Спектральный анализ операторных полиномов и разностных операторов высокого порядка

В. Д. Харитонов
(kharvd@gmail.com)

24 июня 2016 г.

Содержание

Постановка задачи

Из курса дифференциальных и разностных уравнений известен метод приведения линейного уравнения N-ого порядка к системе из N уравнений первого порядка.

$$a_0(t)x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)x(t) = f(t);$$

$$x_1(t) = x(t);$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \ldots \\ a_0(t)\dot{x}_n(t) = -a_1(t)x_{n-1}(t) - \ldots - a_n(t)x_1(t) + f(t). \end{cases}$$

Постановка задачи

X, Y — комплексные банаховы пространства, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов (гомоморфизмов), определенных на X со значениями в Y, $\mathrm{End}\, X = \mathrm{Hom}(X, X)$ — банахова алгебра эндоморфизмов пространства X.
Линейный оператор

$$\mathscr{A} = C_0 A^N + C_1 A^{N-1} + \ldots + C_N,$$

$A, C_0, \ldots, C_N \in \mathrm{End}\, X$, $N \in \mathbb{N}$, назовём *операторным полиномом*, разложенным по степеням оператора A.

Постановка задачи

Применим для уравнения с операторным полиномом описанный ранее метод:

$$\mathscr{A}x = f,$$
$$C_0A^Nx + C_1A^{N-1}x + \ldots + C_Nx = f, \quad x, f \in X;$$

$$x_1 = x;$$
$$\begin{cases} Ax_1 = x_2, \\ Ax_2 = x_3, \\ \ldots \\ C_0Ax_N = -C_1x_{N-1} - \ldots - C_Nx_1 + f. \end{cases}$$

Постановка задачи

Полученную систему уравнений перепишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} A & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_0 A + C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{f},$$

где $\mathfrak{x}, \mathfrak{f} \in X^N$, $\mathbb{A} \in \operatorname{End} X^N$.

Определение состояний обратимости

Definition

Пусть $B \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$ — линейный ограниченный оператор между банаховыми пространствами X_1, X_2. Рассмотрим следующий набор его возможных свойств.

1. $\mathrm{Ker}\, B = \{x \in X_1 : Bx = 0\} = \{0\}$,
2. $1 \leqslant n = \dim \mathrm{Ker}\, B < \infty$ (ядро конечномерно);
3. $\mathrm{Ker}\, B$ — бесконечномерное подпространство в X_1;
4. $\mathrm{Ker}\, B$ — дополняемое подпространство в X_1;
5. $\overline{\mathrm{Im}\, B} = \mathrm{Im}\, B$ — образ оператора B замкнут в X_2;
6. оператор B равномерно инъективен (корректен);
7. $\mathrm{Im}\, B$ — замкнутое подпространство в X_2 конечной коразмерности;
8. $\mathrm{Im}\, B$ — замкнутое подпространство в X_2 бесконечной коразмерности;

Определение состояний обратимости (продолжение)

Definition

8. $\operatorname{Im} B \neq X_2$, $\overline{\operatorname{Im} B} = X_2$ (образ оператора B плотен в X_2, но не совпадает со всем X_2);
9. $\overline{\operatorname{Im} B} \neq X_2$ (образ B не плотен в X_2);
10. $\operatorname{Im} B = X_2$ (оператор B сюръективен);
11. оператор B обратим (т. е. $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ и $\operatorname{Im} B = X_2$).

Если для оператора B одновременно выполнены все условия из совокупности условий $\sigma = \{i_1, \ldots, i_k\}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant 12$, то будем говорить, что оператор B *находится в состоянии обратимости* σ. Множество всех состояний обратимости оператора B обозначим символом $\operatorname{St}_{\mathrm{inv}} B$.

Фредгольмовость

Definition

Если оператор $B \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$ имеет конечномерное ядро (выполнено одно из условий 1), 2) определения) и замкнутый образ конечной коразмерности (одно из условий 7), 11)), то оператор B называется *фредгольмовым*. Если оператор B имеет замкнутый образ и конечно хотя бы одно из чисел $\dim \operatorname{Ker} B$, $\operatorname{codim} \operatorname{Im} B = \dim X_2 / \operatorname{Im} B$, то оператор B называется *полуфредгольмовым*. Число $\operatorname{ind} B = \dim \operatorname{Ker} B - \operatorname{codim} \operatorname{Im} B$ называется *индексом* фредгольмова (полуфредгольмова) оператора B.

Основные результаты

Theorem

Множества состояний обратимости операторов $\mathscr{A} \in \operatorname{End} X$ *и* $\mathbb{A} \in \operatorname{End} X^N$ *совпадают:*

$$\operatorname{St}_{\mathrm{inv}} \mathscr{A} = \operatorname{St}_{\mathrm{inv}} \mathbb{A}.$$

Основные результаты

Theorem

Пусть оператор $\mathscr{A}$ *обратим. Тогда обратим и оператор* $\mathbb{A} \in \operatorname{End} X^N$ *и обратный* $\mathbb{A}^{-1}$ *имеет матрицу* $(\mathbb{A}^{-1})_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant N$ *вида:*

$$D_j = \mathscr{A}^{-1} \sum_{k=0}^{N-j} C_k A^{N-k-j}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \cdots & D_{N-1} & \mathscr{A}^{-1} \\ AD_1 - I & AD_2 & \cdots & AD_{N-1} & A\mathscr{A}^{-1} \\ A^2 D_1 - A & A^2 D_2 - I & \cdots & A^2 D_{N-1} & A^2 \mathscr{A}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{N-1} D_1 - A^{N-2} & A^{N-1} D_2 - A^{N-3} & \cdots & A^{N-1} D_{N-1} - I & A^{N-1} \mathscr{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Основные результаты

Theorem

Оператор $\mathscr{A}$ фредгольмов (полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда фредгольмовым (полуфредгольмовым) является оператор $\mathbb{A}$. При условии фредгольмовости одного из них

$$\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathbb{A}, \quad \dim \operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathbb{A},$$
$$\operatorname{ind} \mathscr{A} = \operatorname{ind} \mathbb{A}.$$

Разностные операторы N-ого порядка

Символом $\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z}; Y)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ обозначим банахово пространство суммируемых со степенью p (ограниченных при $p = \infty$) двусторонних последовательностей векторов из банахова пространства Y. Нормы в этих пространствах определяются равенствами:

$$\|x\| = \|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|^p \right)^{1/p}, \quad x \in \ell^p, \ p \in [1, \infty),$$

$$\|x\| = \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|, \quad x \in \ell^\infty.$$

В банаховом пространстве ℓ^p рассмотрим разностное уравнение N-ого порядка:

$$C_0(k)x(k+N) + C_1(k)x(k+N-1) + \ldots + C_N(k)x(k) = f(k),$$
$$k \in \mathbb{Z},\ x \in \ell^p,$$

где $f \in \ell^p$, а $C_i \in l^\infty(\mathbb{Z}; \mathrm{End}\, Y)$, $i = \overline{0, N}$.

Разностное уравнение можно записать в операторном виде:

$$\mathscr{A}x = f,$$

где разностный оператор $\mathscr{A} \in \operatorname{End} \ell^p$ определяется формулой

$$\mathscr{A} = \widetilde{C_0}S^N + \widetilde{C_1}S^{N-1} + \ldots + \widetilde{C_N}.$$

Операторы $\widetilde{C_i} \in \operatorname{End} \ell^p$, $i = \overline{0, N}$ есть операторы умножения на операторную функцию C_i:

$$(\widetilde{C_i}x)(k) = C_i(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in \ell^p,\ k = \overline{0, N}.$$

По оператору $\mathscr{A}$ строится оператор $\mathbb{A} \in \operatorname{End} \ell^p(\mathbb{Z}; Y^N)$.

$$(\mathbb{A}x)(k) = \mathscr{C}_0(k)x(k+1) + \mathscr{C}_1(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in \ell^p(\mathbb{Z}; Y^N),$$

где

$$\mathscr{C}_0(k) \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0(k) \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{C}_1(k) \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N(k) & C_{N-1}(k) & C_{N-2}(k) & \cdots & C_2(k) & C_1(k) \end{pmatrix},$$

$$x(k) = (x_1(k), x_2(k), \cdots, x_N(k)), \quad x_i \in \ell^p,\ i = \overline{1, N}.$$

Theorem

Имеет место равенство

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\, \mathscr{A} = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\, \mathbb{A}.$$

В частности, оператор $\mathscr{A}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор $\mathbb{A}$. При условии фредгольмовости одного из них

$$\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathbb{A}, \quad \dim \operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathbb{A},$$
$$\operatorname{ind} \mathscr{A} = \operatorname{ind} \mathbb{A}.$$

Разностные операторы с постоянными коэффициентами

Пусть теперь оператор $\mathscr{A} \in \operatorname{End} \ell^p$ имеет вид:

$$(\mathscr{A}x)(k) = C_0 x(k+N) + C_1 x(k+N-1) + \ldots + C_N x(k),$$
$$k \in \mathbb{Z},\ x \in \ell^p = \ell^p(\mathbb{Z}, Y),\ p \in [1, \infty],$$

то есть $C_i(k) \equiv C_i \in Y^N$, $i = \overline{0, N}$ — постоянные функции. В этом случае разностный оператор $\mathbb{A}$ задан выражением

$$(\mathbb{A}y)(k) = \mathscr{C}_0 y(k+1) + \mathscr{C}_1 y(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ y \in \ell^p(\mathbb{Z}; Y^N),$$

где

$$\mathscr{C}_0 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{C}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_1 \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение операторнозначную функцию $H\colon \mathbb{T} \to \operatorname{End} X$:

$$H(\gamma) = \gamma^N C_0 + \gamma^{N-1} C_1 + \ldots + C_N, \quad \gamma \in \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Эту функцию назовём *характеристической функцией* оператора $\mathscr{A}$. Множество $\rho(H)$, состоящее из таких $\gamma \in \mathbb{T}$, что оператор $H(\gamma)$ обратим, назовём *резольвентным множеством* функции H, а дополнение к нему, $s(H) = \mathbb{T} \setminus \rho(H)$ — *сингулярным множеством* этой функции.

Theorem

Разностный оператор $\mathscr{A}$ с постоянными коэффициентами обратим тогда и только тогда, когда сингулярное множество $s(H)$ его характеристической функции пусто. При этом обратный оператор $\mathscr{A}^{-1} \in \operatorname{End} \ell^p$ представим в виде

$$(\mathscr{A}^{-1}x)(k) = (G * x)(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} G(k-n)x(n), \quad k \in \mathbb{Z}, \ x \in \ell^p.$$

Функция G принадлежит банаховой алгебре $\ell^1(\mathbb{Z}, \operatorname{End} Y)$ (со свёрткой функций в качестве умножения) и допускает представление вида

$$G(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (H(\gamma))^{-1} \gamma^n \, \mathrm{d}\gamma, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Заключение

Исследования не являются завершенными. Остаётся открытым вопрос обобщения результатов на случай операторного полинома, разложенного по степеням замкнутого неограниченного оператора A. Это позволит исследовать аналогичными методами дифференциальные операторы в банаховом пространстве.

Основные результаты работы отправлены на публикацию в журнал «Математические заметки».

Спасибо за внимание!