Консультация к семетровой контрольной работе по математическому анализу, 1 курс

Павел Мещеряков
Б02-920с

17 ноября 2022 г.

Вместо введения.

Семестровая контрольная по математическому анализу - лишь одно из жизненных испытаний, которое вам предстоит пройти. Будьте уверены: каждому, кто ботал предыдущие месяцы (ну или последние пару дней), по силам написать КР. Все задания составлены на основе институтской программы. Поэтому каждый из вас может успешно с ней справиться.

Советы.

- поботайте варианты прошлых лет;
- узнайте где и во сколько вы пишете работу;
- в ночь перед контрольной настоятельно рекомендую **ВЫСПАТЬСЯ**;
- возьмите с собой 2 чистые тонкие тетрадки и ручку (лучше иметь запасные);
- **НЕ ПИШИТЕ** решения **В ЧЕРНОВИКЕ**, у вас не так много времени, переписывать будет некогда.
- **НЕ БЕРИТЕ** с собой шпоргалки, если вас поймают, то могут выгнать;
- проверяйте каждую решённую задачу.

Здесь находится запись консультации.

Задачи, которые разобраны ниже, взяты с сайта кафедры высшей математики, там вы сможете найти варианты контрольных прошлых лет, к некоторым из них есть даже ответы.

О замеченных ошибках/опечатках/неточностях можно (нужно!) писать мне в лс.

1 Производная крокодила.

Советы.
Перед контрольной нужно повторить

- табличные производные (на самом деле не обязательно знать на память все, можно помнить лишь несколько, из которых выводятся все остальные);
- правила вычисления производных: $\pm, \times, \div$;
- производная сложной и обратной функций;

По поводу оформления решения

- при вычислениях не делайте никакие упрощения в уме, лучше нудно и аккуратно выписывать каждый множитель и коэффициент, это **ОЧЕНЬ СИЛЬНО** упростит вашу дальнейшую проверку написанного и **сэкономит** бесценное время;
- вашу работу будет легче проверять преподавателю, если при выписывании ответа вы не будете ничего преобразовывать, тем более, если вы упростили не правильно, то потеряете драгоценные баллы за задачу;
- чтобы к вам не смогли придраться, **ответ должен быть выписан полностью** (т.е. не надо писать общий вид ответа, а дальше указывать что и куда в него нужно подставлять).

2013-В1-№1. Найти производную функции (ответ можно не упрощать)

$$y = \left(\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x^2 + e^{\operatorname{tg} x}}}{\ln\left(\arcsin x^2\right)} \right)^{x^3 \operatorname{ch} x}$$

.

Решение.
Каждый должен выработать у себя условный рефлекс: если видите какую-то функцию, возводящуюся в степень какой-то другой функции, то сразу переписываете её в терминах экспоненты.

$$y = \left(\frac{f}{g}\right)^h \Rightarrow y = \exp\left(h \ln\left(\frac{f}{g}\right)\right), \text{ где } f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x^2 + e^{\operatorname{tg} x}},\ g(x) = \ln\left(\arcsin x^2\right),\ h(x) = x^3 \operatorname{ch} x.$$

Выведем общий вид нашего будущего ответа

$$y' = \exp\left(h \ln\left(\frac{f}{g}\right)\right) \cdot \left(h' \ln\left(\frac{f}{g}\right) + h \cdot \left(\frac{f}{g}\right)^{-1} \cdot \frac{f'g - fg'}{g^2}\right) = y \cdot \left(h' \ln\left(\frac{f}{g}\right) + h \cdot \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right)\right).$$

Теперь методично вычисляем производную каждой из введённых функций $f,\ g,\ h$.

$$f' = \frac{1}{3}\left(\sin^2\left(x^2\right) + e^{\operatorname{tg}(x)}\right)^{-2/3} \cdot \left(2\sin x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\operatorname{tg}(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right).$$

$$g' = \frac{1}{\arcsin x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot 2x.$$

$$h' = 3x^2 \operatorname{ch} x + x^3 \operatorname{sh} x.$$

Теперь мы можем просто подставлять функции и их вычисленные производные в общий вид ответа.

Ответ:

$$y' = \left(\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x^2 + e^{\operatorname{tg} x}}}{\ln\left(\arcsin x^2\right)}\right)^{x^3 \operatorname{ch} x} \cdot \left((3x^2 \cosh x + x^3 \sinh x) \ln\left(\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x^2 + e^{\operatorname{tg} x}}}{\ln\left(\arcsin x^2\right)}\right) + \right.$$
$$\left. + x^3 \operatorname{ch} x \cdot \left(\frac{\frac{1}{3}\left(\sin^2\left(x^2\right) + e^{\operatorname{tg}(x)}\right)^{-2/3} \cdot \left(2\sin x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\operatorname{tg}(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right)}{\sqrt[3]{\sin^2 x^2 + e^{\operatorname{tg} x}}} - \frac{\frac{1}{\arcsin x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot 2x}{\ln\left(\arcsin x^2\right)}\right)\right) \quad (1)$$

2 Производная параметрически заданной функции.

Теорема о производной сложной функции. Пусть функция $y(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = y(x_0)$. Тогда сложная функция $z = f(x) = z(y(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = z'(y_0)y'(x_0)$, что записывают также в форме $z'_x = z'_y y'_x$.

Теорема о производной обратной функции. Пусть функция $y(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна в некоторой $U_\delta(x_0)$. Пусть $\exists\, y'(x_0) \in \mathbb{R}, y'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = y(x_0)$ и $x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)} = \frac{1}{y'(x(y_0))}$.

Определение. Пусть заданы функции $x(t)$ и $y(t)$. Пусть функция $x(t)$ обратима, т. е. существует обратная функция $t(x)$. Тогда функция $y = \varphi(x) = y(x(t))$ называется **параметрически заданной функцией.**

Если выполнены условия теоремы о производной обратной функции, то

$$\exists\, t'(x) = \frac{1}{x'(t)}, \text{ где } t = t(x).$$

Если выполнены условия теоремы о производной сложной функции, то

$$\exists\, y'_x(x) = \varphi'(x) = y'_t(t(x))t'(x) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}, \text{ где } t = t(x).$$

Итак, при выполнении условий этих теорем справедлива формула

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

2001-В3-№3. Найти y'_x и y''_{xx} если

$$x(t) = \sqrt{1+t^2},\; y(t) = t + \operatorname{arcctg} t.$$

Решение. Первым делом выразим $t(x)$ (это пригодится нам в самом конце):

$$t(x) = \pm\sqrt{x^2 - 1},\; x \geq 1.$$

Но будем аккуратны и вспомним условия теоремы о производной обратной функции. Функция $x(t)$ должна быть определена, строго монотонна и непрерывна в некоторой $U_\delta(t_0)$ (t_0— точка в которой мы ищем производную обратной функции), причём должно быть выполнено следующее

$$\exists x'(t_0) \in \mathbb{R},\; x'(t_0) \neq 0.$$

Эти воспоминания наводят нас на мысль, что при $t = 0$ (т.е. $x = 1$) мы не можем использовать формулу $y'_x(x) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$. Будем считать, что $t \neq 0$, а при $t = 0$ требуется дополнительное исследование, которое скорее всего авторами не подразумевалось (делать мы его не будем).

Будем использовать формулы для производной неявной функции.

$$y'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\Big|_{t=t(x)},\ y''_{xx} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t}\Bigg|_{t=t(x)} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}\Bigg|_{t=t(x)}.$$

Собственно проводим необходимые вычисления.

$$x'_t = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y'_t = 1 + \frac{-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

$$x''_{tt} = \frac{1\cdot\sqrt{1+t^2} - t\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot 2t}{1+t^2} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},\ y''_{tt} = 2t\cdot\frac{1}{1+t^2} + t^2\cdot\frac{-1}{(1+t^2)^2}\cdot 2t = \frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

Теперь вымисываем формулы для производных функции $y(x)$, с учётом найденных значений производных по параметру t и делаем в них подстановку $t = t(x)$.

$$y'_x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\Bigg|_{t(x)} = \pm\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

$$y''_{xx} = \frac{\frac{2t}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3}\Bigg|_{t(x)} = \frac{1}{t(1+t^2)}\Bigg|_{t(x)} = \pm\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$

Вычисления можно было упростить не используя общую формулу для y''_{xx}, а вычислять последовательно

$$\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)'_t = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow y''_{xx} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^{-1}\Bigg|_{t(x)} = \frac{1}{t(1+t^2)}\Bigg|_{t(x)} = \pm\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$

Ответ

$$\boxed{y'_x = \pm\frac{\sqrt{x^2-1}}{x},\ y''_{xx} = \pm\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}.}$$

Замечание. Могло так оказаться, что нас в задаче просили бы найти значение производных в какой-то конкретной точке x_0. Тогда нам не обязательно было выражать и подставлять в производные функцию $t = t(x)$, достаточно было бы подставить в него значение в одной точке $t_0 = t(x_0)$

3 Производная n-го порядка.

Теорема (формула Лейбница). Пусть существуют производные функций $f(x), g(x)$ в точке x порядка n. Тогда

$$\exists\ (f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Основные формулы для n-ой производной (их нетрудно вывести за минуту на контрольной)
$\forall a, b, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

- $(a^{bx})^{(n)} = a^{bx}b^n \ln^n a \Rightarrow (e^{bx})^{(n)} = b^n e^{bx}$, где $a > 0$

- $(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right)$

- $(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right)$

- $((ax+b)^{\alpha})^{(n)} = a^n \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}$
  $\Rightarrow \left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x-a)^{n+1}}$

- $(\log_a(|x|))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n \ln a}, a > 0 \Rightarrow (\ln(|x|))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

Советы.

- прежде чем бросаться решать задачу, нужно постараться **упростить выражение** (чем проще, тем меньше риск ошибиться, а так же потраченное на задачу время заметно сокращается);

- в качестве f нужно стараться выбрать такую функцию, которая имеет конечное количество ненулевых производных. Во многих задачах из всей суммы из n слагаемых выживает только первые 3.

2004-В1-№4. Найти $y^{(n)}(x)$ для $n \geq 3$ (ответ можно не упрощать) если

$$y(x) = (x^2-2)\frac{e^{-2x}\sqrt[3]{1+3x}-1}{\sqrt[3]{1+3x}}.$$

Решение. Первым делом нужно пристально посмотреть на функцию и попытаться как-то её преобразовать, чтобы упростить дальнейшие вычисления.

$$y(x) = (x^2-2)e^{-2x} - (x^2-2)\frac{1}{\sqrt[3]{1+3x}}.$$

В итоге мы рабили нашу задачу на две более простые подзадачи и теперь в каждом из случаев уже очевидно какую функцию нужно брать в качестве f, а какую в качестве g.
Для первого и второго слагаемого соответственно

$$f_1(x) = (x^2-2),\ g_1(x) = e^{-2x},\ f_2(x) = (x^2-2),\ g_2(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+3x}}.$$

Выписываем чему равны n-е производные для f_i, g_i.

$$f_i^{(0)} = x^2-2,\ f_i^{(1)} = 2x,\ f_i^{(2)} = 2,\ f_i^{(n)} = 0 \ \text{ где } n \geq 3,\ g_1^{(n)} = (-2)^n e^{-2x},$$

$$g_2^{(1)} = -\frac{1}{3}\frac{3}{(1+3x)^{\frac{1}{3}+1}},\ g_2^{(2)} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)\frac{3^2}{(1+3x)^{\frac{1}{3}+2}}, .., \ g_2^{(n)} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)..\left(-\frac{1}{3}-n+1\right)\frac{3^n}{(1+3x)^{\frac{1}{3}+n}} \Rightarrow$$

$$g_2^{(n)} = \frac{(-1)^n(1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3(n-1)+1))}{(1+3x)^{\frac{1}{3}+n}}.$$

Ну и мы готовы теперь выписать ответ:

$$y^{(n)}(x) = \underbrace{C_n^0}_{1}\cdot(x^2-2)\cdot\left((-2)^n e^{-2x} + \frac{(-1)^n(1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3(n-1)+1))}{(1+3x)^{\frac{1}{3}+n}}\right) +$$

$$+\underbrace{C_n^1}_{n}\cdot 2x\cdot\left((-2)^{n-1}e^{-2x} + \frac{(-1)^{n-1}(1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3(n-2)+1))}{(1+3x)^{\frac{1}{3}+n-1}}\right) +$$

$$+\underbrace{C_n^2}_{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2\cdot\left((-2)^{n-2}e^{-2x}+\frac{(-1)^{n-2}(1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3(n-3)+1))}{(1+3x)^{\frac{1}{3}+n-2}}\right).$$

Задача из головы. Найти $y^{(n)}(x),\ n\geq 3$ для заданной функции

$$y(x)=(ax^2+bx+c)\cos^2(\alpha x).$$

Решение. В данной задаче, разумно сразу избавиться от квадрата косинуса:

$$\cos^2(\alpha x)=\frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha x)).$$

Мы видим, что получаются 2 слагаемых одно из которых является многочленом второй степени. При $n\geq 3$ его производная будет 0.
Итак, мы получаем следующее выражение:

$$y^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left((ax^2+bx+c)\cos(2\alpha x)\right)^{(n)}.$$

Теперь уже можем выбрать f и g:

$$f(x)=\frac{1}{2}(ax^2+bx+c),\ g(x)=\cos(2\alpha x).$$

Вычисляем производные функций f и h

$$f'(x)=ax+\frac{b}{2},\ f''(x)=a,\ f^{(n)}(x)=0,$$

$$(\cos(2\alpha x))^{(n)}=(2\alpha)^n\cos\left(2\alpha x+\frac{\pi n}{2}\right).$$

Подставляем их в формулу Лейбница, и получаем ответ

$$y^{(n)}(x)=C_n^0 f(x)g^{(n)}(x)+C_n^1 f'(x)g^{(n-1)}(x)+C_n^2 f''(x)g^{(n-2)}(x)=$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)(2\alpha)^n\cos\left(2\alpha x+\frac{\pi n}{2}\right)+$$

$$+n\cdot\left(ax+\frac{b}{2}\right)(2\alpha)^{n-1}\cos\left(2\alpha x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\cdot a(2\alpha)^{n-2}\cos\left(2\alpha x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right).$$

4 Тейлор.

Советы.

- Повторить формулу Маклорена для основных функций.

  Здесь приведены лишь те, для которых формула разложения адекватная (например для $\operatorname{tg}(x)$, формула есть на википедии, но она сложная и точно не пригодится на контрольной, формулы для арксинуса и арктангенса тоже достаточно сложные, скорее всего до n-го порядка не понадобятся)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \qquad = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n),\ \text{где } C_\alpha^n \qquad = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ (C_\alpha^0 = 1),$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n),$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{n+1} k x^{k-1} + o(x^n),$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{(k-1)k}{2} x^{k-2} + o(x^n),$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \qquad = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \xrightarrow[x \to -x]{}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \qquad = x - \frac{x^2}{2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \qquad = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}) \qquad = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}),$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \qquad = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{-\frac{1}{2}}^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \qquad = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots + \underbrace{\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)}}_{C_{-\frac{1}{2}}^n} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}),$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} -$$

$$- \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{-\frac{1}{2}}^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \qquad = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \dots - \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \qquad = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

Разложение $\frac{1}{1-x}$ легко запомнить, поскольку оно напрямую связано с формулой геометрической прогрессии. Последующие 2 разложения приведены в качестве примера и их можно получить формальным дифференцированием левой и правой частей уравнения для $\frac{1}{1-x}$.

Для логарифма удобнее запомнить первую приведённую формулу, поскольку там у всех слагаемых одинаковый отрицательный знак. Сама формула выводится почленным интегрированием разложения производной $(\ln(1-x))' = \frac{-1}{1-x} = -1 - x - x^2 - x^3 - \cdots - x^{n-1} + o(x^{n-1})$ и определением константы интегрирования из условия $\ln(1-0) = 0$.

Обратите внимание, что разложения для $\sinh x$ и $\cosh x$ сразу получаются из их определения через экспоненты $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ и разложения экспонент. Чтобы проще было запоминать, можно помнить, что их разложения похожи на обычные $\sin x$ и $\cos x$, но нет чередования знаков.

Формулы для $\arcsin x, \arctan x$ выводятся из разложения в ряд их производных и последующего почленного интегрирования с учётом константы интегрирования, которая окажется нулевой в обоих случаях (т.к. $\arcsin 0 = \arctan 0 = 0$).

- попытайтесь упростить написанную в условии функцию, это может сэкономить драгоценное время;
- в задачах просят сделать разложение в точке x_0, нужно сделать замену $y = x - x_0$, тогда всё сводится к поиску разложения вблизи точки 0;
- не забыть **в конце перейти к исходной переменной** (т.е. вместо y^k в ответе написать $(x - x_0)^k$).
- ответом к задаче является **сумма в которой каждая степень** $(x - x_0)$ **встречается только 1** раз, то есть если у вас есть два слагаемых $a(x-x_0)^k + b(x-x_0)^k$, то необходимо сделать так, чтобы было $(a+b)(x-x_0)^k$. Для этого в каких-то суммах приходится делать сдвиг индекса суммирования, в каких-то приходится "отщеплять"слагаемые из суммы, чтобы во всех имеющихся суммах были только одинаковые степени $(x - x_0)$ и мы могли их объединить в одну. **Если ваш ответ не является представлением формулой Тейлора, то вам, согласно критериям для проверяющих, поставят за всю задачу 0 баллов.**

2011-В2-№5. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$ до $o((x-3)^{2n})$ функцию

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 7}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}.$$

Решение. Делаем замену переменной (про это удобнее думать как выделение полного квадрата $(x-3)^2$)

$$f(y) = \frac{(x-3)^2 - 2}{\sqrt{1 - (x-3)^2}} = \frac{y^2 - 2}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Применяем формулу для степенной функции

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \sum_{k=0}^{n} C^k_{-\frac{1}{2}} (-y^2)^k + o(y^{2n}).$$

Теперь нужно умножить это на числитель функции и аккуратно раскрыть скобки.

$$\frac{y^2-2}{\sqrt{1-y^2}} = (y^2-2)\left(\sum_{k=0}^{n} C^k_{-\frac{1}{2}}(-y^2)^k + o(y^{2n})\right) = \sum_{k=0}^{n} -1\cdot C^k_{-\frac{1}{2}}(-y^2)^{k+1} - 2\sum_{k=0}^{n} C^k_{-\frac{1}{2}}(-y^2)^k + o(y^{2n}) \underset{m=k+1}{=}$$

$$= \sum_{m=1}^{n+1} -1\cdot C^{m-1}_{-\frac{1}{2}}(-y^2)^m - 2\sum_{k=0}^{n} C^k_{-\frac{1}{2}}(-y^2)^k + o(y^{2n}) \underset{m=k}{=} -2 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(C^{k-1}_{-\frac{1}{2}} + 2C^k_{-\frac{1}{2}}\right) y^{2k} + o(y^{2n}).$$

Возвращаемся к исходной переменной и выписываем ответ

$$\boxed{f(x) = -2 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(C^{k-1}_{-\frac{1}{2}} + 2C^k_{-\frac{1}{2}}\right)(x-3)^{2k} + o((x-3)^{2n}).}$$

ЭКЗ-2014-В1-№4. Разложите по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ до $o((x-x_0)^{2n+1})$ функцию

$$f(x) = (x^2 - 2x + 4) \ln \sqrt[7]{x^2 - 2x + 2}.$$

Решение. Делаем замену переменной $y = x - 1$ и упрощаем выражение

$$f(y) = ((x-1)^2 + 3) \ln \sqrt[7]{(x-1)^2 + 1} = (y^2 + 3) \ln \sqrt[7]{y^2 + 1} = \frac{(y^2 + 3)}{7} \ln (y^2 + 1).$$

Используем формулу Маклорена для логарифма

$$\ln (1 + y^2) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(y^2)^k}{k} + o(y^{2n+1}).$$

Обращаю ваше внимание на степень y в о-малом, она $2n+1$, поскольку в разложении логарифма отсутсвует слагаемое y^{2n+1} (мы знаем, что оно нулевое так как функция чётная). Запишем нашщ функцию

$$f(y) = \frac{(y^2+3)}{7} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(y^2)^k}{k} + o(y^{2n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{7} \frac{(y^2)^{k+1}}{k} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{3}{7} \frac{y^{2k}}{k} + o(y^{2n+1}) \underset{m=k+1}{=}$$

$$= \sum_{m=2}^{n+1} \frac{(-1)^m}{7} \frac{(y^2)^m}{m-1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{3}{7} \frac{y^{2k}}{k} + o(y^{2n+1}) \underset{m=k}{=} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k}{7} \frac{y^{2k}}{k-1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{3}{7} \frac{y^{2k}}{k} + o(y^{2n+1}) =$$

$$= \frac{3}{7} y^2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{7} \left(\frac{1}{7(k-1)} - \frac{3}{k} \right) y^{2k} + o(y^{2n+1}).$$

Возвращаемся к исходной переменной и выписываем ответ

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{7}(x-1)^2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{7} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{3}{k} \right) (x-1)^{2k} + o((x-1)^{2n+1}).}$$

5 Предел крокодила (дробь).

Советы.

- повторить разложение основных функций в ряд Маклорена до $o(x^3) - o(x^4)$ (а на всякий случай лучше до $o(x^5) - o(x^6)$)

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5),\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3),\\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5) \underset{x\to -x}{\longrightarrow}\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5),\\
\operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6),\\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6),\\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o(x^6),\\
\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6),\\
\operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + o(x^6),\\
\operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5),\\
\operatorname{th} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6),\\
\operatorname{arsh} x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6),\\
\operatorname{arth} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6).
\end{aligned}
$$

Не обязятельно помнить всё, можно помнить несколько основных и из них всё выводить.

Тангенс выводится из его определения $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ и применения разложения синуса и косинуса. Гиперболические синусы и косинусы выводятся из их определения $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ и разложения экспоненты. Легко запоминать следующим образом: используем разложения для обыкновенных $\sin(x)$, $\cos(x)$, но без чередования знака.

В обратных функциях $\arcsin x, \arctan x, \operatorname{arsinh} x, \operatorname{artanh} x$ можно легко восстановить второй член в разложении, если помнить второй член разложения исходной функции (нужно заменить знак на противоположный). Это легко объясняется так: вспоминаем как изображаются графики функции и её обратной, они симметричны относительно прямой $y = x$. Соответсвенно, если функция приближается (удаляется) от этой прямой, то обратная к ней должна удаляться (приближаться) к этой прямой.

- В процессе решения будут встречаться комбинации функций, обладающие определённой чётностью, это можно эффективно использовать при поиске разложения этих комбинаций (если мы знаем, что некоторая функция нечётная, то в её разложении не должно быть чётных степеней и следить за ними не нужно).

- Как правило в задачах нужно раскладываться до $o(x^3) - o(x^4)$, ($o(x^5)$ достаточно редко встречается, но кто знает, что будет в этом году?). Бывает, что достаточно раскладываться и до $o(x^2)$, но тогда вы рискуете потратить время на переделывание номера. Отправить лишние слагаемые разложения в $o(x^2)$ можно в любой момент, а вот доразложиться до больших порядков будет проблематично (скорее всего у вас не будет хватать для этого места в уже написанном разложении).

- Задачу нужно разбивать на подзадачи, то есть выделять более простые комбинации функций и делать их разложение. Например, работать отдельно с числителем, отдельно с знаменателем. Или, если у нас встречается где-нибудь сложная функция $f(g(x))$, то сначала раскладываем $g(x)$, а затем $f(x)$. Задачу нужно начинать с более простых частей (под частью подразумевается **весь** числитель/знаменатель/степень), так как их разложение предскажет нам с какой точностью нужно рассклaдывать всё остальное. (Пример: "простой"числитель разложился до x^3, тогда скорее всего окажется, что и сложный "знаменатель"будет иметь в разложении это x^3).

- Полезный факт: если мы хотим разложить $(ax + bx^2 + cx^3 + ..)^n$ до $o(x^n)$, то тогда смело можем писать $(ax + bx^2 + cx^3 + ..)^n = a^n x^n + o(x^n)$.

- Полезная формула $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{b}{x})^{cx} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{b}{ax})^{cb\frac{x}{b}} = e^{cb}$, где $b \neq 0, c \neq 0$.

2007-В3-№7. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(xe^{-2x}) - \frac{1}{4}\ln(1+4x)}{\cos(x+x^2) + \operatorname{ch} x - 2}.$$

Решение. Знаменатель выглядит более простым, начнём раскладывать его. Раскладываем каждое слагаемое, на всякий случай, до $o(x^4)$. Конечная цель - разложить знаменатель до первого нетривиального слагаемого

$$\cos(x+x^2) = 1 - \frac{1}{2!}(x+x^2)^2 + \frac{1}{4!}(x+x^2)^4 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2!}(x^2+2x^3+x^4) + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 - x^3 - \frac{11}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5),$$

$$\cos(x+x^2) + \operatorname{ch} x - 2 = -x^3 + o(x^3).$$

Теперь займёмся числителем, раскладывая уже точно до $o(x^3)$.

$$xe^{-2x} = x\cdot 1 + x\cdot(-2x) + x\cdot\frac{1}{2!}(-2x)^2 + o(x^3) = x - 2x^2 + 2x^3 + o(x^3),$$

$$\operatorname{arctg}(xe^{-2x}) = \operatorname{arctg}(x - 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)) = (x - 2x^2 + 2x^3 + o(x^3))^1 - \frac{1}{3}(x - 2x^2 + 2x^3 + o(x^3))^3 =$$

$$= x - 2x^2 + 2x^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x - 2x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\ln(1+4x) = 4x - \frac{1}{2}(4x)^2 + \frac{1}{3}(4x)^3 + o(x^3) = 4x - 8x^2 + \frac{64}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\operatorname{arctg}(xe^{-2x}) - \frac{1}{4}\ln(1+4x) = x - 2x^2 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{4}(4x - 8x^2 + \frac{64}{3}x^3) + o(x^3) =$$

$$= -\frac{11}{3}x^3 + o(x^3).$$

После того как мы разложили числитель и знаменатель, мы почти сразу получаем ответ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(xe^{-2x})-\frac{1}{4}\ln(1+4x)}{\cos(x+x^2)+\operatorname{ch}x-2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{11}{3}x^3+o(x^3)}{-x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{11}{3}+o(1)}{-1+o(1)}=\frac{11}{3}.$$

Ответ

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(xe^{-2x})-\frac{1}{4}\ln(1+4x)}{\cos(x+x^2)+\operatorname{ch}x-2}=\frac{11}{3}.}$$

6 Предел крокодила (степень).

2009-B1-№7. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin(x+x^2)}{1-x^2}\right)^2-\frac{\operatorname{arctg}x^2}{1-2x^2}-2x^3+1\right)^{\frac{1}{\left(1-e^{2x^2}\right)\operatorname{sh}(3x^2)}}.$$

Решение. Начинаем раскладывать со степени, она более просто выглядит.

$$1-e^{2x^2}=1-1-2x^2-\frac{1}{2!}(2x^2)^2+o(x^4)=-2x^2-2x^4+o(x^5),$$

$$\operatorname{sh}(3x^2)=3x^2+o(x^5)$$

$$(1-e^{2x^2})\operatorname{sh}(3x^2)=(-2x^2-2x^4+o(x^5))(3x^2+o(x^5))=-6x^4+o(x^4).$$

Из вида разложения степени, ожидаем, что в скобках будет разложение вида $1+bx^4+o(x^4)$ (если мы найдём b, то сразу, воспользовавшись формулой из советов, сможем записать ответ $e^{\frac{-1}{6}b}$, но в решении мы не будем её использовать, а честно выведем).

Начнём аккуратно это получать. Первое большое слагаемое это сложная дробь в квадрате, мы хотим разложить его до $o(x^4)$, с учётом $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$, всю дробь имеет смысл раскладывать до $o(x^3)$. Синус разложим до $o(x^4)$

$$\sin(x+x^2)=(x+x^2)-\frac{1}{3!}(x+x^2)^3+o(x^4)=x+x^2-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4),$$

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+o(x^3)$$

$$\sin(x+x^2)\frac{1}{1-x^2}=(x+x^2-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4))(1+x^2+o(x^3))=$$

$$=+\begin{cases}x\cdot 1\\ x^2\cdot 1\\ x^3\cdot(1-\frac{1}{3!})\\ o(x^3)\end{cases}=x+x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3),$$

$$\left(\sin(x+x^2)\frac{1}{1-x^2}\right)^2=\left(x+x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)\right)^2=x^2\left(1+x+\frac{5}{6}x^2+o(x^2)\right)^2=$$

$$=x^2\left(1+2\cdot 1\cdot(x+\frac{5}{6}x^2+o(x^2))+(x+\frac{5}{6}x^2+o(x^2))^2\right)=$$

$$=x^2\left(1+2x+\frac{5}{3}x^2+x^2+o(x^2)\right)=x^2+2x^3+\frac{8}{3}x^4+o(x^4).$$

Можем посмотреть на полученное разложение и обрадоваться, поскольку $2x^3$ будет сокращаться, это намёк на то, что всё было сделано правильно. Переключаемся на второе слагаемое. Сразу замечаем, что это чётная функция, поэтому в разложении не будет нечётных степеней (ещё раз убеждаемся в том, что x^3 в скобке не будет).

$$\operatorname{arctg} x^2 = x^2 + o(x^5),$$

$$\frac{1}{1-2x^2} = 1 + 2x^2 + o(x^2)$$

$$\operatorname{arctg} x^2 \cdot \frac{1}{1-2x^2} = (x^2 + o(x^5))(1 + 2x^2 + o(x^2)) = x^2 + 2x^4 + o(x^4).$$

Теперь можем записать разложение выражения, которое мы возводим в степень

$$\left(\frac{\sin(x+x^2)}{1-x^2}\right)^2 - \frac{\operatorname{arctg} x^2}{1-2x^2} - 2x^3 + 1 = x^2 + 2x^3 + \frac{8}{3}x^4 - (x^2 + 2x^4) - 2x^3 + 1 + o(x^4) = 1 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Соответсвенно исходная функция запишется так

$$\left(\left(\frac{\sin(x+x^2)}{1-x^2}\right)^2 - \frac{\operatorname{arctg} x^2}{1-2x^2} - 2x^3 + 1\right)^{\frac{1}{\left(1-e^{2x^2}\right)\operatorname{sh}(3x^2)}} = \left(1 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^{\frac{1}{-6x^4+o(x^4)}} = e^{\frac{1}{-6x^4+o(x^4)}\ln\left(1+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)}.$$

Преобразуем степень экспоненты

$$\frac{1}{-6x^4+o(x^4)}\ln\left(1 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) = \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{-6x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{9} + o(1).$$

Итак, мы уже готовы получить ответ

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin(x+x^2)}{1-x^2}\right)^2 - \frac{\operatorname{arctg} x^2}{1-2x^2} - 2x^3 + 1\right)^{\frac{1}{\left(1-e^{2x^2}\right)\operatorname{sh}(3x^2)}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{9}+o(1)} = e^{-\frac{1}{9}}.$$

Ответ

$$\boxed{\lim_{x\to 0} = e^{-\frac{1}{9}}.}$$

7 Дифференцируемость?

Определение. Пусть $f : X \to \mathbb{R}, x_0 \in X$ и x_0 является предельной точкой X, тогда **производная** в точке x_0 определяется как

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Определение. Функция f **дифференцируема в точке** x_0, если она определена в некоторой окрестности x_0 и имеет конечную производную $f'(x_0)$. Функция **дифференцируема на некотором множестве** A, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

2019-B4-№7. Исследовать функцию на дифференцируемость

$$f(x) = |(5x-4)^5 \ln(2x)|$$

во всех точках $x > 0$.

Решение. Если раскрыть модуль, тогда мы сможем исследовать функцию на дифференцируемость. Введём для подмодульного выражения обозначение $g(x) = (5x-4)^5 \ln(2x)$ При $x \in \{\frac{4}{5}, \frac{1}{2}\}$, $f(x)$ зануляется. При $x > \frac{4}{5}$, $g(x) > 0$. При $x < \frac{1}{2}$, $g(x) > 0$, тогда при $x \in (\frac{1}{2}, \frac{4}{5}), g(x) > 0$. Итак,

$$f(x) = \begin{cases} (5x-4)^5 \ln(2x), \ x \in (0, \ \frac{1}{2}] \cup [\frac{4}{5}, +\infty) \\ -(5x-4)^5 \ln(2x), \ x \in (\frac{1}{2}, \frac{4}{5}). \end{cases}$$

Что мы сразу можем сказать про $f(x)$? Она является дифференцируемой на $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{4}{5}) \cup (\frac{4}{5}, \infty)$ (поскольку $(5x-4)^5$ и $\ln(2x)$- дифференцируемы, а значит и их произведение дифференцируемо). Осталось исследовать $f(x)$ на дифференциемость в точках $x \in \{\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\}$. Начнём с $x = \frac{4}{5}$.
Будем считать, используя определение, левые и правые производные в этой точке:

$$f'\left(\frac{4}{5}+0\right) = \lim_{x \to \frac{4}{5}+0} \frac{(5x-4)^5 \ln(2x) - 0}{x - \frac{4}{5}} = \lim_{x \to \frac{4}{5}+0} 5(5x-4)^4 \ln(2x) = 0.$$

$$f'\left(\frac{4}{5}-0\right) = \lim_{x \to \frac{4}{5}-0} \frac{-(5x-4)^5 \ln(2x) - 0}{x - \frac{4}{5}} = \lim_{x \to \frac{4}{5}-0} -5(5x-4)^4 \ln(2x) = 0.$$

Поскольку $f'(\frac{4}{5}-0) = f'(\frac{4}{5}+0)$, то функция $f(x)$- дифференцируема в точке $x = \frac{4}{5}$. Осталось исследовать $x = \frac{1}{2}$.

$$f'\left(\frac{1}{2}+0\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}+0} \frac{-(5x-4)^5 \ln(2x) - 0}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{-(5(\frac{1}{2}+\Delta x)-4)^5 \ln(2(\frac{1}{2}+\Delta x)) - 0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{-(-\frac{3}{2}+5\Delta x)^5 (2\Delta x + o(\Delta x))}{\Delta x} = \frac{3^5}{2^4}.$$

$$f'\left(\frac{1}{2}-0\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}-0} \frac{(5x-4)^5 \ln(2x) - 0}{x - \frac{1}{2}} = -\frac{3^5}{2^4}.$$

Мы видим, что левая и правая производные в точке $x = \frac{1}{2}$ не совпадают, а это значит, что функция в ней не дифференцируема!

Ответ

$$\boxed{f(x) \text{ дифференцируема при } \ x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right), \text{не дифференцируема при } \ x = \frac{1}{2}.}$$

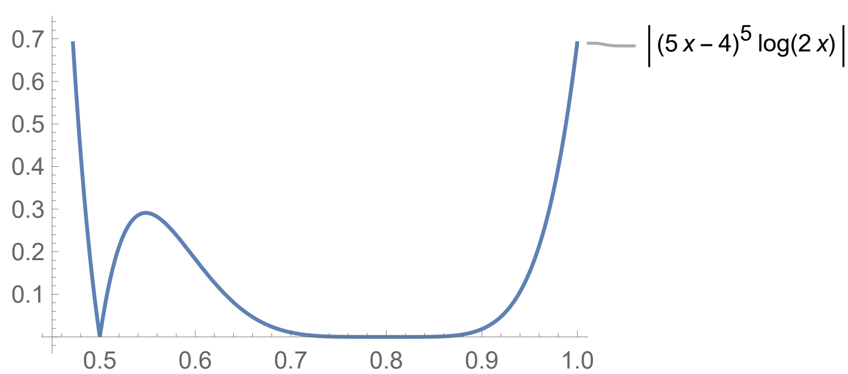

Рис. 1: График функции $f(x)$. На нём видно, что в $x = \frac{1}{2}$ функция имеет излом, то есть там она не дифференцируема

8 Теоремы о среднем?

Теорема Ролля. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на непустом интервале (a, b), а также $f(a) = f(b)$, то найдётся $\xi \in (a, b)$, такая что $f'(\xi) = 0$.
Теорема о среднем Лагранжа. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на непустом интервале (a, b), то найдётся $\xi \in (a, b)$, такая что

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема о среднем Коши.
Если функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на непустом интервале (a, b), а также g' не равно нулю ни в одной точке (a, b), то найдётся $\xi \in (a, b)$, такая что

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

2020-B1-№5 Доказать, что если функция f дифференцируема на отрезке $[0, 3]$, то существует такая точка $\xi \in (0, 3)$, что $f(3) - f(0) = 2\sqrt{1+\xi}f'(\xi)$.
Решение. Чтобы задача решилась, нужно попробовать подогнать её под применение теоремы о среднем Коши.

$$\frac{f(3) - f(0)}{h(3) - h(0)} = 2\sqrt{1+\xi}f'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{h'(\xi)} \Rightarrow (h(3) - h(0))\frac{1}{h'(\xi)} = 2\sqrt{1+\xi}.$$

Собственно нужно подобрать правильным образом $h(x)$. Сделать это можно отталкиваясь от выражения $\sqrt{1+\xi}$, то есть мы привраниваем (с точностью до константы C)

$$\frac{1}{h'(\xi)} = C\sqrt{1+\xi} \Rightarrow h(x) = \frac{2}{C}\sqrt{1+x}.$$

Определим константу C

$$h(3) - h(0) = \frac{2}{C}(\sqrt{1+3} - \sqrt{1+0}) = \frac{2}{C}.$$

Видим, что она может быть произвольной ненулевой.