Master MAS, parcours MNCHP
Méthodes numériques pour les écoulements incompressibles

AN312
Simulation numérique par éléments finis avancés

2018/2019
Préparer par Khaled Saad

Exercice 1 : Problème de Laplace

$$-\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u = g \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{1}$$

où $\xi^T a(x)\xi \geq a_0|\xi|^2$ (pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$) avec $a_0 > 0$, et $x \mapsto a(x)$ est une fonction mesurable et majorée.

Le fichier `laplace.edp` va nous servir de modèle. Il permet de faire un calcul d'erreur de convergence pour un problème du type (1) avec $a(x) = 1$, dont on connaît la solution exacte. Ici, on a choisit la fonction $u(x,y) = x(1-x) * y(1-x)$ qui est telle que $u(x,y) = 0$ sur $\partial\Omega$. Le script permet de répéter le calcul sur une famille de maillage du plus en plus fins, de telle sorte que l'on peut étudier la convergence et l'erreur commise par le schéma.

1. Programmer le calcul de l'erreur en norme H^1, définie par $E_{H^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla u_h|^2\, dx\right)^{1/2}$. Puis rajouter le graphe de cette erreur sur le graphique précédent. À partir de vos connaissance sur les éléments finis, que pouvez vous dire de ces graphes de convergence ?

   Donner les tableaux de valeurs $\min(u_h(x))$, $\max(u_h(x))$, et $\min(u(x))$, $\max(u(x))$. Pour certaines applications, il est important de conserver ces min et max. Que se passe-t-il pour notre problème ?

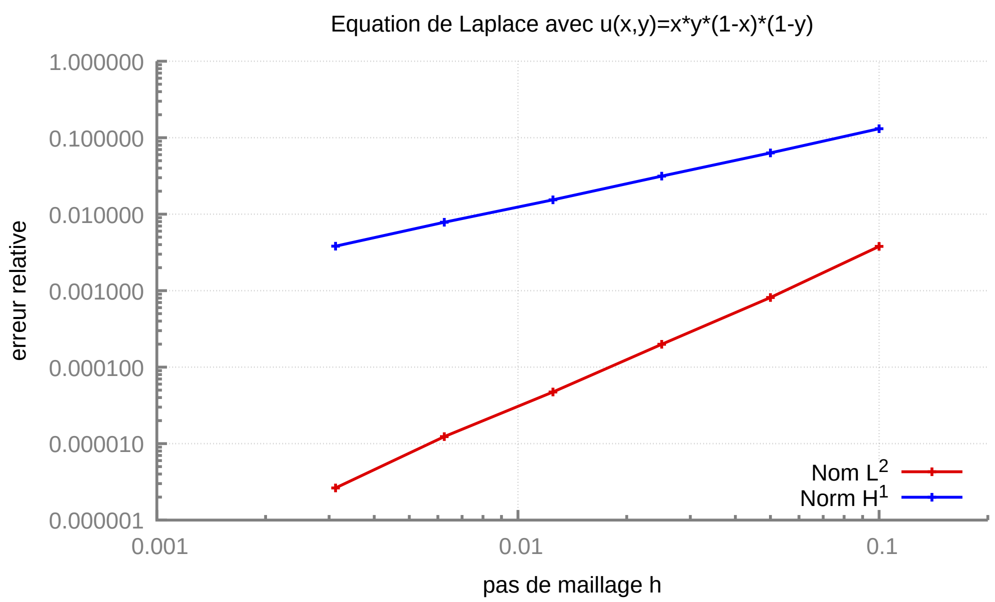

FIGURE 1 – Erreurs L^2 et H^1 pour le problème de Laplace

Solution: Le calcul de l'erreur en norme H^1 est bien programmer dans le fichier freefem1/laplace.edp. Le graphe 1 montre l'erreur L^2 et H^1. On utilise la norme L^2 pour le calcul d'erreur avec des conditions aux limites de Dirichlet, on obtient une vitesse de convergence de deux pour le schéma élément fini P1. Le tableau ci-dessous contient les valeurs $\min(u_h(x))$, $\max(u_h(x))$, et $\min(u(x))$, $\max(u(x))$.

k	n	$\min u_h(x)$	$\max u_h(x)$	$\min(u(x))$	$\max(u(x))$
0	10	8.65e-63	0.0622894	0	0.0625
1	20	2.42e-63	0.0624948	0	0.0625
2	40	6.46e-64	0.0624861	0	0.0625
3	80	1.66e-64	0.0624961	0	0.0625
4	160	4.32e-65	0.0624987	0	0.0625
5	320	1.06e-65	0.0624996	0	0.0625

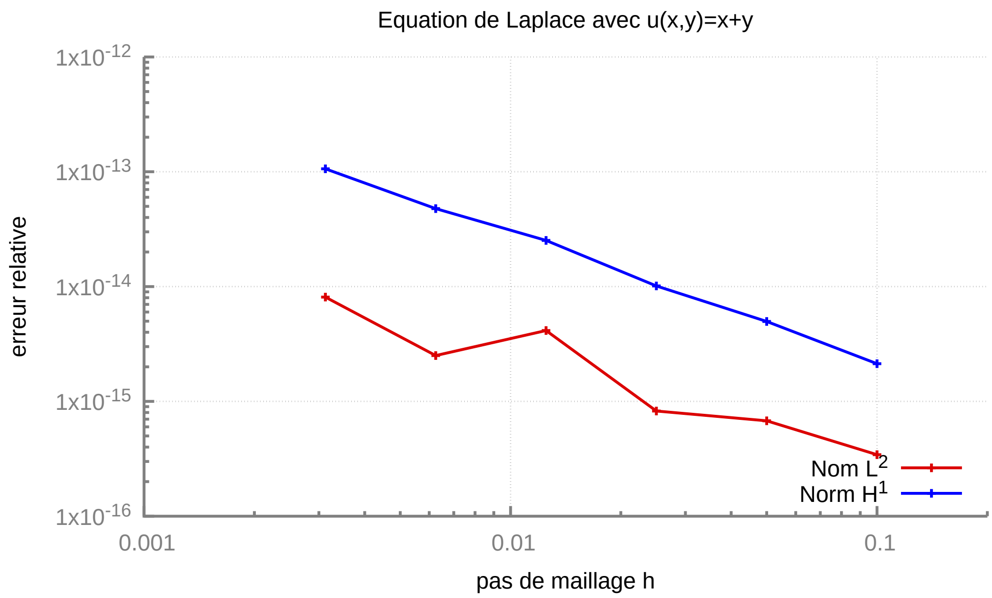

FIGURE 2 – Erreurs L^2 et H^1 pour le problème de Laplace avec la fonction solution $u(x, y) = x+y$

2. Reproduire l'analyse pour la fonction solution $u(x, y) = x + y$ (attention, il faut modifier le second membre f et la valeur au bord g). Vérifier avec cette solution que les élements finis P1 sont exacts quel que soit le maillage utilisé.

Solution: Le cas pour la fonction solution $u(x, y) = x + y$ est bien programmer dans le fichier freefem2/laplace.edp. Le graphe 2 montre l'erreur L^2 et H^1. Le tableau ci-dessous contient les valeurs $\min(u_h(x))$, $\max(u_h(x))$, et $\min(u(x))$, $\max(u(x))$.

k	n	$\min u_h(x)$	$\max u_h(x)$	$\min(u(x))$	$\max(u(x))$
0	10	1e-31	2	0	2
1	20	5e-32	2	0	2
2	40	2.5e-32	2	0	2
3	80	1.25e-32	2	0	2
4	160	6.25e-33	2	0	2
5	320	3.125e-33	2	0	2

3. Reproduire l'analyse pour la fonction solution $u(x, y) = \cos(2\pi x)y(1 - y)$ en calculant le second membre associé, et en utilisant les conditions aux limites mêlées : $u = 0$ sur $\{y = 0\}$ et $\{y = 1\}$, et $\nabla u \cdot n = 0$ sur $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$.

> **Solution:** Le cas pour la fonction solution $u(x, y) = \cos(2\pi x)y(1 - y)$ est bien programmer dans le fichier freefem3/laplace.edp.

4. On fixe le maillage le plus fin possible pour résoudre le système linéaire en un temps raisonable avec Umfpack. Pour ce maillage, évaluer l'erreur commise pas la résolution par une les méthodes itératives CG et GMRES en variant la tolérance souhaitée de 10^{-1} à 10^{-13}. Comparer aussi le temps de calcul par rapport au temps mis pour la méthode LU de Umfpack.

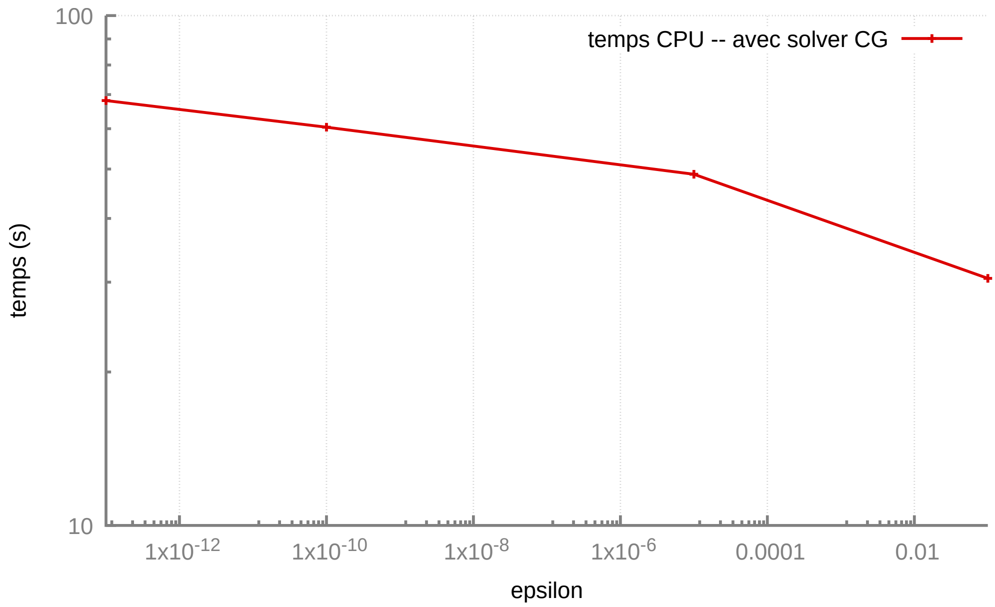

FIGURE 3 – Temps CPU pour le problème de Laplace avec la fonction solution $u(x, y) = \cos(2\pi x)y(1 - y)$ en utilisant le solver CG.

> **Solution:** On fixe le maillage avec k = 5. Le code est bien programmer dans le fichier freefem4/laplace.edp. Le graphe 3 montre quand l'epsilon décroit, le temps CPU augment.

5. On fixe maintenant la tolérance du solveur CG (puis GMRES) à 10^{-10}. Comparer les temps de calcul de ces deux méthodes itératives avec celle de la méthode directe pour la suite de maillage utilisée aux questions précédentes.

> **Solution:** On fixe maintenant la tolérance du solveur CG (puis GMRES) à 10^{-10}. le temps CPU avec le solveur CG = 60 seconde. En utilisant le solveur directe LU, le temps CPU = 33.43 seconde. Le temps CPU en utilisant les méthodes itératives CG et GMRES est plus grand par rapport à la méthode LU.

6. On prend maintenant un cas fortement anisotrope, $a(x) = \mathrm{diag}(1., 10^r)$, avec des conditions de Dirichlet homogène et le second membre $f := 4\pi^2(1 + 10^r)\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$. Dans ce cas, la solution exacte est $u = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$. Étudier le schéma numérique pour ce cas test avec quelques valeurs de r, par exemple $r = 1, 3, 6$.

> **Solution:** Le cas pour la fonction solution $u(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ est bien programmer dans le fichier freefem6/laplace.edp. Le tableau ci-dessous montre l'erreur L^2 et H^1 dans le

cas où r = 1,3,6. On remarque que quand l'exposant r augmente ($a(x)$ devient fortement anisotrope), l'erreur augmente avec le même maillage rafinement (k=5).

r	Erreur L^2	Erreur H^1
1	2.13e-5	0.0017
3	0.0001	0.0044
6	0.00014	0.0055