UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA

ACTIVIDAD 2 ALGEBRA LINEAL

MATEMATICA AVANZADA

AUTOR:
Br. KEVIN HEBERTH HAQUEHUA APAZA

DOCENTE:
Dr. EDISON MARCAVILLACA NIÑO DE GUZMAN

CUSCO - PERÚ

ENERO - 2025

1. Problema

Demuestre que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, donde

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.1. Solución

Para demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, comprobemos que cumpla la siguiente definición

Definición. Espacio vectorial en $\mathbb{R}^n$

Un conjunto S no vacío de $\mathbb{R}^n$, es llamado un espacio vectorial en $\mathbb{R}^n$ si verifica las siguientes condiciones

i) Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$

ii) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in S$, entonces $\alpha\mathbf{x} \in S$

1.1.1. Primera condición

Sean $\mathbf{x}$,$\mathbf{y} \in S$, expresados de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, realizemos la siguiente operación $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ el cual debe pertenecer a S

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\left(\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\beta_1\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right)+\left(\alpha_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\beta_2\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

En esta parte se puede agrupar los vectores $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ como términos comúnes

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(\alpha_1+\alpha_2)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+(\beta_1+\beta_2)\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

Se sabe que si $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$ entonces $\alpha_1+\alpha_2\in\mathbb{R}$, de igual forma $\beta_1+\beta_2\in\mathbb{R}$, entonces se cumple que $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in S$

1.1.2. Segunda condición

Sea $\mathbf{x}\in S$, esto es

$$\mathbf{x}=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Multipliquemos por un escalar $\gamma\in\mathbb{R}$:

$$\gamma\mathbf{x}=\gamma\left(\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$\gamma\mathbf{x} = \gamma\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \gamma\beta\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

Se sabe que si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha\gamma \in \mathbb{R}$, de igual forma $\beta\gamma \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que $\gamma\mathbf{x} \in S$

CONCLUSIÓN: S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

2. Problema

Considere el siguiente conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$X = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Demuestre que uno de los dos vectores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

pertenece a $gen(X)$, mientras que el otro no.

Encuentre un número real de λ tal que

$$\begin{bmatrix}1\\1\\\lambda\end{bmatrix} \in gen(X)$$

2.1. Solución

Para demostrar que uno de los $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in gen(X)$ se debe cumplir la siguiente definición

Definición. Espacio generado por los vectores

El conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de $v_1, v_2, \cdots, v_r$ es llamado espacio generado $gen(X)$ por $v_1, \cdots, v_n$ si

$$gen(v_1, \cdots, v_n) = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r / \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, r\}$$

2.1.1. Para el vector u

Se debe cumplir la siguiente combinación lineal

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reemplanzado por el vector **u** se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se tienen las siguientes combinaciones lineales

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 = -1 \quad (1)$$

$$\alpha_2 = 2 \quad (2)$$

$$-\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (3)$$

Del cual de (2) se tiene que $\alpha_2 = 2$, reemplazemos estos valores en (1) y (3):

- Reemplanzado en (1):

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= -1 \\ \alpha_1 - 2(2) &= -1 \\ \alpha_1 &= 3 \end{aligned}$$

  Se observa que $\alpha_1 = 3$, y cumple la igualdad en $\mathbf{u}$, ahora reemplazemos $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = 2$ en (3)

- Reemplanzado en (3):

$$\begin{aligned} -\alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ -(3) + (2) &= -1 \neq 1 \end{aligned}$$

  Se observa que no cumple la igualdad.

Por lo tanto $\mathbf{u} \notin gen(X)$

2.1.2. Para el vector v

Se debe cumplir la siguiente combinación lineal

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reemplanzado por el vector **v** se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se tienen las siguientes combinaciones lineales

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= -1 && (1) \\ \alpha_2 &= 1 && (2) \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 1 && (3) \end{aligned}$$

Del cual de (2) se tiene que $\alpha_2 = 1$, reemplazemos estos valores en (1) y (3):

- Reemplanzado en (1):

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= -1 \\ \alpha_1 - 2(1) &= -1 \\ \alpha_1 &= 1 \end{aligned}$$

  Se observa que $\alpha_1 = 1$, y cumple la igualdad en **v**, ahora reemplazemos $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 1$ en (3)

- Reemplanzado en (3):

$$\begin{aligned} -\alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ -(1) + (1) &= 0 \neq 1 \end{aligned}$$

Se observa que no cumple la igualdad.

Por lo tanto $\mathbf{v} \notin gen(X)$

CONCLUSIÓN: Ninguno de los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \notin gen(X)$

2.2. Encontrar un número real λ

De igual forma igualamos la combinación lineal e igualamos al vector para hallar el valor de λ

Se tienen las siguientes combinaciones lineales

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 1 \quad (1) \\ \alpha_2 &= 1 \quad (2) \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= \lambda \quad (3) \end{aligned}$$

Del cual de (2) se tiene que $\alpha_2 = 1$, reemplazemos estos valores en (1) y (3):

- Reemplanzado en (1):

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1 - 2(1) &= 1 \\ \alpha_1 &= 3 \end{aligned}$$

  Se observa que $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = 1$, reemplazemos estos valores en (3)

- Reemplanzado en (3):

$$\begin{aligned} -\alpha_1 + \alpha_2 &= \lambda \\ -(3) + (1) &= \lambda \\ \lambda &= -2 \end{aligned}$$

El valor de λ para que el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \in gen(X)$ es -2

CONCLUSIÓN: El número real de λ es -2

3. Problema

Verifique si cada uno de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes:

a)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

b)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}.$$

c)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

d)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3.1. Solución

Para verificar que uno de los conjuntos de vectores son linealmente independientes de la definición de **Independencia lineal** tomamos los siguientes enunciados:

- El conjunto $A = \{v_1, \cdots, v_r\}$ de vectores $v_i \in \mathbb{R}^n$, es llamado conjunto linealmente independiente si los vectores $v_1, \cdots, v_r$ son linealmente independientes.

- Sea $A = \{v_1, \cdots, v_r\} \subset \mathbb{R}^n$ y sea $A = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_r]$ una matriz de orden nxr. A es linealmente independiente $\iff N(A) = \{0\}$

3.1.1. Para a)

Tenemos los siguientes vectores

- $v_1 = (1, 2, 3)$

- $v_2 = (1, 0, -1)$

- $v_3 = (-2, 1, 1)$

y el conjunto $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ expresando el conjunto en una matriz quedaría de la siguiente forma

$$A = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow N(A) = \{\mathbf{0}\}?$$

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

La solución del sistema lineal estaría representado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El cual nos da el siguiente sistema de combinaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 && (1) \\ 2x_1 + x_3 &= 0 && (2) \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 && (3) \end{aligned}$$

De lo cual en la ecuación (2) se tiene que $x_3 = -2x_1$, si reemplazamos este valor en la ecuación (1) se tiene

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2(-2x_1) &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_1 &= 0 \\ x_2 &= -5x_1 \end{aligned}$$

Reemplanzado estos valores en (3)

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - (-5x_1) + (-2x_1) &= 0 \\ 6x_1 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando $x_1 = 0$ en (2) se tiene que $x_3 = 0$. Ahora por último si reemplazamos estos valores en (1) o (3) se tiene que $x_2 = 0$. Por lo que el vector $\mathbf{x}$ estaría expresado de la siguiente forma

$$\mathbf{x} = (0, 0, 0)$$

CONCLUSIÓN: A es linealmente independiente

3.1.2. Para b)

Tenemos los siguientes vectores

- $v_1 = (1, 2, 3)$
- $v_2 = (4, 5, 6)$
- $v_3 = (7, 8, 9)$

y el conjunto $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ expresando el conjunto en una matriz quedaría de la siguiente forma

$$B = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow N(B) = \{\mathbf{0}\}?$$

$$N(B) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / B\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Reduzcamos la matriz escalonada, mediante el programa nos da la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema lineal estaría representado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El cual nos da el siguiente sistema de combinaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \qquad (1) \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

De lo cual en la ecuación (1) se tiene que $x_1 = x_3$, de la misma forma se tiene mediante la ecuación (2) que $x_2 = -2x_3$ y si reemplazamos x_3 por x_1 en la ecuación (2) se tiene que $x_2 = -2x_1$.

Expresando el vector $\mathbf{x}$ en función de x_1 se tiene lo siguiente

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, -2x_1, x_1) = x_1(1, -2, 1)$$

CONCLUSIÓN: B no es linealmente independiente

3.1.3. Para c)

Tenemos los siguientes vectores

- $v_1 = (1, 2, 3, 4)$
- $v_2 = (1, 1, 1, 1)$
- $v_3 = (1, 3, 1, 2)$
- $v_4 = (2, 1, 1, 2)$

y el conjunto $C = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ expresando el conjunto en una matriz quedaría de la siguiente forma

$$C = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow N(C) = \{\mathbf{0}\}?$$

$$N(C) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / C\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Reduzcamos la matriz escalonada, mediante el programa nos da la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema lineal estaría representado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El cual nos da el siguiente sistema de combinaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \quad (1) \\ x_2 &= 0 \quad (2) \\ x_3 &= 0 \quad (3) \\ x_4 &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Expresando el vector **x** de la siguiente manera

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$$

CONCLUSIÓN: C es linealmente independiente

3.1.4. Para d)

Tenemos los siguientes vectores

- $v_1 = (1, 2, -1, 0)$
- $v_2 = (0, 1, 2, 1)$
- $v_3 = (2, 3, -4, -1)$

y el conjunto $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ expresando el conjunto en una matriz quedaría de la siguiente forma

$$D = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow N(D) = \{\mathbf{0}\}?$$

$$N(D) = \{\mathbf{x} \subset \mathbb{R}^4 / D\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Reduzcamos la matriz escalonada, mediante el programa nos da la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema lineal estaría representado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El cual nos da el siguiente sistema de combinaciones lineales

$$x_1 + 2x_3 = 0 \tag{1}$$

$$x_2 - x_3 = 0 \tag{2}$$

De lo cual en la expresión (2) se tiene que $x_2 = x_3$, en la expresión (1) se tiene que $x_1 = -2x_3$.

Asimismo reemplazando x_3 por $-\frac{1}{2}x_1$ en la ecuación (2) se tiene que $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$

Expresando el vector $\mathbf{x}$ en función de x_1 se queda de la siguiente manera

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, -\frac{1}{2}x_1, -\frac{1}{2}x_1\right) = x_1\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

CONCLUSIÓN: D no es linealmente independiente

4. Problema

Sea A una matriz mxn, y sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$. La imagen de X bajo la transformación de A se define como el conjunto

$$A(X) = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X\}$$

(a) Demuestre que $A(X) \subseteq C(A)$

(b) Si X es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, pruebe que $A(X)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

4.1. Solucion a)

Utilizando la definición de rango de una matriz definimos $C(A)$

Definición. Rango de matriz

El rango de una matriz A es la dimensión de $C(A)$ donde

$$C(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m / A\mathbf{x} = \mathbf{y}, \text{para algún } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

Tomemos en cuenta que

$$A(X) = \{A\mathbf{x}/\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

Es decir que cualquier $\mathbf{x}$ que pertenece a X, pertenece a $\mathbb{R}^n$

Ahora de $C(A)$ se tiene

$$C(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m / A\mathbf{x} = \mathbf{y}, \text{para algún } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

Cada $A\mathbf{x} \in A(X)$ también está incluido en $C(A)$ por lo que generalizando se tiene que

$$A(X) \subseteq C(A)$$

4.2. Solucion b)

Para probar tenemos que comprobar la misma definición que se planteo en el problema 1 acerca de espacio vectorial en $\mathbb{R}^n$

4.2.1. Primera condición

Sean los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A(X)$ de donde podemos expresarlos de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = Ax \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = Ay$$

Lo cual indica que $x, y \in X$ entonces tenemos que demostrar que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in A(X)$, desarrollando esto tenemos

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = Ax + Ay = A(x + y)$$

De lo cual se sabe que como $x, y \in X$, también $(x + y) \in X$, se observa que $A(x + y)$ esta incluido en el conjunto, es decir $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in A(X)$

4.2.2. Segunda condición

Sea $c \in \mathbb{R}$ un escalar, debemos demotrar que $c\mathbf{u} \in A(X)$, desarrollando se tiene la siguiente expresión

$$c\mathbf{u} = c(Ax) = A(cx)$$

De lo cual se sabe que como $x \in X$, también $cx \in X$, para todo $c \in \mathbb{R}$ se observa que $A(cx)$ esta incluido en el conjunto, es decir $c\mathbf{u} \in A(X)$

CONCLUSIÓN: Si X es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, $A(X)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$

5. Problema

Considere los siguientes vectores en $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Aplique el procedimiento de Gram-Schmidt a estos vectores para obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

5.1. Solución

Para obtener la base ortonormal utilizamos la definición de Ortogonalización de Gram-Schmidt

Definición. Ortogonalización de Gram-Schmidt

Sea $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base para un espacio euclidiano

- $w_1 = v_1 \quad ; \quad u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$
- $w_2 = v_2 - proy_{w_1}(v_2) \quad ; \quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$
- $w_3 = v_3 - proy_{w_1}(v_2) - proy_{w_2}(v_3) \quad ; \quad u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$

$$\vdots$$

- $w_n = v_n - proy_{w_1}(v_2) - \cdots - proy_{w_{n-1}}(v_n) \quad ; \quad u_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}$

- $\{w_1, \cdots, w_n\}$ es ortogonal.

- $\{u_1, \cdots, u_n\}$ es ortonormal.

En nuestro caso tenemos los vectores en $\mathbb{R}^4$ de la siguiente manera $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ donde los vectores estan expresados de la siguiente manera

- $v_1 = (1, 1, 1, 1)$

- $v_2 = (0, 1, 1, 1)$

- $v_3 = (0, 0, 1, 1)$

- $v_4 = (0, 0, 0, 1)$

Tenemos los siguientes ejemplos hasta $n = 4$

- $w_1 = v_1 \quad ; \quad u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$

- $w_2 = v_2 - proy_{w_1}(v_2) \quad ; \quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$

- $w_3 = v_3 - proy_{w_1}(v_2) - proy_{w_2}(v_3) \quad ; \quad u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$

- $w_4 = v_4 - proy_{w_1}(v_2) - proy_{w_2}(v_3) - proy_{w_3}(v_4) \quad ; \quad u_4 = \frac{w_4}{\|w_4\|}$

- $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es ortogonal.

- $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es ortonormal.

En lo cual debemos hallar los vectores ortonormales u_i, desarrollemos de la siguiente manera

1. **Hallar el primer vector ortonormal**

Como $w_1 = v_1$, reemplazamos en la ecuación

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} \\
u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\
u_1 &= \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{\langle v_1, v_1\rangle}} \\
u_1 &= \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} \\
u_1 &= \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{4}} \\
u_1 &= \frac{(1,1,1,1)}{2} \\
u_1 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

2. **Hallar el segundo vector ortonormal**

   En este caso primero tenemos que calcular w_2 el cual sería de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
w_2 &= v_2 - proy_{w_1}(v_2) \\
w_2 &= (0,1,1,1) - \frac{\langle w_1, v_2\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 \\
w_2 &= (0,1,1,1) - \frac{\langle (1,1,1,1), (0,1,1,1)\rangle}{2^2}(1,1,1,1) \\
w_2 &= (0,1,1,1) - \frac{0+1+1+1}{4}(1,1,1,1) \\
w_2 &= (0,1,1,1) - \frac{3}{4}(1,1,1,1) \\
w_2 &= (0,1,1,1) - \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \\
w_2 &= \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

Ahora calculemos el segundo vector ortonormal u_2

$$
\begin{aligned}
u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} \\
u_2 &= \frac{\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\langle w_2, w_2 \rangle}} \\
u_2 &= \frac{\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}} \\
u_2 &= \frac{\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{9}{16}\right) + \left(\frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{16}\right)}} \\
u_2 &= \frac{\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{12}{16}\right)}} \\
u_2 &= \frac{\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}{\frac{2\sqrt{3}}{4}} \\
u_2 &= \left(-\frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}
$$

3. **Hallar el tercer vector ortonormal**

En este caso primero tenemos que calcular w_3 el cual sería de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
w_3 &= v_3 - proy_{w_1}(v_2) - proy_{w_2}(v_3) \\
w_3 &= (0,0,1,1) - \frac{\langle w_1, v_2\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle w_2, v_3\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 \\
w_3 &= (0,0,1,1) - \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) - \frac{\langle \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), (0,0,1,1)\rangle}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)^2} \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\
w_3 &= \left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\
w_3 &= \left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) - \frac{2}{3} \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\
w_3 &= \left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \\
w_3 &= \left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)
\end{aligned}$$

Ahora calculemos el tercer vector ortonormal u_3

$$\begin{aligned}
u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} \\
u_3 &= \frac{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)}{\sqrt{\langle w_3, w_3\rangle}} \\
u_3 &= \frac{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{11}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2}} \\
u_3 &= \frac{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{16}\right) + \left(\frac{121}{144}\right) + \left(\frac{1}{144}\right) + \left(\frac{1}{144}\right)}} \\
u_3 &= \frac{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)}{\sqrt{\left(\frac{132}{144}\right)}} \\
u_3 &= \frac{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)}{\frac{2\sqrt{33}}{12}} \\
u_3 &= \left(-\frac{3}{2\sqrt{33}}, -\frac{11}{2\sqrt{33}}, \frac{1}{2\sqrt{33}}, \frac{1}{2\sqrt{33}}\right)
\end{aligned}$$

4. **Hallar el cuarto vector ortonormal**

En este caso primero tenemos que calcular w_4 el cual sería de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
w_4 &= v_4 - proy_{w_1}(v_2) - proy_{w_2}(v_3) - proy_{w_3}(v_4) \\
w_4 &= (0,0,0,1) - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle w_2, v_3 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \frac{\langle w_3, v_4 \rangle}{\|w_3\|^2} w_3 \\
w_4 &= (0,0,0,1) - \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) - \frac{\langle \left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right), (0,0,0,1) \rangle}{\left(\frac{2\sqrt{33}}{12}\right)^2} \left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_4 &= \left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{12}, -\frac{11}{12}, \frac{1}{12}\right) - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{11}{12}} \left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right) \\
w_4 &= \left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{12}, -\frac{11}{12}, \frac{1}{12}\right) - \frac{1}{11} \left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right) \\
w_4 &= \left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{12}, -\frac{11}{12}, \frac{1}{12}\right) - \left(-\frac{1}{44}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{132}, \frac{1}{132}\right) \\
w_4 &= \left(-\frac{5}{22}, -\frac{5}{6}, -\frac{61}{66}, \frac{5}{66}\right)
\end{aligned}
$$

Ahora calculemos el cuarto vector ortonormal u_4

$$
\begin{aligned}
u_4 &= \frac{w_4}{\|w_4\|} \\
u_4 &= \frac{\left(-\frac{5}{22}, -\frac{5}{6}, -\frac{61}{66}, \frac{5}{66}\right)}{\sqrt{\langle w_4, w_4 \rangle}} \\
u_4 &= \frac{\left(-\frac{5}{22}, -\frac{5}{6}, -\frac{61}{66}, \frac{5}{66}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{5}{22}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{61}{66}\right)^2 + \left(\frac{5}{66}\right)^2}} \\
u_4 &= \frac{\left(-\frac{5}{22}, -\frac{5}{6}, -\frac{61}{66}, \frac{5}{66}\right)}{\sqrt{\left(\frac{25}{484}\right) + \left(\frac{25}{36}\right) + \left(\frac{3721}{4356}\right) + \left(\frac{25}{4356}\right)}} \\
u_4 &= \frac{\left(-\frac{5}{22}, -\frac{5}{6}, -\frac{61}{66}, \frac{5}{66}\right)}{\sqrt{\left(\frac{6996}{4356}\right)}} \\
u_4 &= \frac{\left(-\frac{5}{22}, -\frac{5}{6}, -\frac{61}{66}, \frac{5}{66}\right)}{\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{33}}} \\
u_4 &= \left(-\frac{5\sqrt{33}}{22\sqrt{53}}, -\frac{5\sqrt{33}}{6\sqrt{53}}, -\frac{61\sqrt{33}}{66\sqrt{53}}, \frac{5\sqrt{33}}{66\sqrt{53}}\right)
\end{aligned}
$$

CONCLUSIÓN: La base ortonormal está formado por los vectores $u = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ expresados de la siguiente manera:

$$
u = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{2\sqrt{33}} \\ -\frac{11}{2\sqrt{33}} \\ \frac{1}{2\sqrt{33}} \\ \frac{1}{2\sqrt{33}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{5\sqrt{33}}{22\sqrt{53}} \\ -\frac{5\sqrt{33}}{6\sqrt{53}} \\ -\frac{61\sqrt{33}}{66\sqrt{53}} \\ \frac{5\sqrt{33}}{66\sqrt{53}} \end{bmatrix} \right\}.
$$