

Математический анализ

Харитонцев-Беглов Сергей

18 декабря 2022 г.

Содержание

1. Тут пропущена лекция + название главы	1
1.1 Формула замены переменной под интегралом	3
2. Теория функции одной комплексной переменной	5
2.1 Напоминание	5
2.2 Аналитические функции	5
2.3 Голоморфные функции	6
2.4 Уравнение Коши-Римана	7
2.5 Первообразная голоморфной функции	7
2.5.1 Интеграл вдоль пути	7
2.5.2 Формула Коши	10
2.6 Принцип аргумента	13
2.7 Бесконечные произведения	16
3. Γ и β Функции	18
4. Гильбертова пространства	20
4.1 Пополнение метрических пространств	21
4.2 Ортогональные системы	21
4.3 Абстрактные ряды Фурье	22
4.4 Тригонометрические ряды Фурье	23

1. Тут пропущена лекция + название главы

Напомним определения с прошлого раза:

Определение 1.1. Назовем $U \subset \mathbb{R}^n$ хорошим, если

- U — ограниченное,
- a_k, b_k — непрерывны на $U^{(k-1)} \forall k$.
- $\forall k \in 1 : n : z \in U^{(k)} \{z\} \times (a_{k+1}(z), b_{k+1}(z)) \subset U^{(k+1)}$.

Данное определение придуманное, потому что мы не углубляемся в теорию, потому что нам нужно заспидранить интегралы для теорвера, а для того, чтобы понять подробно, нужно в 4 модуле пойти на курс JUB.

Для понимания можно попробовать почитать учебник Руденко.

Замечание. Мы не требуем, чтобы U было замкнутым или открытым.

Замечание. Определение хорошеести зависит от нумерации.

Пример: повернутый на 90° логотип Котлина.

Определение 1.2. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — ограничена, непрерывно, U — хорошее.

$$\text{Тогда: } \int_U f(x) dx := \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x) dx_n \right) \dots \right) dx_1$$

Упражнение. Абоба.

Определение 1.3. $\text{supp } f = \varphi \{x : f(x) \neq 0\}$.

$C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \begin{array}{l} f \text{ — непрерывна} \\ \text{supp } f \text{ — какое-то множество я хз} \end{array} \right\}$. Тогда $f \in C_0(\mathbb{R}^n) \implies \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_I f(x) dx$, где $I \supset \text{supp } f$, I — ячейка.

Теорема 1.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — хорошее относительно двух нумераций координат.

Тогда $\int_U f(x) dx$ одинаковый в обоих нумерациях.

Замечание. $f \in C_0(\mathbb{R}^n), \text{supp } f \subset U \implies \int_U f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$.

Идея доказательства теоремы. Найти последовательность $f_1, f_2, \dots \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f_i \subset U$ и $\int_U f_i(x) dx \rightarrow \int_U f(x) dx$ в первой нумерации и $\int_U f_i(x) dx \rightarrow \int_U f(x) dx$ во второй нумерации. \square

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано, $U_\varepsilon := \{x \in U \mid \forall k \in 1 : n, a_k(x) + \varepsilon \leq x_k \leq b_k(x) - \varepsilon\}$.

Утверждение 1.2. $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon$ — замкнуто, $U_\varepsilon \subset \text{Int } U$.

Доказательство. $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : U_\varepsilon + \overline{B}(0, \delta(\varepsilon)) = \bigcup_{x \in U_\varepsilon} \overline{B}(x, \delta(\varepsilon)) \subset U$.

Заметим, что для $n = 1$ можно взять $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$.

Для больших n воспользуемся индукционным переходом. Утверждение выполнено для $U_\varepsilon^{(n-1)}$: $\exists \delta_{n-1}(\varepsilon) > 0 \bigcup_{z \in U_\varepsilon^{(n-1)}} \overline{B}_{n-1}(z, \delta_{n-1}(\varepsilon)) \subset U^{(n-1)}$.

Тогда $\exists \delta_0 \in (0, \frac{1}{2}\delta_{n-1}(\varepsilon)) : \forall z, w \in U_\varepsilon^{(n-1)} + \overline{B}_{n-1}(0, \frac{1}{2}\delta_{n-1}(\varepsilon)), |z - w| \leq \delta_0 \implies |a_n(z) - a_n(w)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
и $|b_n(z) - b_n(w)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда пусть $\delta = \delta(\varepsilon) := \min(\frac{\varepsilon}{2}, \delta_0)$, $x \in U_\varepsilon, x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \delta(\varepsilon)$. Надо понять, что $y \in U$.

Заметим, что $x = (z, x_n), y = (w, y_n); z, w \in \mathbb{R}^{n-1}$. Тогда выполняется два свойства:

1. $|z - w| \leq \delta_0 \implies w \in U_\varepsilon^{(n-1)} + \overline{B}_{n-1}(0, \frac{\delta_{n-1}(\varepsilon)}{2})$,
2. $y_n \leq x_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n(z) - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = b_n(z) - \frac{\varepsilon}{2} < b_n(w)$. И $y_n \geq x_n - \frac{\varepsilon}{2} \geq a_n(z) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = a_n(z) + \frac{\varepsilon}{2} > a_n(w) \implies y \in (a_n(w), b_n(w)) \implies y \in U$, потому что это определение хорошего множества.

U_ε замкнуто, так как задается нестрогими неравенствами для непрерывных функций, заданных на замкнутом множестве φU_ε ($\varphi U_\varepsilon \subset U$, так как $\varphi U_\varepsilon \subset \bigcup_{x \in U_\varepsilon} \overline{B}_n(x, \delta(\varepsilon))$). \square

Утверждение 1.3. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна, ограничена, U — хорошее. $\exists C > 0$ зависящая только от U (но не от f), такое что

$$\forall \varepsilon > 0 : \left| \int_U f(x) dx - \int_{U_\varepsilon} f(x) dx \right| \leq \sup_U |f| \cdot C\varepsilon.$$

Доказательство. Упражнение. При $n = 1$ что-то. \square

Следствие. U — хорошее, $f_1, \dots, f_n, f : U \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно, $\forall i : \sup_U |f_i| \leq M, \sup_U |f| \leq M, \forall K \subset U$ — компакт(?).

Тогда $\int_U f_i(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_U f(x) dx$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, U_ε — компакт. $\implies \exists N > 0 : \forall i \geq N \sup_{U_\varepsilon} |f_i - f| \leq \varepsilon$.

не успеть. \square

Лемма (Главная техническая лемма). U — хорошее, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — ограничена, непрерывна.

Тогда $\exists f_1, \dots : U \rightarrow \mathbb{R}$:

1. $\sup_U |f_i| \leq \sup_U |f|$,
2. $\forall K \subset U$ — компакт $\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_K |f_i - f| = 0$,
3. $f_i \in C_0(\mathbb{R}^n), \text{supp } f_i \subset U$.

Доказательство. $\varepsilon > 0$, определим $\rho_k^\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$, где $1 \in 1 : n$,

$$\rho_k^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x_k \geq b_k - \frac{\varepsilon}{2} \wedge x_k \leq a_k + \frac{\varepsilon}{2} \\ 1, & x_k \in [a_k + \varepsilon, b_k - \varepsilon] \\ \frac{2}{\varepsilon} \min(x_k - a_k - \frac{\varepsilon}{2}, b_k - x_k - \frac{\varepsilon}{2}) & \text{else} \end{cases}$$

Простые свойства: $\rho^\varepsilon(x) = \prod_{k=1}^n \rho_k^\varepsilon(x), 0 \leq \rho^\varepsilon(x) \leq 1$.

Положим $f_i(x) := f(x) \cdot \rho^{\frac{\varepsilon}{i}}(x)$. Проверить, что такие f_i подходят. \square

Вернемся к теореме. Возьмем f_1, f_2, \dots из леммы. $\int_U f(x) dx$ одинаков в любой нумерации, так как $f_i \in C_0(\mathbb{R}^n), \int_U f_i(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_i(x) dx$. Тогда по следствию выше $\int_U f_i(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_U f(x) dx$. \square

1.1. Формула замены переменной под интегралом

Определение 1.4. $U \subset \mathbb{R}^n$ составное, если $U = \bigcup_{i=1}^k U_i$, U_i — хорошее, че-то еще.

Тут было что-то еще.

Замечание. $\Phi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Φ . У меня появился кофе!!!

АБОБА

Теорема 1.4. $U \subset \mathbb{R}^n$ — составное множество. $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что

1. $\Phi(U)$ — составное,
2. $\Phi: \text{Int } U \rightarrow \text{Int } \Phi(U)$ гомеоморфизм,
3. Φ дифференцируема на $\text{Int } U$. И якобиан не равен нулю в любой точке.
4. Якобиан Φ ограничен на $\text{Int } U$.

Тогда $\forall f: \Phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ ограниченной выполняется:

$$\int_{\Phi(U)} f(x) dx = \int_U f(\Phi(x)) |\text{Jac } \Phi(x)| dx.$$

Пример. $n = 1$. Формула замены переменной.

Пример. $\Phi: [0; 2\pi) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^2$. $\Phi(\varphi, r) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ Якобиан $= \det \begin{pmatrix} -r \sin \varphi & r \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} = r$.

$$U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}. \text{Area}(U) = \int_U 1 dx dy = \int_{[0, 2\pi) \times [0, 1]} r dr d\varphi = \pi$$

Теорема 1.5 (Теорема о замене переменной для $C_0(\mathbb{R}^n)$). Пусть есть открытое $U \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что:

1. Φ — биекция из U в $\Phi(U)$,
2. Φ непрерывно дифференцируема на U , $\text{Jac } \Phi(x) \neq 0 \forall x \in U \implies \forall f \in C_0(\mathbb{R}^n) \text{ supp } f \subset \Phi(U)$ выполняется $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\Phi(y)) |\text{Jac } \Phi(y)| dy$.

Доказательство. Если $n = 1$, то понятно, что теорема верна.

$$\text{Тогда считаем, что } n \geq 2 \text{ и по индукции теорема верна для } k < n. \Phi(y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \vdots \\ \varphi_n(y) \end{pmatrix}.$$

Простой случай: теорема верна, если Φ — перестановка. См. теорему выше.

Теорема верна, если $\exists j \in 1..n: \varphi_j(y) = y_j$. Не умаляя общности считаем $j = 1$ (иначе можно сделать перестановку). Тогда для $\forall y_1$ — фикс. положения. $\Psi_{y_1}(y_2, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} \varphi_2(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$.

$$\Phi(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \Psi_{y_1}(y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\text{Jас } \Phi(y_1, \dots, y_n) = \text{Jас } \Psi_{y_1}(y_2, \dots, y_n)$. Тогда по индукции $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \Psi_{x_1}(x_2, \dots, x_n)) |\text{Jас } \Psi_{x_1}(y_2, \dots, y_n)| dy_2 \dots dy_n = \int_{\mathbb{R}} dy_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\Phi(y)) |\text{Jас } \Phi(y)| dy_2 \dots dy_n =$ то, что ну

Пусть $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$, пусть теорема верна для Φ_1 и Φ_2 , тогда теорема верна для Φ . Это следует из того, что $\text{Jас } \Phi = (\text{Jас } \Phi_1) \circ \Phi_2 \cdot \text{Jас } \Phi_2$.

$\forall x_0 \in U \exists r > 0$, что если $\text{supp } f \subset \Phi(B(x_0, r))$, то теорема верна. Наивно: представить при помощи композиции:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi_1} \begin{pmatrix} \varphi_1(y_1, \dots, y_n) \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi_2 \Phi_1^{-1}} \begin{pmatrix} \varphi_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Но! Φ_1^{-1} может не существовать.

Мы знаем, что $\nabla \varphi_1 \neq 0$. $\exists j \in \{1, \dots, n\} : \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j}(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$.

Утверждение: $\exists r > 0 : \Psi, \Phi_1, \Phi_2 \Psi^{-1} \Phi_1$ определены при $y \in B(y^0, r)$. И правда:

- Ψ определена $\forall y$, также Ψ^{-1} ,
- Φ_1 определена $y \in U$,
- $\Phi_1^{-1} : \text{Jас } \Phi_1(\Psi(y^0)) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} x_j \implies \Phi_1^{-1}$ определена в $\Phi_1(\Psi(B(y^0, r)))$ для $r > 0$ по теорема об обратной функции.

Теперь можно все скомпилировать: $\forall y \in U \exists r_y > 0$. Теорема верна, если $\text{supp } f \subset \Phi(B(y, 2r_y))$.

Зафиксируем $f \subset C_0(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f \subset \Phi(U)$. Так как это компакт, то $\exists y_1, \dots, y_k : \bigcup_{i=1}^k \Phi(B(y_i, r_{y_i})) \supset \text{supp } f$. $\forall i$ положим $\beta_i(y) = \begin{cases} \min(1, \frac{2r_{y_i} - |y - y_i|}{r_{y_i}}) & |y - y_i| \leq 2r_{y_i} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ $\alpha_1(x) = \beta_1(\Phi^{-1}(x))$, $\alpha_2(x) = (1 - \beta_1(\Phi^{-1}(x))) \cdot \beta_2(\Psi^{-1}(x))$, ..., $\alpha_k(x) = (1 - \beta_1(\Phi^{-1}(x))) \cdot \dots \cdot (1 - \beta_{k-1}(\Phi^{-1}(x)))$.

Тогда $x \in \text{supp } f \implies \exists j : x \in \Phi(B(y_j, r_{y_j})) \implies (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)(x) = 1 \implies \sum \alpha_i \cdot f \equiv f$, по определению $\text{supp}(\alpha_j \cdot f) \subset \Phi(B(y_j, 2r_{y_j}))$. Тогда $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \alpha_j(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\Phi(y)) \alpha_j(\Phi(y)) |\text{Jас } \Phi(y)| dx$ \square

2. Теория функции одной комплексной переменной

2.1. Напоминание

Говорим про комплексные числа: $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow z = x + iy, i \in \mathbb{C}, i^2 = -1, i \rightsquigarrow (0, 1), z = x + iy, w = a + ib, z \cdot w = xa - yb + i(xb + ya)$.

Свойства. 1. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \bar{z} := x - iy, z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

2. $\operatorname{Re} z = x$ — вещественная часть,

3. $\operatorname{Im} z = y$ — мнимая часть,

4. $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

Определение 2.1. Полярная запись комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e \cdot e^{i\varphi}$. Умножение: $r_1 r_2 (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$

2.2. Аналитические функции

Определение 2.2. Степенной ряд — это ряд вида $\sum_{n \geq 0} a_n z^n, a_n \in \mathbb{C}$.

Радиус сходимости $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ — это $R \in [0, +\infty]: R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

$R = \sup \{r: |a_n r^n|\}$.

Утверждение 2.1.

1. $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ — сходится абсолютно при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

2. $r < R, \sup_{|z| \leq r} \left| \sum_{n \geq 0} z_n z^n \right| < \infty$.

Доказательство. Смотри конспект прошлого года. □

Утверждение 2.2.

1. Пусть R — радиус сходимости $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, тогда R — радиус сходимости и для ряда $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$.

2. $\sum_{n \geq 0} a_n z^n \cdot \sum_{m \geq 0} b_m z^m = \sum_{k \geq 0} \sum_{n+m=k} a_n b_m \cdot z^k$. Верно $\forall z: |z| < R$.

Пример. $\exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}, R = +\infty$.

Пример. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n, R = 1$.

Определение 2.3. $\Omega \subset \mathbb{C}$ — открытое, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ аналитична, если $\forall z_0 \in \Omega \exists r > 0: \forall z, |z - z_0| < r \implies f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$.

Утверждение 2.3. f, g — аналитические функции на Ω , то $f + g$ — аналитическая.

☐

2. Рациональные функции аналитичны там, где они определены.

2.3. Голomorphic functions

☐

Автор: ХБ

2.4. Уравнение Коши-Римана

Рассмотрим $f(z) = u(z) + i \cdot v(z)$, $u, v \in \mathbb{R}$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Можно посмотреть на f как на $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$

Утверждение 2.4. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, тогда f дифференцируема как функция из \mathbb{R}^2 в \mathbb{R}^2 , и матрица Якоби f имеет вид $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$

Доказательство. $z = x + iy$, $h = h_1 + ih_2$. $f(z+h) = f(x+h, i(y+h_2)) = f(z) + f'(z) \cdot (h_1 + ih_2) + o(|h|)$, $h + ih_2 \mapsto f'(z) \cdot (h_1 + ih_2)$ — линейное отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. \square

$f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, $z \in \Omega$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. $f'(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z+\varepsilon) - f(z)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z+i\varepsilon) - f(z)}{iz}$. Тогда, если $z = x + iy$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon+iy) - f(x+iy)}{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$. По y получается предел $-i \frac{\partial f}{\partial y}(z)$.

$$\text{То есть } \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z) \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \dots \end{cases}$$

Определение 2.7. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$. Что-то.

Лемма. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Ω — область. f голоморфна $\iff f$ дифференцируема и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Доказательство. $\bullet \implies$ проверили выше.

$$\bullet \Leftarrow z = x + iy, h = h_1 + ih_2, f = u + iv.$$

$$f(z+h) = f(x+h_1+i(y+h_2)) = f(x+iy) + \frac{\partial f}{\partial x}(z)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(z) \cdot h_2 + o(|h|) = f(z) + (u_x + iv_x)h_1 + (u_y + iv_y)h_2 + o(|h|)$$

\square

2.5. Первообразная голоморфной функции

Определение 2.8. Ω — область, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, тогда $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — первообразная f , если $F'(z) = f(z) \forall z \in \Omega$.

В частности, F — голоморфна.

2.5.1. Интеграл вдоль пути

Определение 2.9. Путь — непрерывное отображение $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

Определение 2.10. Путь гладкий, если $\forall t \in (a, b) \exists z'(t)$ непрерывно ограничена

Кусочно гладкий, если $\exists t_1, \dots, t_n \in (a, b): z'(t)$, если $t \neq t_i$.

Определение 2.11. Пути $z_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $z_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ эквиваленты, если они отличаются заменой параметризации, то есть $\exists \varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ биекция.

Определение 2.12. Контур — класс эквивалентности путей.

Определение 2.13. Пусть γ — контур, заданный путем $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, тогда контур C обратной ориентации — это контур, заданный путем $\tilde{z}: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{z}(t) = z(-t)$.

Определение 2.14. Длина пути, это $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

Определение 2.15. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывна, тогда интеграл вдоль пути γ , заданный $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, это $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$.

Утверждение 2.5. $\int_{\gamma} f(z) dz$ не зависит от выбора пути γ .

Доказательство. $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$, $z_1: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$, $z_1(t) = z(\varphi(t))$, $z_1'(t) = z'(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$$\int_c^d f(z_1(t)) z_1'(t) dt = \int_c^d f(z(\varphi(t))) z'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \stackrel{s=\varphi(t)}{=} \int_a^b f(z(s)) z'(s) ds. \quad \square$$

Следствие. γ — контур, то $\int_{\gamma} f(z) dz$ можно определить как интеграл по пути, параметризующим этот контур.

Пример. $f(z) = z^n$. Путь $z: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $z(t) = e^{it}$. Соответствует контуру γ — окружность.

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{int} \cdot i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = i \int_0^{2\pi} (\cos((n+1)t) + i \sin((n+1)t)) dt = \begin{cases} 2\pi i, n = -1 \\ 0, n \neq -1 \end{cases}$$

Утверждение 2.6. γ — контур, $\tilde{\gamma}$ — контур с обратной ориентацией, тогда $\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$

Доказательство. $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ — это параметризация γ , $\tilde{z}: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$ параметризация $\tilde{\gamma}$.

$$\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \stackrel{s=-t}{=} \int_a^b f(z(-s)) z'(-s) (-ds) = - \int_a^b f(\tilde{z}(s)) \tilde{z}'(s) ds = \dots \quad \square$$

Утверждение 2.7. γ — контур, тогда $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \text{length}(\gamma) \max_{z \in \gamma} |f(z)|$.

Доказательство. Расписать интеграл, ограничить $f(z)$ максимумом. \square

Утверждение 2.8. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, пусть $\exists F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — первообразная f . Тогда если $z: [a, b] \rightarrow \Omega$ — путь, задающий контур γ , то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Доказательство. $\frac{d}{dt} F(z(t)) = F'(z(t)) \cdot z'(t)$, и правда: $\varepsilon > 0$, $F(z(t+\varepsilon)) = F(z(t) + z'(t)\varepsilon + o(\varepsilon)) = F(z(t)) + F'(z(t))(z(t)\varepsilon + o(\varepsilon)) + o(\varepsilon) = F(z(t))F'(z(t)) \cdot z'(t)\varepsilon + o(\varepsilon)$.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b F'(z(t)) \cdot z'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \text{Re } F(z(t)) dt + i \int_a^b \frac{d}{dt} \text{Im } F(z(t)) dt = F(z(b)) - F(z(a)). \quad \square$$

Теорема 2.9. Ω — область, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. $T \subset \Omega$ — контур, совпадающий с границей треугольника, лежащего в Ω . Тогда $\int_T f(z) dz = 0$.

Доказательство. Картинка! $\int_T f(z)dz = \int_{T_1^{(1)}} f(z)dz + \int_{T_2^{(1)}} f(z)dz = \int_{T_3^{(1)}} f(z)dz$.

Картинка про аддитивность.

Тогда по индукции определим $T_i^{(k)}$, для каждого $k \geq 1$ $\left| \int_T f(z)dz \right| = \left| \sum_{j=1}^{4^n} \pm \int_{T_j^{(k)}} f(z)dz \right| \leq 4^k \cdot \max_j \left| \int_{T_j^{(k)}} f(z)dz \right|$

$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(z - z_0)$. Тогда $\int_{T_j^{(k)}} f(z)dz = \underbrace{\int_{T_j^{(k)}} f(z_0)dz}_{=0} + \underbrace{\int_{T_j^{(k)}} f'(z_0)(z - z_0)dz}_{=0} + \int_{T_j^{(k)}} o(z - z_0)dz$

$\Rightarrow \left| \int_{T_j^{(k)}} f(z)dz \right| \leq \max_{z \in T_j^{(k)}} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \cdot \text{Perim}(T_j^{(k)}) \leq o(2^{-k} \text{diam}(T)) \cdot 2^{-k} \text{Perim}(T) = o(4^{-k})$.

А значит, интеграл по контуру равен 0. \square

Определение 2.16. Ω называется односвязной, если $\forall \gamma$ — замкнутый (такого, что $\gamma \subset \Omega$), ограниченная компонента связности $\mathbb{C} \setminus \gamma$ тоже содержится в Ω .

Теорема 2.10. Ω — односвязная область, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция, тогда $\exists F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — первообразная f , $F'(z) = f(z) \forall z \in \Omega$.

Доказательство. $w_0 \in \Omega$ — фиксирована. $\forall w$ построим путь γ_w из w_0 в w , который движется либо вертикально, либо горизонтально, а также не самопересекается.

$F(w) := \int_{\gamma_w} f(z)dz$. А дальше в следующей серии! \square

Следствие. Если γ — замкнутый контур, f — голоморфная функция в односвязной области Ω , $\gamma \subset \Omega \Rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz = 0$.

Определение 2.17. Петля — непрерывный образ окружности, то есть отображение вида $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \ z(a) = z(b)$.

Определение 2.18. Петля простая, если она не самопересекается, то есть $\forall x \in [a, b], y \in (x, y): z(x) \neq z(y)$.

Теорема 2.11 (Теорема Жордана). Плоскость разбивается простой петлей ($\gamma \in \mathbb{C}$) на ограниченное связное множество Ω_1 и неограниченное связное множество Ω_2 .

Определение 2.19. Ω_1 — это жорданова область, $\partial\Omega_1 := \gamma$, ориентированная против часовой стрелки.

Теорема 2.12 (Гурса). T — треугольник, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, $T \subset \Omega$. Тогда $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

Определение 2.20. γ — координатный путь (петля), если γ составлена из конечно числа вертикальных и горизонтальных отрезков.

Лемма. Пусть Ω — односвязная область, $\gamma \subset \Omega$ — координатная петля, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморф-

ная. Тогда:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Доказательство. Упражнение. Можно разбить наш контур на прямоугольники. Каждый прямоугольник — на треугольники (построить триангуляцию). Далее теорема Гурса. \square

Теорема 2.13. Ω — односвязная область, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, то \exists первообразная F , то есть $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}: F'f = f$.

Доказательство. Возьмем $w_0 \in \Omega$. $\forall w \exists$ координатный путь γ_w , соединяющий w_0 и w , $\gamma_w \subset \Omega$. Тогда возьмем $F(w) := \int_{\gamma_w} f(z) dz$.

1. $F(w)$ не зависит от выбора γ_w . Если γ_w^1, γ_w^2 — два координатных пути, соединяющих w_0 и w , то $\gamma = \gamma_w^1 \cup \gamma_w^2$ — координатная петля \implies разность интегралов равна нулю.

2. Проверим, что $F'(w) = f(w)$. $F'(w) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(w+h) - F(w)}{h}$. $F(w+h) = \int_{\gamma_{w+h}} f(z) dz = \int_{\gamma_w} f(z) dz + \int_{\gamma_h} f(z) dz = F(w) + \int_{\gamma_h} f(z) dz$.

$$h^{-1} (F(w+h) - F(w)) = h^{-1} \int_{\gamma_h} f(z) dz = h^{-1} \int_0^1 f(w+th) h dt = \int_0^1 f(w+th) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(w).$$

\square

2.5.2. Формула Коши

Теорема 2.14. $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Пусть $w_0 \in \Omega, r > 0: \overline{B}(w_0, r) \subset \Omega$. Тогда:

$$\forall z \in B(w_0, r) = f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Окружность против часовой стрелки ориентирована!

Доказательство. Картинка! $\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0$, так как γ замкнутый, а $\frac{f(w)}{w-z}$ — это голоморфная функция по w .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_l \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_l \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw. \text{ Что понятно равно } \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)dw}{w-z} = \\ \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(z)+f(w)-f(z)}{w-z} dw = f(z) \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{dw}{w-z} + \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw. \text{ Первое слагаемое } \\ f(z) \cdot 2\pi i, \text{ а второе можно оценить } |\circ| &\leq \max_{|w-z|=\varepsilon} \left| \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \right| 2\pi\varepsilon \leq (|f'(z)| + 1) 2\pi\varepsilon \end{aligned}$$

\square

Следствие. 1. Голоморфные функции — аналитичны! Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, $\overline{B}(w_0, r) \subset \Omega, z \in B(w_0, r)$. Тогда $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)dw}{w-w_0-(z-w_0)} =$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=r} f(w) \sum_{n \geq 0} \frac{(z-w_0)^n}{(w-w_0)^{n+1}} dw = \sum_{n \geq 0} (z-w_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_0|=r} \frac{f(w)dw}{(w-w_0)^{n+1}}.$$

$$\text{То есть } \forall z \in B(w_0, r) \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-w_0)^n.$$

Теорема Луивилля: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная и ограниченная. Тогда $f \equiv \text{const}$.

Доказательство. Заметим, что $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dz$. Тогда если $|f(w)| \leq C \forall w$. Тогда $|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{C}{R^2} 2\pi R \dots$ \square

Основная теорема алгебры: $P \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P = n$, тогда P имеет n корней в \mathbb{C} .

Доказательство. Докажем, что при $n \geq 1$ есть хотя бы один корень. Пусть $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$. Тогда если взять $|f(z)| = \frac{1}{z^n(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \dots + a_0\frac{1}{z^n})}$ \square

Теорема единственности. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, Ω — область, $f \not\equiv 0$. Тогда $\{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ дискретно (то есть не имеет точек сгущения в Ω).

Доказательство. Пусть $z_0, z_1, z_2, \dots \in \Omega$, такое что $f(z_k) = 0 \forall k \geq 0$, $z_k \rightarrow z_0$, $z_k \neq z_0, \forall k \geq 1$.

Пусть $r > 0$: $\overline{B}(z_0, r) \subset \Omega$, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$, $\exists d: a_d \neq 0$.

$f(z) = (z - z_0)^d \sum_{n \geq d} a_n (z - z_0)^{n-d} = (z - z_0)^d g(z)$. g — голоморфная в $B(z_0, r)$, $g(z_0) \neq 0 \implies \exists N \forall n \geq N g(z_n) \neq 0 \implies f(z_n) \neq 0$?! \square

Определение 2.21. Ω — односвязная область, $\partial\Omega$ — кусочно гладкий путь. $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна, голоморфна в Ω .

Тогда $\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0$.

Пояснение: $r_n: [0, 1] \rightarrow \Omega$ — кусочно гладкий замкнутый путь γ_n . $r_n \rightarrow r \implies 0 = \int_{\gamma_n} f(z) dz \rightarrow \int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0$

Определение 2.22. Ω — односвязная область, $\partial\Omega$ — кусочно гладкий путь, $z_1, \dots, z_n \in \Omega$, $\varepsilon > 0$: $\overline{B}(z_k, \varepsilon) \subset \Omega \forall k = 1..n$, $C_\varepsilon(z_k) = \{z: |z - z_k| = \varepsilon\} \implies \exists$ кусочно гладкий путь $r_k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}: r_k(0) \in C_\varepsilon(z_k), r_k((0, 1)) \subset \Omega \setminus \bigcup \overline{B}(z_k, \varepsilon), r_k([0, 1]) \cap r_j([0, 1]) = \emptyset k \neq j$

Определение 2.23. Ω — область, $z_0 \in \Omega$, $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфная. Тогда z_0 — особенность f . Различают 3 типа особенностей:

- Устранимая $\iff f$ ограничена в $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$.
- Полюс $\iff h(z) = \frac{1}{f(z)}$ определена и голоморфна в $B(z_0, \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$.
- Существенная \iff не 1 или 2.

Теорема 2.15 (Об устранимой особенности). Пусть Ω — область, $z_0 \in \Omega$, $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфна и z_0 — устранимая особенность f . Тогда $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ и f является голоморфной в Ω .

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$: $\overline{B}(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$. Рассмотрим $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$.

Докажем, что $F(z) = f(z) \forall z \in B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$

γ — контур $\partial(B(z_0, \varepsilon) \setminus (\overline{B}(z_0, \delta) \cup \overline{B}(z, \delta) \cup l_1 \cup l_2))$. Тогда $\int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = 0 = \int_{|\xi - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \int_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$.

Тогда $\int_{|\xi - z| = \delta} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = 2\pi i f(z)$. Тогда оценим $\left| \int_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \right| \leq 2\pi \delta \sup |f(\xi)|$. \square

Лемма. $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, z_0 — полюс. Тогда $\exists \varepsilon > 0$, $\varphi: B(z_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, $\varphi(z_0) \neq 0$, $f(z) = (z - z_0)^{-d} \cdot \varphi(z)$, $d \in \mathbb{N}$.

Доказательство. $h(z) = \frac{1}{f(z)}$, $h(z_0) = 0 \implies h(z) = (z - z_0)^d \cdot g(z)$, $g(z_0) \neq 0$. $f(z) = \frac{1}{h(z)} = (z - z_0)^{-d} \frac{1}{g(z)} = \varphi(z)$. \square

Следствие. f — как в лемме, то $\exists \varepsilon > 0: \forall z \in B(z_0, \varepsilon)$.

$f(z) = \sum_{n \geq -d} a_n (z - z_0)^n = a_{-d} (z - z_0)^{-d} + a_{-d+1} (z - z_0)^{-d+1} + \dots + a_{-1} (z - z_0)^{-1} + \psi(z)$, где $\psi(z)$ — голоморфная.

f называется рядом Лорана. Все, что не ψ — главная часть ряда Лорана.

Доказательство. $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^d} = (z - z_0)^{-d} \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_0)^n$ \square

Определение 2.24. $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфная, z_0 — полюс, $f(z) = \sum_{n \geq -d} a_n (z - z_0)^n$.

Тогда **вычет** f в z_0 — a_{-1} , обозначение $\text{Res}_{z_0} f = a_{-1}$.

Лемма. Ω — область, $z_0 \in \Omega$, $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, z_0 — полюс, тогда, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $\int_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z_0} f$.

Доказательство. $f(z) = \sum_{n=-d}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \psi(z)$, $z \in B(z_0, \alpha\varepsilon)$.

Тогда $\int_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z) dz = \sum_{n=-d}^{-1} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} a_n (z - z_0)^n dz + \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \psi(z) dz = 2\pi i a_{-1}$ \square

Лемма. $f: \Omega \setminus \{z_0\}$ — голоморфная, z_0 — полюс порядка k . Тогда:

$$\text{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{k-1} ((z - z_0)^k f(z)).$$

Доказательство. $f(z) = \sum_{n \geq -k} a_n (z - z_0)^n \implies (z - z_0)^k f(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n-k} (z - z_0)^n \implies (z - z_0)^k f(z)$ голоморфна в $B(z_0, \varepsilon)$ в том числе в z_0 и формула выше — формула для коэффициентов ряда Тейлора. \square

Определение 2.25. Пусть $\{z_1, \dots\} \subset \Omega$ — дискретное подмножество Ω . Тогда $f: \Omega \setminus \{z_i\} \rightarrow \mathbb{C}$ называется мероморфной функцией в Ω , если

- f — голоморфной,
- $\forall k, z_k$ — полюс f .

Лемма. $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная, $g \neq 0$, тогда $\frac{f}{g}$ — мероморфна в Ω .

Доказательство. Пусть $\{z_1, z_2, \dots\} \subset \Omega$ — нули g , тогда $\{z_1, z_2, \dots\}$ — дискретное множество $\implies h = \frac{f}{g}$ задана и голоморфна в $\Omega \setminus \{z_1, \dots\}$.

z_k — ноль порядка d для g , тогда

- если $f(z_k) \neq 0$, то локально $h(z) = \frac{1}{g(z)/f(z)} \implies \frac{1}{h(z)} = \frac{g(z)}{f(z)}$ голоморфна в z_0 и равна нулю.

- $f(z_k) \neq 0$, то пусть \tilde{d} — порядок нуля f в z_k . Тогда локально $g(z) = (z - z_k)^d \varphi(z)$, $f(z) = (z - z_k)^{\tilde{d}} \tilde{\varphi}(z)$. $\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_k)^{\tilde{d}-d} = \frac{\varphi(z)}{\tilde{\varphi}(z)}$ — голоморфная в z_0 .

□

Теорема 2.16. Любая мероморфная функция имеет вид $\frac{f}{g}$, f, g — голоморфная.

Теорема 2.17 (Теорема о вычетах). Пусть Ω — область, $z_1, \dots, z_n \in \Omega$. $f: \text{Cl } \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная, голоморфная в $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$.

Пусть f имеет полюса в z_1, \dots, z_n или устранимые особенности. Тогда

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z_k} f.$$

Замечание. $\frac{f(\xi)}{\xi-z}$ — мероморфна в $B(z_0, \varepsilon) \implies \int_{|\xi-z_0|=\varepsilon} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z} = 2\pi i \text{Res}(\dots) \implies$ формула Коши.

Доказательство. Картинка. $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (\bigcup_{k=1}^n \overline{B}(z_k, \varepsilon))$, f — голоморфная в Ω_ε . $0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} f(z) dz =$

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{|z-z_k|=\varepsilon} f(z) dz \implies \int_{\partial\Omega} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{|z-z_k|=\varepsilon} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z_k} f. \quad \square$$

2.6. Принцип аргумента

Пусть $z = re^{i\theta}$, $r, \theta \in \mathbb{R}$, $r > 0$, тогда $\theta = \arg z$. $\arg z$ определен с точностью до 2π .

Замечание. $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — непрерывна, то $\exists r, \theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и $r(t) > 0 \forall t \in [a, b]$, $z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$.

Пример. Если z параметризует окружность, то можно положить $z(t) = e^{2\pi i t}$, $z: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\theta(t) = t$.

$U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — односвязное, $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in U$, тогда $\exists \log: U \rightarrow \mathbb{C}$, такой что $\log(z_0) = \log r_0 + i\theta_0$, $\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$.

Определение 2.26. Ω — любая область, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфная, $f \neq 0$, тогда логарифмическая производная то $(\log f(z))' := \frac{f'(z)}{f(z)}$.

Утверждение 2.18. $(\log f)'$ — это мероморфная функция в Ω , все полюсы $(\log f)'$ простые и соответствуют нулям f . Если $f(z_0) = 0$, то $\text{Res}_{z_0}(\log f)' = \text{ord}_{z_0} f$ — порядок нуля.

Доказательство. Пусть $f(z_0) \neq 0 \implies \frac{f'(z)}{f(z)}$ — голоморфная в окрестности $z_0 \implies (\log f)'$ голоморфна в $\Omega \setminus \{z: f(z) = 0\}$.

Пусть $f(z_0) = 0$, напомним $f(z) = (z - z_0)^d g(z)$, где $d = \text{ord}_{z_0} f$, $g(z_0) \neq 0$. □

Теорема 2.19 (Принцип аргумента). Ω — односвязное, ограниченное, $\partial\Omega$ — кусочно гладкая, f — голоморфная в окрестности $\text{Cl } \Omega$ (то есть $\exists \Omega' \supset \text{Cl } \Omega$ и $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная) и $f(z) \neq 0 \forall z \in \partial\Omega$. Тогда

$$\int_{\partial\Omega} (\log f(z))' dz = 2\pi i \sum_{z \in \Omega, f(z)=0} \text{ord}_z f = 2\pi i \# \text{ нулей в } f \text{ с учетом кратности.}$$

Доказательство. $\int_{\partial\Omega} (\log f(z))' dz = 2\pi i \sum_{z-\text{ полюс}} \text{Res}_z(\log f)' = 2\pi i \sum_{zf(z)=0} \text{ord}_z f$ □

Пусть $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ — параметризация $\partial\Omega$, пусть также $f(\Omega') = \mathbb{C}^*$. Тогда $\text{Log } f(z)$ корректно определена, $(\log f(z))' = \frac{d}{dz} \text{Log } f(z)$.

$$\int_{\partial\Omega} (\log f(z))' dz = \int_{\partial\Omega} \frac{d}{dz} \text{Log } f(z) dz = \int_a^b \frac{d}{dz} \text{Log } f(z(t)) z'(t) dt = \int_c^b \frac{d}{dt} (\text{Log } f(z(t))) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (\log |f(z(t))| + i \log |f(z(t))| - \log |f(z(a))| + i \arg f(z(b)) - i \arg f(z(a))) dt$$

Пример. $\Omega = \mathbb{D}$, $f(z) = z^n$, $z: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $z(t) = e^{it}$. Тогда $f(z(t)) = e^{int}$, $\theta(t) = nt$

$$\int_{\partial\Omega} (\log f(z))' dz = i(\theta(2\pi) - \theta(0)) = n2\pi i.$$

Теорема 2.20 (Теорема Руше). Пусть Ω — односвязная область, ограниченная $\partial\Omega$ — кусочно гладкий путь. f, g — голоморфная в окрестности \mathbb{C}^* , $\forall z \in \partial\Omega \quad |f(z)| > |g(z)|$.

Тогда $\#$ нулей f в Ω с учетом кратности равно количеству нулей $f+g$ в Ω с учетом кратности.

Доказательство. $t \in [0, 1]$. Рассмотрим $\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} (\log(f+tg)(z))' dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)} dz$.

1. $\Psi(z, t): \partial\Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. $\Psi(z, t) = \frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}$ непрерывна $\implies \Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \Psi(z, t) dz$ непрерывна.

2. $\forall t \in [0, 1], \Phi(t) \in \mathbb{Z}$ по теореме выше.

Из 1 и 2 следует, что $\Phi(t) \equiv n, n \in \mathbb{Z}$. Но $\Phi(0)$ — количество нулей f в Ω с учетом кратности, а $\Phi(1)$ — количество нулей $f+g$ в Ω с учетом кратности. □

Теорема 2.21. Ω — область, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная непостоянная, тогда $\forall z_0 \in \Omega, \delta > 0: \overline{B}(z_0, r) \subset \Omega \exists \delta > 0: f(B(z_0, r)) \supset B(f(z_0), \delta)$.

Доказательство. Немного уменьшив r мы можем добиться того, чтобы $|f(z) - f(z_0)| \neq 0 \quad \forall z: |z - z_0| = r > 0$.

Возьмем $\delta = \min_{z \in \overline{B}(z_0, r)} |f(z) - f(z_0)| > 0$. Пусть $\lambda \in B(f(z_0), \delta)$, тогда по теореме Руше. 1 \leq количество нулей $f(z) - f(z_0) - \lambda$ в $B(z_0, r)$ с учетом кратности и это равно числу нулей $f(z) - f(z_0) - \lambda$ в том же шаре.

Тогда $\exists z \in B(z_0, r): f(z) = f(z_0) + \lambda$, такая что $\lambda \in B(0, \delta)$ произв., имеем $f(B(z_0, r)) \supset B(f(z_0), \delta)$. □

Следствие. Пусть Ω — ограниченная область, $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна, f голоморфная в Ω . Тогда

$$1. \sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \max_{z \in \mathbb{C}^* \setminus \Omega} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$$

$$2. \text{ Если } \exists z_0 \in \Omega: |f(z_0)| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)| \implies f \equiv \text{const.}$$

Доказательство. Пусть f не постоянна, $z_0 \in \Omega, r > 0: \overline{B}(z_0, r) \subset \Omega$. Тогда $\exists \delta > 0: f(B(z_0, r)) \supset B(f(z_0), \delta) \implies \exists z \in B(z_0, r): |f(z)| > |f(z_0)| \implies |f(z_0)| < \sup_{z \in \Omega} |f(z)| \implies 2$.

Чтобы увидеть 1, заметим, что $\exists z_0 \leftarrow \mathbb{C}^* \setminus \Omega: |f(z_0)| = \max_{z \in \mathbb{C}^* \setminus \Omega} |f(z)|$. Если $z_0 \in \Omega$, то ?! с рассуждениями выше. □

Цель дальнейших изысканий: $\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

Теорема 2.22 (Теорема Мореры). Пусть $\Omega \in \mathbb{C}$ — область, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная, тогда

$$\forall \text{ треугольник } T \subset \Omega: \int_{\partial T} f(z) dz = 0 \implies f \text{ — голоморфная.}$$

Доказательство. Не умаляя общности (достаточно доказать, что $\forall z \in \Omega, r > 0: B(z, r) \subset \Omega \implies f$ — голоморфна в $B(z, r)$).

Докажем, что $\exists F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ такая что $\forall z \in \Omega \exists F'(z) = f(z)$.

Зафиксируем $z_0 \in \Omega, \forall z \in \Omega \exists$ координатный путь γ_z соединяющий z_0 и z . $F(z) = \int_{\gamma_z} f(\xi) d\xi, F$ — удовлетворяет по тем же причинам, что и \forall голоморфная функция имеет первообразную. \square

Следствие. $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, $f_n, f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, такая что f_n — голоморфная $\forall n \geq 1$. $\forall K \in \Omega \sup_K |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Тогда f голоморфна в Ω .

Доказательство. 1. f непрерывна, так как равномерный предел непрерывный — непрерывная функция.

2. $\forall T \subset \Omega$ — треугольник $\int_{\partial T} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial T} f_n(z) dz = 0 \implies f$ голоморфная. \square

Лемма. $f_n, f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфные, $\forall K \in \Omega: \sup_K |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Тогда $\forall K \in \Omega: \sup_K |f'_n - f'| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Доказательство. $K \in \Omega, \exists \rho > 0: B(K, \rho) = \bigcup_{z \in K} B(z, \rho) \in \Omega$.

$$\sup_{z \in K} |f'_n(z) - f'(z)| = \sup_{z \in K} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z|=\rho} \frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi \right| \leq \sup_{z \in K} \left[\frac{1}{\rho} \cdot \sup_{|\xi-z|=\rho} |f_n(\xi) - f(\xi)| \right] \leq \frac{1}{\rho} \cdot \sup_{z \in B(K, \rho)} |f_n(\xi) - f(\xi)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \square$$

Следствие. $f_n, f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — как в лемме выше, тогда $\forall K \in \Omega \setminus \{z: f(z) = 0\}: \sup_K |(\log f_n)' - (\log f)'| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Доказательство. $\sup_{z \in K} \left| \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \rightarrow 0$. Это следует из того, что

1. $\inf_{z \in K} |f(z)| > 0 \iff \sup_K \frac{1}{|f|} < \infty$.
2. $\sup_K |f'_n - f'| \rightarrow 0$ и $\sup_K |f - f_n| \rightarrow 0$.

\square

2.7. Бесконечные произведения

Замечание. $a_n \geq 0$, тогда $\prod_{n \geq 1} (1 + a_n)$ сходится $\iff \sum_{n \geq 1} a_n < \infty$.

$$\begin{aligned} \text{Более того, } \left| \prod_{n \geq 1} (1 + a_n) - \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \right| &= \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \left(\prod_{n > N} (1 + a_n) - 1 \right) = \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \left[\exp \left[\sum_{n > N} a_n \right] - 1 \right] \\ &= \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \left(\exp \left[\sum_{n > N} a_n \right] - 1 \right) \end{aligned}$$

Утверждение 2.23. $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфные функции и $\forall K \in \Omega \exists a_n > 0$, такие что $\sup_K |f_n(z)| \leq a_n, \sum a_n < \infty$.

Тогда $F(z) = \prod_{n \geq 1} (1 + f_n(z))$ корректно определена и голоморфна в Ω .

Доказательство. 1. $F(z)$ корректно определена, так как \prod сходится.

2. $K \in \Omega$, a_n как в условии, тогда

$$\sup_{z \in K} \left| F(z) - \prod_{n=1}^N (1 + f_n(z)) \right| \leq \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \left[\exp \left(\sum_{n > N} a_n \right) - 1 \right] \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Следовательно F голоморфна в Ω по следствию из теоремы Мореры. □

Следствие. f_n, F — как в утверждении выше, тогда $(\log F(z))' = \sum_{n \geq 1} \frac{f'_n(z)}{1 + f_n(z)} \quad \forall z: F(z) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $F_n(z) = \prod_{n=1}^N (1 + f_n(z))$, тогда $\forall K \in \Omega. \sup_K |F_n - F| \rightarrow 0 \implies (\log F_n(z))' \rightarrow (\log F(z))' \quad \forall z: F(z) \neq 0$. □

Лемма. Пусть $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфная, $(\log f)' \equiv (\log g)'$.

Тогда $\exists c \in \mathbb{C}: f(z) = cg(z) \quad \forall z \in \Omega$.

Доказательство.

$$(\log f)' - (\log g)' \equiv \left(\log \frac{f}{g} \right)' \equiv 0 \implies \frac{\left(\frac{f}{g} \right)'}{\frac{f}{g}} \equiv 0 \implies \left(\frac{f}{g} \right)' \equiv 0 \implies f = c \cdot g.$$

□

Теорема 2.24. $\forall z \in \mathbb{C}: \frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$.

Доказательство. Проверим, что $(\log \frac{\sin \pi z}{\pi})' = \log \left(z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \right)$.

Левое слагаемое равно $\pi \operatorname{ctg} \pi z$, правое $-\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z-n}$. Поисследуем разность этих штук — функцию $F(z)$.

1. $F(z+1) = F(z), F(-z) = -F(z)$.

2. F голоморфна $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ и имеет устранимые особенности в \mathbb{Z} . Обе эти функции имеют простые нули в \mathbb{Z} , обе лог. производные будут иметь там полюса с вычетом 1, тогда в разности в ряду Лорана вычеты сократятся.

3. F — ограничена в \mathbb{C} . Достаточно показать, что F ограничена в $H = \left\{ z \mid -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z \geq 1 \right\}$

При $z \in H$ будем использовать, что $|F(z)| \leq |\pi \cdot \operatorname{ctg} \pi z| + \left| \frac{1}{z} \right| + \sum_{n \geq 1} \left| \frac{2z}{z^2 - n^2} \right|$.

$z = x + iR, R \geq 1, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Тогда $|\operatorname{ctg} \pi(x + iR)| = \left| \frac{e^{\pi i x - R} + e^{-\pi i x + R}}{e^{\pi i x - R} - e^{-\pi i x + R}} \right| = \frac{|e^{2\pi i x - 2R} + 1|}{|e^{2\pi i x - 2R} - 1|} \leq \frac{1 + e^{-2R}}{1 - e^{-2R}} \leq \frac{1 + e^{-2}}{1 - e^{-2}}$. Откуда получаем

$\sum_{n \geq 1} \left| \frac{2(x + iR)}{x^2 + 2iRx - R^2 - n^2} \right| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{4R}{R^2 + n^2} = \frac{4}{R} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{R}\right)^2} \leq 4 \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = 2\pi \implies F$ ограничена $\implies F \equiv \text{const}$ по теореме Луивилля $\implies F \equiv 0$, так как F нечетна.

Значит $\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \cdot C$, но $C = 1$, потому что можно сравнить асимптотики около нуля. □

3. Г и β Функции

Лемма (Техническая лемма). $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область. $I \subset \mathbb{R}$ — интервал или луч. $F: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывная, $\forall x \in I: F(z, x)$ голоморфна по z .

$$\forall K \Subset \Omega \exists \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}: \sup_{z \in K} |F(z, x)| \leq \varphi(x), \int_I \varphi(x) dx < \infty.$$

Тогда $f(z) = \int_I F(z, x) dx$ корректно определена и голоморфна в Ω , а $f'(z) = \int_I \frac{\partial}{\partial z} F(z, x) dx$.

Доказательство. $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots \subset I, I_k$ — отрезок, $\bigcup I_k = I$. $f_n(z) = \int_{I_n} F(z, x) dx$.

1. f_n — непрерывна по z .

2. f_n голоморфная: пусть $T \subset \Omega$ — треугольник, $\int_{\partial T} f_n(z) dz = \int_{\partial T} \int_{I_n} F(z, x) dx dz = \int_{I_n} \int_{\partial T} F(z, x) dz dx = 0$.

$$3. f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z|=\varepsilon} \frac{f_n(z) d\xi}{(\xi-z)^2} = \int_{I_n} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z|=\varepsilon} \frac{F(\xi, x) d\xi}{(\xi-z)^2} \right) dx = \int_{I_n} \frac{\partial}{\partial z} F(z, x) dx.$$

$$4. \forall K \Subset \Omega: \sup_K |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| = \sup_{z \in K} \left| \int_{I_n} F(z, x) dx - \int_I F(z, x) dx \right| = \sup_{z \in K} \left| \int_{I-I_n} F(z, x) dx \right| \leq \int_{I-I_n} \varphi(x) dx \rightarrow 0 \dots$$

□

Определение 3.1. Г-функция — функция $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, \operatorname{Re} p > \varepsilon$.

Свойства. 1. Γ — голоморфная функция на $\{p: \operatorname{Re} p > 0\}$. $\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^\infty x^{p-1} (\log x)^n e^{-x} dx$.

Доделать.

$$2. \Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \text{ если } \operatorname{Re} p > 0. \Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \int_0^\infty p x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p).$$

$$3. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{x}} = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

$$4. \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n} \text{ — индукция.}$$

5. Γ строго выпукла при $p \in (0, +\infty)$.

$$6. \Gamma(p) \sim \frac{1}{p} \text{ при } p \rightarrow 0+, \text{ так как } \Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}.$$

Следствие. Γ может быть продолжена на \mathbb{C} как мероморфная функция с простыми полюсами в $z \leq 0$.

Доказательство. Используем свойство номер 2. $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \dots = \frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)\dots(p+n-1)}, n > -\operatorname{Re} p$. □

Определение 3.2. $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0$.

Теорема 3.1. $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$

Доказательство. $\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y} dy dx = \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} x^{p-1} (u-x)^{q-1} e^{-u} du dx = \int_0^{+\infty} \int_0^u x^{p-1} (u-x)^{q-1} e^{-u} dx du = \int_0^{+\infty} \int_0^1 v^{p-1} u^{p-1} u^{q-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} u dv du = \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du B(p, q)$ \square

Лемма. $\forall p, q: \operatorname{Re} q > 0 \wedge \operatorname{Re} p > 0 \implies B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1} dt}{(1+t)^{p+q}}.$

Доказательство. $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x = \frac{t}{1+t}}{dx = \frac{dt}{(1+t)^2}} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}} \cdot \frac{1}{(t+1)^{q-1}} \frac{dt}{(1+t)^2}$ \square

Теорема 3.2 (Формула дополнения). $\forall p: \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}.$

Доказательство. $B(1, 1-p) = \Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1} dt}{1+t} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ при $\operatorname{Re} p > 0$. Следовательно теорема выполняется для $\operatorname{Re} p > 0$. Но по теореме о единственности функции всюду равны, так как равны на открытом множестве. \square

Лемма. Пусть $t > 0, u \in [0, t]$.

Тогда $e^{-u} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^u \leq \left(1 - \frac{u}{t}\right)^t \leq e^{-u}.$

Доказательство. Известно, что $e \geq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \geq e \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1}, x > 0$. Тогда $e^{-1} \leq \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^x \leq e^{-1} \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)$. Заменим $1+x = y$, тогда получаем $e^{-1} \leq \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{y-1} \leq e^{-1} \left(1 - \frac{1}{y}\right) \iff e^{-1} \left(1 - \frac{1}{y}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{y}\right)^y \leq e^{-1} \iff e^{-u} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^u \leq \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{uy} \leq e^{-u}. y = \frac{t}{u}.$ \square

Теорема 3.3. Пусть $a > 0$. Тогда $\Gamma(t+a) \sim t^a \Gamma(t), t \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Для этого докажем, что $\Gamma(t+a+1) \sim t^a \Gamma(t+1)$, откуда следует теорема, так как $(t+1)^a \sim t^a$.

$$\frac{\Gamma(t+1)\Gamma(a)}{\Gamma(t+1+a)} = B(a, t+1) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^t dx \underset{x=\frac{u}{t}}{=} t^{-a} \int_0^t u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^t dt.$$

$$t^{-a} \int_0^t u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^t du \leq t^{-a} \int_0^t u^{a-1} e^{-u} du \leq t^{-a} \Gamma(a).$$

Пусть $\varepsilon > 0$, мы хотим доказать, что $t^{-a} \int_0^t u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^t du \geq t^{-a} \Gamma(a)(1-\varepsilon)$.

$$t^{-a} \int_0^t u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^t du \geq t^{-a} \int_0^t u^{a-1} e^{-u} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^t \geq t^{-a} \int_0^R u^{a-1} e^{-u} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^u du \geq t^{-a} \int_0^R u^{a-1} e^{-u} du \cdot \left(1 - \frac{R}{t}\right)^R \geq t^{-a} \Gamma(a)(a-1). \text{ Не уверен.} \quad \square$$

Следствие Формула Валлиса. $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sqrt{\pi} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$

Доказательство. $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2^n \Gamma(n+1)} \sqrt{\pi}.$ \square

Следствие. $\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p \frac{n!}{p(p+1) \dots (p+n)} \quad \forall p > 0.$

Доказательство. $\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1) \dots (p+n-1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p \Gamma(n)}{p(p+1) \dots (p+n-1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p \frac{n!}{p(p+1) \dots (p+n)} \quad \square$

4. Гильбертова пространства

Пусть H — векторное пространство над \mathbb{C} .

Определение 4.1. Полутора-линейная форма — функция $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, такая что $\forall x, y, z \in H, a, b \in \mathbb{C}$ $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$, $\langle z, ax + by \rangle = \bar{a} \langle z, x \rangle + \bar{b} \langle z, y \rangle$.

Определение 4.2. Полутора-линейная форма называется скалярным произведением, если $\forall x, y: \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, $\forall x \in H \langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Лемма. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, то $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

Лемма. Положим $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, тогда $\|\cdot\|$ — норма на H .

Определение 4.3. $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — Гильбертово пространство, если $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное пространство и H полно как метрическое пространство с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Пример. 1. $\mathbb{C}^n, \langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i$.

$$2. l^2 = \left\{ (a_i)_{i=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{+\infty} |a_i|^2 < \infty \right\}, \langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \bar{b}_i.$$

3. $\{f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ — непрерывна}\} = H, \langle f, g \rangle_H = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$. Но H не полно. Но существует единственное пополнение H . Это множество $L^2(-\pi, \pi)$.

Теорема 4.1. l^2 — Гильбертово пространство.

Доказательство. Надо показать, что l^2 — полно. Пусть $a^{(n)} \in l^2$ — фундаментальная последовательность. Пусть $i \in \mathbb{N}$, тогда $a_i^{(n)}$ — это тоже фундаментальная последовательность, так как $|a_i^{(n)} - a_i^{(m)}| \leq \|a^{(n)} - a^{(m)}\| \implies \exists a_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_i^{(n)}$, положим $a = (a_i)_{i=1}^{+\infty}$. \square

Замечание. $\{\|a^{(n)}\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничено, так как $a^{(n)}$ — фундаментальная последовательность $\exists C > 0: \|a^{(n)}\| \leq C \forall n \implies \forall N > 0 \sum_{i=1}^N |a_i|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N |a_i^{(n)}|^2 \leq C^2 \implies \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|^2 \leq C^2 \implies a \in l^2$.
Теперь остается показать почему $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|a - a^{(n)}\| = 0$. $\varepsilon > 0, \exists R > 0: \forall n, m \geq R \quad \|a^{(n)} - a^{(m)}\| \leq \varepsilon \implies \forall N > 0 \sum_{i=1}^N \|a_i - a_i^{(n)}\|^2 = \|a - a^{(n)}\|^2 \leq \varepsilon^2$.

Определение 4.4. Линейный функционал на H — это линейное отображение $l: H \rightarrow \mathbb{C}$.

Ограниченный линейный функционал — это такой l , для которого $\exists C > 0: \forall x \in H |l(x)| \leq C \|x\|$.

Лемма. $l: H \rightarrow \mathbb{C}$ — линейный функционал. Следующие условия эквивалентны:

1. l — непрерывная функция,
2. l — ограничена,
3. $\sup_{\|x\|=1} |l(x)| < \infty$.

Доказательство. $1 \implies 2$. Пусть l не ограничена, тогда $\exists x_i \in H: |l(x_i)| \geq i\|x_i\| > 0$. Рассмотрим $y_i = \frac{x_i}{i\|x_i\|}$, $y_i \rightarrow 0$, $\|y_i\| = \frac{1}{i}$. Но модуль отображения ≥ 1 .

$2 \implies 3$ очевидно.

$3 \implies 2$ Пусть $C = \sup_{\|x\|=1} |l(x)|$, тогда рассмотрим $\|x\| \cdot \left| l\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \leq C\|x\|$.

$2 \rightarrow 1$. очев.

□

4.1. Пополнение метрических пространств

Пусть (X, d) — метрическое пространство, X — полно, если \forall фундаментальная последовательность имеет предел.

Определение 4.5. (\bar{X}, \bar{d}) — пополнение (X, d) , если $\exists f: X \rightarrow \bar{X}$:

1. f — инъекция,
2. f сохраняет расстояние,
3. $\text{Cl}(f(X)) = \bar{X}$,
4. (\bar{X}, \bar{d}) — полное.

Тут была красивая диаграмма, я обязательно сделаю её.

Теорема 4.2. $\forall (X, d): (X, d) \text{ — метрическое} \implies \exists \text{ пополнение } (\bar{X}, \bar{d})$.

Доказательство. Доказательство приведено неполное, полное доказательство — упражнение для читателя.

Положим $\bar{X} = \{(x_1, \dots) \in X^{\mathbb{N}} \mid (x_1, \dots) \text{ — фундаментальная}\} / \sim$, где $(x_1, \dots) \sim (y_1, \dots) \iff \lim_{i \rightarrow +\infty} d(x_i, y_i) = 0$. Тогда $\bar{d}((x_i), (y_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_i, y_i)$. Тогда $f: X \rightarrow \bar{X}$, $f(x) = (x, x, x, \dots) \in \bar{X}$. □

Пример. Вещественные числа: $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$.

Упражнение. $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ — кусочно непрерывная, ограниченная, тогда $\exists f_n \in \mathbb{C}([-\pi, \pi])$, такие что $\|f_n - f\|_{L^2(-\pi, \pi)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies$ можно считать, что $f \in L^2([-\pi, \pi])$

Замечание. $f \in L^2([-\pi, \pi])$ и $g \in C([-\pi, \pi])$, то $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$.

Замечание. Пусть H^* — множество всех линейных функционалов. Тогда

1. $\|l\| = \sup_{\|x\|=1} |l(x)|$ — это норма на H^* .
2. $H \rightarrow H^*, x \mapsto l_x = \langle \cdot, x \rangle, \|l_x\| = \|x\|$.

4.2. Ортогональные системы

Замечание. Здесь и далее H — гильбертово пространство.

Определение 4.6. Ряд $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i$ сходится, если $\left\{ \sum_{n=1}^n x_i \right\}$ — последовательность Коши.

Замечание. $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i$ сходится $\not\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \|x_i\|$ сходится.

Пример. $H = l^2$, $x_k = (0, 0, \dots, \frac{1}{k}, 0, \dots)$. Тогда ряд сходится, и $\sum x_k = (1, \frac{1}{2}, \dots)$. Но $\sum \|x\| = \sum \frac{1}{k} = \infty$.

Лемма. $\sum_{i \geq 1} x_i$ и $l: H \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывный линейный функционал, тогда

$$l\left(\sum_{i \geq 1} x_i\right) = \sum_{i \geq 1} l(x_i).$$

Доказательство. $l\left(\sum_{i \geq 1} x_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} l\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n l(x_i) = \sum_{i \geq 1} l(x_i)$ □

Определение 4.7. $e_1, \dots \in H$ ортогональная система, если $e_i \neq 0 \quad \forall i, \langle e_i, e_j \rangle = 0, i \neq j$.

Лемма. $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ — Ортогональная система, $e_1, \dots \in \mathbb{C}$, тогда

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n \text{ сходится} \iff \sum_{i=1}^{+\infty} |c_i|^2 \cdot \|v_i\|^2 \text{ сходится.}$$

$$2. d_1, d_2, \dots \in \mathbb{C} \text{ и } \sum c_i \cdot v_i, \sum d_i v_i \text{ сходятся, то } \langle \sum c_i v_i, \sum d_i v_i \rangle = \sum c_i \bar{d}_i \cdot \|v_i\|^2.$$

Доказательство. 1. $\left\| \sum_{i=n}^m c_i v_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=n}^m c_i v_i, \sum_{j=n}^m c_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j=n}^m c_i \bar{c}_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=n}^m |c_i|^2 \|v_i\|^2.$

$$2. \left\langle \sum_{i=1}^{+\infty} c_i v_i, \sum_{j=1}^{+\infty} d_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \left\langle v_i, \sum_{j=1}^{+\infty} d_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} c_i \bar{d}_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \bar{d}_i \|v_i\|^2.$$

□

Замечание. $\sum_{i=1}^{\infty} c_i v_i = 0 \iff c_i = 0 \quad \forall i.$

4.3. Абстрактные ряды Фурье

Пусть H — гильбертово пространство, $\{v_1, \dots\}$ — ортогональная система, положим $c_i(x) := \frac{\langle x, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$

Определение 4.8. Абоба

Лемма. $\forall n \geq 1, x - S_n(x) \perp v_i, i = 1, \dots, n.$

Доказательство. $\langle x - S_n(x), v_j \rangle = \left\langle x - \sum_{i=1}^n c_i(x) v_i, v_j \right\rangle = \langle x, v_j \rangle - c_j(x) \|v_j\|^2 = 0.$ □

Замечание. $S_n(x)$ — это проекция x на $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Следствие Неравенство Бесселя. Ряд Фурье $S(x)$ сходится $\forall x \in H$ и $\sum_{i=1}^{+\infty} |c_i(x)|^2 \cdot \|v_i\|^2 \leq \|x\|^2$

Доказательство. $\|x\|^2 = \|x - S_n(x) + S_n(x)\|^2 = \langle x - S_n(x) + S_n(x), x - S_n(x) + S_n(x) \rangle = \|x - S_n(x)\|^2 + \|S_n(x)\|^2 \implies \|S_n(x)\|^2 \leq \|x\|^2.$ □

Теорема 4.3 (Рисса-Фишера). H — гильбертово пространство, v_1, \dots — ортогональная система, $x \in H$.

Тогда $S(x) - x \perp v_i, i = 1, \dots$ и $S(x) = x \iff \|S(x)\| = \|x\|$.

Доказательство. $\langle S(x) - x, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{+\infty} c_i(x) v_i - x, v_j \right\rangle = 0 \implies S(x) - x \perp S_n(x) \implies S(x) - x \perp S(x)$, так как $\langle S(x) - x, S(x) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle S(x) - x, S_n(x) \rangle = 0$.

$\|x\|^2 = \|x - S(x) + S(x)\|^2 = \langle x - S(x) + S(x), x - S(x) + S(x) \rangle = \|x - S(x)\|^2 + \|S(x)\|^2 \implies \|x\|^2 = \|S(x)\|^2 \iff \|x - S(x)\|^2 = 0. \quad \square$

Определение 4.9. H — гильбертово пространство, $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ — ортогональная система. Тогда $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ — ортогональный базис, если $\forall x \in H, S(x) = x$.

Замечание. ОБ — это не базис Гамеля.

Замечание. $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ — ортогональный базис, тогда $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i(x) \overline{c_i(y)} \|v_i\|^2 \quad \forall x, y \in H$.

В частности $H \rightarrow l^2, x \mapsto \left(\frac{c_1(x)}{\|v_1\|}, \frac{c_2(x)}{\|v_2\|}, \dots \right)$ — изометрия.

Теорема 4.4. H — гильбертово пространство, $\{v_1, v_2, \dots\}$ — ортогональная система. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\{v_1, v_2, \dots\}$ — ортогональный базис,
2. $\forall x \in H: x \perp v_i \quad \forall i \implies x = 0$,
3. $\text{Clspan} \{v_1, v_2, \dots\} = H$.

Доказательство. $1 \implies 3$ очевидно, так как $x = S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$

$3 \implies 2. x \perp \text{span} \{v_1, v_2, \dots\} \implies x \perp \text{Clspan} \{v_1, v_2, \dots\} (y_n \rightarrow y, \langle x, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle).$

$2 \implies 1. S(x) - x \perp v_i \quad \forall i \implies S(x) - x = 0 \implies S(x) = x. \quad \square$

4.4. Тригонометрические ряды Фурье

Будем жить в $L^2(-\pi, \pi)$. $C_{2\pi} = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{matrix} f \text{ непр.} \\ f(x+2\pi) = f(x) \forall x \end{matrix} \right\}.$

1. $f \in L^2(-\pi, \pi)$, тогда $\forall \phi \in C_{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) f(x) dx$ корректно определены.
2. Если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -периодична и имеет не более чем счетное число разрывов, то $f \in L^2(-\pi, \pi) \iff \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$

В $L^2(-\pi, \pi)$ есть естественная ОС: $V_n = e^{int}$.

1. $v_n \perp v_m$, если $n \neq m$: $\langle v_n, v_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = 0$.

2. $\|v_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi$.

Следствие. $1, \sin t, \sin(2t), \dots, \cos t, \cos(2t), \dots$ — это ОС в $L^2(-\pi, \pi)$.

Доказательство. $\begin{pmatrix} e^{int} \\ e^{-int} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) + i \sin(nt) \\ \cos(nt) - i \sin(nt) \end{pmatrix}$ □

Цель — доказать, что эта ОС — ОБ.

Лемма (Лемма Римана-Лебега). Пусть $a < b \in \mathbb{R}, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция,

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

Доказательство. $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.

$$\int_a^{b-\frac{\pi}{n}} f(x) \sin(nx) dx = - \int_{a+\frac{\pi}{n}}^b f(x + \frac{\pi}{n}) \sin(nx) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \int_a^b f(x) \sin(nx) dx &= \int_a^{b-\frac{\pi}{n}} f(x) \sin(nx) dx + O(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \left(\int_a^{b-\frac{\pi}{n}} f(x) \sin(nx) dx - \int_{a+\frac{\pi}{n}}^b f(x + \frac{\pi}{n}) \sin(nx) dx \right) + \\ &O(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \int_{a+\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} (f(x) - f(x + \frac{\pi}{n})) \sin(nx) dx + O(\frac{1}{n}) = O(\omega_f(\frac{\pi}{n})) + O(\frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$
 □

Следствие. $f \in L^2(-\pi, \pi)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0$.

Доказательство. $f_k \in C_{2\pi}, f_k \rightarrow f$.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_k(x) \sin(nx) dx - \int_a^b f(x) \sin(nx) dx \right| &\leq \|f_k - f\|_{L^2} \leq \varepsilon, \text{ а также } \left| \int_a^b f_k(x) \sin(nx) dx \right| \leq \varepsilon, \text{ то} \\ \left| \int_a^b f(x) \sin(nx) dx \right| &\leq \varepsilon + \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$
 □

Определение 4.10. $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Тригонометрические ряд Фурье f , это ряд Фурье по ОС $\{1, \sin t, \cos t, \dots\}$, $S(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$, где $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, n \geq 0$.

$$S_N(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx).$$

$$\begin{aligned} \text{Рассмотрим произвольный } S_N(f) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \\ \sum_{n=1}^N \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) \cos(nt) \cos(nx) + f(t) \sin(nt) \sin(nx)) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n(x-t)) \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt, \\ D_N(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nt). \end{aligned}$$

Определение 4.11. $D_N(t)$ называется (N -м) ядром Дирихле.

Свойства. 1. $D_N(t)$ — четная, 2π периодическая.

$$2. \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1.$$

$$3. D_N(t) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})}.$$

Доказательство. $2 \sin(\frac{t}{2}) D_N(t) = \sin \frac{t}{2} + 2 \sum_{n=1}^N \sin(\frac{t}{2}) \cos(nt) = \sin(\frac{t}{2}) \sum_{n=1}^N (\sin(n + \frac{1}{2})t - \sin(n - \frac{1}{2})t) = \sin(N + \frac{1}{2})t$ \square

Лемма. $\forall \delta > 0$ имеем $S_N(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta D_N(t)(f(x+t) + f(x-t))dt + o(1), N \rightarrow \infty$.

Доказательство. $S_N(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)f(x-t)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_N(t)(f(x+t) + f(x-t))dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta D_N(t)(f(x+t) + f(x-t))dt + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} \sin((N + \frac{1}{2})t)dt$ \square

Следствие. $f, g \in L^2(-\pi, \pi), x \in \mathbb{R}$ и $\exists \delta > 0$ $Lf(y) = g(y) \forall y \in (x - \delta, x + \delta)$, тогда $S(f)(y) = S(g)(y) \forall y \in (x - \delta, x + \delta)$, для которого $S(f)(y)$ сходится.

Доказательство. $S_N(f - g)(y) = \int_0^{\delta - (x-y)} D_N(t)(f(x+t) - g(x+t) + f(x-t) - g(x-t))dt + o(1) = o(1) \Rightarrow S(f - g)(y) = 0$ \square

Теорема 4.5 (Признак Дини). Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -периодическая, $f \in L^2(-\pi, \pi), \exists x \in \mathbb{R} : f(x+t) + f(x-t) - 2f_0 = O(t)$ при $t \rightarrow 0$.

Тогда $S(f)(x)$ сходится и $S(f)(x) = f_0$

Доказательство. $S_N(f)(x) = \int_0^\delta D_N(t)(f(x+t) + f(x-t))dt + o(1) = \int_0^\delta D_N(t)(2f_0 + O(t))dt + \int_0^\delta D_N(t) \cdot O(t)dt + o(1) = S_N(f_0) + o(1) + \int_0^\delta \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin(\frac{t}{2})} \cdot O(t)dt + o(1) = f_0 + O(\delta) + o(1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f_0 + O(\delta) \rightarrow f_0$ \square

Следствие. Если f — дифференцируема в x , то $S(f)(x) = f(x)$.