

Математический анализ

Харитонцев-Беглов Сергей

21 октября 2022 г.

Содержание

1. Тут пропущена лекция + название главы	1
1.1 Формула замены переменной под интегралом	3
2. Теория функции одной комплексной переменной	5
2.1 Напоминание	5
2.2 Аналитические функции	5
2.3 Голоморфные функции	6
2.4 Уравнение Коши-Римана	7
2.5 Первообразная голоморфной функции	7
2.5.1 Интеграл вдоль пути	7
2.5.2 Формула Коши	10

1. Тут пропущена лекция + название главы

Напомним определения с прошлого раза:

Определение 1.1. Назовем $U \subset \mathbb{R}^n$ хорошим, если

- U — ограниченное,
- a_k, b_k — непрерывны на $U^{(k-1)} \forall k$.
- $\forall k \in 1 : n : z \in U^{(k)} \{z\} \times (a_{k+1}(z), b_{k+1}(z)) \subset U^{(k+1)}$.

Данное определение придуманное, потому что мы не углубляемся в теорию, потому что нам нужно заспидранить интегралы для теорвера, а для того, чтобы понять подробно, нужно в 4 модуле пойти на курс JUB.

Для понимания можно попробовать почитать учебник Руденко.

Замечание. Мы не требуем, чтобы U было замкнутым или открытым.

Замечание. Определение хорошеести зависит от нумерации.

Пример: повернутый на 90° логотип Котлина.

Определение 1.2. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — ограничена, непрерывно, U — хорошее.

$$\text{Тогда: } \int_U f(x) dx := \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x) dx_n \right) \dots \right) dx_1$$

Упражнение. Абоба.

Определение 1.3. $\text{supp } f = \varphi \{x : f(x) \neq 0\}$.

$C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \begin{array}{l} f \text{ — непрерывна} \\ \text{supp } f \text{ — какое-то множество я хз} \end{array} \right\}$. Тогда $f \in C_0(\mathbb{R}^n) \implies \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_I f(x) dx$, где $I \supset \text{supp } f$, I — ячейка.

Теорема 1.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — хорошее относительно двух нумераций координат.

Тогда $\int_U f(x) dx$ одинаковый в обоих нумерациях.

Замечание. $f \in C_0(\mathbb{R}^n), \text{supp } f \subset U \implies \int_U f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$.

Идея доказательства теоремы. Найти последовательность $f_1, f_2, \dots \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f_i \subset U$ и $\int_U f_i(x) dx \rightarrow \int_U f(x) dx$ в первой нумерации и $\int_U f_i(x) dx \rightarrow \int_U f(x) dx$ во второй нумерации. \square

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано, $U_\varepsilon := \{x \in U \mid \forall k \in 1 : n, a_k(x) + \varepsilon \leq x_k \leq b_k(x) - \varepsilon\}$.

Утверждение 1.2. $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon$ — замкнуто, $U_\varepsilon \subset \text{Int } U$.

Доказательство. $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : U_\varepsilon + \overline{B}(0, \delta(\varepsilon)) = \bigcup_{x \in U_\varepsilon} \overline{B}(x, \delta(\varepsilon)) \subset U$.

Заметим, что для $n = 1$ можно взять $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$.

Для больших n воспользуемся индукционным переходом. Утверждение выполнено для $U_\varepsilon^{(n-1)}$: $\exists \delta_{n-1}(\varepsilon) > 0 \bigcup_{z \in U_\varepsilon^{(n-1)}} \overline{B}_{n-1}(z, \delta_{n-1}(\varepsilon)) \subset U^{(n-1)}$.

Тогда $\exists \delta_0 \in (0, \frac{1}{2}\delta_{n-1}(\varepsilon)) : \forall z, w \in U_\varepsilon^{(n-1)} + \overline{B}_{n-1}(0, \frac{1}{2}\delta_{n-1}(\varepsilon)), |z - w| \leq \delta_0 \implies |a_n(z) - a_n(w)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
и $|b_n(z) - b_n(w)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда пусть $\delta = \delta(\varepsilon) := \min(\frac{\varepsilon}{2}, \delta_0)$, $x \in U_\varepsilon, x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \delta(\varepsilon)$. Надо понять, что $y \in U$.

Заметим, что $x = (z, x_n), y = (w, y_n); z, w \in \mathbb{R}^{n-1}$. Тогда выполняется два свойства:

1. $|z - w| \leq \delta_0 \implies w \in U_\varepsilon^{(n-1)} + \overline{B}_{n-1}(0, \frac{\delta_{n-1}(\varepsilon)}{2})$,
2. $y_n \leq x_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n(z) - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = b_n(z) - \frac{\varepsilon}{2} < b_n(w)$. И $y_n \geq x_n - \frac{\varepsilon}{2} \geq a_n(z) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = a_n(z) + \frac{\varepsilon}{2} > a_n(w) \implies y \in (a_n(w), b_n(w)) \implies y \in U$, потому что это определение хорошего множества.

U_ε замкнуто, так как задается нестрогими неравенствами для непрерывных функций, заданных на замкнутом множестве φU_ε ($\varphi U_\varepsilon \subset U$, так как $\varphi U_\varepsilon \subset \bigcup_{x \in U_\varepsilon} \overline{B}_n(x, \delta(\varepsilon))$). \square

Утверждение 1.3. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна, ограничена, U — хорошее. $\exists C > 0$ зависящая только от U (но не от f), такое что

$$\forall \varepsilon > 0 : \left| \int_U f(x) dx - \int_{U_\varepsilon} f(x) dx \right| \leq \sup_U |f| \cdot C\varepsilon.$$

Доказательство. Упражнение. При $n = 1$ что-то. \square

Следствие. U — хорошее, $f_1, \dots, f_n, f : U \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно, $\forall i : \sup_U |f_i| \leq M, \sup_U |f| \leq M, \forall K \subset U$ — компакт(?).

Тогда $\int_U f_i(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_U f(x) dx$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, U_ε — компакт. $\implies \exists N > 0 : \forall i \geq N \sup_{U_\varepsilon} |f_i - f| \leq \varepsilon$.

не успеть. \square

Лемма (Главная техническая лемма). U — хорошее, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — ограничена, непрерывна.

Тогда $\exists f_1, \dots : U \rightarrow \mathbb{R}$:

1. $\sup_U |f_i| \leq \sup_U |f|$,
2. $\forall K \subset U$ — компакт $\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_K |f_i - f| = 0$,
3. $f_i \in C_0(\mathbb{R}^n), \text{supp } f_i \subset U$.

Доказательство. $\varepsilon > 0$, определим $\rho_k^\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$, где $1 \in 1 : n$,

$$\rho_k^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x_k \geq b_k - \frac{\varepsilon}{2} \wedge x_k \leq a_k + \frac{\varepsilon}{2} \\ 1, & x_k \in [a_k + \varepsilon, b_k - \varepsilon] \\ \frac{2}{\varepsilon} \min(x_k - a_k - \frac{\varepsilon}{2}, b_k - x_k - \frac{\varepsilon}{2}) & \text{else} \end{cases}$$

Простые свойства: $\rho^\varepsilon(x) = \prod_{k=1}^n \rho_k^\varepsilon(x), 0 \leq \rho^\varepsilon(x) \leq 1$.

Положим $f_i(x) := f(x) \cdot \rho^{\frac{\varepsilon}{i}}(x)$. Проверить, что такие f_i подходят. \square

Вернемся к теореме. Возьмем f_1, f_2, \dots из леммы. $\int_U f(x) dx$ одинаков в любой нумерации, так как $f_i \in C_0(\mathbb{R}^n), \int_U f_i(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_i(x) dx$. Тогда по следствию выше $\int_U f_i(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_U f(x) dx$. \square

1.1. Формула замены переменной под интегралом

Определение 1.4. $U \subset \mathbb{R}^n$ составное, если $U = \bigcup_{i=1}^k U_i$, U_i — хорошее, че-то еще.

Тут было что-то еще.

Замечание. $\Phi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Φ . У меня появился кофе!!!

АБОБА

Теорема 1.4. $U \subset \mathbb{R}^n$ — составное множество. $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что

1. $\Phi(U)$ — составное,
2. $\Phi: \text{Int } U \rightarrow \text{Int } \Phi(U)$ гомеоморфизм,
3. Φ дифференцируема на $\text{Int } U$. И якобиан не равен нулю в любой точке.
4. Якобиан Φ ограничен на $\text{Int } U$.

Тогда $\forall f: \Phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ ограниченной выполняется:

$$\int_{\Phi(U)} f(x) dx = \int_U f(\Phi(x)) |\text{Jac } \Phi(x)| dx.$$

Пример. $n = 1$. Формула замены переменной.

Пример. $\Phi: [0; 2\pi) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^2$. $\Phi(\varphi, r) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ Якобиан $= \det \begin{pmatrix} -r \sin \varphi & r \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} = r$.

$$U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}. \text{Area}(U) = \int_U 1 dx dy = \int_{[0, 2\pi) \times [0, 1]} r dr d\varphi = \pi$$

Теорема 1.5 (Теорема о замене переменной для $C_0(\mathbb{R}^n)$). Пусть есть открытое $U \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что:

1. Φ — биекция из U в $\Phi(U)$,
2. Φ непрерывно дифференцируема на U , $\text{Jac } \Phi(x) \neq 0 \forall x \in U \implies \forall f \in C_0(\mathbb{R}^n) \text{ supp } f \subset \Phi(U)$ выполняется $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\Phi(y)) |\text{Jac } \Phi(y)| dy$.

Доказательство. Если $n = 1$, то понятно, что теорема верна.

$$\text{Тогда считаем, что } n \geq 2 \text{ и по индукции теорема верна для } k < n. \Phi(y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \vdots \\ \varphi_n(y) \end{pmatrix}.$$

Простой случай: теорема верна, если Φ — перестановка. См. теорему выше.

Теорема верна, если $\exists j \in 1..n: \varphi_j(y) = y_j$. Не умаляя общности считаем $j = 1$ (иначе можно сделать перестановку). Тогда для $\forall y_1$ — fix положения. $\Psi_{y_1}(y_2, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} \varphi_2(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$.

$$\Phi(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \Psi_{y_1}(y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\text{Jас } \Phi(y_1, \dots, y_n) = \text{Jас } \Psi_{y_1}(y_2, \dots, y_n)$. Тогда по индукции $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \Psi_{x_1}(x_2, \dots, x_n)) |\text{Jас } \Psi_{x_1}(y_2, \dots, y_n)| dy_2 \dots dy_n = \int_{\mathbb{R}} dy_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\Phi(y)) |\text{Jас } \Phi(y)| dy_2 \dots dy_n =$ то, что ну

Пусть $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$, пусть теорема верна для Φ_1 и Φ_2 , тогда теорема верна для Φ . Это следует из того, что $\text{Jас } \Phi = (\text{Jас } \Phi_1) \circ \Phi_2 \cdot \text{Jас } \Phi_2$.

$\forall x_0 \in U \exists r > 0$, что если $\text{supp } f \subset \Phi(B(x_0, r))$, то теорема верна. Наивно: представить при помощи композиции:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi_1} \begin{pmatrix} \varphi_1(y_1, \dots, y_n) \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi_2 \Phi_1^{-1}} \begin{pmatrix} \varphi_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Но! Φ_1^{-1} может не существовать.

Мы знаем, что $\nabla \varphi_1 \neq 0$. $\exists j \in \{1, \dots, n\} : \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j}(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$.

Утверждение: $\exists r > 0 : \Psi, \Phi_1, \Phi_2 \Psi^{-1} \Phi_1$ определены при $y \in B(y^0, r)$. И правда:

- Ψ определена $\forall y$, также Ψ^{-1} ,
- Φ_1 определена $y \in U$,
- $\Phi_1^{-1} : \text{Jас } \Phi_1(\Psi(y^0)) = \frac{\partial \psi_1}{\partial y_j} x_j \implies \Phi_1^{-1}$ определена в $\Phi_1(\Psi(B(y^0, r)))$ для $r > 0$ по теорема об обратной функции.

Теперь можно все скомпилировать: $\forall y \in U \exists r_y > 0$. Теорема верна, если $\text{supp } f \subset \Phi(B(y, 2r_y))$.

Зафиксируем $f \subset C_0(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f \subset \Phi(U)$. Так как это компакт, то $\exists y_1, \dots, y_k : \bigcup_{i=1}^k \Phi(B(y_i, r_{y_i})) \supset \text{supp } f$. $\forall i$ положим $\beta_i(y) = \begin{cases} \min(1, \frac{2r_{y_i} - |y - y_i|}{r_{y_i}}) & |y - y_i| \leq 2r_{y_i} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ $\alpha_1(x) = \beta_1(\Phi^{-1}(x))$, $\alpha_2(x) = (1 - \beta_1(\Phi^{-1}(x))) \cdot \beta_2(\Psi^{-1}(x))$, ..., $\alpha_k(x) = (1 - \beta_1(\Phi^{-1}(x))) \cdot \dots \cdot (1 - \beta_{k-1}(\Phi^{-1}(x)))$.

Тогда $x \in \text{supp } f \implies \exists j : x \in \Phi(B(y_j, r_{y_j})) \implies (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)(x) = 1 \implies \sum \alpha_i \cdot f \equiv f$, по определению $\text{supp}(\alpha_j \cdot f) \subset \Phi(B(y_j, 2r_{y_j}))$. Тогда $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \alpha_j(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\Phi(y)) \alpha_j(\Phi(y)) |\text{Jас } \Phi(y)| dx$ \square

2. Теория функции одной комплексной переменной

2.1. Напоминание

Говорим про комплексные числа: $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow z = x + iy, i \in \mathbb{C}, i^2 = -1, i \rightsquigarrow (0, 1), z = x + iy, w = a + ib, z \cdot w = xa - yb + i(xb + ya)$.

Свойства. 1. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \bar{z} := x - iy, z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

2. $\operatorname{Re} z = x$ — вещественная часть,

3. $\operatorname{Im} z = y$ — мнимая часть,

4. $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

Определение 2.1. Полярная запись комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e \cdot e^{i\varphi}$. Умножение: $r_1 r_2 (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$

2.2. Аналитические функции

Определение 2.2. Степенной ряд — это ряд вида $\sum_{n \geq 0} a_n z^n, a_n \in \mathbb{C}$.

Радиус сходимости $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ — это $R \in [0, +\infty]: R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

$R = \sup \{r: |a_n r^n|\}$.

Утверждение 2.1.

1. $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ — сходится абсолютно при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

2. $r < R, \sup_{|z| \leq r} \left| \sum_{n \geq 0} z_n z^n \right| < \infty$.

Доказательство. Смотри конспект прошлого года. □

Утверждение 2.2.

1. Пусть R — радиус сходимости $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, тогда R — радиус сходимости и для ряда $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$.

2. $\sum_{n \geq 0} a_n z^n \cdot \sum_{m \geq 0} b_m z^m = \sum_{k \geq 0} \sum_{n+m=k} a_n b_m \cdot z^k$. Верно $\forall z: |z| < R$.

Пример. $\exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}, R = +\infty$.

Пример. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n, R = 1$.

Определение 2.3. $\Omega \subset \mathbb{C}$ — открытое, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ аналитична, если $\forall z_0 \in \Omega \exists r > 0: \forall z, |z - z_0| < r \implies f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$.

Утверждение 2.3. f, g — аналитические функции на Ω , то $f + g$ — аналитическая.

Доказательство. Очевидно.

Пример. 1. $f \in \mathbb{C}[z] \implies f$ — аналитическая на $\Omega = \mathbb{C}$.

2. Рациональные функции аналитичны там, где они определены.

Замечание. $\mathcal{A}(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ — аналитическая}\}$, тогда \mathcal{A} — кольцо.

2.3. Голomorphicные функции

Определение 2.4. $\Omega \in \mathbb{C}$ — область, если Ω — открытое, непустое, связное.

Определение 2.5. $f: \Omega \in \mathbb{C}$, тогда f имеет в $z_0 \in \Omega \iff \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} =: f'(z_0) \iff \exists \alpha \in \mathbb{C}: f(z_0+h) = f(z_0) + \alpha \cdot h + o(|h|), h \rightarrow 0$.

Определение 2.6. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, если $\exists f'(z) \forall z \in \Omega$.

Свойства. 1. f, g — голоморфные функции на Ω , то $f + g, f \cdot g$ — голоморфные, $\frac{f}{g}$ — голоморфна там, где $g \neq 0$.

Доказательство. $f(z+h) \cdot q(z+h) = (f(z) + f'(z)h + o(|h|)) (q(z) + q'(z)h + o(|h|))$

Пример. 1. $f \in \mathbb{C}[z] \implies f$ — голоморфна. Достаточно проверить для $f = 1, f = z$. $f = 1 \implies f' = 0, f = z \implies f' = 1$.

2. $f(z) = \bar{z}$, тогда f — не голоморфна. Посмотрим в нуле: $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$. $h = \varepsilon \in \mathbb{R}$. Тогда предел 1, при $h = i\varepsilon$ получаем предел -1 .

3. $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, R — радиус сходимости, $R > 0$, тогда f голоморфна в $\Omega = D_R = \{z: |z| < R\}$, причем $f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$.

Доказательство. 1. TODO.

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{n} - nz^{n-1} \right| \leq n(n-1)(|z| + |h|)^{n-2} \cdot |h|, n \geq 2.$$

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n \cdot z^{n-1} \right| = |(z+h)^{n-1} + \dots + z^{n-1} - n z^{n-1}| = |(z+h)^{n-1} - z^{n-1} + (z+h)^{n-2}z - z^{n-1} + \dots + z^{n-1} - z^{n-1}|$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z|^k \cdot |(z+h)^{n-1-k} - z^{n-1-k}| \leq n(n-1)(|z| + |h|)^{n-2}|h|.$$

Покажем, что $f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n \geq 1} n a_n \cdot a^{n-1} \right| &= \left| \sum_{n \geq 2} a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right) \right| \leq \\ &\leq \left(\sum_{n \geq 2} |a_n| n(n-1) (|z| + |h|)^{n-2} \right) |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Следствие. Аналитические функции — голоморфны. Обратное утверждение тоже верно.

2.4. Уравнение Коши-Римана

Рассмотрим $f(z) = u(z) + i \cdot v(z)$, $u, v \in \mathbb{R}$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Можно посмотреть на f как на $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$

Утверждение 2.4. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, тогда f дифференцируема как функция из \mathbb{R}^2 в \mathbb{R}^2 , и матрица Якоби f имеет вид $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$

Доказательство. $z = x + iy$, $h = h_1 + ih_2$. $f(z+h) = f(x+h, i(y+h_2)) = f(z) + f'(z) \cdot (h_1 + ih_2) + o(|h|)$, $h + ih_2 \mapsto f'(z) \cdot (h_1 + ih_2)$ — линейное отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. \square

$f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, $z \in \Omega$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. $f'(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z+\varepsilon) - f(z)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z+i\varepsilon) - f(z)}{i\varepsilon}$. Тогда, если $z = x + iy$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon+iy) - f(x+iy)}{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$. По y получается предел $-i \frac{\partial f}{\partial y}(z)$.

$$\text{То есть } \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z) \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \dots \end{cases}$$

Определение 2.7. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$. Что-то.

Лемма. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Ω — область. f голоморфна $\iff f$ дифференцируема и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Доказательство. $\bullet \implies$ проверили выше.

$$\bullet \Leftarrow z = x + iy, h = h_1 + ih_2, f = u + iv.$$

$$f(z+h) = f(x+h_1+i(y+h_2)) = f(x+iy) + \frac{\partial f}{\partial x}(z)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(z) \cdot h_2 + o(|h|) = f(z) + (u_x + iv_x)h_1 + (u_y + iv_y)h_2 + o(|h|)$$

\square

2.5. Первообразная голоморфной функции

Определение 2.8. Ω — область, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, тогда $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — первообразная f , если $F'(z) = f(z) \forall z \in \Omega$.

В частности, F — голоморфна.

2.5.1. Интеграл вдоль пути

Определение 2.9. Путь — непрерывное отображение $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

Определение 2.10. Путь гладкий, если $\forall t \in (a, b) \exists z'(t)$ непрерывно ограничена

Кусочно гладкий, если $\exists t_1, \dots, t_n \in (a, b): z'(t)$, если $t \neq t_i$.

Определение 2.11. Пути $z_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $z_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ эквиваленты, если они отличаются заменой параметризации, то есть $\exists \varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ биекция.

Определение 2.12. Контур — класс эквивалентности путей.

Определение 2.13. Пусть γ — контур, заданный путем $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, тогда контур C обратной ориентации — это контур, заданный путем $\tilde{z}: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{z}(t) = z(-t)$.

Определение 2.14. Длина пути, это $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

Определение 2.15. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывна, тогда интеграл вдоль пути γ , заданный $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, это $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$.

Утверждение 2.5. $\int_{\gamma} f(z) dz$ не зависит от выбора пути γ .

Доказательство. $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$, $z_1: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$, $z_1(t) = z(\varphi(t))$, $z_1'(t) = z'(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$$\int_c^d f(z_1(t)) z_1'(t) dt = \int_c^d f(z(\varphi(t))) z'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \stackrel{s=\varphi(t)}{=} \int_a^b f(z(s)) z'(s) ds. \quad \square$$

Следствие. γ — контур, то $\int_{\gamma} f(z) dz$ можно определить как интеграл по пути, параметризующим этот контур.

Пример. $f(z) = z^n$. Путь $z: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $z(t) = e^{it}$. Соответствует контуру γ — окружность.

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{int} \cdot i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = i \int_0^{2\pi} (\cos((n+1)t) + i \sin((n+1)t)) dt = \begin{cases} 2\pi i, n = -1 \\ 0, n \neq -1 \end{cases}$$

Утверждение 2.6. γ — контур, $\tilde{\gamma}$ — контур с обратной ориентацией, тогда $\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$

Доказательство. $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ — это параметризация γ , $\tilde{z}: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$ параметризация $\tilde{\gamma}$.

$$\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \stackrel{s=-t}{=} \int_a^b f(z(-s)) z'(-s) (-ds) = - \int_a^b f(\tilde{z}(s)) \tilde{z}'(s) ds = \dots \quad \square$$

Утверждение 2.7. γ — контур, тогда $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \text{length}(\gamma) \max_{z \in \gamma} |f(z)|$.

Доказательство. Расписать интеграл, ограничить $f(z)$ максимумом. \square

Утверждение 2.8. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, пусть $\exists F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — первообразная f . Тогда если $z: [a, b] \rightarrow \Omega$ — путь, задающий контур γ , то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Доказательство. $\frac{d}{dt} F(z(t)) = F'(z(t)) \cdot z'(t)$, и правда: $\varepsilon > 0$, $F(z(t+\varepsilon)) = F(z(t) + z'(t)\varepsilon + o(\varepsilon)) = F(z(t)) + F'(z(t))(z(t)\varepsilon + o(\varepsilon)) + o(\varepsilon) = F(z(t))F'(z(t)) \cdot z'(t)\varepsilon + o(\varepsilon)$.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b F'(z(t)) \cdot z'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \text{Re } F(z(t)) dt + i \int_a^b \frac{d}{dt} \text{Im } F(z(t)) dt = F(z(b)) - F(z(a)). \quad \square$$

Теорема 2.9. Ω — область, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. $T \subset \Omega$ — контур, совпадающий с границей треугольника, лежащего в Ω . Тогда $\int_T f(z) dz = 0$.

Доказательство. Картинка! $\int_T f(z)dz = \int_{T_1^{(1)}} f(z)dz + \int_{T_2^{(1)}} f(z)dz = \int_{T_3^{(1)}} f(z)dz$.

Картинка про аддитивность.

Тогда по индукции определим $T_i^{(k)}$, для каждого $k \geq 1$ $\left| \int_T f(z)dz \right| = \left| \sum_{j=1}^{4^n} \pm \int_{T_j^{(k)}} f(z)dz \right| \leq 4^k \cdot \max_j \left| \int_{T_j^{(k)}} f(z)dz \right|$

$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(z - z_0)$. Тогда $\int_{T_j^{(k)}} f(z)dz = \underbrace{\int_{T_j^{(k)}} f(z_0)dz}_{=0} + \underbrace{\int_{T_j^{(k)}} f'(z_0)(z - z_0)dz}_{=0} + \int_{T_j^{(k)}} o(z - z_0)dz$

$\Rightarrow \left| \int_{T_j^{(k)}} f(z)dz \right| \leq \max_{z \in T_j^{(k)}} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \cdot \text{Perim}(T_j^{(k)}) \leq o(2^{-k} \text{diam}(T)) \cdot 2^{-k} \text{Perim}(T) = o(4^{-k})$.

А значит, интеграл по контуру равен 0. \square

Определение 2.16. Ω называется односвязной, если $\forall \gamma$ — замкнутый (такого, что $\gamma \subset \Omega$), ограниченная компонента связности $\mathbb{C} \setminus \gamma$ тоже содержится в Ω .

Теорема 2.10. Ω — односвязная область, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция, тогда $\exists F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — первообразная f , $F'(z) = f(z) \forall z \in \Omega$.

Доказательство. $w_0 \in \Omega$ — фиксирована. $\forall w$ построим путь γ_w из w_0 в w , который движется либо вертикально, либо горизонтально, а также не самопересекается.

$F(w) := \int_{\gamma_w} f(z)dz$. А дальше в следующей серии! \square

Следствие. Если γ — замкнутый контур, f — голоморфная функция в односвязной области Ω , $\gamma \subset \Omega \Rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz = 0$.

Определение 2.17. Петля — непрерывный образ окружности, то есть отображение вида $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ $z(a) = z(b)$.

Определение 2.18. Петля простая, если она не самопересекается, то есть $\forall x \in [a, b], y \in (x, y): z(x) \neq z(y)$.

Теорема 2.11 (Теорема Жордана). Плоскость разбивается простой петлей ($\gamma \in \mathbb{C}$) на ограниченное связное множество Ω_1 и неограниченное связное множество Ω_2 .

Определение 2.19. Ω_1 — это жорданова область, $\partial\Omega_1 := \gamma$, ориентированная против часовой стрелки.

Теорема 2.12 (Гурса). T — треугольник, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, $T \subset \Omega$. Тогда $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

Определение 2.20. γ — координатный путь (петля), если γ составлена из конечно числа вертикальных и горизонтальных отрезков.

Лемма. Пусть Ω — односвязная область, $\gamma \subset \Omega$ — координатная петля, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморф-

ная. Тогда:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Доказательство. Упражнение. Можно разбить наш контур на прямоугольники. Каждый прямоугольник — на треугольники (построить триангуляцию). Далее теорема Гурса. \square

Теорема 2.13. Ω — односвязная область, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, то \exists первообразная F , то есть $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}: F'f = f$.

Доказательство. Возьмем $w_0 \in \Omega$. $\forall w \exists$ координатный путь γ_w , соединяющий w_0 и w , $\gamma_w \subset \Omega$. Тогда возьмем $F(w) := \int_{\gamma_w} f(z) dz$.

1. $F(w)$ не зависит от выбора γ_w . Если γ_w^1, γ_w^2 — два координатных пути, соединяющих w_0 и w , то $\gamma = \gamma_w^1 \cup \gamma_w^2$ — координатная петля \implies разность интегралов равна нулю.

2. Проверим, что $F'(w) = f(w)$. $F'(w) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(w+h) - F(w)}{h}$. $F(w+h) = \int_{\gamma_{w+h}} f(z) dz = \int_{\gamma_w} f(z) dz + \int_{\gamma_h} f(z) dz = F(w) + \int_{\gamma_h} f(z) dz$.

$$h^{-1} (F(w+h) - F(w)) = h^{-1} \int_{\gamma_h} f(z) dz = h^{-1} \int_0^1 f(w+th) h dt = \int_0^1 f(w+th) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(w).$$

\square

2.5.2. Формула Коши

Теорема 2.14. $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Пусть $w_0 \in \Omega, r > 0: \overline{B}(w_0, r) \subset \Omega$. Тогда:

$$\forall z \in B(w_0, r) = f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Окружность против часовой стрелки ориентирована!

Доказательство. Картинка! $\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0$, так как γ замкнутый, а $\frac{f(w)}{w-z}$ — это голоморфная функция по w .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_l \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_l \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw. \text{ Что понятно равно } \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)dw}{w-z} = \\ \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(z)+f(w)-f(z)}{w-z} dw = f(z) \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{dw}{w-z} + \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw. \text{ Первое слагаемое } \\ f(z) \cdot 2\pi i, \text{ а второе можно оценить } |\circ| &\leq \max_{|w-z|=\varepsilon} \left| \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \right| 2\pi\varepsilon \leq (|f'(z)| + 1) 2\pi\varepsilon \end{aligned}$$

\square

Следствие. 1. Голоморфные функции — аналитичны! Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, $\overline{B}(w_0, r) \subset \Omega, z \in B(w_0, r)$. Тогда $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)dw}{w-w_0-(z-w_0)} =$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=r} f(w) \sum_{n \geq 0} \frac{(z-w_0)^n}{(w-w_0)^{n+1}} dw = \sum_{n \geq 0} (z-w_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)dw}{(w-w_0)^{n+1}}.$$

$$\text{То есть } \forall z \in B(w_0, r) \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-w_0)^n.$$

Теорема Луивилля: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная и ограниченная. Тогда $f \equiv \text{const}$.

Доказательство. Заметим, что $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dz$. Тогда если $|f(w)| \leq C \forall w$. Тогда $|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{C}{R^2} 2\pi R \dots$ □

Основная теорема алгебры: $P \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P = n$, тогда P имеет n корней в \mathbb{C} .

Доказательство. Докажем, что при $n \geq 1$ есть хотя бы один корень. Пусть $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$. Тогда если взять $|f(z)| = \frac{1}{z^n(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \dots + a_0\frac{1}{z^n})}$ □

Теорема единственности. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, Ω — область, $f \not\equiv 0$. Тогда $\{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ дискретно (то есть не имеет точек сгущения в Ω).

Доказательство. Пусть $z_0, z_1, z_2, \dots \in \Omega$, такое что $f(z_k) = 0 \forall k \geq 0$, $z_k \rightarrow z_0, z_k \neq z_0, \forall k \geq 1$.

Пусть $r > 0: \overline{B}(z_0, r) \subset \Omega, f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \exists d: a_d \neq 0$.

$f(z) = (z - z_0)^d \sum_{n \geq d} a_n (z - z_0)^{n-d} = (z - z_0)^d g(z)$. g — голоморфная в $B(z_0, r), g(z_0) \neq 0 \implies$

$\exists N \forall n \geq N g(z_n) \neq 0 \implies f(z_n) \neq 0?! \quad \square$