**LAPORAN TUGAS BESAR 1**

**IF2123 ALJABAR LINEAR DAN GEOMETRI**


Disusun oleh:

13520051 – Flavia Beatrix Leoni A. S.

13520115 – Maria Khelli

13520119 - Marchotridyo

**TEKNIK INFORMATIKA**

**SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA**

**INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG**

**2021**

## Daftar Isi

## Daftar Gambar

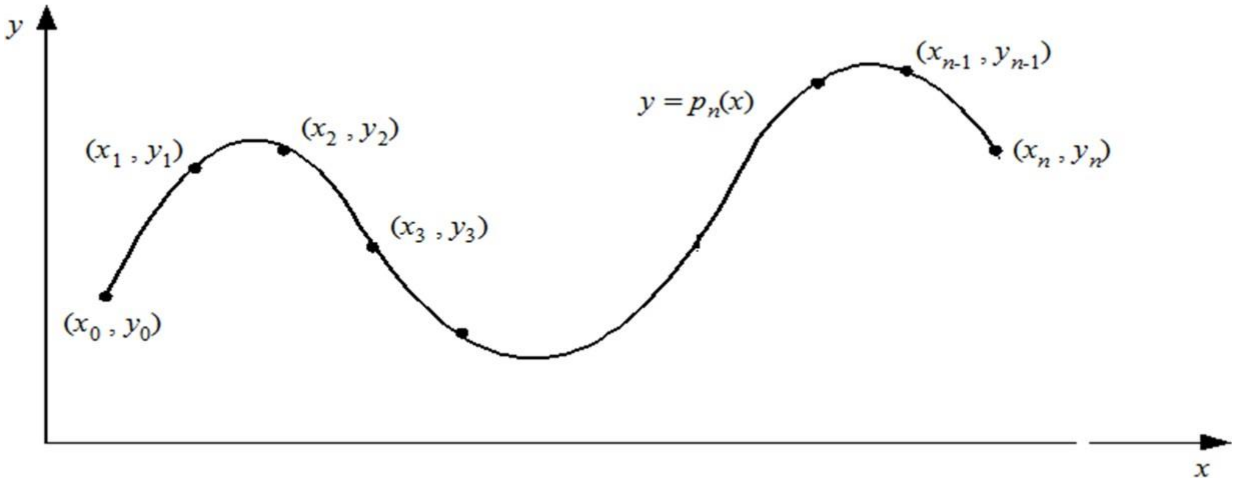
## Bab 1
## Deskripsi Masalah

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Terdapat berbagai metode untuk menyelesaikan SPL, termasuk menghitung determinan matriks. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}b$), dan kaidah *Cramer* (khusus untuk SPL dengan $n$ peubah dan $n$ persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Fungsi eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, dan kaidah Cramer dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi. Penjelasan tentang interpolasi dan regresi adalah seperti di bawah ini.

### I. Interpolasi Polinom

Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan $n+1$ buah titik berbeda, $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, ..., $(x_n, y_n)$. Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk $i = 0, 1, 2, ..., n$.




*Gambar 1.1 Interpolasi Polinom*

Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai $y$ di sembarang titik di dalam selang $[x_o, x_n]$.

Polinom interpolasi derajat $n$ yang menginterpolasi titik-titik $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, ..., $(x_n, y_n)$ adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Jika hanya ada dua titik $(x_0, y_0)$ dan $(x_1, y_1)$, maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, dan $(x_2, y_2)$, maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ atau persamaan kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, dan $(x_3, y_3)$, polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat $n$ untuk $n$ yang lebih tinggi asalkan tersedia $(n+1)$ buah titik data. Dengan menyulihkan $(x_i, y_i)$ ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ untuk $i = 0, 1, 2, ..., n$, akan diperoleh $n$ buah sistem persamaan lanjar dalam $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$,

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + ... + a_nx_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + ... + a_nx_1^n = y_1$$

$$... \qquad\qquad ...$$

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + ... + a_nx_n^n = y_n$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada $x = 9.2$. Polinom kuadratik berbentuk $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sistem persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$$

$$a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$$

$$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan $a_0 = 0.6762$, $a_1 = 0.2266$, dan $a_2 = -0.0064$. Polinom interpolasi yang melalui ketiga buah titik tersebut adalah $p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$. Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada $x = 9.2$ dapat ditaksir sebagai berikut: $p_2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)^2 = 2.2192$.

## II. Regresi Linier Berganda

Regresi Linier (akan dipelajari lebih lanjut di Probabilitas dan Statistika) merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Meskipun sudah ada rumus jadi untuk menghitung regresi linear sederhana, terdapat rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap $\beta_i$ dapat digunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* sebagai berikut:

$$\begin{array}{lllll}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i
\end{array}$$

*Gambar 1.2 Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression*

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

# Bab 2
# Teori Singkat

## I. Eliminasi Gauss

Metode eliminasi Gaussian (Gauss) merupakan cara menyelesaikan sistem persamaan linear (SPL) dengan menggunakan matriks eselon baris. Matriks eselon baris memiliki ciri-ciri sebagai berikut.

a. Terdapat sebuah baris yang seluruh elemennya tidak nol. Bilangan tidak nol pertama dalam baris tersebut haruslah 1 (disebut juga 1 utama).

b. Jika ada baris yang seluruhnya nol, baris tersebut dikumpulkan pada bagian bawah matriks.

c. Di dalam dua baris berurutan yang tidak seluruhnya nol, 1 utama pada baris yang lebih rendah harus terdapat lebih ke kanan daripada 1 utama di atasnya.

All matrices of the following types are in reduced row echelon form:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

*Gambar 2.1 Matriks eselon baris (sumber: Anton dan Rorres, 2014)*

Untuk mendapatkan matriks eselon baris, dapat diterapkan operasi baris elementer (OBE). Terdapat tiga OBE, yaitu

a. Kalikan sebuah matriks dengan konstanta tidak nol. Biasanya ini digunakan untuk mendapatkan nilai 1 utama.
b. Pertukarkan dua baris, terutama jika terdapat baris yang mengandung seluruhnya nol.
c. Tambahkan sebuah baris dengan kelipatan baris lainnya. Biasanya ini digunakan untuk membuat angka di bawah satu utama menjadi nol.

Setelah matriks eselon baris terbuat, persamaan diselesaikan dengan cara melakukan penyulihan mundur pada setiap barisnya.

## II. Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan cara menyelesaikan sistem persamaan linear (SPL) dengan menggunakan matriks eselon baris tereduksi. Matriks eselon baris tereduksi memiliki ciri yang sama seperti matriks eselon baris, dengan tambahan setiap kolom yang memiliki 1 utama memiliki nol di tempat lain. Hal ini menyebabkan proses eliminasi matriks dibagi menjadi dua fase, yaitu fase maju untuk menghasilkan nilai 0 di bawah 1 utama dan fase mundur untuk menghasilkan nilai 0 di atas 1 utama.

Dalam proses pembentukan matriks eselon baris tereduksi, langkah-langkah yang boleh dilakukan sama dengan langkah OBE pada metode eliminasi Gauss. Yang membedakan hanyalah pada cara mendapatkan jawaban persamaannya. Pada metode Gauss, digunakan teknik penyulihan mundur, sedangkan pada metode Gauss-Jordan, nilai masing-masing variabel akan langsung didapat tanpa memerlukan penyulihan mundur.

## III. Determinan

Determinan merupakan fungsi skalar eksplisit dari sebuah matriks persegi. Determinan dapat digunakan untuk menentukan apakah sebuah matriks persegi memiliki balikan atau tidak. Untuk matriks persegi 2 x 2, misal $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, determinan A didefinisikan sebagai

$$\det(A) = x_1 x_4 - x_2 x_3.$$

Determinan dapat diselesaikan secara rekursif menggunakan matriks kofaktor. Selain itu, determinan matriks juga dapat diselesaikan dengan menghitung perkalian diagonal utama dari sebuah matriks segitiga atas atau segitiga bawah. Dalam tugas besar ini, digunakan dua cara, yaitu ekspansi kofaktor dan segitiga bawah melalui operasi baris elementer.

## IV. Matriks Balikan (Inverse)

Matriks balikan atau matriks invers dari sebuah matriks didefinisikan sebagai matriks yang memetakan balik sebuah matriks. Apapun yang dioperasikan dengan, misal, matriks $A$ dapat dikembalikan dengan mengoperasikannya dengan matriks $A^{-1}$ (balikan dari A).

Sebuah matriks dikatakan memiliki balikan (*invertible*) jika pernyataan berikut terdefinisi.

$$A^{-1}A = I \text{ atau } AA^{-1} = I$$

dengan I adalah matriks identitas.

Keberadaan matriks balikan dapat diketahui dari nilai determinan. Apabila determinan sama dengan nol, matriks tidak memiliki balikan (disebut matriks singular). Ada beberapa cara dalam menghitung balikan. Dalam tugas besar ini, digunakan metode OBE (Gauss-Jordan) dan determinan-adjoin.

## V. Matriks Kofaktor dan Adjoin

Misalkan terdapat sebuah matriks A. Kofaktor dari baris ke-i dan kolom ke-j didefinisikan sebagai

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

dengan $M_{ij}$ adalah submatriks A tanpa baris i dan kolom j. Maka, matriks kofaktor adalah matriks yang dibentuk dari $C_{ij}$ sedemikian sehingga $C$ memiliki dimensi yang sama dengan A.

Di sisi lain, adjoin merupakan transpose dari matriks kofaktor. Transpose merupakan pembalikan baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Dengan adjoin, balikan sebuah matriks dapat dihitung dengan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[adj(A)].$$

## VI. Kaidah Cramer

Kaidah Cramer merupakan rumus eksplisit untuk SPL dengan banyak peubah. Kaidah ini hanya dapat digunakan ketika SPL memiliki solusi yang unik, dengan kata lain: determinan tidak nol.

Jika $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ adalah SPL dengan $n$ buah peubah sedemikian sehingga $\det(A) \neq 0$, SPL tersebut memiliki solusi unik yaitu

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}; x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}; \dots; x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dengan $A_1, A_2, \dots, A_n$ merupakan matriks yang mengganti kolom ke-$n$ dengan vektor kolom **b**.

## VII. Interpolasi Polinom

Interpolasi merupakan metode numerik untuk menentukan titik baru (atau vektor n dimensi) berdasakan himpunan data yang sudah diketahui. Interpolasi berlaku pada dimensi dua dan dimensi tinggi (interpolasi multivariabel).

Dalam tugas besar ini, interpolasi yang digunakan adalah interpolasi dua dimensi (titik). Contoh persoalan interpolasi adalah diberikan n+1 buah titik berbeda, misal $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Ingin ditentukan sebuah persamaan $p_n(x)$ yang melalui semua titik sedemikian sehingga

$$y_i = p_n(x_i) \text{ untuk } i = 0, 1, 2, 3, \dots, n.$$

Untuk mencari persamaan tersebut, dapat digunakan sistem persamaan linear. Dalam tugas besar ini, dipakai metode Gauss-Jordan untuk menyelesaikan SPL.

## VIII. Regresi Linear Berganda

Regresi linear berganda memiliki definisi yang mirip dengan interpolasi, yaitu menentukan data keluaran baru berdasarkan data yang sudah tersedia. Perbedaannya, regresi memiliki galat pada persamaan umumnya, sedangkan interpolasi tidak.

Jika divisualisasikan, titik-titik pada persamaan regresi tidak seluruhnya berada pada persamaan umum regresi (terdapat galat). Di sisi lain, titik-titik pada interpolasi seluruhnya berada pada persamaan umum interpolasi (hampir tidak ada galat).

Untuk menemukan persamaan umum, dapat digunakan SPL. Matriks augmented dapat ditemukan dari persamaannya (sudah terdefinisi pada deskripsi masalah). Dalam tugas besar ini, digunakan metode Gauss-Jordan untuk mendapatkan hasilnya.

## Bab 3
## Implementasi Pustaka dan Program

Pada tugas besar ini, kami menggunakan hanya dua fail berekstensi .java, yaitu Main.java dan Matrix.java

1. Main.java

   Main.java adalah program yang melakukan interaksi masukan-keluaran (I/O) dengan pengguna. Dalam tugas ini, kami tidak menggunakan antarmuka pengguna grafis (GUI)[1], tetapi menggunakan antarmuka baris perintah (CLI)[2]. Program Main.java membentuk objek matriks dari Matrix.java dan memanggil metode yang dimiliki objek tersebut.

2. Matrix.java

   Matrix.java merupakan program berisi tipe data abstrak atau abstract data type (ADT) dari matriks. Berikut rincian isi fail Matrix.java.

   1.1 Atribut atau Properti
      a. contents: array dua dimensi pembentuk matriks
      b. rows: baris matriks
      c. cols: kolom matriks

   1.2 Konstruktor: menerima argumen baris dan kolom untuk membuat objek.

   1.3 Baca-tulis
      a. readMatrix: membaca matriks yang sudah dialokasikan. Kondisi awal matriks masih kosong (hanya ada memori yang teralokasikan). Kondisi akhir matriks sudah terisi dengan masukan user.
      b. readMatrixFromFile: membaca matriks dari file. Kondisi akhir matriks sesuai dengan inputan user.
      c. readInterpolationMatrix: membaca soal interpolasi dari file. Yang membedakan prosedur ini dengan readMatrixFromFile adalah adanya input awal di soal interpolasi yang menyatakan orde polinom.
      d. displayMatrix: menampilkan matriks yang sudah terdefinisi.

   1.4 Manipulator
      a. copyMatrix: menyalin matriks

[1] GUI adalah singkatan dari graphical user interface.
[2] CLI adalah singkatan dari command-line interface.

b. copyMatrixWithoutLC: menyalin matriks tanpa kolom terakhir. Digunakan untuk solveByCramerRule dan solveByInverse.
c. copyMatrixLC: menyalin kolom terakhir matriks. Digunakan untuk solveByCramerRule dan solveByInverse.
a. swapRow: melakukan tukar dua baris (ada dua argumen yang dimasukkan)

1.5 Determinan (Kofaktor)

a. getMinorEntry: mencari nilai $M_{ij}$ dari elemen $a_{ij}$.
b. getDeterminantByCofactor: menghitung determinan menggunakan metode kofaktor menggunakan pendekatan rekursif.

1.6 Determinan (Gauss)

a. getDeterminantByOBE: menghitung determinan dengan matriks segitiga atas menggunakan reduksi baris.

1.7 Invers (Adjoin)

a. createTransposeMatrix: membuat matriks baru yang merupakan transpose dari matriks input.
b. createAdjoinMatrix: membuat matriks adjoin dari matriks input.
c. createInverseMatrix: membuat matriks invers dari matriks input.

1.8 Invers (Gauss-Jordan)

a. isInvertible: mengembalikan apakah matriks kiri (saat sudah digabung dengan identitas) memiliki baris yang seluruhnya nol (determinan nol, tidak dapat dibalik)
b. copyWithIdentity: salin matriks dengan matriks identitas sehingga berbentuk $[M|I]$
c. getInverse: mengambil nilai matriks sebelah kanan saat sudah berbentuk $[I|M^{-1}]$
d. gElimination: mereduksi baris dengan metode Gauss (forward).
e. jElimination: mereduksi baris dengan metode Jordan (backward).
f. inverseByOBE: melakukan invers dengan reduksi baris, digunakan metode gElimination (Gauss) dan jElimination (Jordan).

1.9 Pemecah SPL

1.9.1 Metode Cramer

a. solveByCramerRule: menyelesaikan suatu SPL menggunakan aturan Cramer. Apabila matriks koefisien memiliki determinan nol, solusi tidak dapat dicari menggunakan metode ini.

1.9.2 Metode Invers

a. getMatrixMultipliedBy: mengembalikan suatu matriks baru yang tiap elemennya merupakan elemen matriks lama yang dikalikan oleh sebuah konstanta.
b. solveByInverse: menyelesaikan suatu SPL menggunakan matriks invers. Apabila matriks tidak memiliki invers, solusi tidak dapat dicari menggunakan metode ini.

1.9.3 Metode Gauss

a. gElimination: mereduksi dengan metode Gauss
b. solveByGauss: menyelesaikan matriks eselon dengan metode Gauss. Terdapat tiga kemungkinan: satu solusi, solusi parametrik, dan tidak ada solusi. I/O sudah masuk dalam metode.

1.9.4 Metode Gauss-Jordan

a. gaussianElimination: mengembalikan matriks eselon baris dengan menerapkan operasi baris elementer pada matriks *augmented*.
b. gaussJordanElimination: mengembalikan matriks eselon baris tereduksi dengan menerapkan operasi baris elementer pada matriks *augmented*.
c. solveByGaussJordan: menerima masukan sebuah matriks *augmented* kemudian menyelesaikannya dengan metode Gauss-Jordan dan menampilkan solusinya. Solusi dapat berupa solusi tunggal, mempunyai banyak solusi, atau tidak ada solusi.

1.10 Interpolasi

a. solveInterpolation: mengonversi matriks input user ke sebuah eqMatrix (*equation matrix*) berupa sebuah SPL yang dapat diselesaikan menggunakan metode Gauss-Jordan. Solusi dari SPL tersebut adalah koefisien-koefisien polinom hasil interpolasi yang lalu ditampilkan ke layar. Lalu, prosedur memproses sebuah nilai bebas $x$ yang ditaksir nilai $f(x)$-nya menggunakan polinom hasil interpolasi.

1.11 Regresi Linear Berganda

a. solveRegression: mengonversi matriks input user ke sebuah eqMatrix (*equation matrix*) berupa sebuah SPL yang dapat diselesaikan menggunakan metode Gauss-Jordan. Solusi dari SPL tersebut adalah koefisien $b_0, b_1, \ldots, b_i$ dari persamaan regresi berganda. Lalu, prosedur akan memproses $n$ nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (dengan $n$ menyatakan banyak variabel bebas) untuk ditaksir nilai $y$ −nya menggunakan persamaan regresi berganda yang sudah diketahui koefisien $b_0, b_1, \ldots b_i$-nya.

# Bab 4
# Eksperimen

## 4.1 Studi Kasus Solusi *Ax* = *b*

### 4.1.a

Persamaan tersebut tidak memiliki solusi.

```
Masukkan banyak baris: 4
Masukkan banyak kolom: 5
Masukkan matriks:
1 1 -1 -1 1
2 5 -7 -5 -2
2 -1 1 3 4
5 2 -4 2 6
Soal tidak bisa diselesaikan karena determinan matriks = 0.
```

*Gambar 4.1 Hasil eksekusi studi kasus 1.a*

### 4.1.b

Persamaan tersebut memiliki solusi:

$x_1 = 3.0 + 1{,}0e$, $x_2 = -2{,}0e$, $x_3 = c$, x4 $= -1{,}0 + 1{,}0e$, $x_5 = e$

```
Masukkan banyak baris: 4
Masukkan banyak kolom: 6
Masukkan matriks:
1 -1 0 0 1 3
1 1 0 -3 0 6
2 -1 0 1 -1 5
-1 2 0 -2 -1 -1
Solusi dari persamaan augmented yang Anda masukkan (dengan Gauss):
x1 = 3.000000 + 1.0e
x2 = -2.0e
x3 = c
x4 = -1.000000 + 1.0e
x5 = e
```

*Gambar 4.2 Hasil eksekusi studi kasus 1.b*

### 4.1.c

Persamaan tersebut memiliki solusi:

$x_1 = a$, $x_2 = 1{,}0 – 1{,}0f$, $x_3 = c$, $x_4 = -2{,}0 – 1{,}0f$, $x_5 = 1{,}0 + 1{,}0f$, $x_6 = f$

```
Masukkan banyak baris: 3
Masukkan banyak kolom: 7
Masukkan matriks:
0 1 0 0 1 0 2
0 0 0 1 1 0 -1
0 1 0 0 0 1 1
Solusi dari persamaan augmented yang Anda masukkan (dengan Gauss-Jordan):
x1 = a
x2 = -1.0f + 1.0
x3 = c
x4 = -1.0f - 2.0
x5 = f + 1.0
x6 = f
```

*Gambar 4.3 Hasil eksekusi studi kasus 1.c*

## 4.1.d

Untuk n = 6, persamaan tersebut memiliki solusi:

$x_1$ = 36,00000000101877, $x_2$ = -630,0000000310926, $x_3$ = 3360,0000002190486, $x_4$ = -7560,000000585615, $x_5$ = 7560,000000659378, $x_6$ = -2772,0000002637657

```
Masukkan banyak baris: 6
Masukkan banyak kolom: 7
Masukkan matriks:
1.0 0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.16666666666666666 1
0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.16666666666666666 0.14285714285714285 0
0.3333333333333333 0.25 0.2 0.16666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0
0.25 0.2 0.16666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0
0.2 0.16666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0
0.16666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0
Solusi dari persamaan augmented yang Anda masukkan (dengan Gauss-Jordan):
x1 = 36.00000000101877
x2 = -630.0000000310926
x3 = 3360.0000002190486
x4 = -7560.000000585615
x5 = 7560.000000659378
x6 = -2772.0000002637657
```

*Gambar 4.4 Hasil eksekusi studi kasus 1.d dengan n=6*

(apabila input eksak, bukan dalam format desimal, didapat $x_1$ = 36, $x_2$ = -630, $x_3$ = 3360, $x_4$ = -7560, $x_5$ = 7560, $x_6$ = -2772)

Untuk n = 10, persamaan tersebut memiliki solusi:

$x_1$ = 99,99711967239428, $x_2$ = -4949,749596952774, $x_3$ = 79194,64197178622, $x_4$ = -600551,116602934, $x_5$ = 2522286,176031787, $x_6$ = -6305655,74581584, $x_7$ = 9608540,978492845, $x_8$ = -8750574,960871693, $x_9$ = 4375261,142461102, $x_{10}$ = -923661,3610920042

```
Masukkan banyak baris: 10
Masukkan banyak kolom: 11
Masukkan matriks:
1.0 0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.16666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1
 1
0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.16666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0
9090909090909091 0
0.3333333333333333 0.25 0.2 0.16666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090
909090909091 0.08333333333333333 0
0.25 0.2 0.16666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.0833
3333333333333 0.07692307692307693 0
0.2 0.16666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.083333333
33333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0
0.16666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.083333333333
3333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.06666666666666667 0
0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.0769230769230
7693 0.07142857142857142 0.06666666666666667 0.0625 0
0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.07692307692307693 0.0714285714285
7142 0.06666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0
0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0
.06666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555 0
0.1 0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.06666666666666667
0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555 0.05263157894736842 0
Solusi dari persamaan augmented yang Anda masukkan (dengan Gauss-Jordan):
x1 = 99.99711967239428
x2 = -4949.749596952774
x3 = 79194.64197178622
x4 = -600551.116602934
x5 = 2522286.176031787
x6 = -6305655.74581584
x7 = 9608540.978492845
x8 = -8750574.960871693
x9 = 4375261.142461102
x10 = -923661.3610920042
```

*Gambar 4.5 Hasil eksekusi studi kasus 1.d dengan n=10*

(apabila input eksak, bukan dalam format desimal, didapat $x_1$ = 100, $x_2$ = -4950, $x_3$ = 79200, $x_4$ = -600600, $x_5$ = 2522520, $x_6$ = -6306300, $x_7$ = 9609600, $x_8$ = -8751600, $x_9$ = 4375800, $x_{10}$ = -923780)

## 4.2 Studi Kasus Matriks Augmented

### 4.2.a

Persamaan tersebut memiliki solusi:

$x_1$ = -1 + 1,0d, $x_2$ = -2,0c, $x_3$ = c, $x_4$ = d

```
Masukkan banyak baris: 4
Masukkan banyak kolom: 5
Masukkan matriks:
1 -1 2 -1 -1
2 1 -2 -2 -2
-1 2 -4 1 1
3 0 0 -3 -3
Solusi dari persamaan augmented yang Anda masukkan (dengan Gauss):
x1 = -1.000000 + 1.0d
x2 = -2.0c
x3 = c
x4 = d
```

*Gambar 4.6 Hasil eksekusi studi kasus 2.a*

### 4.2.b

Persamaan tersebut memiliki solusi:

$x_1$ = 0,0, $x_2$ = 2,0, $x_3$ = 1,0, dan $x_4$ = 1,0

```
Masukkan banyak baris: 6
Masukkan banyak kolom: 5
Masukkan matriks:
2 0 8 0 8
0 1 0 4 6
-4 0 6 0 6
0 -2 0 3 -1
2 0 -4 0 -4
0 1 0 -2 0
Solusi dari persamaan augmented yang Anda masukkan (dengan Gauss-Jordan):
x1 = 0.0
x2 = 2.0
x3 = 1.0
x4 = 1.0
```

*Gambar 4.7 Hasil eksekusi studi kasus 2.b*

## 4.3 Studi Kasus Persamaan Linier

### 4.3.a

Persamaan tersebut memiliki solusi:

$x_1$ = -0,22432432432432436, $x_2$ = 0,18243243243243246, $x_3$ = 0,7094594594594594, dan $x_4$ = -0,25810810810810797

```
Masukkan banyak baris: 4
Masukkan banyak kolom: 5
Masukkan matriks:
8 1 3 2 0
2 9 -1 -2 1
1 3 2 -1 2
1 0 6 4 3
Solusi dari persamaan augmented yang Anda masukkan (dengan Inverse):
x1 = -0.22432432432432434
x2 = 0.18243243243243243
x3 = 0.7094594594594594
x4 = -0.258108108108108
```

*Gambar 4.8 Hasil eksekusi studi kasus 3.a*

### 4.3.b

Persamaan tersebut tidak memiliki solusi.

```
Masukkan banyak baris: 12
Masukkan banyak kolom: 10
Masukkan matriks:
0 0 0 0 0 0 1 1 1 13
0 0 0 1 1 1 0 0 0 15
1 1 1 0 0 0 0 0 0 8
0 0 0.04289 0 0.04289 0.75 0.04289 0.75 0.61396 14.79
0 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0 14.31
0.61396 0.75 0.04289 0.75 0.04289 0 0.04289 0 0 3.81
0 0 1 0 0 1 0 0 1 18
0 1 0 0 1 0 0 1 0 12
1 0 0 1 0 0 1 0 0 6
0.04289 0.75 0.61396 0 0.04289 0.75 0 0 0.04289 10.51
0.91421 0.25 0 0.25 0.91421 0.25 0 0.25 0.91421 16.13
0.04289 0 0 0.75 0.04289 0 0.61396 0.75 0.04289 7.04
Solusi dari persamaan augmented yang Anda masukkan (dengan Gauss):
SPL tidak memiliki solusi.
```

*Gambar 4.9 Hasil eksekusi studi kasus 3.b*

## 4.4 Studi Kasus Rangkaian Listrik

Dengan melakukan analisis Mesh pada mesh kiri, diperoleh persamaan:

$$-10 + 40I_1 - 20(I_1 - I_4) = 0$$

$$4I_1 - 2I_4 = 1$$

Dengan melakukan analisis Mesh pada mesh tengah, diperoleh persamaan:

$$20(I_4 - I_1) + 20(I_4 - I_5) = 0$$

$$-2I_1 + 4I_4 - 2I_5 = 0$$

Dengan melakukan analisis Mesh pada mesh kanan, diperoleh persmaan:

$$-10 + 20(I_5 - I_4) + 20I_5 = 0$$

$$-2I_4 + 4I_5 = 1$$

Dengan menerapkan *Kirchoff's Current Law*, diperoleh persamaan:

$$I_1 = I_2 + I_4$$

$$I_1 - I_2 - I_4 = 0$$

dan

$$I_4 = I_3 + I_5$$

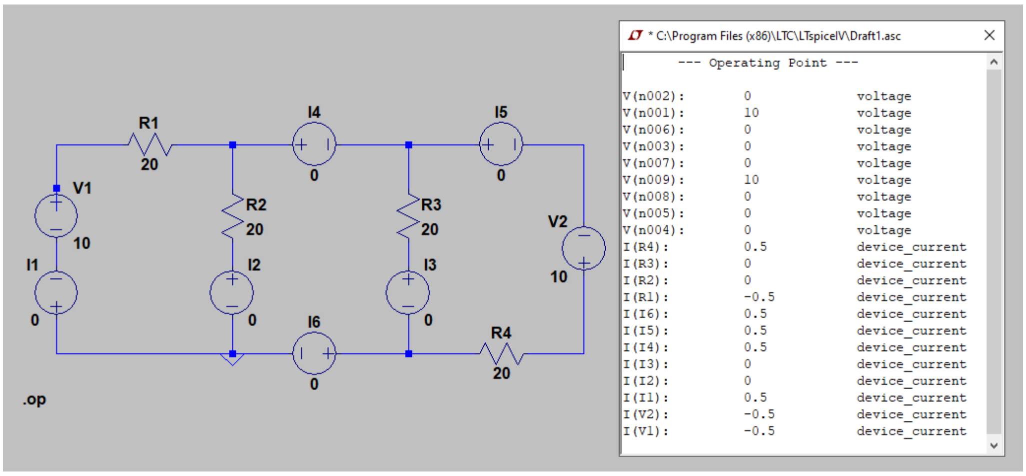
$$-I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

Arus $I_4$ sama dengan arus $I_6$ sehingga

$$I_4 = I_6$$

$$I_4 - I_6 = 0$$

Sehingga, diperoleh solusi $I_1 = 0.5\,A$, $I_2 = 0\,A$, $I_3 = 0\,A$, $I_4 = 0.5\,A$, $I_5 = 0.5\,A$, dan $I_6 = 0.5\,A$.




*Gambar 4.10 Hasil perhitungan dengan LTspice*

```
Masukkan banyak baris: 6
Masukkan banyak kolom: 7
Masukkan matriks:
4 0 0 -2 0 0 1
-2 0 0 4 -2 0 0
0 0 0 -2 4 0 1
1 -1 0 -1 0 0 0
0 0 -1 1 -1 0 0
0 0 0 -1 0 -1 0
Solusi dari persamaan augmented yang Anda masukkan (dengan Cramer):
x1 = 0.5
x2 = -0.0
x3 = -0.0
x4 = 0.5
x5 = 0.5
x6 = -0.5
```

*Gambar 4.11 Hasil eksekusi studi kasus 4*

### 4.5 Studi Kasus Sistem Reaktor

Persamaan yang dimaksud adalah:

$$\begin{aligned} A&: \quad 1300 + 60x_b - 40x_a - 80x_a = 0 \\ B&: \quad 40x_a - 60x_b - 20x_b = 0 \\ C&: \quad 200 + 80x_a + 20x_b - 150x_c = 0 \end{aligned}$$

dengan solusi $x_a = 14{,}444$, $x_b = 7{,}2222$, dan $x_C = 10{,}0$.

```
Masukkan banyak baris: 3
Masukkan banyak kolom: 4
Masukkan matriks:
-120 60 0 -1300
40 -80 0 0
80 20 -150 -200
Solusi dari persamaan augmented yang Anda masukkan (dengan Cramer):
x1 = 14.444444444444445
x2 = 7.222222222222222
x3 = 10.0
```

*Gambar 4.12 Hasil eksekusi studi kasus 5*

### 4.6 Studi Kasus Interpolasi

### 4.6.a

Persamaan interpolasinya adalah:

-0.0229765625000005 + 0.2400000000000087x + 0.1973958333332848$x^2$ + 1.2189713033813013E-13$x^3$ + 0.02604166666651337$x^4$ + 9.390771941894167E-14$x^5$ + -2.2269907904897356E-14$x^6$

Taksiran untuk titik x=0.2 adalah 0.032960937500000065

```
Masukkan orde polinomial: 6
Masukkan 7 pasangan x y:
0.1 0.003
0.3 0.067
0.5 0.148
0.7 0.248
0.9 0.370
1.1 0.518
1.3 0.697
Masukkan nilai x yang ingin ditaksir: 0.2
Persamaan interpolasinya adalah:
-0.0229765625000005 + 0.2400000000000087x + 0.1973958333332848x^2 + 1.2189713033813013E-13x^3 + 0.026041
66666651337x^4 + 9.390771941894167E-14x^5 + -2.2269907904897356E-14x^6
Taksiran untuk titik x=0.2 adalah 0.032960937500000065
```

*Gambar 4.13 Hasil eksekusi studi kasus 6.a dengan x=0.2*

Taksiran untuk titik x=0.55 adalah 0.17111865234375004

```
Masukkan orde polinomial: 6
Masukkan 7 pasangan x y:
0.1 0.003
0.3 0.067
0.5 0.148
0.7 0.248
0.9 0.370
1.1 0.518
1.3 0.697
Masukkan nilai x yang ingin ditaksir: 0.55
Persamaan interpolasinya adalah:
-0.0229765625000005 + 0.2400000000000087x + 0.1973958333332848x^2 + 1.2189713033813013E-13x^3 + 0.026041
66666651337x^4 + 9.390771941894167E-14x^5 + -2.2269907904897356E-14x^6
Taksiran untuk titik x=0.55 adalah 0.17111865234375004
```

*Gambar 4.14 Hasil eksekusi studi kasus 6.a dengan x=0.55*

Taksiran untuk titik x=0.85 adalah 0.33723583984375005

```
Masukkan orde polinomial: 6
Masukkan 7 pasangan x y:
0.1 0.003
0.3 0.067
0.5 0.148
0.7 0.248
0.9 0.370
1.1 0.518
1.3 0.697
Masukkan nilai x yang ingin ditaksir: 0.85
Persamaan interpolasinya adalah:
-0.0229765625000005 + 0.2400000000000087x + 0.1973958333332848x^2 + 1.2189713033813013E-13x^3 + 0.026041
66666651337x^4 + 9.390771941894167E-14x^5 + -2.2269907904897356E-14x^6
Taksiran untuk titik x=0.85 adalah 0.33723583984375005
```

*Gambar 4.15 Hasil eksekusi studi kasus 6.a dengan x=0.85*

Taksiran untuk titik x=1.28 adalah 0.6775418375

```
Masukkan orde polinomial: 6
Masukkan 7 pasangan x y:
0.1 0.003
0.3 0.067
0.5 0.148
0.7 0.248
0.9 0.370
1.1 0.518
1.3 0.697
Masukkan nilai x yang ingin ditaksir: 1.28
Persamaan interpolasinya adalah:
-0.0229765625000005 + 0.2400000000000087x + 0.1973958333332848x^2 + 1.2189713033813013E-13x^3 + 0.026041
66666651337x^4 + 9.390771941894167E-14x^5 + -2.2269907904897356E-14x^6
Taksiran untuk titik x=1.28 adalah 0.6775418375
```

*Gambar 4.16 Hasil eksekusi studi kasus 6.a dengan x=1.28*

**4.6.b**

Persamaan interpolasinya adalah:

$$7.190410416888292E12 + -9.350881209947121E12x + 5.336209640567323E12x^2 + -1.757413527578105E12x^3 + 3.6866728864166327E11x^4 + -5.114685068078558E10x^5 + 4.697088059029316E9x^6 + -2.7554498625218344E8x^7 + 9375105.143730488x^8 + -141025.78096584175x^9$$

Taksiran untuk tanggal 16/07/2021 (x=7.516) adalah 53545,00390625 kasus baru.

```
Masukkan orde polinomial: 9
Masukkan 10 pasangan x y:
6.567 12624
7 21807
7.258 38391
7.451 54517
7.548 51952
7.839 28228
8.161 35764
8.484 20813
8.709 12408
9 10534
Masukkan nilai x yang ingin ditaksir: 7.516
Persamaan interpolasinya adalah:
7.190410416888292E12 + -9.350881209947121E12x + 5.336209640567323E12x^2 + -1.757413527578105E12x^3 + 3.6
866728864166327E11x^4 + -5.114685068078558E10x^5 + 4.697088059029316E9x^6 + -2.7554498625218344E8x^7 + 9
375105.143730488x^8 + -141025.78096584175x^9
Taksiran untuk titik x=7.516 adalah 53545.00390625
```

*Gambar 4.17 Hasil eksekusi studi kasus 6.b dengan x=7.516*

Taksiran untuk tanggal 10/08/2021 (x=8.32258) adalah 36322,8984375 kasus baru.

```
Masukkan orde polinomial: 9
Masukkan 10 pasangan x y:
6.567 12624
7 21807
7.258 38391
7.451 54517
7.548 51952
7.839 28228
8.161 35764
8.484 20813
8.709 12408
9 10534
Masukkan nilai x yang ingin ditaksir: 8.32258
Persamaan interpolasinya adalah:
7.190410416888292E12 + -9.350881209947121E12x + 5.336209640567323E12x^2 + -1.757413527578105E12x^3 + 3.6
866728864166327E11x^4 + -5.114685068078558E10x^5 + 4.697088059029316E9x^6 + -2.7554498625218344E8x^7 + 9
375105.143730488x^8 + -141025.78096584175x^9
Taksiran untuk titik x=8.32258 adalah 36322.8984375
```

*Gambar 4.18 Hasil eksekusi studi kasus 6.b dengan x=8.32258*

Taksiran untuk tanggal 05/09/2021 (x=9.1667) adalah -665122,203125 kasus baru.

```
Masukkan orde polinomial: 9
Masukkan 10 pasangan x y:
6.567 12624
7 21807
7.258 38391
7.451 54517
7.548 51952
7.839 28228
8.161 35764
8.484 20813
8.709 12408
9 10534
Masukkan nilai x yang ingin ditaksir: 9.1667
Persamaan interpolasinya adalah:
7.190410416888292E12 + -9.350881209947121E12x + 5.336209640567323E12x^2 + -1.757413527578105E12x^3 + 3.6
866728864166327E11x^4 + -5.114685068078558E10x^5 + 4.697088059029316E9x^6 + -2.7554498625218344E8x^7 + 9
375105.143730488x^8 + -141025.78096584175x^9
Taksiran untuk titik x=9.1667 adalah -665122.203125
```

*Gambar 4.19 Hasil eksekusi studi kasus 6.b dengan x=9.1667*

### 4.6.c

Untuk n = 5, didapatkan polinom seperti berikut: 0,0 + 2,0352572499999972x + -3,5526817708333414$x^2$ + 3,237114583333359$x^3$ + -1,4212662760416872$x^4$ + 0,2362565104166715$x^5$.

Taksiran untuk titik x=1.85 adalah 0,5740321742248469.

```
Masukkan orde polinomial: 5
Masukkan 6 pasangan x y:
0 0
0.4 0.418884
0.8 0.507158
1.2 0.560925
1.6 0.583686
2 0.576652
Masukkan nilai x yang ingin ditaksir: 1.85
Persamaan interpolasinya adalah:
0.0 + 2.0352572499999972x + -3.5526817708333414x^2 + 3.237114583333359x^3 + -1.4212662760416872x^4 + 0.2
362565104166715x^5
Taksiran untuk titik x=1.85 adalah 0.5740321742248469
```

*Gambar 4.20 Hasil eksekusi studi kasus 6.c*

## 4.7 Studi Kasus Regresi Linear Berganda

Persamaan regresinya adalah:

$y_i$ = -3.507778140863007 + -0.002624990745881574$x_{1i}$ + 7.989410472203326E-4$x_{2i}$ + 0.15415503019761254$x_{3i}$ + $\epsilon_i$

Sehingga, untuk $x_1$ (humidity) = 50,0, $x_2$ (temperatur) = 76,0, dan $x_3$ (tekanan udara) = 29,3, didapat y (nilai Nitrous Oxide) sebesar 0,9384342262217071.

```
Masukkan nilai n (banyak variabel): 3
Masukkan nilai m (banyak sampel): 20
Masukkan nilai x1i x2i ... xni yi:
72.4 76.3 29.18 0.90
41.6 70.3 29.35 0.91
34.3 77.1 29.24 0.96
35.1 68.0 29.27 0.89
10.7 79.0 29.78 1.00
12.9 67.4 29.39 1.10
8.3 66.8 29.69 1.15
20.1 76.9 29.48 1.03
72.2 77.7 29.09 0.77
24.0 67.7 29.60 1.07
23.2 76.8 29.38 1.07
47.4 86.6 29.35 0.94
31.5 76.9 29.63 1.10
10.6 86.3 29.56 1.10
11.2 86.0 29.48 1.10
73.3 76.3 29.40 0.91
75.4 77.9 29.28 0.87
96.6 78.7 29.29 0.78
107.4 86.8 29.03 0.82
54.9 70.9 29.37 0.95
Masukkan nilai x1 x2 ... xn (yang ingin ditaksir):
50 76 29.3
Persamaan regresinya adalah:
yi = -3.507778140863007 + -0.002624990745881574x1i + 7.989410472203326E-4x2i + 0.15415503019761254x3i +
epsilon_i
Taksiran untuk x1=50.0 x2=76.0 x3=29.3 adalah 0.9384342262217071
```

*Gambar 4.21 Hasil eksekusi studi kasus 7*

# Bab 5
# Kesimpulan

## 5.1 Kesimpulan

Program dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menghitung determinan dan matriks balikan, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi linier berganda. Dalam menyelesaikan persoalan dalam bentuk SPL, terdapat empat pilihan metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah Cramer. Program dapat menerima masukan baik dari *keyboard* maupun membaca masukan dari file text serta dapat menampilkan hasilnya pada layar dan dapat disimpan ke dalam suatu file. Keseluruhan dari program ini dibuat dalam bahasa Java.

## 5.2 Saran

5.2.1 Dilakukan pengembangan program berbasis GUI (*graphical user interface)* agar lebih *user friendly.*

## 5.3 Refleksi

Dalam proses pembuatan tugas besar ini, diperlukan kemampuan dasar pemrograman agar dapat memahami bahasa pemrograman yang baru, yaitu bahasa Java dengan cepat serta dapat membuat suatu program dengan bahasa tersebut.

## Daftar Pustaka

Anton, Howard dan Rorres, Chris. 2014. *Elementary Linear Algebra: Application Version 11$^{th}$ Edition.* Amerika Serikat: Wiley

Munir, Rinaldi. *Algeo 03: Sistem Persamaan Linear.* YouTube, diunggah oleh Aljabar Linier dan Geometri – Informatika ITB, 31 Agustus 2020.

Munir, Rinaldi. *Algeo 05: Sistem Persamaan Linear (Metode Gauss Jordan).* YouTube, diunggah oleh Aljabar Linier dan Geometri – Informatika ITB, 2 September 2020.

Utama, Nugraha Priya. *Algeo 08 & 09: Determinan.* YouTube, diunggah oleh Aljabar Linier dan Geometri – Informatika ITB, 9 September 2020.