

Экзаменационная программа
ко курсу «Введению в математический анализ»
осенний семестр 2023–2024 учебного года
(кроме ЛФИ и ФПМИ)

1. Действительные числа. Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

2. Теорема Кантора о вложенных отрезках.

3. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число e . Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства.

4. Подпоследовательности, частичные пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши существования конечного предела последовательности.

5. Определения предела числовой функции одного переменного в терминах окрестностей и в терминах последовательностей, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменного под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонных функций.

6. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Односторонняя непрерывность. Непрерывность сложной функции. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

7. Свойства функций, непрерывных на отрезке — ограниченность, достижимость точных верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Равномерная непрерывность функции, непрерывной на отрезке. Теорема об обратной функции.

8. Непрерывность элементарных функций. Определение и свойства показательной функции, *логарифмической и степенной функций*¹. Замечательные пределы.

9. Производная функции одного переменного. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции.

¹ Для потока В.Ж. Сакбаева.

Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного. Функции, заданные параметрически, их дифференцирование.

10. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n -й производной произведения функций. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменного.

11. Теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Основные разложения по формуле Тейлора. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

12. Применение производной к исследованию функций. Необходимые условия и достаточные условия монотонности, достаточные условия существования локального экстремума в терминах первой, второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Необходимые условия и достаточные условия выпуклости. Асимптоты.

13. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкая кривая, касательная к гладкой кривой, допустимая замена параметра. Оценка приращения вектор-функции через производную. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.