Nama : Mutiara Khairunnisa

NIM : 23/517062/PA/22149

TUGAS 1 PASCA UTS

1. **Bentuk Korelogram 1D**

   Bentuk dari korelogram 1D dapat diamati pada formula berikut.

$$\rho(h) = \frac{\sum z_1 z_2 - N_h \mu_h^2}{N_h \sigma_h^2}$$

2. **Bentuk Korelogram 2D**

   Dari formula korelogram 1D yang ada sebelumnya, untuk mencapai bentuk korelogram 2D pada data spasial $z(x, y)$ pada $lag(u, v)$, terjadi perubahan formula sebagai berikut.

$$\rho(u, v) = \frac{1}{N_{uv} . \sigma^2} \sum_{x,y} \left(z_{(x,y)} - \mu\right)\left(z_{(x+u,y+v)} - \mu\right) \dots (1)$$

atau

$$\rho(u, v) = \frac{1}{N_{uv} . \sigma^2} \left(\sum_{x,y} \left[\left(z_{(x,y)}\right)\left(z_{(x+u,y+v)}\right)\right] - N_{uv}\mu^2 \right) \dots (2)$$

   Kedua persamaan tersebut dapat digunakan untuk analisis korelogram, namun untuk analisis yang lebih kompleks dan detail, digunakan persamaan pertama. Perlu diperhatikan bahwa hasil dari matriks MxN akan diperoleh matriks korelogram $(2M - 1)\ x\ (2N - 1)$.

   Dengan:

   - (u, v) = lag vector (arah dan jarak)
   - N_{uv} = jumlah pasangan titik yang valid
   - μ = rata-rata (*mean)* dari seluruh nilai
   - σ^2 = variansi seluruh nilai
   - $z(x, y)$ = nilai data pada posisi (x, y)

3. **Contoh Kasus**

   Apabila dimiliki grid data spasial 2D sebagai berikut:

$$z(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

   Grid data tersebut dapat dihitung dengan persamaan di bawah:

$$\rho(u, v) = \frac{1}{N_{uv} . \sigma^2} \sum_{x,y} \left(z_{(x,y)} - \mu\right)\left(z_{(x+u,y+v)} - \mu\right)$$

   Perlu diperhatikan bahwasanya matriks 3x3 akan menghasilkan bentuk matriks 5x5 karena pada korelogram berlaku matriks MxN menjadi $(2M - 1)\ x\ (2N - 1)$

Langkah awal perhitungan korelogram adalah menghitung variansi (σ^2) dan rata-rata (μ).

- Rata-rata (μ)

$$\mu = \frac{1+2+4+3+5+6+7+8+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

- Variansi (σ^2)

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum(x-\ \mu)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{9}\sum(1-5)^2+(2-5)^2+(4-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{9}[16+9+1+4+0+1+4+9+16] = \frac{60}{9} = 6.67$$

Langkah selanjutnya, perhitungan untuk masing-masing $lag(u,v)$

1. Untuk $Lag(0,0)$

   $Lag(0,0)$ berarti tidak ada pergeseran ke arah horizontal dan vertical. Ini berarti tiap titik dibandingkan dengan dirinya sendiri.

$$\rho(0,0) = \frac{1}{N_{uv}.\sigma^2}\sum_{x,y}\left(z_{(x,y)}-\mu\right)\left(z_{(x,y)}-\mu\right)$$

   Persamaan di atas dapat pula dihitung dengan penyederhanaan bentuk menjadi $\sum_{x,y}\left(z_{(x,y)}-\mu\right)^2$ sehingga dapat dihitung dengan mengkuadratkan setiap elemen $z_{(x,y)}-\mu$. Maka diperoleh:

$$\sum(1-5)^2+(2-5)^2+(4-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2 = 60$$

$$\rho(0,0) = \frac{1}{9.6{,}67}(60) = \frac{60}{60} = 1.0$$

$$\rho(0,0) = 1.0$$

2. Untuk $Lag(1,0)$

   $Lag(1,0)$ berarti bergeser 1 langkah ke bawah dan tidak bergeser secara horizontal. Dengan kata lain, $lag(1,0)$ berarti dari (x,y) ke bentuk $(x+1,y)$. Pastikan bahwa pasangan masih ada pada batas array ($< 3\ baris$)

$$\rho(1,0) = \frac{1}{N_{uv}.\sigma^2}\sum_{x,y}\left(z_{(x,y)}-\mu\right)\left(z_{(x+1,y)}-\mu\right)$$

   Pasangan yang memenuhi diantaranya:

   a. (0,0) $menjadi$ $(1,0)$, nilai $z_{(x,y)} = 1,\ dan\ z_{(x+1,y)} = 3$, hasil perkalian adalah $(1-5)(3-5) = 8$
   b. (0,1) $menjadi$ $(1,1)$, nilai $z_{(x,y)} = 2,\ dan\ z_{(x+1,y)} = 5$, hasil perkalian adalah $(2-5)(5-5) = 0$
   c. (0,2) $menjadi$ $(1,2)$, nilai $z_{(x,y)} = 4,\ dan\ z_{(x+1,y)} = 6$, hasil perkalian adalah $(4-5)(6-5) = -1$
   d. $(1,0)$ $menjadi$ $(2,0)$, nilai $z_{(x,y)} = 3,\ dan\ z_{(x+1,y)} = 7$, hasil perkalian adalah $(3-5)(7-5) = -4$

e. $(1{,}1)\ menjadi\ (2,1)$, nilai $z_{(x,y)} = 5,\ dan\ z_{(x+1,y)} = 8$, hasil perkalian adalah $(5-5)(8-5) = 0$

f. $(1,2)\ menjadi\ (2{,}2)$, nilai $z_{(x,y)} = 6,\ dan\ z_{(x+1,y)} = 9$, hasil perkalian adalah $(6-5)(9-5) = 4$

Penjumlahan dari hasil perkalian adalah $8 + 0 + (-1) + (-4) + 0 + 4 = 7$

$$\rho(1,0) = \frac{1}{6.6{,}67}.7 = 0.17491{\sim}0.175$$
$$\rho(1,0) = 0.175$$

3. Untuk $Lag(0{,}1)$

$Lag(0,1)$ berarti bergeser 1 langkah ke kanan dan tidak bergeser secara vertikal. Dengan kata lain, $lag(0,1)$ berarti dari (x,y) ke bentuk $(x,y+1)$. Pastikan bahwa pasangan masih ada pada batas array ($< 3\ baris$).

$$\rho(0{,}1) = \frac{1}{N_{uv}.\sigma^2}\sum_{x,y}\left(z_{(x,y)} - \mu\right)\left(z_{(x,y+1)} - \mu\right)$$

Pasangan yang memenuhi diantaranya:

a. $(0{,}0)\ menjadi\ (0,1)$, nilai $z_{(x,y)} = 1,\ dan\ z_{(x+1,y)} = 2$, hasil perkalian adalah $(1-5)(2-5) = 12$

b. $(0{,}1)\ menjadi\ (0,2)$, nilai $z_{(x,y)} = 2,\ dan\ z_{(x+1,y)} = 4$, hasil perkalian adalah $(2-5)(4-5) = 3$

c. $(1,0)\ menjadi\ (1,1)$, nilai $z_{(x,y)} = 3,\ dan\ z_{(x+1,y)} = 5$, hasil perkalian adalah $(3-5)(4-5) = 0$

d. $(1{,}1)\ menjadi\ (1,2)$, nilai $z_{(x,y)} = 5,\ dan\ z_{(x+1,y)} = 6$, hasil perkalian adalah $(5-5)(6-5) = 0$

e. $(2,0)\ menjadi\ (2,1)$, nilai $z_{(x,y)} = 7,\ dan\ z_{(x+1,y)} = 8$, hasil perkalian adalah $(7-5)(8-5) = 6$

f. $(2,1)\ menjadi\ (2,2)$, nilai $z_{(x,y)} = 8,\ dan\ z_{(x+1,y)} = 9$, hasil perkalian adalah $(8-5)(9-5) = 12$

Penjumlahan dari hasil perkalian adalah $12 + 3 + 0 + 0 + 6 + 12 = 33$

$$\rho(0,1) = \frac{1}{6.6{,}67}.33 = 0.82458{\sim}0.825$$
$$\rho(1,0) = 0.825$$

Langkah diatas dilakukan lagi untuk semua lag dari $(-2,-2)$ hingga $(+2,+2)$ sebanyak 25 lag. Atau proses kolerogram juga dapat diselesaikan dengan *coding* sebagai berikut:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Data 2D
data = np.array([
    [1, 2, 4],
    [3, 5, 6],
    [7, 8, 9]
])

rows, colum = data.shape
correlogram = np.zeros((2 * rows - 1, 2 * colum - 1)) #Bentuk 2M-1, 2N-1
```

```python
# Normalisasi
mean = np.mean(data)
variance = np.var(data)

for u in range(-(rows - 1), rows):
    for v in range(-(colum - 1), colum):
        sum_corr = 0
        count = 0
        for i in range(rows):
            for j in range(colum):
                x_shift = i + u
                y_shift = j + v
                if 0 <= x_shift < rows and 0 <= y_shift < colum:
                    sum_corr += (data[i, j] - mean) * (data[x_shift, y_shift] - mean)
                    count += 1
        if count > 0:
            correlogram[u + rows - 1, v + colum - 1] = sum_corr / (count * variance)

print("Matriks 2D correlogram:")
print(np.round(correlogram, 3))

# Plot hasil
plt.imshow(correlogram, cmap='plasma', origin='lower', extent=[-(colum-1), colum-1, -(rows-1), rows-1])
plt.title("2D Correlogram")
plt.xlabel("Lag v")
plt.ylabel("Lag u")
plt.colorbar(label="Correlation")
plt.grid(False)
plt.show()
```

Dari *code* tersebut, diperoleh output matriks korelogram dan plot korelogramnya. Contohnya seperti pada gambar di bawah

```
Matriks 2D correlogram:
[[-2.4   -1.8   -1.05  -0.675 -0.3  ]
 [-0.9   -0.337  0.175  0.337  0.3  ]
 [ 0.5    0.825  1.     0.825  0.5  ]
 [ 0.3    0.337  0.175 -0.337 -0.9  ]
 [-0.3   -0.675 -1.05  -1.8   -2.4  ]]
```