

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет прикладной математики, информатики и механики

Кафедра нелинейных колебаний

Спектральный анализ операторных полиномов  
и разностных операторов высокого порядка

Бакалаврская работа

Направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Профиль Нелинейная динамика

Допущена к защите в ГЭК 7 июня 2016 года

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ В. Г. Задорожний  
д. ф.-м. н., профессор

Обучающийся \_\_\_\_\_ В. Д. Харитонов

Научный руководитель \_\_\_\_\_ А. Г. Баскаков  
д. ф.-м. н., профессор

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>Глава 1. Основные понятия и определения</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>Глава 2. О состояниях обратимости операторных полиномов</b> .	<b>16</b>
2.1. Основные результаты . . . . .	16
2.2. Доказательства основных результатов . . . . .	23
<b>Глава 3. Условия фредгольмовости разностных операторов</b> . .	<b>29</b>
3.1. Основные результаты . . . . .	29
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>40</b>

# Введение

## О содержании и структуре работы

Из курса дифференциальных и разностных уравнений известен метод приведения уравнения  $N$ -ого порядка к системе из  $N$  уравнений первого порядка. В данной работе рассматривается обобщение этого метода для исследования операторных полиномов с коэффициентами из банахова пространства. Исследование спектральных свойств операторных полиномов сводится к изучению спектральных свойств оператора, заданного операторной матрицей. Полученные результаты (теоремы 15–17) применяются к разностным операторам высокого порядка. Получены условия их обратимости, фредгольмовости (теоремы 18, 24 и 26), асимптотическое представление ограниченных решений однородного разностного уравнения (теорема 27).

Работа состоит из введения, трёх глав и заключения.

Во введении дается общая характеристика работы.

В первой главе приводятся основные определения и понятия, используемые в работе.

Во второй главе формулируются основные результаты работы и приводятся их доказательства.

В третьей главе основные результаты используются для исследования условий обратимости и фредгольмовости разностных операторов.

В заключении описаны возможные направления дальнейших исследований на данную тему.

## История исследований

Приводимая в работе конструкция перехода от изучения исходного операторного полинома  $\mathcal{A} = C_0 A^N + C_1 A^{N-1} + \dots + C_N \in \text{End } X$  к изучению

матричного оператора  $\mathbb{A} \in \text{End } X^N$ , является непосредственным обобщением известного из курсов дифференциальных и разностных уравнений приёма сведения дифференциального или разностного уравнения  $N$ -ого порядка к системе из  $N$  дифференциальных (разностных) уравнений. Для более специальных классов операторных полиномов аналог теоремы 16 получен в монографиях А. Б. Антоневи́ча [1, теорема 9.1], [2].

Теория разностных операторов первого порядка развивалась в работах [1—20].

Понятие состояний обратимости используется, в частности, в статье [16].

В отличие от статьи [13], где изучались разностные операторы второго порядка, оператор  $C_0$  из представления операторного полинома  $\mathcal{A}$  может быть необратимым оператором. Случай необратимого оператора при старшей степени оператора  $A$  позволяет получать аналоги теорем 15–17 для случая операторного полинома  $\mathcal{A}$ , где оператор  $A$  — замкнутый оператор с непустым резольвентным множеством (в частности, дифференциальный оператор). Следует отметить, что такой прием не применим к дифференциальным операторам второго порядка, рассматриваемых в статьях [21; 22]. В данной работе предложен иной (более простой) способ доказательства основных результатов статьи [13]. Он состоит в сопоставлении операторному полиному порядка  $N$  оператора  $\tilde{\mathbb{A}}$ , заданного операторной матрицей порядка  $N + 1$ , который имеет то же множество состояний обратимости.

## Глава 1

## Основные понятия и определения

Пусть  $X$  и  $Y$  — нормированные (векторные) пространства над полем  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

**Определение 1.** Отображение  $A: X \rightarrow Y$  из векторного пространства  $X$  в векторное пространство  $Y$  называется *линейным оператором*, если

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2, \quad \forall x_1, x_2 \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Если  $Y = \mathbb{K}$ , то вместо слова «оператор» говорят «функционал».

**Определение 2.** Оператор  $A: X \rightarrow Y$  между нормированными пространствами называется *ограниченным*, если величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

конечна. Эта величина, в таком случае, называется нормой оператора  $A$ .

Можно показать, что все следующие определения нормы совпадают с данным выше:

1.  $\|A\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\|$
2.  $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$
3.  $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|};$
4.  $\|A\| = \inf \{C \geq 0 : \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq C \|x\|\}$

Нетрудно видеть, что  $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$  для всех  $x \in X$ .

Множество всех линейных ограниченных операторов между нормированными пространствами  $X$  и  $Y$  будем обозначать  $\text{Hom}(X, Y)$ . Если  $X = Y$ , то, для краткости будем обозначать  $\text{End } X := \text{Hom}(X, X)$ .

**Теорема 1.**  $\text{Hom}(X, Y)$  — нормированное пространство.

**Определение 3.** Нормированное векторное пространство  $X$  называется *банаховым пространством*, если оно полно как метрическое пространство с метрикой  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ .

**Определение 4.** Алгебру  $\mathcal{B}$  называют *банаховой алгеброй*, если она как линейное пространство является банаховым пространством, причем для всех  $a, b \in \mathcal{B}$

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

Если  $\mathcal{B}$  при этом является алгеброй с единицей  $e$ , то требуют также, чтобы выполнялось свойство

$$\|e\| = 1.$$

**Теорема 2.** Если  $Y$  — банахово пространство, то  $\text{Hom}(X, Y)$  — банахово пространство.

**Следствие.** Если  $X$  — банахово пространство, то  $\text{End } X$  — банахова алгебра с единицей.

**Теорема 3.** Пусть  $A$  — линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $A$  — непрерывное отображение;
2.  $A$  — непрерывное в точке 0 отображение;
3.  $A$  — ограниченный оператор;
4.  $A$  — липшицево отображение.

**Доказательство.** Импликации  $1 \Rightarrow 2$ , и  $4 \Rightarrow 1$  очевидны. Докажем, что  $2 \Rightarrow 3$ . Непрерывность  $A$  означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : \|x\| < \delta \rightarrow \|Ax\| < \varepsilon.$$

Зафиксируем некоторый  $\varepsilon > 0$  и соответствующий ему  $\delta$ . Тогда для любого  $x \in X$ ,  $\|x\| \leq 1$ , справедливо

$$\|Ax\| = \frac{2}{\delta} \left\| A \left( \frac{\delta}{2} x \right) \right\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Переходя в неравенстве к верхней грани, получаем, что

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta},$$

что и означает ограниченность оператора  $A$ .

Импликация  $3 \Rightarrow 4$  проверяется непосредственно: если  $A$  — ограниченный оператор,  $x_1, x_2 \in X$ , то

$$\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq \|A\| \|x_1 - x_2\|.$$

□

**Определение 5.** Множество из метрического пространства называется *множеством I категории* («тощим», *разреженным*), если его можно представить в виде счетного объединения замкнутых множеств, каждое из которых не содержит шара.

**Определение 6.** Множество, не являющееся множеством I категории, называется *множеством II категории* («тучным»).

**Теорема 4** (Бэра). *Каждое полное метрическое пространство является множеством II категории.*

Пусть  $X$  и  $Y$  — банаховы пространства и  $\Omega$  — множество индексов,  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$  — семейство ограниченных операторов.

Будем называть семейство операторов *ограниченным поточечно*, если для каждого  $x \in X$  существует такая константа  $M(x) > 0$ , что

$$\|A_\alpha x\| \leq M(x)$$

для всех  $\alpha \in \Omega$ , то есть для каждого  $x \in X$  множество

$$\{A_\alpha x : \alpha \in \Omega\} \subset Y$$

ограничено в  $Y$ .

Семейство операторов назовём *ограниченным равномерно*, если существует такое число  $C > 0$ , что для всех  $\alpha \in \Omega$  выполнено неравенство

$$\|A_\alpha\| < C,$$

то есть числовое множество

$$\{\|A_\alpha\| : \alpha \in \Omega\}$$

ограничено.

**Теорема 5** (Банаха-Штейнгауза). *Если семейство ограниченных операторов  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ , действующих из банахова пространства  $X$  в нормированное пространство  $Y$ , ограничено поточечно, то оно ограничено и равномерно.*

**Доказательство.** Рассмотрим множества вида

$$X_n = \{x \in X : \forall \alpha \in \Omega \ \|A_\alpha x\| \leq n\}.$$

В силу поточечной ограниченности семейства,  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ .



Каждое из множеств  $X_n$  замкнуто. В самом деле: если  $\{x_k\}$  — сходящаяся к  $x_0 \in X$  последовательность элементов из  $X_n$ , то, в силу непрерывности операторов  $A_\alpha$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_\alpha x_k\| = \|A_\alpha x_0\|$ , а поскольку для всех  $x_k$  и всех  $\alpha \in \Omega$  выполняется неравенство  $\|A_\alpha x_k\| \leq n$ , то и  $\|A_\alpha x_0\| \leq n$ , а значит  $x_0 \in X_n$ , что и означает замкнутость  $X_n$ .

Поскольку пространство  $X$  полно, по теореме Бэра существует такой номер  $n_0$ , что  $X_{n_0}$  содержит в себе шар, который будем обозначать  $B(x', r)$ , где  $r$  — радиус этого шара, а  $x'$  — его центр.

Для всех элементов  $x$  из  $B(x', r)$  и для всех  $\alpha \in \Omega$  справедливо, что

$$\|A_\alpha x\| \leq n_0,$$

то есть значения  $\|A_\alpha x\|$  ограничены на этом шаре. Покажем, что они ограничены и на единичном шаре, что будет означать ограниченность норм  $A_\alpha$ .

Пусть  $x \in B(0, 1)$ . Тогда, как нетрудно проверить,  $z = rx + x' \in B(x', r)$ . В таком случае для всех  $\alpha \in \Omega$

$$\|A_\alpha x\| = \left\| A_\alpha \left( \frac{z - x'}{r} \right) \right\| \leq \frac{1}{r} (\|A_\alpha z\| + \|A_\alpha x'\|) \leq \frac{2n_0}{r},$$

откуда, взяв верхнюю грань по всем  $x \in B(0, 1)$ , получаем утверждение теоремы.  $\square$

Пусть  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  — линейный оператор, определенный на некотором подпространстве  $D(A)$  пространства  $X$ .

**Определение 7.** Оператор  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  называется *замкнутым*, если его график

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$$

является замкнутым подмножеством в пространстве  $X \times X$ , наделённом нор-

мой

$$\|(x_1, x_2)\| = \max \{\|x_1\|, \|x_2\|\}.$$

Иначе говоря, оператор замкнут, если для всякой сходящейся последовательности  $\{x_n\} \subset D(A)$  такой, что  $Ax_n \rightarrow y \in X$ , её предел  $x$  лежит в  $D(A)$  и  $y = Ax$ .

**Теорема 6.** *Всякий ограниченный оператор  $A \in \text{End } X$  замкнут.*

**Теорема 7** (Банаха о замкнутом графике). *Пусть  $A: X \rightarrow X$  — замкнутый линейный оператор, определенный на всем банаховом пространстве  $X$ . Тогда оператор  $A$  ограничен.*

Пусть  $A \in \text{End } X$ . Рассмотрим два условия:

1.  $\text{Ker } A = \{0\}$  — оператор  $A$  инъективен.
2.  $\text{Im } A = X$  — оператор  $A$  сюръективен.

**Теорема 8** (Банаха об обратном операторе). *Пусть линейный оператор  $A \in \text{End } X$ , действующий в банаховом пространстве  $X$ , биективен, т.е. выполнены условия (1) и (2). Тогда  $A^{-1}$  ограничен.*

Если  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  определен не на всем пространстве, то для него также можно рассматривать условия (1, 2). Тогда будем называть обратным к оператору  $A$  оператор  $A^{-1}: X \rightarrow X$ , который удовлетворяет естественным условиям

$$AA^{-1} = I_X$$

и

$$A^{-1}Ax = x$$

для всех  $x \in D(A)$ . Обратим внимание, что мы считаем  $A^{-1}$  действующим из  $X$  во всё пространство  $X$ , а не в  $D(A)$ .

**Теорема 9** (Банаха об обратном операторе).

Пусть  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  — замкнутый биективный линейный оператор, определенный на подмножестве  $D(A)$  банахова пространства  $X$ . Тогда  $A^{-1}: X \rightarrow X$  — ограниченный оператор.

Доказательство аналогично предыдущему.

**Лемма 1.** Если  $A \in \text{End } X$  и  $\|A\| < 1$ , то оператор  $I - A$  обратим, а обратный задается формулой

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

причем ряд сходится абсолютно и

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

**Доказательство.** Покажем, что ряд сходится абсолютно. Используем формулу суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Итак, ряд сходится абсолютно, значит он сходится. Отсюда же следует и оценка нормы. Обозначим сумму ряда через  $B \in \text{End } X$ . Покажем, что  $B$  — обратный к  $I - A$ .

$$\begin{aligned} (I - A)B &= (I - A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \lim_{m \rightarrow \infty} (I - A) \sum_{n=0}^m A^n = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m (A^n - A^{n+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} (I - A^{m+1}) = I, \end{aligned}$$

где последнее равенство справедливо в силу условия  $\|A\| < 1$ .

Аналогично доказывается, что  $B(I - A) = I$ .

□

**Теорема 10.** Пусть  $A, B \in \text{End } X$ ,  $A$  обратим,  $\|B\| \|A^{-1}\| < 1$ . Тогда  $A - B$  обратим и

$$(A - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A^{-1}B)^n A^{-1},$$

и справедлива оценка

$$\|(A - B)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|B\| \|A^{-1}\|}.$$

**Лемма 2.** Если  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  замкнут, то и  $A - \lambda I$  замкнут, где  $\lambda \in \mathbb{C}$ , а  $I: D(A) \subset X \rightarrow X$  — тождественный оператор.

**Определение 8.** Пусть  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  — замкнутый оператор. Будем называть число  $\lambda \in \mathbb{C}$  *точкой спектра* оператора  $A$ , если оператор  $A - \lambda I: D(A) \subset X \rightarrow X$  необратим, то есть выполнено хотя бы одно из условий

1.  $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$  — оператор не инъективен.
2.  $\text{Im}(A - \lambda I) \neq X$  — оператор не сюръективен.

Если же число  $\lambda \in \mathbb{C}$  не является точкой спектра, то его называют *регулярной точкой* оператора  $A$ .

Заметим, что по теореме Банаха об обратном операторе, если число  $\lambda$  — регулярная точка  $A$ , то оператор  $(A - \lambda I)^{-1}$  ограничен.

**Определение 9.** Множество  $\sigma(A)$  точек спектра оператора  $A$  называется *спектром* оператора  $A$ .

**Определение 10.** Множество  $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$  регулярных точек оператора  $A$  называется *резольвентным множеством* оператора  $A$ .

Спектр оператора принято разбивать на три взаимно непересекающиеся части:

1. Дискретный спектр  $\sigma_d(A)$  — множество собственных значений оператора  $A$ , то есть такие  $\lambda \in \mathbb{C}$ , что  $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$ .
2. Непрерывный спектр  $\sigma_c(A)$  — множество таких  $\lambda \in \mathbb{C}$ , не являющихся собственными значениями, что  $\text{Im}(A - \lambda I) \neq X$ , но  $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = X$ .
3. Остаточный спектр  $\sigma_r(A)$  — множество точек спектра, не вошедших ни в дискретный спектр, ни в непрерывный спектр.

Ясно, что  $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ .

**Определение 11.** Отображение  $R(\bullet, A): \rho(A) \rightarrow \text{End } X$ , действующее по правилу

$$R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1},$$

называется *резольвентой* оператора  $A$ .

**Теорема 11.** Для всякого замкнутого оператора  $A$  множество  $\rho(A)$  открыто. Резольвента  $R(\bullet, A): \rho(A) \rightarrow \text{End } X$  — аналитическая функция на  $\rho(A)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\lambda_0 \in \rho(A)$ , а  $\lambda \in \mathbb{C}$  таково, что

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}.$$

Тогда представим оператор  $A - \lambda I$  в следующем виде:

$$A - \lambda I = A - \lambda_0 I + \lambda_0 I - \lambda I = (A - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A)).$$

Оператор  $I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A)$  обратим, поскольку (см. лемму 1)

$$\|(\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A)\| < 1.$$

Так как  $A - \lambda_0 I$  также обратим, то и  $A - \lambda I$  обратим как произведение обратимых операторов. Отсюда следует, что резольвентное множество открыто:

вместе с каждой точкой  $\lambda_0$  в  $\rho(A)$  входит открытый круг радиусом меньше  $\|R(\lambda_0, A)\|^{-1}$  с центром в точке  $\lambda_0$ .

Оператор, обратный к  $(I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A))$  представляется в виде

$$(I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A)^n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) &= (A - \lambda I)^{-1} = (I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A))^{-1} (A - \lambda_0 I)^{-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A)^{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом мы получили, что  $R(\lambda, A)$  в некоторой окрестности каждой точки  $\lambda_0 \in \rho(A)$  представляется в виде суммы степенного ряда с коэффициентами  $c_n = R(\lambda_0, A)^{n+1}$ . Значит, функция  $R(\lambda, A)$  аналитична на  $\rho(A)$ .  $\square$

**Следствие.** Для любого замкнутого оператора  $A$  множество  $\sigma(A)$  замкнуто.

**Теорема 12** (тождество Гильберта). Для любого замкнутого оператора  $A$  и любых чисел  $\lambda, \mu \in \rho(A)$  справедливо равенство

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\lambda - \mu) R(\lambda, A) R(\mu, A).$$

**Следствие.** Операторы  $R(\lambda, A)$  и  $R(\mu, A)$  перестановочны.

**Теорема 13** (о спектре ограниченного оператора). Пусть  $A \in \text{End } X$  — ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве  $X$ . Тогда его спектр  $\sigma(A)$  есть непустое компактное множество в  $\mathbb{C}$ .

**Определение 12.** Спектральным радиусом линейного ограниченного опе-

ратора  $A \in \text{End } X$  называется величина

$$r(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Спектральный радиус корректно определен в виду компактности спектра  $A$  и его непустоты. Из доказательства теоремы 13 видно, что

$$r(A) \leq \|A\|,$$

поскольку, если  $|\lambda| > \|A\|$ , то оператор  $A - \lambda I$  обратим.

**Теорема 14** (формула Бёрлинга-Гельфанда). *Пусть  $A \in \text{End } X$ . Тогда для спектрального радиуса оператора  $A$  справедлива формула*

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

## Глава 2

# О состояниях обратимости операторных полиномов

## 2.1. Основные результаты

Пусть  $X, Y$  — комплексные банаховы пространства,  $\text{Hom}(X, Y)$  — банахово пространство линейных ограниченных операторов (гомоморфизмов), определенных на  $X$  со значениями в  $Y$ ,  $\text{End } X = \text{Hom}(X, X)$  — банахова алгебра эндоморфизмов пространства  $X$ .

Линейный оператор  $\mathcal{A} \in \text{End } X$ , вида

$$\mathcal{A} = C_0 A^N + C_1 A^{N-1} + \dots + C_N,$$

где  $A, C_0, \dots, C_N \in \text{End } X, N \in \mathbb{N}$ , назовём *операторным полиномом* (порядка  $N$  с операторными коэффициентами  $C_i, i = \overline{1, N}$ , разложенным по степеням оператора  $A$ ).

Наряду с оператором  $\mathcal{A}$  рассмотрим оператор  $\mathbb{A} \in \text{End } X^N$ , заданный матрицей вида

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \dots & C_2 & C_0 A + C_1 \end{pmatrix},$$

т. е. для  $x \in X^N, x = (x_1, \dots, x_N)$ , вектор  $\mathbb{A}x = y = (y_1, \dots, y_N)$  определяется



равенствами:

$$y_k = Ax_k - x_{k+1}, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$y_N = C_0 Ax_N + \sum_{k=1}^N C_k x_{N-k+1} = C_0 Ax_N + \sum_{j=1}^N C_{N-j+1} x_j.$$

Оператор  $\mathbb{A}$  можно представить в виде

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 \mathbb{S} + \mathbb{A}_1,$$

где операторы  $\mathbb{A}_0, \mathbb{S}, \mathbb{A}_1 \in \text{End } X^N$  определяются соответственно матрицами

$$\mathbb{A}_0 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S} \sim \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_1 \end{pmatrix}.$$

**Определение 13.** Пусть  $B \in \text{Hom}(X_1, X_2)$  — линейный ограниченный оператор между банаховыми пространствами  $X_1, X_2$ . Рассмотрим следующий набор его возможных свойств.

- 1)  $\text{Ker } B = \{x \in X_1 : Bx = 0\} = \{0\}$ , т. е.  $B$  — инъективный оператор;
- 2)  $1 \leq n = \dim \text{Ker } B < \infty$  (ядро конечномерно);
- 3)  $\text{Ker } B$  — бесконечномерное подпространство в  $X_1$ ;
- 4)  $\text{Ker } B$  — дополняемое подпространство в  $X_1$ ;
- 5)  $\overline{\text{Im } B} = \text{Im } B$  — образ оператора  $B$  замкнут в  $X_2$ , что эквивалентно положительности величины (называемой минимальным модулем опера-

тора  $B$ )

$$\gamma(B) = \inf_{x \in X_1 \setminus \text{Ker } B} \frac{\|Bx\|}{\text{dist}(x, \text{Ker } B)},$$

где  $\text{dist}(x, \text{Ker } B) = \inf_{x_0 \in \text{Ker } B} \|x - x_0\|$  — расстояние от вектора  $x$  до подпространства  $\text{Ker } B$ ;

- 6) оператор  $B$  равномерно инъективен (корректен), т. е.  $\text{Ker } B = \{0\}$  и  $\gamma(B) > 0$ ;
- 7)  $\text{Im } B$  — замкнутое подпространство в  $X_2$  конечной коразмерности

$$1 \leq \text{codim Im } B = \dim X_2 / \text{Im } B < \infty;$$

- 8)  $\text{Im } B$  — замкнутое подпространство в  $X_2$  бесконечной коразмерности;
- 9)  $\text{Im } B \neq X_2$ ,  $\overline{\text{Im } B} = X_2$  (образ оператора  $B$  плотен в  $X_2$ , но не совпадает со всем  $X_2$ );
- 10)  $\overline{\text{Im } B} \neq X_2$  (образ  $B$  не плотен в  $X_2$ );
- 11)  $\text{Im } B = X_2$  (оператор  $B$  сюръективен);
- 12) оператор  $B$  обратим (т. е.  $\text{Ker } B = \{0\}$  и  $\text{Im } B = X_2$ ).

Если для оператора  $B$  одновременно выполнены все условия из совокупности условий  $\sigma = \{i_1, \dots, i_k\}$ , где  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 12$ , то будем говорить, что оператор  $B$  *находится в состоянии обратимости  $\sigma$* . Множество всех состояний обратимости оператора  $B$  обозначим символом  $\text{St}_{\text{inv}} B$ .

**Определение 14.** Если оператор  $B \in \text{Hom}(X_1, X_2)$  имеет конечномерное ядро (выполнено одно из условий 1), 2) определения 13) и замкнутый образ конечной коразмерности (одно из условий 7), 11)), то оператор  $B$  называется *фредгольмовым*. Если оператор  $B$  имеет замкнутый образ и конечно хотя бы одно из чисел  $\dim \text{Ker } B$ ,  $\text{codim Im } B = \dim X_2 / \text{Im } B$ , то оператор  $B$  называется *полуфредгольмовым*. Число  $\text{ind } B = \dim \text{Ker } B - \text{codim Im } B$  называется *индексом фредгольмова* (полуфредгольмова) оператора  $B$ .

Аналогичное определение даётся для замкнутых операторов, а также для линейных отношений. Благодаря введённому понятию состояний обратимости оператора, становится возможна более тонкая и разнообразная, чем общепринятая (см. [23]), классификация спектров линейных операторов.

Одним из основных результатов работы является

**Теорема 15.** *Множества состояний обратимости операторов  $\mathcal{A} \in \text{End } X$  и  $\mathbb{A} \in \text{End } X^N$  совпадают:*

$$\text{St}_{\text{inv}} \mathcal{A} = \text{St}_{\text{inv}} \mathbb{A}.$$

Это равенство (содержащее множество утверждений) означает, что если одно из двенадцати условий определения 13 выполняется для одного из операторов  $\mathcal{A}$ ,  $\mathbb{A}$ , то оно выполняется и для другого.

Благодаря теореме 15 можно свести исследование связанных с обратимостью свойств оператора  $\mathcal{A} \in \text{End } X$  к исследованию соответствующих свойств оператора  $\mathbb{A}$ , который в важных частных случаях изучен.

**Теорема 16.** *Пусть оператор  $\mathcal{A}$  обратим. Тогда обратим и оператор  $\mathbb{A} \in \text{End } X^N$  и обратный  $\mathbb{A}^{-1}$  имеет матрицу  $(\mathbb{A}^{-1})_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq N$  вида:*

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}^{-1})_{ij} &= A^{i-1} D_j - A^{i-j-1}, & i > j, \quad j = \overline{1, N-1}, \\ (\mathbb{A}^{-1})_{ij} &= A^{i-1} D_j, & i \leq j, \quad j = \overline{1, N-1}, \\ (\mathbb{A}^{-1})_{i,N} &= A^{i-1} \mathcal{A}^{-1}, & i = \overline{1, N}, \\ D_j &= \mathcal{A}^{-1} \sum_{k=0}^{N-j} C_k A^{N-k-j}, & i = \overline{1, N}, \\ \mathbb{A}^{-1} &\sim \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \cdots & D_{N-1} & \mathcal{A}^{-1} \\ AD_1 - I & AD_2 & \cdots & AD_{N-1} & A\mathcal{A}^{-1} \\ A^2 D_1 - A & A^2 D_2 - I & \cdots & A^2 D_{N-1} & A^2 \mathcal{A}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{N-1} D_1 - A^{N-2} & A^{N-1} D_2 - A^{N-3} & \cdots & A^{N-1} D_{N-1} - I & A^{N-1} \mathcal{A}^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Непосредственно из теоремы 15 следует

**Теорема 17.** *Оператор  $\mathcal{A}$  фредгольмов (полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда фредгольмовым (полуфредгольмовым) является оператор  $\mathbb{A}$ . При условии фредгольмовости одного из них*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathbb{A}, \quad \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathbb{A},$$

$$\operatorname{ind} \mathcal{A} = \operatorname{ind} \mathbb{A}.$$

Далее символом  $l^p = l^p(\mathbb{Z}; Y)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  обозначим банахово пространство суммируемых со степенью  $p$  (ограниченных при  $p = \infty$ ) двусторонних последовательностей векторов из банахова пространства  $Y$ . Нормы в этих пространствах определяются равенствами:

$$\|x\| = \|x\|_p = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|^p \right)^{1/p}, \quad x \in l^p, \quad p \in [1, \infty),$$

$$\|x\| = \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|, \quad x \in l^\infty.$$

В банаховом пространстве  $l^p$  рассмотрим разностное уравнение  $N$ -ого порядка:

$$C_0(k)x(k+N) + C_1(k)x(k+N-1) + \dots + C_N(k)x(k) = f(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p, \quad (2.1.1)$$

где  $f \in l^p$ , а  $C_i: \mathbb{Z} \rightarrow \operatorname{End} Y$ ,  $i = \overline{0, N}$  — ограниченные операторнозначные функции, т. е.  $C_i \in l^\infty(\mathbb{Z}; \operatorname{End} Y)$ . Через  $S$  обозначим оператор сдвига последовательностей из  $l^p$ :  $S \in \operatorname{End} l^p$ ,  $(Sx)(k) = x(k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in l^p$ . Тогда уравнение (2.1.1) можно записать в операторном виде:

$$\mathcal{A}x = f,$$

где разностный оператор  $\mathcal{A} \in \text{End } l^p$  определяется формулой

$$\mathcal{A} = \widetilde{C}_0 S^N + \widetilde{C}_1 S^{N-1} + \dots + \widetilde{C}_N. \quad (2.1.2)$$

Операторы  $\widetilde{C}_i \in \text{End } l^p$ ,  $i = \overline{0, N}$  есть операторы умножения на операторную функцию  $C_i$ :

$$(\widetilde{C}_i x)(k) = C_i(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p, \quad k = \overline{0, N}.$$

Используя приём, описанный выше для операторных полиномов, построим по оператору  $\mathcal{A}$  оператор  $\mathbb{A} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}; Y^N)$ . При этом учитывается канонический изоморфизм пространств  $l^p(\mathbb{Z}; Y)^N$  и  $l^p(\mathbb{Z}; Y^N)$ .

Оператор  $\mathbb{A}$  является разностным оператором первого порядка в пространстве  $l^p(\mathbb{Z}; Y^N)$  и задаётся равенством

$$(\mathbb{A}x)(k) = \mathcal{C}_0(k)x(k+1) + \mathcal{C}_1(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p(\mathbb{Z}; Y^N), \quad (2.1.3)$$

где

$$\mathcal{C}_0(k) \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_0(k) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C}_1(k) \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -I \\ C_N(k) & C_{N-1}(k) & C_{N-2}(k) & \dots & C_2(k) & C_1(k) \end{pmatrix},$$

$$x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_N(k)), \quad x_i \in l^p, \quad i = \overline{1, N}.$$

Итак, оператор  $\mathbb{A}$  записывается в виде

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 \mathbb{S} + \mathbb{A}_1, \quad (2.1.4)$$

где  $\mathbb{S} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$  — оператор сдвига в  $l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$ ,  $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1 \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$  — операторы умножения на функции  $\mathcal{C}_0$  и  $\mathcal{C}_1$  соответственно.

Согласно терминологии статьи [24], разностный оператор 2.1.4 является оператором с двухточечным спектром Бора. Поэтому к нему применимы полученные в статье результаты об обратимости, представлении обратных (используя понятие экспоненциальной дихотомии). Имеют место оценки норм обратных операторов.

При получении результатов статьи [24] существенно использовалась (особенно в случае необратимого оператора  $\mathbb{A}_0$ ) спектральная теория линейных отношений ([25; 26]).

Из представлений (2.1.2) и (2.1.4) разностных операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathbb{A}$  и теорем 15–17 следует

**Теорема 18.** *Имеет место равенство*

$$\text{St}_{\text{inv}} \mathcal{A} = \text{St}_{\text{inv}} \mathbb{A}.$$

*В частности, оператор  $\mathcal{A}$  фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор  $\mathbb{A}$ . При условии фредгольмовости одного из них*

$$\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \dim \text{Ker } \mathbb{A}, \quad \dim \text{Im } \mathcal{A} = \text{codim Im } \mathbb{A},$$

$$\text{ind } \mathcal{A} = \text{ind } \mathbb{A}.$$

Следующее утверждение следует из результатов статей [10; 11].

**Теорема 19.** *Если разностный оператор  $\mathcal{A}$  обратим в одном из банаховых пространств  $l^p(\mathbb{Z}; Y)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , то он обратим в любом из этих*

пространств. В частности, спектр  $\sigma(\mathcal{A})$  оператора  $\mathcal{A}$  не зависит от пространства  $l^p$ , в котором он определен.

Оценки, полученные в [12] для решений разностных включений, позволяют получить оценки для функции Грина в представлении оператора  $\mathcal{A}^{-1}$ . Аналоги теорем 17–19 имеют место для разностных операторов высокого порядка, рассматриваемых в пространствах односторонних последовательностей. Соответствующие результаты для разностных операторов первого порядка получены в статьях [10; 16].

В §3 данной работы получено (теорема 24) необходимое и достаточное условие фредгольмовости разностного оператора  $\mathcal{A} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}; Y)$ ,  $p \in [1, \infty]$  с  $C_0(k) = I$  для всех  $k \in \mathbb{Z}$ . Для разностного оператора с постоянными операторными коэффициентами  $\widetilde{C}_k \in \text{End } Y$ ,  $0 \leq k \leq N$ , приведена формула обратного. В теореме 27 получено асимптотическое представление ограниченных решений однородного разностного уравнения.

## 2.2. Доказательства основных результатов

Пусть задан операторный полином  $\mathcal{A} \in \text{End } X$ , разложенный по степеням оператора  $A$ :

$$\mathcal{A} = C_0 A^N + C_1 A^{N-1} + \dots + C_N,$$

где  $A, C_0, \dots, C_N \in \text{End } X$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , и соответствующий ему оператор  $\mathbb{A} \in \text{End } X^N$ :

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \dots & C_2 & C_0 A + C_1 \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение оператор  $\tilde{\mathbb{A}}$  из алгебры  $\text{End } X^{N+1}$ .

$$\tilde{\mathbb{A}} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_1 & C_0 A \end{pmatrix}.$$

При доказательстве теорем 15 и 16 вначале соответствующие утверждения устанавливаются для операторов  $\mathcal{A}$  и  $\tilde{\mathbb{A}}$ , а затем, используя представление оператора  $\mathcal{A}$  в виде

$$\mathcal{A} = (C_0 A + C_1) A^{N-1} + C_2 A^{N-2} + \dots + C_N,$$

соответствующие результаты устанавливаются для операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathbb{A}$ . Таким образом вычисляется матрица оператора  $\mathbb{A}^{-1} \in \text{End } X^N$ .

Зададим операторы  $\mathbb{B}, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3 \in \text{End } X^{N+1}$  матрицами

$$\mathbb{B} \sim \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{B}x)_1 &= \mathcal{A}x_1 = \sum_{k=0}^N C_k A^{N-k} x_1, & (\mathcal{J}_1 x)_k &= x_{k+1}, \quad k = \overline{1, N}, \\ (\mathbb{B}x)_k &= -x_k, \quad k = \overline{2, N+1}; & (\mathcal{J}_1 x)_{N+1} &= x_1; \end{aligned}$$

$$B_i = \sum_{k=0}^{N-i} C_k A^{N-k-i}, \quad i = \overline{1, N},$$



$$\mathcal{J}_2 \sim \begin{pmatrix} I & -B_1 & -B_2 & \cdots & -B_N \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_3 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -A & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -A & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -A & I \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_2 x)_1 &= x_1 - \sum_{i=1}^N B_i x_{i+1}, & (\mathcal{J}_3 x)_1 &= x_1, \\ (\mathcal{J}_2 x)_k &= x_k, \quad k = \overline{2, N+1}; & (\mathcal{J}_3 x)_k &= x_k - A x_{k-1}, \quad k = \overline{2, N+1}. \end{aligned}$$

**Лемма 3.** *Состояния обратимости операторов  $\tilde{\mathbb{A}}$  и  $\mathbb{B}$  совпадают.*

**Доказательство.** Непосредственно проверяется, что

$$\tilde{\mathbb{A}} = \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 \mathbb{B} \mathcal{J}_3,$$

причем ясно, что  $\mathcal{J}_i, i = \overline{1, 3}$  — обратимые операторы ( $\mathcal{J}_1$  — оператор перестановки,  $\mathcal{J}_2$  и  $\mathcal{J}_3$  имеют верхнетреугольную и нижнетреугольную матрицы соответственно с обратимыми операторами на главной диагонали).  $\square$

Таким образом, доказательство теоремы 15 сводится к доказательству следующей теоремы.

**Теорема 20.** *Состояния обратимости операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathbb{B}$  совпадают.*

Введем операторы  $J_1 \in \text{Hom}(X, X^{N+1})$ ,  $J_2 \in \text{Hom}(X^{N+1}, X)$ , действующие по правилам

$$\begin{aligned} (J_1 x)_1 &= x, \\ (J_1 x)_k &= 0, \quad k = \overline{2, N+1}; \end{aligned}$$

$$J_2x = x_1, \quad x \in X^{N+1}.$$

**Лемма 4.** *Ядра операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathbb{B}$  изоморфны. При этом*

$$J_1(\text{Ker } \mathcal{A}) = \text{Ker } \mathbb{B};$$

$$J_2(\text{Ker } \mathbb{B}) = \text{Ker } \mathcal{A}.$$

Заметим, что  $\text{Ker } \mathbb{B} = \text{Ker } \mathcal{A} \times \{0\}^N$ .

**Доказательство.** Отображение  $J_1$ , очевидно, осуществляет изоморфизм, если рассматривать его как отображение между  $\text{Ker } \mathcal{A}$  и  $\text{Ker } \mathbb{B}$ . При этом  $J_2$  является обратным отображением к  $J_1$ , если его рассмотреть как отображение между  $\text{Ker } \mathbb{B}$  и  $\text{Ker } \mathcal{A}$ .  $\square$

Обозначим символом  $\mathcal{P}_M$  множество ограниченных проекторов на подпространство  $M$  банахова пространства  $X$ .

**Лемма 5.** *Пусть  $\mathbb{P}$  — ограниченный проектор на  $\text{Ker } \mathbb{B}$ . Тогда его матрица имеет вид*

$$\begin{pmatrix} P & PD_2 & \cdots & PD_{N+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где  $D_k \in \text{End } X$ ,  $k = \overline{2, N+1}$  и  $P \in \mathcal{P}_{\text{Ker } \mathcal{A}}$ . Верно и обратное: если  $P \in \mathcal{P}_{\text{Ker } \mathcal{A}}$ , то оператор, заданный такой матрицей, является проектором на  $\text{Ker } \mathbb{B}$ .

**Доказательство.** Пусть проектор  $\mathbb{P}$  задан матрицей  $(P_{ij})_{n \times n}$ . Покажем сначала, что  $P_{ij} = 0$  для любых  $j$  и всех  $i > 1$ .

Пусть  $x \in X$ ,  $y^j \in X^{N+1}$ ,  $j = \overline{1, N+1}$  и  $y_k^j = \delta_{kj}x$ ,  $k = \overline{1, N+1}$ , где  $\delta_{kj}$  — символ Кронекера. По определению проектора  $\mathbb{P}y^j \in \text{Ker } \mathbb{B}$ , а значит

$(\mathbb{P}y^j)_i = 0$  для всех  $i > 1$ .

$$(\mathbb{P}y^j)_i = \sum_{k=0}^N P_{ik}y_k^j = \sum_{k=0}^N P_{ik}\delta_{kj}x = P_{ij}x = 0, \quad j = \overline{1, N+1}, \quad i = \overline{2, N+1}.$$

Значит, в силу произвольности  $x$ ,  $P_{ij} = 0$ ,  $j = \overline{1, N}$ ,  $i = \overline{2, N+1}$ .

Покажем, что  $P_{11}$  — проектор на  $\text{Ker } A$ . Проверим идемпотентность.

Пусть  $x \in X$ . Тогда, поскольку  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$  для всех  $j = \overline{1, n}$ , то

$$P_{1j}x = (\mathbb{P}y^j)_1 = (\mathbb{P}^2y_j)_1 = \sum_{k=0}^{N+1} P_{1k}(\mathbb{P}y^j)_k = P_{11}(\mathbb{P}y^j)_1 = P_{11}P_{1j}x.$$

Значит  $P_{1j} = P_{11}P_{1j}$ ,  $j = \overline{1, N+1}$ .

Поскольку  $\mathbb{P}y^1 \in \text{Ker } \mathbb{B}$ ,  $P_{11}x = (\mathbb{P}y^1)_1 \in \text{Ker } A$ , а значит  $\text{Im}(P_{11}) \subset \text{Ker } A$ .

Взяв  $x \in \text{Ker } A$  (следовательно,  $y^1 \in \text{Ker } \mathbb{B}$ ) получим

$$x = y_1^1 = (\mathcal{P}y^1)_1 = P_{11}x,$$

откуда  $\text{Ker } A \subset \text{Im}(P_{11})$ . Таким образом,  $\text{Im}(P_{11}) = \text{Ker } A$  и  $P_{11} \in \mathcal{P}_{\text{Ker } A}$ .

Обратное утверждение очевидно. □

**Доказательство теоремы 20.** Из лемм 4 и 5 следует, что свойства (1-4) определения 13 для операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathbb{B}$  выполняются или не выполняются одновременно.

Перейдём к рассмотрению свойств образов операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathbb{B}$ . Очевидно, что

$$\text{Im } \mathbb{B} = \text{Im } \mathcal{A} \times \underbrace{X \times \dots \times X}_{N \text{ раз}}.$$

Отсюда сразу получаем, что образы этих операторов замкнуты или не замкнуты (плотны или не плотны, совпадают или не совпадают со всем пространством) одновременно (свойства (5), (9-10), (11) определения 13). Ясно,

что свойства (6) и (12) также являются общими для рассматриваемых операторов в силу леммы 4.

Пусть подпространство  $\text{Im } \mathcal{A}$  замкнуто. Тогда можно рассматривать факторпространство  $X/\text{Im } \mathcal{A}$ . Далее, поскольку пространство  $X^{N+1}/\text{Im } \mathbb{B}$  и пространство  $(X/\text{Im } \mathcal{A}) \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$  канонически изоморфны, свойства (7-8) для операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathbb{B}$  также выполняются или не выполняются одновременно.  $\square$

**Доказательство теоремы 16.** Рассмотрим разложение  $\tilde{\mathbb{A}} = \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 \mathbb{B} \mathcal{J}_3$ . Каждый из операторов в этом разложении обратим. Запишем обратные к ним (проверяется непосредственно):

$$\mathcal{J}_3^{-1} \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A & I & \dots & 0 & 0 \\ A^2 & A & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{N-1} & A^{N-2} & \ddots & I & 0 \\ A^N & A^{N-1} & \dots & A & I \end{pmatrix}; \quad \mathcal{J}_2^{-1} \sim \begin{pmatrix} I & B_1 & B_2 & \dots & B_N \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{B}^{-1} \sim \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I \end{pmatrix}; \quad \mathcal{J}_1^{-1} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда  $\tilde{\mathbb{A}}^{-1} = \mathcal{J}_3^{-1} \mathbb{B}^{-1} \mathcal{J}_2^{-1} \mathcal{J}_1^{-1}$ . Перемножая соответствующие матрицы, получим матрицу для оператора  $\tilde{\mathbb{A}}^{-1}$ , откуда нетрудно получить матрицу для оператора  $\mathbb{A}^{-1}$ .  $\square$

## Глава 3

# Условия фредгольмовости разностных операторов

## 3.1. Основные результаты

В этом параграфе получены необходимые и достаточные условия фредгольмовости разностного оператора вида (2.1.2), т.е. оператора

$$\begin{aligned}\mathcal{A}: l^p &\rightarrow l^p, \\ (\mathcal{A}x)(k) &= x(k+N) + C_1(k)x(k+N-1) + \dots + C_N(k)x(k), \\ k \in \mathbb{Z}, \quad x &\in l^p = l^p(\mathbb{Z}, Y), \quad p \in [1, \infty].\end{aligned}$$

Условия получены на основе сопоставления разностному оператору  $\mathcal{A}$  порядка  $N$  разностного оператора первого порядка  $\mathbb{A}: l^p(\mathbb{Z}, Y^N) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}, Y^N)$ , определенного формулой (2.1.3), где  $\mathcal{C}_0(k)$  — тождественный оператор в  $Y^N$  при любом  $k \in \mathbb{Z}$ . Эти условия описываются с использованием понятия экспоненциальной дихотомии дискретного семейства эволюционных операторов, которое строится по операторной функции  $\mathcal{C}_1: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } Y^N$ .

Рассмотрим разностный оператор первого порядка  $\mathbb{D}$  из  $\text{End } l^p(\mathbb{Z}, X)$  определенный формулой

$$(\mathbb{D}x)(n) = x(n) - U(n)x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, x \in l^p(\mathbb{Z}, X),$$

где  $U \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$ , а  $X$  — комплексное банахово пространство.

По функции  $U$  построим дискретное семейство эволюционных операторов

$$\mathcal{U}: \Delta = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m \leq n\} \rightarrow \text{End } X,$$

определенное равенствами

$$\mathcal{U}(n, m) = \begin{cases} U(n)U(n-1)\dots U(m+1), & m < n, \\ I, & m = n, \end{cases}$$

где  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

**Определение 15.** Будем говорить, что семейство эволюционных операторов  $\mathcal{U}$  допускает *экспоненциальную дихотомию* на множестве  $\mathbb{J} \subset \mathbb{Z}$ , если существуют ограниченная проекторнозначная функция  $P: \mathbb{J} \rightarrow \text{End } X$  и постоянные  $M_0 \geq 1$ ,  $\gamma > 0$  такие, что выполнены следующие условия

1.  $\mathcal{U}(n, m)P(m) = P(n)\mathcal{U}(n, m)$ , для всех  $m \leq n$ ,  $m, n \in \mathbb{J}$ ;
2.  $\|\mathcal{U}(n, m)P(m)\| \leq M_0 \exp(-\gamma(n - m))$ , для всех  $m \leq n$ ,  $m, n \in \mathbb{J}$ ;
3. для  $m < n$ ,  $m, n \in \mathbb{J}$ , сужение  $\mathcal{U}_{n,m} : X'(m) \rightarrow X'(n)$  оператора  $\mathcal{U}(n, m)$  на область значений  $X'(m) = \text{Im } Q(m)$  дополнительного проектора  $Q(m) = I - P(m)$  есть изоморфизм подпространств  $X'(m)$  и  $X'(n) = \text{Im } Q(n)$ . Тогда полагаем оператор  $\mathcal{U}(m, n)$  равным оператору  $\mathcal{U}_{n,m}^{-1}$  на  $X'(n)$  и равным нулевому оператору на  $X(n) = \text{Im } P(n) \subset X$ .
4.  $\|\mathcal{U}(m, n)\| \leq M_0 \exp(\gamma(m - n))$  для всех  $m \leq n$  из  $\mathbb{J}$ .

Пару проекторнозначных функций  $P, Q: \mathbb{J} \rightarrow \text{End } X$ , участвующих в определении 15, назовём *расщепляющей парой* для семейства  $\mathcal{U}$ . Если  $P = 0$  или  $Q = 0$ , то будем говорить, что для  $\mathcal{U}$  имеет место *тривиальная экспоненциальная дихотомия* на  $\mathbb{J}$ .

**Теорема 21** ([14], [24]). Для того чтобы оператор  $\mathbb{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, X)$ , определяемый функцией  $U \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$ , был обратим, необходимо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов  $\mathcal{U}$  допускало экспоненциальную дихотомию на  $\mathbb{Z}$ . Если оператор  $\mathbb{D}$  обратим, то обратный к нему

определяется формулой

$$(\mathbb{D}^{-1}y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n, m)y(m), \quad n \in \mathbb{Z}, y \in l^p(\mathbb{Z}, X),$$

где функция Грина  $G: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{End } X$  имеет вид

$$G(n, m) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, m)P(m), & m \leq n, \\ -\mathcal{U}(n, m)Q(m), & m > n, \end{cases}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Этот результат для случая  $p = \infty$  имеется в монографии Д. Хенри [6] (в статье [14] была устранена неточность в доказательстве аналога теоремы 21 из этой монографии).

Далее используется

**Предположение 1.** Существуют числа  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \leq b$ , такие, что семейство эволюционных операторов  $\mathcal{U}$  (построенное по функции  $U: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } X$ ) допускает экспоненциальную дихотомию на множествах  $\mathbb{Z}_{-,a} = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq a\}$ ,  $\mathbb{Z}_{b,+} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq b\}$  с расщепляющими парами проекторнозначных функций

$$P_-, Q_-: \mathbb{Z}_{-,a} \rightarrow \text{End } X,$$

$$P_+, Q_+: \mathbb{Z}_{b,+} \rightarrow \text{End } X.$$

Определим оператор  $\mathcal{N}_{b,a}: \text{Im } Q_-(a) \rightarrow \text{Im } Q_+(b)$ , равенством

$$\mathcal{N}_{b,a}x = Q_+(b)\mathcal{U}(b, a)x, \quad x \in \text{Im } Q_-(a).$$

Этот оператор введён в рассмотрение в статьях [15], [16] и назван «узловым». Важность его обусловлена тем, что он действует между подпространствами «фазового» пространства  $X$ , а не в  $l^p(\mathbb{Z}, X)$ .

Имеет место следующая теорема ([15], [16]).

**Теорема 22.** Пусть для семейства эволюционных операторов  $\mathcal{U}: \Delta \rightarrow \rightarrow \text{End } X$ , построенным по функции  $U: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } X$  выполнены условия предположения 1.

Тогда имеет место равенство

$$\text{St}_{\text{inv}} \mathbb{D} = \text{St}_{\text{inv}} \mathcal{N}_{b,a}.$$

В частности, для фредгольмовости разностного оператора  $\mathbb{D}$ , необходимо и достаточно, чтобы узловой оператор  $\mathcal{N}_{b,a}: \text{Im } Q_-(a) \rightarrow \text{Im } Q_+(b)$  являлся фредгольмовым оператором. При условии фредгольмовости узлового оператора имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } \mathbb{D} &= \dim \text{Ker } \mathcal{N}_{b,a}, & \text{codim Im } \mathbb{D} &= \text{codim Im } \mathcal{N}_{b,a}, \\ \text{ind } \mathbb{D} &= \text{ind } \mathcal{N}_{b,a}. \end{aligned}$$

Рассмотрим разностный оператор (см. формулу (2.1.4))

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \mathbb{S}^{-1} \mathbb{A} = \mathbb{S}^{-1}(\mathbb{S} + \mathbb{A}_1) \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, Y^N) \\ (\mathbb{D}x)(n) &= x(n) + \mathcal{C}_1(n)x(n-1), \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, Y^N). \end{aligned}$$

Заметим, что его состояния обратимости совпадают с состояниями обратимости оператора  $\mathcal{A}$ .

**Определение 16.** Семейство эволюционных операторов  $\mathcal{U}_1: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{End } Y^N$ , построенное по функции  $-\mathcal{C}_1: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } Y^N$ , назовем семейством эволюционных операторов для однородного разностного уравнения

$$x(k+N) + C_1(k)x(k+N-1) + \dots + C_N(k)x(k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, Y). \quad (3.1.1)$$



Из теорем 21 и 22 получаем следующие утверждения.

**Теорема 23.** *Для того чтобы разностный оператор  $\mathcal{A} \in \text{End } l^p$ ,  $p \in [1, \infty]$ , определенный формулой (2.1.2), был обратим, необходимо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов  $\mathcal{U}_1$ , построенное для разностного уравнения (3.1.1), допускало экспоненциальную дихотомию на  $\mathbb{Z}$ .*

**Теорема 24.** *Пусть для семейства  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1: \Delta \rightarrow \text{End } Y^N$ , построенного для разностного уравнения (3.1.1), выполнены условия предположения 1.*

*Тогда имеет место равенство*

$$\text{St}_{\text{inv}} \mathcal{A} = \text{St}_{\text{inv}} \mathcal{N}_{b,a}.$$

*В частности, для фредгольмовости разностного оператора  $\mathcal{A} \in \text{End } l^p$  необходимо и достаточно, чтобы узловой оператор  $\mathcal{N}_{b,a}$  являлся фредгольмовым оператором. При условии фредгольмовости узлового оператора имеют место равенства:*

$$\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \dim \text{Ker } \mathcal{N}_{b,a}, \quad \text{codim Im } \mathcal{A} = \text{codim Im } \mathcal{N}_{b,a},$$

$$\text{ind } \mathcal{A} = \text{ind } \mathcal{N}_{b,a}.$$

Отметим, что в условиях теоремы 24 узловой оператор  $\mathcal{N}_{b,a}$  действует между подпространствами банахова пространства  $Y^N$ .

**Следствие.** *Если оператор  $\mathcal{A}$  фредгольмов в одном из пространств  $l^p$ ,  $p \in [1, \infty]$ , то он фредгольмов и в остальных, и его индекс не зависит от значения  $p$ .*

В условиях следующей теоремы будем использовать следующее

**Предположение 2.** Существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} C_i(n) = C_i^\pm \in \text{End } X, \quad i = \overline{1, N}.$$

Под спектром операторного пучка

$$L^\pm(\lambda) = \lambda^N + C_1^\pm \lambda^{N-1} + \dots + C_N^\pm, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

будем понимать множество таких комплексных чисел  $\lambda$ , что  $L^\pm(\lambda)$  — необратимый в  $\text{End } Y$  оператор.

**Теорема 25.** *В условиях предположения 2 разностный оператор  $\mathcal{A}$  обратим, если спектральные радиусы  $r(L^\pm) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(L^\pm)\}$  операторных пучков  $L^\pm$  меньше единицы.*

**Доказательство.** Непосредственно из теоремы 15 получаем, что спектры  $\sigma(\mathcal{C}_1^\pm)$  операторов  $\mathcal{C}_1^\pm \in \text{End } Y^N$ , заданных матрицами

$$\mathcal{C}_1^\pm \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N^\pm & C_{N-1}^\pm & C_{N-2}^\pm & \cdots & C_2^\pm & C_1^\pm \end{pmatrix},$$

совпадают со спектрами  $\sigma(L^\pm)$  операторных пучков  $L^\pm$ , поэтому  $r(\mathcal{C}_1^\pm) = r(L^\pm) < 1$ . Операторы  $\mathcal{C}_1^\pm$  являются пределами последовательности  $\mathcal{C}_1(n)$  в равномерной операторной топологии. Тогда из [15, теорема 3] следует, что оператор  $\mathbb{D}$  обратим, следовательно обратим и оператор  $\mathcal{A}$ .  $\square$

Пусть теперь оператор  $\mathcal{A} \in \text{End } l^p$  имеет вид:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}x)(k) &= C_0x(k+N) + C_1x(k+N-1) + \dots + C_Nx(k), \\ k &\in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p = l^p(\mathbb{Z}, Y), \quad p \in [1, \infty], \end{aligned}$$

то есть  $C_i(k) \equiv C_i \in Y^N$ ,  $i = \overline{0, N}$  — постоянные функции. В этом случае

разностный оператор  $\mathbb{A}$  задан выражением

$$(\mathbb{A}y)(k) = \mathcal{C}_0 y(k+1) + \mathcal{C}_1 y(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y \in l^p(\mathbb{Z}; Y^N),$$

где

$$\mathcal{C}_0 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_1 \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение операторнозначную функцию  $H: \mathbb{T} \rightarrow \text{End } X$ :

$$H(\gamma) = \gamma^N C_0 + \gamma^{N-1} C_1 + \dots + C_N, \quad \gamma \in \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Эту функцию назовём *характеристической функцией* оператора  $\mathcal{A}$ . Множество  $\rho(H)$ , состоящее из таких  $\gamma \in \mathbb{T}$ , что оператор  $H(\gamma)$  обратим, назовём *резольвентным множеством* функции  $H$ , а дополнение к нему,  $s(H) = \mathbb{T} \setminus \rho(H)$  — *сингулярным множеством* этой функции.

**Теорема 26.** *Разностный оператор  $\mathcal{A}$  с постоянными коэффициентами  $C_i$ ,  $i = \overline{0, N}$ , обратим тогда и только тогда, когда сингулярное множество  $s(H)$  его характеристической функции пусто. Если  $s(H) = \emptyset$ , то обратный оператор  $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } l^p$  представим в виде*

$$(\mathcal{A}^{-1}x)(k) = (G * x)(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} G(k-n)x(n), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p. \quad (3.1.2)$$

Функция  $G$  принадлежит банаховой алгебре  $l^1(\mathbb{Z}, \text{End } Y)$  (со свёрткой функ-

ций в качестве умножения) и допускает представление вида

$$G(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (H(\gamma))^{-1} \gamma^n d\gamma, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Доказательство.** Разностный оператор первого порядка  $\mathbb{A}$  с постоянными коэффициентами обратим тогда и только тогда, когда сингулярное множество его характеристической функции  $\mathcal{H}(\gamma) = \gamma\mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1$  пусто (иначе говоря, спектр линейного операторного пучка не содержит точек единичной окружности) [27, теорема 3]. Запишем матрицу оператора  $\mathcal{H}(\gamma)$ :

$$\mathcal{H}(\gamma) \sim \begin{pmatrix} \gamma I & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma I & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma I & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & \gamma C_0 + C_1 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 15 следует, что состояния обратимости операторов  $\mathcal{H}(\gamma)$  и  $H(\gamma)$  совпадают. Значит  $s(H) = s(\mathcal{H})$ . Отсюда получаем первое утверждение теоремы.

Заметим, что  $G(n)$  представляют собой коэффициенты Фурье функции  $(H(\gamma))^{-1}$ , которая является голоморфной в окрестности единичной окружности как резольвента полиномиального операторного пучка. Следовательно, её ряд Фурье сходится абсолютно, откуда и следует, что  $G \in l^1(\mathbb{Z}, \text{End } Y)$ . Благодаря этому, оператор  $\mathcal{A}^{-1}$ , задаваемый формулой (3.1.2), определен корректно. Непосредственная проверка показывает, что этот оператор является обратным к оператору  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**Предположение 3.** Все решения однородного разностного уравнения

$$x(k + N) + C_1 x(k + N - 1) + \dots + C_N x(k) = 0, \quad (3.1.3)$$

рассматриваемого на  $\mathbb{Z}_+$  ограничены.

В условиях предположения 3 любое решение  $x \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, Y)$  однородного уравнения удовлетворяет равенствам

$$\begin{pmatrix} x(n) \\ x(n+1) \\ \vdots \\ x(n+N-2) \\ x(n+N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ -C_N & -C_{N-1} & \cdots & -C_2 & -C_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{pmatrix}.$$

Тогда из ограниченности всех решений однородного уравнения и теоремы БанахаШтейнгауза следует, что

$$\sup_{n \geq 0} \|\mathcal{C}_1^n\| = M(\mathcal{C}_1) < \infty.$$

Следовательно, спектральный радиус оператора  $\mathcal{C}_1$  не превосходит единицы, т.е.

$$\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 1\}.$$

Теперь можно применить результат из [17, теорема 1]:

**Теорема 27.** Пусть выполнены условия предположения 3 и

$$\sigma(\mathcal{C}_1) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}.$$

Тогда существуют операторнозначные функции  $A_k \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, \text{End } Y^N)$ ,  $k = \overline{1, m}$ , такие что для любого решения  $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow Y$  уравнения 3.1.3 имеют место следующие представления

$$(x(n), x(n+1), \dots, x(n+N-1)) = \left( \sum_{k=1}^m \gamma_k^n A_k(n) \right) (x(0), x(1), \dots, x(N-1)),$$

$$n \in \mathbb{Z}_+.$$

Функции  $A_k$ ,  $k = \overline{1, m}$  обладают следующими свойствами:

1. операторы  $A_k(n) \in \text{End } Y^N$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$  принадлежат наименьшей замкнутой подалгебре  $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_1}$  из  $\text{End } Y^N$ , содержащей оператор  $\mathcal{C}_1$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_k(n+1) - A_k(n)\| = 0$ ;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{C}_1 A_k(n) - \gamma_k A_k(n)\| = 0$ ;
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_k(n) A_j(n)\| = 0$  для  $k \neq j$ ,  $k, j = \overline{1, m}$ .

В заключение отметим, что основные результаты работы (теоремы 1-5) имеют место для разностных операторов, действующих в весовых пространствах последовательностей векторов (см. статьи [18], [19], [20]).

## Заключение

Результаты, полученные в данной работе, применяются для исследования разностных операторов высокого порядка. Исследования не являются завершёнными. Остаётся открытым вопрос обобщения результатов на случай операторного полинома, разложенного по степеням замкнутого неограниченного оператора  $A$ . Это позволит исследовать аналогичными методами дифференциальные операторы в банаховом пространстве.

Основные результаты работы отправлены на публикацию в журнал «Математические заметки».

## Список литературы

1. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход. — 1988.
2. *Antonevich A., Lebedev A.* Functional differential equations: I.  $C^*$ -theory, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 70. — Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, England, 1994.
3. *Курбатов В. Г., Садовский Б. Н.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронежского ун-та, 1990.
4. *Kurbatov V. G.* Functional differential operators and equations. Т. 473. — Springer Science & Business Media, 1999.
5. *Массера Х. Л., Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональный анализ. — Мир, 1970.
6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — Мир, 1985.
7. *Megan M., Sasu A. L., Sasu B.* Discrete admissibility and exponential dichotomy for evolution families // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2003. — Т. 9, № 2. — С. 383—398.
8. *Dorogovtsev A. Y.* Periodicity in distribution. I. Discrete systems // Int. Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2002. — Т. 30, № 2. — С. 65—127.
9. *Chicone C., Latushkin Y.* Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations. Т. 70. — American Mathematical Soc., 1999.
10. *Баскаков А. Г.* Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Мат. заметки. — 1992. — Т. 52, № 2. — С. 17—26.



11. *Baskakov A. G., Krishtal I. A.* Memory estimation of inverse operators // Journal of Functional Analysis. — 2014. — Т. 267, № 8. — С. 2551—2605.
12. *Баскаков А. Г.* Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений // Математический сборник. — 2015. — Т. 206, № 8. — С. 23—62.
13. *Баскаков А. Г., Дуплищева А. Ю.* Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2015. — Т. 79, № 2. — С. 3—20.
14. *Баскаков А. Г., Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 6. — С. 1231—1243.
15. *Баскаков А. Г.* Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов // Математические заметки. — 2000. — Т. 67, № 6. — С. 816—827.
16. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи математических наук. — 2013. — Т. 68, 1 (409). — С. 77—128.
17. *Баскаков А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Математические заметки. — 2015. — Т. 97, № 2. — С. 174—190.
18. *Бичегжув М. С.* О спектре разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах // Функциональный анализ и его приложения. — 2010. — Т. 44, № 1. — С. 80—83.

19. *Бичегжуев М. С.* К спектральному анализу разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах // Математический сборник. — 2013. — Т. 204, № 11. — С. 3—20.
20. *Бичегжуев М. С.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах функций // Математические заметки. — 2014. — Т. 95, № 1. — С. 18—25.
21. *Shkaliko A.* Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula // Recent Developments in Operator Theory and its Applications. — Springer, 1996. — С. 358—385.
22. *Гринив Р. О., Шкаликов А. А.* Экспоненциальная устойчивость полугрупп, связанных с некоторыми операторными моделями в механике // Математические заметки. — 2003. — Т. 73, № 5. — С. 657—664.
23. *Данфорд Н., Шварц Д. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — Издательство иностранной литературы, 1966.
24. *Baskakov A., Krishtal I.* Spectral analysis of operators with the two-point Bohr spectrum // Journal of mathematical analysis and applications. — 2005. — Т. 308, № 2. — С. 420—439.
25. *Баскаков А. Г., Чернышов К. И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Математический сборник. — 2002. — Т. 193, № 11. — С. 3—42.
26. *Баскаков А. Г.* Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов // Математические заметки. — 2008. — Т. 84, № 2. — С. 175—192.
27. *Баскаков А. Г.* Об обратимости линейных разностных операторов с постоянными коэффициентами // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2001. — № 5.