به نام خدا

9931067 عرفانه حاج‌محمدی

پاسخ سری دوم تمارین سیگنال و سیستم ها

1)

a) $x(t) = e^{-t}$

$$p(t) \triangleq |x(t)|^2 \rightarrow p(t) \triangleq |e^{-t}|^2 = e^{-2t}$$

$$E_\infty \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt \rightarrow E_\infty \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\,dt = \frac{e^{-2t}}{-2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 - \left(-\frac{e^{+\infty}}{2}\right) = +\infty$$

$$P_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} p(t)\,dt \rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \underbrace{\int_{-T}^{T} e^{-2t}\,dt}_{-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_{-T}^{T}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\times\frac{1}{2} =$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_{-T}^{T} = -\frac{1}{2}e^{-2T} - \left(-\frac{1}{2}e^{+2T}\right) \overset{*}{=} \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$T = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad *$$

b) $x(t) = e^{-t}u(t)$

$$p(t) \triangleq |x(t)|^2 \rightarrow p(t) \triangleq |e^{-t}u(t)|^2 = e^{-2t}$$

$$E_\infty \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt \rightarrow E_\infty \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t} = -\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

$$P_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} p(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} = 0$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$E_\infty =$ عدد $\Rightarrow P_\infty = 0$

---

2) برای بررسی متناوب یا نامتناوب بودن سیگنال ها تساوی های زیر باید برقرار باشد:

سیگنال زمان پیوسته: $x(t) = x(t+T)$

سیگنال زمان گسسته: $x[n] = x[n+N]$

a) $x[n] = e^{j\frac{3n}{7}}$

با توجه به اینکه $e^{j\omega_0 n}$ اگر متناوب باشد داریم:

$$e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 (n+N)}$$

* طبق قوانین برقرار در توان ها

$$e^{j\omega_0 (n+N)} \overset{*}{=} e^{j\omega_0 n} \times e^{j\omega_0 N} \Rightarrow e^{j\omega_0 N} = 1$$

باید $e^{j\omega_0 N} = 1$ باشد تا $e^{j\omega_0 n}$ متناوب باشد و همچنین

$$\omega_0 N = 2\pi m \rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

شرط گویا بودن $\frac{m}{N}$ نیز برقرار باشد در این صورت N پایه تناوب است

$$x[n] = e^{j\frac{3n}{7}}$$

$$x[n+N] = e^{j\frac{3(n+N)}{7}} = e^{\frac{3jn}{7}+\frac{3jN}{7}} = e^{\frac{3jn}{7}} \times \underbrace{e^{\frac{3jN}{7}}}$$

اگر سیگنال $x[n]$ متناوب باشد باید $e^{\frac{3jN}{7}}=1$ نیز برقرار باشد:

$$\omega_0 N = 2\pi m \rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

$$\omega_0 = \frac{3N}{7}$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\frac{3}{7}}{2\pi} = \frac{3}{14\pi} \notin Q$$

کسر $\frac{3}{14\pi}$ گویا نیست بنابراین سیگنال $x[n]$ متناوب نیست.

c) $x[n] = e^{j\frac{\pi}{3}n} + e^{j\frac{4\pi}{3}n}$

مطابق توضیحات کلی در قسمت (a) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} e^{j\frac{\pi}{3}n} = y[n] \\ y[n+N] \overset{*}{=} y[n] \end{array}\right\} e^{j\frac{\pi}{3}(N+n)} = e^{j\frac{\pi}{3}n + j\frac{\pi}{3}N} = e^{j\frac{\pi}{3}n} \times e^{j\frac{\pi}{3}N}$$

برای متناوب بودن سیگنال $y[n]$، باید $e^{j\frac{\pi}{3}N}=1$ برقرار باشد:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\pi/3}{2\pi} = \frac{\pi}{6\pi} = \frac{1}{6} \in Q \checkmark \\ \omega_0 N = 2\pi m \rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \end{array}\right\} \frac{m}{N} = \frac{1}{6} \Rightarrow N = 6$$

دوره تناوب برای سیگنال $y[n]$، 6 می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} e^{j\frac{4\pi}{3}n} = h[n] \\ h[n+N] \overset{*}{=} h[n] \end{array}\right\} e^{j\frac{4\pi}{3}(n+N)} = e^{j\frac{4\pi}{3}n} \times e^{j\frac{4\pi}{3}N}$$

* شرط متناوب بودن سیگنال های زمان گسسته

$$e^{j\frac{4\pi}{3}N} = 1 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \rightarrow \frac{\frac{4\pi}{3}}{2\pi} = \frac{4\pi}{6\pi} = \frac{2}{3} \in Q \checkmark \rightsquigarrow$$

سیگنال $h[n]$ متناوب است

$$\frac{2}{3} = \frac{m}{N} \rightarrow N = \frac{3}{2} =$$ دوره تناوب

دوره تناوب سیگنال $x[n]$؛ ک.م.م بین دو سیگنال متناوب $y[n]$ و $h[n]$ است:

$$\left.\begin{array}{l} 6K,\ K=1,\dots \Rightarrow 6, 12, 18 \\ \frac{3}{2}K,\ K=1,\dots \Rightarrow \frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}, 6 \end{array}\right\}$$ ک.م.م = دوره تناوب $x[n]$ = 6

b) $x(t) = \left|\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\right| + \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$

$\left|\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\right| = y(t)$

$y(t) \overset{?}{=} y(t+T)$

$y(t+T) = \left|\sin\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}T\right)\right|$

$\frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{6k\pi}{2\pi} = 3k \xrightarrow[\text{دوره تناوب نصف می شود}]{\text{به دلیل قدر مطلق}} \frac{3k}{2}$

متناوب است و دارای دوره تناوب 3 و $k=2$ است.

$\cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) = h(t)$

$h(t) \overset{?}{=} h(t+T)$

$h(t+T) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}t + \frac{4\pi}{3}T\right)$

$\frac{2k\pi}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{6k\pi}{4\pi} = \frac{3k}{2}$

متناوب است و دارای دوره تناوب $(k=2, 3)$

با توجه به اینکه دو سیگنال $y(t)$ و $h(t)$ متناوب هستند ترکیب خطی آن ها که به صورت

$x(t) = h(t) + y(t)$

است ، متناوب است و دارای دوره تناوب = ک.م.م بین $\frac{3k}{2}$ و $\frac{3}{2}k \Leftarrow$ 3 و $k=2$ است.

d) $x(t) = \cos(9t) + \sin(2\pi t)$

$y(t) = \cos(9t) \longrightarrow \omega_0 = 9 \quad , \quad \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{9}{2\pi} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ حاصل $\frac{9}{2\pi}$ گویا نیست اما چون سیگنال پیوسته است بنابراین $y(t)$ متناوب است

$y(t) \overset{?}{=} y(t+T) \longrightarrow y(t) \neq y(t+T)$

$y(t+T) = \cos(9t + 9T)$

$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{9}{2\pi} = \frac{m}{N} \Rightarrow N = \frac{2\pi}{9}$

$h(t) = \sin(2\pi t) \longrightarrow \omega_0 = 2\pi$ و $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \in \mathbb{Q}$ ✓ $\longrightarrow$ $h(t)$ متناوب است و دوره تناوب $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} = 1 \Rightarrow N = 1$ نیز یک می باشد.

$h(t) = h(t+T)$

$h(t+T) = \sin(2\pi t + 2\pi T)$

رسم های قسمت ها انجام شد و تصویر آن ها به همراه کدهایشان بارگذاری شد.

3) برای اثبات اینکه هر سیگنال را می‌توان بصورت حاصل جمع سیگنال زوج و فرد نمایش داد، می‌نویسیم داریم:

$$\left.\begin{aligned} even\{x(t)\} &= \tfrac{1}{2}(x(t)+x(-t)) = \tfrac{1}{2}(x(-t)+x(t)) \\ odd\{x(t)\} &= \tfrac{1}{2}(x(t)-x(-t)) = -\tfrac{1}{2}(x(-t)-x(t)) \end{aligned}\right\}$$

$$x(t) = even\{x(t)\} + odd\{x(t)\} = \cancel{\tfrac{1}{2}x(-t)} + \underline{\tfrac{1}{2}x(t)} - \cancel{\tfrac{1}{2}x(-t)} + \underline{\tfrac{1}{2}x(t)}$$

$$= \tfrac{1}{2}x(t) + \tfrac{1}{2}x(t) = x(t)$$

* بطوری که می‌دانیم: سیگنال زوج، $x(-t)=x(t)$ ، $x[-n]=x[n]$

سیگنال فرد: $x(-t)=-x(t)$ ، $x[-n]=-x[n]$

همچنین اگر h را به عنوان سیگنال فرد و g را به عنوان سیگنال زوج در نظر بگیریم:

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= h(t)+g(t) \\ f(-t) &= h(-t)+g(-t) \overset{*}{=} g(t)-h(t) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} f(t)+f(-t) &= g(t)+h(t)+g(t)-h(t) \\ &= 2g(t) \end{aligned}$$

$$* \; g(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}$$

$$f(t) = h(t)+g(t) \rightarrow h(t) = f(t) - g(t) \overset{*}{=} f(t) - \frac{f(t)+f(-t)}{2} = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$

$$h(t)+g(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2} + \frac{f(t)+f(-t)}{2} = f(t)$$

همچنین در توضیح برای کد نوشته شده برای برنامه‌ای که سیگنال گسسته‌ای را از کاربر دریافت و نمایش‌های زوج و فرد آن را جداگانه رسم کند باید بگویم من برنامه‌ای نوشتم که در سه حالت فانکشن را از کاربر دریافت می‌کند. در واقع کاربر از میان سه حالت سیگنال sin یا cos یا e یکی را انتخاب می‌کند و باتوجه به ضرایبی که در ادامه دریافت می‌شود نمایش زوج و فرد آن سیگنال رسم می‌شود.

4) کد مربوط این سوال و تصویر سیگنال های مربوط انجام شد و در فایل به نام (4) آپلود شد

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases} \qquad \delta(t) = u(t) - u(t-1)$$ (5

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

b) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \, \delta[n-k] = 2\,\delta[n-(-2)] + 2\,\delta[n-(-2)] + \delta[n-(-1)] =$

$= 2\,\delta[n+2] + 2\,\delta[n+2] + \delta[n+1]$

a) $\int_1^3 \sin(t)\, \delta(2t-4)\, dt$

با توجه به اینکه $x(t)$ یک سیگنال دلخواه و $\delta(t)$ تابع ضربه می‌باشد داریم:

$$\underbrace{x(t)}_{\text{سیگنال دلخواه}} \underbrace{\delta(t)}_{\text{سیگنال ضربه}} = x(0)\, \delta(t)$$

$$x(t)\, \delta(t-t_0) = x(t_0)\, \delta(t-t_0)$$

و $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta(t-\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \delta(t-\tau)\, dt =$

$= f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\, dt = f(\tau)$

به طور مشابه با انتگرال گیری داریم:

$$\int x(t_0)\, \delta(t) = x(t_0) \quad , \quad \int x(0)\, \delta(t) = x(0)$$

همچنین داریم:

$$\int_a^b \delta(t)\, dt = \begin{cases} 1 & a<0<b \\ 0 & ow \end{cases} \quad , \quad \int_a^b \delta(t-6)\, dt = \begin{cases} 1 & a<6<b \\ 0 & ow \end{cases}$$

$$\int_a^b \delta(t) . f(t)\, dt = \int_a^b \delta(t) . f(0)\, dt = f(0) \int_a^b \delta(t)\, dt = \begin{cases} f(0) & a<0<b \\ 0 & ow \end{cases}$$

اگر $a<b$: $\int_a^b \delta(t-\lambda) . f(t)\, dt = \begin{cases} f(\lambda) & a<\lambda<b \\ 0 & ow \end{cases}$:

$f(t) = \sin(t)$

$\delta(t-\lambda) = \delta(2t-4)$

تغییر متغیر:

$2t = x \rightsquigarrow t = x/2$

$\sin(x/2) = f(x/2)$ و $\delta(x-4) = \delta(x-\lambda) \Rightarrow \lambda = 4$

$$\int_1^3 \sin(t) \underbrace{\delta(2t-4)}\, dt \xrightarrow{t=2} \int_1^3 \sin(2)\, \delta(0) = \sin(2) \int_1^3 \underbrace{\delta(0)}\, dt = \sin(2) \overbrace{\int_1^3 1\, dt}^{t|_1^3 = 3-1=2} =$$

$$\delta(\underbrace{2t-4}_{\substack{2t-4=0 \\ 2t=4 \to t=2}}) = \begin{cases} 1 & t=2 \\ 0 & t\neq 2 \end{cases} \qquad \delta(t) = \begin{cases} 1 & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

پاسخ آخر $= 2\sin(2)$

6) با توجه به آنچه خواسته شده، حافظه، علیت، پایداری، خطی بودن و مستقل از زمان هر یک از سیگنال ها بررسی شود
ابتدا شروط برقراری این موارد را بررسی میکنیم:

حافظه: خروجی در هر زمان فقط وابسته به ورودی در همان لحظه از زمان است. $y(t)=f\{x(t)\}$

علیت: $y[n]$ وابسته به $n \geq n'$

خطی بودن: سیستم خطی محسوب میشود که خاصیت جمع آثار در آن صدق کند

برقراری شرط همگنی: $f\{ax(n)\} = a f\{x(n)\}$

برقراری شرط جمع آثار:

$$f\{x_1(n)+x_2(n)\} = f\{x_1(n)\}+f\{x_2(n)\}$$

پایداری: به ازای ورودی کران دار، خروجی نیز کران دار باشد: $|x(n)|<B_x<\infty \to |y(n)|<B_y<\infty$

مستقل از زمان: $f\{x(n-n_0)\} = y(n-n_0)$

---

a) $y[n] = x[n+1]-x[n] \to$ حافظه دار - علی نیست - پایدار - مستقل از زمان - خطی

بررسی خطی بودن: دو ورودی دلخواه $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را در نظر میگیریم:

$$x_1[n] \to y_1[n] = x_1[n+1] - x_1[n]$$

$$x_2[n] \to y_2[n] = x_2[n+1] - x_2[n]$$

اگر $x_3[n]$ را به صورت ترکیب خطی از $x_1[n]$ و $x_2[n]$ در نظر بگیریم:

$$*\ x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$$

اعداد دلخواه

حال اگر $x_3[n]$ را به عنوان ورودی در نظر بگیریم

داریم:

$$y_3[n] = x_3[n+1] - x_3[n] \overset{*}{=} (a x_1[n+1] + b x_2[n+1]) - (a x_1[n] + b x_2[n]) =$$

$$a(\underbrace{x_1[n+1] - x_1[n]}_{y_1[n]}) + b(x_2[n+1] - x_2[n]) = a y_1[n] + by = y[n]$$

بنابراین سیستم خطی است.

b) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ → حافظه دار - علی است - پایدار نیست - مستقل از زمان - خطی است

این سیستم حافظه دار است زیرا خروجی در لحظه n به تمام ورودی های قبلی تا لحظه n بستگی دارد

از آنجایی که سیستمی پایدار است که پاسخ آن به سیگنال ورودی با دامنه محدود نیز خروجی با دامنه محدود باشد

این سیستم ناپایدار است به طوری که :

پاسخ این سیستم را اگر برای $x[n]=u[n]$ در نظر بگیریم خواهیم داشت : $y[n] = \sum_{k=0}^{n} u[n] = (n+1)u[n]$

در این حالت داریم : $\begin{cases} y[0]=1 \\ y[1]=2 \\ y[2]=3 \\ \vdots \end{cases}$ به طوری که با افزایش n ، $y[n]$ نیز به طور نامحدودی افزایش می یابد

بنابراین این سیستم ناپایدار است

مطابق اینکه در سیستم های علی ، خروجی در هر لحظه به مقادیر ورودی در آن لحظه و لحظات قبل بستگی دارد

در سیستم علی از آینده خبر ندارد ⇐ این سیستم علی است.

c) $y(t) = x(t)\,u(t+5)$ → حافظه دار - غیرعلی - پایدار است - تغییرپذیر با زمان - خطی است

به دلیل اینکه $x(t)$ در تابع ضرب شده میتوان نتیجه گرفت که این سیستم تغییرناپذیر با زمان است زیرا در این صورت خروجی وابسته زمان در ورودی است.

همچنین میدانیم که سیستم های تغییرناپذیر با زمان ← سیستم هایی هستند که مشخصاتشان به زمان وابسته نیست و دچار تغییر نمی شوند که این سیستم این گونه نیست.

d) $y[n] = \sum_{k=m}^{n} x[k]$ → حافظه ندارد - علی است - پایدار است - $\underbrace{\text{تغییرناپذیر با زمان}}_{\text{مستقل از زمان}}$ - خطی است

$$f(a_1x_1[n]+a_2x_2[n]) = \sum_{k=m}^{n}(a_1x_1[k]+a_2x_2[k]) = a_1\sum_{k=m}^{n}x_1[k] + a_2\sum_{k=m}^{n}x_2[k]$$

$$= a_1 f(x_1[n]) + a_2 f(x_2[n])$$

بنابراین سیستم خطی است

$$y[m] = \sum_{k=m}^{n} x[k] = x[m] + \cdots + x[n-1] + x[n]$$

$$f(x[m]) = \sum_{k=m}^{n} x[k] = x[m] + \cdots + x[n] \Rightarrow y[m] = f(x[m]) \Rightarrow$$

بنابراین سیستم غیر متغیر با زمان ، مستقل از زمان است