

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа Экономики»

ФАКУЛЬТЕТ ЭКОНОМИЧЕСКИХ НАУК

ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА «ЭКОНОМИКА»

КУРСОВАЯ РАБОТА

Стохастические методы оптимизации

Выполнил:
студент группы БЭК1812
Хайкин ГЛЕБ АЛЕКСЕЕВИЧ

Научный руководитель:
старший преподаватель
Борзых Дмитрий Александрович



МОСКВА — 2020

Оглавление

Введение	3
1. Метод имитации отжига	4
1.1. Алгоритм	4
1.2. Расстановка N ферзей	5
1.3. Минимизация негладкой функции	10
1.4. Задача коммивояжера	12
1.5. Вывод	15
2. Метод роения частиц	16
2.1. Алгоритм	16
2.2. Функция Розенброка	18
2.3. Вывод	24
3. Генетический алгоритм	25
3.1. Алгоритм	25
3.2. Функция Экли	28
3.3. Задача коммивояжера	35
3.4. Вывод	41
Заключение	42
Список литературы	43

Введение

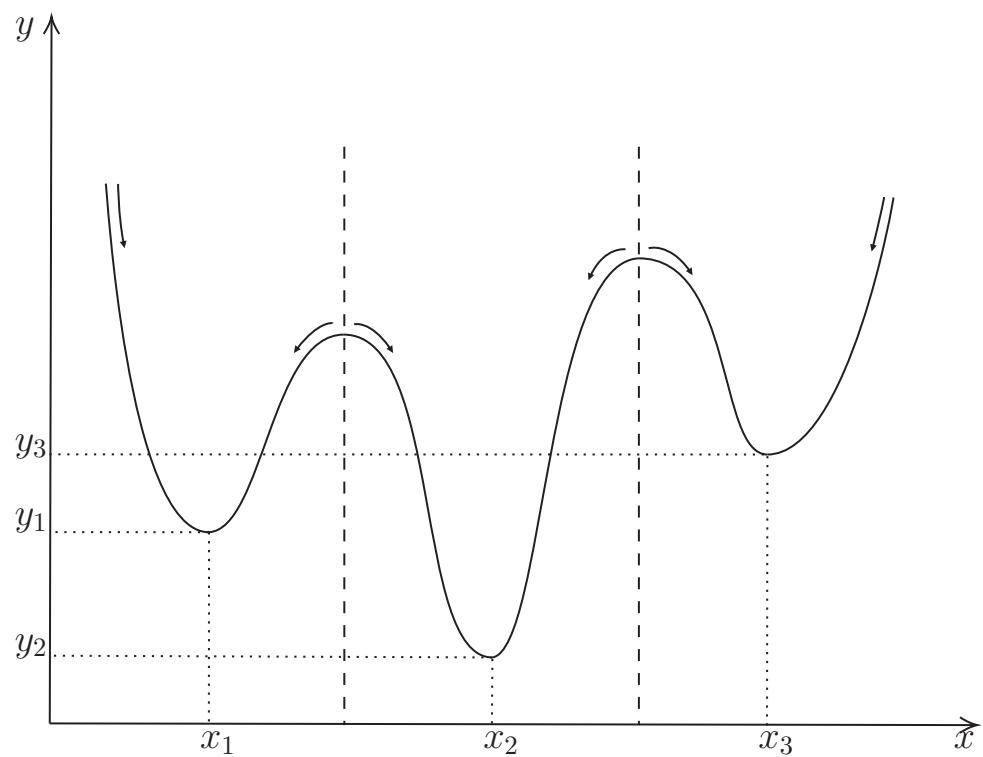


Рисунок 0.1

1. Метод имитации отжига

Имитация отжига (*simulated annealing*, SA) представляет собой алгоритм решения задачи по поиску глобального оптимума некоторой функции через упорядоченный стохастический поиск, базирующийся на моделировании физического процесса кристаллизации вещества из жидкого состояния в твердое.

1.1. Алгоритм

Для описания метода рассмотрим задачу нахождения глобального минимума функции $F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{X}} F(x),$$

где $x = (x_1, \dots, x_m)$ — вектор всех состояний, \mathbb{X} — множество всех состояний.

Изначально температура зафиксированна на определенном уровне $T_0 = \text{const}$, $t = 0$.

1. Из множества всех состояний выберем случайный элемент:

$$\hat{x}_t \equiv x_i, i \in (1, \dots, m).$$

2. Понизим температуру одним из следующих способов:

а) Больцмановский отжиг

$$T_t = \frac{T_0}{\ln(1+t)}, \quad t > 0. \quad (1.1)$$

б) Отжиг Коши

$$T_t = \frac{T_0}{t}. \quad (1.2)$$

в) Метод тушения

$$T_{t+1} = \alpha T_t, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (1.3)$$

3. Пусть следующий элемент зависит от функции из семейства симметричных вероятностных распределений $G: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, порождающей новое состояние [2]:

$$\tilde{x}_t \sim G(\hat{x}_t, T_t).$$

а) Часто G выбирается из семейства нормальных распределений:

$$G(\tilde{x}; \hat{x}, T) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^D T}} \exp \left\{ \frac{-|\tilde{x} - \hat{x}|^2}{2T} \right\}, \quad (1.4)$$

где \widehat{x} — математическое ожидание, T — дисперсия, D — размерность пространства всех состояний.

б) Также для $D = 1$ используется распределение Коши с плотностью:

$$G(\tilde{x}; \widehat{x}, T) = \frac{1}{\pi} \frac{T}{|\tilde{x} - \widehat{x}|^2 + T^2}, \quad (1.5)$$

где \widehat{x} — параметр сдвига, T — параметр масштаба.

4. Рассчитываем разницу двух функций:

$$\Delta F = F(\tilde{x}_t) - F(\widehat{x}_t).$$

5. Принимаем \tilde{x}_t или \widehat{x}_t за новый элемент:

$$\widehat{x}_{t+1} = \begin{cases} \tilde{x}_t, & \text{с вероятностью } \mathbb{P}(\{\widehat{x}_{t+1} = \tilde{x}_t\}) \\ \widehat{x}_t, & \text{с вероятностью } 1 - \mathbb{P}(\{\widehat{x}_{t+1} = \tilde{x}_t\}) \end{cases},$$

где вероятность того, что $\widehat{x}_{t+1} \equiv \tilde{x}_t$:

$$\mathbb{P}(\{\widehat{x}_{t+1} = \tilde{x}_t\}) = \begin{cases} 1, & \Delta F < 0 \\ \exp \left\{ -\frac{\Delta F}{T_t} \right\}, & \Delta F \geq 0 \end{cases}. \quad (1.6)$$

Заметим, чем выше температура, тем больше вероятность принять состояние хуже текущего ($\Delta F \geq 0$), — это позволяет нам не застревать в локальных минимумах. Тем не менее, в течение реализации алгоритма температура начинает постепенно снижаться по законам, расписанным в пункте 2, что в свою очередь понижает вероятность выбрать менее оптимальное решение .

6. Возвращаемся к пункту 2, пока не выполнен критерий останова.

Приведем несколько критериев останова:

.Ограничить максимально возможное количество итераций алгоритма.
Задать минимальную точность приближения. Определить минимальное уменьшение функции. Задать минимально допустимую температуру.

1.2. Расстановка N ферзей

Рассмотрим задачу, в которой необходимо расставить N ферзей на шахматной доске размера $N \times N$ так, чтобы ни один из них не «бил» другого.

В таком случае, множество всех состояний \mathbb{X} будет содержать все возможные расстановки ферзей на шахматной доске. Общее число возможных расположений n ферзей на $N \times N$ -клеточной доске равно:

$$\binom{N \times N}{n} = \frac{N \times N!}{n!(N \times N - n)!}.$$

Тогда функция $F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ будет выдавать количество атак ферзей, и решением данной задачи будет нахождение такого расположения x^* , что $F(x^*) \equiv 0$.

Зафиксируем изначальное расположение ферзей на шахматной доске. Очевидно, что несколько ферзей не могут находиться на одной вертикали или горизонтали, ибо тогда они будут находиться под ударом друг-друга. Следовательно, наша задача сужается к поиску расположения:

$$x^* = (q_1, \dots, q_n) = \{(1, h_1), \dots, (n, h_n)\}, h_1 \neq \dots \neq h_n, \quad (1.7)$$

где (i, h_i) — расположение ферзя q_i на i -ой вертикали по горизонтали h_i .

Отметим, что такая задача имеет $N!$ решений.

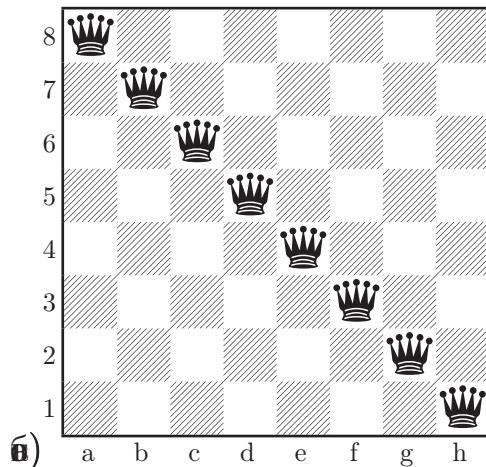


Рисунок 1.1 — Изначальное расположение.

Определим функцию, которая будет создавать изначальное неоптимальное расположение, в общем виде. Учитем, что несколько ферзей не могут находиться на одной вертикали или горизонтали.

```
In: def queens(N):
    ver = np.arange(1, N + 1)
    hor = np.arange(1, N + 1)
    np.random.shuffle(hor)
    return np.column_stack((ver, hor)) # получаем массив
    # размерности (N, 2), отображающий расположение ферзей
```

Выведем первоначальное расположение ферзей для стандартной доски 8×8 , где первый столбец массива — расположение по вертикали, второй столбец массива — расположение по горизонтали. Для наглядности — презентации оптимизационного процесса — выстроим изначальную расстановку на главной диагонали (рис. 1.1).

```
In:  matrix = queens(8)
      matrix
```

```
Out: array([[1, 1],
            [2, 2],
            [3, 3],
            [4, 4],
            [5, 5],
            [6, 6],
            [7, 7],
            [8, 8]])
```

Функция F , которая выявляет количество атак ферзей, выглядит следующим образом:

```
In:  def F(Q, N):
      cnt = 0
      for i in range(N):
          for j in range(i + 1, N):
              if abs(Q[i, 0] - Q[j, 0]) == abs(Q[i, 1] - Q[j, 1]):
                  cnt += 1
      return cnt * 2 # учитываем взаимные атаки
```

Посмотрим, сколько атак у исходной расстановки.

```
In:  F(matrix, 8)
```

```
Out: 56
```

В нашей задаче функция G будет случайной незначительной перестановкой номеров горизонтали в исходном наборе:

```
In:  def G(Q, N):
      pos = Q.copy()
      while True:
          i = np.random.randint(0, N - 1)
          j = np.random.randint(0, N - 1)
          if i != j:
              break
      pos[i, 1], pos[j, 1] = pos[j, 1], pos[i, 1]
      return pos # получаем новое расположение
```

Теперь выведем и сам метод имитации отжига, используя метод тушения для понижения температуры (1.3).

```
In: def SA(Q, T, schedule):
    N = np.shape(Q)[0]
    x_hat = Q.copy()

    while F(x_hat, N) != 0:
        x_tilda = G(x_hat, N)
        delta = F(x_tilda, N) - F(x_hat, N)
        prob = np.exp(-delta / T)
        if (delta < 0) or (prob >= np.random.random()):
            x_hat = x_tilda
    # используем метод тушения для понижения температуры
    T *= schedule
return x_hat
```

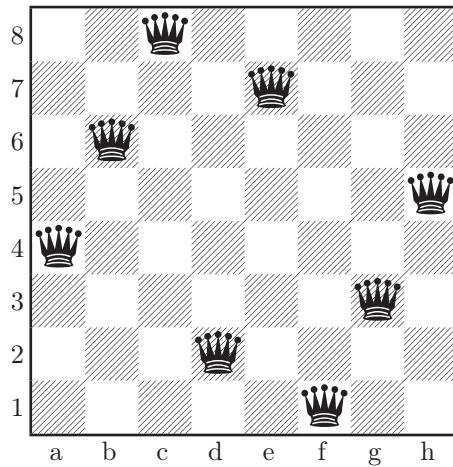


Рисунок 1.2 — Оптимальное расположение

Так для нашего примера с гиперпараметрами $T_0 = 100, \alpha = 0.9$ мы получаем следующее оптимальное решение:

```
In: SA(matrix, 100, 0.9)
```

```
Out: array([[1, 4],
           [2, 6],
           [3, 8],
           [4, 2],
           [5, 7],
           [6, 1],
           [7, 3],
           [8, 5]])
```

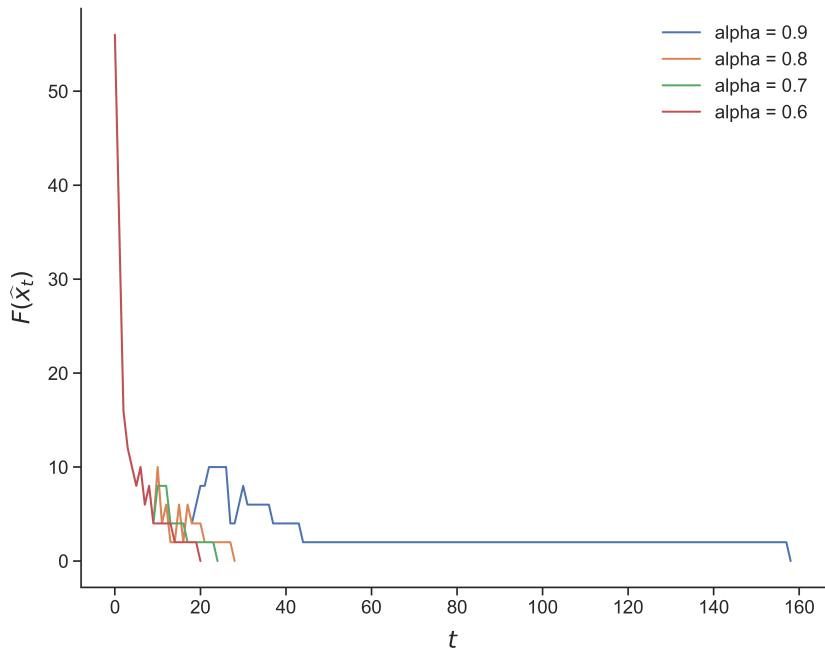


Рисунок 1.3 — Оптимизация расстановки 8 ферзей в зависимости от гиперпараметра α .

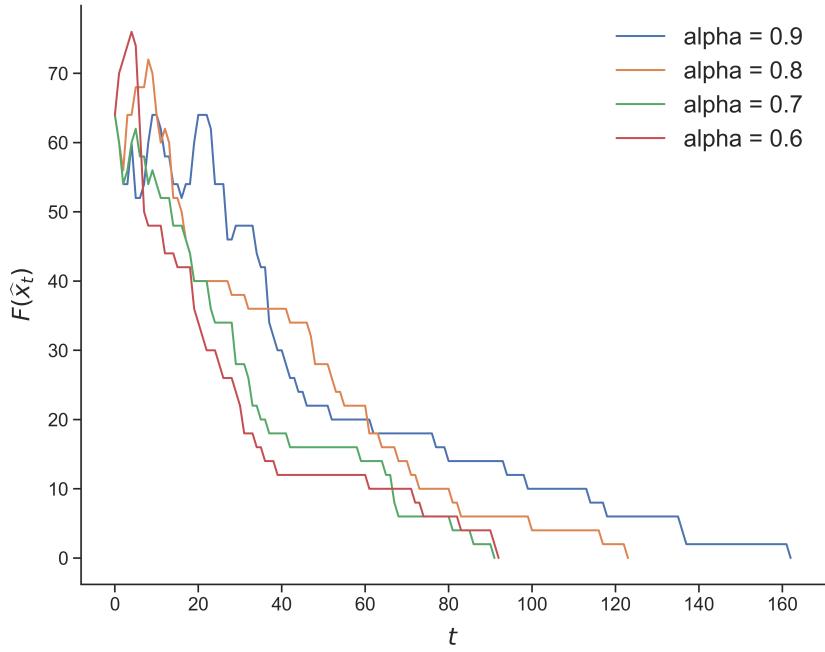


Рисунок 1.4 — Оптимизация расстановки 50 ферзей в зависимости от гиперпараметра α .

Можно заметить, что именно для этой задачи, чем меньше гиперпараметр α , тем меньше требуется итераций для нахождения оптимального решения (рис. 1.2). Обычно, напротив, α должна быть как можно ближе к 1 ??, чтобы позволить алгоритму найти другие, возможно, более оптимальные решения. Также стоит отметить достаточно большой недостаток алгоритма имитации

отжига: решение не всегда может «сойтись». Тогда необходимо повторно запускать данный метод. Нашу задачу можно усложнить и, к примеру, сформировать оптимальную расстановку для 50 или более ферзей (рис. 1.4), которую она также достаточно эффективно решает.

1.3. Минимизация негладкой функции

Воспользуемся алгоритмом имитации отжига для нахождения глобального минимума следующей функции:

$$f(x) = x^2(1 + |\sin 80x|).$$

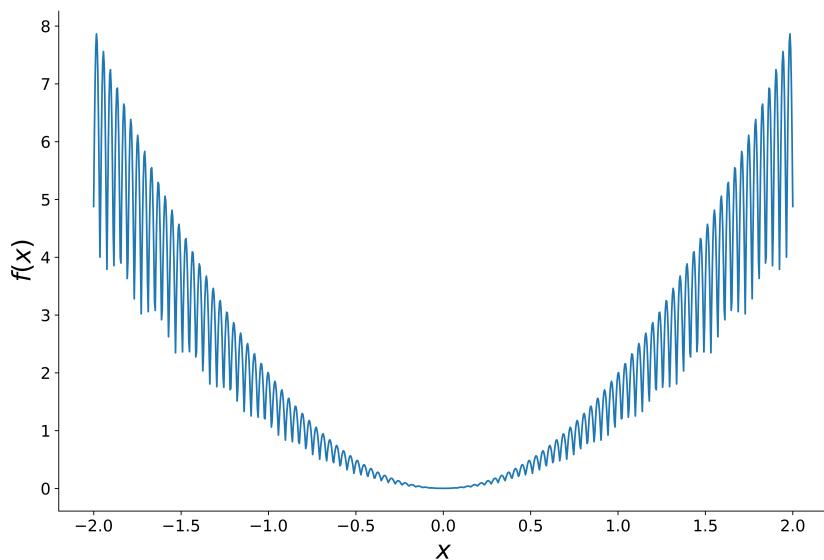


Рисунок 1.5

Стандартные методы оптимизации — к примеру, метод градиентного спуска, — в данном случае не применимы. Заданная функция не дифференцируема. Также она имеет очень большое количество локальных экстремумов, что затрудняет, к примеру, мультистарт — запуск градиентного спуска из разных начальных направлений.

Применим наш алгоритм к данной задаче. Пусть $T_0 = 0.6$. Для понижения температуры будем использовать Больцмановский отжиг (1.1), а в качестве функции вероятностных распределений G будем использовать семейство нормальных распределений (1.4).

```
In: def SA(space, T, epsilon): # за space берется np.linspace(-2, 2, 1000)
    x_hat = np.random.choice(space)
    T_0 = T
    t = 1
```

```

while True:
    x_tilda = np.random.normal(x_hat, T)
    delta = F(x_tilda) - F(x_hat)
    prob = np.exp(-delta / T)
    if (delta < 0) or (prob >= np.random.random()):
        x_hat = x_tilda
    if (x_hat < epsilon) and (x_hat > 0):
        return x_hat
T = T_0 / np.log(1 + k)
t += 1

```

Остановка итерационного процесса и скорость метода зависят от того, насколько близко мы хотим приблизиться к глобальному минимуму. Так, при точности $1e-1$ — что является достаточно большой погрешностью, — для 1000 итераций алгоритма метод отжига находит глобальный минимум в среднем за $1.97e-3$ секунды со стандартным отклонением в $3.47e-5$ секунды. Однако, увеличив точность до $1e-6$, среднюю скорость занимает уже 1.27 секунды со стандартным отклонением в $2.1e-5$ секунды (рис. 1.6).

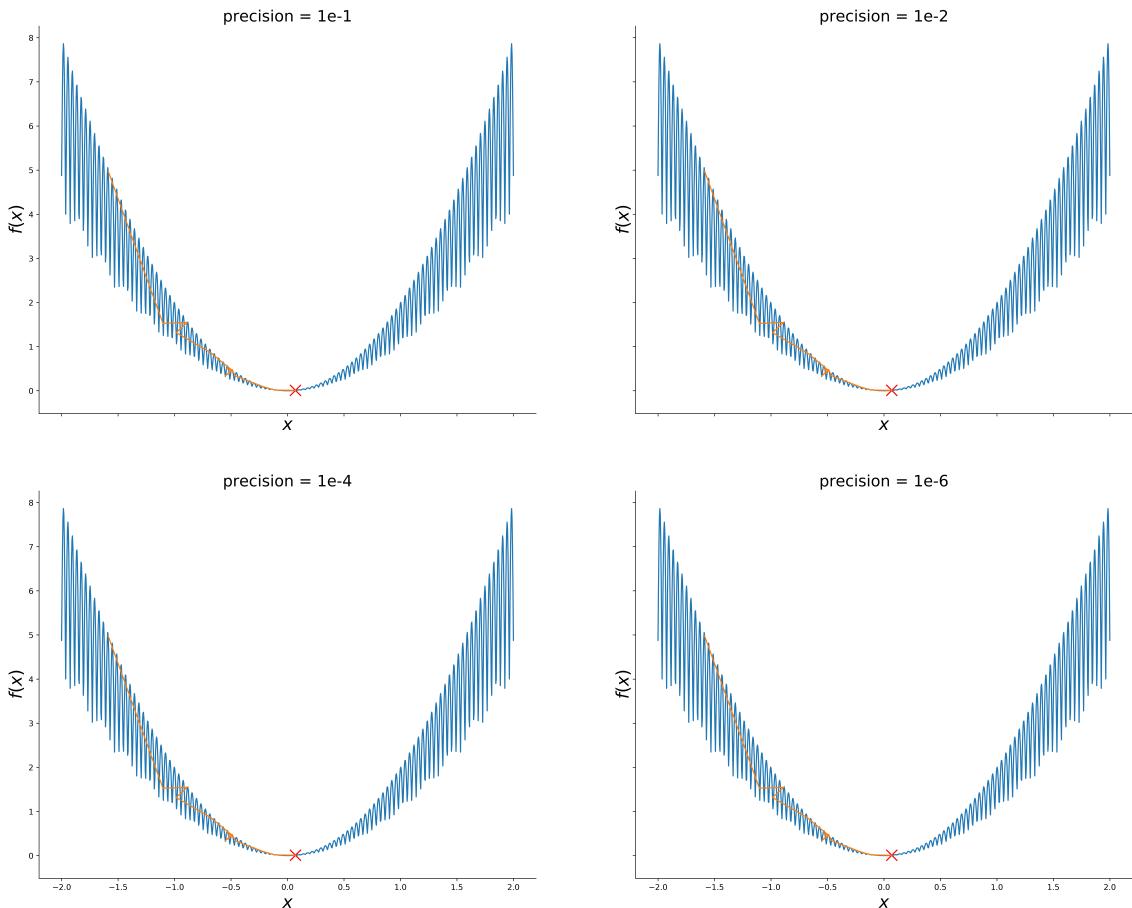


Рисунок 1.6 — Оптимизационный процесс в зависимости от точности.

1.4. Задача коммивояжера

Задача коммивояжера (*traveling salesman problem*, TSP) является образцовым методом проверки многих оптимизационных алгоритмов и заключается в поиске кратчайшего маршрута между городами. Путь должен быть проложен так, чтобы маршрут единственно проходил через все города и его конечная точка совпадала с изначальной.

TSP имеет множество приложений в планировании и логистике, а также выступает в качестве подзадачи во многих других областях. В таком случае города могут представлять, к примеру, клиентов, а расстояние между городами — время или стоимость путешествия.

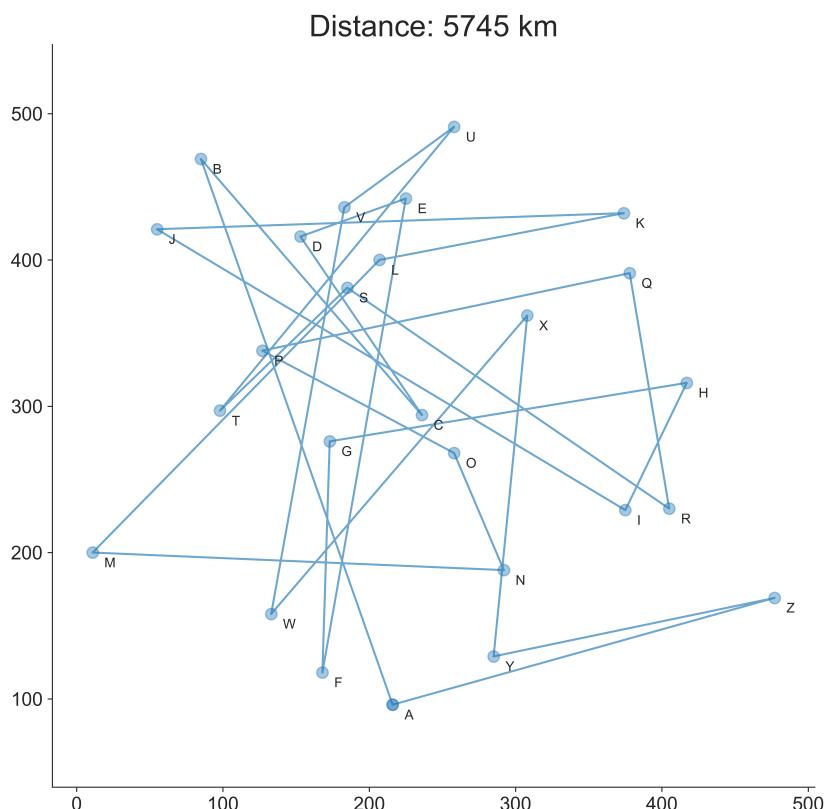


Рисунок 1.7 — Изначальный маршрут для 26-ти городов.

Для нашего примера создадим карту. Функция `map_city` будет принимать желаемое количество городов в качестве входных данных и выдавать два списка, из которых далее создается общий список кортежей. Первым элементом кортежа является наименование города, а вторым — его расположение в декартовой системе координат.

```
In: def map_city(cities_num):  
    letters = [chr(i) for i in range(65, 65 + cities_num)]  
    coord = np.random.randint(1, 500, size=(cities_num, 2))
```

```
    return letters, coord
```

Наш маршрут будет состоять из 26-ти городов.

```
In: names, cities = map_city(26)
store_val = list(zip(names, cities))
```

Определим расстояние от города i до всех остальных посредством функции `distance_dict`. Для измерения расстояния между городами будем использовать евклидову метрику. Напомним, что евклидово расстояние между точками $x = (x_1, \dots, x_d)$ и $u = (u_1, \dots, u_d)$ задается как

$$\rho(x, u) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - u_i)^2}.$$

```
In: def distance_dict(cities, n):
    d = dict()
    for i in range(n):
        city = dict()
        for j in range(n):
            if i == j:
                continue
            c_a = cities[i][1]
            c_b = cities[j][1]
            dist = np.sqrt((c_a[0] - c_b[0])**2 + (c_a[1] - c_b[1])**2)
            city[cities[j][0]] = dist
        d[cities[i][0]] = city
    return d

In: cities_d = distance_dict(store_val, len(store_val))
```

Функция F для подсчета общего расстояния путешествия:

```
In: def F(path, cities):
    dist = 0
    for i in range(len(path) - 1):
        dist += cities[path[i]][path[i + 1]]
    dist += cities[path[-1]][path[0]]
    return dist
```

За функцию G будет выступать простая перестановка как и в задаче о расположении N ферзей (разд. 1.2).

```
In:  def G(path, n):
      pos = path.copy()
      while True:
          i = np.random.randint(0, n - 1)
          j = np.random.randint(0, n - 1)
          if i != j:
              break
          pos[i], pos[j] = pos[j], pos[i]
      return pos
```

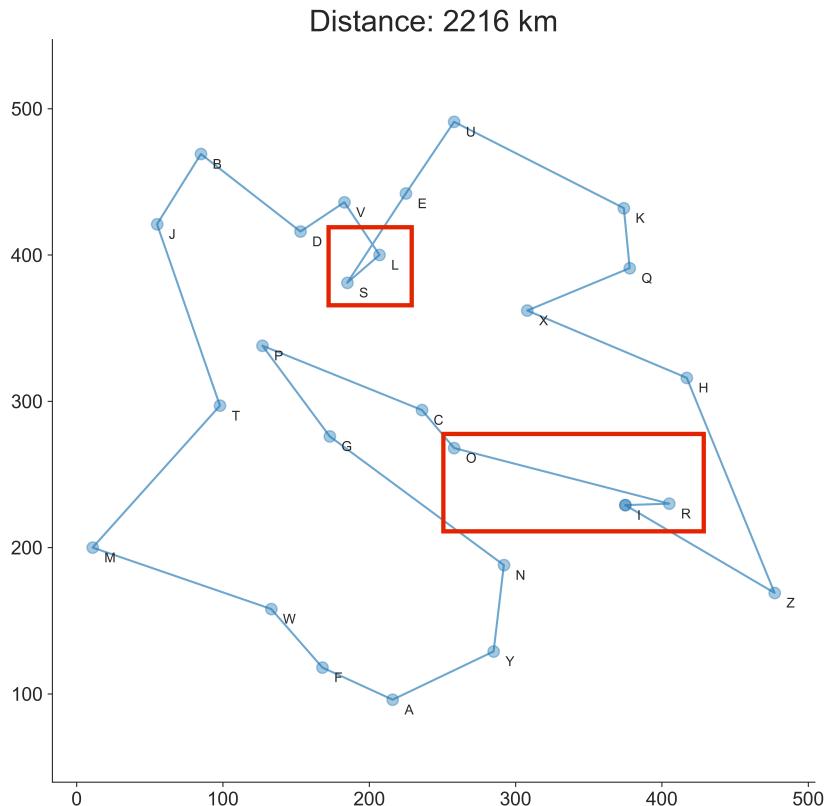


Рисунок 1.8 — Применение метода отжига для построения оптимального маршрута для 26-ти городов.

Для понижения температуры используем Больцмановский отжиг (1.1).

```
In:  def SA(path, T):
      path_hat = path
      n = len(path_hat)
      np.random.shuffle(path_hat)
      T_0 = T
      k = 1
      for i in range(100000):
          path_tilda = G(path_hat, n)
          delta = F(path_tilda, cities_d) - F(path_hat, cities_d)
          prob = np.exp(- delta / T)
```

Теперь построим оптимальный маршрут (рис. 1.8).

```
In: path_opt = SA(names, 100)
```

Несмотря на то, что метод отжига сократил преодолеваемую дистанцию, TSP была решена неидеально. К примеру, можно выделить соединение вершин E-S-L-V: очевидно, что оно не оптимально, поскольку путь E-L-S-V имеет меньшее расстояние. Тем не менее, сам маршрут весьма удовлетворителен.

1.5. Вывод

Рассмотрев алгоритм имитации отжига, выявим его плюсы и минусы.

Таблица 1.1 — Метод отжига

Преимущества	Недостатки
1. Не требует дифференцируемости и непрерывности исследуемой функции	1. Не подходит для задач с небольшим количеством локальных экстремумов
2. Используется для широкого класса задач	2. Не всегда сходится к решению
3. Не застревает в локальных экстремумах	3. Для сложных задач дает вполне приемлемое, однако не оптимальное, решение
4. Имеет простую реализацию	

2. Метод роения частиц

Метод роения частиц (*particle swarm optimization*, PSO) является одним из алгоритмов коллективной оптимизации и основывается на имитации социального поведения колониальных живых существ — к примеру, колонии муравьев или стаи птиц, — выполняющих коллективный поиск места с наилучшими условиями для существования.

Неформально данный алгоритм можно иллюстрировать следующем образом: при поиске пищи каждая особь передвигается по окружающей среде независимо от остальных членов колонии с некой долей случайности в своих движениях. Рано или поздно одна из особей находит пропитание и, будучи существом социальным, сообщает об этом остальным, что стягивает других к найденной пище.

2.1. Алгоритм

Найдем глобальный экстремум функции $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Для определенности будем искать глобальный минимум:

$$\operatorname{argmin}_{x_i \in \mathbb{R}^n} F(x_i).$$

Пусть в нашем рое x существует ℓ частиц размерности \mathbb{R}^n , тогда рой имеет вид $x = \{x_i\}_{i=1}^\ell$, где частица $x_i = (x_1, \dots, x_n) \in D$. $D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a < x_i < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ — заданная область оптимизации (гиперкуб или гиперпрямоугольник).

Пусть также определен вектор скорости $v = \{v_i\}_{i=1}^\ell$, i -я компонента которого является скоростью i -й частицы, $v_i = (v_1, \dots, v_n) \in D$.

1. Изначально случайным образом выбираем расположение роя x_0 и скорость движения каждой частицы v_0 .
2. Определяем новое расположение роя:

$$x_{t+1} \equiv x_t + v_t.$$

3. Выбираем наилучшую точку для i -й частицы:

$$p_{i,t} = \begin{cases} x_{i,t}, & F(x_{i,t+1}) \geq F(x_{i,t}), \\ x_{i,t+1}, & F(x_{i,t+1}) < F(x_{i,t}) \end{cases}, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (2.1)$$

Тогда вектор наилучших позиций для каждой частицы имеет вид:

$$p_t = \{p_{i,t}\}_{i=1}^{\ell}.$$

4. Выбираем наилучшую точку для всего сообщества:

$$g_t \equiv \underset{i \in \{1, \dots, \ell\}}{\operatorname{argmin}} F(p_{i,t}). \quad (2.2)$$

5. Обновляем скорость для i -й частицы посредством следующей формулы:

$$v_{i,t+1} \equiv wv_{i,t} + c_1\xi_{1,t}[p_{i,t} - x_{i,t}] + c_2\xi_{2,t}[g_t - x_{i,t}], \quad i = 1, \dots, \ell, \quad (2.3)$$

где $w \in \mathbb{R}$ — инерционный вес, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ — коэффициенты ускорения, $\xi_{1,t}, \xi_{2,t} \sim U(0, 1)$.

Тогда вектор скорости имеет вид:

$$v_{t+1} = \{v_{i,t+1}\}_{i=1}^{\ell}.$$

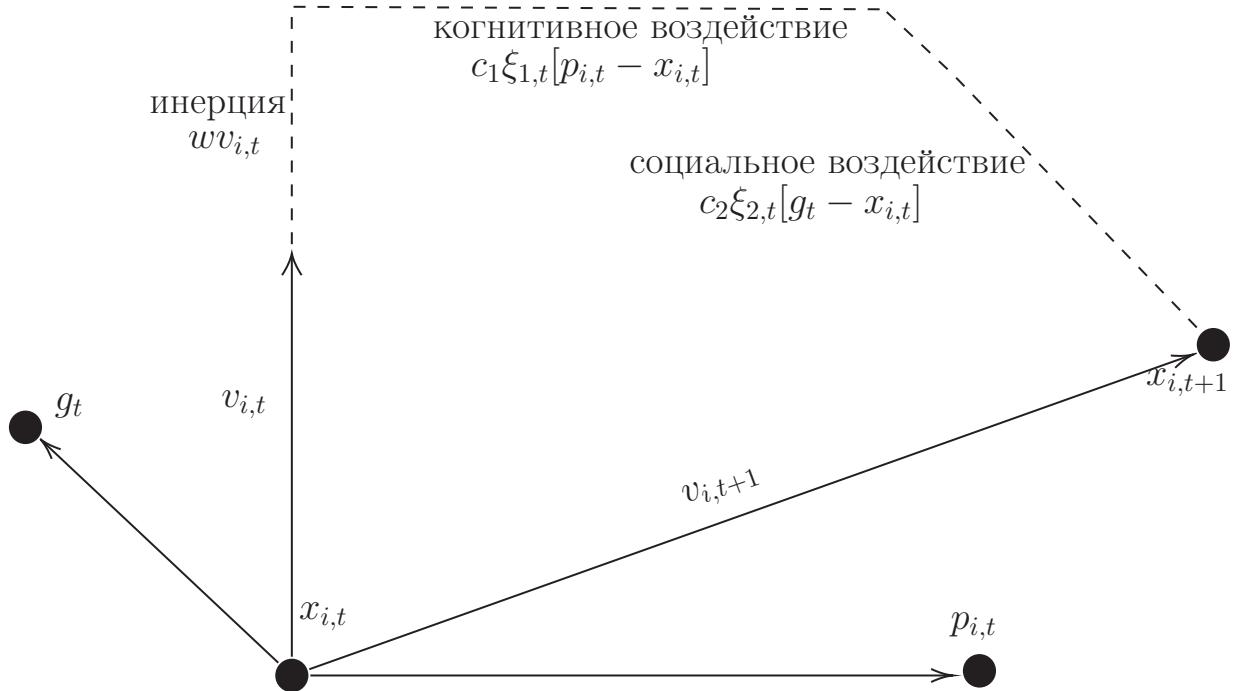


Рисунок 2.1

Три фактора влияют на частицу в положении $x_{i,t}$. С одной стороны, когнитивное воздействие побуждает частицу двигаться к ее лучшей позиции $p_{i,t}$, с другой стороны — социальное воздействие побуждает частицу продвигаться в сторону лучшей позиции роя g_t . Кроме того, собственная скорость

$v_{i,t}$ обеспечивает движение по инерции, что позволяет частице преодолевать локальные экстремумы и исследовать неизвестные области заданного пространства. Таким образом, происходит переход от точки $x_{i,t}$ в точку $x_{i,t+1}$ (рис. 2.1).

PSO использует последовательности равномерно распределенных случайных величин $\xi_{1,t}$, $\xi_{2,t}$ и коэффициенты ускорения c_1 , c_2 , определяющие максимальный размер шага, который частица может сделать за одну итерацию. При $c_1 = 0$ метод роения частиц будет опираться только на наилучшую позицию сообщества — в таком случае алгоритм будет быстро сходиться, однако маловероятен факт нахождения глобального оптимума. При $c_1 > 0$ метод использует связь всего сообщества — скорость конвергенции падает, но глобальный оптимум оказывается более вероятным.

6. Возвращаемся к пункту 2, пока не выполнен критерий останова.

Приведем несколько примеров критерия останова:

- a) Ограничить максимально возможное количество перемещений роя.
- б) Задать минимальную точность приближения.
- в) Определить минимальное уменьшение функции.

2.2. Функция Розенброка

Функция Розенброка — это невыпуклая функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} [(a - x_i)^2 + b(x_{i+1} - x^2)^2],$$

использующаяся в качестве оценки производительности оптимизационных алгоритмов. Для наших целей будем использовать трехмерный случай:

$$f(x, y) = (a - x)^2 + b(y - x^2)^2,$$

где глобальный минимум достигается в точке (a, a^2) , где $f(a, a^2) = 0$.

Обычно $a = 1$, $b = 100$. Тогда функция Розенброка примет следующий вид (рис. 2.2):

$$f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2.$$

Глобальный минимум данной функции находится внутри так называемой «долины»: в нашем случае — в точке $(1, 1)$. Прилизаться к долине легко, однако к глобальному минимуму — довольно сложно.

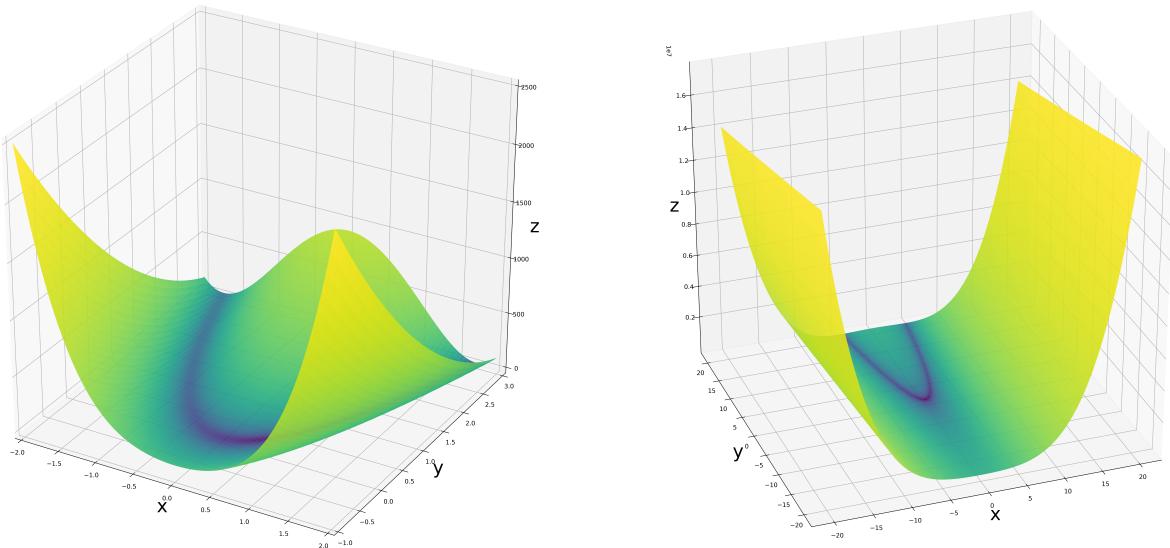


Рисунок 2.2 — Функция Розенброка с параметрами $a = 1$, $b = 100$.

Только при $a = 0$, функция является симметричной, а ее минимум находится в начале координат.

Определим функцию Розенброка:

```
In: def func(x):
    return (1 - x[0]) ** 2 + 100 * (x[1] - x[0] ** 2) ** 2
```

Инициализируем метод роения частиц, используя объектно-ориентированное программирование. В первую очередь создадим класс частиц `Particle`. В нем зададим методы обновления позиции частицы `update_position` и ее скорости `update_velocity`. Также нам необходимо задать метод, который будет хранить наилучшую позицию частицы `choose_personal_best`.

```
In: class Particle:
    def __init__(self, arg, space):
        # расположение частицы
        self.pos = np.asarray([])
        # вектор скорости частицы
        self.velocity = np.asarray([])
        # лучшее расположение частицы
        self.pos_best = None

    for i in range(arg):
        pos_i = np.random.uniform(space[i][0], space[i][1])
        self.pos = np.append(self.pos, pos_i)
        vel_i = np.random.uniform(0.2*space[i][0], 0.2*space[i][1])
```

```

        self.velocity = np.append(self.velocity, vel_i)
        # список, состоящий из лучшего расположения частицы
        # и значения функции в данной точке
        self.pos_best = [self.pos.copy(), func(self.pos)]

    def update_position(self):
        self.pos += self.velocity

    def update_velocity(self, w, c1, c2, swarm_best):
        """
        INPUT:
        w --- инерционный вес
        c1 --- коэффициент ускорения когнитивного воздействия на частицу
        c2 --- коэффициент ускорения социального воздействия на частицу
        swarm_best --- лучшее расположение во всем рое
        """
        inertion = w * self.velocity
        xi_1 = np.random.uniform()
        xi_2 = np.random.uniform()
        cognitive_acceler = c1 * xi_1 * (self.pos_best[0] - self.pos)
        social_acceler = c2 * xi_2 * (swarm_best - self.pos)
        self.velocity = inertion + cognitive_acceler + social_acceler

    def choose_personal_best(self):
        if func(self.pos) < func(self.pos_best[0]):
            self.pos_best[0] = self.pos.copy()
            self.pos_best[1] = func(self.pos)

```

Теперь создадим класс ParticleSwarmOptimisation. Определим методы `choose_social_best`, который выбирает лучшее расположение во всем рое, и `search_global`, который реализует процесс оптимизации функции Розенброка.

```

In:  class ParticleSwarmOptimisation:
    def __init__(self, ell=40, w=1.0, c1=0.2, c2=0.2, max_iter=1000,
                 tol=1e-24):
        """
        PARAMETERS:
        ell --- количество частиц в рое
        w --- инерционный вес
        c1 --- коэффициент ускорения когнитивного воздействия на частицу
        c2 --- коэффициент ускорения социального воздействия на частицу
        max_iter --- максимальное количество итераций
        tol --- минимальная точность
        """

```

```

        self.ell = ell
        self.w = w
        self.c1 = c1
        self.c2 = c2
        self.max_iter = max_iter
        self.tol = tol

        # лучшее расположение для всего роя
        self.swarm_best = None
        # расположение всех частиц, (рой)
        self.swarm = None

    def search_global(self, arg, space):
        """
        INPUT:
        arg --- количество аргументов функции.
        space --- область поиска оптимума. Задается как список из
        кортежей, где кортеж --- это область значений
        одного аргумента функции.
        """
        self.arg = arg
        self.space = np.array(space)
        self.swarm = np.asarray([])

        # генерируем расположение роя
        for _ in range(self.ell):
            self.swarm = np.append(self.swarm,
                                  Particle(self.arg, self.space))

        for k in range(self.max_iter):
            for i in range(self.ell):
                # обновляем расположение частицы
                self.swarm[i].update_position()
                # сравниваем с лучшей точкой частицы
                self.swarm[i].choose_personal_best()

            # выбираем лучшую точку для роя
            if k != 0:
                dist_0 = self.dist(self.swarm_best[0])
                self.choose_social_best()
                dist_1 = self.dist(self.swarm_best[0])

            # останавливаем поиск в условиях заданной точности
            if (dist_0 != dist_1) and (abs(dist_0-dist_1) <= self.tol):
                break

```

```

    else:
        self.choose_social_best()

    # обновляем вектор скорости
    for i in range(self.ell):
        self.swarm[i].update_velocity(self.w, self.c1,
                                      self.c2, self.swarm_best[0])

    print(f"Глобальный оптимум: {self.swarm_best[0]}")
    print(f"Значение функции в данной точке: {self.swarm_best[1]}")

def choose_social_best(self):
    best = min([[self.swarm[i].pos_best[0],
                 self.swarm[i].pos_best[1]] for i in range(self.ell)],
               key=lambda x: x[1])
    self.swarm_best = best

def dist(self, x):
    return np.sqrt(np.sum(x ** 2))

```

Инерционный вес w должен быть близким к 1, а коэффициенты ускорения c_1, c_2 — достаточно малыми. Это дает возможность каждой случайно перемещающейся частице как можно обширнее исследовать заданное пространство, постепенно сходясь к наилучшему расположению роя. Исходя из этого, мы установили по умолчанию именно такие гиперпараметры: $w=1.0$, $c_1=0.2$, $c_2=0.2$.

Реализуем PSO на функции Розенброка. Рой будет содержать 100 частиц. Зададим вес $w=0.95$.

In: swarm_optimizer = ParticleSwarmOptimisation(w=0.95, ell=100)

Найдем глобальный минимум заданной функции. Перемещение роя в поисках глобального оптимума представлено на рисунке 2.3.

In: np.random.seed(53)
swarm_optimizer.search_global(2, [(-10, 10), (-10, 10)])

Out: Глобальный оптимум: [1. 1.]
Значение функции в данной точке: 6.366439023928984e-22.

За 1000 итераций метод роения частиц сходится к глобальному минимуму функции Розенброка с экспоненциальной скоростью с очень высокой точностью в 6.37e-22 (рис.2.4). Средняя скорость реализации алгоритма составляет 1.79 секунды со стандартным отклонением в 0.111 секунд.

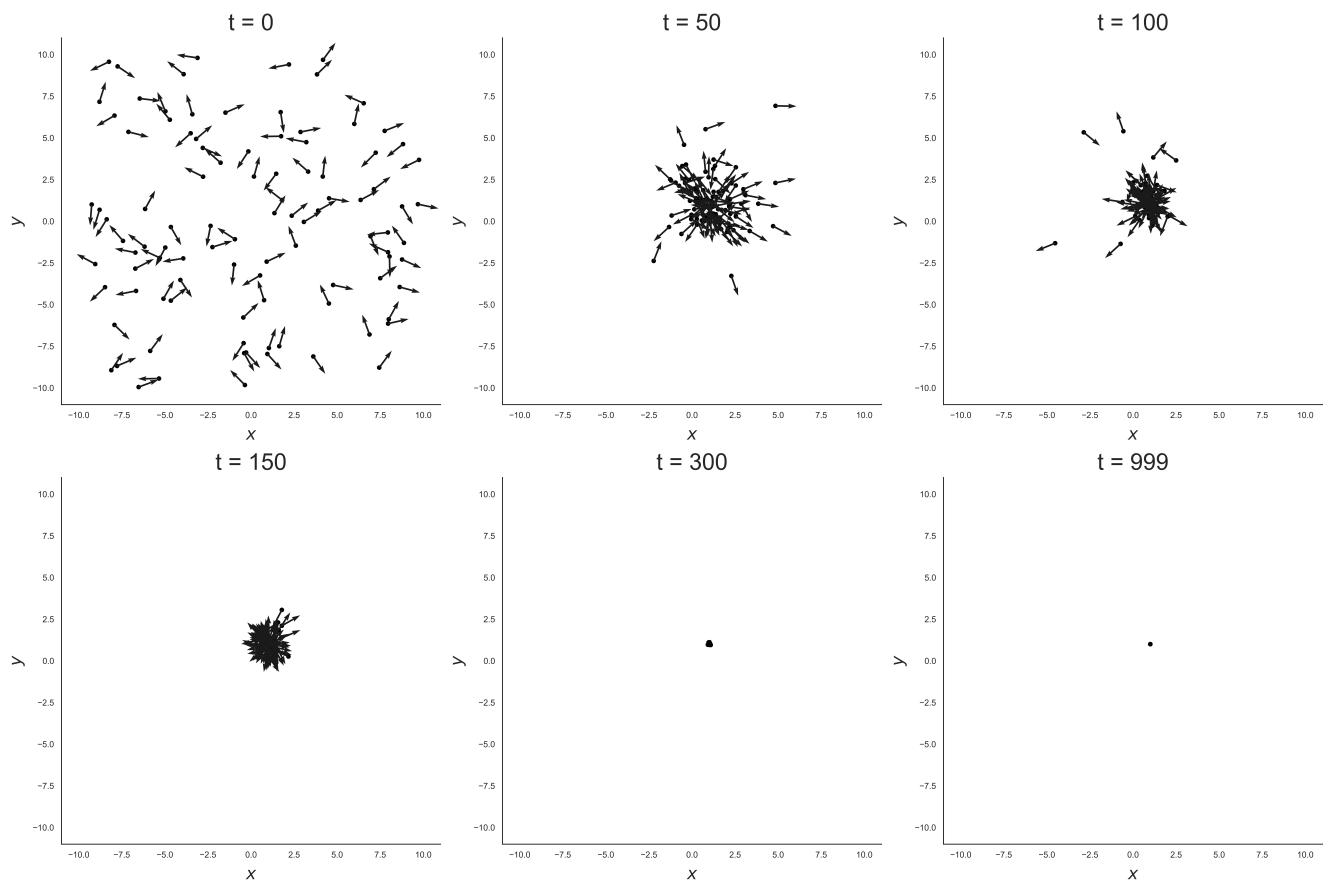


Рисунок 2.3 — Расположение роя в разные моменты времени.

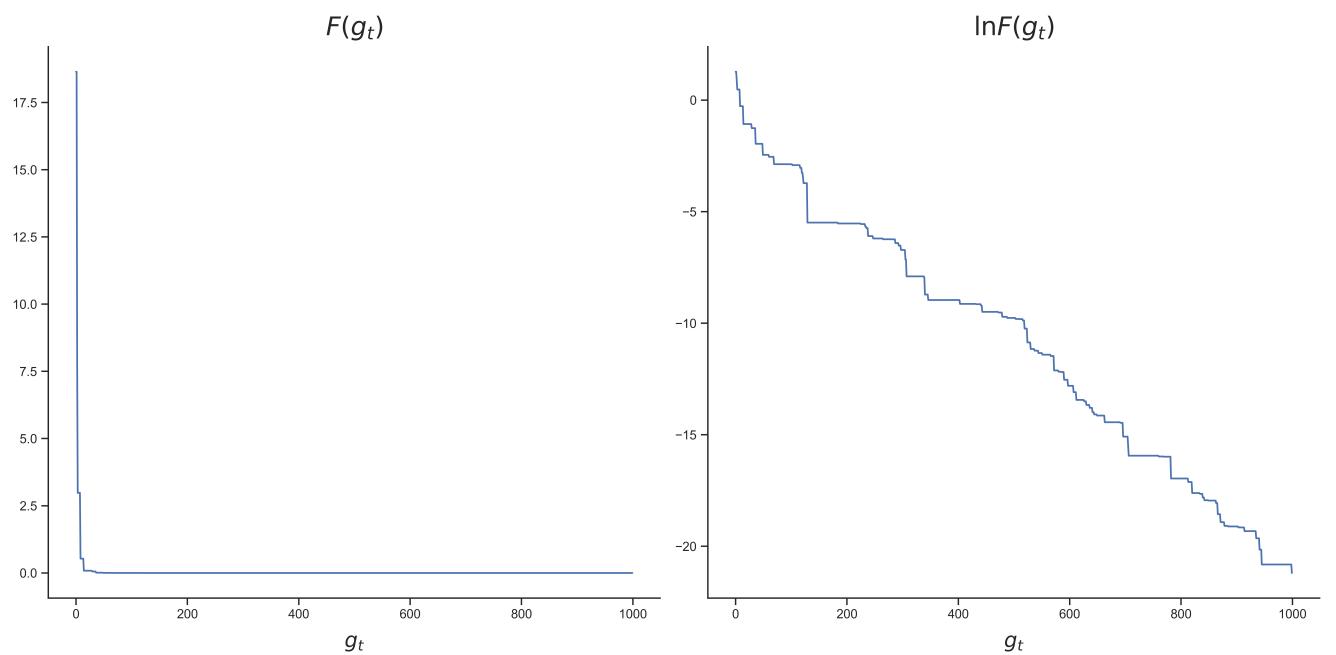


Рисунок 2.4 — Оптимизационный процесс.

2.3. Вывод

Рассмотрев метод роения частиц, выявим его плюсы и минусы.

Таблица 2.1 — Метод роения частиц

Преимущества	Недостатки
<ol style="list-style-type: none">1. Не требует дифференцируемости и непрерывности исследуемой функции2. Не застревает в локальных экстремумах3. Находит глобальный экстремум с очень высокой точностью	

3. Генетический алгоритм

Генетический алгоритм (*genetic algorithm*, GA) является одним из самых популярных типов эволюционных алгоритмов, которые — как можно понять из их названия, — используют теорию эволюции, в частности теорию Дарвина, в решении той или иной оптимизационной задачи. Суть алгоритма заключается в поиске наилучшего решения по принципу естественного отбора: случайным образом создается поколение, в ходе эволюции которого происходит скрещивание генов — таким образом, появляется новое поколение (старые особи создают потомков) — и их мутация.

3.1. Алгоритм

Традиционно в качестве решения генетический алгоритм использует бинарное кодирование (binary encoding). Однако в данной работе будет проиллюстрирован метод реального кодирования (real value encoding), то есть решение будет представляться в вещественных числах.

Рассмотрим задачу нахождения глобального минимума функции $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

где каждая особь кодируется вектором $x = (x_1, \dots, x_n)$, называемым хромосомой, компоненты которой являются генами.

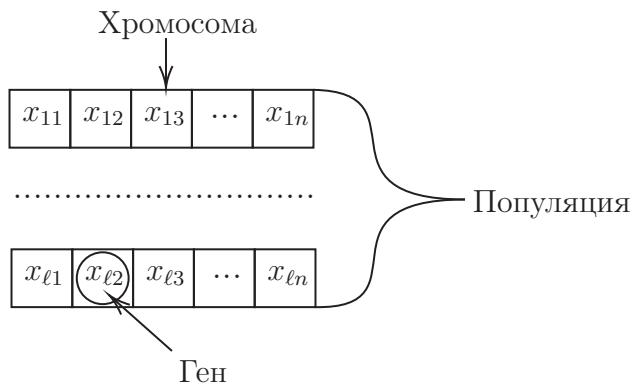


Рисунок 3.1

Пусть у нашего поколения, или популяции, P есть ℓ особей. Тогда поколение в момент времени t примет следующий вид:

$$P_t = \{x_{i,t}\}_{i=1}^\ell,$$

где у каждой хромосомы имеется n генов: $x_{i,t} = (x_{i1,t}, \dots, x_{in,t})$

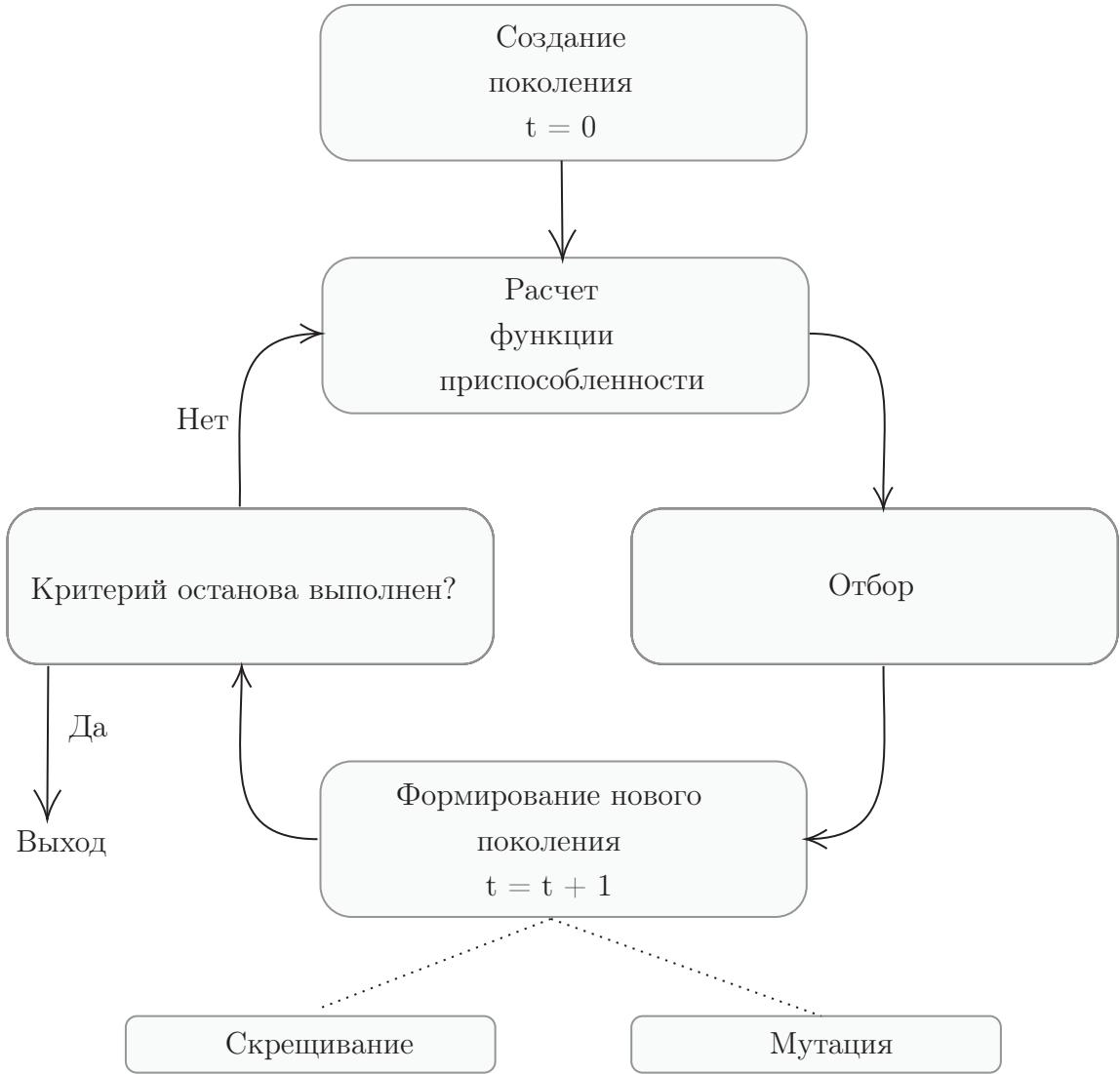


Рисунок 3.2 — Генетический алгоритм.

Теперь рассмотрим сам алгоритм (рис. 3.2):

1. Генерируем первое поколение особей случайным образом:

$$P_0 = \{x_{1,0}, \dots, x_{\ell,0} \mid (x_{i1,0}, \dots, x_{in,0}) \in D, x_{ij,0} \sim U(a, b)\},$$

где $D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a < x_i < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ — заданная область оптимизации (гиперкуб или гиперпрямоугольник).

2. Оцениваем приспособленность (fitness) текущего поколения.

Сначала вычисляем значения целевой функции для каждой особи:

$$F_t = \{f(x_{i,t})\}_{i=1}^{\ell}.$$

Затем используем такое преобразование σ , что все компоненты F_t будут лежать на отрезке $[0, 1]$:

$$\sigma(z) = \frac{z - F^{worst}}{F^{best} - F^{worst}}, \quad (3.1)$$

где F^{best} , F^{worst} — лучшее и худшее значения целевой функции в текущем поколении соответственно.

Таким образом, получим значения приспособленности особей:

$$F'_t = \{\sigma(f(x_{i,t}))\}_{i=1}^{\ell}.$$

3. Отберем k наиболее приспособленных особей для дальнейшего размножения.

Будем считать, что особь x' более приспособлена, чем особь x'' , если

$$\sigma(f(x')) > \sigma(f(x'')).$$

Ранжируем особи в текущей популяции по значениям их приспособленности в порядке убывания, то есть от самых приспособленных к самым неприспособленным:

$$\sigma(f(x_t^{(1)})) \geq \dots \geq \sigma(f(x_t^{(k)})) \geq \dots \geq \sigma(f(x_t^{(\ell)})).$$

4. Скрещиваем (crossover) k наиболее приспособленных особей со всеми остальными. Так мы распространяем «хорошие» гены по популяции.

Под скрещиванием будем иметь в виду операцию создания новой особи, — более точно ее хромосомы, — у которой часть генов будет от приспособленной особи x^m , $m \in (1, \dots, k)$ вероятностью $\mathbb{P}(\{y_i = x_i^m\})$, а часть от особи x с вероятностью $\mathbb{P}(\{y_i = x_i\})$.

$$\exists x_t^m, x_t \in D: \Psi(x_t^m, x_t) = y_{t+1} = (y_{1,t+1}, \dots, y_{n,t+1}), \quad (3.2)$$

где Ψ — оператор скрещивания особей x^m и x для получения особи y . Ее компоненты получаются следующим образом:

$$y_i = \begin{cases} x_i^m, & \text{с вероятностью } \mathbb{P}(\{y_i = x_i^m\}) = \frac{\sigma(f(x^m))}{\sigma(f(x^m)) + \sigma(f(x))} \\ x_i, & \text{с вероятностью } \mathbb{P}(\{y_i = x_i\}) = \frac{\sigma(f(x))}{\sigma(f(x^m)) + \sigma(f(x))} \end{cases}.$$

Заметим, что,

$$\mathbb{P}(\{y_i = x_i^m\}) + \mathbb{P}(\{y_i = x_i\}) = \frac{\sigma(f(x^m))}{\sigma(f(x^m)) + \sigma(f(x))} + \frac{\sigma(f(x))}{\sigma(f(x^m)) + \sigma(f(x))} = 1.$$

Также стоит отметить, что обычно гены более приспособленной особи x^m чаще присваиваются, нежели случайно выбранной особи. Это объясняется тем, что в большинстве случаев вероятность получения гена приспособленной особи превышает вероятность получения гена случайно выбранной особи

5. Некоторых особей в текущей популяции — кроме лучшей, то есть $x_t^{(1)}$, — подвергнем мутации. Оператор мутации меняет произвольное количество генов в хромосоме особи на другие — однако довольно близкие к исходным, — гены.

$$\Upsilon(x_t) = \hat{x}_{t+1}, \quad (3.3)$$

где Υ — оператор мутации, x — мутируемая особь.

Если ген в хромосоме подвергается мутации, то он принимает следующий вид:

$$\hat{x}_i = x_i + \delta_i \in D.$$

6. Переходим к пункту 2, пока не выполнен критерий останова.

Приведем несколько примеров критерия останова:

- а) Ограничить максимально возможное количество поколений (количество эволюций популяции).
- б) Задать минимальную точность приближения.

3.2. Функция Экли

Функция Экли также, как и функция Розенброка, используется в качестве оценки производительности оптимизационных алгоритмов. Она имеет следующий вид:

$$f(x_1, \dots, x_n) = 20 + e - 20 \exp \left\{ -0.2 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \right\} - \exp \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(2\pi x_i) \right\}.$$

Будем рассматривать трехмерный случай. Тогда глобальный минимум функции Экли достигается в точке $(x, y) = (0, 0)$ со значением целевой функции $f(0, 0) = 0$ (рис. 3.3).

Воспользуемся принципами объектно-ориентированного программирования для решения данной задачи.

Определим функцию Экли в Python и найдем ее глобальный минимум.

```
In: def ackley_func(x):
    part_1 = 20*np.exp(-0.2*np.sqrt(0.5*(x[0]**2 + x[1]**2)))
    part_2 = np.exp(0.5*(np.cos(2*np.pi*x[0]) + np.cos(2*np.pi*x[1])))
    return 20 + np.exp(1) - part_1 - part_2
```

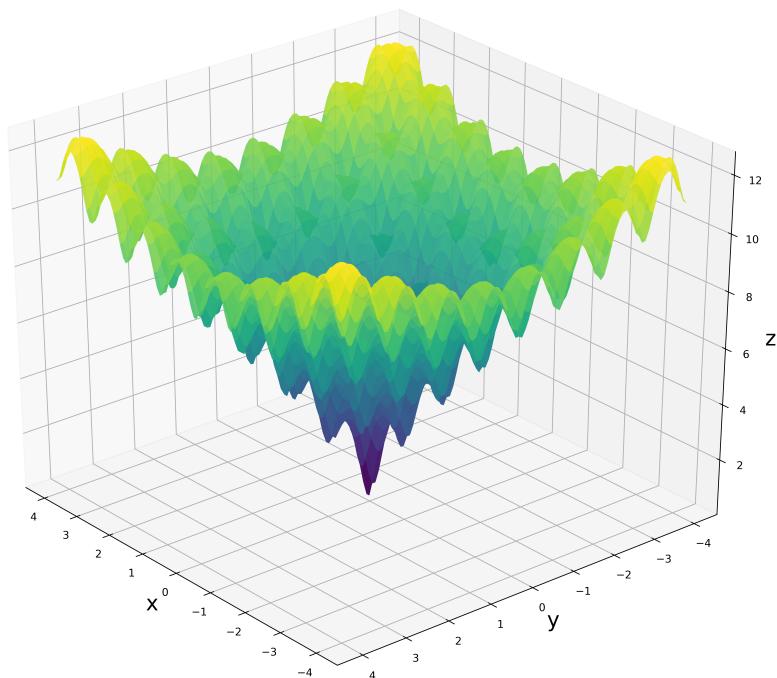


Рисунок 3.3 — Функция Экли в трехмерном пространстве.

Сначала создадим класс `Individual`, который моделирует каждую особь в нашей популяции: присваивает каждой особи хромосому и ее длину, гены, а также значение целевой функции в точке, используя хромосому данной особи, и значение приспособленности особи. Также определим названия для каждой особи в популяции для облегчения восприятия данного класса.

```
In: class Individual:
    def __init__(self, search_space, chromosome_len):
        self.search_space = search_space
        self.chromosome_len = chromosome_len
        self.chromosome = np.array([self.create_gene(j)
                                    for j in range(chromosome_len)])
        self.target_value = None # значение целевой функции при
        # использовании данной особи
```

```

    self.fitness = None # значение приспособленности особи
    # относительно других
    self.name = '#' + ''.join(map(str,
                                    np.random.randint(0, 9, 7).tolist()))

def create_gene(self, pos):
    return np.random.uniform(self.search_space[pos][0],
                            self.search_space[pos][1])

def __repr__(self):
    chr = '; '.join(list(map(str,
                             self.fittest_individual.chromosome.tolist())))
    tar = self.target_value
    return f'{self.name}: chromosome = {(chr)}; target_value = {tar}'

```

Далее определим генетический алгоритм под классом `GeneticAlgorithm`. Гиперпараметрами нашего метода являются: количество особей в популяции `ell`, количество отбираемых особей для скрещивания `k`, максимальная мутация гена `mutation_rate` и критерий останова в качестве превышения заданного количества поколений `max_iter`.

```

In: class GeneticAlgorithm:
    def __init__(self, ell=1000, k=200, mutation_rate=0.1,
                 max_iter=100):
        """
        PARAMETERS:
        ell --- количество особей в поколении
        k --- количество особей для размножения
        mutation_rate --- максимальная мутация гена
        max_iter --- максимальное количество новых поколений
        """
        self.ell = ell
        self.k = k
        self.mutation_rate = mutation_rate
        self.max_iter = max_iter

        self.search_space = None
        self.chromosome_len = None # длина хромосомы особи
        self.best_individuals = None # k наиболее
        # приспособленных особей
        self.fittest_individual = None # самая приспособленная особь
        self.population = None

```

```

def search_global(self, search_space, func):
    """
    INPUT:
    search_space --- область поиска оптимума. Задается как список
    из кортежей, где кортеж --- это область значений одного
    аргумента функции
    """
    self.search_space = np.array(search_space)
    self.chromosome_len = len(self.search_space)
    self.best_target_value_history = []
    # создаем первое поколение
    self.population = self.create_population(self.search_space)

    # проходим этапы эволюции
    for i in tqdm(range(self.max_iter)):
        # оцениваем приспособленность наших особей
        self.evaluate_population(func)
        # отбираем к наиболее наиболее приспособленных особей
        self.selection()

        # формируем новые поколения
        # скрещиваем особи
        for idx in range(self.k, self.e1):
            # случайно выбираем одну из лучших особей
            agent = np.random.choice(self.best_individuals)
            select_fitted_individual = agent
            # создаем потомка и заменяем им старую особь
            offspring = self.crossover(select_fitted_individual,
                                         self.population[idx])
            self.population[idx].chromosome = offspring

        # мутируем все особи, кроме самой приспособленной
        for individual in self.population[1:]:
            self.mutate(individual)

    return self.fittest_individual

def create_population(self, search_space):
    """
    INPUT:
    search_space --- область поиска оптимума. Задается как список
    из кортежей, где кортеж --- это область значений одного
    аргумента функции
    """
    self.search_space = np.array(search_space)

```

```

self.chromosome_len = len(self.search_space)

return np.array([Individual(self.search_space, self.chromosome_len)
               for i in range(self.ell)])


def evaluate_population(self, func):
    """
    INPUT:
    func --- оптимизируемая функция, которая принимает список
    в качестве аргументов
    """
    F = []

    for individual in self.population:
        individual.target_value = func(individual.chromosome)
        F.append(individual.target_value)

    for individual in self.population:
        individual.fitness = self.normalize(individual.target_value,
                                             min(F), max(F))

    return F


def normalize(self, z, F_best, F_worst):
    """
    INPUT:
    z --- масштабируемое значение
    F_best --- лучшее значение целевой функции
    F_worst --- худшее значение целевой функции
    """
    return (z - F_worst) / (F_best - F_worst)


def selection(self):
    """
    Оператор отбора
    """
    self.population = sorted(self.population,
                            key=lambda idividual: idividual.fitness,
                            reverse=True)
    self.best_individuals = self.population[:self.k]
    self.fittest_individual = self.population[0]

```

```

def crossover(self, parent_fitted, parent_random):
    """
    Оператор скрещивания

    INPUT:
    parent_fitted --- одна из самых приспособленных особей
    parent_random --- случайная особь
    """

    return np.array([parent_random.chromosome[j]
                    if np.random.uniform(0, 1) < parent_random.fitness
                    else parent_fitted.chromosome[j]
                    for j in range(parent_fitted.chromosome_len)])


def mutate(self, individual):
    """
    Оператор мутации

    INPUT:
    individual --- особь, подвергающаяся мутации
    """

    individual_hat_chromosome = np.asarray([])

    for j in range(individual.chromosome_len):
        delta = np.random.uniform(-self.mutation_rate,
                                   self.mutation_rate)
        j_hat = individual.chromosome[j] + delta
        # на случай, если ген выйдет за пределы гиперпрямоугольника
        j_hat = min(max(j_hat, self.search_space[j][0]),
                    self.search_space[j][1])
        individual_hat_chromosome = np.append(individual_hat_chromosome,
                                                j_hat)

    individual.chromosome = individual_hat_chromosome

```

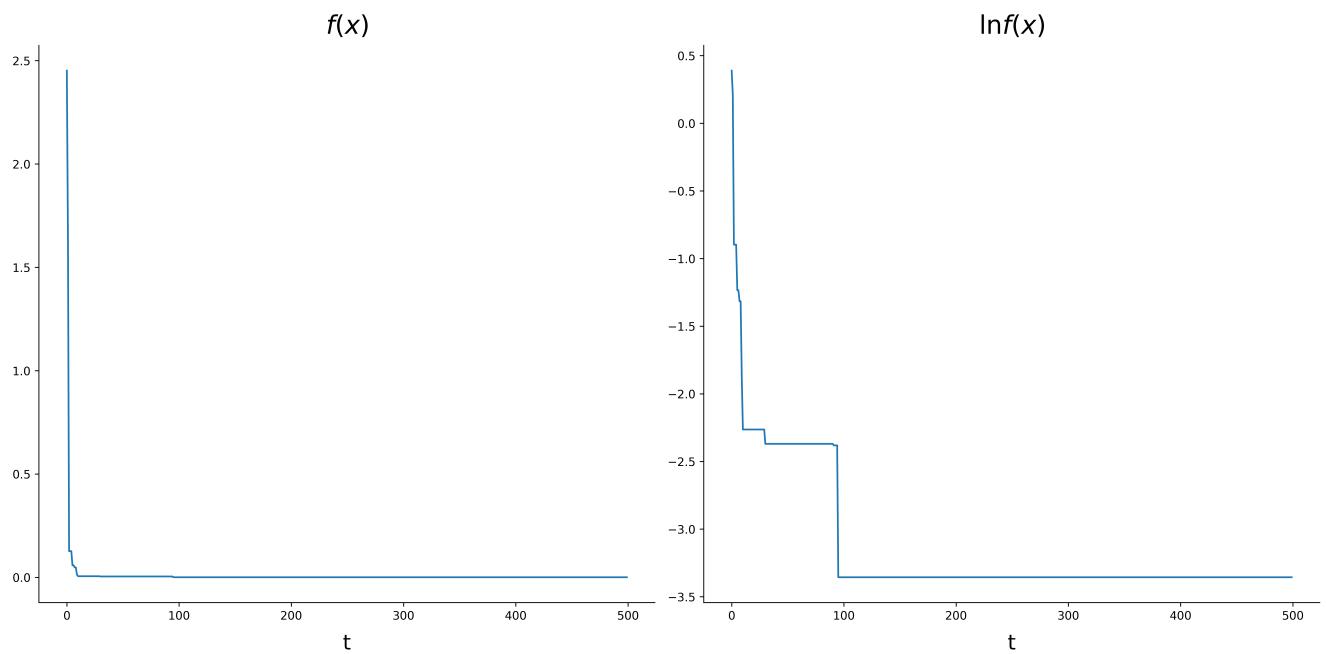


Рисунок 3.4 — Оптимизационный процесс.

Теперь реализуем генетический алгоритм.

```
In: np.random.seed(13)
gen_optimizer = GeneticAlgorithm(k=200, ell=1200, mutation_rate=0.2,
                                  max_iter=500)
gen_optimizer.search_global(search_space=[(-10, 10), (-10, 10)],
                            func=ackley_func)

Out: ##0216272: chromosome = (8.136619386361899e-05; -0.000132699205336);
      target_value = 0.0004406188188861293
```

GA достаточно близко приблизился к глобальному минимуму с точностью $1e - 4$. Однако, можно заметить как генетический алгоритм уступает PSO в точности и скорости. Так, для нахождения глобального минимума функции Экли посредством метода роения частиц с теми же гиперпараметрами, которые мы использовали при оптимизации функции Розенброка (разд. 2.2) получим более высокую точность и скорость исполнения алгоритма:

```
In: np.random.seed(13)
swarm_optimizer = ParticleSwarmOptimisation(w=0.95, ell=100)
swarm_optimizer.search_global(arg=2,
                               search_space=[(-10, 10), (-10, 10)])

Out: Глобальный оптимум: [-1.01887041e-12 -5.70781647e-13].
      Значение функции в данной точке: 3.303579632074616e-12.
```

3.3. Задача коммивояжера

Вернемся к задаче коммивояжера (TSP), рассмотренной нами ранее (разд. 1.4). Вспомним, что метод отжига — хоть и дал вполне приемлемый результат, — не смог найти самый оптимальный путь. Решим данную проблему посредством генетического алгоритма. Ко всему прочему, усложним TSP: будем искать оптимальный маршрут для 52 городов.

Определим класс `City`, моделирующий город.

```
In:  class City:
        def __init__(self, coord, number):
            self.x = coord[0]
            self.y = coord[1]
            self.name = letters[number]

        def distance(self, city):
            return np.sqrt((self.x - city.x) ** 2 + (self.y - city.y) ** 2)

        def __repr__(self):
            return f'{self.name}: ({str(self.x)}; {self.y})'

part_1 = [f'{chr(i)}' for i in range(65, 65 + 26)]
part_2 = [f'{chr(i)}*' for i in range(65, 65 + 26)]
letters = part_1 + part_2
```

Создадим изначальный маршрут 3.5.

```
In:  def map_city(cities_num, cities_range):
        return [City(np.random.randint(1, cities_range, size=2), j)
                for j in range(cities_num)]

In:  np.random.seed(13)
not_closed_road = map_city(52, 2000)
closed_road = not_closed_road + [not_closed_road[0]]
```

Зададим нашу целевую функцию.

```
In:  def total_distance(path, cities_lst):
        dist_lst = []
        for j in range(len(path) - 1):
            dist_lst.append(cities_lst[j].distance(cities_lst[j + 1]))
            dist_lst.append(cities_lst[j + 1].distance(cities_lst[0]))
        return sum(dist_lst)

In:  path = [city.name for city in closed_road]
route_dist = total_distance(path=path, cities_lst=closed_road)
```

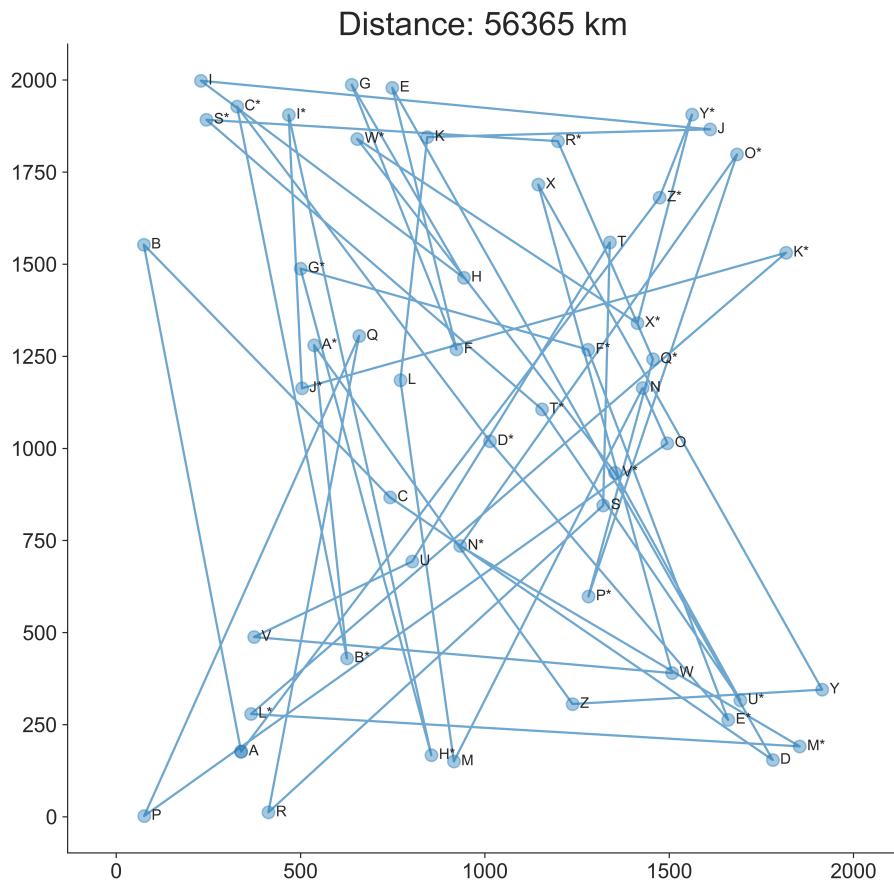


Рисунок 3.5 — Изначальный маршрут из 52-х городов.

Определим класс `Individual` для моделирования особи.

```
In:  class Individual:
    def __init__(self, cities_lst, id_of_individual):
        self.map = random.sample(cities_lst[:-1],
                                  len(cities_lst[:-1]))
        self.path = [city.name for city in self.map]
        self.id_of_individual = id_of_individual
        self.dist = None
        self.fitness = None

    def __repr__(self):
        id = self.id_of_individual
        return f'Individual {id}: Distance = {int(round(self.dist))} km'
```

Теперь определим генетический алгоритм.

```
In: class GeneticAlgorithm:
    def __init__(self, ell, k, mutation_rate, initial_map, max_iter):
        """
        PARAMETERS:
        ell --- количество особей в поколении
        k --- количество особей для размножения
        mutation_rate --- коэффициент мутации
        max_iter --- максимальное количество новых поколений
        """
        self.ell = ell
        self.k = k
        self.mutation_rate = mutation_rate
        self.initial_map = initial_map
        self.max_iter = max_iter

        self.best_individuals = None # k наиболее приспособленных особей
        self.fittest_individual = None # самая приспособленная особь
        self.population = None

    def search_best_path(self):
        # создаем первое поколение
        self.population = self.create_population()

        # проходим этапы эволюции
        for i in tqdm(range(self.max_iter)):
            # оцениваем приспособленность наших особей
            self.evaluate_population()
            # отбираем k наиболее наиболее приспособленных особей
            self.selection()

            # формируем новые поколения
            # скрещиваем особи
            for idx in range(self.k, self.ell):
                # случайно выбираем одну из наилучших особей
                agent = np.random.choice(self.best_individuals)
                select_fitted_individual = agent
                # создаем потомка и заменяем им старую особь
                offspring = self.crossover(select_fitted_individual,
                                            self.population[idx])
                self.population[idx].map = offspring
            # мутируем все особи, кроме самой приспособленной
            for individual in self.population[1:]:
                self.mutate(individual)
```

```

    return self.fittest_individual

def create_population(self):
    map = self.initial_map
    return [Individual(self.map, i + 1) for i in range(self.ell)]


def evaluate_population(self):
    F = []

    for indiv in self.population:
        indiv.dist = total_distance(indiv.path + [indiv.path[0]],
                                     indiv.map + [indiv.map[0]])
        F.append(indiv.dist)

    for indiv in self.population:
        indiv.fitness = self.normalize(indiv.dist,
                                        min(F), max(F))

def normalize(self, z, F_best, F_worst):
    """
    INPUT:
    z --- масштабируемое значение
    F_best --- лучшее значение целевой функции
    F_worst --- худшее значение целевой функции
    """
    return (z - F_worst) / (F_best - F_worst)


def crossover(self, parent_fitted, parent_random):
    """
    Оператор скрещивания

    INPUT:
    parent_fitted --- одна из самых приспособленных особей
    parent_random --- случайная особь
    """
    genes_1 = int(np.random.uniform(0, 1) * len(parent_fitted.path))
    genes_2 = int(np.random.uniform(0, 1) * len(parent_fitted.path))

    start = min(genes_1, genes_2)
    end = max(genes_1, genes_2)
    xi = np.random.uniform(0, 1)
    if (end - start > self.ell / 2) and (xi < parent_fitted.fitness):
        child_1 = parent_fitted.map[start:end]
        child_2 = [i for i in parent_random.map if i not in child_1]

```

```

else:
    child_1 = parent_random.map[start:end]
    child_2 = [i for o in parent_fitted.map if i not in child_1]

return child_1 + child_2

def mutate(self, individual):
    """
    Оператор мутации

    INPUT:
    individual --- особь, подвергающаяся мутации
    """
    for j in range(len(individual.path)):
        if np.random.uniform(0, 1) < self.mutation_rate:
            num = np.random.randint(len(individual.path))
            a, b = individual.map[j], individual.map[num]
            individual.map[num], individual.map[j] = a, b

def selection(self):
    """
    Оператор отбора
    """
    self.population = sorted(self.population,
                             key=lambda x: x.fitness, reverse=True)
    self.best_individuals = self.population[:self.k]
    self.fittest_individual = self.population[0]

```

Реализуем его.

```

In: optimizer = GeneticAlgorithm(ell=1500, k=300, mutation_rate=0.001,
                               initial_map=closed_road, max_iter=1500)
     optimizer.search_best_path()

Out: Individual 658: Distance = 11486 km

```

Генетический алгоритм справился с TSP и нашел самый оптимальный маршрут (рис. 3.7), что не смог сделать SA для более короткого маршрута.

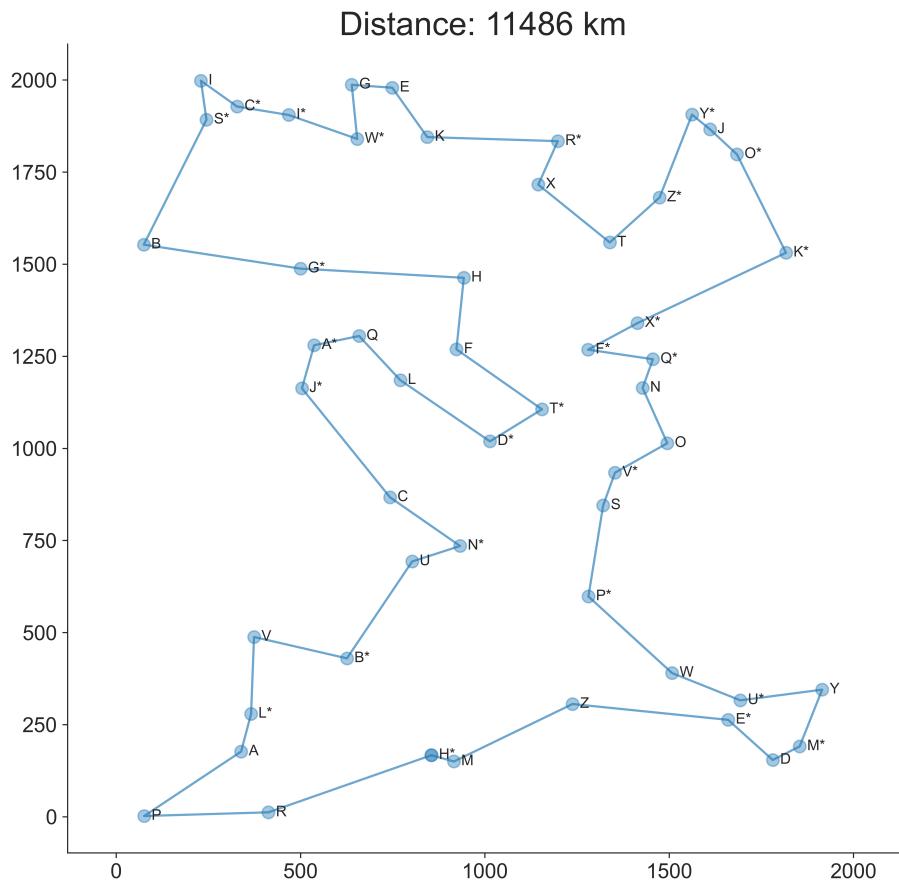


Рисунок 3.6 — Оптимальный маршрут из 52-х городов.

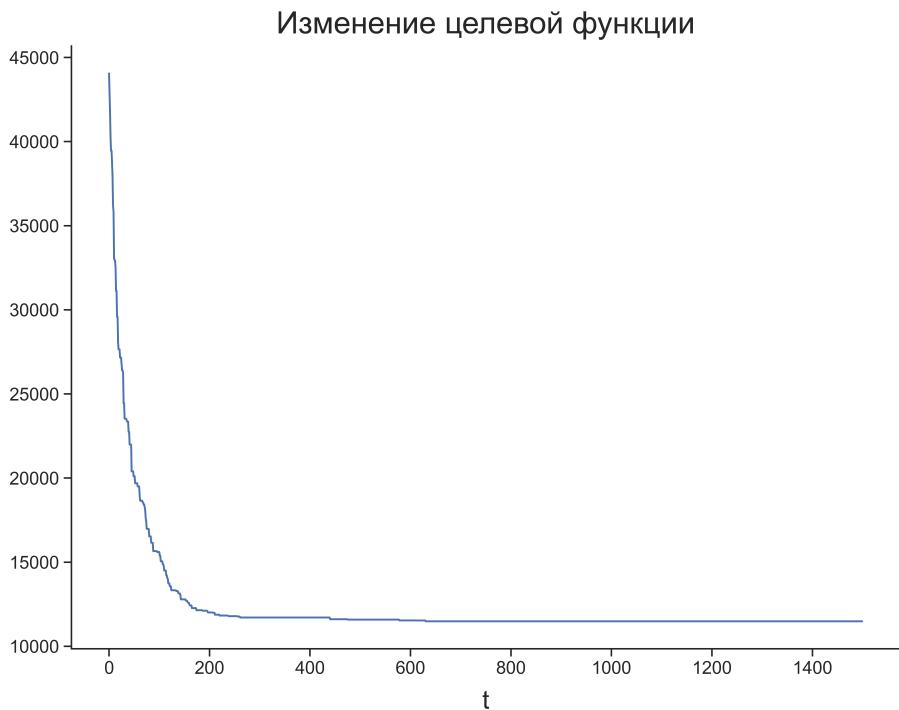


Рисунок 3.7 — Оптимизационный процесс.

3.4. Вывод

Рассмотрев генетический алгоритм, выявим его плюсы и минусы.

Таблица 3.1 — Генетический алгоритм

Преимущества	Недостатки
1. Не требует дифференцируемости и непрерывности исследуемой функции	1. Сложно найти глобальный оптимум с высокой точностью
2. Используется для широкого класса задач	2. Плохо работает для многоэкстремальных функций
	3. Достаточно медленная реализация

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

Список литературы

- [1] *Воронцов К. В.* (2010) Курс по машинному обучению. Критерии выбора моделей и методы отбора признаков. // Сайт machinelearning.ru. URL: <http://machinelearning.ru> (дата обращения: 11.05.2020)
- [2] *Лопатин А. С.* (2005) Стохастическая оптимизация в информатике. Метод отжига. // Сайт math.spbu.ru. URL: <https://www.math.spbu.ru/user/gran/optstoch.htm> (дата обращения: 20.01.2020)
- [3] *Панченко Т. В.* (2007) Генетические алгоритмы: учебно-методическое пособие. // Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет».
- [4] *Шамин Р. В.* (2019) Машинное обучение в задачах экономики. // Москва: Грин Принт.
- [5] *Шамин Р. В.* (2019) Практическое руководство по машинному обучению. // Москва: Научный канал.
- [6] *Nedjah N., Mourelle L.* (2006) Swarm Intelligent Systems. // Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- [7] *Pedersen M. E. H.* (2010) Tuning and Simplifying Heuristical Optimization. Thesis for the degree of Doctor of Philosophy. // University of Southampton.
- [8] Petrowski A., Ben-Hamida S. (2017) Evolutionary Algorithms. // Hoboken: New Jersey.
- [9] *Weise T.* (2009) Global Optimization Algorithms — Theory and Application. // Self-Published.