МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет прикладной математики, информатики и механики

Кафедра нелинейных колебаний

*Спектральный анализ операторных полиномов*
*и разностных операторов высокого порядка*

Бакалаврская работа

Направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Профиль Нелинейная динамика

Допущено к защите в ГЭК __.__.2016

Зав. кафедрой ____________ д. ф.-м. н., профессор Задорожний В. Г.

Обучающийся ____________ Харитонов В. Д.

Руководитель ____________ д. ф.-м. н., профессор Баскаков А. Г.

Воронеж – 2016

# Оглавление

# Введение

# Глава 1

# О состояниях обратимости операторных полиномов

## 1.1. Основные понятия и формулировки теорем

Пусть $X, Y$ — комплексные банаховы пространства, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов (гомоморфизмов), определенных на $X$ со значениями в $Y$, $\mathrm{End}\,X = \mathrm{Hom}(X,X)$ — банахова алгебра эндоморфизмов пространства $X$.

Линейный оператор $\mathscr{A} \in \mathrm{End}\,X$, вида

$$\mathscr{A} = C_0 A^N + C_1 A^{N-1} + \ldots + C_N,$$

где $A, C_0, \ldots, C_N \in \mathrm{End}\,X$, $N \in \mathbb{N}$, назовём *операторным полиномом* (порядка $N$ с операторными коэффициентами $C_i$, $i = \overline{1,N}$, разложенным по степеням оператора $A$).

Наряду с оператором $\mathscr{A}$ рассмотрим оператор $\mathbb{A} \in \mathrm{End}\,X^N$, заданный матрицей вида

$$
\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix}
A & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & A & -I & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & A & -I \\
C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_0A + C_1
\end{pmatrix},
$$

т. е. для $x \in X^N$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, вектор $\mathbb{A}x = y = (y_1, \ldots, y_N)$ определяется равенствами:

$$
\begin{aligned}
&y_k = Ax_k - x_{k+1}, \quad k = \overline{1, N-1}, \\
&y_N = C_0Ax_N + \sum_{k=1}^{N} C_k x_{N-k+1} = C_0Ax_N + \sum_{j=1}^{N} C_{N-j+1} x_j.
\end{aligned}
$$

Оператор $\mathbb{A}$ можно представить в виде

$$
\mathbb{A} = \mathbb{A}_0\mathbb{S} + \mathbb{A}_1,
$$

где операторы $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{S}$, $\mathbb{A}_1 \in \operatorname{End} X^N$ определяются соответственно матрицами

$$\mathbb{A}_0 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S} \sim \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_1 \end{pmatrix}.$$

**Определение 1.** Пусть $B \in \operatorname{Hom}(X_1, X_2)$ — линейный ограниченный оператор между банаховыми пространствами $X_1$, $X_2$. Рассмотрим следующий набор его возможных свойств.

1) $\operatorname{Ker} B = \{x \in X_1 : Bx = 0\} = \{0\}$, т. е. $B$ — инъективный оператор;
2) $1 \leqslant n = \dim \operatorname{Ker} B < \infty$ (ядро конечномерно);
3) $\operatorname{Ker} B$ — бесконечномерное подпространство в $X_1$;
4) $\operatorname{Ker} B$ — дополняемое подпространство в $X_1$;
5) $\overline{\operatorname{Im} B} = \operatorname{Im} B$ — образ оператора $B$ замкнут в $X_2$, что эквивалентно положительности величины (называемой минимальным

модулем оператора $B$)

$$\gamma(B) = \inf_{x \in X_1 \setminus \operatorname{Ker} B} \frac{\|Bx\|}{\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} B)},$$

где $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} B) = \inf\limits_{x_0 \in \operatorname{Ker} B} \|x - x_0\|$ — расстояние от вектора $x$ до подпространства $\operatorname{Ker} B$;

6) оператор $B$ равномерно инъективен (корректен), т. е. $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ и $\gamma(B) > 0$;

7) $\operatorname{Im} B$ — замкнутое подпространство в $X_2$ конечной коразмерности

$$1 \leqslant \operatorname{codim} \operatorname{Im} B = \dim X_2 / \operatorname{Im} B < \infty;$$

8) $\operatorname{Im} B$ — замкнутое подпространство в $X_2$ бесконечной коразмерности;

9) $\operatorname{Im} B \neq X_2$, $\overline{\operatorname{Im} B} = X_2$ (образ оператора $B$ плотен в $X_2$, но не совпадает со всем $X_2$);

10) $\overline{\operatorname{Im} B} \neq X_2$ (образ $B$ не плотен в $X_2$);

11) $\operatorname{Im} B = X_2$ (оператор $B$ сюръективен);

12) оператор $B$ обратим (т. е. $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ и $\operatorname{Im} B = X_2$).

Если для оператора $B$ одновременно выполнены все условия из совокупности условий $\sigma = \{i_1, \ldots, i_k\}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant 12$, то будем говорить, что оператор $B$ *находится в состоянии обратимости*

$\sigma$. Множество всех состояний обратимости оператора $B$ обозначим символом $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\, B$.

**Определение 2.** Если оператор $B \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$ имеет конечномерное ядро (выполнено одно из условий 1), 2) определения 1) и замкнутый образ конечной коразмерности (одно из условий 7), 11)), то оператор $B$ называется *фредгольмовым.* Если оператор $B$ имеет замкнутый образ и конечно хотя бы одно из чисел $\dim \mathrm{Ker}\, B$, $\mathrm{codim}\, \mathrm{Im}\, B = \dim X_2 / \mathrm{Im}\, B$, то оператор $B$ называется *полуфредгольмовым.* Число $\mathrm{ind}\, B = \dim \mathrm{Ker}\, B - \mathrm{codim}\, \mathrm{Im}\, B$ называется *индексом* фредгольмова (полуфредгольмова) оператора $B$.

Аналогичное определение даётся для замкнутых операторов, а также для линейных отношений. Благодаря введенному понятию состояний обратимости оператора, становится возможна более тонкая и разнообразная, чем общепринятая (см. [?]), классификация спектров линейных операторов.

Одним из основных результатов статьи является

**Теорема 1.** *Множества состояний обратимости операторов* $\mathscr{A} \in \mathrm{End}\, X$ *и* $\mathbb{A} \in \mathrm{End}\, X^N$ *совпадают:*

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\, \mathscr{A} = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\, \mathbb{A}.$$

Это равенство (содержащее множество утверждений) означает, что если одно из двенадцати условий определения 1 выполняется для одного из операторов $\mathscr{A}$, $\mathbb{A}$, то оно выполняется и для другого.

Теорема 1 позволяет свести исследование свойств оператора $\mathscr{A} \in \operatorname{End} X$, связанных с обратимостью, к исследованию соответствующих свойств оператора $\mathbb{A}$, который в важных частных случаях изучен. В первую очередь это относится к разностным операторам первого порядка.

**Теорема 2.** *Пусть оператор $\mathscr{A}$ обратим. Тогда обратим и операторы $\mathbb{A} \in \operatorname{End} X^N$ и обратный $\mathbb{A}^{-1}$ имеет матрицу $(\mathbb{A}^{-1})_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant N$ вида:*

$$\begin{aligned}
(\mathbb{A}^{-1})_{ij} &= A^{i-1}D_j - A^{i-j-1}, && i > j,\ j = \overline{1, N-1},\\
(\mathbb{A}^{-1})_{ij} &= A^{i-1}D_j, && i \leqslant j,\ j = \overline{1, N-1},\\
(\mathbb{A}^{-1})_{i,N} &= A^{i-1}\mathscr{A}^{-1}, && i = \overline{1, N},
\end{aligned}$$

$$D_j = \mathscr{A}^{-1} \sum_{k=0}^{N-j} C_k A^{N-k-j}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\mathbb{A}^{-1} \sim \begin{pmatrix}
D_1 & D_2 & \cdots & D_{N-1} & \mathscr{A}^{-1}\\
AD_1 - I & AD_2 & \cdots & AD_{N-1} & A\mathscr{A}^{-1}\\
A^2D_1 - A & A^2D_2 - I & \cdots & A^2D_{N-1} & A^2\mathscr{A}^{-1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
A^{N-1}D_1 - A^{N-2} & A^{N-1}D_2 - A^{N-3} & \cdots & A^{N-1}D_{N-1} - I & A^{N-1}\mathscr{A}^{-1}
\end{pmatrix}.$$

Приводимая конструкция перехода от изучения исходного операторного полинома $\mathscr{A} = C_0A^N + C_1A^{N-1} + \ldots + C_N \in \operatorname{End} X$ к изучению оператора $\mathbb{A} \in \operatorname{End} X^N$, является непосредственным обобщением известного из курсов дифференциальных и разностных уравнений приёма сведения дифференциального или разностного уравнения $N$-ого порядка к системе из $N$ дифференциальных (разностных) уравнений. Для более специальных классов операторных полиномов аналог теоремы 2 получен в монографиях А. Б. Антоневича [**?**, теорема 9.1], [**?**].

Непосредственно из теоремы 1 следует

**Теорема 3.** *Оператор $\mathscr{A}$ фредгольмов (полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда фредгольмовым (полуфредгольмовым) является оператор $\mathbb{A}$. При условии фредгольмовости одного из них*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathbb{A}, \quad \dim \operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathbb{A},$$
$$\operatorname{ind} \mathscr{A} = \operatorname{ind} \mathbb{A}.$$

Далее символом $l^p = l^p(\mathbb{Z}; Y)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ обозначим банахово пространство суммируемых со степенью $p$ (ограниченных при $p = \infty$) двусторонних последовательностей векторов из банахова пространства $Y$. Нормы в этих пространствах определяются равенствами:

$$\|x\| = \|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|^p\right)^{1/p}, \quad x \in l^p,\ p \in [1,\infty),$$
$$\|x\| = \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|, \quad x \in l^\infty.$$

В банаховом пространстве $l^p$ рассмотрим разностное уравнение $N$-ого порядка:

$$C_0(k)x(k+N)+C_1(k)x(k+N-1)+\ldots+C_N(k)x(k) = f(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p, \tag{1.1.1}$$

где $f \in l^p$, а $C_i\colon \mathbb{Z} \to \operatorname{End} Y$, $i = \overline{0,N}$ — ограниченные операторнозначные функции, т. е. $C_i \in l^\infty(\mathbb{Z}; \operatorname{End} Y)$. Через $S$ обозначим оператор сдвига последовательностей из $l^p$: $S \in \operatorname{End} l^p$, $(Sx)(k) = x(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in l^p$. Тогда уравнение (1.1.1) можно записать в операторном виде:

$$\mathscr{A} x = f,$$

где разностный оператор $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p$ определяется формулой

$$\mathscr{A} = \widetilde{C_0} S^N + \widetilde{C_1} S^{N-1} + \ldots + \widetilde{C_N}. \tag{1.1.2}$$

Операторы $\widetilde{C}_i \in \operatorname{End} l^p$, $i = \overline{0,N}$ есть операторы умножения на операторную функцию $C_i$:

$$(\widetilde{C}_i x)(k) = C_i(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p,\ k = \overline{0, N}.$$

Используя приём, описанный выше для операторных полиномов, построим по оператору $\mathscr{A}$ оператор $\mathbb{A} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}; Y^N)$. При этом учитывается канонический изоморфизм пространств $l^p(\mathbb{Z}; Y)^N$ и $l^p(\mathbb{Z}; Y^N)$.

Оператор $\mathbb{A}$ является разностным оператором первого порядка в пространстве $l^p(\mathbb{Z}; Y^N)$ и задаётся равенством

$$(\mathbb{A}x)(k) = \mathscr{C}_0(k)x(k+1) + \mathscr{C}_1(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p(\mathbb{Z}; Y^N), \tag{1.1.3}$$

где

$$\mathscr{C}_0(k) \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0(k) \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{C}_1(k) \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N(k) & C_{N-1}(k) & C_{N-2}(k) & \cdots & C_2(k) & C_1(k) \end{pmatrix},$$

$$x(k) = (x_1(k), x_2(k), \cdots, x_N(k)), \quad x_i \in l^p,\ i = \overline{1, N}.$$

Итак, оператор $\mathbb{A}$ записывается в виде

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0\mathbb{S} + \mathbb{A}_1, \tag{1.1.4}$$

где $\mathbb{S} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$ — оператор сдвига в $l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$, $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1 \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$ — операторы умножения на функции $\mathscr{C}_0$ и $\mathscr{C}_1$ соответственно.

Согласно терминологии статьи [**?**], разностный оператор (1.1.4) является оператором с двухточечным спектром Бора. Поэтому к нему применимы полученные в статье результаты об обратимости, представлении обратных (используя понятие экспоненциальной дихотомии). Имеют место оценки норм обратных операторов.

При получении результатов статьи [?] существенно использовалась (особенно в случае необратимого оператора $\mathbb{A}_0$) спектральная теория линейных отношений ([?, ?]). Теория разностных операторов первого порядка развивалась в работах [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?].

Из представлений (1.1.2), (1.1.4) разностных операторов $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}; Y)$, $\mathbb{A} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}; Y^N)$ и теорем 1, 2, 3 следует

**Теорема 4.** *Имеет место равенство*

$$\operatorname{St}_{\mathrm{inv}} \mathscr{A} = \operatorname{St}_{\mathrm{inv}} \mathbb{A}.$$

*В частности, оператор $\mathscr{A}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор $\mathbb{A}$. При условии фредгольмовости одного из них*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathbb{A}, \quad \dim \operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathbb{A},$$
$$\operatorname{ind} \mathscr{A} = \operatorname{ind} \mathbb{A}.$$

Следующее утверждение следует из результатов статей [?], [?].

**Теорема 5.** *Если разностный оператор $\mathscr{A}$ обратим в одном из банаховых пространств $l^p(\mathbb{Z}; Y)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то он обратим в любом* *из этих пространств. В частности, спектр* $\sigma(\mathscr{A})$ *оператора* $\mathscr{A}$ *не зависит от пространства* $l^p$*, в котором он определен.*

Оценки, полученные в [?] для решений разностных включений, позволяют получить оценки для функции Грина в представлении оператора $\mathscr{A}^{-1}$. Аналоги теорем 3, 4, 5 имеют место для разностных операторов высокого порядка, рассматриваемых в пространствах односторонних последовательностей. Соответствующие результаты для разностных операторов первого порядка получены в статьях [?, ?].

В §1.3 данной статьи получено (теорема 10) необходимое и достаточное условие фредгольмовости разностного оператора $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}; Y)$, $p \in [1, \infty]$ с $C_0(k) = I$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Для разностного оператора с постоянными операторными коэффициентами $\widetilde{C_k} \in \operatorname{End} Y$, $0 \leqslant k \leqslant N$, приведена формула обратного. В теореме 13 получено асимптотическое представление ограниченных решений однородного разностного уравнения.

## 1.2. Доказательства основных результатов

Пусть задан операторный полином $\mathscr{A} \in \operatorname{End} X$, разложенный по степеням оператора $A$:

$$\mathscr{A} = C_0 A^N + C_1 A^{N-1} + \ldots + C_N,$$

где $A, C_0, \dots, C_N \in \operatorname{End} X, N \in \mathbb{N}$, и соответствующий ему оператор $\mathbb{A} \in \operatorname{End} X^N$:

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_0 A + C_1 \end{pmatrix}.$$

В отличие от статьи [**?**], где изучались разностные операторы второго порядка, оператор $C_0$ из представления операторного полинома $\mathscr{A}$ может быть необратимым оператором. Столь общий случай (необратимого оператора $C_0$) позволяет получать аналоги теорем 1–4 для случая операторного полинома $\mathscr{A}$, где оператор $A$ — замкнутый оператор с непустым резольвентным множеством (в частности, дифференциальный оператор). Следует отметить, что такой прием не применим к дифференциальным операторам второго порядка, рассматриваемых в статьях [**?**, **?**]. В данной статье предложен иной (более простой) способ доказательства основных результатов статьи. Он состоит в сопоставлении операторному полиному порядка $N$ оператора $\widetilde{\mathbb{A}}$, заданного операторной матрицей порядка $N+1$, который имеет то же множество состояний обратимости.

Введём в рассмотрение оператор $\widetilde{\mathbb{A}}$ из алгебры $\operatorname{End} X^{N+1}$.

$$\widetilde{\mathbb{A}} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_1 & C_0 A \end{pmatrix}.$$

При доказательстве теорем 1 и 2 вначале соответствующие утверждения устанавливаются для операторов $\mathscr{A}$ и $\widetilde{\mathbb{A}}$, а затем, используя представление оператора $\mathscr{A}$ в виде

$$\mathscr{A} = (C_0 A + C_1)A^{N-1} + C_2 A^{N-2} + \ldots + C_N,$$

соответствующие результаты устанавливаются для операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{A}$. Таким образом вычисляется матрица оператора $\mathbb{A}^{-1} \in \operatorname{End} X^N$.

Зададим операторы $\mathbb{B}$, $\mathscr{J}_1$, $\mathscr{J}_2$, $\mathscr{J}_3 \in \operatorname{End} X^{N+1}$ матрицами

$$\mathbb{B} \sim \begin{pmatrix} \mathscr{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{J}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{B}x)_1 = \mathscr{A} x_1 = \sum_{k=0}^{N} C_k A^{N-k} x_1, \qquad (\mathscr{J}_1 x)_k = x_{k+1}, \quad k = \overline{1, N},$$

$$(\mathbb{B}x)_k = -x_k, \quad k = \overline{2, N+1}; \qquad (\mathscr{J}_1 x)_{N+1} = x_1;$$

$$B_i = \sum_{k=0}^{N-i} C_k A^{N-k-i}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\mathscr{J}_2 \sim \begin{pmatrix} I & -B_1 & -B_2 & \cdots & -B_N \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}, \quad \mathscr{J}_3 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -A & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -A & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -A & I \end{pmatrix},$$

$$(\mathscr{J}_2 x)_1 = x_1 - \sum_{i=1}^{N} B_i x_{i+1}, \qquad (\mathscr{J}_3 x)_1 = x_1,$$
$$(\mathscr{J}_2 x)_k = x_k, \quad k = \overline{2, N+1}; \qquad (\mathscr{J}_3 x)_k = x_k - A x_{k-1}, \quad k = \overline{2, N+1}.$$

**Лемма 1.** *Состояния обратимости операторов* $\widetilde{\mathbb{A}}$ *и* $\mathbb{B}$ *совпадают.*

**Доказательство.** Непосредственно проверяется, что

$$\widetilde{\mathbb{A}} = \mathscr{J}_1 \mathscr{J}_2 \mathbb{B} \mathscr{J}_3,$$

причем ясно, что $\mathscr{J}_i$, $i = \overline{1,3}$ — обратимые операторы ($\mathscr{J}_1$ — оператор перестановки, $\mathscr{J}_2$ и $\mathscr{J}_3$ имеют верхнетреугольную и нижнетреугольную матрицы соответственно с обратимыми операторами на главной диагонали). □

Таким образом, доказательство теоремы 1 сводится к доказательству следующей теоремы.

**Теорема 6.** *Состояния обратимости операторов* $\mathscr{A}$ *и* $\mathbb{B}$ *совпадают.*

Введем операторы $J_1 \in \mathrm{Hom}(X, X^{N+1})$, $J_2 \in \mathrm{Hom}(X^{N+1}, X)$, действующие по правилам

$$(J_1 x)_1 = x,$$
$$(J_1 x)_k = 0, \quad k = \overline{2, N+1};$$

$$J_2 x = x_1, \quad x \in X^{N+1}.$$

**Лемма 2.** *Ядра операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{B}$ изоморфны. При этом*

$$J_1(\operatorname{Ker}\mathscr{A}) = \operatorname{Ker}\mathbb{B};$$
$$J_2(\operatorname{Ker}\mathbb{B}) = \operatorname{Ker}\mathscr{A}.$$

Заметим, что $\operatorname{Ker}\mathbb{B} = \operatorname{Ker}\mathscr{A} \times \{0\}^N$.

**Доказательство.** Отображение $J_1$, очевидно, осуществляет изоморфизм, если рассматривать его как отображение между $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ и $\operatorname{Ker}\mathbb{B}$. При этом $J_2$ является обратным отображением к $J_1$, если его рассмотреть как отображение между $\operatorname{Ker}\mathbb{B}$ и $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$. □

Обозначим символом $\mathscr{P}_M$ множество ограниченных проекторов на подпространство $M$ банахова пространства $X$.

**Лемма 3.** *Пусть $\mathbb{P}$ — ограниченный проектор на $\operatorname{Ker}\mathbb{B}$. Тогда его матрица имеет вид*

$$\begin{pmatrix} P & PD_2 & \cdots & PD_{N+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

*где $D_k \in \operatorname{End} X$, $k = \overline{2, N+1}$ и $P \in \mathscr{P}_{\operatorname{Ker}\mathscr{A}}$. Верно и обратное: если $P \in \mathscr{P}_{\operatorname{Ker}\mathscr{A}}$, то оператор, заданный такой матрицей, является* *проектором на* $\operatorname{Ker}\mathbb{B}$.

**Доказательство.** Пусть проектор $\mathbb{P}$ задан матрицей $(P_{ij})_{n\times n}$. Покажем сначала, что $P_{ij}=0$ для любых $j$ и всех $i>1$.

Пусть $x\in X$, $y^j\in X^{N+1}$, $j=\overline{1,N+1}$ и $y^j_k=\delta_{kj}x$, $k=\overline{1,N+1}$, где $\delta_{kj}$ — символ Кронекера. По определению проектора $\mathbb{P}y^j\in\operatorname{Ker}\mathbb{B}$, а значит $(\mathbb{P}y^j)_i=0$ для всех $i>1$.

$$(\mathbb{P}y^j)_i=\sum_{k=0}^{N}P_{ik}y^j_k=\sum_{k=0}^{N}P_{ik}\delta_{kj}x=P_{ij}x=0,\quad j=\overline{1,N+1},\ i=\overline{2,N+1}.$$

Значит, в силу произвольности $x$, $P_{ij}=0$, $j=\overline{1,N},\ i=\overline{2,N+1}$.

Покажем, что $P_{11}$ — проектор на $\operatorname{Ker}A$. Проверим идемпотентность. Пусть $x\in X$. Тогда, поскольку $\mathbb{P}^2=\mathbb{P}$ для всех $j=\overline{1,n}$, то

$$P_{1j}x=(\mathbb{P}y^j)_1=(\mathbb{P}^2y_j)_1=\sum_{k=0}^{N+1}P_{1k}(\mathbb{P}y^j)_k=P_{11}(\mathbb{P}y^j)_1=P_{11}P_{1j}x.$$

Значит $P_{1j}=P_{11}P_{1j}$, $j=\overline{1,N+1}$.

Поскольку $\mathbb{P}y^1\in\operatorname{Ker}\mathbb{B}$, $P_{11}x=(\mathbb{P}y^1)_1\in\operatorname{Ker}A$, а значит $\operatorname{Im}(P_{11})\subset\operatorname{Ker}A$.

Взяв $x\in\operatorname{Ker}A$ (следовательно, $y^1\in\operatorname{Ker}\mathbb{B}$) получим

$$x=y^1_1=(\mathscr{P}y^1)_1=P_{11}x,$$

откуда $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Im}(P_{11})$. Таким образом, $\operatorname{Im}(P_{11}) = \operatorname{Ker} A$ и $P_{11} \in \mathscr{P}_{\operatorname{Ker} A}$.

Обратное утверждение очевидно. $\square$

**теоремы 6.** Из лемм 2 и 3 следует, что свойства (1-4) определения 1 для операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{B}$ выполняются или не выполняются одновременно.

Перейдём к рассмотрению свойств образов операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{B}$. Очевидно, что

$$\operatorname{Im}\mathbb{B} = \operatorname{Im}\mathscr{A} \times \underbrace{X \times \ldots \times X}_{N \text{ раз}}.$$

Отсюда сразу получаем, что образы этих операторов замкнуты или не замкнуты (плотны или не плотны, совпадают или не совпадают со всем пространством) одновременно (свойства (5), (9-10), (11) определения 1). Ясно, что свойства (6) и (12) также являются общими для рассматриваемых операторов в силу леммы 2.

Пусть подпространство $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ замкнуто. Тогда можно рассматривать факторпространство $X/\operatorname{Im}\mathscr{A}$. Далее, поскольку пространство $X^{N+1}/\operatorname{Im}\mathbb{B}$ и пространство $(X/\operatorname{Im}\mathscr{A}) \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}$ канонически изоморфны, свойства (7-8) для операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{B}$ также выполняются или не выполняются одновременно. $\square$

**теоремы 2.** Рассмотрим разложение $\widetilde{\mathbb{A}} = \mathscr{J}_1\mathscr{J}_2\mathbb{B}\mathscr{J}_3$. Каждый из операторов в этом разложении обратим. Запишем обратные к ним (проверяется непосредственно):

$$\mathscr{J}_3^{-1} \sim \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A^2 & A & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{N-1} & A^{N-2} & A^{N-3} & \ddots & I & 0 \\ A^N & A^{N-1} & A^{N-2} & \cdots & A & I \end{pmatrix}; \quad \mathscr{J}_2^{-1} \sim \begin{pmatrix} I & B_1 & B_2 & \cdots & B_N \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{B}^{-1} \sim \begin{pmatrix} \mathscr{A}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I \end{pmatrix}; \qquad \mathscr{J}_1^{-1} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\widetilde{\mathbb{A}}^{-1} = \mathscr{J}_3^{-1}\mathbb{B}^{-1}\mathscr{J}_2^{-1}\mathscr{J}_1^{-1}$. Перемножая соответствующие матрицы, получим матрицу для оператора $\widetilde{\mathbb{A}}^{-1}$, откуда нетрудно получить матрицу для оператора $\mathbb{A}^{-1}$. $\square$

## 1.3. Условия фредгольмовости разностного оператора

В этом параграфе получены необходимые и достаточные условия фредгольмовости разностного оператора вида (1.1.2), т.е. оператора

$$\mathscr{A}\colon l^p \to l^p,$$
$$(\mathscr{A}x)(k) = x(k+N) + C_1(k)x(k+N-1) + \ldots + C_N(k)x(k),$$
$$k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p = l^p(\mathbb{Z}, Y),\ p \in [1, \infty].$$

Условия получены на основе сопоставления разностному оператору $\mathscr{A}$ порядка $N$ разностного оператора первого порядка $\mathbb{A}\colon l^p(\mathbb{Z}, Y^N) \to l^p(\mathbb{Z}, Y^N)$, определенного формулой (1.1.3), где $\mathscr{C}_0(k)$ — тождественный оператор в $Y^N$ при любом $k \in \mathbb{Z}$. Эти условия описываются с использованием понятия экспоненциальной дихотомии дискретного семейства эволюционных оператоов, которое строится по операторной функции $\mathscr{C}_1\colon \mathbb{Z} \to \operatorname{End} Y^N$.

Рассмотрим разностный оператор первого порядка $\mathbb{D}$ из $\operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}, X)$ определенный формулой

$$(\mathbb{D}x)(n) = x(n) - U(n)x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, x \in l^p(\mathbb{Z}, X),$$

где $U \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$, а $X$ — комплексное банахово пространство.

По функции $U$ построим дискретное семейство эволюционных операторов

$$\mathscr{U}\colon \Delta = \{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m \leqslant n\} \to \operatorname{End} X,$$

определенное равенствами

$$\mathscr{U}(n,m) = \begin{cases} U(n)U(n-1)\dots U(m+1), & m < n, \\ I, & m = n, \end{cases}$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$.

**Определение 3.** Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}$ допускает *экспоненциальную дихотомию* на множестве $\mathbb{J} \subset \mathbb{Z}$, если существуют ограниченная проекторнозначная функция $P\colon \mathbb{J} \to \operatorname{End} X$ и постоянные $M_0 \geqslant 1$, $\gamma > 0$ такие, что выполнены следующие условия

1. $\mathscr{U}(n,m)P(m) = P(n)\mathscr{U}(n,m)$, для всех $m \leqslant n$, $m, n \in \mathbb{J}$;
2. $\|\mathscr{U}(n,m)P(m)\| \leqslant M_0 \exp(-\gamma(n-m))$, для всех $m \leqslant n$, $m, n \in \mathbb{J}$;
3. для $m < n$, $m, n \in \mathbb{J}$, сужение $\mathscr{U}_{n,m} : X'(m) \to X'(n)$ оператора $\mathscr{U}(n,m)$ на область значений $X'(m) = \operatorname{Im} Q(m)$ дополнительного проектора $Q(m) = I - P(m)$ есть изоморфизм подпространств $X'(m)$ и $X'(n) = \operatorname{Im} Q(n)$. Тогда полагаем оператор $\mathscr{U}(m,n)$ равным оператору $\mathscr{U}_{n,m}^{-1}$ на $X'(n)$ и равным нулевому оператору на $X(n) = \operatorname{Im} P(n) \subset X$.
4. $\|\mathscr{U}(m,n)\| \leqslant M_0 \exp(\gamma(m-n))$ для всех $m \leqslant n$ из $\mathbb{J}$.

Пару проекторнозначных функций $P, Q\colon \mathbb{J} \to \operatorname{End} X$, участвующих в определении 3, назовём *расщепляющей парой* для семейства $\mathscr{U}$. Если $P = 0$ или $Q = 0$, то будем говорить, что для $\mathscr{U}$ имеет место *тривиальная экспоненциальная дихотомия* на $\mathbb{J}$.

**Теорема 7** (([?], [?])). *Для того чтобы разностный оператор $\mathbb{D} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}, X)$, определяемый функцией $U \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$, был обратим, необходимо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}$ допускало экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}$. Если оператор $\mathbb{D}$ обратим, то обратный к нему определяется формулой*

$$(\mathbb{D}^{-1}y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n,m)y(m), \quad n \in \mathbb{Z}, y \in l^p(\mathbb{Z}, X),$$

*где функция Грина $G\colon \mathbb{Z}^2 \to \operatorname{End} X$ имеет вид*

$$G(n,m) = \begin{cases} \mathscr{U}(n,m)P(m), & m \leqslant n, \\ -\mathscr{U}(n,m)Q(m), & m > n, \end{cases}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Этот результат для случая $p = \infty$ имеется в монографии Д. Хенри [?] (в статье [?] была устранена неточность в доказательстве аналога теоремы 7 из этой монографии).

Далее используется

**Предположение 1.** Существуют числа $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leqslant b$, такие, что семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}$ (построенное по функции

$U: \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$) допускает экспоненциальную дихотомию на множествах $\mathbb{Z}_{-,a} = \{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant a\}$, $\mathbb{Z}_{b,+} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant b\}$ с расщепляющими парами проекторнозначных функций

$$P_-, Q_-: \mathbb{Z}_{-,a} \to \operatorname{End} X,$$
$$P_+, Q_+: \mathbb{Z}_{b,+} \to \operatorname{End} X.$$

Определим оператор $\mathscr{N}_{b,a}\colon \operatorname{Im} Q_-(a) \to \operatorname{Im} Q_+(b)$, равенством

$$\mathscr{N}_{b,a} x = Q_+(b)\mathscr{U}(b,a)x, \quad x \in \operatorname{Im} Q_-(a).$$

Этот оператор введён в рассмотрение в статьях [?], [?] и назван «узловым». Важность его обусловлена тем, что он действует между подпространствами «фазового» пространства $X$, а не в $l^p(\mathbb{Z}, X)$.

Имеет место следующая теорема ([?], [?]).

**Теорема 8.** *Пусть для семейства эволюционных операторов $\mathscr{U}: \Delta \to \operatorname{End} X$, построенным по функции $U: \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$ выполнены условия предположения 1.*

*Тогда имеет место равенство*

$$\operatorname{St}_{\text{inv}} \mathbb{D} = \operatorname{St}_{\text{inv}} \mathscr{N}_{b,a}.$$

*В частности, для фредгольмовости разностного оператора $\mathbb{D}$, необходимо и достаточно, чтобы узловой оператор $\mathscr{N}_{b,a}\colon \operatorname{Im} Q_-(a) \to$*

$\operatorname{Im} Q_+(b)$ *являлся фредгольмовым оператором. При условии фредгольмовости узлового оператора имеют иместо равенства:*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathbb{D} = \dim \operatorname{Ker} \mathscr{N}_{b,a}, \quad \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathbb{D} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathscr{N}_{b,a},$$
$$\operatorname{ind} \mathbb{D} = \operatorname{ind} \mathscr{N}_{b,a}.$$

Рассмотрим разностный оператор (см. формулу (1.1.4))

$$\mathbb{D} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{S}^{-1}(\mathbb{S} + \mathbb{A}_1) \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}, Y^N)$$
$$(\mathbb{D}x)(n) = x(n) + \mathscr{C}_1(n)x(n-1), \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, Y^N).$$

Заметим, что его состояния обратимости совпадают с состояниями обратимости оператора $\mathscr{A}$.

**Определение 4.** Семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}_1 \colon \mathbb{Z}^2 \to \operatorname{End} Y^N$, построенное по функции $-\mathscr{C}_1 \colon \mathbb{Z} \to \operatorname{End} Y^N$, назовем *семейством эволюционных операторов для однородного разностного уравнения*

$$x(k+N)+C_1(k)x(k+N-1)+\ldots+C_N(k)x(k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p(\mathbb{Z}, Y). \tag{1.3.1}$$

Из теорем 7 и 8 получаем следующие утверждения.

**Теорема 9.** *Для того чтобы разностный оператор* $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p$, $p \in [1, \infty]$, *определенный формулой* (1.1.2), *был обратим, необходи-*

*мо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов* $\mathscr{U}_1$*, построенное для разностного уравнения* (1.3.1)*, допускало экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{Z}$*.*

**Теорема 10.** *Пусть для семейства эволюционных операторов* $\mathscr{U} = \mathscr{U}_1 \colon \Delta \to \operatorname{End} Y^N$*, построенного для разностного уравнения* (1.3.1)*, выполнены условия предположения 1.*

*Тогда имеет место равенство*

$$\operatorname{St}_{\mathrm{inv}} \mathscr{A} = \operatorname{St}_{\mathrm{inv}} \mathscr{N}_{b,a}.$$

*В частности, для фредгольмовости разностного оператора* $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p$ *необходимо и достаточно, чтобы узловой оператор* $\mathscr{N}_{b,a}$ *являлся фредгольмовым оператором. При условии фредгольмовости узлового оператора имеют место равенства:*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathscr{N}_{b,a}, \quad \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathscr{N}_{b,a},$$
$$\operatorname{ind} \mathscr{A} = \operatorname{ind} \mathscr{N}_{b,a}.$$

Отметим, что в условиях теоремы 10 узловой оператор $\mathscr{N}_{b,a}$ действует между подпространствами банахова пространства $Y^N$.

**Следствие 1.** *Если оператор* $\mathscr{A}$ *фредгольмов в одном из пространств* $l^p$*,* $p \in [1, \infty]$*, то он фредгольмов и в остальных, и его индекс не зависит от значения* $p$*.*

В условиях следующей теоремы будем использовать следующее

**Предположение 2.** Существуют пределы

$$\lim_{n\to\pm\infty} C_i(n) = C_i^{\pm} \in \operatorname{End} X, \quad i = \overline{1, N}.$$

Под спектром операторного пучка

$$L^{\pm}(\lambda) = \lambda^N + C_1^{\pm}\lambda^{N-1} + \ldots + C_N^{\pm}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

будем понимать множество таких комплексных чисел $\lambda$, что $L^{\pm}(\lambda)$ — необратимый в $\operatorname{End} Y$ оператор.

**Теорема 11.** *В условиях предположения 2 разностный оператор $\mathscr{A}$ обратим, если спектральные радиусы $r(L^{\pm}) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(L^{\pm})\}$ операторных пучков $L^{\pm}$ меньше единицы.*

**Доказательство.** Непосредственно из теоремы 1 следует, что спектры $\sigma(\mathscr{C}_1^{\pm})$ операторов $\mathscr{C}_1^{\pm} \in \operatorname{End} Y^N$, заданных матрицами

$$\mathscr{C}_1^{\pm} \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N^{\pm} & C_{N-1}^{\pm} & C_{N-2}^{\pm} & \cdots & C_2^{\pm} & C_1^{\pm} \end{pmatrix},$$

совпадают со спектрами $\sigma(L^{\pm})$ операторных пучков $L^{\pm}$, поэтому $r(\mathscr{C}_1^{\pm}) = r(L^{\pm}) < 1$. Операторы $\mathscr{C}_1^{\pm}$ являются пределами последовательности $\mathscr{C}_1(n)$ в равномерной операторной топологии. Тогда из [**?**, теорема 3] следует, что оператор $\mathbb{D}$ обратим, следовательно обратим и оператор $\mathscr{A}$. $\square$

Пусть теперь оператор $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p$ имеет вид:

$$(\mathscr{A}x)(k) = C_0x(k+N) + C_1x(k+N-1) + \ldots + C_Nx(k),$$
$$k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p = l^p(\mathbb{Z}, Y),\ p \in [1, \infty],$$

то есть $C_i(k) \equiv C_i \in Y^N$, $i = \overline{0, N}$ — постоянные функции. В этом случае разностный оператор $\mathbb{A}$ задан выражением

$$(\mathbb{A}y)(k) = \mathscr{C}_0y(k+1) + \mathscr{C}_1y(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ y \in l^p(\mathbb{Z}; Y^N),$$

где

$$\mathscr{C}_0 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{C}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_1 \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение операторнозначную функцию $H\colon \mathbb{T} \to \operatorname{End} X$:

$$H(\gamma) = \gamma^N C_0 + \gamma^{N-1} C_1 + \ldots + C_N, \quad \gamma \in \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Эту функцию назовём *характеристической функцией* оператора $\mathscr{A}$. Множество $\rho(H)$, состоящее из таких $\gamma \in \mathbb{T}$, что оператор $H(\gamma)$ обратим, назовём *резольвентным множеством* функции $H$, а дополнение к нему, $s(H) = \mathbb{T} \setminus \rho(H)$ — *сингулярным множеством* этой функции.

**Теорема 12.** *Разностный оператор $\mathscr{A}$ с постоянными коэффициентами $C_i$, $i = \overline{0,N}$,обратим тогда и только тогда, когда сингулярное множество $s(H)$ его характеристической функции пусто. Если $s(H) = \varnothing$, то обратный оператор $\mathscr{A}^{-1} \in \operatorname{End} l^p$ представим в виде*

$$(\mathscr{A}^{-1}x)(k) = (G * x)(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} G(k-n)x(n), \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p. \quad (1.3.2)$$

*Функция $G$ принадлежит банаховой алгебре $l^1(\mathbb{Z}, \operatorname{End} Y)$ (со свёрткой функций в качестве умножения) и допускает представление вида*

$$G(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} (H(\gamma))^{-1} \gamma^n \, \mathrm{d}\gamma, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Доказательство.** Разностный оператор первого порядка $\mathbb{A}$ с постоянными коэффициентами обратим тогда и только тогда, когда сингулярное множество его характеристической функции $\mathscr{H}(\gamma) = \gamma\mathscr{C}_0 + \mathscr{C}_1$ пусто (иначе говоря, спектр линейного операторного пучка не содержит точек единичной окружности) [**?**, теорема 3]. Запишем матрицу оператора $\mathscr{H}(\gamma)$:

$$\mathscr{H}(\gamma) \sim \begin{pmatrix} \gamma I & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma I & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma I & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & \gamma C_0 + C_1 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 1 следует, что состояния обратимости операторов $\mathscr{H}(\gamma)$ и $H(\gamma)$ совпадают. Значит $s(H) = s(\mathscr{H})$. Отсюда получаем первое утверждение теоремы.

Заметим, что $G(n)$ представляют собой коэффициенты Фурье функции $(H(\gamma))^{-1}$, которая является голоморфной в окрестности единичной окружности как резольвента полиномиального операторного пучка. Следовательно, её ряд Фурье сходится абсолютно, откуда и следует, что $G \in l^1(\mathbb{Z}, \operatorname{End} Y)$. Благодаря этому, оператор $\mathscr{A}^{-1}$, задаваемый формулой (1.3.2), определен корректно. Непосредственная проверка показывает, что этот оператор является обратным к оператору $\mathscr{A}$. $\square$

**Предположение 3.** Все решения однородного разностного уравнения

$$x(k+N) + C_1 x(k+N-1) + \ldots + C_N x(k) = 0, \qquad (1.3.3)$$

рассматриваемого на $\mathbb{Z}_+$ ограничены.

В условиях предположения 3 любое решение $x \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, Y)$ однородного уравнения удовлетворяет равенствам

$$\begin{pmatrix} x(n) \\ x(n+1) \\ \vdots \\ x(n+N-2) \\ x(n+N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ -C_N & -C_{N-1} & \cdots & -C_2 & -C_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{pmatrix}.$$

Тогда из ограниченности всех решений однородного уравнения и теоремы БанахаШтейнгауза следует, что

$$\sup_{n \geqslant 0} \|\mathscr{C}_1^n\| = M(\mathscr{C}_1) < \infty.$$

Следовательно, спектральный радиус оператора $\mathscr{C}_1$ не превосходит единицы, т.е.

$$\sigma(\mathscr{C}_1) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geqslant 1\}.$$

Теперь можно применить результат из [**?**, теорема 1]:

**Теорема 13.** *Пусть выполнены условия предположения 3 и*

$$\sigma(\mathscr{C}_1) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}\,.$$

*Тогда существуют операторнозначные функции* $A_k \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, \operatorname{End} Y^N)$, $k = \overline{1,m}$*, такие что для любого решения* $x\colon \mathbb{Z}_+ \to Y$ *уравнения 1.3.3 имеют место следующие представления*

$$(x(n), x(n{+}1), \dots, x(n{+}N{-}1)) = \left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_k^n A_k(n)\right)(x(0), x(1), \dots, x(N{-}1)), \quad n \in \mathbb{Z}$$

*Функции* $A_k$*,* $k = \overline{1,m}$ *обладают следующими свойствами:*

1. *операторы* $A_k(n) \in \operatorname{End} Y^N$*,* $n \in \mathbb{Z}_+$ *принадлежат наименьшей замкнутой подалгебре* $\mathscr{A}_{\mathscr{C}_1}$ *из* $\operatorname{End} Y^N$*, содержащей оператор* $\mathscr{C}_1$*;*

2. $\lim_{n\to\infty} \|A_k(n+1) - A_k(n)\| = 0$*;*

3. $\lim_{n\to\infty} \|\mathscr{C}_1 A_k(n) - \gamma_k A_k(n)\| = 0$*;*

4. $\lim_{n\to\infty} \|A_k(n)A_j(n)\| = 0$ *для* $k \neq j$*,* $k, j = \overline{1,m}$*.*

В заключение отметим, что основные результаты статьи (теоремы 1-5) имеют место для разностных операторов, действующих в весовых пространствах последовательностей векторов (см. статьи [**?**], [**?**], [**?**]).