

Méthodes numériques pour les écoulements compressibles
Restauration de la surface de contact dans le solveur HLL-Riemann
E.F. Toro, M. Spruce, W. Spears

Présentation par Khaled SAAD

Université de Bordeaux

Mercredi 22 Janvier 2019

Le problème de Riemann pour les équations d'Euler

Le problème de Riemann pour les équations d'Euler dépendantes du temps unidimensionnel est le problème de la valeur initiale pour les lois de conservation :

$$U_t + [F(U)]_x = 0$$

où $U \in \mathbb{R}^n$, U est le vecteur des variables conservatives, F est les flux correspondants.

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}$$

où ρ : la densité, ρu : momentum, u : la velocity, E : l'énergie totale où $E = \frac{\rho u^2}{2} + \rho e$ avec e désignant une énergie interne spécifique ou intrinsèque, $e = e(\rho, p) = \frac{p(1-\gamma)}{(\gamma-1)\rho}$ où γ est le rapport entre les chaleurs spécifiques et b le covolume. Pour $b = 0$, on récupère l'équation d'état du gaz idéal.
avec condition initial :

$$U(x, 0) = U^{(0)}(x) = \begin{cases} U_L & \text{si } x < 0 \\ U_R & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Le problème de Riemann pour les équations d'Euler

Les équations d'Euler ont des solutions discontinues (ondes de choc, contacts) et il est donc plus approprié de reformuler les équations différentielles sous forme intégrale :

$$\oint (U dx - F(U) dt) = 0$$

on résout le problème général de la valeur de limite initiale par le schéma conservateur explicite :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}]$$

Le choix du flux numérique $F_{i+\frac{1}{2}}$ détermine le schéma.

Le flux de Godunov (Godunov 1959) est :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} F(U_{i+\frac{1}{2}}(0)) dt = F(U_{i+\frac{1}{2}}(0))$$

dans lequel $U_{i+\frac{1}{2}}(0)$ est la solution de similarité exacte du problème de Riemann évalué à $\frac{x}{t} = 0$.

Schéma HLL (Harten, Lax et van Leer)

Ils proposent de considérer un problème de Riemann à deux ondes seules les ondes non linéaires sont appliqués dans le calcul. Ces ondes séparent une zone d'état constant U^{hll} .

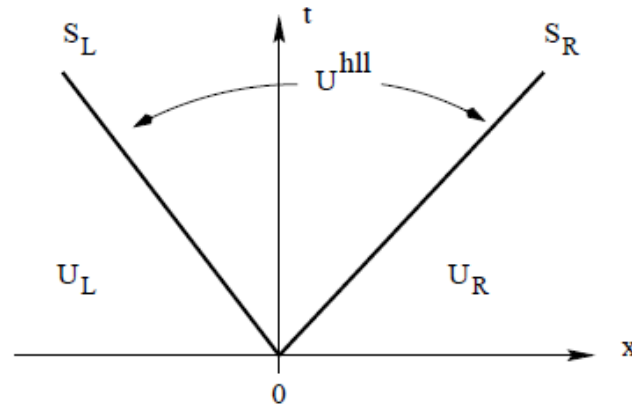


FIGURE – Résolution approximative de HLL de Riemann. La solution dans la région étoile consiste en un seul état U^{hll} séparée des états de données par deux vagues de vitesse S_L et S_R .

Le solveur approximative de Riemann HLL

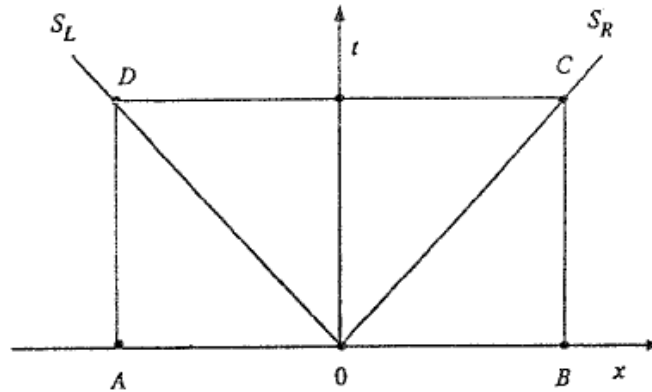


FIGURE – Structure d'onde simplifiée pour le solveur de Riemann approximative HLL d'origine en cas d'écoulement subsonic.

L'intégration de la loi de conservation $\oint (Udx - F(U)dt) = 0$ sur le rectangle ABCD donne :

$$U^{hll} = \frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L}$$

Le Flux du schéma HLL

Le flux intercellulaire HLL correspondant a la méthode approximative de Godunov est alors donné par :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{hll} = \begin{cases} F_L & \text{si } 0 \leq S_L \\ \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L} & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_R \\ F_R & \text{si } 0 \geq S_R \end{cases}$$

Schéma HLLC

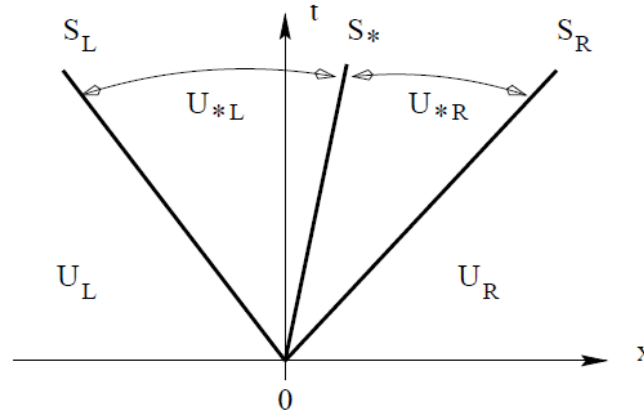


FIGURE – Résolution approximative de HLLC de Riemann. La solution dans la région étoile consiste en deux états constants séparés l'un de l'autre par une onde moyenne de vitesse S^* .

- C signifie contact.
- C'est une extension de Solveur HLL (Solveur numérique de Riemann développé par Harten et al. [1983]) dans laquelle la discontinuité de contact a été restaurée. (Toro et al. [1994])
- Maintenant, la région étoile a deux sous-régions.

Le solveur approximative de Riemann HLLC (Toro et al, 1992)

Considérons le volume de contrôle définie par $V = [x_L, x_R] \times [0, T]$:

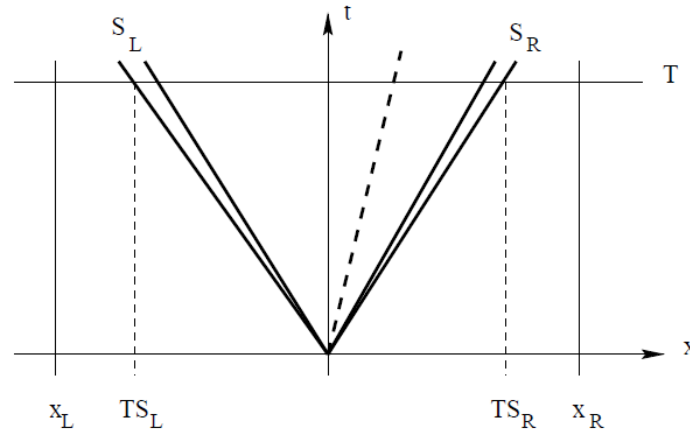


FIGURE – Contrôle du volume $[x_L, x_R] \times [0, T]$ sur le plan x - t . S_L et S_R sont les vitesses de signal les plus rapides résultant de la solution du problème de Riemann.

Évaluation de la forme intégrale des lois de conservation dans le volume de contrôle reproduit le résultat de U^{hl} , même si les variations de l'intégrale à travers l'onde de vitesse S^* sont permis.

Le solveur approximative de Riemann HLLC (Toro et al, 1992)

L'intégration de la forme intégrale des lois de conservations dans le volume de contrôle $[x_L, x_R] \times [0, T]$, donne :

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = \int_{x_L}^{x_R} U(x, 0) dx + \int_0^T F(U(x_L, T)) dt + \int_0^T F(U(x_R, T)) dt$$

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = x_R U_R - x_L U_L + T(F_L - F_R)$$

ou $F_L = f(U_L)$ et $F_R = f(U_R)$

Maintenant, nous séparons l'intégrale du côté gauche en trois intégrales, à savoir :

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = \int_{x_L}^{TS_L} U(x, T) dx + \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx + \int_{TS_R}^{x_R} U(x, T) dx$$

Et évaluer le premier et 3ème terms dans le côté droite, nous obtenons :

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx + (TS_L - x_L)U_L + (x_R - TS_R)U_R$$

par identification, nous obtenons :

$$\int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx = T(S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R)$$

Le solveur approximative de Riemann HLLC (Toro et al, 1992)

D'où nous avons :

$$\int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx = T(S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R)$$

En divisant par la longueur $T(S_R - S_L)$ qui est la largeur du système d'ondes de la solution du problème de Riemann entre les signaux les plus lents et les plus rapides au temps T , on a :

$$\frac{1}{T(S_R - S_L)} \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx = \frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L} = U^{hll}$$

En divisant la côte gauche en deux termes, nous obtenons :

$$\frac{1}{T(S_R - S_L)} \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx = \frac{1}{T(S_R - S_L)} \int_{TS_L}^{TS^*} U(x, T) dx + \frac{1}{T(S_R - S_L)} \int_{TS^*}^{TS_R} U(x, T) dx$$

Le solveur approximative de Riemann HLLC (Toro et al, 1992)

Nous définissons les moyennes intégrales :

$$U_L^* = \frac{1}{T(S^* - S_L)} \int_{TS_L}^{TS^*} U(x, T) dx$$

$$U_R^* = \frac{1}{T(S_R - S^*)} \int_{TS^*}^{TS_R} U(x, T) dx$$

La condition de consistance devient :

$$\left(\frac{S^* - S_L}{S_R - S_L}\right) U_L^* + \left(\frac{S_R - S^*}{S_R - S_L}\right) U_R^* = U^{hll}$$

Le solveur approximative de Riemann HLLC (Toro et al, 1992)

Le solveur approximatif de Riemann est donc :

$$\widetilde{U(x, T)} = \begin{cases} U_L & \text{si } \frac{x}{t} \leq S_L \\ U_L^* & \text{si } S_L \leq \frac{x}{t} \leq S^* \\ U_R^* & \text{si } S^* \leq \frac{x}{t} \leq S_R \\ U_R & \text{si } \frac{x}{t} \geq S_R \end{cases}$$

Donc nous cherchons un flux numérique HLLC correspondant défini comme :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{hllc} = \begin{cases} F_L & \text{si } 0 \leq S_L \\ F_L^* & \text{si } S_L \leq 0 \leq S^* \\ F_R^* & \text{si } S^* \leq 0 \leq S_R \\ F_R & \text{si } 0 \geq S_R \end{cases}$$

Calcul des flux HLLC ($S_L \leq 0 \leq S_R$)

Considérons le volume de contrôle définie par $V = [x_L, x_R] \times [0, T]$.

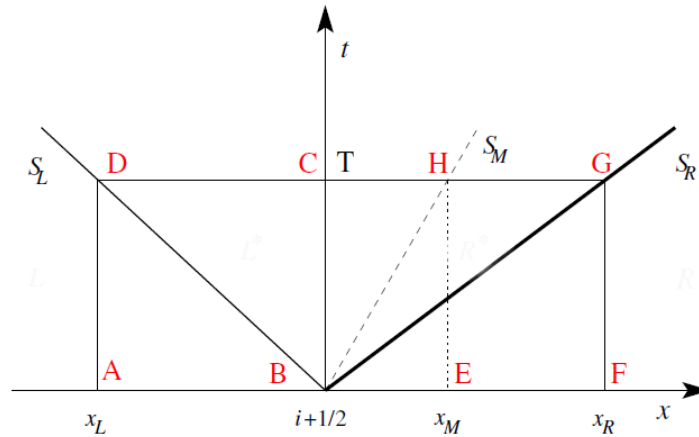


FIGURE – Schéma de l'approximation du solveur HLLC au point $i+\frac{1}{2}$, dans un diagramme (x, t) .

Les indices L et R remplacent respectivement par i et $i+1$.

Calcul des flux HLLC ($S_L \leq 0 \leq S_R$)

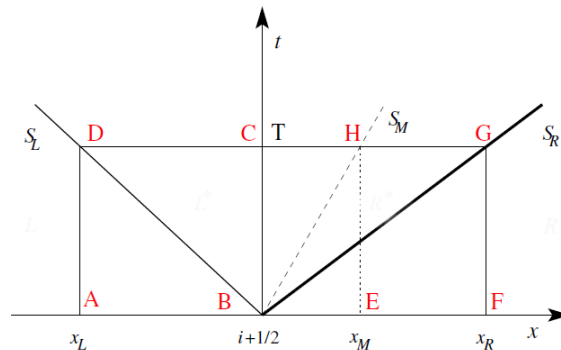


FIGURE – Schema de l'approximation du solveur HLLC au point $i+\frac{1}{2}$, dans un diagramme (x,t) .

En évaluant l'intégrale de la loi de conservation $\oint (Udx - F(U)dt) = 0$ sur le rectangle ABCD :

$$\int_{x_L}^0 U_L dx - \int_0^T F_L^* dt + \int_0^{x_L} U_L^* dx - \int_T^0 F_L dt = 0$$

$$-x_L U_L - T F_L^* + x_L U_L^* + F_L T = 0$$

$$d'où \quad F_L^* = F_L + S_L(U_L^* - U_L)$$

Calcul des flux HLLC ($S_L \leq 0 \leq S_R$)

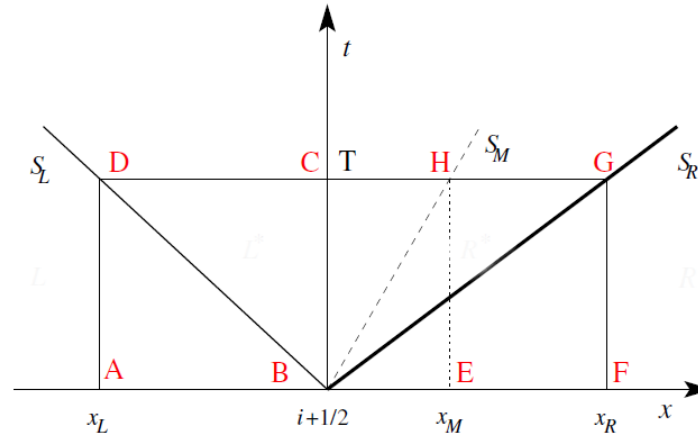


FIGURE – Schéma de l'approximation du solveur HLLC au point $i+\frac{1}{2}$, dans un diagramme (x,t) .

En calculant le même integrale dans le rectangle EFGH :
 nous obtenons :

$$F_R^* = F_R + S_R(U_R^* - U_R)$$

Calcul des flux HLLC ($S_L \leq 0 \leq S_R$)

Donc :

$$F_L^* = F_L + S_L(U_L^* - U_L)$$

et

$$F_R^* = F_R + S_R(U_R^* - U_R)$$

Nous avons 4 vecteurs inconnus :

$$U_L^*, U_R^*, F_L^*, F_R^*$$

D'abord résoudre pour les états :

$$U_L^*, U_R^*$$

Puis résoudre pour les flux :

$$F_L^*, F_R^*$$

Calcul le flux HLLC pour les équations d'Euler ($S_L \leq 0 \leq S_R$)

Il y a plus d'inconnues que d'équations et certaines conditions supplémentaires doivent être imposées pour résoudre le problème algébrique. Les conditions évidentes à imposer sont celles qui sont satisfaites par la solution exacte (Toro 1999 [Springer]); pour la pression et la composante normale de la vitesse, nous avons :

$$p_L^* = p_R^* = p^*$$

et

$$u_L^* = u_R^* = u^*$$

En outre, il est tout à fait justifié et pratique de définir :

$$u^* = S^*$$

Si une estimation de S^* est connue, la composante de vitesse normale u^* dans la région étoile est connue.

Calcul le flux HLLC pour les équations d'Euler ($S_L \leq 0 \leq S_R$)

On a déjà :

$$F_L^* = F_L + S_L(U_L^* - U_L)$$

Soit

$$S_L U_L^* - F_L^* = S_L U_L - F_L$$

Que l'en écrire entièrement :

$$S_L \begin{bmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* u_L^* \\ E_L^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_L^* u_L^* \\ \rho_L^* u_L^{*2} + p_L^* \\ u_L^* (E_L^* + p_L^*) \end{bmatrix} = S_L \begin{bmatrix} \rho_L \\ \rho_L u_L \\ E_L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_L u_L \\ \rho_L u_L^2 + p_L \\ u_L (E_L + p_L) \end{bmatrix}$$

Calcul le flux HLLC pour les équations d'Euler ($S_L \leq 0 \leq S_R$)

On obtient un système d'équations dont la résolution donne l'expression ci-dessous :

$$E_L^* = \frac{E_L(S_L - u_L) - u_L p_L + S^* p_L^*}{S_L - S^*}$$

En résumé, on peut écrire :

$$U_L^* = \begin{bmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* u_L^* \\ E_L^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* S^* \\ E_L^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_L(S_L - u_L)}{S_L - S^*} \\ \frac{\rho_L u_L(S_L - u_L) + p_L^* - p_L}{S_L - S^*} \\ \frac{E_L(S_L - u_L) - u_L p_L + S^* p_L^*}{S_L - S^*} \end{bmatrix}$$

Calcul le flux HLLC pour les équations d'Euler ($S_L \leq 0 \leq S_R$)

De même façon similaire , nous obtenons :

$$U_R^* = \begin{bmatrix} \rho_R^* \\ \rho_R^* u_R^* \\ E_R^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_R^* \\ \rho_R^* S^* \\ E_R^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_R(S_R - u_R)}{S_R - S^*} \\ \frac{\rho_R u_R(S_R - u_R) + p_R^* - p_R}{S_R - S^*} \\ \frac{E_R(S_R - u_R) - u_R p_R + S^* p_R^*}{S_R - S^*} \end{bmatrix}$$

Calcul le flux HLLC pour les équations d'Euler ($S_L \leq 0 \leq S_R$)

Ensuite, p_L^* et p_R^* sont obtenues :

$$p_L^* = \rho_L(S^* - u_L)(S_L - u_L) + p_L$$

et

$$p_R^* = \rho_R(S^* - u_R)(S_R - u_R) + p_R$$

Nous avons imposé que $p_L^* = p_R^*$, nous obtenons l'expression de la discontinuité de contact S^*

$$S^* = \frac{\rho_R u_R (S_R - u_R) - p_R - \rho_L u_L (S_L - u_L) + p_L}{\rho_R (S_R - u_R) - \rho_L (S_L - u_L)}$$

Calcul le flux HLLC pour les équations d'Euler ($S_L \leq 0 \leq S_R$)

On peut donc déduire les expressions de F_L^* et F_R^*

$$F_L^* = \begin{bmatrix} \rho_L^* S^* \\ \rho_L^* S^{*2} + p^* \\ S^*(E_L^* + p_L^*) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F_R^* = \begin{bmatrix} \rho_R^* S^* \\ \rho_R^* S^{*2} + p^* \\ S^*(E_R^* + p_R^*) \end{bmatrix}$$

Calcul le flux HLLC pour les équations d'Euler ($S_L \leq 0 \leq S_R$)

Le cas dans lequel la vitesse de la particule u^* est négative donne résultats identiques à ceux obtenus ci-dessus pour $u^* > 0$.

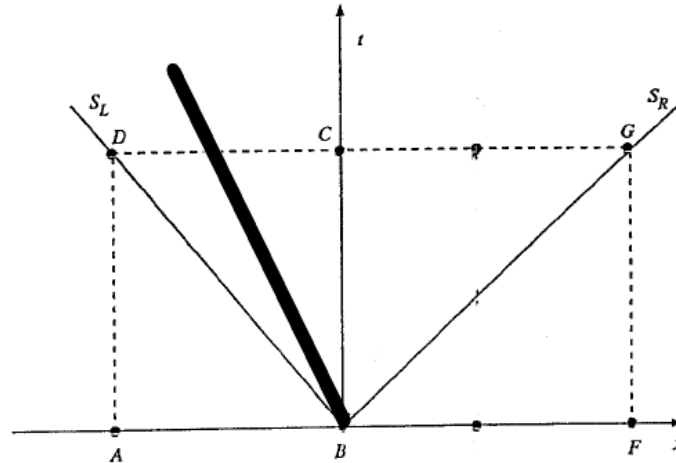


FIGURE – Résolution approximative de HLLC de Riemann. La solution dans la région étoile consiste en deux états constants séparés l'un de l'autre par une onde moyenne de vitesse $S^* < 0$.

Il y a deux autres cas à considérer.

Calcul le flux HLLC pour les équations d'Euler ($S_L \leq S_M \leq S_R \leq 0$)

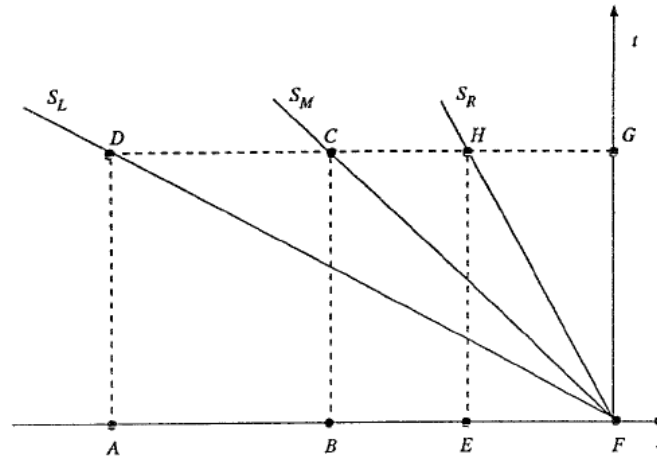


FIGURE – Structure d'onde pour le solveur HLLC Riemann actuel en cas d'écoulement supersonique gauche.

La forme d'onde de la figure ci-dessus dans laquelle ($S_L \leq S_M \leq S_R \leq 0$) est celle du flux supersonique gauche.

Calcul le flux HLLC pour les équations d'Euler ($S_L \leq S_M \leq S_R \leq 0$)

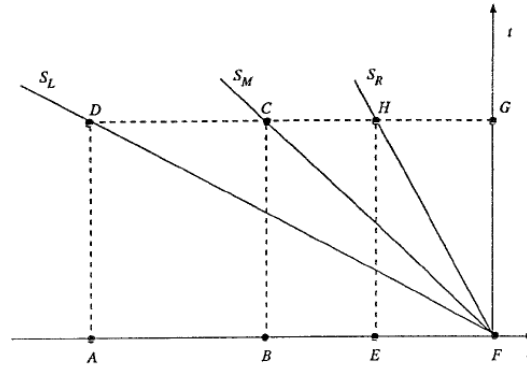


FIGURE – Structure d'onde pour le solveur HLLC Riemann actuel en cas d'écoulement supersonique gauche.

L'évaluation de l'intégrale de la loi de conservation sur le rectangle ABCD donne

$$F_L^* = F_L + S_L(U_L^* - U_L).$$

Pour obtenir F_R^* on évalue l'intégrale de la loi de conservation sur le rectangle EFGH. Le résultat est :

$$F_R^* = \frac{S_M S_R (U_R - U_L) + \frac{S_M S_R F_L}{S_L} - S_M F_R + S_R \left(1 - \frac{S_M}{S_L}\right) F_L^*}{S_R - S_M}$$

Calcul le flux HLLC pour les équations d'Euler ($0 \leq S_L \leq S_M \leq S_R$)

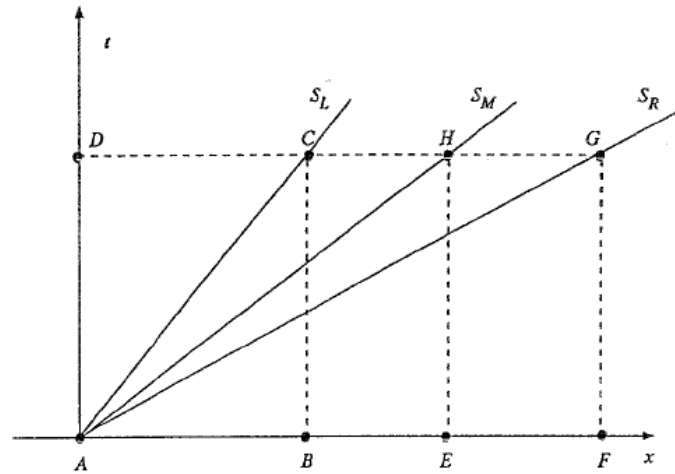


FIGURE – Structure d'onde pour le solveur HLLC Riemann actuel en cas d'écoulement supersonique droite.

La forme d'onde de la figure ci-dessus dans laquelle ($0 \leq S_L \leq S_M \leq S_R$) est celle du flux supersonique droite.

Calcul le flux HLLC pour les équations d'Euler ($0 \leq S_L \leq S_M \leq S_R$)

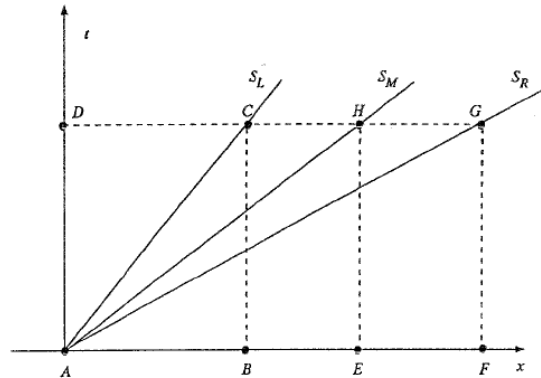


FIGURE – Structure d'onde pour le solveur HLLC Riemann actuel en cas d'écoulement supersonique droite.

L'évaluation de l'intégrale de la loi de conservation sur le rectangle ABCD donne

$$F_R^* = F_R + S_R(U_R^* - U_R).$$

Pour obtenir F_L^* on évalue l'intégrale de la loi de conservation sur le rectangle EFGH. Le résultat est :

$$F_R^* = \frac{S_M S_L (U_R - U_L) + \frac{S_M S_L F_R}{S_R} + S_M F_L - S_L \left(1 - \frac{S_M}{S_R}\right) F_R^*}{S_M - S_L}$$

Estimations de la vitesse des vagues

Il reste encore à définir les vitesses S_L et S_R .

Les mêmes variantes du schéma HLL peuvent être utilisées.

Toro (1994) propose une autre formulation pour sa version de schéma HLLC. Il a suggéré de commencer par trouver une estimation p^* de la pression dans la région étoilée, puis de prendre :

$$S_L = u_L - a_L q_L \quad \text{et} \quad S_R = u_R + a_R q_R$$

où $a_K = \sqrt{\frac{\gamma p_K}{\rho_K}}$ indique la vitesse du son et les quantités q_K vérifient (pour $K = L, R$) :

$$q_K = \begin{cases} 1 & \text{si } p^* \leq p_K \quad \text{Raréfaction} \\ \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{p^*}{p_K} - 1 \right)} & \text{si } p^* \geq p_K \quad \text{Choc} \end{cases}$$

$$\text{avec } p^* = \frac{1}{2}(p_L + p_R) - \frac{1}{2}(u_L + u_R)\bar{\rho}\bar{a}$$

$$\text{où } \bar{a} = \frac{1}{2}(a_L + a_R) \quad \text{et} \quad \bar{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R).$$

Résultats en 1D Sod's Schock tube problem

$$\gamma = 1.4$$

$$\rho_L = 1 \quad u_L = 0 \quad p_L = 1$$

$$\rho_R = 0.125 \quad u_R = 0 \quad p_R = 0.1$$

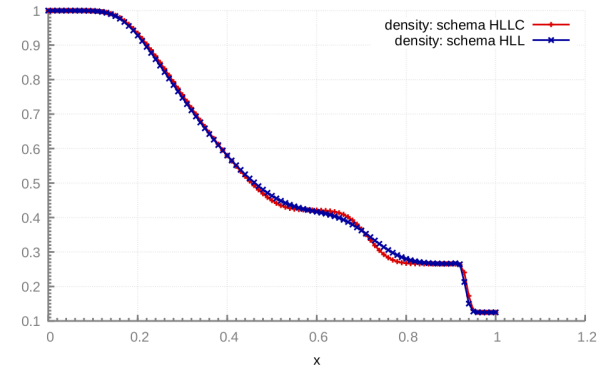


FIGURE – Density Schema HLLC-HLL

Résultats en 1D Sod's Schock tube problem

$$\gamma = 1.4$$

$$\rho_L = 1 \quad u_L = 0 \quad p_L = 1$$

$$\rho_R = 0.125 \quad u_R = 0 \quad p_R = 0.1$$

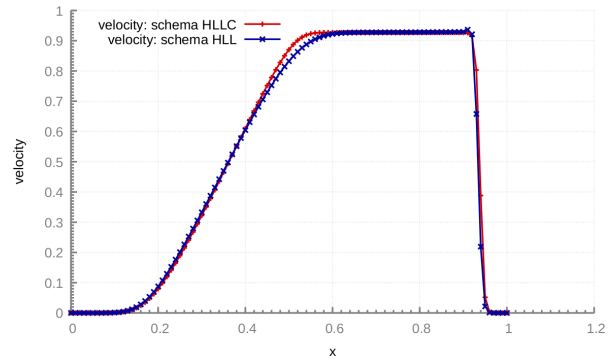


FIGURE – Velocity Schema HLLC-HLL

Résultats en 1D Sod's Shock tube problem

$$\gamma = 1.4$$

$$\rho_L = 1 \quad u_L = 0 \quad p_L = 1$$

$$\rho_R = 0.125 \quad u_R = 0 \quad p_R = 0.1$$

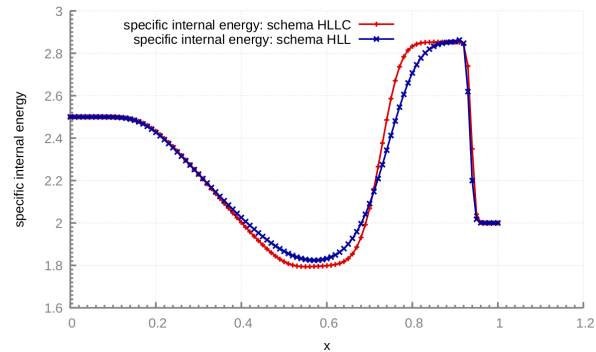


FIGURE – Internal energy Schema HLLC-HLL

Conclusion

- Dans le schéma HLLC, la discontinuité de contact manquante dans le solveur HLL Riemann a été restauré.
- Toro a présenté de nouveaux moyens de fournir des estimations de la vitesse des vagues.
- Les solutions numériques obtenues avec le solveur HLLC sont bien supérieures à celles obtenues avec le solveur HLL.
- Le résolveur HLLC présente deux avantages supplémentaires par rapport au solveur exact de Riemann, à savoir la simplicité et le traitement correct du flux sonique.
- Le choix de p^* est plus critique que celui de u^* , c'est elle qui détermine les plus grandes et les plus vitesses.

Références

[1] E F Toro, M Spruce and W Speares. Restoration of the contact surface in the Harten-Lax-van Leer Riemann solver. Shock Waves. Vol. 4, pages 25-34, 1994.

[2] Eleuterio F. Toro. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction. Third Edition Springer, Chapter 2 : 41-65 , chapter 3 : 87-108 , chapter 9 : 293-303 , chapter 10.

[3] E F Toro, M Spruce and W Speares. Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver. Technical report CoA 9204. Department of Aerospace Science, College of Aeronautics, Cranfield Institute of Technology. UK. June, 1992.

Merci