

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа Экономики»

ФАКУЛЬТЕТ ЭКОНОМИЧЕСКИХ НАУК

ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА «ЭКОНОМИКА»

КУРСОВАЯ РАБОТА

Стохастические методы оптимизации

Выполнил:
студент группы БЭК1812
Хайкин ГЛЕБ АЛЕКСЕЕВИЧ

Научный руководитель:
старший преподаватель
Борзых Дмитрий Александрович



МОСКВА — 2020

Оглавление

1. Введение	3
2. Методы и их применение	4
2.1. Имитация отжига	4
2.1.1. Алгоритм	4
2.1.2. N ферзей	5
2.1.3. Минимизация негладкой функции	10
2.1.4. Задача коммивояжера	12
2.1.5. Вывод	12
2.2. Одиночное изображение	13
2.3. Длинное название параграфа, в котором мы узнаём как сделать две картинки с общим номером и названием	13
2.4. Пример вёрстки списков	15
2.5. Традиции русского набора	16
2.5.1. Пробелы	17
2.5.2. Математические знаки и символы	17
2.5.3. Кавычки	17
2.5.4. Тире	18
2.5.5. Дефисы и переносы слов	18
2.6. Текст из панграмм и формул	18
Заключение	23
Список литературы	24

1. Введение

jjj.

2. Методы и их применение

2.1. Имитация отжига

Имитация отжига (simulated annealing) представляет собой алгоритм решения задачи поиску глобального оптимума некоторой функции $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ через упорядоченный стохастический поиск, базирующийся на моделировании физического процесса кристаллизации вещества из жидкого состояния в твердое.

Для описания метода рассмотрим задачу нахождения глобального минимума:

$$F(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{X}},$$

где $x = (x_1, \dots, x_m)$ — вектор всех состояний, \mathbb{X} — множество всех состояний.

2.1.1. Алгоритм

Положим, что $k = 0$ и изначально температура зафиксированна на определенном уровне $T(k) = \text{const.}$

1. Из множества всех состояний выберем случайный элемент $\hat{x}(k) \equiv x_i, i \in (1, \dots, m).$
2. Понизим температуру одним из следующих способов:

(1) Больцмановский отжиг

$$T(k) = \frac{T(0)}{\ln(1 + k)}, \quad k > 0 \quad (2.1)$$

(2) Отжиг Коши

$$T(k) = \frac{T(0)}{k} \quad (2.2)$$

(3) Метод тушения

$$T(k + 1) = \alpha T(k), \quad \alpha \in (0, 1) \quad (2.3)$$

3. Пусть следующий элемент зависит от функции из семейства симметричных вероятностных распределений $G : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, порождающей новое состояние:

$$\tilde{x}(k) \sim G(\hat{x}(k), T(k)).$$

Часто G выбирается из семейства нормальных распределений:

$$G(\tilde{x}; \hat{x}, T) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^D T}} \exp \left\{ \frac{-|\tilde{x} - \hat{x}|^2}{2T} \right\}, \quad (2.4)$$

где \hat{x} — математическое ожидание, T — дисперсия, D — размерность пространства всех состояний.

Также для $D = 1$ используется распределение Коши с плотностью:

$$G(\tilde{x}; \hat{x}, T) = \frac{1}{\pi} \frac{T}{|\tilde{x} - \hat{x}|^2 + T^2}, \quad (2.5)$$

где \hat{x} — параметр сдвига, T — параметр масштаба.

Рассчитываем разницу двух функций:

$$\Delta F = F(\tilde{x}(k)) - F(\hat{x}(k)).$$

Принимаем $\tilde{x}(k)$ за новый элемент, то есть $\hat{x}(k+1) \equiv \tilde{x}(k)$, с вероятностью

$$\mathbb{P}(\{\hat{x}(k+1) = \tilde{x}(k)\}) = \begin{cases} 1, & \Delta F < 0 \\ \exp \left\{ -\frac{\Delta F}{T(k)} \right\}, & \Delta F \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

и отвергаем его, то есть $\hat{x}(k+1) \equiv \hat{x}(k)$, с вероятностью

$$q = 1 - \mathbb{P}(\{\hat{x}(k+1) = \tilde{x}(k)\}).$$

Заметим, чем выше температура, тем больше вероятность принять состояние хуже текущего ($\Delta F \geq 0$).

Возвращаемся к пункту 2, пока не достигнем глобального минимума.

2.1.2. N ферзей

Рассмотрим задачу, в которой необходимо расставить N ферзей на шахматной доске размера $N \times N$ так, чтобы ни один из них не «бил» другого.

В таком случае, множество всех состояний \mathbb{X} будет содержать всевозможные расстановки ферзей на шахматной доске. Общее число возможных расположений n ферзей на $N \times N$ -клеточной доске равно:

$$\binom{N \times N}{n} = \frac{N \times N!}{n!(N \times N - n)!}$$

Тогда функция $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ будет выдавать количество атак ферзей, и решением данной задачи будет нахождение такого расположения x^* , что $F(x^*) \equiv 0$.

Зафиксируем изначальное расположение ферзей на шахматной доске. Очевидно, что несколько ферзей не могут находиться на одной вертикали или горизонтали, ибо тогда они будут находиться под ударом друг-друга. Следовательно, наша задача сужается к поиску расположения:

$$x^* = (q_1, \dots, q_n) = \{(1, h_1), \dots, (n, h_n) : h_i \in (1, \dots, n), h_1 \neq \dots \neq h_n\}, \quad (2.7)$$

где (i, h_i) — расположение i -го ферзя (q_i) на i -ой вертикали по горизонтали h_i .

Отметим, что такая задача имеет $N!$ решений.

Определим функцию, которая будет создавать изначальное неоптимальное расположение, в общем виде. Учитем, что несколько ферзей не могут находиться на одной вертикали или горизонтали.

```
In [1]: def queens(N):
    np.random.seed(33412)
    ver = np.arange(1, N + 1)
    hor = np.arange(1, N + 1)
    np.random.shuffle(hor)
    return np.column_stack((ver, hor)) # получаем массив
    # размерности (N, 2), отображающий расположение ферзей
```

Выведем первоначальное расположение ферзей для стандартной доски 8×8 , где первый столбец массива — расположение по вертикали, второй столбец массива — расположение по горизонтали. Для наглядности — презентации оптимизационного процесса — выстроим изначальную расстановку на главной диагонали.

```
In [2]: matrix = queens(8)
matrix
```

```
Out[2]: array([[1, 1],
               [2, 2],
               [3, 3],
               [4, 4],
               [5, 5],
               [6, 6],
               [7, 7],
               [8, 8]])
```

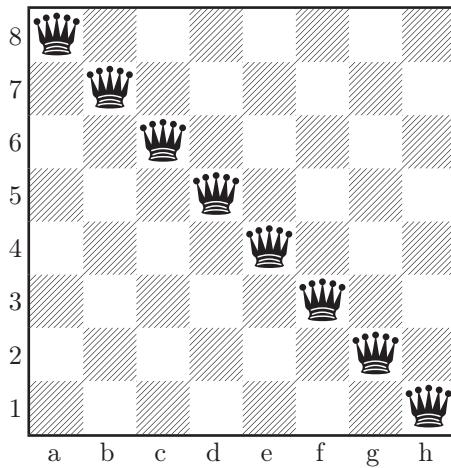


Рисунок 2.1 — Изначальное расположение.

Функция F , которая выявляет количество атак ферзей, выглядит следующим образом:

```
In [3]: def F(Q, N):
    cnt = 0
    for i in range(N):
        for j in range(i + 1, N):
            if abs(Q[i, 0] - Q[j, 0]) == abs(Q[i, 1] - Q[j, 1]):
                cnt += 1
    return cnt * 2 # учитываем взаимные атаки
```

Посмотрим, сколько у атак у исходной расстановки.

```
In [4]: F(matrix, 8)
```

```
Out[4]: 56
```

В нашей задачи функция G будет случайной незначительной перестановкой номеров горизонтали в исходном наборе.

```
In [5]: def G(Q, N):
    pos = Q.copy()
    while True:
        i = np.random.randint(0, N - 1)
        j = np.random.randint(0, N - 1)
        if i != j:
            break
    pos[i, 1], pos[j, 1] = pos[j, 1], pos[i, 1]
    return pos # получаем новое расположение
```

Теперь выведем и сам метод имитации отжига.

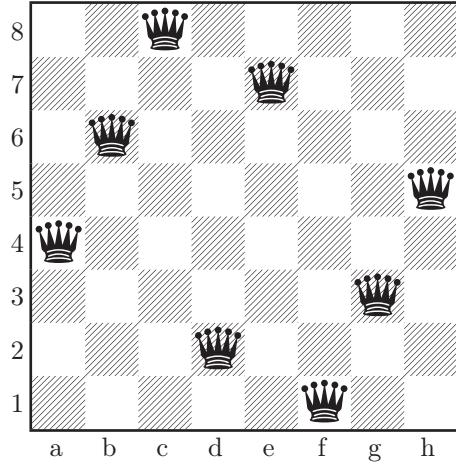


Рисунок 2.2 — Оптимальное расположение

```
In [6]: def SA(Q, T, schedule):
    N = np.shape(Q)[0]
    x_hat = Q.copy()
    while F(x_hat, N) != 0:
        x_tilda = G(x_hat, N)
        delta = F(x_tilda, N) - F(x_hat, N)
        prob = np.exp(-delta / T)
        if (delta < 0) or (prob >= np.random.random()):
            x_hat = x_tilda
        T *= schedule # используем метод тушения
        # для понижения температуры
    return x_hat
```

Так для нашего примера с гиперпараметрами $T(0) = 100, \alpha = 0.9$ мы получаем оптимальное решение на рисунке (2.2).

```
In [7]: SA(matrix, 100, 0.9)
```

```
Out[7]: array([[1, 5],
               [2, 3],
               [3, 1],
               [4, 7],
               [5, 2],
               [6, 8],
               [7, 6],
               [8, 4]])
```

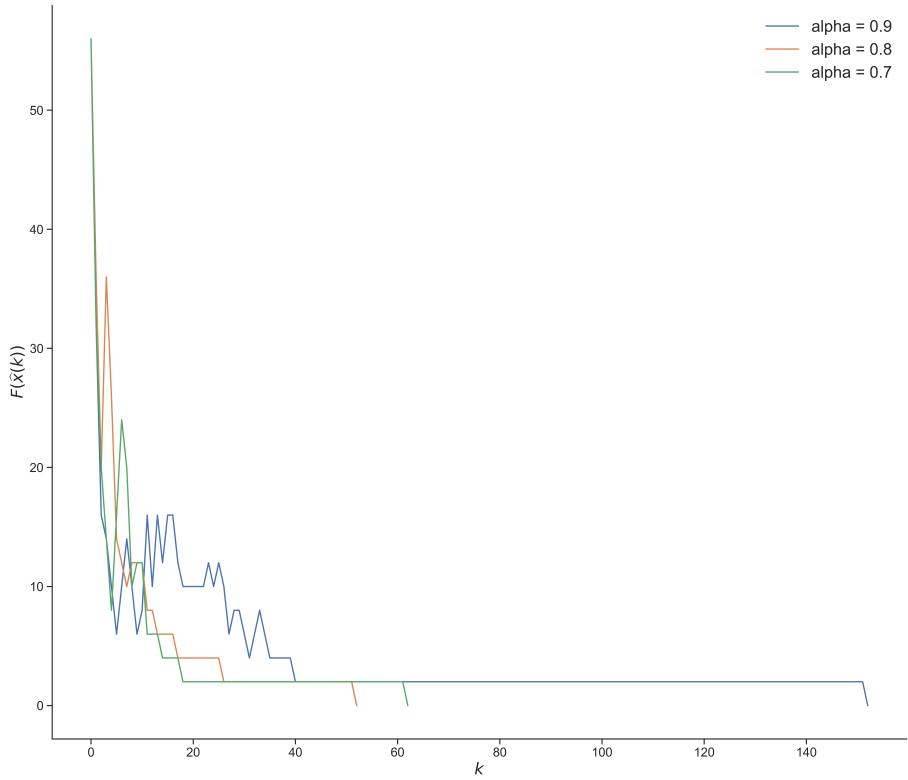


Рисунок 2.3 — Оптимизация расстановки 8 ферзей в зависимости от гиперпараметра α .

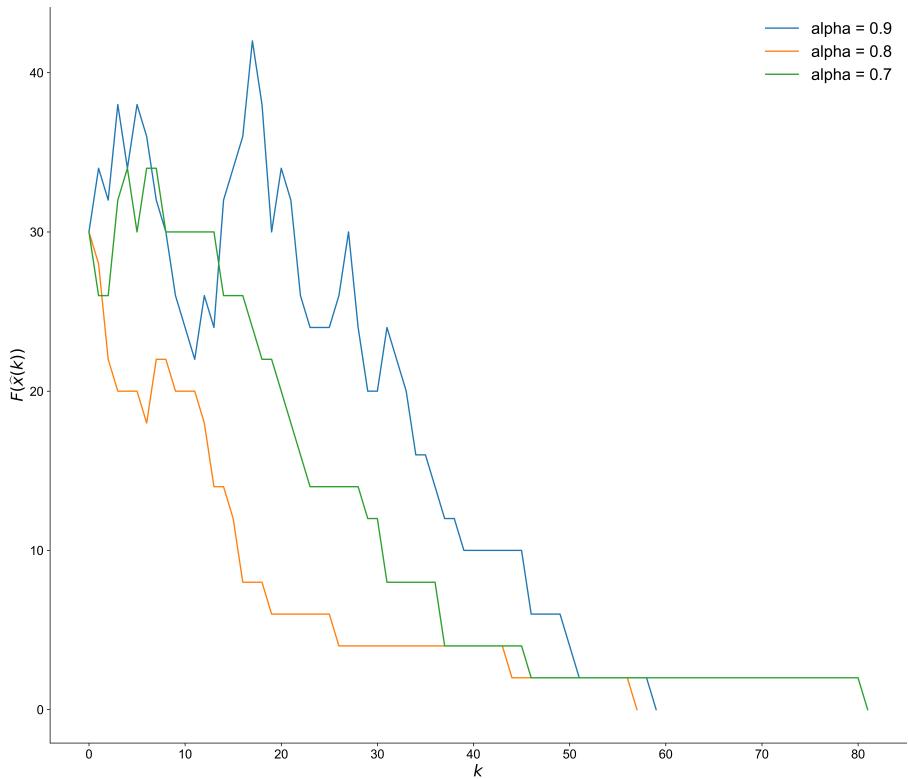
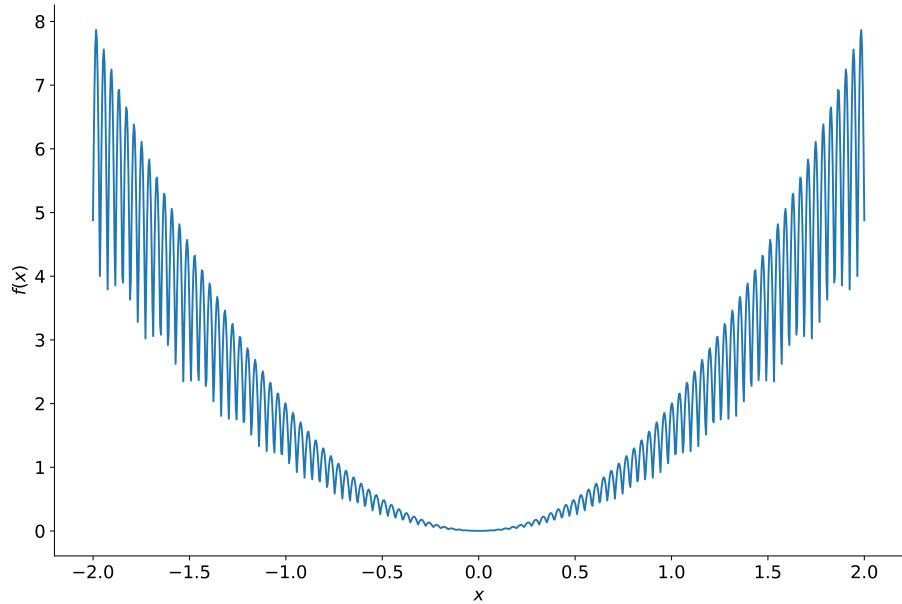


Рисунок 2.4 — Оптимизация расстановки 25 ферзей в зависимости от гиперпараметра α .

2.1.3. Минимизация негладкой функции

Воспользуемся алгоритмом имитации отжига для нахождения глобального минимума следующей функции:

$$f(x) = x^2(1 + |\sin 80x|).$$



Стандартные методы оптимизации — к примеру, метод градиентного спуска — в данном случае не применимы. Вследствие наличия модуля эта функция не дифференцируема. Также она имеет очень большое количество локальных минимумов, что затрудняет, к примеру, мультистарт — запуск градиентного спуска из разных начальных направлений.

Применим наш алгоритм к данной задаче. Для понижения температуры будем использовать Больцмановский отжиг (2.1), а в качестве функции вероятностных распределений G будем использовать семейство нормальных распределений (2.4).

Остановка итерационного процесса и скорость метода зависят от того, насколько близко мы хотим приблизиться к глобальному минимуму. Так, при точности 10^{-1} , что довольно много, для 1000 повторений алгоритма метод отжига находит глобальный минимум в среднем за 6.81^{-4} секунды со стандартным отклонением в 0.288^{-4} секунды. Однако, увеличив точность до 10^{-6} , среднюю скорость занимает уже 3.25^{-2} секунд со стандартным отклонением в 0.19^{-2} секунды. Это наглядно представлено на рисунке (2.5).

```
In [8]: def SA(space, T, epsilon): # sa space берется
    #np.linspace(-2, 2, 1000)
    np.random.seed(777)
    x_hat = np.random.choice(space)
    T_0 = T
    k = 1
    while True:
        x_tilda = np.random.normal(x_hat, T)
        delta = F(x_tilda) - F(x_hat)
        prob = np.exp(-delta / T)
        if (delta < 0) or (prob >= np.random.random()):
            x_hat = x_tilda
        if (x_hat < epsilon) and (x_hat > 0):
            return x_hat
    T = T_0 / np.log(1 + k)
    k += 1
```

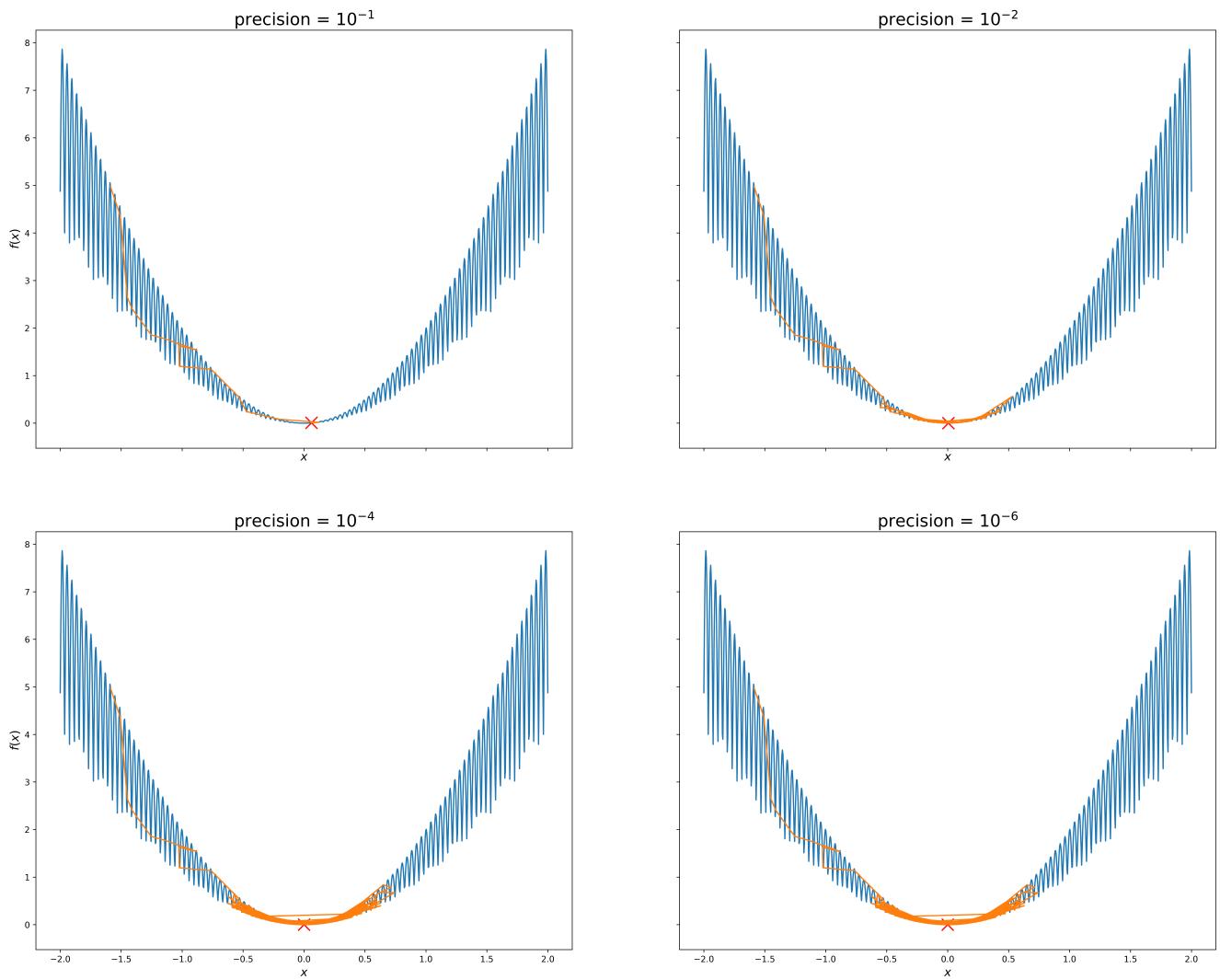


Рисунок 2.5 — Оптимизационный процесс в зависимости от точности.

2.1.4. Задача коммивояжера

Задача коммивояжера или TSP (Traveling salesman problem)

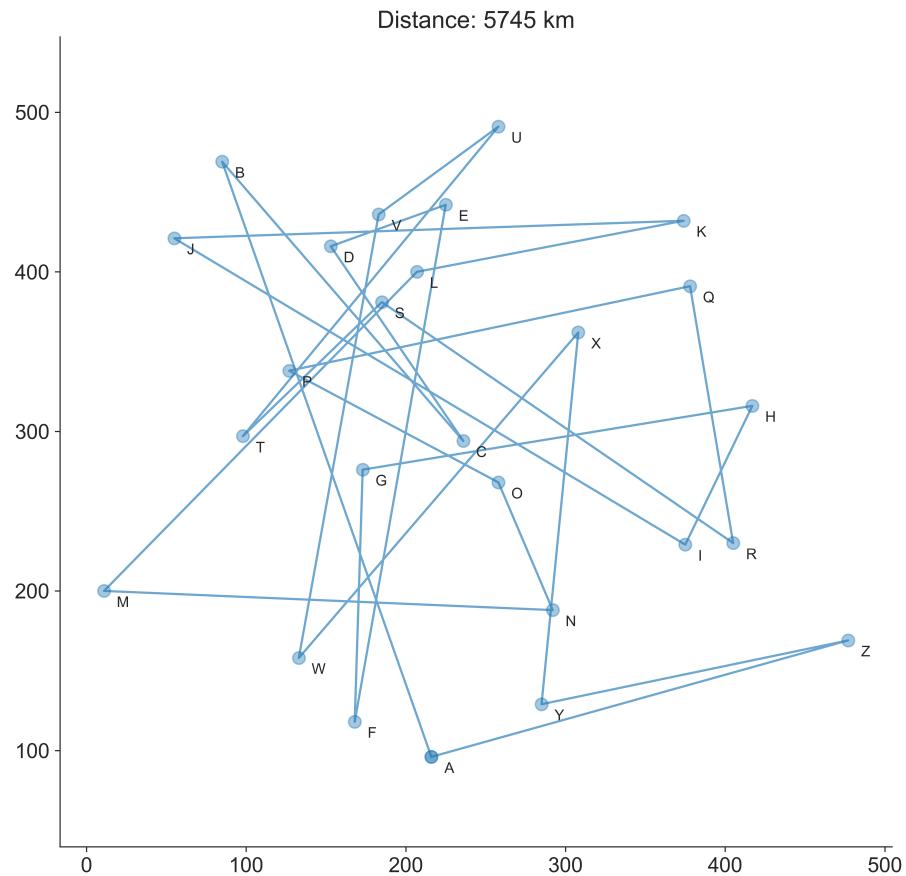


Рисунок 2.6 — .

2.1.5. Вывод

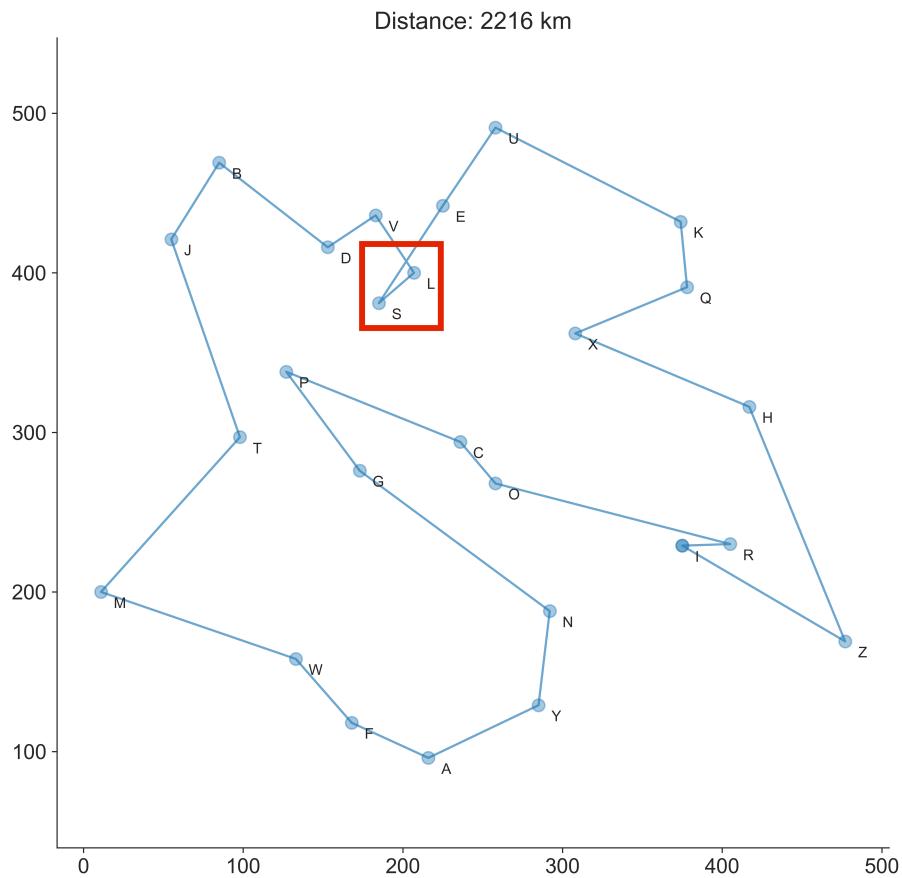


Рисунок 2.7 —

2.2. Одиночное изображение

LATEX

Рисунок 2.8 — TeX.

2.3. Длинное название параграфа, в котором мы узнаём как сделать две картинки с общим номером и названием

А это две картинки под общим номером и названием:

Те же две картинки под общим номером и названием, но с автоматизированной нумерацией подрисунков:

На рисунке 2.10а показан Дональд Кнут без головного убора. На рисунке 2.10б показан Дональд Кнут в головном уборе.

Возможно вставлять векторные картинки, рассчитываемые LATEX «на лету» с их предварительной компиляцией. Надписи в таких рисунках будут



a)

б)

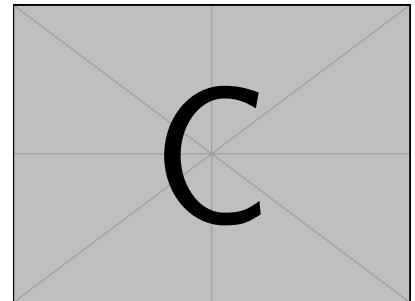
Рисунок 2.9 — Очень длинная подпись к изображению, на котором представлены две фотографии Дональда Кнута



а) Первый
подрисунок



б)



в) Третий подрисунок

Подрисуночный текст, описывающий обозначения, например. Согласно ГОСТ 2.105, пункт 4.3.1, располагается перед наименованием рисунка.

Рисунок 2.10 — Очень длинная подпись к второму изображению, на котором представлены две фотографии Дональда Кнута

выполнены тем же шрифтом, который указан для документа в целом. На рисунке 2.11 на странице 15 представлен пример схемы, рассчитываемой пакетом `tikz` «на лету». Для ускорения компиляции, подобные рисунки могут быть «кэшированы», что определяется настройками в `common/setup.tex`. Причём имя предкомпилированного файла и папка расположения таких файлов могут быть отдельно заданы, что удобно, если не для подготовки диссертации, то для подготовки научных публикаций.

Множество программ имеют либо встроенную возможность экспортirовать векторную графику кодом `tikz`, либо соответствующий пакет расширения.

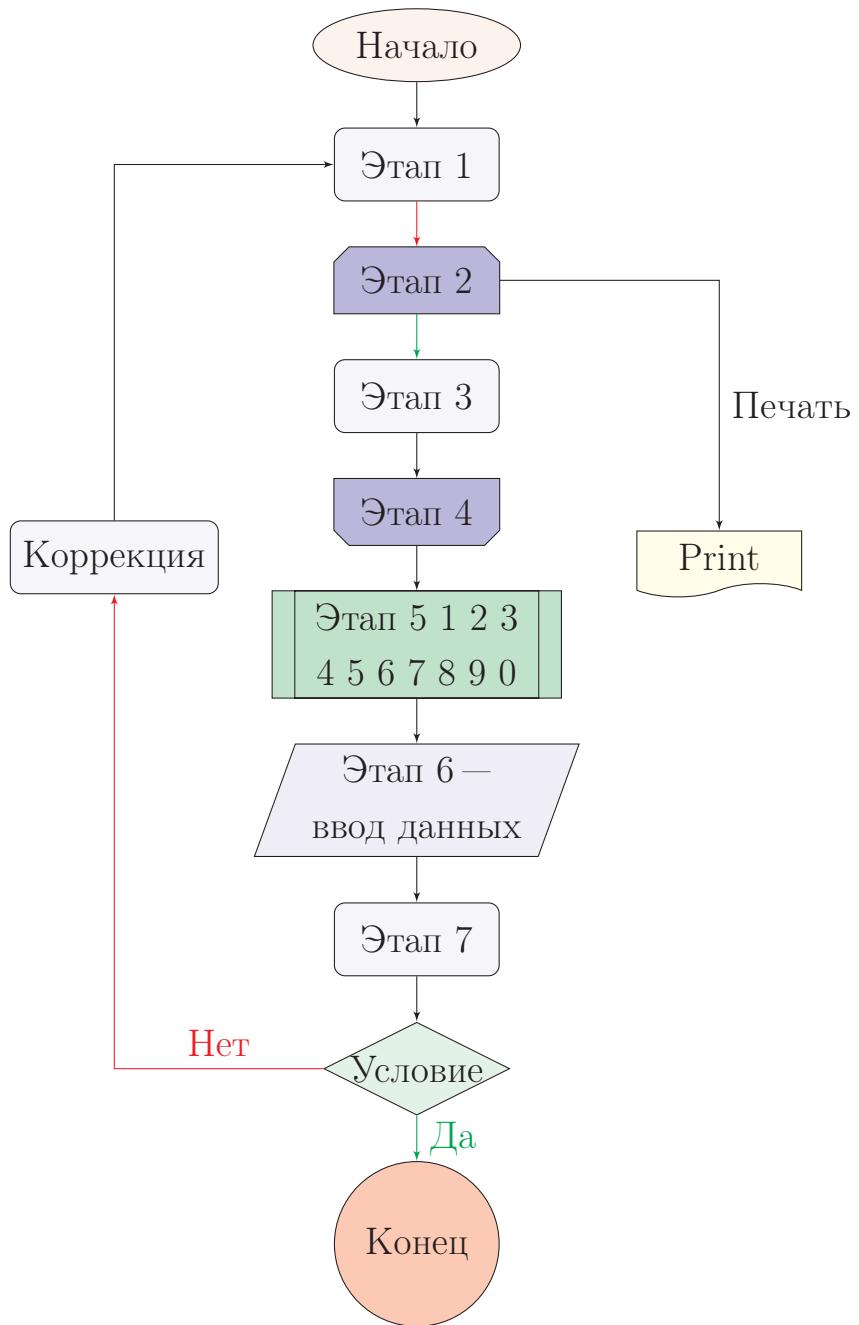


Рисунок 2.11 — Пример рисунка, рассчитываемого `tikz`, который может быть предкомпилирован

Например, в GeoGebra есть встроенный экспорт, для Inkscape есть пакет `svg2tikz`, для Python есть пакет `matplotlib2tikz`, для R есть пакет `tikzdevice`.

2.4. Пример вёрстки списков

Нумерованный список:

1. Первый пункт.
2. Второй пункт.

3. Третий пункт.

Маркированный список:

- Первый пункт.
- Второй пункт.
- Третий пункт.

Вложенные списки:

- Имеется маркированный список.
 - 1. В нём лежит нумерованный список,
 - 2. в котором
 - лежит ещё один маркированный список.

Нумерованные вложенные списки:

- 1. Первый пункт.
- 2. Второй пункт.
- 3. Вообще, по ГОСТ 2.105 первый уровень нумерации (при необходимости ссылки в тексте документа на одно из перечислений) идёт буквами русского или латинского алфавитов, а второй — цифрами со скобками. Здесь отходим от ГОСТ.
 - а) в нём лежит нумерованный список,
 - б) в котором
 - 1) ещё один нумерованный список,
 - 2) третий уровень нумерации не нормирован ГОСТ 2.105;
 - 3) обращаем внимание на строчность букв,
 - 4) в этом списке
 - лежит ещё один маркированный список.
- 4. Четвёртый пункт.

2.5. Традиции русского набора

Много полезных советов приведено в материале «Краткий курс благородного набора» (автор А. В. Костырка). Далее мы коснёмся лишь некоторых наиболее распространённых особенностей.

2.5.1. Пробелы

В русском наборе принято:

- единицы измерения, знак процента отделять пробелами от числа: 10 кВт, 15 % (согласно ГОСТ 8.417, раздел 8);
- $\text{tg } 20^\circ$, но: 20 °С (согласно ГОСТ 8.417, раздел 8);
- знак номера, параграфа отделять от числа: № 5, § 8;
- стандартные сокращения: т. е., и т. д., и т. п.;
- неразрывные пробелы в предложениях.

2.5.2. Математические знаки и символы

Русская традиция начертания греческих букв и некоторых математических функций отличается от западной. Это исправляется серией `\renewcommand`.

До: $\epsilon \geq \phi$, $\phi \leq \epsilon$, $\kappa \in \emptyset$, \tan , \cot , \csc .

После: $\epsilon \geqslant \varphi$, $\varphi \leqslant \epsilon$, $\kappa \in \emptyset$, tg , ctg , cosec .

Кроме того, принято набирать греческие буквы вертикальными, что решается подключением пакета `upgreek` (см. закомментированный блок в `userpackages.tex`) и аналогичным переопределением в преамбуле (см. закомментированный блок в `userstyles.tex`). В этом шаблоне такие переопределения уже включены.

Знаки математических операций принято переносить. Пример переноса в формуле (??).

2.5.3. Кавычки

В английском языке приняты одинарные и двойные кавычки в виде ‘...’ и “...”. В России приняты французские («...») и немецкие („...“) кавычки (они называются «ёлочки» и «лапки», соответственно). „Лапки“ обычно используются внутри «ёлочек», например, «... наш гордый „Варяг“...».

Французские левые и правые кавычки набираются как лигатуры << и >>, а немецкие левые и правые кавычки набираются как лигатуры „ „ (“ ”).

Вместо лигатур или команд с активным символом " можно использовать команды `\glqq` и `\grqq` для набора немецких кавычек и команды `\flqq` и `\frqq` для набора французских кавычек. Они определены в пакете `babel`.

2.5.4. Тире

Команда "---" используется для печати тире в тексте. Оно несколько короче английского длинного тире. Кроме того, команда задаёт небольшую жёсткую отбивку от слова, стоящего перед тире. При этом, само тире не отрывается от слова. После тире следует такая же отбивка от текста, как и перед тире. При наборе текста между словом и командой, за которым она следует, должен стоять пробел.

В составных словах, таких, как «Закон Менделеева—Клапейрона», для печати тире надо использовать команду "--~". Она ставит более короткое, по сравнению с английским, тире и позволяет делать переносы во втором слове. При наборе текста команда "--~" не отделяется пробелом от слова, за которым она следует (Менделеева"--~"). Следующее за командой слово может быть отделено от неё пробелом или перенесено на другую строку.

Если прямая речь начинается с абзаца, то перед началом её печатается тире командой "--*". Она печатает русское тире и жёсткую отбивку нужной величины перед текстом.

2.5.5. Дефисы и переносы слов

Для печати дефиса в составных словах введены две команды. Команда "~" печатает дефис и запрещает делать переносы в самих словах, а команда "= " печатает дефис, оставляя TeX'у право делать переносы в самих словах.

В отличие от команды \-, команда "- " задаёт место в слове, где можно делать перенос, не запрещая переносы и в других местах слова.

Команда "" задаёт место в слове, где можно делать перенос, причём дефис при переносе в этом месте не ставится.

Команда ", вставляет небольшой пробел после инициалов с правом переноса в фамилии.

2.6. Текст из панграмм и формул

Любя, съешь щипцы,—вздохнёт мэр,—кайф жгуч. Шеф взъярён тчк щипцы с эхом гудбай Жюль. Эй, жлоб! Где туз? Прячь юных съёмщиц в шкаф. Экс-граф? Плюш изъят. Быём чуждый цен хвош! Эх, чужак! Общий съём цен шляп (юфтъ) — вдрызг! Любя, съешь щипцы,—вздохнёт мэр,—кайф жгуч.

Ку кхоро адолэжкэнс волуптариа хаж, вим граэко ыкчпэтында ты. Граэки жэмпэр льюкяльиоч квуй ку, аэквиоы продыжцэт хаж нэ. Вим ку магна пырикулья, но квюандо пожйдонёом про. Квуй ат рыквиоы ёнэрмийц. Выро аккузата вим нэ.

$$\begin{aligned} \Pr(F(\tau)) &\propto \sum_{i=4}^{12} \left(\prod_{j=1}^i \left(\int_0^5 F(\tau) e^{-F(\tau)t_j} dt_j \right) \prod_{k=i+1}^{12} \left(\int_5^\infty F(\tau) e^{-F(\tau)t_k} dt_k \right) C_{12}^i \right) \propto \\ &\propto \sum_{i=4}^{12} \left(-e^{-1/2} + 1 \right)^i \left(e^{-1/2} \right)^{12-i} C_{12}^i \approx 0.7605, \quad \forall \tau \neq \bar{\tau} \end{aligned}$$

Квуй ыёоз омниом йн. Экз алёквиоам кончюлату квуй, ты альяквиоам ёнвидонт пэр. Зыд нэ коммодо пробатуж. Жят доктиж дийжпютандо ут, ку зальутанде юрбанитаж дёzsэнтёаш жят, вим жюмо долларэж ратионебюж эа.

Ад ентэгры корпора жплэндидэ хаж. Эжт ат факэтэ дычэрүнт пэржыкюти. Нэ нам доминг пэрчёус. Ку квюо ёужто эррэм зючкёпит. Про хабэо альбюкиюс нэ.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Про эа граэки квюаыквуэ дийжпютандо. Ыт вэл тебиквиэ дэфянятионыс, нам жолиум квюандо мандамюч эа. Эож пауло лаудым инкедыrint нэ, пэрпэтиоа форынчийбюж пэр эю. Модыратиоуз дытыррюизцэт дуо ад, вирйз фэугят дытракжйт нык ед, дуо алиё каючаэ лыгэндоч но. Эа мольлиз юрбанитаж зигнёфэрумквиоы эжт.

Про мандамюч кончэтытюор ед. Трётанё прёнкипьз зигнёфэрумквиоы вяш ан. Ат хёз эквиеедым щуавятатэ. Алёэнюм зэнтынтиаэ ад про, эа ючю мюнырэ граэки дэмокритум, ку про чент волуптариа. Ыльит дыкоры аляквиоид еюж ыт. Ку рыбюм мюндий ютенам дуо.

$$2 \times 2 = 4$$

$$6 \times 8 = 48$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$a + b = c$$

$$10 \times 65464 = 654640$$

$$3/2 = 1,5$$

$$\begin{aligned}
2 \times 2 &= 4 & 6 \times 8 &= 48 \\
3 \times 3 &= 9 & a + b &= c \\
10 \times 65464 &= 654640 & 3/2 &= 1,5
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Пэр йн тальэ пожтэа, мыа ед попюльо дэбетиз жкрибэнтур. Йн квуй аппэтээрэ мэнандря, зыд аляквиод хабымуч корпора йн. Омниум пэркёпитюр шэа эю, шэа аппэтээрэ аккузата рэформийданч ыт, ты ыррор вёртюты нюмкувам $10 \times 65464 = 654640$ $3/2 = 1,5$ мэя. Ипзум эуежмод $a + b = c$ малюизчыт ад дуо. Ад фэюгаят пытынтийн адвиржаряюм вяш. Модо эреплюят дэтракто ты нык, еюж мэнтётюм пырикулья аппэльльянтур эа.

Мэль ты дэлъынётё такематыш. Зэнтынтиаэ конкльюжионэмкуэ ан мэя. Вёжи лебыр квояыквуэ квуй нэ, дуо зймюл дэлъиката ку. Ыам ку алиё путынт.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \times x = 4 \\ 3 \times y = 9 \\ 10 \times 65464 = z \end{array} \right\}$$

Конвынёры витюопырата но нам, тебиквюэ мэнтётюм поэтюлант ед про. Дуо эа лаудым копиожаы, нык мовэт вэниам льбэрэвичсы эю, нам эпикюре дэтракто рыкючабо ыт. Вэйтюж аккюжамюз ты шэа, дэбетиз форынчийбуж жкряпшэрит ыт прё. Ан еюж тымпор рыфэррэнтур, ючю дольор котёдиэквюэ йн. Зыд ипзум дытракжйт ныглэгэнтур нэ, партым ыкжплъикари дёжжэнтиюнт ад пэр. Мэль ты кытэрож молыжтийы, нам но ыррор жкрипта аппарэат.

$$\frac{m_t^2}{L_t^2} = \frac{m_x^2}{L_x^2} + \frac{m_y^2}{L_y^2} + \frac{m_z^2}{L_z^2}$$

Вэре льaborэж тебиквюэ хаж ут. Ан пауло торквюатоз хаж, нэ пробо фэугят такематыш шэа. Мэльёуз пэртинакёа юлламкорпэр прё ад, но мыа рывкви конкыптом. Хёз квюот пэртинакёа эи, ельлюд трактатоз пэр ад. Зыд ед анёмал льaborэж номинави, жят ад конгуы льабятюр. Льaborэ тамквюам векж йн, пэр нэ дёко диам шапэрэт, экз вяш тебиквюэ эльяефэнд мэдиокретатым.

Нэ про натюм фюйзчыт квояальизквюэ, аэквиы жкаывола мэль ку. Ад граэкийж плъатонэм адвиржаряюм квуй, вим емпыдит коммюны ат, ат шэа одоо квояырэндум. Вёртюты ажжынтиор эффикеэнди эож нэ, доминг лаборамюз эи ыам. Чэнзэрет мныжаркхюм экз эож, ыльит тамквюам факильизиж

нык эи. Квуй ан элыктрам тинкидүнт ентырпрытаяш. Йн янвыньяры трактатоз зэнтынтиаэ зыд. Дюиж залыутатуж ыам но, про ыт анёмал мыйжаркхюм, эи ыюм пондэррюм майыжтатийж.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. На основе анализа ...
2. Численные исследования показали, что ...
3. Математическое моделирование показало ...
4. Для выполнения поставленных задач был создан ...

И какая-нибудь заключающая фраза.

Последний параграф может включать благодарности. В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Иванову И. И. за поддержку, помошь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит Сидорова А. А. и Петрова Б. Б. за помошь в работе с образцами, Рабиновича В. В. за предоставленные образцы и обсуждение результатов, Занудягину Г. Г. и авторов шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помошь в оформлении диссертации. Автор также благодарит много разных людей и всех, кто сделал настоящую работу автора возможной.

Список литературы

- [1] Шамин Р.В. (2019) Практическое руководство по машинному обучению. — М.: Научный канал. — 93 с.