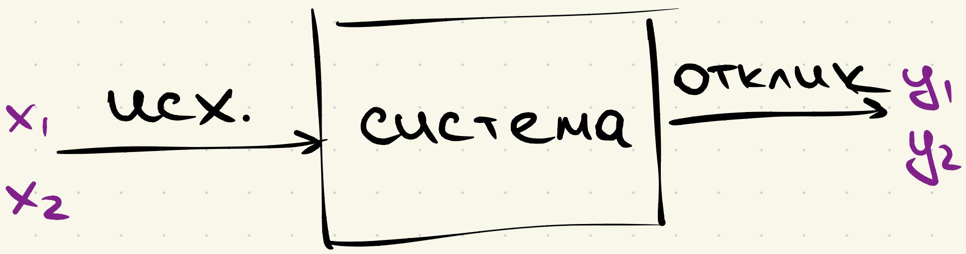
Теория по РТ цепям

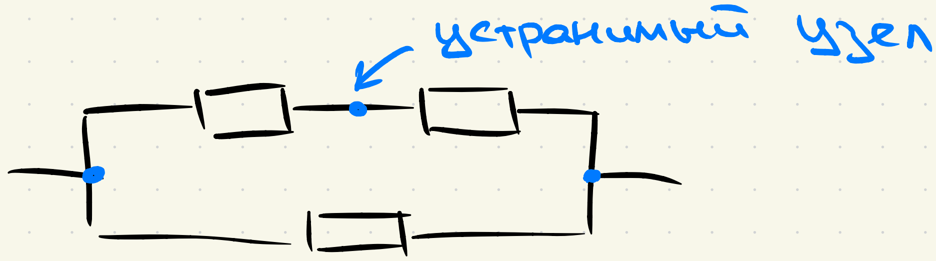
3 семестр

Лекция 1
5.09.2023



$$\alpha x_1 + \beta x_2 \to \alpha y_1 + \beta y_2$$

$$x_1 \to y_1 ; \; x_2 \to y_2$$



Ветвью называется участок эл. цепи, где протекает один и тот же ток.

Узел - место соединения ветвей.

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма мгновенных значений всех токов ветвей, которые сходятся в узле, равна нулю, или $\Sigma i_k = 0$.

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма мгновенных напряжений на резистивных элементах замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС, входящих в этот контур.

$$i_1 = f_1(u_1, u_2)$$
$$i_2 = f_2(u_1, u_2)$$

g_{11} - входная проводимость

g_{12} - обратная проходная проводимость

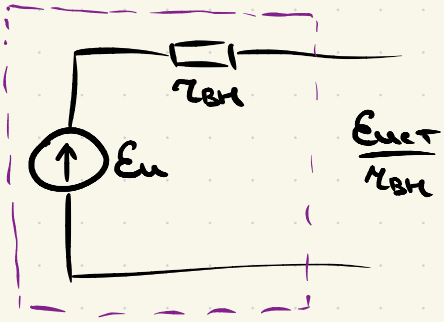
$$\begin{cases} di_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right) du_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right) du_2 \\ di_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right) du_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right) du_2 \end{cases}$$

g_{22} - выходная проводимость

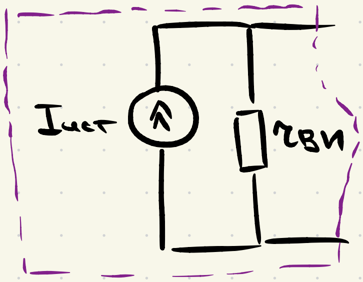
g_{21} - прямая проходная проводимость

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \\ I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Th. Тевенина и Нортона:



ТЕВЕНИНА



НОРТОНА

Ток произвольной ветви линейной электрической цепи не изменится, если автономный двухполюсник, к которому подключена данная ветвь, заменить эквивалентным линеаризуемым источником энергии, который может быть представлен паралл. или послед. схемой замещения.

ЭДС идеального источника напряж. послед. схемы замещения равна напряжению холостого хода автономного двухполюсника. Ток идеального источника паралл. схемы замещ. равен току к.з. авт. двухполюсника, а внутр. сопр. и внутр. проводимость эквив. ист. энергии равны соотв. комплексному входному сопротивлению и компл. вх. проводимости автономного двухполюсника.

$$\begin{matrix} U_1 = f_1(i_1, i_2) \\ U_2 = f_2(i_1, i_2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} dU_1 = \overset{=r_{11}}{\frac{\partial f_1}{\partial i_1}} di_1 + \overset{=r_{12}}{\frac{\partial f_1}{\partial i_2}} di_2 \\ dU_2 = \underset{r_{21}}{\underset{\parallel}{\frac{\partial f_2}{\partial i_1}}} di_1 + \underset{r_{22}}{\underset{\parallel}{\frac{\partial f_2}{\partial i_1}}} di_2 \end{cases}$$

r_{11} - входное сопротивление; r_{12} - обратное проходное сопр.
r_{21} - прямое проходное; r_{22} - выходное

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{|Y|}; \quad Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{|Y|}; \quad Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{|Y|}; \quad Z_{22} = \frac{Y_{11}}{|Y|}$$

$$\begin{cases} dU_1 = h_{11} di_1 + h_{12} dU_2 \\ dI_2 = h_{21} di_1 + h_{22} dU_2 \end{cases}$$

Семинар 1, 2 (лабораторная)
2.09.2023, 9.09.2023

двухполюсник

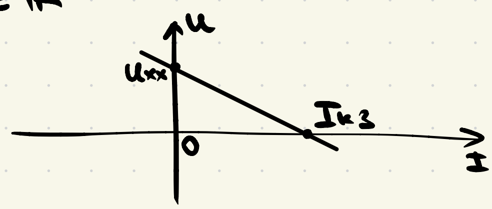
(U, I)

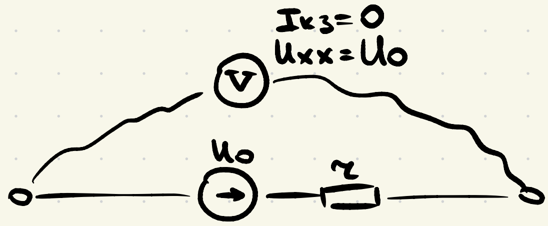
$U = f(I)$ - ВАХ

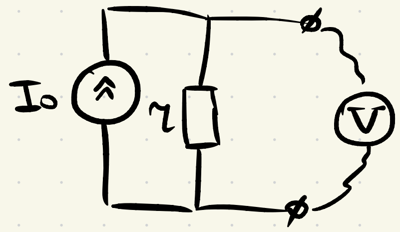
Линейный двухполюсник: (U_1, I_1) и $(U_2, I_2) \Rightarrow (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2; \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2)$

$\alpha_i \in \mathbb{R}$

0 - $(0;0)$
1 - резисторы
2 - $(\mathbb{R};\mathbb{R})$

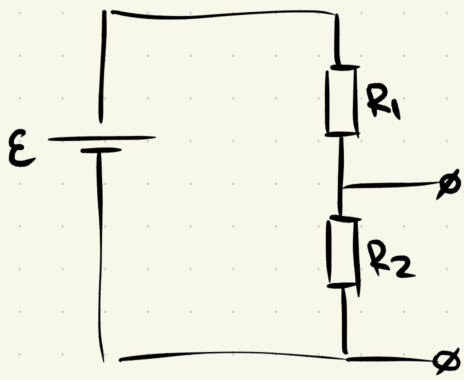






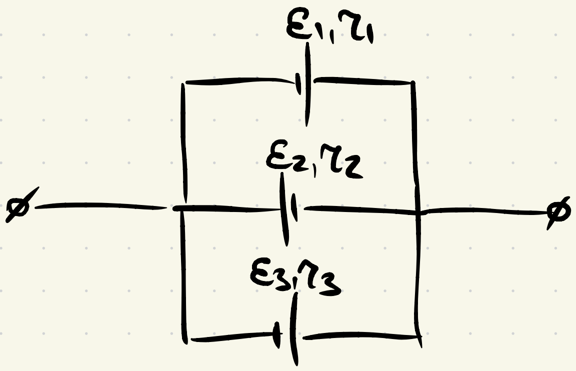
$U_{xx} = I_0 r$

$I_{кз} = I_0$



$I_{кз} = \frac{\varepsilon}{R_1}$

$U_{xx} = I R_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} R_2$



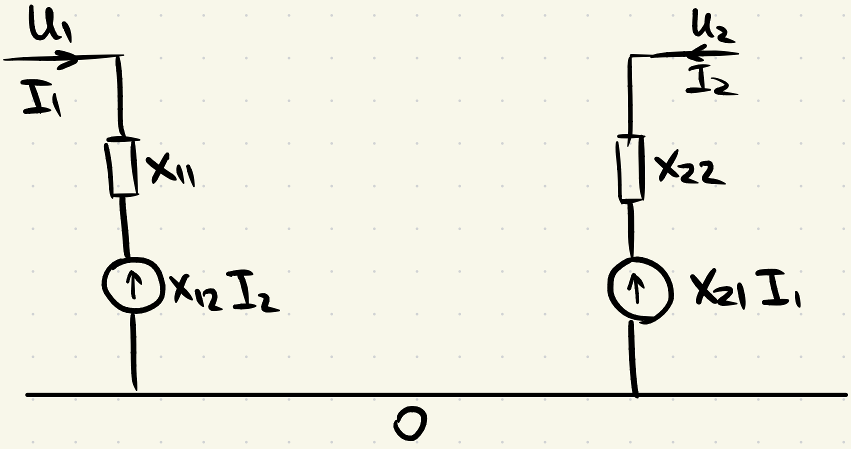
$r = r_1 \| r_2 \| r_3$

$$\begin{cases} \alpha_1 U_1 + \beta_1 I_1 + \gamma_1 U_2 + \delta_1 I_2 = 0 \\ \alpha_2 U_1 + \beta_2 I_2 + \gamma_2 U_2 + \delta_2 I_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & -\beta_1 \\ -\gamma_2 & -\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_1 \end{pmatrix}$$

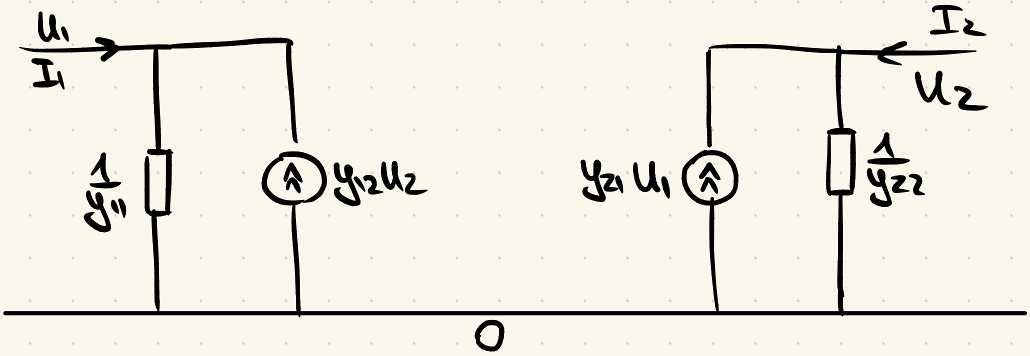
$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}}_{\text{H-параметр}} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_1 \end{pmatrix}$$

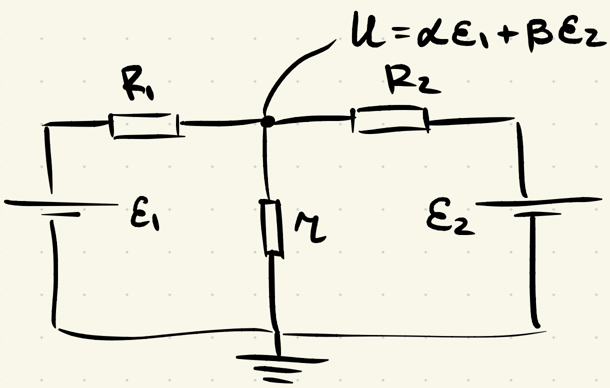
$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{-1} = Y$$

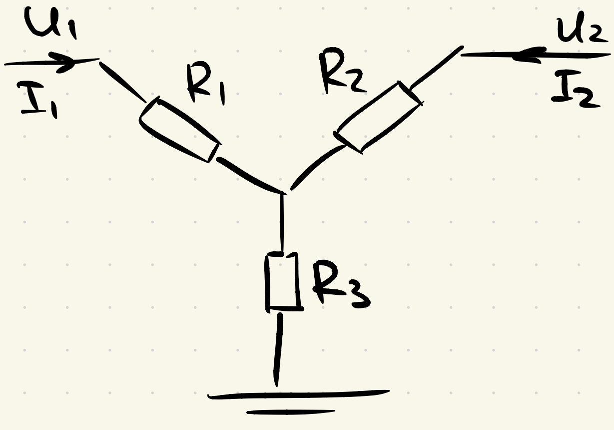
$$\begin{cases} U_1 = x_{11} I_1 + x_{12} I_2 \\ U_2 = x_{21} I_1 + x_{22} I_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} I_1 = y_{11} U_1 + y_{12} U_2 \\ I_2 = y_{21} U_1 + y_{22} U_2 \end{cases}$$





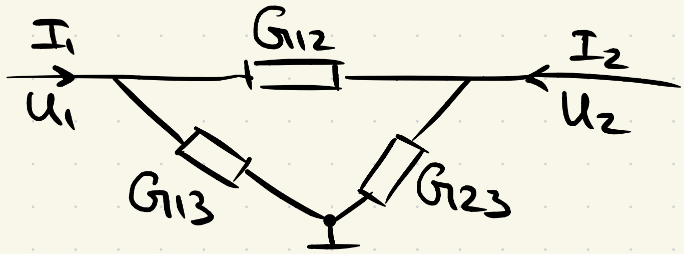


$$\begin{cases} U_1 = x_{11} I_1 + x_{12} I_2 \\ U_2 = x_{21} I_1 + x_{22} I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1 = (R_1 + R_3) I_1 \\ U_2 = I_1 R_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_2 = I_2 (R_2 + R_3) \\ U_1 = I_2 R_3 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} R_1+R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2+R_3 \end{pmatrix}$$



$G_{12} = \frac{1}{R_{12}}$; G – проводимость $[Ом^{-1}]$

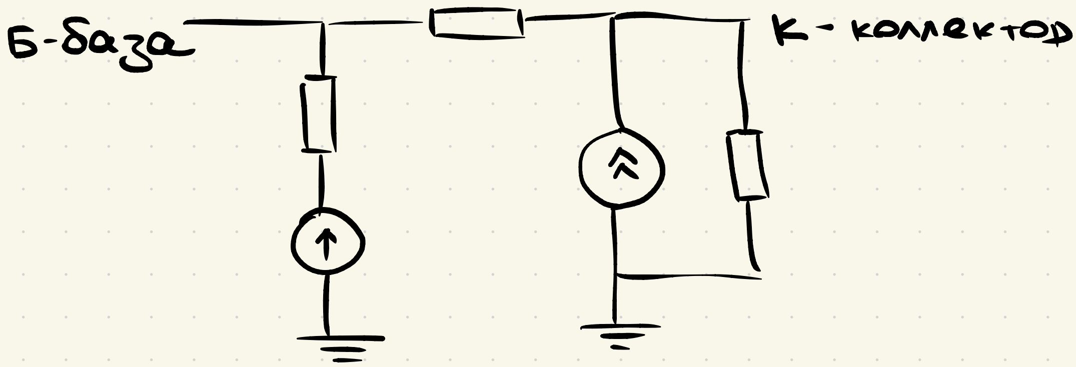
$$\begin{cases} I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2 \\ I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2 \end{cases}$$

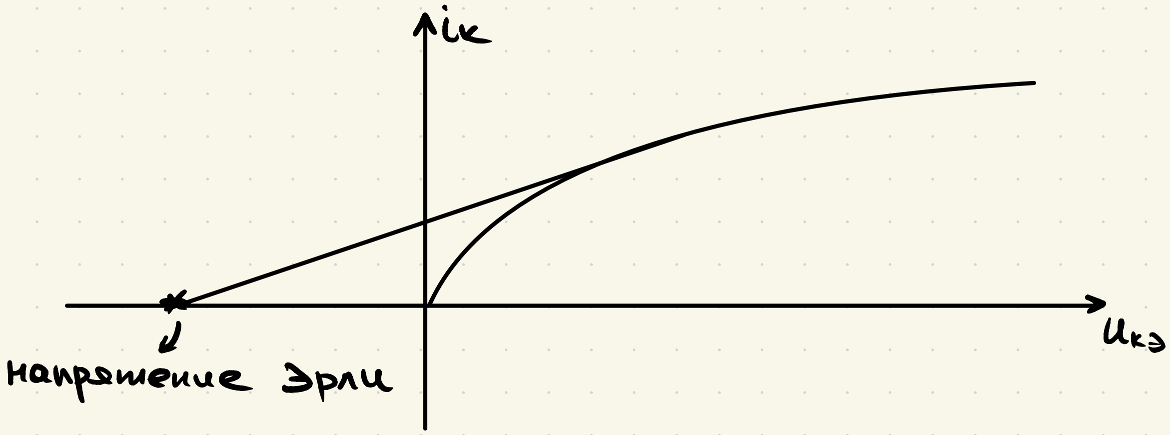
$$\begin{cases} I_1 = U_1(G_{13}+G_{12}) \\ I_2 = -U_1 G_{12} \end{cases} ; \quad \begin{cases} I_1 = -U_2 G_{12} \\ I_2 = U_2(G_{12}+G_{23}) \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} G_{13}+G_{12} & -G_{12} \\ -G_{12} & G_{12}+G_{23} \end{pmatrix}$$

„Звезда-треугольник" док-во: $X^{-1} = Y$

Лекция 2
12.09.2023





$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

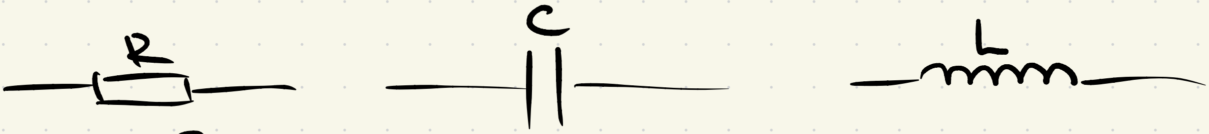
S_{21} - какая доля сигнала, приш. на вход, уйдёт с выхода
S_{12} - обр. к усилению
S_{11} - поданная мощность

Аналитический сигнал - сигнал, в спектре которого нет отрицательных частот

Лекция 3
19.09.2023

$$\tilde{u} = A(\cos\omega t + i\sin\omega t) = A_0 e^{j\omega t}$$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{u}}{R} \Rightarrow R = \frac{\tilde{u}}{\tilde{I}}$$

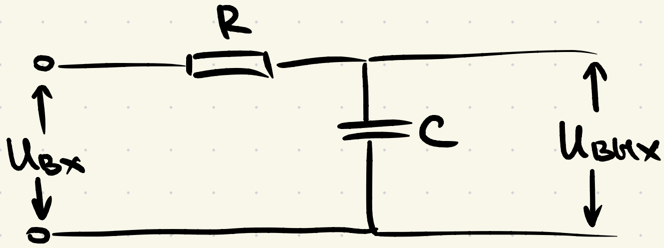


$$\tilde{I} = C\frac{d\tilde{u}}{dt} = CA_0 j\omega e^{j\omega t}$$

$$Z_C = \frac{\tilde{u}}{\tilde{I}} = \frac{1}{j\omega C}$$ - импеданс конденсатора

$$\tilde{u} = L\frac{d\tilde{I}}{dt} = \left\| \tilde{I} = B_0 e^{j\omega t} \right\| = LB_0 j\omega e^{j\omega t}$$

$$\frac{\tilde{u}}{\tilde{I}} = j\omega L$$



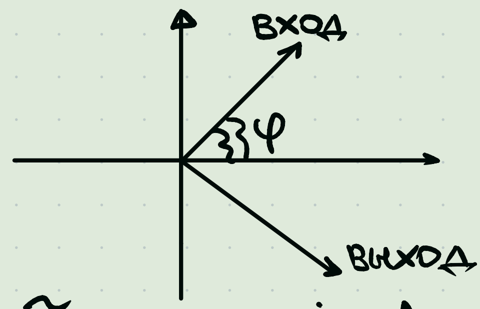
$$I_{вх} = \frac{U_{вх}}{R+\frac{1}{j\omega C}} \;;\; U_{вых} = I\cdot\frac{1}{j\omega C}$$

$$U_{вых} = \frac{U_{вх}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\cdot\frac{1}{j\omega C} = \frac{U_{вх}}{1+j\omega RC}$$

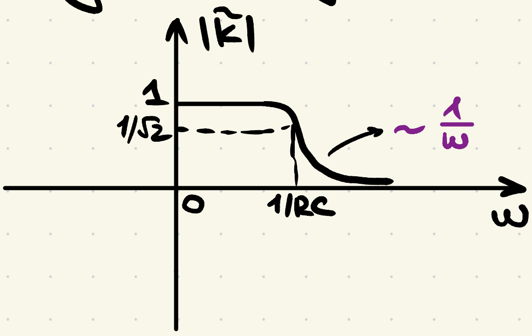
$$\tilde{K} = \frac{\tilde{U}_{вых}}{\tilde{U}_{вх}} = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1-j\omega RC}{1+\omega^2R^2C^2}$$

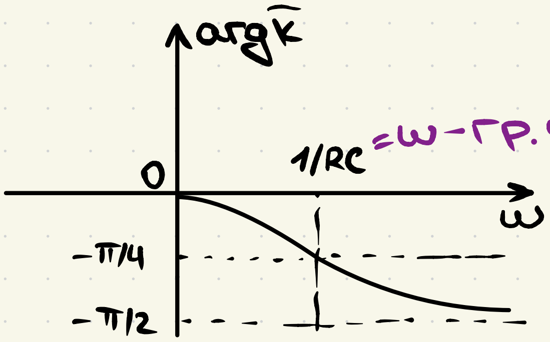
$$|\tilde{K}| = \frac{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}{1+\omega^2R^2C^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$$

$$\arg\tilde{K} = \operatorname{arctg}(-\omega RC)$$

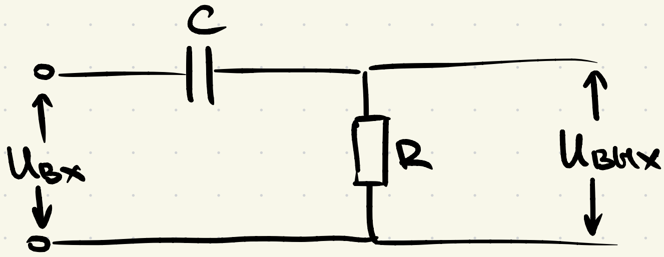


$$\tilde{A}_0 = |A_0|\cdot e^{j\arg A_0}$$





$1/RC = \omega$ - гр. частота [рад/с]

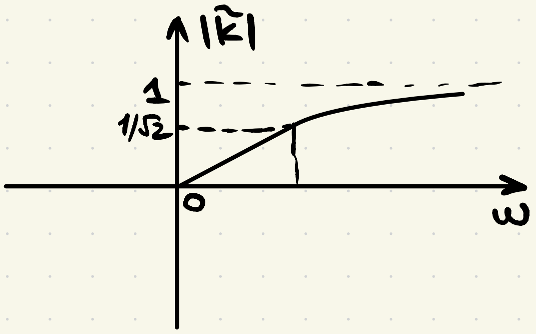


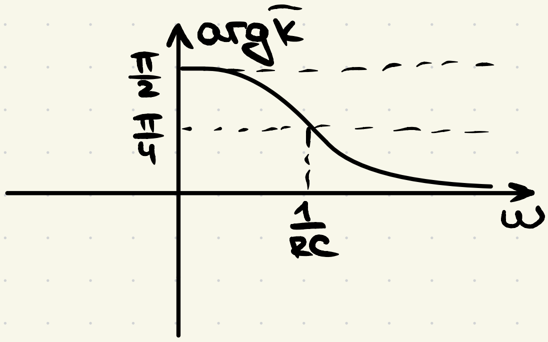
$$I_{вх} = \frac{U_{вх}}{R + \frac{1}{j\omega C}}; \quad U_{вых} = IR$$

$$U_{вых} = \frac{U_{вх}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot R = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} U_{вх}$$

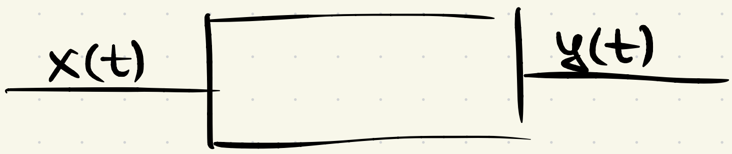
$$\tilde{K} = \frac{\tilde{U}_{вых}}{\tilde{U}_{вх}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega RC + \omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$|\tilde{K}| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}; \quad \arg \tilde{K} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$





Семинар 4 (Л/Р)
23.09.2023

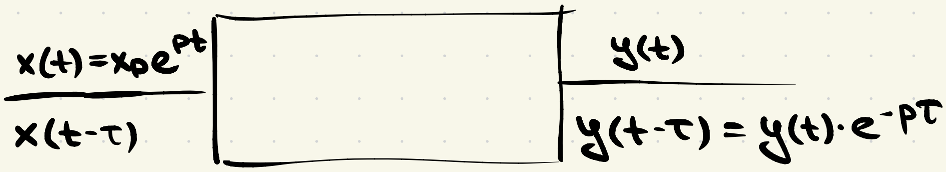


1) Линейность: $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \to \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$, где $x_1(t) \to y_1(t)$, $x_2(t) \to y_2(t)$

2) Стационарность: $x(t-\tau) \to y(t-\tau)$, $\tau = const$

3) Причинность: отклик не раньше воздействия

$x(t) = |x_p| e^{j\varphi} \cdot e^{\delta t} \cdot e^{j\omega t}$, $x_p \in \mathbb{R}$



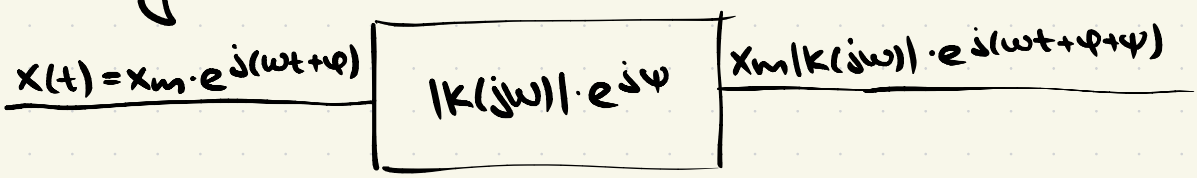
$p = \delta + j\omega$; $x_p = |x_p| \cdot e^{j\varphi}$; $x(t-\tau) = x_p e^{pt} e^{-p\tau}$

Передаточная функция: $H(p) = \frac{y_p}{x_p} \in \mathbb{C}$

Комплексный коэфф. передачи: $K(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega}$

АЧХ $= |K(j\omega)|$

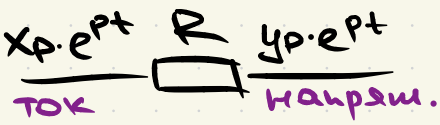
ФЧХ $= \arg K(j\omega)$



$x_p \cdot e^{pt} \to \mathrm{Re}\left[x_p \cdot e^{pt}\right] = |x_p| e^{\delta t} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}(x_p e^{pt} + \bar{x}_p e^{\bar{p} t})$

$y(t) = \frac{1}{2}(H(p) x_p e^{pt} + H(p^*) x_p^* e^{p^* t})$

$H(p^*) = H^*(p)$, если $\in \mathbb{R}$



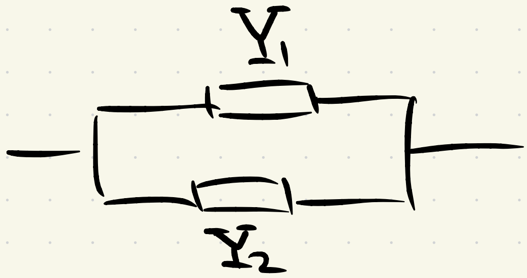
$H(p) = \frac{y_p}{x_p} = R \in \mathbb{R}$; $Z = \frac{U_p}{I_p}$ – импеданс; $Z_R = R$

$Y = \frac{i_p}{U_p}$ – иммитанс

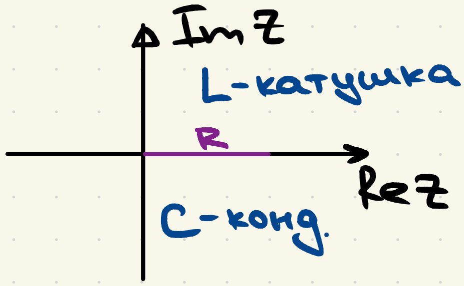
C: $i(t) = C \frac{dU(t)}{dt} \Rightarrow i_p e^{pt} = C U_p e^{pt} \cdot p \Rightarrow Z_C = \frac{1}{pC}$

L: $L \frac{di}{dt} = U(t) \Rightarrow L i_p e^{pt} \cdot p = U_p e^{pt} \Rightarrow Z_L = pL$

$$Z_\Sigma = Z_1 + Z_2$$



$$Y_\Sigma = Y_1 + Y_2$$



Мощность

$$Z = |Z| \cdot e^{j\varphi}$$

$$u(t) = U_m \cos\omega t \Rightarrow U_p \cdot e^{pt}; \; U_p = U_m; \; p = j\omega$$

$$i(t) = \frac{U_p}{Z} = \frac{U_m}{|Z|} e^{j\omega t - j\varphi} \to i_m \cos(\omega t - \varphi)$$

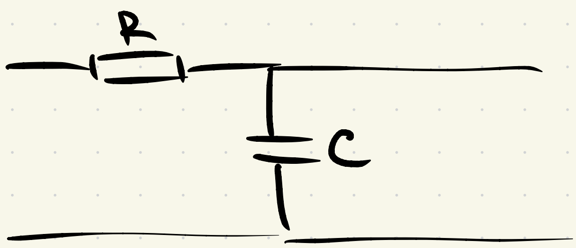
$$N = u(t) \cdot i(t) = U_m \cdot i_m \left[\cos^2\omega t \cos\varphi + \cos\omega t \sin\omega t \sin\varphi\right] =$$
$$= \frac{1}{2} U_m i_m \left[(1+\cos 2\omega t)\cos\varphi + \sin 2\omega t \cdot \sin\varphi\right]$$

$$P = \frac{1}{2} U_m i_m \cos\varphi; \quad Q = \frac{1}{2} U_m i_m \sin\varphi$$

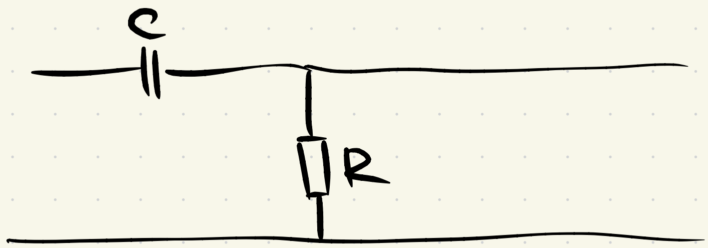
$$P^* = P + jQ = \frac{U_p i_p^*}{2} = \frac{1}{2}(U_m \cdot i_m e^{j\varphi})$$

$$N = P(1+\cos\omega t) + Q \cdot \sin 2\omega t$$

$$i(t) = |i_p| e^{j\varphi} e^{st} e^{j\omega t}$$



интегральная



дифференциальная

$$H(p) = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1+s}$$ – для интегрирующей

$$u(t) = U_p \cdot e^{pt}$$

$$\int U_p \cdot e^{pt} = \frac{1}{p} U_p \cdot e^{pt}; \; p = j\omega$$

$$U_p \cdot e^{pt} \cdot \frac{1}{1+pRC} = \frac{1}{p} U_p \cdot e^{pt} = U_{вых}$$

поэтому цепь называется интегральной

Лекция 4
26.09.2023

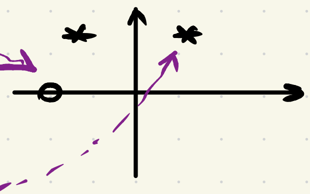
$$Z_R = R;\quad Z_C = \frac{1}{pC};\quad Z_L = pL$$

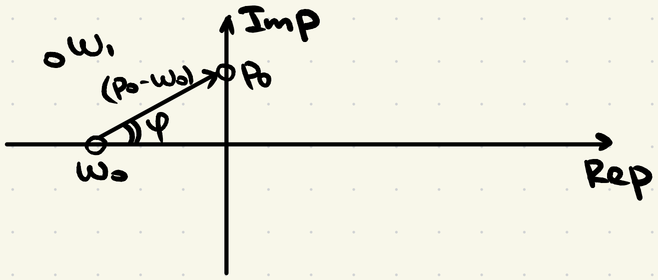
$$K = \frac{(\omega-\omega_0)(\omega-\omega_1)\ldots(\omega-\omega_N)}{(\omega-\omega_0')(\omega-\omega_1')\ldots(\omega-\omega_m')}$$

$$K = \frac{(p-\omega_0)(p-\omega_1)\ldots(p-\omega_N)}{(p-\omega_0')(p-\omega_1')\ldots(p-\omega_m')}$$

нуль

полюс

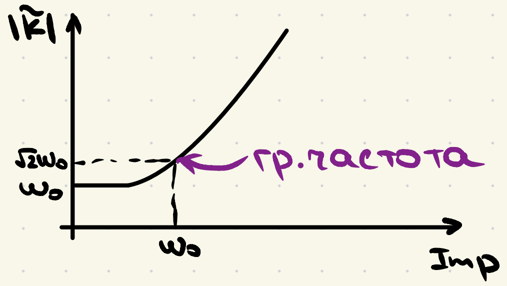


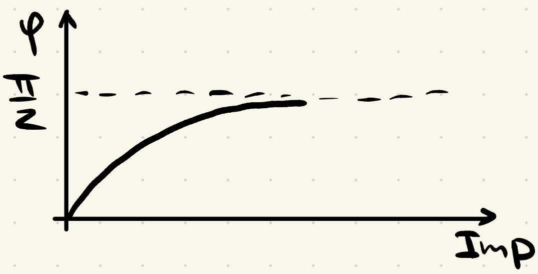


$$\tilde{K} = \frac{A_0 \cdot e^{jB_0} \cdot A_1 \cdot e^{jB_1} \cdot \ldots \cdot A_n e^{jB_n}}{C_0 \cdot e^{jD_0} \cdot C_1 \cdot e^{jD_1} \cdot \ldots \cdot C_m e^{jD_m}} = \underbrace{\frac{A_0 \cdot A_1 \cdot \ldots \cdot A_n}{C_0 \cdot C_1 \cdot \ldots \cdot C_m}}_{|\tilde{K}|} \underbrace{e^{j(B_0+B_1+\ldots+B_n-D_0-D_1-\ldots-D_m)}}_{e^{j\arg\tilde{K}}}$$

$$A_0 = \sqrt{(\mathrm{Re}\,p_0-\mathrm{Re}\,\omega_0)^2+(\mathrm{Im}\,p_0-\mathrm{Im}\,\omega_0)^2}$$

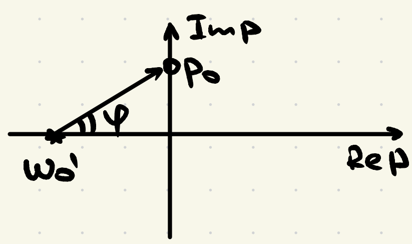
$$B_0 = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\,p_0-\mathrm{Im}\,\omega_0}{\mathrm{Re}\,p_0-\mathrm{Re}\,\omega_0}\right)$$

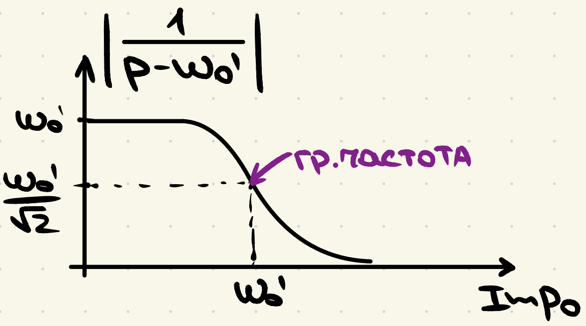


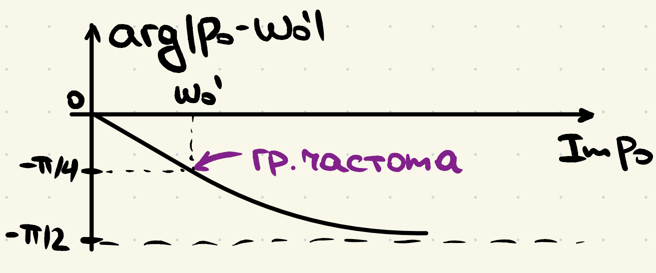


$$\arg\left(\frac{1}{p-\omega_0'}\right) = -\varphi$$

$$\left|\frac{1}{p-\omega_0'}\right| = \frac{1}{\sqrt{(\mathrm{Re}\,p_0-\mathrm{Re}\,\omega_0')^2+(\mathrm{Im}\,p_0-\mathrm{Im}\,\omega_0')^2}}$$







Семинар 5 (Л/Р)
30.09.2023

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \to y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,h(t-\tau)\,d\tau=(x*h)(t)$$

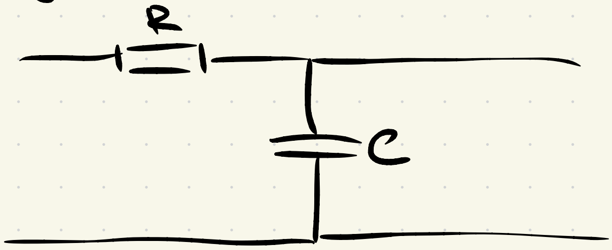
$$\mathcal{D}x(t)=\frac{dx(t)}{dt};\ \mathcal{D}^{-1}x(t)=\int x(u)\,du$$

$$(x*y)(t)=(\mathcal{D}^{-1}x(u)*\mathcal{D}y(u))(t)$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}x(j\omega)e^{j\omega t}\,d(j\omega)$$

$$x(j\omega)=F[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$x(p)=L[x(t)]=\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-pt}\,dt$$



$$H(p)=\frac{1}{1+pRC}$$

$$H(p)=k_0\cdot\frac{\Sigma a_i p^i}{\Sigma b_j p^j}=k_0'\,\frac{\Pi(p-\alpha_i)}{\Pi(p-\beta_j)}$$

$$p-\mu=|p-\mu|\cdot e^{j\arg(p-\mu)}=\ell_p(\mu)e^{j\varphi_p(\mu)}$$

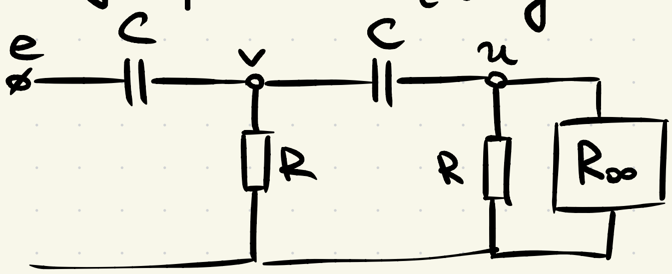
$$H(p)=k_0'\,\frac{\Pi\ell_p(\alpha_i)}{\Pi\ell_p(\beta_j)}\,e^{j(\varphi_p(\alpha_i)-\varphi_p(\beta_j))}$$

$$\text{АЧХ}=|k_0'|\cdot\frac{\Pi\ell_p(\alpha_i)}{\Pi\ell_p(\beta_j)};\quad \text{ФЧХ}=\sum_i\varphi_p(\alpha_i)-\sum_j\varphi_p(\beta_j)$$

$$\text{АЧХ}=k_0''\,\frac{\Pi\left|\frac{j\omega}{\alpha_i}+1\right|}{\Pi\left|\frac{j\omega}{\beta_j}+1\right|}$$

$$K(dB)=20\lg\text{АЧХ}=20\lg k_0''+20\lg\Sigma\left|\frac{j\omega}{\alpha_i}+1\right|-20\,\Sigma\lg\left|\frac{j\omega}{\beta_j}+1\right|$$

$$20\lg\left|\frac{j\omega}{\mu}+1\right|=\begin{cases}0,\ \omega\ll\mu\\ 20\lg\omega-20\lg\mu,\ \omega\gg\mu\end{cases}$$

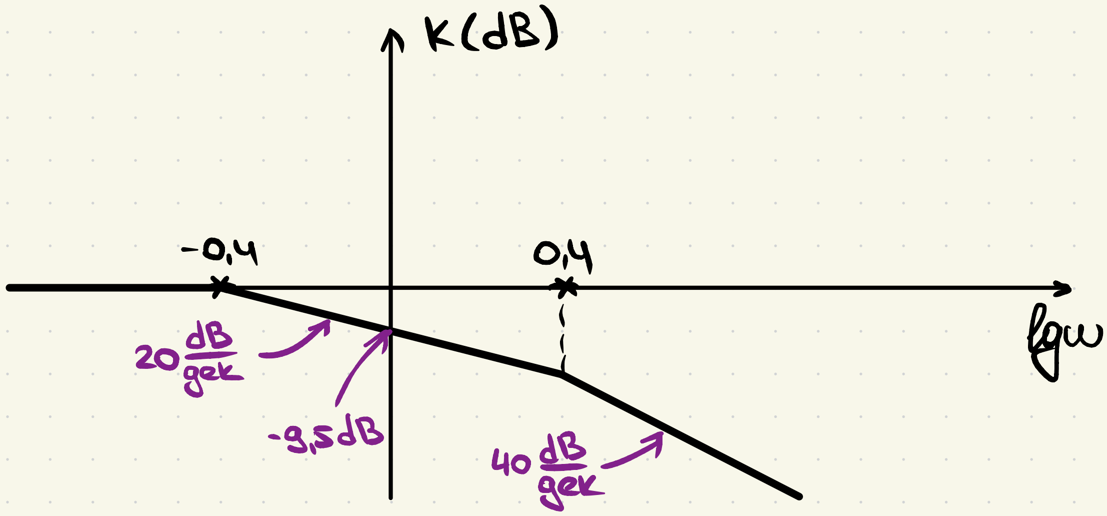


$$s=j\frac{\omega}{\omega_0}=j\omega RC$$

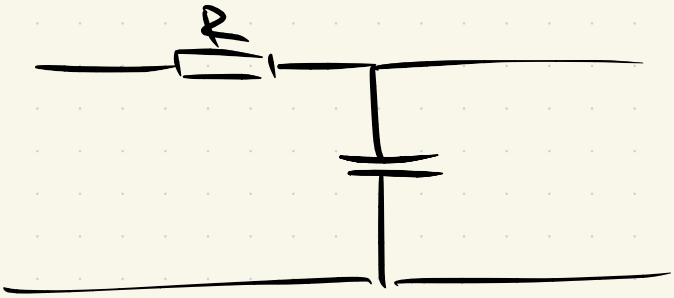
$$R=1$$

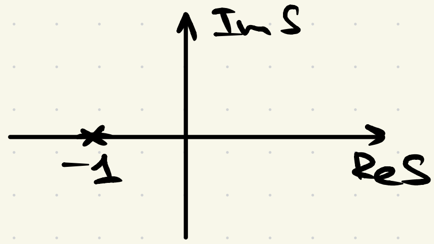
$$Z_C=\frac{1}{j\omega C}=\frac{1}{s};\ Z_R=1$$

$$\begin{cases} \dfrac{e-V}{1/S} = \dfrac{V-u}{1/S} + \dfrac{V}{1} \\ \dfrac{V-u}{1/S} = \dfrac{u}{1} \end{cases} \Rightarrow H(p) = \frac{1}{S^2+3S+1} = \frac{u}{e} \; ; \; S_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

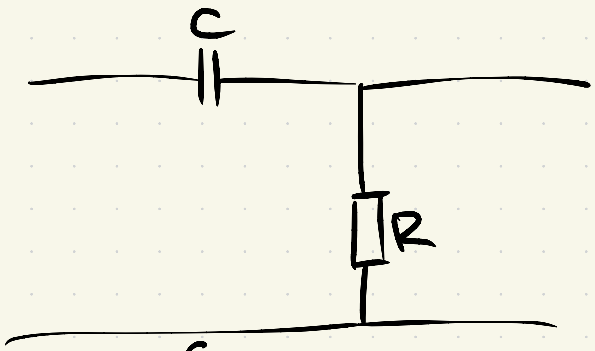


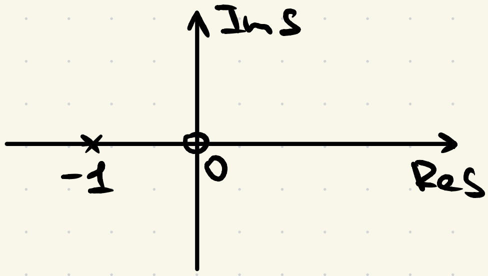
Лекция 5
3.10.2023



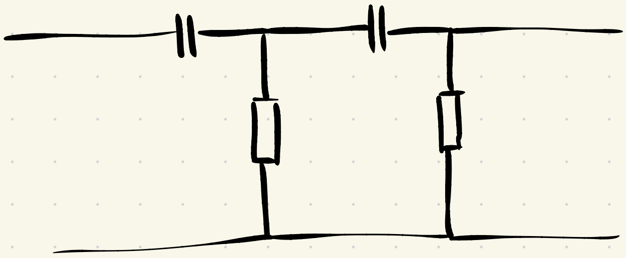


$$K = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+pRC} = \frac{1}{1+S}; \quad P = \frac{S}{RC}$$

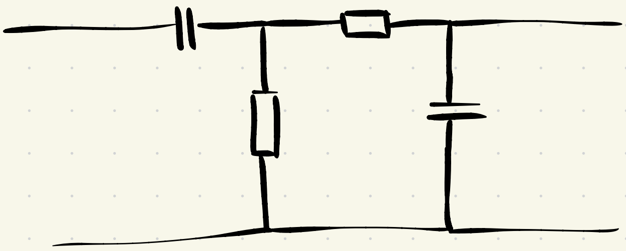




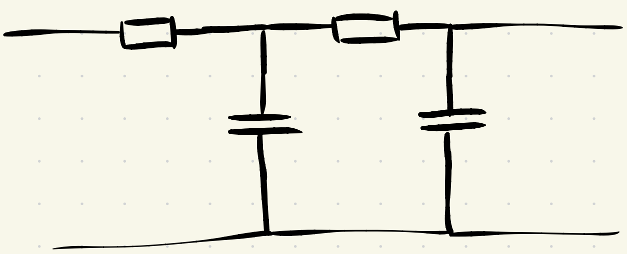
$$K = \frac{S}{1+S}$$



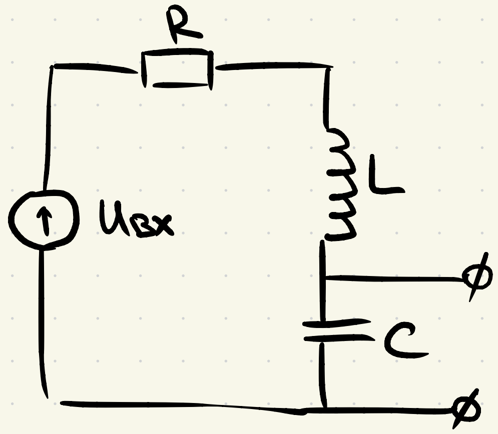
$$K = \frac{S^2}{S^2+3S+1}$$

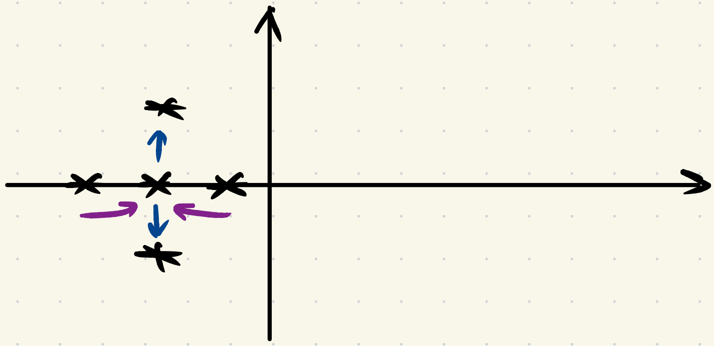


$$K = \frac{S}{S^2+3S+1}$$



$$K = \frac{1}{S^2+3S+1}$$

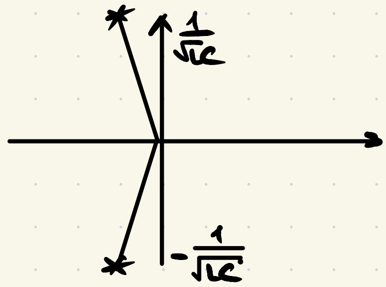


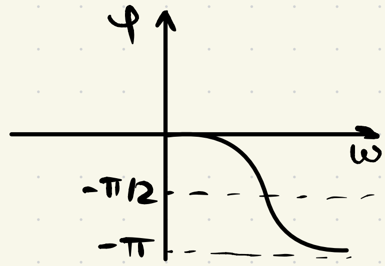


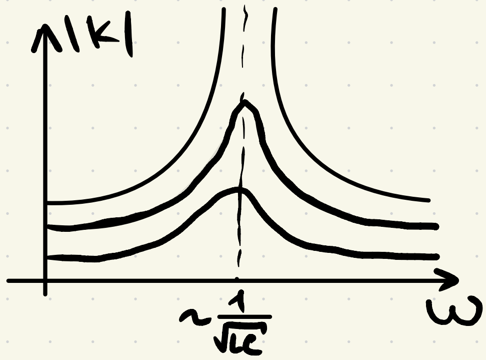
$$K = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{pRC + p^2LC + 1}$$

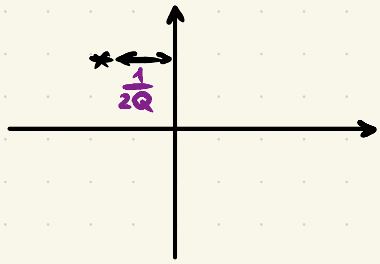
$$p_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}$$

$$R \ll \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow p_{1,2} = \frac{-RC \pm 2j\sqrt{LC}}{2LC}$$

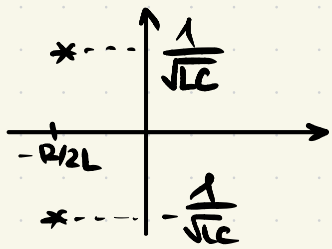


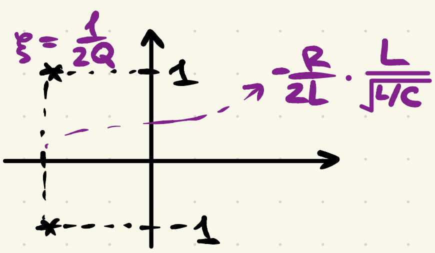






$$p_{1,2} = \frac{-R \pm 2j\sqrt{\frac{L}{C}}}{2L}$$





$$\frac{1}{2Q} = \frac{R}{2L}\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R}$$

характ. сопр. колеб. контура

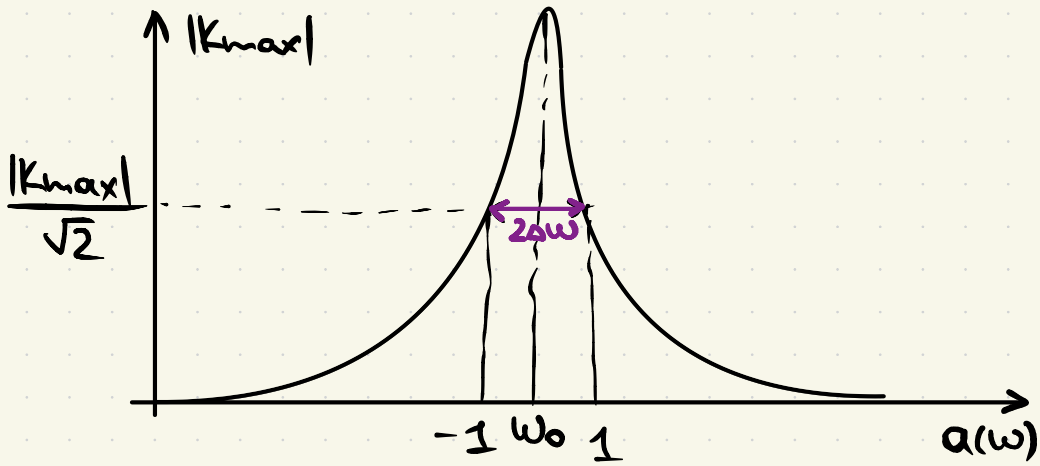
$$p = \frac{s}{\sqrt{LC}} ; \quad \xi = \frac{1}{2Q}$$

обобщённая расстройка

$$s^2 + s\frac{RC}{\sqrt{LC}} + 1 = s^2 + 2\xi s + 1 = 2\xi s\left(1 + Q\left(s + \frac{1}{s}\right)\right) = 2\xi s(1 + ja(\omega))$$

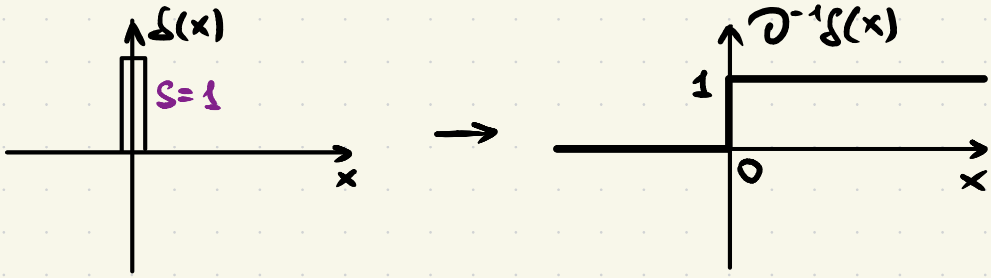
$$a(\omega) = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = Q\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0\omega}\right) = Q\,\frac{2\omega\Delta\omega}{\omega_0\omega} = Q\cdot\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$$

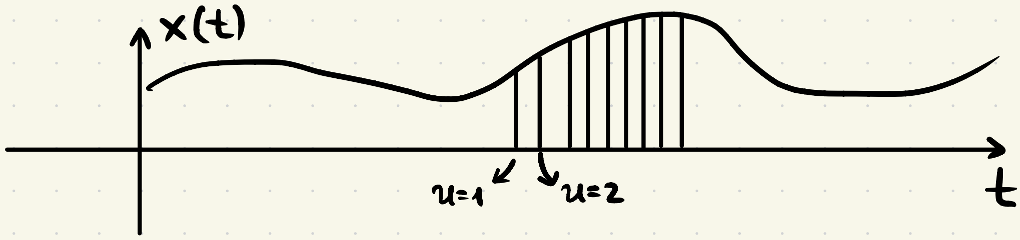
$$|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$$



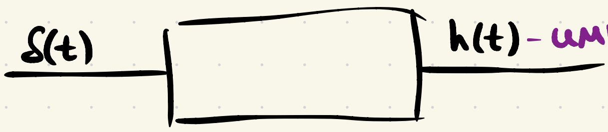
$$Q \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = 2 \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Семинар 6 (л/р)
7.10.2023





$$x(t) = \sum_u x(u)\,\Pi(t-u) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\,\delta(t-u)\,du$$



h(t) – импульсная реакция (хар-ка)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\,\delta(t-u)\,du \to y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\,h(t-u)\,du = (x*h)(t)$$

1) Коммутативность: $(x*h)(t) = (h*x)(t)$

2) Ассоциативность: $((x*y)*z) = (x*(y*z))$

3) $(x*y)(t) = (D^{-1}x(u)\,Dy(u))(t)$

Переходная хар-ка: $h_0(t) = (\theta*h)(t) = (D\theta * D^{-1}h) = (\delta * D^{-1}h) = D^{-1}h$

$$y(t) = (x*h)(t) = (Dx * D^{-1}h)(t) = (Dx * h_0)(t)$$

Преобразование Фурье:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega)\,e^{j\omega t}\cdot\frac{1}{2\pi j}\,d(j\omega)$$ – находим сигнал, зная спектр

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$ – находим спектр, зная сигнал

Для правост. сигнала (сигнал слева равен нулю):

$p = j\omega + \delta$

$$x(t) = \int x(p)\,e^{pt}\,dp;\quad x(p) = \int_{0}^{\infty} x(t)\,e^{-pt}\,dt$$

$$F[(x*y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x*y)(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = \ldots = F[x]\cdot F[y]$$

$$L[(x*y)] = L[x]\cdot L[y]$$

$$y(t) = (x*h)(t); \quad y(j\omega) = x(j\omega)\cdot h(j\omega)$$

$y(p) = x(p)\cdot h(p)$, где $h(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = H(p)$ - передаточная ф-ия

$$H(p) = \int_0^\infty h(t)e^{-pt}dt$$

$$K(j\omega) = L[h] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$L[h(t)] = H(p)$$

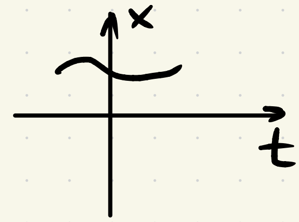
$$L[h_0(t)] = L[(\Theta * h)(t)] = L[\Theta]\cdot H(p) = \frac{H(p)}{p}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &L[\Theta] = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{1}{p} \\ &L[\delta] = 1 \\ &L[e^{-\mu t}] = \frac{1}{p+\mu} \end{aligned}}$$

<u>Пример</u> $H(s) = \frac{1}{1+s} = \frac{\omega_0}{p+\omega_0} = H(p); \quad s = \frac{p}{\omega_0}$

$$\frac{H(p)}{p} = \frac{\omega_0}{p(p+\omega_0)} = \underbrace{\frac{1}{p}}_{\Theta(t)} - \underbrace{\frac{1}{p+\omega_0}}_{e^{-\omega_0 t}} \Rightarrow h_0(t) = \Theta(t) - e^{-\omega_0 t}$$

Семинар 7
14.10.2023



$$\{\delta(u-t)\}_u \xleftrightarrow{FT} \{e^{j\omega t}\}_\omega$$

$$y(t)=(x*h)(t)\ ;\ Y(j\omega)=H(j\omega)\cdot X(j\omega)$$

Последовательный контур:

$$j\omega L=\frac{1}{j\omega C}=\frac{j}{\omega C}$$

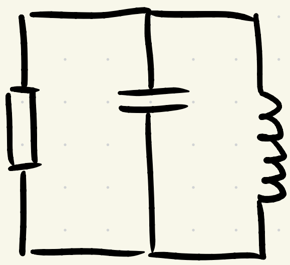
$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}\ ;\ |Z_L|=|Z_C|=\sqrt{\frac{L}{C}}=\rho$$

$$s=j\frac{\omega}{\omega_0}\Rightarrow Z_L=j\omega L=\rho s\ ;\ Z_C=\frac{\rho}{s}$$

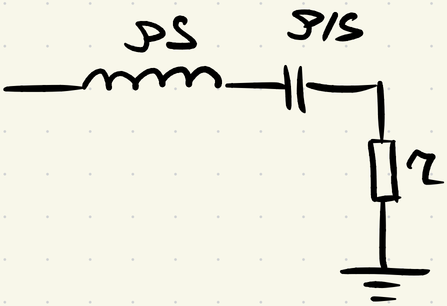
$$Z=r+\rho\left(s+\frac{1}{s}\right)=r\left[1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

$$Q=\frac{\rho}{r}$$

Параллельный контур:

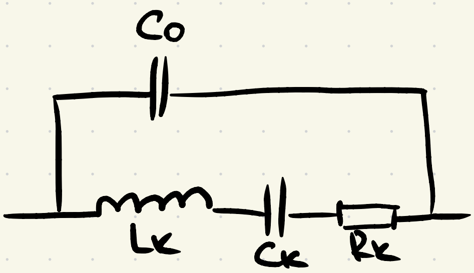


$$\boxed{Q=\frac{r}{\rho}}$$



$$H(\omega)=\frac{r}{r+\rho(s+1/s)}=\frac{1}{1+Q(s+1/s)}=\frac{S/Q}{S^2+\frac{1}{Q}S+1}$$

$$S_0=-\xi\pm\xi\sqrt{1-\xi^2}$$



$$\omega_k=\frac{1}{\sqrt{L_kC_k}}\quad \omega_п=\frac{1}{\sqrt{L_kC_p}}\ ;\ C_p=\frac{C_0C_k}{C_0+C_k}$$

$$\omega_п=\omega_k\sqrt{1+\frac{C_k}{C_0}}$$

Лекция 8
24.10.2023

8. Th. смещения

$f(t) \doteqdot F(p)$

$e^{p_0 t} f(t) \doteqdot F(p-p_0)$

$e^{p_0 t} \cdot f(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{p_0 t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-p_0)t} dt = F(p-p_0)$

$e^{-\alpha t} \cdot \sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

$e^{-\alpha t} \cos\omega t = \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

$e^{-\alpha t} \cdot t^n \doteqdot \frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$

9. Th. умножения (Борель)

$f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$

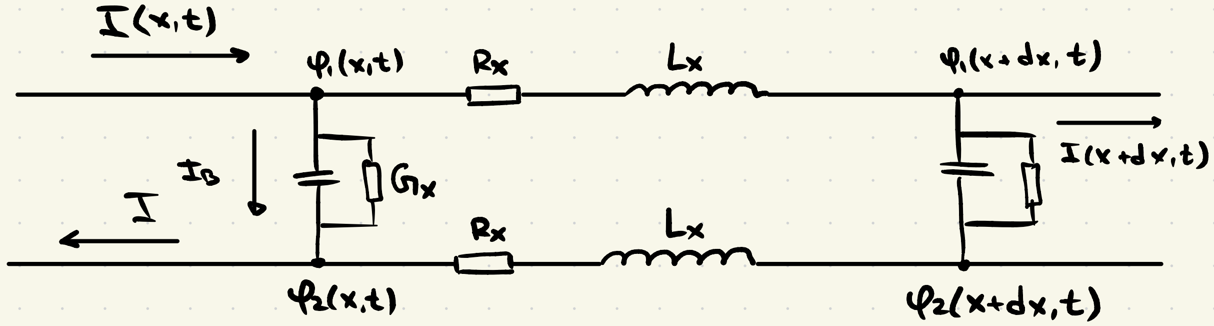
$F(p) G(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau$

$\int_0^t f(t) g(t-\tau) d\tau \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau =$

$= \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} \cdot g(t-\tau) dt = \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty g(t_1) e^{-pt_1} dt_1 =$

$= F(p) G(p)$, где $t_1 = t - \tau$

Семинар 8 (л/р)
28.10.2023



$$\left(G_x + C_x\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\varphi_1(x,t) - \varphi_2(x,t)\right] = I_B(x,t)$$

$$U(0,t) = \sum_n A(0,\omega_n)e^{j\omega_n t}$$

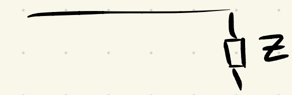
$$A(x,\omega) = A_1 e^{-\gamma(\omega)\cdot x} + A_2 e^{\gamma(\omega)\cdot x}$$

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = \sqrt{(R_x + j\omega L_x)(G_x + j\omega C_x)}$$ – постоянная распространения

$$U(x,t) = \sum_n A(x,\omega_n)e^{j\omega_n t}$$

$$I(x,t) = \sum_n B(x,\omega_n)e^{j\omega_n t}$$

Волновое сопротивление $\Omega(\omega) = \dfrac{A(x,\omega)}{B(x,\omega)} = \sqrt{\dfrac{R_x + j\omega L_x}{G_x + j\omega C_x}}$



$$U = A(x,\omega)\cdot e^{j\omega t} = A_1 e^{-\gamma(\omega)\cdot x}\cdot e^{j\omega t} + A_2\cdot e^{\gamma(\omega)\cdot x}\cdot e^{j\omega t}$$

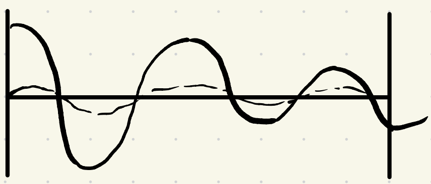
$$= \underbrace{A_1 e^{-\alpha(\omega)x}\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{-\beta(\omega)x}}_{\text{падающая волна}} + \underbrace{A_2\cdot e^{\alpha(\omega)x}\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{\beta(\omega)x}}_{\text{отраженная волна}}$$

$$U_{пад} = A_1 e^{-\gamma(\omega)x} e^{j\omega t}$$

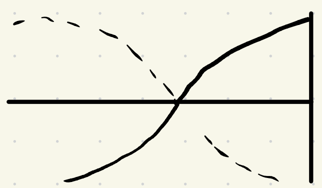
$$U_{отр} = A_2 e^{\gamma(\omega)x} e^{j\omega t}$$

Коэффициент отражения $\rho = \dfrac{U_{отр}}{U_{пад}} = \dfrac{Z - \Omega}{Z + \Omega}$

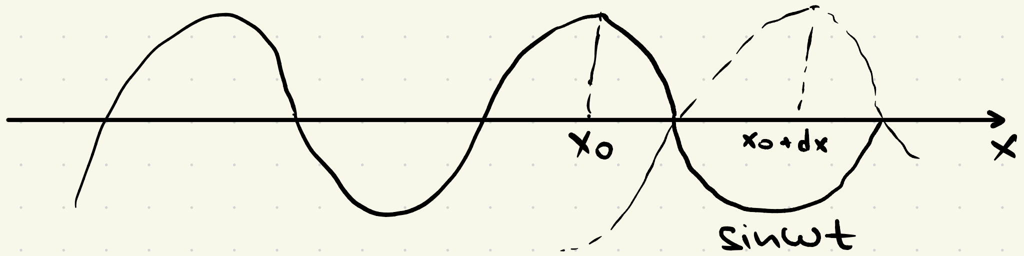
1) Холостой ход ($Z_н = \infty \Rightarrow \rho = 1$)



2) Короткое замыкание ($Z_н = 0 \Rightarrow \rho = -1$)

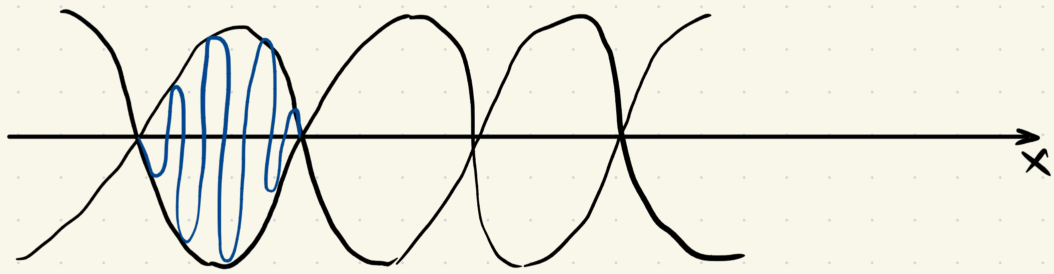


3) Согласованное сопротивление ($Z_н = \Omega(\omega) \Rightarrow \rho = 0$)
всё пойдёт получателю



В мом. времени t0 рассмотрим x0: $u = \sin(\omega t - \beta x) \sim$
$\sim e^{j(\omega t - \beta x)}$, $u(x_0, t_0) = \sin(\omega t_0 - \beta x_0)$
Через Δt: $u(x_0+dx, t_0+dt) = \sin(\omega t_0 - \beta x_0 + \omega dt - \beta dx)$
$u(x_0, t_0) = u(x_0+dx, t_0+dt) \to \omega dt = \beta dx$

$\boxed{\frac{dx}{dt} = v_\varphi = \frac{\omega}{\beta}}$ - фазовая скорость



$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$
$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$
$\sin(\omega_1 t - \beta_1 x) + \sin(\omega_2 t - \beta_2 x) = 2\cos(\overbrace{\Delta\omega t - \Delta\beta x}^{=0}) \cdot$
$\cdot \sin(\omega_1 t - \beta_1 x)$

$\boxed{v_{гр} = \frac{x}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}}$ - групповая задержка

$v = \frac{\omega}{\beta(\omega)}$ - линия без потерь: $R_x = G_x = 0$

1. $v_{гр} = v_\varphi$ - не зависит от ω
2. $\Omega = \sqrt{LC}$
3. Волны не искажаются

Условие Хевисайда: $\alpha = \frac{R_x}{L_x} = \frac{G_x}{C_x}$:

$\Omega = \sqrt{\frac{R_x + j\omega L_x}{G_x + j\omega C_x}} = \sqrt{\frac{\alpha L_x + j\omega L_x}{\alpha C_x + j\omega C_x}}$

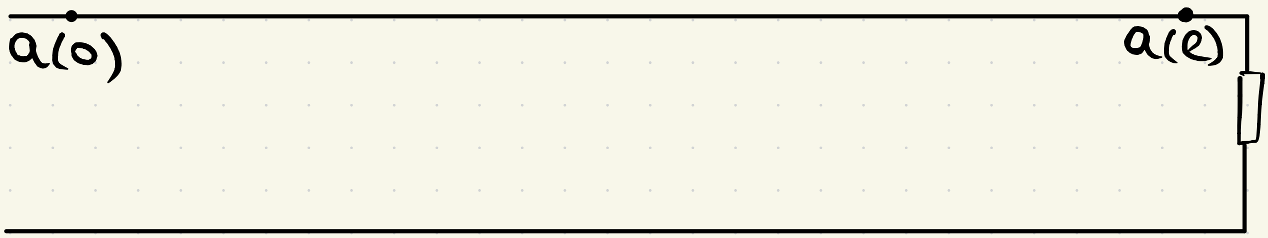
$v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\Omega = W = \sqrt{\frac{L}{C}}$; $\delta = \frac{R}{L} = \frac{G}{C} \Rightarrow e^{-\delta t}$

$$\beta = \frac{R}{W} = G\cdot W \to e^{-\beta x}$$

$$u = u_{над} + u_{отр}$$
$$i = i_{над} + i_{отр}$$
$$a = \frac{u + iW}{2} \; ; \; b = \frac{u - iW}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad z = \frac{u}{i}$$
$$\rho = \frac{b}{a} = \frac{Z - W}{Z + W}$$

$$P = \mathrm{Re}\left(\frac{u\cdot i^*}{2}\right) = \frac{|a|^2}{2W} - \frac{|b|^2}{2W}$$



$$\rho(\ell) = \frac{b(0)e^{\gamma\ell}}{a(0)e^{-\gamma\ell}} = \frac{Z_н - W}{Z_н + W} = \rho(0)\cdot e^{2\gamma\ell}$$

$$Z(0) = W\cdot\frac{1+\rho(0)}{1-\rho(0)} = W\,\frac{1+\rho_{вх}\cdot e^{-2\gamma\ell}}{1-\rho_\ell e^{-2\gamma\ell}} =$$

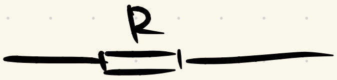
$$= W\,\frac{e^{\gamma\ell} + \rho_\ell e^{-\gamma\ell}}{e^{\gamma\ell} - \rho_\ell e^{-\gamma\ell}}$$, где W – волновое сопротивл.

$$Z(0)\Big|_{Z(\ell)=0} = jW\cdot \mathrm{tg}(k\ell)$$

, где $\gamma = jk$

$$Z(0)\Big|_{Z(\ell)=\infty} = -jW\,\mathrm{ctg}(k\ell)$$

Лекция 9
31.10.2023



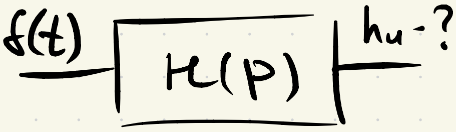
$I=\frac{U}{R}$, $\tilde{I}=\frac{\tilde{U}}{R}$, $L(I)=\frac{L(U)}{R}$

$I=C\frac{dU}{dt}$, $\tilde{I}=\frac{\tilde{U}}{\frac{1}{j\omega C}}$, $L(I)=C(pL(U)-U(0))$

$$L(I)=\frac{L(U)}{\frac{1}{pC}}-CU(0)$$

$U=L\frac{dI}{dt}$, $\tilde{U}=j\omega L\tilde{I}$, $L(U)=LpL(I)-LI(0)$

Импульсные характеристики



$$I=C\frac{d\delta(t)}{dt}=C\delta'(t)$$

$$L(I)=\int_0^\infty C\delta'(t)e^{-pt}=Cp$$

$$L(\delta(t))=\int_0^\infty \delta(t)e^{-pt}dt=1$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\delta(t)\cdot f(t)\,dt=f(0),\quad \int_{-\alpha}^{+\alpha}\delta'(t)f(t)\,dt=-f'(0)$$

$$H(p)=\frac{\tilde{U}_{\text{вых}}}{\tilde{U}_{\text{вх}}}=\frac{L(U_{\text{вых}})}{L(U_{\text{вх}})}=L(h_{\text{и}});\quad K(j\omega)\neq H(p)$$

$h_{\text{и}}=L^{-1}(H(p))$

$U_{\text{вых}}=L^{-1}[H(p)\cdot L(U_{\text{вх}})]$; $U_{\text{вых}}=\int_0^t U_{\text{вх}}(\tau)h_{\text{и}}(t-\tau)d\tau$

11. Обобщённая th. умножения

$f(t)\doteqdot F(p)$

$g(t,\tau)\doteqdot G(p)e^{-\tau q(p)}$

$$F(q(p))\,G(p) \doteqdot \int_0^\infty f(\tau)\, g(t,\tau)\, d\tau$$

12. Th. о разложении

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}, \quad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}$$

$$\int_0^\infty f(\tau)\, g(t,\tau)\, d\tau = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^\infty f(\tau) g(t,\tau)\, d\tau = \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int_0^\infty g(t,\tau) e^{-pt} dt =$$

$$= G(p) \int_0^\infty f(\tau) e^{-q(p)\tau} d\tau = G(p)\, F(q(p))$$

13. Вторая th. о разложении

$$F(p) \doteqdot \sum_{(p_k)} \operatorname*{res}_{p_k} F(p) \cdot e^{pt}$$

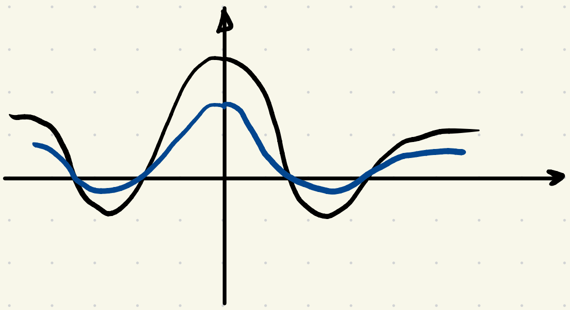
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\omega}^{\alpha + j\omega} e^{pt} F(p)\, dp = \sum_{p_k} \operatorname*{res}_{p_k} \left(F(p) \cdot e^{pt} \right)$$

$$F(p) e^{pt} = \ldots + C_{-2} p^{-2} + C_{-1} p^{-1} + C_0 + C_1 p^1 + C_2 p^2 + \ldots$$

$$C_{-1} = \operatorname{res} F(p) e^{pt} \Big|_{p \to p_k}$$

$$\operatorname*{res}_{p \to p_k} F(p) = \frac{1}{(n_k - 1)!} \cdot \lim_{p \to p_k} \frac{d^{n_k - 1}}{dp^{n_k - 1}} \left[F(p) (p - p_k)^{n_k} \right]$$

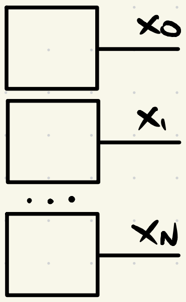
Лекция 12
14.11.2023



$$n^2(t) = \langle n, n\rangle(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} n(u)\,n(u-t)\,du$$

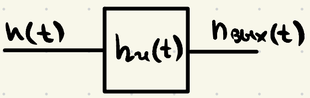
$n^2(0)$ - мощность сигнала

$\langle x, y\rangle(t) = 0$ - два случ. сигнала



Система называется эргодической, если усреднение n одинаковых систем при $n\to\infty$ эквивалентно усреднению по времени одной системы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n^2(t)\cdot e^{-i\cdot 2\pi f t}\,dt = n^2(t)$$



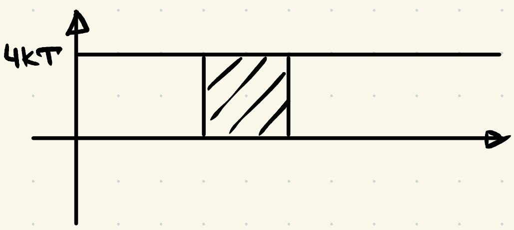
$$\langle n(t) * h_u(t), n(t) * h_u(t)\rangle(t) = \underbrace{\langle n(t) * n(t)\rangle}_{n^2(t)} * \langle h_u(t), h_u(t)\rangle \doteq$$

$$\doteq n^2(f) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_u(u)\,h(u-t)\,du \cdot e^{-j\cdot 2\pi f t}\,dt =$$

$$= n^2(f)\cdot h_u(f)\cdot \hat{h}_u(f) = n^2(f)\cdot h_u(f)\cdot h_u^*(f) = n^2(f)\cdot |h_u(f)|^2 = n^2(f)\cdot |K(j\omega)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_u(-t)\,e^{-j\omega t}\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} h_u(t_1)\,e^{-j\omega(-t_1)}\,dt_1 = -h_u(-f)$$

$$n^2(f) = 4KT$$



$K = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К; $T = 300$ K

$4KT \simeq 4\cdot 10^{-21}$ Дж

$\frac{4KT}{e} \simeq 25$ мВ

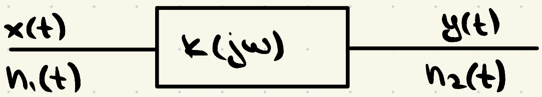
Семинар 13
25.11.2023

$$\overline{n^2}(t) = \langle n, n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} n(u)\cdot n(u-t)\,du$$

$$\frac{\overline{n^2}(f)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{n^2}(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

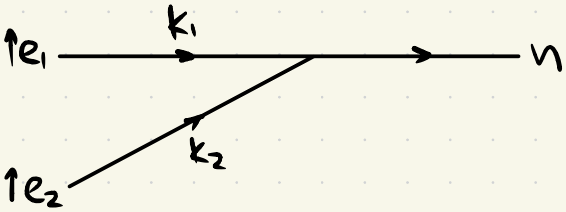
$$P\,(\text{мощность}) = \overline{n^2}(0)\ \ (t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{n^2}(f)}{2}e^{j2\pi f t}df = \int_{0}^{+\infty}\overline{n^2}(f)\,df$$

$n(f) = \sqrt{\overline{n^2}(f)}$ – шумовое напряжение



$$y(f) = K(j\omega)\cdot x(f),\quad y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\cdot e^{-j2\pi f t}dt$$

$$n_2(f) = |K(j\omega)|\cdot n_1(f)$$

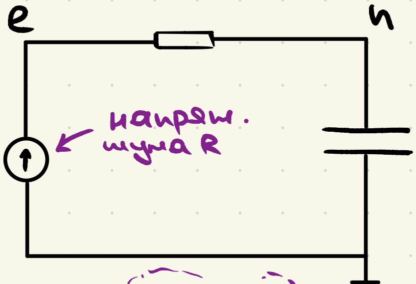


$$\overline{n^2}(t) = \langle n, n\rangle;\ n(t) = \sum_i (h_i * e_i)(t);$$

$$\overline{n^2}(t) = \langle \sum_i (h_i * e_i), \sum_k (h_k * e_k)\rangle = \sum_{i,k}(\langle h_i, h_k\rangle * \langle e_i, e_k\rangle) =$$

$$= \sum_i (\overline{h^2}(t) * \overline{e^2}(t)) \Longrightarrow$$

$$\overline{n^2}(f) = \sum_i \overline{e_i^2}(f)\cdot |K(j\omega)|^2$$



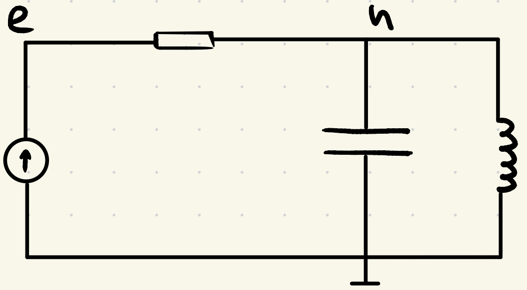
$$K(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{f}{f_0}}$$

$$P = \int_0^{\infty}\overline{n^2}(f)df = \int_0^{\infty}\overline{e^2}(f)\cdot|K(j\omega)|^2 df = N_0\cdot K_0^2\int_0^{\infty}\left|\frac{K(j\omega)}{K_0}\right|^2 df =$$

$$= N_0\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}f_0\,dx = N_0 f_0\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot 4kTR\cdot\frac{1}{2\pi RC} = \frac{kT}{C}$$

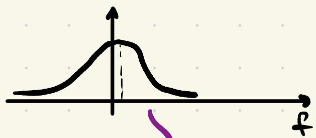
$$\frac{C\overline{u^2}}{2} = \frac{kT}{2} \Longrightarrow \overline{u^2} = \frac{kT}{C}$$

$$P = \underbrace{\overline{i^2}(t)}_{=\frac{4kT}{R}}\,R\cdot\underbrace{F_{ш}}_{=\frac{\pi}{2}f_0}$$

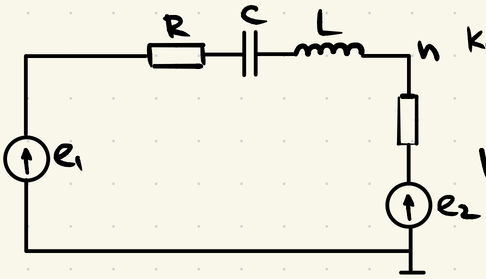


$$K(j\omega) = \frac{1}{1+R/Z_{пар}} = \frac{1}{1+j\omega RC + R/j\omega L} = \frac{1}{1+\underbrace{Q(p+\frac{1}{p})}_{\approx 2jQ\frac{\Delta f}{f_0}}}$$

$$Q = \frac{R}{\rho};\ p = j\frac{f}{f_0};\ \rho = \sqrt{\frac{L}{C}};\ f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

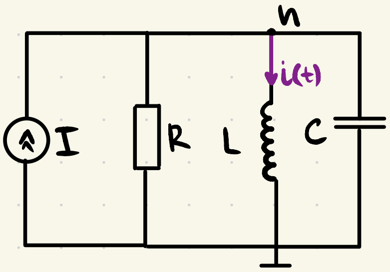


$$P = \int_0^{\infty}\overline{n^2}(f)df = \int_0^{\infty}|K(j\omega)|^2\overline{e^2}(f)df = N_0\int_0^{\infty}\left|\frac{1}{1+2jQ\frac{\Delta f}{f_0}}\right|^2 df = N_0\int_0^{\infty}\frac{2}{1+4Q^2\frac{x^2}{f_0^2}}dx = 2N_0\frac{f_0}{2Q}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{kT}{C}$$



$$K_1(j\omega) = \frac{R}{2R+\frac{1}{j\omega C}+j\omega L} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\underbrace{\frac{1}{2R}Q(p+\frac{1}{p})}_{a(f)}};\ K_2(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}+a(f)}{1+a(f)}$$

$$\overline{n^2}(f) = 4kTR\left(|K_1|^2+|K_2|^2\right)$$



$$K = \frac{Q\rho}{1+Q\left(p+\frac{1}{p}\right)}$$

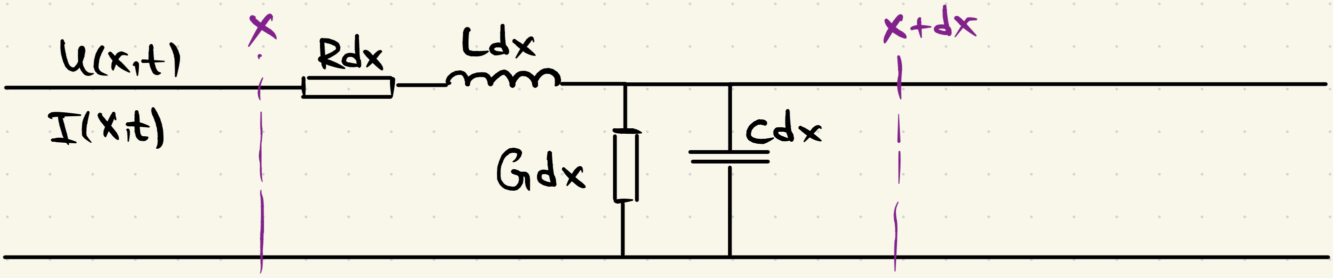
$$Q = \frac{R}{\rho} \,;\; p = j\frac{f}{f_0} \,;\; \rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \,;\; f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$i^2(f) = I^2(f)\cdot |K(jf)|^2 \,;\; I^2(f) = \frac{4kT}{R}$$

$$K(jf) = \frac{R}{1 + j\frac{R}{\rho}\left(\frac{f}{f_0}+\frac{f_0}{f}\right)} \Longrightarrow |K(jf)|^2 = \left|\frac{R}{1+\frac{R^2}{\rho^2}\left(\frac{f}{f_0}+\frac{f_0}{f}\right)^2}\left[1 - j\frac{R}{\rho}\left(\frac{f}{f_0}+\frac{f_0}{f}\right)\right]\right|^2$$

$$i^2(f) = \frac{4kT}{R}\cdot\frac{R^2}{\rho^2} = \frac{4kTR}{\rho^2} = \frac{4kTRC}{L}$$

Длинные линии
2.12.2023
Подготовка к сдаче



$$-dU(x,t)=U(x,t)-U(x+dx,t)=(Ldx)\frac{dI(x,t)}{dt}+(Rdx)I(x,t)$$

$$-dI(x,t)=I(x,t)-I(x+dx,t)=(Cdx)\frac{dU(x,t)}{dt}+(Gdx)U(x,t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{-\partial U(x,t)}{\partial x}=L\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}+RI(x,t);\quad \frac{-\partial I(x,t)}{\partial x}=C\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}+GU(x,t)$$

$v=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ – скорость распространения волн вдоль линии

$w=\sqrt{\frac{L}{C}}$ – волновое сопротивление

$\frac{R}{L}=\frac{G}{C}$ – условие Хевисайда, при котором линия оказывается без дисперсии (скорость распространения волны v не зависит от частоты)

$\delta_L=\frac{R}{L}$; $\delta_C=\frac{G}{C}$ – характеризуют скорость затухания волн во времени

$\beta_L=\frac{\delta_L}{v}=\frac{R}{w}$; $\beta_C=\frac{\delta_C}{v}=Gw$ – –||– в пространстве

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}=-\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}+\beta\right)wI(x,t);$$

$$\frac{\partial wI(x,t)}{\partial x}=-\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}+\beta\right)U(x,t)$$

$$\Downarrow$$

$$A(x,t)=\frac{U(x,t)+wI(x,t)}{2};\quad B(x,t)=\frac{U(x,t)-wI(x,t)}{2}$$

$A(x,t)=e^{-\beta x}\tilde{A}(x-vt)$; $B(x,t)=e^{\beta x}\tilde{B}(x+vt)$

падающая волна; отражённая волна

$$U(x,t)=A(x,t)+B(x,t);\quad I(x,t)=\frac{A(x,t)-B(x,t)}{w}$$

$$R(x,t)=\frac{U(x,t)}{I(x,t)}=w\frac{A(x,t)+B(x,t)}{A(x,t)-B(x,t)}=w\frac{1+\rho(x,t)}{1-\rho(x,t)}$$

$$\rho(x,t)=\frac{B(x,t)}{A(x,t)}=\frac{R(x,t)-w}{R(x,t)+w}$$ – коэффициент отражения

$$P(x,t)=U(x,t)I(x,t)=\frac{A^2(x,t)}{w}-\frac{B^2(x,t)}{w}=\frac{A^2(x,t)}{w}(1-\rho^2)$$

Будем рассматривать гармонические волны:

$A(x,t)=a(x)e^{j\omega t}=|a|e^{j\varphi_a}e^{j\omega t}$; $B(x,t)=b(x)e^{j\omega t}=|b|e^{j\varphi_b}e^{j\omega t}$

$\frac{da(x)}{dx}=-\gamma a(x)$; $\frac{db(x)}{dx}=\gamma b(x)$, $\gamma=j\frac{\omega}{v}+\beta=jk+\beta$ – комплексная постоянная распространения

$a(x)=a(0)e^{-\gamma x}=a(0)e^{-jkx}e^{-\beta x}$, $b(x)=b(0)e^{\gamma x}=b(0)e^{jkx}e^{\beta x}$

$k=\frac{\omega}{v}$ – волновое число (пространственная частота)

$k\lambda=2\pi \Longrightarrow \lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi v}{\omega}=\frac{v}{f}$

$u(x)=a(x)+b(x)$; $i(x)=\frac{a(x)-b(x)}{w}$; $Z=\frac{u}{i}=w\frac{1+\rho}{1-\rho}$; $\rho=\frac{b}{a}=\frac{Z-w}{Z+w}$

$$P=\frac{Re(ui^*)}{2}=\frac{|a|^2}{2w}-\frac{|b|^2}{2w}=\frac{|a|^2}{2w}(1-|\rho|^2)$$

активная мощность, переносимая падающей волной; мощность в отраженной волне; коэфф. отражения мощности

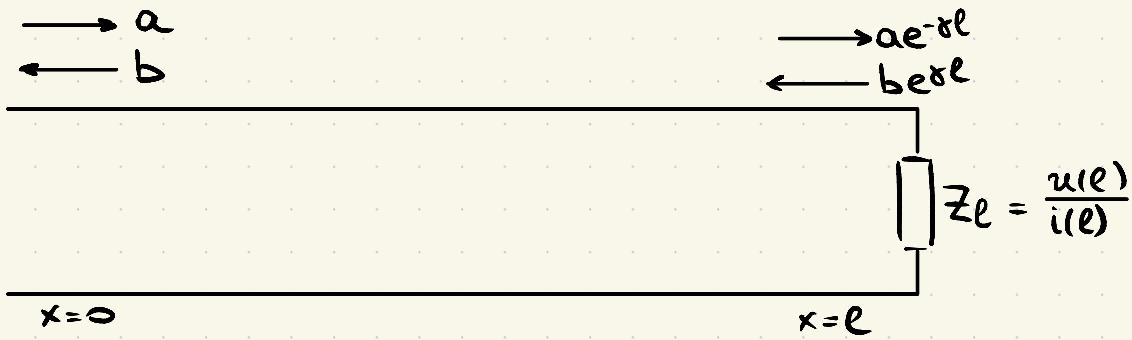
$|u(x)|=|a(0)e^{-\gamma x}+b(0)e^{\gamma x}|$ – сумма двух комплексных векторов

Если их направления совпадают, длины складываются, наблюдается пучность. Если направления различны – узел.

Расстояние между пучностью и узлом: $k\Delta l=\frac{\pi}{2}$

В линии без потерь: $a(x), b(x)$ – const, отношение напряжений в пучности и узле:

$$\frac{|a|+|b|}{|a|-|b|}=\frac{1+|\rho|}{1-|\rho|}$$ – коэффициент стоячей волны



$\rho_l=\frac{Z_l-w}{Z_l+w}=\frac{be^{\gamma l}}{ae^{-\gamma l}}$; $\rho_0=\frac{b}{a}=\rho_l e^{-2\gamma l}$

Линия согласована на выходе: $Z_l=w \Longrightarrow \rho_l=\rho_0=0$

$Z_0|_{Z_l=0}\, Z_0|_{Z_l=\infty}=w^2$

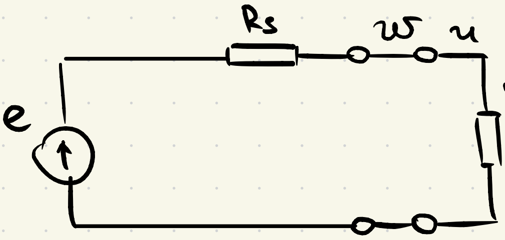
$$Z_0=w\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}=w\frac{e^{\gamma l}+\rho_l e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l}-\rho_l e^{-\gamma l}}$$

В линии без потерь: $\beta=0,\ \gamma=jk$

$Z_0|_{Z_\ell=0} = jw\,\mathrm{tg}\,k\ell$; $Z_0|_{Z_\ell=\infty} = -jw\,\mathrm{ctg}\,k\ell$

$k\ell=\frac{\pi}{2},\ \ell=\frac{\lambda}{4}$: $\rho_0=\rho_\ell e^{-2\gamma\ell}=\rho_\ell e^{-2jk\ell}e^{-2\beta\ell}=-\rho_\ell e^{-\beta\lambda/2} \xRightarrow[\text{потерь}]{\text{нет}} \rho_0=-\rho_\ell$, т.е. $Z_0Z_\ell=w^2$

Чтобы согласовать источник с сопротивлением R_s с нагрузкой R_ℓ следует соединить их четвертьволновым отрезком с $w=\sqrt{R_sR_\ell}$



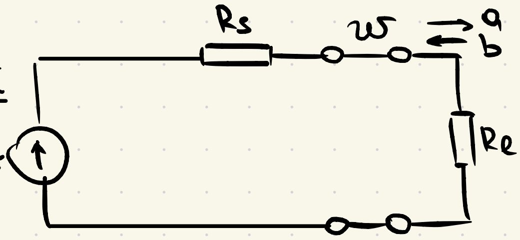
$u=a+b$

$iw=a-b$

$\Longleftrightarrow$

$a=\frac{u+wi}{2}$

$b=\frac{u-wi}{2}$



$u=iR_\ell$; $u=e-iR_s \Longrightarrow u=e\frac{R_\ell}{R_s+R_\ell}$; $i=\frac{e}{R_s+R_\ell}$

$a=\frac{u+wi}{2},\ b=\frac{u-wi}{2}$: $u=iR_\ell\to b=\rho_\ell a,\ \rho_\ell=\frac{R_\ell-w}{R_\ell+w}$

$u=e-iR_s\to \frac{e}{2}(1-\rho_s)=a-\rho_s b,\ \rho_s=\frac{R_s-w}{R_s+w}$

$\frac{e}{2}(1-\rho_s)=a(1-\rho_s\rho_\ell)\Longrightarrow a=\frac{e}{2}\frac{1-\rho_s}{1-\rho_s\rho_\ell},\ b=\frac{e}{2}\frac{(1-\rho_s)\rho_\ell}{(1-\rho_s\rho_\ell)}$

Пусть $R_s=w$ — согласованный источник, тогда $\rho_s=0$; $u=\frac{e}{2}(1+\rho_\ell)$; $i=\frac{e}{2w}(1-\rho_\ell)$

$P=\frac{\mathrm{Re}(ui^*)}{2}=\frac{e^2}{8w}(1-|\rho_\ell|^2)$ - источник пытается отдать всю мощность

Согласованная нагрузка ($\rho_\ell=0$) поглощает всю эту мощность