UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA

ACTIVIDAD 2 ALGEBRA LINEAL

MATEMATICA AVANZADA

AUTOR:
Br. KEVIN HEBERTH HAQUEHUA APAZA

DOCENTE:
Dr. EDISON MARCAVILLACA NIÑO DE GUZMAN

CUSCO - PERÚ

ENERO - 2025

1. Problema

Demuestre que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, donde

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.1. Solución

Para demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, comprobemos que cumpla la siguiente definición

Definición. Espacio vectorial en $\mathbb{R}^n$

Un conjunto S no vacío de $\mathbb{R}^n$, es llamado un espacio vectorial en $\mathbb{R}^n$ si verifica las siguientes condiciones

i) Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$

ii) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in S$, entonces $\alpha\mathbf{x} \in S$

1.1.1. Primera condición

Sean $\mathbf{x}$,$\mathbf{y} \in S$, expresados de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, realizemos la siguiente operación $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ el cual debe pertenecer a S

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\left(\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\beta_1\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right)+\left(\alpha_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\beta_2\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

En esta parte se puede agrupar los vectores $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ como términos comúnes

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(\alpha_1+\alpha_2)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+(\beta_1+\beta_2)\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

Se sabe que si $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$ entonces $\alpha_1+\alpha_2\in\mathbb{R}$, de igual forma $\beta_1+\beta_2\in\mathbb{R}$, entonces se cumple que $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in S$

1.1.2. Segunda condición

Sea $\mathbf{x}\in S$, esto es

$$\mathbf{x}=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Multipliquemos por un escalar $\gamma\in\mathbb{R}$:

$$\gamma\mathbf{x}=\gamma\left(\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$\gamma\mathbf{x} = \gamma\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \gamma\beta\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

Se sabe que si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha\gamma \in \mathbb{R}$, de igual forma $\beta\gamma \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que $\gamma\mathbf{x} \in S$

CONCLUSIÓN: S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

2. Problema

Considere el siguiente conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$X = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Demuestre que uno de los dos vectores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

pertenece a $gen(X)$, mientras que el otro no.

Encuentre un número real de λ tal que

$$\begin{bmatrix}1\\1\\\lambda\end{bmatrix} \in gen(X)$$

2.1. Solución

Para demostrar que uno de los $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in gen(X)$ se debe cumplir la siguiente definición

Definición. Espacio generado por los vectores

El conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de $v_1, v_2, \cdots, v_r$ es llamado espacio generado $gen(X)$ por $v_1, \cdots, v_n$ si

$$gen(v_1, \cdots, v_n) = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r / \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, r\}$$

2.1.1. Para el vector u

Se debe cumplir la siguiente combinación lineal

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reemplanzado por el vector **u** se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se tienen las siguientes combinaciones lineales

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= -1 && (1) \\ \alpha_2 &= 2 && (2) \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 1 && (3) \end{aligned}$$

Del cual de (2) se tiene que $\alpha_2 = 2$, reemplazemos estos valores en (1) y (3):

- Reemplanzado en (1):

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 2\alpha_2 &= -1\\ \alpha_1 - 2(2) &= -1\\ \alpha_1 &= 3\end{aligned}$$

Se observa que $\alpha_1 = 3$, y cumple la igualdad en **u**, ahora reemplazemos $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = 2$ en (3)

- Reemplanzado en (3):

$$\begin{aligned}-\alpha_1 + \alpha_2 &= 1\\ -(3) + (2) &= -1 \neq 1\end{aligned}$$

Se observa que no cumple la igualdad.

Por lo tanto $\mathbf{u} \notin gen(X)$

2.1.2. Para el vector v

Se debe cumplir la siguiente combinación lineal

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reemplanzado por el vector **v** se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se tienen las siguientes combinaciones lineales

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= -1 \quad (1) \\ \alpha_2 &= 1 \quad (2) \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

Del cual de (2) se tiene que $\alpha_2 = 1$, reemplazemos estos valores en (1) y (3):

- Reemplanzado en (1):

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= -1 \\ \alpha_1 - 2(1) &= -1 \\ \alpha_1 &= 1 \end{aligned}$$

  Se observa que $\alpha_1 = 1$, y cumple la igualdad en $\mathbf{v}$, ahora reemplazemos $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 1$ en (3)

- Reemplanzado en (3):

$$\begin{aligned} -\alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ -(1) + (1) &= 0 \neq 1 \end{aligned}$$

  Se observa que no cumple la igualdad.

  Por lo tanto $\mathbf{v} \notin gen(X)$

CONCLUSIÓN: Ninguno de los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \notin gen(X)$

2.2. Encontrar un número real λ

De igual forma igualamos la combinación lineal e igualamos al vector para hallar el valor de λ

Se tienen las siguientes combinaciones lineales

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 = 1 \tag{1}$$

$$\alpha_2 = 1 \tag{2}$$

$$-\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda \tag{3}$$

Del cual de (2) se tiene que $\alpha_2 = 1$, reemplazemos estos valores en (1) y (3):

- Reemplanzado en (1):

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1 - 2(1) &= 1 \\ \alpha_1 &= 3 \end{aligned}$$

  Se observa que $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = 1$, reemplazemos estos valores en (3)

- Reemplanzado en (3):

$$\begin{aligned} -\alpha_1 + \alpha_2 &= \lambda \\ -(3) + (1) &= \lambda \\ \lambda &= -2 \end{aligned}$$

El valor de λ para que el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \in gen(X)$ es -2

CONCLUSIÓN: El número real de λ es -2

3. Problema

Verifique si cada uno de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes:

a)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

b)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}.$$

c)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

d)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3.1. Solución

Para verificar que uno de los conjuntos de vectores son linealmente independientes de la definición de **Independencia lineal** tomamos los siguientes enunciados:

- El conjunto $A = \{v_1, \cdots, v_r\}$ de vectores $v_i \in \mathbb{R}^n$, es llamado conjunto linealmente independiente si los vectores $v_1, \cdots, v_r$ son linealmente independientes.

- Sea $A = \{v_1, \cdots, v_r\} \subset \mathbb{R}^n$ y sea $A = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_r]$ una matriz de orden nxr. A es linealmente independiente $\iff N(A) = \{0\}$

3.1.1. Para a)

Tenemos los siguientes vectores

- $v_1 = (1, 2, 3)$

- $v_2 = (1, 0, -1)$

- $v_3 = (-2, 1, 1)$

y el conjunto $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ expresando el conjunto en una matriz quedaría de la siguiente forma

$$A = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow N(A) = \{\mathbf{0}\}?$$

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

La solución del sistema lineal estaría representado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El cual nos da el siguiente sistema de combinaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 && (1) \\ 2x_1 + x_3 &= 0 && (2) \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 && (3) \end{aligned}$$

De lo cual en la ecuación (2) se tiene que $x_3 = -2x_1$, si reemplazamos este valor en la ecuación (1) se tiene

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2(-2x_1) &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_1 &= 0 \\ x_2 &= -5x_1 \end{aligned}$$

4. Problema

Sea A una matriz mxn, y sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$. La imagen de X bajo la transformación de A se define como el conjunto

$$A(X) = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X\}$$

(a) Demuestre que $A(X) \subseteq C(A)$

(b) Si X es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, pruebe que $A(X)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

5. Problema

Considere los siguientes vectores en $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Aplique el procedimiento de Gram-Schmidt a estos vectores para obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.