Перевод с Петровича на русский

P.S. лучше использовать только для понимания

- — комментарии
- — из условия
- : посмотри на этот цвет
- — теоремы

Теорема I правило Лопиталя $\left(\frac{0}{0}\right)$

§2. Раскрытие неопределённостей по правилам Лопиталя

Теорема 5.1 (первое правило Лопиталя для раскрытия неопределённости $\frac{0}{0}$). *Пусть функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности α, где α — один из 6 СПС, причём $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$. Тогда если $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, где β — один из 6 СПС, то также $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$.*

1) f и g дифф. в $\mathring{U}_{\delta_1}(\alpha)$

2) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$

3) $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta$

δ_1 и δ_2 для более короткой записи

$\square$ Отметим, что функция $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ определена в некоторой проколотой окрестности α, следовательно, $g'(x) \neq 0$ в этой проколотой окрестности α. Докажем сначала теорему для случая $\alpha = a$, $a \in \mathbb{R}$. Доопределим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда функции f

$\square$ $\exists \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ определена в $\mathring{U}_{\delta_2}(\alpha)$ и $g'(x) \neq 0$ в $\mathring{U}_{\delta_2}(\alpha)$

$\alpha = a \in R$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, доопределим $f(a) = g(a) = 0$,

чтобы f и g стали непр в $x=0$ и вып: Th Коши

тогда $\exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$: f и g дифф. в $\mathring{U}_\delta(a)$ и непр. в $U_\delta(a)$.

$\forall x: x > a$, $g'(x) \neq 0$ на (a, x) (т.е. $x \in \mathring{U}_\delta(a+0)$)

и g дифференцируемы в $\mathring{U}_\delta(a)$ и непрерывны в $U_\delta(a)$. Для любых $x > a$ таких, что $g'(x) \neq 0$ на $(a;x)$, по теореме Коши 4.13 имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{где} \quad \xi = \xi(x).$$

по Th. Коши $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $\xi = \xi(x) \in (a, x)$

$a < \xi(x) < x$, $x \to a+0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0} \xi(x) = a+0$

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} \underset{\xi(x) = u}{=} \lim_{u\to a+0} \frac{f'(u)}{g'(u)} = \beta.$$

Так как $a < \xi(x) < x$, то по теореме 3.4 $\lim\limits_{x\to a+0} \xi(x) = a + 0$. По теореме 3.5 $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{u\to a+0} \frac{f'(u)}{g'(u)} = \beta$. Аналогично, $\lim\limits_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$, и для $\alpha = a \in \mathbb{R}$ теорема доказана.

Для $\alpha = a+0$ и $\alpha = a-0$ доказательство аналогично.

Аналогично, $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta \Rightarrow$ для $\alpha = a \in R$ д-но

$\alpha = \infty$: Сведем к пункту 1

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta \underset{x = \frac{1}{t}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}$$

Пусть теперь $\alpha = \infty$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, то по теореме 3.5 после замены $x = \frac{1}{t}$ имеем: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \beta$. Тогда после замены $x = \frac{1}{t}$ получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'} = \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \beta$$

(здесь мы применили теорему 5.1 для уже разобранного случая $t \to a$, где $a = 0$). Для $\alpha = +\infty$ и $\alpha = -\infty$ доказательство аналогично. $\blacksquare$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} \underset{\text{пункт 1}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{(f(\frac{1}{t}))'}{(g(\frac{1}{t}))'} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f'(\frac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \beta \quad \blacksquare$$

Теорема II правило Лопиталя $(\frac{\infty}{\infty})$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f \text{ и } g \text{ дифф в } \mathring{U}_{\delta_1}(\alpha) \\ 2)\ \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty \\ 3)\ \lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$$

Теорема 5.2 (второе правило Лопиталя для раскрытия неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$). *Пусть функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности α, где α — один из 6 СПС, причём $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty$. Тогда если $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, где β — один из 6 СПС, то также $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$.*

Проблема!

В док-ве I пр. Лопиталя мы доопределили $f(a) = g(a) = 0$ и использовали Th. Коши на $[a, x]$.

f и $g \underset{x\to\alpha}{\to} \infty$ и так сделать не получится

Доказательство второго правила Лопиталя значительно сложнее, чем первого, так как невозможно применить теорему Коши на отрезке $[a;x]$. Приходится вместо α рассматривать некоторую переменную точку. Предварительно докажем следующую лемму.

Решение: Хотим свести д-во к Th. Коши по аналогии с I пр. Лопиталя

Будем рассматривать переменную точку, зависящую от x.

Очевидно, мы не можем по аналогии с I пр Лопиталя сказать, что $f(\varphi(x)) = 0$, нам поможет Th. о замене числ и знам на эквивалентные величины при вычислении предела

Определим эту точку $\varphi(x)$ так, что

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - f(\varphi(x)) \sim f(x) \quad (\text{т.е. } f(\varphi(x)) = o(f(x)),\ x\to\alpha) \\ g(x) - g(\varphi(x)) \sim g(x) \quad (\text{т.е. } g(\varphi(x)) = o(g(x)),\ x\to\alpha) \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - f(\varphi(x))}{g(x) - g(\varphi(x))}$$

Th. о пределе экв. ф-ий

Тогда на $[\varphi(x), x]$ или $[x, \varphi(x)]$ (смотря, что больше)

сможем применить Th. Коши и далее почти как в I пр. Лопиталя

Докажем, что такая точка $\varphi(x)$ существует

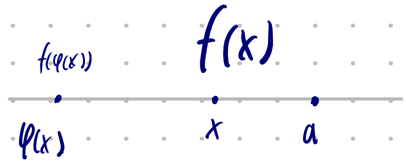
Лемма 5.1. *Пусть* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, *где* α *— один из 6 СПС. Тогда для всех* x *из некоторой проколотой окрестности* α *определена функция* $\varphi(x)$ *такая, что* $\lim\limits_{x\to\alpha}\varphi(x) = \alpha$, *и при этом* $f(\varphi(x)) = o(f(x))$, $g(\varphi(x)) = o(g(x))$, $x \to \alpha$.

Лемма

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\alpha} g(x)=\infty \Rightarrow \forall x \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow \exists \varphi(x):$$

$$\lim_{x\to\alpha}\varphi(x)=\alpha;\ f(\varphi(x))=o(f(x)),\ g(\varphi(x))=o(g(x)),\ x\to\alpha$$

Т.е. $\varphi(x)$ стремится к α настолько медленнее x, что $f(\varphi(x))$ и $g(\varphi(x))$ — о малое от $f(x)$ и $g(x)$ соотв.



$\square$ Перефразируем, что необходимо найти

$\lim\limits_{x\to\alpha}\varphi(x)=a$: $\varphi(x)=a+\beta(x)$, $\lim\limits_{x\to\alpha}\beta(x)=0$

$f(\varphi(x))=o(f(x))$, $x\to\alpha$: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(\varphi(x))}{f(x)}=0$ $\Rightarrow$ Ищем $\beta(x)$

$g(\varphi(x))=o(g(x))$, $x\to\alpha$: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{g(\varphi(x))}{g(x)}=0$

Найдем эту $\beta(x)$, будем отталкиваться от того, что ф-и $\to\infty$ при $x\to a$ $\Rightarrow$ можно взять столь маленькую окрестность a, что значения ф-и вне этой окрестности будут меньше

$\alpha = a \in \mathbb{R}$:

Возьмем удобную окрестность и дополнительно укажем, что на границах окрестности $f\neq 0$ и $g\neq 0$, чтобы не было проблем со знаменателем далее

$\square$ Пусть сначала $\alpha = a$, $a \in \mathbb{R}$. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(a) = \infty$, то найдётся $\delta_1 \in (0;1)$ такое, что $|f(x)| > 1$ и $|g(x)| > 1$ при $x \in \mathring{U}_{\delta_1}(a)$. При этом $f(a\pm\delta_1)\neq 0$, $g(a\pm\delta_1)\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ $\Rightarrow$

$\exists\delta_1\in(0,1)$: $\forall x\in\mathring{U}_{\delta_1}(a)\hookrightarrow |f(x)|>1, |g(x)|>1,$

$f(a\pm\delta_1)\neq 0,\ g(a\pm\delta_1)\neq 0$

берем $\delta_2 < \min(\delta_1, \frac{1}{2})$, минимум, чтобы потом $\delta_n \to 0$;
всегда можно взять такую δ_2, что это неравенство выполнится,
т.к. f и $g \to \infty$ при $x \to a$.

$$\exists \delta_2 : 0 < \delta_2 < \min(\delta_1, \tfrac{1}{2}), \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) \hookrightarrow$$

$$\left|\frac{f(x)}{f(a\pm\delta_1)}\right| > 1 \quad \left|\frac{g(x)}{g(a\pm\delta_1)}\right| > 1$$

Далее, $\exists\,\delta_2 > 0$, $\delta_2 < \min\left(\delta_1; \frac{1}{2}\right)$ такое, что $\forall\, x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a)$

$$\left|\frac{f(x)}{f(a\pm\delta_1)}\right| > 1, \quad \left|\frac{g(x)}{g(a\pm\delta_1)}\right| > 1 \quad \text{(для обоих знаков } \pm).$$

Возьмем δ_3:

$$\exists \delta_3 : 0 < \delta_3 < \min(\delta_2, \tfrac{1}{3}), \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) \hookrightarrow$$

$$\left|\frac{f(x)}{f(a\pm\delta_2)}\right| > 2 \quad \left|\frac{g(x)}{g(a\pm\delta_2)}\right| > 2$$

Аналогично, $\exists\,\delta_3 > 0$, $\delta_3 < \min\left(\delta_2; \frac{1}{3}\right)$ такое, что $\forall\, x \in \mathring{U}_{\delta_3}(a)$

$$\left|\frac{f(x)}{f(a\pm\delta_2)}\right| > 2, \quad \left|\frac{g(x)}{g(a\pm\delta_2)}\right| > 2.$$

Строим последовательность δ_n так, что

$$0 < \delta_{n+1} < \min(\delta_n, \tfrac{1}{n+1}), \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_{n+1}}(a) \hookrightarrow$$

$$\left|\frac{f(x)}{f(a\pm\delta_n)}\right| > n \quad \left|\frac{g(x)}{g(a\pm\delta_n)}\right| > n \qquad (1)$$

Строим таким образом последовательность δ_n, $n = 1, 2, \ldots$ такую, что $\delta_{n+1} < \min\left(\delta_n, \frac{1}{n+1}\right)$ и при всех $x \in \mathring{U}_{\delta_{n+1}}(a)$

$$\left|\frac{f(x)}{f(a\pm\delta_n)}\right| > n, \quad \left|\frac{g(x)}{g(a\pm\delta_n)}\right| > n. \qquad (5.1)$$

$\delta_n \downarrow$ (строго),

$\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ $\left(0 < \delta_n < \frac{1}{n}\right)$

Ясно, что последовательность δ_n строго убывает, и $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ (так как $0 < \delta_n < \frac{1}{n}$ при всех n).

теперь нужно установить связь δ_n и x,
т.е. перейти к ф-и $\delta_{n(x)}$: $\lim\limits_{x\to a} \delta_{n(x)} = 0$

зададим $n = n(x)$:

$$\forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) \hookrightarrow \exists!\, n = n(x) : \delta_{n+2} \leqslant |x-a| < \delta_{n+1}$$

Для любого $x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a)$ найдётся единственное натуральное число $n = n(x)$ такое, что $\delta_{n+2} \leqslant |x-a| < \delta_{n+1}$ (см. рис. 5.1).

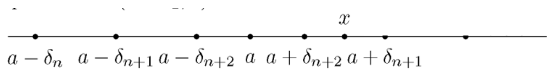


Рис. 5.1

(т.е. $\forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a)$ можно однозначно подобрать
n такой, что $x \in U_{\delta_{n+1}}(a)$ и $x \notin U_{\delta_{n+2}}(a)$)

Таким образом, хоть и в неявном виде, мы задали $n(x)$

чем ближе к a, тем δ_n меньше $\Rightarrow$ $n(x)$ больше

$n(x) \uparrow$ (нестрого) на $(a-\delta_2, a)$

$n(x) \downarrow$ (нестрого) на $(a, a+\delta_2)$

Ясно, что функция $n(x)$ положительна, нестрого убывает на $(a; a+\delta_2)$ и нестрого возрастает на $(a-\delta_2; a)$.

$n(x)$ неогр. на $(a-\delta_2, a)$ и $(a, a+\delta_2)$,

по Th. о пределе мон. ф-ций

$\lim\limits_{x\to a+0} n(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} n(x) = +\infty$

Так как функция $n(x)$ неограничена на $(a; a+\delta_2)$ и на $(a-\delta_2; a)$, то $\lim\limits_{x\to a+0} n(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a-0} n(x) = +\infty$ (по теореме 3.9 о пределах монотонных функций).

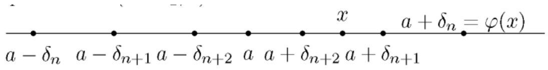


Рис. 5.1

$$0 < \delta_{n(x)} < \frac{1}{n(x)} \Rightarrow \lim_{x\to a} \delta_{n(x)} = 0$$

так как $0 < \delta_{n(x)} < \frac{1}{n(x)}$, то $\lim\limits_{x\to a} \delta_{n(x)} = 0$

пусть $\varphi(x) = a \pm \delta_{n(x)}$,

$x > a$

$x < 0$

Пусть $\varphi(x) = a \pm \delta_{n(x)}$ (знак $+$, если $x > a$; знак $-$, если $x < a$).

$\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = a$ (т.к. $\lim\limits_{x\to a} \delta_{n(x)} = 0$)

$0 < \delta_{n(x)} < \frac{1}{n(x)}$, то $\lim\limits_{x\to a} \delta_{n(x)} = 0$, значит, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = a$.

в (1) заменим $a \pm \delta_n$ на $\varphi(x) = a \pm \delta_{n(x)}$ и перевернем его

из (1) $\Rightarrow \left|\frac{f(\varphi(x))}{f(x)}\right| < \frac{1}{n(x)}$, $\left|\frac{g(\varphi(x))}{g(x)}\right| < \frac{1}{n(x)}$, $\forall x \in \mathring{U}_{\delta_{n+1}}(a)$

При всех $x \in \mathring{U}_{\delta_{n+1}}(a)$ из (5.1) следует, что

$$\left|\frac{f(\varphi(x))}{f(x)}\right| < \frac{1}{n(x)}, \quad \left|\frac{g(\varphi(x))}{g(x)}\right| < \frac{1}{n(x)},$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(\varphi(x))}{f(x)} = 0$, т.е. $f(\varphi(x)) = o(f(x))$, $x \to a$

$\lim\limits_{x\to a} \frac{g(\varphi(x))}{g(x)} = 0$, т.е. $g(\varphi(x)) = o(g(x))$, $x \to a$

поэтому $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(\varphi(x))}{f(x)} = 0$, т.е. $f(\varphi(x)) = o(f(x))$ при $x \to a$. Аналогично, $g(\varphi(x)) = o(g(x))$ при $x \to a$. Наконец, так как $0 < \delta_{n(x)} < \frac{1}{n(x)}$, то $\lim\limits_{x\to a} \delta_{n(x)} = 0$, значит, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = a$. Лемма доказана для случая $\alpha = a \in \mathbb{R}$. Для $\alpha = a+0$ и $\alpha = a-0$ упрощения в доказательстве очевидны.

$\alpha = \infty$:

Если $\alpha = \infty$, то доказательство аналогично, только $\delta_1 > 1$, $\delta_2 > \max(\delta_1, 2)$, $\delta_3 > \max(\delta_2, 3)$ и т.д., $\delta_{n+1} > \max(\delta_n, n+1)$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ Последовательность δ_n строго возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = +\infty$ (так как $\delta_n > n$ при всех n). Неравенство (5.1) примет вид

$$\left|\frac{f(x)}{f(\pm\delta_n)}\right| > n, \quad \left|\frac{g(x)}{g(\pm\delta_n)}\right| > n \quad \text{при} \quad |x| > \delta_{n+1}.$$

Функция $n(x)$ определяется так: $\delta_{n+1} < |x| \leqslant \delta_{n+2}$, $\varphi(x) = \pm\delta_{n(x)}$ (знак $+$, если $x > 0$; знак $-$, если $x < 0$) (см. рис. 5.2).

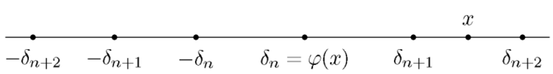


Рис. 5.2

Упрощения в доказательстве при $\alpha = +\infty$ и $\alpha = -\infty$ очевидны. ■

Вернемся ко II пр. Лопиталя, напомню:

Теорема II правило Лопиталя ($\frac{\infty}{\infty}$)

1) f и g дифф в $\mathring{U}_{\delta_1}(\alpha)$

2) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty$

3) $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$.

Теорема 5.2 (второе правило Лопиталя для раскрытия неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$). *Пусть функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности α, где α — один из 6 СПС, причём $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty$. Тогда если $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, где β — один из 6 СПС, то также $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$.*

□ Опр $\varphi(x)$ как в лемме

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\varphi(x))}{g(x)-g(\varphi(x))}$$ (подробно писал выше)

□ Определим $\varphi(x)$, как в лемме 5.1. Так как $f(\varphi(x)) = o(f(x))$ при $x \to \alpha$, то $f(x) - f(\varphi(x)) \sim f(x)$; аналогично $g(x) - g(\varphi(x)) \sim g(x)$. Тогда по теореме 3.22

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\varphi(x))}{g(x)-g(\varphi(x))}.$$

$\exists \lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$: $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ определена в $\mathring{U}_{\delta_2}(\alpha)$ и $g'(x) \neq 0$ в $\mathring{U}_{\delta_2}(\alpha)$

Функция $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ определена в некоторой проколотой окрестности α, следовательно, $g'(x) \neq 0$ в этой проколотой окрестности α. Применим к функциям f и g теорему Коши 4.13 на отрезке $[\varphi(x); x]$ (или на $[x; \varphi(x)]$, смотря что больше):

Th. Коши на $[\varphi(x), x]$ или $[x, \varphi(x)]$ (смотря, что больше)

$$\frac{f(x)-f(\varphi(x))}{g(x)-g(\varphi(x))} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi = \xi(x), \quad \varphi(x) < \xi(x) < x$$

$$\lim_{x\to\alpha} \varphi(x) = \alpha \Rightarrow \lim_{x\to\alpha} \xi(x) = \alpha$$

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\varphi(x))}{g(x)-g(\varphi(x))} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{u\to\alpha} \frac{f'(u)}{g'(u)} = \beta \quad ■$$

$$\frac{f(x)-f(\varphi(x))}{g(x)-g(\varphi(x))} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{где} \quad \xi = \xi(x), \quad \varphi(x) < \xi(x) < x.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\alpha} \varphi(x) = \alpha$, то по теореме 3.4 (или её аналогу лемме 3.2 в случае бесконечного символа α) $\lim\limits_{x\to\alpha} \xi(x) = \alpha$. Тогда по теореме 3.5

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{u\to\alpha} \frac{f'(u)}{g'(u)} = \beta. \quad ■$$