VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Matematická analýza

Domácí úkol 1 - varianta 7

Hanák Karel - xhanak34
Chlupová Silvie - xchlup08
Krbálek Pavel - xkrbal02
Saranová Ivana - xsaran02
Sedlák David - xsedla1d

16.3.2018

1 Příklad

Rozložte následující funkci na parciální zlomky. Kořeny jmenovatele (které jsou celočíselné) najděte pomocí Hornerova schématu. Sestavte soustavu rovnic pro neurčité koeficienty; tuto soustavu můžete řešit pomocí vhodného softwaru. Napište výsledný tvar rozkladu.

$$f(x) = \frac{x^5 - 15x^2 - 55x - 23}{x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 16x^2 + 15x + 9}$$

Postup řešení

1. Rovnice pro upravení Hornerovým schématem:

$$x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 16x^2 + 15x + 9 \tag{1}$$

$$p = 1; q = 9 \tag{2}$$

$$\text{kořeny: } d = \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\} \tag{3}$$

2. Hornerovo schéma

	1	7	16	16	15	9
-1		-1	-6	-10	-6	-9
	1	6	10	6	9	0

$$(x+1) \cdot (x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9) \tag{4}$$

	1	6	10	6	9
-3		-3	-9	-3	-9
	1	3	1	3	0

$$(x+1) \cdot (x+3) \cdot (x^3 + 3x^2 + x + 3) \tag{5}$$

	1	3	1	3
-3		-3	0	-3
	1	0	1	0

$$(x+1) \cdot (x+3)^2 \cdot (x^2 + 1) \tag{6}$$

3. Nová rovnice po úpravě:

$$f(x) = \frac{x^5 - 15x^2 - 55x - 23}{(x+1)\cdot(x+3)^2\cdot(x^2+1)} \tag{7}$$

4. Rozložení na parciální zlomky (obecný tvar)

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\frac{A\cdot(x+3)\cdot(x^2+1) + B\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x^2+1)+}{(x+1)\cdot(x+3)^2\cdot(x^2+1)}\\ \frac{+C\cdot(x+1)\cdot(x^2+1) + (Dx+E)\cdot(x+1)\cdot(x+3)^2}{(x+1)\cdot(x+3)^2\cdot(x^2+1)}\end{gathered} \tag{9}$$

5. Výpočet čitatelů obecného tvaru

$$\begin{gathered} x = -3 \\ -20 = C\cdot(-2)\cdot 10 \\ \underline{\underline{C = 1}} \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} x = -1 \\ 16 = A\cdot 4\cdot 2 \\ \underline{\underline{A = 2}} \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} x = 0 \\ -23 = A\cdot 9\cdot 1 + B\cdot 1\cdot 3\cdot 1 + C\cdot 1\cdot 1 + (E)\cdot 1\cdot 9 \\ -23 = 18 + 3B + 1 + 9E \\ -42 = 3B + 9E \\ -14 = B + 3E \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} x = 1 \\ -92 = A\cdot 16\cdot 2 + B\cdot 2\cdot 4\cdot 2 + C\cdot 2\cdot 2 + (D+E)\cdot 2\cdot 16 \\ -92 = 64 + 16B + 4 + 32D + 32E \\ -160 = 16B + 32D + 32E \\ -10 = B + 2D + 2E \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} x = -2 \\ 19 = 2\cdot 1\cdot 5 + B\cdot(-1)\cdot 1\cdot 5 + (-2D+E)\cdot(-1)\cdot 1 \\ 19 = 10 - 5B - 5 + 2D - E \\ 14 = -5B + 2D - E \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\text{Soustava rovnic řešená pomocí online softwaru}\\ 14 = -5B + 2D - E\\ -10 = B + 2D + 2E\\ -14 = B + 3E\\ \underline{\underline{B = -2}}\\ \underline{\underline{D = 0}}\\ \underline{\underline{E = -4}}\end{gathered} \tag{15}$$

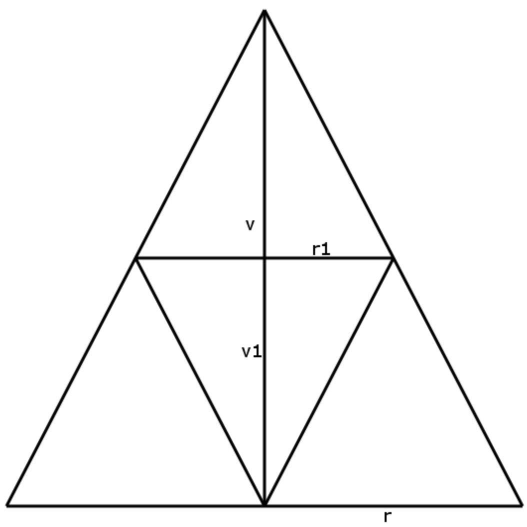
Výsledek:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+3} + \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{4}{x^2+1}}} \tag{16}$$

2 Příklad

Kužel má poloměr podstavy r a výšku v. Do tohoto kužele vepište jiný kužel tak, aby jeho vrchol ležel ve středu podstavy daného kužele a obvodová kružnice podstavy ležela v jeho stěně (kužel je „vzhůru nohama“). Zjistěte, kdy bude mít malý kužel maximální resp. minimální objem.

Postup řešení



Obrázek 1: obr. k příkladu 2

1. Na základě podobnosti troúhelníků vypočítáme vztah pro v_1

$$\begin{aligned} \frac{v - v_1}{r_1} &= \frac{v}{r} \\ r \cdot v - r \cdot v_1 &= r_1 \cdot v \\ r \cdot v_1 &= v \cdot (r - r_1) \\ v_1 &= \frac{v}{r} \cdot (r - r_1) \end{aligned} \tag{17}$$

2. Sestavíme účelovou funkci a určíme rozsah hodnot

$$\begin{gathered} V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot {r_1}^2 \cdot v_1 \wedge v, r \in (0, \infty) \wedge v_1 \in (0, v) \wedge r_1 \in (0, r) \\ V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot {r_1}^2 \cdot \frac{v}{r} \cdot (r - r_1) \\ V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot {r_1}^2 \cdot \frac{v}{r} \cdot (r - r_1) \\ f(r_1) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{v}{r} \cdot (r_1^2 \cdot r - r_1^3) \end{gathered} \tag{18}$$

3. Zderivujeme účelovou funkci

$$f'(r_1) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{v}{r} \cdot (2 \cdot r \cdot r_1 - 3 \cdot {r_1}^2) \tag{19}$$

4. Zjistíme kdy je derivace rovna 0

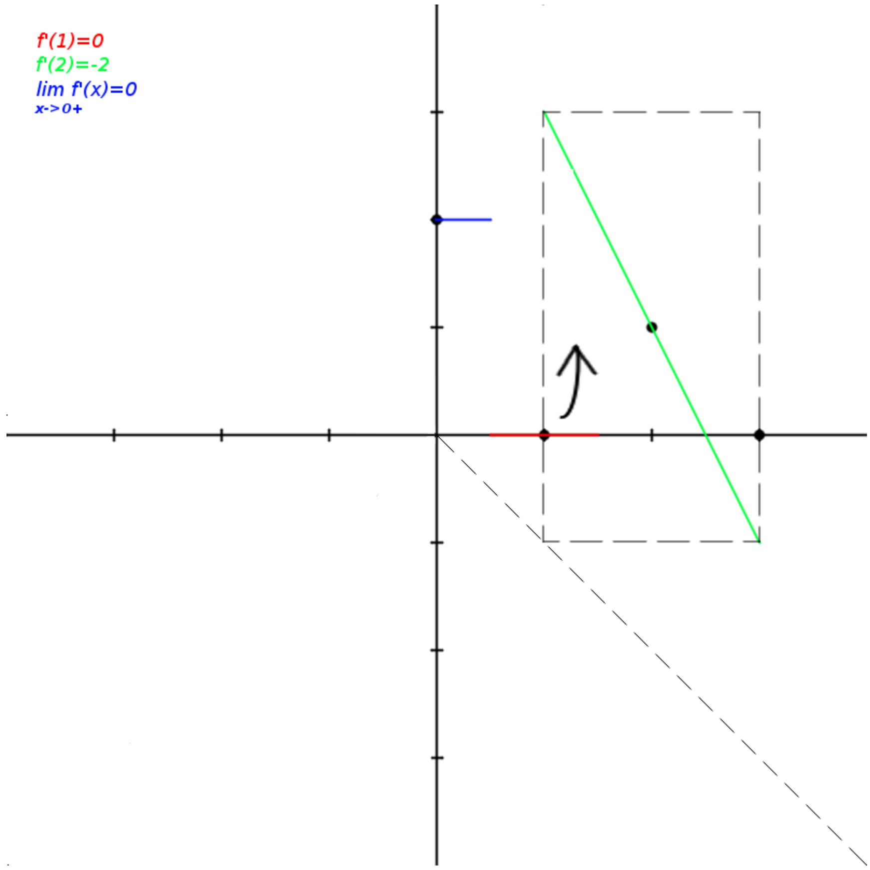
$$\begin{gathered} \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{v}{r} \cdot (2 \cdot r \cdot r_1 - 3 \cdot {r_1}^2) = 0 \\ -3 \cdot r_1^2 + 2 \cdot r \cdot r_1 = 0 \\ r_1 \cdot (-3 \cdot r_1 + 2 \cdot r) = 0 \\ r_1 \in \{0; \frac{2 \cdot r}{3}\} \end{gathered} \tag{20}$$

5. Lokální extrémy funkce mohou být v bodech, ve kterých je první derivace nulová, nebo neexistuje, první derivace naší účelové funkce je definovaná na celém intervalu (0, r) a jediný nulový bod na tomto intervalu je $r_1 = \frac{2 \cdot r}{3}$, z první derivace také víme že před bodem $r_1 = \frac{2 \cdot r}{3}$ funkční hodnota účelové funkce roste a po něm zase klesá, z toho je jasné že v tomto bodě bude účelová funkce dosahovat maxima na intervalu (0, r). Minima bude funkce dosahovat když se bude r_1 blížit hraničním bodům intervalu (0, r), hodnota minima se bude blížit k 0, přesnou hodnotu nelze určit, (v hraničních bodech by byla funkční hodnota nulová, ale ty nás nezajímají).

$$\underline{\underline{f_{max} = f(\frac{2 \cdot r}{3}) = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot v}{81}}} \tag{21}$$

3 Příklad

Nakreslete graf funkce f, pro kterou platí: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, je sudá, a pro $x \geq 0$ platí:
v bodě $x = 1$ má nespojitost 2. druhu přičemž je spojitá zprava,
$f(0) = 2, f(1) = f(3) = 0, f(2) = 1,$
$f'(1) = 0, f'(2) = -2, \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0, \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \infty,$
$f''(x) > 0$ pro $x \in (0,1)$ a pro $x \in (3,\infty)$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (1,3)$,
přímka $y = -x$ je její asymptota.
Do obrázku nakreslete všechny asymptoty a tečny resp. polotečny v bodech, kde je zadaná derivace.



Obrázek 2: Graf funkce f

Naneštěstí funkci nelze nakreslit. Jeden problém je že $f''(x) > 0$ pro $x \in (0,1)$, ale $f'(0) > f'(1)$.