

# **Mathématique physique 1 et 2**

Filière - Mathématiques

## **Physique mathématique 1: Mécanique**

Filière - Physique

**Bachelier en Sciences et Ingénierie**

**Norbert Poncin**

**Université du Luxembourg**

## 1 Informations générales

**Titulaires** : Norbert Poncin et Mourad Ammar

**Contact** : Toute question relative au cours peut être adressée par email à [norbert.poncin@uni.lu](mailto:norbert.poncin@uni.lu) ou à [mourad.ammar@uni.lu](mailto:mourad.ammar@uni.lu) – obligatoirement à partir de votre adresse électronique [prenom.nom.index@student.uni.lu](mailto:prenom.nom.index@student.uni.lu)

**Leçons par semestre** : 90

**Crédits ECTS** : 7 en filière ‘mathématiques’, 6 en filière ‘physique’

**Langue d’enseignement** : Français

**Type d’enseignement** : Cours magistral et travaux dirigés

**Évaluation** : Examen écrit (examen oral, si le nombre d’étudiants en permet l’organisation pratique)

**Niveau** : Semestre 1

### Compétences et contenu :

Le cours de Mécanique est aussi bien un cours de Mathématiques appliquées qu’un cours de Physique théorique. Outre l’assimilation de cette formation de base à la Physique, les objectifs à atteindre sont les suivants. Apprendre à maîtriser les compléments aux autres cours de Mathématiques, enseignés à partir d’un point de vue intuitif et imagé. Se familiariser avec l’utilisation pratique de l’outillage mathématique abstrait. S’initier à la modélisation mathématique. Intérioriser des concepts mathématiques généraux construits graduellement à partir de situations concrètes. Participer activement à un enseignement notamment grâce aux applications proposées.

#### Partie 1

1. Introduction mathématique à la Mécanique
2. Cinématique du point
3. Dynamique du point (référentiels inertiels et non-inertiels)
4. Intégrales premières, diagramme du potentiel, plan de phase
5. Problèmes classiques tels que particules chargées dans un champ électromagnétique, mouvements planétaires, marées, satellites, pendule de Foucault, ...

#### Partie 2

1. Cinématique et Statique du solide
2. Dynamique des systèmes de points et des solides, tenseur d’inertie, ellipsoïde d’inertie
3. Problèmes classiques tels que problème de Lagrange-Poisson, mouvements de la Terre, boule de billard, ...

**Support** : Notes de cours

**Préparation des cours** : Il est recommandé aux étudiants de préparer les thèmes de chaque séance avant le cours y relatif, en lisant attentivement la partie correspondante des notes de cours.

## 2 Exemple d'un examen écrit

Durée de l'examen: **2 heures**

Répartition des points:  $\pm(2, 5 + 3, 5 + 4) + (3 + 3, 5 + 3, 5)$

**Les notations utilisées ci-dessous sont les notations usuelles**

**Une copie soignée, concise et précise sera appréciée**

### 2.1 Première partie

#### 2.1.1 Introduction mathématique à la Mécanique

1. Rappeler brièvement l'interprétation du gradient, de la divergence et du rotationnel.
2. Prouver l'identité

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}.$$

#### 2.1.2 Intégrales premières

Une particule  $P$  de masse  $m$  se déplace dans le champ de pesanteur terrestre sur un anneau vertical  $\mathcal{C}$  de faible section, parfaitement lisse, de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Désignons par  $A$ ,  $B$  et  $D$  les points de  $\mathcal{C}$  de coordonnées cartésiennes respectives  $(r, 0)$ ,  $(0, -r)$  et  $(0, r)$  dans le repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ,  $\vec{e}_1$  étant horizontal et dirigé vers la droite. La particule est soumise de la part du point  $B$  à une force d'attraction  $\vec{f}$  dirigée vers  $B$  et de module  $f = kPB$ ,  $k$  constant, proportionnel à la distance  $PB$  qui sépare cette particule  $P$  du point  $B$ .

1. Déterminer la vitesse  $v_A(P)$  de la particule  $P$  au point  $A$ , nécessaire pour que  $P$  atteigne  $D$  avec une vitesse nulle.
2. Déterminer la réaction  $R$  exercée par l'anneau sur la particule lorsque celle-ci passe par  $B$ , sachant que la vitesse en  $A$  est celle calculée à la question précédente.

Réponses :  $v_A(P) = \frac{2r}{m}(mg + kr)$ ,  $R = 5mg + 4kr$ .

#### 2.1.3 Mouvements planétaires

1. Soit un point matériel  $P$  dans un champ de forces central. Établir les formules de Binet

$$\begin{aligned} \vec{v} &= -h(d_\theta u \vec{e}_r - u \vec{e}_\theta), \quad v^2 = h^2 \left[ (d_\theta u)^2 + u^2 \right], \\ \vec{\gamma} &= -h^2 u^2 \left[ d_\theta^2 u + u \right] \vec{e}_r. \end{aligned}$$

2. Supposer à présent que la force est de plus attractive et de module proportionnel à  $\frac{1}{r^2}$ . Prouver que la trajectoire de  $P$  est une conique.
3. Se ramener, moyennant deux intégrales premières, à une situation permettant d'utiliser le diagramme du potentiel. Discuter la nature de la trajectoire en fonction de la valeur de l'énergie totale. On rappelle que la courbe du potentiel (efficace) admet un minimum au point  $(\frac{mh^2}{k}, -\frac{1}{2} \frac{k^2}{mh^2})$ .

## 2.2 Deuxième partie

### 2.2.1 Mécanique du Point dans un référentiel non inertial

Un disque de rayon  $R$  tourne autour de son axe supposé vertical, à la vitesse angulaire constante  $\omega$ . Une particule  $P$  de masse  $m$ , astreinte à se mouvoir sans frottement sur un rayon du disque, est abandonnée sans vitesse initiale par rapport au disque, à la distance  $\frac{R}{2}$  du centre.

1. Trouver la loi du mouvement  $r = r(t)$  du point  $P$  par rapport au disque.
2. Déterminer la durée au bout de laquelle  $P$  atteint le bord du disque.

### 2.2.2 Mécanique des Systèmes de Points

1. Prouver que la quantité de mouvement d'un système matériel coïncide avec celle de son centre de masse.
2. Démontrer que la résultante des forces internes agissant sur un système, et le moment résultant des forces internes, par rapport à un point quelconque, sont nuls, et que la puissance des forces internes s'annule au cas où le système considéré est un solide.
3. Établir les théorèmes de la quantité de mouvement et du centre de masse, le théorème du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.

### 2.2.3 Mécanique des Solides

Une échelle (i.e. une tige de masse  $m$  et de longueur  $\ell$ ) est appuyée contre un mur. L'angle entre l'échelle et le mur est noté  $\theta$ . Les conditions initiales sont  $\theta \simeq 0$  et  $\dot{\theta} = 0$ . L'échelle glisse ensuite sans frottement (le sol et le mur sont supposés infiniment lisses). Déterminer la position  $\theta$  en laquelle l'échelle perd le contact avec le mur.

# Chapitre 1

## Introduction mathématique à la Mécanique

Sauf mention explicite du contraire, nous nous placerons dans l'espace vectoriel réel tridimensionnel  $E$  des vecteurs de l'espace ambiant (dans lequel une unité de longueur a été choisie).

### 1 Algèbre vectorielle

#### 1.1 Produit scalaire

**Définition 1.** On appelle norme  $\|\vec{u}\|$  ou module  $u$  d'un vecteur  $\vec{u} \in E$ , la longueur de ce vecteur.

Les propriétés d'une norme sont bien connues et ne seront pas rappelées.

**Définition 2.** Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in E$ . Si ces vecteurs sont tous les deux non nuls, leur produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = uv \cos \theta \in \mathbb{R},$$

où  $\theta$  désigne l'angle formé par les deux vecteurs. Si l'un au moins des vecteurs est nul, leur produit scalaire est nul.

Notons qu'ici  $\theta$  peut être n'importe lequel des deux angles (ou même des quatre, si l'on tient compte des signes) définis par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

On sait que ce produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive:

**Proposition 1.** Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}_i, \vec{v}_i \in E$  et  $c_i \in \mathbb{R}$ . Le produit scalaire est

- à valeurs réelles

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R},$$

- bilinéaire

$$\left( \sum_i c_i \vec{u}_i \right) \cdot \vec{v} = \sum_i c_i (\vec{u}_i \cdot \vec{v})$$

et

$$\vec{u} \cdot \left( \sum_i c_i \vec{v}_i \right) = \sum_i c_i (\vec{u} \cdot \vec{v}_i),$$

- symétrique

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

- et défini positif

$$(\vec{u})^2 := \vec{u} \cdot \vec{u} = u u = u^2 > 0, \forall \vec{u} \neq \vec{0}.$$

Il est clair que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \quad (1)$$

et que

$$u = 1 \iff (\vec{u})^2 = 1.$$

Ainsi, le triplet de vecteurs  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est une base orthonormée (BON) si et seulement si  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \forall i \neq j$  et  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1, \forall i = j$ . Le symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$  défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j \end{cases},$$

rend les calculs plus élégants et les écritures plus compactes. Ainsi,  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est une BON si et seulement si

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \forall i, j.$$

On obtient alors facilement l'expression du produit scalaire et de la norme dans une BON. Nous désignerons les composantes d'un vecteur  $\vec{u}$  dans une base donnée systématiquement par  $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ . Si la base est  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , ceci signifie que

$$\vec{u} = \sum_i u_i \vec{e}_i.$$

Donc

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (\sum_i u_i \vec{e}_i) \cdot (\sum_j v_j \vec{e}_j) \\ &= \sum_{ij} u_i v_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \\ &= \sum_{ij} u_i v_j \delta_{ij} \\ &= \sum_i u_i v_i, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la bilinéarité du produit scalaire et le caractère orthonormé de la base. Comme la norme s'exprime moyennant le produit scalaire,  $u^2 = (\vec{u})^2$ , on en déduit de suite l'expression de la norme dans une BON.

**Proposition 2.** Dans toute BON,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_i u_i v_i \quad (2)$$

et

$$u = \sqrt{\sum_i (u_i)^2}. \quad (3)$$

**Remarque 1.** Sauf mention explicite du contraire, toutes les bases considérées dans la suite seront des BON.

## 1.2 Produit vectoriel

Les notions de base directe (droite, positive) et de base indirecte (gauche, negative) sont supposées connues.

**Définition 3.** Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in E$ . Si ces vecteurs ne sont pas colinéaires, le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  de  $\vec{u}$  par  $\vec{v}$  a la direction orthogonale au "plan" défini par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , est de module

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \theta| > 0$$

( $\theta$ : angle formé par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ) et son sens est tel que le trièdre  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  soit direct. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, leur produit vectoriel est nul.

On remarquera que

•

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires,} \quad (4)$$

résultat qu'on comparera à (1),

- le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est orthogonal à chacun des deux facteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,
- dans la définition du module  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$  on peut supprimer la valeur absolue, si l'on convient de choisir  $\theta \in ]0, \pi[$ ,
- le module  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$  coïncide avec l'aire du parallélogramme construit sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,
- le sens de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  peut être déterminé à l'aide de la règle du tire-bouchon,
- si l'on change l'orientation de l'espace, i.e. si l'on appelle directes (respectivement indirectes) les précédentes bases indirectes (respectivement directes), le produit vectoriel change de signe.

Le produit vectoriel changeant de signe, si l'orientation de l'espace change, il ne s'agit que d'un *pseudo-vecteur* ou *vecteur axial*. Par opposition, un vecteur ordinaire est parfois appelé *vecteur polaire*.

Rappelons que le produit vectoriel est une multiplication bilinéaire et antisymétrique:

**Proposition 3.** Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}_i, \vec{v}_i \in E$  et  $c_i \in \mathbb{R}$ . Le produit vectoriel est

- à valeurs "vectorielles"

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \in "E",$$

- bilinéaire

$$\left( \sum_i c_i \vec{u}_i \right) \wedge \vec{v} = \sum_i c_i (\vec{u}_i \wedge \vec{v})$$

et

$$\vec{u} \wedge \left( \sum_i c_i \vec{v}_i \right) = \sum_i c_i (\vec{u} \wedge \vec{v}_i)$$

- et antisymétrique

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Soit à présent une base orthonormée directe (BOND)  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . On vérifie aisément que

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 = \vec{0} & \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 & \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 & \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2 = \vec{0} & \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 & \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3 = \vec{0}. \end{array}$$

On notera que dans les résultats  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$  les indices apparaissent dans l'ordre naturel. Les neuf relations ci-dessus peuvent être condensées en une seule, grâce au symbole de Levi-Civita  $\epsilon_{ijk}$  ( $i, j, k$  variant comme toujours dans  $\{1, 2, 3\}$ ) défini par

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{si deux au moins des indices } i, j, k \text{ sont égaux,} \\ 1, & \text{si les indices } i, j, k \text{ apparaissent dans l'ordre naturel,} \\ -1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que les neuf égalités se résument alors par

$$\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \vec{e}_k, \forall i, j. \quad (5)$$

Ceci étant, l'expression du produit vectoriel dans une BOND s'obtient comme suit, les notations étant les notations habituelles.

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \sum_{ij} u_i v_j (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) \\ &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} u_i v_j \vec{e}_k \\ &= \sum_k \left( \sum_{ij} \epsilon_{ijk} u_i v_j \right) \vec{e}_k \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Les trois composantes dans une BOND du produit vectoriel s'obtiennent donc à partir des composantes des deux facteurs

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix},$$

en biffant dans ce tableau successivement les trois colonnes et en prenant les déterminants restants précédés des signes  $+, -, +$  respectivement.

**Proposition 4.** Dans toute BOND,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} u_i v_j \vec{e}_k. \quad (6)$$

**Remarque 2.** Sauf mention explicite du contraire, toutes les bases considérées dans la suite seront des BOND.



### 1.3 Produit mixte

**Définition 4.** On appelle produit mixte des vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ , le pseudo-scalaire  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ .

Les propriétés du produit mixte découlent de son expression dans une BOND. Comme

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) w_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) w_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) w_3,$$

on a la

**Proposition 5.** Dans toute BOND,

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Vu les propriétés des déterminants, on en déduit la

**Proposition 6.** Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$ ,

•

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0 \iff \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.} \quad (8)$$

• Un produit mixte est invariant par permutation circulaire (paire),

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

et

$$(\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{v} = (\vec{w} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u},$$

mais deux produits quelconques de la première et seconde lignes respectivement, sont opposés.

On comparera (8) aux résultats (1) et (4).

Le produit mixte admet une intéressante interprétation géométrique:

- La valeur absolue du produit mixte  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$  est égale au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$ .
- Le produit mixte  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$  est strictement positif (respectivement strictement négatif) si et seulement si le triplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base directe (respectivement indirecte).

Le produit mixte permet d'obtenir des relations utiles entre les symboles de Levi-Civita et de Kronecker. Considérons une base (orthonormée directe)  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et notons que  $\vec{e}_i$  se décompose sous la forme  $\vec{e}_i = \sum_j \delta_{ij} \vec{e}_j$ . D'un côté, l'équation (6) donne

$$(\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk}.$$

De l'autre,

$$(\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}.$$

Etant donné qu'un déterminant est invariant par transposition et que  $\delta_{i1}\delta_{r1} + \delta_{i2}\delta_{r2} + \delta_{i3}\delta_{r3} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_r = \delta_{ir}$ , on obtient

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix}.$$

Ceci étant, on vérifie sans peine les trois relations suivantes:

**Proposition 7.** *On a*

- $$\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{rsk} = \delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}, \quad (9)$$

- $$\sum_{jk} \epsilon_{ijk}\epsilon_{rjk} = 2\delta_{ir},$$

- $$\sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6.$$

## 1.4 Double produit vectoriel

**Définition 5.** *On appelle doubles produits vectoriels, les vecteurs (polaires)  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$  et  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ ,  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$ .*

En appliquant deux fois de suite (6), puis (9) et (2), on trouve la

**Proposition 8.** *On a*

- $$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u},$$

- $$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}.$$

Ces relations simplifient les doubles produits vectoriels. La seconde se déduit de la première. Elles montrent que le double produit vectoriel n'est pas associatif ! On peut les mémoriser comme suit: *Le double produit vectoriel est égal au vecteur du milieu multiplié par le produit scalaire des deux autres vecteurs, moins l'autre vecteur de la parenthèse multiplié par le produit scalaire des deux autres.*

## 2 Dérivation et différentiation

### 2.1 Fonctions scalaires et vectorielles

Une fonction scalaire (respectivement vectorielle) de variables scalaires  $x, y, \dots \in \mathbb{R}$  est un scalaire  $s(x, y, \dots)$  (respectivement un vecteur  $\vec{v}(x, y, \dots)$ ) univoquement défini pour tout uplet  $(x, y, \dots)$  dans un certain domaine.

Afin de simplifier l'exposé, nous nous limitons d'abord aux fonctions d'une seule variable scalaire, notée  $t$  et pouvant être interprétée comme étant le temps. Soient une fonction vectorielle  $\vec{v}(t)$  et une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  indépendante de  $t$ . La dérivée  $\frac{d}{dt}\vec{v}$  ou simplement  $d_t\vec{v}$  ou—si  $t$  est effectivement le temps—même  $\dot{\vec{v}}$ , étant définie comme d'habitude, on constate facilement que si  $\vec{v}(t) = \sum_i v_i(t)\vec{e}_i$ , alors

$$d_t\vec{v} = \sum_i (d_t v_i) \vec{e}_i.$$

### 2.2 Théorèmes de dérivation

Dans ce cours de Mécanique, toutes les fonctions sont systématiquement supposées indéfiniment continûment dérivables (ou du moins suffisamment dérivables pour garantir le sens des expressions écrites).

Les règles de dérivation usuelles se généralisent des fonctions scalaires aux fonctions vectorielles. Ainsi, tous les produits de vecteurs et le produit  $s(t)\vec{v}(t)$  d'un scalaire et d'un vecteur se dérivent conformément à la *règle de Leibniz*. Pour le produit mixte de trois fonctions  $\vec{u}(t)$ ,  $\vec{v}(t)$  et  $\vec{w}(t)$  par exemple, on a

$$d_t((\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}) = ((d_t\vec{u}) \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} + (\vec{u} \wedge (d_t\vec{v})) \cdot \vec{w} + (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (d_t\vec{w}).$$

Rappelons la version mathématique du théorème de dérivation d'une fonction composée,

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) f', \quad (10)$$

où "prime" désigne l'opération de dérivation. Considérons à présent trois grandeurs  $t, r, v$ , telles que  $r = r(t)$  et  $v = v(r)$  et dérivons la fonction composée  $v = v(r(t))$ . Il découle de (10) que

$$d_t v = d_t(v(r(t))) = d_r v \, d_t r. \quad (11)$$

En vue de généraliser cette version physique du théorème de dérivation des fonctions composées, imaginons des grandeurs  $t, r, s, \vec{v}$ , telles que  $r = r(t)$ ,  $s = s(t)$  et  $\vec{v} = \vec{v}(r, s)$ . La dérivée de la composée  $\vec{v} = \vec{v}(r(t), s(t))$  est alors donnée par

$$d_t \vec{v} = d_t(\vec{v}(r(t), s(t))) = \partial_r \vec{v} \, d_t r + \partial_s \vec{v} \, d_t s, \quad (12)$$

où la différence entre une dérivée totale et une dérivée partielle est supposée connue. Les résultats (11) et (12) expriment que les fonctions composées se dérivent à l'aide de la *règle en chaîne*.

La forme mathématique du théorème de dérivation des bijections inverses se lit

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \quad (13)$$

Si  $r$  et  $s$  sont des grandeurs telles que  $r = r(s)$  et si cette relation s'inverse en  $s = s(r)$ , on obtient immédiatement l'écriture

$$d_r s = \frac{1}{d_s r}$$

de (13) utilisée en Physique. Elle exprime que *la dérivée de l'inverse est l'inverse de la dérivée*.

Remarquons pour terminer que *la dérivée d'un vecteur de norme constante est orthogonale à ce vecteur*. De fait, si  $\vec{v}(t)$  est de norme  $\|\vec{v}(t)\|$  constante, on a  $0 = d_t(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot (d_t \vec{v})$ . D'où la thèse.

### 2.3 Différentielle

Considérons une fonction  $s = s(t)$ , notons  $t$  la valeur initiale de la variable  $t$  (double emploi!) et désignons par  $\Delta t$  un accroissement infinitésimal (non nul) de la variable à partir de cette valeur initiale. La différence

$$\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} - s'(t) =: \frac{\Delta s}{\Delta t} - s'(t) =: \varepsilon(\Delta t)$$

tend évidemment vers 0 avec l'accroissement  $\Delta t$ . On en déduit que

$$\Delta s = s'(t) \Delta t + \Delta t \varepsilon(\Delta t). \quad (14)$$

Posons  $ds := s'(t) \Delta t$ . L'application de cette définition à la fonction  $s = s(t) = t$  donne  $dt = \Delta t$ , si bien que la précédente définition prend sa forme finale:

**Définition 6.** Soient une fonction  $s = s(t)$ , une valeur initiale  $t$  de sa variable et un accroissement  $\Delta t$  de cette variable. On appelle alors différentielle de  $s$  et on note  $ds$  le produit

$$ds = s'(t) dt$$

de la dérivée de  $s$  évaluée en la valeur initiale de la variable par de la différentielle  $dt = \Delta t$  de la variable, donnée par l'accroissement de la variable.

Ainsi, l'équation (14) s'écrit

$$\Delta s = ds + \Delta t \varepsilon(\Delta t).$$

En négligeant l'infiniment petit  $\Delta t \varepsilon(\Delta t)$  d'ordre supérieur à 1 en  $\Delta t$  par rapport à l'infiniment petit  $ds = s'(t) \Delta t$  du premier ordre, on obtient

$$\Delta s \simeq ds. \quad (15)$$

En d'autres termes, la différentielle  $ds$  de  $s$  est l'accroissement  $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$  de  $s$  (résultant d'un accroissement infinitésimal  $\Delta t$  de  $t$ ), calculé au premier ordre en  $\Delta t$ . De manière plus courte: *la différentielle est un petit accroissement calculé au premier ordre*. Voilà l'aspect essentiel de la différentielle en Mécanique.

La définition de la différentielle et sa principale propriété (15) se généralisent sans problème. Ainsi, pour une fonction  $s = s(x_1, \dots, x_n)$  par exemple, on pose

$$ds := \sum_i \partial_{x_i} s dx_i,$$

où les dérivées partielles sont évaluées sur les valeurs initiales des variables et où les différentielles des variables représentent les petits accroissements de ces variables.

### 3 Gradient, divergence, rotationnel

On sait qu'un *champ de vecteurs* est un vecteur  $\vec{v} = \vec{v}(P)$  qui est fonction du point  $P$  de l'espace (ou d'une région de l'espace) où on le considère. De même un *champ de scalaires* ou *champ scalaire* est un scalaire  $s = s(P)$  qui dépend point où on l'évalue. Si l'on fixe un repère (orthonormé) (RON)  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , ces champs peuvent être considérés comme des fonctions des coordonnées  $x = (x_1, x_2, x_3)$  de  $P$ :  $\vec{v} = \vec{v}(x) = \vec{v}(x_1, x_2, x_3)$  et  $s = s(x) = s(x_1, x_2, x_3)$ . Les définitions du gradient, de la divergence et du rotationnel sont particulièrement agréables, si l'on utilise l'opérateur de dérivation

$$\vec{\nabla} = \sum_i \partial_{x_i} \vec{e}_i. \quad (16)$$

On remarquera que  $\vec{\nabla}$  n'est pas à vrai dire un vecteur, mais un vecteur-opérateur, double nature qui est parfois responsable d'erreurs.

#### 3.1 Gradient

**Définition 7.** Le gradient  $(\vec{\nabla} s)(P)$  d'un champ scalaire  $s$  en un point  $P$  est défini par

$$(\vec{\nabla} s)(P) = \sum_i (\partial_{x_i} s)(x_P) \vec{e}_i, \quad (17)$$

où  $x_P$  désigne le triplet des coordonnées de  $P$ .

On peut vérifier que cette définition est indépendante du RON considéré. Le gradient est donc un opérateur différentiel qui transforme un *champ de scalaires*  $s(P)$  en un *champ de vecteurs*  $(\vec{\nabla} s)(P)$ . Comme il est du premier ordre, il est naturel qu'on ait la

**Proposition 9.** Si  $r$  et  $s$  désignent deux champs scalaires,

$$\vec{\nabla}(r+s) = \vec{\nabla} r + \vec{\nabla} s$$

$$\vec{\nabla}(rs) = (\vec{\nabla} r)s + r(\vec{\nabla} s).$$

En vue de découvrir l'interprétation physique du gradient, nous commençons par exprimer la différentielle et la dérivée directionnelle d'un champ  $s$  en fonction de son gradient.

**Proposition 10.** Soient un champ scalaire  $s$ , une valeur initiale  $P$  de sa variable et un accroissement  $\vec{dP}$  de cette variable. La différentielle  $ds$  de  $s$  est alors donnée par

$$ds = (\vec{\nabla} s)(P) \cdot \vec{dP}.$$

De fait, si l'on se donne un RON et si  $x_P$  et  $(dx_1, dx_2, dx_3)$  sont le triplet des coordonnées de  $P$  et les composantes de  $\vec{dP}$  respectivement, on a

$$ds = \sum_i (\partial_{x_i} s)(x_P) dx_i = (\vec{\nabla} s)(P) \cdot \vec{dP}.$$

**Proposition 11.** La dérivée  $(d_{\vec{v}} s)(P)$  d'un champ scalaire  $s$  dans la direction d'un vecteur unitaire  $\vec{v}$  en un point  $P$  est donnée par

$$(d_{\vec{v}} s)(P) = (\vec{\nabla} s)(P) \cdot \vec{v}. \quad (18)$$

On notera que dans un système d'axes cartésien (RON) ce résultat se lit

$$d_{\vec{v}} s = \sum_i v_i \partial_{x_i} s,$$

où nous avons supprimé le point  $P$ .

Rappelons d'abord que la dérivée de  $s$  au point  $P$  dans la direction de  $\vec{v}$ , définie évidemment par

$$(d_{\vec{v}} s)(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(P + h\vec{v}) - s(P)}{h}$$

(à condition que cette limite existe et soit finie), mesure au point  $P$  l'importance de la variation de  $s$  dans la direction de  $\vec{v}$ . Comme

$$\begin{aligned} s(P + h\vec{v}) - s(P) &= ds + h\varepsilon(h) \\ &= (\vec{\nabla} s)(P) \cdot h\vec{v} + h\varepsilon(h) \end{aligned}$$

( $h \simeq 0$ ), le résultat est immédiat.

Relions à présent tous les points  $P$  où le champ  $s = s(P)$  a une même valeur. Nous obtenons alors généralement des surfaces appelées *surfaces de niveau* de  $s$  (voir figure 1 de l'annexe).

Considérons d'abord l'accroissement  $s(P + \vec{dP}) - s(P)$  de  $s$  résultant d'un accroissement infinitésimal  $\vec{dP}$  tangent en  $P$  à la surface de niveau passant par  $P$ . Au premier ordre, cet accroissement de  $s$  est nul et égal à  $ds$ . Donc,

$$0 = ds = (\vec{\nabla} s)(P) \cdot \vec{dP}. \quad (19)$$

Prenons maintenant un accroissement infinitésimal  $\vec{dP}'$  normal en  $P$  à la surface de niveau et dirigé dans le sens des  $s$  croissants. Alors

$$0 < ds = (\vec{\nabla} s)(P) \cdot \vec{dP}'. \quad (20)$$

In découle des équations (19) et (20) que l'on a la

**Proposition 12.** *Le gradient  $(\vec{\nabla}s)(P)$  est normal en  $P$  à la surface de niveau de  $s$  passant par  $P$  et pointe dans le sens des  $s$  croissants.*

Le vecteur  $\vec{v}$  étant unitaire, l'équation (18) implique que

$$|(d_{\vec{v}}s)(P)| = \|(\vec{\nabla}s)(P)\| |\cos \theta|,$$

$\theta \in [0, \pi]$  étant l'angle formé par  $(\vec{\nabla}s)(P)$  et  $\vec{v}$ . Par conséquent, en  $P$  la variation de  $s$  dans la direction de  $\vec{v}$  est maximale, si  $\vec{v}$  est colinéaire à  $(\vec{\nabla}s)(P)$ :

**Proposition 13.** *La direction du gradient  $(\vec{\nabla}s)(P)$  est en  $P$  la direction du plus grand changement de  $s$ .*

### 3.2 Divergence, formule de Gauss-Ostrogradski

**Définition 8.** *La divergence  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(P)$  d'un champ de vecteurs  $\vec{v}$  en un point  $P$  est donnée par*

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(P) = \sum_i (\partial_{x_i} v_i)(x_P), \quad (21)$$

où  $x_P$  représente les composantes de  $P$ .

Nous admettons que le second membre de (21) dépend uniquement de  $\vec{v}$  et de  $P$  et non du RON considéré. La divergence est un opérateur différentiel du premier ordre qui transforme un *champ de vecteurs*  $\vec{v}(P)$  en un *champ de scalaires*  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(P)$ . La proposition suivante est facile à vérifier.

**Proposition 14.** *Si  $s$  est un champ scalaire et  $\vec{v}, \vec{w}$  sont des champs vectoriels, on a*

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot \vec{w}$$

et

$$\vec{\nabla} \cdot (s\vec{v}) = (\vec{\nabla}s) \cdot \vec{v} + s(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}).$$

Insistons sur le fait que les notions suivantes ne sont développées qu'avec la rigueur qui est de mise dans un cours élémentaire de Mécanique.

En vue d'expliquer la signification physique de la divergence, considérons un élément de surface  $dS$  et désignons par  $P$  un point de  $dS$  et par  $\vec{n}(P)$  un vecteur unitaire normal à  $dS$  en  $P$ . Imaginons un fluide en régime permanent traversant  $dS$  à la vitesse  $\vec{v}(P)$ . On appelle flux du fluide à travers  $dS$  et on note  $d\mathcal{F}$  le volume (éventuellement négatif) de fluide traversant  $dS$  par unité de temps (voir figure 2 de l'annexe). Comme  $d\mathcal{F} = \vec{v}(P) \cdot \vec{n}(P) dS$ , le flux  $\mathcal{F}$  du fluide à travers une surface finie  $S$  orientable et orientée (par le choix cohérent en chaque point  $P$  d'un vecteur unitaire normal  $\vec{n}(P)$ ) est donné par

$$\mathcal{F} = \int_S \vec{v}(P) \cdot \vec{n}(P) dS.$$

D'où la définition suivante valable pour tout champ de vecteurs, vitesse de fluide ou non:

**Définition 9.** Soient un champ de vecteurs  $\vec{v}$  et une surface orientée  $S$  placée dans ce champ. On appelle flux de  $\vec{v}$  à travers  $S$ , l'intégrale

$$\int_S \vec{v}(P) \cdot \vec{n}(P) dS,$$

où  $\vec{n}(P)$  désigne le vecteur unitaire normal à  $S$  en  $P$ .

Evaluons le flux d'un champ  $\vec{v}(P)$  à travers la surface d'un parallélépipède infinitésimal orientée de manière que  $\vec{n}(P)$  soit en tout point dirigé vers l'extérieur (voir figure 3). Le flux à travers la surface  $(PQRS)$  vaut

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) \cdot (-\vec{e}_1) dx_2 dx_3 = -v_1(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3$$

et celui à travers  $(P'Q'R'S')$  est donné par

$$\begin{aligned} \vec{v}(x_1 + dx_1, x_2, x_3) \cdot \vec{e}_1 dx_2 dx_3 &= (\vec{v}(x_1, x_2, x_3) + (\partial_{x_1} \vec{v})(x_1, x_2, x_3) dx_1) \cdot \vec{e}_1 dx_2 dx_3 \\ &= v_1(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 + (\partial_{x_1} v_1)(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Ainsi, si nous notons  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  le volume du parallélépipède, le flux à travers sa surface est égal à

$$d\mathcal{F} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(P) dV.$$

Soit maintenant un volume fini  $V$  limité par une surface fermée  $S$  orientée par la normale extérieure. Décomposons  $V$  en une infinité de parallélépipèdes infinitésimaux. La somme des flux élémentaires à travers tous ces parallélépipèdes est égale au flux à travers  $S$ , car les flux à travers deux surfaces élémentaires adjacentes se compensent, les vecteurs unitaires normaux étant opposés. Finalement, on a le

**Theorème 1.** Si un volume  $V$  limité par une surface fermée  $S$  orientée par la normale extérieure  $\vec{n}(P)$ , est placé dans un champ de vecteurs  $\vec{v}(P)$ , on a

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(P) dV = \oint_S \vec{v}(P) \cdot \vec{n}(P) dS. \quad (22)$$

Ce résultat porte le nom de *formule de Gauss-Ostrogradski*. Elle permet de voir que

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(P) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M) dS}{V}, \quad (23)$$

où  $V$  désigne un volume contenant  $P$  et limité par la surface  $S$ . Si  $\vec{v}(P)$  représente encore la vitesse d'écoulement d'un fluide, la divergence de  $\vec{v}$  au point  $P$  est donc le volume de fluide traversant par unité de temps et de volume une surface fermée infinitésimale contenant le point  $P$ : la *divergence*  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(P)$  mesure l'intensité de source ou d'égout du champ  $\vec{v}$  au point  $P$ .



### 3.3 Rotationnel, formule de Stokes

**Définition 10.** Le rotationnel  $(\vec{\nabla} \wedge \vec{v})(P)$  d'un champ de vecteurs  $\vec{v}$  en un point  $P$  est le pseudo-vecteur défini par

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{v})(P) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} (\partial_{x_i} v_j)(x_P) \vec{e}_k,$$

avec les notations habituelles.

Le second membre de la précédente égalité dépend de  $\vec{v}$ , de  $P$  et de l'orientation choisie, mais est invariant lors d'un changement de RON au sein d'une même orientation. En pratique, les composantes d'un rotationnel s'obtiennent évidemment comme celles d'un (vrai) produit vectoriel. Le rotationnel est un opérateur différentiel du premier ordre qui transforme un *champ vectoriel* en un *champ pseudo-vectoriel*. On vérifie facilement les résultats suivants.

**Proposition 15.** Quels que soient les champs  $s$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , on a

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{v} + \vec{\nabla} \wedge \vec{w}, \\ \vec{\nabla} \wedge (s\vec{v}) &= (\vec{\nabla} s) \wedge \vec{v} + s(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}). \end{aligned}$$

Rappelons la notion de travail. Soit un point placé dans un champ de forces  $\vec{F}$ . Si le champ déplace le point de sa position  $P$  en  $P + d\vec{r}$  (on pourra considérer  $\vec{r}$  comme le vecteur position du point), il est logique de dire que le travail  $d\mathcal{W}$  effectué par la force dans ce déplacement est

$$d\mathcal{W} = \vec{F}(P) \cdot d\vec{r}.$$

Le travail du champ dans un déplacement du point d'une position  $P_0$  vers une position  $P_1$  le long d'une courbe  $\mathcal{C}$  est donc donné par

$$\mathcal{W} = \int_{P_0 \in \mathcal{C}}^{P_1} \vec{F}(P) \cdot d\vec{r},$$

où l'intégrale est celle de  $P_0$  à  $P_1$  le long de  $\mathcal{C}$ . Dans le cas où  $\mathcal{C}$  est une courbe fermée et orientée, cette intégrale est appelée *circulation de  $\vec{v}$  le long de  $\mathcal{C}$* .

**Définition 11.** La circulation d'un champ de vecteurs  $\vec{v}$  le long d'un contour fermé orienté  $C$  est l'intégrale

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v}(P) \cdot d\vec{r}.$$

Afin de calculer la circulation d'un champ de vecteurs  $\vec{v}$  le long d'un contour rectangulaire infinitésimal orienté ( $PQRS$ ), donnons-nous un ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  tel que  $(O, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  contienne le contour ( $PQRS$ ) et tel que le sens de parcours défini par  $\vec{e}_1$  coïncide avec l'orientation choisie (voir figure 4). La circulation élémentaire  $dC$  cherchée vaut alors

$$\begin{aligned} dC &= \vec{v}(x_1, x_2, x_3) \cdot \vec{e}_2 dx_2 + \vec{v}(x_1, x_2 + dx_2, x_3) \cdot \vec{e}_3 dx_3 \\ &\quad - \vec{v}(x_1, x_2, x_3 + dx_3) \cdot \vec{e}_2 dx_2 - \vec{v}(x_1, x_2, x_3) \cdot \vec{e}_3 dx_3 \\ &= ((\partial_{x_2} v_3)(x_P) - (\partial_{x_3} v_2)(x_P)) dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Si l'orientation de la surface élémentaire  $dS$ , limitée par le contour élémentaire  $(PQRS)$ , est choisie de façon cohérente avec celle du contour, la normale unitaire à  $dS$  est  $\vec{n}(P) = \vec{e}_1$ . Alors,

$$dC = (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})(P) \cdot \vec{n}(P) dS.$$

Insistons sur le fait que ce résultat est exact, à condition que les orientations du contour rectangulaire et de la surface qu'il délimite soient compatibles.

Prenons maintenant un contour fermé orienté fini  $\mathcal{C}$  délimitant une surface  $S$  orientée conformément à  $\mathcal{C}$ . Décomposons  $S$  en une infinité de surfaces élémentaires (dont les frontières sont des contours rectangulaires élémentaires orientés (convenablement)) (voir figure 5). La somme des circulations de  $\vec{v}$  le long de tous ces contours est égale à sa circulation le long de  $\mathcal{C}$ , car les contributions d'un côté commun de deux éléments de surface se compensent, les sens de parcours étant différents. D'où, le

**Theorème 2.** *Si une surface orientée  $S$  limitée par un contour fermé  $\mathcal{C}$  orienté de manière cohérente, est placée dans un champ de vecteurs  $\vec{v}$ , on a*

$$\int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})(P) \cdot \vec{n}(P) dS = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v}(P) \cdot d\vec{r}.$$

Ce résultat est célèbre et connu sous le nom de *formule de Stokes*. Elle stipule donc que le flux du rotationnel d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée limitée par un contour fermé orienté de façon cohérente, est égal à la circulation de ce champ le long de ce contour. On en déduit que

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{v})(P) \cdot \vec{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\mathcal{C}} \vec{v}(M) \cdot d\vec{r}}{S},$$

où  $S$  désigne un disque centré en  $P$  limité par la circonférence  $\mathcal{C}$  tous deux orientés par la normale unitaire  $\vec{n}$ , supposée invariable lors du passage à la limite. Il s'ensuit que la composante suivant  $\vec{n}$  du rotationnel au point  $P$  de  $\vec{v}$  traduit au point  $P$  les propriétés rotationnelles de  $\vec{v}$  dans la direction  $\vec{n}$ : le rotationnel est un *vecteur-tourbillon*.

### 3.4 Exercices

#### 3.4.1 Opérateurs du second ordre

Déterminer les opérateurs suivants du second ordre dans un système d'axes cartésiens (ROND).

- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}_S)$
- $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}_S)$
- $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$
- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$
- $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$

On appelle *Laplacien* scalaire l'opérateur

$$\Delta s = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} s).$$

Enfin

$$\Delta \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$$

est le *Laplacien* vectoriel. Trouver l'expression de ces opérateurs dans un système d'axes cartésiens.

### 3.4.2 Champs centraux et champs à symétrie sphérique

Soit  $O$  un point fixe et  $P$  un point variable. On pose  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  et  $r = OP$ . Calculer les grandeurs suivantes en travaillant dans une BOND et en utilisant si possible les règles de calcul relatives aux opérateurs gradient, divergence et rotationnel. Peut-on prévoir certains résultats grâce aux interprétations connues du gradient, de la divergence et du rotationnel.

- $\vec{\nabla} r, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{r}, \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right), \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{r}$
- $\vec{\nabla}(f(r)), \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{f(r)}{r} \vec{r}\right), \quad \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{f(r)}{r} \vec{r}\right)$
- $\Delta(f(r)), \quad \Delta\left(\frac{f(r)}{r} \vec{r}\right)$

Réponses :

- $\frac{\vec{r}}{r}, \quad 3, \quad \frac{2}{r}, \quad 0$
- $d_r f \vec{\nabla} r = d_r f \frac{\vec{r}}{r}, \quad d_r f + \frac{2}{r} f, \quad 0$
- $d_r^2 f + \frac{2}{r} d_r f, \quad \left(d_r^2 f + \frac{2}{r} d_r f - \frac{2}{r^2} f\right) \frac{\vec{r}}{r}$

### 3.4.3 Equation de Laplace, fonctions harmoniques

L'équation

$$\Delta s = 0$$

est appelée *équation de Laplace*, ses solutions sont les *fonctions harmoniques*.

Prouver, en appliquant les résultats de la section précédente, que  $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$  et que  $\Delta \vec{r} = 0$ .

### 3.4.4 Identités remarquables

Prouver les identités suivantes en vous basant sur les définitions du gradient, de la divergence et du rotationnel et en appliquant si nécessaire la relation fondamentale

$$\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abk} = \delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja}.$$

- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{w})$

- $\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{w}) + \vec{w} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$
- $\vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$
- $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(v^2) - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$
- Ci-dessous  $\vec{c}$  est un champ homogène, i.e. constant par rapport à  $P$ . Montrer que

$$\vec{\nabla}(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \vec{c}, \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{r}) = 0, \quad \vec{\nabla} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{r}) = 2\vec{c}$$

Suggestion : Dans les exemples contenant des “doubles produits vectoriels”, commencer par développer ces produits.

# Chapitre 2

## Cinématique du point

La cinématique (du point) est l'étude des mouvements (d'un point) indépendamment des causes qui le provoquent.

### 1 Grandeurs cinématiques fondamentales

On appelle référentiel et on note  $\mathcal{R}$ , le solide de référence, i.e. le solide par rapport auquel les mouvements considérés sont étudiés. On suppose que  $\mathcal{R}$  est parsemé d'horloges fixes, identiques et synchronisées, i.e. qui indiquent le même temps à tout instant. On dit que  $\mathcal{R}$  est muni d'un temps. En mécanique classique le temps peut être considéré comme une notion absolue, i.e. indépendante du référentiel considéré. Pour étudier un mouvement, on se donne généralement un ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  attaché à  $\mathcal{R}$ .

Soit à présent un point  $P$  en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ . On appelle *grandeurs cinématiques fondamentales*, les trois vecteurs suivants :

- Le vecteur position de  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}$  (lié en  $O$ ),

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \sum_i x_i \vec{e}_i,$$

où les  $x_i$  sont les coordonnées de  $P$  dans le ROND considéré. La position  $P$  du point  $P$  (double emploi) variant généralement au cours du temps  $t$ , on a  $P = P(t)$ ,  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  et  $x_i = x_i(t)$ .

- Le vecteur vitesse de  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ,

$$\vec{v} = d_t \vec{r} = \dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{x}_i \vec{e}_i.$$

Bien évidemment  $\vec{v} = \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ , si bien que  $\vec{v}(t)$ , considéré comme vecteur lié en  $P(t)$ , est tangent à la trajectoire de  $P$  au point  $P(t)$  et est dirigé dans le sens du mouvement.

- Le vecteur accélération de  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ,

$$\vec{\gamma} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \sum_i \ddot{x}_i \vec{e}_i.$$

Nous obtiendrons plus tard des précisions relatives à direction et au sens de  $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(t)$ .

## 2 Etude du mouvement en coordonnées polaires

Soit un point  $P$  animé d'un mouvement plane par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ . Notons  $\mathcal{P}$  le plan du mouvement et soit  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  un ROND de  $\mathcal{P}$ . Nous supposons que la trajectoire  $\mathcal{C}$  de  $P$  ne passe pas par  $O$ . Alors que les coordonnées cartésiennes de  $P$  dépendent du repère considéré, ses coordonnées polaires sont définies par rapport à un axe appelé *axe polaire* et une orientation. L'origine de l'axe s'appelle le *pôle*. Ici nous choisirons l'axe polaire  $(O, \vec{e}_1)$  et l'orientation définie par  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Les coordonnées polaires de  $P$  sont alors son *rayon polaire*  $r = OP$  et son *angle polaire*  $\theta$  qui est la mesure dans  $[0, 2\pi[$  de l'angle orienté  $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OP}) = (\vec{e}_1, \vec{r})$ . On remarquera qu'il s'agit du module et d'un argument du nombre complexe représenté par  $P$ . La relation entre les coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2)$  et les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de  $P$  est claire:

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta. \quad (1)$$

Tout comme l'utilisation des coordonnées cartésiennes implique des calculs dans le ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , celle des coordonnées polaires entraîne des calculs dans le ROND mobile  $(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  défini par

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \text{ et } \vec{e}_\theta = d_\theta \vec{e}_r. \quad (2)$$

Evidemment

$$\vec{e}_r = \frac{x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2}{r} = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2$$

et

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2,$$

si bien que  $\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta)$  et  $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(\theta)$ . Le caractère orthonormé de la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  résulte de la précédente décomposition de ces vecteurs dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . On remarquera cependant aussi que  $\vec{e}_r$  est unitaire par définition et que  $\vec{e}_\theta$  lui est orthogonal en tant que dérivée d'un vecteur de norme constante. L'observation

$$\vec{e}_\theta(\theta) = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2 = \cos \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{e}_1 + \sin \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{e}_2 = \vec{e}_r \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

facilite la représentation du repère  $(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  qui est donc bien un ROND mobile de  $\mathcal{P}$ . Comme  $\vec{r}, \vec{v}$  et  $\vec{\gamma}$  sont situés dans  $\mathcal{P}$ , on peut les décomposer dans la base mobile  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ . Comme  $r = r(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$ ,  $\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta(t))$ ,  $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(\theta(t))$ , on obtient :

$$\vec{r} = r \vec{e}_r, \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta, \quad \vec{\gamma} = (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta. \quad (3)$$

### 3 Etude du mouvement en coordonnées cylindriques

Soit un point  $P$  en mouvement par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  et soit  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  un ROND attaché à  $\mathcal{R}$ . Le point  $P$  est supposé bouger sans passer par l'axe  $(O, \vec{e}_3)$ . Les coordonnées cylindriques de  $P$  sont alors les réels  $(\rho, \theta, z)$ , où  $(\rho, \theta)$  sont les coordonnées polaires de la projection orthogonale  $P'$  de  $P$  sur le plan  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et où  $z$  n'est autre que la troisième coordonnée cartésienne de  $P$ . On notera que le rayon polaire  $\rho$  de  $P'$  est le module du vecteur position  $\vec{\rho} = \overrightarrow{OP'}$  de  $P'$ , la notation  $r$  restant réservée au module du vecteur position  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  de  $P$ . Les relations entre les coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$  et les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  de  $P$  sont évidemment

$$x_1 = \rho \cos \theta, x_2 = \rho \sin \theta, x_3 = z. \quad (4)$$

Comme dans le cas des coordonnées polaires, l'utilisation des coordonnées cylindriques implique un travail dans une BOND mobile naturellement associée à ces coordonnées. Sa définition est

$$\vec{e}_\rho = \frac{\vec{\rho}}{\rho}, \vec{e}_\theta = d_\theta \vec{e}_\rho \text{ et } \vec{e}_z = \vec{e}_3. \quad (5)$$

Le repère  $(P, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  est visiblement un ROND variable. En vue de la décomposition des vecteurs position, vitesse et accélération dans la nouvelle base, on notera que  $\rho = \rho(t), \theta = \theta(t), z = z(t), \vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho(\theta(t)), \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(\theta(t)), \vec{e}_z = \vec{e}_3$ . Finalement on trouve que

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z, \quad \vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z, \quad \vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta})^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z. \quad (6)$$

### 4 Etude du mouvement en coordonnées sphériques

Considérons encore un point  $P$  en mouvement par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ , un ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  (ou  $(Ox, Oy, Oz)$ ) attaché à  $\mathcal{R}$  et tel que la trajectoire de  $P$  ne coupe pas l'axe  $(O, \vec{e}_3)$  (respectivement  $Oz$ ). Si  $P'$  désigne de nouveau la projection orthogonale de  $P$  sur le plan  $(Ox, Oy)$ , les coordonnées sphériques de  $P$  sont les réels  $(r, \theta, \phi)$ , où  $r = OP \in ]0, +\infty[$ ,  $\theta$  est la mesure dans  $]0, \pi[$  de l'angle  $\{Oz, \overrightarrow{OP}\}$  et  $\phi$  est la mesure dans  $[0, 2\pi[$  de l'angle orienté  $(Ox, \overrightarrow{OP'})$ . Notons que  $r$  fournit la sphère de centre  $O$  qui passe par  $P$ , que  $\theta$  donne le parallèle sur lequel est situé  $P$  et que  $\phi$  détermine le méridien contenant  $P$ . Les relations entre les coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$  et les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  de  $P$  sont

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi, x_2 = r \sin \theta \sin \phi, x_3 = r \cos \theta. \quad (7)$$

La BOND mobile ou base locale naturellement associée aux coordonnées sphériques est définie par

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}, \vec{e}_\theta = \partial_\theta \vec{e}_r, \vec{e}_\phi = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi \vec{e}_r. \quad (8)$$

Il est facile de se convaincre de ce que  $\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta, \phi)$ ,  $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(\theta, \phi)$ ,  $\vec{e}_\phi = \vec{e}_\phi(\phi)$  et de ce que  $(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$  est bien un ROND mobile. On remarquera que la division par  $\sin \theta$  ( $> 0$ ) est nécessaire pour rendre  $\vec{e}_\phi$  unitaire. Voici finalement la décomposition des vecteurs cinématiques dans

la base locale des coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\vec{e}_r, \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\phi, \\ \vec{\gamma} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\vec{e}_\theta \\ &\quad + (2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + 2r\dot{\theta}\cos\theta\dot{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi})\vec{e}_\phi.\end{aligned}\tag{9}$$

## 5 Etude intrinsèque du mouvement, formules de Frenet-Serret

Soit, par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  d'origine  $O$ , un point  $P$  en mouvement sur sa trajectoire  $\mathcal{C}$ . Choisissons sur  $\mathcal{C}$ , qui est en général une courbe gauche, une origine  $\Omega$  et un sens positif  $+$ . On appelle *abscisse curviligne* de  $P$  et on note  $s$ , la distance  $\Omega P$  mesurée le long de  $\mathcal{C}$  et comptée positivement dans le sens positif et négativement dans le sens négatif. Il est clair que  $s = s(t)$ . Afin de simplifier, nous supposons que la vitesse  $\vec{v}$  et l'accélération  $\vec{\gamma}$  de  $P$  sont linéairement indépendantes à tout instant. Il découle notamment de cette hypothèse qu'on a également  $t = t(s)$ .

Nous définissons à présent quelques vecteurs utiles.

Comme  $t = t(s)$ , le vecteur position  $\vec{r}$  de  $P$  peut être considéré comme fonction de  $s$ ,  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ . Il est facile de voir que le vecteur

$$\vec{t} := d_s \vec{r} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s},$$

que nous considérons comme lié en  $P$ , est tangent à  $\mathcal{C}$  en  $P$ , unitaire et dirigé dans le sens  $+$ .

Considérons, pour  $P' \in \mathcal{C}$ ,  $P' \simeq P$ , le plan  $(P, \vec{t}(P), \vec{t}(P'))$  et faisons tendre  $P'$  vers  $P$ . Le plan limite est appelé *plan osculateur* de  $\mathcal{C}$  en  $P$ . Ce plan contient la courbe gauche  $\mathcal{C}$  "au mieux" au voisinage de  $P$ . Dans la cas d'une courbe plane, il s'agit du plan de la courbe. La normale à  $\mathcal{C}$  en  $P$  contenue dans le plan osculateur est appelée *normale principale* de  $\mathcal{C}$  au point  $P$ .

Il est clair que le vecteur

$$d_s \vec{t} := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{t}(s + \Delta s) - \vec{t}(s)}{\Delta s}$$

est contenu dans le plan osculateur et est normal à  $\mathcal{C}$  en  $P$ . Il s'agit donc d'un vecteur normal principal—visiblement dirigé vers la concavité—de  $\mathcal{C}$  en  $P$ . Finalement,

$$\vec{n} := \frac{d_s \vec{t}}{\|d_s \vec{t}\|} = \frac{d_s^2 \vec{r}}{\|d_s^2 \vec{r}\|},$$

considéré encore comme lié au point  $P$ , est unitaire, normal principal et dirigé vers la concavité de  $\mathcal{C}$  en  $P$ .

Le quadruplet  $(P, \vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ , où  $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$ , est un ROND mobile appelé *trièdre de Frenet*.

En vue de faire l'étude du mouvement dans le trièdre de Frenet, nous établirons les formules de Frenet.

On entrevoit que  $\|d_s \vec{t}\| = \|d_s^2 \vec{r}\|$  mesure la *courbure* de  $\mathcal{C}$  en  $P$ . Il est donc naturel d'appeler rayon de courbure de  $\mathcal{C}$  en  $P$ , la grandeur

$$R = \frac{1}{\|d_s \vec{t}\|} = \frac{1}{\|d_s^2 \vec{r}\|}.$$



D'où la *première formule de Frenet* :

$$d_s \vec{t} = \frac{1}{R} \vec{n}. \quad (10)$$

Interprétons  $\|d_s \vec{b}\|$ . Comme  $\vec{b}$  est de norme constante et que  $d_s \vec{b} = \vec{t} \wedge d_s \vec{n}$ , la dérivée  $d_s \vec{b}$  est orthogonale à  $\vec{b}$  et à  $\vec{t}$ , donc colinéaire à  $\vec{n}$  :  $d_s \vec{b} = k \vec{n}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Il est clair que  $|k| = \|d_s \vec{b}\|$  mesure la vitesse de variation/rotation de  $\vec{b}$  et donc la torsion de  $\mathcal{C}$  en  $P$ . Dans le cas d'une courbe plane, la *torsion* (ou seconde courbure) est évidemment nulle. Par analogie avec la courbure  $1/R$ , on note  $k = 1/T$  la torsion. On trouve ainsi la *deuxième formule de Frenet* :

$$d_s \vec{b} = \frac{1}{T} \vec{n}. \quad (11)$$

La dérivée de  $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$  est alors donnée par

$$d_s \vec{n} = -\frac{1}{R} \vec{t} - \frac{1}{T} \vec{b}. \quad (12)$$

C'est la *troisième formule de Frenet*.

La formules de Frenet peuvent être résumées comme suit :

$$\begin{pmatrix} d_s \vec{t} \\ d_s \vec{b} \\ d_s \vec{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{R} \\ 0 & 0 & \frac{1}{T} \\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{b} \\ \vec{n} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Comme  $s = s(t)$ , nous obtenons immédiatement les expressions des vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{\gamma}$  dans la BOND mobile  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  de Frenet :

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{t} \text{ et } \vec{\gamma} = \ddot{s} \vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{R} \vec{n}, \quad (14)$$

où nous avons utilisé la première formule de Frenet. La première de ces relations confirme que  $\vec{v}$  est tangent à  $\mathcal{C}$  en  $P$  et dirigé dans le sens du mouvement. La seconde montre que  $\vec{\gamma}$  est situé dans le plan osculateur et est dirigé vers la concavité de  $\mathcal{C}$  en  $P$ . Vu que

$$d_t \|\vec{v}\|^2 = d_t (\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot \vec{\gamma},$$

le mouvement est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{accélééré} \\ \text{uniforme} \\ \text{décélééré} \end{array} \right\}, \text{ si } \vec{v} \cdot \vec{\gamma} \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 0.$$

## 6 Exercices

1. Un point  $P$  se déplace sur un axe  $(O, \vec{e})$ , dans le sens de  $\vec{e}$  et tel que  $v = hx + b$  ( $x$  : abscisse de  $P$ ,  $v$  : vitesse de  $P$ ,  $h \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ). Trouver l'équation du mouvement,  $x = x(t)$ , sachant qu'à l'instant  $t = t_0$ ,  $P$  occupe la position  $x = x_0$ .

2. Un point  $P$  se déplace dans un plan de manière que  $\dot{x} = ky$  et  $\dot{y} = kx$  ( $x, y$  : coordonnées de  $P$ ,  $k \in \mathbb{R}_*^*$ ). Trouver les équations du mouvement,  $x = x(t)$  et  $y = y(t)$ , sachant qu'à l'instant  $t = 0$ ,  $P$  passe par le point de coordonnées  $(c, 0)$  ( $c \in \mathbb{R}_*^*$ ). Donner l'équation cartésienne de la trajectoire.
3. Un point  $P$  est animé d'un mouvement rectiligne sur un axe  $(O, \vec{e})$ . Ce mouvement est tel que  $\vec{\gamma} = -k\dot{x}^2 \vec{e}$  ( $x$  : abscisse de  $P$ ,  $k \in \mathbb{R}_*^*$ ). Trouver l'équation du mouvement, si en  $t = 0$ ,  $x = 0$  et  $\dot{x} = v_0$  ( $v_0 \in \mathbb{R}_*^*$ ).
4. Un point  $P$  se meut sur la parabole d'équation  $y^2 = 2px$ , de manière que l'hodographe du mouvement par rapport à l'origine  $O$  (i.e. la trajectoire de l'extrémité de  $\vec{v}$  considéré comme vecteur lié en  $O$ ) soit cette parabole elle-même. Déterminer les équations du mouvement et les coordonnées de  $\vec{v}$  et de  $\vec{\gamma}$ , sachant qu'en  $t = 0$ , l'ordonnée de  $P$  est égale au paramètre de la parabole.
5. Un point  $P$  parcourt la courbe d'équation polaire  $r = a \sin \varphi$  ( $a \in \mathbb{R}_*^*$ ), de manière que  $\dot{\varphi} = \omega$  ( $\omega \in \mathbb{R}$ ). Calculer les composantes radiale et orthoradiale de  $\vec{v}$  et de  $\vec{\gamma}$  (i.e. leurs composantes dans la BOND variable  $(\vec{e}_1, \vec{e}_\varphi)$ , puis les coordonnées cartésiennes de  $\vec{v}$  et de  $\vec{\gamma}$ ).
6. Soit la courbe d'équation polaire  $r \cos^2 \frac{\varphi}{2} = a$  ( $a \in \mathbb{R}_*^*$ ). Prouver que cette courbe est une parabole.

Rappel : L'équation polaire d'une conique de paramètre  $p > 0$  et d'excentricité  $e \geq 0$  est

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (15)$$

si le pôle occupe un foyer et si l'axe polaire est dirigé vers le sommet le plus proche. De manière plus précise, si  $e = 0$ , ( $0 < e < 1, e = 1, e > 1$ ), (15) est l'équation d'un cercle (d'une ellipse, d'une parabole, d'une branche d'hyperbole).

Un point  $P$  décrit sa parabole de façon que  $\dot{s} = kr$  ( $k \in \mathbb{R}_*^*$ ) (le sens positif est le sens des  $\varphi$  croissants). Déterminer la loi du mouvement  $\varphi = \varphi(t)$ , sachant que  $\varphi(0) = 0$ .

## Réponses

1.  $x = \frac{hx_0 + b}{h} e^{h(t-t_0)} - \frac{b}{h}$ .
2.  $x = c \cosh kt, y = c \sinh kt, \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$ .
3.  $x = \frac{1}{k} \sin |kv_0 t + 1|$ .
4.  $x = \frac{P}{2} e^{4t}, y = P e^{2t}, \dot{x} = \dots, \dot{y} = \dots, \ddot{x} = \dots, \ddot{y} = \dots$ .
5.  $aw \cos \varphi = aw \cos(\omega t + \varphi_0), aw \sin \varphi = \dots; -2aw^2 \sin \varphi, 2aw^2 \cos \varphi; aw \cos 2\varphi, aw \sin 2\varphi; -2aw^2 \sin 2\varphi, 2aw^2 \cos 2\varphi$ .
6.  $r = \frac{2a}{1 + \cos \varphi}, \varphi = \pi - 4 \arctg e^{-\frac{kt}{2}}$ .

# Chapitre 3

## Dynamique du Point

### 1 Eléments cinétiques d'un point matériel

Un *point matériel* est un objet idéal, un corpuscule ponctuel  $P$  pourvu d'une masse  $m$ . On notera l'aspect contradictoire de cette définition. La *masse* est un scalaire positif, qui est proportionnel à la quantité de matière contenue dans  $P$ . Cette quantité de matière peut être appréciée expérimentalement de deux façons différentes, par la répugnance de  $P$  à toute modification de son mouvement, i.e. par l'inertie de  $P$  et par le poids de  $P$ , i.e. par la force gravifique exercée sur  $P$  par la Terre. On fera une distinction de principe entre la *masse inerte* et la *masse gravifique*, quoique l'expérience montre que ces masses sont égales. La masse  $m$  d'un point matériel  $P$  est évidemment indépendante du temps  $t$  et du référentiel considéré  $\mathcal{R}$ .

Rappelons d'abord la notion de moment. Soit un vecteur lié  $(P, \vec{F})$ , donc un vecteur  $\vec{F}$  appliqué à un point  $P$  et soit un point arbitraire  $O$ . On appelle *moment de  $(P, \vec{F})$  par rapport à  $O$* , le vecteur

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}. \quad (1)$$

On réfléchira à l'information fournie par le sens et par le module  $OP \cdot F \cdot \sin \theta$  (notations habituelles) du vecteur moment.

Soit à présent un point matériel  $(P, m)$  en mouvement par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $\vec{v}$ . On appelle *quantité de mouvement* ou *impulsion de  $P$* , le vecteur

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2)$$

Si  $O$  est un point généralement supposé fixe dans  $\mathcal{R}$ , on appelle *moment cinétique de  $P$  par rapport à  $O$* , le moment en  $O$  de la quantité de mouvement considérée comme vecteur lié à  $P$ , donc le vecteur

$$\vec{\sigma}_0 = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{p}. \quad (3)$$

Rappelons aussi que l'*énergie cinétique de  $P$*  est définie par

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2. \quad (4)$$

Les grandeurs (2)-(4) sont bien connues et appelées les *éléments cinétiques de  $P$* . Elles dépendent du point  $P$  considéré, du référentiel  $\mathcal{R}$  utilisé et du temps  $t$ . Le moment cinétique (3) dépend en outre du point  $O$  par rapport auquel il est calculé (comme mentionné ce point est généralement attaché à  $\mathcal{R}$ , mais ceci n'est pas obligatoire).

## 2 Lois fondamentales de la Mécanique Classique

Ces lois ont été énoncées par I. Newton dans ses *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687). Il s'agit de postulats, mais leur validité est vérifiée depuis longtemps par l'accord de leurs conséquences avec l'expérience et l'observation.

### 2.1 Première loi (principe d'inertie)

*Il existe des référentiels privilégiés dans lesquels le mouvement d'un point isolé est rectiligne et uniforme. Ces référentiels sont appelés référentiels d'inertie ou galiléens.*

On montre que le référentiel de Copernic, qui a pour origine le centre de masse du système solaire et dont les axes sont définis par trois étoiles "fixes", est un référentiel inertial.

Soit  $\mathcal{R}_0$  le référentiel de Copernic et  $\mathcal{R}_1$  un autre référentiel animé par rapport à  $\mathcal{R}_0$  d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme de vitesse (constante)  $\vec{V}$ . Considérons un point isolé arbitraire  $P$ . Son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est rectiligne et uniforme, i.e.  $\vec{v}_0(P)$  est constant. Comme

$$\vec{v}_0(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{V},$$

où  $\vec{v}_1(P)$  désigne la vitesse de  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}_1$ , la vitesse  $\vec{v}_1(P)$  est aussi constant, i.e.  $P$  est également par rapport à  $\mathcal{R}_1$  en mouvement rectiligne et uniforme. Ainsi  $\mathcal{R}_1$  est à son tour inertial. Finalement, tout référentiel, animé par rapport au référentiel de Copernic d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, est lui-même inertial.

Signalons pour terminer que la Terre n'est évidemment pas un référentiel inertial, mais qu'elle peut être assimilée à un tel référentiel dans la plupart des applications pratiques. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre consacré à la Mécanique du Point dans un référentiel non inertial.

### 2.2 Deuxième loi (principe fondamental de la Dynamique du Point)

Si dans un référentiel inertial, un point matériel  $P$  n'est pas animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, i.e. si sa vitesse  $\vec{v}$  ou encore son impulsion  $\vec{p}$  varient, il n'est pas isolé, i.e. il est en interaction avec le reste de l'Univers. L'action qu'il subit de la part du reste de l'Univers peut être décrite par un vecteur, la *force* s'exerçant sur le point. En d'autres termes, dans un référentiel galiléen, la variation de la quantité de mouvement  $\vec{p}$  d'un point matériel  $P$  implique l'existence d'une force  $\vec{F}$  agissant sur  $P$  et provoquant ainsi cette variation. Le principe fondamental consiste en l'identification de la variation de  $\vec{p}$  et de la force  $\vec{F}$  qui en est la cause. De manière plus précise,

*Dans un référentiel inertial,*

$$\boxed{d_t \vec{p} = \vec{F}} \quad (5)$$

i.e. la dérivée temporelle de la quantité de mouvement  $\vec{p}$  d'un point matériel  $P$  est égale à la résultante  $\vec{F}$  de toutes les forces agissant sur  $P$ .

Il est clair que l'équation (5) s'écrit encore  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ . Dans les applications, la théorie physique des forces donne  $\vec{F}$  sous la forme  $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$ . L'équation (5),

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})} \quad (6)$$

est alors une équation différentielle vectorielle du second ordre, dont l'intégration fournit, compte tenu des conditions initiales

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 \text{ et } \vec{v}(0) = \vec{v}_0,$$

la fonction inconnue  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , i.e. le mouvement de  $P$ .

La relation fondamentale (6) sera appelée dans la suite l'équation de Newton ou la loi du mouvement.

### 2.3 Troisième loi (principe de l'action et de la réaction)

Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux points matériels en interaction. Le principe de l'action et de la réaction stipule que les forces  $\vec{F}_{12}$  exercée sur  $P_1$  par  $P_2$  et  $\vec{F}_{21}$  exercée sur  $P_2$  par  $P_1$  sont directement opposées, i.e. sont des vecteurs liés à  $P_1$  et  $P_2$  respectivement, opposés et portés par la droite  $(P_1 P_2)$ . C'est la version forte de la troisième loi de Newton, admise en Mécanique Classique.

## 3 Théorèmes généraux du mouvement d'un point matériel dans un référentiel inertiel

### 3.1 Théorème de la quantité de mouvement

Le théorème de la quantité de mouvement (TQM) est tout simplement l'équation de Newton (EN), voir Équation (5) et Équation (6).

### 3.2 Théorème du moment cinétique

Soit  $O$  un point fixe du référentiel inertiel  $\mathcal{R}$  considéré. Les autres notations sont les mêmes que ci-dessus. La résultante  $\vec{F}$  des forces appliquées au point matériel  $P$  de masse  $m$  est considérée comme vecteur lié en  $P$ . Partons de la relation

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{p}.$$

Comme  $O$  est fixe, nous obtenons par dérivation

$$d_t \vec{\sigma}_O = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OP} \wedge d_t \vec{p} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(O).$$

Donc, dans un référentiel inertiel,

$$\boxed{d_t \vec{\sigma}_O = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(O)} \quad (7)$$

i.e. la dérivée temporelle du moment cinétique de  $P$  par rapport à un point fixe  $O$  du référentiel est égale au moment en  $O$  de la résultante  $\vec{F}$  des forces agissant sur  $P$ . C'est le théorème du moment cinétique (TMC).

### 3.3 Théorème de l'énergie cinétique

En dérivant l'égalité

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}$$

et en remarquant que le produit scalaire  $\vec{F} \cdot \vec{v}$  n'est autre chose que la puissance instantanée  $\mathcal{P}$  de  $\vec{F}$ , on obtient le théorème de l'énergie cinétique (TEC) :

Dans un référentiel inertiel,

$$\boxed{d_t E_c = \mathcal{P}} \quad (8)$$

i.e. la dérivée temporelle de l'énergie cinétique de  $P$  est égale à la puissance de la résultante des forces s'exerçant sur  $P$ .

Remarquons pour terminer qu'en Mécanique du Point les mouvements s'obtiennent généralement à partir de l'EN (5)-(6), alors que le TMC et le TEC fournissent des *intégrales premières* (IP). La notion d'IP est un concept fondamental en Physique et en Mathématiques. Nous aurons l'occasion de l'étudier en détail dans la suite. En Mécanique du Solide par contre, l'utilisation conjointe des extensions de (généralement) deux des théorèmes TQM, TMC et TEC est nécessaire pour déterminer le mouvement du solide étudié.

## 4 Applications

### 4.1 Schéma de résolution

La résolution d'un problème de Dynamique exige une certaine flexibilité. Le schéma de résolution ci-dessous n'est donc qu'un guide sommaire.

1. Déterminer le nombre de degrés de liberté du point matériel étudié, i.e. le nombre de paramètres nécessaires pour décrire ses positions. Choisir un système d'axes "approprié" et des paramètres ou coordonnées "adaptés" au problème considéré.
2. Faire l'inventaire des forces appliquées au point matériel (force gravifique, forces de liaisons, forces spécifiques, forces fictives [seulement dans un référentiel non inertiel, voir plus loin]...).
3. Utiliser un des théorèmes généraux qui gouvernent le mouvement du point (souvent l'EN). Exprimer toutes les grandeurs intervenant en fonction des paramètres. Projeter (éventuellement) l'équation vectorielle utilisée sur les axes choisis de manière à la remplacer par trois équations scalaires (deux, dans le cas d'un problème plane) plus simples à manipuler. Déterminer les paramètres (et donc le mouvement du point matériel) et les autres inconnues éventuelles (forces de liaisons) en résolvant les équations différentielles ainsi obtenues.

### 4.2 Exercices

- (i) Une particule se déplace dans le champ de pesanteur, sur une circonférence verticale, parfaitement lisse (pendule circulaire, pendule simple). Assimiler la Terre à un référentiel inertiel et déterminer de trois manières différentes l'équation du mouvement de cette particule. Résoudre cette équation dans le cas des oscillations de faible amplitude.

Réponse :  $\ell \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$ ,  $\ell$  : rayon de la circonférence;  $\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t - \varphi)$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

- (ii) Une particule de masse  $m$  est projetée d'un point  $O$  dans un plan vertical. Sa vitesse initiale  $\vec{v}_0$  fait un angle  $\alpha \in ]0, \frac{1}{2}[$  avec l'horizontale. Négliger la résistance de l'air, assimiler la Terre à un référentiel inertiel et déterminer l'équation et la nature de la trajectoire, la portée, l'altitude maximale atteinte et le temps de vol.

Réponse :  $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$ , parabole,  $\frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ ,  $\frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha$ ,  $\frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

- (iii) Même problème que (ii), mais tenir compte de la résistance de l'air. On suppose que la résistance de l'air par unité de masse est proportionnelle à la vitesse, i.e. est donnée par  $R = kgv$  ( $k \in R_+^*$ ) (il en résulte évidemment que la force de résistance s'exerçant sur un point matériel de masse  $m$ , animé d'une vitesse  $\vec{v}$ , est  $\vec{R} = -kmg\vec{v}$ ). Trouver les équations du mouvement.

Réponse :  $x = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-kgt})$ ,  $y = \frac{kv_0 \sin \alpha + 1}{k^2 g} (1 - e^{-kgt}) - \frac{1}{k} t$

- (iv) Dans un milieu de résistance par unité de masse  $R = kgv^2$  ( $k \in R_+^*$ ), une particule de masse  $m$  est projetée verticalement vers le haut, avec une vitesse initiale  $v_0$ . Montrer que la particule retombe au point de projection avec une énergie cinétique diminuée dans le rapport  $\frac{1}{1+kv_0^2}$ , i.e. que le rapport de l'énergie cinétique finale à l'énergie cinétique initiale est égal à  $\frac{1}{1+kv_0^2}$ .

- (v) Rappelons qu'une particule chargée électriquement, de charge  $q$ , placée dans un champ électromagnétique  $(\vec{E}(P,t), \vec{B}(P,t))$  est soumise à la force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}),$$

où  $\vec{v}$  désigne la vitesse de la particule. Généralement, ces forces électromagnétiques sont suffisamment grandes pour que la force de pesanteur éventuelle soit négligeable vis à vis de  $\vec{F}$ .

Considérons au voisinage de la surface terrestre, un champ purement magnétique ( $\vec{E} = 0$ ), uniforme ( $\vec{B}$  est indépendant de  $P$ ) et stationnaire ( $\vec{B}$  est indépendant de  $t$ ). Une particule chargée ( $P, m, q$ ) placée dans ce champ, part d'un point  $O$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$ .

Répondre aux questions suivantes, en assimilant la Terre à un référentiel inertiel et en négligeant la pesanteur et la résistance du milieu.

- 1) Choisir un ROND approprié et déterminer les coordonnées  $(x, y, z)$  de  $P$  en fonction de  $t$ , des composantes de  $\vec{v}_0$  et de la fréquence de Larmor  $\omega = \frac{qB}{m}$ .
- 2) Vérifier que les projections  $P_1$  et  $P_2$  de  $P$  sur le plan  $xOy$  et l'axe  $Oz$  respectivement, sont animées de mouvements uniformes. Il en résulte évidemment que  $P$  est à son tour en mouvement uniforme.
- 3) Déterminer la nature de la trajectoire de  $P$ . Traiter aussi les cas particuliers pouvant se présenter.

Réponse : ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , tel que  $\vec{B} = B\vec{e}_3$ ,  $\vec{v}_0 = v_{0,2}\vec{e}_2 + v_{0,3}\vec{e}_3$ , avec  $v_{0,2} \geq 0$ ;  $x = \frac{v_{0,2}}{\omega} (1 - \cos \omega t)$ ,  $y = \frac{v_{0,2}}{\omega} \sin \omega t$ ,  $z = v_{0,3} t$ ;  $v_{P_1}^2 = v_{0,2}^2$ ,  $v_{P_2}^2 = v_{0,3}^2$ ;  $(x - \frac{v_{0,2}}{\omega})^2 + y^2 = \frac{v_{0,2}^2}{\omega^2}$ ; mouvement hélicoïdal; si  $v_{0,2} = 0$ , le mouvement est rectiligne; si  $v_{0,3} = 0$ , il est circulaire; si  $v_{0,2} = v_{0,3} = 0$ , la particule est au repos

- (vi) Soit un *oscillateur harmonique*, i.e. soit dans le champ de pesanteur, un point matériel  $(P, m)$  se déplaçant sans frottement sur un axe horizontal fixe, sous l'action de la force de rappel d'un ressort (une extrémité du ressort est attachée à l'axe, l'autre—mobile par rapport à l'axe—est attachée au point matériel). Désignons par  $O$  le point de l'axe coïncidant avec la particule  $P$ , lorsque le ressort est dans sa position naturelle, i.e. n'est ni étiré, ni comprimé et notons  $\vec{e}$  un vecteur directeur unitaire de l'axe. Nous supposons la force de rappel linéaire, c'est-à-dire de la forme  $\vec{F}_1 = -kx\vec{e}$  ( $k > 0$ : constant,  $x$ : abscisse de  $P$  dans le repère  $(O, \vec{e})$ ).

- (a) Déterminer  $x$  en fonction de  $t$ , de  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et des deux constantes d'intégration (on assimilera la Terre à un référentiel d'inertie et on négligera la résistance du milieu). Montrer que la période des oscillations vaut  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

- (b) Considérons l'oscillateur harmonique à l'état d'*équilibre* (information donnant les conditions initiales). Appliquons une force constante  $\vec{F}_2 = mf\vec{e}$  ( $f$  : constante) pendant un temps égal au sixième de la période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , après quoi cette force cesse d'agir pendant un sixième de période, puis la force est à nouveau appliquée. Montrer que l'oscillateur reste alors immobile.

Réponse :  $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ ,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Etudier le mouvement dans les intervalles  $[0, \frac{2\pi}{6\omega}]$ ,  $[\frac{\pi}{3\omega}, \frac{2\pi}{3\omega}]$  et  $[\frac{2\pi}{3\omega}, +\infty[$



# Chapitre 4

## Intégrales premières

### 1 Potentiels

Il résulte de la structure des équations de la Mécanique que les champs de forces ou, plus généralement, les champs de vecteurs qui *dérivent d'un potentiel*, i.e. “s'écrivent sous forme de dérivées d'un (ou même de plusieurs) autre(s) champ(s)”, occupent une position privilégiée.

**Définition 1.** *Un champ vectoriel ( resp. pseudo-vectoriel )  $\vec{F}$  dérive d'un potentiel scalaire ( resp. potentiel vectoriel ), s'il existe un champ scalaire  $\phi$  (resp. un champ vectoriel  $\vec{A}$ ), tel que*

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi \quad (\text{resp. } \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}).$$

Voici des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de vecteurs (nous omettons éventuellement le préfixe “pseudo”) dérive d'un potentiel.

**Proposition 1.** *Un champ de vecteurs  $\vec{F}$  dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si  $\vec{F}$  est irrotationnel :*

$$\exists \phi : \vec{F} = -\vec{\nabla}\phi \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0,$$

*et un champ de vecteurs  $\vec{F}$  dérive d'un potentiel vectoriel si et seulement si  $\vec{F}$  est indivergentiel :*

$$\exists \vec{A} : \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0,$$

Les implications directes sont des conséquences immédiates des définitions des opérateurs “gradient”, “divergence” et “rotationnel”. Les réciproques sont moins évidentes et imposent des conditions topologiques—sur lesquelles nous n'insisterons pas—à la région de l'espace où les champs sont définis. On notera que la première implication inverse est un problème de primitivation dans  $\mathbb{R}^3$ . En Géométrie différentielle, la précédente proposition admet une importante généralisation dans le cadre des théories (co)homologiques.

**Exemple.** En Physique, un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B}) = (\vec{E}(t, P), \vec{B}(t, P))$  fournit un exemple faisant intervenir les deux types de potentiel, scalaire et vectoriel. En effet, la Proposition 1 montre qu'il découle des équations de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

(en fait, les équations de Maxwell forment un système de quatre équations qui décrivent les relations entre le champ électrique, le champ magnétique, la charge et le courant électriques; ici nous n'utilisons que deux de ces quatre équations), que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \text{ et que } \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A},$$

où  $\phi$  et  $\vec{A}$  sont des potentiels appelés potentiels électromagnétiques.

**Remarque.** Signalons qu'il existe une condition nécessaire et suffisante, pour qu'un champ de forces dérive d'un potentiel, basée sur la notion de travail. Considérons un point  $P$  en mouvement, par rapport à un référentiel, dans un champ de forces  $\vec{F} = \vec{F}(P)$  et rappelons, voir Chapitre 1, que le travail de  $\vec{F}$  dans le déplacement de  $P$  le long de sa trajectoire  $\mathcal{C}$ , entre une position initiale  $P_1 = P(t_1)$  et une position finale  $P_2 = P(t_2)$ , est donné par

$$\mathcal{W} = \int_{P_1 \mathcal{C} P_2} \vec{F}(P) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d_t \vec{r} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t) dt.$$

Si  $\vec{F}$  dérive d'un potentiel, i.e. si  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ , on obtient

$$\mathcal{W} = - \int_{t_1}^{t_2} (\vec{\nabla}\phi)(\vec{r}(t)) \cdot d_t \vec{r} dt = - \int_{t_1}^{t_2} d_t(\phi(\vec{r}(t))) dt = \phi(P_1) - \phi(P_2) = -\Delta\phi.$$

Ainsi, lorsqu'un champ de forces dérive d'un potentiel, son travail dans un déplacement ne dépend que du point de départ  $P_1$  et du point d'arrivée  $P_2$ , mais non du chemin suivi entre  $P_1$  et  $P_2$ , et vice versa. Pour la réciproque, voir Théoreme de Stokes, Chapitre 1.

## 2 Exercices

1. Prouver que le *champ de gravitation* terrestre  $\vec{g} = \vec{g}(P)$  dérive d'un potentiel  $\phi = \phi(P)$ . De manière plus précise, démontrer que, dans une région suffisamment petite pour que  $\vec{g}$  puisse être considéré comme constant, on a

$$\phi = \phi(P) = \phi(x, y, z) = gz (+C),$$

où  $C$  désigne une constante arbitraire et où  $(x, y, z)$  sont les composantes de  $P$  dans un RON dont le troisième axe est dirigé vers le Zénith. On remarquera que le potentiel, comme toute "primitive", est défini à une constante additive près.

2. Soit  $\vec{F} = \vec{F}(P)$  un champ de forces central de centre (fixe)  $O$ . Si  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ , on a  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r}) \frac{\vec{r}}{r}$ , où  $f$  désigne le module  $F$  de  $\vec{F}$  ou l'opposé de ce module. Évidemment, on dira que  $\vec{F}$  est à symétrie sphérique (autour de  $O$ ), si

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

i.e. si le module de  $\vec{F}$  est constant sur toute sphère de centre  $O$ . Prouver qu'un tel *champ central* à *symétrie sphérique* dérive d'un potentiel  $\phi$  et que ce potentiel

$$\phi = \phi(r) = - \int f(r) dr$$

est lui-même à symétrie sphérique.

### 3 Intégrales premières

#### 3.1 Définition, exemple

Soit un point matériel  $(P, m)$  en mouvement par rapport à un référentiel inertiel dans un *champ de force central*  $\vec{F}$  de centre  $O$  (que nous choisissons comme origine). Il découle du Théorème du moment cinétique, voir Chapitre 3, que  $d_t \vec{\sigma}_O = \mathcal{M}_{\vec{F}}(O) = 0$ . En intégrant une première fois cette équation différentielle du second ordre (relation du type  $R(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}) = 0$ ), on trouve que  $\vec{\sigma}_O = m \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = \vec{C}$ ,  $\vec{C}$  constant. En d'autres termes, le moment cinétique par rapport à  $O$  est constant au cours de tout mouvement  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . L'identité  $\vec{\sigma}_O = \vec{C}$  (relation du type  $S(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = C$ ), obtenue après une première intégration, est appelée une *intégrale première*.

Ainsi, une *intégrale première* (IP) d'une équation différentielle  $R(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}) = 0$  est une relation  $S(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$  qui est constante sur toute solution  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  de cette équation différentielle. Si l'équation différentielle est une équation gouvernant le mouvement d'un point matériel, l'IP  $S(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$  représente une grandeur physique conservée au cours de tout mouvement du point considéré.

Le concept d'intégrale première, fondamental aussi bien en Physique qu'en Mathématiques, est à l'origine de nombreux développements récents en Physique mathématique et théorique. Son lien avec la notion de *symétrie* sera mis en lumière surtout dans les cours plus avancés. Dans le cadre de cet enseignement introductif, l'importance des IP tient au fait que l'intégration complète des équations du mouvement est généralement difficile, alors qu'une première intégration est souvent relativement aisée. *La connaissance d'une ou plusieurs IP conduit à une meilleure compréhension du problème, fournit d'intéressantes informations relatives aux mouvements, et simplifie parfois considérablement le calcul de la solution.*

Dans le cas ci-dessus de la force centrale de centre  $O$ , l'IP  $\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = \vec{h}$ ,  $\vec{h}$  constant, implique que le mouvement de la particule  $(P, m)$  est nécessairement plane.

Cette IP encode cependant encore d'autres informations sur les mouvements. De fait, si on passe, dans le plan du mouvement, en coordonnées polaires en choisissant  $O$  comme pôle, l'IP s'écrit  $r\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = h\vec{e}_z$ , i.e.

$$r^2 \dot{\theta} = h, \quad (1)$$

où la constante d'intégration  $h$  est évidemment déterminée par les conditions initiales du mouvement. L'identité (1) est l'*intégrale première des aires*.

Afin de comprendre sa signification, nous déterminons l'aire  $A$  balayée par le vecteur position  $\vec{r}(t)$  de la particule  $(P, m)$  entre une position initiale  $\vec{r}(t_1)$  et une position finale  $\vec{r}(t_2)$ . Notons d'abord qu'entre deux positions infiniment voisines  $\vec{r}(t)$  et  $\vec{r}(t + dt)$ , cette aire  $dA$  est donnée par la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{r}(t)$  et  $d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)$ :

$$dA = \frac{1}{2} \|\vec{r} \wedge d\vec{r}\|.$$

Donc, si on prend  $dt > 0$ ,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left\| \vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \frac{1}{2} r^2 |\dot{\theta}| = \frac{1}{2} |h|.$$

Il en résulte que

$$A = \int dA = \int_{t_1}^{t_2} d_t A \, dt = \frac{1}{2} |h| (t_2 - t_1).$$

Ainsi, l'aire balayée par le vecteur position au cours d'un intervalle de temps donné, est proportionnelle à cet intervalle de temps, la constante de proportionnalité étant  $\frac{1}{2}|h|$ . Cette conséquence quasi-immédiate de l'IP de aires s'applique notamment aux planètes en mouvement dans le champ de gravitation (central) du Soleil. Cette loi de proportionnalité est connue sous le nom de *loi des aires* (J. Kepler, 1609). Les planètes décrivant des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe un foyer, il s'ensuit que la vitesse des planètes est maximale au *périhélie* (point de l'ellipse le plus proche du Soleil) et est minimale à l'*aphélie* (point le plus éloigné).

Le précédent exemple permet d'apprécier la valeur des IP et motive leur étude systématique dans la section suivante.

### 3.2 Lois de conservation

**Théorème 1.** Soit une particule  $(P, m)$  en mouvement par rapport à un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$  et soumise à une résultante de forces  $\vec{F}$ .

1. Si  $\vec{F} = 0$ , l'impulsion  $\vec{p}$  de  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est conservée au cours des mouvements de  $P$ .
2. Si  $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(O) = 0$ , i.e. si  $\vec{F}$  est un champ de forces central de centre  $O$ , le moment cinétique  $\vec{\sigma}_O$  de  $P$  par rapport à  $O$  et  $\mathcal{R}$  est conservé au cours des mouvements.
3. Si  $\vec{F}$  est constamment orthogonal à un axe fixe  $\Delta$ , la composante de l'impulsion  $\vec{p}$  suivant  $\Delta$ , i.e. la projection de  $\vec{p}$  sur  $\Delta$ , est conservée au cours des mouvements.
4. Si  $\vec{F}$  s'appuie constamment sur un axe fixe  $\Delta$ , la composante du moment cinétique  $\vec{\sigma}_O$  (par rapport à un point fixe  $O$  de  $\Delta$ ) suivant  $\Delta$  est conservée.
5. Si  $\vec{F}$  ne travaille pas, i.e. si la puissance  $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$  (où  $\vec{v}$  désigne la vitesse de  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ) est nulle, l'énergie cinétique de  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est conservée.
6. Si  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , où  $\vec{F}_1$  ne travaille pas ( $\mathcal{P}(\vec{F}_1) = 0$ ) et où  $\vec{F}_2$  dérive d'un potentiel  $\phi$  ( $\vec{F}_2 = -\vec{\nabla}\phi$ ), l'énergie totale  $E_c + \phi$  de  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est conservée.

**Preuve.** Les points 1, 2 et 5 sont des conséquences immédiates des Théorèmes de Newton, du moment cinétique et de l'énergie cinétique respectivement. Pour 3, remarquons que si  $\vec{e}$  désigne un vecteur unitaire directeur de  $\Delta$ , il résulte de l'Équation de Newton que  $(d_t \vec{p}) \cdot \vec{e} = \vec{F} \cdot \vec{e} = 0$ . Ainsi, l'axe  $\Delta$  étant fixe et son vecteur directeur  $\vec{e}$  de ce fait constant par rapport au temps, on a  $d_t(\vec{p} \cdot \vec{e}) = (d_t \vec{p}) \cdot \vec{e} = 0$ , si bien que la composante  $p_\Delta = \vec{p} \cdot \vec{e}$  de  $\vec{p}$  suivant  $\Delta$  est constante. Dans le cas 4, on a

$$d_t(\sigma_{O,\Delta}) = d_t(\vec{\sigma}_O \cdot \vec{e}) = (d_t \vec{\sigma}_O) \cdot \vec{e} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(O) \cdot \vec{e} = (\vec{OP} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e} = 0.$$

Pour 6 finalement, il suffit de noter que

$$d_t E_c = \mathcal{P} = \mathcal{P}(\vec{F}_1) + \mathcal{P}(\vec{F}_2) = \vec{F}_2 \cdot \vec{v} = -\vec{\nabla}\phi \cdot \dot{\vec{r}} = -d_t \phi,$$

de sorte que  $d_t(E_c + \phi) = 0$ . ■

**Exemple.** Le pendule simple, voir Chapitre 3, est sollicité par la force de pesanteur et par la réaction normale de la circonférence. Le poids dérivant d'un potentiel, voir ci-dessus, et la réaction normale ne travaillant pas, l'intégrale première de l'énergie  $E_c + \phi = E$ ,  $E$  constant, est valable. Si on choisit

le ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , où  $O$  est le centre de la circonférence et  $\vec{e}_1$  est dirigé vers le bas, si  $\theta$  désigne l'angle polaire de la particule,  $m$  sa masse et  $\ell$  le rayon de la circonférence, l'IP de l'énergie s'écrit :

$$\frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta = E.$$

Par dérivation (intégrale première !), on retrouve l'équation du mouvement  $\ddot{\theta} + (g/\ell) \sin \theta = 0$ .

Imaginons maintenant que le pendule est animé d'un mouvement oscillatoire périodique. Au cours du mouvement, il y a en permanence conversion d'énergie cinétique en énergie potentielle (passages de  $\theta = 0$  à  $\theta = \theta_{\max}$  et de  $\theta = 0$  à  $\theta = -\theta_{\max}$ ) ou vice versa (passages de  $\theta = \theta_{\max}$  à  $\theta = 0$  et de  $\theta = -\theta_{\max}$  à  $\theta = 0$ ), mais de telle sorte que la somme  $E_c + \phi$  des deux types d'énergie reste constante.

L'étude des mouvements de la Terre constitue un bel exemple d'application des intégrales premières. Nous renvoyons le lecteur intéressé au problème de Lagrange-Poisson traité en Mécanique du Solide.

## 4 Exercices

1. Une bille métallique de masse  $m$ , assimilée à un point matériel, est astreinte à se mouvoir à l'intérieur d'un bol hémisphérique parfaitement lisse, placé dans un champ de pesanteur où la résistance du milieu est négligeable. Supposer que la bille ait été lâchée au bord du bol sans vitesse initiale et déterminer la réaction  $R$  du bol (à un instant quelconque), ainsi que la valeur maximale  $R_{\max}$  de cette réaction.

Réponses :  $R = 3mg \sin \theta$ ,  $R_{\max} = 3mg$

2. Une particule  $P$  de masse  $m$  se déplace dans le champ de pesanteur terrestre sur un anneau vertical  $\mathcal{C}$  de faible section, parfaitement lisse, de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Désignons par  $A$ ,  $B$  et  $D$  les points de  $\mathcal{C}$  de coordonnées cartésiennes respectives  $(r, 0)$ ,  $(0, -r)$  et  $(0, r)$  dans un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ,  $\vec{e}_1$  étant horizontal et dirigé vers la droite. La particule est soumise de la part du point  $B$  à une force d'attraction  $\vec{f}$  dirigée vers  $B$  et de module  $f = kPB$ ,  $k$  constant, proportionnel à la distance qui sépare cette particule  $P$  du point  $B$ .

- Déterminer la vitesse  $v_A(P)$  de la particule  $P$  au point  $A$ , nécessaire pour que  $P$  atteigne  $D$  avec une vitesse nulle.
- Déterminer la réaction  $R$  exercée par l'anneau sur la particule lorsque celle-ci passe par  $B$ , sachant que la vitesse en  $A$  est celle calculée à la question précédente.

Réponses :  $v_A(P) = \frac{2r}{m}(mg + kr)$ ,  $R = 5mg + 4kr$

3. Une particule  $P$  de masse unitaire est soumise de la part d'un point fixe  $O$  à une attraction dirigée vers  $O$  et de module égal à  $\frac{\mu}{r^3}$ , où  $\mu$  est une constante strictement positive et où  $r$  dénote la distance  $OP$ . On projette  $P$  d'un point  $A$  à la distance  $d$  de  $O$  perpendiculairement à  $OA$  avec la vitesse  $d^{-2}(\frac{1}{2}\mu)^{1/2}$ . Montrer que l'orbite de  $P$  est une ciconférence ayant  $OA$  pour diamètre et que le temps pour passer de  $A$  à  $O$  est  $d^3\pi(8\mu)^{-1/2}$ .

## 5 Diagramme du potentiel

Au Chapitre 3, les mouvements d'un point matériel par rapport à un référentiel inertial ont été déterminés grâce à la résolution de l'Équation de Newton. L'intégration complète de cette équation

différentielle du second ordre étant souvent compliquée, nous avons étudié les mouvements ci-dessus moyennant des intégrales premières, qui encodent d'importantes informations. Nous présentons à présent brièvement un autre outil élémentaire permettant d'obtenir des renseignements sur les mouvements de la particule considérée: *le diagramme du potentiel*.

L'IP de l'énergie est particulièrement utile lorsque le point matériel étudié ne possède qu'un seul degré de liberté. Prenons par exemple une particule  $(P, m)$  en mouvement par rapport à un référentiel inertiel et astreinte à se mouvoir sur une courbe fixe, parfaitement lisse, placée dans un champ de forces dérivant d'un potentiel  $\phi$ . Choisissons comme paramètre une abscisse curviligne  $s$  de  $P$ . Alors  $\dot{\phi} = \dot{\phi}(s)$  et l'IP de l'énergie s'écrit

$$\frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \phi(s) = E, \quad \text{i.e.} \quad \dot{s}^2 = \frac{2}{m} [E - \phi(s)]. \quad (2)$$

En dérivant cette identité par rapport au temps, on retrouve l'Équation de Newton :

$$\ddot{s} = -\frac{1}{m} d_s \phi. \quad (3)$$

Portons à présent le potentiel  $\phi$  en ordonnée et le paramètre  $s$  en abscisse et représentons la *courbe du potentiel*  $\mathcal{C} : \phi = \phi(s)$ . Traçons également la *droite d'énergie totale*  $\Delta : \phi = E$ . Il découle de l'Équation (2) que "la particule ne peut occuper de position en laquelle la courbe du potentiel  $\mathcal{C}$  est située au-dessus de la droite d'énergie totale  $\Delta$ ". Les parties correspondantes de  $\mathcal{C}$  sont appelées des *barrières de potentiel*. Les parties de  $\mathcal{C}$  situées en-dessous de  $\Delta$  sont des *puits de potentiel*.

Les points d'intersection de la courbe du potentiel et de la droite d'énergie totale, i.e. les racines de l'équation  $\phi(s) = E$ , revêtent une importance particulière.

Rappelons d'abord la définition

Un réel  $x_0$  est une racine de multiplicité  $n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), de l'équation  $f(x) = 0$ , si

$$f(x_0) = (d_x f)(x_0) = \dots = (d_x^{n-1} f)(x_0) = 0, \text{ mais } (d_x^n f)(x_0) \neq 0$$

et les résultats d'analyse

$$\text{Si } n \in \left\{ \begin{array}{l} \{2, 4, 6, \dots\} \\ \{3, 5, 7, \dots\} \end{array} \right\}, \text{ si } \left\{ \begin{array}{l} (d_x f)(x_0) = \dots = (d_x^{n-1} f)(x_0) = 0 \\ (d_x^2 f)(x_0) = \dots = (d_x^{n-1} f)(x_0) = 0 \end{array} \right\} \text{ et si } \left\{ \begin{array}{l} (d_x^n f)(x_0) \neq 0 \text{ (resp. } < 0, > 0) \\ (d_x^n f)(x_0) \neq 0 \end{array} \right\},$$

$$f \text{ admet en } x_0 \text{ un } \left\{ \begin{array}{l} \text{extrémum (resp. maximum, minimum) relatif} \\ \text{point d'inflexion} \end{array} \right. \quad (4)$$

qui sont des conséquences immédiates de la formule de Taylor.

Nous sommes à présent capables de fournir une "classification mécanique" des racines de l'équation  $\phi(s) = E$ .

- 1) Si  $a$  est une racine simple (i.e. de multiplicité 1) de l'équation  $\phi(s) = E$  (i.e. si  $\phi(a) = E$  et  $(d_s \phi)(a) \neq 0$ , ou encore si la courbe du potentiel et la droite d'énergie totale se coupent en  $a$  et la tangente à la courbe du potentiel au point  $a$  n'est pas horizontale), alors  $a$  est un point de réflexion.

En effet, si l'abscisse curviligne  $s$  de  $P$  prend en  $t = t_0$  la valeur  $s(t_0) = a$ , il résulte de l'Identité (2) écrite à l'instant  $t = t_0$  que  $\dot{s}(t_0) = 0$  et de l'Identité (3) écrite au même instant que  $\ddot{s}(t_0) \neq 0$ . Le Théorème 4 permet alors d'affirmer que  $s$  admet en  $t_0$  un maximum ou un minimum relatif, ce qui justifie la dénomination "point de réflexion".

- 2) Si  $a$  est une racine multiple (i.e. de multiplicité supérieure à 1) de l'équation  $\phi(s) = E$  (i.e. si  $\phi(a) = E$  et  $(d_s\phi)(a) = 0$ , ou encore si la courbe du potentiel et la droite d'énergie se coupent en  $a$  et la tangente au point  $a$  à la courbe est horizontale), alors  $a$  est un point d'équilibre.

En effet, si  $s(t_0) = a$ , il découle des Identités (2) et (3) que  $\dot{s}(t_0) = \ddot{s}(t_0) = 0$ .

- 2a) Si  $a$  est une racine de multiplicité  $n > 1$  de l'équation  $\phi(s) = E$  (i.e. si  $\phi(a) = E, (d_s\phi)(a) = \dots = (d_s^{n-1}\phi)(a) = 0, (d_s^n\phi)(a) \neq 0$ ), avec  $n$  paire et  $(d_s^n\phi)(a) > 0$ , alors  $a$  est un point d'équilibre stable.

En effet,  $\phi$  admet alors en  $a$  un minimum relatif (on imaginera la courbe  $\mathcal{C} : \phi = \phi(s)$  du potentiel et la droite  $\Delta : \phi = E$  d'énergie totale au voisinage de  $a$ ) et un léger apport d'énergie cinétique (impulsion communiquée à la particule) fait passer l'énergie totale de  $E$  à une valeur supérieure  $E'$ , de sorte que  $P$  ne peut s'écarter que de très peu de sa position d'équilibre (barrières de potentiel).

- 2b) Si  $a$  est une racine de multiplicité  $n > 1$ , avec  $n$  paire et  $(d_s^n\phi)(a) < 0$ , ou avec  $n$  impaire, alors  $a$  est un point d'équilibre instable.

En effet, à ce moment,  $\phi$  admet en  $a$  un maximum relatif ou un point d'inflexion à tangente horizontale et si une légère perturbation transforme l'énergie totale en  $E'$ ,  $P$  peut s'écarter beaucoup de sa position d'équilibre.

Considérons pour terminer deux puits de potentiel entre deux abscisses curvilignes  $a$  et  $b$ , l'un limité par deux points de réflexion, l'autre par un point de réflexion en  $a$  et un point d'équilibre instable en  $b$  (imaginer les figures correspondantes en veillant à la différence en  $b$ ). Soit  $c$  une abscisse curviligne entre  $a$  et  $b$ , supposons la particule  $P$  de masse  $m$  "lancée de  $c$  vers  $b$ " et proposons-nous de déterminer la durée  $D$  du déplacement  $cb$ . Vu l'Équation (2),

$$ds = \sqrt{\frac{2}{m}(E - \phi(s))} dt$$

et

$$D = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_c^b \frac{1}{\sqrt{E - \phi(s)}} ds.$$

On entrevoit que dans les deux cas la fonction  $1/(\sqrt{E - \phi(s)})$  tend, lorsque  $s$  tend vers  $b$ , vers  $+\infty$ , mais beaucoup moins rapidement dans le premier cas que dans le second. Ainsi, on comprend que la durée  $D$  (l'aire sous la courbe entre  $c$  et  $b$ ) est finie pour le puits limité à droite par un point de réflexion et infinie pour celui limité par un point d'équilibre instable (qui n'est donc théoriquement jamais atteint).

## 6 Exercice

Étudier le diagramme du potentiel du pendule simple.





# Chapitre 5

## Application : Les mouvements planétaires

### 1 Formules de J.P.M. Binet

En guise d'application des techniques acquises dans les précédents chapitres, nous étudierons ici les mouvements dans des champs de forces centraux, en particulier les mouvements planétaires. Deux courts préliminaires relatifs aux coniques et aux formules de Binet sont indispensables.

En Géométrie, on prouve dans les cours de base que les différents types de *coniques* possèdent une *équation cartésienne* (relation caractéristique entre les coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2)$  des points de la conique) spécifique pour un choix approprié du repère cartésien. Un résultat similaire existe en coordonnées polaires. L'*équation polaire* d'une conique (relation caractéristique entre les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  des points de la conique) de paramètre  $p$  et d'excentricité  $e$  s'écrit

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad (1)$$

à condition que le pôle soit situé en un foyer de la conique et que l'axe polaire soit dirigé vers le sommet le plus proche de la conique. Inversement, une équation de la forme (1), avec  $p > 0$  et  $e \geq 0$ , est l'équation polaire d'une conique. Si  $e = 0$  (resp.  $0 < e < 1, e = 1, e > 1$ ), cette conique est un cercle (resp. une ellipse, une parabole, une branche d'hyperbole). Ainsi, l'*excentricité*  $e$  mesure le défaut de circularité de la conique, alors que le *paramètre*  $p$  est la distance, mesurée perpendiculairement à l'axe principal, d'un foyer de la conique à la conique elle-même.

Nous établissons à présent les *formules de Binet*, qui donnent, pour une *particule dans un champ de forces central* étudiée en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , la vitesse  $\vec{v}$  et l'accélération  $\vec{\gamma}$  en fonction de  $u := 1/r$  et des dérivées de  $u$  par rapport à  $\theta$ . En effet, si l'on se propose de prouver que les planètes suivent bien des trajectoires elliptiques autour du Soleil, donc que l'équation polaire de ces trajectoires est de la forme (1), on remarque d'abord que cette équation (1) suggère d'étudier  $u = 1/r$  plutôt que  $r$  lui-même. Ensuite, afin de trouver, à partir de l'Équation de Newton  $\mathcal{R}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}) = 0$ , non pas le mouvement, i.e.  $\vec{r}$  en fonction de  $t$ , mais l'équation de la trajectoire, i.e.  $u = 1/r$  en fonction de  $\theta$ , il s'impose de calculer  $\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}$ , dans la base naturelle  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  associée aux coordonnées polaires, en fonction de  $u$  et des dérivées  $d_\theta u, d_\theta^2 u$  de  $u$  par rapport à  $\theta$ , de manière à obtenir une équation différentielle du type  $\mathcal{S}(u, d_\theta u, d_\theta^2 u) = 0$ .

**Proposition 1.** *Soit un point matériel en mouvement par rapport à un référentiel inertiel dans un champ de forces central. Si  $(r, \theta)$  désignent des coordonnées polaires dans le plan du mouvement*

définies à partir d'un pôle choisi au centre de force, la vitesse  $\vec{v}$  et l'accélération  $\vec{\gamma}$  de cette particule sont données par les deux formules de Binet

$$\vec{v} = -h(d_\theta u \vec{e}_r - u \vec{e}_\theta), \quad v^2 = h^2 \left[ (d_\theta u)^2 + u^2 \right],$$

$$\vec{\gamma} = -h^2 u^2 [d_\theta^2 u + u] \vec{e}_r,$$

où  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est la base naturelle associée aux coordonnées polaires considérées, où  $h$  est la constante des aires, et où  $u = \frac{1}{r}$ .

**Preuve.** Il suffit de dériver l'identité  $\vec{r} = r\vec{e}_r = \frac{1}{u}\vec{e}_r$  deux fois de suite par rapport au temps et d'utiliser l'intégrale première des aires sous la forme  $\dot{\theta} = hu^2$  pour exprimer les résultats en fonction de  $u$  et de ses dérivées par rapport à  $\theta$  exclusivement. ■

## 2 Mouvements dans un champ central en $\frac{1}{r^2}$

Considérons un point matériel  $(P, m)$  étudié par rapport à un référentiel inertiel et soumis à l'action d'une force centrale  $\vec{F}$  de centre  $O$ . Les variables  $(r, \theta)$  utilisées ci-dessous sont évidemment encore des coordonnées polaires dans le plan du mouvement. Clairement, aussi bien le pôle que l'origine du référentiel sont à choisir au centre de force  $O$ . Nous supposons de plus que la force  $\vec{F}$  est attractive et de module proportionnel à  $\frac{1}{r^2}$ . En d'autres termes,  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$  est un champ de forces du type

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{k}{r^3} \vec{r}, \quad (2)$$

où  $k$  est une constante strictement positive. Le champ  $\vec{F}$  étant ainsi un champ de forces central à symétrie sphérique, ce champ, voir Chapitre 4, dérive d'un potentiel

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi, \quad \phi = -\frac{k}{r},$$

où nous avons choisi la constante d'intégration de manière que le potentiel soit nul à l'infini. On notera que la force d'attraction gravifique exercée par un "point" matériel  $(O, m)$  (p.ex. le Soleil) sur le "point" matériel  $(P, m)$  (p.ex. une planète) est bien sûr un cas particulier d'une force attractive en  $\frac{1}{r^2}$ .

La résultante des forces  $\vec{F}$  sollicitant la particule  $(P, m)$  étant centrale et dérivant d'un potentiel, les IP des aires (IPA) et de l'énergie (IPE) sont simultanément applicables :

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} = E.$$

On sait que dans le cas d'un problème à un seul degré de liberté, l'IPE conduit au diagramme du potentiel, voir Chapitre 4. Or, en éliminant  $\dot{\theta}$  dans l'IPE ci-dessus grâce à l'IPA, on écrit cette IPE sous la forme

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} (E - \Phi(r)), \quad \text{où} \quad \Phi(r) = \frac{1}{2} m \frac{h^2}{r^2} - \frac{k}{r}. \quad (3)$$

Comme  $\Phi(r) \rightarrow +\infty$  (resp.  $\Phi(r) \rightarrow 0^-$ ), lorsque  $r \rightarrow 0^+$  (resp.  $r \rightarrow +\infty$ ), on obtient, si l'on porte  $\Phi$  en ordonnée et  $r$  en abscisse et trace le diagramme du potentiel  $\Phi = \Phi(r)$ , une courbe admettant une asymptote verticale en 0 et une asymptote horizontale en  $+\infty$ . En outre, on vérifie que cette courbe est décroissante jusqu'en  $r = \frac{mh^2}{k}$ , où sa valeur est minimale et égale à  $-\frac{1}{2} \frac{k^2}{mh^2}$ , et qu'ensuite elle est croissante. La suivante classification des trajectoires découle du précédent diagramme :

- (j) Si  $E \geq 0$ ,  $r \rightarrow +\infty$ , si  $t \rightarrow \pm\infty$  : la trajectoire est ouverte.
- (jj) Si  $-\frac{1}{2} \frac{k^2}{mh^2} < E < 0$ ,  $r$  appartient en permanence à un intervalle  $[r_{\min}, r_{\max}]$  : la trajectoire est fermée.
- (jjj) Si  $E = -\frac{1}{2} \frac{k^2}{mh^2}$ ,  $r$  vaut constamment  $\frac{mh^2}{k}$  : la trajectoire est circulaire.

Déterminons à présent la nature précise des trajectoires possibles. Pour cela, combinons—comme annoncé ci-dessus—l'Équation de Newton

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\frac{k}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -ku^2 \vec{e}_r$$

et la seconde formule de Binet. On trouve alors

$$d_{\theta}^2 u + u = \frac{k}{mh^2},$$

i.e. une équation harmonique à second membre constant. Sa solution générale s'écrit

$$u = C \cos(\theta - \varphi) + \frac{k}{mh^2},$$

où  $C \geq 0$  et  $\varphi$  sont les constantes d'intégration. C'est l'équation attendue d'une conique. En effet, si l'on choisit la demi-droite d'angle polaire  $\varphi$  comme nouvel axe polaire,  $\theta$  se substitue à  $\theta - \varphi$ , et si on revient alors à la variable  $r = \frac{1}{u}$ , on obtient

$$r = \frac{\frac{mh^2}{k}}{1 + \frac{Cmh^2}{k} \cos \theta}. \quad (4)$$

Finalement, la trajectoire est donc bien une conique, de paramètre  $p = \frac{mh^2}{k}$  et d'excentricité  $e = \frac{Cmh^2}{k}$ , un de ses foyers est situé au pôle, i.e. au centre de force, et l'axe polaire est dirigé vers son sommet le plus proche. Afin de comparer ce résultat aux informations déduites ci-dessus du diagramme du potentiel, il s'impose d'exprimer l'excentricité  $e$ , non plus en fonction de la constante d'intégration  $C$ , mais en fonction de la constante d'intégration  $E$ , i.e. de l'énergie totale de la particule. Pour cela, nous écrivons l'Équation (3) et l'Équation (4) à "l'instant  $\theta = 0$ ". De fait, étant donné qu'à cet instant  $\dot{r} = 0$ , la première identité fournit une relation entre  $r$  et  $E$ , et la seconde une relation entre  $r$  et  $e$ . Si l'on élimine  $r$  et résoud par rapport à  $e$ , il vient

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Emh^2}{k^2}}. \quad (5)$$

D'où une classification améliorée des trajectoires :

- (i) Si  $e = 0$ , i.e.  $E = -\frac{1}{2} \frac{k^2}{mh^2}$ , la trajectoire est une circonférence de rayon  $\frac{mh^2}{k}$ .
- (ii) Si  $0 < e < 1$ , i.e.  $-\frac{1}{2} \frac{k^2}{mh^2} < E < 0$ , la trajectoire est une ellipse.
- (iii) Si  $e = 1$ , i.e.  $E = 0$ , la trajectoire est une parabole.
- (iv) Si  $e > 1$ , i.e.  $E > 0$ , la trajectoire est une branche d'hyperbole.

En vue de l'étude des mouvements planétaires, nous investigons brièvement le mouvement elliptique.

Déterminons d'abord le demi-grand et le demi-petit axes de l'ellipse. Si  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) désigne le périhélie (resp. l'aphélie) de la trajectoire, les Équations (4) et (5) donnent

$$r(P_1) = \frac{p}{1+e} \quad \text{et} \quad r(P_2) = \frac{p}{1-e},$$

où  $p = mh^2/k$  et  $e = \sqrt{1 + \frac{2Emh^2}{k^2}}$ . Donc,

$$a = \frac{1}{2} (r(P_1) + r(P_2)) = \frac{p}{1-e^2}$$

et

$$c := a - r(P_1) = \frac{pe}{1-e^2}.$$

Comme  $a^2 = b^2 + c^2$ , il vient

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Appliquons maintenant la loi des aires, voir Chapitre 4, au mouvement elliptique. Étant donné que l'aire délimitée par une ellipse de demi-grand axe  $a$  et de demi-petit axe  $b$  est égale à  $\pi ab$  (pour  $a = b$  on retrouve évidemment l'aire délimitée par un cercle), on obtient

$$\pi ab = \frac{1}{2} |h| T,$$

où  $T$  est la période du mouvement. Il s'ensuit que

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}, \quad (6)$$

si on utilise les valeurs ci-dessus de  $a$ ,  $b$  et  $p$ . Cette égalité est connue sous le nom de *loi harmonique* (J. Kepler, 1619). Afin d'apprécier ce résultat à sa juste valeur, il importe de l'appliquer au cas particulier des mouvements planétaires. En effet, la loi newtonienne de la gravitation entraîne que la constante de proportionnalité  $k$ , voir Équation (2), vaut à ce moment  $k = GM_\odot m$ , où  $G$  désigne la constante gravitationnelle,  $M_\odot$  la masse du Soleil  $\odot$ , et  $m$  la masse de la planète étudiée. La loi harmonique (6) prend alors la forme

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} \quad (7)$$

et stipule que le rapport du carré de la période et du cube du demi-grand axe est une constante indépendante de la planète considérée.

### 3 Mouvements planétaires, lois de J. Kepler

En vue d'étudier le mouvement d'une planète autour du Soleil par rapport aux axes de Copernic, nous assimilons le Soleil et la planète à des points matériels (on peut penser que cette façon de procéder est justifiée par le fait que les diamètres de ces corps sont petits par rapport à la distance qui les sépare; en réalité la pertinence de cette hypothèse découle du Théorème du Centre de Masse, voir plus loin, de la Théorie newtonienne de la Gravitation, de la possibilité de considérer le Soleil et la planète comme des distributions de matière à symétrie sphérique, ...), nous supposons que la planète est soumise uniquement à la force d'attraction du Soleil, i.e. que les forces gravifiques que

les autres corps du système solaire exercent sur la planète considérée peuvent être négligées (ceci est licite, la masse du Soleil étant beaucoup plus grande que celle des planètes et de leurs satellites) et finalement, *nous regarderons le centre du Soleil comme fixe par rapport aux axes de Copernic* (en toute rigueur, on devrait étudier le mouvement de la planète et celui du Soleil, voir problème des deux corps; la précédente hypothèse est cependant raisonnable, vu la masse énorme du Soleil, qui contient plus de 99 % de la masse totale du système solaire). Compte tenu des trois hypothèses qui viennent d'être faites, la planète peut être considérée comme un point matériel étudié par rapport à un référentiel inertiel et soumis à l'action d'une force centrale, attractive et de module inversement proportionnel au carré de la distance. Les résultats de la section précédente sont ainsi valables. Rappelons les conclusions principales, connues sous le nom de *lois de J. Kepler* (J. Kepler a déduit ces lois des observations astronomiques de Tycho Brahé, alors qu'ici elles découlent de la loi de Newton) :

Première loi de Kepler – loi des ellipses (1609) :

*Les orbites des planètes sont des ellipses (presque circulaires) admettant le Soleil comme foyer (et contenues dans des plans différents, mais tous approximativement orthogonaux à l'axe de rotation du Soleil. De plus, toutes les ellipses sont décrites dans le même sens, à savoir dans le sens de rotation du Soleil et de la Terre).*

Deuxième loi de Kepler – loi des aires (1609) :

*L'aire balayée par le vecteur position (reliant le centre du Soleil au centre de la planète) au cours d'un intervalle de temps donné, est proportionnelle à cet intervalle de temps.*

Troisième loi de Kepler – loi harmonique (1619) :

*Le rapport du carré de la période de révolution et du cube du demi-grand axe de l'orbite est une constante indépendante de la planète étudiée.*



# Chapitre 6

## Éléments de Cinématique du Solide

### 1 Vecteur rotation

Soit un solide  $\mathcal{R}_1$  en mouvement par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}_0$ . Considérons un ROND  $(O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  lié à  $\mathcal{R}_1$  et un ROND  $(O_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  attaché à  $\mathcal{R}_0$ .

Remarquons d'abord que la variation temporelle  $d_{t;0}\vec{u}$  d'un vecteur  $\vec{u}$  déterminée par un observateur dans  $\mathcal{R}_0$  diffère en général de celle  $d_{t;1}\vec{u}$  mesurée par l'observateur  $\mathcal{R}_1$ . En effet,  $d_{t;0}\vec{e}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , par exemple, est d'ordinaire non nul, tandis que  $d_{t;1}\vec{e}_i = 0$ . Notons que l'annulation des dérivées temporelles dans  $\mathcal{R}_0$  des vecteurs  $\vec{e}_i$  implique que le solide  $\mathcal{R}_1$  est animé par rapport à  $\mathcal{R}_0$  d'un mouvement de translation, et rappelons qu'un solide est animé d'un *mouvement de translation*, s'il se déplace en restant parallèle à lui-même.

La rotation du solide  $\mathcal{R}_1$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0$  est donc encodée dans les vecteurs

$$d_{t;0}\vec{e}_i =: \sum_j \Omega_{ij}\vec{e}_j.$$

Les  $\vec{e}_i$  formant une BOND, il est clair que leurs variations temporelles ne sont pas indépendantes. Et en effet, la dérivation par rapport au temps de l'identité  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ , traduisant le caractère orthonormé de cette base, fournit le résultat

$$d_{t;0}\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot d_{t;0}\vec{e}_j = 0, \quad \text{i.e.} \quad \Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0.$$

Cette égalité signifie que la matrice des  $\Omega_{ij}$  est antisymétrique et contient donc seulement trois composantes effectives, par exemple

$$\omega_1 := \Omega_{23}, \omega_2 := \Omega_{31} \text{ et } \omega_3 := \Omega_{12}. \quad (1)$$

Finalement, la rotation de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est complètement encodée dans le "vecteur rotation"

$$\vec{\omega} = \sum_j \omega_j \vec{e}_j.$$

Insistons sur le fait que l'observateur  $\mathcal{R}_0$  associe ainsi à chaque BOND  $\vec{e}_i$  attachée à  $\mathcal{R}_1$  un triplet de réels  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , mais que deux triplets relatifs à deux bases différentes  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$  ne définissent pas nécessairement le même "vecteur"  $\vec{\omega}$ . Or, un vecteur étant un objet indépendant du concept de base, uniquement un "vecteur" indépendant de la base éventuellement utilisée pour le

définir est un (vrai) vecteur. Nous prouverons ci-dessous que  $\vec{\omega}$  est bien un vecteur.

Notons à présent que les relations (1), qui définissent les composantes du “vecteur rotation”  $\vec{\omega}$  dans la base considérée, peuvent être résumées en une seule,

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \Omega_{jk}, \quad (2)$$

qui s’inverse en

$$\Omega_{ij} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \omega_k. \quad (3)$$

Il s’ensuit que

$$d_{t;0} \vec{e}_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \omega_k \vec{e}_j = \sum_{klj} \varepsilon_{klj} \omega_k \delta_{il} \vec{e}_j = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i.$$

Cette règle de dérivation remarquablement simple s’étend à tout vecteur  $\vec{u}_1$  lié au solide  $\mathcal{R}_1$ . De fait, un tel vecteur se décompose dans la base des  $\vec{e}_i$ , également attachée à  $\mathcal{R}_1$ , sous la forme  $\vec{u}_1 = \sum_i u_{i;1} \vec{e}_i$ , avec des composantes  $u_{i;1}$  constantes au cours du temps. Par conséquent,

$$d_{t;0} \vec{u}_1 = \sum_i u_{i;1} d_{t;0} \vec{e}_i = \sum_i u_{i;1} \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_1. \quad (4)$$

C’est la *formule de Poisson*. Elle stipule que la dérivée temporelle dans  $\mathcal{R}_0$  d’un vecteur lié à  $\mathcal{R}_1$  s’obtient par multiplication vectorielle (à gauche) du vecteur à dériver par le “vecteur rotation” de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ . Cette règle de Poisson admet une généralisation supplémentaire que nous donnerons ci-dessous.

L’indépendance de  $\vec{\omega}$  de la base des  $\vec{e}_i$  peut être établie comme suit. Si  $\vec{\omega}'$  désigne le “vecteur” semblablement construit à partir d’une autre base  $\vec{e}'_i$ , on a, pour tout vecteur  $\vec{u}_1$  lié à  $\mathcal{R}_1$ ,  $\vec{\omega} \wedge \vec{u}_1 = d_{t;0} \vec{u}_1 = \vec{\omega}' \wedge \vec{u}_1$ . Il s’ensuit que  $\vec{\omega} - \vec{\omega}'$  est colinéaire à tout vecteur attaché à  $\mathcal{R}_1$ , si bien que  $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ . Le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est parfois noté  $\omega_{01}$ , si l’on désire insister sur le solide et le référentiel considérés.

### Exemples.

- Dans le cas d’un mouvement de *translation*, notre intuition suggère que le vecteur rotation est nul—conclusion corroborée par la précédente définition de  $\vec{\omega}$ .
- Considérons à présent un solide  $\mathcal{R}_1$  en *rotation par rapport à un axe fixe*  $\Delta$  que nous pouvons sans restriction supposer vertical. Désignons de nouveau par  $(O_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $(O_1, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  des ROND attachés à  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  respectivement. Nous choisissons  $O_0 = O_1$  sur  $\Delta$  et  $\vec{e}_3 = \vec{e}'_3$  porté par  $\Delta$ . La position de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est complètement décrite par l’angle  $\theta$  formé par les vecteurs horizontaux  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}'_1$ . Intuitivement, il est clair que, lorsque le solide tourne autour de  $\Delta$  dans le sens défini par  $\vec{e}_3$ , son vecteur rotation est donné par

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_3. \quad (5)$$

En vue de vérifier ce résultat à partir de la définition de  $\vec{\omega}$  et donc la validité de cette définition, observons d’abord qu’il découle de la formule de Poisson que

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_i \vec{e}_i \wedge d_{t;0} \vec{e}_i.$$

La décomposition des vecteurs  $\vec{e}_i$  dans la base barrée en fonction de  $\theta$  permet alors de prouver que  $\vec{\omega}$  est bien donné par  $\dot{\theta} \vec{e}_3$ .



## 2 Formule générale de S.-D. Poisson

Soient un vecteur arbitraire  $\vec{u}$  et deux solides  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  munis de ROND attachés  $(O_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $(O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  respectivement. Posons  $\vec{u} = \sum_i u_i \vec{e}_i$ . Dans  $\mathcal{R}_0$ , le vecteur  $\vec{u}$ , ses composantes  $u_i$  et les vecteurs de base  $\vec{e}_i$  sont en général tous des fonctions du temps  $t$ . Il en est de même dans  $\mathcal{R}_1$ , sauf que les  $\vec{e}_i$  y sont constants. Par conséquent,

$$d_{t;0}\vec{u} = \sum_i \dot{u}_i \vec{e}_i + \sum_i u_i d_{t;0}\vec{e}_i = d_{t;1}\vec{u} + \vec{\omega} \wedge \vec{u}.$$

**Theorème 1.** *Considérons deux solides  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  et un vecteur  $\vec{u}$  arbitraires. Les dérivées temporelles de  $\vec{u}$  dans  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  sont liées par la formule générale de Poisson,*

$$d_{t;0}\vec{u} = d_{t;1}\vec{u} + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{u}, \quad (6)$$

où  $\vec{\omega}_{01}$  dénote le vecteur rotation de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

**Remarques.**

- Si  $\vec{u}$  est attaché à  $\mathcal{R}_1$ , la formule de Poisson généralisée (6) se réduit bien à la formule de Poisson (4).
- Pour  $\vec{u} = \vec{\omega}_{01}$ , la formule généralisée fournit  $d_{t;0}\vec{\omega}_{01} = d_{t;1}\vec{\omega}_{01}$ , de sorte que dans la suite nous ne précisons plus le référentiel,  $\mathcal{R}_0$  ou  $\mathcal{R}_1$ , dans lequel la dérivée temporelle du vecteur rotation  $\vec{\omega}_{01}$  est déterminée, et noterons simplement  $\dot{\vec{\omega}}_{01}$ .

La formule de Poisson généralisée permet d'établir la suivante *loi de composition des vecteurs rotation* et ses conséquences, qui, remarquons-le, sont en excellent accord avec l'intuition.

**Proposition 1.** *Considérons trois solides  $\mathcal{R}_0$ ,  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  et désignons par  $\vec{\omega}_{ab}$  le vecteur rotation de  $\mathcal{R}_b$  par rapport à  $\mathcal{R}_a$ . La loi de composition des vecteurs rotation s'écrit alors*

$$\vec{\omega}_{02} = \vec{\omega}_{01} + \vec{\omega}_{12}. \quad (7)$$

En outre,

$$\vec{\omega}_{00} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\omega}_{10} = -\vec{\omega}_{01}. \quad (8)$$

**Preuve.** La formule de Poisson généralisée, écrite successivement pour les solides  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$ , puis pour les solides  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , donne, pour tout vecteur  $\vec{u}$ ,

$$d_{t;0}\vec{u} = d_{t;1}\vec{u} + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{u} = d_{t;2}\vec{u} + \vec{\omega}_{12} \wedge \vec{u} + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{u} = d_{t;2}\vec{u} + (\vec{\omega}_{01} + \vec{\omega}_{12}) \wedge \vec{u}.$$

La comparaison avec le résultat fourni par la formule généralisée appliquée aux solides  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_2$ , conduit alors à l'Équation (7). En prenant dans cette équation  $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ , puis  $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_2$ , on obtient les deux équations (8). ■

## 3 Tenseurs

La Section 1 fournit l'occasion d'introduire la notion de "tenseur" qui généralise le concept de scalaire et de vecteur. Les tenseurs sont fondamentaux en Mathématiques, en Physique, ainsi que dans les Sciences de l'Ingénieur. Ils sont notamment indispensables en Mécanique des Milieux Continus, en Relativité, en Géométrie, ... et réapparaîtront dans le cadre de ce cours en Mécanique des Solides.

Notons d'abord que le passage d'une BON  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  à une BON  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  est caractérisé par les composantes des “nouveaux” vecteurs de base  $\vec{e}'_i$  dans l’“ancienne” base  $\vec{e}_i$ . Il s'avère pratique de former la matrice de ces composantes, la *matrice de passage*, dont les *colonnes* successives contiennent les composantes des vecteurs successifs de la nouvelle base. Si  $A$  désigne cette matrice de passage, on a donc

$$\vec{e}'_j = \sum_i A_{ij} \vec{e}_i. \quad (9)$$

De même,

$$\vec{e}_j = \sum_i A'_{ij} \vec{e}'_i, \quad (10)$$

où  $A'$  est la matrice de passage “inverse”, i.e. celle permettant de passer de la base “primée” à la base “non primée”. Il semble donc naturel que  $A'$  soit la matrice inverse de  $A$ . Cette idée est facile à vérifier. Étant donné que

$$\vec{e}'_j = \sum_i A_{ij} \vec{e}_i = \sum_k \sum_i A'_{ki} A_{ij} \vec{e}'_k = \sum_k (A'A)_{kj} \vec{e}'_k,$$

on a bien  $(A'A)_{kj} = \delta_{kj}$  et

$$A' = A^{-1}.$$

Remarquons aussi que le caractère orthonormé des bases impliquées a un impact sur la nature de la matrice de passage. De fait,

$$\delta_{j\ell} = \vec{e}'_j \cdot \vec{e}'_\ell = \sum_{ik} A_{ij} A_{k\ell} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \sum_{ik} A_{ij} A_{k\ell} \delta_{ik} = \sum_i \tilde{A}_{ji} A_{i\ell} = (\tilde{A}A)_{j\ell},$$

i.e. la matrice de passage d'une BON à une BON est orthogonale. Finalement,

$$A' = A^{-1} = \tilde{A}.$$

Cherchons à présent la loi de transformation des composantes d'un vecteur  $\vec{u}$  lors d'un changement de BON. Comme

$$\vec{u} = \sum_j u'_j \vec{e}'_j = \sum_i \sum_j A_{ij} u'_j \vec{e}_i,$$

on obtient la relation

$$u_i = \sum_j A_{ij} u'_j, \quad (11)$$

appelée loi de transformation vectorielle ou simplement *loi vectorielle*. On observera que la loi vectorielle fournit les anciennes composantes en fonction des nouvelles et qu'elle admet la forme matricielle

$$U = AU', \quad (12)$$

où  $U$  dénote la colonne des composantes  $u_i$  du vecteur  $\vec{u}$  dans l’“ancienne” base et  $U'$  celle des composantes  $u'_i$  du vecteur  $\vec{u}$  dans la “nouvelle” base.

Dans la Section 1, nous avons associé à chaque BON  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  (en fait à toute BOND attachée à  $\mathcal{R}_1$ , mais cette précision sans importance pour l'instant) un “3-uplet” de réels  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ . À la lumière des précédentes explications, il est clair que tous ces triplets relatifs à toutes les BON définissent un seul et même vecteur si et seulement si les triplets  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  et  $(\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)$  correspondant à deux BON différentes vérifient la loi vectorielle

$$\omega_i = \sum_k A_{ik} \omega'_k.$$

De même nous avons obtenu dans chaque BON  $\vec{e}_i$  un  $3^2$ -uplet de réels  $\Omega_{ij}$ . Nous dirons que tous ces uplets définissent un seul et même *tenseur* si et seulement si les uplets  $\Omega_{ij}$  et  $\Omega'_{ij}$  relatifs à deux BON  $\vec{e}_i$  et  $\vec{e}'_i$ , vérifient la *loi tensorielle*

$$\Omega_{ij} = \sum_{k\ell} A_{ik} A_{j\ell} \Omega'_{k\ell},$$

qui est la généralisation naturelle de la loi vectorielle.

De manière plus précise, la loi tensorielle ci-dessus est la loi tensorielle d'ordre 2, alors que la loi vectorielle est encore appelée loi tensorielle d'ordre 1. Plus généralement, *si une grandeur mécanique, physique ou autre, est caractérisée dans chaque BON par un  $3^n$ -uplet de réels  $T_{i_1 \dots i_n}$  et si ces uplets satisfont à la loi tensorielle d'ordre  $n$*

$$T_{i_1 \dots i_n} = \sum_{k_1 \dots k_n} A_{i_1 k_1} A_{i_2 k_2} \dots A_{i_n k_n} T'_{k_1 \dots k_n}, \quad (13)$$

*alors ces uplets sont les composantes dans les bases respectives d'un tenseur  $T$  d'ordre  $n$  et la grandeur étudiée peut être décrite par cet  $n$ -tenseur.*

**Exemples.** On vérifiera que :

- le symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$  définit un 2-tenseur *isotrope*, i.e. un 2-tenseur ayant les mêmes composantes  $\delta_{ij}$  dans toute BON,
- le symbole de Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk}$  définit un pseudo-tenseur isotrope d'ordre 3, en utilisant l'égalité  $\varepsilon_{ijk} = (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k$ , valable à condition que la base des  $\vec{e}_i$  soit une BOND,
- les  $\Omega_{ij}$  et les  $\omega_i$ , voir Section 1, sont, dans la géométrie limitée aux BOND, les composantes d'un 2-tenseur et d'un vecteur respectivement.

Le lecteur aura remarqué que le concept de tenseur a été introduit via des bases et composantes, mais qu'aucune définition intrinsèque ou *modèle des tenseurs* n'a été donné. Nous reviendrons à cette question en Mécanique des Solides. Signalons aussi que la limitation aux BON, voire aux BOND, simplifie considérablement le calcul tensoriel. Une approche incluant tous les types de bases sera proposée dans les cours plus avancés.

Les principales opérations sur les tenseurs sont *la multiplication par les scalaires, l'addition, la multiplication tensorielle et la contraction*.

Pour des raisons de clarté, nous définirons ces opérations sur des exemples. Soit  $\lambda$  un réel et soient  $T_{ij}$ ,  $U_{ij}$  et  $V_{ijk}$  les composantes de trois tenseurs. Il est facile et instructif de prouver que les

$$\lambda T_{ij} \quad (\text{resp. } T_{ij} + U_{ij}, \quad T_{ij} V_{klm} \quad \text{et} \quad \sum_j T_{ij} V_{jkm}) \quad (14)$$

sont les composantes d'un 2-tenseur (resp. 2-tenseur, 5-tenseur et 3-tenseur). Les opérations ainsi définies sont celles mentionnées ci-dessus. On remarquera que les deux premières munissent l'ensemble des 2-tenseurs (resp., plus généralement, l'ensemble des  $n$ -tenseurs) d'une structure d'*espace vectoriel réel de dimension  $3^2$  (resp.  $3^n$ )*. La (très simple) multiplication tensorielle d'un 2-tenseur et d'un 3-tenseur (resp., plus généralement, celle d'un  $n$ -tenseur et d'un  $m$ -tenseur) fournit un 5-tenseur (resp. un  $(n+m)$ -tenseur). Ensemble avec la multiplication par les scalaires et l'addition, cette multiplication tensorielle confère à la somme directe des espaces de tenseurs de tous les ordres  $n$ , une structure d'*algèbre associative*. Enfin, dans l'exemple considéré de produit contracté, la contraction se fait sur le second indice (du premier tenseur) et sur le premier indice (du deuxième tenseur).

D'autres choix sont évidemment possibles. On peut aussi itérer la contraction et s'intéresser par exemple au tenseur  $\sum_{ij} T_{ij} V_{jki}$ . On observera que  $p$  contractions du produit d'un  $n$ -tenseur et d'un  $m$ -tenseur conduisent à un  $(n + m - 2p)$ -tenseur. La définition (2) et l'équation (3) fournissent des exemples de produits tensoriels contractés. Si l'on sait que les  $\varepsilon_{ijk}$  et les  $\Omega_{ij}$  définissent des tenseurs, il est dès lors évident que les  $\omega_i$  sont les composantes d'un vecteur.

## 4 Champs des vitesses et des accélérations d'un solide

Rappelons qu'un *champ de vecteurs* est un vecteur fonction du point en lequel on le "mesure". Un tel champ  $\vec{u} = \vec{u}(P)$  est appelé *torseur* s'il existe un vecteur  $\vec{V}$  tel que pour tous les points  $P$  et  $Q$  de la région de l'espace où le champ  $\vec{u}$  est défini, on ait,

$$\vec{u}(Q) = \vec{u}(P) + \vec{V} \wedge \overrightarrow{PQ}. \quad (15)$$

Un raisonnement désormais standard montre que le vecteur  $\vec{V}$ , s'il existe, est unique. C'est le *vecteur du torseur*. On notera que le torseur  $\vec{u}$  est complètement déterminé par la donnée de son vecteur et de sa valeur en un point  $P$ . Rappelons que le moment par rapport à un point  $P$ , d'un vecteur  $\vec{F}$  appliqué à un point  $R$ , est un torseur de vecteur  $\vec{F}$ .

Considérons maintenant un solide  $\mathcal{R}_1$  en mouvement par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}_0$  et notons  $\vec{v}_0(P_1)$  la vitesse par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0$  d'un point arbitraire  $P_1$  lié au solide  $\mathcal{R}_1$ . Insistons sur le fait que ce vecteur vitesse par rapport à  $\mathcal{R}_0$  varie bien—en général—d'un point de  $\mathcal{R}_1$  à l'autre, et constitue donc un champ de vecteurs et même un torseur, car

$$\vec{v}_0(Q_1) - \vec{v}_0(P_1) = d_{t;0} \overrightarrow{O_0 Q_1} - d_{t;0} \overrightarrow{O_0 P_1} = d_{t;0} \overrightarrow{P_1 Q_1} = \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{P_1 Q_1},$$

où  $O_0$  désigne l'origine de  $\mathcal{R}_0$  et où nous avons utilisé la formule de Poisson. D'où la

**Proposition 2.** *Le champ des vitesses  $\vec{v}_0 = \vec{v}_0(P_1)$  des points d'un solide  $\mathcal{R}_1$  par rapport à un système de référence  $\mathcal{R}_0$  vérifie la formule fondamentale de la Cinématique des Solides,*

$$\vec{v}_0(Q_1) = \vec{v}_0(P_1) + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{P_1 Q_1}, \quad (16)$$

où  $P_1$  et  $Q_1$  sont des points du solide  $\mathcal{R}_1$  et où  $\vec{\omega}_{01}$  désigne le vecteur rotation de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

Le champ des vitesses par rapport à  $\mathcal{R}_0$  des points liés à  $\mathcal{R}_1$  est donc un torseur de vecteur  $\vec{\omega}_{01}$ , appelé *torseur cinématique*.

Il est à présent naturel de regarder si le champ  $\vec{\gamma}_0 = \vec{\gamma}_0(P_1)$  des accélérations par rapport à  $\mathcal{R}_0$  des points de  $\mathcal{R}_1$  est un torseur ou non. Comme

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_0(Q_1) - \vec{\gamma}_0(P_1) &= d_{t;0}(\vec{v}_0(Q_1) - \vec{v}_0(P_1)) = d_{t;0}(\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{P_1 Q_1}) \\ &= \dot{\vec{\omega}}_{01} \wedge \overrightarrow{P_1 Q_1} + \vec{\omega}_{01} \wedge d_{t;0} \overrightarrow{P_1 Q_1} = \dot{\vec{\omega}}_{01} \wedge \overrightarrow{P_1 Q_1} + \vec{\omega}_{01} \wedge (\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{P_1 Q_1}), \end{aligned}$$

on a finalement la

**Proposition 3.** *Le champ des accélérations  $\vec{\gamma}_0 = \vec{\gamma}_0(P_1)$  des points d'un solide  $\mathcal{R}_1$  par rapport à un système de référence  $\mathcal{R}_0$  vérifie la relation*

$$\vec{\gamma}_0(Q_1) = \vec{\gamma}_0(P_1) + \dot{\vec{\omega}}_{01} \wedge \overrightarrow{P_1 Q_1} + \vec{\omega}_{01} \wedge (\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{P_1 Q_1}) \quad (17)$$

et n'est pas un torseur.

## 5 Lois de composition des vitesses et des accélérations

Soient deux référentiels  $\mathcal{R}_0$  d'origine  $O_0$  et  $\mathcal{R}_1$  d'origine  $O_1$  et un point arbitraire  $P$ . D'ordinaire ces solides et ce point bougent les uns par rapport aux autres. Nous nous proposons de trouver la relation entre les vitesses

$$\vec{v}_0(P) = d_{t;0} \overrightarrow{O_0 P} \quad \text{et} \quad \vec{v}_1(P) = d_{t;1} \overrightarrow{O_1 P}$$

de  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  respectivement. Vu que  $\overrightarrow{O_0 P} = \overrightarrow{O_0 O_1} + \overrightarrow{O_1 P}$ , on obtient

$$\vec{v}_0(P) = d_{t;0} \overrightarrow{O_0 O_1} + d_{t;0} \overrightarrow{O_1 P} = \vec{v}_0(O_1) + d_{t;1} \overrightarrow{O_1 P} + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1 P} = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_0(O_1) + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1 P}.$$

En comparant

$$\vec{v}_0(O_1) + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1 P}$$

à l'Équation (16), on constate que ces termes représentent la vitesse dans  $\mathcal{R}_0$  du point lié à  $\mathcal{R}_1$  qui coïncide avec  $P$  à l'instant considéré. Cette vitesse porte le nom de vitesse d'entraînement de  $P$  (par rapport à  $\mathcal{R}_0$ ) et elle est notée  $\vec{v}_e(P)$ . Finalement, on obtient la

**Proposition 4.** Si un point  $P$  est en mouvement par rapport à deux référentiels  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$ , ses vitesses mesurées par des observateurs dans  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  sont liées par la loi de composition des vitesses,

$$\vec{v}_0(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_e(P), \quad (18)$$

i.e. la vitesse “absolue” (vitesse dans  $\mathcal{R}_0$  considéré comme référentiel absolu) égale la vitesse “relative” (vitesse dans  $\mathcal{R}_1$  considéré comme référentiel relatif) augmentée de la vitesse d'entraînement. La vitesse d'entraînement (par rapport à  $\mathcal{R}_0$ ) est donnée par

$$\vec{v}_e(P) = \vec{v}_0(O_1) + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1 P}, \quad (19)$$

où  $O_1$  désigne un point quelconque de  $\mathcal{R}_1$ .

Déterminons à présent le lien entre les accélérations

$$\vec{\gamma}_0(P) = d_{t;0} \vec{v}_0(P) \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}_1(P) = d_{t;1} \vec{v}_1(P)$$

de  $P$  mesurées par des observateurs dans  $\mathcal{R}_0$  et dans  $\mathcal{R}_1$ . Étant donné que

$$\vec{v}_0(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_e(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_0(O_1) + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1 P},$$

il vient

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_0(P) &= d_{t;0} \vec{v}_1(P) + d_{t;0} \vec{v}_0(O_1) + \dot{\vec{\omega}}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1 P} + \vec{\omega}_{01} \wedge d_{t;0} \overrightarrow{O_1 P} \\ &= d_{t;1} \vec{v}_1(P) + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_1(P) + d_{t;0} \vec{v}_0(O_1) + \dot{\vec{\omega}}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1 P} + \vec{\omega}_{01} \wedge \left( d_{t;1} \overrightarrow{O_1 P} + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1 P} \right) \\ &= \vec{\gamma}_1(P) + \vec{\gamma}_0(O_1) + \dot{\vec{\omega}}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1 P} + \vec{\omega}_{01} \wedge (\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1 P}) + 2 \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_1(P). \end{aligned} \quad (20)$$

La comparaison de

$$\vec{\gamma}_0(O_1) + \dot{\vec{\omega}}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1 P} + \vec{\omega}_{01} \wedge (\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1 P})$$

à l'Équation (17) montre que ces termes représentent l'accélération par rapport à  $\mathcal{R}_0$  du point lié à  $\mathcal{R}_1$  qui coïncide avec  $P$  à l'instant considéré, i.e. l'accélération d'entraînement  $\vec{\gamma}_e(P)$  de  $P$  (par rapport à  $\mathcal{R}_0$ ). Le terme  $2 \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_1(P)$  est appelé l'accélération complémentaire ou l'accélération de Coriolis  $\vec{\gamma}_c(P)$  de  $P$ . D'où la

**Proposition 5.** Si un point  $P$  est en mouvement par rapport à deux référentiels  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$ , ses accélérations mesurées par des observateurs dans  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  sont reliées par la loi de composition des accélérations,

$$\vec{\gamma}_0(P) = \vec{\gamma}_1(P) + \vec{\gamma}_e(P) + \vec{\gamma}_c(P), \quad (21)$$

i.e. l'accélération absolue est égale à l'accélération relative augmentée de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis. L'accélération d'entraînement (par rapport à  $\mathcal{R}_0$ ) est donnée par

$$\vec{\gamma}_e(P) = \vec{\gamma}_0(O_1) + \dot{\vec{\omega}}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1P} + \vec{\omega}_{01} \wedge (\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1P}), \quad (22)$$

où  $O_1$  désigne un point quelconque de  $\mathcal{R}_1$  et l'accélération de Coriolis est égale à

$$\vec{\gamma}_c(P) = 2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_1(P). \quad (23)$$

## 6 Exercices

1. Montrer qu'en général  $\vec{\gamma}_e(P) \neq d_{t;0}\vec{v}_e(P)$ , mais que  $\vec{\gamma}_e(P) = d_{t;0}\vec{v}_e(P) - \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_1(P)$ . Expliquer !
2. Un référentiel  $\mathcal{R}_1$  de ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est en rotation, par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}_0$  de ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , autour de l'axe commun  $(O, \vec{e}_3)$ . Une particule  $P$  est assujettie à se déplacer sur le demi-axe  $]O, \vec{e}_1)$ . Décomposer  $\vec{v}_e(P)$ ,  $\vec{\gamma}_e(P)$  et  $\vec{\gamma}_c(P)$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .  
Réponses :  $\vec{v}_e(P) = r\dot{\theta}\vec{e}_2$ ,  $\vec{\gamma}_e(P) = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_1 + r\ddot{\theta}\vec{e}_2$ ,  $\vec{\gamma}_c(P) = 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_2$ . La vitesse  $\vec{v}_e(P)$  (resp. l'accélération  $\vec{\gamma}_e(P)$ ) peut être calculée de deux (resp. trois) façons différentes.
3. Un référentiel  $\mathcal{R}_1$  de ROND  $(O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  tourne autour de l'axe  $(O_0, \vec{e}_3)$  du ROND  $(O_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  attaché à un référentiel  $\mathcal{R}_0$ . Le point  $O_1$  décrit une circonférence de rayon constant  $a$ , à la vitesse angulaire constante  $\underline{\dot{\theta}}$ . Un point  $P$  décrit dans le plan  $(O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  un cercle de centre  $O_1$ , à la vitesse angulaire constante  $\underline{\dot{\theta}}$  par rapport à  $\mathcal{R}_1$ . On désigne par  $\underline{\vec{r}}$  (resp.  $\vec{r}$ ) le vecteur position de  $P$  dans  $\mathcal{R}_0$  (resp. dans  $\mathcal{R}_1$ ). Calculer  $\vec{v}_e(P)$ ,  $\vec{\gamma}_e(P)$  et  $\vec{\gamma}_c(P)$ .

Réponses :  $\vec{v}_e(P) = \underline{\dot{\theta}}\vec{e}_3 \wedge \underline{\vec{r}}$ ,  $\vec{\gamma}_e(P) = -\underline{\dot{\theta}}^2\underline{\vec{r}}$ ,  $\vec{\gamma}_c(P) = -2\underline{\dot{\theta}}\underline{\dot{\theta}}\vec{r}$ .

# Chapitre 7

## Dynamique du Point dans un Référentiel non inertiel

Les Chapitres 3-5 sont consacrés aux mouvements d'une particule matérielle par rapport à un observateur qui est lui-même en mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel inertiel ou galiléen, par exemple par rapport aux axes de Copernic. Le référentiel Terre—important dans les applications pratiques—n'est évidemment pas inertiel. L'objectif de ce chapitre est la Dynamique du Point par rapport à un système de référence non galiléen.

### 1 Théorèmes généraux du mouvement dans un référentiel non inertiel

Soit un point matériel  $(P, m)$  soumis à une résultante de forces  $\vec{F}$  et observé à partir d'un référentiel arbitraire  $\mathcal{R}_1$ . Le mouvement de cette particule par rapport à un quelconque observateur *inertiel*  $\mathcal{R}_0$  s'obtenant à partir de l'Équation de Newton  $m\vec{\gamma}_0 = \vec{F}$  et les accélérations absolue  $\vec{\gamma}_0$  et relative  $\vec{\gamma}_1$  du point  $P$  vérifiant la loi de composition des accélérations  $\vec{\gamma}_0 = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$ , voir Chapitre 6, on a

$$m\vec{\gamma}_1 = \vec{F} - m\vec{\gamma}_e - m\vec{\gamma}_c, \quad (1)$$

où

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_e(P) = \vec{\gamma}_0(O_1) + \dot{\vec{\omega}}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1P} + \vec{\omega}_{01} \wedge (\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{O_1P})$$

et

$$\vec{\gamma}_c = \vec{\gamma}_c(P) = 2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_1(P).$$

Il s'agit évidemment de choisir—si possible—le référentiel inertiel  $\mathcal{R}_0$  et le point  $O_1$  de  $\mathcal{R}_1$  de manière que l'accélération  $\vec{\gamma}_0(O_1)$  de  $O_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  et le vecteur rotation  $\vec{\omega}_{01}$  de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  soient facilement calculables. Si  $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1)$  est une fonction connue du temps  $t$ , de la position  $\vec{r}_1$  et de la vitesse  $\dot{\vec{r}}_1$  de  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}_1$ , l'Équation (1) est une équation différentielle du second ordre  $\mathcal{R}(t, \vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \ddot{\vec{r}}_1) = 0$ , dont l'intégration fournit le mouvement  $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$  de la particule  $P$  par rapport à l'observateur  $\mathcal{R}_1$ .

Les suivants théorèmes généraux du mouvement dans un référentiel non inertiel  $\mathcal{R}_1$  sont immédiats. Soulignons que nous avons systématiquement omis les indices 1 caractérisant les objets relatifs à  $\mathcal{R}_1$ .

**Théorème 1.** *Considérons une particule matérielle  $(P, m)$  en mouvement par rapport à un référentiel arbitraire  $\mathcal{R}_1$  et soumise à une résultante de forces  $\vec{F}$ . Par rapport à  $\mathcal{R}_1$ , les variations temporelles de la quantité de mouvement  $\vec{p} = m\vec{v}$ , du moment cinétique  $\vec{\sigma}_O$  par rapport à un point fixe  $O$  de  $\mathcal{R}_1$ , et de l'énergie cinétique  $E_c$  du point  $P$ , sont données par*

$$d_t \vec{p} = \vec{F} - m\vec{\gamma}_e - m\vec{\gamma}_c, \quad (2)$$

$$d_t \vec{\sigma}_O = \vec{OP} \wedge (\vec{F} - m\vec{\gamma}_e - m\vec{\gamma}_c), \quad (3)$$

$$d_t E_c = (\vec{F} - m\vec{\gamma}_e - m\vec{\gamma}_c) \cdot \vec{v} = (\vec{F} - m\vec{\gamma}_e) \cdot \vec{v}, \quad (4)$$

où les accélérations d'entraînement  $\vec{\gamma}_e$  et de Coriolis  $\vec{\gamma}_c$  de  $P$  sont calculées par rapport à un référentiel inertiel quelconque.

Les termes  $-m\vec{\gamma}_e$  et  $-m\vec{\gamma}_c$ , qui ont évidemment la dimension d'une force, ne sont bien sûr pas des forces réelles. Il découle immédiatement de leur définition que ces forces apparentes sont nulles si et seulement si le référentiel  $\mathcal{R}_1$  est inertiel, et ne se manifestent donc que lorsque la particule  $(P, m)$  est observée à partir d'un point de vue en mouvement accéléré ou en rotation. Ainsi, ces forces fictives sont d'origine purement cinématique et ne sont nullement les conséquences d'interactions physiques. Le vecteur  $-m\vec{\gamma}_e$  est la force fictive d'entraînement et le vecteur  $-m\vec{\gamma}_c$  la force fictive de Coriolis. Clairement, le terme  $-m\vec{\omega}_{01} \wedge (\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{OP})$  de la force d'entraînement n'est autre que la force centrifuge, et, visiblement, la force de Coriolis  $-2m\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_1$  ne travaille pas, ce qui explique la simplification de l'Équation (4). Il est facile de vérifier par de courts calculs directs, voir "champ des accélérations d'un solide", que la force d'entraînement est évidemment indépendante du point  $O_1$  considéré, et, voir "lois de composition des vecteurs rotation et des accélérations", que les forces d'entraînement et de Coriolis sont indépendantes du référentiel inertiel utilisé. Finalement, les théorèmes généraux des mouvements par rapport à un référentiel non inertiel sont donc les mêmes que dans un référentiel inertiel, à condition d'ajouter les forces fictives aux forces réelles agissant sur la particule.

## 2 Référentiel géocentrique

Considérons le repère  $(T, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  dont l'origine est le centre de masse  $T$  de la Terre  $\oplus$  et dont les axes ont des directions fixes par rapport au référentiel de Copernic  $\mathcal{R}_0$ . Ce repère est l'ossature d'un référentiel  $\mathcal{R}_1$ , appelé *référentiel géocentrique* et utilisé notamment dans l'étude des satellites de la Terre. Comme  $\mathcal{R}_1$  est animé par rapport à  $\mathcal{R}_0$  d'un mouvement de translation presque circulaire et uniforme, le référentiel géocentrique n'est évidemment pas inertiel.

Néanmoins, l'Équation de Newton (2) d'un point matériel  $(P, m)$  qui se meut "au voisinage" de la surface de la Terre, prend, par rapport au référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_1$ , une forme particulièrement simple, que nous nous proposons de déterminer.

Décomposons la résultante des forces réelles, s'exerçant sur la particule  $(P, m)$ , en les forces réelles d'origine terrestre, de résultante  $\vec{F}_{\oplus}$ , et les forces réelles non terrestres, i.e. les forces d'attraction gravifique exercées sur  $(P, m)$  par les autres corps du système solaire. Le module de ces forces étant donné par

$$\frac{GMm}{PC^2},$$

où  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$  est la constante universelle gravitationnelle et où  $M$  et  $C$  sont respectivement la masse et le centre de masse du corps attirant, les forces gravifiques dues à la Lune  $\ll (PC_{\text{L}} \ll)$



et au Soleil  $\odot$  ( $M_\odot \gg$ ) sont en fait les seules à prendre en compte. Si l'on note  $\vec{g}_\zeta$  et  $\vec{g}_\odot$  les champs de gravitation lunaire et solaire, ces forces valent  $m\vec{g}_\zeta(P)$  et  $m\vec{g}_\odot(P)$  respectivement. D'où l'Équation de Newton de  $(P, m)$  dans  $\mathcal{R}_1$ ,

$$\begin{aligned} m\vec{\gamma} &= \vec{F}_\oplus + m\vec{g}_\zeta(P) + m\vec{g}_\odot(P) - m\vec{\gamma}_e - m\vec{\gamma}_c \\ &= \vec{F}_\oplus + m\vec{g}_\zeta(P) + m\vec{g}_\odot(P) - m\vec{\gamma}_0(T), \end{aligned} \quad (5)$$

car le vecteur rotation de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est nul.

L'accélération  $\vec{\gamma}_0(T)$  est obtenue à partir de l'Équation de Newton écrite pour le point  $T$  et par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0$ ,

$$m_\oplus \vec{\gamma}_0(T) = m_\oplus \vec{g}_\zeta(T) + m_\oplus \vec{g}_\odot(T). \quad (6)$$

La justification rigoureuse de cette équation est basée sur le fait que la Terre peut être considérée comme une distribution de matière à symétrie sphérique et sur le Théorème du Centre de Masse— nous l'établirons plus loin de manière indépendante—qui stipule que le centre de masse d'un système matériel se meut comme un point matériel ayant comme masse la masse totale du système et soumis à la résultante de forces extérieures sollicitant le système.

La combinaison des équations (5) et (6) conduit enfin au résultat

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}_\oplus + m(\vec{g}_\zeta(P) - \vec{g}_\zeta(T)) + m(\vec{g}_\odot(P) - \vec{g}_\odot(T)). \quad (7)$$

Si l'on imagine les champs de forces (par unité de masse)  $\vec{g}_\zeta(P) - \vec{g}_\zeta(T)$  et  $\vec{g}_\odot(P) - \vec{g}_\odot(T)$  aux points  $P$  de la surface terrestre, on entrevoit le principe des *marées*. Sous l'influence de ces deux champs—de celui de la Lune surtout—les océans prennent la forme d'un court cigare arrondi à ses deux bouts et, la période de révolution de la Lune autour de la Terre étant égale à 24 h 50 min, le niveau des mers oscille avec une période de 12 h 25 min.

Il est possible de comparer la *force de marée lunaire*  $m(\vec{g}_\zeta(P) - \vec{g}_\zeta(T))$  et la *force de marée solaire* s'exerçant sur  $(P, m)$ , à la force de gravitation terrestre  $m\vec{g}_\oplus(P)$  subie par  $(P, m)$ , qui figure parmi les forces réelles terrestres  $\vec{F}_\oplus$ . Comme

$$\|m(\vec{g}_\zeta(P) - \vec{g}_\zeta(T))\| \simeq 10^{-7} \|m\vec{g}_\oplus(P)\| \quad \text{et} \quad \|m(\vec{g}_\odot(P) - \vec{g}_\odot(T))\| \simeq 5.10^{-8} \|m\vec{g}_\oplus(P)\|,$$

on peut évidemment négliger les deux derniers termes de l'Équation (7) et on obtient finalement le

**Théorème 2.** *Dans le référentiel géocentrique, l'Équation de Newton d'un point matériel  $P$  de masse  $m$ , se déplaçant au voisinage de la surface de la Terre, s'écrit*

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}_\oplus, \quad (8)$$

où  $\vec{F}_\oplus$  désigne la résultante des forces réelles terrestres s'exerçant sur  $P$ .

### 3 Référentiel terrestre

Ci-dessous, nous étudierons la Terre considérée comme référentiel. Il va sans dire que ce référentiel, notons-le encore  $\mathcal{R}_1$ , revêt une importance particulière. Comme  $\mathcal{R}_1$  est animé, par rapport aux axes  $\mathcal{R}_0$  de Copernic, d'un *mouvement de révolution* autour du Soleil et d'un *mouvement de rotation* autour de l'axe des pôles (nous négligeons la *précession des équinoxes* [mouvement giratoire de l'axe des pôles qui décrit un cône, d'angle au sommet égal à  $23^\circ 30'$ , en 26 000 ans], la *nutation* [petit mouvement oscillatoire de l'axe des pôles qui se superpose à la précession et qui a une amplitude très faible, égale à  $18''$  d'arc, et une période de 18 ans et 7 mois], les autres mouvements de la Terre, ainsi

que les faibles irrégularités de la vitesse de rotation de la Terre), il est clair que la Terre n'est pas un référentiel inertiel.

Déterminons à présent la forme que prend l'Équation de Newton (2) dans le *référentiel terrestre*, si elle est appliquée à un point  $(P, m)$  qui ne s'éloigne pas trop de la surface de la Terre. Les approximations précédentes impliquant que  $\vec{\omega}$  est constant, l'Équation de Newton s'écrit

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}_{\oplus} + m\vec{g}_{\mathbb{Q}}(P) + m\vec{g}_{\odot}(P) - m(\vec{\gamma}_0(T) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{TP})) - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}, \quad (9)$$

les notations étant les mêmes qu'en (5), et en reprenant l'argumentation de la Section 2, on trouve

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}_{\oplus} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{TP}) - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}. \quad (10)$$

La décomposition de la résultante  $\vec{F}_{\oplus}$  des forces réelles terrestres agissant sur la particule  $(P, m)$ , en la force de gravitation  $m\vec{g}_{\oplus}(P)$  exercée par la Terre et la résultante  $\vec{F}$  des forces réelles terrestres non gravifiques, conduit à

$$m\vec{\gamma} = m(\vec{g}_{\oplus}(P) - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{TP})) + \vec{F} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}.$$

Comparons les intensités de la force gravitationnelle  $\vec{g}_{\oplus}(P)$  et de la force centrifuge  $-\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{TP})$  par unité de masse. Si  $\lambda$  désigne la latitude de la position de  $P$ , on a

$$\|\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{TP})\| = \omega^2 R_{\oplus} \cos \lambda \leq \omega^2 R_{\oplus} \simeq \frac{(2\pi)^2}{86164^2} 6370.10^3 \simeq 0.034 \ll 9.81 \simeq \|\vec{g}_{\oplus}(P)\|,$$

la période de rotation sidérale de la Terre valant 86164 s et le rayon terrestre  $R_{\oplus}$  pouvant être pris égal à 6370 km. La direction du *champ de gravitation efficace*

$$\vec{g}(P) = \vec{g}_{\oplus}(P) - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{TP}) \quad (11)$$

de la Terre—celle donnée en  $P$  par un fil à plomb—ne s'écarte donc que de très peu de la direction de  $\vec{g}_{\oplus}(P)$ . D'où le

**Théorème 3.** *Dans le référentiel terrestre, l'Équation de Newton d'un point matériel  $(P, m)$ , se déplaçant au voisinage de la surface de la Terre, s'écrit*

$$m\vec{\gamma} = m\vec{g}(P) + \vec{F} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}, \quad (12)$$

où  $\vec{g}(P)$  est le *champ de gravitation efficace de la Terre*, où  $\vec{F}$  désigne la *résultante des forces réelles terrestres non gravifiques* et où  $\vec{\omega}$  est le *vecteur rotation de la Terre*.

Notons que si  $\theta$  désigne l'angle entre le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  et le vecteur vitesse  $\vec{v}$ , le module de la force de Coriolis par unité de masse est donné par

$$\| -2\vec{\omega} \wedge \vec{v} \| = 2\omega v \sin \theta.$$

Cette intensité étant, pour une vitesse  $v = 100 \text{ ms}^{-1}$  et un sinus  $\sin \theta = 1$ , approximativement égale à  $0,0146 \text{ ms}^{-2}$ , la *force de Coriolis est généralement négligeable*. On doit en tenir compte lorsque  $v$  est très grand et lorsque l'expérience dure longtemps. Si on peut négliger la force de Coriolis, l'Équation de Newton (12) coïncide avec celle qu'on obtient en assimilant la Terre à un référentiel inertiel. Ceci justifie a posteriori cette façon de procéder.

#### 4 Pendule de J. B. L. Foucault

Dans cette section, nous calculons la trajectoire du *pendule de Foucault* par rapport à la Terre et expliquons que son mouvement prouve la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles et la présence de la force de Coriolis dans un référentiel non inertiel.

Considérons donc un tel pendule, i.e. un corps—nous l'assimilerons à un point matériel  $(P, m)$ —suspendu, par l'intermédiaire d'un fil de masse négligeable et de longueur  $\ell$ , à un point fixe  $S$ , en un lieu de latitude  $\lambda$ .

Soit  $O$  la position de  $P$  à l'équilibre et soient  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  les vecteurs unitaires liés à  $O$  et dirigés vers l'Est, le Nord et le Zénith respectivement. L'équation du mouvement de  $P$  par rapport au référentiel terrestre s'écrit, voir Théorème 3,

$$m\vec{\gamma} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}, \quad (13)$$

où  $\vec{T}$  est la tension du fil. Outre les composantes  $(x, y, z)$  du vecteur position  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  dans la BOND  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , le module  $T$  de la force de liaison  $\vec{T}$  est inconnu. En exprimant, en vue de projeter l'Equation (13) sur les axes, les composantes  $(T_x, T_y, T_z)$  de  $\vec{T}$  en fonction des paramètres du problème, on trouve

$$T_x = -\frac{T}{\ell}x, \quad T_y = -\frac{T}{\ell}y, \quad \text{et} \quad T_z = \frac{T}{\ell}(\ell - z),$$

comme on le voit en utilisant les règles bien connues valables dans des triangles semblables. Les composantes de  $\vec{\omega}$  dans la BOND considérée étant  $(0, \omega \cos \lambda, \omega \sin \lambda)$ , la projection de l'équation du mouvement donne

$$\ddot{x} = -\frac{T}{m\ell}x - 2\omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda), \quad (14)$$

$$\ddot{y} = -\frac{T}{m\ell}y - 2\omega\dot{x} \sin \lambda, \quad (15)$$

$$\ddot{z} = -g + \frac{T}{m\ell}(\ell - z) + 2\omega\dot{x} \cos \lambda. \quad (16)$$

Vu l'objectif poursuivi, nous pouvons limiter notre étude à des oscillations assez petites pour que le mouvement puisse être considéré comme plan. Alors  $z = 0$ ,  $\dot{z} = 0$  et  $\ddot{z} = 0$ , de sorte que le nombre d'inconnues se réduit au nombre d'équations. Comme  $\omega = 2\pi/86164$ , le terme  $2\omega\dot{x} \cos \lambda$  est négligeable, l'Équation (16) donne  $T = mg$  et les équations (14) et (15) deviennent

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} \sin \lambda + \frac{g}{\ell}x = 0,$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} \sin \lambda + \frac{g}{\ell}y = 0,$$

ou, sous forme vectorielle,

$$\ddot{\vec{r}} + 2\Omega\vec{e}_3 \wedge \dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = 0, \quad (17)$$

à condition de poser  $\Omega = \omega \sin \lambda$  et  $\omega_0^2 = g/\ell$ . L'Équation (17) est l'équation harmonique tordue par le terme  $2\omega \sin \lambda \vec{e}_3 \wedge \dot{\vec{r}}$  dû à la rotation  $\omega$  de la Terre et visiblement responsable de la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault.

Vu la complexité de cette équation de mouvement, nous considérons le référentiel  $\mathcal{R}_2$  défini par son système d'axes attaché  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  tournant, par rapport aux axes  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  du référentiel Terre  $\mathcal{R}_1$ , à la vitesse angulaire  $\Omega$  dans le sens défini par  $-\vec{e}_3$ . En effet, comme ce nouveau référentiel suit en fait le plan d'oscillation du pendule de Foucault dans son mouvement de rotation, nous

pouvons augurer que l'équation de mouvement du pendule par rapport à  $\mathcal{R}_2$  est une simple équation harmonique, facile à intégrer. Afin de corroborer cette intuition, exprimons les dérivées temporelles  $\dot{\vec{r}}$  et  $\ddot{\vec{r}}$  calculées par l'observateur  $\mathcal{R}_1$  en fonction de celles  $d_t \vec{r}$  et  $d_t^2 \vec{r}$  dans  $\mathcal{R}_2$ . Le vecteur rotation de  $\mathcal{R}_2$  par rapport à  $\mathcal{R}_1$  étant donné par  $\vec{\omega}_{12} = -\Omega \vec{e}_3$ , la formule de Poisson s'écrit  $\dot{\vec{u}} = d_t \vec{u} - \Omega \vec{e}_3 \wedge \vec{u}$ , quel que soit le vecteur  $\vec{u}$ , et ses applications successives à  $\vec{r}$  et à  $\dot{\vec{r}}$  donnent

$$\dot{\vec{r}} = d_t \vec{r} - \Omega \vec{e}_3 \wedge \vec{r}$$

et

$$\ddot{\vec{r}} = d_t^2 \vec{r} - 2\Omega \vec{e}_3 \wedge d_t \vec{r} - \Omega^2 \vec{r}.$$

Les termes en  $\Omega^2 = \omega^2 \sin^2 \lambda$  pouvant être négligés, l'Équation (17) prend bien la forme

$$d_t^2 \vec{r} + \omega_0^2 \vec{r} = 0. \quad (18)$$

En vue de déterminer les constantes d'intégration dans la solution générale  $\vec{r} = \vec{C}_1 \cos \omega_0 t + \vec{C}_2 \sin \omega_0 t$  de (18), précisons qu'à l'instant  $t = 0$ , en lequel  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sont supposés coïncider,  $P$  occupe la position  $\vec{r} = a\vec{e}_1$ ,  $a > 0$ , et que sa vitesse initiale par rapport à  $\mathcal{R}_1$  est  $\vec{v}_{1;0} = 0$ . Il découle de la loi de composition des vitesses que la vitesse initiale de  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}_2$  est alors égale à  $\vec{v}_{2;0} = a\Omega \vec{e}_2$ . Compte tenu de ces conditions initiales, l'Équation (18) implique que les coordonnées  $(x', y')$  de  $P$  dans  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sont données par

$$x' = a \cos \omega_0 t, \quad (19)$$

$$y' = \frac{a\Omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (20)$$

L'élimination de  $t$  entre (19) et (20) conduisant à l'équation

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{a\Omega}{\omega_0}\right)^2} = 1,$$

la trajectoire de  $P$  dans le référentiel tournant  $\mathcal{R}_2$  est une ellipse centrée en  $O$  et de demi-axes  $a$  et  $\frac{a\Omega}{\omega_0}$ . Comme  $\Omega \ll \omega_0$ , cette ellipse est très aplatie.

Il est désormais facile de décrire la trajectoire de  $P$  par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_1$ . Le point  $P$  part en  $a\vec{e}_1$  et arrive en  $-a\vec{e}_1$  à l'instant  $t = \frac{\pi}{\omega_0}$ . Or, durant ce temps, l'axe  $(O, \vec{e}_1)$  a tourné de  $-\Omega \frac{\pi}{\omega_0} = -\omega \sin \lambda \frac{\pi}{\omega_0}$ . Cette rotation se fait donc dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère Nord et dans le sens inverse dans l'hémisphère Sud. Finalement, dans l'hémisphère Nord, la trajectoire du pendule de Foucault par rapport à la Terre est bien une oscillation à laquelle se superpose une rotation du plan d'oscillation dans le sens des aiguilles d'une montre. La période de rotation  $T$  du plan d'oscillation est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda} = \frac{J}{\sin \lambda},$$

où  $J$  est la durée de la rotation de la Terre et vaut  $J = 86164$  s. Cette valeur de  $T$  est en accord avec celle mesurée expérimentalement. Pour  $\lambda = 49^\circ$ , elle est égale à  $T = 31$  h 43 min.

Mentionnons explicitement qu'il résulte de l'Équation (17) que si la Terre ne tournait pas autour de l'axe des pôles, le mouvement du pendule de Foucault par rapport à la Terre serait une simple oscillation. Ainsi, l'observation de la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault prouve bien la rotation de la Terre.

## 5 Exercices

1. Un corps assimilable à un point matériel est lâché sans vitesse initiale en un point  $O$  à la hauteur  $h$  au-dessus de la surface terrestre en un lieu de latitude  $\lambda > 0$ . Déterminer le point de chute, en tenant compte au premier ordre de la rotation de la Terre  $\omega$  et en supposant  $\vec{g}$  uniforme dans la région du mouvement.

Réponse : Suite à la rotation de la Terre le corps en chute libre est dévié vers l'Est, la valeur de la déviation étant  $d = \frac{2}{3} \omega h \cos \lambda \sqrt{\frac{2h}{g}}$  (pour  $\lambda = 45^\circ$  et  $h = 100$  m, on trouve  $d \simeq 1,5$  cm).

2. Un tube  $T$  de faible section est en rotation autour d'un axe vertical  $Oz$ , avec une vitesse angulaire  $\omega$ . L'angle d'inclinaison  $\alpha$  du tube par rapport à l'axe  $Oz$  est constant.

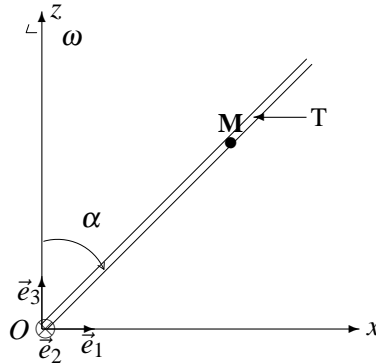
- (a) Montrer que la position d'équilibre (par rapport au tube) d'une particule  $M$  de masse  $m$ , mobile sans frottement à l'intérieur de  $T$ , est

$$r_0 = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

- (b) La vitesse angulaire est brusquement réduite à la valeur constante  $\frac{\omega}{2}$ . Montrer que la loi du mouvement de la particule  $M$  (par rapport à  $T$ ) est

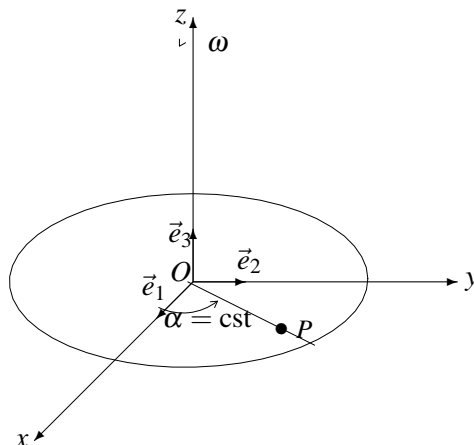
$$r = r_0(4 - 3 \cosh \Omega t), \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{\omega}{2} \sin \alpha$$

et calculer le temps que  $M$  met pour atteindre le point  $O$ .



3. Un disque de rayon  $R$  tourne autour de son axe vertical  $Oz$ , à la vitesse angulaire constante  $\omega$ . Une particule  $P$  de masse  $m$  astreinte à se mouvoir sans frottement sur un rayon du disque, est abandonnée sans vitesse initiale par rapport au disque, à la distance  $\frac{R}{2}$  du centre.

- (a) Trouver la loi du mouvement  $r = r(t)$  du point  $P$  par rapport au disque.  
 (b) Déterminer la durée au bout de laquelle  $P$  atteint le bord du disque.



4. Soit un ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  dont l'origine  $O$  est un lieu de latitude  $\lambda$  dans l'hémisphère Nord de la surface terrestre, et dont les axes sont dirigés vers l'Est, le Nord et le Zénith respectivement. Une particule  $(P, m)$  est lancée, à partir de  $O$  et avec une vitesse initiale  $v_0$ , suivant la direction  $\vec{e}_1$  sur un plan horizontal parfaitement lisse. Trouver la trajectoire de  $P$  par rapport à la Terre, en tenant compte de la rotation  $\omega$  de cette dernière et en considérant le champ de pesanteur et la latitude comme constants.

Réponse: Si  $\Omega = 2\omega \sin \lambda$ , la trajectoire est une circonférence de centre  $(0, -v_0/\Omega)$  et de rayon  $v_0/\Omega$ .

5. Un point matériel  $(P, m)$  peut se déplacer sur une circonférence horizontale infiniment lisse de centre  $C$  et de rayon  $c$ , qui est, par rapport au laboratoire considéré comme inertial, en rotation à une vitesse angulaire constante  $\omega$  autour d'un axe vertical situé à une distance  $d$  de  $C$ . Déterminer l'équation du mouvement de  $P$  par rapport au référentiel défini par le ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , où  $O$  désigne le point d'intersection de l'axe avec le plan de la circonférence, où  $\vec{e}_1$  est dirigé de  $O$  vers  $C$  et où  $\vec{e}_3$  est vertical ascendant. Projeter cette équation sur les axes et trouver la période des petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre.

# Chapitre 8

## Dynamique des Systèmes de Points

Nous étendons ci-dessous les théorèmes généraux du mouvement d'un point matériel au cas des systèmes formés par un *nombre fini* de points matériels. Ces extensions permettront d'aborder l'étude des solides et des fluides qui peuvent être considérés comme composés par une *infinité* de particules infiniment petites.

### 1 Éléments cinétiques d'un système de points matériels

**Définition 1.** Soit un système de points matériels  $(P_i, m_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , étudié par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ , et soit un point  $O$  (généralement supposé) fixe dans  $\mathcal{R}$ . On définit la quantité de mouvement  $\vec{p}$  (resp. le moment cinétique  $\vec{\sigma}_O$  par rapport au point  $O$ , l'énergie cinétique  $E_c$ ) du système par rapport à  $\mathcal{R}$ , comme somme des éléments cinétiques correspondants  $\vec{p}_i$  (resp.  $\vec{\sigma}_{O,i}$ ,  $E_{c,i}$ ) des points  $P_i$  formant le système, i.e.

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i, \quad \vec{\sigma}_O = \sum_i \vec{\sigma}_{O,i} = \sum_i \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{p}_i, \quad E_c = \sum_i E_{c,i} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2,$$

où  $\vec{v}_i$  désigne la vitesse par rapport à  $\mathcal{R}$  de  $P_i$ .

Le centre de masse, centre d'inertie, centre de gravité ou barycentre d'un système matériel joue un rôle privilégié en Mécanique des Systèmes et des Solides. Par exemple, le mouvement le plus général d'un solide peut être décomposé en le mouvement de son centre de masse et en son mouvement autour du centre de masse. Le centre de masse d'un système de points matériels  $(P_i, m_i)$  est un point géométrique  $G$  dont la position est la moyenne pondérée des positions des  $P_i$ .

**Définition 2.** Le centre de masse d'un système matériel  $(P_i, m_i)$  est le point  $G$  défini par

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GP_i} = 0$$

ou, de manière équivalente, par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OP_i}}{\sum_i m_i},$$

où  $O$  est un point arbitraire.

**Théorème 1.** La quantité de mouvement  $\vec{p}$  d'un système matériel est égale à la quantité de mouvement qu'aurait son centre de masse  $G$  si c'était un point matériel affecté de la masse totale  $m$  du système :

$$\vec{p} = m \vec{v}(G). \quad (1)$$

**Preuve.** Ce théorème est une conséquence immédiate des équations ci-dessus. ■

## 2 Théorèmes généraux du mouvement d'un système matériel dans un référentiel inertial

Considérons encore un système de points matériels  $(P_i, m_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Les forces appliquées à une particule  $P_i$  peuvent être dues aux autres particules  $P_j$ ,  $j \neq i$ , du système ou bien à des éléments extérieurs au système. Les premières sont appelées *forces internes*, les secondes *forces externes*. Nous notons  $\vec{F}_i$  (resp.  $\vec{F}_{i,\text{int}}$ ,  $\vec{F}_{i,\text{ext}}$ ) la résultante de toutes les forces (resp. des forces internes, des forces externes) agissant sur  $P_i$ . Par conséquent,  $\vec{F}_i = \vec{F}_{i,\text{int}} + \vec{F}_{i,\text{ext}}$  et

$$\vec{F}_{i,\text{int}} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij},$$

où  $\vec{F}_{ij}$  désigne la force exercée sur la particule  $P_i$  par la particule  $P_j$ . Finalement, nous désignons par  $\vec{F}$  (resp.  $\vec{F}_{\text{int}}$ ,  $\vec{F}_{\text{ext}}$ ) la résultante de toutes les forces (resp. des forces internes, des forces externes) sollicitant le système, si bien que  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_{i,\text{int}} + \sum_i \vec{F}_{i,\text{ext}} = \vec{F}_{\text{int}} + \vec{F}_{\text{ext}}$ .

Les propositions suivantes montrent que les complexes forces internes disparaissent des équations de la Dynamique.

**Proposition 1.** *La résultante  $\vec{F}_{\text{int}}$  des forces internes agissant sur un système matériel et le moment résultant  $\vec{\mathcal{M}}_{\text{int}}(O)$  des forces internes par rapport à un point quelconque  $O$  sont nuls, i.e.*

$$\vec{F}_{\text{int}} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_{\text{int}}(O) = 0.$$

**Preuve.** En vertu du principe de l'action et de la réaction, on a

$$\vec{F}_{\text{int}} = \sum_i \vec{F}_{i,\text{int}} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_{i < j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = 0.$$

De plus,

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{int}}(O) = \sum_i \sum_{j \neq i} \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{F}_{ij} = \sum_{i < j} (\overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{F}_{ij} + \overrightarrow{OP_j} \wedge \vec{F}_{ji}) = \sum_{i < j} \overrightarrow{P_j P_i} \wedge \vec{F}_{ij} = 0. \blacksquare$$

La puissance des forces internes—qui intervient dans le Théorème de l'Énergie cinétique—est nulle si le système considéré est un solide.

**Proposition 2.** *Dans un solide, la puissance  $P_{\text{int}}$  des forces internes est nulle.*

**Preuve.** Comme

$$P_{\text{int}} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}(P_i) = \sum_{i < j} (\vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}(P_i) + \vec{F}_{ji} \cdot \vec{v}(P_j)) = \sum_{i < j} \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{v}(P_i) - \vec{v}(P_j))$$

et que dans le cas d'un solide

$$\vec{v}(P_i) = \vec{v}(P_j) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{P_j P_i},$$

où  $\vec{\omega}$  désigne le vecteur rotation du solide par rapport à l'observateur, la puissance des forces internes d'un solide est égale à

$$P_{\text{int}} = \sum_{i < j} \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{P_j P_i}) = 0. \blacksquare$$

Dans le cas des systèmes de particules les théorèmes gouvernant les mouvements—les théorèmes de la quantité de mouvement (TQM) ou du centre de masse (TCM), du moment cinétique (TMC) et de l'énergie cinétique (TEC)—prennent la forme suivante.



**Théorème 2.** Dans tout référentiel inertiel, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement  $\vec{p}$  d'un système matériel est égale à la résultante  $\vec{F}_{\text{ext}}$  des forces externes appliquées au système, i.e.

$$d_t \vec{p} = \vec{F}_{\text{ext}}. \quad (2)$$

**Preuve.** Il suffit d'appliquer la Définition 1, l'Équation de Newton de la Mécanique du Point et la Proposition 1. ■

**Théorème 3.** Dans tout référentiel inertiel, le centre de masse  $G$  d'un système matériel se meut comme si c'était un point matériel affecté de la masse totale  $m$  du système et soumis à la résultante  $\vec{F}_{\text{ext}}$  des forces externes appliquées au système, i.e.

$$m\vec{\gamma}(G) = \vec{F}_{\text{ext}}. \quad (3)$$

**Preuve.** Il suffit d'appliquer les équations (1) et (2). ■

**Théorème 4.** Dans tout référentiel inertiel, la dérivée temporelle du mouvement cinétique  $\vec{\sigma}_O$  d'un système matériel est égale au moment  $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O)$  des forces externes appliquées au système, i.e.

$$d_t \vec{\sigma}_O = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O), \quad (4)$$

où  $O$  est un point fixe ou le centre de masse du système.

**Preuve.** Dans le cas où  $O$  est un point fixe, il suffit d'appliquer la Définition 1, le Théorème du Moment cinétique de la Mécanique du Point et la Proposition 1. Si  $O$  est le centre de masse  $G$  du système, on applique le fait que le moment cinétique (resp. moment des forces externes) est un tenseur de vecteur  $\vec{p}$  (resp.  $\vec{F}_{\text{ext}}$ ). En effet, si  $O$  désigne à présent un point fixe, il s'ensuit que

$$d_t \vec{\sigma}_G = d_t \vec{\sigma}_O + d_t (\vec{p} \wedge \vec{OG}) = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O) + \vec{F}_{\text{ext}} \wedge \vec{OG} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(G),$$

où nous avons utilisé l'Équation (1). ■

**Théorème 5.** Dans tout référentiel inertiel, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique  $E_c$  d'un système matériel est égale à la puissance  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext}}$  de toutes les forces, internes et externes, appliquées au système, i.e.

$$d_t E_c = \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext}}. \quad (5)$$

Si le système est un solide, la variation temporelle de l'énergie cinétique coïncide avec la puissance des seules forces externes, i.e.

$$d_t E_c = \mathcal{P}_{\text{ext}}. \quad (6)$$

**Preuve.** Il suffit d'appliquer la Définition 1, le Théorème de l'Énergie cinétique de la Dynamique du Point, ainsi que la Proposition 2. ■



# Chapitre 9

## Dynamique des Solides

Les théorèmes qui régissent les mouvements des systèmes de particules par rapport aux référentiels inertiels, voir Chapitre 8, sont applicables aux solides considérés comme des distributions de masses infinitésimales. Deux difficultés s'opposent à l'utilisation de ces théorèmes du mouvement : le calcul du moment cinétique d'un solide et celui de son énergie cinétique. Avant d'aborder ces problèmes, nous donnons quelques informations préliminaires relatives au concept de moment d'inertie.

### 1 Moment d'inertie

Tout comme la *masse inerte*  $m$  mesure la résistance d'un corps à une accélération, le *moment d'inertie*  $J$  quantifie la résistance qu'oppose un corps à une accélération angulaire. Si nous mettons un point matériel immobile  $P$  de masse  $m$  en mouvement (resp. mouvement de rotation autour d'un axe  $\Delta$ ) avec la vitesse  $v$  (resp. vitesse angulaire  $\omega$ ), l'énergie cinétique à fournir au point est donnée par

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \left( \text{resp. } \frac{1}{2}(md^2)\omega^2 \right),$$

où  $d$  désigne la distance de  $P$  à  $\Delta$ . D'où la

**Définition 1.** On appelle *moment d'inertie d'un système matériel*  $(P_i, m_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , par rapport à un axe  $\Delta$ , le scalaire positif

$$J_\Delta = \sum_i m_i d_i^2, \tag{1}$$

où  $d_i$  désigne la distance de  $P_i$  à  $\Delta$ .

Dans le cas d'un solide—considéré comme répartition continue de matière—le solide—de volume  $V$ —est mentalement subdivisé en une infinité de volumes infinitésimaux  $dV \ni P$  de masse  $dm$  et son moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$  est donné par

$$J_\Delta = \int_V d^2(P) dm, \tag{2}$$

où  $d(P)$  est la distance de  $P$  à  $\Delta$ . On définit de manière analogue le moment d'inertie  $J_O$  (resp.  $J_\pi$ ) par rapport à un point  $O$  (resp. un plan  $\pi$ ), étant entendu que les distances à considérer sont alors celles à  $O$  (resp.  $\pi$ ).

## 2 Exercices

1. Prouver que le moment d'inertie par rapport à un axe est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans orthogonaux passant par cet axe.
2. Prouver que le moment d'inertie par rapport à un point est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans deux à deux orthogonaux passant par ce point, ou encore, à la somme des moments d'inertie par rapport à un axe et un plan orthogonaux passant par ce point.
3. Soient  $(x_1, x_2, x_3)$  (resp.  $(\rho, \theta, z)$ ,  $(r, \theta, \phi)$ ) des coordonnées cartésiennes (resp. cylindriques, sphériques) d'un point  $P$ . Expliquer graphiquement pourquoi

$$\begin{aligned} \int f(P) dV &= \int \int \int f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int \int \int f(\rho, \theta, z) \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int \int \int f(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \end{aligned}$$

4. Montrer que le moment d'inertie d'une tige homogène de masse  $m$  et de longueur  $\ell$ , par rapport à un axe  $\Delta$  orthogonal à la tige et passant par son centre, est donné par

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12} m\ell^2 \quad (3)$$

5. Montrer que le moment d'inertie d'un disque homogène de masse  $m$  et de rayon  $R$ , par rapport à un axe  $\Delta$  orthogonal au disque et passant par son centre, est donné par

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} mR^2 \quad (4)$$

6. Reprendre le problème n° 5 et montrer que le moment d'inertie, par rapport à un axe  $\Delta$  contenu dans le plan du disque et passant par le centre du disque, est donné par

$$J_{\Delta} = \frac{1}{4} mR^2 \quad (5)$$

Suggestion : Soit  $\pi$  (resp.  $D$ ) un plan (resp. l'axe) orthogonal au disque et contenant  $\Delta$  (resp. et passant par son centre). Montrer que  $J_{\Delta} = J_{\pi}$  et que  $J_D = 2J_{\pi}$ .

7. Montrer que le moment d'inertie d'un cylindre circulaire, droit, plein et homogène, de masse  $m$ , de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ , par rapport à son axe  $\Delta$ , est donné par

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} mR^2 \quad (6)$$

8. Montrer que le moment d'inertie d'une sphère homogène, de masse  $m$  et de rayon  $R$ , par rapport à un axe  $\Delta$  passant par son centre, est donné par

$$J_{\Delta} = \frac{2}{5} mR^2 \quad (7)$$

### 3 Modèle des tenseurs

Rappelons que dans le cadre de ce cours nous nous limitons à l'espace vectoriel  $E$  des vecteurs de l'espace ambiant et aux BON  $\vec{e}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Une forme bilinéaire, i.e. une application  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  qui est linéaire en chaque argument—de sorte qu'en particulier

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{ij} u_i v_j b(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \in \mathbb{R},$$

quels que soient  $\vec{u} = \sum_i u_i \vec{e}_i, \vec{v} = \sum_j v_j \vec{e}_j \in E$ —est évidemment complètement définie par la matrice

$$b_{ij} := b(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \in \mathbb{R}$$

de ses valeurs sur les vecteurs de base. La matrice représentative  $b'_{ij} = b(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j) \in \mathbb{R}$  de  $b$  dans une autre BON  $\vec{e}'_i = A_{ki} \vec{e}_k$ , ou encore  $\vec{e}_i = A'_{ki} \vec{e}'_k = A_{ik} \vec{e}'_k$ , est liée à la matrice  $b_{ij} = b(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \in \mathbb{R}$  représentative de  $b$  dans la BON  $\vec{e}_i$ , par la relation

$$b_{ij} = b(A_{ik} \vec{e}'_k, A_{j\ell} \vec{e}'_\ell) = A_{ik} A_{j\ell} b'_{k\ell}, \quad (8)$$

où les symboles de sommation sont systématiquement sous-entendus.

Observons qu'ainsi les formes bilinéaires sont comme les 2-tenseurs, voir Chapitre 6, des objets caractérisés dans chaque BON par une matrice  $T_{ij}$  de  $3^2$  composantes, les matrices relatives à deux bases différentes, reliées par la matrice de passage  $A$ , vérifiant la loi tensorielle d'ordre 2,

$$T_{ij} = A_{ik} A_{j\ell} T'_{k\ell}. \quad (9)$$

On entrevoit donc que *les formes bilinéaires constituent un modèle des 2-tenseurs*. De manière plus générale, on prouve sans difficulté que

**Théorème 1.** *Les espaces  $\otimes_n E$  et  $\mathcal{L}_n(E^{\times n}, \mathbb{R})$  des  $n$ -tenseurs de  $E$  et des formes  $n$ -linéaires de  $E$  respectivement, sont des espaces vectoriels réels de dimension  $3^2$  qui sont canoniquement isomorphes :*

$$\otimes_n E \simeq \mathcal{L}_n(E^{\times n}, \mathbb{R}). \quad (10)$$

Par exemple, le *produit scalaire* usuel  $\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$  de l'espace euclidien  $E$  est une forme bilinéaire, donc un tenseur d'ordre 2.

### 4 Tenseur d'inertie

Nous avons signalé précédemment, que les calculs du moment cinétique  $\vec{\sigma}_O$  et de l'énergie cinétique  $E_c$  d'un solide constituent un défi particulier—que nous sommes à présent préparés à relever.

Rappelons que le mouvement général d'un solide est composé du mouvement de son centre de masse  $G$ —encodé dans le TCM

$$m\vec{\gamma}(G) = \vec{F}_{\text{ext}},$$

avec des notations désormais évidentes—et de son mouvement autour de son centre de masse—encrypté dans le TMC

$$d_t \vec{\sigma}_G = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(G).$$

Si le solide étudié possède un point fixe  $O$ , i.e. n'est animé que d'un mouvement de rotation autour de ce point  $O$  du solide qui est (également) fixe dans le référentiel de l'observateur, ses mouvements peuvent être extraits du TMC en  $O$ ,

$$d_t \vec{\sigma}_O = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O).$$

Dans les deux cas, notre intérêt porte sur le moment cinétique du solide par rapport à un point  $O_1$  lié au solide. Considérons donc un solide  $\mathcal{R}_1$  (ou  $\mathcal{S}$ ) en mouvement par rapport à un référentiel inertiel  $\mathcal{R}_0$  (ou  $\mathcal{R}$ ) et soit  $O_1$  (ou  $O$ ) un point attaché au solide. Comme

$$\vec{\sigma}_O = \sum_i \vec{OP}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \int \vec{OP} \wedge \vec{v}(P) dm \quad (11)$$

et que la formule fondamentale de la cinématique du solide stipule que le champ des vitesses d'un solide est un torseur dont le vecteur est le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  de  $\mathcal{S}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , i.e. que pour tout point  $P$  lié au solide, on a

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OP},$$

il vient

$$\vec{\sigma}_O = \int \vec{OP} dm \wedge \vec{v}(O) + \int \vec{OP} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) dm = m \vec{OG} \wedge \vec{v}(O) + \int \vec{OP} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) dm, \quad (12)$$

où nous avons utilisé la définition du centre de masse  $G$  du solide, voir Chapitre 8, et où  $m$  désigne la masse totale du solide. Remarquons que si  $O$  est le centre de masse  $G$  ou un point fixe du solide, le premier terme du dernier membre de l'Équation (12) s'annule.

Notons que le calcul de l'intégrale au dernier membre de cette équation ne fournit pas seulement le moment cinétique, mais aussi l'énergie cinétique du solide. En effet,

$$\begin{aligned} 2E_c &= \sum_i m_i v_i^2 = \int \vec{v}^2(P) dm \\ &= \int \vec{v}(P) \cdot (\vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}) dm \\ &= m \vec{v}(G) \cdot \vec{v}(O) + \int \vec{v}(P) \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) dm \\ &= m \vec{v}(G) \cdot \vec{v}(O) + \vec{\omega} \cdot \int \vec{OP} \wedge \vec{v}(P) dm, \end{aligned}$$

où nous avons appliqué l'égalité de l'impulsion du solide à l'impulsion de son centre de masse affecté de la masse totale du solide, voir Chapitre 8, ainsi que l'invariance du produit mixte par permutation circulaire. D'où, compte tenu de l'Équation (11), la relation

$$2E_c = m \vec{v}(G) \cdot \vec{v}(O) + \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}_O. \quad (13)$$

Si  $O$  est le centre de masse (resp. un point fixe), le premier terme du second membre de l'Équation (13) représente le double de l'énergie cinétique du centre de masse (resp. s'annule).

Le moment cinétique  $\vec{\sigma}_O$  et l'énergie cinétique  $E_c$  du solide sont donc déterminés dès que l'intégrale

$$\vec{\sigma}_O = \int \vec{OP} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) dm = \int OP^2 \vec{\omega} - (\vec{OP} \cdot \vec{\omega}) \vec{OP} dm \quad (14)$$

est calculée.

#### 4.1 Système arbitraire d'axes orthonormés

Dans un système arbitraire d'axes orthonormés  $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , on obtient

$$\sigma_{O,i} = \int OP^2 \omega_i - \left( \sum_j OP_j \omega_j \right) OP_i dm = \sum_j \left( \int OP^2 \delta_{ij} - OP_i OP_j dm \right) \omega_j = \sum_j I_{O,ij} \omega_j, \quad (15)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker, où  $OP_k$  désigne la  $k$ -ième composante du vecteur  $\vec{OP}$  et où nous avons posé

$$I_{O,ij} = \int OP^2 \delta_{ij} - OP_i OP_j dm. \quad (16)$$

Étant donné que les  $\delta_{ij}$  (resp. les  $OP_k$ ) sont les composantes d'un 2-tenseur (isotrope) (resp. d'un vecteur), il est clair que les  $I_{O,ij}$  sont les composantes dans la BON considérée d'un 2-tenseur. Alternativement, si la matrice  $I_{O,ij}$  représente un 2-tenseur ou une forme bilinéaire  $I_O$ , on a

$$I_O(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = I_{O,ij} = \int OP^2 \delta_{ij} - OP_i OP_j dm = \int OP^2 (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) - (\vec{OP} \cdot \vec{e}_i) (\vec{OP} \cdot \vec{e}_j) dm,$$

si bien que la forme bilinéaire est donnée par

$$I_O(\vec{u}, \vec{v}) = \int OP^2 (\vec{u} \cdot \vec{v}) - (\vec{OP} \cdot \vec{u}) (\vec{OP} \cdot \vec{v}) dm. \quad (17)$$

Inversement, l'application  $I_O$  définie par l'Équation (17) est bien une forme bilinéaire, i.e. un 2-tenseur, ayant pour composantes dans la BON  $\vec{e}_i$  les  $I_{O,ij}$  donnés par l'Équation (16). Il est clair que  $I_O(\vec{v}, \vec{u}) = I_O(\vec{u}, \vec{v})$ , i.e. que  $I_O$  est un 2-tenseur symétrique. Signalons encore que l'Équation (15) prend finalement la forme

$$\vec{s}_O = I_O \cdot \vec{\omega}, \quad (18)$$

où “ $\cdot$ ” désigne le produit tensoriel contracté, voir Chapitre 6.

La signification physique du tenseur  $I_O$  est facile à comprendre. En effet, soit  $\Delta$  un axe arbitraire passant par  $O$  et soit  $\vec{e}$  un vecteur directeur unitaire de  $\Delta$ . Alors,

$$I_O(\vec{e}, \vec{e}) = \int OP^2 - (\vec{OP} \cdot \vec{e})^2 dm = \int d^2(P) dm = J_\Delta. \quad (19)$$

Comme  $I_O$  fournit ainsi le moment d'inertie du solide par rapport à tout axe passant par  $O$ , il porte le nom de *tenseur d'inertie du solide au point O*.

## 4.2 Système d'axes orthonormés d'origine O

Dans un RON  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  d'origine  $O$ , les composantes du tenseur d'inertie en  $O$  sont données par

$$I_{O,ii} = I_O(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = J_{ii} = \int \sum_{j \neq i} x_j^2 dm,$$

où  $J_{ii}$  est le *moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $Ox_i$*  et où  $(x_1, x_2, x_3)$  sont les coordonnées de la variable d'intégration  $P$ , voir Équation (19). De plus, pour  $i \neq j$ ,

$$I_{O,ij} = I_O(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = - \int x_i x_j dm =: J_{ij},$$

où les  $J_{ij}$  sont appelés *produits d'inertie du solide par rapport aux axes  $Ox_i$  et  $Ox_j$* .

## 4.3 Système d'axes orthonormés lié au solide

Il découle immédiatement de l'Équation (16) que les *composantes du tenseur d'inertie en O sont constantes dans tout système d'axes orthonormés lié au solide*.

#### 4.4 Système d'axes orthonormés principaux

Un système d'axes *principaux* est un système dont les vecteurs sont des *vecteurs principaux* ou encore des *vecteurs propres* du tenseur d'inertie.

Les concepts de vecteurs propres et valeurs propres sont étudiés au cours d'Algèbre linéaire. Rappelons ici brièvement les définitions, ainsi qu'un résultat de diagonalisation nécessaire au calcul de l'Intégrale (14) qui fournit le moment cinétique et l'énergie cinétique d'un solide.

Notons d'abord que le *déterminant*  $\det T$  d'un 2-tenseur ou d'une forme bilinéaire  $T$  est par définition le déterminant  $\det(T_{ij})$  de la matrice des composantes  $T_{ij}$  de  $T$  dans une BON arbitraire. De fait, on vérifie tout de suite que ce déterminant est indépendant de la BON considérée. Ceci étant, les *valeurs propres* d'un 2-tenseur  $T$  sont les racines  $\lambda$  de l'équation

$$\det(T - \lambda \text{id}) = 0, \quad (20)$$

où  $\text{id}$  est le 2-tenseur isotrope de composantes  $\delta_{ij}$ . Les *vecteurs propres* de  $T$  de valeur propre  $\lambda$  sont les vecteurs non nuls  $\vec{u}$  vérifiant l'équation

$$T \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u}. \quad (21)$$

On observera que tout multiple non nul  $k\vec{u}$ ,  $k \neq 0$ , d'un vecteur propre  $\vec{u}$  de  $T$  de valeur propre  $\lambda$  est encore un vecteur propre de valeur propre  $\lambda$ . Il s'ensuit qu'uniquement la direction d'un vecteur propre importe : la direction d'un vecteur propre de  $T$  est appelée *direction propre* de  $T$ . Comme indiqué préalablement, les adjectifs "propre" et "principal" sont synonymes et donc échangeables.

Comme un 2-tenseur est représenté dans toute BON par une matrice de composantes, il est naturel de chercher une BON dans laquelle cette matrice représentative est aussi simple que possible, i.e. est diagonale. En Algèbre, on prouve la

**Proposition 1.** *Pour tout 2-tenseur symétrique, il existe une BON dans laquelle la matrice de ses composantes est diagonale ou, de manière équivalente, pour tout 2-tenseur symétrique, il existe une BON formée par des vecteurs principaux de ce tenseur.*

Remarquons que ce résultat admet une version matricielle: *Toute matrice symétrique est diagonalisable par une matrice orthogonale.*

Il n'est pas difficile de se persuader de l'équivalence de ces énoncés. Par exemple, soit une BON  $(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2, \vec{\mu}_3)$  formée par des vecteurs principaux  $\vec{\mu}_i$  de valeurs principales  $\lambda_i$  d'un 2-tenseur symétrique  $T$ . Alors,  $T \cdot \vec{\mu}_i = \lambda_i \vec{\mu}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , si bien que, dans les axes principaux  $(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2, \vec{\mu}_3)$ , on obtient

$$T_{ab}\delta_{ib} = \lambda_i\delta_{ia}, \forall i, a, \quad \text{i.e.} \quad T_{ai} = \lambda_i\delta_{ia}, \forall i, a, \quad \text{i.e.} \quad (T_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Inversement, si dans un système d'axes orthonormés  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , les composantes  $T_{*i}$ ,  $i$  fixé dans  $\{1, 2, 3\}$ , d'un 2-tenseur symétrique  $T$  sont "diagonales", i.e. du type

$$T_{ai} = \ell\delta_{ia}, \quad \ell \in \mathbb{R}, a \in \{1, 2, 3\}, \quad (23)$$

l'axe de vecteur directeur  $\vec{e}_i$  est principal. En effet, il suffit de prouver que  $\vec{e}_i$  est un vecteur principal de  $T$ , i.e. qu'il existe  $\lambda$  tel que  $T \cdot \vec{e}_i = \lambda \vec{e}_i$ , ou encore, dans la BON  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , tel que

$$T_{ab}\delta_{ib} = \lambda\delta_{ia}, \forall a, \quad \text{i.e.} \quad T_{ai} = \lambda\delta_{ia}, \forall a.$$

Il est clair que  $\lambda = \ell$  convient, ce qui établit le résultat.



#### 4.5 Système d'axes orthogonaux principaux en $O$

Revenons à présent au tenseur d'inertie  $I_O$  du solide  $\mathcal{S}$  par rapport à un point  $O$  attaché à  $\mathcal{S}$ . Notons d'abord qu'il découle des équations (16), (20) et (21) que les vecteurs principaux de  $I_O$  sont également liés au solide  $\mathcal{S}$ .

**Théorème 2.** *Soient un solide  $\mathcal{S}$  et un point  $O$  lié à  $\mathcal{S}$ . Dans un système d'axes orthonormaux principaux d'origine  $O$ , la matrice des composantes du tenseur d'inertie  $I_O$  de  $\mathcal{S}$  est diagonale et ses éléments diagonaux sont les moments d'inertie constants  $J_{ii}$  de  $\mathcal{S}$  par rapport aux axes principaux.*

**Preuve.** Le théorème est une conséquence immédiate de la remarque qui le précède et des résultats des sous-sections 4.2, 4.3 et 4.4. ■

Le calcul de  $I_O$  dans un système d'axes orthonormaux principaux en  $O$  est donc particulièrement simple. Si l'existence d'une BON de vecteurs principaux de  $I_O$  est assurée par la Proposition 1, sa détermination pratique reste à étudier. La proposition suivante explique que les axes principaux en  $O$  sont souvent obtenus grâce à des arguments de symétrie.

**Proposition 2.** *Tout axe issu de  $O$ , qui est un axe de symétrie géométrique et matérielle, est un axe principal en  $O$ . De même, toute droite, normale en  $O$  à un plan de symétrie géométrique et matérielle passant par  $O$ , est un axe principal en  $O$ .*

**Preuve.** Nous donnons la démonstration de la première affirmation, celle de la deuxième est analogue. Considérons un solide  $\mathcal{S}$  et un point  $O$  de  $\mathcal{S}$ . Supposons que  $\mathcal{S}$  admette un axe de symétrie géométrique et matérielle  $\Delta$  passant par  $O$  et choisissons un système d'axes orthonormés  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  d'origine  $O$  et de vecteur  $\vec{e}_1$  porté par  $\Delta$ . Alors,  $I_{O,21} = J_{21} = -\int x_2 x_1 dm$ . Vu la symétrie géométrique et matérielle, cette intégrale est une somme de termes du type  $x_2 x_1 dm + (-x_2) x_1 dm = 0$ . On voit de même que  $I_{O,31} = 0$ , si bien que  $I_{O,a1} = J_{11} \delta_{1a}, \forall a \in \{1, 2, 3\}$ . Il résulte alors de la seconde partie de l'explication suivant la Proposition 1, voir Équation (23), que  $\vec{e}_1$  et l'axe de symétrie  $\Delta$  sont principaux en  $O$ . ■

#### 4.6 Moment et énergie cinétiques d'un solide

**Théorème 3.** *Soit un solide  $\mathcal{S}$  en mouvement par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  et soit  $O$  un point de  $\mathcal{S}$  fixe dans  $\mathcal{R}$  ou le centre de masse de  $\mathcal{S}$ . Le moment cinétique  $\vec{\sigma}_O$  de  $\mathcal{S}$  en  $O$  et l'énergie cinétique  $E_c$  de  $\mathcal{S}$  par rapport à  $\mathcal{R}$  sont donnés par*

$$\vec{\sigma}_O = \sum_i J_{ii} \omega_i \vec{\mu}_i \quad (24)$$

et

$$E_c = (E_c(G) +) \frac{1}{2} \sum_i J_{ii} \omega_i^2 \quad (25)$$

respectivement. Dans ces équations, les  $\vec{\mu}_i$  forment un système d'axes orthonormés principaux en  $O$ , les  $\omega_i$  sont les composantes dans ces axes du vecteur rotation  $\vec{\omega}$  de  $\mathcal{S}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ , et les  $J_{ii}$  désignent les moments d'inertie constants du solide par rapport aux axes principaux. Dans l'expression de l'énergie cinétique, le terme entre parenthèses n'est à considérer que si  $O$  est le centre de masse du solide.

**Preuve.** Quelle que soit la définition de  $O$ —point du solide qui est fixe dans  $\mathcal{R}$  ou centre de masse du solide—le point  $O$  est lié au solide, si bien que les résultats de la section précédente sont valables. Les Équations (12), (14) et (18), ainsi que le Théorème 2 impliquent alors que  $\vec{\sigma}_O = \vec{s}_O = I_O \cdot \vec{\omega} = \sum_i J_{ii} \omega_i \vec{\mu}_i$ . Quant à l'énergie cinétique, il découle de l'Équation (13) et du résultat précédent relatif au moment cinétique que  $2E_c = (mv^2(G) +) \sum_i J_{ii} \omega_i^2$ , où  $m$  est la masse totale du solide. ■

## 5 Dynamique des solides

Nous savons, voir Chapitre 8, que les mouvements d'un solide par rapport à un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$  peuvent être extraits des théorèmes généraux valables pour les systèmes matériels, i.e., avec des notations désormais bien connues, des équations

$$m\vec{\gamma}(G) = \vec{F}_{\text{ext}}, \quad d_t \vec{\sigma}_O = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O), \quad d_t E_c = \mathcal{P}_{\text{ext}},$$

avec la particularité que le second membre du TEC se réduit dans le cas des solides à la seule puissance des forces externes. Rappelons que le TMC n'est valable qu'à condition que  $O$  soit un point fixe dans  $\mathcal{R}$  ou le centre de masse du système matériel ou solide étudié. Lorsque  $O$  est le centre de masse ou un point du solide qui est fixe dans  $\mathcal{R}$ , le moment et l'énergie cinétiques peuvent être obtenus à partir du Théorème 3.

Si le solide  $\mathcal{S}$  possède un point fixe  $O$ , i.e. s'il existe un point  $O$  de  $\mathcal{S}$  qui est fixe dans  $\mathcal{R}$ , il est naturel d'essayer d'étudier le mouvement de rotation de  $\mathcal{S}$  autour de ce point fixe à partir du TMC en  $O$ .

Si  $\mathcal{S}$  n'a pas de point fixe, son mouvement le plus général se décompose en le mouvement de son centre de masse  $G$  (3 degrés de liberté), encodé dans le TCM, et en son mouvement autour du centre de masse, encodé dans le TMC en  $G$  (3 degrés de liberté). En Mécanique du Solide (au maximum 6 degrés de liberté), la détermination des mouvements requiert donc en général deux équations vectorielles, alors qu'en Mécanique du Point (au maximum 3 degrés de liberté), une équation vectorielle suffit.

Si les forces dérivent d'un potentiel, le TEC fournit l'IPE, qui est exploitable l'énergie cinétique pouvant être calculée grâce au Théorème 3.

Évidemment, les équations vectorielles sont généralement encore projetées sur les axes. Dans le cas du TMC, le calcul du moment cinétique implique déjà un système d'axes, et plus précisément d'axes principaux, de sorte qu'il semble naturel de projeter sur ces axes. Nous effectuons ci-dessous cette projection une fois pour toute dans le cas général, ce qui conduit aux équations d'Euler.

**Proposition 3.** *Considérons un solide observé à partir d'un référentiel inertiel. Si  $O$  désigne le centre de masse ou un point fixe de ce solide, la projection du Théorème du Moment cinétique en  $O$ , sur des axes orthogonaux directs qui sont principaux en  $O$ , donne les Équations d'Euler,*

$$\begin{aligned} J_{11}\dot{\omega}_1 - (J_{22} - J_{33})\omega_2\omega_3 &= \mathcal{M}_{\text{ext},1}(O) \\ J_{22}\dot{\omega}_2 - (J_{33} - J_{11})\omega_3\omega_1 &= \mathcal{M}_{\text{ext},2}(O) \\ J_{33}\dot{\omega}_3 - (J_{11} - J_{22})\omega_1\omega_2 &= \mathcal{M}_{\text{ext},3}(O), \end{aligned} \tag{26}$$

avec des notations évidentes.

**Preuve.** Compte tenu du Théorème 3, on a

$$d_t \vec{\sigma}_O = \sum_i J_{ii} d_t (\omega_i \vec{\mu}_i) = \sum_i J_{ii} (\dot{\omega}_i \vec{\mu}_i + \omega_i d_t \vec{\mu}_i).$$

Les axes principaux  $\vec{\mu}_i$  étant attachés à  $\mathcal{S}$ , voir ci-dessus, la formule de Poisson permet d'écrire

$$\begin{aligned} d_t \vec{\sigma}_O &= \sum_i J_{ii} (\dot{\omega}_i \vec{\mu}_i + \omega_i \vec{\omega} \wedge \vec{\mu}_i) \\ &= \sum_i J_{ii} \dot{\omega}_i \vec{\mu}_i + \sum_i J_{ii} \omega_i \sum_{abc} \varepsilon_{abc} \omega_a \delta_{ib} \vec{\mu}_c \\ &= \sum_c \left( J_{cc} \dot{\omega}_c - \sum_{ia} \varepsilon_{iac} J_{ii} \omega_i \omega_a \right) \vec{\mu}_c. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 6 Exercices

1. Une échelle (i.e. une tige de masse  $m$  et de longueur  $\ell$ ) est appuyée contre un mur. L'angle entre l'échelle et le mur est noté  $\theta$ . Les conditions initiales sont  $\theta \simeq 0$  et  $\dot{\theta} = 0$ . L'échelle glisse ensuite sans frottement (le sol et le mur sont supposés infiniment lisses). Prouver que la position  $\theta$  en laquelle l'échelle perd le contact avec le mur est donnée par  $\theta = \arccos \frac{2}{3}$ .
2. On considère deux sphères homogènes  $S_0$  et  $S_1$  de masse  $m$  et de rayon  $r$ . La seconde est en équilibre au sommet  $S$  de la première, qui est fixe par rapport à la Terre, supposée inertielle. On déplace  $S_1$  très légèrement de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale. D'abord  $S_1$  roule sur  $S_0$ , puis se met à glisser.

Si  $O$  désigne le centre de  $S_0$ ,  $I$  le point de contact entre  $S_0$  et  $S_1$  et  $\phi$  l'angle  $(OS, OI)$ , calculer la valeur  $\varphi$  de  $\phi$  où le glissement commence, i.e. montrer que  $\varphi$  est caractérisé par

$$17f \cos \varphi - 2 \sin \varphi = 10f,$$

où  $f$  est le coefficient de frottement. Traiter ce problème

- (i) en utilisant le TCM et le TMC,
- (ii) en utilisant le TCM et l'IPE.

On rappelle que le glissement commence lorsque le frottement  $T$  et la réaction normale  $N$  sont liés par  $T = fN$ .

3. Une sphère homogène de masse  $m$  et de rayon  $r$  roule sans glisser sur la surface intérieure rugueuse d'un cylindre creux, fixe, d'axe horizontal et de rayon  $R$ . A l'instant initial, la sphère occupe sa position d'équilibre et la vitesse  $\vec{w}$  de son centre de masse est horizontale et orthogonale à l'axe du cylindre. Montrer que la valeur minimale de  $w$ , pour laquelle la sphère dépasse la position la plus élevée sans perdre le contact avec le cylindre, est caractérisée par

$$w^2 \geq \frac{27}{7} g(R - r).$$



# Chapitre 10

## Problème de Lagrange-Poisson Systèmes intégrables

### 1 Mouvements d'une toupie symétrique dans le champ de pesanteur

Ce chapitre sera essentiellement consacré au problème de *Lagrange-Poisson*, i.e. à l'étude des mouvements par rapport au laboratoire  $\mathcal{R}_0$ , considéré comme inertial, d'une toupie  $\mathcal{R}_1$  de masse  $m$  et de centre de masse  $G$ , possédant un axe de symétrie géométrique et matérielle et reposant sur sa pointe  $O$  supposée fixe par rapport à  $\mathcal{R}_0$ . Ce problème classique est étroitement lié aux mouvements de la Terre dans l'espace, fournit un exemple de *système intégrable* – un thème de recherche actuel en Géométrie symplectique –, ...

La toupie considérée est donc animée d'un mouvement à point fixe et possède trois degrés de liberté. Les paramètres appropriés à la description univoque de ses positions sont les trois angles d'Euler que l'on définit comme suit.

Considérons un ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  attaché à  $\mathcal{R}_0$  et dont le vecteur  $\vec{e}_3$  est vertical ascendant, et un ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  lié à  $\mathcal{R}_1$  et dont le vecteur  $\vec{e}_3$  est directement colinéaire au vecteur  $\vec{OG}$ , si bien que  $\vec{OG} = d\vec{e}_3$ ,  $d = OG$ . Nous supposons que  $\mathcal{R}_1$  se meut par rapport à  $\mathcal{R}_0$  de manière que les vecteurs  $\vec{e}_3$  et  $\vec{e}_3$  sont en permanence non-colinéaires, de sorte que les plans  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  se coupent constamment suivant une droite dite *ligne des noeuds*. Notons  $\vec{u}$  le vecteur unitaire de la ligne des noeuds pour lequel  $(\vec{e}_3, \vec{e}_3, \vec{u})$  est direct. Cela étant, désignons par  $\varphi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  les trois *angles d'Euler*

$$\varphi := \angle(\vec{e}_1, \vec{u}), \quad \text{compté algébriquement autour de } (O, \vec{e}_3),$$

$$\theta := \angle(\vec{e}_3, \vec{e}_3), \quad \text{compté algébriquement autour de } (O, \vec{u}),$$

$$\psi := \angle(\vec{u}, \vec{e}_1), \quad \text{compté algébriquement autour de } (O, \vec{e}_3),$$

appelés logiquement *angle de précession*, *angle de nutation* et *angle de rotation propre ou de spin*.

Le Chapitre 9 enseigne que dans le cas étudié les mouvements sont encodés dans le TMC en  $O$  et plus particulièrement dans les équations d'Euler.

Il s'agit donc de décomposer le moment en  $O$  des forces externes  $m\vec{g} + \vec{R}$  sollicitant la toupie,  $\vec{R}$  désigne la réaction au pivot  $O$ , et le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  de la toupie  $\mathcal{R}_1$  par rapport au référentiel

$\mathcal{R}_0$ , dans des axes orthogonaux principaux en  $O$ . Vu la symétrie de la toupie, il est clair que les axes  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sont principaux en  $O$ . Comme

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = mgd \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3,$$

nous exprimons d'abord  $\vec{e}_3$  dans la base des  $\vec{e}_i$ . Vu que  $\vec{e}_3 = \cos \theta \vec{e}_3 + \sin \theta \vec{e}_3 \wedge \vec{u}$  et que

$$\vec{u} = \cos \psi \vec{e}_1 - \sin \psi \vec{e}_2, \quad (1)$$

il vient

$$\vec{e}_3 = \sin \theta (\sin \psi \vec{e}_1 + \cos \psi \vec{e}_2) + \cos \theta \vec{e}_3 \quad (2)$$

et

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O) = mgd \sin \theta (\cos \psi \vec{e}_1 - \sin \psi \vec{e}_2). \quad (3)$$

Quant au vecteur rotation, celui  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{01}$  de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , se décompose, vu les paramètres utilisés, naturellement en la somme des vecteurs rotation  $\vec{\omega}_{02} = \dot{\phi} \vec{e}_3$  du référentiel  $\mathcal{R}_2$  défini par  $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3)$ ,  $\vec{v} := \vec{e}_3 \wedge \vec{u}$ , par rapport à  $\mathcal{R}_0$ ,  $\vec{\omega}_{23} = \dot{\theta} \vec{u}$  du référentiel  $\mathcal{R}_3$  donné par  $(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{e}_3)$ ,  $\vec{w} := \vec{e}_3 \wedge \vec{u}$ , par rapport à  $\mathcal{R}_2$ , et  $\vec{\omega}_{31} = \dot{\psi} \vec{e}_3$  de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_3$ :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{01} = \vec{\omega}_{02} + \vec{\omega}_{23} + \vec{\omega}_{31} = \dot{\phi} \vec{e}_3 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\psi} \vec{e}_3. \quad (4)$$

Compte tenu des équations (1) et (2), on obtient finalement la décomposition

$$\vec{\omega} = (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \vec{e}_1 + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \vec{e}_2 + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \vec{e}_3 \quad (5)$$

du vecteur rotation  $\vec{\omega}$  de la toupie  $\mathcal{R}_1$  par rapport au laboratoire  $\mathcal{R}_0$ , dans la base des vecteurs principaux  $\vec{e}_i$ .

Finalement, les équations d'Euler s'écrivent

$$J_{11} \dot{\omega}_1 - (J_{11} - J_{33}) \omega_2 \omega_3 = mgd \sin \theta \cos \psi, \quad (6)$$

$$J_{11} \dot{\omega}_2 - (J_{33} - J_{11}) \omega_3 \omega_1 = -mgd \sin \theta \sin \psi, \quad (7)$$

$$J_{33} \dot{\omega}_3 = 0, \quad (8)$$

où  $J_{22} = J_{11}$ , vu la symétrie de la toupie, et où les  $\omega_i$  sont les composantes de  $\vec{\omega}$  dans la base principale des  $\vec{e}_i$ , voir Équation (5). Les équations d'Euler (6)-(8) forment un système de 3 équations différentielles du deuxième ordre en  $\phi, \theta$  et  $\psi$ . Elles permettent en principe de déterminer  $\phi = \phi(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$  et  $\psi = \psi(t)$ , i.e. de trouver les mouvements de la toupie.

L'Équation (8) est particulièrement simple et signifie que la composante  $\omega_3$  du vecteur rotation est conservée au cours du mouvement :

$$\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = a, \quad a \text{ constant.} \quad (9)$$

Cette IP est due, voir Équation (8), à la symétrie de la toupie et à l'orthogonalité à  $\vec{e}_3$  du moment  $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O) = mgd \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3$ . Or, le moment  $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O)$  est également perpendiculaire au vecteur fixe  $\vec{e}_3$ , si bien que

$$0 = \vec{e}_3 \cdot \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O) = \vec{e}_3 \cdot d_t \vec{\sigma}_O = d_t (\vec{e}_3 \cdot \vec{\sigma}_O), \quad (10)$$

de sorte que la composante

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{\sigma}_O = \vec{e}_3 \cdot \sum_i J_{ii} \omega_i \vec{e}_i$$

de  $\vec{\sigma}_O$  suivant  $\vec{e}_3$  est aussi une IP. En utilisant les équations (2) et (5), on trouve l'expression de cette IP en fonction des paramètres :

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{\sigma}_O = J_{11} \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_{33} a \cos \theta = b, \quad b \text{ constant.} \quad (11)$$

Un système de trois IP indépendantes (pour l'instant on en a deux), donc un système de 3 équations différentielles du premier ordre en les paramètres  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ , serait évidemment plus simple à étudier que les trois équations d'Euler (6), (7) et (8), qui sont d'ordre 2. En gros, un système dynamique qui admet un nombre d'intégrales premières indépendantes égal à son nombre de degrés de liberté, y compris l'IPE, est appelé un *système intégrable*. Les systèmes intégrables seront discutés plus en détail dans les cours avancés. Dans le cas de la toupie, l'IPE  $E_c + V = c$ ,  $c$  constant, est évidemment valable, la résultante des forces externes étant composée d'une force  $m\vec{g}$  qui dérive d'un potentiel  $V = mgd \cos \theta$  et d'une force  $\vec{R}$  dont la puissance  $\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{v}(O)$  est nulle (ce qui fournit la troisième IP). Si l'on exprime l'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2} \sum_i J_{ii} \omega_i^2$  en fonction de  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  moyennant l'Équation (5), l'IPE devient

$$\frac{1}{2} J_{11} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J_{33} a^2 + mgd \cos \theta = c. \quad (12)$$

Le deuxième terme du premier membre étant lui aussi constant, l'IPE s'écrit encore

$$\frac{1}{2} J_{11} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + mgd \cos \theta = E, \quad E \text{ constant.} \quad (13)$$

Le déchiffrement de l'information encryptée dans le système d'IP (9), (11) et (13) fournira les différents types de mouvements possibles de la toupie selon les conditions initiales considérées. Notons d'abord que l'angle  $\theta$ , non dérivé par rapport au temps, intervient dans ces IP uniquement sous la forme  $\cos \theta$  ou  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$  : posons  $\mu := \cos \theta$ . L'équation (11) devient alors

$$\dot{\phi} = \frac{b - J_{33} a \mu}{J_{11} (1 - \mu^2)}. \quad (14)$$

Cela étant, les IP (13) et (9) prennent la forme

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{J_{11}} (E - V_{\text{eff}}), \quad \text{où } V_{\text{eff}} = mgd \mu + \frac{1}{2} \frac{(b - J_{33} a \mu)^2}{J_{11} (1 - \mu^2)}, \quad (15)$$

et

$$\dot{\psi} = a - \frac{b - J_{33} a \mu}{J_{11} (1 - \mu^2)} \mu \quad (16)$$

respectivement. Dans (15), nous avons introduit le potentiel efficace  $V_{\text{eff}}$ , afin d'écrire l'IPE sous la forme nécessaire à l'étude des mouvements via le diagramme du potentiel. Pour  $b \neq \pm J_{33} a$ , nous supposons dans la suite que cette condition est satisfaite, la courbe représentative du potentiel efficace  $V_{\text{eff}}$  est entre ses deux asymptotes verticales d'équations  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , d'abord décroissante, puis croissante.

- (i) Si  $E = V_{\text{eff}, \min}$ , où  $V_{\text{eff}, \min}$  désigne la valeur minimale du potentiel,  $\theta$  ne peut prendre qu'une seule valeur et est donc constant au cours du mouvement. Il résulte alors de (16) et (14) que  $\dot{\phi}$  et  $\dot{\psi}$  sont également constants : *le mouvement est sans mutation et la précession et le spin sont uniformes.*
- (ii) Supposons maintenant que  $E \geq V_{\text{eff}, \min}$  et notons  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les abscisses des deux points de réflexion. Le mouvement de mutation est alors une oscillation entre les valeurs  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Quant au mouvement complet, il s'avèrera qu'il dépend de la position de  $b/(J_{33} a)$  – nous supposons  $a \neq 0$  – par rapport à l'intervalle  $[\cos \theta_2, \cos \theta_1]$ .

Avant de passer à l'explication de cette affirmation, deux observations sont nécessaires :

- L'égalité  $b/(J_{33}a) = \cos \theta_2$  est impossible. En effet, on vérifie facilement que dans ce cas on aurait  $V'_{\text{eff}}(\theta_2) = -mgd \sin \theta_2 < 0$ , ce qui est absurde vu l'allure de la courbe du potentiel.
- La fonction  $b - J_{33}a\mu = b - J_{33}a \cos \theta$  est strictement croissante ou strictement décroissante dans  $]0, \pi[$ , selon que  $a > 0$  ou  $a < 0$ .

Passons à l'étude du mouvement complet, voir ci-dessus.

$$(1) \quad b/(J_{33}a) \notin [\cos \theta_2, \cos \theta_1]$$

Si  $b/(J_{33}a) < \cos \theta_2$  et  $a > 0$  par exemple, on a  $b - J_{33}a \cos \theta_2 < 0$ . Donc, vu son sens de variation, la fonction  $b - J_{33}a\mu = b - J_{33}a \cos \theta$  est  $< 0$  pour tout  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ , i.e.  $\dot{\phi} < 0$ , en vertu de l'Équation (14). Dans les autres cas, on trouve de la même façon, soit  $\dot{\phi} < 0$ , soit  $\dot{\phi} > 0$ . Ainsi, le sommet  $S$  de la toupie décrit, sur la sphère de centre  $O$  et de rayon  $OS$ , une trajectoire de type "sinusoïdal".

$$(2) \quad b/(J_{33}a) \in ]\cos \theta_2, \cos \theta_1[$$

Si  $a > 0$  par exemple, on trouve que  $b - J_{33}a \cos \theta_1 < 0 < b - J_{33}a \cos \theta_2$ , de sorte que la fonction strictement croissante  $b - J_{33}a \cos \theta$  s'annule et change de signe en un seul point  $\theta_0 \in ]\theta_1, \theta_2[$ . Vu (14), il en est de même de  $\dot{\phi}$ . Ainsi,  $\dot{\phi}$  décroît si  $\theta \in ]\theta_1, \theta_0[$  et croît si  $\theta \in ]\theta_0, \theta_2[$ . La trajectoire de  $S$  est donc du type "lll...".

$$(3) \quad b/(J_{33}a) = \cos \theta_1$$

Ici,  $\dot{\phi} > 0, \forall \theta \neq \theta_1$  ou  $\dot{\phi} < 0, \forall \theta \neq \theta_1$ . De plus,  $\dot{\phi} = 0$  en  $\theta = \theta_1$ . Il s'ensuit que  $\phi$  admet à l'instant  $\theta = \theta_1$  un point d'inflexion à tangente horizontale. Ainsi  $S$  a une trajectoire du type "uu...".

## 2 Exercices

1. Considérons une toupie dont les vitesses angulaires de précession  $\dot{\phi}$  et de nutation  $\dot{\theta}$  sont négligeables par rapport à la vitesse angulaire de spin  $\psi$ . C'est l'hypothèse du *spin dominant*, souvent satisfaite en pratique. A ce moment, on a l'approximation gyroscopique

$$\vec{\omega} = \psi \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}_O = \sum_i J_{ii} \omega_i \vec{e}_i = J_{33} \psi \vec{e}_3.$$

Projeter le TMC en  $O$  sur les axes du repère  $\mathcal{R}_2(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3)$ , où  $\vec{v} = \vec{e}_3 \wedge \vec{u}$ . Pour cela, décomposer les vecteurs  $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O)$ ,  $\vec{\sigma}_O$  et  $d_t \vec{\sigma}_O$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3)$ , en remarquant notamment que le vecteur  $\vec{v}$  étant constant dans  $\mathcal{R}_2$ , on a

$$d_t \vec{v} = \vec{\omega}_{02} \wedge \vec{v} = \dot{\phi} \vec{e}_3 \wedge \vec{v} = -\dot{\phi} \vec{u}.$$

Réponse : La projection sur les axes donne  $J_{33} \psi \dot{\phi} \sin \theta = mgd \sin \theta$ ,  $\psi \sin \theta = C_1$ , et  $\psi \cos \theta = C_2$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes. Ainsi,  $\psi$ ,  $\theta$  et

$$\dot{\phi} = \frac{mgd}{J_{33} \psi}$$

sont constants et le mouvement de l'axe de la toupie est une précession pure et uniforme autour de  $(O, \vec{e}_3)$ , dont le sens est le même que celui du spin (qui est également uniforme).



2. Reprendre le problème ci-dessus de la toupie sous l'hypothèse du spin dominant, mais projeter le TMC en  $O$  sur les axes du repère intermédiaire  $\mathcal{R}_3(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{e}_3)$ , avec  $\vec{w} = \vec{e}_3 \wedge \vec{u}$ .

Réponse :  $J_{33} \psi \dot{\phi} \sin \theta = mgd \sin \theta$ ,  $\psi \dot{\theta} = 0$ ,  $\ddot{\psi} = 0$ , mêmes conclusions.

À SUIVRE

