Master MAS, parcours MNCHP
Méthodes numériques pour les écoulements incompressibles

AN312
Simulation numérique par éléments finis avancés

2018/2019

Consignes générales

Chacun des projets est réalisé globalement en groupe. Ce qui est prévu correspond à 6 groupes de 3 personnes (à ajuster en fonction de l'effectif exact) :
— 3 groupes sur les projets 1 et 2
— 1 groupe pour chacun des projets 4, 5, 6.

Travail à rendre

— 1 compte-rendu (manuscrit ou .pdf) du TP en Freefem++ à faire aujourd'hui, 30/11/2018.
— 1 exposé individuel sur un des sujets numérotés dans le tableau. L'exposé doit être assez clair pour être compris par toute la classe. Il participe à la note individuelle.
— 1 compte rendu en fin de semestre, qui sera construit à partir de l'ensemble des exposés donnés pendant le semestre, puis completé.

1. Stokes `FF++`	2. Stokes Qk	3. NS `FF++`	4. Élasticité `FF++`	5. DG	6. Timoshenko
1.1	1.1	3.1	4.1		6.1
1.2	2.2		4.2=1.2	5.2	6.2
1.3	1.3	3.2	4.3	5.3	6.3
1.4	2.5≃1.4		4.4	5.4	
1.5	2.3	3.4			
1.6	1.6				

0.0.1 Planning des exposés

Le planning (à ajuster) est le suivant :

06/11/2018	13/11/2018	20/11/2018	27/11/2018	11/12/2018	janvier
1.1, 4.1, 6.1	1.2=4.2, 2.2, 6.2	5.2, 5.3, 1.3	1.4, 2.5, 4.3	1.5, 2.3, 6.3	1.6, 4.4, 5.4

1 Analyse et expériences numériques pour le problème de Stokes

1. Établir la formulation variationnelle du système de Stokes depuis sa formulation forte. Étudier l'équivalence entre les deux formulations. Expliciter les espaces de fonction naturels pour l'étude de ce système, on les notera V et Q. Voir [5] ou [3] ou [6].

Pour construire les espaces d'approximation de la vitesse et de la pression, on choisira des couples d'éléments finis parmi : $(\mathrm{P1}, \mathrm{P0})$, $(\mathrm{P1}, \mathrm{P1})$, $(\mathrm{P1b}, \mathrm{P1})$ et $(\mathrm{P2}, \mathrm{P1})$. Voir [5] par exemple (sauf pour P1b).

2. Décrire les éléments finis locaux P0, P1 et P2, vérifier qu'ils sont unisolvants, donner leurs fonctions de forme. Montrer comment ils permettent de construire des approximations conformes des espaces de fonctions du problème de Stokes. Voir [5].
3. En supposant connus le théorème d'existence et unicité des problèmes mixtes abstraits, donner les éléments de preuves du caractère bien posé du problème de Stokes. Voir [5] ou [3] ou [6].
4. Expliciter la condition inf-sup discrète. Le système linéaire du problème discret a la forme par bloc
$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Expliquer pourquoi la condition inf-sup discrète est équivalente à $\ker(B^T) = \{0\}$. Vérifier que le système linéaire est bien posé si et seulement si cette condition et vérifiée et la matrice A est définie positive. Expliquer pourquoi la propriété sur B ne découle pas de son analogue sur le problème continu. Expliquer les contre-exemples des éléments $(\mathrm{P1}, \mathrm{P0})$ et $(\mathrm{P1}, \mathrm{P1})$. Voir [3] ou [6].
5. Décrire l'élément P1b et vérifier ses propriétés. Expliquer pourquoi il permet de vérifier la condition inf-sup discrète (couplé avec l'élément P1). Voir [3] ou [6].
6. Expliquer brièvement les méthodes de la matrice d'Uzawa et de pénalisation pour résoudre le système linéaire associé au problème de Stokes. Si possible, faire le lien entre la notion de milieu quasi-incompressible et la méthode de pénalisation. Voir [3].
7. Montrer les estimations d'erreurs abstraites que l'on obtient sur le problème de Stokes, puis donner sans justification les erreurs attendues pour chacun des éléments finis ci-dessus. Voir [5] ou [3] ou [6].

En `Freefem++`, on programmera la résolution du problème de Stokes pour les combinaisons possibles entre les éléments finis $(\mathrm{P1}, \mathrm{P0})$, $(\mathrm{P1}, \mathrm{P1})$, $(\mathrm{P1b}, \mathrm{P1})$, $(\mathrm{P2}, \mathrm{P1})$ et ces deux méthodes de résolution du système linéaire. En dehors de ces choix, on s'intéressera à la convergence en maillage (ie sur une suite de maillages de plus en plus fins), au choix du paramètre de régularisation, au choix du solveur linéaire, direct ou itératif (et dans ce cas au choix de la tolérance).

Dans le cas où l'on dispose d'une solution exacte, on calculera aussi les erreurs relatives sur la vitesse et la pression :
$$e_h(u) = \frac{\|u - u_h\|_V}{\|u\|_V}, \quad e_h(p) = \frac{\|p - p_h\|_Q}{\|p\|_Q}.$$

8. Commenter les résultats obtenus pour chacun des éléments choisis au vu des études des questions 4, 5 et 7. On pourra se baser sur les cas tests CT1, CT2, CT3 (cf annexe).

2 Programmation d'éléments finis Qk pour le problème de Stokes

1. On s'intéresse au problème de Stokes, donc répondre aux questions 1, 3 et 6 du sujet 1 (*Analyse et expériences numériques pour le problème de Stokes*), qui sont communes.

On veut résoudre un problème de Stokes dans un domaine bidimensionnel qui peut être maillé avec des rectangles. On s'intéressera pour simplifier aux discrétisations par éléments finis $(\mathrm{Q1}, \mathrm{P0})$ et $(\mathrm{Q2}, \mathrm{Q1})$ dans le carré $\Omega =]0,1[\times]0,1[$.

2. Décrire les éléments finis P0, Q1 et Q2, vérifier qu'ils sont unisolvants, donner leurs fonctions de forme. Montrer comment ils permettent de construire des approximations conformes des espaces de fonctions du problème de Stokes. Voir [3] par exemple.
3. Expliquer comment on calcule les matrices élémentaires associées aux formes bilinéaires du problème de Stokes pour les éléments $(\mathrm{Q1}, \mathrm{P0})$ et $(\mathrm{Q2}, \mathrm{Q1})$. Faire référence si nécessaire à une formule de quadrature.
4. Expliquer comment on peut résoudre le problème en vitesse grâce à la méthode de la matrice d'Uzawa exposée dans [3], sans jamais assembler les matrices discrètes.
5. Répondre à la question 4 du projet 1, mais en donnant le contre-exemple qui prouve que la méthode $(\mathrm{Q1}, \mathrm{P0})$ n'est pas stable inf-sup.

On peut donc programmer en `C`, `C++` ou `Fortran` la résolution du problème de Stokes sur un carré avec les éléments $(\mathrm{Q1}, \mathrm{P0})$ et $(\mathrm{Q2}, \mathrm{Q1})$. On choisira d'assembler la matrice (stockage de matrices creuses à choisir) ou pas (comme vu question 4). Si la matrice est assemblée, on peut choisir un solveur linéaire direct, par exemple dans les bibliothèques `Lapack` ou `Umfpack`, et sinon on choisira un solveur itératif adapté au problème.

Dans le cas où l'on dispose d'une solution exacte, on calculera les erreurs relatives sur la vitesse et la pression :

$$e_h(u) = \frac{\|u - u_h\|_V}{\|u\|_V}, \quad e_h(p) = \frac{\|p - p_h\|_Q}{\|p\|_Q}.$$

6. Vérifier numériquement les propriétés de stabilité et de précision des éléments finis choisis en se basant sur les cas tests TC2 et TC3 (cf annexe).

3 Comparaison de méthodes de projection pour les équations de Navier-Stokes

1. Rappeler les équations de Navier-Stokes (incompressible, sous forme d'équations aux dérivées partielles), puis donner la formulation variationnelle de ces équations en utilisant les 2 formes bilinéaires a et b habituelles du problème de Stokes et la forme trilinéaire c supplémentaire. Définir le nombre de Reynolds, expliquer son rôle et donner quelques exemples. Détailler quelques propriétés remarquables de la forme c.
2. Expliciter les deux schémas, semi implicite (I) des notes de cours [6], et de projection de Chorin-Temam. Expliquer comment se déroule une itération en temps de ces schémas, et donner leurs propriétés de stabilité.
3. Pour discrétiser les équations de ces schémas, quels éléments finis peut-on raisonablement utiliser (lesquels ont de bonnes propriétés de stabilité) ?

On cherche à résoudre ces équations le plus précisément possible en `Freefem++`, avec les deux schémas en temps ci-dessus, et pour différents nombres de Reynolds. On pourra utiliser toute combinaison d'éléments qui semble raisonable, au vue de la question 3.

4. Décrire le cas test de la cavité entrainée tel qu'il est explicité dans l'article [2]. On commencera par le cas-test à Reynolds 1000. Quel est le critère retenu pour décider que l'on a atteind la solution stationnaire ? Quelles sont les quantités données dans les tableaux de comparaison (locales et globales) ?

On peut maintenant écrire le programme `Freefem++` pour calculer des solutions approchées sur ce cas-test. On pourra comparer les résulats obtenues sur les maillages construits avec la fonction `square` d'une part, et `mesh` appliquée à un domaine carré d'autre part. L'objectif est d'arrêter la simulation lorsque l'état stationnaire est atteind, si possible en utilisant le critère énoncé ci-dessus.

5. Évaluer les possibilités de `Freefem++` pour ce cas-test. Discuter le solveur linéaire, les pas de temps à utiliser, les résultats numériques, le nombre de Reynolds que l'on peut espérer atteindre...

4 Analyse et expériences numériques pour le problème de l'élasticité linéaire

1. Établir la formulation variationnelle du système de l'élasticité linéaire dans un sous-domaine de $\mathbb{R}^3$, depuis sa formulation forte. Étudier l'équivalence entre les deux formulations. Expliciter l'espace de fonctions naturel pour l'étude de ce système. Voir [5] ou [3].

On choisira les espaces d'approximations basés sur les éléments finis Pk avec $k \geq 1$ qui sont définis dans `Freefem++`.

2. Répondre à la question 2 du sujet 1 qui est commune avec ce sujet aussi.
3. En admettant l'inégalité de Körn, montrer pourquoi le problème de l'élasticité linéaire est bien posé, voir [5].
4. Expliquer comment on obtient l'estimation d'erreur sur la solution du problème de l'élasticité linéaire. Rappeler sans explication des erreurs d'interpolation locales des éléments finis Pk. Voir par exemple [5].

On peut alors programmer dans `Freefem++` la résolution du problème de l'élasticité linéaire avec les éléments finis Pk disponibles. Dans tous les cas, on voudra observer le solide dans ses états de repos et déformé, et le champ un champ de contrainte équivalente, par exemple la contrainte de Von Mises.

Si on dispose d'une solution exacte, on peut calculer les erreurs, sur le déplacement $e_h(u)$, les déformations $e_h(\epsilon)$, le tenseur des contraintes $e_h(\sigma)$ ou plus simplement sur la contrainte de Von Mises $e_h(\sigma_{\mathrm{VM}})$.

5. Expliquer comment on peut construire des cas tests analytiques en appliquant une force volumique arbitraire qui correspond à une solution calculée à l'avance. On peut alors utiliser de telles solutions pour vérifier les propriétés numériques des approximations.
6. Comparer également les propriétés (précision à convergence, temps de calcul) des solveurs directs et itératifs.

5 Analyse et programmation d'une méthode de Galerkin Discontinue pour l'équation de Laplace (1D)

On cherche à comprendre et mettre en œuvre la méthode « *interiori penalty* »introduite dans [1], en utilisant la version expliquée simplement dans [7].

1. Rappeler la formulation faible, son équivalence avec la formulation forte, et les espaces de fonctions associés, pour le problème $-\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u) = f$ (donner aussi les conditions sur $\sigma(x)$ pour être dans la situation du théorème de interior). Faire ce travail pour des conditions aux limites mixtes de Dirichlet et Neumann.
2. Donner la formulation faible associe à la méthode IP et les espaces de discrétisation associés. Expliquer d'où vient cette formulation, quel est le terme de pénalisation et quel est son rôle.
3. Expliciter les éléments discontinus P1 (en dimension 1 et 2) et P2 (en dimension 1 seulement) de type Lagrange avec degrés de libertés aux points de Gauss. Vérifier l'unisolvance, expliciter l'espace global d'approximation.
4. Calculer les matrices de masse élémentaires pour ces éléments en 1D, et expliciter la procédure d'assemblage du système linéaire. Expliquer pourquoi le système linéaire est non nul principalement par blocs diagonaux.

On peut maintenant programmer cette méthode sur un domaine $\Omega =]a, b[$. Pour évaluer l'impact du paramètre de pénalisation, on utilisera une méthode itérative, comme la méthode du Gradient Conjugué, pour résoudre le système linéaire. D'un point de vue numérique, on cherchera à évaluer les erreurs $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, et les valeurs du min et du max de la solution.

5. Reprendre la cas test proposé dans [7] et tenter de reproduire les résultats dans le cas des éléments P1 et P2.
6. On pourra éventuellement tester le comportement de cette méthode pour un cas test avec un coefficient de diffusion $\sigma(x)$ présentant des discontinuités. Pour cela, on peut s'inspirer des exemples de [4].

6 Analyse et programmation de modèles de poutre de Timoshenko

1. Expliquer le modèles de poutre de Timoshenko tel qu'il est décrit dans le livre [3] (on peut aussi aller chercher l'information dans l'ouvrage historique [8]). Donner le modèle original et la formulation limite qui donne lieu à un problème d'ordre 4 (Navier-Bernouilli, cas $\gamma = 0$). Pour ce problème d'ordre 4, expliquer la formulation variationnelle associée et l'espace de fonctions dans lequel on travaille.
2. Décrire les éléments finis de Hermite de degré 3, justifier l'unisolvance, donner les fonctions de forme et montrer qu'ils permettent bien de construire une approximation conforme de l'espace des solutions recherchées.
3. Expliquer le calcul des matrices élémentaires nécessaire à l'assemblage du système linéaire, et donner explicitement ces matrices.
4. Expliquer l'algorithme d'assemblage de la matrice et du second membre du système linéaire.

A priori, on assemble explicitement la matrice, puis on utilise un solveur direct pour résoudre le système linéaire. On aura le choix entre les solveurs des bibliothèques `Lapack` et `Umfpack` par exemple. Il faudra choisir la structure de donnée de matrice creuse cohérente avec ce choix.

5. Vérifier les propriétés numérique du schéma en essayant de reproduire le cas test proposé dans la section 4.2.5 de [3].

Annexe : cas-tests avec solution analytique pour le problème de Stokes

CT1 : solution affine dans un triangle. Le domaine Ω est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$, on choisit comme solution $u(x,y) = \begin{pmatrix} x & -y \end{pmatrix}$, et $p(x,y) = x+y+c$, qui est bien solution du problème de Stokes avec $f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

CT2 : solution affine dans un cube. Le domaine Ω est le cube $]0,1[^3$, on choisit comme solution $u(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & -2z \end{pmatrix}$, et $p(x,y) = x+y+z+c$, qui est bien solution du problème de Stokes avec $f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

CT3 : profil de Poiseuille Le domaine Ω est le cylindre $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \sqrt{x^2+y^2} < 1, \text{ et } 0 < z < L\}$ dans $\mathbb{R}^3$ et le rectangle $(x,z) \in]-1,1[\times]0,L[$ dans $\mathbb{R}^2$. On impose une vitesse nulle sur tous les bords sauf sur les plans d'entrée $z=0$ et de sortie $z=L$. La solution dans le domaine de $\mathbb{R}^3$ est $u(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-x^2-y^2 \end{pmatrix}$, et $p(x,y,z) = -4z+c$. Dans $\mathbb{R}^2$, il suffit de prendre $u(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1-x^2 \end{pmatrix}$, et $p(x,z) = -2z+c$ Pour ces deux problème, le débit total est $D = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}(1-r^2)rdrd\theta$ (resp. $D = \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$ – puisque la densité est $\rho = 1$). On peut imposer en entrée ($z=0$), soit le profil de Poiseuille défini ci-dessus, soit une vitesse constante qui redonne le même débit. Dans cette deuxième situation, on pourra comparer le profil de vitesse en aval avec un profil de Poiseuille.

Références

[1] Douglas N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(4), 1982.

[2] Charles-Henri Bruneau and Mazen Saad. The 2D lid-driven cavity problem revisited. *Computers & Fluids*, 35(3), 2006.

[3] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. *Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre.* Springer-Verlag Berin Heidelberg, 2002.

[4] R. Herbin and F. Hubert. Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids. In *Finite Volume For Complex Applications, Problems And Perspectives. 5th International Conference*, pages 659–692. London (UK), Wiley, 2008.

[5] Pierre-Arnaud Raviart and Jean-Marie Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Dunod, 2004.

[6] J.-F. Scheid. Analyse numérique des équations de navier-stokes, yyyy.

[7] Khosro Shahbazi. An explicit expression for the penalty parameter of the interior penalty method. *Journal of Computational Physics*, 205(2) :401 – 407, 2005.

[8] S Timoshenko. *Théorie de l'élasticité.* Paris et Liège, Livrairie polytechnique Ch. Béranger, 1948.