МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет прикладной математики, информатики и механики

Кафедра нелинейных колебаний

Спектральный анализ операторных полиномов
и разностных операторов высокого порядка

Бакалаврская работа

Направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Профиль Нелинейная динамика

Допущено к защите в ГЭК ___ . ___ . 2016

Зав. кафедрой ____________________ д. ф.-м. н., профессор Задорожний В. Г.

Обучающийся ______________________________________ Харитонов В. Д.

Руководитель ______________________ д. ф.-м. н., профессор Баскаков А. Г.

Воронеж – 2016

Оглавление

Введение

О содержании и структуре работы

Из курса дифференциальных и разностных уравнений известен метод приведения уравнения N-ого порядка к системе из N уравнений первого порядка. В данной работе рассматривается обобщение этого метода для исследования операторных полиномов с коэффициентами из банахова пространства. Исследование спектральных свойств операторных полиномов сводится к изучению спектральных свойств оператора, заданного операторной матрицей. Полученные результаты (теоремы 1–3) применяются к разностным операторам высокого порядка. Получены условия их обратимости, фредгольмовости (теоремы 4, 10 и 12), асимптотическое представление ограниченных решений однородного разностного уравнения (теорема 13).

Работа состоит из введения, трёх глав и заключения.

Во введении дается общая характеристика работы.

В первой главе приводятся основные определения и понятия, используемые в работе.

Во второй главе формулируются основные результаты работы и приводятся их доказательства.

В третьей главе основные результаты используются для исследования условий обратимости и фредгольмовости разностных операторов.

В заключении описаны возможные направления дальнейших исследований на данную тему.

История исследований

Приводимая в работе конструкция перехода от изучения исходного операторного полинома $\mathscr{A} = C_0A^N + C_1A^{N-1} + \ldots + C_N \in \operatorname{End} X$ к изучению матричного оператора $\mathbb{A} \in \operatorname{End} X^N$, является непосредственным обобщением известного из курсов дифференциальных и разностных уравнений приёма сведения дифференциального или разностного уравнения N-ого порядка к системе из N дифференциальных (разностных) уравнений. Для более специальных классов операторных полиномов аналог теоремы 2 получен в монографиях А. Б. Антоневича [1, теорема 9.1], [2].

Теория разностных операторов первого порядка развивалась в работах [1—20].

Понятие состояний обратимости используется, в частности, в статье [16].

В отличие от статьи [13], где изучались разностные операторы второго порядка, оператор C_0 из представления операторного полинома $\mathscr{A}$ может быть необратимым оператором. Случай необратимого оператора при старшей степени оператора A позволяет получать аналоги теорем 1–3 для случая операторного полинома $\mathscr{A}$, где оператор A — замкнутый оператор с непустым резольвентным множеством (в частности, дифференциальный оператор). Следует отметить, что такой прием не применим к дифференциальным операторам второго порядка, рассматриваемых в статьях [21; 22]. В данной работе предложен иной (более простой) способ доказательства основных результатов статьи [13]. Он состоит в сопоставлении операторному полиному порядка N оператора $\widetilde{\mathbb{A}}$, заданного операторной матрицей порядка $N+1$, который имеет то же множество состояний обратимости.

Глава 1

Основные понятия и определения

Основные понятия

Глава 2

О состояниях обратимости операторных полиномов

2.1. Основные результаты

Пусть X, Y — комплексные банаховы пространства, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов (гомоморфизмов), определенных на X со значениями в Y, $\mathrm{End}\,X = \mathrm{Hom}(X,X)$ — банахова алгебра эндоморфизмов пространства X.

Линейный оператор $\mathscr{A} \in \mathrm{End}\,X$, вида

$$\mathscr{A} = C_0A^N + C_1A^{N-1} + \ldots + C_N,$$

где $A, C_0, \ldots, C_N \in \mathrm{End}\,X, N \in \mathbb{N}$, назовём *операторным полиномом* (порядка N с операторными коэффициентами C_i, $i = \overline{1,N}$, разложенным по степеням оператора A).

Наряду с оператором $\mathscr{A}$ рассмотрим оператор $\mathbb{A} \in \mathrm{End}\,X^N$, заданный матрицей вида

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_0A + C_1 \end{pmatrix},$$

т. е. для $x \in X^N$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, вектор $\mathbb{A}x = y = (y_1, \ldots, y_N)$ определяется равенствами:

$$
\begin{aligned}
y_k &= Ax_k - x_{k+1}, \quad k = \overline{1, N-1},\\
y_N &= C_0 A x_N + \sum_{k=1}^{N} C_k x_{N-k+1} = C_0 A x_N + \sum_{j=1}^{N} C_{N-j+1} x_j.
\end{aligned}
$$

Оператор $\mathbb{A}$ можно представить в виде

$$
\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 \mathbb{S} + \mathbb{A}_1,
$$

где операторы $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{S}$, $\mathbb{A}_1 \in \operatorname{End} X^N$ определяются соответственно матрицами

$$
\mathbb{A}_0 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0\\ 0 & I & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & C_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S} \sim \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A \end{pmatrix}
$$
$$
\mathbb{A}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I\\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_1 \end{pmatrix}.
$$

Определение 1. Пусть $B \in \operatorname{Hom}(X_1, X_2)$ — линейный ограниченный оператор между банаховыми пространствами X_1, X_2. Рассмотрим следующий набор его возможных свойств.

1) $\operatorname{Ker} B = \{x \in X_1 : Bx = 0\} = \{0\}$, т. е. B — инъективный оператор;

2) $1 \leqslant n = \dim \operatorname{Ker} B < \infty$ (ядро конечномерно);

3) $\operatorname{Ker} B$ — бесконечномерное подпространство в X_1;

4) $\operatorname{Ker} B$ — дополняемое подпространство в X_1;

5) $\overline{\operatorname{Im} B} = \operatorname{Im} B$ — образ оператора B замкнут в X_2, что эквивалентно положительности величины (называемой минимальным модулем оператора

B)

$$\gamma(B) = \inf_{x \in X_1 \setminus \operatorname{Ker} B} \frac{\|Bx\|}{\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} B)},$$

где $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} B) = \inf\limits_{x_0 \in \operatorname{Ker} B} \|x - x_0\|$ — расстояние от вектора x до подпространства $\operatorname{Ker} B$;

6) оператор B равномерно инъективен (корректен), т. е. $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ и $\gamma(B) > 0$;
7) $\operatorname{Im} B$ — замкнутое подпространство в X_2 конечной коразмерности

$$1 \leqslant \operatorname{codim} \operatorname{Im} B = \dim X_2 / \operatorname{Im} B < \infty;$$

8) $\operatorname{Im} B$ — замкнутое подпространство в X_2 бесконечной коразмерности;
9) $\operatorname{Im} B \neq X_2$, $\overline{\operatorname{Im} B} = X_2$ (образ оператора B плотен в X_2, но не совпадает со всем X_2);
10) $\overline{\operatorname{Im} B} \neq X_2$ (образ B не плотен в X_2);
11) $\operatorname{Im} B = X_2$ (оператор B сюръективен);
12) оператор B обратим (т. е. $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ и $\operatorname{Im} B = X_2$).

Если для оператора B одновременно выполнены все условия из совокупности условий $\sigma = \{i_1, \ldots, i_k\}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant 12$, то будем говорить, что оператор B *находится в состоянии обратимости* σ. Множество всех состояний обратимости оператора B обозначим символом $\operatorname{St}_{\mathrm{inv}} B$.

Определение 2. Если оператор $B \in \operatorname{Hom}(X_1, X_2)$ имеет конечномерное ядро (выполнено одно из условий 1), 2) определения 1) и замкнутый образ конечной коразмерности (одно из условий 7), 11)), то оператор B называется *фредгольмовым.* Если оператор B имеет замкнутый образ и конечно хотя бы одно из чисел $\dim \operatorname{Ker} B$, $\operatorname{codim} \operatorname{Im} B = \dim X_2 / \operatorname{Im} B$, то оператор B называется *полуфредгольмовым.* Число $\operatorname{ind} B = \dim \operatorname{Ker} B - \operatorname{codim} \operatorname{Im} B$ называется *индексом* фредгольмова (полуфредгольмова) оператора B.

Аналогичное определение даётся для замкнутых операторов, а также для линейных отношений. Благодаря введенному понятию состояний обратимости оператора, становится возможна более тонкая и разнообразная, чем общепринятая (см. [23]), классификация спектров линейных операторов.

Одним из основных результатов статьи является

Теорема 1. *Множества состояний обратимости операторов* $\mathscr{A} \in \operatorname{End} X$ *и* $\mathbb{A} \in \operatorname{End} X^N$ *совпадают:*

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\,\mathscr{A} = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\,\mathbb{A}.$$

Это равенство (содержащее множество утверждений) означает, что если одно из двенадцати условий определения 1 выполняется для одного из операторов $\mathscr{A}$, $\mathbb{A}$, то оно выполняется и для другого.

Теорема 1 позволяет свести исследование свойств оператора $\mathscr{A} \in \operatorname{End} X$, связанных с обратимостью, к исследованию соответствующих свойств оператора $\mathbb{A}$, который в важных частных случаях изучен. В первую очередь это относится к разностным операторам первого порядка.

Теорема 2. *Пусть оператор* $\mathscr{A}$ *обратим. Тогда обратим и операторы* $\mathbb{A} \in$

$\operatorname{End} X^N$ *и обратный* $\mathbb{A}^{-1}$ *имеет матрицу* $(\mathbb{A}^{-1})_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant N$ *вида:*

$$\begin{aligned}
(\mathbb{A}^{-1})_{ij} &= A^{i-1}D_j - A^{i-j-1}, && i > j,\ j = \overline{1, N-1},\\
(\mathbb{A}^{-1})_{ij} &= A^{i-1}D_j, && i \leqslant j,\ j = \overline{1, N-1},\\
(\mathbb{A}^{-1})_{i,N} &= A^{i-1}\mathscr{A}^{-1}, && i = \overline{1, N},
\end{aligned}$$

$$D_j = \mathscr{A}^{-1} \sum_{k=0}^{N-j} C_k A^{N-k-j}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\mathbb{A}^{-1} \sim \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \cdots & D_{N-1} & \mathscr{A}^{-1} \\ AD_1 - I & AD_2 & \cdots & AD_{N-1} & A\mathscr{A}^{-1} \\ A^2D_1 - A & A^2D_2 - I & \cdots & A^2D_{N-1} & A^2\mathscr{A}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{N-1}D_1 - A^{N-2} & A^{N-1}D_2 - A^{N-3} & \cdots & A^{N-1}D_{N-1} - I & A^{N-1}\mathscr{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из теоремы 1 следует

Теорема 3. *Оператор* $\mathscr{A}$ *фредгольмов (полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда фредгольмовым (полуфредгольмовым) является оператор* $\mathbb{A}$. *При условии фредгольмовости одного из них*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathbb{A}, \quad \dim \operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathbb{A},$$
$$\operatorname{ind} \mathscr{A} = \operatorname{ind} \mathbb{A}.$$

Далее символом $l^p = l^p(\mathbb{Z}; Y)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ обозначим банахово пространство суммируемых со степенью p (ограниченных при $p = \infty$) двусторонних последовательностей векторов из банахова пространства Y. Нормы в этих пространствах определяются равенствами:

$$\|x\| = \|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|^p \right)^{1/p}, \quad x \in l^p,\ p \in [1, \infty),$$
$$\|x\| = \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|, \quad x \in l^\infty.$$

В банаховом пространстве l^p рассмотрим разностное уравнение N-ого порядка:

$$C_0(k)x(k+N)+C_1(k)x(k+N-1)+\ldots+C_N(k)x(k)=f(k),\quad k\in\mathbb{Z},\ x\in l^p, \tag{2.1.1}$$

где $f\in l^p$, а $C_i\colon \mathbb{Z}\to \operatorname{End}Y$, $i=\overline{0,N}$ — ограниченные операторнозначные функции, т. е. $C_i\in l^\infty(\mathbb{Z};\operatorname{End}Y)$. Через S обозначим оператор сдвига последовательностей из l^p: $S\in\operatorname{End}l^p$, $(Sx)(k)=x(k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$, $x\in l^p$. Тогда уравнение (2.1.1) можно записать в операторном виде:

$$\mathscr{A}x=f,$$

где разностный оператор $\mathscr{A}\in\operatorname{End}l^p$ определяется формулой

$$\mathscr{A}=\widetilde{C_0}S^N+\widetilde{C_1}S^{N-1}+\ldots+\widetilde{C_N}. \tag{2.1.2}$$

Операторы $\widetilde{C}_i\in\operatorname{End}l^p$, $i=\overline{0,N}$ есть операторы умножения на операторную функцию C_i:

$$(\widetilde{C}_ix)(k)=C_i(k)x(k),\quad k\in\mathbb{Z},\ x\in l^p,\ k=\overline{0,N}.$$

Используя приём, описанный выше для операторных полиномов, построим по оператору $\mathscr{A}$ оператор $\mathbb{A}\in\operatorname{End}l^p(\mathbb{Z};Y^N)$. При этом учитывается канонический изоморфизм пространств $l^p(\mathbb{Z};Y)^N$ и $l^p(\mathbb{Z};Y^N)$.

Оператор $\mathbb{A}$ является разностным оператором первого порядка в пространстве $l^p(\mathbb{Z};Y^N)$ и задаётся равенством

$$(\mathbb{A}x)(k)=\mathscr{C}_0(k)x(k+1)+\mathscr{C}_1(k)x(k),\quad k\in\mathbb{Z},\ x\in l^p(\mathbb{Z};Y^N), \tag{2.1.3}$$

где

$$\mathscr{C}_0(k) \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0(k) \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{C}_1(k) \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N(k) & C_{N-1}(k) & C_{N-2}(k) & \cdots & C_2(k) & C_1(k) \end{pmatrix},$$

$$x(k) = (x_1(k), x_2(k), \cdots, x_N(k)), \quad x_i \in l^p,\ i = \overline{1, N}.$$

Итак, оператор $\mathbb{A}$ записывается в виде

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 \mathbb{S} + \mathbb{A}_1, \tag{2.1.4}$$

где $\mathbb{S} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$ — оператор сдвига в $l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$, $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1 \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}; Y^n)$ — операторы умножения на функции $\mathscr{C}_0$ и $\mathscr{C}_1$ соответственно.

Согласно терминологии статьи [24], разностный оператор 2.1.4 является оператором с двухточечным спектром Бора. Поэтому к нему применимы полученные в статье результаты об обратимости, представлении обратных (используя понятие экспоненциальной дихотомии). Имеют место оценки норм обратных операторов.

При получении результатов статьи [24] существенно использовалась (особенно в случае необратимого оператора $\mathbb{A}_0$) спектральная теория линейных отношений ([25; 26]).

Из представлений (2.1.2) и (2.1.4) разностных операторов $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}; Y)$, $\mathbb{A} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}; Y^N)$ и теорем 1–3 следует

Теорема 4. *Имеет место равенство*

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\,\mathscr{A} = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\,\mathbb{A}.$$

В частности, оператор $\mathscr{A}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор $\mathbb{A}$. При условии фредгольмовости одного из них

$$\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \dim\operatorname{Ker}\mathbb{A}, \quad \dim\operatorname{Im}\mathscr{A} = \operatorname{codim}\operatorname{Im}\mathbb{A},$$
$$\operatorname{ind}\mathscr{A} = \operatorname{ind}\mathbb{A}.$$

Следующее утверждение следует из результатов статей [10; 11].

Теорема 5. *Если разностный оператор $\mathscr{A}$ обратим в одном из банаховых пространств $l^p(\mathbb{Z};Y)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то он обратим в любом из этих пространств. В частности, спектр $\sigma(\mathscr{A})$ оператора $\mathscr{A}$ не зависит от пространства l^p, в котором он определен.*

Оценки, полученные в [12] для решений разностных включений, позволяют получить оценки для функции Грина в представлении оператора $\mathscr{A}^{-1}$. Аналоги теорем 3–5 имеют место для разностных операторов высокого порядка, рассматриваемых в пространствах односторонних последовательностей. Соответствующие результаты для разностных операторов первого порядка получены в статьях [10; 16].

В §3 данной статьи получено (теорема 10) необходимое и достаточное условие фредгольмовости разностного оператора $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z};Y)$, $p \in [1,\infty]$ с $C_0(k) = I$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Для разностного оператора с постоянными операторными коэффициентами $\widetilde{C_k} \in \operatorname{End} Y$, $0 \leqslant k \leqslant N$, приведена формула обратного. В теореме 13 получено асимптотическое представление ограниченных решений однородного разностного уравнения.

2.2. Доказательства основных результатов

Пусть задан операторный полином $\mathscr{A} \in \operatorname{End} X$, разложенный по степеням оператора A:

$$\mathscr{A} = C_0 A^N + C_1 A^{N-1} + \ldots + C_N,$$

где $A, C_0, \ldots, C_N \in \operatorname{End} X, N \in \mathbb{N}$, и соответствующий ему оператор $\mathbb{A} \in \operatorname{End} X^N$:

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_0 A + C_1 \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение оператор $\widetilde{\mathbb{A}}$ из алгебры $\operatorname{End} X^{N+1}$.

$$\widetilde{\mathbb{A}} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_1 & C_0 A \end{pmatrix}.$$

При доказательстве теорем 1 и 2 вначале соответствующие утверждения устанавливаются для операторов $\mathscr{A}$ и $\widetilde{\mathbb{A}}$, а затем, используя представление оператора $\mathscr{A}$ в виде

$$\mathscr{A} = (C_0 A + C_1) A^{N-1} + C_2 A^{N-2} + \ldots + C_N,$$

соответствующие результаты устанавливаются для операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{A}$. Таким образом вычисляется матрица оператора $\mathbb{A}^{-1} \in \operatorname{End} X^N$.

Зададим операторы $\mathbb{B}$, $\mathscr{I}_1$, $\mathscr{I}_2$, $\mathscr{I}_3 \in \operatorname{End} X^{N+1}$ матрицами

$$\mathbb{B} \sim \begin{pmatrix} \mathscr{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{I}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{B}x)_1 = \mathscr{A}x_1 = \sum_{k=0}^{N} C_k A^{N-k} x_1, \qquad (\mathscr{I}_1 x)_k = x_{k+1}, \quad k = \overline{1, N},$$

$$(\mathbb{B}x)_k = -x_k, \quad k = \overline{2, N+1}; \qquad (\mathscr{I}_1 x)_{N+1} = x_1;$$

$$B_i = \sum_{k=0}^{N-i} C_k A^{N-k-i}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\mathscr{I}_2 \sim \begin{pmatrix} I & -B_1 & -B_2 & \cdots & -B_N \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}, \quad \mathscr{I}_3 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -A & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -A & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -A & I \end{pmatrix},$$

$$(\mathscr{I}_2 x)_1 = x_1 - \sum_{i=1}^{N} B_i x_{i+1}, \qquad (\mathscr{I}_3 x)_1 = x_1,$$

$$(\mathscr{I}_2 x)_k = x_k, \quad k = \overline{2, N+1}; \qquad (\mathscr{I}_3 x)_k = x_k - A x_{k-1}, \quad k = \overline{2, N+1}.$$

Лемма 1. *Состояния обратимости операторов* $\widetilde{\mathbb{A}}$ *и* $\mathbb{B}$ *совпадают.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что

$$\widetilde{\mathbb{A}} = \mathscr{I}_1 \mathscr{I}_2 \mathbb{B} \mathscr{I}_3,$$

причем ясно, что $\mathscr{I}_i$, $i = \overline{1, 3}$ — обратимые операторы ($\mathscr{I}_1$ — оператор перестановки, $\mathscr{J}_2$ и $\mathscr{J}_3$ имеют верхнетреугольную и нижнетреугольную матрицы соответственно с обратимыми операторами на главной диагонали). $\square$

Таким образом, доказательство теоремы 1 сводится к доказательству следующей теоремы.

Теорема 6. *Состояния обратимости операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{B}$ совпадают.*

Введем операторы $J_1 \in \operatorname{Hom}(X, X^{N+1})$, $J_2 \in \operatorname{Hom}(X^{N+1}, X)$, действующие по правилам

$$(J_1 x)_1 = x,$$
$$(J_1 x)_k = 0, \quad k = \overline{2, N+1};$$

$$J_2 x = x_1, \quad x \in X^{N+1}.$$

Лемма 2. *Ядра операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{B}$ изоморфны. При этом*

$$J_1(\operatorname{Ker} \mathscr{A}) = \operatorname{Ker} \mathbb{B};$$
$$J_2(\operatorname{Ker} \mathbb{B}) = \operatorname{Ker} \mathscr{A}.$$

Заметим, что $\operatorname{Ker} \mathbb{B} = \operatorname{Ker} \mathscr{A} \times \{0\}^N$.

Доказательство. Отображение J_1, очевидно, осуществляет изоморфизм, если рассматривать его как отображение между $\operatorname{Ker} \mathscr{A}$ и $\operatorname{Ker} \mathbb{B}$. При этом J_2 является обратным отображением к J_1, если его рассмотреть как отображение между $\operatorname{Ker} \mathbb{B}$ и $\operatorname{Ker} \mathscr{A}$. $\square$

Обозначим символом $\mathscr{P}_M$ множество ограниченных проекторов на подпространство M банахова пространства X.

Лемма 3. *Пусть* $\mathbb{P}$ *— ограниченный проектор на* $\operatorname{Ker}\mathbb{B}$*. Тогда его матрица имеет вид*

$$\begin{pmatrix} P & PD_2 & \cdots & PD_{N+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где $D_k \in \operatorname{End} X$*,* $k = \overline{2, N+1}$ *и* $P \in \mathscr{P}_{\operatorname{Ker}\mathscr{A}}$*. Верно и обратное: если* $P \in \mathscr{P}_{\operatorname{Ker}\mathscr{A}}$*, то оператор, заданный такой матрицей, является проектором на* $\operatorname{Ker}\mathbb{B}$*.*

Доказательство. Пусть проектор $\mathbb{P}$ задан матрицей $(P_{ij})_{n\times n}$. Покажем сначала, что $P_{ij} = 0$ для любых j и всех $i > 1$.

Пусть $x \in X$, $y^j \in X^{N+1}$, $j = \overline{1, N+1}$ и $y^j_k = \delta_{kj}x$, $k = \overline{1, N+1}$, где δ_{kj} — символ Кронекера. По определению проектора $\mathbb{P}y^j \in \operatorname{Ker}\mathbb{B}$, а значит $(\mathbb{P}y^j)_i = 0$ для всех $i > 1$.

$$(\mathbb{P}y^j)_i = \sum_{k=0}^{N} P_{ik}y^j_k = \sum_{k=0}^{N} P_{ik}\delta_{kj}x = P_{ij}x = 0, \quad j = \overline{1, N+1},\ i = \overline{2, N+1}.$$

Значит, в силу произвольности x, $P_{ij} = 0$, $j = \overline{1, N}$, $i = \overline{2, N+1}$.

Покажем, что P_{11} — проектор на $\operatorname{Ker} A$. Проверим идемпотентность. Пусть $x \in X$. Тогда, поскольку $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$ для всех $j = \overline{1, n}$, то

$$P_{1j}x = (\mathbb{P}y^j)_1 = (\mathbb{P}^2 y_j)_1 = \sum_{k=0}^{N+1} P_{1k}(\mathbb{P}y^j)_k = P_{11}(\mathbb{P}y^j)_1 = P_{11}P_{1j}x.$$

Значит $P_{1j} = P_{11}P_{1j}$, $j = \overline{1, N+1}$.

Поскольку $\mathbb{P}y^1 \in \operatorname{Ker}\mathbb{B}$, $P_{11}x = (\mathbb{P}y^1)_1 \in \operatorname{Ker} A$, а значит $\operatorname{Im}(P_{11}) \subset \operatorname{Ker} A$.

Взяв $x \in \operatorname{Ker} A$ (следовательно, $y^1 \in \operatorname{Ker}\mathbb{B}$) получим

$$x = y^1_1 = (\mathscr{P}y^1)_1 = P_{11}x,$$

откуда $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Im}(P_{11})$. Таким образом, $\operatorname{Im}(P_{11}) = \operatorname{Ker} A$ и $P_{11} \in \mathscr{P}_{\operatorname{Ker} A}$.

Обратное утверждение очевидно. $\square$

Доказательство теоремы 6. Из лемм 2 и 3 следует, что свойства (1-4) определения 1 для операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{B}$ выполняются или не выполняются одновременно.

Перейдём к рассмотрению свойств образов операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{B}$. Очевидно, что

$$\operatorname{Im} \mathbb{B} = \operatorname{Im} \mathscr{A} \times \underbrace{X \times \ldots \times X}_{N \text{ раз}}.$$

Отсюда сразу получаем, что образы этих операторов замкнуты или не замкнуты (плотны или не плотны, совпадают или не совпадают со всем пространством) одновременно (свойства (5), (9-10), (11) определения 1). Ясно, что свойства (6) и (12) также являются общими для рассматриваемых операторов в силу леммы 2.

Пусть подпространство $\operatorname{Im} \mathscr{A}$ замкнуто. Тогда можно рассматривать факторпространство $X/\operatorname{Im} \mathscr{A}$. Далее, поскольку пространство $X^{N+1}/\operatorname{Im} \mathbb{B}$ и пространство $(X/\operatorname{Im} \mathscr{A}) \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}$ канонически изоморфны, свойства (7-8) для операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{B}$ также выполняются или не выполняются одновременно. $\square$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим разложение $\widetilde{\mathbb{A}} = \mathscr{J}_1 \mathscr{J}_2 \mathbb{B} \mathscr{J}_3$. Каждый из операторов в этом разложении обратим. Запишем обратные к ним (проверяется непосредственно):

$$\mathscr{J}_3^{-1} \sim \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A^2 & A & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{N-1} & A^{N-2} & A^{N-3} & \ddots & I & 0 \\ A^N & A^{N-1} & A^{N-2} & \cdots & A & I \end{pmatrix}; \quad \mathscr{J}_2^{-1} \sim \begin{pmatrix} I & B_1 & B_2 & \cdots & B_N \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{B}^{-1} \sim \begin{pmatrix} \mathscr{A}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I \end{pmatrix}; \qquad \mathscr{I}_1^{-1} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\widetilde{\mathbb{A}}^{-1} = \mathscr{I}_3^{-1}\mathbb{B}^{-1}\mathscr{I}_2^{-1}\mathscr{I}_1^{-1}$. Перемножая соответствующие матрицы, получим матрицу для оператора $\widetilde{\mathbb{A}}^{-1}$, откуда нетрудно получить матрицу для оператора $\mathbb{A}^{-1}$. $\square$

Глава 3

Условия фредгольмовости разностных операторов

В этом параграфе получены необходимые и достаточные условия фредгольмовости разностного оператора вида (2.1.2), т.е. оператора

$$\mathscr{A}: l^p \to l^p,$$
$$(\mathscr{A}x)(k) = x(k+N) + C_1(k)x(k+N-1) + \ldots + C_N(k)x(k),$$
$$k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p = l^p(\mathbb{Z}, Y),\ p \in [1, \infty].$$

Условия получены на основе сопоставления разностному оператору $\mathscr{A}$ порядка N разностного оператора первого порядка $\mathbb{A}\colon l^p(\mathbb{Z}, Y^N) \to l^p(\mathbb{Z}, Y^N)$, определенного формулой (2.1.3), где $\mathscr{C}_0(k)$ — тождественный оператор в Y^N при любом $k \in \mathbb{Z}$. Эти условия описываются с использованием понятия экспоненциальной дихотомии дискретного семейства эволюционных оператоов, которое строится по операторной функции $\mathscr{C}_1\colon \mathbb{Z} \to \operatorname{End} Y^N$.

Рассмотрим разностный оператор первого порядка $\mathbb{D}$ из $\operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}, X)$ определенный формулой

$$(\mathbb{D}x)(n) = x(n) - U(n)x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, x \in l^p(\mathbb{Z}, X),$$

где $U \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$, а X — комплексное банахово пространство.

По функции U построим дискретное семейство эволюционных операторов

$$\mathscr{U}: \Delta = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m \leqslant n\} \to \operatorname{End} X,$$

определенное равенствами

$$\mathscr{U}(n,m) = \begin{cases} U(n)U(n-1)\dots U(m+1), & m < n, \\ I, & m = n, \end{cases}$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$.

Определение 3. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}$ допускает *экспоненциальную дихотомию* на множестве $\mathbb{J} \subset \mathbb{Z}$, если существуют ограниченная проекторнозначная функция $P\colon \mathbb{J} \to \operatorname{End} X$ и постоянные $M_0 \geqslant 1$, $\gamma > 0$ такие, что выполнены следующие условия

1. $\mathscr{U}(n,m)P(m) = P(n)\mathscr{U}(n,m)$, для всех $m \leqslant n$, $m, n \in \mathbb{J}$;
2. $\|\mathscr{U}(n,m)P(m)\| \leqslant M_0 \exp(-\gamma(n-m))$, для всех $m \leqslant n$, $m, n \in \mathbb{J}$;
3. для $m < n$, $m, n \in \mathbb{J}$, сужение $\mathscr{U}_{n,m} : X'(m) \to X'(n)$ оператора $\mathscr{U}(n,m)$ на область значений $X'(m) = \operatorname{Im} Q(m)$ дополнительного проектора $Q(m) = I - P(m)$ есть изоморфизм подпространств $X'(m)$ и $X'(n) = \operatorname{Im} Q(n)$. Тогда полагаем оператор $\mathscr{U}(m,n)$ равным оператору $\mathscr{U}_{n,m}^{-1}$ на $X'(n)$ и равным нулевому оператору на $X(n) = \operatorname{Im} P(n) \subset X$.
4. $\|\mathscr{U}(m,n)\| \leqslant M_0 \exp(\gamma(m-n))$ для всех $m \leqslant n$ из $\mathbb{J}$.

Пару проекторнозначных функций $P, Q\colon \mathbb{J} \to \operatorname{End} X$, участвующих в определении 3, назовём *расщепляющей парой* для семейства $\mathscr{U}$. Если $P = 0$ или $Q = 0$, то будем говорить, что для $\mathscr{U}$ имеет место *тривиальная экспоненциальная дихотомия* на $\mathbb{J}$.

Теорема 7 (([14], [24]))**.** *Для того чтобы разностный оператор $\mathbb{D} \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}, X)$, определяемый функцией $U \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$, был обратим, необходимо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}$ допускало экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}$. Если оператор $\mathbb{D}$ обратим, то обратный к нему* *определяется формулой*

$$(\mathbb{D}^{-1}y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n,m)y(m), \quad n \in \mathbb{Z}, y \in l^p(\mathbb{Z}, X),$$

где функция Грина $G\colon \mathbb{Z}^2 \to \operatorname{End} X$ *имеет вид*

$$G(n,m) = \begin{cases} \mathscr{U}(n,m)P(m), & m \leqslant n, \\ -\mathscr{U}(n,m)Q(m), & m > n, \end{cases}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Этот результат для случая $p = \infty$ имеется в монографии Д. Хенри [6] (в статье [14] была устранена неточность в доказательстве аналога теоремы 7 из этой монографии).

Далее используется

Предположение 1. Существуют числа $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leqslant b$, такие, что семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}$ (построенное по функции $U\colon \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$) допускает экспоненциальную дихотомию на множествах $\mathbb{Z}_{-,a} = \{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant a\}$, $\mathbb{Z}_{b,+} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant b\}$ с расщепляющими парами проекторнозначных функций

$$P_-, Q_- \colon \mathbb{Z}_{-,a} \to \operatorname{End} X,$$
$$P_+, Q_+ \colon \mathbb{Z}_{b,+} \to \operatorname{End} X.$$

Определим оператор $\mathscr{N}_{b,a}\colon \operatorname{Im} Q_-(a) \to \operatorname{Im} Q_+(b)$, равенством

$$\mathscr{N}_{b,a}x = Q_+(b)\mathscr{U}(b,a)x, \quad x \in \operatorname{Im} Q_-(a).$$

Этот оператор введён в рассмотрение в статьях [15], [16] и назван «узловым». Важность его обусловлена тем, что он действует между подпространствами «фазового» пространства X, а не в $l^p(\mathbb{Z}, X)$.

Имеет место следующая теорема ([15], [16]).

Теорема 8. *Пусть для семейства эволюционных операторов* $\mathscr{U} : \Delta \to \operatorname{End} X$, *построенным по функции* $U\colon \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$ *выполнены условия предположения 1.*

Тогда имеет место равенство

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\, \mathbb{D} = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}\, \mathscr{N}_{b,a}.$$

В частности, для фредгольмовости разностного оператора $\mathbb{D}$, *необходимо и достаточно, чтобы узловой оператор* $\mathscr{N}_{b,a}\colon \operatorname{Im} Q_-(a) \to \operatorname{Im} Q_+(b)$ *являлся фредгольмовым оператором. При условии фредгольмовости узлового оператора имеют иместо равенства:*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathbb{D} = \dim \operatorname{Ker} \mathscr{N}_{b,a}, \quad \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathbb{D} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathscr{N}_{b,a},$$
$$\operatorname{ind} \mathbb{D} = \operatorname{ind} \mathscr{N}_{b,a}.$$

Рассмотрим разностный оператор (см. формулу (2.1.4))

$$\mathbb{D} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{S}^{-1}(\mathbb{S} + \mathbb{A}_1) \in \operatorname{End} l^p(\mathbb{Z}, Y^N)$$
$$(\mathbb{D}x)(n) = x(n) + \mathscr{C}_1(n)x(n-1), \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, Y^N).$$

Заметим, что его состояния обратимости совпадают с состояниями обратимости оператора $\mathscr{A}$.

Определение 4. Семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}_1\colon \mathbb{Z}^2 \to \operatorname{End} Y^N$, построенное по функции $-\mathscr{C}_1\colon \mathbb{Z} \to \operatorname{End} Y^N$, назовем *семейством эволюционных операторов для однородного разностного уравнения*

$$x(k+N) + C_1(k)x(k+N-1) + \ldots + C_N(k)x(k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p(\mathbb{Z}, Y). \tag{3.0.1}$$

Из теорем 7 и 8 получаем следующие утверждения.

Теорема 9. *Для того чтобы разностный оператор* $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p$, $p \in [1, \infty]$, *определенный формулой* (2.1.2), *был обратим, необходимо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов* $\mathscr{U}_1$, *построенное для разностного уравнения* (3.0.1), *допускало экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{Z}$.

Теорема 10. *Пусть для семейства эволюционных операторов* $\mathscr{U} = \mathscr{U}_1 \colon \Delta \to \operatorname{End} Y^N$, *построенного для разностного уравнения* (3.0.1), *выполнены условия предположения 1.*

Тогда имеет место равенство

$$\operatorname{St}_{\mathrm{inv}} \mathscr{A} = \operatorname{St}_{\mathrm{inv}} \mathscr{N}_{b,a}.$$

В частности, для фредгольмовости разностного оператора $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p$ *необходимо и достаточно, чтобы узловой оператор* $\mathscr{N}_{b,a}$ *являлся фредгольмовым оператором. При условии фредгольмовости узлового оператора имеют место равенства:*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathscr{N}_{b,a}, \quad \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathscr{N}_{b,a},$$
$$\operatorname{ind} \mathscr{A} = \operatorname{ind} \mathscr{N}_{b,a}.$$

Отметим, что в условиях теоремы 10 узловой оператор $\mathscr{N}_{b,a}$ действует между подпространствами банахова пространства Y^N.

Следствие 1. *Если оператор* $\mathscr{A}$ *фредгольмов в одном из пространств* l^p, $p \in [1, \infty]$, *то он фредгольмов и в остальных, и его индекс не зависит от значения* p.

В условиях следующей теоремы будем использовать следующее

Предположение 2. Существуют пределы

$$\lim_{n\to\pm\infty} C_i(n) = C_i^{\pm} \in \operatorname{End} X, \quad i = \overline{1, N}.$$

Под спектром операторного пучка

$$L^{\pm}(\lambda) = \lambda^N + C_1^{\pm}\lambda^{N-1} + \ldots + C_N^{\pm}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

будем понимать множество таких комплексных чисел λ, что $L^{\pm}(\lambda)$ — необратимый в $\operatorname{End} Y$ оператор.

Теорема 11. *В условиях предположения 2 разностный оператор $\mathscr{A}$ обратим, если спектральные радиусы $r(L^{\pm}) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(L^{\pm})\}$ операторных пучков $L^{\pm}$ меньше единицы.*

Доказательство. Непосредственно из теоремы 1 следует, что спектры $\sigma(\mathscr{C}_1^{\pm})$ операторов $\mathscr{C}_1^{\pm} \in \operatorname{End} Y^N$, заданных матрицами

$$\mathscr{C}_1^{\pm} \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N^{\pm} & C_{N-1}^{\pm} & C_{N-2}^{\pm} & \cdots & C_2^{\pm} & C_1^{\pm} \end{pmatrix},$$

совпадают со спектрами $\sigma(L^{\pm})$ операторных пучков $L^{\pm}$, поэтому $r(\mathscr{C}_1^{\pm}) = r(L^{\pm}) < 1$. Операторы $\mathscr{C}_1^{\pm}$ являются пределами последовательности $\mathscr{C}_1(n)$ в равномерной операторной топологии. Тогда из [15, теорема 3] следует, что оператор $\mathbb{D}$ обратим, следовательно обратим и оператор $\mathscr{A}$. $\square$

Пусть теперь оператор $\mathscr{A} \in \operatorname{End} l^p$ имеет вид:

$$(\mathscr{A}x)(k) = C_0 x(k+N) + C_1 x(k+N-1) + \ldots + C_N x(k),$$
$$k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p = l^p(\mathbb{Z}, Y),\ p \in [1, \infty],$$

то есть $C_i(k) \equiv C_i \in Y^N$, $i = \overline{0, N}$ — постоянные функции. В этом случае разностный оператор $\mathbb{A}$ задан выражением

$$(\mathbb{A}y)(k) = \mathscr{C}_0 y(k+1) + \mathscr{C}_1 y(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ y \in l^p(\mathbb{Z}; Y^N),$$

где

$$\mathscr{C}_0 \sim \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{C}_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & C_1 \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение операторнозначную функцию $H\colon \mathbb{T} \to \operatorname{End} X$:

$$H(\gamma) = \gamma^N C_0 + \gamma^{N-1} C_1 + \ldots + C_N, \quad \gamma \in \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Эту функцию назовём *характеристической функцией* оператора $\mathscr{A}$. Множество $\rho(H)$, состоящее из таких $\gamma \in \mathbb{T}$, что оператор $H(\gamma)$ обратим, назовём *резольвентным множеством* функции H, а дополнение к нему, $s(H) = \mathbb{T} \setminus \rho(H)$ — *сингулярным множеством* этой функции.

Теорема 12. *Разностный оператор $\mathscr{A}$ с постоянными коэффициентами C_i, $i = \overline{0, N}$, обратим тогда и только тогда, когда сингулярное множество $s(H)$ его характеристической функции пусто. Если $s(H) = \varnothing$, то обратный оператор $\mathscr{A}^{-1} \in \operatorname{End} l^p$ представим в виде*

$$(\mathscr{A}^{-1}x)(k) = (G * x)(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} G(k-n)x(n), \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in l^p. \tag{3.0.2}$$

Функция G принадлежит банаховой алгебре $l^1(\mathbb{Z}, \operatorname{End} Y)$ (со свёрткой функ-

ций в качестве умножения) и допускает представление вида

$$G(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} (H(\gamma))^{-1} \gamma^n \, \mathrm{d}\gamma, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Разностный оператор первого порядка $\mathbb{A}$ с постоянными коэффициентами обратим тогда и только тогда, когда сингулярное множество его характеристической функции $\mathscr{H}(\gamma) = \gamma\mathscr{C}_0 + \mathscr{C}_1$ пусто (иначе говоря, спектр линейного операторного пучка не содержит точек единичной окружности) [27, теорема 3]. Запишем матрицу оператора $\mathscr{H}(\gamma)$:

$$\mathscr{H}(\gamma) \sim \begin{pmatrix} \gamma I & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma I & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma I & -I \\ C_N & C_{N-1} & C_{N-2} & \cdots & C_2 & \gamma C_0 + C_1 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 1 следует, что состояния обратимости операторов $\mathscr{H}(\gamma)$ и $H(\gamma)$ совпадают. Значит $s(H) = s(\mathscr{H})$. Отсюда получаем первое утверждение теоремы.

Заметим, что $G(n)$ представляют собой коэффициенты Фурье функции $(H(\gamma))^{-1}$, которая является голоморфной в окрестности единичной окружности как резольвента полиномиального операторного пучка. Следовательно, её ряд Фурье сходится абсолютно, откуда и следует, что $G \in l^1(\mathbb{Z}, \operatorname{End} Y)$. Благодаря этому, оператор $\mathscr{A}^{-1}$, задаваемый формулой (3.0.2), определен корректно. Непосредственная проверка показывает, что этот оператор является обратным к оператору $\mathscr{A}$. $\square$

Предположение 3. Все решения однородного разностного уравнения

$$x(k+N) + C_1 x(k+N-1) + \ldots + C_N x(k) = 0, \tag{3.0.3}$$

рассматриваемого на $\mathbb{Z}_+$ ограничены.

В условиях предположения 3 любое решение $x \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, Y)$ однородного уравнения удовлетворяет равенствам

$$\begin{pmatrix} x(n) \\ x(n+1) \\ \vdots \\ x(n+N-2) \\ x(n+N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ -C_N & -C_{N-1} & \cdots & -C_2 & -C_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{pmatrix}.$$

Тогда из ограниченности всех решений однородного уравнения и теоремы БанахаШтейнгауза следует, что

$$\sup_{n\geqslant 0} \|\mathscr{C}_1^n\| = M(\mathscr{C}_1) < \infty.$$

Следовательно, спектральный радиус оператора $\mathscr{C}_1$ не превосходит единицы, т.е.

$$\sigma(\mathscr{C}_1) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geqslant 1\}.$$

Теперь можно применить результат из [17, теорема 1]:

Теорема 13. *Пусть выполнены условия предположения 3 и*

$$\sigma(\mathscr{C}_1) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}.$$

Тогда существуют операторнозначные функции $A_k \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, \operatorname{End} Y^N)$, $k = \overline{1,m}$, такие что для любого решения $x\colon \mathbb{Z}_+ \to Y$ уравнения 3.0.3 имеют место следующие представления

$$(x(n), x(n{+}1), \ldots, x(n{+}N{-}1)) = \left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_k^n A_k(n)\right)(x(0), x(1), \ldots, x(N{-}1)), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Функции A_k, $k = \overline{1,m}$ обладают следующими свойствами:

1. *операторы* $A_k(n) \in \operatorname{End} Y^N$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *принадлежат наименьшей замкнутой подалгебре* $\mathscr{A}_{\mathscr{C}_1}$ *из* $\operatorname{End} Y^N$, *содержащей оператор* $\mathscr{C}_1$;

2. $\lim_{n\to\infty} \|A_k(n+1) - A_k(n)\| = 0$;

3. $\lim_{n\to\infty} \|\mathscr{C}_1 A_k(n) - \gamma_k A_k(n)\| = 0$;

4. $\lim_{n\to\infty} \|A_k(n)A_j(n)\| = 0$ *для* $k \neq j$, $k, j = \overline{1, m}$.

В заключение отметим, что основные результаты статьи (теоремы 1-5) имеют место для разностных операторов, действующих в весовых пространствах последовательностей векторов (см. статьи [18], [19], [20]).

Список литературы

1. *Антоневич. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход. — 1988.
2. *Antonevich A.*, *Lebedev A.* Functional differential equations: I. C^*-theory, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 70. — Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, England, 1994.
3. *Курбатов В. Г.*, *Садовский Б. Н.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронежского ун-та, 1990.
4. *Kurbatov V. G.* Functional differential operators and equations. Т. 473. — Springer Science & Business Media, 1999.
5. *Массера Х.*, *Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональный анализ. — Мир, 1970.
6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — Мир, 1985.
7. *Megan M.*, *Sasu A. L.*, *Sasu B.* Discrete admissibility and exponential dichotomy for evolution families // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2003. — Т. 9, № 2. — С. 383—398.
8. *Dorogovtsev A. Y.* Periodicity in distribution. I. Discrete systems // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2002. — Т. 30, № 2. — С. 65—127.
9. *Chicone C.*, *Latushkin Y.* Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations. Т. 70. — American Mathematical Soc., 1999.
10. *Баскаков А. Г.* Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Математические заметки. — 1992. — Т. 52, № 2. — С. 17—26.

11. *Baskakov A. G.*, *Krishtal I. A.* Memory estimation of inverse operators // Journal of Functional Analysis. — 2014. — Т. 267, № 8. — С. 2551—2605.

12. *Баскаков А. Г.* Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений // Математический сборник. — 2015. — Т. 206, № 8. — С. 23—62.

13. *Баскаков А. Г.*, *Дуплищева А. Ю.* Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2015. — Т. 79, № 2. — С. 3—20.

14. *Баскаков А. Г.*, *Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 6. — С. 1231—1243.

15. *Баскаков А. Г.* Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов // Математические заметки. — 2000. — Т. 67, № 6. — С. 816—827.

16. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи математических наук. — 2013. — Т. 68, 1 (409. — С. 77—128.

17. *Баскаков А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Математические заметки. — 2015. — Т. 97, № 2. — С. 174—190.

18. *Бичегкуев М. С.* О спектре разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах // Функциональный анализ и его приложения. — 2010. — Т. 44, № 1. — С. 80—83.

19. *Бичегкуев М. С.* К спектральному анализу разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах // Математический сборник. — 2013. — Т. 204, № 11. — С. 3—20.

20. *Бичегкуев М. С.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах функций // Математические заметки. — 2014. — Т. 95, № 1. — С. 18—25.

21. *Shkaliko A.* Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula // Recent Developments in Operator Theory and its Applications. — Springer, 1996. — С. 358—385.

22. *Гринив Р. О.*, *Шкаликов А. А.* Экспоненциальная устойчивость полугрупп, связанных с некоторыми операторными моделями в механике // Математические заметки. — 2003. — Т. 73, № 5. — С. 657—664.

23. *Данфорд Н.*, *Шварц Д. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — Издательство иностранной литературы, 1966.

24. *Baskakov A.*, *Krishtal I.* Spectral analysis of operators with the two-point Bohr spectrum // Journal of mathematical analysis and applications. — 2005. — Т. 308, № 2. — С. 420—439.

25. *Баскаков А. Г.*, *Чернышов К. И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Математический сборник. — 2002. — Т. 193, № 11. — С. 3—42.

26. *Баскаков А. Г.* Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов // Математические заметки. — 2008. — Т. 84, № 2. — С. 175—192.

27. *Баскаков А. Г.* Об обратимости линейных разностных операторов с постоянными коэффициентами // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2001. — № 5.