ФИЗТЕХ.ГДЗ
Электричество и магнетизм

Тюрников Алексей, Б02-114
Маргарита Соколова, Б02-101

1. Электростатическое поле в вакууме. Поле диполя. Теорема Гаусса

1.1. Закон Кулона

Экспериментально получен *закон Кулона* для силы взаимодействия двух неподвижных точечных тел с зарядами q_1 и q_2 в зависимости от расстояния между ними r:

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \tag{1.1}$$

где $\vec{F}$ - сила, действующая на тело с зарядом q_2 со стороны q_1,
$\vec{r}$ - расстояние от q_1 до q_2.

Заряженное тело меняет свойства окружающего его пространства - создает электрическое поле. Для неподвижного точечного тела с зарядом q_1 получаем:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} = k\frac{q_1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{1.2}$$

Именно такая по величине сила будет действовать на точечное тело с единичным зарядом, называемое пробным заряженным телом.

1.2. Различные системы измерения

	СИ	СГС	Перевод величин:
Длина:	метр(м)	сантиметр(см)	1м = 100см
Масса:	килограмм(кг)	грамм(г)	1кг = 1000г
Время:	секунда(с)	секунда(с)	1с = 1с
Сила:	Ньютон(Н)	дина	1Н = 10^5дин
Энергия:	Джоуль(Дж)	эрг	1Дж = 10^7эрг
Сила тока:	Ампер(А)	ед.силы тока СГС	1А = $3{\cdot}10^9$ ед.СГС

Также заметим, что в системе СГС $k = 1$, а в системе СИ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{Кл}\cdot\text{с}^2}$. Из-за этого систему СГС предпочитают для теоретических выкладок.

1.3. Диполь

Определение: Элементарный диполь - это система, состоящая из двух точечных зарядов, одинаковых по величине и противоположных по знаку.
Определение: Дипольный момент - это вектор $\vec{p} = q\vec{l}$, где l - это ориентированное плечо диполя, направленное от "минуса"к "плюсу". Аналогичным определением можно назвать $\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i r_i$. Дипольный момент не зависит от начала отсчета в электронейтральной системе (суммарный заряд равен 0).

Поле от точечного диполя в произвольной точке пространства:

$$E = \frac{3(\vec{p},\vec{r})}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}. \tag{1.3}$$

Сила, действующая на диполь:

$$\vec{F} = \vec{p}\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}. \tag{1.4}$$

1.4. Теорема Гаусса

Теорема Гаусса в интегральной форме: Поток напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен суммарному заряду, находящемуся внутри поверхности:

$$\Phi = 4\pi q, \quad \text{или} \quad \oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = 4\pi q, \tag{1.5}$$

где q - это полный заряд, находящийся в объеме V, ограниченном поверхностью S.

Теорема Гаусса в дифференциальной форме: Дивергенция поля E в данной точке зависит только от плотности электрического заряда в той же точке и ни от чего больше:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho. \tag{1.6}$$

Задача 1.1°

Вычислить отношение сил электростатического отталкивания и гравитационного притяжения двух протонов.

Дано:	**Решение:**
$e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг	$\begin{cases} F_{эл} = k\frac{e^2}{r^2} \\ F_{гр} = G\frac{m_p^2}{r^2} \end{cases} \Longrightarrow \frac{F_{эл}}{F_{гр}} = \frac{k}{G}\frac{e^2}{m_p^2} = \frac{9 \cdot 10^9}{6.67 \cdot 10^{-11}}\left(\frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{1.67 \cdot 10^{-27}}\right)^2 \approx 1.2 \cdot 10^{36}$ **Ответ:** $\frac{F_{эл}}{F_{гр}} = 1.2 \cdot 10^{36}$.
$\frac{F_{эл}}{F_{гр}} =?$	

Задача 1.2°

Оцените среднюю концентрацию электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поля на поверхности Земли равна $E_0 = 100\ \frac{В}{м}$, а на высоте $h = 1.5$ км она падает до $E_h = 25\ \frac{В}{м}$. Вектор $\vec{E}$ направлен к центру Земли. Ответ выразить в элементарных зарядах на см^3.

Дано:

$E_0 = 100\frac{\text{В}}{\text{м}}$

$h = 1.5$км

$E_h = 25\frac{\text{В}}{\text{м}}$

$\frac{\rho}{e} =?$

Решение:

Вспомним про теорему Гаусса в дифференциальной форме (1.6). Так как вектор $\vec{E}$ меняется только в одном направлении, то можно записать:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi\rho \Longrightarrow \frac{\Delta E}{h} \approx 4\pi\rho \Longrightarrow \rho = \frac{E_h - E_0}{4\pi h} = \frac{100-25}{4 \cdot 3.14 \cdot 1500} = 4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{В}}{\text{м}^2} \approx 10^{-9} \text{ СГСЭ}.$$

Теперь вспомним, что элементарный заряд электрона в СГСЭ равен $e \approx 5 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ. Тогда

$$\frac{\rho}{e} = \frac{10^{-9}}{5 \cdot 10^{-10}} = 2.$$

Ответ: $\frac{\rho}{e} = 2$.

Задача 1.3°

Используя формулу для напряженности поля точечного диполя с дипольным моментом $\vec{p}$, найдите напряженность поля на оси диполя ($\alpha = 0$) и в перпендикулярном направлении ($\alpha = \frac{\pi}{2}$).

Дано:

$\alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

$E_0 =?, \quad E_{\frac{\pi}{2}} =?$

Решение:

Вспомним формулу о которой говорится в условии задачи (1.3):

$$E = \frac{3pr\cos\alpha}{r^4} - \frac{p}{r^3}.$$

$$E_0: \quad \alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1 \Longrightarrow E = \frac{3p}{r^3} - \frac{p}{r^3} = \frac{2p}{r^3}$$

$$E_{\frac{\pi}{2}}: \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Longrightarrow E = -\frac{p}{r^3}$$

$$E_0 = \frac{2p}{r^3}, \quad E_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{p}{r^3}.$$

Задача 1.7

Найти силу взаимодействия F между точечным зарядом q и точечным диполем, если расстояние между зарядом и диполем равно d, а дипольный момент p направлен вдоль соединяющей их прямой.

Дано:

q
d
p

Ответ: $F = ?$

Решение:

Для нахождения силы взаимодействия $F = qE$ нам необходимо найти поле, которое создает диполь. Для этого воспользуемся формулой (1.3). Будем считать, что заряд расположен на оси диполя и тогда примем $\alpha = 0$. Получим:

$$E = E = \frac{3pd\cos\alpha}{d^4} - \frac{p}{d^3} = \frac{2p}{d^3} \Longrightarrow F = qE = \frac{2pq}{d^3}.$$

Ответ: $F = \frac{2pq}{d^3}$.

Задача 1.14

Два длинных провода, расположенных параллельно на расстоянии d друг от друга, равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $+\varkappa$ и $-\varkappa$. Определить напряженность поля E на расстоянии h от плоскости, в которой лежат провода, в точке, лежащей, в плоскости симметрии.

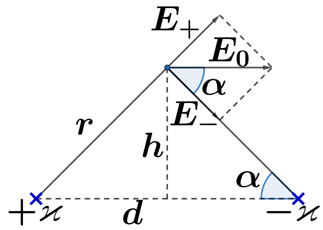
Дано:

d
$\varkappa$
h

$E_0 = ?$

Решение:

Решение задачи разобьем на 2 шага: Во-первых найдем по теореме Гаусса напряженность поля, создаваемое каждым из проводов отдельно, а потом воспользуемся принципом суперпозиции.
По теореме Гаусса (1.5):



$$E(x)2\pi xl = 4\pi\int_0^l \varkappa\, dl \implies E(x) = \frac{2\varkappa}{x}.$$

Теперь воспользуемся принципом суперпозиции:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_- + \vec{E}_+.$$

Из геометрии следует, что $\cos\alpha = \frac{d/2}{r} = \frac{d}{\sqrt{4h^2+d^2}}$, а косинус угла между векторами $\vec{E}_-$ и $\vec{E}_+$ равен $\cos\beta = \cos(180 - 2\alpha) = -\cos\alpha$. Воспользуемся теоремой косинусов и условием $E_- = E_+ = E$:

$$E_0^2 = E^2 + E^2 - 2E^2\cos\beta = 2E^2(1+\cos(2\alpha)) = 2E^2 2\cos^2\alpha \implies$$
$$\implies E_0 = 2E\cos\alpha = 2\frac{2\varkappa}{r}\frac{d}{\sqrt{4h^2+d^2}} = \frac{8\varkappa d}{4h^2+d^2}.$$

Ответ: $E_0 = \frac{8\varkappa d}{4h^2+d^2}$

Задача 1.19

Пользуясь теоремой Гаусса в дифференциальной форме, вычислить напряженность электрического поля равномерно заряженных 1) шара радиусом R и 2) бесконечной пластины толщиной $2h$. Обьемная плотность электричества в обоих случаях равна ρ.

Дано:

1) Шар радиусом R
2) Бесконечная пластина толщиной $2h$
Обьемная плотность электричества ρ

$E=?$

Решение:

Во-первых вычислим поле внутри шара. Из сферичекой симметрии получаем:

$$\vec{E} = E(r)\frac{\vec{r}}{r} \implies E_x = E(r)\frac{x}{r}, \quad E_y = E(r)\frac{y}{r}, \quad E_z = E(r)\frac{z}{r}.$$

Продифференцируем E_x и учтем, что $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{r}$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{dE}{dr}\frac{x^2}{r^2} - \frac{E}{r^3}x^2 + \frac{E}{r}.$$

Аналогичные выражения можно написать для $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial E_z}{\partial z}$. Сложив их получаем:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{dE}{dr} + \frac{2E}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2E)}{dr}.$$

При $r < R$ внутри шара:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2E)}{dr} = 4\pi\rho \implies \frac{4\pi}{3}\rho r + \frac{C}{r^2}.$$

Методом пристального взгляда понимаем, что $C = 0$ так как при $r = 0$ $E \to \infty$, что невозможно.
Полностью аналогично вычисляется поле внутри пластины.
Окончательно:

$$\text{Шар: } E = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\rho r & \text{внутри шара,} \\ \frac{4\pi}{3}\frac{R^3\rho}{r^2} & \text{вне шара.} \end{cases} \qquad \text{Пластина: } E = \begin{cases} 4\pi\rho x & \text{внутри пластины,} \\ 4\pi\rho h = 2\pi\sigma & \text{вне пластины.} \end{cases} \tag{1.7}$$

Задача 1.22

В шаре равномерно заряженном электричеством с объемной плотностью ρ, сделана сферическая полость, центр которой O' смещен относительно центра шара O на расстояние r. Определить электрическое поле внутри полости.

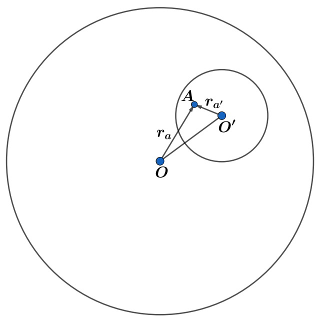
Дано:

ρ
r

$E=?$

Решение:

Заполним мысленно полость электричествами противоположных знаков с плотностями $+\rho$ и $-\rho$. Тогда поле в полости можно рассматривать как суперпозицию полей двух равномерно и противоположно заряженных шаров.
Выберем произвольную точку A внутри маленького шара. Пусть $O'A = r_{a'}$ и $OA = r_a$. Воспользуемся формулами для поля шара (1.7):



$$\vec{E} = \vec{E_{O'}} + \vec{E_O} = \frac{4\pi}{3}\left(\rho\vec{r_a} + (-\rho)\vec{r_{a'}}\right) = \frac{4\pi}{3}\rho(\vec{r_a} - \vec{r_{a'}}) = \frac{4\pi}{3}\vec{r}.$$

Ответ: $\vec{E} = \frac{4\pi\rho}{3}\vec{r}$

Задача 1.23

С какой поверхностной плотностью $\sigma(\theta)$ следует распределить заряд по поверхности сферы радиусом R, чтобы поле внутри нее было однородным и равным E_0? Каково при этом будет электрическое поле вне сферы?

Дано:

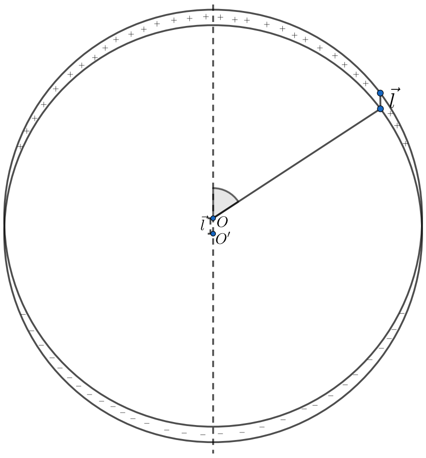
R

E_0

$\sigma(\theta) = ?, \quad E = ?$

Решение:

Сдвинем немного сферу вдоль вертикальной оси. Пусть $OO' = \vec{l}$. В области "наложения"сфер заряды компенсируются. Толщина "сдвинутого"слоя в зависимости от угла θ равна $l = l\cos\theta$. Тогда поверхностная плотность заряда равна $\sigma(\theta) = \rho l \cos\theta$.



Выразим из поля внутри шара (1.7) объемную плотность заряда и подставим ее в $\sigma(\theta)$:

$$E = \frac{4\pi}{3}\rho r \implies \rho = \frac{3E_0}{4\pi l}$$

$$\sigma(\theta) = \rho l \cos\theta = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta.$$

Для нахождения электрического поля вне сферы рассмотрим дипольный момент $\vec{p} = q\vec{l}$:

$$\vec{p} = q\vec{l} = \rho\frac{4\pi}{3}R^3\vec{l} = \frac{3\vec{E}_0}{4\pi}\frac{4\pi}{3}R^3 = R^3\vec{E}_0.$$

Тогда поле вне сферы - это будет поле диполя с дипольным моментом $\vec{p} = R^3\vec{E}_0$.

Ответ: $\sigma(\theta) = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta$, поле вне сферы - поле диполя с дипольным моментом $\vec{p} = R^3\vec{E}_0$.

Задача 1.10

Диск радиусом R заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ. Определить напряженность поля E в точке, находящейся на расстоянии d от диска, на перпендикуляре, проходящем через центр диска.

Дано:

R

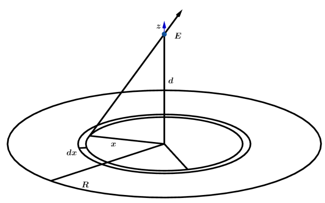
σ

d

$E = ?$

Решение:

Из физических соображений и симметрии задачи поймем, что $\vec{E}$ будет направлен вдоль оси Z. Тогда найдем вклад кольца толщиной dx в общую напряженность поля:



$$\begin{cases} dE = \frac{dq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \\ dq = \sigma dS = \sigma 2\pi x dx \\ \frac{\vec{r}}{r} = \frac{d\cdot\vec{e}_z}{\sqrt{d^2+x^2}} = \frac{d}{\sqrt{d^2+x^2}} \end{cases} \implies dE = \frac{\sigma 2\pi x dx}{d^2+x^2}\frac{d}{\sqrt{d^2+x^2}} =$$

$$= 2\pi\sigma d\frac{xdx}{(d^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \implies E = 2\pi\sigma d\int_0^R \frac{xdx}{(d^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right).$$

Ответ: $E = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right)$.

Задача 1.16

В безграничном плоском слое толщиной $2d$ объемная плотность заряда ρ изменяется по закону $\rho = \rho_0 \frac{x}{d}$, где x - ось, перпендикулярная плоскости слоя. В слое имеется тонкий канал вдоль оси x, в котором помещен точечный диполь с массой m и дипольным моментом $\vec{p}$. Вычислить период малых продольных колебаний диполя.

Дано:

d

$\rho = \frac{x}{d}$

m

$\vec{p}$

$T = ?$

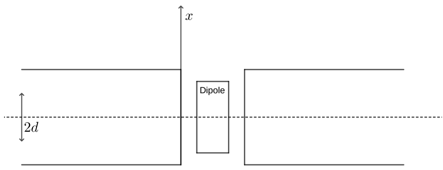
Решение:

Во-первых, вычислим напряженность внутри слоя с помощью теоремы Гаусса (1.6):

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho = 4\pi\rho_o \frac{x}{d} \implies \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi\rho_0 \frac{x}{d} \implies E(x) = \int 4\pi\rho_0 \frac{x}{d} dx = 2\pi\rho_0 \frac{x^2}{d} + C$$

Учтем тот факт, что $E(0) = 0 \implies C = -2\pi\rho_0 \frac{d^2}{d}$.

$$E = 2\pi\rho_0 \frac{x^2 - d^2}{d}.$$



Во-вторых, при смещении диполя вдоль канала на x на него действует возвращающая сила. Пусть дипольный момент $\vec{p} = ql$, где l - длина диполя. Тогда

$$F = qE = q2\pi \frac{\rho_0}{d} \left[\left(\left(\frac{l}{2} - x \right)^2 - d^2 \right) - \left(\left(\frac{l}{2} + x \right)^2 - d^2 \right) \right] = -4\pi q \frac{\rho_0}{d} lx = -4\pi \frac{\rho_0}{d} px.$$

Запишем второй закон Ньютона и приведем его к виду уравнения колебаний:

$$m\ddot{x} = F \implies m\ddot{x} + 4\pi \frac{\rho_0}{d} px \implies \ddot{x} + \frac{4\pi\rho_0 p}{md} x = 0.$$

Отсюда получаем финальное выражение:

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi \frac{\sqrt{md}}{\sqrt{\pi\rho_0 p}} = \sqrt{\frac{\pi md}{p\rho_0}}.$$

Ответ: $T = \sqrt{\frac{\pi md}{p\rho_0}}$

Задача 1.17

В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд e распределен внутри шара радиусом $R = 10^{-8}$ см. Как должна зависеть от радиуса плотность положительного заряда, чтобы электрон(точечная частица с зарядом $-e$), помещенный внутри шара, совершал гармонические колебания? Заряды механически друг на друга не действуют. Магнитным полем движущегося заряда пренебречь. Найти частоту колебаний электрона.

Дано:	**Решение:**
$R = 10^{-8}$см $e = 1.6 \cdot 10^{-12}$эрг	Из-за того что требуется найти зависимость плотности положительного заряда от радиуса, будем исходить из соображений центральной симметрии. Запишем 2й закон Ньютона: $m\ddot{r} = -kr \implies w = \sqrt{\frac{k}{m}}$. В гармонических колебаниях $w = const \implies k = const$.
$\rho(r) = ?, \quad w = ?$	$$F = kr = eE \implies E = \frac{kr}{e}$$ Запишем теорему Гаусса в дифференциальной форме в общем виде и для сферы: $$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho(r) \\ \operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2E)}{dr} = \frac{2E}{r} + \frac{k}{e} \end{cases} \implies 4\pi\rho(r) = \frac{2E}{r} + \frac{k}{e} = \frac{2k}{e} + \frac{k}{e} = \frac{3k}{e} \implies \rho = \frac{3k}{4\pi l} = const.$$ Найдем заряд шара: $$e = \int\limits_V \rho\, dV = \int\limits_0^R 4\pi r^2\rho\, dr = \frac{4}{3}\pi R^3\frac{3k}{4\pi e} = \frac{R^3k}{e} \implies k = \frac{e^2}{R^3}$$ $$\rho = \frac{3k}{4\pi l} = \frac{3e}{4\pi R^3} \qquad w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}}.$$ **Ответ:** $\rho = \frac{3e}{4\pi R^3}$, $w = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}}$.

Задача Т.1

Молекула воды обладает постоянным электрическим дипольным моментом $p = 1.84Д$ (1Д $= 10^{-18}$ ед. СГС - "дебай" , внесистемная единица дипольного момента). Две молекулы воды находятся на расстоянии $r = 35A$ друг от друга так, что векторы их дипольных моментом $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ лежат в одной плоскости под углами α_1 и α_2 к линии, соединяющей их центры. Для произвольных α_1 и α_2 определите проекцию F_x силы их взаимодействия и моменты сил, действующие на молекулы(относительно их центров). Для случаев а) $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}$ и б) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}$ рассчитайте величину и направление вектора силы $\vec{F}$.

Дано:

$p = 1.84Д$

$r = 35A$

$а)\ \alpha_1 = \frac{\pi}{2},$

$\alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}$

$б)\alpha_1 = 0,$

$\alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}$

$\vec{F} = ?, \quad a_{max} = ?$

Решение:

Найдем силу, действующая на 1й диполь в неоднородном поле:

$$\vec{F} = (\vec{p}_1\nabla)\vec{E}_2 = p_{1x}\frac{\partial\vec{E}_2}{\partial x} + p_{1y}\frac{\partial E_2}{\partial y}.$$

Тогда поле диполя по формуле (1.3):

$$\vec{E}_2 = \frac{3\,(\vec{p}_2, \vec{r})\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_2}{r^3} = \left(\frac{3(p_{2x}x + p_{2y}y)}{r^5}x - \frac{p_{2x}}{r^3}\right)\vec{i} + \left(\frac{3(p_{2x}x + p_{2y}y)}{r^5}y - \frac{p_{2y}}{r^3}\right)\vec{j}.$$

Теперь займемся проекциями сил в явном виде:

$$\begin{cases} F_x = p_{1x}\frac{\partial E_{2x}}{\partial x}\Big|_{y=0,x=r} + p_{2x}\frac{\partial E_{2x}}{\partial y}\Big|_{y=0,x=r} \\ \frac{\partial E_{2x}}{\partial x} = -\frac{6p_{2x}}{r^4}, \quad \frac{\partial E_{2x}}{\partial y} = \frac{3p_{2y}}{r^4} \end{cases} \implies F_x = -6\frac{p_{1x}p_{2x}}{r^4} + 3\frac{p_{1y}}{p_{2y}}r^4$$

$$F_y = 3\frac{p_{1x}p_{2y}}{r^4} + 3\frac{p_{1y}p_{2x}}{r^4}$$

Мы получили все необходимые формулы и теперь можно подставить пункты а и б. Будем считать, что при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $p_i = p$:

а) $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}$

$$F_x = 0 \pm 3\frac{p^2}{r^4} \approx \pm 7\cdot 10^{-10}\ \text{Дин}$$

$$F_y = 0 \pm 0 = 0\ \text{Дин}$$

б) $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}$

$$F_x = 0 + 0 = 0\ \text{Дин}$$

$$F_y = \pm 3\frac{p^2}{r^4} \approx \pm 7\cdot 10^{-10}\ \text{Дин}$$

$$a = \frac{F_{x\text{а}}}{m} = \frac{F_{y\text{б}}}{m} = \frac{6p^2}{r^4 m} = \frac{6\cdot 10^{-15}}{3\cdot 10^{-26}} = 2.3\cdot 10^{11}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: а) $F_x = \pm 7\cdot 10^{-10}$ Дин, $F_y = 0$ Дин

б) $F_x = 0$ Дин, $F_y = \pm 7\cdot 10^{-10}$ Дин

$a = 2.3\cdot 10^{11}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$

2. Потенциал. Проводники в электрическом поле. Метод изображений

2.1. Теорема о циркуляции

Теорема о циркуляции в интегральной форме:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0.$$

Потенциал в точке A относительно 0:

$$\varphi_A = \oint_A^0 \vec{E}\, d\vec{l} \implies \varphi_A - \varphi_B = \oint_A^B \vec{E}\, d\vec{l}.$$

Теорема о циркуляции в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \qquad \nabla \vec{E} = 4\pi\rho.$$

Если $\rho = 0$, то $\Delta\varphi = 0$ - уравнение Лапласа. Если $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ - уравнение Пуассона.

2.2. Метод изображений

Пусть имеется система зарядов $\{q\}$ и $\{q'\}$ каким-то образом расположенные в пространстве. Проведем мысленно эквипотенциальную поверхность S, на которой потенциал принимает значение $\varphi = \varphi_0$, разделяющую пространство на две области A и A', в каждой из которых находятся только группы зарядов $\{q\}$ и $\{q'\}$ соответственно.

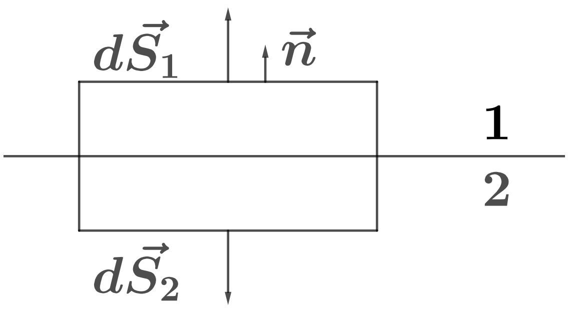
Можно сказать, что поле в области A не изменится если заменить набор зарядов $\{q'\}$ на набор зарядов $\{q''\}$, создающий такой же потенциал $\varphi = \varphi_0$. Получается, что можно вместо группы зарядов $\{q'\}$ использовать эквипотенциальную поверхность с потенциалом $\varphi = \varphi_0$.

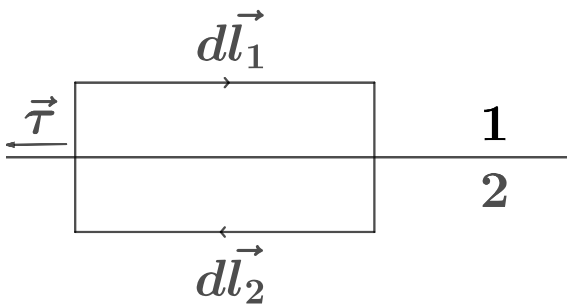
Обратно верно тоже самое: если имеется группа зарядов $\{q\}$ и проводящая поверхность S с потенциалом $\varphi = \varphi_0$, то для расчета поля эту поверхность можно заменить набором зарядов $\{q'\}$, который создает в точках поверхности S требуемый потенциал φ_0. Тогда фиктивные заряды $\{q'\}$ будут называться изображениями зарядов $\{q\}$.

2.3. Граничные условия

Поле вблизи поверхности проводника направлено по нормали к поверхности и пропорциально поверхностной плотности заряда.

$$E_{1n} - E_{2n} = 4\pi\sigma, \qquad E_{1\tau} = 0.$$





Задача 2.1°

Незаряженный проводящий шар вносится в электрическое поле с известным распределением потенциала $\varphi(\vec{r})$. Каким будет потенциал шара?

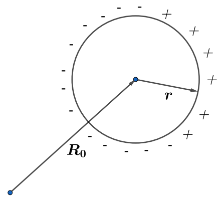
Дано:

$\varphi(\vec{r})$

$\varphi = ?$

Решение:

Пусть $\vec{r_0}$ - вектор до центра шара, а $\vec{r}$ - радиус шара. Так как шар изначально был не заряжен, то $\sum q_i = 0$.



$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r_0}) + \sum \varphi_i = \varphi(\vec{r_0}) + \sum \frac{\overset{0}{\cancel{q_i}}}{\cancel{r}} \implies \varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r_0}).$$

Ответ: $\varphi(\vec{r_0})$

Задача 2.2°

В опытах Резерфорда золотая фольга бомбардировалась α-частицами ${}^{2}_{4}He$ с кинетической энергией $W = 5$МэВ. На какое минимальное расстояние может приблизиться α-частица к ядру золота ${}^{79}_{197}Au$?

Дано:

$W = 5$МэВ

$q_1 = 2e$

$q_2 = 79e$

$e = 5 \cdot 10^{-10}$СГС

$r_{min} = ?$

Решение:

Запишем закон сохранения энергии. (Левую часть уравнения запишем для частицы на бесконечном удалении, а правую на максимальном приближении.)

$$0 + W = A + 0 \implies W = A_{\max} = q_1\varphi = \frac{q_1 q_2}{r_{\min}} \implies r_{\min} = \frac{q_1 q_2}{W} = \frac{2 \cdot 79 e^2}{5 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}} = 4.6 \cdot 10^{-12}\text{см}$$

Ответ: $r_{\min} = 4.6 \cdot 10^{-12}$см

Задача 2.3°

Напряженность электрического поля Земли $E_0 = 130\frac{В}{м}$, причем вектор $\vec{E_0} \parallel \vec{g}$. Какой заряд приобретет горизонтально расположенный короткозамкнутый плоский конденсатор с площадью палстин $S = 1$ $м^2$?

Дано:

$E_0 = 130\frac{\text{В}}{\text{м}}$

$S = 1\text{м}^2$

$q = ?$

Решение:

Воспользуемся теоремой Гаусса (1.5) в интегральной форме:

$$SE_0 = 4\pi Q \implies Q = \frac{SE_0}{4\pi} = \frac{10^4 \cdot 130 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 4\pi} = 3.45 \text{ ед. СГСЭ}$$

Ответ: $Q = 3.45$ ед. СГСЭ

Задача 1.24

Длинная медная проволока помещена в однородное электрическое поле E_0, перпендикулярное оси проволоки. Найти распределение поверхностных зарядов на проволоке $\sigma(\theta)$.

Дано:

E_0

$\sigma(\theta) = ?$

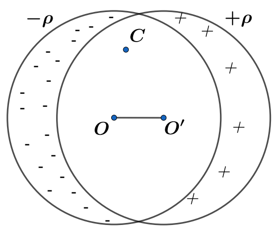
Решение:

Воспользуемся методом виртуальных перемещений. Немного сдвинем проволоку в направлении перпендикулярном ее оси. Пусть $\overline{OO'} = \vec{r}$.

Тогда в точке C напряженность электрического поля равна

$$\vec{E_C} = 2\pi\rho\overline{O'C} + 2\pi(-\rho)\overline{OC} = 2\pi\rho\vec{r}.$$

Рис. 1. Вид сверху



Найдем заряд проволоки по определению объемной плотности заряда:

$$\begin{cases} dq = \rho dV = \rho h(\theta)dS = \rho\cos\theta dS, \\ E_C + E_O = 0 \implies E_O = 2\pi\rho r \implies \rho = \frac{E_0}{2\pi r} \end{cases} \implies \sigma = \frac{dq}{dS} = \rho r\cos\theta = r\cos\theta\frac{E_0}{2\pi r} = \frac{E_0\cos\theta}{2\pi}.$$

Ответ: $\sigma(\theta) = \frac{E_0\cos\theta}{2\pi}$.

Задача 2.3

Металлический шар радиусом R_1, несущий заряд Q, окружен расположенным концентрически полым металлическим незаряженным шаром с внутренним радиусом R_2 и внешним R_3. Построить графики зависимости напряженности поля E от расстояния r до центра шаров. Найти потенциалы шаров, если в бесконечности потенциал равен 0. Изменятся ли потенциалы шаров, если внешний шар заземлить?

Дано:

R_1
R_2
R_3
Q

$E(r) = ?$, $\varphi_{\text{внеш}} = ?$

Решение:

Рассмотрим 3 промежутка для r:

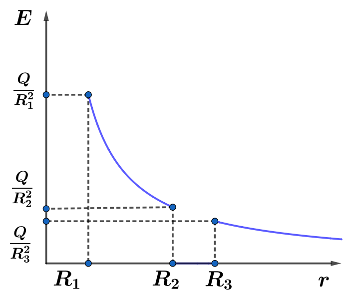
1) При $r \in [R_3, +\infty]$: $E_3 = \frac{Q}{r^2}$

2) При $r \in [R_2, R_3]$: $E_2 = 0$, так как полый незаряженный шар.

3) При $r \in [R_1, R_2]$: $E_1 = \frac{Q}{r^2}$.

На основании этих данных можно построить график зависимости $E(r)$.

Найдем потенциалы и посмотрим, что будет если заземлить внешнюю сферу:



До заземления:

$$\varphi_{\text{внутр}0} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi(3) = \frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} + \frac{Q}{R_3}$$

$$\varphi_{\text{внешн}0} = \varphi_3 = \frac{Q}{R},\ r \in [R_3, +\infty]$$

После заземления:

$$\varphi_{\text{внутр}1} = \varphi_1 - \varphi_2 = Q\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$\varphi_{\text{внешн}1} = \varphi_3 = 0$$

Ответ: $\varphi_{\text{внутр}1} = Q\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$, $\varphi_{\text{внешн}1} = 0$

Задача 2.20

Определить силу притяжения между точечным зарядом q и металлическим шаром. Заряд находится на расстоянии d от центра шара. Рассмотреть 2 случая: 1)шар заземлен; 2) шар изолирован, а полный его заряд равен 0.

Дано:

q

d

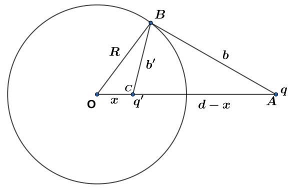
1) шар заземлен

2) шар изолирован, $q = 0$

$F = ?$

Решение:

Рассмотрим первую ситуацию, когда шар заземлен:
Из-за того, что его заземлили $\varphi = 0$. Выберем точку C на OA, так что $\Delta OCB \sim \Delta OBA$. Поместим в точку C вспомогательный заряд q'.



$$\varphi_B = \frac{q}{b} + \frac{q'}{b'} \implies q' = -\frac{R}{d}q \qquad (2.1)$$

Рассмотрим подобие треугольников $\Delta OCB \sim \Delta OBA$. Из него следует, что $\frac{x}{R} = \frac{R}{d} \implies x = \frac{R^2}{d}$.
Теперь можно записать выражение для силы:

$$F = \frac{qq'}{(d-x)^2} = \frac{q^2 R}{d\left(d - \frac{R^2}{d}\right)^2} = \frac{q^2 Rd}{(d^2 - R^2)^2}.$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда шар не заземлен, но заряд 0:
Введем фиктивный заряд $q_0 = R\varphi_0$ в точке O. Поле во внешнем пространстве представляется в виде суперпозиции полей q, q', q_0. Тогда запишем выражения для силы:

$$F = \frac{qq'}{(d-x)^2} - \frac{qq_0}{d^2} = \frac{Rdq^2}{(d^2 - R^2)} - \frac{qR\varphi_0}{d^2} = \left\| \varphi_0 = \frac{q}{d} \right\| = q^2\left(\frac{Rd}{(d^2-R^2)^2} - \frac{R}{d^3}\right).$$

Ответ: $F_1 = \frac{q^2 Rd}{(d^2-R^2)^2}, \quad F_2 = q^2\left(\frac{Rd}{(d^2-R^2)^2} - \frac{R}{d^3}\right).$

Задача 2.22

Внутри сферической незаряженной проводящей оболочки в точке A, на расстоянии $OA = d$ от ее центра, помещен точечный заряд q. Радиус внутренней поверхности оболочки r, а внешней R. Найти: 1) Поверхностную плотность индуцированных зарядов на внешней поверхности оболочки; 2) Потенциал оболочки, принимая за 0 потенциал бесконечно удаленной точки; поверхностную плотность индуцированных зарядов в точках B и C внутренней поверхности оболочки.

Дано:

$OA = d$

q

r

R

$\sigma_{\text{внеш}} =?,\ \varphi_{\text{обол}} =?,$

$\sigma_B =?,\ \sigma_C =?$

Решение:

Найдем поверхностную плотность индуцированных зарядов на внешней поверхности оболочки и потенциал оболочки:

На внутренней поверхности заряд $-q$ распределен неравномерно. На внешней поверхности заряд q распределен равномерно, так как поле в оболочке нулевое и влияние внутренних зарядов отсутствует.

Тогда

$$\sigma_{\text{внеш}} = \frac{q}{4\pi R^2}, \varphi = \frac{q}{R}$$

Найдем поле внутри с помощью метода изображений.

Поместим заряд Q так, чтобы потенциал на внутренней сфере был равен 0.

$$\begin{cases} \varphi_B = \frac{q}{r-d} + \frac{Q}{x} = 0 \\ \varphi_C = \frac{q}{r+d} + \frac{Q}{x+2r} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} qx = -Q(r-d) \\ qx + 2qr = -Q(r+d) \end{cases} \implies \begin{cases} Q = -q\frac{r}{d} \\ x = r\frac{r-d}{d} \end{cases}$$

$$E_B = E_q + E_Q = \frac{q}{(r-d)^2} + \frac{qrd^2}{dr^2(r-d)^2} = \frac{q\left(1+\frac{d}{r}\right)}{(r-d)^2}, \quad E_C = \frac{q\left(1-\frac{d}{r}\right)}{(r+d)^2}$$

Найдем поверхностную плотность в точках B и C:

Воспользуемся теоремой Гаусса (1.5):

$$E_i S = 4\pi\sigma_i S \implies \sigma_i = \frac{E_i}{4\pi} \implies \begin{cases} \sigma_B = \frac{q\left(1+\frac{d}{r}\right)}{4\pi(r-d)^2} \\ \sigma_C = \frac{1\left(1-\frac{d}{r}\right)}{4\pi(r+d)^2} \end{cases}$$

Ответ: $\sigma_{\text{внеш}} = \frac{q}{4\pi R^2}$, $\varphi_{\text{обол}} = \frac{q}{R}$, $\sigma_B = \frac{q\left(1+\frac{d}{r}\right)}{4\pi(r-d)^2}$, $\sigma_C = \frac{1\left(1-\frac{d}{r}\right)}{4\pi(r+d)^2}$

Задача 1.26

Во внешнее однородное электрическое поле $\vec{E}_0$ внесен металлический шарик. Как в результате этого изменится напряженность электрического поля вблизи поверхности шарика в точках A, B, C и D.

Дано:

$\vec{E}_0$

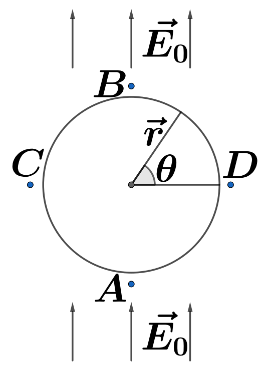
$E_A, E_B, E_C, E_D =?$

Решение:

Напишем общую формулу для напряженности поля шара (1.7) и учтем, что $r = R$(вблизи поверхности шара):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + 3R^3\left(\vec{E}_0, \vec{r}\right)\frac{\vec{r}}{r^5} - R^3\frac{\vec{E}_0}{r^3} \implies \vec{E}(R) = 3E_0\cos\theta\frac{\vec{R}}{R},$$

где θ - это угол между $\vec{E}_0$ и $\vec{r}$.



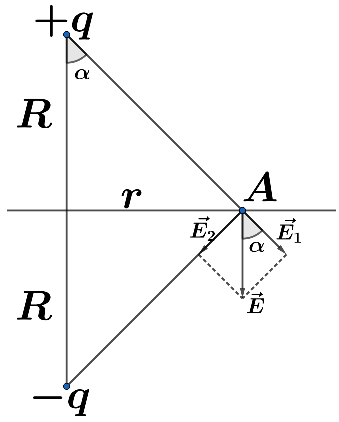
$$A : \theta = \pi, E_A = -3E_0 \qquad B : \theta = 0, E_B = 3E_0$$
$$C : \theta = -3\frac{\pi}{2}, E_C = 0 \qquad D : \theta = \frac{\pi}{2}, E_D = 0$$

Ответ: В точкахA и B напряженность возрастает в 3 раза, в C и D обращается в 0.

Задача 2.11

Найти поверхностную плотность зарядов, индуцированных зарядом q на поверхности бесконечной металлической плоскости. Заряд находится на расстоянии R от плоскости.

Дано:	**Решение:**
q R	Воспользуемся методом изображений. Заменим металлическую плоскость на заряд $-q$, расположенный на расстоянии R от плоскости. Рассмотрим произвольную точку A и получим:
$\sigma = ?$	



$$E_1 = E_2 = \frac{q}{R^2 + r^2} \implies$$

$$\implies E = 2E_1 \cos\alpha = 2E_1 \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}} = \frac{2qR}{\left(R^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Теперь воспользуемся теоремой Гаусса (1.5):

$$EdS = 4\pi\sigma dS \implies \sigma = \frac{E}{4\pi} = \frac{qR}{2\pi\left(R^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ответ: $\sigma = \frac{qR}{2\pi\left(R^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$

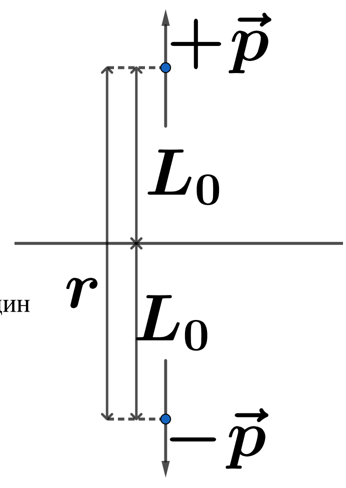
Задача 2.15

Найти силу притяжения точечного электрического диполя с дипольным моментом $p = 4 \cdot 10^{-10}$ Кл·см к бесконечной металлической пластине, ближайшая точка которой находится от диполя на расстоянии $L_0 = 1$ см. Ось диполя перпендикулярна к пластине. Определить также работу, которую надо затратить чтобы отодвинуть диполь от поверхности платсины с расстояния $L_0 = 1$ см до расстояния $L = 2$ см.

Дано:	**Решение:**
$p = 4 \cdot 10^{-10}$ Кл $\cdot$ см $=$ $= 1.2$ СГС $\cdot$ см $L_0 = 1$ см $L = 2$ см	**Во-первых, найдем силу взаимодействия диполя и пластины:**
$F = ?,\ A = ?$	

Воспользуемся методом изображений: поместим на расстоянии L_0 от пластины диполь с дипольным моментом $-p$. Тогда потенциал пластины останется $\varphi = 0$. Получается, что мы заменили задачу нахождения силы взаимодействия диполя с пластиной на силу взаимодействия диполя с диполем.

Воспользуемся формулой (1.4) и учтем, что $r = 2L_0$:



$$\begin{cases} F = p\frac{\partial E}{\partial r} \\ E = 2\frac{p}{r^3} \end{cases} \implies F = 2p\frac{(-3)p}{r^4} = -6\frac{p^2}{r^4} = -6\cdot\frac{1.44}{16} = -0.54 \text{ дин}$$

Во-вторых, найдем работу по перемещению диполя:

Применим базовую формулу для работы $\delta A = F dx$:

$$A = -6p^2 \int_{L_0}^{L} \frac{dx}{r^4} = -6p^2 \int_{L_0}^{L} \frac{dx}{16x^4} = \frac{p^2}{8}\left(\frac{1}{L^3} - \frac{1}{L_0^3}\right) = \frac{1.44}{8}\left(\frac{1}{8} - 1\right) = -0.16 \text{ эрг.}$$

Ответ: $F = -0.54$ дин, $A = -0.16$ эрг.

Задача 2.48

Найти какую максимальную разность потенциалов можно поддерживать между проводами бесконечной двухпроводной линии, если напряженность пробоя воздуха $E_{\max} = 30\frac{кВ}{см}$, диаметр проводов $d = 1$ см, а расстояние между проводами $b = 5$ м.

Дано:

$E_{\max} = 30\dfrac{\text{кВ}}{\text{см}}$

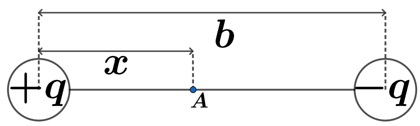
$d = 1$ см

$b = 5$ м

$\Delta\varphi = ?$

Решение:

Воспользуемся формулой напряженности электрического поля цилиндра: $E = \frac{2\varkappa}{r}$, где $\varkappa$ - линейная плотность заряда. По принципу суперпозиции в произвольной точке между проводами:



$$E = \frac{2\varkappa}{x} + \frac{2\varkappa}{b - x}$$

Найдем точки максимума и минимума для напряженности:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0 = -\frac{2\varkappa}{x^2} + \frac{2\varkappa}{(b-x)^2} \implies x = \frac{b}{2} \text{ - минимум.}$$

Максимальное значение напряженности электрического поля достигается на поверхности цилиндров $x = \frac{d}{2}$:

$$E_{\max} = \frac{4\varkappa b}{d\left(b - \frac{d}{2}\right)} \implies \varkappa = \frac{E_{\max} d\left(b - \frac{d}{2}\right)}{4b}.$$

Проинтегрируем напряженность поля и получим $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = 2\varkappa \int\limits_{\frac{d}{2}}^{b-\frac{d}{2}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x}\right) dx = 4\varkappa d \ln\left(\frac{2b}{d} - 1\right) = \frac{E_{\max} d\left(b - \frac{d}{2}\right)}{b} \ln\left(\frac{2b}{d} - 1\right) =$$

$$= \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 499.5}{4 \cdot 500} \ln\left(\frac{1000}{2} - 1\right) \approx 207 \text{ кВ}.$$

Ответ: $\Delta\varphi = 207$ кВ.

Задача Т.2

Напряженность поля на поверхности земли под одиночным заряженным бесконечным проводом радиуса $R = 1$ см, расположенным параллельно поверхности, равна $E_0 = 750\frac{В}{м}$. Расстояние от поверхности до оси провода $h = 4$ м. Определите потенциал провода, считая потенциал поверхности земли 0.

Дано:

$R = 1$ см

$E_0 = \frac{\text{В}}{\text{м}}$

$h = 4$ м

$\varphi = ?$

Решение:

Воспользуемся методом изображений: поместим заряд $-q$ на расстоянии h от поверхности. Также вспомним формулу напряженности для цилиндра:

$$E = \frac{2\varkappa}{x} \implies E_0 = 2\frac{2\varkappa}{h} \implies \varkappa = E_0\frac{h}{4}.$$

В произвольной точке прямой, соединяющей заряды напряженность равна

$$E = \frac{2\varkappa}{x} + \frac{2\varkappa}{h-x}$$

Теперь проинтегрируем напряженность поля и получим $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \varphi - \cancelto{0}{\varphi_0} = -\int\limits_R^h \left(\frac{2\varkappa}{x} + \frac{2\varkappa}{h-x}\right) dx = 2\varkappa\left(\ln\frac{h}{R} - \ln\frac{h}{2h-R}\right) =$$

$$= 2\varkappa \ln\frac{2h-R}{R} \approx 2\varkappa \ln\frac{2h}{R} = \frac{E_0 h}{2}\ln\frac{2h}{R} = \frac{750\cdot 4}{2}\ln\frac{8}{0.01} \approx 10 \text{ кВ}.$$

Ответ: $\varphi = \frac{hE_0}{2}\ln\frac{2h}{R}$.

3. Электрическое поле в веществе

3.1. Конденсатор

Определение: Конденсатор - это устройство для накопления заряда и энергии электрического поля.
Определение: Электрическая емкость C - это характеристика проводника, мера его способности аккумулировать электрический заряд.

$$C = \frac{q}{\varphi}, \text{ или } q = C\varphi. \tag{3.1}$$

Емкости различных конденсаторов:

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \qquad \text{Плоский конденсатор} \tag{3.2}$$

$$C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\varepsilon \qquad \text{Сферический конденсатор} \tag{3.3}$$

$$C = \frac{\varepsilon l}{2\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \qquad \text{Цилиндрический конденсатор} \tag{3.4}$$

$$\tag{3.5}$$

Энергия электрического поля:

$$u = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}, \text{ где E - напряженность эл.поля внутри конденсатора.} \tag{3.6}$$

3.2. Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектриках

Определение: Поляризация - это пространственное перераспределение связанных зарядов, приводящее к появлению объемного дипольного момента среды
Определение: Вектор поляризации $\vec{P}$ - это дипольный момент единицы объема вещества:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} \tag{3.7}$$

Дипольный момент единицы обьема:

$$\sigma_{\text{пол}} = p\frac{V}{SL} = \frac{pSL\cos\alpha}{SL} = p\cos\alpha, \tag{3.8}$$

где α - угол между $\vec{p}$ и нормалью к поверхности.
Определение: Вектор электрической индукции $\vec{D}$ - это вектор, равный сумме вектора напряженности электрического поля и вектора поляризации:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}.$$

Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектриках в интегральной форме:

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = 4\pi q_{\text{своб}}. \tag{3.9}$$

Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектриках в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho_{\text{своб}}. \tag{3.10}$$

Граничные условия:

На границе двух диэлектриков:
$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$

На границе диэлектрика и проводника:
$D_n = 4\pi\sigma$

Задача 3.1°

Найдите плотность поляризационных зарядов на торцах однородно поляризованного параллелепипеда.

Дано:

p

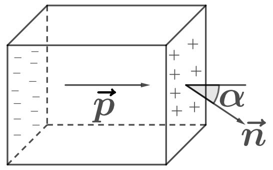
α

$\sigma = ?$

Решение:

Запишем формулу для вектора поляризации (3.7) и учтем, что $V = SL\cos\alpha$:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} = \frac{\sigma_{\text{пол}}}{V}S\vec{L} = \frac{\sigma_{\text{пол}}}{SL\cos\alpha}S\vec{L} \implies \sigma_{\text{пол}} = P\cos\alpha.$$



Ответ: $\sigma_{\text{пол}} = P\cos\alpha$

Задача 3.2°

Проводящий шар радиуса R_0 несет заряд q и окружен шаровым слоем диэлектрика с проницаемостью ε, вплотную прилегающим к поверхности шара. Внешний радиус равен R. Определить потенциал проводящего.

Дано:

R_0

q

ε

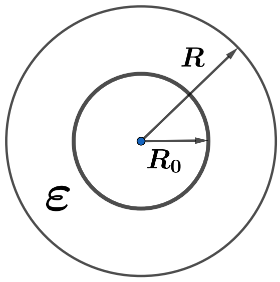
R

$\varphi = ?$

Решение:

Воспользуемся теоремой Гаусса в интегральной форме (3.9) при $R_0 \le r \le R$:

$$\begin{cases} D\cdot 4\pi r^2 = 4\pi q \implies D = \frac{q}{r^2} \\ E = \frac{D}{\varepsilon} \end{cases} \implies E = \frac{q}{\varepsilon r^2}$$



Аналогично из теоремы Гаусса получаем, что при $R = R_0$ $E = \frac{q}{r^2}$.
Тогда окончательно напряженность сферической оболочки:

$$E(r) = \begin{cases} 0, r < R_0 \\ \frac{q}{r^2}, r = R_0 \\ \frac{q}{\varepsilon r^2}, R_0 < r \le R \end{cases} \qquad (3.11)$$

Найдем потенциал проводящего шара:

$$\varphi = \frac{q}{R} + \int\limits_{R_0}^{R} \frac{q}{\varepsilon r^2}dr = \frac{q}{R} + \frac{q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right) = \frac{q}{R}\left(1 + \frac{R - R_0}{\varepsilon R_0}\right).$$

Ответ: $\varphi = \frac{q}{R}\left(1 + \frac{R-R_0}{\varepsilon R_0}\right)$.

Задача 3.1

На сколько отличается от единицы диэлектрическая постоянная ε идеального газа, состоящего из большого количества проводящих шариков радиусом r. Плотность(концентрация) шариков n мала, так что $r^3 n \ll 1$.

Дано:

r

n

$r^3 n \ll 1$

$\varepsilon - 1 = ?$

Решение:

Предположим, что $\vec{P} = \alpha \vec{E}$. Также в трехмерном пространстве $\vec{P} = 3q\vec{l}$.

$$q = V\rho n = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho n \implies \vec{P} = 4\pi r^3 \rho n \vec{l}.$$

Воспользуемся теоремой Гаусса (1.5):

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \implies \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi\rho \implies \vec{E} = 4\pi\rho\vec{l}.$$

Тогда приравняем два уравнения и найдем α:

$$\begin{cases} \vec{P} = \alpha\vec{E} \\ \vec{P} = 4\pi r^3 \rho n \vec{l} \\ \vec{E} = 4\pi\rho\vec{l} \end{cases} \implies \alpha 4\pi\rho\vec{l} = 4\pi r^3 \rho n \vec{l} \implies \alpha = nr^3.$$

Воспользуемся вектором электрической индукции:

$$\begin{cases} \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \end{cases} \implies \varepsilon\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\alpha\vec{E} \implies \varepsilon - 1 = 4\pi n r^3.$$

Заметим также, что ε близко к 1 из-за того, что $nr^3 \ll 1$. Это означает, что наше предположение $\vec{P} = \alpha\vec{E}$ было верно.

Ответ: $\varepsilon - 1 = 4\pi n r^3$

Задача 3.8

Длинный цилиндр изготовлен из диэлектрика с "замороженной" поляризацией, направленной по его оси. Поле в точке A оказалось равным $E_A = 300\frac{В}{см}$. Приближенно найти поле E_C вблизи торца короткого цилиндра в точке C, сделанного из того же материала, если $h = 2 \cdot 10^{-2} D$, где D- диаметр цилиндра.

Дано:

$E_A = 300\frac{\text{В}}{\text{см}}$

$h = 2 \cdot 10^{-2} D$

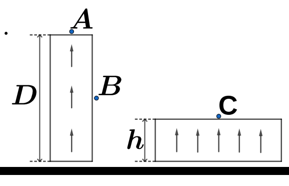
$E_C = ?$

Решение:

Вспомним формулу напряженности электрического поля на торце цилиндра: $E = 2\pi\sigma$:

$$\begin{cases} E_A = 2\pi\sigma_A \\ \sigma_A = P_A = npD \end{cases} \implies E_A = 2\pi npD \qquad \begin{cases} E_C = 4\pi\sigma_C \\ \sigma_C = P_C = nph \end{cases} \implies E_C = 4\pi nph$$

$$\frac{E_C}{E_A} = \frac{4\pi nph}{2\pi npD} = \frac{2h}{D} \implies E_C = E_A\frac{2h}{D} = 300\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^-2D}{D} = 12\frac{\text{В}}{\text{см}}.$$



Ответ: $E_C = 12\frac{\text{В}}{\text{см}}$.

Задача 3.26

Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого линейно меняется от ε_1 у одной пластины до $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ у другой. Расстояние между пластинами d, площадь каждой из них равна S. Найти емкость C конденсатора.

Дано:

ε_1

$\varepsilon_2 < \varepsilon_1$

d

S

$C = ?$

Решение:

Так как зависимость линейная, то можно найти зависимость диэлектрической проницаемости от координаты:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x$$

В плоском конденсаторе $D = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{q}{S}$ и $E(x) = \frac{D}{\varepsilon(x)}$. Тогда интегрируем E_x и получаем разность потенциалов:

$$\Delta\varphi = \int_0^d E(x)\,dx = \frac{4\pi q d}{S}\int_0^d \frac{dx}{\varepsilon_1 d + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x} = \frac{4\pi q d}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)S}\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Воспользуемся определением электрической емкости (3.1):

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)S}{4\pi q d \ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}.$$

Ответ: $C = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)S}{4\pi q d \ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$.

Задача 3.39

Оценить силу взаимодействия между нейтральным диэлектрическим шариком радиусом r_0 и точечным зарядом q, считая расстояние R между ними большим, а диэлектрическую проницаемость шара ε, такой что $\varepsilon - 1 \ll 1$.

Дано:

r_0

R

q

$\varepsilon - 1 \ll 1$

$F = ?$

Решение:

Дипольный момент шара радиусом r_0 в электрическом поле напряженностью E_0 определяется формулой:

$$p = r_0^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0$$

Будем считать, что из-за маленьких размеров шарика и большого удаления от точечного заряда он находится в однородном поле $E_0 = \frac{q}{R^2}$.

Теперь осталось найти силу взаимодействия:

$$\vec{F} = \vec{p}\,\mathrm{div}\,\vec{E} = r_0^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 \frac{-q}{R^3}.$$

Из условия $\varepsilon - 1 \ll 1$ получаем $\varepsilon + 2 \approx 3$.

$$\vec{F} \approx -\frac{2}{3}\frac{q^2 r_0^3}{R^5}(\varepsilon - 1).$$

Ответ: $\vec{F} \approx -\frac{2}{3}\frac{q^2 r_0^3}{R^5}(\varepsilon - 1)$.

Задача 3.77

В заряженный плоский конденсатор вставлен диэлектрический стержень длиной l_0 из электрета с замороженной однородной поляризацией $\vec{P}$. К конденсатору приложена разность потенциалов V. Найти циркуляцию вектора $\vec{D}$ по контуру L.

Дано:

l_0

$\vec{P}$

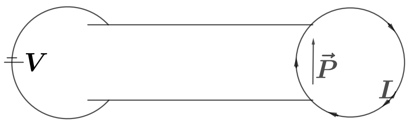
V

$\oint\limits_L \vec{D}\,d\vec{l} = ?$

Решение:

Воспользуемся теоремой Гаусса для электрического поля в диэлектриках (3.9):

$$\oint\limits_L \vec{D}\,d\vec{l} = \oint\limits_L \vec{E}\,d\vec{l} + \oint\limits_L 4\pi\vec{P}\,d\vec{l} = 4\pi\oint\limits_L \vec{P}\,d\vec{l} = 4\pi P L_0.$$



Ответ: $\oint\limits_L \vec{D}\,d\vec{l} = 4\pi P L_0.$

Задача Т.3

Плоскопараллельная пластина изготовлена из диэлектрика с "замороженной"поляризацией, направленной вдоль оси x, перпендикулярной поверхностям пластины. Пластина поляризована неоднородно: $\vec{P}(x) = \vec{P}_0\left(1+\frac{x^2}{d^2}\right)$, где $2d$ - толщина пластины(начало отсчета в центре пластины). Определите разность потенциалов U между поверхностями пластины. Краевыми эффектами пренебречь.

Дано:

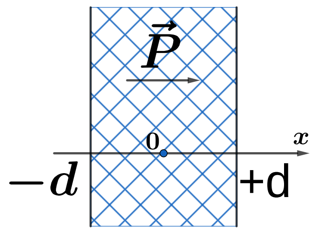
$\vec{P}(x) = \vec{P}_0\left(1+\dfrac{x^2}{d^2}\right).$

$U = ?$

Решение:

Заметим, что концы пластины незаряжены,а значит

$$D = E + 4\pi P = 0 \implies E = -4\pi P.$$



Проинтегрируем E чтобы получить $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \int\limits_{-d}^{d} E\,dx = -8\pi\int\limits_0^d \left(P_0\left(1+\frac{x^2}{d^2}\right)\right)dx = -\frac{32}{3}\pi P_0 d.$$

Ответ: $-\frac{32}{3}\pi P_0 d.$

Задача 3.30

Прокладка из сегнетоэлектрика ($\varepsilon = 200$) имеет толщину равную зазору между пластинками плоского конденсатора. Площадь пластин плоского конденсатора $S_1 = 1$ м^2. Какова должна быть площадь S_2 основания прокладки для того чтобы в объеме, занимаемом прокладкой, индукция сделалась в 40 раз больше, чем до ее введения? Конденсатор изолирован.

Дано:

$\varepsilon = 200$

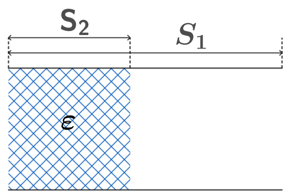
$S_1 = 1$ м^2

$n = 40$

$S_2 = ?$

Решение:

Из-за того, что значение напряженности в конденсаторе невелико можно использовать следующую формулу для вектора электрической индукции:



$$D = \varepsilon E \implies \frac{D_2}{D_1} = n \implies \frac{\varepsilon E_2}{E_1} = n.$$

Для нахождения напряженностей воспользуемся формулой $q = C\Delta\varphi = CEd \implies E = \frac{q}{Cd}$. Из-за того, что конденсатор изолирован, то $q = const$. Тогда $\frac{E_2}{E_1} = \frac{C_1}{C_2}$. Найдем емкости конденсаторов:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S_1}{d} \qquad C_2 = C_2' + C_2'' = \frac{\varepsilon_0}{d}\left((S_1 - S_2) + \varepsilon S_2\right)$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{S_1}{S_1 - S_2 + \varepsilon S_2} \implies \frac{\varepsilon S_1}{S_1 - S_2 + \varepsilon S_2} = n \implies S_2 = \frac{S_1(\varepsilon - n)}{(\varepsilon - 1)n} = \frac{1 \cdot (200 - 40)}{(200 - 1) \cdot 40} \approx 0.02 \text{ м}^2.$$

Ответ: $S_2 = 0.02$ м^2.

Задача Т.4

На обкладках плоского конденсатора размещены заряды q и $-q$. Зазор между обкладками заполнен веществом, диэлектрическая пронимаемость которого меняется по закону $\varepsilon = \frac{2}{1+\frac{x}{h}}$, где x - расстояние до положительной пластины, h - расстояние между пластинами. Найдите распределение объемной плотности поляризационного заряда $\rho_{пол}$ в конденсаторе, а также его емкость C. Площадь каждой пластины S.

Дано:

$\varepsilon = \dfrac{2}{1 + \frac{x}{h}}$

q

S

h

$\rho_{\text{пол}} = ?$, $C = ?$

Решение:

Запишем формулу для вектора электрической индукции и напряженности электрического поял:

$$\begin{cases} D = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{q}{S} \\ D = 4\pi P + E \\ E(x) = \frac{D}{\varepsilon(x)} \end{cases} \implies P = \frac{D - E}{4\pi} = \frac{4\pi}{4\pi}\frac{q}{S}\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{h}\right)\right) = \frac{q}{2S}\left(1 - \frac{x}{h}\right).$$

Вспомним, что объемная плотность выражается через вектор поляризации:

$$\rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div}\vec{P} = -\frac{dP}{dx} = \frac{q}{2Sh}$$

Теперь воспользуемся определением электрической емкости (3.1):

$$U = \int_0^h E(x)\,dx = \frac{D}{2}\int_0^h \left(1 + \frac{x}{h}\right)dx = \frac{3}{4}Dh = \frac{3}{4}\frac{4\pi q}{S}h = \frac{3\pi q h}{S} \implies C = \frac{q}{U} = \frac{S}{3\pi h}.$$

Ответ: $\rho_{\text{пол}} = \frac{q}{2Sh}$, $C = \frac{S}{3\pi h}$.

Задача 3.79

Широкая тонкая пластина из диэлектрика вносится в однородное электрическое поле $\vec{E}_0$. Диэлектрическая проницаемость пластины $\varepsilon > 1$. Вектор $\vec{E}_0$ составляет с нормалью к поверхности пластины угол θ. 1) Определить поверхностную плотность поляризационного заряда на верхней поверхности пластины. 2) Найти модуль и направление вектора поляризации $\vec{P}$ пластины.

Дано:

E_0

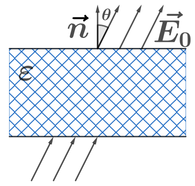
$\varepsilon > 1$

θ

$\sigma_{\text{пол}} = ?,\ \vec{P} = ?$

Решение:

Воспользуемся граничными условиями: $D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma_{\text{своб}} = 0 \implies D_{1n} = D_{2n}$. Теперь запишем вектор электрической индукции в вакууме и в среде:

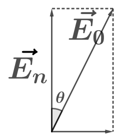


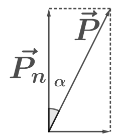
$$E_0 \cos\theta = \frac{E_0 \cos\theta}{\varepsilon} + 4\pi P_n \implies P_n = \sigma_{\text{пол}} = \frac{E_0 \cos\theta(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon}.$$

Продолжаем пользоваться граничными условиями $E_{\tau 1} = E_{\tau 2},\ E_{n1} = \varepsilon E_{n2}$.

Пусть α - это угол между нормалью и вектором поляризации $\vec{P}$. Тогда

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \frac{E_{\tau 1}}{E_{n1}} \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{E_{\tau 2}}{E_{n2}} \end{cases} \implies \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \varepsilon.$$





$$P = \frac{P_n}{\cos\alpha} = \frac{E_0 \cos\theta(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{E_0 \cos\theta(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon}\sqrt{1 + \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2\theta} = \frac{E_0(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon}\sqrt{\cos^2\alpha + \varepsilon\sin^2\alpha}.$$

Ответ: $\sigma_{\text{пол}} = \frac{E_0 \cos\theta(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon},\ P = \frac{E_0 \cos\theta(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon},\ \operatorname{tg}\alpha = \varepsilon \operatorname{tg}\theta.$

4. Энергия и силы в электрическом поле. Токи в неограниченных средах.

Энергия жесткого диполя в электрическом поле:

$$W = -(\vec{p}, \vec{E}). \tag{4.1}$$

Энергия упругого диполя в электрическом поле:

$$W = -\frac{1}{2}(\vec{p}, \vec{E}). \tag{4.2}$$

4.1. Электростатические силы

Поверхностная плотность тока

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS} = \frac{d^2q}{dtdS} = qn\vec{v}, \tag{4.3}$$

где q - заряд, n - концентрация зарядов, $\vec{v}$ - дрейфовая скорость(средняя скорость частиц в малом объеме).

4.2. Закон Ома и закон сохранения заряда

Закон Ома в дифференциальной(локальной форме):

$$\vec{j} = \lambda\vec{E}, \tag{4.4}$$

где λ - проводимость среды, а $\rho = \frac{1}{\lambda}$ - удельное сопротивление.
Закон Ома в интегральной форме для участка цепи:

$$\Delta\varphi + \mathscr{E} = IR \tag{4.5}$$

Закон сохранения заряда:

$$\frac{dq}{dt} = -\oint\limits_S \vec{j}\, dS \implies \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0. \tag{4.6}$$

4.3. Правила Кирхгофа

Первое правило Кирхгофа: В каждой точке разветвления проводов алгебраическая сумма сил токов равна 0. Токи, идущие к точке разветвления, и токи, исходящие из нее, следует считать величинами разных знаков.
Второе правило Кирхгофа: Выделим в сети произвольный замкнутый контур, состоящий из проводов. Сумма электродвижущих сил, действующих в таком контуре, равна сумме произведений сил токов в отдельных участков этого контура на их сопротивления

4.4. Закон Джоуля-Ленца

Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме: мощность тепла, выделяемого током в единице объема проводника, дается выражением:

$$w = \frac{j^2}{\lambda} = \lambda E^2. \tag{4.7}$$

Объемная плотность электрической энергии в плоском конденсаторе:

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \tag{4.8}$$

Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме:

$$Q = I^2R = UI = \frac{U^2}{R}. \tag{4.9}$$

4.5. Токи в неограниченных средах

Взаимная емкость системы электродов:

$$C = \frac{q}{\varphi_A - \varphi_B}. \tag{4.10}$$

Сопротивление среды между электродами:

$$R = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C}. \tag{4.11}$$

Задача 4.1°

Поверхностная плотность заряда на пластинах плоского конденсатора, заполненного твердым диэлектриком с проницаемостью ε, равна $\pm\sigma$. Определите объемную плотность электрической энергии w в конденсаторе, а также силу f, действующую на единицу площади обкладок.

Дано:	**Решение:**
ε $\pm\sigma$	Воспользуемся формулой (4.8) для объемной плотности энергии в конденсаторе: $$\begin{cases} w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} \\ D = 4\pi\sigma \end{cases} \implies w = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon}$$ Теперь найдем силу, действующую на обкладки: $$f = \frac{E^2_{\text{возд}}}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi} = 2\pi\sigma^2.$$ **Ответ:** $w = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon}$, $f = 2\pi\sigma^2$.
$w = ?$ $f = ?$	

Задача 3.50

По сфере радиусом R равномерно распределен заряд Q. Определить давление изнутри на поверхности сферы, обусловленное взаимодействием зарядов.

Дано:	**Решение:**
R Q	Запишем выражение для вектора поляризации и поверхностной плотности зарядов: $$\begin{cases} F = \frac{E^2}{8\pi} = 2\pi\sigma^2 \\ \sigma = \frac{Q}{4\pi R} \end{cases} \implies F = \frac{Q^2}{8\pi R^4}.$$ **Ответ:** $F = \frac{Q^2}{8\pi R^4}$.
$F = ?$	

Задача 4.2°

Конденсатор емкостью $C = 20$ см заполнен однородной слабопроводящей средой, имеющей малую проводимость $\lambda = 10^{-6}$ Ом$^{-1}\cdot$ см$^{-1}$ и диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 2$. Определить электрическое сопротивление между обкладками.

Дано:	**Решение:**
$C = 20$ см $\lambda = 10^{-6}$ Ом$^{-1}\cdot$ см$^{-1}$ $\varepsilon = 2$	Воспользуемся готовой формулой (4.11): $$R = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C} = \frac{2}{4\pi 10^{-6}\cdot 20} = 8 \text{ кОм}.$$ **Ответ:** $R = 8$ кОм.
$R = ?$	

Задача 1.5

Вывести выражение для энергии диполя во внешнем электрическом поле напряженностью $\vec{E}$. Рассмотреть случаи: 1) жесткого диполя с дипольным моментом $\vec{p}$; 2)упругого диполя с поляризуемостью α ($\vec{p}_e = \alpha\vec{E}$ в СГСЭ).

Дано:	**Решение:**
$\vec{E}$ $\vec{p}$ $E = ?$	**1) Рассмотрим случай жесткого диполя:** Запишем изменение энергии: $$dW = -dA_{\text{эл.поле}} = -\left(q\vec{E}d\vec{r}_+ - q\vec{E}d\vec{r}_-\right) = -q\vec{E}d(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = -\vec{E}d\vec{p} \implies W - \vec{p}\vec{E}.$$ **2) Рассмотрим случай упругого диполя:** Аналогично запишем изменение энергии: $$dW = -\vec{E}d\vec{p} = -Edp = \left[\vec{p} \parallel \vec{E}\right] = -\alpha EdE \implies W = -\alpha\int\limits_0^E EdE = \frac{-\alpha E^2}{2} = -\frac{\vec{p}\vec{E}}{2}.$$ **Ответ:** а)$W = -\vec{p}\vec{E}$, б)$W = -\frac{\vec{p}\vec{E}}{2}$.

Задача 3.44

Считая, что масса электрона определяется из соотношения $W = mc^2$, где W- электростатическая энергия заряда электрона, найти значение радиуса электрона при следующих предположениях: 1) заряд электрона распределен по всему его объему с постоянной плотностью; 2) весь заряд электрона распределен по его поверхности.

Дано:	**Решение:**
$W = mc^2$ $R = ?$	**Пусть заряд электрона распределен по всему его объему с постоянной плотностью:** $$W = \int\limits_0^R \frac{E^2}{8\pi}4\pi r^2 dr + \int\limits_R^\infty \frac{E_2}{8\pi}4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2R^6}\int\limits_0^R r^4 dr + \frac{q^2}{2}\int\limits_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{10R} + \frac{q^2}{2R} = \frac{3}{5}\frac{q^2}{R} \implies$$ $$\implies \frac{3}{5}\frac{q^2}{R} = mc^2 \implies R = \frac{3q^2}{5mc^2} =$$ $$= \frac{3(4.8\cdot 10^{-10})^2}{5\cdot 9\cdot 10^{-23}(3\cdot 10^10)^2} \approx 1.7\cdot 10^{-13} \text{ см.}$$ **Пусть весь заряд электрона распределен по его поверхности:** $$W = \int\limits_R^\infty \frac{E^2}{8\pi}4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2R} \implies \frac{q^2}{2R} = mc^2 \implies R = \frac{q^2}{2mc^2} = \frac{(4.8\cdot 10^{-10})^2}{2\cdot 9\cdot 10^{-23}(3\cdot 10^10)^2} = 1.4\cdot 10^{-13} \text{ см.}$$ **Ответ:** 1) $1.7\cdot 10^{-13}$ см, 2) $1.4\cdot 10^{-13}$ см.

Задача 3.67/68

Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии d друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входить в зазор между металлическими пластинами. Все пластины имеют форму полукруга радиусом R, причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с d. Пренебрегая краевыми эффектами, найти момент M сил, действующих на диэлектрическую пластину, когда она выведена из положения равновесия. Конденсатор заряжен до разности потенциалов U, диэлектрическая проницаемость подвижной пластины равна ε.

Дано:

d

R

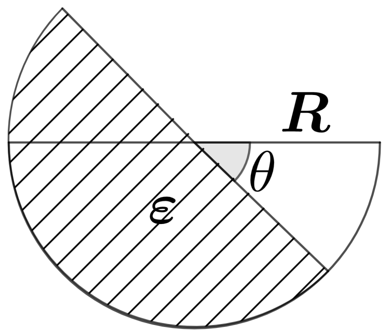
U

ε

$M = ?$

Решение:

Рассмотрим случай когда $U = const$:
В данном процессе будет 2 вида работы: 1) работа по вытягиванию диэлектрика $A_1 = Md\theta$; 2) работа источника $\delta A_{\text{ист}}$. Вся эта работа идет на изменение энергии конденсатора. Зашишем в виде формулы:



$$\begin{cases} Md\theta = \delta A_{\text{ист}} = dW \\ \delta A_{\text{ист}} = Udq = U^2 dC \\ W = \frac{CU^2}{2} \implies dW = \frac{U^2}{2}dC \end{cases} \implies M = -\frac{U^2 dC}{2d\theta}$$

Теперь необходимо найти изменение емкости при изменении угла $\frac{dC}{d\theta}$. Поймем, что наше устройство можно представить в виде двух параллельно соединенных конденсаторов(заштрихованный сектор и сектор без штриховки):

Для заштрихованного конденсатора:

$$C_1(\theta) = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} = \frac{\varepsilon(\pi - \theta)R^2}{2}$$

Для конденсатора без штриховки:

$$C_2(\theta) = \frac{S}{4\pi d} = \frac{\theta R^2}{24\pi d}$$

Так как конденсаторы соединены параллельно, то их емкости складываются:

$$C = C_1(\theta) + C_2(\theta) = \frac{R^2}{8\pi d}\left(\theta(1-\varepsilon) + \pi\varepsilon\right) \implies \frac{dC}{d\theta} = \frac{R^2}{8\pi d}(1-\varepsilon)\,.$$

Подставляем в изначальное выражение для M и получаем ответ:

$$M = \frac{U^2 R^2}{16\pi d}(\varepsilon - 1)\,.$$

Рассмотрим 2 случай когда $q = const$:
В этом случае работа источника будет равна 0 и закон сохранения энергии запишется в виде:

$$Md\theta = d\frac{q^2}{2C} = -\frac{q^2}{2C^2}dC \implies Md\theta = -\frac{U^2}{2}dC = -\frac{U^2}{2}\frac{dC}{d\theta}.$$

Производная $\frac{dC}{d\theta}$ останется такой же, что и в 1 случае. Поэтому просто подставляем полученное выражение:

$$M = \frac{U^2}{2}\frac{R^2}{8\pi d}(\varepsilon - 1) = \frac{U^2 R^2}{16\pi d}(\varepsilon - 1)\,.$$

Заметим, что несмотря на разные случаи, ответы получились одинаковыми. В задаче 3.68 когда $\theta \sim \frac{d}{R}$ возникают краевые эффекты, которыми нельзя пренебречь.

Ответ: $M = \frac{U^2R^2}{16\pi d}(\varepsilon - 1)\,.$

Задача 4.23

Пространство между пластинами слоистого плоского конденсатора заполнено многослойным диэлектриком, обладающим слабой электропроводимостью. Диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость изменяются от $\varepsilon_1 = 4$, $\lambda_1 = 10^{-9}$ Ом$^{-1}$см$^{-1}$ на одной поверхности диэлектрика до $\varepsilon_2 = 3$, $\lambda_2 = 10^{-12}$ Ом$^{-1}$см$^{-1}$ на другой его поверхности. Конденсатор включен в цепь батареи постоянной ЭДС. Определить величину и знак суммарного свободного заряда q, который возникает в диэлектрике, когда в цепи установится постоянный электрический ток $I = 10^{-7}$ А, текущий через диэлектрик от стороны 1 к стороне 2.

Дано:

$\varepsilon_1 = 4$

$\varepsilon_2 = 3$

$\lambda_1 = 10^{-9}$ Ом$^{-1}$см$^{-1}$

$\lambda_2 = 10^{-12}$ Ом$^{-1}$см$^{-1}$

$I = 10^{-7}$ А

$q = ?$

Решение:

Вспомним про плотность тока $j = \frac{I}{S} = \lambda E$. Также запишем теорему теорему Гаусса для диэлектриков (3.10):

$$\operatorname{div} D = 4\pi\rho \implies \rho = \frac{\partial D}{\partial x}\frac{1}{4\pi} = \frac{\partial \varepsilon \frac{I}{S\lambda}}{\partial x}\frac{1}{4\pi}.$$

Для нахождения полного заряда проинтегрируем

$$q = \int\limits_0^d \rho S dx = \frac{I}{4\pi}\int\limits_1^2 d\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right) = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2}\right) =$$

$$= \frac{10^{-7}\cdot 3\cdot 10^{-9}}{4\pi}\left(\frac{3}{10^{-12}} - \frac{4}{10^{-9}}\right)\cdot 1.1\cdot 10^{-12} = 79 \text{ СГСЭ}.$$

Ответ: $q = 79$ СГСЭ.

Задача 3.73

Плоский конденсатор с квадратными пластинами со стороной a и расстоянием между ними d расположен вертикально, заряжен до заряда q и отсоединен от источника питания. В конденсатор вводится пластина с диэлектрической проницаемостью ε и массой m. Толщина пластины равна зазору конденсатора d, а длина и ширина больше a. Найти положение равновесия пластины x. Силу трения не учитывать.

Дано:

a

d

q

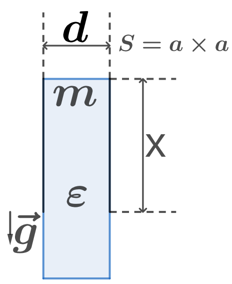
ε

m

$x_0 = ?$

Решение:

Найдем энергию, которую будет иметь пластина в момент когда втянется в конденсатор. Эта энергия состоит из 2 частей: энергии конденсатора и потенциальной энергии поднятой пластины. Также заметим, что у нас имеется пара параллельно соединенных конденсаторов:



$$\begin{cases} W(x) = \frac{q^2}{2C(x)} + mgx \\ C(x) = \frac{\varepsilon x a}{4\pi d} + \frac{(a-x)a}{4\pi d} = \frac{xa(\varepsilon)}{4\pi d} + \frac{a^2}{4\pi d}. \end{cases} \implies$$

$$\implies W(x) = \frac{2\pi d q^2}{xa(\varepsilon - 1) + a^2} + mgx$$

Теперь поймем, что в положении равновесия у системы будет минимальная потенциальная энергия:

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{2\pi d q^2 a(\varepsilon - 1)}{(x_0 a(\varepsilon - 1) + a^2)^2} + mg = 0 \implies x_0 = \frac{1}{\varepsilon - 1}\left(\sqrt{\frac{2\pi d q^2(\varepsilon - 1)}{mga}} - a\right).$$

Ответ: $x_0 = \frac{1}{\varepsilon - 1}\left(\sqrt{\frac{2\pi d q^2(\varepsilon-1)}{mga}} - a\right)$.

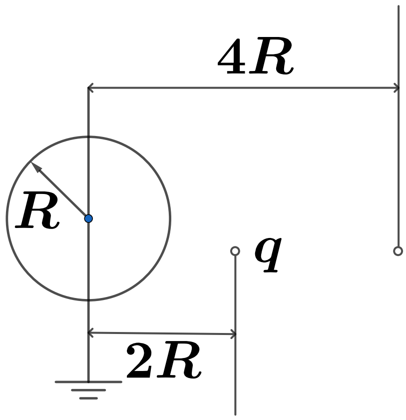
Задача Т.5

На расстоянии $2R$ от центра заземленного проводящего шара радиуса R находится точечный заряд q. Заряд перемещают на расстояние $4R$ от центра шара. Чему равна работа по перемещению точечного заряда q? Чему равно изменение энергии взаимодействия индуцированных зарядов между собой?

Дано:	**Решение:**
R q	
$A=?,\ \Delta W_{\text{инд}}=?$	

Воспользуемся формулами для индуцированных зарядов из задачи 2.20 (2.1):

$$q' = -q\frac{R}{x} \quad l = \frac{R^2}{x}.$$



Теперь запишем силу Кулона и подставим туда эти величины:

$$F = \frac{qq'}{(x-l)^2} = -\frac{q^2R}{x\left(x-\frac{R^2}{x^2}\right)} = -\frac{q^2Rx}{(x^2-R^2)^2}$$

Для нахождения работы проинтегрируем нашу силу:

$$A = -q^2R\int\limits_{2R}^{4R}\frac{xdx}{(x^2-r^2)^2} = \frac{q^2r}{2}\left(\frac{1}{15r^2}-\frac{1}{3r^2}\right) = -\frac{2}{15}\frac{q^2}{r}.$$

Для нахождения изменении энергии взаимодействия индуцированных зарядов запишем закон сохранения энергии:

$$A_{\text{внеш}} = -A = \Delta W + \Delta W_{\text{инд}}.$$

Изначальная энергия взаимодействия шара и точечного заряда: $W_1 = \frac{qq'}{x-l} = -\frac{q^2}{3R}$.
Энергию которая будет в конце находим аналогично: $W_2 = -\frac{q^2}{15R}$.
Теперь найдем изменение энергии $\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{4q^2}{15R}$.
Подставим в закон сохранения энергии:

$$\Delta W_{\text{инд}} = A_{\text{внеш}} - \Delta W = \frac{2q^2}{15R} - \frac{4q^2}{15R} = -\frac{2q^2}{15R}.$$

Ответ: $A = \frac{2q^2}{15R}$, $\Delta W_{\text{инд}} = -\frac{2q^2}{15R}$.

Задача 3.81

Определить силу, действующую на внутреннюю обкладку длинного цилиндрического конденсатора, если ее заряд равен q, а радиус R. Пространство между обкладками конденсаторов плотно(без зазоров) заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Диэлектрики граничат между собой вдоль по плоскостям двугранного угла, пересекающимся на общей оси цилиндрических поверхностей. Двугранные углы равны соответственно $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ и $\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$. Длина конденсатора равна l.

Дано:

q

R

l

ε_1

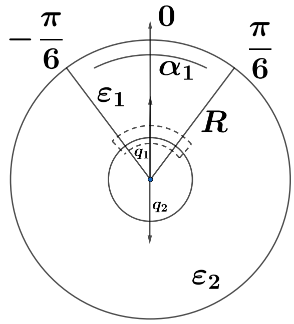
ε_2

$\alpha_1 = \dfrac{\pi}{3} \quad \alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$

$F = ?$

Решение:

Рассмотрим напряженность на внутренней обкладке. Ее заряд $q = q_1 + q_2$. Воспользуемся теоремой Гаусса для диэлектриков (3.9) для верхней обкладки(контур обхода указан на рисунке пунктиром):



$$\int\limits_S \vec{D}\, dS = \varepsilon_1 E S = \varepsilon_1 E \frac{\pi}{3} R l = 4\pi q_1 \implies q_1 = \frac{\varepsilon_1 E R l}{12}.$$

Проделаем такие же действия для нижней обкладки. Все будет аналогично, но угол изменится на $\alpha_2 = \frac{5\pi}{3}$:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\varepsilon_1 E R l}{12} \\ q_2 = \frac{\varepsilon_2 E 5 R l}{12} \end{cases} \implies q = \frac{E R l}{12}(\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2)$$

$$E = \frac{12 q}{R l(\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2)}.$$

Запишем выражение для вектора электрической индукции:

$$D_1 = \varepsilon_1 E \qquad D_2 = \varepsilon_2 E \qquad w_i = \frac{D_i^2}{8\pi\varepsilon_i}$$

Запишем выражение для силы, действующей на верхнюю дугу вверх:

$$F_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} w_1 R d\alpha l \cos\alpha = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{D_1^2 R l \cos\alpha dl}{8\pi\varepsilon_1} = \frac{18 q^2 \varepsilon_1}{\pi R l(\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2)^2}.$$

Для силы, действующей на верхнюю дугу вниз все полностью аналогично. Тогда окончательно:

$$\begin{cases} F_1 = \frac{18 q^2 \varepsilon_1}{\pi R l(\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2)^2} \\ F_2 = \frac{18 q^2 \varepsilon_2}{\pi R l(\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2)^2} \end{cases} \implies F = F_2 - F_1 = \frac{18 q^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\pi R l(\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2)^2}.$$

Ответ: $F = \frac{18 q^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\pi R l(\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2)^2}$.

Задача 4.36

Цепь постоянного тока состоит из длинной однопроводной линии, в которую включен источник с ЭДС $\mathscr{E}$. Линия замыкается через землю, в которую зарыты два металлических шара на большом расстоянии друг от друга. Известны радиусы шаров r_1 и r_2, а также проводимость грунта λ_1 и λ_2 в местах, где они закопаны. Пренебрегая всеми сопротивлениями, кроме сопротивления заземления, определить заряд каждого шара.

Дано:

$\mathscr{E}$

r_1

r_2

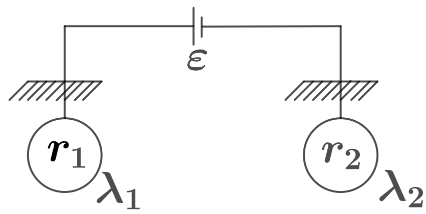
λ_1

λ_2

$q_1 = ?,\ q_2 = ?$

Решение:

Найдем напряженность электрического поля для одного из шаров. Для этого воспользуемся выражением для силы тока через плотность тока:



$$\begin{cases} I = jS = 4\pi r^2 j \\ j = \lambda E \end{cases} \implies E = \frac{I}{4\pi r^2 \lambda}$$

Теперь воспользуемся обычной формулой для напряженности:

$$\begin{cases} E = \frac{q}{r^2} \\ E = \frac{I}{4\pi r^2 \lambda} \end{cases} \implies q = \frac{I}{4\pi\lambda}$$

Найдем напряжение между шарами, считая что напряженность поля на бесконечности равна 0:

$$U = \int\limits_{r_1}^{\infty} \frac{Idr}{4\pi r^2 \lambda_1} + \int\limits_{r_2}^{\infty} \frac{Idr}{4\pi r^2 \lambda_2} = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1 r_1} + \frac{1}{\lambda_2 r_2}\right).$$

Воспользуемся законом Ома для нахождения сопротивления между шарами:

$$U = IR \implies R = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1 r_1} + \frac{1}{\lambda_2 r_2}\right)$$

С другой стороны $I = \frac{\varepsilon}{R}$

Теперь осталось подставить ток в формулу для заряда, написанную выше:

$$q_1 = \frac{4\pi\mathscr{E}\lambda_1\lambda_2 r_1 r_2}{(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2)4\pi\lambda_1} = \frac{\mathscr{E}\lambda_2 r_1 r_2}{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2} \qquad q_2 = \frac{4\pi\mathscr{E}\lambda_1\lambda_2 r_1 r_2}{(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2)4\pi\lambda_2} = \frac{\mathscr{E}\lambda_1 r_1 r_2}{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2}$$

Ответ: $q_1 = \frac{\mathscr{E}\lambda_2 r_1 r_2}{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2},\ q_2 = \frac{\mathscr{E}\lambda_1 r_1 r_2}{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2}$

5. Магнитное поле постоянного тока. Магнитный момент.

5.1. Магнитное поле:

Определение: Магнитное поле - это силовое поле, действующее на движущиеся заряды, токи и тела, обладающие магнитным моментом. Источниками магнитного поля являются токи(микроскопические и макроскопические), а также движущиеся заряды.

Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции $\vec{B}$, определяющим силу, действующую на движущийся заряд.

$$B = \frac{q}{cr^3}\left[\vec{V}, \vec{r}\right], \tag{5.1}$$

где $\vec{V}$ - это скорость частицы с зарядом q, c - скорость света.

Магнитная индукция через телесный угол:

$$B = \frac{i}{c} d\Omega, \tag{5.2}$$

где i - линейная плотность тока, а $d\Omega$ - телесный угол.

5.2. Закон Био-Савара-Лапласа:

Закон Био-Савара-Лапласа - это физический закон для определения вектора индукции магнитного поля, порождаемого постоянным электрическим током:

$$d\vec{B} = \frac{I}{cr^3}\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]. \tag{5.3}$$

Примеры применения закона Био-Савара Лапласа:

$$\vec{B} = \frac{2I}{cR} \qquad \text{Прямой провод} \tag{5.4}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{2\pi I R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{Круговой виток} \tag{5.5}$$

$$\vec{B} = \frac{2\pi n I}{c} \qquad \text{На торце длинного соленоида} \tag{5.6}$$

$$\vec{B} = \frac{4\pi n I}{c} \qquad \text{Внутри соленоида} \tag{5.7}$$

5.3. Магнитный момент:

Определение: Магнитный момент — основная физическая величина, характеризующая магнитные свойства вещества, то есть способность создавать и воспринимать магнитное поле.

$$\vec{m} = \frac{I}{c}\vec{S} \qquad \text{Виток с током} \tag{5.8}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int\limits_V \left[\vec{r}, \vec{j}\right] dV \qquad \text{Общий случай} \tag{5.9}$$

Магнитное поле на расстоянии R от источника:

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{m}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}. \tag{5.10}$$

Момент сил, действующий на виток с током:

$$\vec{M} = \frac{IS}{c}\vec{B}. \tag{5.11}$$

5.4. Силы Лоренца и Ампера:

$$\text{Сила Лоренца:} \qquad \vec{F} = \frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right] \tag{5.12}$$

$$\text{Сила Ампера:} \qquad \vec{F} = \frac{I}{c}\int \left[d\vec{l}, \vec{B}\right] \tag{5.13}$$

Общая сила, действующая на заряд:

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right]. \tag{5.14}$$

5.5. Теорема о циркуляции:

Теорема о циркуляции записывается для конкретного контура, для которого выбирается направление обхода и положительное направление тока.

Теорема о циркуляции в интегральной форме:

$$\int \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}I. \tag{5.15}$$

Теорема о циркуляции в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{5.16}$$

где j - плотность тока.

Примеры использования теоремы о циркуляции:

$$B = \frac{4\pi}{c}nI \qquad \text{Поле соленоида}$$

$$B = \frac{2N}{cR}I \qquad \text{Поле тороидальной катушки}$$

5.6. Теорема Гаусса для магнитного поля:

Теорема Гаусса для магнитного поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0.$$

Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной форме:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0.$$

Задача 5.1°

Определите индукцию магнитного поля в центре крайнего витка длинного соленоида с плотностью намотки n витков/см. По виткам соленоида протекает постоянный ток I.

Дано:

n

I

$B = ?$

Решение:

Запишем выражение для магнитной индукции:

$$dB = \frac{In}{c} d\Omega \implies B = \frac{In}{c} \int\limits_0^{2\pi} d\Omega = \frac{2\pi In}{c}$$

Ответ: $B = \frac{2\pi nI}{c}$.

Задача 5.2°

Проводящий контур, по которому течет постоянный ток I, состоит из отрезков дуг и радиусов. Определите индукцию магнитного поля в точке O.

Дано:

I

r_1

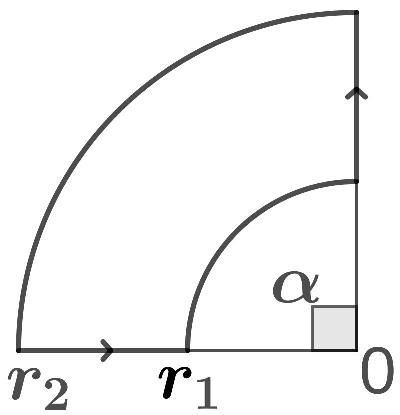
r_2

$B = ?$

Решение:

Запишем выражение для магнитной индукции B_1 через телесный угол (5.2):

$$dB_1 = \frac{I}{c} \frac{dl}{r^2}$$
$$B_1 = \frac{I}{cr^2} \frac{1}{4} 2\pi r_1 = \frac{\pi I}{2cr_1}.$$



Аналогичным образом получаем выражение для $B_2 = -\frac{\pi I}{cr_2}$.
Тогда по принципу суперпозиции:

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\pi I}{2c} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Ответ: $B = \frac{\pi I}{2c} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$.

Задача 5.3°

Плоский конденсатор с обкладками в виде круглых дисков радиуса R заполнен немагнитной слабо проводящей средой. Через конденсатор протекает постоянный ток I. Найдите индукцию магнитного поля на расстоянии $r \leq R$ от оси конденсатора.

Дано:

r

R

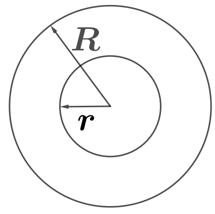
I

$B = ?$

Решение:

Воспользуемся теоремой о циркуляции (5.15):

$$B \cdot 2\pi r = \int\limits_{\sum_i I_i} B\, dl = \frac{4\pi}{c} \sum_i I_i = \frac{4\pi}{c} I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \implies B = \frac{2Ir}{cR^2}.$$



Ответ: $B = \frac{2Ir}{cR^2}$.

Задача 5.5

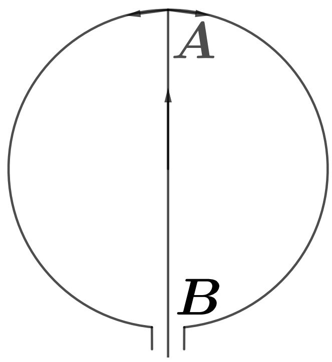
Найти индукцию B магнитного поля на оси соленоида в точке A, из которой диаметры торцов видны под углами 2α и 2β. Соленоид состоит из N витков, равномерно намотанных на длине l, и по нему течет ток I.

Дано:	**Решение:**
α β N l I	Воспользуемся формулой (5.2): $$\begin{cases} dB = \frac{i}{c}d\Omega \\ i = \frac{IN}{l} \\ \Omega = 2\pi(1-\cos\varphi) \end{cases} \implies dB = \frac{2\pi IN}{lc}d(1-\cos\varphi) = \frac{2\pi In}{lc}\sin\varphi d\varphi$$ $$\implies B = \frac{2\pi In}{lc}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi In}{lc}(\cos\beta - \cos\alpha)\,.$$
$B = ?$	**Ответ:** $B = \frac{2\pi In}{lc}(\cos\beta - \cos\alpha)\,.$

Задача 5.10

Внутри однородной проводящей сферы от точки A к точке B по диаметру большого круга проходит проводник. Ток I течет по проводнику от B к A, а затем по сфере к точке B. Определить внутри и вне сферы индукцию магнитного поля, создаваемого токами, текущими по проводнику и по сфере.

Дано:	**Решение:**
I	Запишем теорему о циркуляции (5.15) для небольшого круглого контура внутри сферы: $$\int\limits_L Bdl = \frac{4\pi}{c}I \implies 2\pi RB = \frac{4\pi}{c}I \implies B_{\text{внутр}} = \frac{2I}{cR}.$$ Магнитные поля, которые находятся вне сферы состоят из магнитных полей от сферы и от проводника. Эти поля одинаковы по значению и противоположны по знаку. Из-за этого $B_{\text{внеш}} = 0$.
$B = ?$	**Ответ:** $B_{\text{внутр}} = \frac{2I}{cR}$, $B_{\text{внеш}} = 0$.



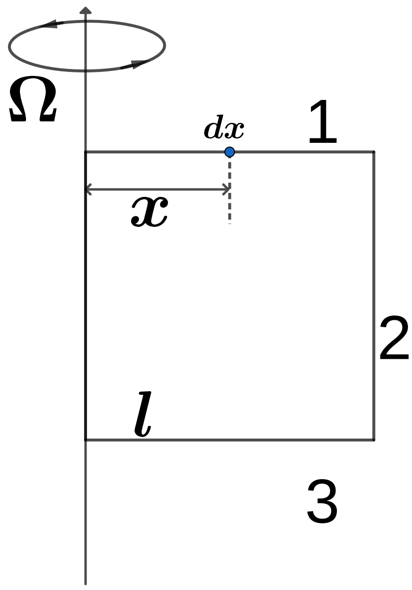
Задача 5.18

Равномерно заряженная с линейной плотностью $\varkappa$ квадратичная рамка со стороной l вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ вокруг одной из сторон. Вычислить магнитный момент m рамки.

Дано:	**Решение:**
$\varkappa$ l $\vec{\Omega}$	
$m = ?$	

Решение:

Рассмотрим элементарный заряд $dq = \varkappa dx$, находящийся на перпендикулярной вращении стороне, на расстоянии x от оси вращения и длиной dx. Тогда найдем ток, который он создает за период:



$$\delta I = \frac{dq}{T} = \frac{\varkappa dx \Omega}{2\pi}$$

Воспользуемся определением магнитного момента $m = \frac{I}{c} S$.

$$\delta m = \frac{\delta I}{c} S = \frac{\varkappa \Omega \pi x^2 dx}{2\pi c} \implies m_{13} = \frac{\varkappa \Omega l^3}{3c}.$$

Теперь сделаем то же самое, но для стороны параллельной оси вращения:

$$m = 2 = \frac{\varkappa l \Omega}{2\pi c} \pi l^2 = \frac{\varkappa \Omega l^3}{2c}.$$

Пользуемся принципом суперпозиции и складываем магнитные моменты:

$$\begin{cases} m_{13} = \frac{\varkappa \Omega l^3}{3c} \\ m_2 == \frac{\varkappa \Omega l^3}{2c} \end{cases} \implies m = m_{13} + m_2 = \frac{5}{6} \frac{\varkappa \Omega l^3}{c}.$$

Ответ: $m = \frac{5}{6} \frac{\varkappa \Omega l^3}{c}$.

Задача 5.26

В плоскости xy расположен круглый виток радиусом R_0, по которому течет ток I. Найти поток магнитной индукции через заштрихованную часть плоскости xy, если $R = 10R_0$.

Дано:

I

R_0

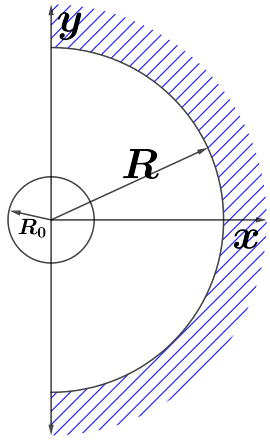
$R = 10R_0$

$\Phi = ?$

Решение:

Магнитный момент витка с током:

$$m = \frac{I}{c}S = \frac{I}{c}\pi R_0^2.$$



По аналогии с напряженностью электрического поля от диполя, магнитная индукция выражается через магнитный момент следующим образом:

$$B = -\frac{m}{r^3} = -\frac{I\pi R_0^2}{cr^3}.$$

Поскольку нас просят найти поток во всем пространстве $r > R$, то берем интеграл:

$$\Phi = \int\limits_R^\infty B\,dS = \frac{I\pi R_0^2}{c}\int\limits_R^\infty \frac{d(\pi r^2)}{r^3} = \frac{I\pi^2 R_0^2}{cR} = \frac{I\pi^2 R_0}{10c}.$$

Ответ: $\Phi = \frac{I\pi^2 R_0}{10c}$.

Задача 5.12

Длинный тонкий многовитковый соленоид с поверхностной плотностью тока i и площадью поперечного сечения $S = \pi r^2$ согнут так, что его ось образует половину окружности радиусом R. Найти величину магнитного поля B в центре этой окружности.

Дано:

i

$S = \pi r^2$

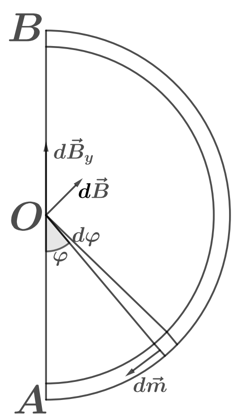
R

$B = ?$

Решение:

Выберем на соленоиде небольшой участок длиной dl и с углом раствора $d\varphi$. Найдем его вклад в магнитное поле:

$$\begin{cases} dm = \frac{I}{c}S \\ I = idl = iRd\varphi \\ d\vec{B} = -\frac{d\vec{m}}{r^3} \end{cases} \implies d\vec{B} = -\frac{iS}{cR^2}d\varphi$$



Так как соленоид имеет форму полуокружности, то в точке O горизонтальный вклад dB будет компенсироваться симметричными участками соленоида. Поэтому нас интересует только вертикальная составляющая $dB_y = dB\sin\varphi$. Интегрируем по углу φ:

$$B = -\frac{iS}{cR^2}\int\limits_0^\pi \sin\varphi d\varphi = \frac{2iS}{cR^2} = \frac{2i\pi}{c}\frac{r^2}{R^2}.$$

Ответ: $B = \frac{2i\pi}{c}\frac{r^2}{R^2}$.

Задача 5.14

По оси полого цилиндра натянута заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд $\varkappa = 1$ ед. СГСЭ. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\Omega = 1000$ рад/с. Определить магнитное поле B в материале цилиндра вдали от его торцов, пренебрегая пьезоэффектом и всеми эффектами ,вызываемыми центробежной силой. Определить также магнитное поле в полости цилиндра и во внешнем пространстве в случаях, если цилиндр: 1) металлический немагнитный; 2)диэлектрический ($\varepsilon = 3$).

Дано:

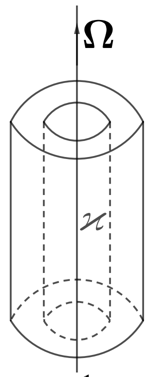
$\varkappa = 1$ ед.СГСЭ

$\Omega = 1000$ рад/с

$\varepsilon = 3$

$B = ?$

Решение:



Вращение цилиндра с зарядами на его поверхности создает магнитное поле. Из закона сохранения заряда суммарный заряд на цилиндре равен 0. Тогда суммарный ток равен 0. В полости цилиндра и вне его $B_{\text{внеш}} = 0$.
Напряженность электрического поля на внешней поверхности цилиндра $E = \frac{2\varkappa}{R}$.
В случае цилиндра металлического немагнитного

$$\sigma = \frac{E}{4\pi} = \frac{\varkappa}{2\pi R}.$$

В случае диэлектрического:

$$E = D = \varepsilon E_{\text{диэл}} + 4\pi P \implies \sigma_{\text{диэл}} = \frac{(\varepsilon-1)E_{\text{диэл}}}{4\pi} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\frac{E}{4\pi} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\frac{\varkappa}{2\pi R}.$$

Запишем ток на единицу длины цилиндра: $I = \sigma\Omega R$.
Для кругового витка с током:

$$B = \frac{4\pi I}{c} = \frac{4\pi\varkappa}{2\pi Rc}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\Omega R = \frac{2\varkappa\Omega}{c}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \approx 0.44\cdot 10^{-7}\ \text{Гс}.$$

Для первого случая:

$$B = \frac{2\varkappa\Omega}{c} \approx 0.67\cdot 10^{-7}\ \text{Гс}.$$

Ответ: В металле $B \approx 0.67\cdot 10^{-7}$ Гс, В диэлектрике $B \approx 0.44\cdot 10^{-7}$ Гс

Задача 5.23

По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, сделанным из немагнитного материала и изолированным друг от друга, текут в противоположных направлениях токи с одной и той же плотностью $j = 1000\frac{A}{см^2}$. Проводники ограничены цилиндрическими поверхностями. Найти величину и направление магнитного поля в полости П. Токи в проводниках противонаправлены. Расстояние между осями цилиндров $AB = d = 5$ см.

Дано:

$j = 1000\dfrac{\text{А}}{\text{см}^2}$

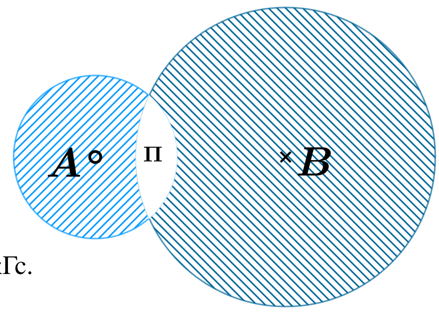
$d = 5$ см

$B = ?$

Решение:

Запишем выражение для магнитной индукции:

$$\vec{B} = \frac{2\pi}{c}\left[\vec{j},\vec{r}\right]$$



Воспользуемся принципом суперпозиции и запишем для точки П:

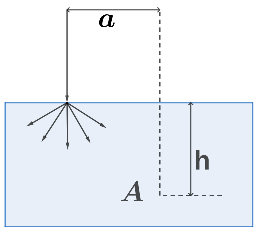
$$\vec{B} = \vec{B}_A + \vec{B}_B = \frac{2\pi}{c}\left[\vec{j},\vec{r}_A - \vec{r}_B\right] = \frac{2\pi}{c}[j,d] = \frac{2\pi}{c}jd = 3.14\ \text{кГс}.$$

Ответ: $B = 3.14$ кГс, .

Задача Т.6

Постоянный ток силы I подводится по вертикальному кабелю к полусферическому небольшому заземлителю и равномерно растекается в однородном грунте. Пренебрегая проводимостью окружающего воздуха, определить напряженность магнитного поля в грунте в точке A, расположенной на расстоянии a от оси провода на глубине $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Дано:	**Решение:**
I $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$	Ток в грунте растекается равномерно следовательно магнитное поле симметрично относительно оси, проходящей через кабель. Рассмотрим контур в грунте радиусом a и углом раствора α. Через этот контур проходит ток $I_к = I\frac{\Omega}{2\pi}$, где Ω телесный угол конуса. По теореме о циркуляции (5.15):
$B = ?$	



$$B2\pi a = \frac{4\pi}{c} I \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{c} I(1-\cos\alpha) \implies B = \frac{2I}{ca}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right) = \frac{I}{ca}$$

Ответ: $B = \frac{I}{ca}$.

6. Магнитное поле в веществе

6.1. Теоремы о циркуляции:

Теорема о циркуляции для вакуума в интегральной форме, примененненная к магнитному полю:

$$\oint_L \vec{B}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}(I + I_m),$$

где I - ток проводимости, а I_m - молекулярный ток.

Теорема о циркуляции для вакуума в дифференциальной форме, примененная к магнитному полю:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c}(i + i_m),$$

где i - токи проводимости, а $i_m = c \operatorname{rot} \vec{I}$ - молекулярные токи.

Введем **вектор напряженности магнитного поля**:

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{I}.$$

Теорема о циркуляции для магнитного поля в веществе в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I.$$

Теорема о циркуляции для магнитного поля в веществе дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{i}.$$

6.2. Намагниченность:

Введем понятие вектора намагниченности, обозначающего магнитный момент единицы объема:

$$I = \frac{\sum m_i}{V}.$$

Для диэлектриков и парамагнетиков выполняются следующие законы:

$$\vec{I} = \varkappa \vec{H},$$
$$\vec{B} = (1 + 4\pi\varkappa)\vec{H} = \mu \vec{H},$$

где $\varkappa$ - магнитная восприимчивость, $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$ - магнитная проницаемость.

Граничные условия:

$$\oint B\, dS = 0, \qquad \oint \vec{H}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \qquad \int (\vec{I_{out}}, d\vec{S}).$$

$$B_{n_1} = B_{n_2} \qquad H_{\tau_1} - H_{\tau_2} = \frac{4\pi}{c} j_{out}$$

Задача 6.3

Бесконечная плоская пластина изготовлена из однородного намагниченного ферромагнетика, причем вектор намагниченности $\vec{I}$ перпендикулярен плоскости пластины. Найти поля $\vec{B}$ и $\vec{H}$ внутри и вне пластины.

Дано:	**Решение:**
$\vec{I} \perp \alpha$ $B = ?,\ H = ?$	Из-за того, что $I \perp \alpha$ получаем, что $\vec{B}_{\text{внутр}} = 0$. Теперь $\vec{H}_{\text{внутр}} = \vec{B} - 4\pi\vec{I} = -4\pi\vec{I}$. Вне пластины заметим, что $\vec{B}_{out} = 0$ из граничных условий и $H_{out} = 0$, так как нет материала магнетика. **Ответ:** $\vec{B}_{\text{внутр}} = 0,\ \vec{B}_{out} = 0,\ \vec{H}_{\text{внутр}} = -4\pi\vec{I},\ \vec{H}_{out} = 0$.

Задача 6.4

Бесконечная плоская палстина изготовлена из однородного намагниченного ферромагнетика, причем вектор намагниченности $\vec{H}$ параллелен плоскости пластины. Найти поля $\vec{B}$ и $\vec{H}$ внутри и вне пластины.

Дано:

$\vec{H} \perp \alpha$

$B = ?,\ H = ?$

Решение:

По теореме о циркуляции для магнитного поля (6.1):

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\vec{I} \implies 2\vec{B}l = \frac{4\pi}{c}\vec{I} = \frac{4\pi}{c}\vec{i}l \implies B = 2\pi\frac{i}{c} = 2\pi\vec{I}$$

Рассмотрим условие $B \parallel \alpha$, то

$$\vec{B}_{\text{внутр}} = 2\vec{B} = 4\pi\vec{I} \implies \vec{H}_{\text{внутр}} = 4\pi\vec{I} - 4\pi\vec{I} = 0.$$

Из граничных условий получаем, что $B_{\text{снар}} = 0$ и $H_{\text{снар}} = 0$, так как нет материала магнетика.

Ответ: Внутри пластины: $\vec{B} = 4\pi\vec{I},\ \vec{H} = 0$, Снаружи пластины: $\vec{B} = 0,\ \vec{H} = 0$.

Задача 6.1°

Постоянный магнит длиной L с однородной намагниченностью I согнут в кольцо так, что между полюсами остался небольшой зазор $l \ll L$. Определите магнитную индукцию в зазоре.

Дано:

L

I

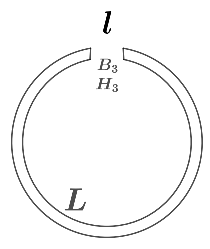
$l \ll L$

$B = ?$

Решение:

Так как токов в контуре нет, то $\vec{H} = 0$.

Запишем теорему о циркуляции для контура рядом с зазором:



$$H_з l + Hl = 0 \implies Bl + (B - 4\pi I)L = 0 \implies B = \frac{4\pi IL}{L + l} \approx 4\pi I$$

Ответ: $B = 4\pi I$

Задача 6.2°

Постоянный магнит изготовлен из однородно намагниченного материала и имеет форму тонкого диска толщиной d и площадью S. Вектор намагниченности $\vec{I}$ направлен по нормали к плоскости диска. Найти циркуляцию векторов индукции и напряженности магнитного поля $\vec{B}$ и $\vec{H}$ по контуру L, показанному на рисунке штриховой линией.

Дано:

d

S

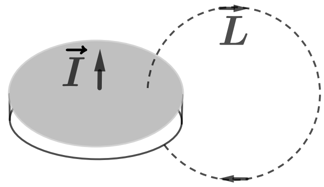
$I \perp \alpha$

$\oint B d\vec{l} = ?$, $\oint \vec{H} d\vec{l} = ?$

Решение:

Запишем теорему о циркуляции для магнитного поля (6.1) и учтем, что токов нет:

$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\vec{I} = 0$$



Теперь запишем обычную теорему о циркуляции:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \cancelto{0}{\oint \vec{H}\, d\vec{l}} + 4\pi \oint \vec{I}\, d\vec{l}.$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = 4\pi I d$$

Последнее выражение получается из-за того, что вклад дает только область магнетика.

Ответ: $\oint \vec{H}\, d\vec{l} = 0$, $\oint \vec{B}\, d\vec{l} = 4\pi I d$.

Задача 6.7

Стержень из магнитного материала ($\mu \gg 1$), имеющий формулу цилиндра радиусом r, помещен во внешнее однородное магнитное поле B_0, направленное вдоль его оси. В бесконечно длинном цилиндре индукция B, как известно была бы равна μB_0. Оценить при какой минимальной длине l индукция в центре цилиндра отличается от этого значения не более чем на 1%.

Дано:

r

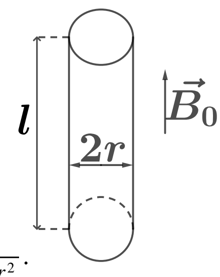
B_0

$l = ?$

Решение:

Внутри цилиндра конечной длины магнитная индукция равна $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{I}$. Так как $\vec{B} = \mu\vec{H}$, то

$$4\pi\vec{I} = (\mu - 1)\vec{H} = \frac{\mu - 1}{\mu}\vec{B}.$$



С другой стороны, индукция B в центре стержня равна

$$B = B_0 + 4\pi\vec{I}\left(1 - 2\frac{r^2}{l^2}\right) = B_0 + \frac{\mu - 1}{\mu}\left(1 - 2\frac{r^2}{l^2}\right) \implies B = \frac{\mu B_0}{1 + 2(\mu - 1)\frac{r^2}{l^2}}.$$

Искомое отношение по условию должно удовлетворять неравенству:

$$1 - \frac{B}{\mu B_0} = \frac{(\mu - 1)2\frac{r^2}{l^2}}{1 + 2(\mu - 1)\frac{r^2}{l^2}} \geq 0.01$$

Из этого неравенства получаем ответ: $l \geq 14.1 r\sqrt{\mu - 1}$.

Ответ: $l \geq 14.1 r\sqrt{\mu - 1}$

Задача 6.17

На железный сердечник постоянного сечения длиной $l = 1$ м с зазором $d = 1$ мм намотана катушка с числом витком $N = 1600$, по которой течет ток $I = 1$ А. Зависимость $B(H)$ материала сердечника представлена на графике. Определить магнитное поле в зазоре.

Дано:

$l = 1$ м

$d = 1$ мм

$I = 1$ А

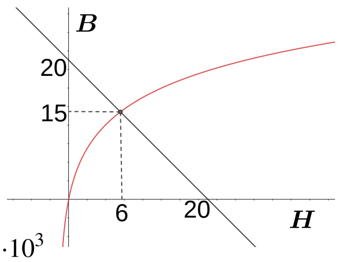
$N = 1600$

$B_з = ?$

Решение:

По теореме о циркуляции (6.1):

$$\oint Hdl = H_c l + H_3 d = \frac{4\pi}{c} I_N$$



Также заметим, что $H_3 = B_3$, так как $I_3 = 0$.

Запишем теперь выражение для функции $B(H)$:

$$H_c l + B_c(H_c)d = \frac{4\pi}{c} I_N \implies B(H) = -\frac{l}{d} H_c + \frac{4\pi}{cd} I_N = (-H_c + 20) \cdot 10^3$$

Из графика видно, что $B_c = B_3 = 15$ кГс.

Ответ: $B_3 = 15$ кГс.

Задача 6.12

По обмотке электромагнита, имеющего N витков, протекает ток I. Определить индукцию магнитного поля в небольшом зазоре, если все участки сердечника имеют одинаковые сечения, а магнитная проницаемость материала равна μ. Геометрические размеры указаны на рисунке и $d \ll l$.

Дано:

N

I

μ

l

$d \ll l$

$\mu H_3 = ?$

Решение:

Воспользуемся теоремой о циркуляции для 2 контуров $ABCA$ и $ADEA$ и учтем тот факт, что в зазоре $H = B = \mu H_3$:

$$\begin{cases} \oint\limits_{ABCA} = H_1 l + H_3(2l - d) + Hd = \frac{4\pi}{c} IN \\ \oint\limits_{ADEA} = H_1 l + H_2 2l = \frac{4\pi}{c} IN \\ H_1 = H_2 + H_3 \end{cases} \implies (H_2 + H_3)l + H_2 2l = (3H_2 + H_3)l = \frac{4\pi}{c} IN \implies$$

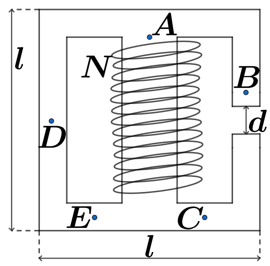
$$\implies H_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{4\pi}{c} IN - H_3\right).$$

Вычтем из 1 уравнения системы 2 и подставим туда полученное выражение для H_2:

$$H_3(2l - d) + \mu H_3 d - 2H_2 l = 0 \implies$$

$$\implies H_3(2l - d + \mu d) - \frac{8\pi}{3c} IN + \frac{2H_3 l}{3} = 0 \implies$$

$$\implies \mu H_3 = \frac{\mu 8\pi IN}{3c\left(\frac{8l}{3} - d + \mu d +\right)}.$$



Ответ: $\mu H_3 = \frac{\mu 8\pi IN}{3c\left(\frac{8l}{3} - d + \mu d +\right)}$.

Задача 6.52

В длинную катушку с плотностью намотки n вставлен постоянный магнит - стержень с однородной намагниченностью $\vec{\mathbf{I}}$ и поперечным сечением σ. В катушке течет постоянный ток I. H Найти поток вектора $\vec{H}$ через замкнутую поверхность цилиндра S. Левое основание цилиндра пересекается стержнем и катушки вдали от торцов.

Дано:

n

$\vec{\mathbf{I}}$

σ

I

$\oint \vec{H}\, d\vec{S} = ?$

Решение:

Воспользуемся теоремой Гаусса:

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0$$

$$\oint_S \left(\vec{H} + 4\pi\vec{\mathbf{I}}\right) d\vec{S} = \oint_S \vec{H}\, d\vec{S} + 4\pi \oint_S \vec{\mathbf{I}} d\vec{S} = \oint \vec{H}\, d\vec{S} - 4\pi\mathbf{I}\sigma = 0 \implies$$

$$\implies \oint_S \vec{H}\, d\vec{S} = 4\pi\mathbf{I}\sigma.$$

Ответ: $\oint_S \vec{H}\, d\vec{S} = 4\pi\mathbf{I}\sigma$.

Задача 6.5

Имеется тонкий длинный постоянный магнит длиной $2l$ и радиусом r, намагниченность которого $\vec{I} = const$. Начертить качественную картину линий $\vec{H}$ и $\vec{B}$. Найти индукцию $\vec{B}$ в точке A. Во сколько раз она больше, чем в точке C

Дано:

l

r

$\vec{I} = const$

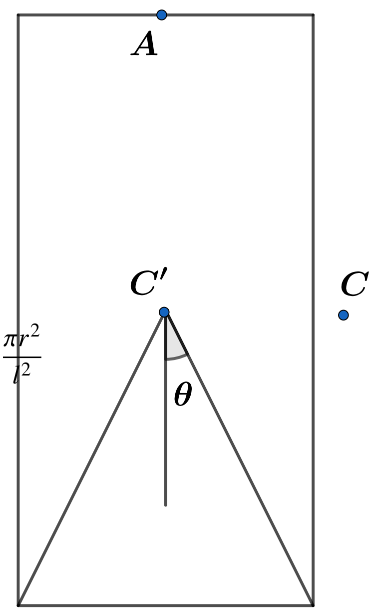
$B_A = ?,\ \dfrac{B_A}{B_C} = ?$

Решение:

Запишем выражения для точки A:

$$B_A = \frac{i}{c}\Omega_A = \frac{i}{c}\left(2\pi - \cancelto{0}{\Omega_0}\right) \approx 2\pi\frac{i}{c}$$

Ω_0 устремили к 0 из-за того, что магнит длинный.
Найдем поле в точке C', которая находится бесконечно близко к границе магнита изнутри. Запишем выражения для $B_{C'} = \frac{i}{c}\Omega_{C'} = I\left(4\pi - 2\Omega'\right)$



$$\Omega' = 2\pi(1 - \cos\theta) = 2\pi\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}}\right) = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2}}}\right) \approx \frac{\pi r^2}{l^2}$$

Подставляем в $B_{C'}$ и запишем выражение для H_C:

$$\begin{cases} B_{C'} = I\left(4\pi - 2\pi\frac{r^2}{l^2}\right) \\ H_{C'} = B_C = B_{C'} - 4\pi I = -2\pi I\frac{r^2}{l^2} \end{cases}$$

Запишем финальное выражение:

$$B_C = -2\pi I\frac{r^2}{l^2}, \quad \frac{B_A}{B_C} = \frac{2\pi I}{2\pi I\frac{r^2}{l^2}} = \frac{l^2}{r^2}.$$

Ответ: $B_C = -2\pi I\frac{r^2}{l^2}$, $\frac{B_A}{B_C} = \frac{l^2}{r^2}$.

Задача 6.9

Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности магнетика равна B_0, и вектор $\vec{B}_0$ составляет угол θ с нормалью $\vec{n}$ к поверхности. Магнитная проницаемость магнетика равна μ. Найти 1)Поток Φ_H вектора $\vec{H}$ через поверхность сферы S радиусом R, центр которой лежит на поверхности магнетика; 2) циркуляцию вектора $\vec{B}$ по квадратному контуру Γ со стороной l, расположенному как показано на рисунке.

Дано:

B_0

θ

μ

S

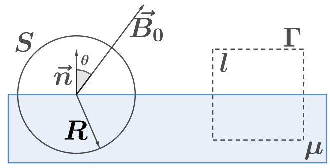
R

l

$\Phi_H =?$, $\oint \vec{B}\, d\vec{l} =?$

Решение:

Заметим, что напряженность по горизонтали не меняется, поэтому ответов на 1й вопрос будет изменение потока по вертикали.
Тогда запишем теорему о циркуляции, как разность выходящего и входящего потоков:



$$\Phi_H = B_0 \cos\theta \pi R^2 - \frac{B_0}{\mu} \cos\theta \pi R^2 = B_0 \cos\theta \pi R^2 \frac{\mu - 1}{\mu}$$

Теперь для контура Г: Заметим, что $H_0 = B_0$ в вакууме. Вспомним про граничные условия $H_{0\tau} = H_\tau = B_0 \sin\theta$ и $B_{0n} = B_n$.

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = B_0 \sin\theta l - \mu B_0 \sin\theta l = B_0 l \sin\theta (1 - \mu).$$

Ответ: $\Phi_H = B_0 \cos\theta \pi R^2 \frac{\mu-1}{\mu}$, $\oint \vec{B}\, d\vec{l} = B_0 l \sin\theta (1 - \mu)$.

Задача 6.18

Тонкий тороидальный сердечник радиусом R выполнен из мягкого железа с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$. Сердечник разрезан по диаметру, половинки раздвинуты на расстояние L, а затем один из зазоров замкнут постоянным мганитном. Намагниченность вещества магнита I. Пренебрегая рассеянием, найти поле в свободном зазоре.

Дано:

R

μ

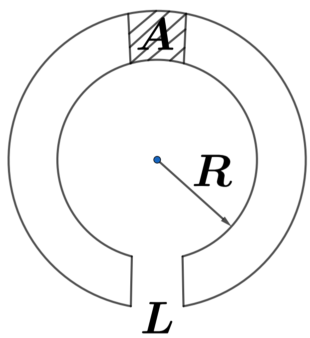
L

I

$B =?$

Решение:

Так как в объекте токов нет, то по теореме о циркуляции $\oint \vec{H} d\vec{l} = 0$. Тогда запишем теорему о циркуляции как сумму напряженностей на различных участках:



$$(B - 4\pi I) l + \frac{B}{\mu} 2\pi R + BL = 0 \implies B = \frac{2\pi I l \mu}{\pi R + \mu L}.$$

Ответ: $B = \frac{2\pi I l \mu}{\pi R + \mu L}$.

Задача Т.7

Сердечник тонкой тороидальной катушки изготовлен из магнетика, зависимость намагниченности $I(H)$ которого показана на рисунке. При некотором токе через катушку поле в сердечнике оказывается равным $\frac{1}{2}H_H$. При увеличении тока в 3 раза магнитная индукция B в сердечнике увеличивается в 2.1 раза. Определите магнитную проницаемость магнетика μ на участке линейного роста зависимости $I(H)$.

Дано:

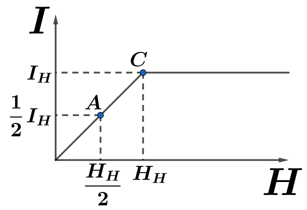
$I_2 = 3I_1$

$B_2 = 2.1B_1$

$\mu = ?$

Решение:

При I_1 напряженность $H_1 = \frac{H_H}{2}$. При $I_2 = 3I_1$ намагниченность $H_2 = 3\frac{H_H}{2}$.
На участке AC выполняется $I_H = \varkappa H_H$, где $\varkappa$ - магнитная восприимчивость и также $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$.
Теперь воспользуемся формулой $B = H + 4\pi I$ и применим эту формулу к точкам A и C:



$$\begin{cases} B_1 = \frac{H_H}{2} + 4\pi\varkappa\frac{H_H}{2} = \frac{H_H}{2}(1 + 4\pi\varkappa) = \frac{H_H}{2}\mu \\ B_2 = 3\frac{H_H}{2} + 4\pi I_H = 3\frac{H_H}{2} + 4\pi H_H\varkappa = \frac{H_H}{2}(1 + 2\mu) \end{cases} \implies B_2 = 2.1B_1 \implies$$

$$\implies \frac{H_H}{2}(1 + 2\mu) = 2.1\frac{H_H}{2}\mu \implies \mu = 10.$$

Ответ: $\mu = 10$

7. Электромагнитная индукция. Теорема взаимности. Магнитная энергия.

7.1. Работа сил в магнитном поле:

$$dA = (d\vec{F}, d\vec{r}) = \frac{I}{c}\left([d\vec{l}, \vec{B}], d\vec{r}\right) = \frac{I}{c}(\vec{B}, d\vec{S}) \tag{7.1}$$

$$\Delta A = \frac{I}{c}\oint_S \vec{B}d\vec{S} = \frac{I}{c}\Delta\Phi. \tag{7.2}$$

ЭДС Индукции определяется следующей формулой:

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}.$$

7.2. Движущиеся проводники:

В движущемся проводнике выражение для силы Лоренца выглядит следующим образом:

$$\vec{F}_{\text{л}} = \frac{e}{c}[\vec{U}, \vec{B}] = e\vec{E}_{\text{сторон}}. \tag{7.3}$$

ЭДС, появляющееся в движущихся проводниках:

$$\mathscr{E} = \oint(\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\oint\left(\vec{B}, [d\vec{r}, d\vec{l}]\right) = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}. \tag{7.4}$$

7.3. Самоиндукция:

Поток самоиндукции определяется следующим выражением:

$$\Phi = \frac{1}{c}LI,$$

где L - коэффициент самоиндукции.
Для соленоида $L = 4\pi\mu n^2 V$, где n- число витков, V- объем соленоида.

7.4. Энергия:

Магнитную энергию можно посчитать по одной из следующих формул:

$$W = \frac{1}{c}\frac{LI^2}{2} = \frac{1}{c}\frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L} = \int\frac{B^2}{8\pi\mu}dV.$$

7.5. Граничные случаи:

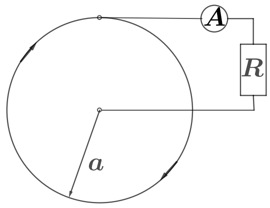
Для силы на единицу площади в случаях когда $\vec{f} \parallel \vec{H}$ и $\vec{f} \perp \vec{H}$:

$$f_n = \frac{(\mu_2 - \mu_1)H_2^2}{8\pi} \qquad\qquad f_n = \frac{(\mu_2 - \mu_1)H^2}{8\pi}.$$

Задача 7.1

Медный диск радиусом $a = 10$ см вращается в однородном магнитном поле, делая 100 оборотов в секунду. Индукция магнитного поля направлена перпендикулярно к плоскости диска и равна $B = 10^4$ Гс. Две щетки, одна на оси диска, другая на окружности, соединяют диск с внешней цепью, в которую включены реостат с сопротивлением $R = 10$ Ом и амперметр, сопротивлением которого можно пренебречь. Что показывает амперметр?

Дано:	**Решение:**
$a = 10$ см $B = 10^4$ Гс $R = 10$ Ом $\nu = 100$ с$^{-1}$	Запишем выражение для возникающего при вращении ЭДС:
$I = ?$	



$$\mathscr{E} = \int_0^a E dr = \int_0^a BV dr = \int_0^a B2\pi\nu r dr = 2\pi\nu B\frac{a^2}{2} = \pi\nu Ba^2$$

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\pi\nu Ba^2}{R} = \frac{3.14\cdot 100\cdot 1\cdot 10^{-2}}{10} = 0.314 \text{ А}.$$

Ответ: $I = 0.314$ А.

Задача 7.1°

Определить давление магнитного поля на стенки длинного соленоида кругового сечения, в котором создано магнитное поле $B = 10$ Тл. Какова при этом должна быть поверхностная плотность тока i?

Дано:	**Решение:**
$B = 10$ Тл	Вспомним про формулу для силы, действующей на единицу площади:
$P = ?,\ i = ?$	

$$p = f = \frac{B^2}{8\pi\mu} = \frac{B^2}{8\pi} = \approx 4 \text{ Па}.$$

С другой стороны можно записать выражение для магнитной индукции:

$$B = \frac{4\pi}{c}In = \frac{4\pi}{c}i \implies i = \frac{c}{4\pi}B = \frac{10^5}{4\pi} \approx 8\frac{\text{кА}}{\text{см}}.$$

Ответ: $P = 4$ Па, $i = 8\frac{\text{кА}}{\text{см}}$.

Задача 7.31

В опытах Сахарова сверхсильные магнитные поля получались взрывным сжатием отрезка проводящей цилиндрической трубы, внутри которой создано начальное магнитное поле с индукцией B_0. Определить индукцию поля B в трубе в момент максимального сжатия, если $B_0 = 5\cdot 10^4$ Гс, начальный внутренний радиус трубы $R = 5$ см, радиус в момент максимального сжатия $r = 0.5$ см. Оболочку, окружающую магнитное поле, считать идеально проводящей. Определить также давление P, необходимое для получения такого сжатия.

Дано:	**Решение:**
$B_0 = 5\cdot 10^4$ Гс $R = 5$ см $r = 0.5$ см	Будем считать, что в процессе эксперимента магнитный поток постоянен:
$B = ?,\ P = ?$	

$$\Phi = B_0\pi R^2 = B\pi r^2 \implies B = B_0\frac{R^2}{r^2} = 5\cdot 10^4\frac{5^2}{0.5^2} = 5\cdot 10^6 \text{ Гс}.$$

Плотность энергии магнитного поля равна давлению:

$$p = w = H\frac{B}{8\pi} \implies p = \frac{B^2}{8\pi} = \frac{25\cdot 10^12}{8\pi} = 10^6 \text{ атм}.$$

Ответ: $B = 5\cdot 10^6$ Гс, $p = 10^6$ атм.

Задача 10.1

Железный сердечник несет на себе две обмотки. Одна обмотка, из большого числа n витков, присоединена к источнику синусоидальной ЭДС $\mathscr{E}$. Другая обмотка состоит из одного кольца, сопротивление которого R. Точки A, B и C этого кольца отстоят друг от друга на равные расстояния. 1) Что покажет достаточно чувствительный амперметр переменного тока с сопротивлением r, если его присоединить к двум из этих точек? 2) Как изменится показание амперметра, если его перебросить в положение, указанное штриховой линией на рисунке? Железный сердечник не имеет магнитного рассеяния. Индуктивностью кольца и соединительных проводов можно пренебречь.

Дано:

$\mathscr{E}$

R

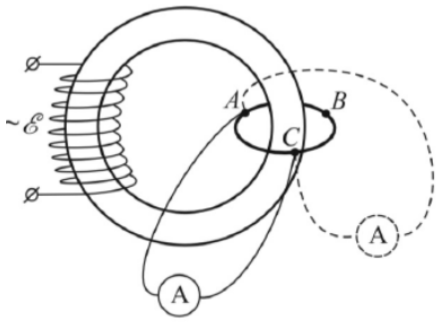
r

$I = ?$

Решение:

Найдем связь между ЭДС кольца и ЭДС обмотки:

$$\begin{cases} \mathscr{E}_k = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} \\ \mathscr{E} = -\frac{n}{c}\frac{d\Phi}{dt} \end{cases} \implies \mathscr{E}_k = \frac{\mathscr{E}}{n}.$$



Теперь запишем закон Кирхгофа для первого случая:

$$\begin{cases} I_{AC}\frac{r}{3} + I_{ABC}\frac{2R}{3} = -\mathscr{E}_k = -\frac{\mathscr{E}}{n} \\ I_{AC}\frac{R}{3} - I_1 r = 0 \\ I_{ABC} = I_{AC} + I_1 \end{cases} \implies I_1 = -\frac{3\mathscr{E}}{n(9r+2R)}$$

Во втором случае также запишем закон Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_{AC}\frac{R}{3} + I_{ABC}\frac{2R}{3} = -\frac{\mathscr{E}}{n} \\ I_{ABC}\frac{2R}{3} + I_2 r = 0 \\ I_{ABC} = I_{AC} + I_2 \end{cases} \implies I_2 = \frac{6\mathscr{E}}{n(9r+2R)}.$$

Ответ: $I_1 = \frac{\mathscr{E}}{n(9r+2R)}$, $I_2 = \frac{6\mathscr{E}}{n(9r+2R)}$

Задача 5.30

На один сердечник намотаны две катушки. Индуктивности катушек в отдельности соответственно равны $L_1 = 0.5$ Гн и $L_2 = 0.7$ Гн. Чему равна взаимная индуктивность M? Рассеяния магнитного поля нет.

Дано:

$L_1 = 0.5$ Гн

$L_2 = 0.7$ Гн

$M = ?$

Решение:

Запишем потоки, которые создают каждая из катушек. Также учтем, что ток в сердечнике течет одинаковый через 1 катушку и через 2 катушку:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{1}{c}\left(L_1 I + M I_2\right) \\ \Phi_2 = \frac{1}{c}\left(L_2 I + M I_1\right) \end{cases} \implies \Phi = \frac{1}{c}\left(L_1 I + 2MI + L_2 I\right) \implies L = L_1 + 2M + L_2.$$

Поймем, что при всех прочих равных зависит только от количества витков:

$$L_1 = kN_1^2 \qquad L_2 = kN_2^2 \qquad L = k(N_1 + N_2)^2$$

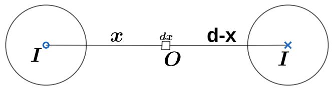
$$L = kN_1^2 + 2kN_1N_2 + kN_2^2 \qquad L = L_1 + 2M + L_2$$

Отсюда получаем, что $M = kN_1N_2 = \sqrt{L_1L_2} = \sqrt{0.7 \cdot 0.5} = 0.59$ Гн.

Ответ: $M = 0.59$ Гн.

Задача 5.29

Один и тот же ток течет по двум длинным параллельным проводам в противоположные стороны. Провода имеют круглые сечения радиусом $r = 2$ мм, а расстояние между ними $d = 2$ см. Найти индуктивность $L_{уд}$ единицы длины этой системы, учитывая магнитное поле только вне проводов.

Дано:	**Решение:**
$r = 2$ мм $d = 2$ см	Возьмем точку O, находящуюся на полоске толщиной dx. Тогда магнитная индукция: 
$L_{уд} = ?$	

$$\begin{cases} B_1 = \frac{2I}{cx} \\ B_2 = \frac{2I}{c(d-x)} \end{cases} \implies B = B_1 + B_2 = \frac{2I}{c}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)$$

Найдем элементарный поток, проходящий через полоску dx:

$$d\Phi = BdS = Bldx \implies \Phi = \frac{2Il}{c}\left(\int\limits_r^{d-r} \frac{dx}{x} + \int\limits_{d-r}^{r} \frac{dx}{d-x}\right) = \frac{4Il}{c}\ln\left(\frac{d-r}{r}\right).$$

Вспомним, что поток через площадку равен $\Phi = \frac{I}{c}L$. Выражая отсюда L получаем:

$$L = 4l\ln\left(\frac{d-r}{r}\right) \implies L_{уд} = 4\ln 9 \approx 8.79$$

Ответ: $L_{уд} = 8.79$

Задача 7.58

С какой силой втягивается в соленоид с полем B длинный цилиндрический стержень с магнитной проницаемостью μ и площадью поперечного сечения S? Стержень расположен на оси соленоида таким образом, что один его конец находится внутри, а другой вне соленоида. Магнитное поле соленоида вблизи первого можно считать однородным, вблизи второго конца(вне соленоида) - равным 0.

Дано:	**Решение:**
B μ S	Используем формулу для давления, которое совпадает с плотностью энергии, внутри стержня и снаружи:
$F = ?$	

$$\begin{cases} p_1 = \frac{B^2}{8\pi\mu} \\ p_2 = \frac{B^2}{8\pi} \end{cases} \implies F = (p_2 - p_1)S = \frac{B^2 S}{8\pi\mu}(\mu - 1).$$

Ответ: $F = \frac{B^2 S}{8\pi\mu}(\mu - 1)$

Задача 7.88

Внутри длинного соленоида с плотностью намотки витков n, замкнутого на резистор с сопротивлением R, расположена небольшая магнитная стрелка с магнитным моментом m. Ось стрелки перпендикулярна оси соленоида. Какой заряд q протечет через сопротивление R при повороте стрелки на 90°.

Дано:	**Решение:**
n R m	Запишем формулу для тока, протекающего через сопротивление R:
$q = ?$	

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = -\frac{1}{c}\frac{\Phi}{\Delta t R} = -\frac{1}{c}\frac{\Delta B S}{\Delta t R}.$$

Изменение магнитной индукции будет равно изменению магнитной индукции соленоида с током:

$$\begin{cases} \Delta B = \frac{4\pi}{c} n I \\ m = \frac{I}{c} S \end{cases} \implies \Delta B = \frac{4\pi n m}{S}$$

Теперь используем, что $q = I\Delta t$ и получаем ответ:

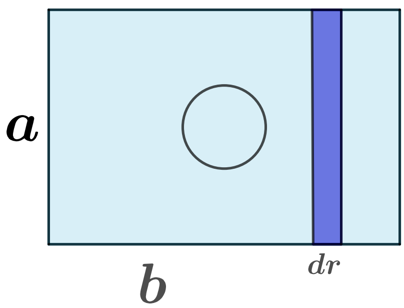
$$q = \frac{\Delta B S}{cR} = \frac{4\pi n m S}{cRS} = \frac{4\pi n m}{cR}.$$

Ответ: $q = \frac{4\pi n m}{cR}$.

Задача 5.33

Вычислить коэффициент взаимоиндукции M между катушкой, намотанной на тор прямоугольного сечения и бесконечным прямолинейным проводом, идущим по оси тора. Длина стороны поперечного сечения тора , параллельной проводу - a, перпендикулярной к нему - b, радиус внутренней поверхности тора R, число витков катушки N.

Дано:	**Решение:**
a b N	Рассмотрим небольшой участок, перпендикулярный стороне b, шириной dr. Тогда поток от участка:
$M = ?$	



$$\Phi = \int H(r) dS = \int\limits_R^{R+b} \frac{2IN}{cr} a\, dr = \frac{2INa}{c} \ln\left(\frac{R+b}{b}\right).$$

С другой стороны, поток через коэффициент взаимоиндукции:

$$\Phi = \frac{1}{c} M I \implies M = 2Na \ln\left(1 + \frac{b}{R}\right).$$

Ответ: $M = 2Na \ln\left(1 + \frac{b}{R}\right)$.

Задача 5.28

Определить индуктивность L проводника, показанного на рисунке(сечение - круг) Ток течет по проволоке диаметром 1 мм, расположенной по оси достаточно тонкой металлической трубки, переходит на дно трубки, к центру которого припаяна проволока, и возвращается обратно по поверхности трубки. Размеры трубки даны на рисунке.

Дано:

$a = 1$ мм

$l = 400$ мм

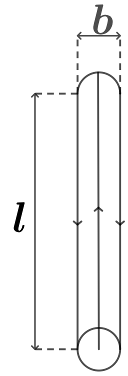
$b = 20$ мм

$L =?$

Решение:

Поток от участка проводника радиусом dr определяется формулой:

$$d\Phi = \frac{2I}{cr}dS = \frac{2I}{cr}l\,dr \implies \Phi = \int_a^b \frac{2I}{cr}l\,dr = \frac{2Il}{c}\ln\frac{b}{a}$$



Также поток через определение индуктивности:

$$\begin{cases} \Phi = \frac{I}{c}L \\ \Phi = \frac{2Il}{c}\ln\frac{b}{a} \end{cases} \implies L = 2l\ln\frac{b}{a} = 20.4\ln\frac{20}{1} = 2.4 \text{ м.}$$

Ответ: $L = 2.4$ м.

Задача 7.64

Электромагнит из железного бруса квадратного сечения в форме подковы имеет размеры в сантиметрах, указанные на рисунке. Число витков обмотки $N = 200$. Сила тока $I = 2A$. Как велика подъемная сила F электромагнита, если $\mu = 200$?

Дано:

$N = 200$

$\mu = 200$

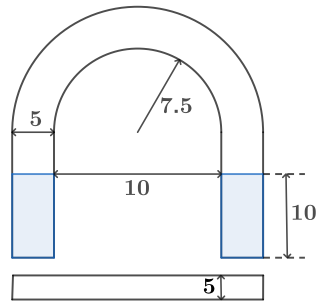
$I = 2$ A

$F =?$

Решение:

Воспользуемся теоремой о циркуляции для магнитного поля (6.1):

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}IN = \frac{B}{\mu}l + B2x \implies B = \frac{\frac{4\pi}{c}IN}{\frac{l}{\mu}+2x} = \frac{4\pi\mu}{c}\frac{IN}{l+2\mu x}.$$



Энергия магнитного поля будет состоять из 2 слагаемых: энергии внутри металла и энергии в зазоре:

$$W = \frac{B^2Sl}{8\pi\mu} + \frac{B^2Sx2}{8\pi}$$

Вспомним, что сила совпадает с производной энергии:

$$F = \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{4\pi\mu^2}{c^2}\frac{I^2N^2}{(l+2\mu x)^2}S \approx \frac{4\pi I^2N^2\mu^2 S}{c^2l^2} = \frac{4\pi 0.2^2\cdot 4\cdot 10^4\cdot 4\cdot 10^4\cdot 25}{64\cdot 64} = 49 \text{ Н.}$$

Ответ: $F = 49$ Н.

Задача 6.50

На тороидальный сердечник($\mu \gg 1$) с узким зазором намотаны 2 катушки. Точные измерения самоиндукции катушек дали значения: $L_1 = 0.152$ Гн, $L_2 = 0.385$ Гн. Катушки включили последовательно, при этом индуктивность оказалась равной $L = 0.945$ Гн. Оценить из этих данных, какая доля магнитного потока рассеивается из сердечника.

Дано:

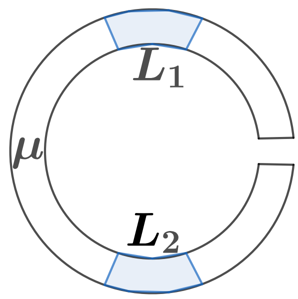
$L_1 = 0.152$ Гн
$L_2 = 0.385$ Гн
$L = 0.945$ Гн

$\dfrac{M_0 - M}{M_0} =?$

Решение:

Воспользуемся формулой из задачи 5.30 для взаимоиндуктивности:

$$M_0 = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{0.152 \cdot 0.385} \approx 0.242 \text{ Гн}.$$



Также вспомним, что индуктивность суммируется:

$$L = L_1 + L_2 + 2M \implies M = \frac{1}{2}(L - L_1 - L_2) \approx 0.204 \text{ Гн}.$$

Тогда найдем какая доля потока рассеивается из сердечника:

$$\frac{M_0 - M}{M_0} = \frac{0.038}{0.242} \approx 16\%.$$

Ответ: $\frac{M_0 - M}{M_0} = 16\%$.

Задача 8.47

Короткозамкнутой проволочной рамке в форме квадрата со стороной a, находящейся в магнитном поле, сообщена начальная скорость V_0 в направлении, перпендикулярном одной из сторон в плоскости рамки. Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости рамки, а величина его линейно изменяется в направлении начальной скорости так, что $\frac{dB}{dx} = k$. Найти скорость рамки через время t после начала движения. Масса рамки m, сопротивлениеR. Коэффициентом самоиндукции пренебречь, силу тяжести не учитывать.

Дано:

$\dfrac{dB}{dx} = k$
m
R
a
V_0

$V(t) =?$

Решение:

Так как рамка движется в изменяющемся магнитном поле, то внутри нее появляется ЭДС

$$\mathscr{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{a^2}{c}\frac{dB}{dt} = -\frac{a^2 V}{c}\frac{dB}{dx} = -\frac{k a^2 V}{c}.$$

В ходе движения теряется кинетическая энергия, которая уходит на нагрев:

$$-dW_k = \frac{\mathscr{E}^2}{R}dt \implies -mvdV = \frac{a^4 k^2 V^2}{c^2 R}dt \implies \frac{dV}{V} = -\frac{a^4 k^2}{c^2 m R}dt \implies V = V_0 \exp\left(-\frac{a^4 k^2 t}{c^2 m R}\right).$$

Ответ: $V = V_0 \exp\left(-\frac{a^4 k^2 t}{c^2 m R}\right)$.

8. Сверхпроводники в магнитном поле. Эффект Холла. Движение заряженных частиц.

8.1. Сверхпроводники:

Сверхпроводники обладают следующими свойствами: $R = 0, \mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = 0 \implies \Phi = const$.

Эффект Мейснера заключается в полном вытеснении магнитного поля из объема проводника при его переходе в сверхпроводящее состояние.

Граничные условия:

$$\Delta H_\tau = \frac{4\pi}{c} \qquad \vec{m} = -\frac{R^3}{2}\vec{B}_0 \qquad i = \frac{3l}{8\pi}B_0\cos\theta. \tag{8.1}$$

8.2. Сила Лоренца:

Обобщенная сила Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\frac{\vec{V}}{c}, \vec{B}\right]. \tag{8.2}$$

Заметим, что при $V = c\frac{E}{B}$ система движется равномерно и прямолинейно.

Циклотронная частота. В СО частицы все движется с циклотронной частотой. В ЛСО это выглядит как движение по циклоиде.

$$w_c = \frac{V}{R} = \frac{qB}{mc}. \tag{8.3}$$

8.3. Эффект Холла:

Эффект холла состоит в возникновении на боковых гранях проводника с током, помещенного в поперечное магнитное поле, разности потенциалов, пропорционально I и B.

Пусть E_x - напряженность, обусловленная ЭДС Холла, h - толщина проводника. Тогда $U_x = E_x h$.

Перераспределение зарядов прекратится в момент, когда

$$\begin{cases} qE_x = qVB \implies E_x = VB = B\frac{j}{nq} \\ U_x = \frac{RBI}{a} \\ n = \frac{IB}{qaU_x} \end{cases} \tag{8.4}$$

где j - плотность тока, n - число носителей заряда. Вводится также коффициент Холла $R_x = \frac{1}{qn}$.

Задача 6.35

Над плоской поверхностью сверхпроводника 1 рода на изолирующем слое толщиной $h = 5$ мм лежит тонкое сверхпроводящее кольцо радиусом $R = 10$ см, по которому течет постоянный ток I. При каком токе I кольцо начнет парить над сверхпроводником, если масса кольца $m = 1$ г?

Дано:	**Решение:**
$h = 5$ мм $R = 10$ см $m = 1$ г	Рассмотрим ситуация для момента отрыва: $F_1 = F_2$. Запишем выражения для двух сил, действующих в системе: сила Ампера и сила тяжести. $$\begin{cases} f = \frac{IBl}{cl} = \frac{IB}{c} \\ f = \frac{mg}{l} = \frac{mg}{2\pi R} \end{cases} \implies \frac{BI}{c} \geq \frac{mg}{2\pi R} \implies I \geq \frac{mgc}{2\pi RB}$$
$I =?$	Из-за того, что $R \gg h$ можно считать, что каждый небольшой элемент кольца можно рассматривать как провод. Магнитная индукция для проводника $B = \frac{2I}{c2h} = \frac{I}{ch}$. Тогда окончательно $$I \geq \frac{mgc^2h}{2\pi RI} \implies I \geq c\sqrt{\frac{mgh}{2\pi R}} = 3 \cdot 10^10\sqrt{\frac{1 \cdot 1000 \cdot 0.5}{2\pi \cdot 10}} \approx 8.4 \cdot 10^10 \text{ ед. СГСЭ.}$$ **Ответ:** $I \geq 8.4 \cdot 10^10$ ед. СГСЭ.

Задача 8.9

Найти отношение силы кулоновского расталкивания к силе притяжения Ампера двух параллельных пучков электронов, прошедших ускоряющий потенциал $U = 10$ кВ.

Дано:	**Решение:**
$U = 10$ кВ.	Запишем закон сохранения энергии для пучка электронов: $$\frac{mV^2}{2} \implies V^2 = \frac{2eU}{m}$$
$\frac{F_{\text{кл}}}{F_A} =?$	Теперь получим выражения для силы Кулона и силы Ампера: $$F_{\text{Кл}} = eE \qquad F_{\text{А}} = \frac{V^2}{c^2}eE$$ $$\frac{F_{\text{Кл}}}{F_{\text{А}}} = \frac{c^2}{V^2} = \frac{c^2m}{2eU} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4} \approx 25.\dot{6}$$ **Ответ:** $\frac{F_{\text{Кл}}}{F_{\text{А}}} = 25.6$

Задача 8.1°

Протон влетает в область поперечного магнитного поля $B = 5$ Тл со сокростью $V = 2.4 \cdot 10^{1}0$ см/с. Толщина области, занятой полем, $d = 50$ см. Найти уголь отклонения протона α от первоначального направления движения. Излучением пренебречь.

Дано:

$B = 5$ Тл

$v = 2.4 \cdot 10^{10}$ см/с

$d = 50$ см

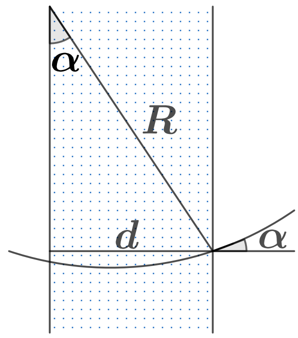
$\alpha = ?$

Решение:

Запишем 2-й закон Ньютона для протона:

$$\frac{mV^2}{R} = \frac{qVB}{c} \implies R = \frac{mVc}{qB}$$

Из геометрии получаем, что синус угла отклонения частицы $\sin\alpha = \frac{d}{R}$



$$\sin\alpha = \frac{dqB}{mVc} = \frac{50 \cdot 4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 5 \cdot 10^4}{10^{-24} \cdot 2.4 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^8} \approx \frac{3}{5} \implies \alpha \approx 37°.$$

Ответ: $\alpha \approx 37°$.

Задача 6.23

Шар радиусом R из сверхпроводника 1 рода внесен в постоянное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$. Определить магнитное поле $\vec{B}$ вне шара, если поле $\vec{B}_0$ еще не разрушает сверхпроводимость в шаре. Найти также поверхностную плотность сверхпроводящего тока i.

Дано:

R

$\vec{B}_0$

$B = ?$, $i = ?$

Решение:

Будем считать, что на однородное поле B_0 накладывается поле диполя с магнитным моментом m. Пусть диполь помещен в центре шара. Тогда

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{3(\vec{m},\vec{r})}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3}.$$

Момент $\vec{m}$ определяется из условия, чтобы нормальная составляющая вектора $\vec{B}$ на поверхности шара обращалась в 0:

$$B_n\Big|_{r=R} = B_0\cos\theta + \frac{2m}{R^3}\cos\theta = 0 \implies \vec{m} = -\frac{R^3}{2}\vec{B}_0.$$

Таким образом, искомое поле B вне шара:

$$\vec{B} = \vec{B}_0\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) - \frac{3R^3(\vec{B}_0,\vec{r})}{2r^5}\vec{r}.$$

Поверхностный ток сверхпроводимости течет вдоль парарллелей $\theta = const$. Из граничных условий на тангенциальную компоненту вектора H следует, что

$$(H_0 + H_{\text{дип}})_\tau\Big|_{r=R} = \frac{4\pi}{c}i(\theta) \implies i(\theta) = \frac{3c}{8\pi}B_0\sin\theta.$$

Ответ: $\vec{B} = \vec{B}_0\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) - \frac{\vec{m}}{r^3}$, $i(\theta) = \frac{3c}{8\pi}B_0\sin\theta$.

Задача 6.37

Найти распределение поверхностных токов i для плоской поверхности сверхпроводника, если на расстоянии $h = 1$ см от нее расположен прямолинейный достаточно длинный параллельный плоскости сверхпроводника тонкий провод, по которому течет ток $I = 10$ А. Найти также силу f, действующую на единицу длины провода.

Дано:

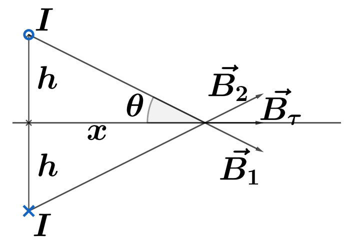
$h = 1$ см

$I = 10$ А

$i = ?,\ f = ?$

Решение:

Воспользуемся методом изображений и поместим провод с током I, текущем в противоположном направлении, на расстоянии $2h$ от изначального проводника. Тогда, аналогично задаче 6.35, $f = \frac{I^2}{c^2 h} = 1$ Дин/см. Воспользуемся теоремой о циркуляции и рассмотрим нормальную составляющую B_n, также учтем, что проводником является провод:



$$\begin{cases} B_n = 2H\sin\theta = \frac{2Bh}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{4\pi}{c} i \\ B = \frac{2I}{c\sqrt{h^2+x^2}} \end{cases} \implies \frac{4\pi}{c} i = \frac{4Ih}{c(h^2+x^2)} \implies i = \frac{Ih}{\pi(x^2+h^2)}.$$

Ответ: $f = 1$ Дин/см, $i = \frac{Ih}{\pi(x^2+h^2)}$.

Задача 8.30

В ускорителе электронов бетатроне роль ускоряющего напряжения играет ЭДС индукции, возбуждаемая изменением магнитного потока, пронизывающего орбиту электронов. Электроны движутся при этом по орбитам приблизительно постоянного радиуса. Считая радиус орбиты электрона неизменным, определить необходимое для этого в данный момент времени соотношение между средним магнитным полем $\overline{B(t)}$, пронизывающим орбиту электрона, и магнитным полем на орбите электрона $B_0(t)$. Магнитное поле параллельно оси симметрии вакуумной камеры бетатрона.

Дано:

$r = const$

$\frac{\overline{B}}{B_0} = ?$

Решение:

Воспользуемся законом Фарадея:

$$\mathscr{E} = \oint \vec{E} d\vec{l} = E 2\pi R = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\pi R^2}{c}\frac{d\overline{B}}{dt} \implies E = \frac{R}{2c}\frac{d\overline{B}}{dt}.$$

Запишем 2й закон Ньютона:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{1}{c} e B_0 v \implies R = \frac{mvc}{eB_0} = \frac{pc}{eB_0} \implies p = \frac{ReB_0}{c}$$

Из условия задачи знаем, что $R = const$. Тогда $R' = 0$. Продифференцируем полученное выражение для импульса:

$$R' = \frac{p'c}{eB_0} - \frac{pcB_0'}{eB_0^2} = 0 \implies p' = \frac{B'p}{B_0}.$$

Еще раз запишем 2й закон Ньютона через импульс:

$$\frac{dp}{dt} = eE = \frac{eR}{2c}\frac{d\overline{B}}{dt} \implies \frac{eR}{2c}\frac{\overline{B}}{dt} = \frac{dB_0}{dt}\frac{ReB_0}{cB_0} \implies \frac{1}{2} d\overline{B} = dB_0 \implies \frac{\overline{B}}{B_0} = 2.$$

Ответ: $\frac{\overline{B}}{B_0} = 2$.

Задача 8.69

В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d помещен в поток проводящей жидкости с проводимостью λ, двигающейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Система находится в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной перпендикулярно плоскости рисунка. Какая мощность N выделяется во внешней цепи, имеющей сопротивление R?

Дано:

S

d

λ

$\vec{v}$

R

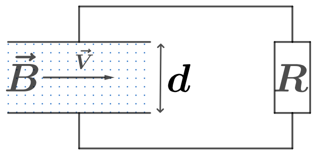
$\vec{B}$

$N = ?$

Решение:

ЭДС индукции, возникающее из-за движения конденсатора $\mathscr{E} = Bvd$. Ток, образующийся в системе, по закону Ома равен $I = \frac{\mathscr{E}}{R+r}$.

Найдем сопротивление и мощность:



$$r = \rho\frac{d}{s} = \frac{d}{\lambda S}$$

$$N = I^2R = \frac{\mathscr{E}^2R}{(R+r)^2} = \left(\frac{Bvd}{\frac{d}{\lambda S} + R}\right)^2 R.$$

Ответ: $N = \left(\frac{Bvd}{\frac{d}{\lambda S}+R}\right)^2 R.$

Задача 7.83

На какой высоте h постоянный магнитик с магнитным моментом $M = 10^3$ Гс · см^3 и массой $m = 10$ г будет парить в горизонтальном положении над плоской горизонтальной поверхностью сверхпроводника 1 рода? Магнитик считать точечным диполем.

Дано:

$M = 10^3$ Гс · см^3

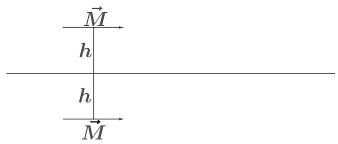
$m = 10$ г

$h = ?$

Решение:

Воспользуемся методом зеркальных изображений и поместим магнит с магнитным моментом M на расстоянии h от поверхности.

Тогда найдем с какой силой действует первый магнит на второй:



$$\begin{cases} B = -\frac{M}{r_3} \\ F = M\frac{dB}{dr} \end{cases} \implies F = \frac{3M^2}{r^4}.$$

Теперь воспользуемся 2 законом Ньютона:

$$F = mg \implies \frac{3M^2}{16h^4} = mg \implies h = \frac{1}{2}\left(\frac{3M^2}{mg}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3\cdot 10^6}{10\cdot 1000}\right)^{\frac{1}{4}} = 2.1 \text{ см}.$$

Ответ: $h = 2.1$ см.

Задача 8.34

В скрещенных однородных полях $\vec{E}$ и $\vec{B}$ ($\vec{E} \perp \vec{B}$) из некоторой точки x_0 разлетаются электроны с одинаковыми скоростями $v \ll c$, лежащими в плоскости Oxy. Считая $E \ll B$ (в СГСЭ) и пренебрегая взаимодействием электронов друг с другом, найти, на каком расстоянии l и через какое время T они снова соберутся в одну точку. Изобразить траекторию частицы, если известно, что в начальный момент она покоилась в точке x_0.

Дано:	**Решение:**
$\vec{E}$ $\vec{B}$ $\vec{E} \perp \vec{B}$ $E \ll B$ $v \ll c$ x_0	Запишем 2й закон Ньютона с полным выражением для силы Лоренца: $$m\frac{d\vec{V}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right].$$ Перейдем в СО, в которой электрическое поле не действует: $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{U}$, где $\vec{U} = const$. $$m\frac{d\vec{V}'}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{V}', \vec{B}\right] + \frac{e}{c}\left[\vec{U}, \vec{B}\right].$$ В нашей СО электрическое поле не действует, а значит следующие слагаемые должны взаимоуничтожаться:
$l =?,\ T =?$	$$eE = \frac{e}{c}UB \implies U = \frac{Ec}{B}.$$ При действии магнитного поля на частицу, она начинает двигаться по оркужности. Запишем 2й закон Ньютона: $$m\frac{V'}{R} = \frac{1}{c}eV'B \implies mw = \frac{eB}{c} \implies w = \frac{eB}{mc} \implies T = 2\pi\frac{mc}{eB}.$$ В ЛСО **траекторией движения будет циклоида, начинающаяся в** x_0. Из-за движения по окружности находим, что $$l = UT = \frac{2\pi mEc^2}{eB^2}.$$ **Ответ:** $T = 2\pi\frac{mc}{eB}$, $l = 2\pi\frac{mEc^2}{eB^2}$.

Задача T.8

Длинный однородный металлический цилиндр радиусом $r = 30$ см несет на себе некоторый заряд, так что статическая напряженность поля на его боковой поверхности равна $E_0 = 30\frac{кВ}{см}$. Цилиндр подключили к идеальному вольтметру: одним контактом к оси, а другим скользящим контактом - к боковой поверхности в середине цилиндра. Какую разность потенциалов $\Delta\varphi$ покажет вольтметр при вращении цилиндра вокруг оси с угловой скоростью $w = 10^3$ рад/с? Центробежные эффекты не учитывать.

Дано:

$r = 30$ см

$E_0 = 30\dfrac{\text{кВ}}{\text{см}}$

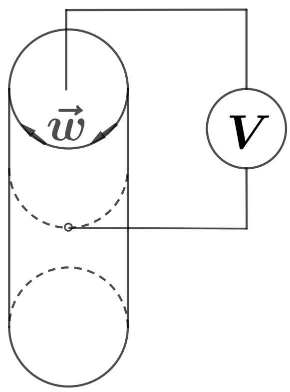
$w = 10^3$ рад/с

$\Delta\varphi = ?$

Решение:

В момент когда не было вращения, по теореме Гаусса, поток пронизывающий боковую поверхность цилиндра равен

$$E_0 2\pi r l = 4\pi q \implies \varkappa = \frac{q}{l} = \frac{E_0 r}{2}.$$



При вращении заряды на поверхности начнут двигаться и цилиндр начнет создавать поле такое же как у соленоида:

$$\begin{cases} B = \frac{4\pi}{c} i \\ i = \frac{w}{2\pi}\varkappa \end{cases} \implies B = \frac{4\pi}{c}\frac{w}{2\pi}\varkappa = \frac{2w\varkappa}{c}.$$

Заряды, находящиеся внутри, подвергаются действию 2 сил: силы магнитного поля и силы Ампера. Если не учитывать центробежные эффекты, то эти силы компенсируют друг друга:

$$qE = \frac{1}{c} qVB \implies E = \frac{Bwx}{c}$$

Теперь найдем разность потенциалов путем интегрирования напряженности поля:

$$\Delta\varphi = \int_0^r E(x)dx = \frac{2w^2\varkappa}{c^2}\int_0^r xdx = \frac{w^2 E_0 r}{2} = \frac{3\cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 27 \cdot 10^3}{2\cdot 9\cdot 10^20} \approx 0.45 \text{ мкВ}.$$

Ответ: $\Delta\varphi = 0.45$ мкВ.

Задача Т.9

В однородном магнитном поле $\vec{B}$, направленном вдоль оси y, находится сверхпроводящее кольцо, лежащее в плоскости xy. Масса кольца M, коэффициент самоиндукции L, радиус R. Найти период малых колебаний кольца при вращении вокруг оси x. Начало координат совпадает с центром кольца.

Дано:

$\vec{B}$

M

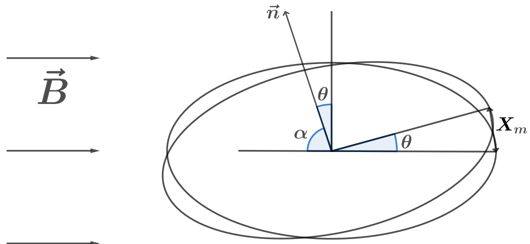
L

R

$T = ?$

Решение:

Заметим, что общий магнитный поток через кольцо $\Phi = 0$. При колебаниях кольца создаваемый магнитный поток должен скомпенсировать внешний поток.



$$LI_m = BS\cos\alpha_m,$$

где I_m - максимальный ток(наблюдается при максимальном отклонении), α - угол между потоком и нормалью к рамке.
Из тригонометрии получаем

$$\cos\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta = \frac{x_m}{R}$$

Тогда из первого равенства находим максимальный ток:

$$I_m = \frac{BSx_m}{RL}$$

При колебаниях кольца будет появляться возвращающая сила Ампера:

$$F_m = mx_m w^2 = I_m Bl \implies mx_m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{B^2\pi R^2 x_m 2\pi R}{RL} \implies T = \frac{\sqrt{2mL}}{BR}.$$

Ответ: $T = \frac{\sqrt{2mL}}{BR}$.