Politechnika Wrocławska

Wykonawcy: Kinga Curkowicz 268774, Jakub Antczak 268745
Prowadzący: dr Aleksandra Grzesiek
Termin zajęć: Wtorek 15:15

Statystyka stosowana laboratorium

Testowanie hipotez statystycznych

23 czerwca 2023

Spis treści

1. Zadanie 1

1.1. Wstęp

W tym zadaniu przetestujemy hipotezę zerową H_0: $\mu = 1.5$ na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ przeciwko trzem hipotezom alternatywnym:

1. $\mu \neq 1.5$;
2. $\mu > 1.5$;
3. $\mu < 1.5$;

Rozważane dane mają rozkład normalny $N(\mu, \sigma = 0.2)$. Wyznaczymy wartość statystyki testowej Z, a następnie określimy i narysujemy obszary krytyczne wraz z wyznaczaną p-wartością.

1.2. Teoria

Najpierw wyznaczymy wartość **statystyki testowej** Z. Jest to zmienna losowa, której rozkład jest znany pod warunkiem zachodzenia hipotezy zerowej. W omawianym przypadku jest to rozkład normalny $N(\mu, \sigma = 0.2)$. To właśnie od wartości statystyki testowej Z zależy, czy przyjmujemy hipotezę zerową, czy odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej H_1.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma/n}}, \tag{1}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \bar{X} &\text{ - średnia z próby} \\ \mu &\text{ - wartość średniej z hipotezy zerowej} \\ \sigma &\text{ - znane odchylenie standardowe próby} \\ n &\text{ - liczba obserwacji} \end{aligned}$$

Poprzez symulacje przeprowadzone w języku Python otrzymaliśmy, że wartość statystyki Z wynosi $Z \approx -7.04$.

Następnym krokiem jest wyznaczenie **obszarów krytycznych** C dla trzech hipotez alternatywnych. Są to zbiory wartości statystyki testowej prowadzące do odrzucenia hipotezy zerowej na korzyść hipotezy alternatywnej.

1. Dla $H_1 : \mu \neq 1.5$:
$$C = (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty), \tag{2}$$
gdzie $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ oznacza kwantyl na poziomie istotności $1 - \frac{\alpha}{2}$ dla rozkładu normalnego standardowego $\mathcal{N}(0, 1)$.
Uzyskaliśmy następujący obszar krytyczny dla tego przypadku:
$$C = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$$

2. Dla $H_1 : \mu > 1.5$:
$$C = (z_{1-\alpha}, \infty), \tag{3}$$
gdzie $z_{1-\alpha}$ oznacza kwantyl na poziomie istotności $1 - \alpha$ dla rozkładu normalnego standardowego $\mathcal{N}(0, 1)$.
Uzyskaliśmy następujący obszar krytyczny dla tego przypadku:
$$C = (1.65, \infty).$$

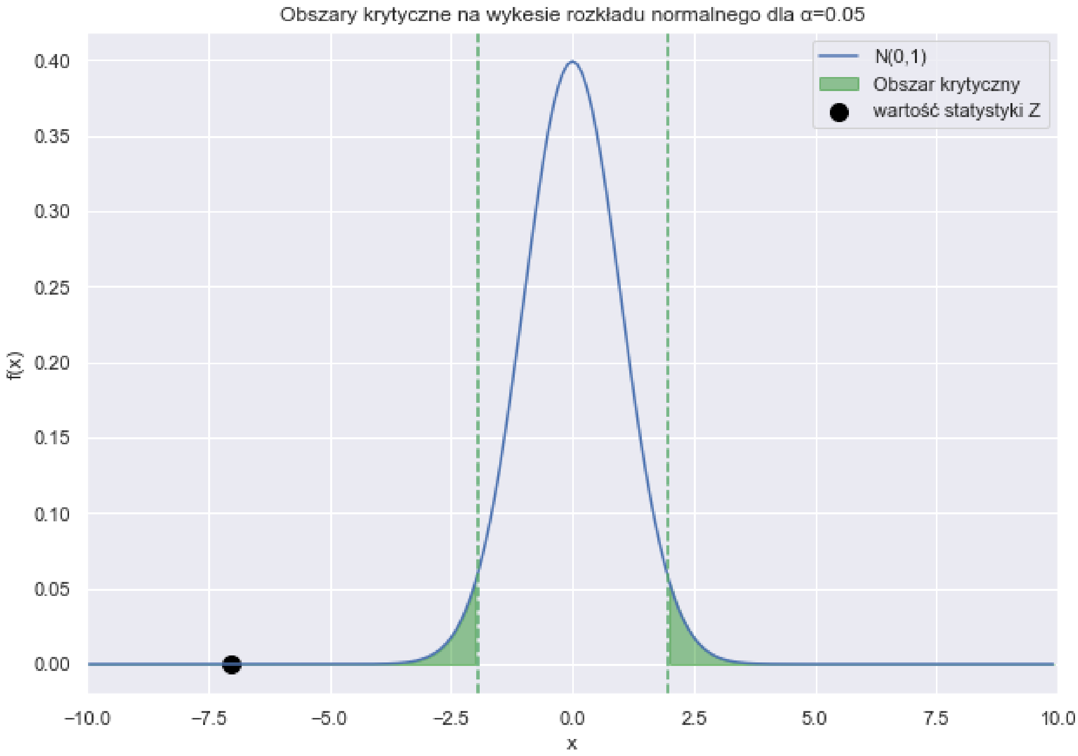
3. Dla $H_1 : \mu < 1.5$:
$$C = (-\infty, -z_{1-\alpha}) \,, \tag{4}$$
gdzie $z_{1-\alpha}$ to kwantyl na poziomie istotności $1 - \alpha$ rozkładu normalnego standardowego $\mathcal{N}(0, 1)$.
Uzyskaliśmy następujący obszar krytyczny dla tego przypadku:
$$C = (-\infty, -1.65) \,.$$

Następnym krokiem było wyznaczenie **p-wartości** testu dla każdej z trzech hipotez alternatywnych. Oznacza to, że szukamy najmniejszych poziomów istotności, przy których zaobserwowane wartości statystyk testowych prowadzą do odrzucenia hipotezy zerowej. Tym razem również wyliczamy je z odpowiednich wzorów, w zaależności od hipotezy alternatywnej.

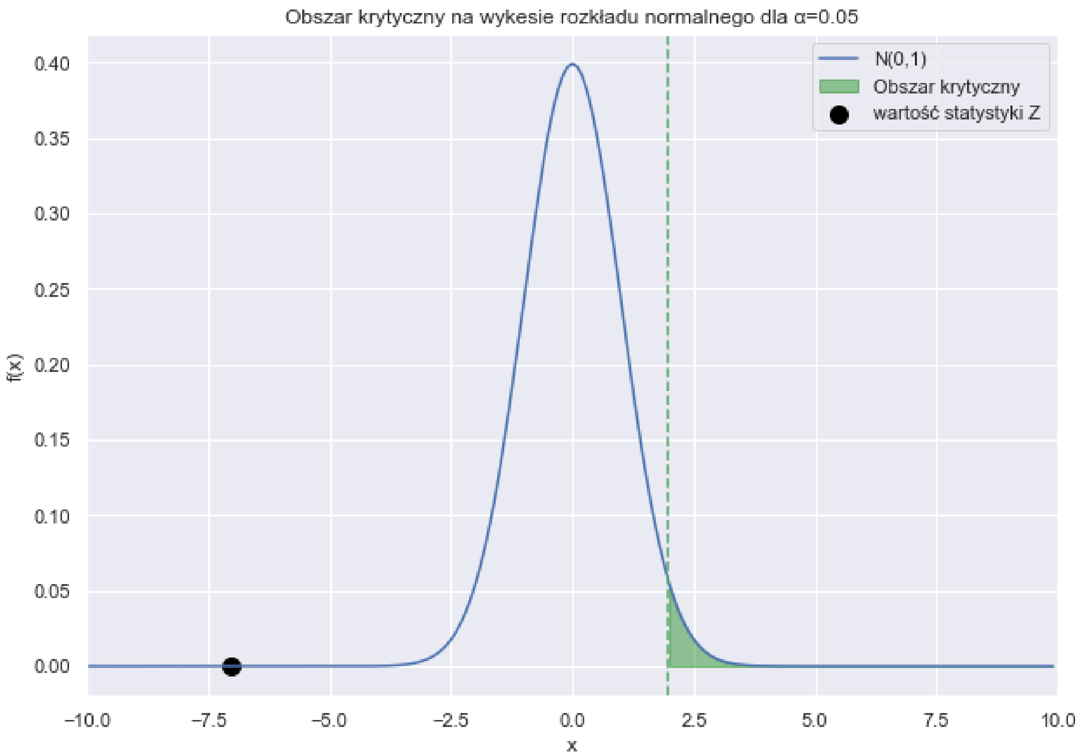
1. Dla $H_1 : \mu \neq 1.5$
$$\text{p-wartość} = 2P_{H_0}\left(Z > |z|\right) = 2\left(1 - P_{H_0}(Z \leqslant |z|)\right) = 2 - 2F_Z\left(|z|\right),$$
gdzie $F_Z(|z|)$, to dystrybuanta rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$ w punkcie $|z|$.
Uzyskaliśmy następującą p-wartość dla tego przypadku:
$$\text{p-wartość} \approx 1.9 \cdot 10^{-12}.$$
2. Dla $H_1 : \mu > 1.5$
$$\text{p-wartość} = P_{H_0}\left(Z > z\right) = 1 - P_{H_0}\left(Z \leqslant z\right) = 1 - F_Z\left(z\right).$$
Uzyskaliśmy następującą p-wartość dla tego przypadku:
$$\text{p-wartość} \approx 1.$$
3. Dla $H_1 : \mu < 1.5$
$$\text{p-wartość} = P_{H_0}\left(Z \leqslant z\right) = F_Z\left(z\right).$$
Dla badanych danych wartość ta wynosi w tym przypadku
$$\text{p-wartość} \approx 9.51 \cdot 10^{-13}.$$

1.3. Wizualizacja

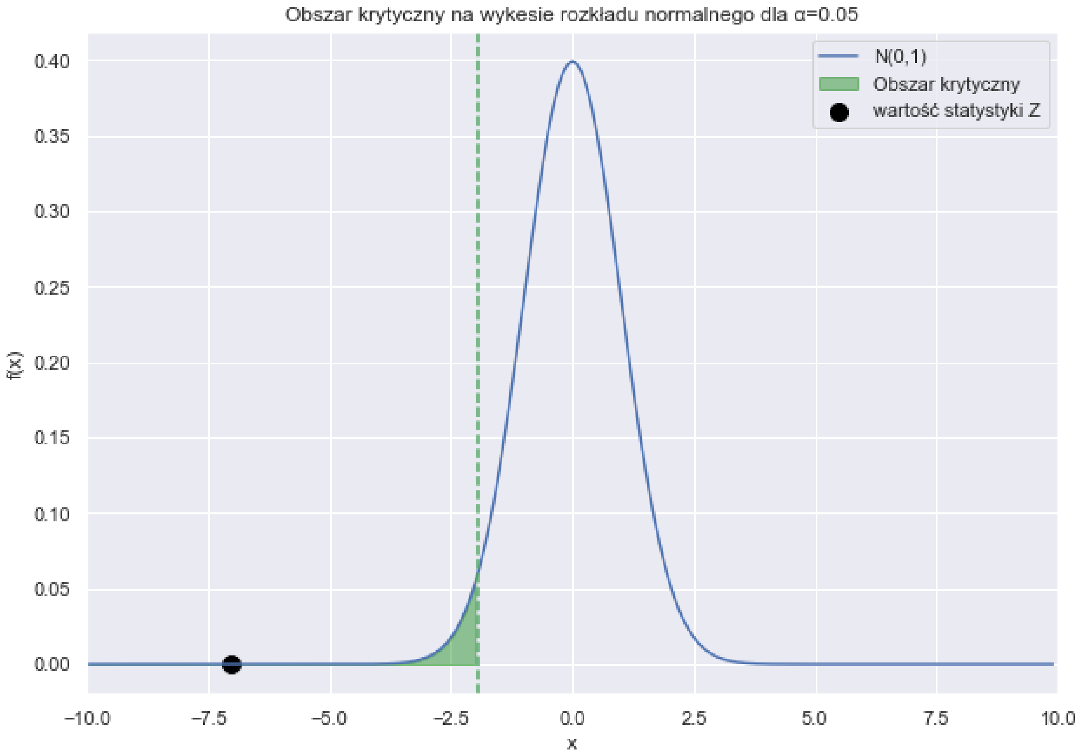
Po powyższych obliczeniach, mogliśmy przejść do wizualizacji, prezentacji oraz sprawdzenia otrzymanych wyników. Wykonanaliśmy wykresy gęstości standardowego rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0, 1)$, zaznaczyliśmy obszary krytyczne oraz wartości statystyki testowej Z dla każdej z trzech hipotez alternatywnych. Poniżej zaprezentujemy otrzymane wykresy.



Rysunek 1: Wykres dla $H_1 : \mu \neq 1.5$

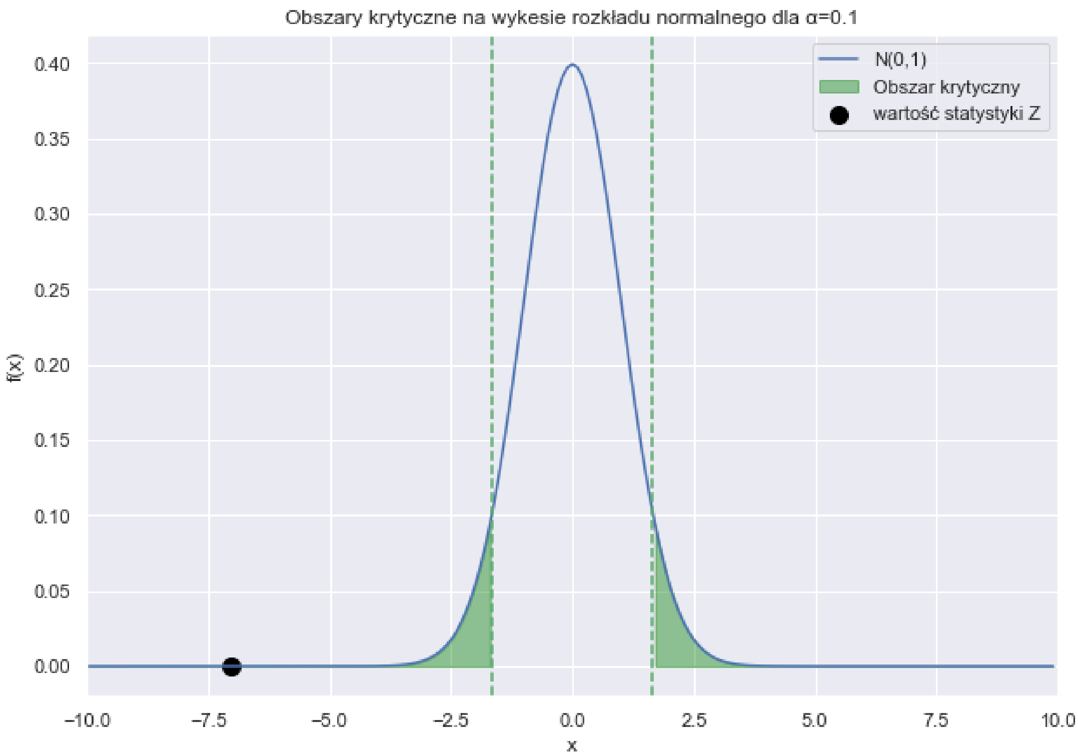


Rysunek 2: Wykres dla $H_1 : \mu > 1.5$

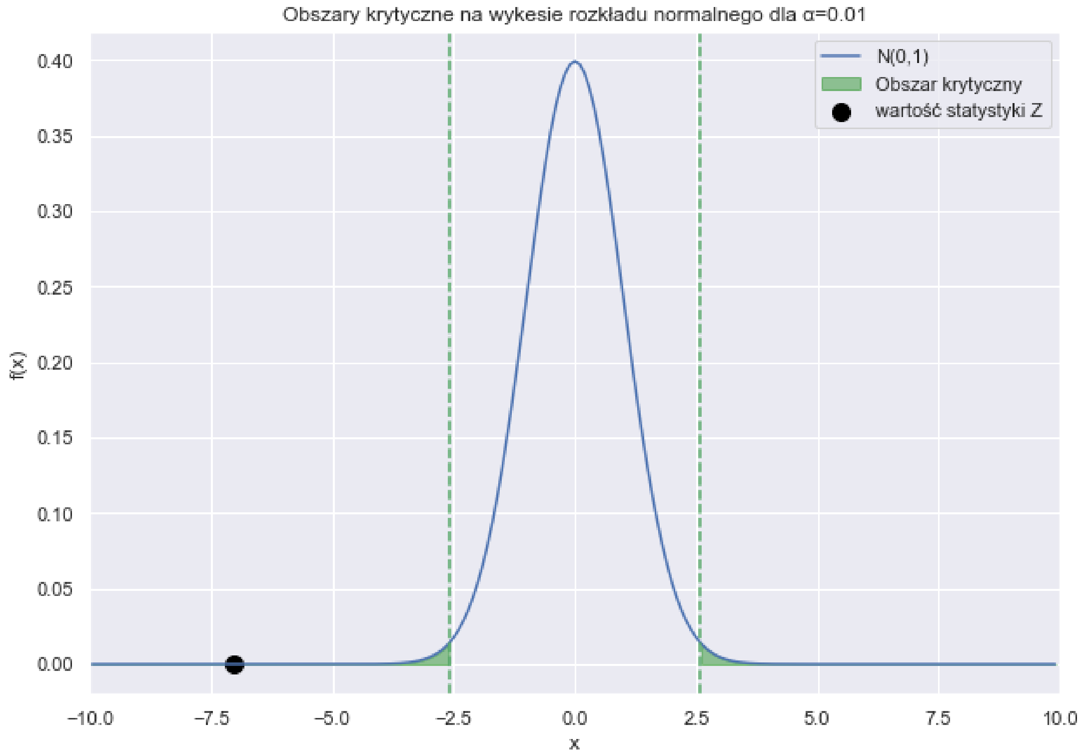


Rysunek 3: Wykres dla $H_1 : \mu < 1.5$

Zauważamy, że na powyższych wykresach, na rysunkach 1 i 3 wartość statystyki zawiera się w obszarze krytycznym, w przeciwieństwie do rysunku 2. Następnie sprawdziliśmy co się zmieni dla innych przedziałów ufności.



Rysunek 4: Wykres dla $H_1 : \mu \neq 1.5$



Rysunek 5: Wykres dla $H_1 : \mu \neq 1.5$

1.4. Wnioski

Na podstawie otrzymanych wyników, stwierdzamy, że hipotezę zerową $H_0 : \mu = 1.5$ można odrzucić na korzyść hipotez alternatywnych $H_1 : \mu \neq 1.5$ oraz $H_1 : \mu < 1.5$, dla których to statystyka testowa Z znajdowała się w obszarach krytycznych. W przypadku drugiej hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu > 1.5$, statystyka testowa jest poza obszarem krytycznym, co oznacza, że nie ma podstawy, aby odrzucić hipotezę zerową H_0. Przyjmujemy więc, że badana próba pochodzi z rozkładu normalnego ze średnią mniejszą od 1.5.

Możemy zaobserwować, że im mniejszy poziom istotności alfa, tym mniejsze pole zajmują obszary krytyczne - jest to zgodne z naszymi oczekiwaniami, gdyż poziom istotności informuje nas o tym, jaką część całego pola pod wykresem stanowi obszar krytyczny. Oznacza to, że jesteśmy bardziej restrykcyjni w odrzucaniu hipotezy zerowej, gdyż wymagamy bardziej ekstremalnych wartości, aby uznać je za statystycznie istotne. Analogicznie, przy zwiększeniu poziomu istotności alfa otrzymujemy większe obszary krytyczne, co z kolei zwiększa prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, ale jednocześnie zwiększa ryzyko popełnienia błędu typu I. Powyższa analiza została przedstawiona na Rysunku 4 i Rysunku 5.

2. Zadanie 2

2.1. Wstęp

W kolejnym zadaniu przetestujemy hipotezę zerową $N(0.2, \sigma^2)$. na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ przeciwko trzem hipotezom alternatywnym:

1. $\sigma^2 \neq 1.5$,
2. $\sigma^2 > 1.5$,
3. $\sigma^2 < 1.5$.

Dane mają rozkład χ^2 z $n-1$ stopniami swobody. Wyznaczymy wartość statystyki testowejχ, określimy i narysujemy obszary krytyczne oraz wyznaczymy p-wartość.

2.2. Teoria i wyniki

Na początku wyznaczymy wartość **statystyki testowej** χ. Jest to zmienna losowa, której rozkład pod warunkiem zachodzenia hipotezy zerowej to rozkład χ^2 z $n-1$ stopniami swobody.

$$\chi = \frac{(n-1)\cdot \mathrm{Var(X)}}{\sigma^2}, \text{ gdzie} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \bar{X} &\text{ - średnia z próby} \\ Var(X) &\text{ - wariancja z próby} \\ \sigma &\text{ - wartość odchylenia standardowego z hipotezy zerowej} \\ n &\text{ - liczba obserwacji} \end{aligned}$$

Poprzez symulacje przeprowadzone w języku Python otrzymaliśmy, że wartość statystykiχ wynosi $\chi \approx 1110.97$.

Kolejnym krokiem było wyznaczenie **obszarów krytycznych** C dla trzech hipotez alternatywnych. Do wyliczenia tych obszarów, skorzystamy z odpowiednich wzorów w zależności od hipotezy alternatywnej.

1. Dla $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$

   $$C = \left(-\infty, \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right), \tag{6}$$

   gdzie $\chi^2_{\alpha/2}$ to kwantyl na poziomie istotności $\frac{\alpha}{2}$ rozkładu χ^2 z $n-1$ stopniami swobody. Uzyskaliśmy następujący obszar krytyczny dla tego przypadku:

   $$C = (-\infty, 913.3) \cup (1088.5, \infty).$$

2. Dla $H_1 : \sigma^2 > 1.5$

   $$C = \left(\chi^2_{1-\alpha}, \infty\right), \tag{7}$$

   gdzie $\chi^2_{1-\alpha}$ to kwantyl na poziomie istotności $1-\alpha$ rozkładu χ^2 z $n-1$ stopniami swobody. Uzyskaliśmy następujący obszar krytyczny dla tego przypadku:

   $$C = (1073.6, \infty).$$

3. Dla $H_1 : \sigma^2 < 1.5$

$$C = \left(-\infty, \chi^2_\alpha\right), \tag{8}$$

gdzie χ^2_α to kwantyl na poziomie istotności α rozkładu χ^2 z $n-1$ stopniami swobody. Uzyskaliśmy następujący obszar krytyczny dla tego przypadku:

$$C = (-\infty, 926.6).$$

Następnie wyznaczyliśmy **p-wartości** testu dla każdej z trzech hipotez alternatywnych.

1. Dla $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$

$$\text{p-wartość} = 2P_{H_0}\left(\chi^2 > |\chi|\right) = 2\left(1 - P_{H_0}\left(\chi^2 \leqslant |\chi|\right)\right) = 2 - 2F_{\chi^2}(|\chi|),$$

gdzie $F_{\chi^2}(|\chi|)$ to dystrybuanta rozkładu χ^2 z $n-1$ stopniami swobody w punkcie $|\chi|$. Dla badanych danych wartość ta wynosi w tym przypadku

$$\text{p-wartość} \approx 0.015.$$

2. Dla $H_1 : \sigma^2 > 1.5$

$$\text{p-wartość} = P_{H_0}\left(\chi^2 > \chi\right) = 1 - P_{H_0}\left(\chi^2 \leqslant \chi\right) = 1 - F_{\chi^2}(\chi).$$

Uzyskaliśmy następującą p-wartość dla tego przypadku:

$$\text{p-wartość} \approx 0.008.$$

3. Dla $H_1 : \sigma^2 < 1.5$

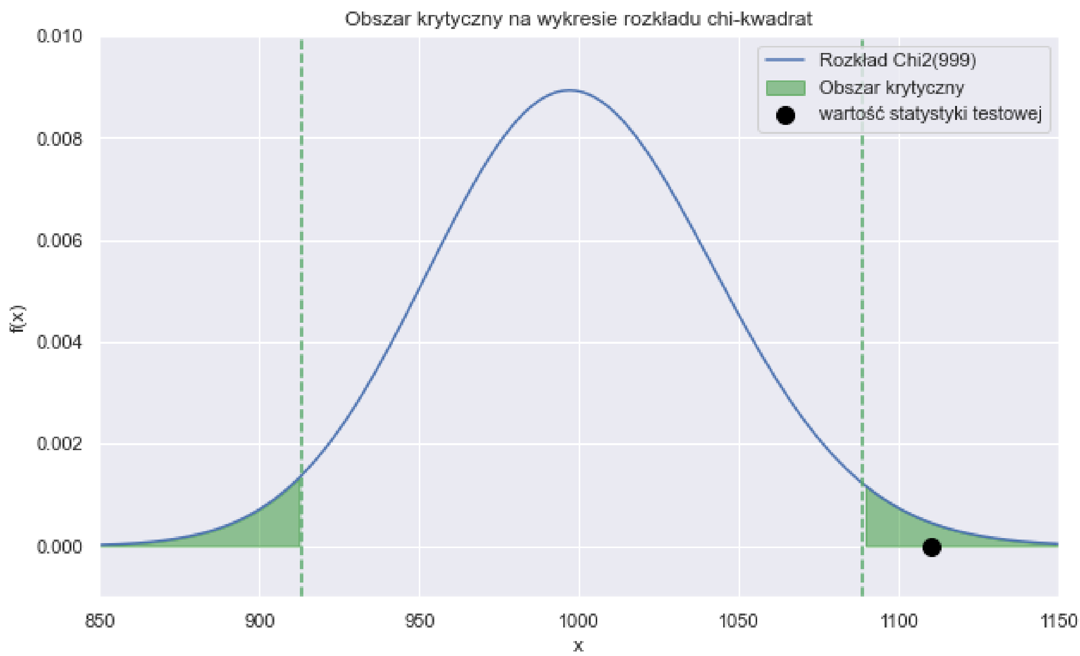
$$\text{p-wartość} = P_{H_0}\left(\chi^2 \leqslant \chi\right) = F_{\chi^2}(\chi).$$

Uzyskaliśmy następującą p-wartość dla tego przypadku:

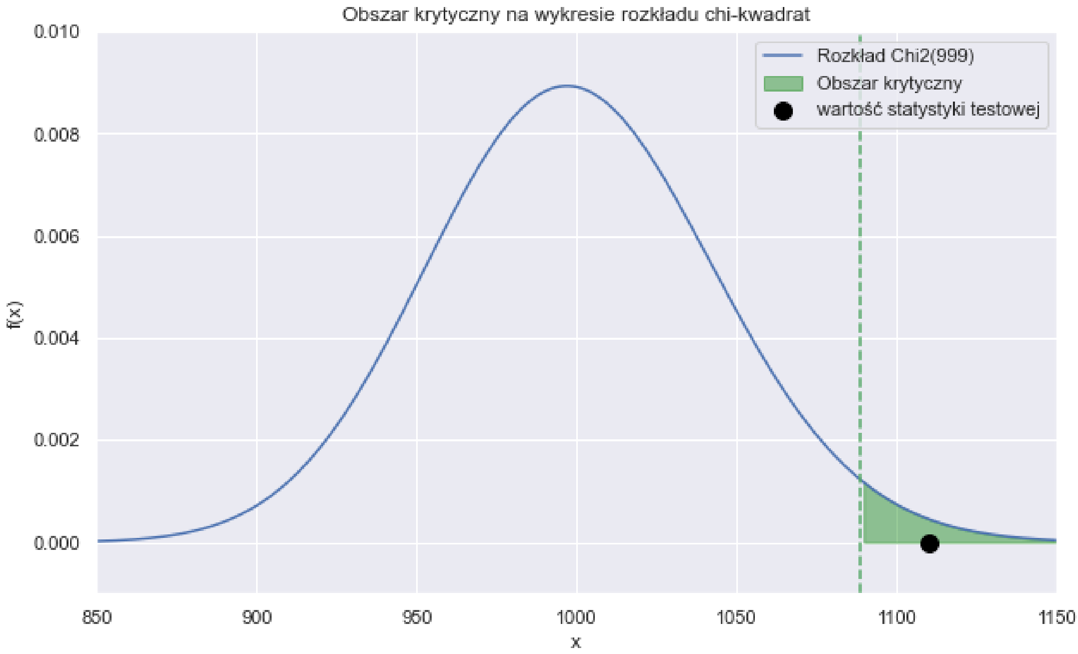
$$\text{p-wartość} \approx 0.992.$$

2.3. Wizualizacja

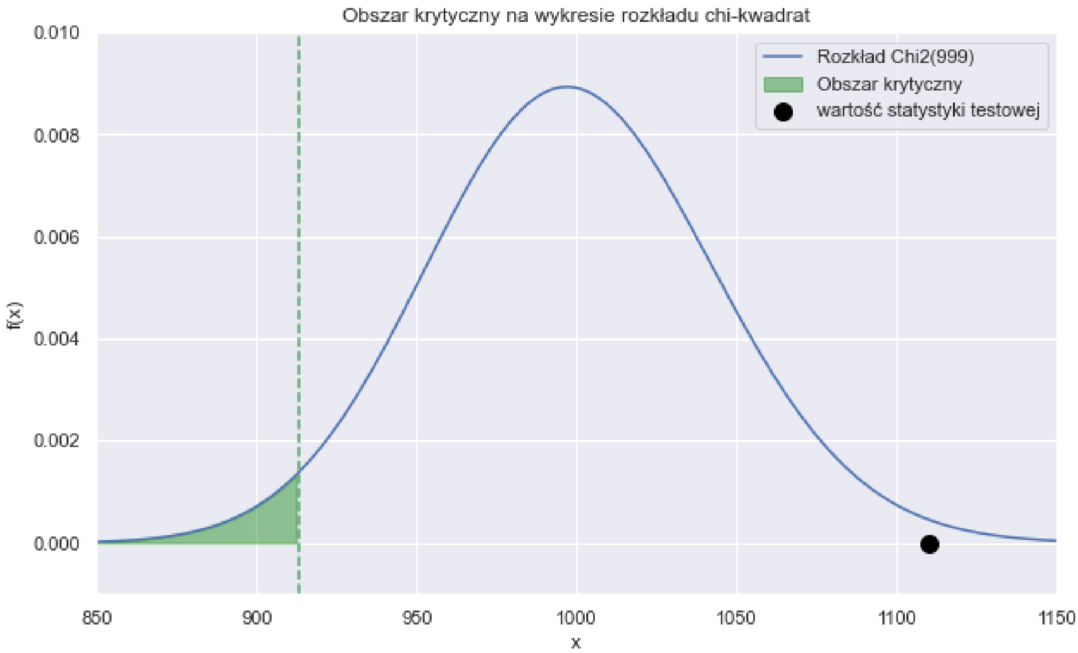
Ponownie dla każdej z trzech hipotez alternatywnych wykonaliśmy wykresy gęstości rozkładu χ^2 z $n-1$ stopniami swobody oraz zaznaczonyliśmy obszary krytycznye wraz z wartością statystyki testowej χ.



Rysunek 6: Wykres dla $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$

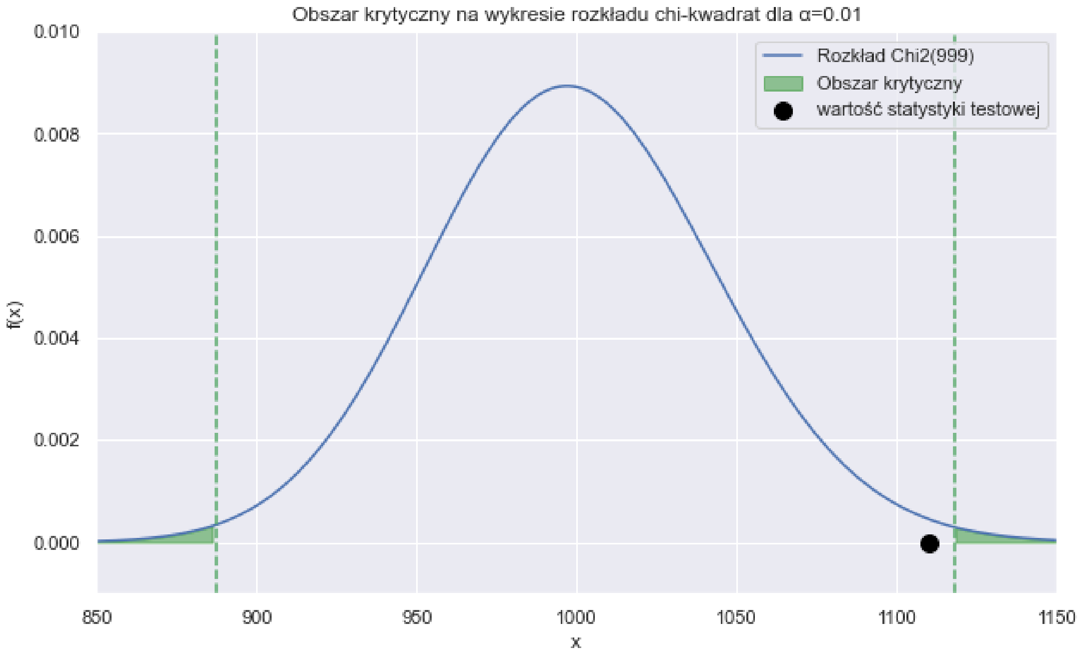


Rysunek 7: Wykres dla $H_1 : \sigma^2 > 1.5$

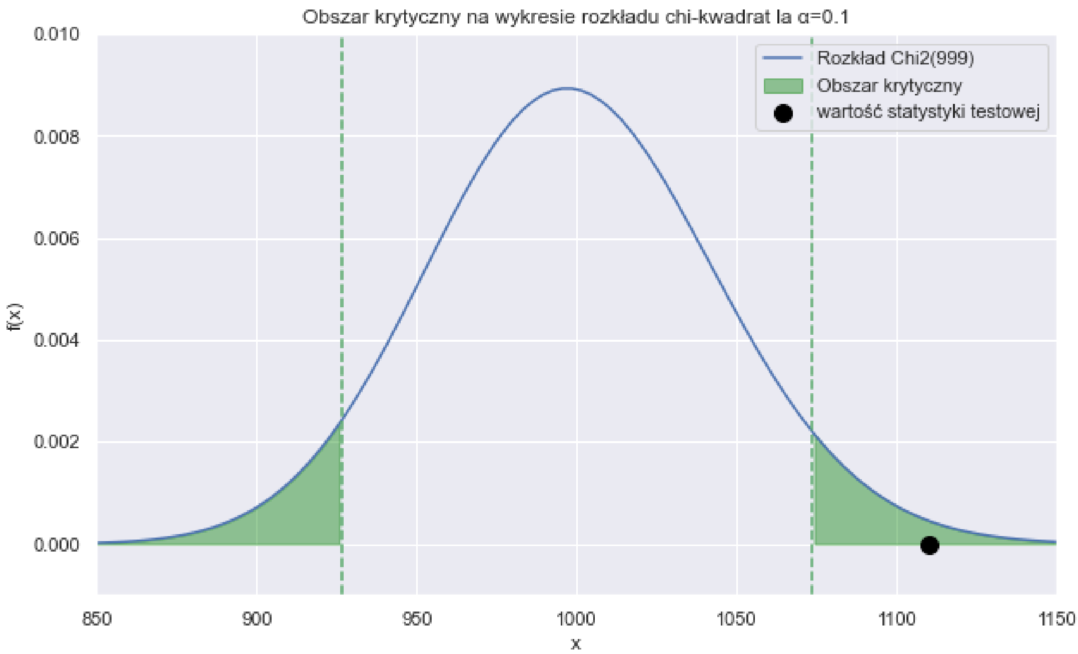


Rysunek 8: Wykres dla $H_1 : \sigma^2 < 1.5$

Zauważamy, że na powyższych wykresach, na rysunkach 6 i 7 wartość statystyki zawiera się w obszarze krytycznym, w przeciwieństwie do rysunku 8. Następnie sprawdziliśmy co się zmieni dla innych przedziałów ufności.



Rysunek 9: Wykres dla $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$



Rysunek 10: Wykres dla $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$

2.4. Wnioski

Na podstawie otrzymanych wyników, można stwierdzić, że hipotezę zerową $H_0 : \sigma^2 = 1.5$ odrzucamy na korzyść hipotez alternatywnych $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$ oraz $H_1 : \sigma^2 > 1.5$, dla których to statystyka testowa χ znajdowała się w obszarach krytycznych. W przypadku trzeciej hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma^2 < 1.5$, statystyka testowa jest poza tym obszarem, co oznacza, że nie ma podstawy, aby odrzucić hipotezę zerową H_0. Przyjmujemy więc, że badana próba pochodzi z rozkładu o parametrze wariancji większym od 1.5.

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, możemy zaobserwować, że im mniejszy poziom istotności alfa, tym mniejsze pole obszarów krytycznych. Oznacza to, że wymagane są bardziej ekstremalne wartości testowej statystyki chi-kwadrat, aby odrzucić hipotezę zerową na danym poziomie istotności. Z kolei, przy zwiększeniu poziomu istotności alfa, obszary krytyczne na wykresie rozkładu chi-kwadrat stają się większe. To zwiększa prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, ponieważ wymagane są mniej ekstremalne wartości testowej statystyki chi-kwadrat do odrzucenia hipotezy zerowej. Powyższa analiza została przedstawiona na Rysunku 9 i Rysunku 10.

3. Zadanie 3

3.1. Wstęp

Celem zadania jest wyznaczenie symulacyjnie prawdopodobieństwa popełnienia błędów I i II rodzaju oraz sprawdzenie mocy testów.

Błąd I rodzaju to odrzucenie hipotezy zerowej, gdy ta jest prawdziwa. Prawdopodobieństwo jego popełnienia jest równe poziomowi istotności testu α.

Błąd II rodzaju to nieodrzucenie fałszywej hipotezy zerowej na rzecz prawdziwej hipotezy alternatywnej. Jego wartość zależy m.in. od tego jak daleko jesteśmy od hipotezy zerowej.

Moc testu to odrzucenie fałszywej hipotezy zerowej i przyjęcie prawdziwej hipotezy alternatywnej.

3.2. Błąd I rodzaju dla zadania 1

W celu wyznaczenia symulacyjnie błędu I rodzaju, wygenerujemy prostą próbę losową z rozkładu normalnego o parametrach zgodnych z H_0 i sprawdzimy ile razy odrzucimy hipotezę zerową. Skorzystajmy z poniższego algorytmu:

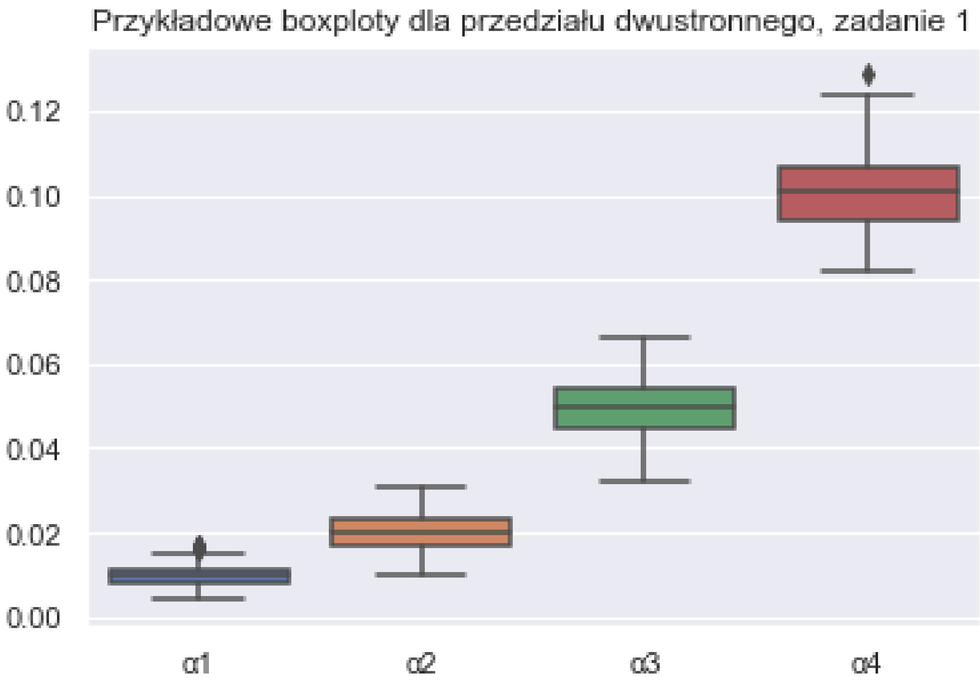
1. Ustal poziom istotności α oraz $n = 1000$
2. Wygeneruj prostą próbę losową $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu = 1.5, \sigma = 0.2)$
3. Wyznacz wartość statystyki testowej Z korzystając ze wzoru (1)
4. Wyznacz obszar krytyczny dla każdej hipotezy ((2),(3),(4))
5. Sprawdź czy statystyka Z znajduje się w obszarze krytycznym
6. Powtórz 2. - 5. $N = 1000$ razy i zlicz ile razy statystyka testowa jest w obszarze krytycznym. Wynik oznaczmy jako δ
7. Błąd I rodzaju wyznaczony symulacyjnie to $\frac{\delta}{N}$

Symulacje przeprowadziliśmy dla kilku poziomów istotności: $\alpha_1 = 0.01$, $\alpha_2 = 0.02$, $\alpha_3 = 0.05$, $\alpha_4 = 0.1$. Przedstawmy wyniki w tabeli:

Przeprowadziliśmy również symulacje 100 razy dla przedziału dwustronnego i wyniki przedstawiliśmy na wykresie pudełkowym, rysunek nr 11.

Tabela 1: Wartości błędu I rodzaju dla zadania 1 dla różnych poziomów istotności

	$H_1 : \mu \neq 1.5$:	$H_1 : \mu > 1.5$	$H_1 : \mu < 1.5$
$\alpha_1 = 0.01$	0.009	0.009	0.01
$\alpha_2 = 0.02$	0.021	0.02	0.02
$\alpha_3 = 0.05$	0.047	0.051	0.049
$\alpha_4 = 0.1$	0.099	0.1	0.098



Rysunek 11: Wykres pudełkowy dla przedziału dwustronnego, zadanie 1.

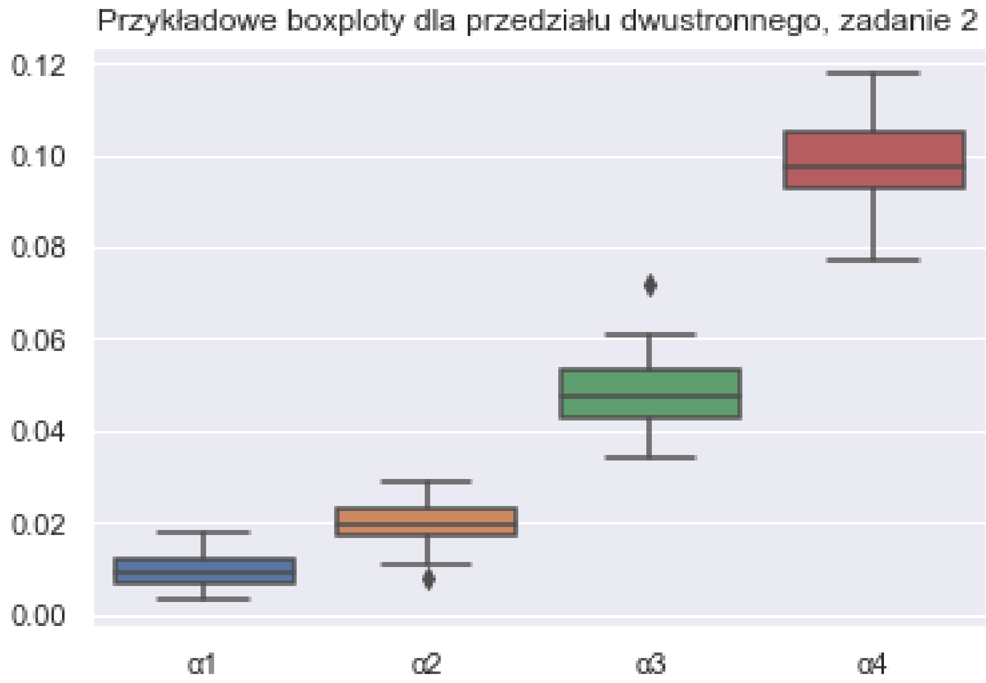
3.3. Błąd I rodzaju dla zadania 2

Dla zadania drugiego algorytm jest analogiczny, różnica to policzenie wartości statystyki χ korzystając ze wzoru (5) oraz obliczenie obszarów krytycznych (wzory: (6),(7),(8)). Symulacje dla tego zadania, również przeprowadziliśmy dla różnych poziomów istotności. Przedstawmy wyniki w tabeli:

Tabela 2: Wartości błędu I rodzaju dla zadania 2 dla różnych poziomów istotności

	$H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$:	$H_1 : \sigma^2 > 1.5$	$H_1 : \sigma^2 < 1.5$
$\alpha_1 = 0.01$	0.017	0.012	0.013
$\alpha_2 = 0.02$	0.022	0.018	0.022
$\alpha_3 = 0.05$	0.045	0.048	0.045
$\alpha_4 = 0.1$	0.114	0.098	0.092

Tutaj również przeprowadziliśmy symulacje 100 razy dla przedziału dwustronnego i wyniki przedstawiliśmy na wykresie pudełkowym, rysunek nr 12.



Rysunek 12: Wykres pudełkowy dla przedziału dwustronnego, zadanie 2.

3.4. Błąd II rodzaju dla zadania 1

W celu wyznaczenia symulacyjnie błędu II rodzaju należy wygenerować prostą próbę losową z rozkładu normalnego o parametrach zgodnych z hipotezą alternatywną i sprawdzić ile razy przyjmujemy hipotezę zerową. Skorzystajmy z poniższego algorytmu:

1. Ustal poziom istotności α, $n = 1000$ oraz μ zgodne z rozważaną hipotezą alternatywną, ale bliskie hipotezie zerowej.
2. Wygeneruj prostą próbę losową $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma = 0.2)$
3. Wyznacz wartość statystyki testowej Z korzystając ze wzoru (1)
4. Wyznacz obszar krytyczny dla każdej hipotezy ((2),(3),(4))
5. Sprawdź czy statystyka Z znajduje się poza obszarem krytycznym
6. Powtórz 2. - 5. $N = 1000$ razy i zlicz ile razy statystyka testowa jest w obszarze krytycznym. Wynik oznaczmy jako Δ
7. Błąd II rodzaju wyznaczony symulacyjnie to $\frac{\Delta}{N}$

Wyniki symulacji przedstawmy w tabeli:

Tabela 3: Wartości błędu II rodzaju dla zadania 1 dla różnych μ, $\alpha = 0.05$, $\sigma = 0.2$.

	$\mu = 1.45$	$\mu = 1.47$	$\mu = 1.49$	$\mu = 1.51$	$\mu = 1.53$	$\mu = 1.55$
$H_1 : \mu \neq 1.5$	0	0.003	0.655	0.653	0.002	0
$H_1 : \mu > 1.5$	–	–	–	0.636	0.002	0
$H_1 : \mu < 1.5$	0	0.002	0.651	–	–	–

3.5. Błąd II rodzaju dla zadania 2

Dla zadania drugiego algorytm również jest analogiczny. Wystarczy dobrać odpowiednie parametry rozkładu, wygenerować statystykę χ (wzór: (5)) oraz odpowiednie obszary krytyczne ((6,(7),(8)). Symulacje przeprowadziliśmy dla różnych parametrów σ^2. Wyniki przedstawiamy poniżej w tabeli.

Tabela 4: Wartości błędu II rodzaju dla zadania 2, dla $\alpha = 0.05$, $\mu = 0.2$ i różnych wartości σ^2

	$\sigma^2 = 1.45$	$\sigma^2 = 1.47$	$\sigma^2 = 1.49$	$\sigma^2 = 1.51$	$\sigma^2 = 1.53$	$\sigma^2 = 1.55$
$H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$	0.873	0.924	0.954	0.946	0.899	0.886
$H_1 : \sigma^2 > 1.5$	-	-	-	0.969	0.932	0.883
$H_1 : \sigma^2 < 1.5$	0.876	0.948	0.979	-	-	-

3.6. Moc testu

Moc testu wyznaczamy na podstawie wzoru: moc testu $= 1-$ błąd II rodzaju. Przedstawmy wyniki dla zadania pierwszego:

Tabela 5: Moc testu dla zadania 1

	$\mu = 1.45$	$\mu = 1.47$	$\mu = 1.49$	$\mu = 1.51$	$\mu = 1.53$	$\mu = 1.55$
$H_1 : \mu \neq 1.5$	1	0.997	0.345	0.347	0.998	1
$H_1 : \mu > 1.5$	–	–	–	0.364	0.998	1
$H_1 : \mu < 1.5$	1	0.998	0.349	–	–	–

Wyniki dla drugiego zadania prezentują się następująco:

Tabela 6: Moc testu dla zadania 2

	$\sigma^2 = 1.45$	$\sigma^2 = 1.47$	$\sigma^2 = 1.49$	$\sigma^2 = 1.51$	$\sigma^2 = 1.53$	$\sigma^2 = 1.55$
$H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$	0.127	0.076	0.046	0.054	0.101	0.114
$H_1 : \sigma^2 > 1.5$	-	-	-	0.031	0.068	0.117
$H_1 : \sigma^2 < 1.5$	0.124	0.052	0.021	-	-	-

3.7. Wnioski

Po przeanalizowaniu wyników z tabeli 1. oraz tabeli 2. można stwierdzić, że błąd I rodzaju, został symulacyjnie wyznaczony poprawnie. Wartości w tabelach są bardzo zbliżone do rozważanej wartości poziomu istotności α.

W symulacyjnej estymacji błędu II rodzaju, parametry μ i σ^2 zostały dobrane tak, aby różnia między błędem II rodzaju, a mocą testu była dobrze widoczna. Dzięki wynikom w tabelach 3. i 4., można zauważyć, że im dalej jesteśmy od hipotezy zerowej, tym mniejszy jest błąd II rodzaju. Oznacza to, że prawdopodobieństwo przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej i odrzucenie prawdziwej hipotezey alternatywnej jest mniejsze im dalej jesteśmy od hipotezy zerowej.