

# Математический анализ

Харитонцев-Беглов Сергей

11 ноября 2022 г.

## Содержание

<b>1. Тут пропущена лекция + название главы</b>	<b>1</b>
1.1 Формула замены переменной под интегралом . . . . .	3
<b>2. Теория функции одной комплексной переменной</b>	<b>5</b>
2.1 Напоминание . . . . .	5
2.2 Аналитические функции . . . . .	5
2.3 Голоморфные функции . . . . .	6
2.4 Уравнение Коши-Римана . . . . .	7
2.5 Первообразная голоморфной функции . . . . .	7
2.5.1 Интеграл вдоль пути . . . . .	7
2.5.2 Формула Коши . . . . .	10
2.6 Принцип аргумента . . . . .	13

# 1. Тут пропущена лекция + название главы

Напомним определения с прошлого раза:

**Определение 1.1.** Назовем  $U \subset \mathbb{R}^n$  хорошим, если

- $U$  — ограниченное,
- $a_k, b_k$  — непрерывны на  $U^{(k-1)} \forall k$ .
- $\forall k \in 1 : n : z \in U^{(k)} \{z\} \times (a_{k+1}(z), b_{k+1}(z)) \subset U^{(k+1)}$ .

Данное определение придуманное, потому что мы не углубляемся в теорию, потому что нам нужно заспидранить интегралы для теорвера, а для того, чтобы понять подробно, нужно в 4 модуле пойти на курс JUB.

Для понимания можно попробовать почитать учебник Руденко.

**Замечание.** Мы не требуем, чтобы  $U$  было замкнутым или открытым.

**Замечание.** Определение хорошеести зависит от нумерации.

Пример: повернутый на  $90^\circ$  логотип Котлина.

**Определение 1.2.** Пусть  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  — ограничена, непрерывно,  $U$  — хорошее.

$$\text{Тогда: } \int_U f(x) dx := \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \dots \left( \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx_n \right) \dots \right) dx_1$$

**Упражнение.** Абоба.

**Определение 1.3.**  $\text{supp } f = \varphi \{x : f(x) \neq 0\}$ .

$C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \begin{array}{l} f \text{ — непрерывна} \\ \text{supp } f \text{ — какое-то множество я хз} \end{array} \right\}$ . Тогда  $f \in C_0(\mathbb{R}^n) \implies \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_I f(x) dx$ , где  $I \supset \text{supp } f$ ,  $I$  — ячейка.

**Теорема 1.1.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  — хорошее относительно двух нумераций координат.

Тогда  $\int_U f(x) dx$  одинаковый в обоих нумерациях.

**Замечание.**  $f \in C_0(\mathbb{R}^n), \text{supp } f \subset U \implies \int_U f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ .

**Идея доказательства теоремы.** Найти последовательность  $f_1, f_2, \dots \in C_0(\mathbb{R}^n)$ ,  $\text{supp } f_i \subset U$  и  $\int_U f_i(x) dx \rightarrow \int_U f(x) dx$  в первой нумерации и  $\int_U f_i(x) dx \rightarrow \int_U f(x) dx$  во второй нумерации.  $\square$

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon > 0$  фиксировано,  $U_\varepsilon := \{x \in U \mid \forall k \in 1 : n, a_k(x) + \varepsilon \leq x_k \leq b_k(x) - \varepsilon\}$ .

**Утверждение 1.2.**  $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon$  — замкнуто,  $U_\varepsilon \subset \text{Int } U$ .

**Доказательство.**  $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : U_\varepsilon + \overline{B}(0, \delta(\varepsilon)) = \bigcup_{x \in U_\varepsilon} \overline{B}(x, \delta(\varepsilon)) \subset U$ .

Заметим, что для  $n = 1$  можно взять  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ .

Для больших  $n$  воспользуемся индукционным переходом. Утверждение выполнено для  $U_\varepsilon^{(n-1)}$ :  $\exists \delta_{n-1}(\varepsilon) > 0 \bigcup_{z \in U_\varepsilon^{(n-1)}} \overline{B}_{n-1}(z, \delta_{n-1}(\varepsilon)) \subset U^{(n-1)}$ .

Тогда  $\exists \delta_0 \in (0, \frac{1}{2}\delta_{n-1}(\varepsilon)) : \forall z, w \in U_\varepsilon^{(n-1)} + \overline{B}_{n-1}(0, \frac{1}{2}\delta_{n-1}(\varepsilon)), |z - w| \leq \delta_0 \implies |a_n(z) - a_n(w)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$   
и  $|b_n(z) - b_n(w)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Тогда пусть  $\delta = \delta(\varepsilon) := \min(\frac{\varepsilon}{2}, \delta_0)$ ,  $x \in U_\varepsilon, x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \delta(\varepsilon)$ . Надо понять, что  $y \in U$ .

Заметим, что  $x = (z, x_n), y = (w, y_n); z, w \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Тогда выполняется два свойства:

1.  $|z - w| \leq \delta_0 \implies w \in U_\varepsilon^{(n-1)} + \overline{B}_{n-1}(0, \frac{\delta_{n-1}(\varepsilon)}{2})$ ,
2.  $y_n \leq x_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n(z) - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = b_n(z) - \frac{\varepsilon}{2} < b_n(w)$ . И  $y_n \geq x_n - \frac{\varepsilon}{2} \geq a_n(z) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = a_n(z) + \frac{\varepsilon}{2} > a_n(w) \implies y \in (a_n(w), b_n(w)) \implies y \in U$ , потому что это определение хорошего множества.

$U_\varepsilon$  замкнуто, так как задается нестрогими неравенствами для непрерывных функций, заданных на замкнутом множестве  $\varphi U_\varepsilon$  ( $\varphi U_\varepsilon \subset U$ , так как  $\varphi U_\varepsilon \subset \bigcup_{x \in U_\varepsilon} \overline{B}_n(x, \delta(\varepsilon))$ ).  $\square$

**Утверждение 1.3.**  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывна, ограничена,  $U$  — хорошее.  $\exists C > 0$  зависящая только от  $U$  (но не от  $f$ ), такое что

$$\forall \varepsilon > 0 : \left| \int_U f(x) dx - \int_{U_\varepsilon} f(x) dx \right| \leq \sup_U |f| \cdot C\varepsilon.$$

**Доказательство.** Упражнение. При  $n = 1$  что-то.  $\square$

**Следствие.**  $U$  — хорошее,  $f_1, \dots, f_n, f : U \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно,  $\forall i : \sup_U |f_i| \leq M, \sup_U |f| \leq M, \forall K \subset U$  — компакт(?).

Тогда  $\int_U f_i(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_U f(x) dx$ .

**Доказательство.** Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ ,  $U_\varepsilon$  — компакт.  $\implies \exists N > 0 : \forall i \geq N \sup_{U_\varepsilon} |f_i - f| \leq \varepsilon$ .

не успеть.  $\square$

**Лемма** (Главная техническая лемма).  $U$  — хорошее,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  — ограничена, непрерывна.

Тогда  $\exists f_1, \dots : U \rightarrow \mathbb{R}$ :

1.  $\sup_U |f_i| \leq \sup_U |f|$ ,
2.  $\forall K \subset U$  — компакт  $\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_K |f_i - f| = 0$ ,
3.  $f_i \in C_0(\mathbb{R}^n), \text{supp } f_i \subset U$ .

**Доказательство.**  $\varepsilon > 0$ , определим  $\rho_k^\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $1 \in 1 : n$ ,

$$\rho_k^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x_k \geq b_k - \frac{\varepsilon}{2} \wedge x_k \leq a_k + \frac{\varepsilon}{2} \\ 1, & x_k \in [a_k + \varepsilon, b_k - \varepsilon] \\ \frac{2}{\varepsilon} \min(x_k - a_k - \frac{\varepsilon}{2}, b_k - x_k - \frac{\varepsilon}{2}) & \text{else} \end{cases}$$

Простые свойства:  $\rho^\varepsilon(x) = \prod_{k=1}^n \rho_k^\varepsilon(x), 0 \leq \rho^\varepsilon(x) \leq 1$ .

Положим  $f_i(x) := f(x) \cdot \rho^{\frac{\varepsilon}{i}}(x)$ . Проверить, что такие  $f_i$  подходят.  $\square$

Вернемся к теореме. Возьмем  $f_1, f_2, \dots$  из леммы.  $\int_U f(x) dx$  одинаков в любой нумерации, так как  $f_i \in C_0(\mathbb{R}^n), \int_U f_i(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_i(x) dx$ . Тогда по следствию выше  $\int_U f_i(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_U f(x) dx$ .  $\square$

## 1.1. Формула замены переменной под интегралом

**Определение 1.4.**  $U \subset \mathbb{R}^n$  составное, если  $U = \bigcup_{i=1}^k U_i$ ,  $U_i$  — хорошее, че-то еще.

Тут было что-то еще.

**Замечание.**  $\Phi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\Phi$ . У меня появился кофе!!!

АБОБА

**Теорема 1.4.**  $U \subset \mathbb{R}^n$  — составное множество.  $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  такая, что

1.  $\Phi(U)$  — составное,
2.  $\Phi: \text{Int } U \rightarrow \text{Int } \Phi(U)$  гомеоморфизм,
3.  $\Phi$  дифференцируема на  $\text{Int } U$ . И якобиан не равен нулю в любой точке.
4. Якобиан  $\Phi$  ограничен на  $\text{Int } U$ .

Тогда  $\forall f: \Phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  ограниченной выполняется:

$$\int_{\Phi(U)} f(x) dx = \int_U f(\Phi(x)) |\text{Jac } \Phi(x)| dx.$$

**Пример.**  $n = 1$ . Формула замены переменной.

**Пример.**  $\Phi: [0; 2\pi) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  $\Phi(\varphi, r) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  Якобиан  $= \det \begin{pmatrix} -r \sin \varphi & r \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} = r$ .

$$U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}. \text{Area}(U) = \int_U 1 dx dy = \int_{[0, 2\pi) \times [0, 1]} r dr d\varphi = \pi$$

**Теорема 1.5** (Теорема о замене переменной для  $C_0(\mathbb{R}^n)$ ). Пусть есть открытое  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  такая, что:

1.  $\Phi$  — биекция из  $U$  в  $\Phi(U)$ ,
2.  $\Phi$  непрерывно дифференцируема на  $U$ ,  $\text{Jac } \Phi(x) \neq 0 \forall x \in U \implies \forall f \in C_0(\mathbb{R}^n) \text{ supp } f \subset \Phi(U)$  выполняется  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\Phi(y)) |\text{Jac } \Phi(y)| dy$ .

**Доказательство.** Если  $n = 1$ , то понятно, что теорема верна.

$$\text{Тогда считаем, что } n \geq 2 \text{ и по индукции теорема верна для } k < n. \Phi(y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \vdots \\ \varphi_n(y) \end{pmatrix}.$$

Простой случай: теорема верна, если  $\Phi$  — перестановка. См. теорему выше.

Теорема верна, если  $\exists j \in 1..n: \varphi_j(y) = y_j$ . Не умаляя общности считаем  $j = 1$  (иначе можно сделать перестановку). Тогда для  $\forall y_1$  — фикс. положения.  $\Psi_{y_1}(y_2, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} \varphi_2(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

$$\Phi(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \Psi_{y_1}(y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что  $\text{Jас } \Phi(y_1, \dots, y_n) = \text{Jас } \Psi_{y_1}(y_2, \dots, y_n)$ . Тогда по индукции  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \Psi_{x_1}(x_2, \dots, x_n)) |\text{Jас } \Psi_{x_1}(y_2, \dots, y_n)| dy_2 \dots dy_n = \int_{\mathbb{R}} dy_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\Phi(y)) |\text{Jас } \Phi(y)| dy_2 \dots dy_n =$  то, что ну

Пусть  $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$ , пусть теорема верна для  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , тогда теорема верна для  $\Phi$ . Это следует из того, что  $\text{Jас } \Phi = (\text{Jас } \Phi_1) \circ \Phi_2 \cdot \text{Jас } \Phi_2$ .

$\forall x_0 \in U \exists r > 0$ , что если  $\text{supp } f \subset \Phi(B(x_0, r))$ , то теорема верна. Наивно: представить при помощи композиции:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi_1} \begin{pmatrix} \varphi_1(y_1, \dots, y_n) \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi_2 \Phi_1^{-1}} \begin{pmatrix} \varphi_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Но!  $\Phi_1^{-1}$  может не существовать.

Мы знаем, что  $\nabla \varphi_1 \neq 0$ .  $\exists j \in \{1, \dots, n\} : \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j}(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$ .

Утверждение:  $\exists r > 0 : \Psi, \Phi_1, \Phi_2 \Psi^{-1} \Phi_1$  определены при  $y \in B(y^0, r)$ . И правда:

- $\Psi$  определена  $\forall y$ , также  $\Psi^{-1}$ ,
- $\Phi_1$  определена  $y \in U$ ,
- $\Phi_1^{-1} : \text{Jас } \Phi_1(\Psi(y^0)) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} x_j \implies \Phi_1^{-1}$  определена в  $\Phi_1(\Psi(B(y^0, r)))$  для  $r > 0$  по теорема об обратной функции.

Теперь можно все скомпилировать:  $\forall y \in U \exists r_y > 0$ . Теорема верна, если  $\text{supp } f \subset \Phi(B(y, 2r_y))$ .

Зафиксируем  $f \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ ,  $\text{supp } f \subset \Phi(U)$ . Так как это компакт, то  $\exists y_1, \dots, y_k : \bigcup_{i=1}^k \Phi(B(y_i, r_{y_i})) \supset \text{supp } f$ .  $\forall i$  положим  $\beta_i(y) = \begin{cases} \min(1, \frac{2r_{y_i} - |y - y_i|}{r_{y_i}}) & |y - y_i| \leq 2r_{y_i} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$   $\alpha_1(x) = \beta_1(\Phi^{-1}(x))$ ,  $\alpha_2(x) = (1 - \beta_1(\Phi^{-1}(x))) \cdot \beta_2(\Psi^{-1}(x))$ , ...,  $\alpha_k(x) = (1 - \beta_1(\Phi^{-1}(x))) \cdot \dots \cdot (1 - \beta_{k-1}(\Phi^{-1}(x)))$ .

Тогда  $x \in \text{supp } f \implies \exists j : x \in \Phi(B(y_j, r_{y_j})) \implies (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)(x) = 1 \implies \sum \alpha_i \cdot f \equiv f$ , по определению  $\text{supp}(\alpha_j \cdot f) \subset \Phi(B(y_j, 2r_{y_j}))$ . Тогда  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \alpha_j(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\Phi(y)) \alpha_j(\Phi(y)) |\text{Jас } \Phi(y)| dx$   $\square$

## 2. Теория функции одной комплексной переменной

### 2.1. Напоминание

Говорим про комплексные числа:  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ :  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow z = x + iy, i \in \mathbb{C}, i^2 = -1, i \rightsquigarrow (0, 1), z = x + iy, w = a + ib, z \cdot w = xa - yb + i(xb + ya)$ .

**Свойства.** 1.  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \bar{z} := x - iy, z \cdot \bar{z} = |z|^2$ .

2.  $\operatorname{Re} z = x$  — вещественная часть,

3.  $\operatorname{Im} z = y$  — мнимая часть,

4.  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ .

**Определение 2.1.** Полярная запись комплексного числа  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e \cdot e^{i\varphi}$ . Умножение:  $r_1 r_2 (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$

### 2.2. Аналитические функции

**Определение 2.2.** Степенной ряд — это ряд вида  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n, a_n \in \mathbb{C}$ .

Радиус сходимости  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  — это  $R \in [0, +\infty]: R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ .

$R = \sup \{r: |a_n r^n|\}$ .

**Утверждение 2.1.**

1.  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  — сходится абсолютно при  $|z| < R$  и расходится при  $|z| > R$ .

2.  $r < R, \sup_{|z| \leq r} \left| \sum_{n \geq 0} z_n z^n \right| < \infty$ .

**Доказательство.** Смотри конспект прошлого года. □

**Утверждение 2.2.**

1. Пусть  $R$  — радиус сходимости  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ , тогда  $R$  — радиус сходимости и для ряда  $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ .

2.  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n \cdot \sum_{m \geq 0} b_m z^m = \sum_{k \geq 0} \sum_{n+m=k} a_n b_m \cdot z^k$ . Верно  $\forall z: |z| < R$ .

**Пример.**  $\exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}, R = +\infty$ .

**Пример.**  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n, R = 1$ .

**Определение 2.3.**  $\Omega \subset \mathbb{C}$  — открытое,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  аналитична, если  $\forall z_0 \in \Omega \exists r > 0: \forall z, |z - z_0| < r \implies f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ .

**Утверждение 2.3.**  $f, g$  — аналитические функции на  $\Omega$ , то  $f + g$  — аналитическая.

☐

2. Рациональные функции аналитичны там, где они определены.

### 2.3. Голomorphicные функции

☐

Автор: ХБ

## 2.4. Уравнение Коши-Римана

Рассмотрим  $f(z) = u(z) + i \cdot v(z)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ ,  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$ . Можно посмотреть на  $f$  как на  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$

**Утверждение 2.4.**  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная, тогда  $f$  дифференцируема как функция из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$ , и матрица Якоби  $f$  имеет вид  $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$

**Доказательство.**  $z = x + iy$ ,  $h = h_1 + ih_2$ .  $f(z+h) = f(x+h, i(y+h_2)) = f(z) + f'(z) \cdot (h_1 + ih_2) + o(|h|)$ ,  $h + ih_2 \mapsto f'(z) \cdot (h_1 + ih_2)$  — линейное отображение  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  $\square$

$f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная,  $z \in \Omega$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ .  $f'(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z+\varepsilon) - f(z)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z+i\varepsilon) - f(z)}{iz}$ . Тогда, если  $z = x + iy$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon+iy) - f(x+iy)}{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$ . По  $y$  получается предел  $-i \frac{\partial f}{\partial y}(z)$ .

$$\text{То есть } \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z) \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \dots \end{cases}$$

**Определение 2.7.**  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ . Что-то.

**Лемма.**  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Omega$  — область.  $f$  голоморфна  $\iff f$  дифференцируема и  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ .

**Доказательство.**  $\bullet \implies$  проверили выше.

$$\bullet \Leftarrow z = x + iy, h = h_1 + ih_2, f = u + iv.$$

$$f(z+h) = f(x+h_1+i(y+h_2)) = f(x+iy) + \frac{\partial f}{\partial x}(z)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(z) \cdot h_2 + o(|h|) = f(z) + (u_x + iv_x)h_1 + (u_y + iv_y)h_2 + o(|h|)$$

$\square$

## 2.5. Первообразная голоморфной функции

**Определение 2.8.**  $\Omega$  — область,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , тогда  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — первообразная  $f$ , если  $F'(z) = f(z) \forall z \in \Omega$ .

В частности,  $F$  — голоморфна.

### 2.5.1. Интеграл вдоль пути

**Определение 2.9.** Путь — непрерывное отображение  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Определение 2.10.** Путь гладкий, если  $\forall t \in (a, b) \exists z'(t)$  непрерывно ограничена

Кусочно гладкий, если  $\exists t_1, \dots, t_n \in (a, b): z'(t)$ , если  $t \neq t_i$ .

**Определение 2.11.** Пути  $z_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  эквиваленты, если они отличаются заменой параметризации, то есть  $\exists \varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$  биекция.

**Определение 2.12.** Контур — класс эквивалентности путей.

**Определение 2.13.** Пусть  $\gamma$  — контур, заданный путем  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , тогда контур  $C$  обратной ориентации — это контур, заданный путем  $\tilde{z}: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\tilde{z}(t) = z(-t)$ .



**Определение 2.14.** Длина пути, это  $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

**Определение 2.15.**  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — непрерывна, тогда интеграл вдоль пути  $\gamma$ , заданный  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , это  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$ .

**Утверждение 2.5.**  $\int_{\gamma} f(z) dz$  не зависит от выбора пути  $\gamma$ .

**Доказательство.**  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ ,  $z_1: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_1(t) = z(\varphi(t))$ ,  $z_1'(t) = z'(\varphi(t))\varphi'(t)$ .

$$\int_c^d f(z_1(t)) z_1'(t) dt = \int_c^d f(z(\varphi(t))) z'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \stackrel{s=\varphi(t)}{=} \int_a^b f(z(s)) z'(s) ds. \quad \square$$

**Следствие.**  $\gamma$  — контур, то  $\int_{\gamma} f(z) dz$  можно определить как интеграл по пути, параметризующим этот контур.

**Пример.**  $f(z) = z^n$ . Путь  $z: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z(t) = e^{it}$ . Соответствует контуру  $\gamma$  — окружность.

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{int} \cdot i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = i \int_0^{2\pi} (\cos((n+1)t) + i \sin((n+1)t)) dt = \begin{cases} 2\pi i, n = -1 \\ 0, n \neq -1 \end{cases}$$

**Утверждение 2.6.**  $\gamma$  — контур,  $\tilde{\gamma}$  — контур с обратной ориентацией, тогда  $\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$

**Доказательство.**  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  — это параметризация  $\gamma$ ,  $\tilde{z}: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$  параметризация  $\tilde{\gamma}$ .

$$\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \stackrel{s=-t}{=} \int_a^b f(z(-s)) z'(-s) (-ds) = - \int_a^b f(\tilde{z}(s)) \tilde{z}'(s) ds = \dots \quad \square$$

**Утверждение 2.7.**  $\gamma$  — контур, тогда  $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \text{length}(\gamma) \max_{z \in \gamma} |f(z)|$ .

**Доказательство.** Расписать интеграл, ограничить  $f(z)$  максимумом.  $\square$

**Утверждение 2.8.**  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , пусть  $\exists F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — первообразная  $f$ . Тогда если  $z: [a, b] \rightarrow \Omega$  — путь, задающий контур  $\gamma$ , то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

**Доказательство.**  $\frac{d}{dt} F(z(t)) = F'(z(t)) \cdot z'(t)$ , и правда:  $\varepsilon > 0$ ,  $F(z(t+\varepsilon)) = F(z(t) + z'(t)\varepsilon + o(\varepsilon)) = F(z(t)) + F'(z(t))(z(t)\varepsilon + o(\varepsilon)) + o(\varepsilon) = F(z(t))F'(z(t)) \cdot z'(t)\varepsilon + o(\varepsilon)$ .

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b F'(z(t)) \cdot z'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \text{Re } F(z(t)) dt + i \int_a^b \frac{d}{dt} \text{Im } F(z(t)) dt = F(z(b)) - F(z(a)). \quad \square$$

**Теорема 2.9.**  $\Omega$  — область,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная функция.  $T \subset \Omega$  — контур, совпадающий с границей треугольника, лежащего в  $\Omega$ . Тогда  $\int_T f(z) dz = 0$ .

**Доказательство.** Картинка!  $\int_T f(z)dz = \int_{T_1^{(1)}} f(z)dz + \int_{T_2^{(1)}} f(z)dz = \int_{T_3^{(1)}} f(z)dz$ .

Картинка про аддитивность.

Тогда по индукции определим  $T_i^{(k)}$ , для каждого  $k \geq 1$   $\left| \int_T f(z)dz \right| = \left| \sum_{j=1}^{4^n} \pm \int_{T_j^{(k)}} f(z)dz \right| \leq 4^k \cdot \max_j \left| \int_{T_j^{(k)}} f(z)dz \right|$

$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(z - z_0)$ . Тогда  $\int_{T_j^{(k)}} f(z)dz = \underbrace{\int_{T_j^{(k)}} f(z_0)dz}_{=0} + \underbrace{\int_{T_j^{(k)}} f'(z_0)(z - z_0)dz}_{=0} + \int_{T_j^{(k)}} o(z - z_0)dz$

$\Rightarrow \left| \int_{T_j^{(k)}} f(z)dz \right| \leq \max_{z \in T_j^{(k)}} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \cdot \text{Perim}(T_j^{(k)}) \leq o(2^{-k} \text{diam}(T)) \cdot 2^{-k} \text{Perim}(T) = o(4^{-k})$ .

А значит, интеграл по контуру равен 0.  $\square$

**Определение 2.16.**  $\Omega$  называется односвязной, если  $\forall \gamma$  — замкнутый (такого, что  $\gamma \subset \Omega$ ), ограниченная компонента связности  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  тоже содержится в  $\Omega$ .

**Теорема 2.10.**  $\Omega$  — односвязная область,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная функция, тогда  $\exists F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — первообразная  $f$ ,  $F'(z) = f(z) \forall z \in \Omega$ .

**Доказательство.**  $w_0 \in \Omega$  — фиксирована.  $\forall w$  построим путь  $\gamma_w$  из  $w_0$  в  $w$ , который движется либо вертикально, либо горизонтально, а также не самопересекается.

$F(w) := \int_{\gamma_w} f(z)dz$ . А дальше в следующей серии!  $\square$

**Следствие.** Если  $\gamma$  — замкнутый контур,  $f$  — голоморфная функция в односвязной области  $\Omega$ ,  $\gamma \subset \Omega \Rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz = 0$ .

**Определение 2.17.** Петля — непрерывный образ окружности, то есть отображение вида  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$   $z(a) = z(b)$ .

**Определение 2.18.** Петля простая, если она не самопересекается, то есть  $\forall x \in [a, b], y \in (x, y): z(x) \neq z(y)$ .

**Теорема 2.11** (Теорема Жордана). Плоскость разбивается простой петлей ( $\gamma \in \mathbb{C}$ ) на ограниченное связное множество  $\Omega_1$  и неограниченное связное множество  $\Omega_2$ .

**Определение 2.19.**  $\Omega_1$  — это жорданова область,  $\partial\Omega_1 := \gamma$ , ориентированная против часовой стрелки.

**Теорема 2.12** (Гурса).  $T$  — треугольник,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная,  $T \subset \Omega$ . Тогда  $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ .

**Определение 2.20.**  $\gamma$  — координатный путь (петля), если  $\gamma$  составлена из конечно числа вертикальных и горизонтальных отрезков.

**Лемма.** Пусть  $\Omega$  — односвязная область,  $\gamma \subset \Omega$  — координатная петля,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморф-

ная. Тогда:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

**Доказательство.** Упражнение. Можно разбить наш контур на прямоугольники. Каждый прямоугольник — на треугольники (построить триангуляцию). Далее теорема Гурса.  $\square$

**Теорема 2.13.**  $\Omega$  — односвязная область,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная, то  $\exists$  первообразная  $F$ , то есть  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}: F'f = f$ .

**Доказательство.** Возьмем  $w_0 \in \Omega$ .  $\forall w \exists$  координатный путь  $\gamma_w$ , соединяющий  $w_0$  и  $w$ ,  $\gamma_w \subset \Omega$ . Тогда возьмем  $F(w) := \int_{\gamma_w} f(z) dz$ .

1.  $F(w)$  не зависит от выбора  $\gamma_w$ . Если  $\gamma_w^1, \gamma_w^2$  — два координатных пути, соединяющих  $w_0$  и  $w$ , то  $\gamma = \gamma_w^1 \cup \gamma_w^2$  — координатная петля  $\implies$  разность интегралов равна нулю.

2. Проверим, что  $F'(w) = f(w)$ .  $F'(w) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(w+h) - F(w)}{h}$ .  $F(w+h) = \int_{\gamma_{w+h}} f(z) dz = \int_{\gamma_w} f(z) dz + \int_{\gamma_h} f(z) dz = F(w) + \int_{\gamma_h} f(z) dz$ .

$$h^{-1} (F(w+h) - F(w)) = h^{-1} \int_{\gamma_h} f(z) dz = h^{-1} \int_0^1 f(w+th) h dt = \int_0^1 f(w+th) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(w).$$

$\square$

### 2.5.2. Формула Коши

**Теорема 2.14.**  $\Omega \subset \mathbb{C}$  — область,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная функция. Пусть  $w_0 \in \Omega, r > 0: \overline{B}(w_0, r) \subset \Omega$ . Тогда:

$$\forall z \in B(w_0, r) = f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Окружность против часовой стрелки ориентирована!

**Доказательство.** Картинка!  $\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0$ , так как  $\gamma$  замкнутый, а  $\frac{f(w)}{w-z}$  — это голоморфная функция по  $w$ .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_l \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_l \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw. \text{ Что понятно равно } \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)dw}{w-z} = \\ \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(z)+f(w)-f(z)}{w-z} dw = f(z) \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{dw}{w-z} + \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw. \text{ Первое слагаемое } \\ f(z) \cdot 2\pi i, \text{ а второе можно оценить } |\circ| &\leq \max_{|w-z|=\varepsilon} \left| \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \right| 2\pi\varepsilon \leq (|f'(z)| + 1)2\pi\varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

**Следствие.** 1. Голоморфные функции — аналитичны! Пусть  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная,  $\overline{B}(w_0, r) \subset \Omega, z \in B(w_0, r)$ . Тогда  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)dw}{w-w_0-(z-w_0)} =$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=r} f(w) \sum_{n \geq 0} \frac{(z-w_0)^n}{(w-w_0)^{n+1}} dw = \sum_{n \geq 0} (z-w_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)dw}{(w-w_0)^{n+1}}.$$

$$\text{То есть } \forall z \in B(w_0, r) \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-w_0)^n.$$

**Теорема Луивилля:**  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная и ограниченная. Тогда  $f \equiv \text{const}$ .

**Доказательство.** Заметим, что  $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dz$ . Тогда если  $|f(w)| \leq C \forall w$ . Тогда  $|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{C}{R^2} 2\pi R \dots$   $\square$

Основная теорема алгебры:  $P \in \mathbb{C}[z]$ ,  $\deg P = n$ , тогда  $P$  имеет  $n$  корней в  $\mathbb{C}$ .

**Доказательство.** Докажем, что при  $n \geq 1$  есть хотя бы один корень. Пусть  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ . Тогда если взять  $|f(z)| = \frac{1}{z^n(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \dots + a_0\frac{1}{z^n})}$   $\square$

Теорема единственности.  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная,  $\Omega$  — область,  $f \not\equiv 0$ . Тогда  $\{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$  дискретно (то есть не имеет точек сгущения в  $\Omega$ ).

**Доказательство.** Пусть  $z_0, z_1, z_2, \dots \in \Omega$ , такое что  $f(z_k) = 0 \forall k \geq 0$ ,  $z_k \rightarrow z_0$ ,  $z_k \neq z_0, \forall k \geq 1$ .

Пусть  $r > 0$ :  $\overline{B}(z_0, r) \subset \Omega$ ,  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ ,  $\exists d: a_d \neq 0$ .

$f(z) = (z - z_0)^d \sum_{n \geq d} a_n (z - z_0)^{n-d} = (z - z_0)^d g(z)$ .  $g$  — голоморфная в  $B(z_0, r)$ ,  $g(z_0) \neq 0 \implies \exists N \forall n \geq N g(z_n) \neq 0 \implies f(z_n) \neq 0$ ?!  $\square$

**Определение 2.21.**  $\Omega$  — односвязная область,  $\partial\Omega$  — кусочно гладкий путь.  $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна, голоморфна в  $\Omega$ .

Тогда  $\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0$ .

Пояснение:  $r_n: [0, 1] \rightarrow \Omega$  — кусочно гладкий замкнутый путь  $\gamma_n$ .  $r_n \rightarrow r \implies 0 = \int_{\gamma_n} f(z) dz \rightarrow \int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0$

**Определение 2.22.**  $\Omega$  — односвязная область,  $\partial\Omega$  — кусочно гладкий путь,  $z_1, \dots, z_n \in \Omega$ ,  $\varepsilon > 0$ :  $\overline{B}(z_k, \varepsilon) \subset \Omega \forall k = 1..n$ ,  $C_\varepsilon(z_k) = \{z: |z - z_k| = \varepsilon\} \implies \exists$  кусочно гладкий путь  $r_k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}: r_k(0) \in C_\varepsilon(z_k), r_k((0, 1)) \subset \Omega \setminus \bigcup \overline{B}(z_k, \varepsilon), r_k([0, 1]) \cap r_j([0, 1]) = \emptyset k \neq j$

**Определение 2.23.**  $\Omega$  — область,  $z_0 \in \Omega$ ,  $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфная. Тогда  $z_0$  — особенность  $f$ . Различают 3 типа особенностей:

- Устранимая  $\iff f$  ограничена в  $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ .
- Полюс  $\iff h(z) = \frac{1}{f(z)}$  определена и голоморфна в  $B(z_0, \varepsilon)$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ .
- Существенная  $\iff$  не 1 или 2.

**Теорема 2.15** (Об устранимой особенности). Пусть  $\Omega$  — область,  $z_0 \in \Omega$ ,  $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфна и  $z_0$  — устранимая особенность  $f$ . Тогда  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$  и  $f$  является голоморфной в  $\Omega$ .

**Доказательство.** Возьмем  $\varepsilon > 0$ :  $\overline{B}(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$ . Рассмотрим  $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$ .

Докажем, что  $F(z) = f(z) \forall z \in B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$

$\gamma$  — контур  $\partial(B(z_0, \varepsilon) \setminus (\overline{B}(z_0, \delta) \cup \overline{B}(z, \delta) \cup l_1 \cup l_2))$ . Тогда  $\int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = 0 = \int_{|\xi - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \int_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$ .

Тогда  $\int_{|\xi - z| = \delta} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = 2\pi i f(z)$ . Тогда оценим  $\left| \int_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \right| \leq 2\pi \delta \sup |f(\xi)|$ .  $\square$

**Лемма.**  $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная,  $z_0$  — полюс. Тогда  $\exists \varepsilon > 0$ ,  $\varphi: B(z_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная,  $\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $f(z) = (z - z_0)^{-d} \cdot \varphi(z)$ ,  $d \in \mathbb{N}$ .

**Доказательство.**  $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ ,  $h(z_0) = 0 \implies h(z) = (z - z_0)^d \cdot g(z)$ ,  $g(z_0) \neq 0$ .  $f(z) = \frac{1}{h(z)} = (z - z_0)^{-d} \frac{1}{g(z)} = \varphi(z)$ .  $\square$

**Следствие.**  $f$  — как в лемме, то  $\exists \varepsilon > 0: \forall z \in B(z_0, \varepsilon)$ .

$f(z) = \sum_{n \geq -d} a_n (z - z_0)^n = a_{-d} (z - z_0)^{-d} + a_{-d+1} (z - z_0)^{-d+1} + \dots + a_{-1} (z - z_0)^{-1} + \psi(z)$ , где  $\psi(z)$  — голоморфная.

$f$  называется рядом Лорана. Все, что не  $\psi$  — главная часть ряда Лорана.

**Доказательство.**  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^d} = (z - z_0)^{-d} \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_0)^n$   $\square$

**Определение 2.24.**  $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфная,  $z_0$  — полюс,  $f(z) = \sum_{n \geq -d} a_n (z - z_0)^n$ .

Тогда **вычет**  $f$  в  $z_0$  —  $a_{-1}$ , обозначение  $\text{Res}_{z_0} f = a_{-1}$ .

**Лемма.**  $\Omega$  — область,  $z_0 \in \Omega$ ,  $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная,  $z_0$  — полюс, тогда, если  $\varepsilon > 0$  достаточно мало, то  $\int_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z_0} f$ .

**Доказательство.**  $f(z) = \sum_{n=-d}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \psi(z)$ ,  $z \in B(z_0, \alpha\varepsilon)$ .

Тогда  $\int_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z) dz = \sum_{n=-d}^{-1} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} a_n (z - z_0)^n dz + \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \psi(z) dz = 2\pi i a_{-1}$   $\square$

**Лемма.**  $f: \Omega \setminus \{z_0\}$  — голоморфная,  $z_0$  — полюс порядка  $k$ . Тогда:

$$\text{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{k-1} ((z - z_0)^k f(z)).$$

**Доказательство.**  $f(z) = \sum_{n \geq -k} a_n (z - z_0)^n \implies (z - z_0)^k f(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n-k} (z - z_0)^n \implies (z - z_0)^k f(z)$  голоморфна в  $B(z_0, \varepsilon)$  в том числе в  $z_0$  и формула выше — формула для коэффициентов ряда Тейлора.  $\square$

**Определение 2.25.** Пусть  $\{z_1, \dots\} \subset \Omega$  — дискретное подмножество  $\Omega$ . Тогда  $f: \Omega \setminus \{z_i\} \rightarrow \mathbb{C}$  называется мероморфной функцией в  $\Omega$ , если

- $f$  — голоморфной,
- $\forall k, z_k$  — полюс  $f$ .

**Лемма.**  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная,  $g \neq 0$ , тогда  $\frac{f}{g}$  — мероморфна в  $\Omega$ .

**Доказательство.** Пусть  $\{z_1, z_2, \dots\} \subset \Omega$  — нули  $g$ , тогда  $\{z_1, z_2, \dots\}$  — дискретное множество  $\implies h = \frac{f}{g}$  задана и голоморфна в  $\Omega \setminus \{z_1, \dots\}$ .

$z_k$  — ноль порядка  $d$  для  $g$ , тогда

- если  $f(z_k) \neq 0$ , то локально  $h(z) = \frac{1}{g(z)/f(z)} \implies \frac{1}{h(z)} = \frac{g(z)}{f(z)}$  голоморфна в  $z_0$  и равна нулю.

- $f(z_k) \neq 0$ , то пусть  $\tilde{d}$  — порядок нуля  $f$  в  $z_k$ . Тогда локально  $g(z) = (z - z_k)^d \varphi(z)$ ,  $f(z) = (z - z_k)^{\tilde{d}} \tilde{\varphi}(z)$ .  $\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_k)^{\tilde{d}-d} = \frac{\varphi(z)}{\tilde{\varphi}(z)}$  — голоморфная в  $z_0$ .

□

**Теорема 2.16.** Любая мероморфная функция имеет вид  $\frac{f}{g}$ ,  $f, g$  — голоморфная.

**Теорема 2.17** (Теорема о вычетах). Пусть  $\Omega$  — область,  $z_1, \dots, z_n \in \Omega$ .  $f: \text{Cl } \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$  — непрерывная, голоморфная в  $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ .

Пусть  $f$  имеет полюса в  $z_1, \dots, z_n$  или устранимые особенности. Тогда

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z_k} f.$$

**Замечание.**  $\frac{f(\xi)}{\xi-z}$  — мероморфна в  $B(z_0, \varepsilon) \implies \int_{|\xi-z_0|=\varepsilon} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z} = 2\pi i \text{Res}(\dots) \implies$  формула Коши.

**Доказательство.** Картинка.  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (\bigcup_{k=1}^n \overline{B}(z_k, \varepsilon) \setminus l_k)$ ,  $f$  — голоморфная в  $\Omega_\varepsilon$ .  $0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} f(z) dz =$

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{|z-z_k|=\varepsilon} f(z) dz \implies \int_{\partial\Omega} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{|z-z_k|=\varepsilon} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z_k} f. \quad \square$$

## 2.6. Принцип аргумента

Пусть  $z = re^{i\theta}$ ,  $r, \theta \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , тогда  $\theta = \arg z$ .  $\arg z$  определен с точностью до  $2\pi$ .

**Замечание.**  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  — непрерывна, то  $\exists r, \theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и  $r(t) > 0 \forall t \in [a, b]$ ,  $z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ .

**Пример.** Если  $z$  параметризует окружность, то можно положить  $z(t) = e^{2\pi i t}$ ,  $z: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\theta(t) = t$ .

$U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  — односвязное,  $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in U$ , тогда  $\exists \log: U \rightarrow \mathbb{C}$ , такой что  $\log(z_0) = \log r_0 + i\theta_0$ ,  $\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$ .

**Определение 2.26.**  $\Omega$  — любая область,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфная,  $f \neq 0$ , тогда логарифмическая производная то  $(\log f(z))' := \frac{f'(z)}{f(z)}$ .

**Утверждение 2.18.**  $(\log f)'$  — это мероморфная функция в  $\Omega$ , все полюсы  $(\log f)'$  простые и соответствуют нулям  $f$ . Если  $f(z_0) = 0$ , то  $\text{Res}_{z_0}(\log f)' = \text{ord}_{z_0} f$  — порядок нуля.

**Доказательство.** Пусть  $f(z_0) \neq 0 \implies \frac{f'(z)}{f(z)}$  — голоморфная в окрестности  $z_0 \implies (\log f)'$  голоморфна в  $\Omega \setminus \{z: f(z) = 0\}$ .

Пусть  $f(z_0) = 0$ , напомним  $f(z) = (z - z_0)^d g(z)$ , где  $d = \text{ord}_{z_0} f$ ,  $g(z_0) \neq 0$ . □

**Теорема 2.19** (Принцип аргумента).  $\Omega$  — односвязное, ограниченное,  $\partial\Omega$  — кусочно гладкая,  $f$  — голоморфная в окрестности  $\text{Cl } \Omega$  (то есть  $\exists \Omega' \supset \text{Cl } \Omega$  и  $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная) и  $f(z) \neq 0 \forall z \in \partial\Omega$ . Тогда

$$\int_{\partial\Omega} (\log f(z))' dz = 2\pi i \sum_{z \in \Omega, f(z)=0} \text{ord}_z f = 2\pi i \# \text{ нулей в } f \text{ с учетом кратности.}$$

**Доказательство.**  $\int_{\partial\Omega} (\log f(z))' dz = 2\pi i \sum_{z-\text{ полюс}} \text{Res}_z(\log f)' = 2\pi i \sum_{zf(z)=0} \text{ord}_z f$   $\square$

Пусть  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  — параметризация  $\partial\Omega$ , пусть также  $f(\Omega') = \text{Cl}$ . Тогда  $\text{Log } f(z)$  корректно определена,  $(\log f(z))' = \frac{d}{dz} \text{Log } f(z)$ .

$$\int_{\partial\Omega} (\log f(z))' dz = \int_{\partial\Omega} \frac{d}{dz} \text{Log } f(z) dz = \int_a^b \frac{d}{dz} \text{Log } f(z(t)) z'(t) dt = \int_c^b \frac{d}{dt} (\text{Log } f(z(t))) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (\log |f(z(t))| + i \log |f(z(t))| - \log |f(z(a))| + i \arg f(z(b)) - i \arg f(z(a))) dt$$

**Пример.**  $\Omega = \mathbb{D}$ ,  $f(z) = z^n$ ,  $z: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z(t) = e^{it}$ . Тогда  $f(z(t)) = e^{int}$ ,  $\theta(t) = nt$

$$\int_{\partial\Omega} (\log f(z))' dz = i(\theta(2\pi) - \theta(0)) = n2\pi i.$$

**Теорема 2.20** (Теорема Руше). Пусть  $\Omega$  — односвязная область, ограниченная  $\partial\Omega$  — кусочно гладкий путь.  $f, g$  — голоморфная в окрестности  $\text{Cl}\Omega$ ,  $\forall z \in \partial\Omega \quad |f(z)| > |g(z)|$ .

Тогда  $\#$  нулей  $f$  в  $\Omega$  с учетом кратности равно количеству нулей  $f+g$  в  $\Omega$  с учетом кратности.

**Доказательство.**  $t \in [0, 1]$ . Рассмотрим  $\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} (\log(f+tg)(z))' dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)} dz$ .

1.  $\Psi(z, t): \partial\Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ .  $\Psi(z, t) = \frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}$  непрерывна  $\implies \Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \Psi(z, t) dz$  непрерывна.

2.  $\forall t \in [0, 1], \Phi(t) \in \mathbb{Z}$  по теореме выше.

Из 1 и 2 следует, что  $\Phi(t) \equiv n, n \in \mathbb{Z}$ . Но  $\Phi(0) =$  количество нулей  $f$  в  $\Omega$  с учетом кратности, а  $\Phi(1) =$  количество нулей  $f+g$  в  $\Omega$  с учетом кратности.  $\square$

**Теорема 2.21.**  $\Omega$  — область,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная непостоянная, тогда  $\forall z_0 \in \Omega, \delta > 0: \overline{B}(z_0, r) \subset \Omega \exists \delta > 0: f(B(z_0, r)) \supset B(f(z_0), \delta)$ .

**Доказательство.** Немного уменьшив  $r$  мы можем добиться того, чтобы  $|f(z) - f(z_0)| \neq 0 \quad \forall z: |z - z_0| = r > 0$ .

Возьмем  $\delta = \min_{z \in \overline{B}(z_0, r)} |f(z) - f(z_0)| > 0$ . Пусть  $\lambda \in B(f(z_0), \delta)$ , тогда по теореме Руше.  $1 \leq$  количество нулей  $f(z) - f(z_0) - \lambda$  в  $B(z_0, r)$  с учетом кратности и это равно числу нулей  $f(z) - f(z_0) - \lambda$  в том же шаре.

Тогда  $\exists z \in B(z_0, r): f(z) = f(z_0) + \lambda$ , такая что  $\lambda \in B(0, \delta)$  произв., имеем  $f(B(z_0, r)) \supset B(f(z_0), \delta)$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $\Omega$  — ограниченная область,  $f: \text{Cl}\Omega \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна,  $f$  голоморфная в  $\Omega$ . Тогда

- $\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \max_{z \in \text{Cl}\Omega} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$
- Если  $\exists z_0 \in \Omega: |f(z_0)| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)| \implies f \equiv \text{const}$ .

**Доказательство.** Пусть  $f$  не постоянна,  $z_0 \in \Omega, r > 0: \overline{B}(z_0, r) \subset \Omega$ . Тогда  $\exists \delta > 0: f(B(z_0, r)) \supset B(f(z_0), \delta) \implies \exists z \in B(z_0, r): |f(z)| > |f(z_0)| \implies |f(z_0)| < \sup_{z \in \Omega} |f(z)| \implies 2$ .

Чтобы увидеть 1, заметим, что  $\exists z_0 \leftarrow \text{Cl}\Omega: |f(z_0)| = \max_{z \in \text{Cl}\Omega} |f(z)|$ . Если  $z_0 \in \Omega$ , то ?! с рассуждениями выше.  $\square$