«Московский физико-технический институт»

Отчёт о выполненной лабораторной работе №3.7.1
Скин-эффект

Выполнил:
Хмельницкий А.А., Б01-306

2024

Цель работы: исследование проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр

В работе используются: генератор сигналов АКИП–3420, соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас, медный экран в виде полого цилиндра, измерительная катушка, амперметр, вольтметр, двухканальный осциллограф GOS–620, RLC-метр.

Амплитуда переменного электрического поля с частотой убывает вглубь проводника по экспоненциальн закону. Такой закон спадания характеризуется расстоянием , на котором амплитуда поля уменьшается в e раз. Это расстояние называют глубиной проникновения поля или *скиновой* длиной. Явление, при котором амплитуда электромагнитной волны уменьшается при проникновении вглубь проводника, называется *скин-эффектом*

1 Теоретические сведения

1.1 Квазистационарное приближение, уравнение диффузии поля

Если характерная частота изменения электромагнитного поля достаточно мала по сравнению с проводимостью среды, то в уравнении Максвелла в системе СИ:

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

можно пренебречь вторым слагаемым и воспользоваться в дифференциальной форме законом Ома (σ - проводимость среды), тогда

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} \tag{1}$$

Это приближение соответствует бесконечной скорости распространения волн вне проводника. Такое приближение называется *квазистационарным*. Более строго, характерные размеры системы должны быть меньше длины волны и плотность тока смещения должна быть меньше плотности тока проводимости:

$$\nu << \frac{c}{a}, \; \nu << \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{2}$$

И для меди $\sigma \approx 6 \cdot 10^7$ См/м выполняется, в целом, с запасом. Если мы используем закон Ома в таком виде, то частота колебаний поля должна быть меньше частоты столкновений электронов с решёткой.

Возьмём ротор от обеих частей уравнения (1), тогда

$$\operatorname{rotrot} \mathbf{H} = \sigma \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}$$

Согласно 2 уравнению Максвелла, магнитных зарядов не существует и дивергенция $B = 0$, а ротор E выразим через закон электромагнитной индукции. Пользуемся материальными уравнениями $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3}$$

Откуда получаем уравнение, аналогичное явлениям переноса (диффузия, теплопроводность)

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{4}$$

Для напряжённости электрического поля можно записать аналогичное уравнение, в котором роль коэффициента диффузии играет

$$D_{\text{э/м}} = \frac{1}{\sigma\mu\mu_0} \approx 130 \text{ см}^2/\text{с}$$

Тогда согласно закону Эйнштейна-Смолуховского можно оценить среднее расстояние *проникновения поля вглубь проводника* (аналогично задаче о выравнивании температур или концентраций различных газов в модели случайных блужданий).

$$< \Delta r^2 >= 2D_{\text{э/м}}t$$

Тогда *скиновая глубина* в поверхностном случае в одномерном случае

$$\delta = \sqrt{2D_{\text{э/м}}t} = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\mu_0}t} \tag{5}$$

1. $\nu = 50$ Гц: $\delta \sim 1,5$ см
2. $\nu = 50$ кГц: $\delta \sim 0,5$ мм

Можно оценить характерное время проникновения тока вглубь проводника как диффузионное приближение для медного провода толщиной 0,5 мм:

$$\tau \sim \frac{r^2}{D_{\text{э/м}}} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ с}$$

1.2 Модель полубесконечного цилиндра

Рассмотрим скин-эффект в полубесконечном пространстве. При выполнении условий (2) можно пренебречь краевыми эффектами и положить, что поле $\mathbf{H}$ направлено вдоль оси Z, а вихревое электрическое поле E направлено по концентрическим окружностям в плоскости, перпендикулярной боковой поверхности.

Простейшим частным решением *волнового уравнения* в безграничном пространстве является плоская волна:

$$E(t, r) = E_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot r)$$

Тогда можно воспользоваться *методом комплексных амплитуд* и представить амплитуду компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в виде

$$H_z = H(r)e^{i\omega t}, \; E_\varphi = E(r)e^{i\omega t} \tag{6}$$

В силу граничных условий имеем

$$\Delta E_\tau = 0, \; \Delta H_\tau = 0$$

Поэтому $\mathbf{E}(r)$ и $\mathbf{B}(r)$ непрерывны всюду. При условии, что толщина стенок $h << a$ можно воспользоваться одномерным приближением и рассматривать и рассматривать поле $\mathbf{H}$ внутри однородным вследствие отсутствия токов. Из уравнения (3) можно найти зависимость амплитуды электрического поля от расстояния

$$E_\varphi \cdot 2\pi r = -\mu_0 \pi r^2 \frac{dH_z}{dt}$$

Используя (5), получаем следующее соотношение

$$E(r) = -\frac{1}{2}\mu_0 r \cdot i\omega H_1$$

На внутренней поверхности при $r = a$ имеем

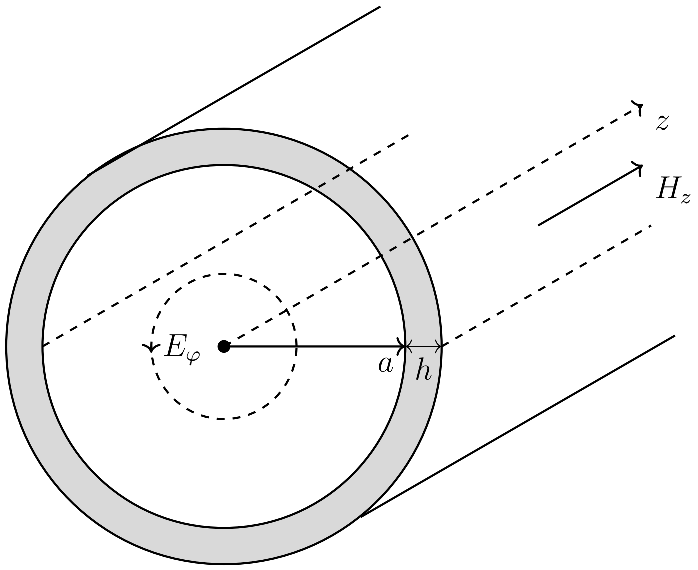

Рисунок 1: Распределение полей в тонкостенном медном цилиндре

$$E_1 = -\frac{1}{2}\mu_0 a i\omega H_1 \tag{7}$$

Здесь H_1 - амплитуда напряжённости магнитного поля внутри цилиндра. Напомним, она полагается постоянной и не зависящей от r.

1.3 Плоская геометрия скин-эффекта

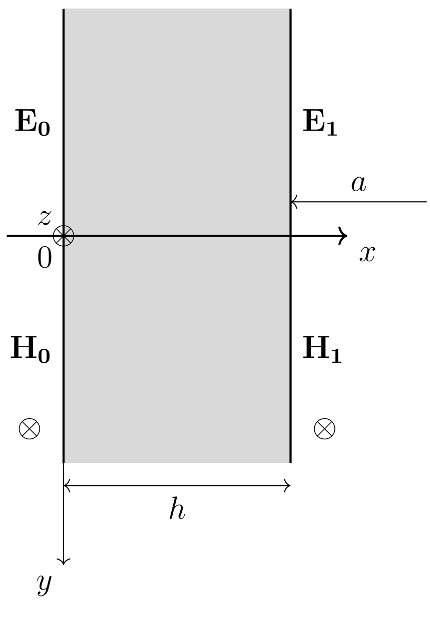

Рисунок 2: Поле в стенке цилиндра

Мы выяснили, что $\mathbf{H}$ направлен вдоль оси Z, поэтому $H_x = H_y = 0$ и $H_z = H_z(x,t)$. Перепишем уравнение (4) для компоненты поля $\mathbf{E}$ и оно примет вид:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \sigma\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

Подставляю выражение для H_z из (4), имеем

$$\frac{d^2H}{dx^2} = i\omega\sigma\mu_0 H \tag{8}$$

Граничные условия зададим $H(0) = H_0, H(h) = H_1$

Поскольку цилиндр помещён в соленоид, то H_0 - внешнее поле цилиндра, равное полю внутри соленоида без цилиндра.

Характеристическое уравнение (8): $\lambda^2 = i\omega\sigma\mu_0$. Получаем два корня $\lambda = \pm\alpha$, где $\alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{\sqrt{2}}{\delta}e^{\frac{i\pi}{4}}$. Тогда решение ищем в виде

$$H(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

Константы A и B ищутся из граничных условий: $A + B = H_0$

И пользуемся уравнением (1). После исключения A и дифференцирования получим выражение для $E(x)$:

$$E(x) = \frac{1}{\sigma}\frac{dH}{dx} = \frac{\alpha}{\sigma}(-H_0 e^{\alpha x} + 2B\cosh\alpha x)$$

После этого можно воспользоваться граничным условием (7) и положить $x = h$, после чего можно исключить B и получить связь на H_1 и H_0:

$$H_1 = \frac{H_0}{\cosh\alpha h + \frac{1}{2}\alpha a \sinh\alpha h} \tag{9}$$

1.4 Предельные случаи

1. Толщина скин-слоя *превосходит* толщину цилиндра, тогда $|\alpha h| << 1$ и

$$H_1 = \frac{H_0}{1 + i\frac{ah}{\delta^2}} \tag{10}$$

   Вторым слагаемым в знаменателе пренебречь нельзя, так как возможна ситуация, при которой $h << \delta << a$. Мы получили как бы передаточную функцию для компоненты поля H, откуда сдвиг фаз ψ определяется равенством:

$$\tan\psi = \frac{ah}{\delta^2} \tag{11}$$

2. Случай *больших частот*. Толщина скин-слоя становится меньше толщины стенки. Тогда приближение sinh и cosh при $|\alpha h| >> 1$ даёт $\frac{e^{\alpha h}}{2}$ и (9) преобразуется к виду:

$$H_1 = H_0\frac{4}{\alpha a}e^{-\alpha h} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{a}e^{-\frac{h}{\delta}}e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{h}{\delta}\right)} \tag{12}$$

   Отсюда сразу видно, что поле в цилиндре меньше в $\frac{2\sqrt{2}\delta}{a}e^{-\frac{h}{\delta}}$, а сдвиг фаз

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}} \tag{13}$$

2 Методика эксперимента

2.1 Экспериментальная установка

Соленоид 1 намотан на цилиндрическую трубу из поливинилхлорида, который обладает хорошей диэлектрической проницаемостью и используется для изоляции проводов и кабелей. Внутри расположен медный экран 3 в виде полого цилиндра с параметрами. Действующие значения тока и напряжения измеряются амперметром и вольтметром соответственно. Для измерений сдвига фаз используется осциллограф в двухканальном режиме, так, что канал X подключается к резистору (напряжение в нём пропорционально току через соленоид), а канал Y подключается к измерительной катушке 4.

2.2 Измерение отношения амплитуд магнитного поля внутри и вне цилиндра

Поскольку измерительная катушка находится в переменном магнитном поле $H_1 e^{i\omega t}$, возникает ЭДС индукции в катушке 4, действующее значение которой фиксирует вольтметр V.

$$\mathbf{U} = -SN\frac{dB_1}{dt} = -i\omega\mu_0 SNH_1 e^{i\omega t} \tag{14}$$

Тогда вольтметр снимает действительную часть, делённую на $\sqrt{2}$ и можно заключить, что $|H_1| \sim \frac{U}{\omega} \sim \frac{U}{\nu}$

Из теоремы о циркуляции следует, что вне экрана $|H_0|$ пропорциональна току в цепи соленоида, который течёт через амперметр. Отсюда следует:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = const\frac{U}{\nu I} \tag{15}$$

2.3 Измерение проводимости материала цилиндра

Измерения будем проводить по фазово-частотной зависимости. Согласно пункту 1.4, для низких частот используем (11), для высоких - (13). При больших частотах зависимость $\psi(\sqrt{\nu}\ \frac{\pi}{4})$ аппроксимируется прямой, проходящей через начало координата, аналогично при малых частотах поведение зависимости $\tan\psi(\nu)$ тоже является линейной функцией, проходящей через начало координат. При этом, как следует из формулы (14), напряжение на измерительной катушке, пропорционально *производной* поля внутри цилиндра. Если занести i в экспоненту, то получим фазовый сдвиг, измеренный по осциллографу:

$$\phi = \psi + \frac{\pi}{2} \tag{16}$$

3 Обработка результатов

3.1 Измерения амплитуд в области низких частот

В области низких частот толщина скин-слоя превосходит толщину стенок образца $\delta \gg h$ и из (15) получаем

$$\left(\frac{|H_1|}{|H_0|}\right)^2 = (\xi_0\xi)^2 \approx \frac{1}{1+\left(\frac{ah}{\delta^2}\right)^2} = \frac{1}{1+(\pi ah\nu\mu_0\sigma)^2}$$

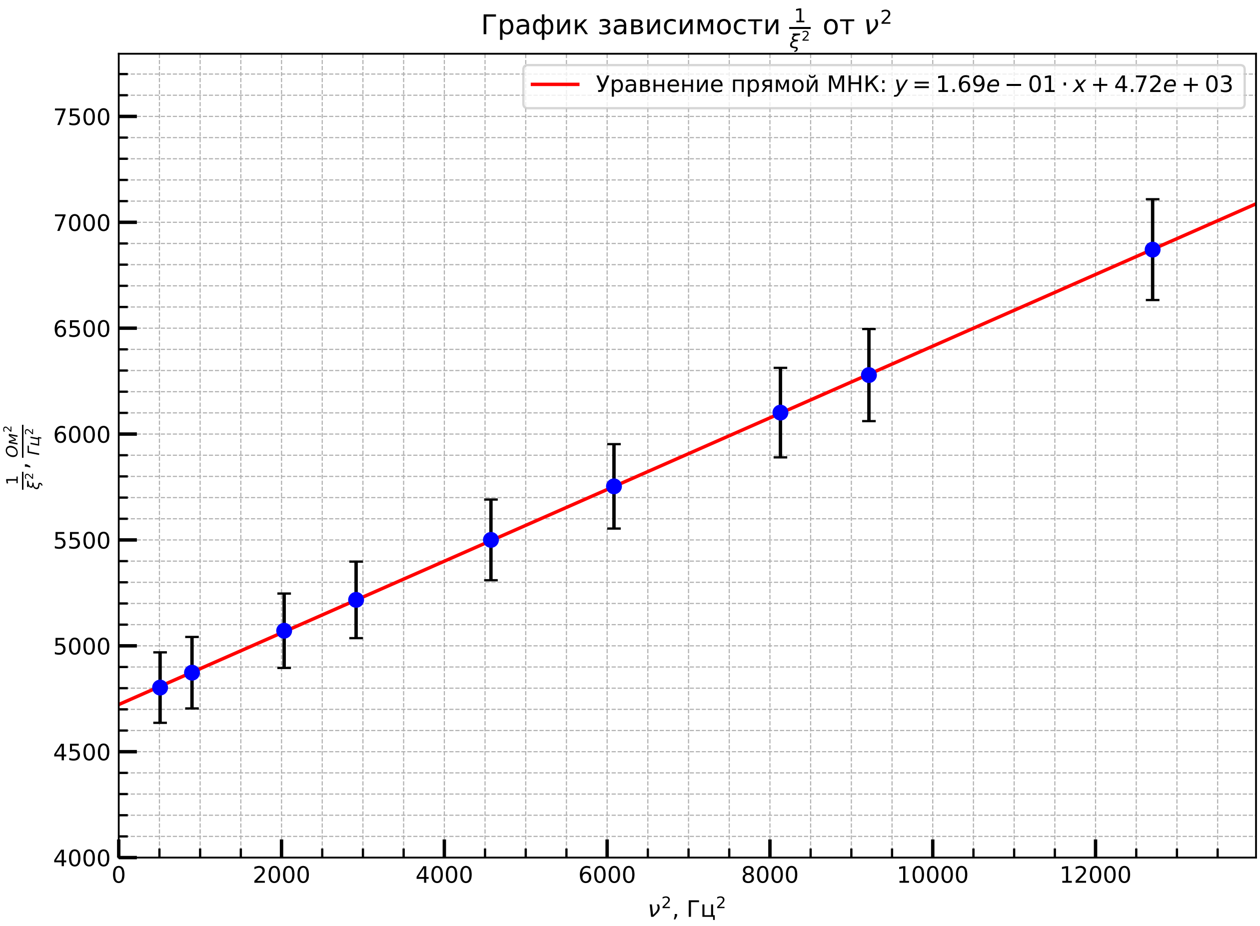

Рисунок 3: График зависимости $\frac{1}{\xi^2}(\nu^2)$

Тогда:

$$\frac{1}{\xi^2} = \xi_0^2 H^2 \nu^2 + \xi_0^2, \text{ где } H = \pi a h \sigma \mu_0$$

По найденным коэффициентам аппроксимации МНК находим: $\xi_0^2 = 4720$ Гц^2/Ом^2 , тогда:

$$\xi_0 = 68,7 \pm 0,04 \ \frac{\text{Гц}}{\text{Ом}}, \ \ \sigma = (5,603 \pm 0,014) \cdot 10^7 \ \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

3.2 Измерение проводимости через разность фаз при низких частотах

Построим график $\operatorname{tg}\psi(\nu)$ по первым 7 точкам, для которых зависимость хорошо аппроксимируется прямой. Согласно формуле (11), при $\delta \gg h$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{ahw\sigma\mu_0}{2} = \pi a h \mu_0 \sigma \nu$$

Коэффициент наклона прямой:

$$\pi a h \mu_0 \sigma = k = (4,41 \pm 0,13) \cdot 10^{-3} \text{ с}$$

$$\sigma = \frac{k}{\pi a h \mu_0} = (3,07 \pm 0,23) \cdot 10^7 \ \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

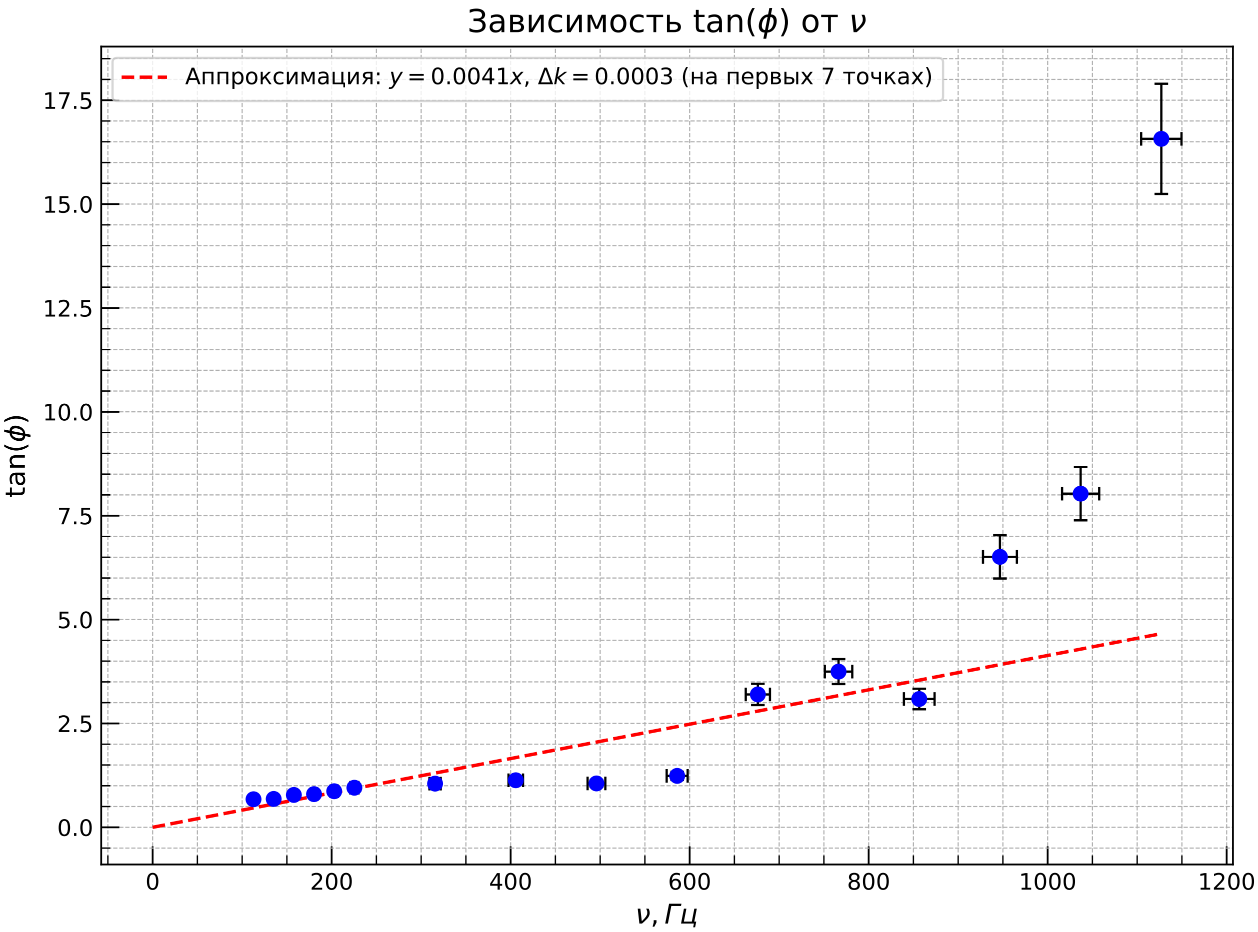

Рисунок 4: График зависимости $\tan\phi(\nu)$

3.3 Измерение проводимости через разность фаз в высокочастотном диапазоне

Согласно формуле (13), при $\delta \ll h$

$$\psi - \pi/4 = k \cdot \sqrt{\nu}; \;\; k = h\sqrt{\pi\mu_0\sigma}$$

Коэффициент наклона прямой $k = 0,0212 \pm 0,0002$, проходящей через начало координат. Отсюда получаем значение проводимости:

$$\sigma = (5,05 \pm 0,17) \cdot 10^7 \; \frac{\text{См}}{\text{м}} \tag{17}$$

3.4 Измерение проводимости через изменение индуктивности

3.4.1 Теоретическая справка

Поскольку на высоких частотах магнитное поле не проникает внутрь соленоида, то *индуктивность* зависит от *частоты* переменного тока. Суммарный магнитный поток уменьшается из-за уменьшения скиновой глубины, а на низких частот хоть магнитное поле и проникает внутрь экрана, но амплитуда его падает (10) и возникает разность фаз колебаний поле внутри и снаружи экрана (11).

Суммарный магнитный поток, пронизывающий катушку, можно разбить на поток пронизывающий область между катушкой и экраном и область за экраном согласно (2).

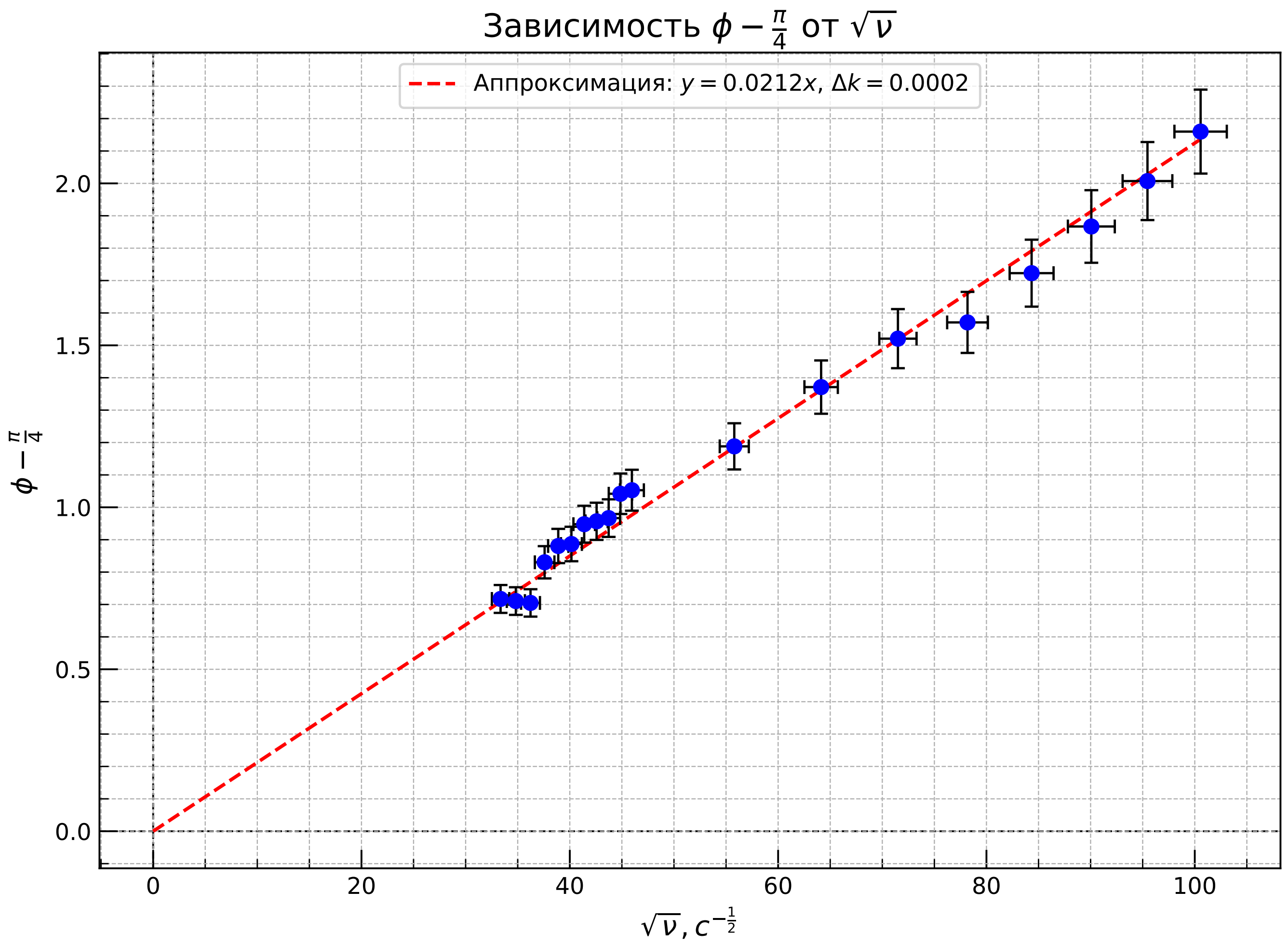

Рисунок 5: График зависимости $(\psi - \pi/4)(\sqrt{\nu})$

$$\Phi = H_0 S_0 + H_1 S_1 = LI$$

Индуктивность становится минимальной, когда поле сосредоточено только во внешней области

$$L_{min} = \frac{\Phi_{\text{внеш}}}{I} \tag{18}$$

Домножим и разделим выражение для внутреннего потока на внешний поток, получим:

$$\Phi_{\text{внутр.}} = H_1 S_1 \cdot \frac{\Phi_{\text{внеш.}}}{H_0 S_0} = \frac{\Phi_{\text{внешн.}}}{n} \frac{S_1}{S_0}$$

Из (15) можно выразить n - коэффициент ослабления поля

Напротив, максимальная индуктивность достигается при равенстве полей H_1 и H_0. То есть максимальном потоке поля во внутренней области.

$$L_{max} = \frac{\Phi_{max}}{I_m}$$

С учётом (18) имеем отношение площадей через индуктивности:

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{L_{max} - L_{min}}{L_{min}} \tag{19}$$

Используем (10), (11), (5) и связь отношений площадей с отношениями полей и индуктивностей имеем зависимость

$$\frac{L_{max} - L}{L - L_{min}} = (\pi a h \mu_0 \sigma)^2 \cdot \nu^2 \tag{20}$$

3.4.2 Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки для нахождения проводимости σ по изменению индуктивности катушки L. RLC-метр, измеряющий индуктивность, подключается к катушке 1 через клеммы 5 и 6 на панели установки. Другие приборы при этом должны быть отсоединены от цепи, т.к. RLC-метр измеряет индуктивность активным образом. **Особенность измерений** состоит в том, что прибор даёт ошибочные показания на некоторых частотах, указанных на корпусе (750 Гц, 1 кГц, 5 кГц, 10 кГц)

Зависимость индуктивности внешнего соленоида 1, по которому пропускается ток, от частоты представлена схематично на графике:

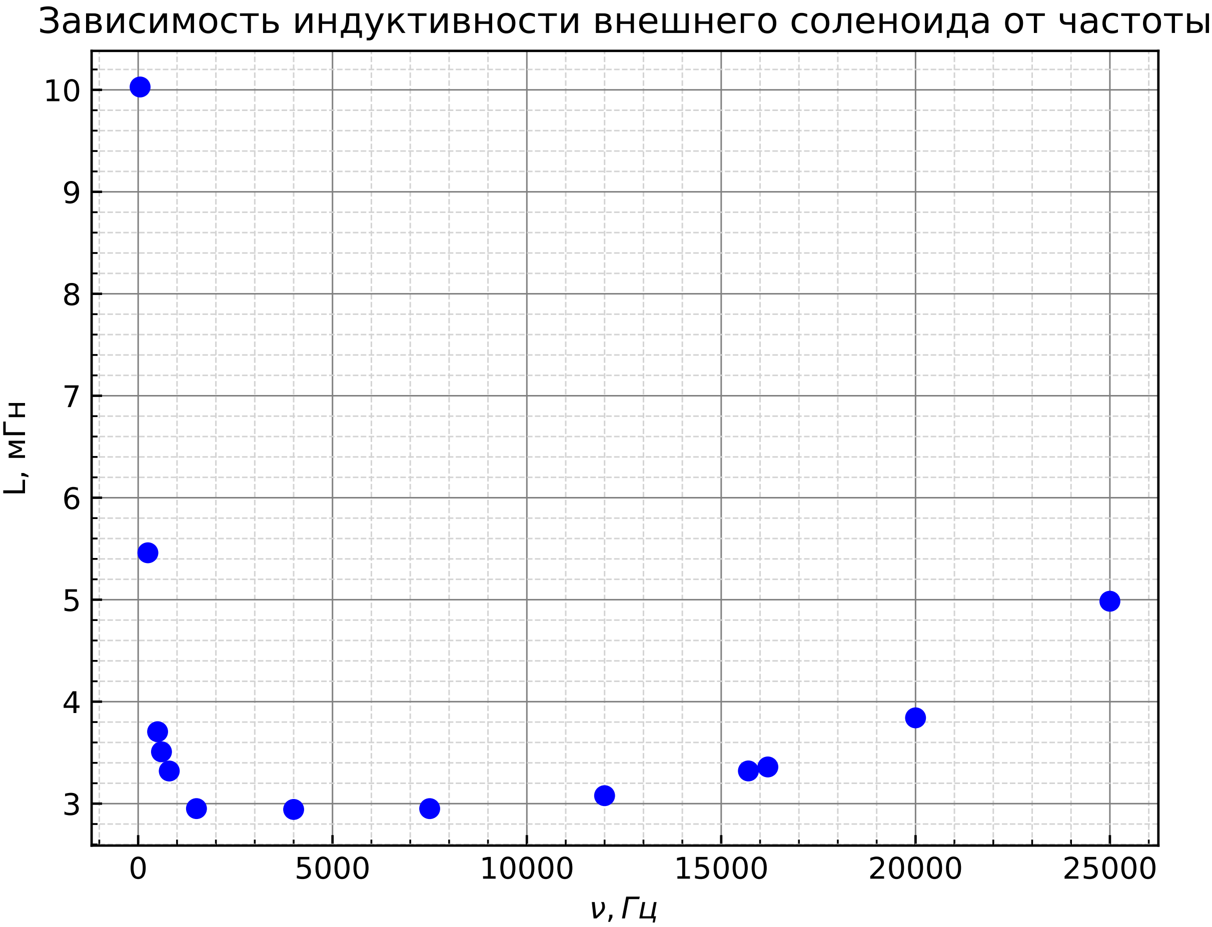

Рисунок 6: График зависимости $L(\nu)$

Полученные максимальные и минимальные значения: $L_{min} = 2,94$ мГн, $L_{max} = 10,28$ мГн.

Построим график зависимости $(L_{max} - L)/(L - L_{min})$ от ν^2 и аппроксимируем его прямой, проходящей через начало координат. По углу наклона прямой определим проводимость материала (согласно формуле (20)).

$$\frac{L_{\max} - L}{L - L_{\min}} = \pi^2 a^2 h^2 {\mu_0}^2 \sigma^2 \nu^2$$

Тогда коэффициент наклона коэффициент наклона графика

$$k = (\pi a h \mu_0 \sigma)^2 \ \rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{k}}{\pi a h \mu_0}$$

Подставляя полученные значения, получаем:

$$\sigma = (4,17 \pm 0,17) \cdot 10^7 \ \frac{\text{См}}{\text{м}} \tag{21}$$

3.5 Коэффициент ослабления поля

Отношение $|H_1|/|H_0|$ можем посчитать, использовав полученное значение ξ_0 при анализе амплитуд в области низких частот.

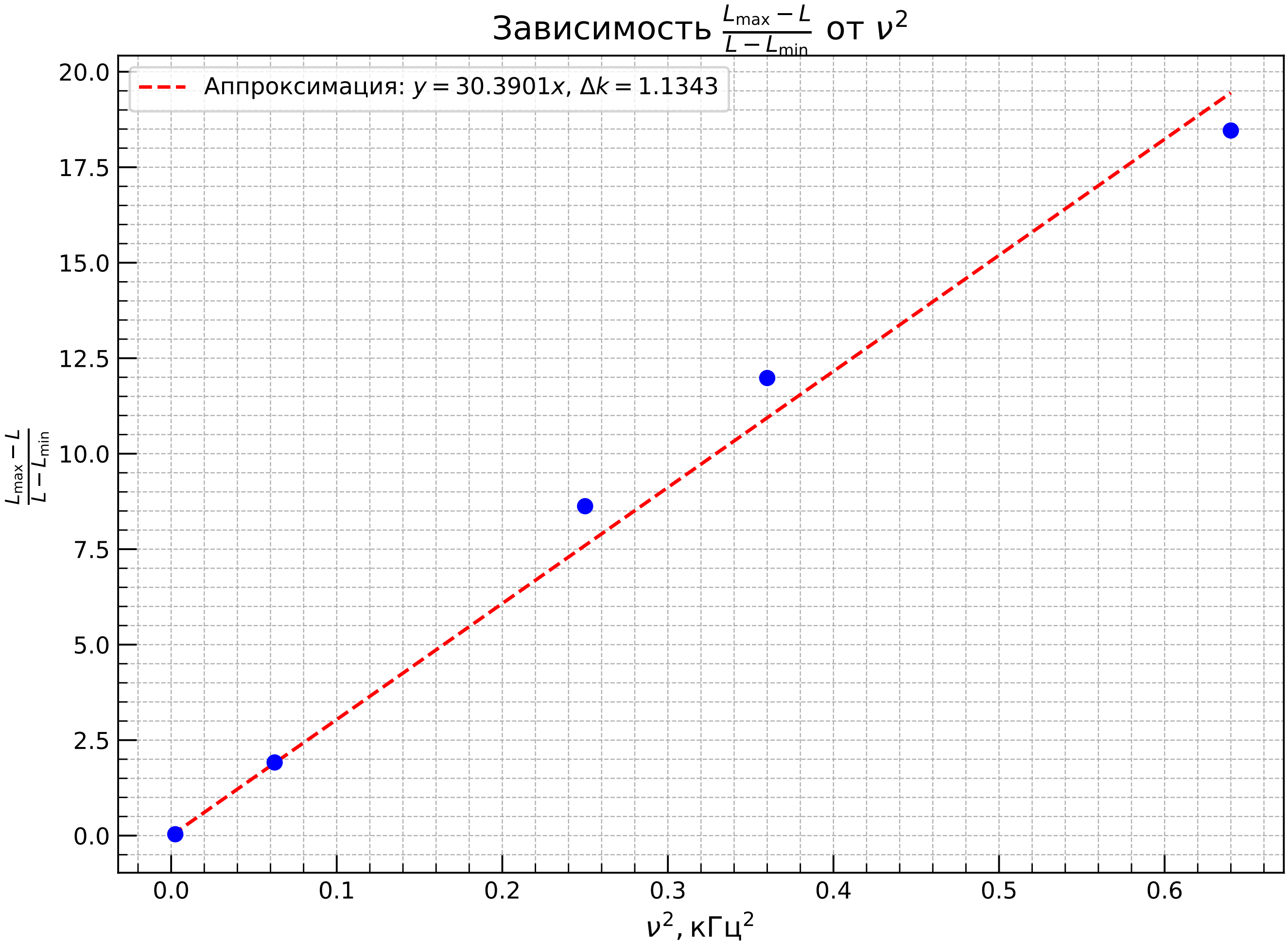

Рисунок 7: График зависимости $\frac{L_{\max}-L}{L-L_{\min}}(\nu^2)$

Второй способ - непосредственно через минимальный и максимальный коэффициенты проводимости σ, используя формулу (9). На всём диапазоне исследуемых частот построим графики зависимости коэффициента ослабление поля от частоты и сравним теоретическую и экспериментальную зависимости. $|H_1|/|H_0|(\nu)$

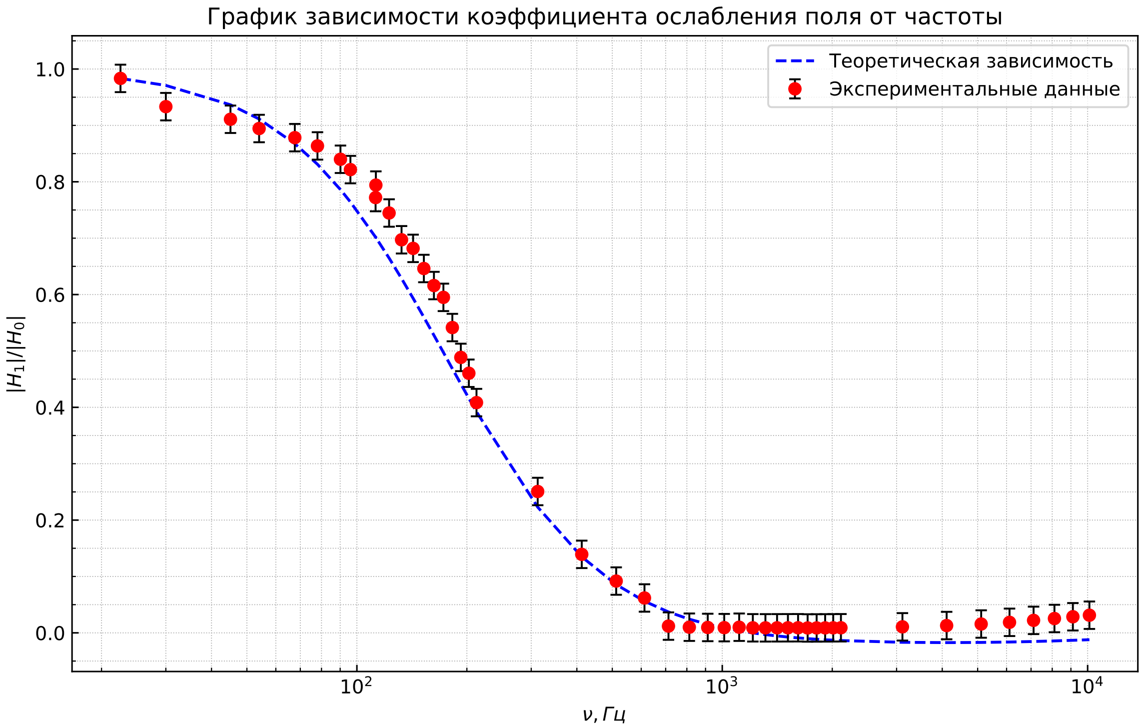

Рисунок 8: Сравнение теоретической (9) и экспериментальной зависимости коэффициента ослабления поля от частоты

4 Вывод

В данной лабораторной работе мы измеряли удельную проводимость медного образца цилиндра 4-мя при изучении скин-эффекта.

Метод измерения	$\sigma, 10^7\ \frac{См}{м}$	$\Delta\sigma, 10^7\ \frac{См}{м}$	ε_σ
Отношение амплитуд	5,603	0,014	0,01%
Разности фаз (низкие частоты)	3,07	0,23	45,1%
Разности фаз (высокие частоты)	5,05	0,17	9,6%
Индуктивность	4,17	0,17	25,1%

Таблица 1: Сравнение результатов различных методов

В работе использовалась медь, для которой $\sigma_{табл} = 5,62 \cdot 10^7\ \frac{См}{м}$. Как мы видим, способ по отношению амплитуд самый точный, поскольку при измерении использовались фактически только измерительные приборы без осциллографа. При использовании метода измерения фаз на высоких и низких частотах существенное влияние оказывает погрешность измерения по осциллографу и размытость картинки из-за ослабления поля и сильных краевых эффектов, когда толщина скин слоя лежит на границе стенок цилиндра и наше приближение нельзя считать квазистационарным.

Индуктивность сложным образом зависит от частоты и при построении линеаризованного графика при частотах L, приближающихся к L_{min}, график испытывает резкий скачок при стремлении к 0 знаменателя. Первые точки плохо характеризуют зависимость, поскольку она является асимптотической ($\Delta k = 1,13$), только относительная погрешность определения МНК составила 4 %, при учёте погрешностей прибора, которая включает погрешность определения и выбора частоты, некоторую неисправность используемого $LCR-$метра, имеем, что метод носит только оценочный характер.

Экспериментальная и теоретическая зависимости $\frac{|H_1|}{|H_0|}(\nu)$ хорошо совпадают на высоких частотах, когда глубина скин-слоя маленькая и поле сосредоточено у поверхности (с учётом пересечений с крестами погрешностей теоретической зависимости). Однако в диапазоне средне-высоких частот, во время переходного процесса, показания чуть выше предсказываемых, что опять же может быть связано с упрощением модели квазистационарности и полубесконечного идеального цилиндра.