Электричество и магнетизм. Крымский

$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл $\simeq 4{,}8\cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ

• Закон Кулона:

Взаимодействие 2х точечных зарядов

$$\boxed{F = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\ ;\quad \bar F = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\bar r_{12}}$$

СГСЭ : $k = 1$, $[q] = [F][r] = \dfrac{г^{1/2}\, см^{3/2}}{c}$ = ед СГСЭ

(сантиметр - грамм - секунда)

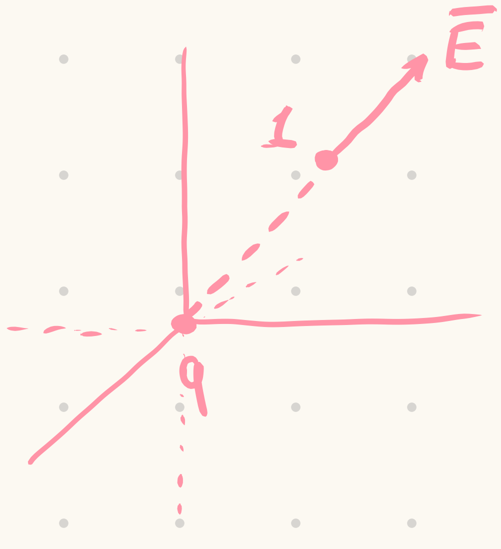
Гауссова Система

1 Кл $= 2{,}998\cdot 10^{9}$ ед. СГСЭ $\simeq 3\cdot 10^{9}$ ед. СГСЭ $= \frac{1}{10}$ ед СГСМ

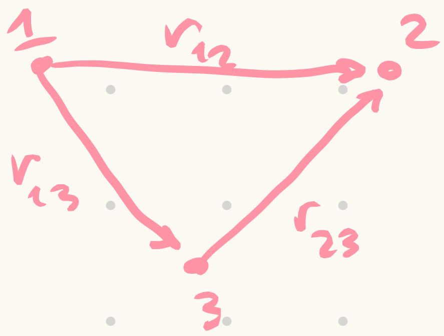
$K = 9\cdot 10^{9}\ \frac{м}{ф} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}\ \frac{ф}{м}$

• Напряженность:

$$\boxed{E = \frac{q}{r^3}\bar r}$$

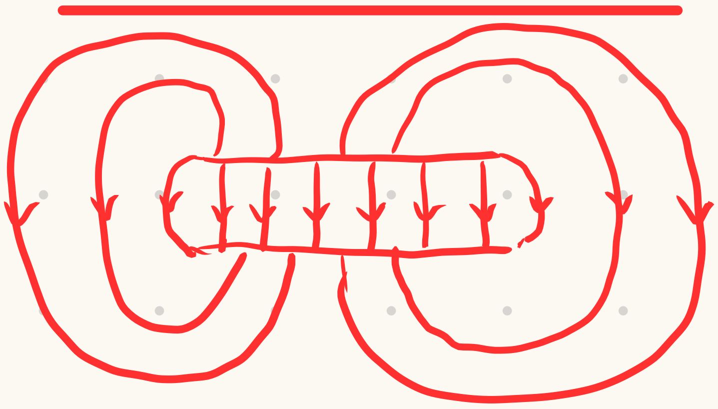


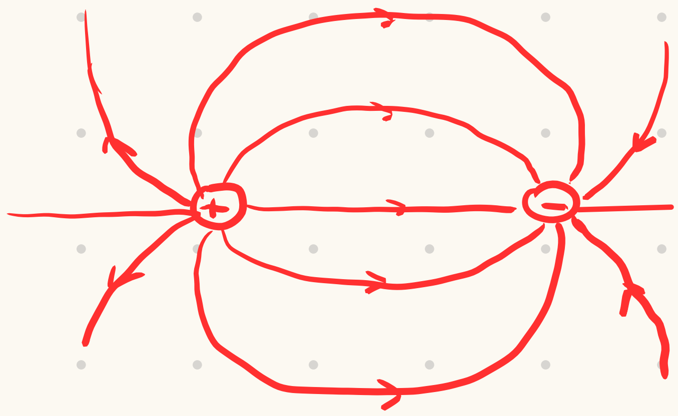
– Принцип суперпозиции



$$\boxed{\bar F_1 = \frac{q_1 q_3}{r_{13}^3}\bar r_{13} + \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\bar r_{12}}$$

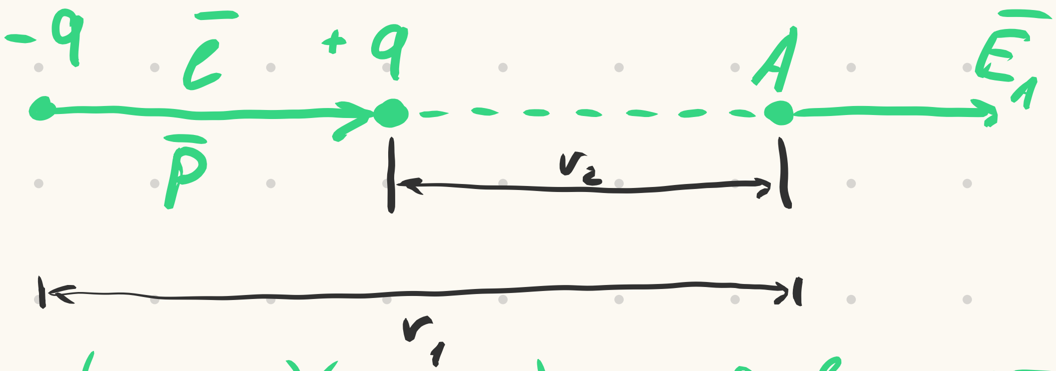
• Силовые линии:





• Эл. Диполь:

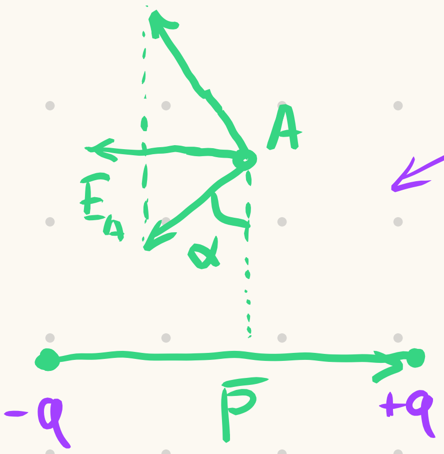
$$\boxed{\bar{p} = q\bar{l}}$$



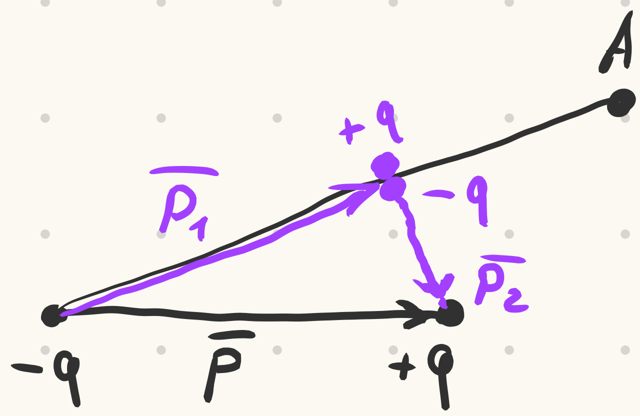
$$\bar{E}_A = q\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right] = q\,\frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{r_1^2 r_2^2} \approx \frac{2ql}{r^3} = \frac{2\bar{p}}{r^3}$$

$l << r_1 r_2$

$r_1 \approx r_2 = r$



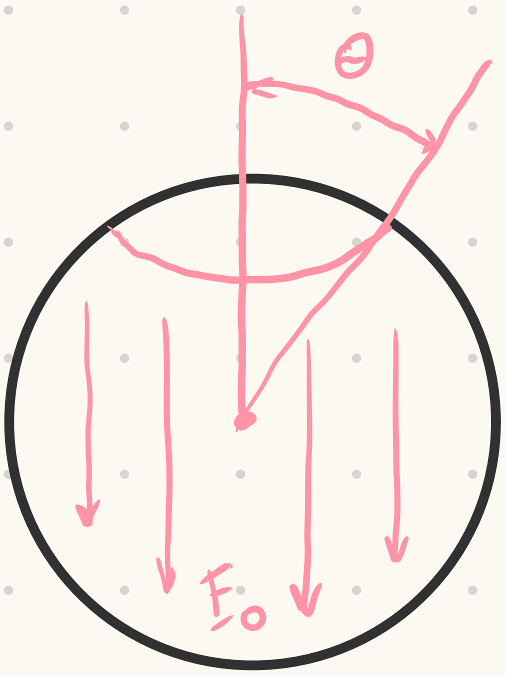
$$\bar{E}_A = -\frac{\bar{p}}{r^3}$$



• Общий случай:

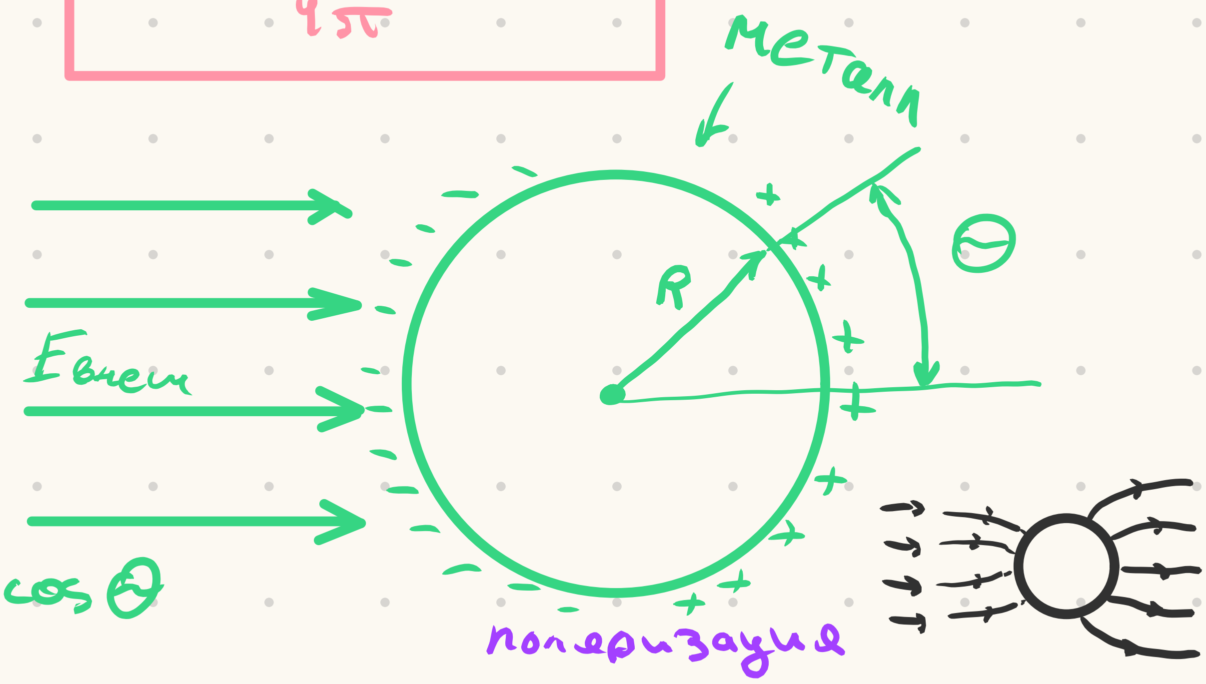
$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2, \quad \cos\theta = \frac{(\bar{p}, \bar{r})}{p \cdot r} \to p_1 = p\,\frac{(\bar{p}, \bar{r})}{p \cdot r}; \; p_1 = \frac{(\bar{p}\bar{r})}{r^3}$$

$$\boxed{E_A = \frac{3(\bar{p}, \bar{r})\,\bar{r}}{r^5} - \frac{\bar{p}}{r^3}}$$



Закон распределение зарядов по пов-ти сферы, чтобы поле было однородно E_0.

$$\boxed{\sigma = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta}$$

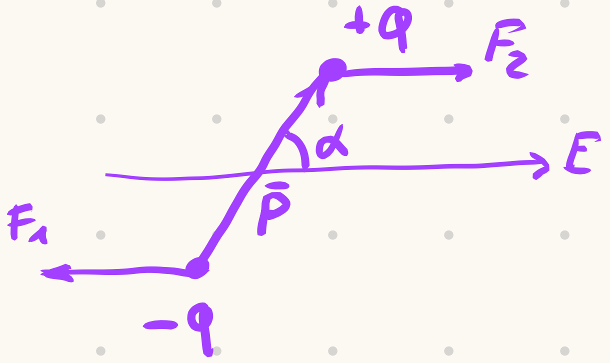


• $\bar{p} = \bar{E}_{внеш} \cdot R^3$

• $\sigma(\theta) = -\dfrac{3E_{внеш}\cos\theta}{4\pi}$

• Диполь во внешнем поле:

1) Момент диполя: $F_1 = F_2$



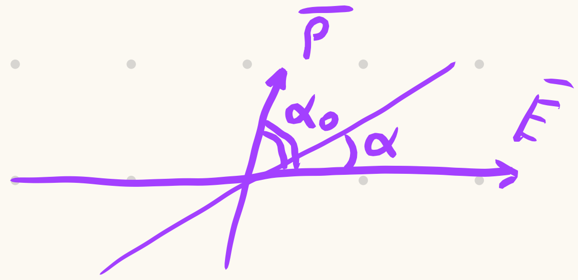
$$\bar M = [\bar l \bar F_2] = q[\bar l \bar E] = [\bar p \bar E]$$

$$|\bar M| = -pE\sin\alpha \quad („-"!)$$

2) Энергия диполя

$W_{max} = pE$; $W = 0\,(\perp)$; $W_{min} = -pE$ (по полю)

$$dW = \delta A = M d\alpha$$



$$W_{эл} = -pE\int_{\alpha}^{\alpha_0} \sin\alpha\, d\alpha = pE\cos\alpha\Big|_{\alpha}^{\alpha_0} =$$

$$= pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) = -pE\cos\alpha$$

$$\boxed{W_{эл} = -(\bar p, \bar E)}$$

• Точечный диполь, $l \ll r$

$$\bar F = q(\bar E_2 - \bar E_1) = q\,d\bar E \rightarrow d\bar E = l_x\frac{\partial \bar E}{\partial x} + l_y\frac{\partial \bar E}{\partial y} + l_z\frac{\partial \bar E}{\partial z}$$

$$\boxed{\bar F = p_x\frac{\partial \bar E}{\partial x} + p_y\frac{\partial \bar E}{\partial y} + p_z\frac{\partial \bar E}{\partial z}}$$

$$\bar\nabla = \bar i\frac{\partial}{\partial x} + \bar j\frac{\partial}{\partial y} + \bar k\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\bar\nabla f = \bar i\frac{\partial f}{\partial x} + \bar j\frac{\partial f}{\partial y} + \bar k\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$(\bar p \bar\nabla) = p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z}$$

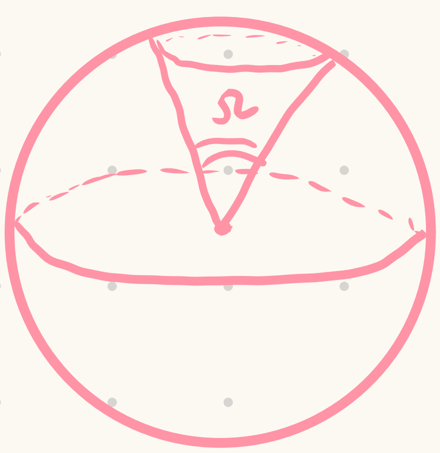
$$\boxed{\bar F = (\bar p \bar\nabla)\bar E}$$

same

на плоскости

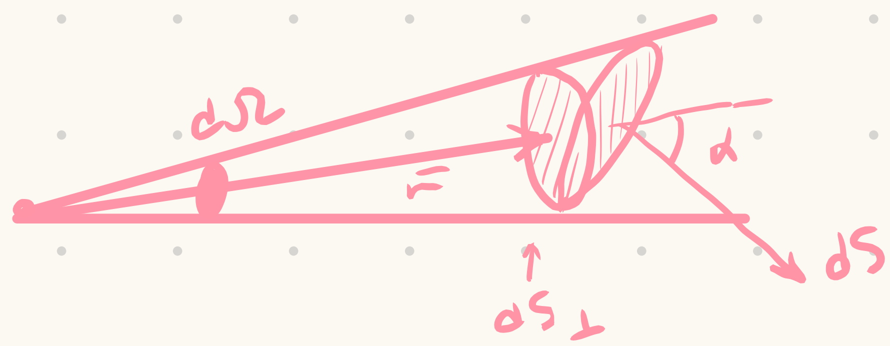
$$\alpha = \frac{l}{r}$$

сферы



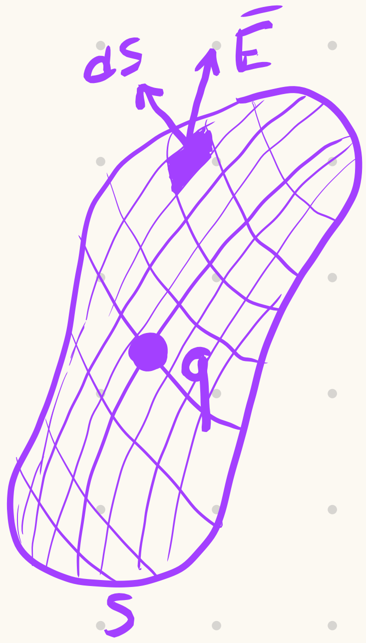
$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$



$$dS_\perp = dS\cdot\cos\alpha$$

$$d\Omega = \frac{dS_\perp}{r^2} = \frac{dS\cdot\cos\widehat{\bar r d\bar S}}{r^2}$$



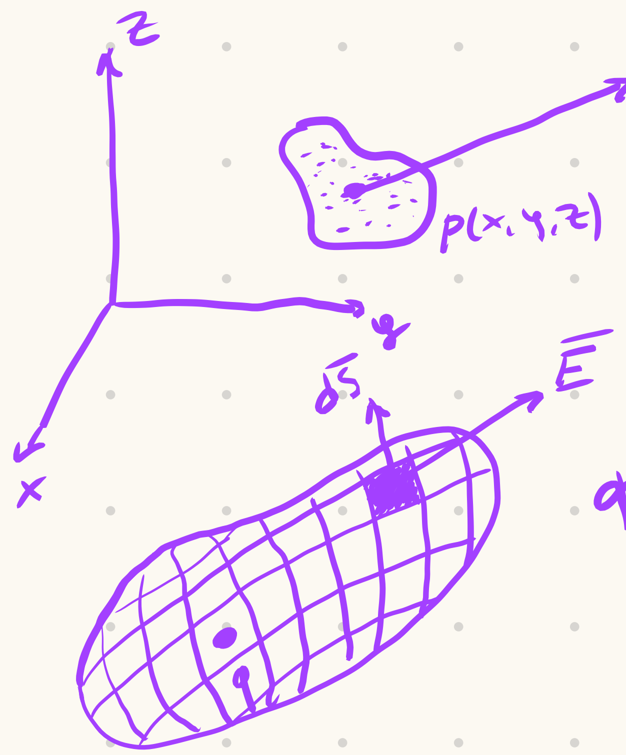
• Теорема Гаусса:

⊛ Понятие потока $d\Phi = (\bar E d\bar S)$

$$\Phi = \int(\bar E d\bar S) = \int \underbrace{\frac{q(\bar r d\bar S)}{r^3}}_{d\Omega} = q\oint d\Omega = 4\pi q$$

– Поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов заключенных внутри этой пов-ти * 4π

Конец 1 лекции



$$\bar E_A = \iiint_V \frac{\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{r^3}\,\bar r$$

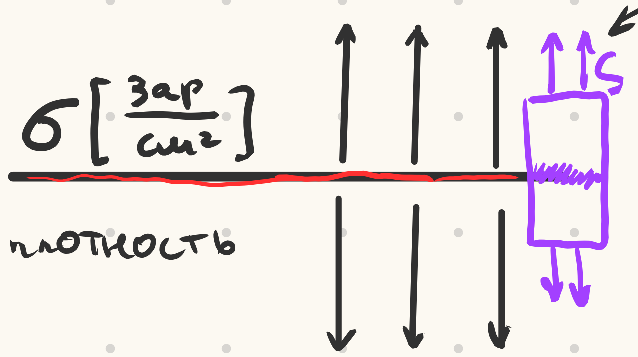
$$\Phi_E = \oiint_S(\bar E d\bar S) = \begin{cases}4\pi\sum_i q_i\\ 0\end{cases}$$

$$= \iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

• Примеры:

1) $\sigma\left[\frac{\text{зар}}{\text{см}^2}\right]$

пов. плотность



Однородное поле

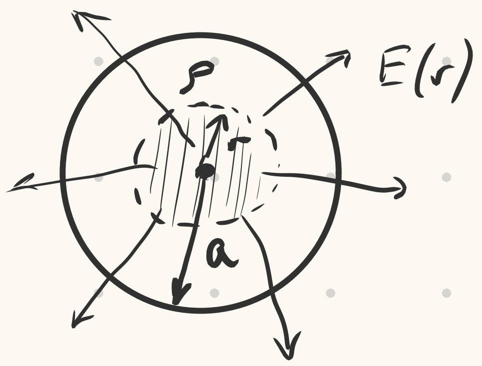
$\Phi_E = E\cdot 2S = 4\pi\sigma S$ ← Т. Гаусса

$$\boxed{E = 2\pi\sigma}$$

⊛ Скачок поля?

$$\boxed{\Delta E = 4\pi\sigma}$$

2)



• Поле при $r \le a$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \cdot 4\pi$$

$$\left[\bar{E}(r) = \frac{4}{3}\pi\rho\bar{r}\right]$$

• Поле при $r \ge a$

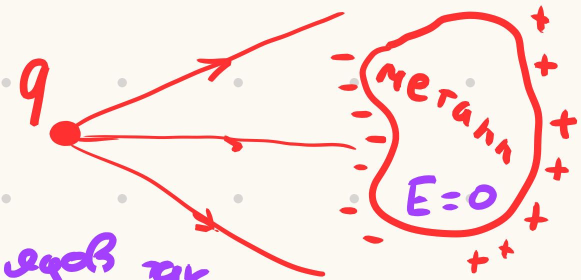
$$\left[E(r) = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{a^3}{r^2} = \frac{Q}{r^2}\right]$$

• Теорема Ирншоу:

– Система неподвижных зарядов не может находиться в равновесии.

• Поле в металлах:

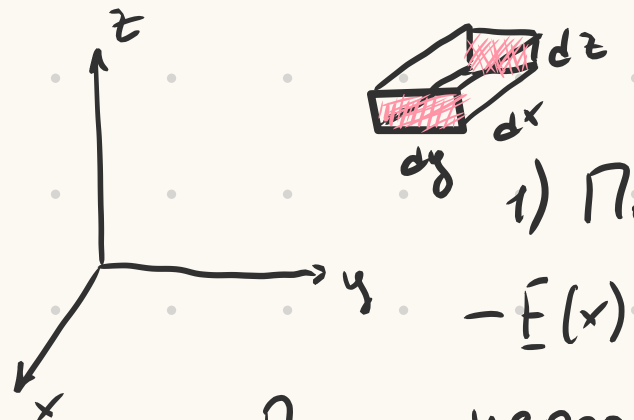
– Поле в металлах 0.



* Происходит перераспределение зарядов так, что свободные заряды скомпенсируют внешнее поле

• Теорема Гаусса в дифф. форме:

$$\boxed{\rho = \frac{dQ}{dV}}$$



$$dq = \rho dV = \rho(x,y,z)dxdydz$$

1) Поток $\bar{E}$ через грани $\perp Ox$

$$-E(x)dydz \quad \text{и} \quad +E(x+dx,y,z)dydz$$

Поток через две грани: $= \left[E_x(x+dx,y,z) - E_x(x,y,z)\right]dydz$

• $\frac{dx}{dx} = \frac{\partial E_x}{\partial x}dxdydz = \frac{\partial E_x}{\partial x}dV$

2) Полный поток $d\Phi = \underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)}_{\text{div}\,\bar{E}\ (\text{дивергенция})}dV = 4\pi\rho dV$

плотность заряда

$\boxed{\operatorname{div}\bar{E} = 4\pi\rho}$, <u>Определение дивергенции:</u>

$$\operatorname{div}\bar{E} = (\bar{\nabla}, \bar{E}) = 4\pi\rho$$

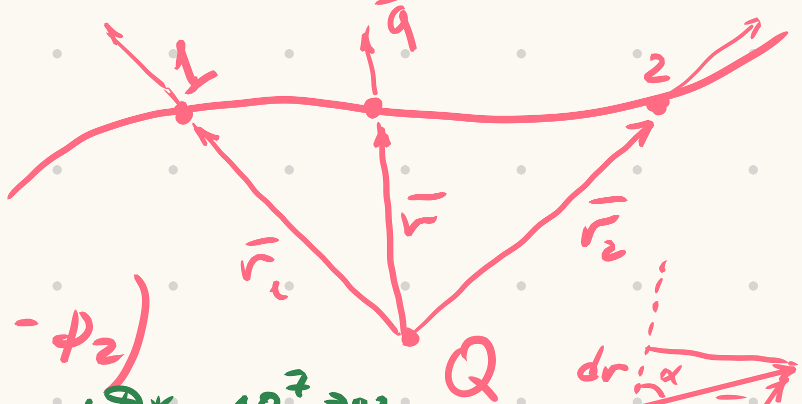
• Физ. смысл: $$\operatorname{div}\bar{E} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint(\bar{E}, d\bar{S})}{V}$$

1.19*. Пользуясь теоремой Гаусса в дифференциальной форме, вычислить напряженность электрического поля равномерно заряженных 1) шара радиусом R и 2) бесконечной пластины толщиной $2h$. Объемная плотность электричества в обоих случаях равна ρ.

$$\operatorname{div}\bar{E} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E) = \frac{dE}{dr} + \frac{2E}{r}$$

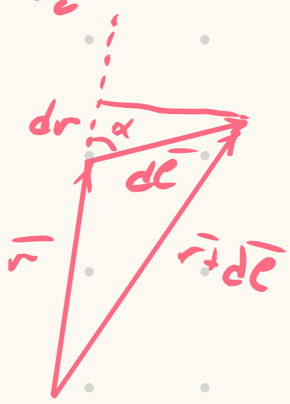
• Потенциал:

– Поле потенциально если силы являются функциями только координат



$$A_{12} = \int_1^2(\bar{F}, d\bar{\ell}) = \int_1^2\frac{qQ}{r^3}(\bar{r}, d\bar{\ell}) =$$

$$= \int_1^2\frac{qQ}{r^2}dr = q\left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2}\right) = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$



$\boxed{\varphi = \frac{Q}{r}}$ ← потенциал

$$1\,В = \frac{1\,Дж}{1\,Кл} = \frac{10^7\,эрг}{3\cdot 10^9\,СГСЭ} \quad СГСЭ\ ед.$$

$$\longrightarrow A_{12} = q\underbrace{(\varphi_1 - \varphi_2)}_{\text{убыль потенциала}} = \int_1^2 q\bar{E}(\bar{r})d\bar{r}$$

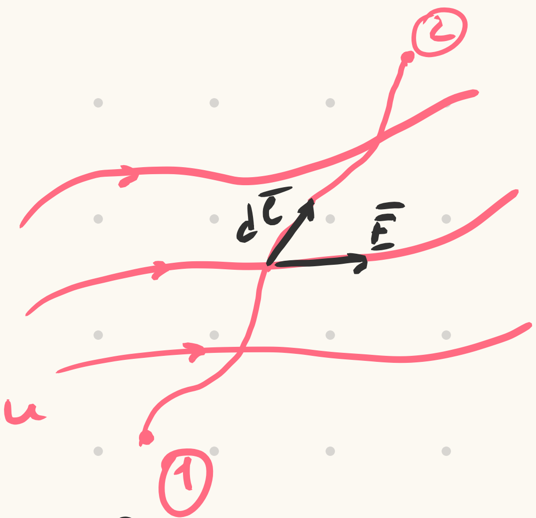
1 эрг   ед. (СГСЭ)

$(\bar{r}\,d\bar{\ell}) = r\,d\ell\cos\alpha$

• Теорема о циркуляции:

a) Циркуляция напряженности

$$\delta A = \bar{F}d\bar{\ell} = q\bar{E}d\bar{\ell}$$



$(1) \equiv (2)$: $\boxed{\oint_L \bar{E}d\bar{\ell} = 0}$ Т. о циркуляции

работа по перемещению точечного заряда по контуру L

• $\bar{E}d\bar{\ell} = -d\varphi$, Пусть $d\bar{\ell} \parallel Ox$ =>

=> $d\bar{\ell} = \bar{\ell}\,dx$, $\bar{E}d\bar{\ell} = \bar{E}\bar{\ell}\,dx = E_x dx$ → $\boxed{E_x = -\frac{d\varphi}{dx}}$

$$\boxed{\overline{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}\right) = -\mathrm{grad}(d\varphi) = \overline{\nabla}\varphi}$$

Конец 2ой лекции

- Связь потенциала и Эл-стат поля

$$(\bar{E}\,d\bar{l}) = -d\varphi \;\to\; E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \;\to\; \bar{E} = -\underbrace{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}\right)}_{\mathrm{grad}\,\varphi}$$

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\bar{E} = 4\pi\rho \\ \bar{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi \end{cases} \to \boxed{\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho}$$

(Δ) Лапласиан!

Ур-ие Пуассона

$\boxed{\Delta\varphi = 0,\ \rho = 0}$ - Лаплас

- Ур-ие Лапласа: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$

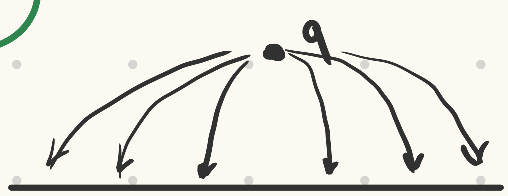
⊛ Линейное: $\left.\begin{matrix}\varphi_1(x,y,z)\\ \varphi_2(x,y,z)\end{matrix}\right\}$ $A\varphi_1 + B\varphi_2$ - решение

Вводим $\psi = \varphi_1 - \varphi_2 \underset{\text{на границе}}{=} 0$ → либо везде 0 ($\varphi_1 = \varphi_2$)
→ либо пусть max!

▲ Решение задач:

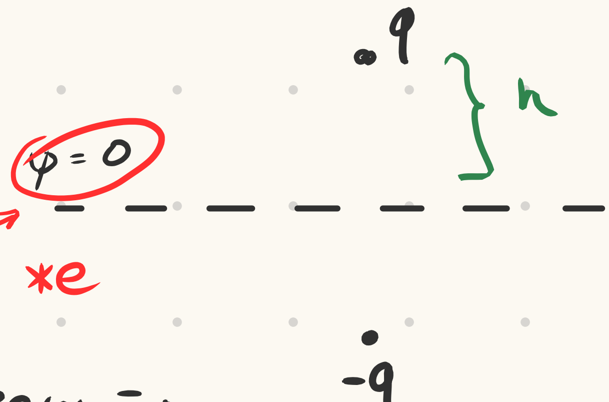
Ур-ие Лапласа (Пуассона) → Распределение потенциалов → поле → Единственность решения

(1)



незар. метал. лист

$F = \frac{q^2}{(2h)^2}$



поверхность

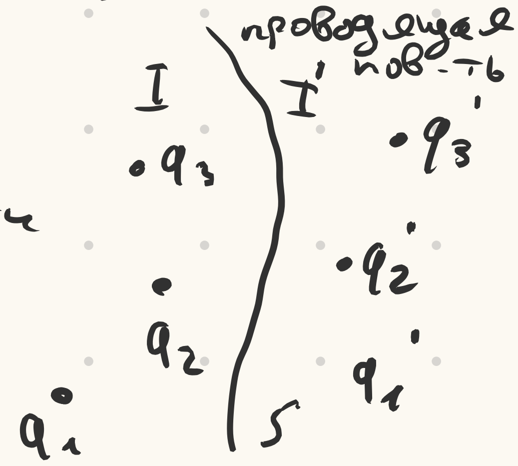
$\varphi = 0$ Граничное условие — такое же

- Метод электрических изображений:

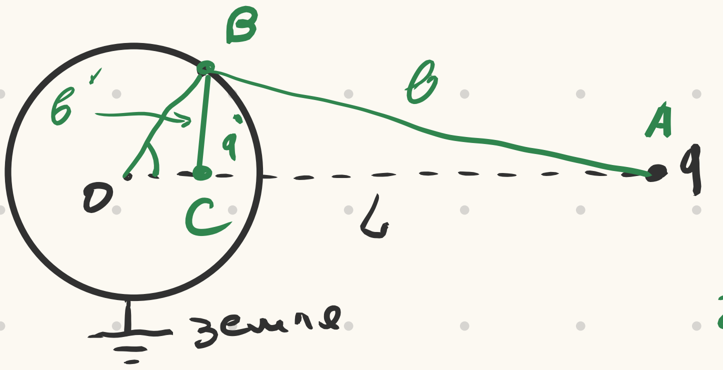
- Если мы догадались до φ, удовл. Пуассону и гр. условиям, то стали известен φ, т.к. решено !-ое

- Заданием положений q_1, q_2, q_3 и какой-либо эквипотенциальной поверхности

=> Если экв сделали проводящей, то поле нигде не изменится.



(2)



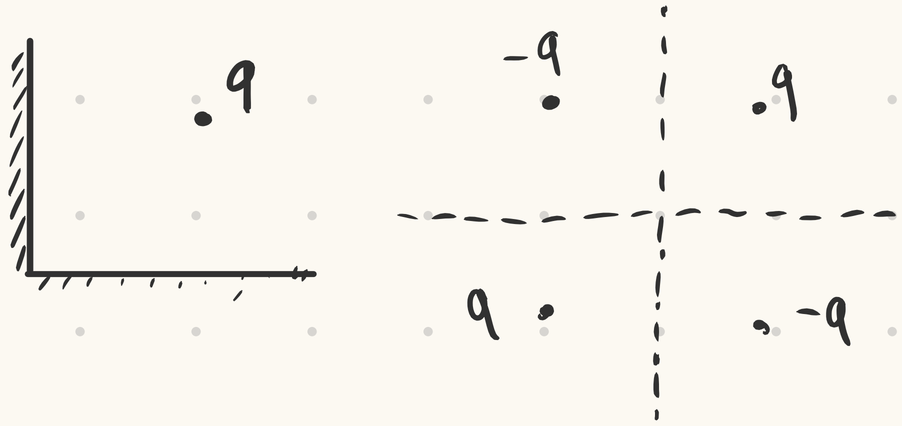
1) т. С: $\Delta OBC \sim \Delta OBA$

$$\frac{r}{L} = \frac{OC}{r} \rightarrow \left[OC = \frac{r^2}{L}\right]$$

2) $$\frac{q'}{b'} + \frac{q}{b} = 0$$ ← граничное условие на пов-ти

$$\left[q' = -\frac{b'}{b} q = -\frac{r}{L} q\right]$$

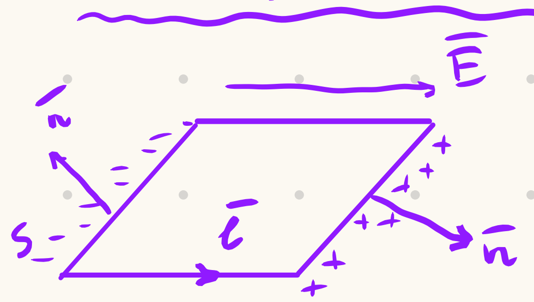
(3)



• **Поляризация диэлектриков:**

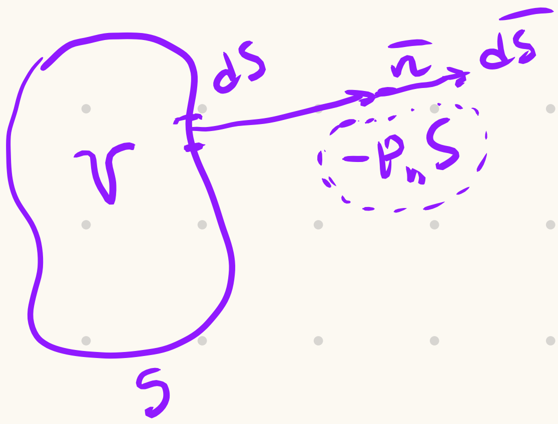
1) Нет свободных зарядов
2) 3 механизма поляризации:
 - Молекулы становятся диполями во внеш. поле
 - Молекулы обладают дипольным моментом при отсутствии поля
 - Ионная поляризация (поляризация кристаллов)

• **Вектор поляризации** – дипольный момент ед. объема диэлектрика



$$\boxed{\bar P = \frac{\sigma_{пол} \cdot S \bar l}{V}} = \frac{\sigma_{пол} S(\bar l \bar n)}{S(\bar l \bar n)\bar n} \Rightarrow \boxed{(\bar P, \bar n) = \sigma_{пол}}$$

$$\overset{\shortparallel}{P_n}$$



$$q_{пол} = -\oint P_n dS = -\oint (\bar P, d\bar S)$$

$$\oint E_n dS = 4\pi(q + q_{пол})$$

$$\oint \underbrace{(E_n + 4\pi P_n)}_{D_n} dS = 4\pi q$$

$$\left[\bar D = \bar E + 4\pi \bar P\right]$$ вектор эл. индукции / смещения

• Теорема Гаусса для $\bar{D}$. $\left[\begin{array}{l}\oint D_n dS = 4\pi q \\ \mathrm{div}\,\bar{D} = 4\pi\rho \leftarrow \text{свободный}\end{array}\right]$

$$\mathrm{div}(\bar{E} + 4\pi\bar{P}) = 4\pi\rho$$

$$\left[\mathrm{div}\,\bar{E} = 4\pi(\rho - \mathrm{div}\,\bar{P}) = 4\pi(\rho + \rho_{пол})\right]$$

$$\left[\rho_{пол} = -\mathrm{div}\,\bar{P}\right]$$

конец 3ей лекции

Электроёмкость

• Уединенный проводник в вакууме

• $\varphi(\infty) = 0$

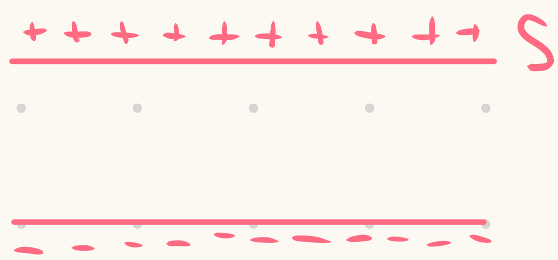
Опр. $C = \frac{q}{\varphi}$ – зависит от геометрии

а) Шар, R: $\varphi = \frac{q}{R} \Rightarrow C = \frac{q}{\frac{q}{R}} = R$ ([см] в СГС)

Опр. Ёмкость конденсатора:

$$\boxed{C = \frac{q}{\Delta\varphi}}$$

б) Пл. конденсатор



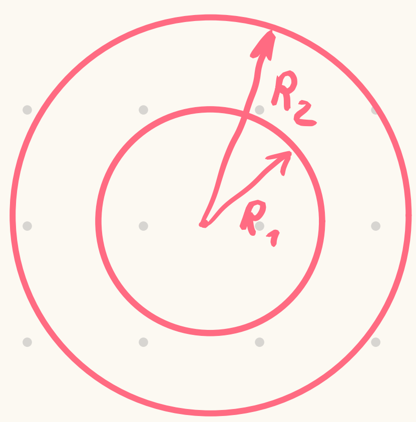
*d << S пренебрегаем краевыми эффектами

$E = 4\pi\sigma$

$\Delta\varphi = Ed = 4\pi d\sigma$

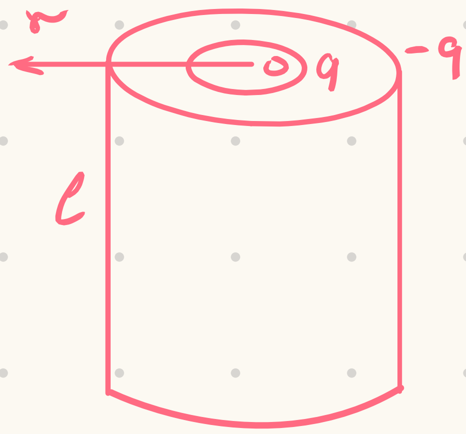
$$C = \frac{q}{4\pi d\left(\frac{q}{S}\right)} = \frac{S}{4\pi d}$$

в) Сферический конденсатор:



$$\Delta\varphi = q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right); \quad C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{R_1R_2}{R_1 - R_2}$$

2) Цилиндрический конденсатор:



$$E = \frac{2\frac{q}{l}}{r} = \frac{2\lambda}{r}$$

$$\Delta\varphi = \int_1^2 E\,dr = \int_1^2 \frac{2q}{rl}\,dr = \frac{2q}{l}\ln\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{l}{2\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

• Ёмкость изм.: $1\,Ф = \frac{1\,Кл}{1\,В} = \frac{3\cdot 10^9\,ед\,СГС}{\frac{1}{300}\,ед\,СГС} = 9\cdot 10^{11}\,см$

Дипольный момент в системах со многими зарядами

- Вводим радиус вектор каждого заряда

$$\overline{P} = \sum_i q_i \overline{r_i}$$

Н-р: $q_1 = q,\ q_2 = -q \Rightarrow \overline{P} = q(\overline{r_1} - \overline{r_2}) = q\overline{l}$

• Пусть система эл-ки нейтральна:

$$\overline{P} = \sum_i q_i^+ \overline{r_i}^+ - \sum q_i^- \overline{r_i}^- \quad (1)$$

$$\sum q_i^+ \overline{r_i}^+ = \sum q_i^- \overline{r_i}^-$$

$$\overline{R^+} = \frac{\sum q_i^+ \overline{r_i}^+}{\sum q_i^+}\ ;\ \overline{R^-} = \frac{\sum q_i^- \overline{r_i}^-}{\sum q_i^-} \Rightarrow \overline{P} = \boxed{q(\overline{R^+} - \overline{R^-})}$$

Виды поляризации

Электронная — ⊕ и ⊖ в атоме

Ионная — сходно с эл. + решетки в кристаллах

Дипольная

Возникают под действием $E_{внеш}$

$$\boxed{\overline{P} = \frac{1}{V}\sum_i \overline{P_i}}$$

$\overline{P} \sim \overline{E}$ -?

$U(x)$ – пот. эн. взаим. двух частиц на расст. x

$x=0$ – П.Р. (устойч)

$$u(x) = u_0 + \underbrace{x\frac{du}{dx}\Big|_{x=0}}_{0 \text{ в П.Р.}} + \underbrace{\frac{x^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x=0}}_{k>0} + \dots$$

Устойч. равновесию

$$F = -\frac{du}{dx} = -kx, \quad u(x) \simeq u(0) + \frac{kx^2}{2}$$

Новое равновесие: $kx_E = qE \Rightarrow p = qx_E = \frac{q^2}{k}E$

Дипольный момент ед. объема: $P = \frac{N}{V}\cdot\frac{q^2E}{k} \sim E$

дипольный момент у молекул

Про диполи у Овчоса в 1 лекции

Получаем вектор поляризации $\boxed{\bar P = \varkappa \bar E}$

коэффициент поляризуемости

- Общий случай:
  > поляризуемость $\alpha = \alpha_{диполь} + \alpha_{ионной} + \alpha_{электр}$

$$\boxed{\bar P = \alpha \bar E}$$

Для молекул: $\bar p = a^3\bar E$

Для газа: $\bar P = n\bar p = n\beta\bar E$

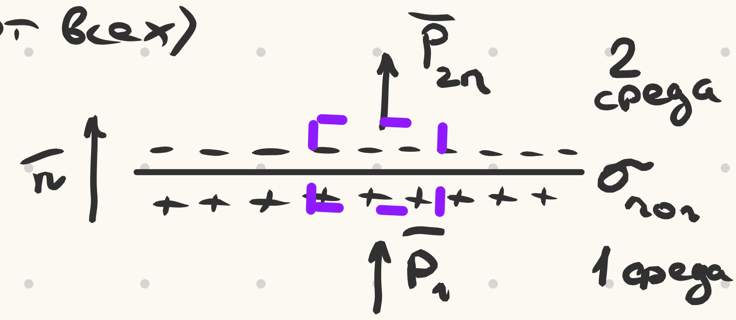
- Вектор смещения $\bar D$:

$$\bar D = \bar E + 4\pi\bar P; \quad \oint \bar D\, d\bar S = 4\pi q_{свободные}$$

(поток зависит только от своб. а D от всех)

$$\bar D = \bar E\underbrace{(1+4\pi\alpha)}_{\varepsilon\text{ – диэл. проницаемость}} = \varepsilon\bar E$$

- $\bar P$ от „–" к „+", Запишем т. Гаусса



$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma_{пол}$$

свободные заряды

$\sigma_{пол} = P_{1n} - P_{2n}$

$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma_{пол})$

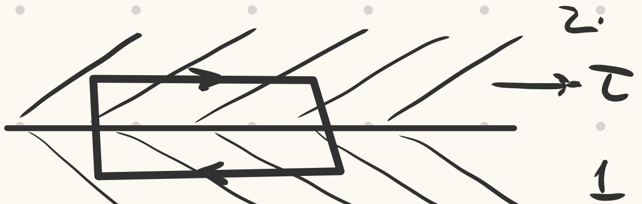
$E_{2n} - E_{1n} - 4\pi\sigma_{пол} = 4\pi\sigma$

$E_{2n} - E_{1n} - 4\pi(P_{1n} - P_{2n}) = 4\pi\sigma$

$(E_{2n} + 4\pi P_{2n}) - (E_{1n} + 4\pi P_{1n}) = 4\pi\sigma$

Пример: ср.1 – проводник
ср.2 – диэлектрик

$$E_{1n}=0,\ P_{1n}=0 \to \bar D_{1n}=\bar 0 \Rightarrow \bar D_{2n}=4\pi\sigma\bar n$$



два диэлектрика

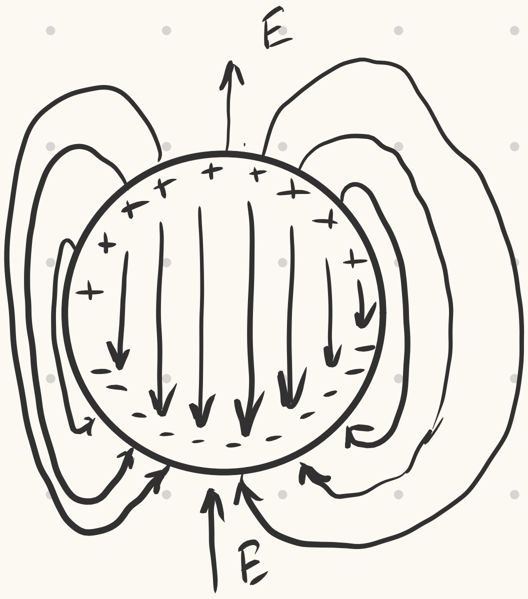
Теорема о циркуляции

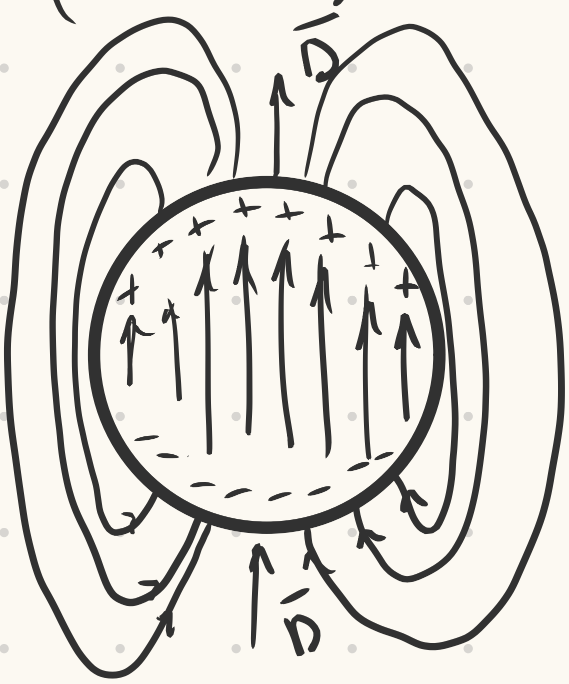
$$\oint \bar E d\bar l = 0$$

$$(E_{2\tau}-E_{1\tau})\,l=0 \Rightarrow \boxed{E_{1\tau}=E_{2\tau}}$$

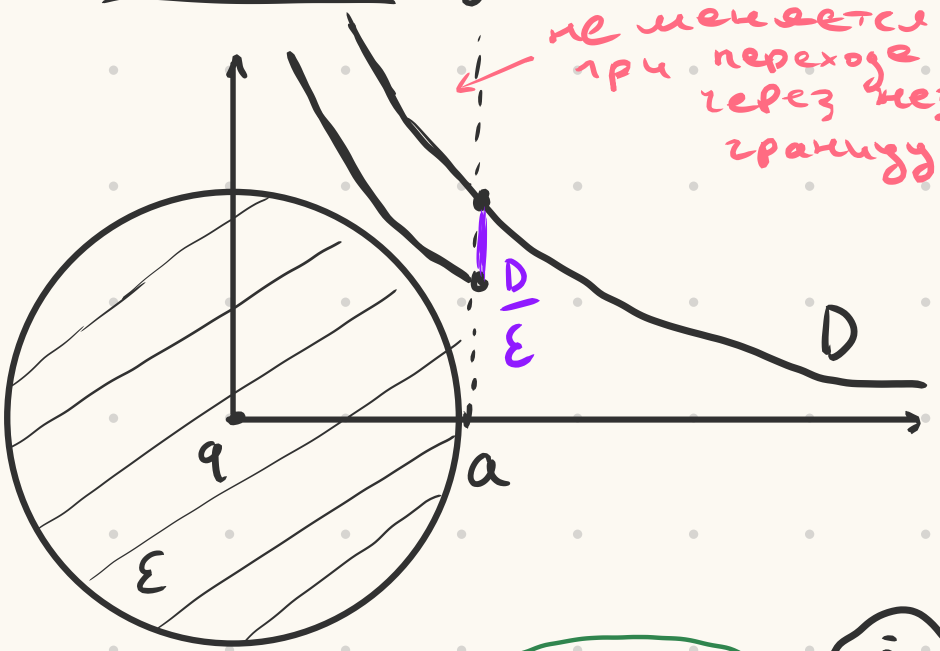
$$\boxed{D_n=const}$$

непрерывность тангенциальной сост. и постоянство норм. сост. D





Пример: диэл. шарик с точечным зарядом q в центре



1) Теорема Гаусса для $\bar D$:

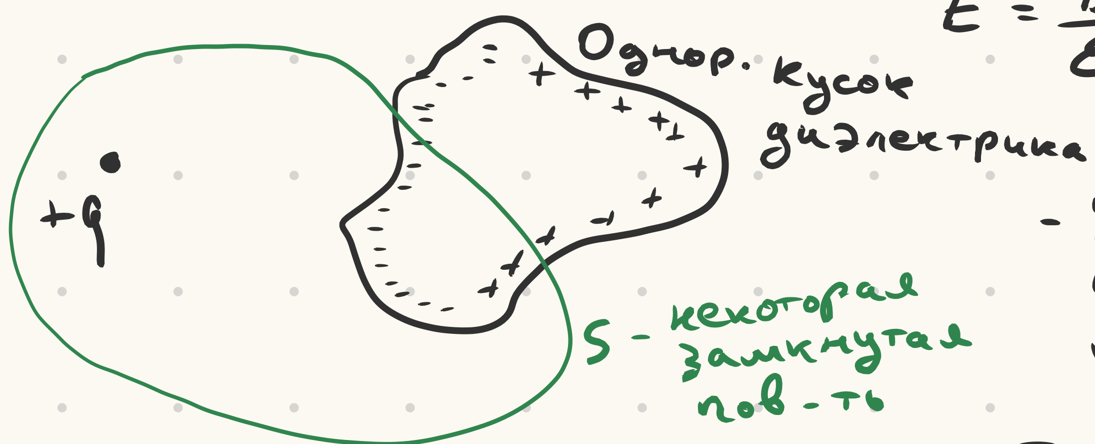
$$\bar D\, 4\pi r^2 = 4\pi \underbrace{q_{своб}}_{q}$$

$$D=\frac{q}{r^2}\ (r>0)$$

2) Связь D и E:

$$E=\frac{D}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = const$$

Пример:



– Удалено диэл. что будет с E, D и их потоками?

1) Удалили диэл., $\bar E, \bar D, \Phi_E$ – изменятся, а $\bar D$ – сохранится!

конец 4ой лекции

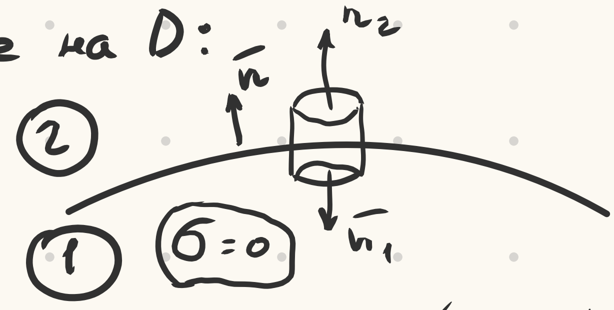
$\bar E;\ \bar D;\ \bar P=\alpha\bar E;\ \bar D=\bar E+4\pi\bar P=\bar E(1+4\pi\alpha)=\varepsilon\bar E$

вектор поляризации

$$\boxed{\begin{aligned}&\oint \bar D\,d\bar S=4\pi q_{своб} &(1)\\ &\oint_L \bar E\,d\bar l=0 &(2)\end{aligned}}$$

Граничные условия

Граничное условие на D:



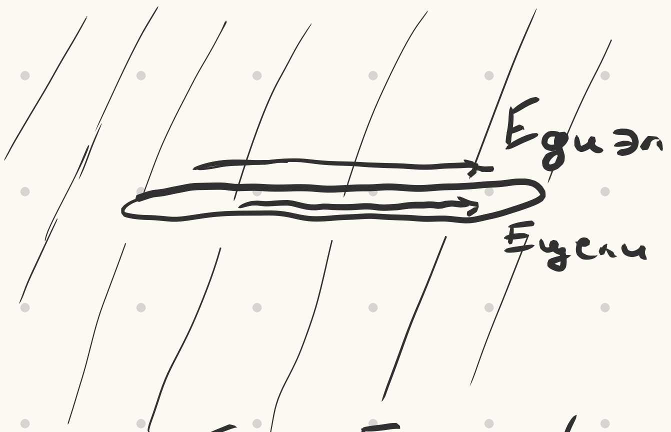
$D_{1n}=D_{2n}$

$\varepsilon_1E_{1n}=\varepsilon_2E_{2n}$

(3) $[E_{2n}-E_{1n}=4\pi\sigma_{пол}]$, $\oint E_n\,dS=4\pi(q+q_{пол})$, $q \to 0$

+ теор. о циркуляции: $E_{1\tau}=E_{2\tau}$ (4)

1-й случай: щель $\parallel \bar E$



$E_щ=E_{диэл}$ (тангенц. сост. непрерывны)

2-ой случай: щель $\perp \bar E$

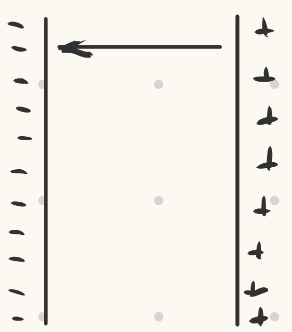
щель $\perp \bar D$

$D_{щели}=E_{вн\ щели}$ $(\varepsilon=1)$

$D_{щели}=D_{диэл}$

Сохранение энергии

1я иллюстрация:



$\delta A_{поле}=-\Delta\varphi\,dq=-\delta A_{внеш}$

$dW=\Delta\varphi\,dq=\frac{q}{C}dq=$

$$\boxed{W=\frac{q^2}{2C}=\frac{q\Delta\varphi}{2}=\frac{U^2C}{2}}$$

Для плоского конденсатора:

$$\left[W=\frac12\cdot\frac{\varepsilon S}{4\pi d}U^2\frac{d}{d}=\frac12\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{U}{d}\right)^2Sd=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}(Sd)=\underbrace{\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}}_{w}V=wV\right]$$

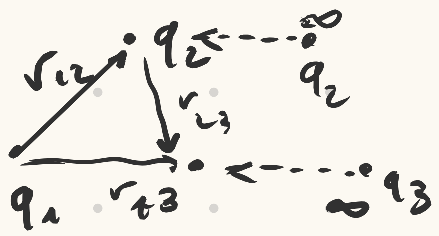
$$=\frac{ED}{8\pi}V=\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}V$$

w - объемная плотность энергии

Поле консервативно

$F(r)$ не зависит от скорости и времени

1) q_1 и q_2 размещены (∞)



$$\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} = A_{12} \qquad A = W_{эл} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_3 q_1}{r_{13}} + \frac{q_3 q_2}{r_{23}}\right]$$

не зависит от послед. переноса зарядов в данных точках

Если N зарядов:

$$W_{эл} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i$$

Распределенные по пов-ти:

$$W_{эл} = \frac{1}{2}\sum_i \underbrace{q_i}_{\oint_S \sigma dS} \varphi_i = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV + \frac{1}{2}\int \sigma\varphi\, dS$$

по вакууму
по-ву

$$W = \int \frac{(\bar{E}, \bar{D})}{8\pi} dV$$

Пример:

А) Как изменится энергия заряженного конденсатора с вакуумным зазором, если его заполнить диэл. ε?

1. Конденсатор отключен $\Rightarrow Q = inv \Rightarrow W = \frac{Q^2}{2C} \downarrow$ в ε раз

$D = const$, $E \downarrow$ в ε раз

2. Подключен $\Rightarrow U = const \Rightarrow W = \frac{U^2 C}{2} \uparrow$ в ε раз

$E = const$

$D \sim \varepsilon$

Б) Давление на пов-сть сферы

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C} \overset{(СИ)}{=} \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

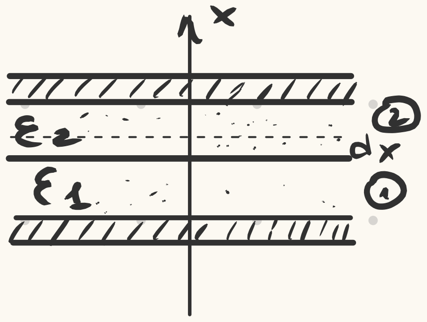
$$R \to R + \delta R: \quad \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0(R+\delta R)} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} - \underbrace{\delta A}_{P\cdot 4\pi R^2 \delta R} \text{ (в СИ)}$$

$$\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+\delta R}\right)=P\cdot 4\pi R^2\delta R \Rightarrow P\approx\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 R^4(4\pi)^2}$$

$$\frac{Q^2}{8\pi R^4}\ (CГС)$$

- Рассмотрим силы действующие на границе двух диэлектриков ε_1 и ε_2

<u>Случай 1</u>: Заряж. к-р ($q=const$)



* Мысленно смещаем границу на δx:

$D=D_1=D_2$ (своб. зарядов нет $q=const$)

$$w_1=\frac{D^2}{8\pi\varepsilon_1}=\frac{\varepsilon_1E_1^2}{8\pi}\ ;\ w_2=\frac{D^2}{8\pi\varepsilon_2}=\frac{\varepsilon_2E_2^2}{8\pi}$$

– Жидк. ① входит в к-р, ② – выходит

↳ $dW(q,T)=(w_1-w_2)\underbrace{S\,dx}_{\text{измен. объема}}$ – измен. энергии

$\delta A=\overset{\text{сила}}{f}\cdot S\cdot dx=-dW(q,T)$ (работа внутренних сил)

$$\boxed{f=w_2-w_1=\frac{D^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)}\ ,\ f>0,\ \text{если } \varepsilon_1>\varepsilon_2$$

↓ f напр. в область меньшей диэл. прониц.

<u>Случай 2</u>: $U=const$

$\bar{E}_1=\bar{E}_2=\bar{E}=const$ ($\Delta\varphi=const$)

$dW(\varphi,T)=(w_1-w_2)S\,dx$

$\delta A=+dW(\varphi,T)$ (работа внешних сил)

$$\boxed{f=w_1-w_2=\frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\quad f>0,\ \varepsilon_1>\varepsilon_2$$

⇓ f направлена в сторону меньшей диэл. пр.

конец 5ой лекции

<u>Эл. ток</u> – упорядоченное движение электронов

<u>Пост. ток</u> – неизменное во времени ——//——

Сила тока $\boxed{J = \dfrac{dq}{dt}}$ $\left(\dfrac{\text{заряд}}{\text{c}}\right)$ (через сечение!)

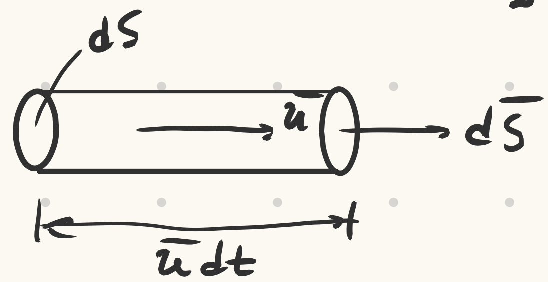
Плотность тока – кол-во заряда в ед. времени через ед. площади

n – концентрация, e

$\rho = n \cdot e$ – объемная пл-ть заряда

• Малый объем, в кот. находится N носит $\Rightarrow \left[\bar{u} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V_i\right]$ – их средняя скорость

За dt эту площадку пересекают носители нах. в об. $dV = u\,dt\,dS$



число: $dN = n\,dV = n\,u\,dt\,dS$

а перенесут они сумм. заряд

$$dq = \underbrace{e\,n}_{\rho}\overbrace{u\,dt\,dS}^{N} = \rho u\,dt\,dS \rightarrow$$

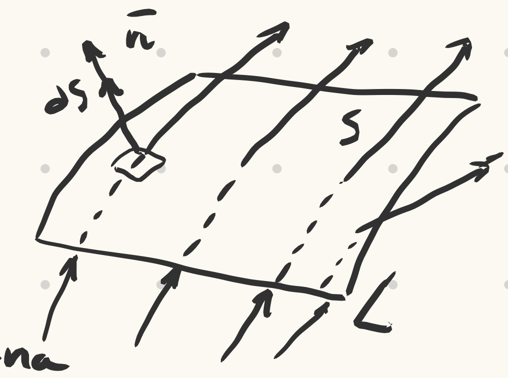
$$\left[j = \frac{e n u\,dt\,dS}{dt\,dS} = \underbrace{e n}_{\rho} u = \rho u\right]$$

плотность тока

• **Вектор плотности тока:** $\boxed{\bar{j} = \rho \bar{u}}$

– Пусть на контур L натянута пов-сть S:

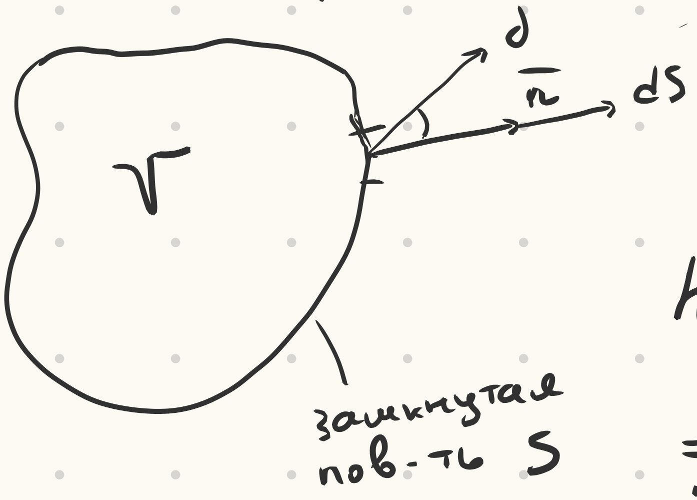
Полный ток через S:



$$J = \int_S \bar{j}\,d\bar{S}, \text{ где } \bar{j} = \sum_i e_i n_i \bar{u}_i$$

суммирование по носителям разного типа

• Закон сохранения заряда (З.С.З.) и ур-е непрерывности



$$\oint_S (\bar{j}\,d\bar{S}) = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad (<0)$$

Но $Q = \int_V \rho\,dV \rightarrow -\dfrac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,dV = \oint(\bar{j}\,d\bar{S}) =$

$= \int_V \operatorname{div}\bar{j}\,dV \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\bar{j} = 0}$

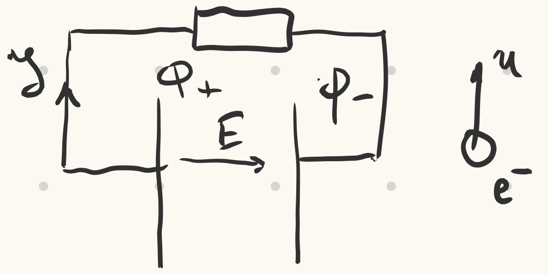
Т. Гаусса Остроградского

З.С.З в дифф форме

• Если $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (стац. случай): $\operatorname{div} \bar{j} = 0$

$$\oint_S (\bar{j}\, d\bar{S}) = 0$$ „Сколько втекло, столько вытекло)

• Закон Ома: $\boxed{J = \frac{U}{R}}$



- конденсатор даёт кратковременный ток

• Условие ∃-я пост. тока $\operatorname{div} \bar{j} = 0$ не выполняется (не стац. случай) $\rightarrow$ $\operatorname{div} \bar{j} \neq 0$

• Надо поддерживать круговорот заряда: $\oint \bar{E}\, d\bar{l} = 0$ => должны быть участки где заряд движется по полю и против поля

* Там где заряд движется против поля на него действуют силы неэлектростатической природы.

• ЭДС: $$\boxed{\mathcal{E} = \frac{A^{\text{сторонние}}}{q} = \int_L \bar{E}_{\text{стор}}\, d\bar{l}}$$

• $\boxed{\bar{j} = \lambda \cdot \bar{E}}$, $\rho_c = \frac{1}{\lambda}$ - удельное сопр-е

λ – проводимость среды

$$\bar{E}_{\text{стор}} = \frac{\bar{F}_{\text{стор}}}{e}$$

• Дифф. закон Ома: $\bar{j} = \lambda(\bar{E}_{\text{стор}} + \bar{E})$

• Пост. однород. поле:

$m\bar{a} = e\bar{E} \Rightarrow \bar{a} = \frac{e\bar{E}}{m}$ $(v_0 = 0)$

$\bar{v} = \bar{a}t = \frac{e\bar{E}}{m}t$, берём среднюю скорость $\bar{u} = \bar{v} = \frac{e\bar{E}\tau}{2m}$

* Подвижность дрейфа $\frac{e\tau}{2m}$

Из ср. скорости: $\left[\bar{j} = ne\bar{u} = \underbrace{\frac{ne^2\tau}{2m}}_{\lambda}\bar{E} = \lambda\bar{E}\right]$

Интегральная форма:

$$\mathcal{I} = jS, \quad j = \lambda(E + E_{стор})$$

$$E + E_{стор} = \frac{j}{\lambda} = \frac{\mathcal{I}}{\lambda S} \longrightarrow \int_{(1)}^{(4)} (E + E_{стор})\,dl = \mathcal{I} \underbrace{\int_{(1)}^{(4)} \frac{dl}{\lambda S}}_{R_{полное}}$$

* Сопротивление:

$$\lambda, S = const \to \left[R = \frac{1}{\lambda}\frac{l}{S} = \rho_c \frac{l}{S} \right]$$

$$\underbrace{\int_{(1)}^{(4)} E\,dl}_{\varphi_1 - \varphi_4} + \underbrace{\int_{(1)}^{(4)} E_{стор}\,dl}_{\mathcal{E}} = \mathcal{I} R_{полное}$$

Получаем:

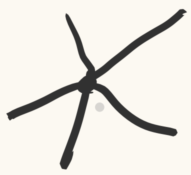
$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_4 + \mathcal{E} = \mathcal{I}R}$$

Закон Ома для полной цепи

* т.1 = т.4 → $\mathcal{E} = \mathcal{I}R$ замкнутая цепь

Правила Кирхгофа:

1) ∀ узла => $\sum_k \mathcal{I}_k = 0$



2) Для ∀ замкнутого уч-цепи ⟶ $\sum \mathcal{E}_i = \sum_k \mathcal{I}_k R_k$

+ правило знаков

Закон Джоуля-Ленца:

Заряд движется с $\bar{v}$ и силой $\bar{F} = e\bar{E}$

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{v}_{сл} \longrightarrow \bar{F}\bar{v}\,dt = \bar{F}(\bar{u} + \bar{v}_{сл})\,dt \Rightarrow$$

$\bar{u}$ — дрейфовая, $\bar{v}_{сл}$ — случайная ($\langle v_{сл} \rangle = 0$)

$$\langle \bar{F}\bar{v}_{сл} \rangle = 0$$

$dA = \bar{F}\bar{u}\,dt \to \omega = n\bar{F}\bar{u}$ (работа в ед. объема в ед. времени над всеми)

$$\bar{j} = ne\bar{u} \to \omega = \frac{\bar{j}}{e}\bar{F} = \bar{j}\bar{E} \to \boxed{\omega = \bar{j}\bar{E} = \lambda \bar{E}^2 = \frac{\bar{j}^2}{\lambda}}$$

$$W = \int_V \omega\,dV = \int_V \frac{\bar{j}^2}{\lambda}\,dV$$

W — мощность в V

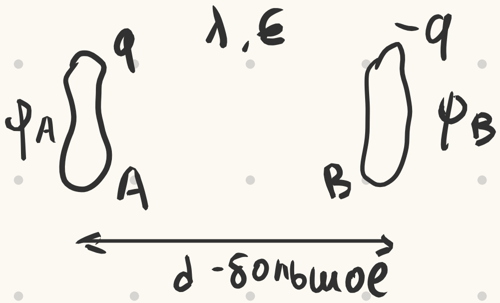
Для проводника  $\left[W = \int \left(\frac{J}{S}\right)^2 \frac{1}{\lambda} S\,dl = J^2 \underbrace{\int \frac{dl}{\lambda S}}_{R}\right]$

З. Дж.-Ленца в инт. форме

Замкнутая цепь с $\mathcal{E}$: $JR = \mathcal{E}$, $W = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = J\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \oint \bar{E}_{стор}\, d\bar{l}$$

• <u>Токи в неограниченных средах:</u>



$$C = \frac{q}{\varphi_A - \varphi_B}$$

1. <u>Т. Гаусса:</u> (Пишем для $\bar{D}$ и т. A) $\bar{D} \sim \bar{E}$

$$\varepsilon \int \bar{E}\, d\bar{S} = 4\pi q = 4\pi C(\varphi_A - \varphi_B)$$

2. $\bar{j} = \lambda \bar{E}$ — пл. тока стекающая с A.

$$J = \oint \bar{j}\, d\bar{S} = \lambda \oint \bar{E}\, d\bar{S}$$

$$J = \frac{\lambda}{\varepsilon} 4\pi C(\varphi_A - \varphi_B)$$

3. $$\boxed{R = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{J} = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C}}$$

• <u>Ч. случай:</u> $\left\{ C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \Rightarrow R = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C} = \frac{d}{\lambda S} \right\}$

$* \; R \neq R(\varepsilon)$!

• $\varphi_A = \frac{q}{C_A} - \frac{q}{d}$, $\varphi_B = -\frac{q}{C_B} + \frac{q}{d}$

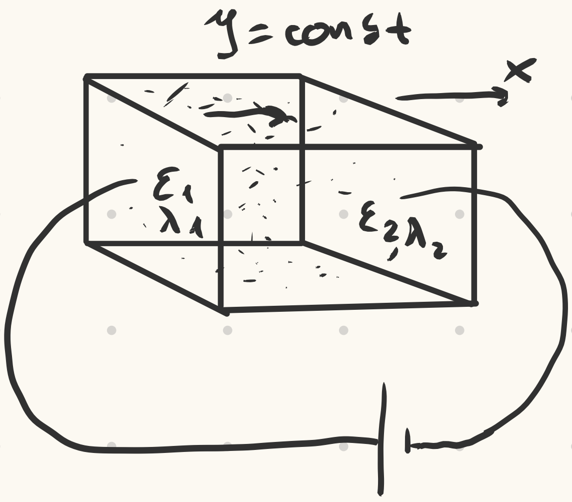
$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = q\left(\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B}\right) - \frac{2q}{d}$$

$$\left[C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{1}{\left(\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B}\right) - \frac{2}{d}} \approx \frac{C_A C_B}{C_A + C_B}\left(1 + \frac{2 C_A C_B}{(C_A + C_B)} \cdot \frac{1}{d}\right)\right]$$

• Если шары: $C_A = \varepsilon r_A$, $C_B = \varepsilon r_B$

$$R \simeq \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B}\right)$$

• <u>Пример:</u>



Наличие объемного заряда в неодн. диэл.

$$\frac{\mathcal{J}}{S} = j = \lambda(x)E(x) = const \text{ (по усл.)}$$

$$E(x) = \frac{\mathcal{J}}{\lambda(x)S} \rightarrow D(x) = \frac{\mathcal{J}\varepsilon(x)}{\lambda(x)S}$$

Т. Гаусса: $4\pi\rho = \operatorname{div}\overline{D} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathcal{J}\varepsilon(x)}{\lambda(x)S}\right)$

$$\left[q = S\int_1^2 \rho\, dx = S\int \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathcal{J}\varepsilon(x)}{\lambda(x)}\right]dx = \mathcal{J}S\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right)\right]$$

конец 6ой лекции