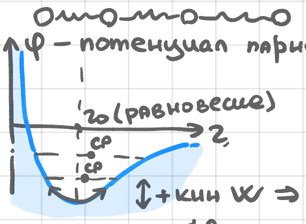
14) Теплофизические свойства твёрдых тел. Тепловое расширение. Изменение температуры при адиабатических деформациях

стержень. как он себя ведёт при изменении температуры?

$\delta Q = dU + \delta A$

$TdS = dU + PdV - \underbrace{f}_{\text{внешняя сила}} dl$ ⇒ изменение температуры при расширении и в обратную сторону

цепочка атомов крист. решётки



↕ + кин W ⇒ чем больше T, тем больше расстояние между молекулами

$$\varphi(r) = \varphi(r_0) + \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r_0}(r-r_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right)_{r_0}(r-r_0)^2 + \ldots$$ (Тейлор в окр. r_0)

$$\left[\begin{matrix} r-r_0 = x \\ \varphi(r_0)=\varphi_0 \end{matrix} \quad \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r_0} = 0 \text{ (усл. экстремума)} \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right)_{r_0} = a\ ;\ -\frac{1}{2}\left(\frac{d^3\varphi}{dr^3}\right)_{r_0} = b\right]$$

$$\varphi(r) = \varphi_0 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}bx^3 + \bar{o}(x^3)$$

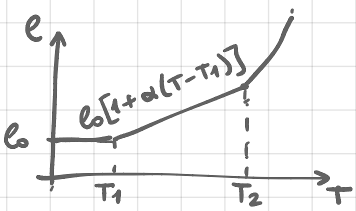
$$\underbrace{f}_{\text{сила взаимодействия}} = -\frac{d\varphi}{dx} = \underbrace{-ax}_{\text{упругость}} + \underbrace{bx^2}_{\text{поправка на несимметричность потенциала}}.$$ атом нах. в равновесии: $\langle f\rangle = 0 \Rightarrow a\langle x\rangle = b\langle x^2\rangle$

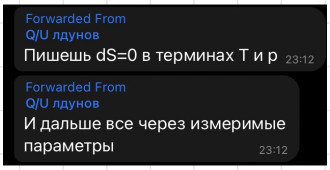
ср. пот. W = ср. кин. W:

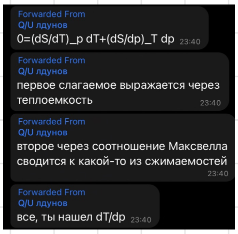
$$\frac{a\langle x^2\rangle}{2} = \langle K\rangle = \underbrace{\frac{1}{2}kT}_{\text{на одну степень свобод.}} \Rightarrow \langle x\rangle = \frac{b}{a^2}kT$$

коэффициент линейного расширения $\alpha = \frac{1}{r_0}\frac{d\langle x\rangle}{dT}$

$\alpha = \frac{bk}{r_0 a^2}$







$dS = 0$: адиаб. деформация

$$0 = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp$$

$$C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\frac{C_p}{T}dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp = 0$$

$$C_p\frac{dT}{T} - \alpha V dp = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dp} = \frac{\alpha V T}{C_p}$$

14. Теплофизические свойства твёрдых тел. Тепловое расширение, адиабатические деформации.

Уравнение состояния упругого стержня.

Состояние стержня характеризуется его длиной L, температурой T и растягивающей силой F. Соответственно, уравнение состояния связывает эти характеристики и может быть представлено в форме $L = L(T,F)$, или, что эквивалентно, $F = F(L,T)$.

При малых изменениях T в отсутствии внешней нагрузки ($F = 0$) длина стержня меняется по закону $L(T,0) = L_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, где $L_0 = L(T_0,0)$, а α - коэффициент линейного температурного расширения.
При $T = const$ удлинение стрежня под действием продольного усилия F описывается законом Гука: $\frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{ES}$, где E - модуль Юнга, S - площадь поперечного сечения.

$$\frac{L(T,F) - L(T,0)}{L(T,0)} = \frac{F}{ES}$$

Из условия отсутствия внешней нагрузки для $L(T,0)$:

$$F = ES\left(\frac{L}{L_0(1 + \alpha(T - T_0))} - 1\right) \approx ES\left(\frac{L}{L_0}(1 - \alpha(T - T_0)) - 1\right)$$

Это есть уравнение состояния упргугого стержня при малых деформациях.

Адиабатические деформации.

Пусть стержень окружён адиабатической оболочкой. При квазистатической деформации:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_L dT + \left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T dL = 0$$

$$dT = -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_L} dL$$

$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_L = \frac{c_L}{T}$

В знаменателе: $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_L = \frac{c_L}{T}$, где c_L - теплота при $L = const$.
В числителе: для деформации растяжения стержня $dU = TdS + fdL$, где f - растягивающая сила, приложенная к стержню.

Вводя свободную энергию $F = U - TS$, имеем: $dF = -SdT + fdL$, откуда $\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_L$.
Таким образом получаем:

$$dT = \frac{T}{c_L}\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_L dL$$

Тепловое расширение.

Из уравнения состояния стержня имеем:

$$f = E\Pi\left(\frac{L}{L_0(1 + \alpha(T - T_0))} - 1\right) \approx ES\left(\frac{L}{L_0}(1 - \alpha(T - T_0)) - 1\right)$$

где Π - площадь поперечного сечения.
Для идеального стержня $E = const$, $\alpha = const$, поэтому

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_L = -E\Pi\alpha\frac{L}{L_0}$$

Пусть $c_L = const$ и $|L - L_0| \ll L_0$. Находим изменение температуры при конечной деформации:

$$\Delta T = \int\limits_{L_0}^{L} \frac{T}{c_L}\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_L dL = -\frac{E\Pi\alpha}{2c_L L_0}T(L^2 - L_0^2) \approx -\frac{E\Pi\alpha}{c_L}T(L - L_0)$$

Таким образом, при растяжении ($L > L_0$) температура стержня понижается, так как при адиабатическом растяжении совершается работа против внутренних сил притяжения молекул.