2020年7月2日 代数ゼミ資料

早稲田大学情報理工学科
上田研究室 B4
秦 国大
hata@ueda.info.waseda.ac.jp

2020年7月9日

1 環の局所化

先週は, 局所化という概念を導入して環に分数を定義した. その際, 分母として考えられるものの集合を乗法的集合と呼び, 次の 2 つの性質を満たすとした.

乗法的集合

環 A の部分集合 S が乗法的集合であるとは,

1. $1 \in S, 0 \notin S$.
2. $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$.

を満たすことをいう.

この S を使って分数を導入して得られた集合は環の構造を持ち, $S^{-1}A$ と表される.
S の元が全て単元であるか, あるいは零因子を含む/含まないかといったことは $S^{-1}A$ の考察において重要である. そこで, 単元に関するある事実をここで確認しておく.

例 1.2.6

環 A の元 a が単元なら, a は零因子ではない. (よって、任意の体は整域.)

S を環 A の零因子でない元全体の集合とすると, S は A の乗法的集合となる. このとき, $S^{-1}A$ を A の**全商環**という. A が整域なら全商環が体となることは先週確認した.

定義 1.8.5 商体

A が整域の時, A の全商環のことを A の商体という.

ところで, $S^{-1}A$ を $\frac{A}{S}$ と書かないのは何故だろうか. それは, $s \in A$ について s^{-1} と $\frac{1}{s}$ が常には同一視できないからだと個人的には解釈している. 同一視できる場合について確認していく.

1. S の元が全て単元の場合: $\frac{a}{s} = \frac{as^{-1}}{1}$ なので, 自然な写像は全射. さらに命題 1.8.2（2）より単射にもなり, $A \cong S^{-1}A$ となる.
2. S の元で単元でないもの（s' とする）が存在し, 零因子が存在しない場合: 自然な写像は単射だが, $\frac{1}{s'}$ に行く元が存在しない（存在すると s' が単元であることに矛盾する）ので全射でない. よって $A \ncong S^{-1}A$.
3. その他の場合: 自然な写像が全射か単射かは何も分からない.

つまり, 1. の場合にのみ s^{-1} と $\frac{1}{s}$ を A の元として同一視できる. また, この資料では同一視できる場合にのみ a/s などの斜め線を用いた分数表記を行うことにする. ちなみに, 「これなら $S^{-1}A$ より $\frac{A}{S}$ の方が自然じゃないか」とは山田さんの弁. 確かに. でも剰余環で斜め線を使っちゃってるのが難しいところ.

命題 1.8.6（局所化の普遍性）

A, B を環, $S \subset A$ を乗法的な集合, $\phi : A \to B$ を準同型とする. もしすべての元 $s \in S$ に対し $\phi(s) \in B$ が単元なら, $\phi(S) = T \subset B$ は乗法的集合で, $T^{-1}B \cong B$ であり,
準同型 $\psi : S^{-1}A \to B$ で $\psi(\frac{a}{1}) = \phi(a)$ $(\forall a \in A)$ となるものがただ一つ存在する.

証明

まず, T が乗法的集合であることを示す. $\phi(s) \in T$ は全て単元なので $0 \notin T$. また, $t, t' \in T$ に対して $t = \phi(s), t' = \phi(s')$ なる $s, s' \in S$ が存在する.
よって $tt' = \phi(s)\phi(s') = \phi(ss') \in \phi(S) = T$ なので T は乗法的集合で, 先程の議論から $T^{-1}B \cong B$.
$S \times A \ni (s, a)$ に対し, $f(s, a) = \phi(s)/\phi(a)$ と定義する. f が $\frac{a}{s}$ にのみよること, つまり写像の定義を満たすことを確認する. $a_1, a_2 \in A, s_1, s_2 \in S$ のとき, $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2}$ とすると, $s \in S$ があり, $s(a_1s_2 - a_2s_1) = 0$. すると $\phi(s)(\phi(a_1)\phi(s_2) - \phi(a_2)\phi(s_1)) = 0$ で, $\phi(s)$ が単元なので $\phi(a_1)\phi(s_2) - \phi(a_2)\phi(s_1) = 0$. よって $\phi(s_1)^{-1}, \phi(s_2)^{-1}$ をかけて $f(s_1, a_1) = \phi(a_1)/\phi(s_1) = \phi(a_2)/\phi(s_2) = f(s_2, a_2)$ となり, $\psi(\frac{a}{s}) = \phi(a)/\phi(s)$ となるような写像 $\psi : S^{-1}A \to B$ の存在が分かった. ψ が準同型になることはやさしく, これは命題の主張の条件を満たしている. 逆に ψ が命題の主張の条件を満たす準同型ならば $a \in A, s \in S$ に対し, $\phi(a) = \psi(a) = \psi(\frac{a}{s})\psi(s) = \psi(\frac{a}{s})\phi(s)$ なので $\psi(\frac{a}{s}) = \phi(a)/\phi(s)$ となるしかない. したがって, ψ の唯一性が示された.

命題 1.8.7

A を環, K を A の全商環, S を零因子を含まない A の乗法的集合とする. K において $a \in A, s \in S$ により a/s という形をした元全体の集合 B は K の部分環であり, $S^{-1}A$ と同型である.

証明

B が K の部分環であることは明らか. また, B では S の元は単元なので, 命題 1.8.6 より準同型 $\psi : S^{-1}A \to B$ で, $a \in A, s \in S$ に対し $\psi(\frac{a}{s}) = \frac{a}{s}$ となるものがある. B の定義より ψ は全射である.
$a \in A, s \in S$ とし, $\frac{a}{s}$ が B の元として 0 であるのは A の零因子でない元 s' があり $s'a = 0$ となるときだが, これは $a = 0$ を意味する. したがって, $S^{-1}A$ の元としても $\frac{0}{s} = 0$ である. これにより, $Ker(\psi) = \{0\}$ となるので, ψ は単射にもなり, 同型である.

例 1.8.8（局所化の例 1）

$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ の商体, つまり $S = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ による局所化であるというのが $\mathbb{Q}$ の厳密な定義である.

例 1.8.9（局所化の例 2）

k が体, n が正の整数, $A = k[x] = k[x_1, \ldots, x_n]$ なら, A の商体を $k(x) = k(x_1, \ldots, x_n)$ と書き, k 上の n 変数有理関数体という. $k(x_1, \ldots, x_n)$ の元は多項式 $f(x), g(x)$ $(g(x) \neq 0)$ により, $\frac{f(x)}{g(x)}$ という形をしている. $a = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ のとき, 多項式の場合と同様に $g(a) \neq 0$ なら, a を代入して $\frac{f(a)}{g(a)} \in k$ を考えることが出来る.

命題 1.8.10

A を整域 B の部分環, K, L をそれぞれ A, B の商体とする. このとき, $K \subset L$ である.

証明

$A \subset B \subset L$ なので, $S = A\backslash\{0\}$ の元は L で単元である. よって, 局所化の普遍性より包含写像 $A \to L$ を拡張する準同型 $S^{-1}A = K \to L$ が存在する. 体の準同型は単射なので, $K \subset L$ とみなせる.

例 1.8.11 局所化の例 3

K, L をそれぞれ整域 $A = \mathbb{C}[t^2, t^3] \subset B = \mathbb{C}[t]$ の商体とする.
命題 1.8.10 より $\mathbb{C} \subset K \subset L = \mathbb{C}(t)$ である.
$t = t^3/t^2 \in K$ だが, K は体なので t の任意の有理式を含む. よって, $K = \mathbb{C}(t)$ である.

局所化の例 4

A が $\mathbb{Q}$ の部分環なら, $1 \in A$ なので, $\mathbb{Z} \subset A$ である. 例 1.8.11 と同様に, A の商体は $\mathbb{Q}$ である.

最後に, S の元が単一の元 f のべきで表される乗法的集合となるとき, $\frac{1}{f}$ を局所化の元だけでなく, 通常の多項式環における変数として見ることもできることを見ていく.

定義 1.8.13

A を環, $f \in A$ を零因子ではない元とし, $S = \{f^n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ とおくと S は乗法的集合である. $S^{-1}A$ のことを $A_f, A[\frac{1}{f}], A[1/f]$ などとかき, A の f **による局所化**という.

命題 1.8.7 より, 次の命題が従う.

命題 1.8.14

定義 1.8.13 の状況で, $A_f = A[1/f]$ は, A の全商環の中で, A 上 $1/f$ で生成された環である.

命題 1.8.14 により, $A[1/f]$ を局所化とも全商環のなかで A 上 $1/f$ で生成された環ともみなせるので, この記号を両方の意味で使うことが出来る.