Математический анализ

Харитонцев-Беглов Сергей

11 ноября 2022 г.

Содержание

1. Тут пропущена лекция + название главы

Напомним определения с прошлого раза:

***Определение* 1.1.** Назовем $U \subset \mathbb{R}^n$ хорошим, если

- U — ограниченное,
- a_k, b_k — непрерывны на $U^{(k-1)}\,\forall k$.
- $\forall k \in 1:n\colon z \in U^{(k)}\ \{z\} \times (a_{k+1}(z), b_{k+1}(z)) \subset U^{(k+1)}$.

Данное определение придуманное, потому что мы не углубляемся в теорию, потому что нам нужно заспидранить интегралы для теорвера, а для того, чтобы понять подробно, нужно в 4 модуле пойти на курс JUB.

Для понимания можно попробовать почитать учебник Руденко.

Замечание. Мы не требуем, чтобы U было замкнутым или открытым.

Замечание. Определение хорошести зависит от нумерации.

Пример: повернутый на $90°$ логотим Котлина.

***Определение* 1.2.** Пусть $f\colon U \to \mathbb{R}$ — ограниченена, непрерывно, U — хорошее.

Тогда: $\int_U f(x)\mathrm{d}x := \int_{a_1}^{b_1} \left(\int\limits_{a^2}^{b_2} \dots \left(\int\limits_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x_n\right)\dots\right)\mathrm{d}x_1$

Упражнение. Абоба.

***Определение* 1.3.** $\operatorname{supp} f = \varphi\{x : f(x) \neq 0\}$.

$C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \begin{array}{l} f \text{ — непрерывна} \\ \operatorname{supp} f \text{ — какое-то множество я хз} \end{array} \right\}$. Тогда $f \in C_0(\mathbb{R}^n) \implies \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_I f(x)\mathrm{d}x$, где $I \supset \operatorname{supp} f$, I — ячейка.

Теорема 1.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — хорошее относительно двух нумераций координат.

Тогда $\int_U f(x)\mathrm{d}x$ одинаковый в обоих нумерациях.

Замечание. $f \in C_0(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp} f \subset U \implies \int_U f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x$.

Идея доказательства теоремы. Найти последовательность $f_1, f_2, \ldots \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} f_i \subset U$ и $\int_U f_i(x)\mathrm{d}x \to \int_U f(x)\mathrm{d}x$ в первой нумерации и $\int_U f_i(x)\mathrm{d}x \to \int_U f(x)\mathrm{d}x$ во второй нумерации. □

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано, $U_\varepsilon := \{x \in U \mid \forall k \in 1:n, a_k(x) + \varepsilon \leqslant x_k \leqslant b_k(x) - \varepsilon\}$.

Утверждение 1.2. $\forall \varepsilon > 0\colon U_\varepsilon$ — замкнуто, $U_\varepsilon \subset \operatorname{Int} U$.

Доказательство. $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon U_\varepsilon + \overline{B}(0, \delta(\varepsilon)) = \bigcup\limits_{x \in U_\varepsilon} \overline{B}(x, \delta(\varepsilon)) \subset U$.

Заметим, что для $n = 1$ можно взять $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$.

Для больших n воспользуемся индукционным переходом. Утверждение выполнено для $U_\varepsilon^{(n-1)}$: $\exists \delta_{n-1}(\varepsilon) > 0\ \bigcup\limits_{z \in U_\varepsilon^{(n-1)}} \overline{B}_{n-1}(z, \delta_{n-1}(\varepsilon)) \subset U^{(n-1)}$.

Тогда $\exists \delta_0 \in (0, \frac{1}{2}\delta_{n-1}(\varepsilon)) \colon \forall z, w \in U_\varepsilon^{(n-1)} + \overline{B}_{n-1}(0, \frac{1}{2}\delta_{n-1}(\varepsilon)), |z-w| \leqslant \delta_0 \implies |a_n(z) - a_n(w)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и $|b_n(z) - b_n(w)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда пусть $\delta = \delta(\varepsilon) \coloneqq \min(\frac{\varepsilon}{2}, \delta_0)$, $x \in U_\varepsilon, x \in \mathbb{R}^n \colon |x-y| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Надо понять, что $y \in U$.

Заметим, что $x = (z, x_n), y = (w, y_n); z, w \in \mathbb{R}^{n-1}$. Тогда выполняется два свойства:

1. $|z-w| \leqslant \delta_0 \implies w \in U_\varepsilon^{(n-1)} + \overline{B}_{n-1}(0, \frac{\delta_{n-1}(\varepsilon)}{2}$,
2. $y_n \leqslant x_n + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant b_n(z) - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = b_n(z) - \frac{\varepsilon}{2} < b_n(w)$. И $y_n \geqslant x_n - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant a_n(z) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = a_n(z) + \frac{\varepsilon}{2} > a_n(w) \implies y \in (a_n(w), b_n(w)) \implies y \in U$, потому что это определение хорошего множества.

U_ε замкнуто, так как задается нестрогими неравенствами для непрерывных функций, заданных на замкнутом множестве φU_ε ($\varphi U_\varepsilon \subset U$, так как $\varphi U_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{x \in U_\varepsilon} \overline{B}_n(x, \delta(\varepsilon))$). □

Утверждение 1.3. $f : U \to \mathbb{R}$ — непрерывна, ограничена, U — хорошее. $\exists C > 0$ зависящая только от U (но не от f), такое что

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \left| \int_U f(x) \mathrm{d}x - \int_{U_\varepsilon} f(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant \sup_U |f| \cdot C\varepsilon.$$

Доказательство. Упражнение. При $n = 1$ что-то. □

Следствие. U — хорошее, $f_1, \ldots, f_n, f \colon U \to \mathbb{R}$ непрерывно, $\forall i \colon \sup\limits_U |f_i| \leqslant M, \sup\limits_U |f| \leqslant M, \forall K \subset U$ — компакт(?).

Тогда $\int_U f_i(x) \mathrm{d}x \xrightarrow{\varepsilon \to +\infty} \int_U f(x) \mathrm{d}x$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, U_ε — компакт. $\implies \exists N > 0 \colon \forall i \geqslant N \ \sup\limits_{U_\varepsilon} |f_i - f| \leqslant \varepsilon$.

не успель.

□

Лемма (Главная техническая лемма)**.** U — хорошее, $f \colon U \to \mathbb{R}$ — ограничена, непрерывна.

Тогда $\exists f_1, \ldots \colon U \to \mathbb{R}$:

1. $\sup\limits_U |f_i| \leqslant \sup\limits_U |f|$,
2. $\forall K \subset U$ — компакт $\lim_{i \to \infty} \sup\limits_K |f_i - f| = 0$,
3. $f_i \in C_0(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp} f_i \subset U$.

Доказательство. $\varepsilon > 0$, определим $\rho_k^\varepsilon \colon U \to \mathbb{R}$, где $1 \in 1 : n$,

$$\rho_k^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x_k \geqslant b_k - \frac{\varepsilon}{2} \wedge x_k \leqslant a_k + \frac{\varepsilon}{2} \\ 1, & x_k \in [a_k + \varepsilon, b_k - \varepsilon] \\ \frac{2}{\varepsilon} \min(x_k - a_k - \frac{\varepsilon}{2}, b_k - x_k - \frac{\varepsilon}{2}) & \text{else} \end{cases}$$

Простые свойства: $\rho^\varepsilon(x) = \prod\limits_{k=1}^n \rho_k^\varepsilon(x), 0 \leqslant \rho^\varepsilon(x) \leqslant 1$.

Положим $f_i(x) \coloneqq f(x) \cdot \rho^{\frac{\varepsilon}{i}}(x)$. Проверить, что такие f_i подходят. □

Вернемся к теореме. Возьмем $f_1, f_2, \ldots$ из леммы. $\int_U f(x) \mathrm{d}x$ одинаков в любой нумерации, так как $f_i \in C_0(\mathbb{R}^n), \int_U f_i(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f_i(x) \mathrm{d}x$. Тогда по следствию выше $\int_U f_i(x) \mathrm{d}x \xrightarrow{\varepsilon \to +\infty} \int_U f(x) \mathrm{d}x$. □

1.1. Формула замены переменной под интегралом

***Определение* 1.4.** $U \subset \mathbb{R}^n$ составное, если $U = \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i$, U_i — хорошее, че-то еще.

Тут было что-то еще.

Замечание. $\Phi\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Φ. У меня появился кофе!!!

АБОБА

Теорема 1.4. $U \subset \mathbb{R}^n$ — составное множество. $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ такая, что

1. $\Phi(U)$ — составное,
2. $\Phi\colon \operatorname{Int} U \to \operatorname{Int} \Phi(U)$ гомеоморфизм,
3. Φ дифференцируема на $\operatorname{Int} U$. И якобиан не равен нулю в любой точке.
4. Якобиан Φ ограничен на $\operatorname{Int} U$.

Тогда $\forall f\colon \Phi(U) \to \mathbb{R}$ ограниченной выполняется:

$$\int_{Phi(U)} f(x)\mathrm{d}x = \int_U f(\Phi(U))|\mathrm{Jac}\ \Phi(x)|\mathrm{d}x..$$

Пример. $n = 1$. Формула замены переменной.

Пример. $\Phi\colon [0; 2\pi) \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}^2$. $Phi(\varphi, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ Якобиан $= \det \begin{pmatrix} -r\sin\varphi & r\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} = r$.

$U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. $Area(U) = \int_U 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{[0,2\pi)\times[0,1]} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \pi$

Теорема 1.5 (Теорема о замене переменной для $C_0(\mathbb{R}^n)$)**.** Пусть есть открытое $U \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ такая, что:

1. Φ — биекция из U в $\Phi(U)$,
2. Φ непрерывно дифференцируема на U, $\mathrm{Jac}\,\Phi(x) \neq 0\ \forall x \in U \implies \forall f \in C_0(\mathbb{R}^n)\operatorname{supp} f \subset \Phi(U)$ выполняется $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(\Phi(x))\left|\mathrm{Jac}\,\Phi(y)\right|\mathrm{d}y$.

Доказательство. Если $n = 1$, то понятно, что теорема верна.

Тогда считаем, что $n \geqslant 2$ и по индукции теорема верна для $k < n$. $\Phi(y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \vdots \\ \varphi_n(y) \end{pmatrix}$.

Простой случай: теорема верна, если Φ — перестановка. См. теорему выше.

Теорема верна, если $\exists j \in 1..n\colon \varphi_j(y) = y_j$. Не умаляя общности считаем $j = 1$ (иначе можно сделать перестановку). Тогда для $\forall y_1$ — fix положения. $\Psi_{y_1}(y_2, \ldots, y_n) = \begin{pmatrix} \varphi_2(y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots\varphi_n(y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$.

$\Phi(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \Psi_{y_1}(y_2, \ldots, y_n) \end{pmatrix}$.

Заметим, что $\operatorname{Jac}\Phi(y_1,\ldots,y_n) = \operatorname{Jac}\Psi_{y_1}(y_2,\ldots,y_n)$. Тогда по индукции $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1,$ $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_1 \int f(x_1, \Psi_{x_1}(x_2,\ldots,x_n) \left|\operatorname{Jac}\Psi_{x_1}(y_2,\ldots,y_n)\right| \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\Phi(y)) \left|\operatorname{Jac}\Phi(y)\right| \mathrm{d}y_2\ldots\mathrm{d}y_n =$ то, что ну

Пусть $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$, пусть теорема верна для Φ_1 и Φ_2, тогда теорема верна для Φ. Это следует из того, что $\operatorname{Jac}\Phi = (\operatorname{Jac}\Phi_1)\circ\Phi_2 \cdot \operatorname{Jac}\Phi_2$.

$\forall x_0 \in U \exists r > 0$, что если $\operatorname{supp} f \subset \Phi(B(x_0, r))$, то теорема верна. Наивно: представить при помощи композиции:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \xmapsto{\Phi_1} \begin{pmatrix} \varphi_1(y_1,\ldots,y_n) \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \xmapsto{\Phi_0\Phi_1^{-1}} \begin{pmatrix} \varphi_1(y_1,\ldots,y_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(y_1,\ldots,y_n) \end{pmatrix}.$$

Но! Φ_1^{-1} может не существовать.

Мы знаем, что $\nabla\varphi_1 \neq$. $\exists j \in \{1,\ldots,n\}\colon \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_j}(x_1^0,\ldots,x_n^0) \neq 0$.

Утверждение: $\exists r > 0\colon \Psi, \Phi_1, \Phi_0\Psi^{-1}\Phi_1$ определены при $y \in B(y^0, r)$. И правда:

- Ψ определена $\forall y$, также Ψ^{-1},
- Φ_1 определена $y \in U$,
- $\Phi_1^{-1}\colon \operatorname{Jac}\Phi_1(\Psi(y^0)) = \frac{\partial\psi_1}{\partial y_j}$хз $\implies$ Φ_1^{-1} определена в $\Phi_1(\Psi(B(y^0, r)))$ для $r > 0$ по теорема об обратной функции.

Теперь можно все скомпилировать: $\forall y \in U \exists r_y > 0$. Теорема верна, если $\operatorname{supp} f \subset \Phi(B(y, 2r_y))$.

Зафиксируем $f \subset C_0(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp} f \subset \Phi(U)$. Так как это компакт, то $\exists y_1,\ldots,y_k\colon \bigcup_{i=1}^k \Phi(B(y_i, r_{y_i})) \supset \operatorname{supp} f$. $\forall i$ положим $\beta_i(y) = \begin{cases} \min(1, \frac{2r_{y_i} - |y-y_i|}{r_{y_i}}) & |y - y_i| \leqslant 2r_{y_i} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ $\alpha_1(x) = \beta_1(\Phi^{-1}(x))$, $\alpha_2(x) = (1 - \beta_1(\Phi^{-1}(x))) \cdot \beta_2(\Psi^{-1}(x))$, ..., $\alpha_k(x) = (1 - \beta_1(\Phi^{-1}(x)) \cdot \ldots \cdot (1 - \beta_{k-1}(\Phi^{-1}(x))$.

Тогда $x \in \operatorname{supp} f \implies \exists j : x \in \Phi(B(y_i, r_{y_i})) \implies (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)(x) = 1 \implies \sum \alpha_i \cdot f \equiv f$, по определению $\operatorname{supp}(\alpha_j \cdot f) \subset \Phi(B(y_j, 2r_{y_j}))$. Тогда $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\alpha_j(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(\Phi(y))\alpha_j(\Phi(y)) \left|\operatorname{Jac}\Phi(y)\right| \mathrm{d}x$ $\square$

2. Теория функции одной комплексной переменной

2.1. Напоминание

Говорим про комплексные числа: $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow z = x + iy.i \in \mathbb{C}, i^2 = -1, i \rightsquigarrow (0,1), z = x + iy, w = a + ib, z \cdot w = xa - yb + i(xb + ya)$.

Свойства.

1. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \overline{z} := x - iy, z \cdot \overline{z} = |z|^2$.
2. $\operatorname{Re} z = x$ — вещественная часть,
3. $\operatorname{Im} z = y$ — мнимая часть,
4. $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right), \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}\left(z - \overline{z}\right)$.

***Определение* 2.1.** Полярная запись комлексного числа $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = e \cdot e^{i\varphi}$. Умножение: $r_1 r_2 \left(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)\right)$

2.2. Аналитические функции

***Определение* 2.2.** Степенной ряд — это ряд вида $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n, a_n \in \mathbb{C}$.

Радиус сходимости $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ — это $R \in [0, +\infty]\colon R^{-1} = \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

$R = \sup\left\{r\colon |a_n r^n|\right\}$.

Утверждение 2.1.

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ — сходится абсолютно при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.
2. $r < R$, $\sup\limits_{|z|\leqslant r}\left|\sum\limits_{n\geqslant 0} z_n z^n\right| < \infty$.

Доказательство. Смотри конспект прошлого года. $\square$

Утверждение 2.2.

1. Пусть R — радиус сходимости $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$, тогда R — радиус сходимости и для ряда $\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.
2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n \cdot \sum\limits_{m\geqslant 0} b_n z^n = \sum\limits_{k\geqslant 0}\sum\limits_{n+m=k} a_n b_m \cdot z^k$. Верно $\forall z\colon |z| < R$.

Пример. $\exp(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}, R = +\infty$.

Пример. $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n\geqslant 0} z^n, R = 1$.

***Определение* 2.3.** $\Omega \subset \mathbb{C}$ — открытое, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ аналитична, если $\forall z_0 \in \Omega \exists r > 0\colon \forall z, |z - z_0| < r \implies f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n (z - z_0)^n$.

Утверждение 2.3. f, g — аналитические функции на Ω, то $f + g$ — аналитическая.

Доказательство. Очевидно. □

Пример. 1. $f \in \mathbb{C}[z] \implies f$ — аналитическая на $\Omega = \mathbb{C}$.

2. Рациональные функции аналитичны там, где они определены.

Замечание. $\mathcal{A}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f$ — аналитическая$\}$, тогда $\mathcal{A}$ — кольцо.

2.3. Голоморфные функции

***Определение* 2.4.** $\Omega \in \mathbb{C}$ — область, если Ω — открытое, непустое, связное.

***Определение* 2.5.** $f : \Omega \in \mathbb{C}$, тогда f имеет в $z_0 \in \Omega \iff \exists \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} =: f'(z_0) \iff \exists \alpha \in \mathbb{C} \colon f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha \cdot h + o(|h|), h \to 0$.

***Определение* 2.6.** $f : \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная, если $\exists f'(z)\ \forall z \in \Omega$.

Свойства. 1. f, g — голомофрные функции на Ω, то $f + g, f \cdot g$ — голомофрные, $\frac{f}{g}$ — голоморфна там, где $g \neq 0$.

Доказательство. $f(z+h)\cdot g(z+h) = (f(z) + f'(z)h + o(|h|))\,(g(z) + g'(z)h + o(|h|))$ ааааааааааааааааааа □

Пример. 1. $f \in \mathbb{C}[z] \implies f$ — голоморфна. Достаточно проверить для $f = 1, f = z$. $f = 1 \implies f' = 0$, $f = z \implies f' = 1$.

2. $f(z) = \overline{z}$, тогда f — не голоморфна. Посмотрим в нуле: $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$. $h = \varepsilon \in \mathbb{R}$. Тогда предел 1, при $h = i\varepsilon$ получаем предел -1.

3. $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$, R — радиус сходимости, $R > 0$, тогда f голоморфна в $\Omega = D_R = \{z : |z| < R\}$, причем $f'(z) = \sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.

Доказательство. 1. TODO.
$\left|\frac{(z+h)^n - z^n}{n} - nz^{n-1}\right| \leqslant n(n-1)(|z| + |h|)^{n-2} \cdot |h|, n \geqslant 2$.
$\left|\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n \cdot z^{n-1}\right| = |(z+h)^{n-1} + \ldots + z^{n-1} - nz^{n-1}| = |(z+h)^{n-1} - z^{n-1} + (z+h)^{n-2}z - z^{n-1} + \ldots$
$\sum\limits_{k=0}^{n-1} |z|^k \cdot |(z+h)^{n-1-k} - z^{n-1-k}| \leqslant n(n-1)(|z| + |h|)^{n-2}|h|$.
Покажем, что $f'(z) = \sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$:

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n\geqslant 1} n a_n \cdot a^{n-1}\right| = \left|\sum_{n\geqslant 2} a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{n\geqslant 2} |a_n| n(n-1)(|z| + |h|)^{n-2}\right) |h| \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

□

Следствие. Аналитические функции — голоморфны. Обратное утверждение тоже верно.

2.4. Уравнение Коши-Римана

Рассмотрим $f(z) = u(z) + i \cdot v(z), u, v \in \mathbb{R}, u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$. Можно посмотреть на f как на $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$

Утверждение 2.4. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная, тогда f дифференцируема как функция из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, и матрица Якоби f имеет вид $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$

Доказательство. $z = x+iy, h = h_1+ih_2$. $f(z+h) = f(x+h, i(y+h_2)) = f(z)+f'(z)\cdot(h_1+ih_2)+o(|h|)$, $h + ih_2 \mapsto f'(z) \cdot (h_1 + ih_2)$ — линейное отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. □

$f : \Omega \in \mathbb{C}$ — голоморфная, $z \in \Omega, \varepsilon \in \mathbb{R}$. $f'(z) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{f(z+i\varepsilon)-f(z)}{iz}$. Тогда, если $z = x + iy, \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon+iy)-f(x+iy)}{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$. По y получается предел $-i\frac{\partial f}{\partial y}(z)$.

То есть $\frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z) \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \ldots \end{cases}$

***Определение* 2.7.** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Что-то.

Лемма. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}, \Omega$ — область. f голоморфна $\iff$ f дифференцируема и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Доказательство.

- $\implies$ проверили выше.
- $\Leftarrow$ $z = x + iy, h = h_1 + ih_2, f = u + iv$.

$$f(z+h) = f(x+h_1+i(y+h_2)) = f(x+iy) + \frac{\partial f}{\partial x}(z)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(z)\cdot h_2 + o(|h|) = f(z) + (u_x + iv_x)h_1 + ($$

□

2.5. Первообразная голоморфной функции

***Определение* 2.8.** Ω — область, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, тогда $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — первообразная f, если $F'(z) = f(z)\ \forall z \in \Omega$.

В частности, F — голоморфна.

2.5.1. Интеграл вдоль пути

***Определение* 2.9.** Путь — непрерывное отображение $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$.

***Определение* 2.10.** Путь гладкий, если $\forall t \in (a, b)\, \exists z'(t)$ непрерывно ограничена

Кусочно гладкий, если $\exists t_1, \ldots, t_n \in (a, b)\colon z'(t)$, если $t \neq t_i$.

***Определение* 2.11.** Пути $z_1 : [a, b] \to \mathbb{C}, z_2 : [c, d] \to C$ эквиваленты, если они отличаются заменой параметризации, то есть $\exists\varphi\colon [a, b] \to [c, d]$ биекция.

***Определение* 2.12.** Контур — класс эквивалентности путей.

***Определение* 2.13.** Пусть γ — контур, заданный путем $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, тогда контур C обратной ориентации — это контур, заданный путем $\widetilde{z}\colon [-b, -a] \to CC, \widetilde{z}(t) = z(-t)$.

***Определение* 2.14.** Длина пути, это $\int\limits_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 \mathrm{d}t}$

***Определение* 2.15.** $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — непрерывна, тогда интеграл вдоль пути γ, заданный $z\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, это $\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t$.

Утверждение 2.5. $\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ не зависит от выбора пути γ.

Доказательство. $\varphi\colon [c,d] \to [a,b], z_1\colon [c,d] \to \mathbb{C}, z_1(t) = z(\varphi(t)), z_1'(t) = z'(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$$\int\limits_c^d f(z_1(t))z_1'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_c^d f(z(\varphi(t))z'(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \overset{s=\varphi(t)}{=} \int\limits_a^b f(z(s))z'(s)\mathrm{d}s. \qquad \square$$

Следствие. γ — контур, то $\int_\gamma (z)\mathrm{d}z$ можно определить как интеграл по пути, параметризующим этот контур.

Пример. $f(z) = z^n$. Путь $z\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}, z(t) = e^{it}$. Соответствует контуру γ — окружность.

$$\int\limits_\gamma z^n \mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} e^{int} \cdot ie^{it}\mathrm{d}t = i\int\limits_0^{2\pi} e^{i(nt)^t}\mathrm{d}t = i\int\limits_0^{2\pi} \left(\cos((n+1)t) + i\sin\left((n+1)t\right)\right)\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi i, n = -1 \\ 0, n \neq -1 \end{cases}$$

Утверждение 2.6. γ — контур, $\widetilde{\gamma}$ — контур с обратной ориентацией, тогда $\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = -\int\limits_{\widetilde{\gamma}} f(z)\mathrm{d}z$

Доказательство. $z\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ — это параметризация γ, $\widetilde{z}\colon [-b,-a] \to \mathbb{C}$ параметризация $\widetilde{\gamma}$.

$$\int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t \overset{s=-t}{=} f(z(-s))z'(-s)(-\mathrm{d}s) = -\int_a^b f(\widetilde{z}(s))\widetilde{z}(s)\mathrm{d}s = \dots.$$

$\square$

Утверждение 2.7. γ — контур, тогда $\left|\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant length(\gamma)\max\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$.

Доказательство. Расписать интеграл, ограничить $f(z)$ максимумом. $\square$

Утверждение 2.8. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, пусть $\exists F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — первообразная f. Тогда если $z\colon [a,b] \to \Omega$ — путь, задающий контур γ, то

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Доказательство. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(z(t)) = F'(z(t)) \cdot z'(t)$, и правда: $\varepsilon > 0, F(z(t+\varepsilon)) = F(z(t) + z'(t)\varepsilon + o(\varepsilon)) = F(z(t)) + F'(z(t))(z(t)\varepsilon + o(\varepsilon)) + o(\varepsilon) = F(z(t))F'(z(t)) \cdot z'(t)\varepsilon + o(\varepsilon)$.

$$\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b F'(z(t))\cdot z'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(z(t))\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Re}F(z(t))\mathrm{d}t + i\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Im}F(z(t))\mathrm{d}t =$$
$F(z(b)) - F(z(a))$. $\square$

Теорема 2.9. Ω — область, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. $T \subset \Omega$ — контур, совпадающий с границей треугольника, лежащего в Γ. Тогда $\int_T f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Доказательство. Картинка! $\int\limits_T f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{T_1^{(1)}} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{T_2^{(1)}} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{T_3^{(1)}}$.

Картинка про аддитивность.

Тогда по индукции определим $T_i^{(k)}$, для каждого $k \geqslant 1$ $\left|\int\limits_T f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\sum\limits_{j=1}^{4^n} \pm \int\limits_{T_j^{(k)}} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant 4^k \cdot \max_j \left|\int\limits_{T_j^{(k)}} f(z)\mathrm{d}z\right|$

$f(z) = f(z_0)+f'(z_0)\cdot(z-z_0)+o(z-z_0)$. Тогда $\int\limits_{T_j^{(k)}} f(z)\mathrm{d}z = \underbrace{\int\limits_{T_j^{(k)}} f(z_0)\mathrm{d}z}_{=0} + \underbrace{\int\limits_{T_j^{(k)}} f'(z_0)(z-z_0)\mathrm{d}z}_{=0} + \int\limits_{T_j^{(k)}} o(z-z_0)\mathrm{d}z \implies \left|\int\limits_{T_j^{(k)}} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \max_{z\in T_j(k)} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| \cdot Perim(T_j^{(k)}) \leqslant o(2^{-k} diam(T)) \cdot 2^{-k} Perimtetr(T) = o(4^{-k})$.

А значит, интеграл по контуру равен 0. $\square$

***Определение* 2.16.** Ω называется односвязной, если $\forall\gamma$ — замкнутый (такого, что $\gamma \subset \Omega$), ограниченная компонента связности $\mathbb{C} \setminus \gamma$ тоже содержится в Γ.

Теорема 2.10. Ω — односвязная область, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, тогда $\exists F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — первообразная f, $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$.

Доказательство. $w_0 \in \Omega$ — фиксирована. $\forall w$ построим путь γ_w из w_0 в w, который движется либо вертикально, либо горизонтально, а также не самопересекается.

$F(w) \coloneqq \int\limits_{\gamma_w} f(z)\mathrm{d}z$. А дальше в следующей серии! $\square$

Следствие. Если γ — замкнутый контур, f — голоморфная функция в односвязной области Ω, $\gamma \subset \Omega \implies \int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

***Определение* 2.17.** Петля — непрерывный образ окружности, то есть отображение вида $z : [a,b] \to \mathbb{C}$ $z(a) = z(b)$.

***Определение* 2.18.** Петля простая, если она не самопересекается, то есть $\forall x \in [a,b], y \in (x,y)$: $z(x) \neq z(y)$.

Теорема 2.11 (Теорема Жордана)**.** Плоскость разбивается простой петлей ($\gamma \in \mathbb{C}$) на ограниченное связное множество Ω_1 и неограниченное связное множество Ω_2.

***Определение* 2.19.** Ω_1 — это жорданова область, $\partial\Omega_1 \coloneqq \gamma$, ориентированная против часовой стрелки.

Теорема 2.12 (Гурса)**.** T — треугольник, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная, $T \subset \Omega$. Тогда $\int\limits_{\partial T} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

***Определение* 2.20.** γ — координатный путь (петля), если γ составлена из конечно числа вертикальных и горизонтальных отрезков.

Лемма. Пусть Ω — односвязная область, $\gamma \subset \Omega$ — координатная петля, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная. Тогда:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Доказательство. Упражнение. Можно разбить наш контур на прямоугольники. Каждый прямоугольник — на треугольники (построить триангуляцию). Дальше теорема Гурса. □

Теорема 2.13. Ω — односвязная область, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная, то $\exists$ первообразная f, то есть $F\colon \Omega \to \mathbb{C}\colon F'f = f$.

Доказательство. Возьмем $w_0 \in \Omega$. $\forall w \exists$ координатный путь γ_w, соединяющий w_0 и w, $\gamma_w \subset \Omega$. Тогда возьмем $F(w) \coloneqq \int_{\gamma_w} f(z)\mathrm{d}z$.

1. $F(w)$ не зависит от выбора γ_w. Если γ_w^1, γ_w^2 — два координатных пути, соединяющих w_0 и w, то $\gamma = \gamma_w^1 \cup \gamma_w^2$ — координатная петля $\implies$ разность интегралов равна нулю.
2. Проверим, что $F'(w) = f(w)$. $F'(w) = \lim_{h\to 0} \frac{F(w+h)-F(w)}{h}$. $F(w+h) = \int\limits_{\gamma_{w+h}} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_w} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_h} f(z)\mathrm{d}z = F(w) + \int\limits_{\gamma_h} f(z)\mathrm{d}z$.

   $h^{-1}\left(F(w+h) - F(w)\right) = h^{-1} \int\limits_{\gamma_h} f(z)\mathrm{d}z = h^{-1} \int\limits_0^1 f(w+th)h\mathrm{d}t = \int_0^1 f(w+th)\mathrm{d}t \xrightarrow{h\to 0} f(w)$.

□

2.5.2. Формула Коши

Теорема 2.14. $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Пусть $w_0 \in \Omega, r > 0 : \overline{B}(w_o, r) \subset \Omega$. Тогда:

$$\forall z \in B(w_0, r) = f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w.$$

Окружность против часовой стрелки ориентирована!

Доказательство. Картинка! $\int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = 0$, так как γ замкнутый, а $\frac{f(w)}{w-z}$ — это голоморфная функция по w.
$\int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \int\limits_{l} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w - \int\limits_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w - \int\limits_{l} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w + \int\limits_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w$. Что понятно равно $\int\limits_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w-z} = \int\limits_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \int\limits_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(z)+f(w)-f(z)}{w-z}\mathrm{d}w = f(z) \int\limits_{|w-z|=\varepsilon} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} + \int\limits_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)-f(z)}{|w-z|=\varepsilon}\mathrm{d}w$. Первое слагаемое $f(z)\cdot 2\pi i$, а второе можно оценить $|\circ| \leqslant \max_{|w-z|=\varepsilon} \left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\right| 2\pi\varepsilon \leqslant (|f'(z)|+1)2\pi\varepsilon$ □

Следствие. 1. Голоморфные функции — аналитичны! Пусть $f! \, \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная, $\overline{B}(w_0, r) \subset \Omega, z \in B(w_0, r)$. Тогда $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w-w_0-(z-w_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-w_0|=r} f(w) \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(z-w_0)^n}{(w-w_0)^{n+1}}\mathrm{d}w = \sum\limits_{n\geqslant 0} (z-w_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)\mathrm{d}w}{(w-w_0)^{n+1}}$.

То есть $\forall z \in B(w_0, r)$ $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n (z-w_0)^n$.

Теорема Луивилля: $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голоморфная и ограниченная. Тогда $f \equiv const$.

Доказательство. Заметим, что $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\mathrm{d}z$. Тогда если $|f(w)| \leqslant C \forall w$. Тогда $|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{C}{R^2} 2\pi R \ldots$. □

Основная теорема алгебры: $P \in \mathbb{C}[z], \deg P = n$, тогда P имеет n корней в $\mathbb{C}$.

Доказательство. Докажем, что при $n \geqslant 1$ есть хотя бы один корень. Пусть $P(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z^i$. Тогда если взять $|f(z)| = \frac{1}{z^n(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \ldots + a_0 \frac{1}{z^n})}$ □

Теорема единственности. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная, Ω — область, $f \not\equiv 0$. Тогда $\{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ дискретно (то есть не имеет точек сгущения в Ω.

Доказательство. Пусть $z_0, z_1, z_2, \ldots \in \Omega$, такое что $f(z_k) = 0\ \forall k \geqslant 0$, $z_k \to z_0, z_k \neq z_0, \forall k \geqslant 1$.

Пусть $r > 0\colon \overline{B}(z_0, r) \subset \Omega, f(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n, \exists d\colon a_d \neq 0$.

$f(z) = (z - z_0)^d \sum\limits_{n \geqslant d} a_n (z - z_0)^{n-d} = (z - z_0)^d g(z)$. g — голоморфная в $B(z_0, r), g(z_0) \neq 0 \implies \exists N \forall n \geqslant N\ g(z_n) \neq 0 \implies f(z_n) \neq 0$?! □

***Определение* 2.21.** Ω — односвязное область, $\partial\Omega$ — кусочно гладкий путь. $f: \partial\Omega \to \mathbb{C}$ непрерывна, голоморфна в Ω.

Тогда $\int\limits_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Пояснение: $r_n\colon [0,1] \to \Omega$ — кусочно гладкий замкнутый путь γ_n. $r_n \to r \implies 0 = \int\limits_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z \to \int\limits_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z = 0$

***Определение* 2.22.** Ω — односвязная область, $\partial\Omega$ — кусочно гладкий путь, $z_1, \ldots, z_n \in \Omega$, $\varepsilon > 0\colon \overline{B}(z_k, \varepsilon) \subset \Omega\ \forall k = 1..n$, $C_\varepsilon(z_k) = \{z\colon |z - z_k| = \varepsilon\} \implies \exists$ кусочно гладкий путь $r_k\colon [0,1] \to \mathbb{C}\colon r_k(0) \in C_\varepsilon(z_k), r_k((0,1)) \subset \Omega \setminus \bigcup \overline{B}(z_k, \varepsilon), r_k([0,1]) \cap r_j([0,1]) = \varnothing\ k \neq j$

***Определение* 2.23.** Ω — область, $z_0 \in \Omega$, $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ голоморфная. Тогда z_0 — особенность f. Различают 3 типа особенностей:

- Устранимая $\iff$ f ограничена в $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$.
- Полюс $\iff$ $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ определена и голомофрна в $B(z_0, \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$.
- Существенная $\iff$ не 1 или 2.

Теорема 2.15 (Об устранимой особенности)**.** Пусть Ω — область, $z_0 \in \Omega$, $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ — голоморфна и z_0 — устранимая особенность f. Тогда $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ и f является голоморфной в Ω.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0\colon \overline{B}(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$. Рассмотрим $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z}$.

Докажем, что $F(z) = f(z)\ \forall z \in B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$

γ — контур $\partial\left(B(z_0, \varepsilon) \setminus \left(\overline{B}(z_0, \delta) \cup \overline{B}(z, \delta) \cup l_1 \cup l_2\right)\right)$. Тогда $\int\limits_\gamma \frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = 0 = \int\limits_{|\xi - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z} - \int\limits_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z}$.

Тогда $\int\limits_{|\xi - z| = \delta} \frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = 2\pi i f(z)$. Тогда оценим $\left| \int\limits_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f(\xi)\mathrm{d}x}{\xi - z} \right| \leqslant 2\pi\delta \sup |f(\xi)|$. □

Лемма. $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ — голоморфная, z_0 — полюс. Тогда $\exists \varepsilon > 0$, $\varphi : B(z_0, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ — голоморфная, $\varphi(z_0) \neq 0$, $f(z) = (z - z_0)^{-d} \cdot \varphi(z), d \in \mathbb{N}$.

Доказательство. $h(z) = \frac{1}{f(z)}, h(z_0) = 0 \implies h(z) = (z - z_0)^d \cdot g(z), g(z_0) \neq 0$. $f(z) = \frac{1}{h(z)} = (z - z_0)^{-d} \frac{1}{g(z)} = \varphi(z)$. □

Следствие. f — как в лемме, то $\exists \varepsilon > 0 \colon \forall z \in B(z_0, \varepsilon)$.

$f(z) = \sum\limits_{n \geqslant -d} a_n(z - z_0)^n = a_{-d}(z - z_0)^{-d} + a_{-d+1}(z - z_0)^{-d+1} + \ldots + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \psi(z)$, где $\psi(z)$ — голоморфная.

f называется рядом Лорана. Все, что не ψ — главная часть ряда Лорана.

Доказательство. $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^d} = (z - z_0)^{-d} \sum\limits_{n \geqslant 0} b_n(z - z_0)^n$ □

***Определение* 2.24.** $f \colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ голоморфная, z_0 — полюс, $f(z) = \sum\limits_{n \geqslant -d} a_n(z - z_0)^n$.

Тогда **вычет** f **в** z_0 — a_{-1}, обозначение $\operatorname{Res}_{z_0} f = a_{-1}$.

Лемма. $Omega$ — область, $z_0 \in \Omega$, $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ — голоморфная, z_0 — полюс, тогда, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $\int\limits_{|z - z_0| = \varepsilon} f\,(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} f$.

Доказательство. $f(z) = \sum\limits_{n=-d}^{-1} a_n(z - z_0)^n + \psi(z), z \in B(z_0, \alpha\varepsilon)$.

Тогда $\int\limits_{|z - z_0| = \varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \sum\limits_{n=-d}^{-1} \int\limits_{|z - z_0| = \varepsilon} a_n(z - z_0)^n \mathrm{d}z + \int\limits_{|z - z_0| = \varepsilon} \psi(z)\mathrm{d}z = 2\pi i a_{-1}$ □

Лемма. $f \colon \Omega \setminus \{z_0\}$ — голоморфная, z_0 — полюс порядка k. Тогда:

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^{k-1} \left((z - z_0)^k f(z) \right).$$

Доказательство. $f(z) = \sum\limits_{n \geqslant -k} a_n(z - z_0)^n \implies (z - z_0)^k f(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_{n-k}(z - z_0)^n \implies (z - z_0)^k f(z)$ голоморфна в $B(z_0, \varepsilon)$ в том числе в z_0 и формула выше — формула для коэффициентов ряда Тейлора. □

***Определение* 2.25.** Пусть $\{z_1, \ldots\} \subset \Omega$ — дискретное подмножество Ω. Тогда $f \colon \Omega \setminus \{z_i\} \to \mathbb{C}$ называется мероморфной функцией в Ω, если

- f — голоморфной,
- $\forall k, z_k$ — полюс f.

Лемма. $f, g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная, $g \not\equiv 0$, тогда $\frac{f}{g}$ — мероморфна в Ω.

Доказательство. Пусть $\{z_1, z_2, \ldots\} \subset \Omega$ — нули g, тогда $\{z_1, z_2, \ldots\}$ — дискретное множество $\implies h = \frac{f}{g}$ задана и голомофорна в $\Omega \setminus \{z_1, \ldots\}$.

z_k — ноль порядка d для g, тогда

- если $f(z_k) \neq 0$, то локально $h(z) = \frac{1}{g(z)/f(z)} \implies \frac{1}{h(z)} = \frac{g(z)}{f(z)}$ голоморфна в z_0 и равна нулю.

- $f(z_k)0$, то пусть $\widetilde{d}$ — порядок нуля f в z_k. Тогда локально $g(z) = (z - z_k)^d\varphi(z), f(z) = (z - z_k)^{\widetilde{d}}\widetilde{\varphi}(z)$. $\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_k)^{\widetilde{d}-d} = \frac{\varphi(z)}{\widetilde{\varphi}(z)}$ — голоморфная в z_0.

$\square$

Теорема 2.16. Любая мероморфная функция имеет вид $\frac{f}{g}$, f, g — голоморфная.

Теорема 2.17 (Теорема о вычетах)**.** Пусть Ω — область, $z_1, \ldots, z_n \in \Omega$. $f\colon \operatorname{Cl}\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ — непрерывная, голоморфная в $\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$.

Пусть f имеет полюса в $z_1, \ldots, z_n$ или устранимые особенности. Тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k} f.$$

Замечание. $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ — меромофрна в $B(z_0, \varepsilon) \implies \int\limits_{|\xi - z_0|} \frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = 2\pi i \operatorname{Res}(\ldots) \implies$ формула Коши.

Доказательство. Картинка. $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n \overline{B}(z_k, \varepsilon)l_k\right)$, f — голоморфная в Ω_ε. $0 = \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z - \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|z - z_k| = \varepsilon} f(z)\mathrm{d}z \implies \int\limits_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|z - z_k| = \varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k} f.$ $\square$

2.6. Принцип аргумента

Пусть $z = re^{i\theta}, r, \theta \in \mathbb{R}, r > 0$, тогда $\theta = \arg z$. $\arg z$ определен с точностью до 2π.

Замечание. $z\colon [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{\theta\}$ — непрерывна, то $\exists r, \theta\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и $r(t) > 0 \forall t \in [a, b]$, $z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$.

Пример. Если z параметризует окружность, то можно положить $z(t) = e^{2\pi}, z : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \theta(t) = t$.

$U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — односвязное, $z_0 = r_0e^{i\theta_0} \in U$, тогда $\exists \log : U \to \mathbb{C}$, такой что $\log(z_0) = \log r_0 + i\theta_0, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \log z = \frac{1}{z}$.

***Определение* 2.26.** Ω — любая область, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ голоморфная, $f \not\equiv 0$, тогда логарифмическая производная то $(\log f(z))' \coloneqq \frac{f'(z)}{f(z)}$.

Утверждение 2.18. $(\log f)'$ — это мероморфная функция в Ω, все полюсы $(\log f)'$ простые и соответствуют нулям f. Если $f(z_0) = 0$, то $\operatorname{Res}_{z_0}(\log f)' = \operatorname{ord}_{z_0} f$ — порядок нуля.

Доказательство. Пусть $f(z_0) \neq 0 \implies \frac{f'(z)}{f(z)}$ — голоморфная в окрестности $z_0 \implies (\log f)'$ голоморфна в $\Omega \setminus \{z\colon f(z) = 0\}$.

Пусть $f(z_0) = 0$, напишем $f(z) = (z - z_0)^d g(z)$, где $d = \operatorname{ord}_{z_0} f, g(z_0) \neq 0$. $\square$

Теорема 2.19 (Принцип аргумента)**.** Ω — односвязное, ограниченное, $\partial\Omega$ — кусочно гладкая, f — голоморфная в окрестности $\operatorname{Cl}\Omega$ (то есть $\exists \Omega' \supset \operatorname{Cl}\Omega$и $f : \Omega' \to \mathbb{C}$ — голомофорная) и $f(z) \neq 0 \forall z \in \partial\Omega$. Тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} (\log f(z))' \,\mathrm{d}z] = 2\pi i \sum_{z \in \Omega f(z) = 0} \operatorname{ord}_z f \eqqcolon 2\pi i \# \text{ нулей в } f \text{ с учетом кратности.}$$

Доказательство. $\int\limits_{\partial\Omega} (\log f(z))' \,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum\limits_{z\text{— полюс}} \mathrm{Res}_z (\log f)' = 2\pi i \sum\limits_{z f(z)=0} \mathrm{ord}_z\, f$ □

Пусть $z\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ — параметризация $\partial\Omega$, пусть также $f(\Omega') = \mathrm{Cl}$. Тогда $\mathrm{Log}\, f(z)$ корректно определена, $(\log f(z))' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{Log}\, f(z)$.

$\int\limits_{\partial\Omega} (\log f(z))' \mathrm{d}z = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{Log}\, f(z) \mathrm{d}z = \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{Log}\, f(z(t)) z'(t) \mathrm{d}t = \int\limits_c^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\mathrm{Log}\, f(z(t))\right) \mathrm{d}t = \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\log |f(z(t))| + i$
$\log |f(z(t))| - \log |f(z(a))| + i \arg f(z(b)) - i \arg f(z(a))$

Пример. $\Omega = \mathbb{D}, f(z) = z^n, z\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, z(t) = e^{it}$. Тогда $f(z(t)) = e^{int}, \theta(t) = nt$
$\int\limits_{\partial\Omega} (\log f(z))' \,\mathrm{d}z = i(\theta(2\pi) - \theta(0)) = n2\pi i.$

Теорема 2.20 (Теорема Руше)**.** Пусть Ω — односвязная область, ограниченная $\partial\Omega$ — кусочно гладкий путь.f, g — голоморфная в окрестности $\mathrm{Cl}\,\Omega$, $\forall z \in \partial\Omega \quad |f(z)| > |g(z)|$.

Тогда # нулей f в Ω с учетом кратности равно количеству нулей $f+g$ в Ω с учетом кратности.

Доказательство. $t \in [0,1]$. Рассмотрим $\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega} (\log(f + tg)(z))' \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} \mathrm{d}z$.

1. $\Psi(z,t)\colon \partial\Omega \times [0,1] \to \mathbb{C}$. $\Psi(z,t) = \frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}$ непрерывна $\implies$ $\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega} \Psi(z,t) \mathrm{d}z$ непрерывна.
2. $\forall t \in [0,1], \Phi(t) \in \mathbb{Z}$ по теореме выше.

Из 1 и 2 следует, что $\Phi(t) \equiv n, n \in' Z$. Но $\Phi(0) =$ количество нулей f в Ω с учетом кратности, а $\Phi(1)$ — количество нулей $f+g$ в Ω с учетом кратности. □

Теорема 2.21. Ω — область, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная непостоянная, тогда $\forall z_0 \in \Omega, \delta > 0:$ $\overline{B}(z_0, r) \subset \Omega \exists \delta > 0\colon f(B(z_0,r)) \supset B(f(z_0), \delta)$.

Доказательство. Немного уменьшив r мы можем добиться того, чтобы $|f(z) - f(z_0)| \neq 0 \quad \forall z\colon$ $|z - z_0| = r > 0$.

Возьмем $\delta = \min\limits_{z \in C_r(z_0)} |f(z) - f(z_0)| > 0$. Пусть $\lambda \in B(f(z_0), \delta)$, тогда по теореме Руше. $1 \leqslant$ количество нулей $f(z) - f(z_0)$ в $B(z_0, r)$ с учетом кратности и это равно числу нулей $f(z) - f(z_0) - \lambda$ в том же шаре.

Тогда $\exists z \in B(z_0, r): f(z) = f(z_0) + \lambda$, такая что $\lambda \in B(0, \delta)$ произв., имеем $f(B(z_0, r)) \supset$ $B(z_0, \delta)$. □

Следствие. Пусть Ω — ограниченная область, $f\colon \mathrm{Cl}\,\Omega \to \mathbb{C}$ непрерывна, f голоморфная в Ω. Тогда

1. $\sup\limits_{z \in \Omega} |f(z)| = \max\limits_{z \in \mathrm{Cl}\,\Omega} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$
2. Если $\exists z_0 \in \Omega\colon |f(z_0)| = \sup\limits_{z \in \Omega} |f(z)| \implies f \equiv const$.

Доказательство. Пусть f не постоянна, $z_0 \in \Omega, r > 0\colon \overline{B}(z_0, r) \subset \Omega$. Тогда $\exists \delta > 0\colon f(B(z_0, r)) \supset$ $B(f(z_0), \delta) \implies \exists z \in B(z_0, r)\colon |f(z)| > |f(z_0)| \implies |f(z_0)| < \sup\limits_{z \in \Omega} |f(z)| \implies 2.$

Чтобы увидеть 1, заметим, что $\exists z_0 \leftarrow \mathrm{Cl}\,\Omega\colon |f(z_0)| = \max\limits_{z \in \mathrm{Cl}\,\Omega} |f(z)|$. Если $z_0 \in \Omega$, то ?! с рассуждениями выше. □

Цель дальнейших изысканий: $\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod\limits_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

Теорема 2.22 (Теорема Мореры)**.** Пусть $\Omega \in \mathbb{C}$ — область, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — непрерывная, тогда

$$\forall \text{ треугольник } T \subset \Omega\colon \int\limits_{\partial T} f(z)\mathrm{d}z = 0 \implies f \text{ — голоморфная.}$$

Доказательство. Не умаляя общности (достаточно доказать, что $\forall z \in \Omega, r > 0\colon B(z,r) \subset \Omega \implies f$ — голоморфна в $B(z,r)$).

Докажем, что $\exists F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ такая что $\forall z \in \Omega \exists F'(z) = f(z)$.

Зафиксируем $z_0 \in \Omega$, $\forall z \in \Omega \exists$ координатный путь γ_z соединяющий z_0 и z. $F(z) = \int\limits_{\gamma_z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$, F — удовлетворяет по тем же причинам, что и $\forall$ голоморфная функция имеет первообразную. □

Следствие. $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}$, такая что f_n — голоморфная $\forall n \geqslant 1$. $\forall K \Subset \Omega \quad \sup_K |f_n - n| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Тогда f голоморфна в Ω.

Доказательство.

1. f непрерывна, так как равномерный предел непрерывный — непрерывная функция.
2. $\forall T \subset \Omega$ — треугольник $\int\limits_{\partial T} f(z)\mathrm{d}z = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\partial T} f_n(z)\mathrm{d}z = 0 \implies f$ голоморфная.

□

Лемма. $f_n, f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ голоморфные, $\forall K \Subset \Omega\colon \sup\limits_K |f_n - f| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Тогда $\forall K \Subset \Omega\colon \sup\limits_K |f_n' - f'| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Доказательство. $K \Subset \Omega, \exists \rho > -\colon B(K,r) = \bigcup\limits_{z\in K} B(z,r) \Subset \Omega$.

$\sup\limits_{z\in K} |f_n'(z) - f'(z)| = \sup\limits_{z\in K} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z| = r} \frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^2}\mathrm{d}\xi \right| \leqslant \sup\limits_{z\in K} \left[\frac{1}{r} \cdot \sup\limits_{\xi - z = r} |f_n(\xi) - f(\xi)| \right] \leqslant \frac{1}{r} \cdot \sup\limits_{z\in B(K,r)} |f_n(\xi) - f(\xi)|$
0. □

Следствие. $f_n, f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — как в лемме выше, тогда $\forall K \Subset \Omega \backslash \{z\colon f(z) = 0\}\colon \sup\limits_K |(\log f_n)' - (\log f)'| \xrightarrow{n\to}$
0.

Доказательство. $\sup\limits_{z\in K} \left| \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \to 0$. Это следует из того, что

1. $\inf\limits_{z\in K} |f(z)| > 0 \iff \sup\limits_K \frac{1}{|f|} < \infty$.
2. $\sup\limits_K |f_n' - f'| \to 0$ и $\sup\limits_K |f - f_n| \to 0$.

□

2.7. Бесконечные произведения

Замечание. $a_n \geqslant 0$, тогда $\prod\limits_{n\geqslant 1}(1+a_n)$ сходится $\iff \sum\limits_{n\geqslant 1} a_n < \infty$.

Более того, $\left|\prod_{n\geqslant 1}(1+a_n) - \prod_{n=1}^{N}(1+a_n)\right| = \prod_{n=1}^{N}(1+a_n)\left(\prod\limits_{n>N}(1+a_n) - 1\right) = \prod_{n=1}^{N}(1+a_n)\left[\exp\left[\sum\limits_{n>N} 1\right.\right.$
$\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)\left(\exp\left[\sum\limits_{n>N} a_n\right] - 1\right)$

Утверждение 2.23. $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфные функции и $\forall K \Subset \Omega \exists a_n > 0$, такие что $\sup\limits_K |f_n(z)| \leqslant a_n, \sum a_n < \infty$.

Тогда $F(z) = \prod_{n\geqslant 1}(1+f_n(z))$ корректно определена и голоморфна в Ω.

Доказательство. 1. $F(z)$ корректно определена, так как $\prod$ сходится.

2. $K \Subset \Omega$, a_n как в условии, тогда

$$\sup_{zinK}\left|F(z) - \prod_{n=1}^{N}(1+f_n(z))\right| \leqslant \prod_{n=1}^{N}(1+a_n)\left[\exp(\sum_{n>N} a_n) - 1\right] \xrightarrow{N\to+\infty} 0.$$

Следовательно F голоморфна в Ω по следствию из теоремы Мореры.

□

Следствие. f_n, F — как в утверждении выше, тогда $(\log F(z))' = \sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)} \quad \forall z\colon F(z) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $F_n(z) = \prod_{n=1}^{N}(1+f_n(z))$, тогда $\forall K \Subset \Omega.\ \sup\limits_K |F_n - F| \to 0 \implies (\log F_n(z))' \to (\log F(z))' \quad \forall z\colon F(z) \neq 0$. □