# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 10 июня 2024 г.

**1А.** (*Петрунина Н.А., Холин Д.И.*) В стационаре имеем $Q = S\alpha T\frac{dT}{dx}$, откуда $\frac{1}{2}T^2(x) = \frac{1}{2}T_0^2 + \frac{Q}{\alpha S}x$. Используя условие $T(L) = T_1$, находим $\boxed{Q = \frac{\alpha S}{2L}(T_1^2 - T_0^2)}$.

**2А.** (*Колесов Ю.И.*) $r^2 \sim Dt \sim \lambda\bar{v}t$, $N = t/\tau = \bar{v}t/\lambda$, откуда $Nr^2 = \text{const}$, $N_1/N_2 = (r_2/r_1)^2 = \boxed{1/4}$.

**3А.** (*Попов П.В.*) Молярная энтальпия газа Ван-дер-Ваальса: $H = U + PV = C_VT + \frac{RTV}{V-b} - \frac{2a}{V} = (C_V + R)T + \frac{RT}{V/b-1} - \frac{2a}{V}$, где $V$ — молярный объём. Процесс Джоуля–Томсона, если в конечном состоянии газ идеален: $C_PT_0 + \frac{RT_0b}{V_0-b} - \frac{2a}{V_0} = C_PT_1$, где $C_P \approx C_V + R = \frac{9}{2}R$. Критические параметры в модели ВдВ: $b = \frac{V_0}{3}$, $a = \frac{27bRT_0}{8} = \frac{9}{8}RT_0V_0$. После подстановки получаем: $T_1 = T_0\left(1 + \frac{R}{C_P}\left(\frac{1}{3-1} - \frac{9}{4}\right)\right) \approx \approx 304 \cdot (1 + \frac{2}{9}(0{,}5 - 2{,}25)) \approx \boxed{186\ \text{К}\ (-87°\text{C}).}$

**4А.** (*Попов П.В.*) Из соотношения Максвелла $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V}$ и условия $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{T} = \frac{3R}{T}$ находим молярную энтропию: $S = 3R\ln T + R\ln V$. Тогда уравнение адиабаты $\Delta S = 0$: $T^3V = \text{const}$, из чего $\frac{T^3(T+\theta)}{P} = \text{const}$, и в итоге получаем $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3\frac{T_2+\theta}{T_1+\theta} = 3^3 \cdot \frac{4}{2} = \boxed{54}$.

*Альтернативно*: Из $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = TR/V - P = \theta R/V \Rightarrow dU = C_VdT - \theta RdV/V$ получаем уравнение адиабаты $dU = -PdV \Rightarrow C_VdT/T + RdV/V = 0$. Далее по тексту выше.

**5А.** (*Заболотных А.А., Холин Д.И.*) Через время $t$ на расстоянии $r$ от начала координат в слое толщиной $dr$ будут находится только те молекулы, которые в начальный момент имели скорости от $v = r/t$ до $v + dv = (r + dr)/t$, $dv = dr/t$. В двумерном случае таких молекул $dN = N \cdot \frac{m}{kT} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)vdv = \frac{Nm}{kT}\exp\left(-\frac{mr^2}{2kTt^2}\right)\frac{rdr}{t^2}$. Плотность потока частиц на расстоянии $r$ равна $j = nv = \frac{dN}{2\pi rdr} \cdot v = \frac{Nm}{2\pi kT}\frac{r}{t^3}\exp\left(-\frac{mr^2}{2kTt^2}\right) \propto \boxed{r\exp\left(-\frac{mr^2}{2kTt^2}\right)}$. Найдём положение максимума, вычислив производную $dj/dr \propto \left(1 - r \cdot 2r \cdot \frac{m}{2kTt^2}\right)\exp\left(-\frac{mr^2}{2kTt^2}\right)$. Приравнивая производную к нулю, находим координату максимума плотности потока $\boxed{r_{\max} = \sqrt{\frac{kT}{m}}t = 10^{-9}\sqrt{\frac{1.4\cdot10^{-23}\cdot10}{9\cdot10^{-31}}} \approx 12\ \text{мкм}}$.

**6А.** (*Меньшиков П.Л., Попов П.В.*) Пусть $N_+$ и $N_-$ — число звеньев, ориентированных по и против оси $x$ соответственно. При заданной длине $l = a(N_+ - N_-)$ и числе звеньев $N = N_+ + N_-$ найдём $N_+ = N\frac{1+x}{2}$,$N_- = N\frac{1-x}{2}$, где $x = \frac{l}{Na} \ll 1$. В такой модели резиновая полоса эквивалентна системе $N$ частиц с двумя энергетическими уровнями при заданной полной энергии. Её энтропия:

$$S = k_\text{Б}\ln\frac{N!}{N_+!N_-!} \approx -k\left(N_+\ln\frac{N_+}{N} + N_-\ln\frac{N_-}{N}\right) = -kN\left(\tfrac{1+x}{2}\ln\tfrac{1+x}{2} + \tfrac{1-x}{2}\ln\tfrac{1+x}{2}\right) \overset{x\to0}{\to} kN\left(\ln 2 - \frac{x^2}{2}\right).$$

Изотермическая работа над системой равна изменению свободной энергии: $A_T = \Delta F = \Delta U - T\Delta S$. Поскольку $U$ в заданной модели зависит только от температуры (звенья не взаимодействуют), то $\Delta U = 0$, и поэтому: $A_T = -T\Delta S = \frac{1}{2}kTN\Delta x^2 = \boxed{\dfrac{3kTl^2}{2Na^2}}$.

---

**1Б.** (*Холин Д.И., Петрунина Н.А.*) $Q = S\beta T^3\frac{dT}{dx}$, $\frac{1}{4}T^4(x) = \frac{1}{4}T_0^4 + \frac{Q}{\beta S}x$, $\boxed{Q = \frac{\beta S}{4L}(T_1^4 - T_0^4)}$.

**2Б.** (*Колесов Ю.И.*) $N = t/\tau = \bar{v}t/\lambda$, $r^2 \sim Dt \sim \lambda\bar{v}t = N\lambda^2$. При $T = \text{const}$ имеем $\lambda \sim 1/(n\sigma) \propto 1/P$, поэтому здесь $N/P^2 = \text{const}$, $N_2/N_1 = (P_2/P_1)^2 = 1/25$. Число столкновений $\boxed{\text{уменьшится в 25 раз}}$.

**3Б.** (*Попов П. В.*) Энтальпия газа Ван-дер-Ваальса: $H = U + PV = C_VT + \frac{RTV}{V-b} - \frac{2a}{V} = (C_V + R)T + \frac{RT}{V/b-1} - \frac{2a}{V}$, где $V = \mu/\rho$ — молярный объём. Процесс Джоуля–Томсона, если в конечном состоянии газ идеален: $C_PT_0 + \frac{RT_0b}{V_0-b} - \frac{2a}{V_0} = C_PT_1$, где $C_P \approx C_V + R = 0.82 \cdot 102 \approx 10R$. Критические параметры в модели ВдВ: $b = \frac{V_\text{к}}{3} = \frac{\mu}{3\rho_\text{к}}$, $a = \frac{27bRT_\text{к}}{8} = \frac{9\mu RT_\text{к}}{8\rho_\text{к}}$. После подстановки получаем:$T_1 = T_0\left(1 + \frac{R}{C_P}\left(\frac{1}{3\rho_\text{к}/\rho_0 - 1} - \frac{9}{4}\frac{\rho_0}{\rho_\text{к}}\frac{T_\text{к}}{T_0}\right)\right) \approx \approx 300 \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3\cdot50/25-1} - \frac{9}{4} \cdot \frac{25}{50} \cdot \frac{374}{300}\right)\right) \approx 300 \cdot (1 + 0.1 \cdot (0.2 - 1.4)) \approx \boxed{264\ \text{К}\ (-9\ °\text{C})}$.

**4Б.** (*Попов П.В.*) Из соотношения Максвелла $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = \frac{a}{V^3}$ и тождества $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_V$, где $C_V = \frac{3}{2}R$, находим молярную внутреннюю энергию: $U = C_V T - \frac{a}{2V^2}$. При расширении в пустоту внутреняя энергия не меняется $\Delta U = 0$, откуда $\Delta T = \frac{a}{2C_V}\left(\frac{1}{V_1^2} - \frac{1}{V_0^2}\right) = -\frac{3a}{8C_V V_0^2} = \boxed{-\frac{aV_0^2}{4R}}$.

**5Б.** (*Холин Д.И., Заболотных А.А.*) Поскольку в давление и поток частиц вносит вклад только радиальная компонента скорости, задача является эффективно двумерной. За интервал времени $(t, t+dt)$ к стенке сосуда подлетят те молекулы, которые в начальный момент имели скорости от $v - dv = r/(t+dt)$ до $v = r/t$, откуда $dv = r dt/t^2$. Количество ударяющихся о стенку молекул в двумерном случае: $dN \propto \frac{m}{kT}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v dv = \frac{m}{kT}\exp\left(-\frac{mr^2}{2kTt^2}\right)\frac{r^2 dt}{t^3}$. Тогда оказываемое частицами давление на стенку равно $P = \frac{dN}{2\pi r\, dt}\cdot mv \propto \boxed{\frac{1}{t^4}\exp\left(-\frac{mr^2}{2kTt^2}\right)}$. Вычислим производную $dP/dt \propto \left(-4 + 2\cdot\frac{mr^2}{2kTt^2}\right)\exp\left(-\frac{mr^2}{2kTt^2}\right)$. Приравнивая производную к нулю, находим время, при котором давление максимально $\boxed{t_m = r\sqrt{\frac{m}{4kT}} = 10^{-2}\sqrt{\frac{18\cdot 10^{-3}}{4\cdot 8.3\cdot 500}} \approx 10^{-5}\text{ с}}$.

**6Б.** (*Меньшиков П.Л., Попов П.В.*) Энтропию находим аналогично 6А, $S \approx kN\left(\ln 2 - \frac{x^2}{2}\right)$. Запишем элементарную работу в изотермическом процессе как $\delta A_T = f dl_T = dF_T = dU_T - TdS_T = -TdS_T$, откуда $f = -T\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T = -\frac{T}{Na}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T = -\frac{kT}{2a}\ln\frac{1+x}{1-x} \approx \frac{kT}{a}x = \boxed{\frac{kTl}{Na^2}}$.

---

**Инструкция для проверяющих**

За каждую задачу выставляется число баллов, кратное 0,5, исходя из стоимости задачи, указанной в скобках:

| **Степень решённости** | **Стоимость** | | |
|---|---|---|---|
| **Задача решена верно**: приведено *обоснованное* решение и даны ответы на все вопросы задачи. Если задача требует численного ответа, возможно наличие арифметических ошибок, не приводящих к ошибке в порядке или знаке величины. | 1,5 | 2 | 2,5 |
| Ход решения в целом верен и получены ответы на все вопросы задачи, но решение содержит **недочёты, не касающиеся физического содержания** (вычислительные ошибки, влияющие на порядок или знак величины; ошибки в выкладках, не влияющие на ход решения и т.п.). | 1,0 | 1,5 | 2,0 |
| Задача **решена частично** (не доведена до конца при верных исходных посылках), либо **решение содержит ошибки** (грубые ошибки, влияющие на ход решения; логические ошибки; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства; частные ошибки в применении физических законов и т. п.). | 0,5 | 1,0 | 1,5 |
| Задача **не решена, но есть подвижки** в её решении, либо решение содержит **грубые ошибки**. При этом указаны *все* основные физические законы, на основе которых задача может быть решена. | 0 | 0,5 | 1,0 |
| **Задача не решена**: основные физические законы записаны принципиально неверно, перечислены не полностью или использованы законы, не имеющие отношения к задаче / решение задачи не соответствует условию / попытки решить задачу не было. | 0 | 0 | 0 |

**Оценка за письменную работу** ставится по сумме баллов за все задачи с округлением в *большую* сторону, но не более 10 и не менее 1.

*Максимальная оценка за устный экзамен*: $\Sigma$ = [оценка за письм. работу] + [баллы за задания].

«отл»: +2 б./задание; «хор»: +1 б./задание; «удовл»: +0 б./задание; не сдано: −3 б./задание.

При подозрении, что задача списана, рядом с выставленным баллом ставится знак вопроса.