УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2024 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая механика**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФРКТ**

кафедра: **теоретической механики**
курс: 2
семестр: 3

лекции – 30 часов
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
лабораторные занятия – нет

Экзамен – 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задания составили:
к.ф.-м.н., доцент А. В. Фомичев
к.ф.-м.н., ст. преподаватель А. С. Охитина

Программа принята на заседании
кафедры теоретической механики
26 апреля 2024 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. С. В. Соколов

1. **Аксиоматика классической механики**

   Постулаты классической механики. Инерциальные системы отсчета. Понятие силы. Законы Ньютона. Группа Галилея. Понятие об инвариантности и ковариантности уравнений.

2. **Кинематика точки**

   Траектория, скорость, ускорение. Естественный (сопровождающий) трехгранник Френе. Разложение скорости и ускорения в осях сопровождающего трехгранника. Криволинейные координаты точки и локальный базис. Понятие о ковариантных и контравариантных компонентах вектора. Коэффициенты Ляме. Разложение скорости и ускорения точки в локальном базисе.

3. **Кинематика твердого тела и систем отсчета**

   Группы собственных движений и вращений пространства $\mathbb{R}^3$. Твердое тело. Разложение движения тела на поступательное движение и вращение (движение с неподвижной точкой). Углы Эйлера и другие углы конечного вращения. Ортогональные матрицы и их свойства. Теорема Эйлера о конечном повороте твердого тела с неподвижной точкой. Вектор Эйлера. Выражение для элементов ортогональной матрицы через параметры эйлерова поворота. Сложение поворотов в матрицах. Активная и пассивная точки зрения. Вектор и оператор малого поворота. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Кинематические уравнения Пуассона для ортогональных матриц.

   Распределения скоростей и ускорений точек твердого тела (формулы Эйлера и Ривальса). Кинематический винт твердого тела. Сложное движение точки и твердого тела. Вычисление скоростей и ускорений точки при сложном движении. Вычисление угловой скорости и углового ускорения тела при сложном движении. Кинематические уравнения Эйлера.

   Алгебра кватернионов. Кватернионный способ задания ориентации твердого тела (присоединенное отображение). Параметры Родрига–Гамильтона. Кватернионные формулы сложения активных и пассивных поворотов. Уравнения Пуассона в кватернионах.

4. **Основные теоремы динамики**

   Центр масс, импульс (количество движения), момент импульса (кинетический момент, момент количества движения), кинетическая энергия, внешние и внутренние силы, момент силы, элементарная работа и мощность силы. Теорема Кенига. Формула переноса полюса для момента импульса. Теоремы об изменении импульса, момента импульса и кинетической энергии в инерциальных системах отсчета.

   Потенциальные, гироскопические, диссипативные силы. Критерий потенциальности сил. Консервативные системы, закон сохранения энергии. Неинерциальные системы отсчета, силы инерции. Основные теоремы динамики в неинерциальных системах отсчета.

5. **Движение материальной точки в центральном поле**

   Законы сохранения при движении точки в центральном поле. Уравнение Бине. Поле всемирного тяготения. Использование фазового портрета системы для качественного анализа движения. Задача двух тел. Уравнение конических сечений. Законы Кеплера.

6. **Динамика твердого тела**

   Геометрия масс. Тензор и эллипсоид инерции твердого тела. Преобразование тензора инерции при повороте и параллельном переносе осей. Теорема Гюйгенса–Штейнера для тензора инерции. Главные оси инерции. Кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела. Приведение системы сил, действующих на твердое тело, к динамическому винту и его частным случаям.

   Динамические уравнения Эйлера. Дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела. Случай Эйлера; первые интегралы движения; геометрические интерпретации Мак-Куллага и Пуансо. Регулярная прецессия динамически симметричного тела в случае Эйлера. Дифференциальные уравнения движения тяжелого твердого тела и их первые интегралы. Случай Лагранжа; первые интегралы движения. Качественный характер движения волчка Лагранжа. Формула для момента, поддерживающего вынужденную прецессию динамически симметричного твердого тела. Прецессия в случае Лагранжа. Понятие о случае Ковалевской.

7. **Лагранжева механика**

   Конфигурационное многообразие механической системы. Параметризация конфигурационного многообразия обобщенными координатами. Понятие механической связи. Классификация связей. Виртуальные перемещения. Гипотеза идеальности связей. Общее уравнение динамики для механической системы с идеальными связями. Число степеней свободы голономной системы.

   Уравнения Лагранжа второго рода. Обобщенные силы. Функция Лагранжа (лагранжиан) системы в случае потенциальных сил. Уравнения Лагранжа в неинерциальных системах отсчета.

   Свойства уравнений Лагранжа: ковариантность, структура кинетической энергии, невырожденность и приведение к нормальной форме Коши. Потенциальные, гироскопические, диссипативные силы. Обобщенный потенциал. Первые интегралы лагранжевых систем: циклические интегралы, обобщенный интеграл энергии (интеграл Пенлеве–Якоби).

Литература

1. *Амелькин Н. И.* Курс аналитической механики : учеб. пособие. Москва : МФТИ, 2023. – 298 с.

2. *Болотин С. В., Карапетян А. В., Кугушев Е. И., Трещев Д. В.* Теоретическая механика. Москва: Издательский центр «Академия», 2010.

3. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2001.

4. *Журавлёв В. Ф.* Основы теоретической механики. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2001; 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2008.

5. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика: учебник для университетов. Изд. 3-е, испр. — Москва : Изд-во Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

6. *Трухан Н. М.* Теоретическая механика. Методика решения задач : учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2010.

ЗАДАНИЯ

Первое задание

(срок сдачи с 4 по 8 ноября 2024 г.)

Контрольная работа с 28 октября по 1 ноября 2024 г.

1. **Кинематика точки**

   1.18, 1.25, 1.31

   T1. Используя сферические координаты (r, λ - долгота, φ - широта), определить, какую кривую опишет корабль, идущий под постоянным курсовым углом α к географическому меридиану. Корабль принять за точку, движущуюся по поверхности земного шара (Рис. 1). Считая, что модуль скорости v корабля не изменяется, определить проекции ускорения корабля на оси сферических координат, модуль ускорения и радиус кривизны траектории.

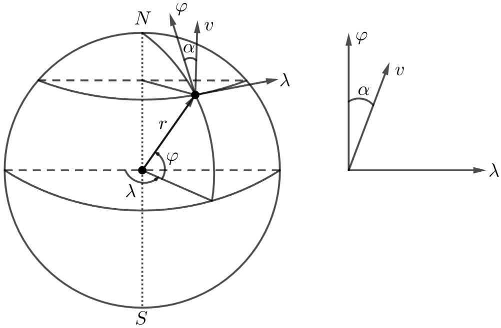

Рис. 1: К задаче T1

2. **Кинематика твёрдого тела**

   2.1. **Плоскопараллельное движение**

   3.2, 3.20, 3.21, 3.25, 3.36

   2.2. **Пространственное движение**

   4.4, 4.10, 4.12 (*решить для одной из точек, указанных в условии*), 4.23, 4.30, 4.56

   T2. Твердое тело поворачивают на угол $\pi/2$ относительно оси x_1 неподвижного базиса x, а затем – на угол $\pi/2$ вокруг оси x_2 того же базиса. Найти матрицу ориентации базиса ξ, связанного с телом, относительно x, если в начальный момент базисы x и ξ совпадают. Найти вектор соответствующего конечно поворота и углы Эйлера.

2.3. **Кватернионы**

4.66, 4.70, 4.85

Т3. Доказать свойство ассоциативности кватернионного умножения: для любых кватернионов $\varLambda$, M и N выполняется $\varLambda \circ (M \circ N) = (\varLambda \circ M) \circ N$.

Т4. Решить кинематические уравнения Пуассона $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \omega$ и $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\omega \circ \Lambda$ для $\omega = \mathrm{const}$ и дать геометрическую интерпретацию полученным решениям.

3. **Сложное движение точки и твердого тела**

2.9, 2.16, 2.38, 3.30, 4.25

Т5. Конус II (Рис. 2) с углом при вершине $\alpha_2 = 45^\circ$ катится без скольжения по внутренней стороне неподвижного конуса I с углом при вершине $\alpha_1 = 90^\circ$. Высота OO_1 подвижного конуса равна l, а скорость центра его основания O_1 постоянна по величине и равна v. Вдоль высоты конуса OO_1 движется точка M по закону $OM = f(t)$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент, когда $OM = MO_1$.

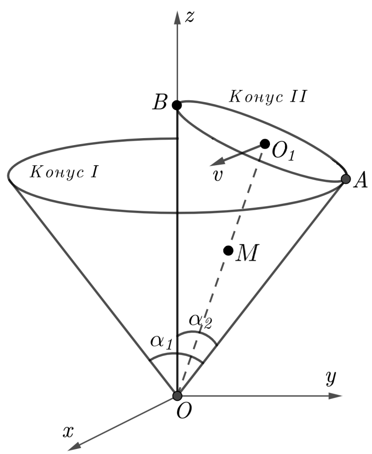

Рис. 2: К задаче Т3

4. **Основные теоремы динамики в инерциальных и неинерциальных системах отсчета**
   5.7, 6.13, 6.37, 6.39 (*вместо нормальной реакции найти силу натяжения*), 7.4, 7.28, 7.32, 7.42, 7.59, 9.8, 9.25

5. **Движение точки в центральном поле**
   8.11, 8.22, 8.25, 8.52

Второе задание

(срок сдачи с 9 по 13 декабря 2024 г.)

Контрольная работа с 2 по 6 декабря 2024 г.

6. **Геометрия масс. Динамика твёрдого тела**
   11.1, 11.11, 11.18, 11.24, 11.32, 11.61, 11.75, 11.91, 11.113, 11.132(1)

   Т6 (случай Горячева - Чаплыгина). Твердое тело массы m движется в однородном поле тяжести. Главные моменты инерции для неподвижной точки O в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$ равны $A = B = 4C$, а центр масс тела C лежит на оси ξ_1 на расстоянии l от неподвижной точки. В начальный момент времени проекция кинетического момента $\boldsymbol{K}_O$ на вертикаль равна нулю: $\boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{\gamma}|_{t=0} = 0$, где $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T$ – орт вертикали. Показать, что уравнения Эйлера допускают интеграл

   $$Cr(p^2 + q^2) - mglp\gamma_3 = \text{const}.$$

7. **Уравнения Лагранжа**
   12.3, 12.7(б), 12.11, 12.38, 12.39, 12.48, 12.64, 12.97, 12.105

Номера задач взяты из сборника Пятницкий Е. С., Трухан Н. М., Ханукаев Ю. И., Яковенко Г. Н. Сборник задач по аналитической механике. — 4-е изд. — Москва : МФТИ, 2018.