Лекции по алгебре первого курса СП 2021

Преподаватель: Константин Михайлович Чепуркин

весна 2021

Лекция 14.02

1 Продолжение истории с матрицами

Наша текущая мотивация: компактно и точно описывать системы линейных уравнений(далее СЛУ) на языке матриц.

Для этого заметим, что в СЛУ каждая строчка имеет следующий вид: $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$. Поэтому давайте заведём следующую операцию умножения для матриц $M_{1\times n}(R) \times M_{n\times 1}(R) \to R$(в данном контексте и далее R — произвольное кольцо), а именно:

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

Определение. Вектором размера n будем называть матрицу $M_{n\times 1}$.

Теперь логично захотеть определить умножение матрицы на вектор $M_{m\times n} \times M_{n\times 1} \Rightarrow M_{m\times 1}$ таким образом, чтобы удобно было получать нечто похожее на СЛУ. Очевидно это можно сделать умножением каждой строчки на вектор следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

После этого уже можно обобщить наше произведение на две матрицы. Для этого представим, что мы умножаем систему уравнений не на набор неизвестных, получая матрицу, похожую на систему уравнений, а на несколько наборов значений, ведь матрицу можно представить как упорядоченный набор векторов.

Определение. Произведение матриц $A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times k}$ определим следующим образом:

$$A\times B = A\times\big(B_{1,*}, \dots, B_{k,*}\big) = \big(A\times B_{1,*}, \dots, A\times B_{k,*}\big) = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + \dots + a_{1,n}b_{1,n} & \dots & a_{1,1}b_{k,1} + \dots + a_{1,n}b_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}b_{1,1} + \dots + a_{m,n}b_{1,n} & \dots & a_{m,1}b_{k,1} + \dots + a_{m,n}b_{k,n} \end{pmatrix}$$

Иначе говоря, если $A \times B = C$, тогда:

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} A_{i,k}B_{k,j}$$

Замечание. (P.s знак $\times$ при умножении матриц и векторов в будущем часто будет опускаться)

Замечание. Произведение матриц не коммутативно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Примеры. Давайте приведём несколько примеров использования введённой нами операции.

1. Для записи СЛУ в виде $Ax = b$, где A — матрица, а x, b — вектора.
2. Для записи скалярного произведения: a^Tx, где x, a — вектора, а a^T операция транспонирования матрицы, о которой будет сказано позже. Пока её можно воспринимать как переворот вектора в матрицу $M_{1\times n}$.
3. Для подсчёта количества путей размера k между любыми двумя вершинами ориентированного графа.

   Пусть G — ориентированный граф. Тогда его **матрицей смежности** $A(G)$ определим следующим образом:

   $$A(G)_{i,j} \begin{cases} 1, \text{если есть ребро } i \to j \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

   Тогда легко показать, что $(A(G)_{i,j})^k$ — количество путей $i \to j$ длины k.

4. Для подсчёта суммы путей размера k между любыми двумя вершинами взвешенного ориентированного графа, где длинна пути считается как произведение весов рёбер на нём.

   Пример такой задачи: есть статистика по переселению людей между n городами в следующем виде: известно, что вероятность переезда человека из города i в город j равна весу ребра $i \to j$. Надо по этим данным научиться узнавать шанс того, что человек из города i через k лет будет жить в городе j.

   Для простоты будем считать, что сумма весов исходящих рёбер для каждой вершины равна 1. Если это не так, то мы можем это исправить, создав ребро $i \to i$ с нужным нам весом. В данной формулировке наиболее понятно, что шанс переезда человека, живущего в городе i, в город j через k лет будет равен сумме весов путей $i \to j$ длины k, если вес пути это произведение всех рёбер на нём. Таким образом, мы получили задачу похожую на предыдущую, за исключением того, что наш граф теперь взвешенный, а значит $(A(G)_{i,j})^k$ — искомая вероятность.

Свойства.

1. Ассоциативность произведения матриц в случае, где оба произведения определены: $(AB)C = A(BC)$. (Доказать самим)
2. Существование единичной матрицы $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Доказательство того, что она не изменяет умножаемую на неё, очевидно.
3. Обратный элемент существует не для любой матрицы. Приведём пример с $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение. Введём очевидную операцию сложения матриц: $(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$.

Свойства.

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
4. $\forall A \in M \exists (-A) : A + (-A) = \mathbf{0}$
5. $(A + B)C = AC + BC$
   $C(A + B) = CA + CB$

Определение. Введём операцию умножения вектора на скаляр следующим образом:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Свойства.

1. $$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
2. $$(\lambda\mu) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\mu\lambda) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \left(\mu \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

Определение. Введём операцию умножения матрицы на скаляр следующим образом:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} A$$

Свойства.

1. $$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

Замечание. Исходя из введённых выше операций и их свойств становятся очевидными некоторые утверждения про решения СЛУ, перечислим их:

1. $$\begin{cases} Ax = b \\ Ay = c \end{cases} \Rightarrow A(x+y) = b+c$$

   Где x, y, b, c — вектора, а A — матрица системы.

2. Из предыдущего свойства:

   $$\begin{cases} Ax = b \\ Ax_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(x+x_0) = b \Rightarrow A(x+kx_0) = b, \forall k \in \mathbb{N}$$

3. Пусть $L = \{x \mid Ax = 0\} \subset R^n$, тогда знаем следующие факты про $x_1, x_2 \in L, \lambda \in R$:
   (a) $x_1 + x_2 \in L$
   (b) $\lambda x_1 \in L$

2 Векторные пространства

Заметим, что полученные нами свойства не вписываются в изучаемые ранее структуры, из-за чего возникает желание завести новый объект.

Определение. Векторным пространством над полем K будем называть набор $(V, +, \cdot)$, удовлетворяющий свойствам ниже.

Свойства.

1. (a) Определена операция умножения вектора на скаляр $\cdot : K \times V \mapsto V$
   (b) Определена операция сложения векторов $+ : V \times V \mapsto V$
2. $(V, +)$ — абелева группа
3. $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$
4. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v_1 + \lambda v_2$
5. $1 \cdot v = v$
6. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$

Примеры.

1. K^n — векторное пространство над K.
2. $M_{m \times n}(K)$ — векторное пространство над K.
3. (a) $\mathbb{C}$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$.
   (b) $\mathbb{R}$ — векторное пространство над $\mathbb{Q}$.
   (c) Таким образом можно показать, что если K является подполем L, то L — векторное пространство над K.
4. $C[a, b]$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$.
5. $C'[a, b]$ — векторное пространство(далее ВП) над $\mathbb{R}$.

Определение. Если $W \subseteq V$, то W является **подпространством** при выполнении следующих условий:

1. $a + b \in W \quad \forall a, b \in W$.
2. $\lambda \cdot v \in W \quad \forall \lambda \in K, v \in W$.
3. $\overline{0} \in W$

Пример 1. $\{x \mid Ax = 0\}$ подпространство в K^n.

Определение. **Линейной комбинацией векторов** $v_1, \ldots, v_n \in V$ назовём: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$, где $\lambda_i \in K$.

Определение. **Линейно зависимыми** назовём множество векторов такое, что любой вектор из множества записывается в виде линейной комбинации остальных. Иначе говоря, $v_1, \ldots, v_n$ — линейно зависимы если: $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0, \exists \lambda_j \neq 0$.

Лекция 21.02