МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет прикладной математики, информатики и механики

Кафедра нелинейных колебаний

Спектральный анализ операторных полиномов и разностных операторов высокого порядка

Бакалаврская работа

Направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Профиль Нелинейная динамика

Допущена к защите в ГЭК 7 июня 2016 года

Зав. кафедрой
д. ф.-м. н., профессор ______________________ В. Г. Задорожний

Обучающийся ______________________ В. Д. Харитонов

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор ______________________ А. Г. Баскаков

Воронеж 2016

Оглавление

Введение

О содержании и структуре работы

Из курса дифференциальных и разностных уравнений известен метод приведения уравнения N-ого порядка к системе из N уравнений первого порядка. В данной работе рассматривается обобщение этого метода для исследования операторных полиномов с коэффициентами из банахова пространства. Исследование спектральных свойств операторных полиномов сводится к изучению спектральных свойств оператора, заданного операторной матрицей. Полученные результаты (теоремы 15–17) применяются к разностным операторам высокого порядка. Получены условия их обратимости, фредгольмовости (теоремы 18, 24 и 26), асимптотическое представление ограниченных решений однородного разностного уравнения (теорема 27).

Работа состоит из введения, трёх глав и заключения.

Во введении дается общая характеристика работы.

В первой главе приводятся основные определения и понятия, используемые в работе.

Во второй главе формулируются основные результаты работы и приводятся их доказательства.

В третьей главе основные результаты используются для исследования условий обратимости и фредгольмовости разностных операторов.

В заключении описаны возможные направления дальнейших исследований на данную тему.

История исследований

Приводимая в работе конструкция перехода от изучения исходного операторного полинома $\mathscr{A} = C_0A^N + C_1A^{N-1} + \ldots + C_N \in \operatorname{End} X$ к изучению матричного оператора $\mathbb{A} \in \operatorname{End} X^N$, является непосредственным обобщением известного из курсов дифференциальных и разностных уравнений приёма сведения дифференциального или разностного уравнения N-ого порядка к системе из N дифференциальных (разностных) уравнений. Для более специальных классов операторных полиномов аналог теоремы 16 получен в монографиях А. Б. Антоневича [1, теорема 9.1], [2].

Теория разностных операторов первого порядка развивалась в работах [1—20].

Понятие состояний обратимости используется, в частности, в статье [16].

В отличие от статьи [13], где изучались разностные операторы второго порядка, оператор C_0 из представления операторного полинома $\mathscr{A}$ может быть необратимым оператором. Случай необратимого оператора при старшей степени оператора A позволяет получать аналоги теорем 15–17 для случая операторного полинома $\mathscr{A}$, где оператор A — замкнутый оператор с непустым резольвентным множеством (в частности, дифференциальный оператор). Следует отметить, что такой прием не применим к дифференциальным операторам второго порядка, рассматриваемых в статьях [21; 22]. В данной работе предложен иной (более простой) способ доказательства основных результатов статьи [13]. Он состоит в сопоставлении операторному полиному порядка N оператора $\widetilde{\mathbb{A}}$, заданного операторной матрицей порядка $N+1$, который имеет то же множество состояний обратимости.

Глава 1

Основные понятия и определения

Пусть X и Y — нормированные (векторные) пространства над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Определение 1. Отображение $A\colon X \to Y$ из векторного пространства X в векторное пространство Y называется *линейным оператором*, если

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Если $Y = \mathbb{K}$, то вместо слова «оператор» говорят «функционал».

Определение 2. Оператор $A\colon X \to Y$ между нормированными пространствами называется *ограниченным*, если величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$$

конечна. Эта величина, в таком случае, называется нормой оператора A.

Можно показать, что все следующие определения нормы совпадают с данным выше:

1. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| < 1} \|Ax\|$
2. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| = 1} \|Ax\|$
3. $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$;
4. $\|A\| = \inf \{C \geqslant 0 : \forall x \in X \ \ \|Ax\| \leqslant C \|x\|\}$

Нетрудно видеть, что $\|Ax\| \leqslant \|A\| \, \|x\|$ для всех $x \in X$.

Множество всех линейных ограниченных операторов между нормированными пространствами X и Y будем обозначать $\mathrm{Hom}(X, Y)$. Если $X = Y$, то, для краткости будем обозначать $\mathrm{End}\, X := \mathrm{Hom}(X, X)$.

Теорема 1. $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — *нормированное пространство.*

Определение 3. Нормированное векторное пространство X называется *банаховым пространством*, если оно полно как метрическое пространство с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Определение 4. Алгебру $\mathscr{B}$ называют *банаховой алгеброй*, если она как линейное пространство является банаховым пространством, причем для всех $a, b \in \mathscr{B}$

$$\|ab\| \leqslant \|a\| \, \|b\| \, .$$

Если $\mathscr{B}$ при этом является алгеброй с единицей e, то требуют также, чтобы выполнялось свойство

$$\|e\| = 1.$$

Теорема 2. *Если* Y *— банахово пространство, то* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *— банахово пространство.*

Следствие. *Если* X *— банахово пространство, то* $\mathrm{End}\, X$ *— банахова алгебра с единицей.*

Теорема 3. *Пусть* A *— линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. A *— непрерывное отображение;*
2. A *— непрерывное в точке* 0 *отображение;*
3. A *— ограниченный оператор;*
4. A *— липшицево отображение.*

Доказательство. Импликации $1 \Rightarrow 2$, и $4 \Rightarrow 1$ очевидны. Докажем, что $2 \Rightarrow 3$. Непрерывность A означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X : \; \|x\| < \delta \to \|Ax\| < \varepsilon.$$

Зафиксируем некоторый $\varepsilon > 0$ и соответствующий ему δ. Тогда для любого $x \in X$, $\|x\| \leqslant 1$, справедливо

$$\|Ax\| = \frac{2}{\delta} \left\| A\left(\frac{\delta}{2}x\right) \right\| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Переходя в неравенстве к верхней грани, получаем, что

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta},$$

что и означает ограниченность оператора A.

Импликация $3 \Rightarrow 4$ проверяется непосредственно: если A — ограниченный оператор, $x_1, x_2 \in X$, то

$$\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leqslant \|A\| \, \|x_1 - x_2\| \, .$$

$\square$

Определение 5. Множество из метрического пространства называется *множеством I категории («тощим», разреженным)*, если его можно представить в виде счетного объединения замкнутых множеств, каждое из которых не содержит шара.

Определение 6. Множество, не являющееся множеством I категории, называется *множеством II категории («тучным»)*.

Теорема 4 (Бэра)**.** *Каждое полное метрическое пространство является множеством II категории.*

Пусть X и Y — банаховы пространства и Ω — множество индексов, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ — семейство ограниченных операторов.

Будем называть семейство операторов *ограниченным поточечно*, если для каждого $x \in X$ существует такая константа $M(x) > 0$, что

$$\|A_\alpha x\| \leqslant M(x)$$

для всех $\alpha \in \Omega$, то есть для каждого $x \in X$ множество

$$\{A_\alpha x : \alpha \in \Omega\} \subset Y$$

ограничено в Y.

Семейство операторов назовём *ограниченным равномерно*, если существует такое число $C > 0$, что для всех $\alpha \in \Omega$ выполнено неравенство

$$\|A_\alpha\| < C,$$

то есть числовое множество

$$\{\|A_\alpha\| : \alpha \in \Omega\}$$

ограничено.

Теорема 5 (Банаха-Штейнгауза)**.** *Если семейство ограниченных операторов $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$, действующих из банахова пространства X в нормированное пространство Y, ограничено поточечно, то оно ограничено и равномерно.*

Доказательство. Рассмотрим множества вида

$$X_n = \{x \in X : \forall\alpha \in \Omega \ \ \|A_\alpha x\| \leqslant n\}.$$

В силу поточечной ограниченности семейства, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.

Каждое из множеств X_n замкнуто. В самом деле: если $\{x_k\}$ — сходящаяся к $x_0 \in X$ последовательность элементов из X_n, то, в силу непрерывности операторов A_α, $\lim\limits_{k\to\infty} \|A_\alpha x_k\| = \|A_\alpha x_0\|$, а поскольку для всех x_k и всех $\alpha \in \Omega$ выполняется неравенство $\|A_\alpha x_k\| \leqslant n$, то и $\|A_\alpha x_0\| \leqslant n$, а значит $x_0 \in X_n$, что и означает замкнутость X_n.

Поскольку пространство X полно, по теореме Бэра существует такой номер n_0, что X_{n_0} содержит в себе шар, который будем обозначать $B(x', r)$, где r — радиус этого шара, а x' — его центр.

Для всех элементов x из $B(x', r)$ и для всех $\alpha \in \Omega$ справедливо, что

$$\|A_\alpha x\| \leqslant n_0,$$

то есть значения $\|A_\alpha x\|$ ограничены на этом шаре. Покажем, что они ограничены и на единичном шаре, что будет означать ограниченность норм A_α.

Пусть $x \in B(0,1)$. Тогда, как нетрудно проверить, $z = rx + x' \in B(x', r)$. В таком случае для всех $\alpha \in \Omega$

$$\|A_\alpha x\| = \left\| A_\alpha \left(\frac{z - x'}{r} \right) \right\| \leqslant \frac{1}{r}(\|A_\alpha z\| + \|A_\alpha x'\|) \leqslant \frac{2n_0}{r},$$

откуда, взяв верхнюю грань по всем $x \in B(0,1)$, получаем утверждение теоремы. $\square$

Пусть $A\colon D(A) \subset X \to X$ — линейный оператор, определенный на некотором подпространстве $D(A)$ пространства X.

Определение 7. Оператор $A\colon D(A) \subset X \to X$ называется *замкнутым*, если его график

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$$

является замкнутым подмножеством в пространстве $X \times X$, наделённом нор-

мой
$$\|(x_1, x_2)\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}.$$

Иначе говоря, оператор замкнут, если для всякой сходящейся последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$ такой, что $Ax_n \to y \in X$, её предел x лежит в $D(A)$ и $y = Ax$.

Теорема 6. *Всякий ограниченный оператор $A \in \operatorname{End} X$ замкнут.*

Теорема 7 (Банаха о замкнутом графике)**.** *Пусть $A\colon X \to X$ — замкнутый линейный оператор, определенный на всем банаховом пространстве X. Тогда оператор A ограничен.*

Пусть $A \in \operatorname{End} X$. Рассмотрим два условия:

1. $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ — оператор A инъективен.

2. $\operatorname{Im} A = X$ — оператор A сюръективен.

Теорема 8 (Банаха об обратном операторе)**.** *Пусть линейный оператор $A \in \operatorname{End} X$, действующий в банаховом пространстве X, биективен, т.е. выполнены условия (1) и (2). Тогда A^{-1} ограничен.*

Если $A\colon D(A) \subset X \to X$ определен не на всем пространстве, то для него также можно рассматривать условия (1, 2). Тогда будем называть обратным к оператору A оператор $A^{-1}\colon X \to X$, который удовлетворяет естественным условиям
$$AA^{-1} = I_X$$
и
$$A^{-1}Ax = x$$
для всех $x \in D(A)$. Обратим внимание, что мы считаем A^{-1} действующим из X *во всё пространство* X, а не в $D(A)$.

Теорема 9 (Банаха об обратном операторе)**.**

Пусть $A\colon D(A)\subset X\to X$ *— замкнутый биективный линейный оператор, определенный на подмножестве* $D(A)$ *банахова пространства* X*. Тогда* $A^{-1}\colon X\to X$ *— ограниченный оператор.*

Доказательство аналогично предыдущему.

Лемма 1. *Если* $A\in\operatorname{End}X$ *и* $\|A\|<1$*, то оператор* $I-A$ *обратим, а обратный задается формулой*

$$(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n,$$

причем ряд сходится абсолютно и

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\|\leqslant\frac{1}{1-\|A\|}.$$

Доказательство. Покажем, что ряд сходится абсолютно. Используем формулу суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|A^n\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\|A\|^n=\frac{1}{1-\|A\|}.$$

Итак, ряд сходится абсолютно, значит он сходится. Отсюда же следует и оценка нормы. Обозначим сумму ряда через $B\in\operatorname{End}X$. Покажем, что B — обратный к $I-A$.

$$(I-A)B=(I-A)\sum_{n=0}^{\infty}A^n=\lim_{m\to\infty}(I-A)\sum_{n=0}^{m}A^n=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}(A^n-A^{n+1})=\lim_{m\to\infty}(I-A^{m+1})=I,$$

где последнее равенство справедливо в силу условия $\|A\|<1$.

Аналогично доказывается, что $B(I-A)=I$. $\square$

Теорема 10. *Пусть* $A, B \in \operatorname{End} X$, *$A$ обратим,* $\|B\| \left\|A^{-1}\right\| < 1$. *Тогда* $A-B$ *обратим и*

$$(A-B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A^{-1}B)^n A^{-1},$$

и справедлива оценка

$$\left\|(A-B)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\|B\| \left\|A^{-1}\right\|}.$$

Лемма 2. *Если* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *замкнут, то и* $A - \lambda I$ *замкнут, где* $\lambda \in \mathbb{C}$, *а* $I\colon D(A) \subset X \to X$ *— тождественный оператор.*

Определение 8. Пусть $A\colon D(A) \subset X \to X$ — замкнутый оператор. Будем называть число $\lambda \in \mathbb{C}$ *точкой спектра* оператора A, если оператор $A - \lambda I\colon D(A) \subset X \to X$ необратим, то есть выполнено хотя бы одно из условий

1. $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$ — оператор не инъективен.

2. $\operatorname{Im}(A - \lambda I) \neq X$ — оператор не сюръективен.

Если же число $\lambda \in \mathbb{C}$ не является точкой спектра, то его называют *регулярной точкой* оператора A.

Заметим, что по теореме Банаха об обратном операторе, если число λ — регулярная точка A, то оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ ограничен.

Определение 9. Множество $\sigma(A)$ точек спектра оператора A называется *спектром* оператора A.

Определение 10. Множество $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ регулярных точек оператора A называется *резольвентным множеством* оператора A.

Спектр оператора принято разбивать на три взаимно непересекающиеся части:

1. Дискретный спектр $\sigma_d(A)$ — множество собственных значений оператора A, то есть такие $\lambda \in \mathbb{C}$, что $\operatorname{Ker}(A-\lambda I) \neq \{0\}$.

2. Непрерывный спектр $\sigma_c(A)$ — множество таких $\lambda \in \mathbb{C}$, не являющихся собственными значениями, что $\operatorname{Im}(A-\lambda I) \neq X$, но $\overline{\operatorname{Im}(A-\lambda I)} = X$.

3. Остаточный спектр $\sigma_r(A)$ — множество точек спектра, не вошедших ни в дискретный спектр, ни в непрерывный спектр.

Ясно, что $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$.

Определение 11. Отображение $\mathrm{R}(\bullet, A)\colon\ \rho(A) \to \operatorname{End} X$, действующее по правилу

$$\mathrm{R}(\lambda, A) = (A-\lambda I)^{-1},$$

называется *резольвентой* оператора A.

Теорема 11. *Для всякого замкнутого оператора A множество $\rho(A)$ открыто. Резольвента $\mathrm{R}(\bullet, A)\colon\ \rho(A) \to \operatorname{End} X$ — аналитическая функция на $\rho(A)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$, а $\lambda \in \mathbb{C}$ таково, что

$$|\lambda-\lambda_0| < \frac{1}{\|\mathrm{R}(\lambda_0, A)\|}.$$

Тогда представим оператор $A-\lambda I$ в следующем виде:

$$A-\lambda I = A-\lambda_0 I + \lambda_0 I - \lambda I = (A-\lambda_0 I)(I-(\lambda-\lambda_0)\,\mathrm{R}(\lambda_0, A)).$$

Оператор $I-(\lambda-\lambda_0)\,\mathrm{R}(\lambda_0, A)$ обратим, поскольку (см. лемму 1)

$$\|(\lambda-\lambda_0)\,\mathrm{R}(\lambda_0, A))\| < 1.$$

Так как $A-\lambda_0 I$ также обратим, то и $A-\lambda I$ обратим как произведение обратимых операторов. Отсюда следует, что резольвентное множество открыто:

вместе с каждой точкой λ_0 в $\rho(A)$ входит открытый круг радиусом меньше $\|\mathrm{R}(\lambda_0, A)\|^{-1}$ с центром в точке λ_0.

Оператор, обратный к $(I - (\lambda - \lambda_0)\,\mathrm{R}(\lambda_0, A))$ представляется в виде

$$(I - (\lambda - \lambda_0)\,\mathrm{R}(\lambda_0, A))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n\,\mathrm{R}(\lambda_0, A)^n.$$

Тогда

$$\mathrm{R}(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1} = (I - (\lambda - \lambda_0)\,\mathrm{R}(\lambda_0, A))^{-1}(A - \lambda_0 I)^{-1} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n\,\mathrm{R}(\lambda_0, A)^{n+1}.$$

Таким образом мы получили, что $\mathrm{R}(\lambda, A)$ в некоторой окрестности каждой точки $\lambda_0 \in \rho(A)$ представляется в виде суммы степенного ряда с коэффициентами $c_n = \mathrm{R}(\lambda_0, A)^{n+1}$. Значит, функция $\mathrm{R}(\lambda, A)$ аналитична на $\rho(A)$. $\square$

Следствие. *Для любого замкнутого оператора A множество $\sigma(A)$ замкнуто.*

Теорема 12 (тождество Гильберта)**.** *Для любого замкнутого оператора A и любых чисел $\lambda, \mu \in \rho(A)$ справедливо равенство*

$$\mathrm{R}(\lambda, A) - \mathrm{R}(\mu, A) = (\lambda - \mu)\,\mathrm{R}(\lambda, A)\,\mathrm{R}(\mu, A).$$

Следствие. *Операторы $\mathrm{R}(\lambda, A)$ и $\mathrm{R}(\mu, A)$ перестановочны.*

Теорема 13 (о спектре ограниченного оператора)**.** *Пусть $A \in \operatorname{End} X$ — ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве X. Тогда его спектр $\sigma(A)$ есть непустое компактное множество в $\mathbb{C}$.*

Определение 12. *Спектральным радиусом* линейного ограниченного оператора $A \in \operatorname{End} X$ называется величина

$$r(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \, .$$

Спектральный радиус корректно определен в виду компактности спектра A и его непустоты. Из доказательства теоремы 13 видно, что

$$r(A) \leqslant \|A\| \, ,$$

поскольку, если $|\lambda| > \|A\|$, то оператор $A - \lambda I$ обратим.

Теорема 14 (формула Бёрлинга-Гельфанда)**.** *Пусть* $A \in \operatorname{End} X$*. Тогда для спектрального радиуса оператора* A *справедлива формула*

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Глава 2

О состояниях обратимости операторных полиномов

2.1. Основные результаты

Пусть X, Y — комплексные банаховы пространства, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов (гомоморфизмов), определенных на X со значениями в Y, $\mathrm{End}\, X = \mathrm{Hom}(X,X)$ — банахова алгебра эндоморфизмов пространства X.

Линейный оператор $\mathscr{A} \in \mathrm{End}\, X$, вида

$$\mathscr{A} = C_0 A^N + C_1 A^{N-1} + \ldots + C_N,$$

где $A, C_0, \ldots, C_N \in \mathrm{End}\, X, N \in \mathbb{N}$, назовём *операторным полиномом* (порядка N с операторными коэффициентами C_i, $i = \overline{1,N}$, разложенным по степеням оператора A).

Наряду с оператором $\mathscr{A}$ рассмотрим оператор $\mathbb{A} \in \mathrm{End}\, X^N$, заданный матрицей вида

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_0 A + C_1 \end{pmatrix},$$

т. е. для $x \in X^N$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, вектор $\mathbb{A}x = y = (y_1, \ldots, y_N)$ определяется равенствами:

$$y_k = Ax_k - x_{k+1}, \quad k = \overline{1, N-1},$$
$$y_N = C_0 A x_N + \sum_{k=1}^{N} C_k x_{N-k+1} = C_0 A x_N + \sum_{j=1}^{N} C_{N-j+1} x_j.$$

Оператор $\mathbb{A}$ можно представить в виде

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 \mathbb{S} + \mathbb{A}_1,$$

где операторы $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{S}$, $\mathbb{A}_1 \in \operatorname{End} X^N$ определяются соответственно матрицами

$$\mathbb{A}_0 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S} \sim \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{pmatrix}$$
$$\mathbb{A}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_1 \end{pmatrix}.$$

Определение 13. Пусть $B \in \operatorname{Hom}(X_1, X_2)$ — линейный ограниченный оператор между банаховыми пространствами X_1, X_2. Рассмотрим следующий набор его возможных свойств.

1) $\operatorname{Ker} B = \{x \in X_1 : Bx = 0\} = \{0\}$, т. е. B — инъективный оператор;

2) $1 \leqslant n = \dim \operatorname{Ker} B < \infty$ (ядро конечномерно);

3) $\operatorname{Ker} B$ — бесконечномерное подпространство в X_1;

4) $\operatorname{Ker} B$ — дополняемое подпространство в X_1;

5) $\overline{\operatorname{Im} B} = \operatorname{Im} B$ — образ оператора B замкнут в X_2, что эквивалентно положительности величины (называемой минимальным модулем опера-

тора B)

$$\gamma(B) = \inf_{x \in X_1 \setminus \operatorname{Ker} B} \frac{\|Bx\|}{\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} B)},$$

где $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} B) = \inf\limits_{x_0 \in \operatorname{Ker} B} \|x - x_0\|$ — расстояние от вектора x до подпространства $\operatorname{Ker} B$;

6) оператор B равномерно инъективен (корректен), т. е. $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ и $\gamma(B) > 0$;

7) $\operatorname{Im} B$ — замкнутое подпространство в X_2 конечной коразмерности

$$1 \leqslant \operatorname{codim} \operatorname{Im} B = \dim X_2 / \operatorname{Im} B < \infty;$$

8) $\operatorname{Im} B$ — замкнутое подпространство в X_2 бесконечной коразмерности;

9) $\operatorname{Im} B \neq X_2$, $\overline{\operatorname{Im} B} = X_2$ (образ оператора B плотен в X_2, но не совпадает со всем X_2);

10) $\overline{\operatorname{Im} B} \neq X_2$ (образ B не плотен в X_2);

11) $\operatorname{Im} B = X_2$ (оператор B сюръективен);

12) оператор B обратим (т. е. $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ и $\operatorname{Im} B = X_2$).

Если для оператора B одновременно выполнены все условия из совокупности условий $\sigma = \{i_1, \ldots, i_k\}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant 12$, то будем говорить, что оператор B *находится в состоянии обратимости* σ. Множество всех состояний обратимости оператора B обозначим символом $\operatorname{St}_{\mathrm{inv}} B$.

Определение 14. Если оператор $B \in \operatorname{Hom}(X_1, X_2)$ имеет конечномерное ядро (выполнено одно из условий 1), 2) определения 13) и замкнутый образ конечной коразмерности (одно из условий 7), 11)), то оператор B называется *фредгольмовым.* Если оператор B имеет замкнутый образ и конечно хотя бы одно из чисел $\dim \operatorname{Ker} B$, $\operatorname{codim} \operatorname{Im} B = \dim X_2 / \operatorname{Im} B$, то оператор B называется *полуфредгольмовым.* Число $\operatorname{ind} B = \dim \operatorname{Ker} B - \operatorname{codim} \operatorname{Im} B$ называется *индексом* фредгольмова (полуфредгольмова) оператора B.

Аналогичное определение даётся для замкнутых операторов, а также для линейных отношений. Благодаря введенному понятию состояний обратимости оператора, становится возможна более тонкая и разнообразная, чем общепринятая (см. [23]), классификация спектров линейных операторов.

Одним из основных результатов работы является

Теорема 15. *Множества состояний обратимости операторов* $\mathscr{A} \in \operatorname{End} X$ *и* $\mathbb{A} \in \operatorname{End} X^N$ *совпадают:*

$$\operatorname{St}_{\mathrm{inv}} \mathscr{A} = \operatorname{St}_{\mathrm{inv}} \mathbb{A}.$$

Это равенство (содержащее множество утверждений) означает, что если одно из двенадцати условий определения 13 выполняется для одного из операторов $\mathscr{A}$, $\mathbb{A}$, то оно выполняется и для другого.

Благодаря теореме 15 можно свести исследование связанных с обратимостью свойств оператора $\mathscr{A} \in \operatorname{End} X$ к исследованию соответствующих свойств оператора $\mathbb{A}$, который в важных частных случаях изучен.

Теорема 16. *Пусть оператор* $\mathscr{A}$ *обратим. Тогда обратим и оператор* $\mathbb{A} \in \operatorname{End} X^N$ *и обратный* $\mathbb{A}^{-1}$ *имеет матрицу* $(\mathbb{A}^{-1})_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant N$ *вида:*

$$\begin{aligned}
(\mathbb{A}^{-1})_{ij} &= A^{i-1}D_j - A^{i-j-1}, && i > j,\ j = \overline{1, N-1},\\
(\mathbb{A}^{-1})_{ij} &= A^{i-1}D_j, && i \leqslant j,\ j = \overline{1, N-1},\\
(\mathbb{A}^{-1})_{i,N} &= A^{i-1}\mathscr{A}^{-1}, && i = \overline{1, N},
\end{aligned}$$

$$D_j = \mathscr{A}^{-1} \sum_{k=0}^{N-j} C_k A^{N-k-j}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\mathbb{A}^{-1} \sim \begin{pmatrix}
D_1 & D_2 & \cdots & D_{N-1} & \mathscr{A}^{-1}\\
AD_1 - I & AD_2 & \cdots & AD_{N-1} & A\mathscr{A}^{-1}\\
A^2D_1 - A & A^2D_2 - I & \cdots & A^2D_{N-1} & A^2\mathscr{A}^{-1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
A^{N-1}D_1 - A^{N-2} & A^{N-1}D_2 - A^{N-3} & \cdots & A^{N-1}D_{N-1} - I & A^{N-1}\mathscr{A}^{-1}
\end{pmatrix}.$$

Непосредственно из теоремы 15 следует

Теорема 17. *Оператор $\mathscr{A}$ фредгольмов (полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда фредгольмовым (полуфредгольмовым) является оператор $\mathbb{A}$. При условии фредгольмовости одного из них*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathbb{A}, \quad \dim \operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathbb{A},$$
$$\operatorname{ind} \mathscr{A} = \operatorname{ind} \mathbb{A}.$$

Далее символом $l^p = l^p(\mathbb{Z}; Y)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ обозначим банахово пространство суммируемых со степенью p (ограниченных при $p = \infty$) двусторонних последовательностей векторов из банахова пространства Y. Нормы в этих пространствах определяются равенствами:

$$\|x\| = \|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|^p \right)^{1/p}, \quad x \in l^p,\ p \in [1, \infty),$$
$$\|x\| = \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|, \quad x \in l^\infty.$$

В банаховом пространстве l^p рассмотрим разностное уравнение N-ого порядка:

$$C_0(k)x(k+N) + C_1(k)x(k+N-1) + \ldots + C_N(k)x(k) = f(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p, \tag{2.1.1}$$

где $f \in l^p$, а $C_i \colon \mathbb{Z} \to \operatorname{End} Y$, $i = \overline{0, N}$ — ограниченные операторнозначные функции, т. е. $C_i \in l^\infty(\mathbb{Z}; \operatorname{End} Y)$. Через S обозначим оператор сдвига последовательностей из l^p: $S \in \operatorname{End} l^p$, $(Sx)(k) = x(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in l^p$. Тогда уравнение (2.1.1) можно записать в операторном виде:

$$\mathscr{A} x = f,$$

где разностный оператор $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p$ определяется формулой

$$\mathscr{A} = \widetilde{C_0} S^N + \widetilde{C_1} S^{N-1} + \ldots + \widetilde{C_N}. \tag{2.1.2}$$

Операторы $\widetilde{C_i} \in \operatorname{End} l^p$, $i = \overline{0, N}$ есть операторы умножения на операторную функцию C_i:

$$(\widetilde{C_i} x)(k) = C_i(k) x(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p,\ k = \overline{0, N}.$$

Используя приём, описанный выше для операторных полиномов, построим по оператору $\mathscr{A}$ оператор $\mathbb{A} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}; Y^N)$. При этом учитывается канонический изоморфизм пространств $l^p(\mathbb{Z}; Y)^N$ и $l^p(\mathbb{Z}; Y^N)$.

Оператор $\mathbb{A}$ является разностным оператором первого порядка в пространстве $l^p(\mathbb{Z}; Y^N)$ и задаётся равенством

$$(\mathbb{A} x)(k) = \mathscr{C}_0(k) x(k+1) + \mathscr{C}_1(k) x(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p(\mathbb{Z}; Y^N), \tag{2.1.3}$$

где

$$\mathscr{C}_0(k) \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0(k) \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{C}_1(k) \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N(k) & C_{N-1}(k) & C_{N-2}(k) & \cdots & C_2(k) & C_1(k) \end{pmatrix},$$

$$x(k) = (x_1(k), x_2(k), \cdots, x_N(k)), \quad x_i \in l^p,\ i = \overline{1, N}.$$

Итак, оператор $\mathbb{A}$ записывается в виде

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0\mathbb{S} + \mathbb{A}_1, \tag{2.1.4}$$

где $\mathbb{S} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$ — оператор сдвига в $l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$, $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1 \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$ — операторы умножения на функции $\mathscr{C}_0$ и $\mathscr{C}_1$ соответственно.

Согласно терминологии статьи [24], разностный оператор 2.1.4 является оператором с двухточечным спектром Бора. Поэтому к нему применимы полученные в статье результаты об обратимости, представлении обратных (используя понятие экспоненциальной дихотомии). Имеют место оценки норм обратных операторов.

При получении результатов статьи [24] существенно использовалась (особенно в случае необратимого оператора $\mathbb{A}_0$) спектральная теория линейных отношений ([25; 26]).

Из представлений (2.1.2) и (2.1.4) разностных операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{A}$ и теорем 15–17 следует

Теорема 18. *Имеет место равенство*

$$\operatorname{St}_{\mathrm{inv}} \mathscr{A} = \operatorname{St}_{\mathrm{inv}} \mathbb{A}.$$

В частности, оператор $\mathscr{A}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор $\mathbb{A}$. При условии фредгольмовости одного из них

$$\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathbb{A}, \quad \dim \operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathbb{A},$$
$$\operatorname{ind} \mathscr{A} = \operatorname{ind} \mathbb{A}.$$

Следующее утверждение следует из результатов статей [10; 11].

Теорема 19. *Если разностный оператор $\mathscr{A}$ обратим в одном из банаховых пространств $l^p(\mathbb{Z}; Y)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то он обратим в любом из этих* *пространств. В частности, спектр $\sigma(\mathscr{A})$ оператора $\mathscr{A}$ не зависит от пространства l^p, в котором он определен.*

Оценки, полученные в [12] для решений разностных включений, позволяют получить оценки для функции Грина в представлении оператора $\mathscr{A}^{-1}$. Аналоги теорем 17–19 имеют место для разностных операторов высокого порядка, рассматриваемых в пространствах односторонних последовательностей. Соответствующие результаты для разностных операторов первого порядка получены в статьях [10; 16].

В §3 данной работы получено (теорема 24) необходимое и достаточное условие фредгольмовости разностного оператора $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}; Y)$, $p \in \in [1, \infty]$ с $C_0(k) = I$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Для разностного оператора с постоянными операторными коэффициентами $\widetilde{C_k} \in \operatorname{End} Y$, $0 \leqslant k \leqslant N$, приведена формула обратного. В теореме 27 получено асимптотическое представление ограниченных решений однородного разностного уравнения.

2.2. Доказательства основных результатов

Пусть задан операторный полином $\mathscr{A} \in \operatorname{End} X$, разложенный по степеням оператора A:

$$\mathscr{A} = C_0 A^N + C_1 A^{N-1} + \ldots + C_N,$$

где $A, C_0, \ldots, C_N \in \operatorname{End} X, N \in \mathbb{N}$, и соответствующий ему оператор $\mathbb{A} \in \in \operatorname{End} X^N$:

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_0 A + C_1 \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение оператор $\widetilde{\mathbb{A}}$ из алгебры $\operatorname{End} X^{N+1}$.

$$\widetilde{\mathbb{A}} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_1 & C_0 A \end{pmatrix}.$$

При доказательстве теорем 15 и 16 вначале соответствующие утверждения устанавливаются для операторов $\mathscr{A}$ и $\widetilde{\mathbb{A}}$, а затем, используя представление оператора $\mathscr{A}$ в виде

$$\mathscr{A} = (C_0 A + C_1)A^{N-1} + C_2 A^{N-2} + \ldots + C_N,$$

соответствующие результаты устанавливаются для операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{A}$. Таким образом вычисляется матрица оператора $\mathbb{A}^{-1} \in \operatorname{End} X^N$.

Зададим операторы $\mathbb{B}$, $\mathscr{J}_1$, $\mathscr{J}_2$, $\mathscr{J}_3 \in \operatorname{End} X^{N+1}$ матрицами

$$\mathbb{B} \sim \begin{pmatrix} \mathscr{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{J}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{B}x)_1 = \mathscr{A} x_1 = \sum_{k=0}^{N} C_k A^{N-k} x_1, \qquad (\mathscr{J}_1 x)_k = x_{k+1}, \quad k = \overline{1, N},$$

$$(\mathbb{B}x)_k = -x_k, \quad k = \overline{2, N+1}; \qquad (\mathscr{J}_1 x)_{N+1} = x_1;$$

$$B_i = \sum_{k=0}^{N-i} C_k A^{N-k-i}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\mathscr{J}_2 \sim \begin{pmatrix} I & -B_1 & -B_2 & \cdots & -B_N \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}, \quad \mathscr{J}_3 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -A & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -A & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -A & I \end{pmatrix},$$

$$(\mathscr{J}_2 x)_1 = x_1 - \sum_{i=1}^{N} B_i x_{i+1}, \qquad (\mathscr{J}_3 x)_1 = x_1,$$

$$(\mathscr{J}_2 x)_k = x_k, \quad k = \overline{2, N+1}; \qquad (\mathscr{J}_3 x)_k = x_k - A x_{k-1}, \quad k = \overline{2, N+1}.$$

Лемма 3. *Состояния обратимости операторов $\widetilde{\mathbb{A}}$ и $\mathbb{B}$ совпадают.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что

$$\widetilde{\mathbb{A}} = \mathscr{J}_1 \mathscr{J}_2 \mathbb{B} \mathscr{J}_3,$$

причем ясно, что $\mathscr{J}_i$, $i = \overline{1, 3}$ — обратимые операторы ($\mathscr{J}_1$ — оператор перестановки, $\mathscr{J}_2$ и $\mathscr{J}_3$ имеют верхнетреугольную и нижнетреугольную матрицы соответственно с обратимыми операторами на главной диагонали). □

Таким образом, доказательство теоремы 15 сводится к доказательству следующей теоремы.

Теорема 20. *Состояния обратимости операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{B}$ совпадают.*

Введем операторы $J_1 \in \mathrm{Hom}(X, X^{N+1})$, $J_2 \in \mathrm{Hom}(X^{N+1}, X)$, действующие по правилам

$$(J_1 x)_1 = x,$$

$$(J_1 x)_k = 0, \quad k = \overline{2, N+1};$$

$$J_2 x = x_1, \quad x \in X^{N+1}.$$

Лемма 4. *Ядра операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{B}$ изоморфны. При этом*

$$J_1(\operatorname{Ker}\mathscr{A}) = \operatorname{Ker}\mathbb{B};$$
$$J_2(\operatorname{Ker}\mathbb{B}) = \operatorname{Ker}\mathscr{A}.$$

Заметим, что $\operatorname{Ker}\mathbb{B} = \operatorname{Ker}\mathscr{A} \times \{0\}^N$.

Доказательство. Отображение J_1, очевидно, осуществляет изоморфизм, если рассматривать его как отображение между $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ и $\operatorname{Ker}\mathbb{B}$. При этом J_2 является обратным отображением к J_1, если его рассмотреть как отображение между $\operatorname{Ker}\mathbb{B}$ и $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$. □

Обозначим символом $\mathscr{P}_M$ множество ограниченных проекторов на подпространство M банахова пространства X.

Лемма 5. *Пусть $\mathbb{P}$ — ограниченный проектор на* $\operatorname{Ker}\mathbb{B}$. *Тогда его матрица имеет вид*

$$\begin{pmatrix} P & PD_2 & \cdots & PD_{N+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где $D_k \in \operatorname{End} X$, $k = \overline{2, N+1}$ и $P \in \mathscr{P}_{\operatorname{Ker}\mathscr{A}}$. Верно и обратное: если $P \in \mathscr{P}_{\operatorname{Ker}\mathscr{A}}$, то оператор, заданный такой матрицей, является проектором на $\operatorname{Ker}\mathbb{B}$.

Доказательство. Пусть проектор $\mathbb{P}$ задан матрицей $(P_{ij})_{n\times n}$. Покажем сначала, что $P_{ij} = 0$ для любых j и всех $i > 1$.

Пусть $x \in X$, $y^j \in X^{N+1}$, $j = \overline{1, N+1}$ и $y^j_k = \delta_{kj}x$, $k = \overline{1, N+1}$, где δ_{kj} — символ Кронекера. По определению проектора $\mathbb{P}y^j \in \operatorname{Ker}\mathbb{B}$, а значит

$(\mathbb{P}y^j)_i = 0$ для всех $i > 1$.

$$(\mathbb{P}y^j)_i = \sum_{k=0}^{N} P_{ik} y_k^j = \sum_{k=0}^{N} P_{ik}\delta_{kj} x = P_{ij}x = 0, \quad j = \overline{1, N+1},\ i = \overline{2, N+1}.$$

Значит, в силу произвольности x, $P_{ij} = 0$, $j = \overline{1, N}$, $i = \overline{2, N+1}$.

Покажем, что P_{11} — проектор на $\operatorname{Ker} A$. Проверим идемпотентность. Пусть $x \in X$. Тогда, поскольку $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$ для всех $j = \overline{1, n}$, то

$$P_{1j}x = (\mathbb{P}y^j)_1 = (\mathbb{P}^2 y_j)_1 = \sum_{k=0}^{N+1} P_{1k}(\mathbb{P}y^j)_k = P_{11}(\mathbb{P}y^j)_1 = P_{11}P_{1j}x.$$

Значит $P_{1j} = P_{11}P_{1j}$, $j = \overline{1, N+1}$.

Поскольку $\mathbb{P}y^1 \in \operatorname{Ker}\mathbb{B}$, $P_{11}x = (\mathbb{P}y^1)_1 \in \operatorname{Ker} A$, а значит $\operatorname{Im}(P_{11}) \subset \operatorname{Ker} A$.

Взяв $x \in \operatorname{Ker} A$ (следовательно, $y^1 \in \operatorname{Ker}\mathbb{B}$) получим

$$x = y_1^1 = (\mathscr{P}y^1)_1 = P_{11}x,$$

откуда $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Im}(P_{11})$. Таким образом, $\operatorname{Im}(P_{11}) = \operatorname{Ker} A$ и $P_{11} \in \mathscr{P}_{\operatorname{Ker} A}$.

Обратное утверждение очевидно. $\square$

Доказательство теоремы 20. Из лемм 4 и 5 следует, что свойства (1-4) определения 13 для операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{B}$ выполняются или не выполняются одновременно.

Перейдём к рассмотрению свойств образов операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{B}$. Очевидно, что

$$\operatorname{Im}\mathbb{B} = \operatorname{Im}\mathscr{A} \times \underbrace{X \times \ldots \times X}_{N \text{ раз}}.$$

Отсюда сразу получаем, что образы этих операторов замкнуты или не замкнуты (плотны или не плотны, совпадают или не совпадают со всем пространством) одновременно (свойства (5), (9-10), (11) определения 13). Ясно, что свойства (6) и (12) также являются общими для рассматриваемых операторов в силу леммы 4.

Пусть подпространство $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ замкнуто. Тогда можно рассматривать факторпространство $X/\operatorname{Im}\mathscr{A}$. Далее, поскольку пространство $X^{N+1}/\operatorname{Im}\mathbb{B}$ и пространство $(X/\operatorname{Im}\mathscr{A})\times\{0\}\times\ldots\times\{0\}$ канонически изоморфны, свойства (7-8) для операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{B}$ также выполняются или не выполняются одновременно. $\square$

Доказательство теоремы 16. Рассмотрим разложение $\widetilde{\mathbb{A}} = \mathscr{J}_1\mathscr{J}_2\mathbb{B}\mathscr{J}_3$. Каждый из операторов в этом разложении обратим. Запишем обратные к ним (проверяется непосредственно):

$$\mathscr{J}_3^{-1} \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A & I & \cdots & 0 & 0 \\ A^2 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{N-1} & A^{N-2} & \ddots & I & 0 \\ A^N & A^{N-1} & \cdots & A & I \end{pmatrix}; \quad \mathscr{J}_2^{-1} \sim \begin{pmatrix} I & B_1 & B_2 & \cdots & B_N \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{B}^{-1} \sim \begin{pmatrix} \mathscr{A}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I \end{pmatrix}; \qquad \mathscr{J}_1^{-1} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\widetilde{\mathbb{A}}^{-1} = \mathscr{J}_3^{-1}\mathbb{B}^{-1}\mathscr{J}_2^{-1}\mathscr{J}_1^{-1}$. Перемножая соответствующие матрицы, получим матрицу для оператора $\widetilde{\mathbb{A}}^{-1}$, откуда нетрудно получить матрицу для оператора $\mathbb{A}^{-1}$. $\square$

Глава 3

Условия фредгольмовости разностных операторов

3.1. Основные результаты

В этом параграфе получены необходимые и достаточные условия фредгольмовости разностного оператора вида (2.1.2), т.е. оператора

$$\mathscr{A} : l^p \to l^p,$$
$$(\mathscr{A}x)(k) = x(k+N) + C_1(k)x(k+N-1) + \ldots + C_N(k)x(k),$$
$$k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p = l^p(\mathbb{Z}, Y),\ p \in [1, \infty].$$

Условия получены на основе сопоставления разностному оператору $\mathscr{A}$ порядка N разностного оператора первого порядка $\mathbb{A}\colon l^p(\mathbb{Z}, Y^N) \to l^p(\mathbb{Z}, Y^N)$, определенного формулой (2.1.3), где $\mathscr{C}_0(k)$ — тождественный оператор в Y^N при любом $k \in \mathbb{Z}$. Эти условия описываются с использованием понятия экспоненциальной дихотомии дискретного семейства эволюционных оператоов, которое строится по операторной функции $\mathscr{C}_1\colon \mathbb{Z} \to \operatorname{End} Y^N$.

Рассмотрим разностный оператор первого порядка $\mathbb{D}$ из $\operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}, X)$ определенный формулой

$$(\mathbb{D}x)(n) = x(n) - U(n)x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, x \in l^p(\mathbb{Z}, X),$$

где $U \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$, а X — комплексное банахово пространство.

По функции U построим дискретное семейство эволюционных операторов

$$\mathscr{U} : \Delta = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m \leqslant n\} \to \operatorname{End} X,$$

определенное равенствами

$$\mathscr{U}(n,m) = \begin{cases} U(n)U(n-1)\dots U(m+1), & m < n, \\ I, & m = n, \end{cases}$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$.

Определение 15. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}$ допускает *экспоненциальную дихотомию* на множестве $\mathbb{J} \subset \mathbb{Z}$, если существуют ограниченная проекторнозначная функция $P\colon \mathbb{J} \to \operatorname{End} X$ и постоянные $M_0 \geqslant 1$, $\gamma > 0$ такие, что выполнены следующие условия

1. $\mathscr{U}(n,m)P(m) = P(n)\mathscr{U}(n,m)$, для всех $m \leqslant n$, $m, n \in \mathbb{J}$;
2. $\|\mathscr{U}(n,m)P(m)\| \leqslant M_0 \exp(-\gamma(n-m))$, для всех $m \leqslant n$, $m, n \in \mathbb{J}$;
3. для $m < n$, $m, n \in \mathbb{J}$, сужение $\mathscr{U}_{n,m} : X'(m) \to X'(n)$ оператора $\mathscr{U}(n,m)$ на область значений $X'(m) = \operatorname{Im} Q(m)$ дополнительного проектора $Q(m) = I - P(m)$ есть изоморфизм подпространств $X'(m)$ и $X'(n) = \operatorname{Im} Q(n)$. Тогда полагаем оператор $\mathscr{U}(m,n)$ равным оператору $\mathscr{U}_{n,m}^{-1}$ на $X'(n)$ и равным нулевому оператору на $X(n) = \operatorname{Im} P(n) \subset X$.
4. $\|\mathscr{U}(m,n)\| \leqslant M_0 \exp(\gamma(m-n))$ для всех $m \leqslant n$ из $\mathbb{J}$.

Пару проекторнозначных функций $P, Q\colon \mathbb{J} \to \operatorname{End} X$, участвующих в определении 15, назовём *расщепляющей парой* для семейства $\mathscr{U}$. Если $P = 0$ или $Q = 0$, то будем говорить, что для $\mathscr{U}$ имеет место *тривиальная экспоненциальная дихотомия* на $\mathbb{J}$.

Теорема 21 (([14], [24]))**.** *Для того чтобы оператор $\mathbb{D} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}, X)$, определяемый функцией $U \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$, был обратим, необходимо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}$ допускало экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}$. Если оператор $\mathbb{D}$ обратим, то обратный к нему* *определяется формулой*

$$(\mathbb{D}^{-1}y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n,m)y(m), \quad n \in \mathbb{Z}, y \in l^p(\mathbb{Z}, X),$$

где функция Грина $G\colon \mathbb{Z}^2 \to \operatorname{End} X$ *имеет вид*

$$G(n,m) = \begin{cases} \mathscr{U}(n,m)P(m), & m \leqslant n, \\ -\mathscr{U}(n,m)Q(m), & m > n, \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Этот результат для случая $p = \infty$ имеется в монографии Д. Хенри [6] (в статье [14] была устранена неточность в доказательстве аналога теоремы 21 из этой монографии).

Далее используется

Предположение 1. Существуют числа $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leqslant b$, такие, что семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}$ (построенное по функции $U\colon \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$) допускает экспоненциальную дихотомию на множествах $\mathbb{Z}_{-,a} = \{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant a\}$, $\mathbb{Z}_{b,+} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant b\}$ с расщепляющими парами проекторнозначных функций

$$P_-, Q_-\colon \mathbb{Z}_{-,a} \to \operatorname{End} X,$$
$$P_+, Q_+\colon \mathbb{Z}_{b,+} \to \operatorname{End} X.$$

Определим оператор $\mathscr{N}_{b,a}\colon \operatorname{Im} Q_-(a) \to \operatorname{Im} Q_+(b)$, равенством

$$\mathscr{N}_{b,a}x = Q_+(b)\mathscr{U}(b,a)x, \quad x \in \operatorname{Im} Q_-(a).$$

Этот оператор введён в рассмотрение в статьях [15], [16] и назван «узловым». Важность его обусловлена тем, что он действует между подпространствами «фазового» пространства X, а не в $l^p(\mathbb{Z}, X)$.

Имеет место следующая теорема ([15], [16]).

Теорема 22. *Пусть для семейства эволюционных операторов* $\mathscr{U}\colon \Delta \to \to \operatorname{End} X$*, построенным по функции* $U\colon \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$ *выполнены условия предположения 1.*

Тогда имеет место равенство

$$\operatorname{St}_{\mathrm{inv}} \mathbb{D} = \operatorname{St}_{\mathrm{inv}} \mathscr{N}_{b,a}.$$

В частности, для фредгольмовости разностного оператора $\mathbb{D}$*, необходимо и достаточно, чтобы узловой оператор* $\mathscr{N}_{b,a}\colon \operatorname{Im} Q_-(a) \to \operatorname{Im} Q_+(b)$ *являлся фредгольмовым оператором. При условии фредгольмовости узлового оператора имеют иместо равенства:*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathbb{D} = \dim \operatorname{Ker} \mathscr{N}_{b,a}, \quad \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathbb{D} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathscr{N}_{b,a},$$
$$\operatorname{ind} \mathbb{D} = \operatorname{ind} \mathscr{N}_{b,a}.$$

Рассмотрим разностный оператор (см. формулу (2.1.4))

$$\mathbb{D} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{S}^{-1}(\mathbb{S} + \mathbb{A}_1) \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}, Y^N)$$
$$(\mathbb{D}x)(n) = x(n) + \mathscr{C}_1(n)x(n-1), \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, Y^N).$$

Заметим, что его состояния обратимости совпадают с состояниями обратимости оператора $\mathscr{A}$.

Определение 16. Семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}_1\colon \mathbb{Z}^2 \to \operatorname{End} Y^N$, построенное по функции $-\mathscr{C}_1\colon \mathbb{Z} \to \operatorname{End} Y^N$, назовем *семейством эволюционных операторов для однородного разностного уравнения*

$$x(k+N) + C_1(k)x(k+N-1) + \ldots + C_N(k)x(k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p(\mathbb{Z}, Y). \tag{3.1.1}$$

Из теорем 21 и 22 получаем следующие утверждения.

Теорема 23. *Для того чтобы разностный оператор* $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p$, $p \in [1, \infty]$, *определенный формулой* (2.1.2), *был обратим, необходимо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов* $\mathscr{U}_1$, *построенное для разностного уравнения* (3.1.1), *допускало экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{Z}$.

Теорема 24. *Пусть для семейства* $\mathscr{U} = \mathscr{U}_1 \colon \Delta \to \operatorname{End} Y^N$, *построенного для разностного уравнения* (3.1.1), *выполнены условия предположения 1.*

Тогда имеет место равенство

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\, \mathscr{A} = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\, \mathscr{N}_{b,a}.$$

В частности, для фредгольмовости разностного оператора $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p$ *необходимо и достаточно, чтобы узловой оператор* $\mathscr{N}_{b,a}$ *являлся фредгольмовым оператором. При условии фредгольмовости узлового оператора имеют место равенства:*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathscr{N}_{b,a}, \quad \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathscr{N}_{b,a},$$
$$\operatorname{ind} \mathscr{A} = \operatorname{ind} \mathscr{N}_{b,a}.$$

Отметим, что в условиях теоремы 24 узловой оператор $\mathscr{N}_{b,a}$ действует между подпространствами банахова пространства Y^N.

Следствие. *Если оператор* $\mathscr{A}$ *фредгольмов в одном из пространств* l^p, $p \in [1, \infty]$, *то он фредгольмов и в остальных, и его индекс не зависит от значения* p.

В условиях следующей теоремы будем использовать следующее

Предположение 2. Существуют пределы

$$\lim_{n \to \pm\infty} C_i(n) = C_i^{\pm} \in \operatorname{End} X, \quad i = \overline{1, N}.$$

Под спектром операторного пучка

$$L^{\pm}(\lambda) = \lambda^N + C_1^{\pm}\lambda^{N-1} + \ldots + C_N^{\pm}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

будем понимать множество таких комплексных чисел λ, что $L^{\pm}(\lambda)$ — необратимый в $\operatorname{End} Y$ оператор.

Теорема 25. *В условиях предположения 2 разностный оператор $\mathscr{A}$ обратим, если спектральные радиусы $r(L^{\pm}) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(L^{\pm})\}$ операторных пучков $L^{\pm}$ меньше единицы.*

Доказательство. Непосредственно из теоремы 15 получаем, что спектры $\sigma(\mathscr{C}_1^{\pm})$ операторов $\mathscr{C}_1^{\pm} \in \operatorname{End} Y^N$, заданных матрицами

$$\mathscr{C}_1^{\pm} \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N^{\pm} & C_{N-1}^{\pm} & C_{N-2}^{\pm} & \cdots & C_2^{\pm} & C_1^{\pm} \end{pmatrix},$$

совпадают со спектрами $\sigma(L^{\pm})$ операторных пучков $L^{\pm}$, поэтому $r(\mathscr{C}_1^{\pm}) = r(L^{\pm}) < 1$. Операторы $\mathscr{C}_1^{\pm}$ являются пределами последовательности $\mathscr{C}_1(n)$ в равномерной операторной топологии. Тогда из [15, теорема 3] следует, что оператор $\mathbb{D}$ обратим, следовательно обратим и оператор $\mathscr{A}$. □

Пусть теперь оператор $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p$ имеет вид:

$$(\mathscr{A}x)(k) = C_0 x(k+N) + C_1 x(k+N-1) + \ldots + C_N x(k),$$
$$k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p = l^p(\mathbb{Z}, Y),\ p \in [1, \infty],$$

то есть $C_i(k) \equiv C_i \in Y^N$, $i = \overline{0, N}$ — постоянные функции. В этом случае разностный оператор $\mathbb{A}$ задан выражением

$$(\mathbb{A}y)(k) = \mathscr{C}_0 y(k+1) + \mathscr{C}_1 y(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ y \in l^p(\mathbb{Z}; Y^N),$$

где

$$\mathscr{C}_0 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{C}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_1 \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение операторнозначную функцию $H\colon \mathbb{T} \to \operatorname{End} X$:

$$H(\gamma) = \gamma^N C_0 + \gamma^{N-1} C_1 + \ldots + C_N, \quad \gamma \in \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Эту функцию назовём *характеристической функцией* оператора $\mathscr{A}$. Множество $\rho(H)$, состоящее из таких $\gamma \in \mathbb{T}$, что оператор $H(\gamma)$ обратим, назовём *резольвентным множеством* функции H, а дополнение к нему, $s(H) = \mathbb{T} \setminus \rho(H)$ — *сингулярным множеством* этой функции.

Теорема 26. *Разностный оператор $\mathscr{A}$ с постоянными коэффициентами C_i, $i = \overline{0, N}$, обратим тогда и только тогда, когда сингулярное множество $s(H)$ его характеристической функции пусто. Если $s(H) = \varnothing$, то обратный оператор $\mathscr{A}^{-1} \in \operatorname{End} l^p$ представим в виде*

$$(\mathscr{A}^{-1}x)(k) = (G * x)(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} G(k-n)x(n), \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p. \tag{3.1.2}$$

Функция G принадлежит банаховой алгебре $l^1(\mathbb{Z}, \operatorname{End} Y)$ (со свёрткой функ-

ций в качестве умножения) и допускает представление вида

$$G(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} (H(\gamma))^{-1} \gamma^n \, \mathrm{d}\gamma, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Разностный оператор первого порядка $\mathbb{A}$ с постоянными коэффициентами обратим тогда и только тогда, когда сингулярное множество его характеристической функции $\mathscr{H}(\gamma) = \gamma\mathscr{C}_0 + \mathscr{C}_1$ пусто (иначе говоря, спектр линейного операторного пучка не содержит точек единичной окружности) [27, теорема 3]. Запишем матрицу оператора $\mathscr{H}(\gamma)$:

$$\mathscr{H}(\gamma) \sim \begin{pmatrix} \gamma I & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma I & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma I & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & \gamma C_0 + C_1 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 15 следует, что состояния обратимости операторов $\mathscr{H}(\gamma)$ и $H(\gamma)$ совпадают. Значит $s(H) = s(\mathscr{H})$. Отсюда получаем первое утверждение теоремы.

Заметим, что $G(n)$ представляют собой коэффициенты Фурье функции $(H(\gamma))^{-1}$, которая является голоморфной в окрестности единичной окружности как резольвента полиномиального операторного пучка. Следовательно, её ряд Фурье сходится абсолютно, откуда и следует, что $G \in l^1(\mathbb{Z}, \operatorname{End} Y)$. Благодаря этому, оператор $\mathscr{A}^{-1}$, задаваемый формулой (3.1.2), определен корректно. Непосредственная проверка показывает, что этот оператор является обратным к оператору $\mathscr{A}$. $\square$

Предположение 3. Все решения однородного разностного уравнения

$$x(k+N) + C_1 x(k+N-1) + \ldots + C_N x(k) = 0, \tag{3.1.3}$$

рассматриваемого на $\mathbb{Z}_+$ ограничены.

В условиях предположения 3 любое решение $x \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, Y)$ однородного уравнения удовлетворяет равенствам

$$\begin{pmatrix} x(n) \\ x(n+1) \\ \vdots \\ x(n+N-2) \\ x(n+N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ -C_N & -C_{N-1} & \cdots & -C_2 & -C_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{pmatrix}.$$

Тогда из ограниченности всех решений однородного уравнения и теоремы БанахаШтейнгауза следует, что

$$\sup_{n \geqslant 0} \|\mathscr{C}_1^n\| = M(\mathscr{C}_1) < \infty.$$

Следовательно, спектральный радиус оператора $\mathscr{C}_1$ не превосходит единицы, т.е.

$$\sigma(\mathscr{C}_1) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geqslant 1\}.$$

Теперь можно применить результат из [17, теорема 1]:

Теорема 27. *Пусть выполнены условия предположения 3 и*

$$\sigma(\mathscr{C}_1) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}.$$

Тогда существуют операторнозначные функции $A_k \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, \operatorname{End} Y^N)$, $k = \overline{1, m}$, такие что для любого решения $x \colon \mathbb{Z}_+ \to Y$ уравнения 3.1.3 имеют место следующие представления

$$(x(n), x(n+1), \ldots, x(n+N-1)) = \left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_k^n A_k(n)\right)(x(0), x(1), \ldots, x(N-1)),$$

$$n \in \mathbb{Z}_+.$$

Функции A_k, $k = \overline{1,m}$ *обладают следующими свойствами:*

1. *операторы* $A_k(n) \in \operatorname{End} Y^N$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *принадлежат наименьшей замкнутой подалгебре* $\mathscr{A}_{\mathscr{C}_1}$ *из* $\operatorname{End} Y^N$, *содержащей оператор* $\mathscr{C}_1$*;*

2. $\lim_{n\to\infty} \|A_k(n+1) - A_k(n)\| = 0$*;*

3. $\lim_{n\to\infty} \|\mathscr{C}_1 A_k(n) - \gamma_k A_k(n)\| = 0$*;*

4. $\lim_{n\to\infty} \|A_k(n) A_j(n)\| = 0$ *для* $k \neq j$, $k, j = \overline{1,m}$.

В заключение отметим, что основные результаты работы (теоремы 1-5) имеют место для разностных операторов, действующих в весовых пространствах последовательностей векторов (см. статьи [18], [19], [20]).

Заключение

Результаты, полученные в данной работе, применяются для исследования разностных операторов высокого порядка. Исследования не являются завершенными. Остаётся открытым вопрос обобщения результатов на случай операторного полинома, разложенного по степеням замкнутого неограниченного оператора A. Это позволит исследовать аналогичными методами дифференциальные операторы в банаховом пространстве.

Основные результаты работы отправлены на публикацию в журнал «Математические заметки».

Список литературы

1. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход. — 1988.

2. *Antonevich A.*, *Lebedev A.* Functional differential equations: I. C^*-theory, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 70. — Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, England, 1994.

3. *Курбатов В. Г.*, *Садовский Б. Н.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронежского ун-та, 1990.

4. *Kurbatov V. G.* Functional differential operators and equations. Т. 473. — Springer Science & Business Media, 1999.

5. *Массера Х. Л.*, *Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональный анализ. — Мир, 1970.

6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — Мир, 1985.

7. *Megan M.*, *Sasu A. L.*, *Sasu B.* Discrete admissibility and exponential dichotomy for evolution families // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2003. — Т. 9, № 2. — С. 383—398.

8. *Dorogovtsev A. Y.* Periodicity in distribution. I. Discrete systems // Int. Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2002. — Т. 30, № 2. — С. 65—127.

9. *Chicone C.*, *Latushkin Y.* Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations. Т. 70. — American Mathematical Soc., 1999.

10. *Баскаков А. Г.* Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Мат. заметки. — 1992. — Т. 52, № 2. — С. 17—26.

11. *Baskakov A. G., Krishtal I. A.* Memory estimation of inverse operators // Journal of Functional Analysis. — 2014. — Т. 267, № 8. — С. 2551—2605.

12. *Баскаков А. Г.* Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений // Математический сборник. — 2015. — Т. 206, № 8. — С. 23—62.

13. *Баскаков А. Г., Дуплищева А. Ю.* Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2015. — Т. 79, № 2. — С. 3—20.

14. *Баскаков А. Г., Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 6. — С. 1231—1243.

15. *Баскаков А. Г.* Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов // Математические заметки. — 2000. — Т. 67, № 6. — С. 816—827.

16. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи математических наук. — 2013. — Т. 68, 1 (409. — С. 77—128.

17. *Баскаков А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Математические заметки. — 2015. — Т. 97, № 2. — С. 174—190.

18. *Бичегкуев М. С.* О спектре разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах // Функциональный анализ и его приложения. — 2010. — Т. 44, № 1. — С. 80—83.

19. *Бичегкуев М. С.* К спектральному анализу разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах // Математический сборник. — 2013. — Т. 204, № 11. — С. 3—20.

20. *Бичегкуев М. С.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах функций // Математические заметки. — 2014. — Т. 95, № 1. — С. 18—25.

21. *Shkaliko A.* Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula // Recent Developments in Operator Theory and its Applications. — Springer, 1996. — С. 358—385.

22. *Гринив Р. О.*, *Шкаликов А. А.* Экспоненциальная устойчивость полугрупп, связанных с некоторыми операторными моделями в механике // Математические заметки. — 2003. — Т. 73, № 5. — С. 657—664.

23. *Данфорд Н.*, *Шварц Д. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — Издательство иностранной литературы, 1966.

24. *Baskakov A.*, *Krishtal I.* Spectral analysis of operators with the two-point Bohr spectrum // Journal of mathematical analysis and applications. — 2005. — Т. 308, № 2. — С. 420—439.

25. *Баскаков А. Г.*, *Чернышов К. И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Математический сборник. — 2002. — Т. 193, № 11. — С. 3—42.

26. *Баскаков А. Г.* Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов // Математические заметки. — 2008. — Т. 84, № 2. — С. 175—192.

27. *Баскаков А. Г.* Об обратимости линейных разностных операторов с постоянными коэффициентами // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2001. — № 5.