

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет прикладной математики, информатики и механики

Кафедра нелинейных колебаний

Спектральный анализ операторных полиномов
и разностных операторов высокого порядка

Бакалаврская работа

Направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Профиль Нелинейная динамика

Допущено к защите в ГЭК 7 июня 2016 года

Зав. кафедрой _____ В. Г. Задорожный
д. ф.-м. н., профессор

Обучающийся _____ В. Д. Харитонов

Научный руководитель _____ А. Г. Баскаков
д. ф.-м. н., профессор

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Основные понятия и определения	5
Глава 2. О состояниях обратимости операторных полиномов .	16
2.1. Основные результаты	16
2.2. Доказательства основных результатов	23
Глава 3. Условия фредгольмовости разностных операторов . .	29
3.1. Основные результаты	29
Заключение	39
Список литературы	40

Введение

О содержании и структуре работы

Из курса дифференциальных и разностных уравнений известен метод приведения уравнения N -ого порядка к системе из N уравнений первого порядка. В данной работе рассматривается обобщение этого метода для исследования операторных полиномов с коэффициентами из банахова пространства. Исследование спектральных свойств операторных полиномов сводится к изучению спектральных свойств оператора, заданного операторной матрицей. Полученные результаты (теоремы 15–17) применяются к разностным операторам высокого порядка. Получены условия их обратимости, фредгольмовости (теоремы 18, 24 и 26), асимптотическое представление ограниченных решений однородного разностного уравнения (теорема 27).

Работа состоит из введения, трёх глав и заключения.

Во введении дается общая характеристика работы.

В первой главе приводятся основные определения и понятия, используемые в работе.

Во второй главе формулируются основные результаты работы и приводятся их доказательства.

В третьей главе основные результаты используются для исследования условий обратимости и фредгольмовости разностных операторов.

В заключении описаны возможные направления дальнейших исследований на данную тему.

История исследований

Приводимая в работе конструкция перехода от изучения исходного операторного полинома $\mathcal{A} = C_0 A^N + C_1 A^{N-1} + \dots + C_N \in \text{End } X$ к изучению

матричного оператора $\mathbb{A} \in \text{End } X^N$, является непосредственным обобщением известного из курсов дифференциальных и разностных уравнений приёма сведения дифференциального или разностного уравнения N -ого порядка к системе из N дифференциальных (разностных) уравнений. Для более специальных классов операторных полиномов аналог теоремы 16 получен в монографиях А. Б. Антоневи́ча [1, теорема 9.1], [2].

Теория разностных операторов первого порядка развивалась в работах [1—20].

Понятие состояний обратимости используется, в частности, в статье [16].

В отличие от статьи [13], где изучались разностные операторы второго порядка, оператор C_0 из представления операторного полинома \mathcal{A} может быть необратимым оператором. Случай необратимого оператора при старшей степени оператора A позволяет получать аналоги теорем 15–17 для случая операторного полинома \mathcal{A} , где оператор A — замкнутый оператор с непустым резольвентным множеством (в частности, дифференциальный оператор). Следует отметить, что такой прием не применим к дифференциальным операторам второго порядка, рассматриваемых в статьях [21; 22]. В данной работе предложен иной (более простой) способ доказательства основных результатов статьи [13]. Он состоит в сопоставлении операторному полиному порядка N оператора $\tilde{\mathbb{A}}$, заданного операторной матрицей порядка $N + 1$, который имеет то же множество состояний обратимости.

Глава 1

Основные понятия и определения

Пусть X и Y — нормированные (векторные) пространства над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Определение 1. Отображение $A: X \rightarrow Y$ из векторного пространства X в векторное пространство Y называется *линейным оператором*, если

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2, \quad \forall x_1, x_2 \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Если $Y = \mathbb{K}$, то вместо слова «оператор» говорят «функционал».

Определение 2. Оператор $A: X \rightarrow Y$ между нормированными пространствами называется *ограниченным*, если величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

конечна. Эта величина, в таком случае, называется нормой оператора A .

Можно показать, что все следующие определения нормы совпадают с данным выше:

1. $\|A\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\|$
2. $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$
3. $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|};$
4. $\|A\| = \inf \{C \geq 0 : \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq C \|x\|\}$

Нетрудно видеть, что $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ для всех $x \in X$.

Множество всех линейных ограниченных операторов между нормированными пространствами X и Y будем обозначать $\text{Hom}(X, Y)$. Если $X = Y$, то, для краткости будем обозначать $\text{End } X := \text{Hom}(X, X)$.

Теорема 1. $\text{Hom}(X, Y)$ — нормированное пространство.

Определение 3. Нормированное векторное пространство X называется *банаховым пространством*, если оно полно как метрическое пространство с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Определение 4. Алгебру \mathcal{B} называют *банаховой алгеброй*, если она как линейное пространство является банаховым пространством, причем для всех $a, b \in \mathcal{B}$

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

Если \mathcal{B} при этом является алгеброй с единицей e , то требуют также, чтобы выполнялось свойство

$$\|e\| = 1.$$

Теорема 2. Если Y — банахово пространство, то $\text{Hom}(X, Y)$ — банахово пространство.

Следствие. Если X — банахово пространство, то $\text{End } X$ — банахова алгебра с единицей.

Теорема 3. Пусть A — линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. A — непрерывное отображение;
2. A — непрерывное в точке 0 отображение;
3. A — ограниченный оператор;
4. A — липшицево отображение.

Доказательство. Импликации $1 \Rightarrow 2$, и $4 \Rightarrow 1$ очевидны. Докажем, что $2 \Rightarrow 3$. Непрерывность A означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : \|x\| < \delta \rightarrow \|Ax\| < \varepsilon.$$

Зафиксируем некоторый $\varepsilon > 0$ и соответствующий ему δ . Тогда для любого $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, справедливо

$$\|Ax\| = \frac{2}{\delta} \left\| A \left(\frac{\delta}{2} x \right) \right\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Переходя в неравенстве к верхней грани, получаем, что

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta},$$

что и означает ограниченность оператора A .

Импликация $3 \Rightarrow 4$ проверяется непосредственно: если A — ограниченный оператор, $x_1, x_2 \in X$, то

$$\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq \|A\| \|x_1 - x_2\|.$$

□

Определение 5. Множество из метрического пространства называется *множеством I категории* («тощим», *разреженным*), если его можно представить в виде счетного объединения замкнутых множеств, каждое из которых не содержит шара.

Определение 6. Множество, не являющееся множеством I категории, называется *множеством II категории* («тучным»).

Теорема 4 (Бэра). *Каждое полное метрическое пространство является множеством II категории.*

Пусть X и Y — банаховы пространства и Ω — множество индексов, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ — семейство ограниченных операторов.

Будем называть семейство операторов *ограниченным поточечно*, если для каждого $x \in X$ существует такая константа $M(x) > 0$, что

$$\|A_\alpha x\| \leq M(x)$$

для всех $\alpha \in \Omega$, то есть для каждого $x \in X$ множество

$$\{A_\alpha x : \alpha \in \Omega\} \subset Y$$

ограничено в Y .

Семейство операторов назовём *ограниченным равномерно*, если существует такое число $C > 0$, что для всех $\alpha \in \Omega$ выполнено неравенство

$$\|A_\alpha\| < C,$$

то есть числовое множество

$$\{\|A_\alpha\| : \alpha \in \Omega\}$$

ограничено.

Теорема 5 (Банаха-Штейнгауза). *Если семейство ограниченных операторов $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$, действующих из банахова пространства X в нормированное пространство Y , ограничено поточечно, то оно ограничено и равномерно.*

Доказательство. Рассмотрим множества вида

$$X_n = \{x \in X : \forall \alpha \in \Omega \ \|A_\alpha x\| \leq n\}.$$

В силу поточечной ограниченности семейства, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

Каждое из множеств X_n замкнуто. В самом деле: если $\{x_k\}$ — сходящаяся к $x_0 \in X$ последовательность элементов из X_n , то, в силу непрерывности операторов A_α , $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_\alpha x_k\| = \|A_\alpha x_0\|$, а поскольку для всех x_k и всех $\alpha \in \Omega$ выполняется неравенство $\|A_\alpha x_k\| \leq n$, то и $\|A_\alpha x_0\| \leq n$, а значит $x_0 \in X_n$, что и означает замкнутость X_n .

Поскольку пространство X полно, по теореме Бэра существует такой номер n_0 , что X_{n_0} содержит в себе шар, который будем обозначать $B(x', r)$, где r — радиус этого шара, а x' — его центр.

Для всех элементов x из $B(x', r)$ и для всех $\alpha \in \Omega$ справедливо, что

$$\|A_\alpha x\| \leq n_0,$$

то есть значения $\|A_\alpha x\|$ ограничены на этом шаре. Покажем, что они ограничены и на единичном шаре, что будет означать ограниченность норм A_α .

Пусть $x \in B(0, 1)$. Тогда, как нетрудно проверить, $z = rx + x' \in B(x', r)$. В таком случае для всех $\alpha \in \Omega$

$$\|A_\alpha x\| = \left\| A_\alpha \left(\frac{z - x'}{r} \right) \right\| \leq \frac{1}{r} (\|A_\alpha z\| + \|A_\alpha x'\|) \leq \frac{2n_0}{r},$$

откуда, взяв верхнюю грань по всем $x \in B(0, 1)$, получаем утверждение теоремы. \square

Пусть $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ — линейный оператор, определенный на некотором подпространстве $D(A)$ пространства X .

Определение 7. Оператор $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ называется *замкнутым*, если его график

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$$

является замкнутым подмножеством в пространстве $X \times X$, наделённом нор-

мой

$$\|(x_1, x_2)\| = \max \{\|x_1\|, \|x_2\|\}.$$

Иначе говоря, оператор замкнут, если для всякой сходящейся последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$ такой, что $Ax_n \rightarrow y \in X$, её предел x лежит в $D(A)$ и $y = Ax$.

Теорема 6. *Всякий ограниченный оператор $A \in \text{End } X$ замкнут.*

Теорема 7 (Банаха о замкнутом графике). *Пусть $A: X \rightarrow X$ — замкнутый линейный оператор, определенный на всем банаховом пространстве X . Тогда оператор A ограничен.*

Пусть $A \in \text{End } X$. Рассмотрим два условия:

1. $\text{Ker } A = \{0\}$ — оператор A инъективен.
2. $\text{Im } A = X$ — оператор A сюръективен.

Теорема 8 (Банаха об обратном операторе). *Пусть линейный оператор $A \in \text{End } X$, действующий в банаховом пространстве X , биективен, т.е. выполнены условия (1) и (2). Тогда A^{-1} ограничен.*

Если $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ определен не на всем пространстве, то для него также можно рассматривать условия (1, 2). Тогда будем называть обратным к оператору A оператор $A^{-1}: X \rightarrow X$, который удовлетворяет естественным условиям

$$AA^{-1} = I_X$$

и

$$A^{-1}Ax = x$$

для всех $x \in D(A)$. Обратим внимание, что мы считаем A^{-1} действующим из X во всё пространство X , а не в $D(A)$.

Теорема 9 (Банаха об обратном операторе).

Пусть $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ — замкнутый биективный линейный оператор, определенный на подмножестве $D(A)$ банахова пространства X . Тогда $A^{-1}: X \rightarrow X$ — ограниченный оператор.

Доказательство аналогично предыдущему.

Лемма 1. Если $A \in \text{End } X$ и $\|A\| < 1$, то оператор $I - A$ обратим, а обратный задается формулой

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

причем ряд сходится абсолютно и

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Доказательство. Покажем, что ряд сходится абсолютно. Используем формулу суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Итак, ряд сходится абсолютно, значит он сходится. Отсюда же следует и оценка нормы. Обозначим сумму ряда через $B \in \text{End } X$. Покажем, что B — обратный к $I - A$.

$$\begin{aligned} (I - A)B &= (I - A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \lim_{m \rightarrow \infty} (I - A) \sum_{n=0}^m A^n = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m (A^n - A^{n+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} (I - A^{m+1}) = I, \end{aligned}$$

где последнее равенство справедливо в силу условия $\|A\| < 1$.

Аналогично доказывается, что $B(I - A) = I$.

□

Теорема 10. Пусть $A, B \in \text{End } X$, A обратим, $\|B\| \|A^{-1}\| < 1$. Тогда $A - B$ обратим и

$$(A - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A^{-1}B)^n A^{-1},$$

и справедлива оценка

$$\|(A - B)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|B\| \|A^{-1}\|}.$$

Лемма 2. Если $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ замкнут, то и $A - \lambda I$ замкнут, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а $I: D(A) \subset X \rightarrow X$ — тождественный оператор.

Определение 8. Пусть $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ — замкнутый оператор. Будем называть число $\lambda \in \mathbb{C}$ *точкой спектра* оператора A , если оператор $A - \lambda I: D(A) \subset X \rightarrow X$ необратим, то есть выполнено хотя бы одно из условий

1. $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$ — оператор не инъективен.
2. $\text{Im}(A - \lambda I) \neq X$ — оператор не сюръективен.

Если же число $\lambda \in \mathbb{C}$ не является точкой спектра, то его называют *регулярной точкой* оператора A .

Заметим, что по теореме Банаха об обратном операторе, если число λ — регулярная точка A , то оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ ограничен.

Определение 9. Множество $\sigma(A)$ точек спектра оператора A называется *спектром* оператора A .

Определение 10. Множество $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ регулярных точек оператора A называется *резольвентным множеством* оператора A .

Спектр оператора принято разбивать на три взаимно непересекающиеся части:

1. Дискретный спектр $\sigma_d(A)$ — множество собственных значений оператора A , то есть такие $\lambda \in \mathbb{C}$, что $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$.
2. Непрерывный спектр $\sigma_c(A)$ — множество таких $\lambda \in \mathbb{C}$, не являющихся собственными значениями, что $\text{Im}(A - \lambda I) \neq X$, но $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = X$.
3. Остаточный спектр $\sigma_r(A)$ — множество точек спектра, не вошедших ни в дискретный спектр, ни в непрерывный спектр.

Ясно, что $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$.

Определение 11. Отображение $R(\bullet, A): \rho(A) \rightarrow \text{End } X$, действующее по правилу

$$R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1},$$

называется *резольвентой* оператора A .

Теорема 11. Для всякого замкнутого оператора A множество $\rho(A)$ открыто. Резольвента $R(\bullet, A): \rho(A) \rightarrow \text{End } X$ — аналитическая функция на $\rho(A)$.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$, а $\lambda \in \mathbb{C}$ таково, что

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}.$$

Тогда представим оператор $A - \lambda I$ в следующем виде:

$$A - \lambda I = A - \lambda_0 I + \lambda_0 I - \lambda I = (A - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A)).$$

Оператор $I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A)$ обратим, поскольку (см. лемму 1)

$$\|(\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A)\| < 1.$$

Так как $A - \lambda_0 I$ также обратим, то и $A - \lambda I$ обратим как произведение обратимых операторов. Отсюда следует, что резольвентное множество открыто:

вместе с каждой точкой λ_0 в $\rho(A)$ входит открытый круг радиусом меньше $\|R(\lambda_0, A)\|^{-1}$ с центром в точке λ_0 .

Оператор, обратный к $(I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A))$ представляется в виде

$$(I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A)^n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) &= (A - \lambda I)^{-1} = (I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A))^{-1} (A - \lambda_0 I)^{-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A)^{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом мы получили, что $R(\lambda, A)$ в некоторой окрестности каждой точки $\lambda_0 \in \rho(A)$ представляется в виде суммы степенного ряда с коэффициентами $c_n = R(\lambda_0, A)^{n+1}$. Значит, функция $R(\lambda, A)$ аналитична на $\rho(A)$. \square

Следствие. Для любого замкнутого оператора A множество $\sigma(A)$ замкнуто.

Теорема 12 (тождество Гильберта). Для любого замкнутого оператора A и любых чисел $\lambda, \mu \in \rho(A)$ справедливо равенство

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\lambda - \mu) R(\lambda, A) R(\mu, A).$$

Следствие. Операторы $R(\lambda, A)$ и $R(\mu, A)$ перестановочны.

Теорема 13 (о спектре ограниченного оператора). Пусть $A \in \text{End } X$ — ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве X . Тогда его спектр $\sigma(A)$ есть непустое компактное множество в \mathbb{C} .

Определение 12. Спектральным радиусом линейного ограниченного опе-

ратора $A \in \text{End } X$ называется величина

$$r(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Спектральный радиус корректно определен в виду компактности спектра A и его непустоты. Из доказательства теоремы 13 видно, что

$$r(A) \leq \|A\|,$$

поскольку, если $|\lambda| > \|A\|$, то оператор $A - \lambda I$ обратим.

Теорема 14 (формула Бёрлинга-Гельфанда). *Пусть $A \in \text{End } X$. Тогда для спектрального радиуса оператора A справедлива формула*

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Глава 2

О состояниях обратимости операторных полиномов

2.1. Основные результаты

Пусть X, Y — комплексные банаховы пространства, $\text{Hom}(X, Y)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов (гомоморфизмов), определенных на X со значениями в Y , $\text{End } X = \text{Hom}(X, X)$ — банахова алгебра эндоморфизмов пространства X .

Линейный оператор $\mathcal{A} \in \text{End } X$, вида

$$\mathcal{A} = C_0 A^N + C_1 A^{N-1} + \dots + C_N,$$

где $A, C_0, \dots, C_N \in \text{End } X, N \in \mathbb{N}$, назовём *операторным полиномом* (порядка N с операторными коэффициентами $C_i, i = \overline{1, N}$, разложенным по степеням оператора A).

Наряду с оператором \mathcal{A} рассмотрим оператор $\mathbb{A} \in \text{End } X^N$, заданный матрицей вида

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_0 A + C_1 \end{pmatrix},$$

т. е. для $x \in X^N, x = (x_1, \dots, x_N)$, вектор $\mathbb{A}x = y = (y_1, \dots, y_N)$ определяется

равенствами:

$$y_k = Ax_k - x_{k+1}, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$y_N = C_0Ax_N + \sum_{k=1}^N C_kx_{N-k+1} = C_0Ax_N + \sum_{j=1}^N C_{N-j+1}x_j.$$

Оператор \mathbb{A} можно представить в виде

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0\mathbb{S} + \mathbb{A}_1,$$

где операторы $\mathbb{A}_0, \mathbb{S}, \mathbb{A}_1 \in \text{End } X^N$ определяются соответственно матрицами

$$\mathbb{A}_0 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S} \sim \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_1 \end{pmatrix}.$$

Определение 13. Пусть $B \in \text{Hom}(X_1, X_2)$ — линейный ограниченный оператор между банаховыми пространствами X_1, X_2 . Рассмотрим следующий набор его возможных свойств.

- 1) $\text{Ker } B = \{x \in X_1 : Bx = 0\} = \{0\}$, т. е. B — инъективный оператор;
- 2) $1 \leq n = \dim \text{Ker } B < \infty$ (ядро конечномерно);
- 3) $\text{Ker } B$ — бесконечномерное подпространство в X_1 ;
- 4) $\text{Ker } B$ — дополняемое подпространство в X_1 ;
- 5) $\overline{\text{Im } B} = \text{Im } B$ — образ оператора B замкнут в X_2 , что эквивалентно положительности величины (называемой минимальным модулем опера-

тора B)

$$\gamma(B) = \inf_{x \in X_1 \setminus \text{Ker } B} \frac{\|Bx\|}{\text{dist}(x, \text{Ker } B)},$$

где $\text{dist}(x, \text{Ker } B) = \inf_{x_0 \in \text{Ker } B} \|x - x_0\|$ — расстояние от вектора x до подпространства $\text{Ker } B$;

- 6) оператор B равномерно инъективен (корректен), т. е. $\text{Ker } B = \{0\}$ и $\gamma(B) > 0$;
- 7) $\text{Im } B$ — замкнутое подпространство в X_2 конечной коразмерности

$$1 \leq \text{codim Im } B = \dim X_2 / \text{Im } B < \infty;$$

- 8) $\text{Im } B$ — замкнутое подпространство в X_2 бесконечной коразмерности;
- 9) $\text{Im } B \neq X_2$, $\overline{\text{Im } B} = X_2$ (образ оператора B плотен в X_2 , но не совпадает со всем X_2);
- 10) $\overline{\text{Im } B} \neq X_2$ (образ B не плотен в X_2);
- 11) $\text{Im } B = X_2$ (оператор B сюръективен);
- 12) оператор B обратим (т. е. $\text{Ker } B = \{0\}$ и $\text{Im } B = X_2$).

Если для оператора B одновременно выполнены все условия из совокупности условий $\sigma = \{i_1, \dots, i_k\}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 12$, то будем говорить, что оператор B *находится в состоянии обратимости σ* . Множество всех состояний обратимости оператора B обозначим символом $\text{St}_{\text{inv}} B$.

Определение 14. Если оператор $B \in \text{Hom}(X_1, X_2)$ имеет конечномерное ядро (выполнено одно из условий 1), 2) определения 13) и замкнутый образ конечной коразмерности (одно из условий 7), 11)), то оператор B называется *фредгольмовым*. Если оператор B имеет замкнутый образ и конечно хотя бы одно из чисел $\dim \text{Ker } B$, $\text{codim Im } B = \dim X_2 / \text{Im } B$, то оператор B называется *полуфредгольмовым*. Число $\text{ind } B = \dim \text{Ker } B - \text{codim Im } B$ называется *индексом фредгольмова* (полуфредгольмова) оператора B .

Аналогичное определение даётся для замкнутых операторов, а также для линейных отношений. Благодаря введённому понятию состояний обратимости оператора, становится возможна более тонкая и разнообразная, чем общепринятая (см. [23]), классификация спектров линейных операторов.

Одним из основных результатов работы является

Теорема 15. *Множества состояний обратимости операторов $\mathcal{A} \in \text{End } X$ и $\mathbb{A} \in \text{End } X^N$ совпадают:*

$$\text{St}_{\text{inv}} \mathcal{A} = \text{St}_{\text{inv}} \mathbb{A}.$$

Это равенство (содержащее множество утверждений) означает, что если одно из двенадцати условий определения 13 выполняется для одного из операторов \mathcal{A} , \mathbb{A} , то оно выполняется и для другого.

Благодаря теореме 15 можно свести исследование связанных с обратимостью свойств оператора $\mathcal{A} \in \text{End } X$ к исследованию соответствующих свойств оператора \mathbb{A} , который в важных частных случаях изучен.

Теорема 16. *Пусть оператор \mathcal{A} обратим. Тогда обратим и оператор $\mathbb{A} \in \text{End } X^N$ и обратный \mathbb{A}^{-1} имеет матрицу $(\mathbb{A}^{-1})_{ij}$, $1 \leq i, j \leq N$ вида:*

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}^{-1})_{ij} &= A^{i-1} D_j - A^{i-j-1}, & i > j, \quad j = \overline{1, N-1}, \\ (\mathbb{A}^{-1})_{ij} &= A^{i-1} D_j, & i \leq j, \quad j = \overline{1, N-1}, \\ (\mathbb{A}^{-1})_{i,N} &= A^{i-1} \mathcal{A}^{-1}, & i = \overline{1, N}, \\ D_j &= \mathcal{A}^{-1} \sum_{k=0}^{N-j} C_k A^{N-k-j}, & i = \overline{1, N}, \\ \mathbb{A}^{-1} &\sim \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \cdots & D_{N-1} & \mathcal{A}^{-1} \\ AD_1 - I & AD_2 & \cdots & AD_{N-1} & A\mathcal{A}^{-1} \\ A^2 D_1 - A & A^2 D_2 - I & \cdots & A^2 D_{N-1} & A^2 \mathcal{A}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{N-1} D_1 - A^{N-2} & A^{N-1} D_2 - A^{N-3} & \cdots & A^{N-1} D_{N-1} - I & A^{N-1} \mathcal{A}^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Непосредственно из теоремы 15 следует

Теорема 17. *Оператор \mathcal{A} фредгольмов (полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда фредгольмовым (полуфредгольмовым) является оператор \mathbb{A} . При условии фредгольмовости одного из них*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathbb{A}, \quad \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathbb{A},$$

$$\operatorname{ind} \mathcal{A} = \operatorname{ind} \mathbb{A}.$$

Далее символом $l^p = l^p(\mathbb{Z}; Y)$, $1 \leq p \leq \infty$ обозначим банахово пространство суммируемых со степенью p (ограниченных при $p = \infty$) двусторонних последовательностей векторов из банахова пространства Y . Нормы в этих пространствах определяются равенствами:

$$\|x\| = \|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|^p \right)^{1/p}, \quad x \in l^p, \quad p \in [1, \infty),$$

$$\|x\| = \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|, \quad x \in l^\infty.$$

В банаховом пространстве l^p рассмотрим разностное уравнение N -ого порядка:

$$C_0(k)x(k+N) + C_1(k)x(k+N-1) + \dots + C_N(k)x(k) = f(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p, \quad (2.1.1)$$

где $f \in l^p$, а $C_i: \mathbb{Z} \rightarrow \operatorname{End} Y$, $i = \overline{0, N}$ — ограниченные операторнозначные функции, т. е. $C_i \in l^\infty(\mathbb{Z}; \operatorname{End} Y)$. Через S обозначим оператор сдвига последовательностей из l^p : $S \in \operatorname{End} l^p$, $(Sx)(k) = x(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in l^p$. Тогда уравнение (2.1.1) можно записать в операторном виде:

$$\mathcal{A}x = f,$$

где разностный оператор $\mathcal{A} \in \text{End } l^p$ определяется формулой

$$\mathcal{A} = \widetilde{C}_0 S^N + \widetilde{C}_1 S^{N-1} + \dots + \widetilde{C}_N. \quad (2.1.2)$$

Операторы $\widetilde{C}_i \in \text{End } l^p$, $i = \overline{0, N}$ есть операторы умножения на операторную функцию C_i :

$$(\widetilde{C}_i x)(k) = C_i(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p, \quad k = \overline{0, N}.$$

Используя приём, описанный выше для операторных полиномов, построим по оператору \mathcal{A} оператор $\mathbb{A} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}; Y^N)$. При этом учитывается канонический изоморфизм пространств $l^p(\mathbb{Z}; Y)^N$ и $l^p(\mathbb{Z}; Y^N)$.

Оператор \mathbb{A} является разностным оператором первого порядка в пространстве $l^p(\mathbb{Z}; Y^N)$ и задаётся равенством

$$(\mathbb{A}x)(k) = \mathcal{C}_0(k)x(k+1) + \mathcal{C}_1(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p(\mathbb{Z}; Y^N), \quad (2.1.3)$$

где

$$\mathcal{C}_0(k) \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_0(k) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C}_1(k) \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -I \\ C_N(k) & C_{N-1}(k) & C_{N-2}(k) & \dots & C_2(k) & C_1(k) \end{pmatrix},$$

$$x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_N(k)), \quad x_i \in l^p, \quad i = \overline{1, N}.$$

Итак, оператор \mathbb{A} записывается в виде

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 \mathbb{S} + \mathbb{A}_1, \quad (2.1.4)$$

где $\mathbb{S} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$ — оператор сдвига в $l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$, $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1 \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$ — операторы умножения на функции \mathcal{C}_0 и \mathcal{C}_1 соответственно.

Согласно терминологии статьи [24], разностный оператор 2.1.4 является оператором с двухточечным спектром Бора. Поэтому к нему применимы полученные в статье результаты об обратимости, представлении обратных (используя понятие экспоненциальной дихотомии). Имеют место оценки норм обратных операторов.

При получении результатов статьи [24] существенно использовалась (особенно в случае необратимого оператора \mathbb{A}_0) спектральная теория линейных отношений ([25; 26]).

Из представлений (2.1.2) и (2.1.4) разностных операторов \mathcal{A} и \mathbb{A} и теорем 15–17 следует

Теорема 18. *Имеет место равенство*

$$\text{St}_{\text{inv}} \mathcal{A} = \text{St}_{\text{inv}} \mathbb{A}.$$

В частности, оператор \mathcal{A} фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор \mathbb{A} . При условии фредгольмовости одного из них

$$\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \dim \text{Ker } \mathbb{A}, \quad \dim \text{Im } \mathcal{A} = \text{codim Im } \mathbb{A},$$

$$\text{ind } \mathcal{A} = \text{ind } \mathbb{A}.$$

Следующее утверждение следует из результатов статей [10; 11].

Теорема 19. *Если разностный оператор \mathcal{A} обратим в одном из банаховых пространств $l^p(\mathbb{Z}; Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, то он обратим в любом из этих*

пространств. В частности, спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора \mathcal{A} не зависит от пространства l^p , в котором он определен.

Оценки, полученные в [12] для решений разностных включений, позволяют получить оценки для функции Грина в представлении оператора \mathcal{A}^{-1} . Аналоги теорем 17–19 имеют место для разностных операторов высокого порядка, рассматриваемых в пространствах односторонних последовательностей. Соответствующие результаты для разностных операторов первого порядка получены в статьях [10; 16].

В §3 данной работы получено (теорема 24) необходимое и достаточное условие фредгольмовости разностного оператора $\mathcal{A} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}; Y)$, $p \in [1, \infty]$ с $C_0(k) = I$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Для разностного оператора с постоянными операторными коэффициентами $\widetilde{C}_k \in \text{End } Y$, $0 \leq k \leq N$, приведена формула обратного. В теореме 27 получено асимптотическое представление ограниченных решений однородного разностного уравнения.

2.2. Доказательства основных результатов

Пусть задан операторный полином $\mathcal{A} \in \text{End } X$, разложенный по степеням оператора A :

$$\mathcal{A} = C_0 A^N + C_1 A^{N-1} + \dots + C_N,$$

где $A, C_0, \dots, C_N \in \text{End } X$, $N \in \mathbb{N}$, и соответствующий ему оператор $\mathbb{A} \in \text{End } X^N$:

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \dots & C_2 & C_0 A + C_1 \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение оператор $\tilde{\mathbb{A}}$ из алгебры $\text{End } X^{N+1}$.

$$\tilde{\mathbb{A}} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_1 & C_0 A \end{pmatrix}.$$

При доказательстве теорем 15 и 16 вначале соответствующие утверждения устанавливаются для операторов \mathcal{A} и $\tilde{\mathbb{A}}$, а затем, используя представление оператора \mathcal{A} в виде

$$\mathcal{A} = (C_0 A + C_1) A^{N-1} + C_2 A^{N-2} + \dots + C_N,$$

соответствующие результаты устанавливаются для операторов \mathcal{A} и \mathbb{A} . Таким образом вычисляется матрица оператора $\mathbb{A}^{-1} \in \text{End } X^N$.

Зададим операторы $\mathbb{B}, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3 \in \text{End } X^{N+1}$ матрицами

$$\mathbb{B} \sim \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{B}x)_1 &= \mathcal{A}x_1 = \sum_{k=0}^N C_k A^{N-k} x_1, & (\mathcal{J}_1 x)_k &= x_{k+1}, \quad k = \overline{1, N}, \\ (\mathbb{B}x)_k &= -x_k, \quad k = \overline{2, N+1}; & (\mathcal{J}_1 x)_{N+1} &= x_1; \end{aligned}$$

$$B_i = \sum_{k=0}^{N-i} C_k A^{N-k-i}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\mathcal{J}_2 \sim \begin{pmatrix} I & -B_1 & -B_2 & \cdots & -B_N \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_3 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -A & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -A & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -A & I \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_2 x)_1 &= x_1 - \sum_{i=1}^N B_i x_{i+1}, & (\mathcal{J}_3 x)_1 &= x_1, \\ (\mathcal{J}_2 x)_k &= x_k, \quad k = \overline{2, N+1}; & (\mathcal{J}_3 x)_k &= x_k - Ax_{k-1}, \quad k = \overline{2, N+1}. \end{aligned}$$

Лемма 3. *Состояния обратимости операторов $\tilde{\mathbb{A}}$ и \mathbb{B} совпадают.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что

$$\tilde{\mathbb{A}} = \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 \mathbb{B} \mathcal{J}_3,$$

причем ясно, что $\mathcal{J}_i, i = \overline{1, 3}$ — обратимые операторы (\mathcal{J}_1 — оператор перестановки, \mathcal{J}_2 и \mathcal{J}_3 имеют верхнетреугольную и нижнетреугольную матрицы соответственно с обратимыми операторами на главной диагонали). \square

Таким образом, доказательство теоремы 15 сводится к доказательству следующей теоремы.

Теорема 20. *Состояния обратимости операторов \mathcal{A} и \mathbb{B} совпадают.*

Введем операторы $J_1 \in \text{Hom}(X, X^{N+1})$, $J_2 \in \text{Hom}(X^{N+1}, X)$, действующие по правилам

$$\begin{aligned} (J_1 x)_1 &= x, \\ (J_1 x)_k &= 0, \quad k = \overline{2, N+1}; \end{aligned}$$

$$J_2x = x_1, \quad x \in X^{N+1}.$$

Лемма 4. *Ядра операторов \mathcal{A} и \mathbb{B} изоморфны. При этом*

$$J_1(\text{Ker } \mathcal{A}) = \text{Ker } \mathbb{B};$$

$$J_2(\text{Ker } \mathbb{B}) = \text{Ker } \mathcal{A}.$$

Заметим, что $\text{Ker } \mathbb{B} = \text{Ker } \mathcal{A} \times \{0\}^N$.

Доказательство. Отображение J_1 , очевидно, осуществляет изоморфизм, если рассматривать его как отображение между $\text{Ker } \mathcal{A}$ и $\text{Ker } \mathbb{B}$. При этом J_2 является обратным отображением к J_1 , если его рассмотреть как отображение между $\text{Ker } \mathbb{B}$ и $\text{Ker } \mathcal{A}$. \square

Обозначим символом \mathcal{P}_M множество ограниченных проекторов на подпространство M банахова пространства X .

Лемма 5. *Пусть \mathbb{P} — ограниченный проектор на $\text{Ker } \mathbb{B}$. Тогда его матрица имеет вид*

$$\begin{pmatrix} P & PD_2 & \cdots & PD_{N+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где $D_k \in \text{End } X$, $k = \overline{2, N+1}$ и $P \in \mathcal{P}_{\text{Ker } \mathcal{A}}$. Верно и обратное: если $P \in \mathcal{P}_{\text{Ker } \mathcal{A}}$, то оператор, заданный такой матрицей, является проектором на $\text{Ker } \mathbb{B}$.

Доказательство. Пусть проектор \mathbb{P} задан матрицей $(P_{ij})_{n \times n}$. Покажем сначала, что $P_{ij} = 0$ для любых j и всех $i > 1$.

Пусть $x \in X$, $y^j \in X^{N+1}$, $j = \overline{1, N+1}$ и $y_k^j = \delta_{kj}x$, $k = \overline{1, N+1}$, где δ_{kj} — символ Кронекера. По определению проектора $\mathbb{P}y^j \in \text{Ker } \mathbb{B}$, а значит

$(\mathbb{P}y^j)_i = 0$ для всех $i > 1$.

$$(\mathbb{P}y^j)_i = \sum_{k=0}^N P_{ik}y_k^j = \sum_{k=0}^N P_{ik}\delta_{kj}x = P_{ij}x = 0, \quad j = \overline{1, N+1}, \quad i = \overline{2, N+1}.$$

Значит, в силу произвольности x , $P_{ij} = 0$, $j = \overline{1, N}$, $i = \overline{2, N+1}$.

Покажем, что P_{11} — проектор на $\text{Ker } A$. Проверим идемпотентность.

Пусть $x \in X$. Тогда, поскольку $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$ для всех $j = \overline{1, n}$, то

$$P_{1j}x = (\mathbb{P}y^j)_1 = (\mathbb{P}^2y_j)_1 = \sum_{k=0}^{N+1} P_{1k}(\mathbb{P}y^j)_k = P_{11}(\mathbb{P}y^j)_1 = P_{11}P_{1j}x.$$

Значит $P_{1j} = P_{11}P_{1j}$, $j = \overline{1, N+1}$.

Поскольку $\mathbb{P}y^1 \in \text{Ker } \mathbb{B}$, $P_{11}x = (\mathbb{P}y^1)_1 \in \text{Ker } A$, а значит $\text{Im}(P_{11}) \subset \text{Ker } A$.

Взяв $x \in \text{Ker } A$ (следовательно, $y^1 \in \text{Ker } \mathbb{B}$) получим

$$x = y_1^1 = (\mathcal{P}y^1)_1 = P_{11}x,$$

откуда $\text{Ker } A \subset \text{Im}(P_{11})$. Таким образом, $\text{Im}(P_{11}) = \text{Ker } A$ и $P_{11} \in \mathcal{P}_{\text{Ker } A}$.

Обратное утверждение очевидно. \square

Доказательство теоремы 20. Из лемм 4 и 5 следует, что свойства (1-4) определения 13 для операторов \mathcal{A} и \mathbb{B} выполняются или не выполняются одновременно.

Перейдём к рассмотрению свойств образов операторов \mathcal{A} и \mathbb{B} . Очевидно, что

$$\text{Im } \mathbb{B} = \text{Im } \mathcal{A} \times \underbrace{X \times \dots \times X}_{N \text{ раз}}.$$

Отсюда сразу получаем, что образы этих операторов замкнуты или не замкнуты (плотны или не плотны, совпадают или не совпадают со всем пространством) одновременно (свойства (5), (9-10), (11) определения 13). Ясно,

что свойства (6) и (12) также являются общими для рассматриваемых операторов в силу леммы 4.

Пусть подпространство $\text{Im } \mathcal{A}$ замкнуто. Тогда можно рассматривать факторпространство $X/\text{Im } \mathcal{A}$. Далее, поскольку пространство $X^{N+1}/\text{Im } \mathbb{B}$ и пространство $(X/\text{Im } \mathcal{A}) \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$ канонически изоморфны, свойства (7-8) для операторов \mathcal{A} и \mathbb{B} также выполняются или не выполняются одновременно. \square

Доказательство теоремы 16. Рассмотрим разложение $\tilde{\mathbb{A}} = \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 \mathbb{B} \mathcal{J}_3$. Каждый из операторов в этом разложении обратим. Запишем обратные к ним (проверяется непосредственно):

$$\mathcal{J}_3^{-1} \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A & I & \dots & 0 & 0 \\ A^2 & A & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{N-1} & A^{N-2} & \ddots & I & 0 \\ A^N & A^{N-1} & \dots & A & I \end{pmatrix}; \quad \mathcal{J}_2^{-1} \sim \begin{pmatrix} I & B_1 & B_2 & \dots & B_N \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{B}^{-1} \sim \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I \end{pmatrix}; \quad \mathcal{J}_1^{-1} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\tilde{\mathbb{A}}^{-1} = \mathcal{J}_3^{-1} \mathbb{B}^{-1} \mathcal{J}_2^{-1} \mathcal{J}_1^{-1}$. Перемножая соответствующие матрицы, получим матрицу для оператора $\tilde{\mathbb{A}}^{-1}$, откуда нетрудно получить матрицу для оператора \mathbb{A}^{-1} . \square

Глава 3

Условия фредгольмовости разностных операторов

3.1. Основные результаты

В этом параграфе получены необходимые и достаточные условия фредгольмовости разностного оператора вида (2.1.2), т.е. оператора

$$\begin{aligned}\mathcal{A}: l^p &\rightarrow l^p, \\ (\mathcal{A}x)(k) &= x(k+N) + C_1(k)x(k+N-1) + \dots + C_N(k)x(k), \\ k \in \mathbb{Z}, \quad x &\in l^p = l^p(\mathbb{Z}, Y), \quad p \in [1, \infty].\end{aligned}$$

Условия получены на основе сопоставления разностному оператору \mathcal{A} порядка N разностного оператора первого порядка $\mathbb{A}: l^p(\mathbb{Z}, Y^N) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}, Y^N)$, определенного формулой (2.1.3), где $\mathcal{C}_0(k)$ — тождественный оператор в Y^N при любом $k \in \mathbb{Z}$. Эти условия описываются с использованием понятия экспоненциальной дихотомии дискретного семейства эволюционных операторов, которое строится по операторной функции $\mathcal{C}_1: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } Y^N$.

Рассмотрим разностный оператор первого порядка \mathbb{D} из $\text{End } l^p(\mathbb{Z}, X)$ определенный формулой

$$(\mathbb{D}x)(n) = x(n) - U(n)x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, x \in l^p(\mathbb{Z}, X),$$

где $U \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$, а X — комплексное банахово пространство.

По функции U построим дискретное семейство эволюционных операторов

$$\mathcal{U}: \Delta = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m \leq n\} \rightarrow \text{End } X,$$

определенное равенствами

$$\mathcal{U}(n, m) = \begin{cases} U(n)U(n-1)\dots U(m+1), & m < n, \\ I, & m = n, \end{cases}$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$.

Определение 15. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов \mathcal{U} допускает *экспоненциальную дихотомию* на множестве $\mathbb{J} \subset \mathbb{Z}$, если существуют ограниченная проекторнозначная функция $P: \mathbb{J} \rightarrow \text{End } X$ и постоянные $M_0 \geq 1$, $\gamma > 0$ такие, что выполнены следующие условия

1. $\mathcal{U}(n, m)P(m) = P(n)\mathcal{U}(n, m)$, для всех $m \leq n$, $m, n \in \mathbb{J}$;
2. $\|\mathcal{U}(n, m)P(m)\| \leq M_0 \exp(-\gamma(n - m))$, для всех $m \leq n$, $m, n \in \mathbb{J}$;
3. для $m < n$, $m, n \in \mathbb{J}$, сужение $\mathcal{U}_{n,m}: X'(m) \rightarrow X'(n)$ оператора $\mathcal{U}(n, m)$ на область значений $X'(m) = \text{Im } Q(m)$ дополнительного проектора $Q(m) = I - P(m)$ есть изоморфизм подпространств $X'(m)$ и $X'(n) = \text{Im } Q(n)$. Тогда полагаем оператор $\mathcal{U}(m, n)$ равным оператору $\mathcal{U}_{n,m}^{-1}$ на $X'(n)$ и равным нулевому оператору на $X(n) = \text{Im } P(n) \subset X$.
4. $\|\mathcal{U}(m, n)\| \leq M_0 \exp(\gamma(m - n))$ для всех $m \leq n$ из \mathbb{J} .

Пару проекторнозначных функций $P, Q: \mathbb{J} \rightarrow \text{End } X$, участвующих в определении 15, назовём *расщепляющей парой* для семейства \mathcal{U} . Если $P = 0$ или $Q = 0$, то будем говорить, что для \mathcal{U} имеет место *тривиальная экспоненциальная дихотомия* на \mathbb{J} .

Теорема 21 ([14], [24]). Для того чтобы оператор $\mathbb{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, X)$, определяемый функцией $U \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$, был обратим, необходимо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов \mathcal{U} допускало экспоненциальную дихотомию на \mathbb{Z} . Если оператор \mathbb{D} обратим, то обратный к нему

определяется формулой

$$(\mathbb{D}^{-1}y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n, m)y(m), \quad n \in \mathbb{Z}, y \in l^p(\mathbb{Z}, X),$$

где функция Грина $G: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{End } X$ имеет вид

$$G(n, m) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, m)P(m), & m \leq n, \\ -\mathcal{U}(n, m)Q(m), & m > n, \end{cases}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Этот результат для случая $p = \infty$ имеется в монографии Д. Хенри [6] (в статье [14] была устранена неточность в доказательстве аналога теоремы 21 из этой монографии).

Далее используется

Предположение 1. Существуют числа $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$, такие, что семейство эволюционных операторов \mathcal{U} (построенное по функции $U: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } X$) допускает экспоненциальную дихотомию на множествах $\mathbb{Z}_{-,a} = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq a\}$, $\mathbb{Z}_{b,+} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq b\}$ с расщепляющими парами проекторнозначных функций

$$P_-, Q_-: \mathbb{Z}_{-,a} \rightarrow \text{End } X,$$

$$P_+, Q_+: \mathbb{Z}_{b,+} \rightarrow \text{End } X.$$

Определим оператор $\mathcal{N}_{b,a}: \text{Im } Q_-(a) \rightarrow \text{Im } Q_+(b)$, равенством

$$\mathcal{N}_{b,a}x = Q_+(b)\mathcal{U}(b, a)x, \quad x \in \text{Im } Q_-(a).$$

Этот оператор введён в рассмотрение в статьях [15], [16] и назван «узловым». Важность его обусловлена тем, что он действует между подпространствами «фазового» пространства X , а не в $l^p(\mathbb{Z}, X)$.

Имеет место следующая теорема ([15], [16]).

Теорема 22. Пусть для семейства эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta \rightarrow \rightarrow \text{End } X$, построенным по функции $U: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } X$ выполнены условия предположения 1.

Тогда имеет место равенство

$$\text{St}_{\text{inv}} \mathbb{D} = \text{St}_{\text{inv}} \mathcal{N}_{b,a}.$$

В частности, для фредгольмовости разностного оператора \mathbb{D} , необходимо и достаточно, чтобы узловой оператор $\mathcal{N}_{b,a}: \text{Im } Q_-(a) \rightarrow \text{Im } Q_+(b)$ являлся фредгольмовым оператором. При условии фредгольмовости узлового оператора имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } \mathbb{D} &= \dim \text{Ker } \mathcal{N}_{b,a}, & \text{codim Im } \mathbb{D} &= \text{codim Im } \mathcal{N}_{b,a}, \\ \text{ind } \mathbb{D} &= \text{ind } \mathcal{N}_{b,a}. \end{aligned}$$

Рассмотрим разностный оператор (см. формулу (2.1.4))

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \mathbb{S}^{-1} \mathbb{A} = \mathbb{S}^{-1} (\mathbb{S} + \mathbb{A}_1) \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, Y^N) \\ (\mathbb{D}x)(n) &= x(n) + \mathcal{C}_1(n)x(n-1), \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, Y^N). \end{aligned}$$

Заметим, что его состояния обратимости совпадают с состояниями обратимости оператора \mathcal{A} .

Определение 16. Семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}_1: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{End } Y^N$, построенное по функции $-\mathcal{C}_1: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } Y^N$, назовем семейством эволюционных операторов для однородного разностного уравнения

$$x(k+N) + C_1(k)x(k+N-1) + \dots + C_N(k)x(k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, Y). \quad (3.1.1)$$

Из теорем 21 и 22 получаем следующие утверждения.

Теорема 23. *Для того чтобы разностный оператор $\mathcal{A} \in \text{End } l^p$, $p \in [1, \infty]$, определенный формулой (2.1.2), был обратим, необходимо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов \mathcal{U}_1 , построенное для разностного уравнения (3.1.1), допускало экспоненциальную дихотомию на \mathbb{Z} .*

Теорема 24. *Пусть для семейства $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1: \Delta \rightarrow \text{End } Y^N$, построенного для разностного уравнения (3.1.1), выполнены условия предположения 1.*

Тогда имеет место равенство

$$\text{St}_{\text{inv}} \mathcal{A} = \text{St}_{\text{inv}} \mathcal{N}_{b,a}.$$

В частности, для фредгольмовости разностного оператора $\mathcal{A} \in \text{End } l^p$ необходимо и достаточно, чтобы узловой оператор $\mathcal{N}_{b,a}$ являлся фредгольмовым оператором. При условии фредгольмовости узлового оператора имеют место равенства:

$$\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \dim \text{Ker } \mathcal{N}_{b,a}, \quad \text{codim Im } \mathcal{A} = \text{codim Im } \mathcal{N}_{b,a},$$

$$\text{ind } \mathcal{A} = \text{ind } \mathcal{N}_{b,a}.$$

Отметим, что в условиях теоремы 24 узловой оператор $\mathcal{N}_{b,a}$ действует между подпространствами банахова пространства Y^N .

Следствие. *Если оператор \mathcal{A} фредгольмов в одном из пространств l^p , $p \in [1, \infty]$, то он фредгольмов и в остальных, и его индекс не зависит от значения p .*

В условиях следующей теоремы будем использовать следующее

Предположение 2. Существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} C_i(n) = C_i^\pm \in \text{End } X, \quad i = \overline{1, N}.$$

Под спектром операторного пучка

$$L^\pm(\lambda) = \lambda^N + C_1^\pm \lambda^{N-1} + \dots + C_N^\pm, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

будем понимать множество таких комплексных чисел λ , что $L^\pm(\lambda)$ — необратимый в $\text{End } Y$ оператор.

Теорема 25. *В условиях предположения 2 разностный оператор \mathcal{A} обратим, если спектральные радиусы $r(L^\pm) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(L^\pm)\}$ операторных пучков L^\pm меньше единицы.*

Доказательство. Непосредственно из теоремы 15 получаем, что спектры $\sigma(\mathcal{C}_1^\pm)$ операторов $\mathcal{C}_1^\pm \in \text{End } Y^N$, заданных матрицами

$$\mathcal{C}_1^\pm \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N^\pm & C_{N-1}^\pm & C_{N-2}^\pm & \cdots & C_2^\pm & C_1^\pm \end{pmatrix},$$

совпадают со спектрами $\sigma(L^\pm)$ операторных пучков L^\pm , поэтому $r(\mathcal{C}_1^\pm) = r(L^\pm) < 1$. Операторы \mathcal{C}_1^\pm являются пределами последовательности $\mathcal{C}_1(n)$ в равномерной операторной топологии. Тогда из [15, теорема 3] следует, что оператор \mathbb{D} обратим, следовательно обратим и оператор \mathcal{A} . \square

Пусть теперь оператор $\mathcal{A} \in \text{End } l^p$ имеет вид:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}x)(k) &= C_0x(k+N) + C_1x(k+N-1) + \dots + C_Nx(k), \\ k &\in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p = l^p(\mathbb{Z}, Y), \quad p \in [1, \infty], \end{aligned}$$

то есть $C_i(k) \equiv C_i \in Y^N$, $i = \overline{0, N}$ — постоянные функции. В этом случае

разностный оператор \mathbb{A} задан выражением

$$(\mathbb{A}y)(k) = \mathcal{C}_0 y(k+1) + \mathcal{C}_1 y(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y \in l^p(\mathbb{Z}; Y^N),$$

где

$$\mathcal{C}_0 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_1 \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение операторнозначную функцию $H: \mathbb{T} \rightarrow \text{End } X$:

$$H(\gamma) = \gamma^N C_0 + \gamma^{N-1} C_1 + \dots + C_N, \quad \gamma \in \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Эту функцию назовём *характеристической функцией* оператора \mathcal{A} . Множество $\rho(H)$, состоящее из таких $\gamma \in \mathbb{T}$, что оператор $H(\gamma)$ обратим, назовём *резольвентным множеством* функции H , а дополнение к нему, $s(H) = \mathbb{T} \setminus \rho(H)$ — *сингулярным множеством* этой функции.

Теорема 26. *Разностный оператор \mathcal{A} с постоянными коэффициентами C_i , $i = \overline{0, N}$, обратим тогда и только тогда, когда сингулярное множество $s(H)$ его характеристической функции пусто. Если $s(H) = \emptyset$, то обратный оператор $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } l^p$ представим в виде*

$$(\mathcal{A}^{-1}x)(k) = (G * x)(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} G(k-n)x(n), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p. \quad (3.1.2)$$

Функция G принадлежит банаховой алгебре $l^1(\mathbb{Z}, \text{End } Y)$ (со свёрткой функ-

ций в качестве умножения) и допускает представление вида

$$G(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (H(\gamma))^{-1} \gamma^n d\gamma, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Разностный оператор первого порядка \mathbb{A} с постоянными коэффициентами обратим тогда и только тогда, когда сингулярное множество его характеристической функции $\mathcal{H}(\gamma) = \gamma\mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1$ пусто (иначе говоря, спектр линейного операторного пучка не содержит точек единичной окружности) [27, теорема 3]. Запишем матрицу оператора $\mathcal{H}(\gamma)$:

$$\mathcal{H}(\gamma) \sim \begin{pmatrix} \gamma I & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma I & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma I & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & \gamma C_0 + C_1 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 15 следует, что состояния обратимости операторов $\mathcal{H}(\gamma)$ и $H(\gamma)$ совпадают. Значит $s(H) = s(\mathcal{H})$. Отсюда получаем первое утверждение теоремы.

Заметим, что $G(n)$ представляют собой коэффициенты Фурье функции $(H(\gamma))^{-1}$, которая является голоморфной в окрестности единичной окружности как резольвента полиномиального операторного пучка. Следовательно, её ряд Фурье сходится абсолютно, откуда и следует, что $G \in l^1(\mathbb{Z}, \text{End } Y)$. Благодаря этому, оператор \mathcal{A}^{-1} , задаваемый формулой (3.1.2), определен корректно. Непосредственная проверка показывает, что этот оператор является обратным к оператору \mathcal{A} . \square

Предположение 3. Все решения однородного разностного уравнения

$$x(k + N) + C_1 x(k + N - 1) + \dots + C_N x(k) = 0, \quad (3.1.3)$$

рассматриваемого на \mathbb{Z}_+ ограничены.

В условиях предположения 3 любое решение $x \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, Y)$ однородного уравнения удовлетворяет равенствам

$$\begin{pmatrix} x(n) \\ x(n+1) \\ \vdots \\ x(n+N-2) \\ x(n+N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ -C_N & -C_{N-1} & \cdots & -C_2 & -C_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{pmatrix}.$$

Тогда из ограниченности всех решений однородного уравнения и теоремы БанахаШтейнгауза следует, что

$$\sup_{n \geq 0} \|\mathcal{C}_1^n\| = M(\mathcal{C}_1) < \infty.$$

Следовательно, спектральный радиус оператора \mathcal{C}_1 не превосходит единицы, т.е.

$$\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 1\}.$$

Теперь можно применить результат из [17, теорема 1]:

Теорема 27. Пусть выполнены условия предположения 3 и

$$\sigma(\mathcal{C}_1) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}.$$

Тогда существуют операторнозначные функции $A_k \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, \text{End } Y^N)$, $k = \overline{1, m}$, такие что для любого решения $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow Y$ уравнения 3.1.3 имеют место следующие представления

$$(x(n), x(n+1), \dots, x(n+N-1)) = \left(\sum_{k=1}^m \gamma_k^n A_k(n) \right) (x(0), x(1), \dots, x(N-1)),$$

$$n \in \mathbb{Z}_+.$$

Функции A_k , $k = \overline{1, m}$ обладают следующими свойствами:

1. операторы $A_k(n) \in \text{End } Y^N$, $n \in \mathbb{Z}_+$ принадлежат наименьшей замкнутой подалгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_1}$ из $\text{End } Y^N$, содержащей оператор \mathcal{C}_1 ;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_k(n+1) - A_k(n)\| = 0$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{C}_1 A_k(n) - \gamma_k A_k(n)\| = 0$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_k(n) A_j(n)\| = 0$ для $k \neq j$, $k, j = \overline{1, m}$.

В заключение отметим, что основные результаты работы (теоремы 1-5) имеют место для разностных операторов, действующих в весовых пространствах последовательностей векторов (см. статьи [18], [19], [20]).

Заключение

Результаты, полученные в данной работе, применяются для исследования разностных операторов высокого порядка. Исследования не являются завершёнными. Остаётся открытым вопрос обобщения результатов на случай операторного полинома, разложенного по степеням замкнутого неограниченного оператора A . Это позволит исследовать аналогичными методами дифференциальные операторы в банаховом пространстве.

Основные результаты работы отправлены на публикацию в журнал «Математические заметки».

Список литературы

1. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход. — 1988.
2. *Antonevich A., Lebedev A.* Functional differential equations: I. C^* -theory, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 70. — Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, England, 1994.
3. *Курбатов В. Г., Садовский Б. Н.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронежского ун-та, 1990.
4. *Kurbatov V. G.* Functional differential operators and equations. Т. 473. — Springer Science & Business Media, 1999.
5. *Массера Х. Л., Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональный анализ. — Мир, 1970.
6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — Мир, 1985.
7. *Megan M., Sasu A. L., Sasu B.* Discrete admissibility and exponential dichotomy for evolution families // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2003. — Т. 9, № 2. — С. 383—398.
8. *Dorogovtsev A. Y.* Periodicity in distribution. I. Discrete systems // Int. Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2002. — Т. 30, № 2. — С. 65—127.
9. *Chicone C., Latushkin Y.* Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations. Т. 70. — American Mathematical Soc., 1999.
10. *Баскаков А. Г.* Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Мат. заметки. — 1992. — Т. 52, № 2. — С. 17—26.

11. *Baskakov A. G., Krishtal I. A.* Memory estimation of inverse operators // Journal of Functional Analysis. — 2014. — Т. 267, № 8. — С. 2551—2605.
12. *Баскаков А. Г.* Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений // Математический сборник. — 2015. — Т. 206, № 8. — С. 23—62.
13. *Баскаков А. Г., Дуплищева А. Ю.* Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2015. — Т. 79, № 2. — С. 3—20.
14. *Баскаков А. Г., Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 6. — С. 1231—1243.
15. *Баскаков А. Г.* Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов // Математические заметки. — 2000. — Т. 67, № 6. — С. 816—827.
16. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи математических наук. — 2013. — Т. 68, 1 (409). — С. 77—128.
17. *Баскаков А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Математические заметки. — 2015. — Т. 97, № 2. — С. 174—190.
18. *Бичегжув М. С.* О спектре разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах // Функциональный анализ и его приложения. — 2010. — Т. 44, № 1. — С. 80—83.

19. *Бичегжуев М. С.* К спектральному анализу разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах // Математический сборник. — 2013. — Т. 204, № 11. — С. 3—20.
20. *Бичегжуев М. С.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах функций // Математические заметки. — 2014. — Т. 95, № 1. — С. 18—25.
21. *Shkaliko A.* Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula // Recent Developments in Operator Theory and its Applications. — Springer, 1996. — С. 358—385.
22. *Гринив Р. О., Шкаликов А. А.* Экспоненциальная устойчивость полугрупп, связанных с некоторыми операторными моделями в механике // Математические заметки. — 2003. — Т. 73, № 5. — С. 657—664.
23. *Данфорд Н., Шварц Д. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — Издательство иностранной литературы, 1966.
24. *Baskakov A., Krishtal I.* Spectral analysis of operators with the two-point Bohr spectrum // Journal of mathematical analysis and applications. — 2005. — Т. 308, № 2. — С. 420—439.
25. *Баскаков А. Г., Чернышов К. И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Математический сборник. — 2002. — Т. 193, № 11. — С. 3—42.
26. *Баскаков А. Г.* Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов // Математические заметки. — 2008. — Т. 84, № 2. — С. 175—192.
27. *Баскаков А. Г.* Об обратимости линейных разностных операторов с постоянными коэффициентами // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2001. — № 5.