacción DHE vs Hl: hay interacción DHE.

Estas hipótesis se prueban mediante el siguiente análisis de varianza:

$$SDC_{total} = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{Total} = 80.1^2 + ... + 40.1^2 - \frac{3049.3^2}{48} = 7778.156250$$

	H1	H2	$\sum$
D1	625.5	589.2	1214,7
D2	426.6	571.3	997,9
D3	498.4	338.3	836,7
$\sum$	1550.5	1498,8	3049,3

$$SDC_{FactorA} = \frac{\sum nivelesdeA^2}{NoobservenA} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{FactorA} = \frac{1214.7^2 + 997.9^2 + 836.7^2}{16} - \frac{3049.3^2}{48} = 4467.609375$$

$$SDC_{FactorB} = \frac{\sum nivelesdeB^2}{NoobservenB} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{FactorB} = \frac{1550.5^2 + 1498.8^2}{24} - \frac{3049.3^2}{48} = 107.046875$$

	E1	E2	$\sum$
D1	624.7	590.0	1214.7
D2	516.1	481.8	997,9
D3	431.2	405.5	836.7
$\sum$	1572	1477.3	3049,3

$$SDC_{FactorC} = \frac{\sum nivelesdeC^2}{NoobservenC} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{FactorC} = \frac{1572^2 + 1477.3^2}{24} - \frac{3049.3^2}{48} = 274.031250$$

$$SDC_{IntA*B} = \frac{\sum (A*B)^2}{NoobservenA*B} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N} - SDC_A - SDC_B$$

$$SDC_{INtA*B} = \frac{625.5^2 + ... + 338.3^2}{8} - \frac{3049.3^2}{48} - 4467.609375 - 107.046875$$

$$SDC_{IntA*B} = 2549.187500$$

$$SDC_{IntA*C} = \frac{\sum (A*C)^2}{NoobservenA*C} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N} - SDC_A - SDC_C$$

$$SDC_{IntA*C} = \frac{624.7^2 + ... + 405.5^2}{8} - \frac{3049.9^2}{48} - 4467.609375 - 274.031250$$

$$SDC_{IntA*C} = 26.781250$$

	E1	E2	$\sum$
H1	798,1	752.4	1550.5
H2	773.9	724.9	1498.8
$\sum$	1572	1477.3	3049.3

$$SDC_{IntB*C} = \frac{\sum (B*C)^2}{NoobservenB*C} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N} - SDC_B - SDC_C$$

$$SDC_{IntB*C} = \frac{798.1^2 + ... + 724.9^2}{12} - \frac{3049.9^2}{48} - 107.046875 - 274.031250$$

$$SDC_{IntB*C} = 5.875000$$

$$SDC_{IntA*B*C} = \frac{\sum A*B*C}{NoobservenABC} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N} - SDC_A - SDC_B - SDC_C$$
$$- SDC_{A*B} - SDC_{A*C} - SDC_{B*C}$$

$$SDC_{INtA*B*C} = \frac{324.4^2 + ... + 160.8^2}{4} - \frac{3049.3^2}{48} - 4467.609375\text{-}107.046875$$
-274.031250-2549.187500-26.781250-5.875000

$$SDC_{IntA*B*C} = 18.750000$$

$$SDC_{Error} = SDC_{Total} - SDC_{FactorA} - SDC_{FactorB} - SDC_{FactorC} - SDC_{IntA*B}$$
$$- SDC_{IntA*C} - SDC_{IntB*C} - SDC_{IntA*B*C}$$

$$SDC_{Error} = 328.875000$$

GL total=No observ. Toatl - 1=48-1=47
Gl factor A= Niveles de A-1=3-1=2
Gl factor B= Niveles de B - 1=2-1=1
Gl factor C= Niveles de C-1=2-1=1
Gl Interacción A*B= Gl A * Gl B=2*1=2
Gl Interacción A*C= Gl A * Gl C=2*1=2
Gl Interacción B*C= Gl B * Gl C=1*1=2
Gl Interacción A*B*C= Gl A * Gl B * Gl C=2*1*1=2

$$CM_{FactorA} = \frac{SDC_A}{Gl_A} = \frac{4467.609375}{2} = 2233.804688$$

$$CM_{FactorB} = \frac{SDC_B}{Gl_B} = \frac{107.046875}{1} = 107.046875$$

$$CM_{FactorC} = \frac{SDC_C}{Gl_C} = \frac{274.031250}{1} = 274.031250$$

$$CM_{IntA*B} = \frac{SDC_{A*B}}{Gl_{A*B}} = \frac{2549.187500}{2} = 1274.593750$$

$$CM_{IntA*C} = \frac{SDC_{A*C}}{Gl_{A*C}} = \frac{26.781250}{2} = 13.390625$$

$$CM_{IntB*C} = \frac{SDC_{B*C}}{Gl_{B*C}} = \frac{5.875000}{1} = 5.815$$

$$CM_{A*B*C} = \frac{SDC_{A*B*C}}{Gl_{A*B*C}} = \frac{18.75}{2} = 9.375$$

$$CM_{Error} = \frac{SDC_{Error}}{Gl_{Error}} = \frac{328.875}{36} = 9.135417$$

$$F_{calA} = \frac{CM_{A}}{CM_{Error}} = \frac{2233.804688}{9.135417} = 244.5214$$

$$F_{calB} = \frac{CM_{B}}{CM_{Error}} = \frac{107.046875}{9.135417} = 11.7178$$

$$F_{calC} = \frac{CM_{C}}{CM_{Error}} = \frac{274.03125}{9.135417} = 29.9966$$

$$F_{calA*B} = \frac{CM_{A*B}}{CM_{Error}} = \frac{2549.1875}{9.135417} = 139.5222$$

$$F_{calA*C} = \frac{CM_{A*C}}{CM_{Error}} = \frac{13.390625}{9.135417} = 1.4658$$

$$F_{calB*C} = \frac{CM_{B*C}}{CM_{Error}} = \frac{5.875}{9.135417} = 0.6431$$

$$F_{calA*B*C} = \frac{CM_{A*B*C}}{CM_{Error}} = \frac{9.375}{9.135417} = 1.0262$$

A N A L I S I S   D E   V A R I A N Z A

FV	GL	SC	CM	F	Ftab	
					5%	1%
FACTOR A	2	4467.609375	2233.804688	244.5214	3.32	5.39
FACTOR B	1	107.046875	107.046875	11.7178	4.37	7.56
FACTOR C	1	274.031250	274.031250	29.9966	4.17	7.56
A X B	2	2549.187500	1274.593750	139.5222	3.32	5.39
A X C	2	26.781250	13.390625	1.4658	3.32	5.39
B X C	1	5.875000	5.875000	0.6431	4.37	7.56
A X B X C	2	18.750000	9.375000	1.0262	3.32	5.39
ERROR	36	328.875000	9.135417			
TOTAL	47	7778.156250				

C.V. =   4.7268%

Interpretación del análisis de varianza.

1- Si la interacción de segundo orden (AxBxC) es significativa, esto indica que la interacción entre dos factores, por ejemplo BxC, es diferente en cada nivel del otro factor (A). En este caso es conveniente estudiar las interacciones BXC dentro de cada nivel de A. En estas interacciones es necesario comparar las medias de los niveles de un factor, por ejemplo C dentro de cada combinación de los otros factores (AB). El error estándar de la diferencia de dos medias en esta comparación es:

$$EE = \sqrt{\frac{2CME}{r}}$$ Para aplicar MDS

$$EE = \sqrt{\frac{CME}{r}}$$ Para aplicar otra prueba.

2- Si la interacción AxB, AxC, y/o BxC son significativas entonces se comparan las medias de los niveles de un factor dentro de los niveles del otro factor.
Si se desean comparar las medias de niveles del factor B en el mismo nivel de A, se usa el siguiente error estándar.

$$EE = \sqrt{\frac{2CME}{rc}}$$ Para aplicar MDS

$$EE = \sqrt{\frac{CME}{rc}}$$ Para aplicar otra prueba.

Si se desea comparar dos medias de los niveles del factor C en el mismo nivel de A, se usa el siguiente error estándar.

$$EE = \sqrt{\frac{2CME}{rb}}$$

EE= $\sqrt{\frac{CME}{rb}}$ Para aplicar otra prueba.

Si se desea comparar dos medias de los niveles del factor C en el mismo nivel de B, se usa el siguiente error estándar.

EE= $\sqrt{\frac{2CME}{ra}}$

EE= $\sqrt{\frac{CME}{ra}}$ Para aplicar otra prueba.

3- Si la interacción no es significativa y los efectos principales si lo son, entonces debe de compararse las medias de los 4efectos principales. El error estándar para la comparación de dos medias es:

Para comparar medias del factor A:

EE= $\sqrt{\frac{2CME}{rbc}}$ Para aplicar MDS

EE= $\sqrt{\frac{CME}{rbc}}$ Para aplicar otra prueba

Para comparar medias del factor B:

EE= $\sqrt{\frac{2CME}{rac}}$ Para aplicar MDS

EE= $\sqrt{\frac{CME}{rac}}$ Para aplicar otra prueba

Para comparar medias del factor C:

EE= $\sqrt{\frac{2CME}{rab}}$ Para aplicar MDS

EE= $\sqrt{\frac{CME}{rab}}$ Para aplicar otra prueba

4- Si no hay diferencia significativa de la interacción ni de los efectos principales, no se comparan las medias.

Como resultado del análisis de varianza, podemos observar que no existe diferencia en la interacción A x B x C, debido a que Fcal es menor que Ftab, cuando analizamos las restantes interacciones vemos que no existen diferencias en las interacciones A x C y B x C, existiendo diferencias en la interacción A x B y en el caso de todos los factores aislados por lo que comenzamos la prueba de comparación por la interacción y debemos aplicarla además para el factor C.

Factor A Dosis del mutágeno	Media
Dosis de 100gy	75.918747
Dosis de 200gy	63.618752
Dosis de 300gy	52.293747

TABLA DE MEDIAS DEL FACTOR B

Factor B Porciento de humedad	Media
H1 40 %	65.437492
H2 20 %	62.450001

TABLA DE MEDIAS DEL FACTOR C

Factor C Edad de la semilla	Media
E1 6 meses	66.333328
E2 12 meses	61.554169

TABLA DE MEDIAS DE TRATAMIENTOS AB

	FACTOR Humedad		MEDIA
FACTOR Dosis	1	2	
1	78.1875	73.6500	75.9187
2	55.8250	71.4125	63.6188
3	62.3000	42.2875	52.2937
MEDIA	65.4375	62.4500	63.9438

TABLA DE MEDIAS DE TRATAMIENTOS AC

	FACTOR Edad		MEDIA
FACTOR Dosis	1	2	
1	78.0875	73.7500	75.9187
2	67.0125	60.2250	63.6188
3	53.9000	50.6875	52.2937
MEDIA	66.3333	61.5542	63.9438

TABLA DE MEDIAS DE TRATAMIENTOS BC

	FACTOR Edad		MEDIA
FACTOR Humedad	1	2	
1	68.1750	62.7000	65.4375
2	64.4917	60.4083	62.4500
MEDIA	66.3333	61.5542	63.9438

TABLA DE MEDIAS DE TRATAMIENTOS ABC

	FACTOR Edad	
FACTOR Dosis x Humedad	1	2
D1H1	80.8500	75.5250
D1H2	75.3250	71.9750
D2H1	60.2500	51.4000
D2H2	73.7750	69.0500
D3H1	63.4250	61.1750
D3H2	44.3750	40.2000

EXPERIMENTO TRIFACTORIAL CON DISEÑOS DE BLOQUES AL AZAR.

El modelo matemático es el siguiente:

$$Y_{ijklm} = \mu + R_l + A_i + B_j + C_K + (AB)_{ij} + (AC)_{ik} + (BC)_{jk} + (ABC)_{ijk} + E_{ijkl}.$$

Y_{ijkm} = es la observación l, en el nivel i del factor A, nivel j del factor B, nivel k del factor C
μ = es la media general.
R_l efecto debido a la réplica.
A_i es el efecto del nivel i del factor A.
B_j es el efecto del nivel j del factor B.
C_k es el efecto del nivel k del factor C.
AB_{ij} es el efecto de la interacción del nivel i del factor A y el nivel j del factor B.
AC_{ik} es el efecto de la interacción del nivel i del factor A y el nivel k del factor C.
BC_{jk} es el efecto de la interacción del nivel j del factor B y el nivel k del factor C.
ABC_{ijk} es el efecto de la interacción del nivel i del factor A, el nivel j del factor B y el nivel k del factor C.
E_{ijkl} es el error experimental.

Se realizó un experimento en el cultivo de la caña, en una cepa de caña planta, donde se evaluaron 2 dosis de fertilizantes nitrogenados, dos variedades y dos dosis de Biobrás.
Los dosis de fertilizantes fueron: 50 kg/ha y 75 kg/ha.
Las variedades estudiadas: V1- C 8751 y C 1051-73.
Las dosis de Biobrás 16: 40 ml/ hectárea y 100 ml/ hectárea.
La variable evaluada fue el rendimiento en T/ha.

	I	II	III	IV	$\sum$
D1V1B1	65	68	62	65	260
D1V1B2	58	60	57	56	231
D1V2B1	75	72	75	71	293
D1V2B2	71	74	72	71	288
D2V1B1	68	65	60	64	257
D2V1B2	70	72	69	68	279
D2V2B1	85	86	85	84	340
D2V2B2	78	75	79	78	310
$\sum$	570	572	559	557	2258

	V1	V2	$\sum$
D1	491	581	1072
D2	536	650	1186
$\sum$	1027	1231	2258

	B1	B2	$\sum$
D1	553	519	1072
D2	597	589	1186
$\sum$	1150	1108	2258

	B1	B2	$\sum$
V1	517	510	1027
V2	633	598	1231
$\sum$	1150	1108	2258

$$SDC_{Total} = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{Total} = 65^2 + \ldots\ldots + 78^2 - \frac{2258^2}{32} = 2103.875000$$

$$SDC_{Rép.} = \frac{\sum Rép}{No.observ.enC / Rép} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{Rép} = \frac{570^2 + 572^2 + 559^2 + 557^2}{8} - \frac{2258^2}{32} = 21.625$$

$$SDC_{FactorA} = \frac{\sum FactorA^2}{No.observ.enA} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{FactorA} = \frac{1072^2 + 1186^2}{16} - \frac{2258^2}{32} = 406.125000$$

$$SDC_{FactorB} = \frac{\sum FactorB^2}{No.observ.enB} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{FactorB} = \frac{1027^2 + 1231^2}{16} - \frac{2258^2}{32} = 1300.5$$

$$SDC_{FactorC} = \frac{\sum FactorC^2}{No.observ.enC} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{FactorC} = \frac{1150^2 + 1108^2}{16} - \frac{2258^2}{32} = 55.125$$

$$SDC_{IntA*B} = \frac{\sum (A*B)^2}{NoobservenA*B} - \frac{(\sum X)^2}{N} - SDC_A - SDC_B$$

$$SDC_{IntA*B} = \frac{491^2 + 581^2 + 536^2 + 650^2}{8} - \frac{2258^2}{32} - 406.125\text{-}1300.5$$

$$SDC_{IntA*B} = 18.00$$

$$SDC_{IntA*C} = \frac{\sum (A*C)^2}{NoobservenA*C} - \frac{(\sum X)^2}{N} - SDC_A - SDC_C$$

$$SDC_{IntA*C} = \frac{553^2 + 519^2 + 597^2 + 589^2}{8} - \frac{2258^2}{32} - 406.125\text{-}55.125$$

$$SDC_{IntA*C} = 21.125$$

$$SDC_{IntB*C} = \frac{\sum (B*C)^2}{NoobservenB*C} - \frac{(\sum X)^2}{N} - SDC_B - SDC_C$$

$$SDC_{IntB*C} = \frac{517^2 + 510^2 + 633^2 + 598^2}{8} - \frac{2258^2}{32} - 1300.5\text{-}55.125$$

$$SDC_{IntB*C} = 24.5$$

$$SDC_{IntA*B*C} = \frac{\sum A*B*C}{NoobservenABC} - \frac{(\sum X)^2}{N} - SDC_A - SDC_B - SDC_C$$
$$- SDC_{A*B} - SDC_{A*C} - SDC_{B*C}$$

$$SDC_{INtA*B*C} = \frac{260^2 + \ldots\ldots + 310^2}{4} - \frac{2258^2}{32} - 406.125\text{-}1300.5\text{-}55.125\text{-}18.0\text{-}21.125\text{-}24.5$$

$$SDC_{IntA*B*C} = 180.5$$

$$SDC_{Error} = SDC_{Total} - SDC_{Rép} - SDC_{FactorA} - SDC_{FactorB} - SDC_{FactorC} - SDC_{IntA*B}$$
$$- SDC_{IntA*C} - SDC_{IntB*C} - SDC_{IntA*B*C}$$

$$SDC_{Error} = 76.375$$

GL total=No observ. Total - 1=32-1=47
Gl Rép=No rép-1=4-1=3
Gl factor A= Niveles de A-1=2-1=2
Gl factor B= Niveles de B - 1=2-1=1
Gl factor C= Niveles de C-1=2-1=1

Gl Interacción A*B= Gl A * Gl B=1*1=1
Gl Interacción A*C= Gl A * Gl C=1*1=1
Gl Interacción B*C= Gl B * Gl C=1*1=1
Gl Interacción A*B*C= Gl A * Gl B * Gl C=1*1*1=1

$$CM_{Rép} = \frac{SDC_{Rép}}{GL_{Rép}} = \frac{21.165}{3} = 7.208333$$

$$CM_{FactorA} = \frac{SDC_{A}}{Gl_{A}} = \frac{406.125}{1} = 406.125$$

$$CM_{FactorB} = \frac{SDC_{B}}{Gl_{B}} = \frac{1300.5}{1} = 1300.5$$

$$CM_{FactorC} = \frac{SDC_{C}}{Gl_{C}} = \frac{55.125}{1} = 55.125$$

$$CM_{IntA*B} = \frac{SDC_{A*B}}{Gl_{A*B}} = \frac{18.00}{1} = 18.00$$

$$CM_{IntA*C} = \frac{SDC_{A*C}}{Gl_{A*C}} = \frac{21.125}{1} = 21.125$$

$$CM_{IntB*C} = \frac{SDC_{B*C}}{Gl_{B*C}} = \frac{24.5}{1} = 24.5$$

$$CM_{A*B*C} = \frac{SDC_{A*B*C}}{Gl_{A*B*C}} = \frac{180.5}{1} = 180.5$$

$$CM_{Error} = \frac{SDC_{Error}}{Gl_{Error}} = \frac{76.375}{21} = 3.636905$$

$$F_{CalRép} = \frac{CM_{Rép}}{CM_{Error}} = \frac{7.208333}{3.636905} = 1.9820$$

$$F_{calA} = \frac{CM_{A}}{CM_{Error}} = \frac{406.125}{3.636905} = 111.6678$$

$$F_{calB} = \frac{CM_B}{CM_{Error}} = \frac{1300.5}{3.636905} = 357.5843$$

$$F_{calC} = \frac{CM_C}{CM_{Error}} = \frac{55.125}{3.636905} = 15.1571$$

$$F_{calA*B} = \frac{CM_{A*B}}{CM_{Error}} = \frac{18.00}{3.636905} = 4.9493$$

$$F_{calA*C} = \frac{CM_{A*C}}{CM_{Error}} = \frac{21.125}{3.636905} = 5.8085$$

$$F_{calB*C} = \frac{CM_{B*C}}{CM_{Error}} = \frac{24.5}{3.636905} = 6.7365$$

$$F_{calA*B*C} = \frac{CM_{A*B*C}}{CM_{Error}} = \frac{180.5}{3.636905} = 49.6301$$

Fuentes de Variación	Gl	SDC	CM	Fcal	Ftab
Réplicas	3	21.625000	7.208333	1.9820	
Factor A (D)	1	406.125000	406.125000	111.6678	
Factor B (V)	1	1300.500000	1300.500000	357.5843	
Factor C (B)	1	55.125000	55.125000	15.1571	
DxV	1	18.000000	18.000000	4.9493	
DxB	1	21.125000	21.125000	5.8085	
VxB	1	24.500000	24.500000	6.7365	
DxVxB	1	180.500000	180.500000	49.6301	
Error	21	76.375000	3.636905		
Total	31				

C.V. = 2.7027%

Tabla de medias del factor A	
Dosis de fertilizantes	Media
D1	67.00
D2	74.125

Tabla de medias del factor B	
Variedades	Media
V1	64.1875
V2	76.9375

Tabla de medias del factor C	
Dosis de Biobrás	Media
B1	71.875
B2	69.250

Tabla de medias de tratamientos AB			
	Factor B(V)		
Factor A(D)	V1	V2	Media
D1	61.375	72.625	67.00
D2	67.00	81.25	74.125
Media	64.1875	76.9375	70.5625

Tabla de medias de tratamientos AC			
	Factor C(B)		
Factor A(D)	B1	B2	Media
D1	69.125	64.875	67.00
D2	74.625	73.625	74.125
Media	71.875	69.25	70.5625

Tabla de medias de tratamientos BC			
	Factor C(B)		
Factor B(V)	B1	B2	Media
V1	64.625	63.75	64.1875
V2	79.125	74.75	76.9375
Media	71.875	69.25	70.5625

Tabla de medias de tratamientos ABC		
	Factor C(B)	
Factor AB(DV)	V1	V2
D1V1	65.00 c	57.75 c
D1V2	73.25 b	72.00 b
D2V1	64.25 c	69.75 b
D2V2	85.00 a	77.50 a

FACTORIAL MODIFICADO O CON TESTIGO DE REFERENCIA.

Se realizó un experimento con 2 niveles de N, 2 niveles de fósforo y 2 de potasio K y un testigo de referencia $N_0\,P_0K_0$ en distribución de bloques al azar y 3 réplicas en el cultivo del fríjol.
Los datos corresponden al rendimiento en Kg/parcela de fríjol.
Debemos señalar que un experimento de este tipo con solamente 2 niveles de cada elemento ofrece resultados poco precisos ya que deben existir diferencia muy marcada entre los niveles empleados para que arroje diferencia significativa, puesto que los grados de libertad seràn en cada factor solamente 1 y al buscar el valor de la tabla de F estos serán muy grandes por lo que la F calculada debe dar suficientemente grande como para que superen los valores de la tabla por lo que existe poca probabilidad de encontrar diferencias significativas entre ellos.

Datos del rendimiento.

	Réplicas			
Tratamientos	I	II	III	Total
N1P1K1	3.17	4.87	4.81	11.85
N1P1K1	2.04	4.51	4.02	10.57
N1P1K1	2.92	3.68	3.43	10.03
N1P1K1	3.22	2.60	3.81	9.03
N1P1K1	2.81	3.41	3.10	9.32
N1P1K1	4.49	3.34	4.03	11.36
N1P1K1	3.52	2.54	2.90	8.96
N1P1K1	2.56	3.07	2.93	8.56
N1P1K1	3.59	4.71	3.90	12.2
Total	28.32	32.73	31.93	92.98

Cálculo de las SDC.

$$SDC_{Total} = \sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Total} = 3.17^2 + ...+3.90^2 - \frac{92.98^2}{27} = 13.01$$

$$SDC_{Trat} = \frac{\sum Trat^2}{Nodedatosportramiento} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Trat} = \frac{11.85^2 + ...+12.2^2}{3} - \frac{92.98^2}{27} = 4.93$$

$$SDC_{Rép} = \frac{\sum \operatorname{Re} p^2}{Nodedatosporréplica} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Rép} = \frac{28.32^2 + 32.73^2 + 31.99^2}{9} - \frac{92.98^2}{27} = 1.22$$

$$SDC_{Error} = SDC_{Total} - SDC_{Trat} - SDC_{Rép}$$

$SDC_{Error} = 13.01 - 4.99 - 1.22 = 6.86$

Luego se divide la SDC de los tratamientos en sus componentes.

1) Tratamientos factoriales.
2) Testigo contra tratamientos factoriales.

Tratamientos factoriales.

Se excluye el $N_0P_0K_o$ y procedemos a determinar los efectos de cada elemento aislado y combinado:

Tratamientos factoriales NPK.

	P1	P2	Total
N1	22.42	19.66	42.08
N2	21.18	17.52	38.70
Total	43.60	37.18	80.78

	K1	K2	Total
N1	21.88	20.20	42.08
N2	18.28	20.42	38.70
Total	40.16	40.62	80.78

	K1	K2	Total
P1	21.17	22.43	43.60
P2	18.99	18.19	37.18
Total	40.16	40.62	80.78

Para esto se calcula otro término de corrección donde no se incluye el tratamiento $N_0P_0K_o$.

$$TC_2 = \frac{\left(\sum X\right)^2}{N} = \frac{80.78^2}{24} = 271.89$$

$$SDC_N = \frac{\sum N^2}{NodedatosenN} - TC$$

$$SDC_N = \frac{42.08^2 + 38.70^2}{12} - 271.89 = 0.48$$

$$SDC_P = \frac{\sum P^2}{NodedatosenP} - TC$$

$$SDC_P = \frac{43.60^2 + 37.18^2}{12} - TC = 1.71$$

$$SDC_K = \frac{\sum K^2}{NodedatosenK} - TC$$

$$SDC_K = \frac{40.16^2 + 40.62^2}{12} - 271.89 = 0.01$$

$$SDC_{NP} = \frac{\sum NP^2}{NodedatosenNP} - TC - SDC_N - SDC_P$$

$$SDC_{NP} = \frac{22.42^2 + \ldots + 17.52^2}{6} - 271.89 - 0.48 - 1.71 = 0.04$$

$$SDC_{NK} = \frac{\sum NK^2}{NodedatosenNK} - TC - SDC_N - SDC_K$$

$$SDC_{NK} = \frac{21.88^2 + \ldots + 20.42^2}{6} - 271.89 - 0.48 - 0.01 = 0.61$$

$$SDC_{PK} = \frac{\sum PK^2}{NodedatosenPK} - TC - SDC_P - SDC_K$$

$$SDC_{PK} = \frac{21.17^2 + \ldots + 18.19^2}{6} - 271.89 - 1.71 - 0.01 = 0.18$$

$$SDC_{NPK} = \frac{\sum NPK}{NodeobservenNPK} - TC - NP - NK - PK - N - P - K$$

$$SDC_{NPK} = \frac{11.85^2 + \ldots + 8.56^2}{3} - 271.89 - 0.04 - 0.61 - 0.18 - 0.48 - 1.71 - 0.01 = 0.60$$

Trat factoriales= $SDC_N + SDC_P + SDC_K + SDC_{NP} + SDC_{NK} + SDC_{PK} + SDC_{NPK}$

Trat Factoriales=0.48+1.71+0.01+0.04+0.61+0.18+0.60=3.63

Testigo vs Trat Fac..=SDC todos los trat. -SDC trat. Factoriales
=4.93 – 3.63=1.30

Ftes de variación	SDC	Gl	CM	Fcal	Ftab 5%	1%
N	0.48	1	0.48	1.12	4.49	8.53
P	1.71	1	1.71	4.00	4.49	8.53
K	0.01	1	0.01	0.013	4.49	8.53
NP	0.04	1	0.04	0.07	4.49	8.53
NK	0.61	1	0.61	1.42	4.49	8.53
PK	0.18	1	0.18	0.418	4.49	8.53
NPK	0.60	1	0.60	1.4	4.49	8.53
Trat Fac..	3.63	7	0.518	1.2	2.66	8.53
Testigo vs Trat Fac..	1.30	1	1.30	3.02	4.49	4.03
Todos Trat	4.93	8	0.61	1.41	2.59	5.53
Réplica	1.22	2	0.61	1.42	3.63	3.89
Error	6.86	16	0.43			6.23
Total	13.01	26				

Como podemos observar no existen diferencias en ninguno de los factores evaluados ni entre la interacción entre los factores, de haberlas procedemos a una prueba de comparación de medias.

EXPERIMENTO EN VARIAS LOCALIDADES.

En algunos experimentos es frecuente evaluar los mismos tratamientos en diferentes localidades bajo el diseño de bloques al azar. En este caso es conveniente evaluar el efecto de tratamientos a través de todas las localidades, así como estudiar la interacción entre tratamientos y localidades. Esto se puede llevar a cabo utilizando el siguiente modelo:

$$Y_{ijk} = \mu + L_i + B_{j(i)} + T_K + LT_{ik} + e_{ijk}$$

Y_{ijk} = es la observación del tratamiento k, en el bloque j, en la localidad i.
μ = es la media general.
L_l efecto debido a la i-ésima localidad.
$B_{j(i)}$ es el efecto del j-ésimo bloque en la i-ésima localidad.
T_K es el efecto del K-ésimo tratamiento.
LT_{ik} efecto de la interacción entre el tratamiento K y la localidad i
E_{ijkl} es el error experimental.

Ejemplo.
Se realizó un experimento en el cultivo de la yuca con el objetivo de comparar cuatro variedades; el mismo se montó en el norte, centro y sur de la provincia, La variable evaluada fue el diámetro de las estacas,
Las variedades estudiadas fueron: V1: señorita; V2: CMC-40; V3: CEMSA 746329 y V4: CEMSA 74725.

VARIABLE: diámetro de las estacas
Localidad 1

TRATAMIENTOS	REPLICAS		
	I	II	III
V1	1,88	1,86	1,90
V2	2,34	2,36	2,32
V3	2,67	2,65	2,69
V4	2,65	2,67	2,63
$\sum$	9,54	9,54	9,54

Localidad 2

TRATAMIENTOS	REPLICAS		
	I	II	III
V1	2,36	2,34	2,36
V2	2,53	2,51	2,55
V3	2,72	2,70	2,74
V4	2,71	2,73	2,69
$\sum$	10,32	10,28	10,34

Localidad 3

TRATAMIENTOS	REPLICAS		
	I	II	III

V1	2,21	2,23	2,19
V2	2,43	2,45	2,41
V3	2,51	2,53	2,49
V4	2,75	2,73	2,77
$\sum$	9,9	9,94	9,86

Variedades	**Localidad 1**	**Localidad 2**	**Localidad 3**	$\sum$
1	5,64	7,06	6,63	19,33
2	7,02	7,59	6,63	21,24
3	8,01	8,16	7,53	23,7
4	7,95	8,13	8,25	24,33
$\sum$	28,62	30,94	29,04	88,6

$$SDC_{Total} = \sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Localidades} = \frac{\sum Locald.^2}{NoobservencadaLocalid.} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Localidades} = \frac{28.62^2 + 30.94^2 + 29.04^2}{12} - \frac{88.6^2}{36} = 2.177612$$

$$SDC_{Trat} = \frac{\sum Trat^2}{Noobservewnc / trat} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}$$

$$SDC_{Trat} = \frac{19.33^2 + 21.24^2 + 23.7^2 + 24.33^2}{9} - \frac{88.6^2}{36} = 1.673447$$

$$SDC_{LxTrat} = \frac{\sum (LxTrat)^2}{NoobservenLxTrat} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N} - SDC_{Localid} - SDC_{Trat}$$

$$SDC_{LxTrat} = \frac{5.64^2 + \ldots\ldots + 8.25^2}{3} - \frac{88.6^2}{36} - 2.177612 - 1.673447 = 0.270447$$

$$SDC_{Rép/Localid} = \frac{\sum RépxLoc}{Noobservenc/Rép/Localid} - \frac{(\sum X)^2}{N} - SDC_{Localid}.$$

$$SDC_{Rép/Localid} = \frac{9.54^2 + ... + 9.86^2}{4} - \frac{88.6^2}{36} - 2.177612 = 0.001251$$

$$SDC_{Error} = SDC_{Total} - SDC_{Localid} - SDC_{Trat} - SDC_{(LxT)} - SDC_{B/Localid}$$

$$SDC_{Error} = 2.177612 - 0.224655 - 1.673447 - 0.270447 - 0.001251 = 0.007813$$

A N A L I S I S D E V A R I A N Z A

FUENTES VARIACIÓN	**GL**	**SC**	**CM**	**Fcal**	**Ftab**	
					5 %	**1 %**
LOCALIDADES	**2**	0,224655	0,112328			
R(L)	**6**	0,001251	0,000209			
TRATAMIENTOS	**3**	1,673447	0,557816	12,3755	3,49	5,99
LOC X TRATA	**6**	0,270447	0,045074	103,85	2,66	4,01
ERROR	**18**	0,007813	0,000434			
TOTAL	**35**	2,177612				

C,V = 0,840242 %

De acuerdo con la tabla de esperanzas de cuadros medios, la hipótesis de igualdad de efectos de tratamientos se prueba con la razón F= CM (trata)/CM (L*T), la cual se compara con el valor tabulado de F, con (t-1) y (t-1) (l-1) grados de libertad. En el análisis de varianza se observa que la Fc de tratamiento es mayor que la f tabulada a ambos niveles de significancia, por lo que se rechaza la hipótesis nula. Esto indica que se puede recomendar una variedad para las localidades .La hipótesis para la interacción se prueba con la razón F =CM (L*T)/CM (error), la cual se compara con el valor tabulado de F, con (t-1)(l-1) y (t-1)(r-1) grados de libertad. En el análisis de varianza se observa que la Fcal de la interacción es mayor que la F tabulada a ambos niveles de significancia, por lo que se rechaza la hipótesis nula. Esto indica que hay diferencia entre las variedades al menos en una localidad. También puede ocurrir que la diferencia entre las variedades sea diferente en las localidades, o sea que las mejores variedades no son las mismas en las diferentes localidades. Por lo tanto, en este caso es necesario hacer una comparación de medias de variedades en cada localidad.

TABLA DE MEDIAS DE LOCALIDADES

LOCALIDAD MEDIA

1	2,385000
2	2,578333
3	2,475000

TABLA DE MEDIAS DE TRATAMIENTOS

TRATAMIENTOS	MEDIA
1	2,147778
2	2,433333
3	2,633333
4	2,703333

TºABLA DE MEDIAS DE LOC. x TRAT.

	TRATAMIENTOS				
LOCALIDADES	**1**	**2**	**3**	**4**	**MEDIA**
1	1,8800	2,3400	2,6700	2,6500	2,3850
2	2,3533	2,5300	2,7200	2,7100	2,5783
3	2,2100	2,4300	2,5100	2,7500	2,4750
MEDIA	**2,1478**	**2,4333**	**2,6333**	**2,7033**	**2,4794**

PARCELA DIVIDIDA.

Se realizó un experimento con un arreglo en parcelas divididas con el objetivo de evaluar tres variedades con dos sistemas de preparación de suelos.
Los sistemas de preparación de suelos son los siguientes: S1con inversión del prisma y S2 sin inversión del prisma.
Las tres variedades son las siguientes: V1 Señorita; V2 CMC-40 y Jagüey Dulce.
Los datos que se expresan a continuación corresponden al rendimiento en toneladas por hectárea.

I	**S1V2** **20.6**	**SIV1** **19.3**	**S1V3** **16.5**	**S2V3** **18.8**	**S2V1** **22.2**	**S2V2** **22.4**

II	**S2V1** **23.1**	**S2V2** **21.9**	**S2V3** **18.6**	**S1V2** **21.3**	**S1V3** **17.6**	**S1V1** **19.9**
III	**S1V3** **17.2**	**S1V1** **19.4**	**S1V2** **20.5**	**S2V3** **18.9**	**S2V2** **22.5**	**S2V1** **23.4**
IV	**S2V1** **22.9**	**S2V2** **22.3**	**S2V3** **19.6**	**S1V1** **20.3**	**S1V2** **21.1**	**S1V3** **17.1**

El modelo es el siguiente:

$$Y_{ijk} = \mu + B_i + S_j + E_{ij(a)} + V_K + (SV)_{jk} + E_{ijk(b)}$$

Y_{ijk} es la observación de la variedad k , en el sistema de labranza j, en el bloque i.
μ = es la media verdadera general.
Bi es el efecto del bloque i
Sj es el efecto del sistema j
Eij(a) es el error experimental en parcelas grandes
Vk es el efecto de la variedad k
SVjk es el efecto de la interacción del sistema j variedad k
Eijk(b) es el error experimental de las subparcelas

Para cada una de las variables que se desean estudiar en el experimento, se prueban las siguientes hipótesis:
H_0: S1 = S2 vs H_l = Al menos un sistema diferente.
H_0: V1= V2 = V3 vs Hl: Al menos una variedad diferente.
H_0: no hay interacción S x V vs Hl: si hay interacción S x V

T A B L A D E D A T O S
VARIABLE: Rendimiento

Sistemas de preparación	Variedades	Réplicas				
		I	II	III	IV	$\sum$
S1	V1	19.3	19.9	19.4	20.3	78,9
	V2	20.6	21.3	20.5	21.1	83,5
	V3	16.5	17.6	17.2	17.1	68,4
	$\sum$	56,4	58,8	57,1	58,5	230,8
S2	V1	22.2	23.1	23.4	22.9	91,6
	V2	22.4	21.9	22.5	22.3	89,1
	V3	18.8	18.6	18.9	19.6	75,9
	$\sum$	63,4	63,6	64,8	64,8	256,6
	$\sum \sum$	119,8	122,4	121,9	123,3	487,4

	V1	V2	V3	$\sum$
S1	78.9	83.5	68.4	230,8
S2	91.6	89.1	75.9	256,6
$\sum$	170,5	172,6	144,3	487,4

$$SDC_{Total} = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{Total} = 19.3^2 + ... + 19.6^2 - \frac{487.4^2}{24} = 96.539063$$

$$SDC_{Réplica} = \frac{\sum Réplica^2}{NoobservporRép} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{Réplica} = \frac{119.8^2 + 122.4^2 + 121.9^2 + 123.3^2}{6} - \frac{487.4^2}{24} = 1.102539$$

$$SDC_{FactorA} = \frac{\sum NivelesdeA^2}{NoobserenA} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{FactorA} = \frac{230.8^2 + 256.6^2}{12} - \frac{487.4^2}{24} = 27.736328$$

$$SDC_{ErrorA} = \frac{\sum Rép * A}{NoobservenRép * A} - \frac{(\sum X)^2}{N} - SDC_{Rép} - SDC_{FactorA}$$

$$SDC_{ErrorA} = \frac{56.4^2 + ... + 64.8^2}{3} - \frac{487.4^2}{24} - 1.102539 - 27.736328$$

$$SDC_{ErrorA} = 0.766602$$

$$SDC_{FactorB} = \frac{\sum NivelesdeB}{NoobservenB} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{FactorB} = \frac{170.5^2 + 172.6^2 + 144.3^2}{8} - \frac{487.4^2}{24} = 62.157227$$

$$SDC_{IntA*B} = \frac{\sum AxB}{NoobservenAxB} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N} - SDC_A - SDC_B$$

$$SDC_{IntA*B} = \frac{78.9^2 + ... + 75.9^2}{4} - \frac{487.4^2}{24} - 27.736328 - 62.157227$$

$$SDC_{IntA*B} = 3.375977$$

$$SDC_{ErrorB} = SDC_{Total} - SDC_{FactorA} - SDC_{Rép} - SDC_{ErrorA} - SDC_{FactorB} - SDC_{IntA*B}$$

$$SDC_{ErrorB} = 96.539063 - 1.102539 - 27.736328 - 0.766602 - 62.157227 - 3.375977$$

$$SDC_{ErrorB} = 1.400391$$

Gl Total= N - 1=24-1=23
Gl Réplica= # Réplicas - 1= 4 - 1=3
Gl Factor A= Niveles de A - 1= 2 - 1=1
Gl Error A = Gl Rép x Gl Factor A= 3 x 1= 3
Gl Factor B= Niveles de B - 1 = 3 - 1 = 2
Gl Int A x B = Gl Factor A x Gl Factor B = 1 x 2 = 2
Gl Error B = Gl Total - Gl Réplica - Gl Factor A - Gl Error A - Gl Factor B - Gl Int A x B
Gl Error B = 23 - 3 - 1 - 3 - 2 - 2 = 12

$$CM_{FactorA} = \frac{SDC_{FactorA}}{Gl_{FactorA}} = \frac{27.736328}{1} = 27.736328$$

$$CM_{Réplica} = \frac{SDC_{Réplica}}{Gl_{Réplica}} = \frac{1.103529}{3} = 0.367513$$

$$CM_{ErrorA} = \frac{SDC_{ErrorA}}{Gl_{ErrorA}} = \frac{0.766602}{3} = 0.255534$$

$$CM_{FactorB} = \frac{SDC_{FactorB}}{Gl_{FactorB}} = \frac{62.157227}{2} = 31.078613$$

$$CM_{IntAxB} = \frac{SDC_{IntAxB}}{Gl_{IntAxB}} = \frac{3.375977}{2} = 1.687988$$

$$CM_{ErrorB} = \frac{SDC_{ErrorB}}{Gl_{ErrorB}} = \frac{1.400391}{12} = 0.116699$$

$$F_{CalRéplica} = \frac{CM_{Réplica}}{CM_{ErrorA}} = \frac{0.367513}{0.255534} = 1.4382$$

$$F_{CalFactorA} = \frac{CM_{FactorA}}{CM_{ErrorA}} = \frac{27.736328}{0.255534} = 108.5427$$

$$F_{CalFactorB} = \frac{CM_{FactorB}}{CM_{ErrorB}} = \frac{31.078613}{0.116699} = 266.3138$$

$$F_{CalIntAxB} = \frac{CM_{IntAxB}}{CM_{IntAxB}} = \frac{1.687988}{0.116699} = 14.4644$$

A N A L I S I S   D E   V A R I A N Z A

Causas de variación	Gl	SDC	CM	Fcal	Ftab	
					5%	1%
Réplicas	3	1.102539	0.367513	1.4382	9.28	29.46
Factor A(S)	1	27.736328	27.736328	108.5427 **	10.13	34.12
Error A	3	0.766602	0.255534			
Factor B(V)	2	62.157227	31.078613	266.3138 **	3.89	6.93
Int A x B	2	3.375977	1.687988	14.4644 **	3.89	6.93
Error B	12	1.400391	0.116699			
Total	23	96.539063				

C.V. (ERROR B) = 1.682%

La interpretación del análisis de varianza es semejante a los experimentos factoriales.
Si la interacción es significativa entonces se comparan las medias de los niveles de un factor dentro de los niveles del otro factor . Si se desea compara dos medias de niveles del factor B en el mismo nivel de A; por ejemplo las medias de variedades en el mismo sistema se usa el error estándar siguiente:

Para MDS

EE= $\sqrt{\frac{2CMerrorB}{r}}$

Para las restantes pruebas.

EE= $\sqrt{\frac{CMerrorB}{r}}$

Si se desean comparar dos niveles del factor A en el mismo nivel o en diferente nivel del factor B; por ejemplo, comparar dos medias de fechas en la misma o en diferente variedad, se usa el siguiente error estándar:
Para MDS

EE= $\sqrt{\dfrac{2[(b-1)CMerrorB + CMerrorA]}{rb}}$

Para las restantes pruebas.

EE= $\sqrt{\dfrac{[(b-1)(CMerrorB) + CMerrorA]}{rb}}$

En este caso el valor de t tabulada para la comparación de medias por el método de la MDS se calcula mediante:

T= $\dfrac{(b-1)(CMerrorB)T_b + (CMerrorA)Ta}{rb}$ donde Tb y Ta son los valores tabulados de t de student con los grados de libertad del error a y el error b, respectivamente.

Si la interacción no es significativa y los efectos principales si lo son, entonces debe de compararse las medias de los efectos principales. El error estándar para la comparación de medias es :
Para comparar medias del factor a.

Para MDS.

EE= $\sqrt{\dfrac{2CMerrorA}{rb}}$

Para las restantes pruebas

$EE = \sqrt{\dfrac{CMerrorA}{rb}}$

rb = # de réplicas por niveles de b.

Para comparar medias del factor b.

Para MDS.

$EE = \sqrt{\dfrac{2CMerrorB}{ra}}$

Para las restantes pruebas

$EE = \sqrt{\dfrac{CMerrorB}{ra}}$

ra = # de réplicas por niveles de a.

Tabla de medias del factor A (Sistema de preparación)	
Factor A	Media
S1	19.233334
S2	21.383333

Tabla de medias del factor A (Variedades)	
Factor B	Media
V1	21.312500
V2	21.575001
V3	18.037500

Tabla de medias de los tratamientos AB				
	Factor B			
Factor A	V1	V2	V3	Media
S1	19.7250	20.8750	17.1000	19.2333
S2	22.9000	22.2750	18.9750	21.3833
Media	21.3125	21.5750	18.0375	20.3083

PARCELA SUBDIVIDIDA.

Los experimentos en parcelas subdivididas se utilizan cuando se desea evaluar 3 factores, pero es conveniente de parcelas grandes en un factor, parcelas medianas en el segundo factor y parcelas chicas en el tercer factor.
El croquis del experimento se construye de la siguiente forma:
a) Se asignan al azar los niveles del factor A, a las parcelas grandes dentro de cada bloque.
b)Se aleatorizan los bloques.
c) Se asignan al azar los niveles del factor B, dentro de cada subparcela.
d) Se asignan al azar los niveles del factor C a cada sub-sub parcela.

El experimento se lleva a cabo como cualquier experimento con un diseño de bloques al azar.

El modelo es el siguiente:

$$Y_{ijk} = \mu + B_i + S_j + E_{ij(a)} + H_K + (SH)_{jk} + E_{ijk(b)} + M_l + (SM)_{jl} + (HM)_{kl}$$
$$+ (SHM)_{jkl} + E_{ijkl(c).}$$

Y_{ijkl} es la observación de la distancia k , en el método de control l, en el sistema de labranza j, en el bloque i.
μ = es la media verdadera general.
Bi es el efecto del bloque i
Sj es el efecto del sistema j
Eij(a) es el error experimental en parcelas grandes
Hk es el efecto del espacio entre hileras k
SHjk es el efecto de la interacción del sistema j espacio k
Eijk(b) es el error experimental de las subparcelas
Ml es el efecto del método l
SMjl es el efecto de la interacción de la distancia j método l
HMkl es el efcto de la interacción del espacio k y el método l

SHMjkl es el efcto de la interacción del sistema j, espacio k, método l
Eijkl(c) es el error experimental en sub-sub parcelas.

Ilustraremos el análisis con el experimento siguiente:
Se realizó un experimento con un diseño en parcela subdividida donde se evaluaron:
Dos sistemas de labranza: S1_ con inversión del prisma.
S2- sin inversión del prisma.
Tres espacios entre hileras: H1- 45 cm.
H2- 60 cm.
H3- 90 cm.
Tres métodos de control de malas hierbas: M1- con herbicidas.
M2- manual.
M3- no control.
Se evaluó el rendimiento en Kg / ha en la variedad de Soya INIFAT- V9.

Las hipótesis que se prueban son:
Ho: $S_1 = S_2 = \ldots\ldots = Sa$ vs $H_{l:}$ Al menos un sistema diferente
Ho: $H_1 = H_2 = \ldots\ldots = Ha$ vs $H_{l:}$ Al menos un espacio diferente
Ho: $M_1 = M_2 = \ldots\ldots = Ma$ vs $H_{l:}$ Al menos un método diferente
Ho: no hay interacciòn Sx H vs $H_{l:}$ si hay interacción S x H
Ho: no hay interacciòn Sx M vs $H_{l:}$ si hay interacción S x M
Ho: no hay interacciòn H x M vs $H_{l:}$ si hay interacción H x M
Ho: no hay interacciòn Sx H x M vs $H_{l:}$ si hay interacción S x H x M

Estas hipótesis se prueban con el análisis de varianza.

REPLICA I

S1H2M1 3512	S1H1M2 3749	S1H3M3 3091	S2H3M1 3086	S2H1M2 2930	S2H2M1 3119
S1H2M2 3216	S1H1M1 4736	S1H3M2 2545	S2H3M2 2913	S2H1M3 2406	S2H2M2 2593
S1H2M3 2806	S1H1M3 2967	S1H3M1 3091	S2H3M3 1814	S2H1M1 3463	S2H2M3 2379

REPLICA II

S2H1M1 3461	S2H2M2 2595	S2H3M3 1849	S1H2M2 3206	S1H3M1 3110	S1H1M3 2961
S2H1M2 2925	S2H2M3 2381	S2H3M1 2381	S1H2M1 3502	S1H3M3 2433	S1H1M2 3743
S2H1M3 2400	S2H2M1 2123	S2H3M2 2123	S1H2M2 2793	S1H3M2 2555	S1H1M1 4730

REPLICA III

S1H3M2 2535	S1H1M1 4746	S1H2M1 3522	S2H3M2 2907	S2H2M2 2597	S2H1M1 3465
S1H3M3	S1H1M2	S1H2M3	S2H3M1	S2H2M3	S2H1M2

2413	3759	2817	3080	2376	2935
S1H3M1 3081	S1H1M3 2977	S1H2M2 3226	S2H3M3 1838	S2H2M1 2117	S2H1M3 2410

REPLICA IV

S2H1M1 3463	S2H2M3 2780	S2H3M2 2903	S1H1M2 3739	S1H2M3 2801	S1H3M1 3085
S2H1M2 2922	S2H2M1 2121	S2H3M3 1834	S1H1M3 2957	S1H2M1 3506	S1H3M2 2539
S2H1M3 2410	S2H2M2 2595	S2H3M1 3076	S1H1M1 4726	S1H2M2 3210	S1H3M3 2413

Tabla de datos

Tratamientos	Replicas				∑
	I	II	III	IV	
S1H1M1	4736	4730	4746	4726	18938
S1H1M2	3749	3743	3759	3739	14990
S1H1M3	2967	2961	2977	2957	11862
∑	11452	11434	11482	11422	45790
S1H2M1	3512	3502	3522	3506	14042
S1H2M2	3216	3206	3226	3210	12858
S1H2M3	2806	2793	2817	2801	11217
∑	9534	9501	9565	9517	38117
S1H3M1	3091	3110	3081	3085	12367
S1H3M2	2545	2553	2535	2539	10172
S1H3M3	3091	2433	2413	2413	10350
∑	8727	8096	8029	8037	32889
S2H1M1	3463	3461	3465	3463	13852
S2H1M2	2930	2925	2935	2932	11722
S2H1M3	2406	2400	2410	2410	9626
∑	8799	8786	8810	8805	35200
S2H2M1	3119	2123	2117	2121	9480
S2H2M2	2593	2595	2597	2595	10380
S2H2M3	2379	2381	2376	2780	9916
∑	8091	7099	7090	7496	29776
S2H3M1	3086	3091	3080	3076	12333
S2H3M2	2913	2918	2907	2903	11641
S2H3M3	1844	1849	1838	1834	7365
∑	7843	7858	7825	7813	31339
∑ ∑	54446	52774	52801	53090	213111

TOTALES DE SISTEMAS DE LABRANZAY BLOQUES.

Total	IV	III	II	I	
116796	28976	29076	29031	29713	S1
96315	24114	23725	23743	24733	S2
213111	53090	52801	52774	54446	Total

TOTALES DE ESPACIOS ENTRE HILERAS Y MÉTODOS DE CONTROL.

Total	H3	H2	H1	
81012	24700	23522	32790	M1
71763	21813	23238	26712	M2
60336	17715	21133	21488	M3
213111	64228	67893	80990	Total

TOTALES DE SISTEMAS DE LABRANZAY MÉTODOS DE CONTROL.

Total	M3	M2	M1	
116796	33429	38020	45347	S1
96315	26907	33743	35665	S2
213111	60336	71763	81012	Total

$$SDC_{Rép} = \frac{\sum Rép^2}{Noobsr / Rép} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{Rép} = \frac{54446^2 + 52774^2 + 52801^2 + 53090^2}{18} - \frac{(213111)^2}{72} = 16384.00$$

$$SDC_{FactorA} = \frac{\sum FactorA^2}{NoobserenA} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{FactorA} = \frac{116796^2 + 96315^2}{36} - \frac{(213111)^2}{72} = 5270976.00$$

$$SDC_{ErrorA} = \frac{SDC_{RépxA}}{NoobsenRépxA} - \frac{(\sum X)^2}{N} - SDC_{\mathrm{Re}\,p} - SDC_A$$

$$SDC_{ErrorA} = \frac{29713^2 + ... + 24114^2}{9} - \frac{213111^2}{72} - 16384.00 - 5270976 = 66624.00$$

$$SDC_{FactorB} = \frac{\sum FactorB^2}{NoObserenB} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{FactorB} = \frac{80990^2 + 67893^2 + 64228^2}{24} - \frac{213111^2}{72} = 7066432.00$$

$$SDC_{AxB} = \frac{\sum AxB}{NoobserenAxB} - \frac{(\sum X)^2}{N} - SDC_A - SDC_B$$

$$SDC_{AxB} = \frac{45790^2 + ... + 31339^2}{12} - \frac{213111^2}{72} - 5270976.00 - 7066432.00$$

$$SDC_{AxB} = 2313344.00$$

$$SDC_{ErrorB} = \frac{\sum (SHRép)^2}{NoobserenSHRép} - \frac{(\sum X)^2}{N} - SDC_{Rép} - SDC_S - SDC_{ErrorA}$$
$$- SDC_H - SDC_{SH}$$

$$SDC_{ErrorB} = \frac{11452^2 + ... + 7813^2}{3} - \frac{213111^2}{72} - 16384.00 - 5270976.00$$
$$- 66624.00 - 7066432 - 2313344.00 = 168384$$

$$SDC_{FactorC} = \frac{\sum M^2}{NoobserenC} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{FactorC} = \frac{81012^2 + 71763^2 + 60336^2}{24} - \frac{213111^2}{72} = 9858688$$

$$SDC_{SxM} = \frac{\sum (SM)^2}{NoobservenSM} - \frac{(\sum X)^2}{N} - SDC_S - SDC_M$$

$$SDC_{SxM} = \frac{45347.00^2 + ... + 26907^2}{12} - \frac{213111^2}{72} - 5270976.00 - 9858688$$
$$= 667584.00$$

$$SDC_{HxM} = \frac{\sum (HM)^2}{NoobserenSM} - \frac{(\sum X)^2}{N} - SDC_H - SDC_M$$

$$SDC_{SxHxM} = \frac{\sum (SHM)^2}{NoobservenSHM} - \frac{(\sum X)^2}{N} - SDC_S - SDC_H - SDC_M$$

$$SDC_{SxHxM} = \frac{18938^2 + ... + 7365^2}{4} - \frac{213111^2}{72} - 5270976 - 7066432$$
$$- 9858688 = 1284544.$$

$$SDC_{ErrorC} = SDC_{Total} - SDC_{Rép} - SDC_{S} - SDC_{ErrorA} - SDC_{H} - SDC_{SH} - SDC_{ErrorB} - SDC_{M} - SDC_{SM} - SDC_{HM} - SDC_{SHM}.$$

$$SDC_{ErrorB} = 30066944.00 - 16384.00 - 5270976 - 66624.00 - 7066432.00 - 2313344 - 168384.00 - 9858688.00 - 667584.00 - 2652608.00 - 1284544.00 = 701376.00$$

Gl Total= No observ total -1= 72-1=71
Gl Rép =No Rép-1=4-1=3
Gl S=Niveles de S-1=2-1=1
Gl Error A= Gl Rép x Gl S.
Gl H = Niveles de H-1= 3-1=2
Gl SH= GL S x GL H= 1x2=2
Gl Error B= Gl H x Gl Rép x Niveles de S= 2x3x2=12
Gl M= Niveles de M-1= 3-1=2
Gl SM= Gl S x Gl M= 1 x 2=2
Gl HM= Gl H x Gl M= 2 x 2= 4
Gl SHM= Gl s x Gl H x Gl M= 1 x 2 x 2 =4
Gl Error C= Niveles deS x Niveles de H x Gl Rép X Gl M
=2 x 3 x 3 x 2=36
ó también.
Gl Error C= Gl Total-Gl Rép-Gl S- Gl Error A- Gl H- Gl SH-Gl Error B-Gl M- Gl SM-Gl HM- Gl SHM.
Gl Error C= 71-3-1-3-2-2-12-2-2-4-4=36

$$CM_{Rép} = \frac{SDC_{Rèp}}{GlRép} = \frac{16384.00}{3} = 5461.333$$

$$CM_{S} = \frac{SDC_{S}}{GlS} = \frac{5270976.00}{1} = 5270976.00$$

$$CM_{ErrorA} = \frac{SDC_{ErrorA}}{Gl_{ErrorA}} = \frac{66624.00}{3} = 22208.00$$

$$CM_{H} = \frac{SDC_{H}}{Gl_{H}} = \frac{7066432}{2} = 3533216$$

$$CM_{SH} = \frac{SDC_{SH}}{Gl_{SH}} = \frac{2313344}{2} = 1156672.00$$

$$CM_{ErrorB} = \frac{SDC_{ErrorB}}{Gl_{ErrorB}} = \frac{168384.00}{12} = 14032.00$$

$$CM_{M} = \frac{SDC_{M}}{Gl_{M}} = \frac{9858688}{2} = 4929344$$

$$CM_{SM} = \frac{SDC_{SM}}{Gl_{SM}} = \frac{667584}{2} = 333792.00$$

$$CM_{HM} = \frac{SDC_{HM}}{Gl_{HM}} = \frac{2652608.00}{4} = 663152.00$$

$$CM_{SHM} = \frac{SDC_{SHM}}{Gl_{SHM}} = \frac{1284544.00}{4} = 321136.00$$

$$CM_{ErrorC} = \frac{SDC_{ErrorC}}{Gl_{ErrorC}} = \frac{701376}{36} = 19482.666$$

Para el cálculo de F.

$$F_{calS} = \frac{CM_{S}}{CM_{ErrorA}} = \frac{5270976}{22208.00} = 237.3458$$

$$F_{calRép} = \frac{CM_{Rép}}{CM_{ErrorA}} = \frac{5461.333496}{22208.00} = 0.2459$$

$$F_{calH} = \frac{CM_{H}}{CM_{ErrorB}} = \frac{3533216.00}{14032.00} = 551.797$$

$$F_{calSH} = \frac{CM_{SH}}{CM_{ErrorB}} = \frac{1156672.00}{14032.00} = 82.431$$

$$F_{calM} = \frac{CM_{M}}{CM_{ErrorC}} = \frac{4929344.00}{19482.666016} = 17.1328$$

$$F_{calSM} = \frac{CM_{SM}}{CM_{ErrorC}} = \frac{333792.00}{19482.666016} = 34.0381$$

$$F_{calHM} = \frac{CM_{HM}}{CM_{ErrorC}} = \frac{663152.00}{19482.666016} = 34.0381$$

$$F_{calSHM} = \frac{CM_{SHM}}{CM_{ErrorC}} = \frac{321136.00}{19482.666016} = 16.4832$$

Fuentes de variación	SC	Gl	CM	Fcal	Ftab
Bloques	16384.00	3	5461.333496	0.2459	
Factor A	5270976.00	1	5270976.000000	237.3458	
Error A	66624.00	3	22208.000000		
Factor B	7066432.00	2	3533216.000000	251.7970	
AxB	2313344.00	2	1156672.000000	82.4310	
Error B	168384.00	12	14032.000000		
Factor C	9858688.00	2	4929344.000000	253.0118	
A x C	667584.00	2	333792.000000	17.1328	
B x C	2652608.00	4	663152.000000	34.0381	
A x B x C	1284544.00	4	321136.000000	16.4832	
Error C	701376.00	36	19482.666016		
Total	30066944.00	71			

C.V. (ERROR C) = 4.7380%

Tabla de medias del factor A (Sistemas de labranza)	
Factor A	Media
S1	3216.555664
S2	2675.416748

Tabla de medias del factor B (Espacio entre hileras)	
Factor B	Media
H1	3374.583252
H2	2828.875000
H3	2634.500000

Tabla de medias del factor C (Métodos de control)	
Factor B	Media
M1	3375.500000
M2	2990.125000
M3	2472.333252

Tabla de medias de los tratamientos AB				
	Factor B			
Factor A	H1	H2	H3	Media
S1	3815.8333	3176.4167	2657.4167	3216.5557
S2	2933.3333	2481.3333	2611.5833	2675.4167
Media	3374.5833	2828.8750	2634.5000	2945.9861

Tabla de medias de los tratamientos AC				
	Factor C			
Factor A	M1	M2	M3	Media
S1	3778.9167	3168.3333	2702.4167	3216.5557
S2	2972.0833	2811.9167	2242.2500	2675.4167
Media	3375.5000	2990.1250	2472.3333	2945.9861

Tabla de medias de los tratamientos BC				
	Factor C			
Factor B	M1	M2	M3	Media
H1	4098.7500	3339.0000	2686.0000	3374.5833
H2	2940.2500	2904.7500	2641.6250	2828.8750
H3	3087.5000	2726.6250	2089.3750	2634.5000
Media	3375.5000	2990.1250	2472.3333	2945.9861

TABLA DE MEDIAS DE TRATAMIENTOS ABC			
	FACTOR C		
FACTORES A B	1	2	3
11	4734.5000	3747.5000	2965.5000
12	3510.5000	3214.5000	2804.2500

13	3091.7500	2543.0000	2337.5000
21	3463.0000	2930.5000	2406.5000
22	2370.0000	2595.0000	2479.0000
23	3083.2500	2910.2500	1841.2500

DISEÑOS ANIDADOS.

Los diseños anidados se utilizan cuando un factor está contenido en cada nivel del factor que lo precede. Por ejemplo, si se desea estudiar la calidad la calidad de dos fábricas productoras de piezas de tractores, en cada fábrica se seleccionan al azar 5 lotes diferentes para hacer las pruebas y dentro de cada lote se seleccionan 10 piezas diferentes para hacer las pruebas. En este caso las piezas están contenidas dentro de los lotes y los lotes dentro de las fábricas.
Para ilustrar el análisis de estos diseños, consideremos un experimento donde se desea comparar el rendimiento de la yuca en 2 regiones diferentes.
El modelo para este experimento es:

$$Y = \mu + A + B + e$$

Se desarrolló un experimento en la región norte y centro de la provincia de Las Tunas , en el cultivo de la yuca, dentro de cada región se seleccionaron 3 UBPC y dentro de cada una de ellas se seleccionaron 4 campos y se midió el rendimiento en la variedad señorita.
R1- región norte
R2- centro.
Las UBPC fueron:
En la región norte: U1. Cascarero; U2. Santa María 1; y U3 Santa María 2.
En la centro: U4. Calera 1; U5 Calera 2, y U6Almendares.
Se midió el rendimiento de los campos en toneladas por hectárea.

Regiones	UBPC	Campos				Total
		I	II	III	IV	
	1	18.3	18.2	18.0	18.2	72,7
R1	2	17.4	17.3	17.2	17.3	69,2
	3	16.2	16.0	16.1	16.0	64,3
						206,2
	4	14.2	14.0	13.9	13.8	55,9
R2	5	16.4	16.2	16.0	16.1	64,7
	6	15.8	15.6	15.5	15.9	62,8
Total						183,4

$$SDC_{Total} = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{Total} = 18.3^2 + ... + 15.9^2 - \frac{(183.4)^2}{24} = 41.653333$$

$$SDC_{\text{Re}\,giones} = \frac{\sum \text{Re}\,g^2}{Nodeobserven\,\text{Re}\,g} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{\text{Re}\,giones} = \frac{206.2^2 + 183.4^2}{12} - \frac{389.6^2}{24}$$

$$SDC_{\text{Re}\,giones} = 21.66$$

$$SDC_{UBPC} = \frac{\sum UBPC^2}{NoobsenUBPC} - \frac{\sum \text{Re}\,g^2}{Noobs/reg}$$

$$SDC_{UBPC} = \frac{72.7^2 + ...+ 62.8^2}{4} - \frac{206.2^2 + 183.4^2}{12} = 19.623$$

$$SDC_{Error} = SDC_{Total} - SDC_{\text{Re}\,giones} - SDC_{UBPC}$$

$$SDC_{Error} = 41.653 - 21.66 - 19.623 = 0.37$$

Gl Total= N-1= 24-1=23
Gl Regiones= # Regiones - 1= 2-1=1
Gl UBPC= # Regiones(# UBPC-1)=2(3-1)=4
Gl error= Gl Total- Gl Regiones-Gl UBPC= 23-1-4=18

$$CM_{\text{Re}\,giones} = \frac{SDC_{\text{Re}\,giones}}{Gl_{\text{Re}\,giones}} = \frac{21.66}{1} = 21.66$$

$$CM_{UBPC} = \frac{SDC_{UBPC}}{Gl_{UBPC}} = \frac{19.623}{4} = 4.90575$$

$$CM_{Error} = \frac{SDC_{Error}}{Gl_{Error}} = \frac{0.37}{18} = 0.021$$

$$F_{Cal\,\text{Re}\,giones} = \frac{CM_{\text{Re}\,giones}}{CM_{UBPC}} = \frac{21.66}{4.90575} = 4.415$$

$$F_{CalUBPC} = \frac{CM_{UBPC}}{CM_{Error}} = \frac{4.90575}{0.021} = 233.607$$

FUENTES DE VARIACIÓN	GL	SDC	CM	Fcal	Ftab	
					5%	1%
Total	23	41.6233				
Regiones	1	21.66	21.66	4.415	4.41	8.29
UBPC	4	19.623	4,90575	233.607	2.93	4.58
Error	18	0.37	0.021			

En el análisis no se encontró diferencias significativas, sin embargo , las UBPC fueron diferentes.

Ejemplo de un Experimento anidado con Tres Factores.

Si en el ejemplo anterior ademàs de las regiones y las UBPC, se evalúan 2 variedades de yuca V1(variedad señorita) y V2(Variedad CMC-40) y en ellas se evalúa el peso de una raíz en gramos que constituye las réplicas entonces estamos en presencia de un experimento anidado con 3 factores.

El modelo para este experimento es:

$$\mathbf{Yijkl = \mu + A_i + B_{j(i)} + C_{k(ij)} + e_{ijkl}}$$

En este caso: i = 1,.....,a = 2
J = 1,....,b = 3
k = 1,…,c = 2
l = 1,….,l = 4

En donde:

Yijkl es la observación de la repetición l, en la variedad k, en la UBPC j, en la región i

µ es la media verdadera general.

A_i es el efecto de la región i

$B_{j(i)}$ es el efecto de la UBPC j en la región i

$C_{k(ij)}$ es el efecto de la variedad k, en la UBPC j en la región i

e_{ijkl} es el error experimental o residual.

Los datos del experimento son los siguientes:

Variable(Peso de una raíz en gramo)

			I	II	III	IV	∑
R1	UBPC1	V1	396.2	395.8	394.6	395.9	1582,5
		V2	454.5	455.0	453.7	453.2	1816,4
		∑	850,7	850,8	848,3	849,1	3398,9
	UBPC2	V1	395.3	390.7	387.6	383.6	1557,2
		V2	450.6	445.6	443.6	442.3	1782,1
		∑	845,9	836,3	831,2	825,9	3339.3
	UBPC3	V1	394.8	366.8	396.5	393.6	1551,7
		V2	463.1	443.2	438.2	445.8	1789,3
		∑	857,9	810.0	834,7	839,4	3342
		∑ ∑	2554,5	2497,1	2514,5	2514,4	10080,2
R2	UBPC4	V1	345.8	345.2	344.8	346.1	1381,9
		V2	423.9	424.1	422.9	425.1	1696
		∑	769,7	769,3	767,7	771,2	3077,9

	UBPC5	V1	347.7	347.1	348.0	346.9	1389,7
		V2	428.2	429.1	427.9	428.9	1714,1
		∑	775,9	776,2	775,9	775,8	3103,8
	UBPC6	V1	349.1	351.1	350.4	350.9	1401,5
		V2	429.3	428.6	429.5	428.7	1716,1
		∑	778,4	779,7	779,9	779,6	3117,6
		∑ ∑	2324	2325,2	2323,5	2326,6	9299,3

$$SDC_{Total} = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{Total} = 396.2^2 + ... + 428.7^2 - \frac{19379.5^2}{48} = 72315.5$$

$$SDC_{Regiones} = \frac{\sum Regiones^2}{Noobservenc / Reg} - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$SDC_{Regiones} = \frac{10080{,}2^2 + 9299{,}3^2}{24} - \frac{19379.5^2}{48} = 12704.2$$

$$SDC_{UBPC} = \frac{\sum UBPC^2}{NoobserenUBPC} - \frac{\sum Regiones^2}{Noobserven\,Regiones}$$

$$SDC_{UBPC} = \frac{3398.9^2 + ... + 3117.6^2}{8} - \frac{10080.5^2 + 9299.3^2}{24}$$

$$SDC_{UBPC} = 384.6$$

$$SDC_{VAriedad} = \frac{\sum Variedad^2}{Noobservenc / Varied.} - \frac{\sum UBPC^2}{Noobservenc / UBPC}$$

$$SDC_{Varied.} = \frac{1582.5^2 + ... + 1761.1^2}{4} - \frac{3398.9^2 + ... + 3117.6^2}{8}$$

$$SDC_{Var.} = 56890.2$$

$$SDC_{Error} = SDC_{Total} - SDC_{Regiones -} SDC_{UBPC} - SDC_{Var}$$

$$SDC_{Error} = 72315.5 - 12704.2 - 384.6 - 56890.2 = 2336{,}5$$

Gl total = No observaciones total - 1= 48-1=47

GL regiones= No regiones - 1=2-1=1

Gl UBPC= # Regiones(# UBPC - 1) = 2 x 2 = 4

Gl Var = # Regiones(# UBPC)(# Var - 1) = 2 x 3 x 1 = 6

Gl Error = Gl total - Gl Reg - Gl UBPC - Gl Var.

Gl Error= 47 - 1 - 4 - 6 = 38

$$CM_{Regiones} = \frac{SDC_{Reg}}{Gl_{Reg}} = \frac{12704.2}{1} = 12704.2$$

$$CM_{UBPC} = \frac{SDC_{UBPC}}{GL_{UBPC}} = \frac{384.6}{4} = 96{,}15$$

$$CM_{Var} = \frac{SDC_{Var}}{GL_{Var}} = \frac{56890.2}{6} = 9481{,}7$$

$$CM_{Error} = \frac{SDC_{Error}}{Gl_{Error}} = \frac{2336{,}5}{38} = 61.49$$

$$F_{Cal\,Reg} = \frac{CM_{Reg}}{CM_{UBPC}} = \frac{12704.2}{96.15} = 132.13$$

$$F_{CalUBPC} = \frac{CM_{UBPC}}{CM_{Var}} = \frac{96.15}{9481.7} = 0.01$$

$$F_{CalVar} = \frac{CM_{Var}}{CM_{Error}} = \frac{9481.7}{61.49} = 154.2$$

Causas de Variación	Gl	SDC	CM	Fcal	Ftab	
					5%	1%
Regiones	1	12704.2	12704.2	132.13 **	7.71	21.2
UBPC	4	384.6	96.15	0.01	4.53	9.15
Variedades	6	56890.2	9481.7	154.2 **	2.36	3.35
Error	38	2336.5	61.49			
Total	47	72315.5				

ANÁLISIS DE COVARIANZA EN UN DISEÑO DE BLOQUES AL AZAR.

La variación simultánea de dos variables entre las cuales existe correlación, recibe el nombre de covariación.

El modelo del diseño de bloques al azar con una covariable es:

$$Y_{ij} = \mu + Ti + Bj + \delta Xij + \varepsilon_{ij}$$

Donde:

Y_{ij} es la observación del tratamiento i en el bloque j.

μ es el efecto verdadero de la media general.

Ti es el efectio del i-ésimo tratamiento.

Bj es elefecto del j –ésimo bloque.

δ es el efecto de regresión de la covariable.

Xij es la observación de la covariable en el tratamiento i bloque j.

ε_{ij} es el error experimental.

Se realizó un experimento con el objetivo de comparar 5 variedades, utilizándose un diseño de bloques al azar con 4 réplicas, donde se anotó el número de plantas por parcela (x) y el rendimiento de cada una de las parcelas (y).

Tratamientos	Variables	Réplicas			
		I	II	III	IV
V1	X	84	104	76	68
	Y	170	192	125	93
V2	X	167	150	126	185
	Y	220	305	315	400
V3	X	132	120	142	130
	Y	258	216	310	196
V4	X	64	83	97	76
	Y	115	182	137	126
V5	X	58	48	56	54
	Y	86	73	106	95

Las hipótesis que se desean probar son las siguientes:

H_0: T1 = T2 =.......= T5 vs Hl: Al menos 2 tratamientos son diferentes.

H_0: B1 = B2 =.......= B4 vs Hl: Al menos 2 bloques son diferentes.

H_0: $\delta = 0$ vs Hl: $\delta \neq 0$

Estas hipótesis se prueban con un análisis de varianza.

No de plantas por parcela.

Tratamientos	Réplicas				Total	Media
	I	II	III	IV		
V1	84	104	76	68	332	83
V2	167	150	126	185	628	157
V3	132	120	142	130	524	131
V4	64	83	97	76	320	80
V5	58	48	56	54	216	54

Total	505	505	497	513	2020	

Rendimiento por parcela.

Tratamientos	Réplicas				Total	Media
	I	II	III	IV		
V1	170	192	125	93	580	145
V2	220	305	315	400	1240	310
V3	258	216	310	196	980	245
V4	115	182	137	126	560	140
V5	86	73	106	95	360	90
Total	849	968	993	910	3720	

La suma de cuadrados y de productos cruzados son:

$$T_{yy} = \frac{\sum TratY^2}{r} - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{rt}$$

$$T_{yy} = \frac{580^2 + 1240^2 + 980^2 + 560^2 + 360^2}{4} - \frac{3720^2}{20} = 127480.00$$

$$T_{XX} = \frac{\sum TratX^2}{r} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{rt}$$

$$T_{XX} = \frac{332^2 + 628^2 + 524^2 + 320^2 + 216^2}{4} - \frac{2020^2}{20} = 28040.00$$

$$T_{XY} = \frac{\sum TratX * TratY}{r} - \frac{\sum X \sum Y}{rt}$$

$$T_{XY} = \frac{(332)(580) + (628)(1240) + ... + (216)(360)}{4} - \frac{(2020)(3720)}{4*5} = 59720.00$$

$$B_{XX} = \frac{\sum BloqueX^2}{t} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{rt}$$

$$B_{XX} = \frac{505^2 + 505^2 + 497^2 + 513^2}{5} - \frac{2020^2}{4*5} = 25.593750$$

$$B_{YY} = \frac{\sum BloqueY^2}{t} - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{rt}$$

$$B_{YY} = \frac{849^2 + 968^2 + 993^2 + 910^2}{5} - \frac{3720^2}{4*5} = 2474.8125$$

$$B_{XY} = \frac{\sum BloqueX * BloqueY}{t} - \frac{\sum X \sum Y}{rt}$$

$$B_{XY} = \frac{(505)(849) + ... + (513)(910)}{5} - \frac{(2020)(3720)}{4*5} = -132.8125$$

$$SC_{(Total)XX} = \sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{r*t}$$

$$SC_{(Total)XX} = 84^2 + \ldots.. + 54^2 - \frac{2020^2}{4*5} = 31520.00$$

$$SC_{(Total)YY} = \sum Y^2 - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{r*t}$$

$$SC_{(Total)YY} = 170^2 + \ldots... + 95^2 - \frac{3720^2}{4.5} = 180484.00$$

$$PC_{(Total)XY} = \sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{r*t}$$

$$PC_{(Total)XY} = (84)(170) + \ldots.... + (54)(95) - \frac{(2020)(3720)}{4*5} = 64897.00\_$$

$$E_{XX} = SC_{(Total)XX} - T_{XX} - B_{XX}$$

=31520.00-280.40.00-25.59375 = 3454.40625

$$E_{YY} = SC_{(Total)YY} - T_{YY} - B_{YY}$$

=180484.00-127480.00-2474.8125 = 30529.1875

$$E_{XY} = PC_{(Total)XY} - T_{XY} - B_{XY}$$

=64897.00-59720.00-(-132.8125) = 5309.8125

TABLA DE SUMAS DE CUADRADOS Y PRODUCTOS CRUZADOS

Ftes de variación	XX	XY	YY
BLOQUE TRATAMIENTO ERROR	25.59375 28040.00 3454.40625	-132.8125 59720.00 5309.8125	2474.8125 127480.00 30529.1875
B + E	3480.00	5177.00	33004.00
T + E	31494.40625	65029.8125	158009.1875

$$SC_{(Cov.)} = \frac{E_{XY}{}^2}{E_{XX}} = \frac{5309.8125^2}{3454.40625} = 8161.78125$$

$$SC_{Trat.} = (T_{YY} + E_{YY}) - \frac{(T_{XY} + E_{XY})^2}{(T_{XX} + E_{XX})} - \left[E_{YY} - \frac{E_{XY}^2}{E_{XX}}\right]$$

$$SC_{Trat} = 158009.1875 - \frac{65029.8125^2}{31494.40625} - \left[30529.1875 - \frac{5309.8125^2}{3454.40625}\right] = 1367.888916$$

$$SC_{Bloque} = (B_{YY} + E_{YY}) - \frac{(B_{XY} + E_{XY})^2}{(B_{XX} + E_{XX})} - \left[E_{YY} - \frac{E_{XY}^2}{E_{XX}} \right]$$

$$SC_{Bloque} = 33004.00 - \frac{5177.00^2}{3480.00} - \left[30529.1875 - \frac{5309.8125^2}{3454.40625} \right] = 2935.0625$$

$$SC_{Error} = E_{YY} - \frac{E_{XY}^2}{E_{XX}} = 30529.1875 - \frac{5309.8125^2}{3454.40625} = 22367.40625$$

A N A L I S I S D E V A R I A N Z A

Ftes de variación	Gl	SC	CM	Fcal	Ftab	
					5%	1%
Covariable	1	8161.78125	8161.78125	4.0139	4.84	9.65
Tratamiento	t-1=4	1367.888916	341.972229	0.1682	3.36	5.67
Bloque	r-1=3	29367.40625	978.354187	0.4811	3.59	6.22
Error	11	22367.40625	2033.400513			
Total	Tr-1=19	61264.482				

C.V. = 24.243679%

En la tabla de análisis de varianza no se encontró diferencias para la covariable , lo que indica que no existe relación entre el número de frutos y el rendimiento.

En este caso no existen diferencias entre los tratamientos pero en caso de haberlas, las medias de los tratamientos hay que ajustarlas por medio de la siguiente ecuación.

$$\bar{Y}_{ai} = \bar{Y}_i - b(\bar{X}_i - \bar{X}_{....})$$

Donde:

$\bar{Y}_{ai}$ = Media ajustada del tratamiento i.

$\bar{Y}_i$ = Media del tratamiento i con la variable Y.

b = Coeficiente de regresión estimado.

$\bar{X}_i$ = Media del tratamiento i con la variable X.

$\bar{X}_{...}$ = Media de todas las observaciones de la variable X

El coeficiente de regresión se estima mediante la siguiente ecuación:

$$b = \frac{E_{xy}}{E_{xx}} = \frac{5309.8125}{3454.40625} = 1.5371$$

Las medias de los tratamientos para las variables X y Y son:

Tratamientos	Media de Y	Media de X
1	145	83
2	310	157
3	245	131
4	140	80
5	90	54
	Media de las X	101

Las medias ajustadas son:

$$Y_{a1} = 145 - [(1.53711)(83-101)] = 172{,}66798$$
$$Y_{a2} = 310 - [(1.53711)(157-101)] = 223{,}92184$$
$$Y_{a3} = 245 - [(1.53711)(131-101)] = 198{,}8867$$
$$Y_{a4} = 140 - [(1.53711)(80-101)] = 172{,}27931$$
$$Y_{a5} = 90 - [(1.53711)(54-101)] = 162{,}24417$$

ESTIMADOR DEL COEFICIENTE DE REGRESION: ß1 = 1.53711

T A B L A D E M E D I A S

Tratamiento	Medias Ajustadas
1	172.66798
2	223.92184
3	198.8867
4	172.27931
5	162.24417

El error Standard para comparar las medias ajustadas depende de las medias de la variable x, por lo tanto es necesario calcular un error Standard diferente para cada comparación.

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{S^2_{y.x}\left[\frac{2}{r} + \frac{(\overline{X}_i - \overline{X}_j)^2}{E_{xx}}\right]}$$

El valor de la diferencia mínima significativa para comparar las medias de i y j se calcula con la siguiente ecuación.

$$DMS_{ij} = t_{(\alpha,gle)}\sqrt{S^2_{y.x}\left[\frac{2}{r} + \frac{(\overline{X}_i - \overline{X}_j)^2}{E_{xx}}\right]}$$

Donde:

$t_{(\alpha,gle)}$ valor de t de la tabla, el que se busca con el nivel de significación y los grados de libertad del error.

No de observaciones en cada tratamiento. = r

Para el caso de desigual número de observaciones en cada tratamiento:

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{S^2_{y.x}\left[\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} + \frac{(\overline{X}_i - \overline{X}_j)^2}{E_{xx}}\right]}$$

ANÁLISIS DE COVARIANZA EN EXPERIMENTOS FACTORIALES.

Se realizó un experimento donde se evaluaron dos variedades de un cultivo a dos distancias de plantación, utilizando como variable dependiente el rendimiento por parcela. Se consideró como covariable el número de plantas por parcela.

El modelo para un experimento factorial con dos factores y una covariable en el diseño de bloques al azar es:

$$Y_{ijk} = \mu + R_i + A_j + B_K + (AB)_{jk} + bX_{ijk} + \varepsilon_{ijk}$$

i = 1,......,r
j = 1,......,a
k = 1,…..,b
Donde:
Y_{ijk} es la observación de la variable dependiente en la ijk-ésima unidad experimental.
μ es la media verdadera general.
R_i es el efecto del bloque i.
A_j es el efecto del nivel j del factor A.
B_k es el efecto del nivel k del factor B
AB_{jk} es el efecto de la interacción del nivel j del factor A y el nivel k del factor B.
Coeficiente de regresión b
Xijk es la observación de la covariable en la ijk-ésima unidad experimental.
ε_{ijk} es el error experimental.

.Los datos son los siguientes:
Y = Rendimiento.

Tratamientos	Réplicas						
	I	II	III	IV	V	VI	∑
V1D1	8	10	11	13	12	13	67
V1D2	10	12	12	14	15	12	75
V2D1	12	10	13	15	9	16	75
V2D2	14	14	13	12	15	16	84
∑	44	46	49	54	51	57	301

Tratamientos	Réplicas						
	I	II	III	IV	V	VI	∑
V1D1	60	60	57	64	56	61	358
V1D2	62	64	60	63	69	57	375
V2D1	68	60	62	63	50	64	367
V2D2	61	58	56	53	60	58	346
∑	251	242	235	243	235	240	1446

Y=Rendimiento

	D1	D2	∑
V1	67	75	142
V2	75	84	159

∑	142	159	301

X=No de plantas.

	D1	D2	∑
V1	358	375	733
V2	367	346	713
∑	725	721	1446

Para cada una de las variables que se desea estudiar en el experimento, se prueban las siguientes hipótesis:
Ho: A1 = ...= A_a vs Hl: al menos un nivel de A diferente.
Ho: B1 = ...= Bb vs Hl: al menos un nivel de B difernte.
Ho: no hay interacción AxB vs Hl: si hay interacción AxB.

Las hipótesis se prueban con un análisis de varianza.
Sumas de cuadrados y productos cruzados:

$$R_{yy} = \frac{\sum RépY^2}{ab} - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{rab}$$

$$R_{YY} = \frac{44^2 + ... + 57^2}{2*2} - \frac{301^2}{6*2*2} = 29.708252$$

$$A_{YY} = \frac{\sum A^2}{rb} - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{rab}$$

$$A_{YY} = \frac{142^2 + 159^2}{12} - \frac{301^2}{6*2*2} = 12.041748$$

$$B_{YY} = \frac{\sum B^2}{ra} - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{rab}$$

$$B_{YY} = \frac{142^2 + 159^2}{12} - \frac{301^2}{24} = 12.041748$$

$$AB_{YY} = \frac{\sum AB_{YY}}{r} - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{rab} - A_{YY} - B_{YY}$$

$$AB_{YY} = \frac{67^2 + 75^2 + 75^2 + 84^2}{6} - \frac{301^2}{24} - 12.041748 - 12.041748 = 0.041504$$

$$SC_{(Total)YY} = \sum Y^2 - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{rab}$$

$$SC_{(Total)YY} = 8^2 + ... + 16^2 - \frac{301^2}{24} = 105.958252$$

$$E_{YY} = SC_{(Total)YY} - R_{YY} - A_{YY} - B_{YY} - AB_{YY}$$
$$E_{YY} = 105.958252 - 29.708252 - 12.041748 - 12.041748 - 0.041504 = 52.125$$

$$R_{XX} = \frac{\sum RépX^2}{ab} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{rab}$$
$$R_{XX} = \frac{251^2 + \ldots.. + 240^2}{4} - \frac{1446^2}{24} = 44.5$$
$$A_{XX} = \frac{\sum A^2}{rb} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{rab}$$
$$A_{XX} = \frac{733^2 + 713^2}{2*6} - \frac{1446^2}{24} = 16.664063$$

$$B_{XX} = \frac{\sum B^2}{ra} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{rab}$$
$$B_{XX} = \frac{725^2 + 721^2}{2*6} - \frac{1446^2}{24} = 0.664063$$

$$AB_{XX} = \frac{\sum AB_{XX}}{r} - \frac{\left(\sum X\right)^2}{rab} A_{XX} - B_{XX}$$
$$AB_{XX} = \frac{348^2 + \ldots. + 346^2}{6} - \frac{1446^2}{24} - 16.664063 - 0.664063 = 60.164063$$

$$SC_{(Total)XX} = \sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{rab}$$
$$SC_{(Total)XX} = 60^2 + \ldots.. + 58^2 - \frac{1446^2}{24} = 426.500002$$

$$E_{XX} = SC_{(Total)XX} - R_{XX} - A_{XX} - B_{XX} - AB_{XX}$$
$$E_{XX} = 426.500002 - 44.5 - 16.664063 - 0.664063 - 60.164063 = 304.507813$$
$$R_{XY} = \frac{\sum RépX * RépY}{ab} - \frac{\sum X \sum Y}{rab}$$
$$R_{XY} = \frac{(44)(251) + \ldots. + (57)(240)}{2*2} - \frac{(301)(1446)}{6*2*2} = -15.75$$

$$A_{XY} = \frac{\sum A_X A_Y}{rb} - \frac{\sum X \sum Y}{rab}$$

$$A_{XY} = \frac{(142)(733)+(159)(713)}{12} - \frac{(301)(1446)}{24} = -14.16167969$$

$$B_{XY} = \frac{\sum B_X B_Y}{rb} - \frac{\sum X \sum Y}{rab}$$

$$B_{XY} = \frac{(142)(725)+(159)(721)}{12} - \frac{(301)(1446)}{24} = -2.832031$$

$$AB_{yy} = \frac{\sum AB_X AB_Y}{r} - \frac{(\sum X)(\sum Y)}{rab} A_{yy} - B_{yy}$$

$$AB_{XY} = \frac{(67)(358)+....+(84)(346)}{6} - \frac{(301)(1446)}{24} - (-14.16167969) - (-2.832031)$$

$$AB_{XY} = -1.582031$$

$$SC_{(Total)YY} = \sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{rab}$$

$$SC_{(Total)XY} = (8)(60)+....+(16)(58) - \frac{(301)(1446)}{24} = 76.75628931$$

$$E_{XY} = SC_{(Total)XY} - R_{XY} - A_{XY} - B_{XY} - AB_{XY}$$

$$E_{XY} = 76.75628931 - (-15.75) - (-14.16167969) - (-2.832031) - (-1.582031)$$

$$E_{XY} = 111.082031$$

TABLA DE SUMAS DE CUADRADOS Y PRODUCTOS CRUZADOS

Ftes de variación	XX	XY	YY
BLOQUE (R)	44.5000000	-15.750000	29.708252
FACTOR A	16.664063	-14.16167969	12.041748
FACTOR B	0.664063	-2.832031	12.041748
A X B	60.164063	-1.582031	0.041504
ERROR	304.507813	111.082031	52.125000
R + E	349.007813	95.332031	81.833252
A + E	321.171875	96.914063	64.166748
B + E	305.171875	108.25000	64.166748
AB + E	364.671875	109.50000	52.166504

Las sumas de cuadrados son:

$$SC_{(Cov.)} = \frac{E_{XY}{}^{2}}{E_{XX}} = \frac{111.082031^{2}}{304.507813} = 40.521843$$

$$SC_{A.} = (A_{YY} + E_{YY}) - \frac{(A_{XY} + E_{XY})^{2}}{(A_{XX} + E_{XX})} - \left[E_{YY} - \frac{E_{XY}^{2}}{E_{XX}}\right]$$

$$SC_{A} = 64.166748 - \frac{96.914063^{2}}{321.171875} - \left[52.125 - \frac{111.082031^{2}}{304.507813}\right] = 23.319637$$

$$SC_{B.} = (B_{YY} + E_{YY}) - \frac{(B_{XY} + E_{XY})^{2}}{(B_{XX} + E_{XX})} - \left[E_{YY} - \frac{E_{XY}^{2}}{E_{XX}}\right]$$

$$SC_{B} = 64.166748 - \frac{108.25^{2}}{305.171875} - \left[52.125 - \frac{111.082031^{2}}{304.507813}\right] = 14.165352$$

$$SC_{(Bloque)R.} = (R_{YY} + E_{YY}) - \frac{(R_{XY} + E_{XY})^{2}}{(R_{XX} + E_{XX})} - \left[E_{YY} - \frac{E_{XY}^{2}}{E_{XX}}\right]$$

$$SC_{A} = 81.833252 - \frac{95.332031^{2}}{349.007813} - \left[52.125 - \frac{111.082031^{2}}{304.507813}\right] = 44.190002$$

$$SC_{AB.} = (AB_{YY} + E_{YY}) - \frac{(AB_{XY} + E_{XY})^{2}}{(AB_{XX} + E_{XX})} - \left[E_{YY} - \frac{E_{XY}^{2}}{E_{XX}}\right]$$

$$SC_{AB} = 52.166504 - \frac{109.5^{2}}{364.671875} - \left[52.125 - \frac{111.082031^{2}}{304.507813}\right] = 7.683789$$

$$SC_{Error} = E_{YY} - \frac{E_{XY}^{2}}{E_{XX}} = 52.125 - \frac{111.082031^{2}}{304.507813} = 11.603157$$

$$b = \frac{E_{XY}}{E_{XX}} = \frac{111.082031}{304.507813} = 0.3648$$

Ftes de Variación	Gl	SC	CM	F	Ftab	
					5%	1%
Covariables	1	40.521843	40.521843	48.8924		
Bloques	5	44.190002	8.838	10.6636		

Factor A	1	23.319637	23.319637	17.0915		
Factor B	1	14.165352	14.165352	17.0915		
A x B	1	7.683789	7.683789	9.2710		
Error	14	11.603157	0.828797			
Total	23	141.483781				

C.V. = 7.258866%
La interpretación de los resultados se hace igual que en los experimentos factoriales.

TABLA DE MEDIAS DEL FACTOR A

FACTOR A	MEDIA	MEDIA AJ.
1	11.833333	11.529340
2	13.250000	13.553993

DMS PARA COMPARAR MEDIAS AJUSTADAS DE NIVELES DEL FACTOR A

MEDIAS	DMS(0.05)	DMS(0.01)
1 2	0.818742	1.136315

TABLA DE MEDIAS DEL FACTOR B

FACTOR B	MEDIA	MEDIA AJ.
1	11.833333	11.772534
2	13.250000	13.310799

DMS PARA COMPARAR MEDIAS AJUSTADAS DE NIVELES DEL FACTOR B

MEDIAS	DMS(0.05)	DMS(0.01)
1 2	0.798088	1.107649

TABLA DE MEDIAS DE TRATAMIENTOS AB

FACTOR A	FACTOR B 1	2	MEDIA
1	11.1667	12.5000	11.8333
2	12.5000	14.0000	13.2500
MEDIA	11.8333	13.2500	12.5417

TABLA DE MEDIAS AJUSTADAS DE TRATAMIENTOS AB

FACTOR A	FACTOR B 1	2	MEDIA
1	11.3795	11.6792	11.5293
2	12.1656	14.9424	13.5540
MEDIA	11.7725	13.3108	12.5417

DMS PARA COMPARAR MEDIAS DE NIVELES DEL FACTOR A

NIVEL 1 DEL FACTOR B

MEDIAS	DMS(0.05)	DMS(0.01)
1 2	1.139860	1.581988

NIVEL 2 DEL FACTOR B

MEDIAS	DMS(0.05)	DMS(0.01)
1 2	1.250461	1.735489

LÁTICE.

Este diseño pertenece al diseño de bloques incompletos, que permite analizar y comparar un número grande de variantes con precisión.

En ocasiones, el número de variantes con las que hay que trabajar no permite el empleo de diseños para que cada bloque o réplica contenga todas las variantes. En este caso, se emplean otros arreglos, como por ejemplo distribuir una réplica en más de un bloque. El diseño de bloque incompleto más sencillo es aquel en que el número de variantes es un cuadrado perfecto, este diseño que recibe el nombre de lática. En este las filas y columnas no contienen todas las variantes como en el cuadrado latino o en los bloques al azar. Esta característica facilita la comparación de una gran cantidad de variantes con la mayor eficacia en el menor espacio.

Cuando en un experimento se tienen muchos tratamientos no se debería usar el diseño de bloques completos al azar debido a que las unidades experimentales dentro de un bloque completo serían muy heterogéneas. El uso más común de los diseños en látice es en mejoramiento de plantas, en donde frecuentemente se tiene que evaluar una gran cantidad de líneas o variedades de un cultivo.

Un ejemplo para ilustrar la preparación de un látice para 25 variantes y 3 réplicas es el siguiente. Las variantes se distribuyen en un cuadrado de 5 x 5 y se numeran al azar.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	10	14	18	22
23	2	6	15	19
20	24	3	7	11
12	16	25	4	8
9	13	17	21	5

1	8	15	17	24
25	2	9	11	18
19	21	3	10	12
13	20	22	4	6
7	14	16	23	5

Ejemplo.

Utilizaremos un diseño comparativo de 9 líneas con un látice simple con 4 repeticiones por lo que tendremos 3 bloques con 3 variantes en cada réplica.

El croquis es:

Grupos básicos:

Grupo X

	Réplica I		
Bloque			
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

Grupo Y

	Réplica II		
Bloque			
1	1	4	7
2	2	5	8
3	3	6	9

La alegorización es como sigue:

1- Se aleatorizan los bloques dentro de cada repetición.

2- Se aletorizan los tratamientos dentro de cada bloque.

Montaje en el campo:

Las variantes quedaron montadas en la experiencia en la siguiente forma.

Grupo X Repetición I

L9 1	L8 2	L7 4
L2 6	L1 7	L3 4
L5 4	L4 3	L6 3

Grupo X Repetición II

L4 4	L6 4	L5 3
L8 3	L7 3	L9 2
L1 7	L3 4	L2 6

Grupo Y Repetición III

L5 4	L8 3	L2 6
L6 4	L9 2	L3 5
L4 4	L1 7	L7 3

Grupo Y Repetición IV

L3 5	L9 1	L6 3
L2 6	L8 2	L5 5
L1 7	L7 4	L4 4

El primer paso que debemos desarrollar es un análisis de varianza ordinario

Para facilitar los cálculos procederemos a la construcción de la siguiente tabla para ordenar los datos.

Tabla 1

	I	**II**	**III**	**IV**	**Total**
Líneas					
1	7	7	7	7	28
2	6	6	6	6	24
3	4	4	5	5	18
4	3	4	4	4	15
5	4	3	4	5	16
6	3	5	4	3	15
7	4	3	3	4	14
8	2	3	3	2	10
9	1	2	2	1	6
Total	34	37	38	37	146

El análisis de varianza será.

Tabla 2

Causas de variación	**SDC**	**Gl**	**CM**	**Fcal**
Líneas	88.39	8	11.05	31.57
Réplicas	1.00	3	0.33	
Error	8.50	24	0.35	
Total	97.89	35		

En el error experimental está incluida la variabilidad que puede haber ocasionado dentro de cada repetición una posible heterogeneidad, en los diferentes bloques incompletos, establecidos en cada grupo X o Y en las dos repeticiones de cada uno. Para hacer un análisis más detallado del experimento debe tenerse en cuenta también este nuevo factor de variación y al hacerlo reducir más el error experimental y por tanto aumentar la precisión del experimento.

Para estudiar esta variabilidad es preciso calcular la SDC de la desviación atribuida a ella, esta SDC puede considerarse integrada por dos componentes, que llamaremos componente A y componente B.

Componente A.

Determinaremos primero el componente A, el que está constituido por dos grupos de diferencias, uno tomando el grupo X y el otro tomando el grupo Y, en cada uno de ellos se determina la diferencia que existe entre los bloques que tienen los mismos tratamientos.

Grupo X Repetición I
Total.

L9 1	L8 2	L7 4	7
L2 6	L1 7	L3 4	17
L5 4	L4 3	L6 3	10

Grupo X Repetición I
Total

L4 4	L6 4	L5 3	12
L8 3	L7 3	L9 2	8
L1 7	L3 4	L2 6	17

En el gráfico podemos apreciar que el bloque 1 de la réplica I, tiene los mismos tratamientos que el bloque 2 de la réplica II por lo tanto lo apareamos y determinamos su diferencia con el mismo criterio podemos aparear el 2 con el 3 y el 3 con el 1 situándolo por orden de réplicas.

Para la determinación de estas diferencias podemos valernos de las siguientes tablas:

Diferencia entre bloques apareados (X)
Tabla 3

Réplica I		**Réplica II**		**Diferencia**
Bloque	**Rendimiento**	**Bloque**	**Rendimiento**	
1	7	2	8	-1
2	17	3	17	0
3	10	1	12	-2
Total diferencia.				**-3**

De igual forma procederemos con el grupo (Y)

Grupo Y Repetición III
Total

L5 4	L8 3	L2 6	13
L6 4	L9 2	L3 5	11
L4 4	L1 7	L7 3	14

Grupo Y Repetición IV

			Total
L3 5	L9 1	L6 3	9
L2 6	L8 2	L5 5	13
L1 7	L7 4	L4 4	15

Diferencia entre los bloques apareados (Y).

Tabla 4

Réplica III		**Réplica IV**		**Diferencia**
Bloque	**Rendimiento**	**Bloque**	**Rendimiento**	
1	13	2	13	0
2	11	1	9	2
3	14	3	15	-1
Total diferencia.				**1**

La SDC de las diferencias de estos dos grupos, nos dará la varianza para los bloques apareados.

La SDC para el grupo X.

$$F.C = \frac{\left(\sum D\right)^2}{2K^2}$$

2= Número de repeticiones de cada grupo

D= diferencias

$$F.C = \frac{(-3)^2}{2*3^2} = \frac{9}{18} = 0.5$$

K= Número de bloques en cada réplica.

$$S.C_X = \frac{\sum D^2}{2K} - F.C$$

$$S.C_X = \frac{(-1)^2 + (-2)^2}{2*3} - \frac{(13)^2}{2*3^2}$$

$$S.C_X = \frac{5}{6} - \frac{9}{18} = 0.83 - 0.5 = 0.33$$

S.C para el grupo Y.

$$F.C = \frac{1}{18} = 0.056$$

$$S.C_Y = \frac{0^2 + 2^2 + (-1)^2}{2*3} - F.C = 0.833 - 0.056 = 0.77$$

G.L para cada grupo de diferencia será 3-1=2

El componente A será:

Tabla 5

Grupos	**SDC**	**Gl**
X	0.33	2
Y	0.77	2
Total	**1.10**	**4**

Por medio del componente A hemos estudiado la variabilidad entre los bloques incompletos del mismo grupo.

Componente B.

Este componente permite conocer la variabilidad entre bloques incompletos de distintos grupos asignados al mismo conjunto de tratamientos.

Para esto establecemos dos series de diferencias, utilizando los cuadros 1 y 2, que contienen la suma de las dos repeticiones por cada grupo por líneas, la distribución de estos cuadros es la misma de los grupos básicos.

Grupo X Repetición I

L9 1	L8 2	L7 4
L2 6	L1 7	L3 4
L5 4	L4 3	L6 3

Grupo X Repetición I

L4 4	L6 4	L5 3
L8 3	L7 3	L9 2
L1 7	L3 4	L2 6

Grupo Y Repetición III

.

Grupo Y Repetición IV

L3 5	L9 1	L6 3
L2 6	L8 2	L5 5
L1 7	L7 4	L4 4

Cuadro 1 (X)

L1 14	L2 12	L3 8	34
L4 7	L5 7	L6 8	22
L7 7	L8 5	L9 3	15
Total 28	24	19	

Cuadro 2 (Y)

L1 14	L4 8	L7 7	29
L2 12	L5 9	L8 5	26
L3 10	L6 7	L9 3	20
Total 28	24	15	

Obtenidos los dos cuadros 1 y 2 procederemos a determinar las diferncias entre columnas y filas que poseen los mismos tratamientos.

Tabla 6

Totales filas Cuadro 1	Totales Columna Cuadro 2	Diferencia
34	36	-2
22	24	-2
15	15	0
71	75	-4

Tabla 7

Totales columnas Cuadro 1	**Totales filas Cuadro 2**	**Diferencia**
28	29	-1
24	26	-2
19	20	-1
71	75	-1

La SDC de las 2 series de diferencias, darán una estimación de la variabilidad entre bloques.

Las divisiones de la SDC serán r x k y r x k^2.

R= No de repeticiones

K= No de variantes en cada bloque o No de bloques en cada réplica.

S.C Tabla No.6

$$F.C = \frac{(-4)^2}{r*k^2} = \frac{16}{4*3^2} = \frac{16}{36} = 0.444$$

$$S.C = \frac{(-2)^2 + (-2)^2 + 0^2}{12} - 0.444 = 0.6 - 0.444 = 0.222$$

S.C de la tabla 7.

$$F.C = \frac{(-4)^2}{r*k^2} = \frac{16}{36} = 0.444$$

$$S.C = \frac{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}{r*k} - F.C = \frac{1+4+1}{12} - F.C$$

$S.C =$ 0.5-0.444=0.056

G.L= K-1=(para cada serie de diferencias)

Componente B.

Tabla 8

Tablas	**SDC**	**Gl**
6	0.222	2
7	0.056	2
Total	**0.278**	**4**

Con estos resultados podemos realizar el análisis de varianza.

Análisis de varianza.

Tabla 9.

Causas de variación	SDC	Gl	CM	Fcal	Ftab	
					5%	1%
Líneas	88.29	8	11.05	24.25	2.59	3.89
Réplicas	1.00	3	0.33			
Componente A	1.10	4				
Componente B	0.28	4				
Bloques	1.38	8	0.17			
Error	7.12	16	0.45			
Total	**97.89**	**35**				

Por último para poder comparar los promedios de los tratamientos se hace necesario la corrección de estos promedios y la determinación de 2 errores típicos para la prueba T, uno para comparar las variantes que se encuentran dentro de un mismo bloque y otro para comparar las que se encuentran en bloques diferentes.

Para ello es necesario la determinación de 2 correcciones C_y y C_x.

Para un promedio determinado C_x , es el resultado de dividir la diferencia del total de la columna del cuadro 2 (grupo Y) en que figura la variante promediada y el total de la fila del cuadro 1 (grupo X) que contiene dicha variante, por el producto r*k.

C_Y es el resultado de dividir la diferencia del total de la columna del cuadro 1 (grupo X) en que figura la variante y el total de la fila del cuadro 2 (grupo Y) en que se encuentra dicha variante por el mismo producto.

$$C_X = \frac{Totalcolumna(Y) - Totaldefila(X)}{r*k}$$

$$C_Y = \frac{Totalcolumna(X) - Totaldefila(Y)}{r*k}$$

Vamos a corregir el promedio de la línea 1.

$C_X = \frac{36-34}{4*3} = \frac{2}{12} = 0.17$

$C_Y = \frac{28-29}{12} = \frac{-1}{12} = 0.083$

Como el promedio de la línea 1 es 7

7 +0.17-0.083=7.087

Para mayor precisión se ha deducido un coeficiente que multiplicado por las correcciones C_X y C_y de nuevas correcciones C_X y C_Y.

Dicho coeficiente es: $\frac{W-W'}{W+W''}$

En que $W=\frac{1}{V_e}$ y $W'=\frac{3}{4V_b \quad -V_e}$

Donde Ve= varianza del error experimental y Vb varianza entre bloques.

$W=\frac{1}{0.45}=2.222$

$W'=\frac{3}{4*0.17-0.45}=\frac{3}{0.68-0.45}=\frac{3}{0.23}=13.043$

$C=\frac{2.222-13.043}{2.222+13.043}=\frac{-10.821}{15.265}=-0.709$

En consecuencia para cada promedio las correcciones nuevas seríaqn:

C'x=-0.709 * Cx

Pero como Cx y Cy eran el cociente de dividir la diferencia correspondiente entre el total de la columna y fila por r * k que en nuestro caso vale 3 *4=12, si representamos la diferencia de un modo general por D, tendremos:

C'x=-0.709 * $\frac{D}{12}=\frac{-0.709}{12}*D=-0.059*2=-0.118$

C'y=-0.059 * -1=0.059

Y por tanto el promedio corregido es:

7-0.118+0.059=6.941

de modo, que con el nuevo método de corrección, obtenemos un promedio corregido de 9.941, en lugar del promedio de 7.087 obtenido por el método antiguo.

De la misma forma se determinarán los promedios corregidos para las 9 líneas comparadas en el experimento.

Para determinar la significación de las diferencias existentes entre dos promedios de variantes por la prueba de t, es preciso calcular dos errores típicos, una para el caso en que se trate de dos variantes pertenecientes al mismo bloque incompleto y otra para aquel en que hayan de compararse dos variantes pertenecientes a distinto bloque incompleto.

La primera expresión por lo tanto es:

$EE=\sqrt{\frac{2Ve}{r*k}\left[\frac{2w}{w+w'}+\left(K-1\right)\right]}$

Para el caso de variantes pertenecientes a diferentes bloques incompletos, sería:

EE= $\sqrt{\dfrac{2Ve}{r*k}\left[\dfrac{4w}{w+w'}+\left(K-2\right)\right]}$

Distribuciones en látice triple.

En este se establecen 3 grupos de parcelas , los grupos X y Y, en igual forma que en las distribuciones en látice simple y un tercer grupo Z, con dos repeticiones, designadas repetición 5 y repetición 6 en las que se distribuyen también al azar los bloques incompletos y los tratamientos de cada bloque

El análisis e interpretación de los resultados de este experimento es semejante a loa del látice simple. En este caso, el número total de repeticiones es 6, en lugar de 4. La variabilidad entre bloques está integrada también por los componentes A y B, donde además delas dos repeticiones de X y Y se incluyen las de Z.

BIBLIOGRAFÍA.

1- Cochram, W.G y G.M. Cox. 1991. Experimental design, Wiley.

2- Expósito, E. Irene y Gardón, C. D. 1988. Manual de clases prácticas. Universidad de Granma.

3- Fernández, P. E y col. 1991. Manual de clases prácticas de Experimentación Agrícola. UNAH. La Habana.

4- Guerra, B. Caridad. 1979. Estudio de la relación modelo-diseño de tratamientos en la determinación de las dosis óptimas de fertilizantes con experimentos de campo. Referencia para optar por el grado científico de Doctor en Ciencias Agrícolas. UNAH.

5- Guerra, D.J y Sevilla, P. Élida 1987. Introducción al análisis estadístico para procesos.

6- Guzmán, C. A y J. C. Guzmán. Uso de planos antogonales en la investigación cañera. EPICA. Stgo de Cuba.

7- Guzmán, C.J. 1988. Diseños de experimentos para ingenieros mecánicos. ISPJAM. Stgo de Cuba.

8- Lerch G. 1977.La experimentación en las ciencias biológicas y agrícolas. Ed. Cientif. Téc. La Habana.

9- López, P.R. 1988. Diseños estadísticos de experimentos. Ed. Cientif. Téc. La Habana.

10- Olivares, S.E. 1992. Nota de diseños experimentales con aplicación a la experimentación agrícola y primara. Universidad autónoma de nueva león. México.

11- Sigarroa, A. 1991 Biometría y diseño experimental. La Habana.