№5 Из урны, содержащей N шаров, среди которых m белые, остальные $(N-m)$ черные. По схеме выбора без возвращения извлекают n шаров. Пусть ξ — число белых шаров в выборке. Найти: $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$ — ?

$$\mathbb{P}(\xi=k)=\frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$$

$$\max\{0,\ n+m-N\}\le k\le \min\{m,n\}$$

Заменим пр-во эл. событий, но начало не поменялось

Пусть N шаров занумеров. Извлекаем эти шары, Эл. событие — порядок извлечения $\Rightarrow |\Omega|=N!$ $\quad \xi_i$ — на i месте был бел. шар

$$\xi=\sum_{i=1}^n \xi_i \qquad \mathbb{E}\xi=\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i$$

$$\mathbb{E}\xi_i=\frac{m(N-1)!}{N!}=\frac{m}{N}\Rightarrow \mathbb{E}\xi=\frac{nm}{N}$$

$$\mathbb{D}\xi=\frac{n\cdot m(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

ПТС

Пусть ξ_i, $i=1,2$ — независимые случ. величины с распределением Пуассона. Найти распределение суммы $\xi_1+\xi_2$, и найти условное распределение ξ_1, если известна сумма $\xi_1+\xi_2$

$$\mathbb{P}(\xi_i=k)=e^{-\lambda_i}\frac{\lambda_i^k}{k!},\ k=0,1,2\ldots$$

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(x)=\mathbb{E}x^{\xi_1+\xi_2}=\mathbb{E}x^{\xi_1}\,\mathbb{E}x^{\xi_2}=\varphi_{\xi_1}(x)\cdot\varphi_{\xi_2}(x)=e^{\lambda_1(x-1)}e^{\lambda_2(x-1)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(x-1)}$$

$$\mathbb{P}(\xi_1+\xi_2=n)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}$$

какие значения может принять ξ_1? ← разные события, которые одно и то же

$$k=0,1,2\ldots\quad \mathbb{P}(\xi_1=k\mid \xi_1+\xi_2=n)=\frac{\mathbb{P}(\xi_1=k,\ \xi_1+\xi_2=n)}{\mathbb{P}(\xi_1+\xi_2=n)}=\frac{\mathbb{P}(\xi_1=k,\ \xi_2=n-k)}{\mathbb{P}(\xi_1+\xi_2=n)}=$$

$$=\frac{\mathbb{P}(\xi_1=k)\cdot\mathbb{P}(\xi_2=n-k)}{\mathbb{P}(\xi_1+\xi_2=k)}=\frac{e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}\,e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{(n-k)}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n\frac{1}{n!}}=C_n^k\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}=C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}-$$

с параметрами n, $p=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ биномиальное распред.

№2 дз. Совместное распределение случайных величин ξ и η определяется равенствами $\mathbb{P}(\xi\eta=0)=1$, $\mathbb{P}(\xi=1)=\mathbb{P}(\xi=-1)=\mathbb{P}(\eta=1)=\mathbb{P}(\eta=-1)=\frac{1}{4}$. Найти $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$

$$\operatorname{cov}=\mathbb{E}\xi\eta-\mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta$$

ξ	1	-1	0
P	1/4	1/4	1/2

событие $A=\{\xi\neq 0\}$

$B=\{\eta\neq 0\}$ $\quad \mathbb{P}(AB)=0$

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(AB)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)\le 1$$

$$\mathbb{P}(A)\ge\frac{1}{2},\quad \mathbb{P}(B)\ge\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)=1\ \Rightarrow\ \mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\frac{1}{2}$$

тогда $\mathbb{P}(\bar A)=\mathbb{P}(\bar B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\cancel{\mathbb{E}\xi\eta}$ $\ \mathbb{E}\xi=\mathbb{E}\eta=0$

$\mathbb{E}\xi\eta=0$ (т.к. $\mathbb{P}(\xi\eta=0)=1$) $\Rightarrow \operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$

№3 задач. Игр. кость подбрасывается n раз. Пусть ξ — число выпавших единиц, η — число выпавших шестёрок. Найти $\rho(\xi,\eta)$

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}\cdot\sqrt{\mathbb{D}\eta}}$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\mathbb{E}\xi\eta-\mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta=\cancel{\mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta}$$

ξ_i — индикатор события, что при i-м бросании появилась единичка

η_i — — // — шестёрка

$$\xi=\sum_{i=1}^n\xi_i \qquad \eta=\sum_{i=1}^n\eta_i$$

$$\mathbb{D}\mathbb{1}_A=\mathbb{E}\mathbb{1}_A^2-(\mathbb{E}\mathbb{1}_A)^2=p-p^2=pq$$

$$\mathbb{E}\xi=\mathbb{E}\eta=\sum_{i=1}^n 1\cdot p=\frac{n}{6},\quad p=\frac{1}{6}$$

сумма дисперсий

$$\mathbb{D}\xi=\mathbb{D}\eta=\frac{5n}{36}$$

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n \xi_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^n \eta_j\Big) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}\xi_i\eta_i}_{0} + \sum_{i\ne j}\mathbb{E}\xi_i\eta_j = \underbrace{\sum_{i\ne j}\mathbb{E}\xi_i\mathbb{E}\eta_j}_{\text{н.з., } n(n-1) \text{ слагаемых}, \ 1/36} = \frac{n(n-1)}{36}$$

$$cov(\xi,\eta) = \frac{n(n-1)}{36} - \frac{n}{6}\cdot\frac{n}{6} = \frac{n^2-n-n^2}{36} = -\frac{n}{36}$$

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{-n/36}{5n/36} = -\frac{1}{5}$$ (<0, т.к. ξ и η — разнонаправлены, потому что если $\xi\uparrow$, то $\eta\downarrow$)

($\frac{1}{5}$, т.к. если выпала 1, то на остальные места распределяется 5 позиций (2,3,4,5,6))

№4. Пусть $\xi_1,\dots,\xi_n,\nu$ — незав. сл. велич.

$\xi_1,\dots,\xi_n$ — одинаково распределены

$\mathbb{E}\xi_k = m_\xi$, $\mathbb{D}\xi_k = \sigma_\xi^2$ $\quad \nu = 1,2,\dots,n \quad \mathbb{E}\nu = m_\nu$, $\mathbb{D}\nu = \sigma_\nu^2$

$S_\nu = \xi_1 + \dots + \xi_\nu$; $cov(S_\nu,\nu)$ — ?

$\mathbb{E}S_\nu = \mathbb{E}\Big(S_\nu \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{\nu=k\}}\Big) =$ $\quad \{\nu=k\} \quad \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{\nu=k\}} \equiv 1$ (в одно попадает) разбиение

$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(S_\nu \mathbb{1}_{\{\nu=k\}}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(S_k \mathbb{1}_{\{\nu=k\}}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}S_k \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{\nu=k\}} = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}S_k \,\mathbb{P}(\nu=k) =$

?

$= m_\xi \sum_{k=1}^n k\,\mathbb{P}(\nu=k) = m_\xi \cdot m_\nu$

$\mathbb{D}S_\nu = \mathbb{E}S_\nu^2 - (\mathbb{E}S_\nu)^2$

$\mathbb{E}S_\nu^2 = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}S_\nu^2 \mathbb{1}_{\{\nu=k\}} = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}S_k^2\,\mathbb{P}(\nu=k) \ominus$

сумма дисперсий н. сл. незав.

$\mathbb{E}S_k^2 = \mathbb{D}S_k + (\mathbb{E}S_k)^2 = k\sigma_\xi^2 + k^2 m_\xi^2$

$\ominus\ \sigma_\xi^2 \underbrace{\sum_{k=1}^n k\,\mathbb{P}(\nu=k)}_{m_\nu} + m_\xi^2 \underbrace{\sum_{k=1}^n k^2\,\mathbb{P}(\nu=k)}_{\mathbb{E}\nu^2 = \sigma_\nu^2 + m_\nu^2} = m_\nu\sigma_\xi^2 + m_\xi^2(\sigma_\nu^2 + m_\nu^2)$

$\mathbb{D}S_\nu = \mathbb{E}S_\nu^2 - (\mathbb{E}S_\nu)^2 = m_\nu\sigma_\xi^2 + m_\xi^2(\sigma_\nu^2 + m_\nu^2) - m_\xi^2 m_\nu^2 = m_\nu\sigma_\xi^2 + m_\xi^2\sigma_\nu^2$

№5. Случ. величина ξ имеет распределение вероятностей

ξ	-1	0	1
p	$1/6$	$1/3$	$1/2$

Найти ковариационную матрицу сл. вектора (ξ, ξ^2, ξ^3)

$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad \mathbb{V} = (v_{ij})$

$v_{ij} = cov(\xi_i,\xi_j) = \mathbb{E}\xi_i\xi_j - \mathbb{E}\xi_i\,\mathbb{E}\xi_j$

$$\mathbb{E}\xi^n = \begin{cases} 1/3 & n\text{-нечет} \\ 2/3 & n\text{-чет} \end{cases}$$

$\mathbb{V}$ сим

$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

$v_{11} = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} 5/9 & 1/3 & 1/9 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

№6. Пусть
$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} 16 & -14 & 12 \\ -14 & 49 & -21 \\ 12 & -21 & 36 \end{pmatrix} \quad (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$
Найти $\rho(\xi_1,\xi_2)$, $\mathbb{D}(\xi_1+\xi_2)$

$16>0$

$16\cdot 49 - 14^2 > 0$

$\det \mathbb{V} > 0$

$$\rho(\xi_1,\xi_2) = \frac{cov(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi_1}\sqrt{\mathbb{D}\xi_2}} = \frac{-14}{\sqrt{16}\sqrt{49}} = \frac{-14}{4\cdot 7} = -\frac{1}{2}$$

$\mathbb{D}(\xi_1+\xi_3) = \mathbb{E}(\xi_1+\xi_3)^2 - \cancel{(\mathbb{E}(\xi_1+\xi_3))}^2 = \mathbb{E}(\xi_1+\xi_3)^2 - (\mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_3))^2 =$

$= \mathbb{E}\xi_1^2 + \mathbb{E}\xi_3^2 + 2\mathbb{E}\xi_1\xi_3 - \big((\mathbb{E}\xi_1)^2 + (\mathbb{E}\xi_3)^2 + 2\mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_3\big) =$

$= \underbrace{\mathbb{D}\xi_1}_{16} + \underbrace{\mathbb{D}\xi_3}_{36} + \underbrace{2\,cov(\xi_1,\xi_3)}_{2\cdot 12} = 16 + 36 + 2\cdot 12 = 76$

№7 x — ? $\exists(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ с ковариационной матрицей

а) $\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ б) $\begin{pmatrix} 1 & x & -x \\ x & 1 & x \\ -x & x & 1 \end{pmatrix}$

$x\in(-1,1)$

а) по критерию Сильвестра: $1>0$, $1-x^2>0$,

$(1-x^2) - x(x-x^2) + x(x^2-x) = 1 - x^2 - x^2 + x^3 + x^3 - x^2 =$

$= 2x^3 - 3x^2 + 1 > 0 \iff (x+1)(1-x) - 2x^2(1-x) =$

$= (1-x)(1+x-2x^2) = (1-x)^2(1+2x) > 0$ $\quad \boxed{x > -\frac{1}{2},\ |x|<1}$

т.о. $x \in (-\frac{1}{2}, 1)$

$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{y} \to \forall y \geq 0$

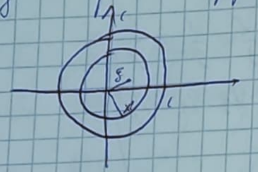
$f(x) \geq 0 \quad x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

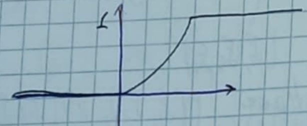
5.04.23 №1. Точку наудачу бросили внутрь един. круга. Найти распределение вероятностей ξ - расстояния от точки до центра круга и $P(\xi \le \frac{1}{2})$ - ?

Рез-тат случ. экспер. - точка круга

функция распределения

$F_\xi(x) = P(\xi \le x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0 \\ x^2, \text{ если } 0 < x < 1 \\ 1, \text{ если } x \ge 1 \end{cases}$ $\quad \frac{\pi x^2}{\pi R^2}$, $R=1$

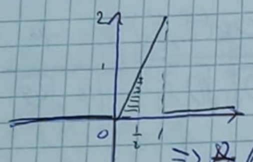




плотность

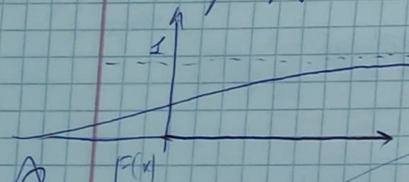
$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)\,dx$

$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = 2x \, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$



$\Rightarrow P(\xi \le \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

№2. Известно, что случ. величина ξ имеет строго возрастающую непрерывную ф-ю распределения $F(x) = F_\xi(x)$. Найти распределение случ. величины ~~$\eta = F(\xi)$~~ $\eta = F(\xi)$



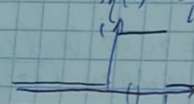
$F_\eta(x) = P(F(\xi) \le x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

в-ту того что $F(\xi) < x$: $P(F(\xi) \le x) = P(\xi \le F^{-1}(x)) =$

$= F_\xi(F^{-1}(x)) = x$

как составили $F_\eta(x)$?

плотность $f_\eta(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$



η - равномерно распредел. на $[0, 1]$

$\xi = F^{-1}(\eta)$

№3 Случ. величины ξ и η независимы. ξ имеет плотность распределения $f(x) = f_\xi(x)$. $P(\eta = 0) = P(\eta = 1) = P(\eta = -1) = \frac{1}{3}$. Найти распределение случ. величины $\zeta = \eta + \xi$

$F_\zeta(x) = P(\xi + \eta \le x) \ominus$

Пишем формулу полной вер. гипотезы H_1, H_2, H_3, $P(H_i) = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$

$\ominus \frac{1}{3}[P(\xi+\eta \le x | \eta = 0) + P(\xi + \eta \le x | \eta = 1) + P(\xi + \eta \le x | \eta = -1)] \ominus$ зависит только от ξ

зависит только от η

$P(\xi + \eta \le x | \eta = k) = \frac{P(\xi + \eta \le x, \eta = k)}{P(\eta = k)} = \frac{P(\xi \le x - k, \eta = k)}{P(\eta = k)} = \frac{P(\xi \le x - k) P(\eta = k)}{P(\eta = k)} =$

$= P(\xi \le x - k)$

непр. распред. $\Rightarrow F_\zeta$ - тоже непрерывн. распред.

$\ominus \frac{1}{3}[F_\xi(x) + F_\xi(x-1) + F_\xi(x+1)]$

$f_\zeta(x) = \frac{1}{3}(f(x) + f(x-1) + f(x+1))$

№4 Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ - независим. одинаково распредел. случ. величины с функцией распределения $F(x)$. Найти ф-ю распределения случ. величин $\eta = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ и $\zeta = \min(\xi_1, \dots, \xi_n)$

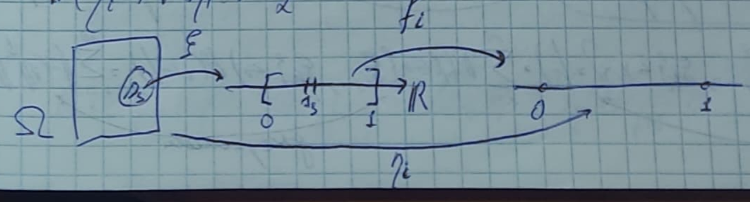
$F_\eta(x) = P(\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \le x) = P(\bigcap_{k=1}^{n} \{\xi_k \le x\}) = \prod_{k=1}^{n} P(\xi_k \le x) = (F(x))^n$

$F_\zeta(x) = P(\min\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \le x) = 1 - P(\min\{\xi_1, \dots, \xi_n\} > x) \overset{= 1 - P(\bigcap_{k=1}^{n}\{\xi_k > x\})}{=} 1 - \prod_{k=1}^{n} \underbrace{P(\xi_k > x)}_{1 - F(x)} =$

$= 1 - (1 - F(x))^n$

№5. Случ. величина ξ имеет равномерное распределение на $[0, 1]$. Найти $f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ $\quad \eta_i = f_i(\xi)$, т.ч. f_i независимы и имели распределение Бернулли с параметром $p = \frac{1}{2}$

$P(\eta_i = 1) = P(\eta_i = 0) = \frac{1}{2}$



Разбиём отрезок $[0,1]$ на 8 частей.

$I_k = \left[\frac{k-1}{8}, \frac{k}{8}\right]$, $k = 1, \ldots, 8$ $\quad \Omega \xrightarrow{\xi} [0,1]$

$\Delta_1 = \bigcup_{k=1}^{4} I_k$, $\Delta_2 = \bigcup_{k=3}^{6} I_k$, $\Delta_3 = \bigcup_{k=1}^{4} I_{2k-1}$

$f_i = \mathbb{1}_{\Delta_i}$; $\quad D_i = \xi^{-1}(\Delta_i)$; $\quad \eta_i = f_i(\xi) = \mathbb{1}_{\Delta_i}(\xi)$ $\quad \mathbb{P}(\eta_i = 1) = \mathbb{P}(D_i) = mes\, \Delta_i = \frac{1}{2}$

$f_1 = \Delta_1$

которые длина каждой Δ_i отрезка $\Downarrow \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

проверим независимость $\sigma(\eta_1), \sigma(\eta_2), \sigma(\eta_3)$

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{\xi} (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

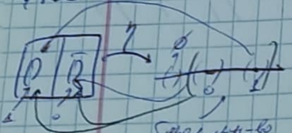
$\sigma(\xi) = \xi^{-1}(\mathcal{B})$

построим $\sigma(\eta_i)$

$\Downarrow$

$\sigma(\eta_i) = \{\varnothing, \Omega, D_i, \overline{D_i}\}$ каждое $\sigma(\eta_i)$ отличается количеством вещ

у нас:



борел. мн-во

$\Downarrow$

надо проверить, что D_1, D_2, D_3 — независимы

т.о. надо проверить попарные и тройное:

Любое пересечение это 2 интервала $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(D_i D_j) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(D_i) \cdot \mathbb{P}(D_j)$

$\mathbb{P}(D_i) = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$, $\mathbb{P}(D_j) = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$

$\mathbb{P}(D_1 D_2 D_3) = \mathbb{P}(D_3) = \frac{1}{8} = \mathbb{P}(D_1) \cdot \mathbb{P}(D_2) \cdot \mathbb{P}(D_3)$, где $\mathbb{P}(D_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(D_2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(D_3) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow D_1, D_2, D_3$ — независимы

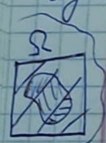
$\Downarrow$

f_i — независимы

№6. Пусть $\nu, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — незав. случ. величины (беск. много)

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ — одинаково распределены с функцией распределения $F(x)$

случ. вел. ν принимает только натур. знач. $\mathbb{N}$; $g(x) = \mathbb{E}\, x^{\nu}$ — ее распределение описывается производящ. функцией. Найти случ. величину $\eta = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_\nu\}$



Начнем искать $F_\eta(x) = \mathbb{P}(\max\{\xi_1, \ldots, \xi_\nu\} \leq x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\max\{\xi_1, \ldots, \xi_\nu\} \leq x, \nu = k) =$

Событие $\nu = k$, $1, 2, \ldots, \mathbb{N}$ — разбиение всего вер. пр-ва.

(по частям посчитаем вероятность)

$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\max\{\xi_1, \ldots, \xi_k\} \leq x, \nu = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\max\{\xi_1, \ldots, \xi_k\} \leq x)\, \mathbb{P}(\nu = k) = \sum_{k=1}^{\infty} F(x)^k\, \mathbb{P}(\nu = k) =$

независим.

уже решали

$= g(F(x))$ т.к. $\left(g(x) = \mathbb{E}\, x^{\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k\, P(\nu = k)\right)$

№7 $D \in \mathcal{F}$

$\Omega \xrightarrow{\xi} \mathbb{R}$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

ξ^2 — случ величина.

(а) ξ — случ. велич.?

(б) $|\xi|$ — случ величина?

(а) $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ $\quad$ $\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in D \\ -1, & \text{если } \omega \notin D \end{cases}$ $\Rightarrow$ контрпример!

При этом ξ^2 — сл. величина

(б) $|\xi|$ $\quad$ $|x| = \sqrt{x^2}$ — борелевская величина $\Rightarrow |\xi|$ — случ. величина

---

(1) $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$ — ?

ξ — имеет показат. распределение

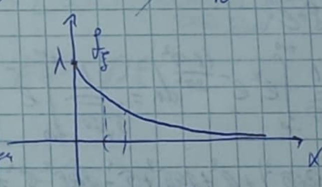
$f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, $\lambda > 0$

$\boxed{\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{E}\,\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_\xi(x)\, dx}$

$\mathbb{E}\xi = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\, dx = -\int_0^{+\infty} x\, de^{-\lambda x} = -x e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$

$\varphi(x) = x$

т.о. $\boxed{\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\lambda}}$



$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$ (уже знаем)

$\mathbb{E}\xi^2 = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}\, dx = -\int_0^{\infty} x^2\, de^{-\lambda x} \overset{\text{по частям}}{=} 2\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\, dx = \frac{2}{\lambda^2}$

т.о. $\mathbb{D}\xi = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \boxed{\mathbb{D}\xi = \frac{1}{\lambda^2}}$

(2) $\xi \in N(a, \sigma^2)$

$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

К станд. норм закону: $\eta \in N(0, 1) \Rightarrow f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

1

$\xi = \sigma\eta + a$ $\qquad \mathbb{E}\xi = \sigma\mathbb{E}\eta + a \qquad \mathbb{D}\xi = \sigma^2\mathbb{D}\eta$

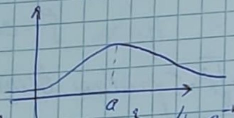
$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\sigma\eta + a \le x) = \mathbb{P}\left(\eta \le \frac{x-a}{\sigma}\right) = F_\eta\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = F'_\eta\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = f_\eta\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

т.к. сложная ф-я

$$\mathbb{E}\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

$$\mathbb{E}\xi = \sigma \cdot 0 + a = \boxed{a = \mathbb{E}\xi}$$



$$\mathbb{D}\eta = \mathbb{E}\eta^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \left\langle \begin{matrix} u = x & dv = e^{-x^2/2}dx \\ du = 2x\,dx & v = \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x \, de^{-x^2/2} = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 1$$

$$\mathbb{D}\xi = \sigma^2 \cdot 1 = \boxed{\sigma^2 = \mathbb{D}\xi}$$

③ $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$, если ξ имеет логнорм. распр.: $\xi > 0$ $\ln\xi \in N(a, \sigma^2)$

$\eta \in N(a, \sigma^2)$, $\quad \xi = e^\eta$

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}e^\eta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2 - 2ax + a^2 - 2\sigma^2 x}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} x^2 - 2x(a+\sigma^2) + a^2 + 2a\sigma^2 + \sigma^4 - 2a\sigma^2 - \sigma^4 = \\ = (x - (a+\sigma^2))^2 - 2a\sigma^2 - \sigma^4 = (x-(a+\sigma^2))^2 - (a+\sigma^2)^2 + a^2 \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow = -\frac{(x-(a+\sigma^2))^2}{2\sigma^2} + \underbrace{\frac{a^2 + 2a\sigma^2 + \sigma^4 - a^2}{2\sigma^2}}_{= a + \frac{\sigma^2}{2}} \Big\rangle =$$

$$= \frac{e^{a+\sigma^2/2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-(a+\sigma^2))^2/2\sigma^2} dx = e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}$$

$=1$ (как интеграл от плотности)

$$\mathbb{E}\xi = e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \underbrace{(\mathbb{E}\xi)^2}_{= e^{2a+\sigma^2}}$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \mathbb{E}e^{2\eta} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \ldots$$

привести к полному квадрату и потом заметить плотность распредел-я

$\Rightarrow$

$$\mathbb{D}\xi = e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

④ Пусть $f_\xi(x) = \gamma \cdot e^{-x^2+6x-2}$. Найти γ, $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$

абс. непрер. расп.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1 \to$ отсюда можно найти γ — но мы по-другому

$f_\xi(x)$ - похоже для нормального распределения $\Rightarrow$ выделим полный квадрат

$$-x^2 + 6x - 9 - 2 + 9 = -(x-3)^2 + 7 \Rightarrow f_\xi(x) = \gamma e^7 \cdot e^{-(x-3)^2}$$

$a = 3$, $\sigma^2 = \frac{1}{2}$ (т.к. $2\sigma^2 = 1$)

сравним с гауссовским распр. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \gamma e^7 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}} \Rightarrow \gamma = \frac{e^{-7}}{\sqrt{\pi}}$$

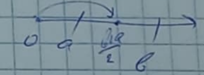
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$

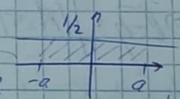
$\mathbb{E}\xi = a = 3$

$\mathbb{D}\xi = \sigma^2 = \frac{1}{2}$ $\to$ см. пред. задачу

⑤ $f_\xi(x)$ имеет расп. на $[-a, a]$. (Если нет симметрии, то нужно сдвинуть, чтобы было)

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2a}\mathbb{1}_{[-a,a]}(x). \quad \mathbb{E}\xi - ?, \ \mathbb{D}\xi$$

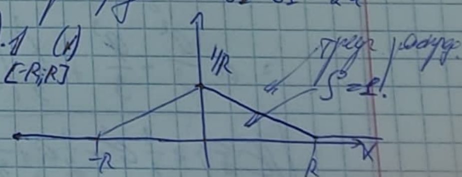




$\mathbb{E}\xi = 0$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x^2 dx = \frac{1}{6a} \cdot x^3\Big|_{-a}^{a} = \frac{1}{3a} \cdot a^3 = \frac{a^2}{3} = \boxed{\mathbb{D}\xi}$$

⑥ Пусть ξ_1 и ξ_2 - независ., одинаково распредел. случ. величины, имеющие равномерное распределение на $[-a, a]$. Найти распределение $\xi = \xi_1 + \xi_2$ и ещё найти $\mathbb{E}\eta$, $\mathbb{D}\eta$, $\leftarrow$ $f_\eta(x) = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{|x|}{R}\right) \cdot \mathbb{1}_{[-R;R]}(x)$



$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 \le x)$$

(ξ_1, ξ_2) - равномерно распред. на $[-a, a] \times [-a, a]$

Случ. величина

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1) Подбрасывают 2 игр. кости. ($|\Omega| = 36$) Пусть ξ_1 – число на I игр. кости, ξ_2 – на II игр. кости.

$\eta_1 = \max\{\xi_1, \xi_2\}$, $\eta_2 = \min\{\xi_1, \xi_2\}$

$\mathbb{E}\eta_1, \mathbb{E}\eta_2 - ?$

$\eta_1 \in [1, 6]$ $\quad k = 1, 2, \dots, 6$

$$\mathbb{P}(\eta_1 = k) = \underbrace{\mathbb{P}(\xi_1 = k, \xi_2 < k)}_{\frac{k-1}{36}} + \underbrace{\mathbb{P}(\xi_1 < k, \xi_2 = k)}_{\frac{k-1}{36}} + \underbrace{\mathbb{P}(\xi_1 = k, \xi_2 = k)}_{\frac{1}{36}} = \frac{2(k-1)}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2k-1}{36}$$

$$\mathbb{E}\eta_1 = \sum_{k=1}^{6} k \frac{2k-1}{36} = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^{6} k(2k-1) = \frac{161}{36}$$

$\mathbb{E}\eta_2 = \frac{91}{36}$

2) n конвертов. В каждый по уголку кладут письма. ξ – число адресатов, получивших своё письмо.

$\xi = 0, 1, \dots, n$

$|\Omega| = n!$ $\qquad \mathbb{E}\xi - ?$ $\quad \mathbb{D}\xi - ?$

ξ_i – индикатор события, что именно i-й адресат получил своё письмо

$\xi_i = \mathbb{1}_{A_i}$ $\qquad \xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\xi_i$$

одно уравнение зафиксировали, остальные перестановки $(n-1)!$

$$\mathbb{E}\xi_i = \mathbb{E}\mathbb{1}_{A_i} = \mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \Rightarrow \mathbb{E}\xi = 1$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = 2 - 1 = 1$$

$(n^2 - n)$ слагаемых

$$\mathbb{E}\xi^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\xi_i^2 + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}(\xi_i \cdot \xi_j)$$

$$\mathbb{E}\xi_i^2 = 1^2 \cdot \frac{(n-1)!}{n!} + 0 \dots = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}\xi_i \xi_j = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}\xi^2 = 1 + 1 = 2$

№3. В N ячеек случайно в соответствии со статистикой Бозе-Эйнштейна размещают n частиц. $\quad C_{n+k-1}^{k-1}$

Пусть ξ – число пустых ячеек

$$\mathbb{E}\xi, \mathbb{D}\xi - ? \quad |\Omega| = C_{N+n-1}^{n}$$

ξ_i – индикатор события, что i-я ячейка оказалась пустой

$$\xi = \sum_{i=1}^{N} \xi_i \qquad \mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\xi_i \qquad \mathbb{E}\xi_i = \frac{C_{(N-1)+n-1}^{n}}{C_{N+n-1}^{n}} = \frac{(N-1)!}{(N+n-1)!} \cdot \frac{(N+n-2)!}{(N-2)!} = \frac{N-1}{N+n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\xi = \frac{N(N-1)}{N+n-1}$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \qquad \mathbb{E}\xi^2 =$$

$$= \frac{n(n-1)N(N-1)}{(N+n-1)^2(N+n-2)}$$

№4. Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью p, $0 < p < 1$ успеха в отдельном испытании.

Пусть ξ – номер испытания, в котором впервые появится успех. Найти $\mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{D}\xi$.

ξ – принимает беск. много

x – переменная между 0 и 1

$k = 1, 2, \dots, \infty$ $\quad \mathbb{P}(\xi = k) = p \cdot q^{k-1}$, $q = 1 - p$ "геометр. распределение"

$$\varphi_\xi(x) = \mathbb{E}x^\xi = \sum_{k=1}^{\infty} p q^{k-1} x^k = px \sum_{k=1}^{\infty} (qx)^{k-1} = px \sum_{k=0}^{\infty} (qx)^k = \frac{px}{1 - qx}$$

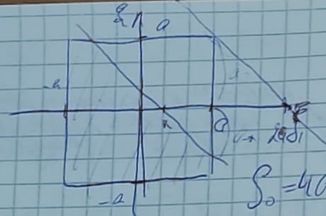
(может начинаться с 0 см. лекции)

$$\boxed{\mathbb{E}\xi = \varphi'_\xi(1), \quad \mathbb{D}\xi = \varphi''_\xi(1) + \varphi'_\xi(1) - (\varphi'_\xi(1))^2}$$

$$\varphi'_\xi(x) = \frac{p(1-qx) + qpx}{(1-qx)^2} = \frac{p}{(1-qx)^2} \Rightarrow \varphi''_\xi(x) = \frac{-2p(1-qx)(-q)}{(1-qx)^4} = \frac{2pq(1-qx)}{(1-qx)^4} = \frac{2pq}{(1-qx)^3} \Rightarrow \varphi''_\xi(1) = \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2}$$

$$\mathbb{E}\xi = \left.\frac{p}{(1-qx)^2}\right|_{x=1} = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{D}\xi = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{\cancel{2p}\ 2 - 2p + p - 1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$



$\xi_1+\xi_2\le x$

$x \ge 2a$

$S_0=4a^2$

$\frac{1}{2}(2a-x)^2$

$P=\frac{(2a-x)^2}{8a^2}$

$P=\frac{4a^2-\frac{1}{2}(2a-x)^2}{4a^2}=$

$=1-\frac{(2a-x)^2}{8a^2}=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^2$

$f'_\xi(x)=f_\xi(x)=\frac{1}{2a}\left(1-\frac{|x|}{2a}\right)\mathbb{1}_{[-2a,2a]}(x) \Rightarrow R=2a,\ a=\frac{R}{2}$

Если $\eta=\eta_1+\eta_2$ на $\left[-\frac{R}{2},\frac{R}{2}\right]$, то докт треуг.

$D\eta=2\cdot\frac{(R/2)^3}{3}=\frac{R^2}{6}$

Перепроверить удачно!

№7 в $(0,1)$ задана т. a. Случ. величина ξ имеет равномерное распределение в $[0,1]$. Пусть η - это расстояние от ξ до a. $cov(\xi,\eta)$ - ?

$cov(\xi,\eta)=\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta-\mathbb{E}\xi\eta$

$cov(\xi,\eta)=\mathbb{E}\xi\eta-\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$

$\mathbb{E}\xi=\frac{1}{2}$

$\eta=|\xi-a| \Rightarrow \mathbb{E}\eta=\int_0^1|x-a|dx=\int_0^a(a-x)dx+\int_a^1(x-a)dx=$

$=a^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}x^2\Big|_a^1-ax\Big|_a^1=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}-a+a^2=a^2-a+\frac{1}{2}$

$\boxed{\mathbb{E}\eta=a^2-a+\frac{1}{2}}$

$\mathbb{E}\xi\eta=\int_0^1\mathbb{E}\xi|\xi-a|=\int_0^1x|x-a|dx=\int_0^a x(a-x)dx+\int_a^1x(x-a)dx=$

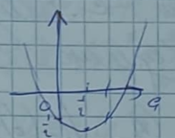
$=a\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3}+\frac{x^3}{3}\Big|_a^1-a\frac{x^2}{2}\Big|_a^1=\frac{a^3}{6}+\frac{1}{3}-\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{2}=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$

$\boxed{\mathbb{E}\xi\eta=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}}$

$cov(\xi,\eta)=\frac{a^3}{3}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-a^2+a-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a^2-a-\frac{1}{2}\right)$

при $a=\frac{1}{2}$ $cov(\xi,\eta)=0$

на $[0,1]$ $a^2-a-\frac{1}{2}\ne 0$



---

① Найти характеристич. ф-ю распределения Лапласа плотность $f_\xi(x)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$, $\lambda>0$? $\int_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(x)=1$

$h_\xi(t)=\mathbb{E}e^{it\xi}$

$h_\xi(t)=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}e^{-\lambda|x|}dx=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos tx\, e^{-\lambda|x|}dx+i\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin tx\, e^{-\lambda|x|}dx \ominus$

$=0$ (т.к. sin-нечёт, $|x|$-чёт, на симм. промежутке 0)

$\ominus\ 2\cdot\frac{\lambda}{2}\int_0^{+\infty}\cos tx\, e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty}\cos tx\, de^{-\lambda x}=-\cos tx\, e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}-t\int_0^{+\infty}\sin tx\, e^{-\lambda x}dx=$

$=1+\frac{t}{\lambda}\int_0^{\infty}\sin tx\, de^{-\lambda x}=1+\frac{t}{\lambda}\sin tx\, e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}-\frac{t^2}{\lambda}\int_0^{\infty}\cos tx\, e^{-\lambda x}dx=1-\frac{t^2}{\lambda^2}h_\xi(t) \ominus$

$\Rightarrow \left(1+\frac{t^2}{\lambda^2}\right)h_\xi(t)=1 \Rightarrow \boxed{h_\xi(t)=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}}$

② Распределение Эрланга $\lambda>0$, $n\in\mathbb{N}$

плотность $f_{\lambda,n}(x)=\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$?

$h_{\lambda,n}(t)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^{\infty}e^{itx}x^{n-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^n}{(it-\lambda)(n-1)!}\int_0^{\infty}x^{n-1}de^{x(it-\lambda)}=$

$=\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(it-\lambda)(n-1)!}e^{-\lambda x}\cdot e^{itx}\Big|_0^{\infty}-\frac{\lambda^n}{(it-\lambda)(n-2)!}\int_0^{\infty}x^{n-2}e^{x(it-\lambda)}dx=$

$=\frac{\lambda}{\lambda-it}h_{\lambda,(n-1)}(t)$

т.о. $h_{\lambda,n}(t)=\frac{\lambda}{\lambda-it}h_{\lambda,(n-1)}(t)=\frac{\lambda^n}{(\lambda-it)^n}$ при $n=1 \Rightarrow h=e^{-\lambda x}$

③ Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с показательным распределением. Найти распределение суммы: $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

$$f_{\xi_k}(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty)}(x), \quad h_{\xi_k}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

$\mathbb{E}\xi\eta = \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta \Rightarrow$ (все ξ незав.)

$$h_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} h_{\xi_k}(t) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - it)^n}$$

④ Пусть $\xi \in N(0,1)$ — стандартное норм. распределение

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{Найти } \mathbb{E}\cos\xi \quad (\mathbb{E}\sin\xi = 0 \text{ т.к. нет. ф-я и } f_\xi(-x) = f_\xi(x))$$

уже знаем, что $h_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \mathbb{E}e^{it\xi} = \mathbb{E}(\cos t\xi + i\sin t\xi)$

$h_\xi(1) = e^{-\frac{1}{2}}$

$h_\xi(1) = e^{-\frac{1}{2}}$

⑤ Найти распределение, которому соответствует характеристическая ф-я $h(t) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cos t + i\frac{2}{5}\sin t$.

простое распр.

ξ	x_1	...	x_n
P	p_1	...	p_n

$\Rightarrow h_\xi(t) = \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n} p_k(\underbrace{\cos x_k t + i\sin x_k t}_{e^{itx_k}})$

ξ	0	1	-1
P	p_0	p_1	p_2

$h_\xi(t) = p_0 + p_1 e^{it} + p_2 e^{-it} = p_0 + p_1(\cos t + i\sin t) + p_2(\cos t - i\sin t)$

$\cos t \cdot (p_1 + p_2) + i\sin t\,(p_1 - p_2)$

т.о. $\begin{cases} p_1 + p_2 = \frac{4}{5} \\ p_1 - p_2 = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow 2p_1 = \frac{6}{5} \Rightarrow p_1 = \frac{3}{5} \Rightarrow p_2 = \frac{1}{5}$

Ответ:

ξ	0	1	-1
P	1/5	3/5	1/5

⑥ $h(t) = \frac{1}{2 - e^{-it}}$ — на производящие

если ξ:

$P(\xi = k) = p_k \quad k = 0, 1, 2$

$f_\xi(x) = \mathbb{E}x^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$

$h_\xi(t) = f_\xi(e^{it})$

$$\frac{1}{2 - x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}x^k \quad P(\xi = k) = \frac{1}{2^{k+1}},\ k = 0, 1, \dots$$

$$h_\xi(t) = \frac{1}{2 - e^{it}}$$

Введём $\eta = -\xi \Rightarrow h_\eta(t) = h_\xi(-t) = \frac{1}{2 - e^{-it}}$

Тогда $P(\eta = -k) = \frac{1}{2^{k+1}} \quad k = 0, 1, 2$

⑦ Найти распределение, которому соотв. $h(t) = \frac{\cos t}{1 - it}$

$\cos t = h_{\xi_1}(t)$

ξ_1	1	-1
P	1/2	1/2

$h_{\xi_2}(t) = \frac{1}{1 - it}$ — показат. распределение при $\lambda = 1$ $\quad f_{\xi_2}(x) = e^{-x}1_{[0,+\infty)}(x)$

$\xi = \xi_1 + \xi_2$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}\left[e^{-(x+1)}1_{[0,+\infty)}(x+1) + e^{-(x-1)}1_{[0,+\infty)}(x-1)\right]$$

⑧ Является ли $h(t) = \cos t^2$ характерист. функцией? (Нужно найти несоответствие характерист. функции)

Допустим $\cos t^2 = h_\xi(t)$

$h'(t) = -2t \cdot \sin t^2$

$h''(t) = -2\sin t^2 - 4t^2\cos t^2$

$h'(0) = i\mathbb{E}\xi = 0$

$h''(0) = i^2\mathbb{E}\xi^2 = 0 = -\mathbb{E}\xi^2 = 0$

$\Rightarrow \mathbb{D}\xi = 0 \Rightarrow P(\xi = c) = 1 \Rightarrow h_\xi(t) = e^{itc}$

~~⑨~~ ξ — сл. вел.

$\forall \varepsilon > 0 \quad$ ~~$P(\xi)$~~ $\quad P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi|}{\varepsilon}$

$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}$

(9) При стрельбе по мишени, представляющей собой круг, радиуса 30см, математическое ожидание отклонения от центра мишени ровно 6см. Найти оценку вероятности поражения мишени при одном выстреле.

Решение: ξ - откл. от центра при выстреле - сл. величина

вер-ть попадания $\mathbb{P}(\xi \le 30) = 1 - \mathbb{P}(\xi > 30)$ = применяем нер-во Маркова

$1-\mathbb{P}(\xi>30) \ge 1 - \frac{6}{30} = \frac{4}{5}$ - с вероятн. не меньше $4/5$ попадаем в цель

(10) С помощью нер-ва Чебышёва оценить вер-ть того, что при 1000 бросаний монеты число выпадений герба окажется в промежутке [450;550]

ξ - число выпад. герба
(распределение биномиальное)

$\xi = \sum_{i=1}^{1000} \xi_i$

? $\mathbb{E}\xi_i = \frac{1}{2}$, $\to \mathbb{E}\xi = 500$

$\mathbb{D}\xi_i = \frac{1}{4}$ $\to \mathbb{D}\xi = 250$

$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \le 50) = 1 - \mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| > 50) \ge 1 - \frac{250}{50^2} = 0{,}9$

(11) Случ. величины ξ_1, ξ_2 - незав. и имеют показат. распределение. Найти распределение их разности

$\xi = \xi_1 - \xi_2$

$f_{\xi_k}(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty)}(x)$

$h_{\xi_k}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$ $\quad h_\xi(t) = h_{\xi_1}(t)\cdot h_{\xi_2}(-t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}\cdot\frac{\lambda}{\lambda + it} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}$ - распределение Лапласа

тогда $f_\xi(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$

(12) Вероятность того, что изделие качественное $= 0{,}9$. Каков должен быть объём партии изделий, чтобы с вероятностью не меньше чем 0,95 можно было утверждать, что отклонение по абсол. величине доли качественных изделий от 0,9 не превысит $\le 0{,}01$

Реш-е: n - объём партии?

ξ - доля качеств.

$\mathbb{E}\xi = n\cdot 0{,}9$

$\mathbb{D}\xi = n\cdot 0{,}09$ $(0{,}1\cdot 0{,}9)$

$\frac{\xi}{n}$ $\quad \mathbb{E}\frac{\xi}{n} = 0{,}9$

$\mathbb{D}\frac{\xi}{n} = \frac{0{,}09}{n}$

$0{,}95 \le \mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi}{n} - 0{,}9\right| \le 0{,}01\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi}{n} - 0{,}9\right| > 0{,}01\right) \ge 1 - \frac{0{,}09}{n \cdot 0{,}0001}$

Ответ: $n \ge 18000$

1. ξ_λ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. 26.04.23

Найти $\lim_{\lambda\to\infty} P\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le x\right) = \Phi(x)$

Р-е: $P(\xi_\lambda = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, \dots$

$\eta_\lambda = \frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ $\quad P(\eta_\lambda \le x) = F_{\eta_\lambda}(x) \to F_\xi(x)$ $\quad h_{\eta_\lambda}(t) \to h_\xi(t)$

$\varphi_{\xi_\lambda}(x) = e^{\lambda(x-1)} \Rightarrow h_{\xi_\lambda}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ $\quad e^{z}-1$

$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$

$h_{\eta_\lambda} = e^{-i\sqrt{\lambda}t} h_{\xi_\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) = \exp\left\{-i\sqrt{\lambda}t + \lambda\left(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}} - 1\right)\right\} = \exp\left\{-i\sqrt{\lambda}t + \lambda\left(\cancel{1} + \frac{it}{\sqrt{\lambda}} + \frac{(it)^2}{2\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\right\} =$

$= \exp\left\{-i\sqrt{\lambda}t + it\sqrt{\lambda} - \frac{t^2}{2} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} e^{-t^2/2} = h_\xi(t) \Rightarrow \xi \in N(0,1)$

тогда $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$

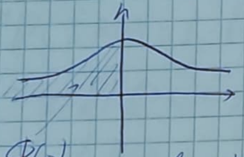
№2 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$ -

ξ_n = пуассон. распр.

$P(\xi_n=k)=e^{-n}\frac{n^k}{k!}$

предыдущая задача

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = P(\xi_n\le n) = P(\xi_n-n\le 0) = P\left(\frac{\xi_n-n}{\sqrt{n}}\le 0\right)\longrightarrow \Phi(0)$$

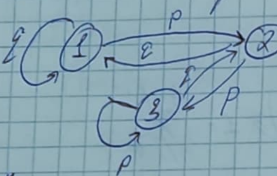


$\Phi(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{2}$

№3 МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

Фазовое пр-во марковской цепи (однородной) представляет собой 3 состояния с вероятн. перехода на графе

$t=0,1,2$ дискр. время



$p_{ij}(t)$ осредн. $q=1-p$

$p_{ij}=p_{ij}(1)$

! Найти матрицу переходного состояния $\Pi_{3\times3}$

$p_{11}=q$

стохастическая матрица

$$\Pi=\begin{pmatrix} q & p & 0\\ q & 0 & p\\ 0 & q & p\end{pmatrix}$$

какая-то степень - стохастич. матрица

! Проверить регулярность марк. цепи

$\Pi(t)=\Pi^t$ ∃ при некотором t_0 Π^{t_0} состоит из положит. $\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)=p_j>0$

пред. состояния $x_j=\sum\limits_{i=1}^{3}x_i p_{ij}$ $\sum\limits_{j=1}^{3}x_j=1$

$$\Pi^2=\begin{pmatrix} q & pq & q^2\\ q^2 & 2pq & p^2\\ q^2 & pq & p\end{pmatrix}$$

$(x_1, x_2, x_3)\cdot\Pi=(x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{cases} qx_1+qx_2+0\cdot x_3=x_1\\ px_1+0\cdot x_2+q\cdot x_3=x_2\\ 0\cdot x_1+px_2+px_3=x_3\end{cases}$$

$x_1+x_2+x_3=1$

$qx_2=px_1$, $x_2=\frac{p}{q}x_1$

$px_2=qx_3 \Rightarrow x_3=\frac{p}{q}x_2=\frac{p^2}{q^2}x_1$

$x_1\left(1+\frac{p}{q}+\frac{p^2}{q^2}\right)=1 \Rightarrow x_1=\frac{q^2}{p^2+pq+q^2}=P_1$

$P_2=\frac{pq}{p^2+pq+q^2}$

$P_3=\dots$

№4. Выяснить какие из матр. определ. марковскую цепь

$\ominus$ $\Pi_1=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\oplus$ $\Pi_2=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\ominus$ $\Pi_3=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$?

$\Pi_2^2=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$ $\Pi_1^2=\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ +

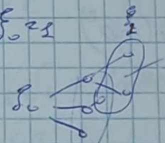
всегда будет

Ветвящиеся процессы

$t=0,1,2\dots$

потомст. сколько-то частиц

$\xi_0=1$



ξ_1 - случ. величина

$P(\xi_1=k)=p_k$, $k=0,1,2\dots$

$f_{\xi_1}(x)=f(x)$

$f_{\xi_n}(x)=f^n(x)=\underbrace{f\circ f\circ\dots\circ f}_{n\text{ раз}}(x)$

q - вер. вырождения процесса

условие вырожд. $\{\xi_1=0\}$

$q=\lim\limits_{n\to\infty}P(\xi_n=0)=\lim\limits_{n\to\infty}f^n(0)$

q - наименьший неотриц. корень ур-я $f(x)=x$

№5 Пусть $\xi_0=1$, $\xi_1, \xi_2, \dots$ - процесс Гальтона-Ватсона

$P(\xi_1=k)=\frac{1}{4}$, $k=0,1,2,3$. ?

$f(x)=f_{\xi_1}(x)=\frac{1}{4}(x^3+x^2+x+1)$ $(=\mathbb{E}x^{\xi_1})$

$q-?$

$x=1$ - корень (всегда?)

$\frac{1}{4}(x^3+x^2+x+1)=x \Rightarrow (x^3-x)+(x^2-x)+(1-x)=0$

$(x-1)((x^2+x)+x-1)=0 \Rightarrow x^2+2x-1=0$

$(x+1)^2=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$ (не выпадает)

$\Downarrow$

$x = \sqrt{2}-1$

№6 процесс Гальтона-Ватсона $P(\xi_1 = k) = (1-p)p^k, \; k = 0,1,2, \dots$

$k=0 \to 1-p$
$k=1 \to (1-p)p$
$k=2 \to (1-p)p^2$

$f(x) = (1-p)\cdot x^0 + (1-p)px + \dots = (1-p)(x^0 + px + \dots p^k x^k) = \frac{1-p}{1-px}$

$f(x) = \frac{1-p}{1-px}, \quad f(x) = x \Rightarrow 1-p = x(1-px)$

$px^2 - x + (1-p) = 0$ $\quad x=1$ будет корнем

$p(x^2-1) - (x-1) = 0$

$(x-1)(p(x+1)-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1-p}{p}$ $\quad 0<x<1$ при $\frac{1}{2}<p<1$

$$q = \begin{cases} 1, & \text{при } 0<p\le\frac{1}{2} \\ \frac{1-p}{p}, & \text{при } \frac{1}{2}<p<1 \end{cases}$$

№7. Процесс Гальтона-Ватсона $P(\xi_1 = 1) = p$, $P(\xi_1 = 0) = 1-p$

Найти распределение вероятностей τ времени вырождения процесса.

$\sum_i p_i x^{\xi_i} = f(x)$ $\quad f(x) = px + (1-p)$

$f^2(x) = f(f(x)) = p(px + (1-p)) + (1-p) = p^2 x + (1-p^2)$

$f^n(x) = p^n x + (1-p^n)$

$\{\tau = n\} = \{\xi_n = 0\}\{\xi_{n-1} \neq 0\}$ (для всех $i<n \mapsto \xi_i \neq 0$)

$P(\tau = n) = P(\xi_n = 0, \xi_{n-1} \neq 0)$

$\{\xi_{n-1} = 0\} \subseteq \{\xi_n = 0\}$

$\{\xi_{n-1} = 0\} \cup \{\xi_{n-1} \neq 0\} = \Omega$

несовместные события

$P(\xi_n = 0) = P(\xi_n = 0, \xi_{n-1} = 0) + P(\tau_n = 0)$

$\Downarrow \qquad P(\xi_{n-1} = 0)$

Тогда $P(\tau_n = 0) = P(\xi_n = 0) - P(\xi_{n-1} = 0) = f^n(0) - f^{n-1}(0) = 1-p^n - (1-p^{n-1}) =$

коэфф. при $x^0 = f^n(0)$

$= p^{n-1}(1-p)$

№8 Число заявок, поступающих на станцию за единицу времени, является случ. величиной, имеющей пуассоновское распределение с параметром λ.

λ - ср. число заявок в един. времени (т.к. λ - это мат. ожидание пуассоновского распред-я)

Оценить, какое число каналов нужно для бесперебойной работы.

$P(\xi_\lambda \le n) \ge 0{,}99$

$P(\xi_\lambda \le n) = P\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le \frac{n-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \approx \Phi\left(\frac{n-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \ge 0{,}99$

$\Phi(3) = 0{,}9987 \Rightarrow \frac{n-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \ge 3 \Rightarrow n \ge 3\sqrt{\lambda} + \lambda$

пусть $\lambda = 100 \Rightarrow n \ge 130$

№9 Применение центр. предельной теоремы

$\xi_1, \dots, \xi_n$ $\quad E\xi_i = m, \; D\xi_i = \sigma^2$

подбираем $m+\ell$ $\quad S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$

$P(S_n \le N(m+\ell)) \ge 0{,}95$ — нужно найти ℓ

по предельной теореме

$P(S_n \le N(m+\ell)) = P(S_n - N(m) \le \ell N) = P\left(\frac{S_n - Nm}{\sigma\sqrt{N}} \le \frac{\ell N}{\sigma\sqrt{N}}\right) =$

$= P\left(\frac{S_n - Nm}{\sigma\sqrt{N}} \le \frac{\ell\sqrt{N}}{\sigma}\right) \ge \Phi(\alpha) = 0{,}95$ (α-квантиль)

$\approx \Phi\left(\frac{\ell\sqrt{N}}{\sigma}\right)$ $\quad \frac{\ell\sqrt{N}}{\sigma} \ge \alpha \Rightarrow \boxed{\ell \ge \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{N}}}$

1) Из урны, содержащей 5 б, ~~...~~ 3 ч. и 4 к шаров, они извлекаются по одному и сразу возвращаются. ξ - число попыток, когда появился б. шар, ν - число —//—, ч. шар.

$\rho(\xi, \nu)$ - ?

ξ_i - индик. б. шара при i-ом

ν_i - —//— ч. шара

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\xi_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{5}{12} = \frac{5n}{12}$$

$$\mathbb{E}\nu = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\nu_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{3}{12} = \frac{n}{4}$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\xi_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\mathbb{E}\xi_i\mathbb{E}\xi_j = \frac{5n}{12} + n(n-1)\left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25n^2+35n}{144}$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{25n^2+35n-25n^2}{144} = \frac{35n}{144}$$

$$\mathbb{E}\nu^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\nu_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\nu_i^2 + \sum_{i\neq j}^{n}\mathbb{E}\nu_i\mathbb{E}\nu_j = \frac{n}{4} + n(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{n^2-n+4n}{16} = \frac{n^2+3n}{16}$$

$$\mathbb{D}\nu = \mathbb{E}\nu^2 - (\mathbb{E}\nu)^2 = \frac{3n}{16}$$

$$\mathbb{E}(\xi,\nu) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\nu_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_i\nu_i) + \sum_{i\neq j}^{n}\mathbb{E}(\xi_i\nu_j) = \sum_{i\neq j}\mathbb{E}(\xi_i)\mathbb{E}(\nu_j) =$$

$$= \sum_{i\neq j}^{n}\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{4} = \frac{n(n-1)5}{48}$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\nu) = \mathbb{E}(\xi,\nu) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\nu = \frac{n(n-1)5}{48} - \frac{n^2 5}{48} = \frac{-5n}{48}$$

$$\rho(\xi,\nu) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\nu)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}\sqrt{\mathbb{D}\nu}} = \frac{-5n/48}{\sqrt{\frac{35n}{144}}\cdot\sqrt{\frac{3n}{16}}} = \frac{-5}{\sqrt{105}}$$

3) Найти вероятность $\mathbb{P}(-2 < \xi+\nu < 1)$, если ξ и ν независимы, $\mathbb{P}(\nu=5) = \mathbb{P}(\nu=-2) = 1/2$, а распред-е вер. ξ описывается плотностью $f_\xi(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x|}{2}\right)\mathbb{1}_{[-2,2]}(x)$

$$\mathbb{P}(-2 < \xi+\nu < 1) = \mathbb{P}(\nu=5)\cdot\mathbb{P}(-2 < \xi+5 < 1) + \mathbb{P}(\nu=-2)\mathbb{P}(-2 < \xi-2 < 1) =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\mathbb{P}(-7 < \xi < -4)}_{0} + \frac{1}{2}\mathbb{P}(0 < \xi < 3) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(0 < \xi < 2) = \frac{1}{2}\int_0^2 f_\xi(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x|}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{4}\left(2 - \frac{4}{4}\right) = 1/4$$

4) Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ являются независимыми, $\mathbb{P}(\tau=k) = 1/n$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а распредел-е вер-ти $\xi_1, \ldots, \xi_n$ определяется плотностью из предыдущей задачи: $\mathbb{E}S_\tau$ - ? $\mathbb{D}S_\tau$ - ?

$$\mathbb{E}\xi_i = \int_{-2}^{2}x f_\xi(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\frac{x}{2}\left(1 - \frac{|x|}{2}\right)dx = \frac{x^2}{4}\Big|_{-2}^{2} + \int_{-2}^{2}\frac{|x|x}{2}\,dx = 0 + \int_0^2\frac{x^2}{2}dx + \int_{-2}^{0} -\frac{x^2}{2}dx = 0$$

$$\mathbb{E}\xi_i^2 = \int_{-2}^{2}x^2 f_\xi(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{|x|}{2}\right)dx = \int_0^2 x^2\left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - \frac{x^4}{8}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = 2/3$$

$$\mathbb{D}\xi_i = \mathbb{E}\xi_i^2 - (\mathbb{E}\xi_i)^2 = 2/3$$

$$\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}\left(S_\tau\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\{\tau=k\}}\right) = \sum_{k=1}^{n}(S_\tau\mathbb{1}_{\{\tau=k\}}) = \sum_{k=1}^{n}(S_k\mathbb{1}_{\{\tau=k\}}) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(S_k)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau=k\}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(S_k)p(\tau=k) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}S_k\frac{1}{n} = 0\cdot\sum_{k=1}^{n}k\frac{1}{n} = 0 \quad \left(\mathbb{E}S_k = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\xi_i = k\mathbb{E}\xi_i = k\cdot 0 = 0\right)$$

$$\mathbb{E}S_\tau^2 = \mathbb{E}\left(S_\tau^2\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\{\tau=k\}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(S_\tau^2\mathbb{1}_{\{\tau=k\}}) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}S_k^2\,\mathbb{P}(\tau=k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}S_k^2\frac{1}{n} \ominus \left(\mathbb{E}S_k^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\xi_i^2 + \sum_{i\neq j}^{k}\underbrace{\mathbb{E}\xi_i\xi_j}_{\mathbb{E}\xi_i\mathbb{E}\xi_j = 0\cdot 0 = 0} = \frac{2}{3}k\right) \ominus$$

$$\ominus \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}k = \frac{2}{3n}\frac{(n+1)n}{2} = \frac{n+1}{3} \Rightarrow \mathbb{D}S_\tau = \frac{n+1}{3}$$

5) Из урны, содержащей 5 б и 5 ч. шаров по схеме выбора без возвращения извлекают 4 шара. ξ белых, ν - черных в выборке. $\operatorname{cov}(\xi,\nu)$ - ?

$$\mathbb{P}(\xi=k) = \frac{C_5^k C_5^{4-k}}{C_{10}^4} \Rightarrow: \ \xi=0 \Rightarrow \nu=4 \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{C_5^0 C_5^4}{C_{10}^4}, \quad \xi=1 \Rightarrow \nu=3 \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{C_5^1 C_5^3}{C_{10}^4}$$

$$\xi=2 \Rightarrow \nu=4 \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{C_5^2 C_5^2}{C_{10}^4}, \quad \xi=3 \Rightarrow \nu=1 \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{C_5^3 C_5^1}{C_{10}^4}, \quad \xi=4 \Rightarrow \nu=0 \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{C_5^4 C_5^0}{C_{10}^4}$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\nu) = \mathbb{E}(\xi,\nu) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\nu = 0\cdot 4\frac{1}{42} + 1\cdot 3\cdot\frac{5}{21} + 2\cdot 2\frac{10}{21} + 3\cdot 1\cdot\frac{5}{21} + 0\cdot 4\frac{1}{42} -$$

$$-\left(4\cdot\frac{1}{42} + 3\frac{5}{21} + 2\frac{10}{21} + 1\cdot\frac{5}{21} + 0\cdot\frac{1}{42}\right)^2 = -2/3$$

6) Из урны, содержащей N шаров с номерами $1, 2, \ldots, N$ по схеме выбора без возвращения извлекают k шаров. Пусть ξ - сумма всех номеров извлеченных шаров. $\mathbb{E}\xi$ - ?

ξ_i - индикатор извлечения i-го шара; $\xi = \sum_{i=1}^{N}\xi_i\cdot i$; $\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{N} i\,\mathbb{E}\xi_i = \frac{k}{N}\frac{N+1}{2}N$

$$\mathbb{P} = \frac{C_{N-1}^{k-1}}{C_N^k} = \frac{k}{N}$$

сумма прогрессии

(5) Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые, одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения
$F_{\xi_i}(x)=\left[1-\left(\frac{4}{x}\right)^5\right]\mathbb{1}_{[4,+\infty)}(x)$, $1\le k\le n$; Найти $\mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^k \xi_i, \sum_{i=1}^n \xi_i\right)$

$$\mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^k \xi_i, \sum_{i=1}^n \xi_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^k\xi_i \sum_{i=1}^n \xi_i\right) - \left[E\left(\sum_{i=1}^k \xi_i\right)\right]\left[E\left(\sum_{i=1}^n\xi_i\right)\right] =$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^k \xi_i \sum_{i=1}^n \xi_i\right) - \sum_{i=1}^k E\xi_i \sum_{i=1}^n E\xi_i =$$

$$E\xi_i = \int_4^{+\infty} x F'(x)\,dx = \left(F'(x)=\frac{5\cdot4^5}{x^6}\right) = \int_4^{+\infty}\frac{5\cdot 4^5}{x^5}dx = \frac{5\cdot4^5}{-4x^4}\Big|_4^{+\infty} = \frac{5\cdot4^5}{4\cdot4^4}=5$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^k \xi_i^2\right) + E\left(\sum_{\substack{i\ne j\\ 1\le i\le k\\ 1\le j\le n}} \xi_i\xi_j\right) - 25kn =$$

$$E\xi_i^2 = \int_4^{+\infty} x^2 \frac{5\cdot4^5}{x^6}dx = \frac{5\cdot4^5}{-3x^3}\Big|_4^{+\infty} = \frac{5\cdot4^5}{3\cdot4^3} = \frac{80}{3}$$

$$= \frac{80}{3}k - k(n-1)25 - 25kn = \frac{80}{3}k - 25k = \frac{5k}{3}$$

(1) Найти распределение, которому соответствует характеристическая ф-я

$$h(t)=\frac{5\cos 2t}{5-it} \qquad h(t)=\frac{5}{5-it}\cdot\cos 2t = h_\xi(t)\cdot h_\eta(t)$$

$h_\xi(t)=\frac{\lambda}{\lambda-it}$
$f_\xi(t)=\lambda e^{-\lambda x}$
$F_\xi(x)=1-\lambda e^{-\lambda x}$
$x>0$

$h_\xi(t)=\frac{5}{5-it}$ — характ. ф-я показат. распред-я

$f_\xi(x)=5e^{-5x}$

$h_\eta(t)=\cos 2t$ — х-я ф-я дискретной случайной величины

$$=\sum_{k=1}^n p_k(\cos x_k t + i\sin x_k t) = (\eta=\pm 2) = p_1(\cos 2t + i\sin 2t) + p_2(\cos 2t - i\sin 2t) \qquad p_1=p_2=1/2$$

η	2	−2
P	1/2	1/2

$$F_{\xi+\eta}(x) = P(\xi+\eta\le x) = P(\eta=2)P(\xi+2\le x) + P(\eta=-2)P(\xi-2\le x) =$$

$$=\frac12\left(P(\xi\le x-2)+P(\xi\le x+2)\right) = \frac12\left(F_\xi(x-2)+F_\xi(x+2)\right)$$

$$f_{\xi+\eta} = \frac12\left(f_\xi(x+2)+f_\xi(x-2)\right)$$

(9) Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с $E\xi=1=a$, $D\xi=9=\sigma^2$. $\mathrm{cov}(\xi^2,\xi)$ — ?

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\xi=\eta\sigma+a \Rightarrow \eta=\frac{\xi-a}{\sigma}, \quad \eta\in N(0,1)$$

$$\mathrm{cov}(\xi^2,\xi)=E(\xi^2\xi)-E\xi^2 E\xi = E\xi^3 - E\xi^2 E\xi =$$

$$E\xi^2 = D\xi+(E\xi)^2 = 9+1=10$$

$$E\xi^3 = E(\eta^3\sigma^3+3\eta^2\sigma^2a+3\eta\sigma a^2+a^3) = \cancel{\sigma^3}\, 3\sigma a^2+a^3$$

$$E\eta^2 = D\eta+(E\eta)^2 = D\eta = 1, \quad E\eta=0$$

$$E\eta^3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^3e^{-x^2/2}dx=0$$

$$= \cancel{\dots}\ 3\sigma a^2+a^3-10=17$$

$$h_{a\xi+b}(t)= e^{itb}h_\xi(at)$$

$$h_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t)=\prod_{k=1}^n h_{\xi_k}(t) \quad (\xi_1,\dots,\xi_n \text{ — н.с.в.})$$

Равномерное

$F_\xi(x)=\frac{x-a}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}$ $\quad E\xi=\frac{a+b}{2}$ $\quad h_\xi(t)=\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$

$f_\xi(x)=\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}$ $\quad D\xi=\frac{(b-a)^2}{12}$

Показ.

$F_\xi(x)=1-e^{-\lambda x}$ $\quad E\xi=1/\lambda$

$f_\xi(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $\quad D\xi=1/\lambda^2$

Норм.

$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$ $\quad E\xi=a$

$f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ $\quad D\xi=\sigma^2$

Коши

$F_\xi(x)=\frac{\mathrm{arctg}\,x}{\pi}+\frac12$ $\quad E\xi=\infty$

$f_\xi(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+1}$ $\quad D\xi=+\infty$

$$\cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x = 2\cos^2 x-1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x+1}{2} = \frac12+\frac12\cos 2x$$

$h(t)=\cos^2 t =$ $\quad p_0+$ $\left(\begin{array}{l} p_1+p_2=\frac12 \\ p_1-p_2=0 \end{array}\right) \Rightarrow \frac14$

2° $F_\xi(x)$ непрерывна справа в каждой точке $x \in \mathbb{R}$

3° $F_\xi(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$, $F_\xi(\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$

! Опр. Будем говорить, что случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует неотрицательная ф-я f_ξ, которая интегрируема на $\mathbb{R}$ и для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,du \to f_\xi \text{ - плотность распределения случ. велич. } \xi$$

В качестве $f_\xi(x)$ может выступать любая неотрицательная функция f на $\mathbb{R}$, которая интегрируема на всей числовой оси и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\mathbb{P}(\{\omega : a < \xi(\omega) < b\}) = \mathbb{P}(\{\omega : a \le \xi(\omega) \le b\}) = \int_a^b f_\xi(t)\,dt$$

$$F'_\xi(x) = f_\xi(x)$$

Равномерное: $f_\xi(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$

Показательное: $f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x),\ \lambda > 0$

Коши: $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2+1}$

Нормальное: $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

$$\mathbb{E}\,\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_\xi(x)\,dx$$ — в случае абсолютно непрерывного распределения

№13 Характеристические функции и их св-ва. Характеристическая ф-я нормального распределения.

! Опр. Характер. функцией случ. величины называется $h_\xi(t) = \mathbb{E}\, e^{it\xi}$

Св-ва

1. $|h_\xi(t)| \le 1$ и $h_\xi(0) = 1$
2. $h_\xi(-t) = \overline{h_\xi(t)}$
3. $h_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\,\mathbb{E}\, e^{ita\xi} = e^{itb} h_\xi(at)$
4. $h_\xi(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ (равномерно непрерывна)
5. Если $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, то $h_{S_n}(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} h_{\xi_k}(t)$
6. Если $\mathbb{E}|\xi|^n < \infty$, то $h_\xi(t)$ имеет производные до n-го порядка включительно и $\mathbb{E}\,\xi^n = \frac{1}{i^n} h_\xi^{(n)}(0)$
7. Если $\exists h_\xi^{(2k)}(0)$, тогда $\exists \mathbb{E}\,\xi^{2k} < \infty$

$h_\xi(t) = g_\xi(e^{it})$

Характеристическая ф-я нормального распределения:

$$h_\xi(t) = e^{iat} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

№14 Неравенства Иенсена, Ляпунова, Маркова и Чебышёва

Неравенство Иенсена. Пусть $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ - выпуклая ф-я и ξ-случайная величина, что $\mathbb{P}(\xi \in (a,b)) = 1$, $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ и $\mathbb{E}|\varphi(\xi)| < \infty$

Тогда выполняется нерав-во $\varphi(\mathbb{E}\,\xi) \le \mathbb{E}\,\varphi(\xi)$

Неравенство Ляпунова. Пусть $1 \le q < r < \infty$ и $\xi \in L_r$. Тогда $\xi \in L_q$ и выполняется нер-во ~~$\|\xi\|_{L_q}$~~ $\|\xi\|_{L_q} \le \|\xi\|_{L_r}$

ξ имеет конечный r-й момент, если $\mathbb{E}|\xi|^r < \infty$

в пр-ве L_r вводится норма $\|\xi\|_{L_r} = (\mathbb{E}|\xi|^r)^{1/r}$

Неравенство Маркова. Пусть ξ-случ. величина, определённая на вероятностном пр-ве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и $\varepsilon > 0$, тогда: $\mathbb{P}(|\xi| \ge \varepsilon) \le \frac{\mathbb{E}|\xi|}{\varepsilon}$ (если $\mathbb{E}|\xi| < \infty$)

Неравенство Чебышёва. Если $\mathbb{E}\,\xi^2 < \infty$, то $\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\,\xi| \ge \varepsilon) \le \frac{\mathbb{D}\,\xi}{\varepsilon^2}$

№15 Свойства математического ожидания и дисперсии для независимых случайных величин

Теорема. Пусть $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}D_i$, $\eta = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \mathbb{1}H_j$ - независимые случайные величины.

Тогда $\mathbb{E}\,\xi\eta = \mathbb{E}\,\xi \cdot \mathbb{E}\,\eta$, $\mathbb{D}(\xi+\eta) = \mathbb{D}\,\xi + \mathbb{D}\,\eta$

Замечание. $\xi_1, \dots, \xi_n$ - простые независимые случайные величины $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) = \mathbb{E}(\xi_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{E}(\xi_n)$; $\mathbb{D}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \mathbb{D}\,\xi_1 + \dots + \mathbb{D}\,\xi_n$

№16 Сходимости почти наверное и по вероятности. Связь между ними. Закон больших чисел Чебышёва

! Опр. Пусть $\xi, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ - случ. величины, определённые на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Будем говорить, что $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$, если $\mathbb{P}(\{\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\Omega) = \xi(\Omega)\}) = 1$

Критерий. Пусть $\xi, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ - случ. величины, определ. на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и для $\varepsilon > 0$ $A_n^\varepsilon = \{\omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \ge \varepsilon\}$ тогда $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi \Leftrightarrow \mathbb{P}(\overline{\lim} A_n^\varepsilon) = 0\ \forall \varepsilon > 0$

№1 Вероятностное пр-во. Свойства вероятности. Теорема о непрерывности вероятностной меры

! Опр Ω — непустое мн-во, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра его подмножеств $\Rightarrow (\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство

! Опр $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пр-во $\Rightarrow$ функция $\mathbb{P}$ (определённая на $\mathcal{F}$) $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет условиям:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (нормированность)
2. Если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ и $A_iA_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ $\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ (аддитивность)

Тогда $\mathbb{P}$ — вероятность.

! Опр $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (Ω — непустое, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ — вер-ть на $(\Omega, \mathcal{F})$) — вероятностное пр-во.

Свойства вероятности:

1. Если $A, B \in \mathcal{F}$ и $A \subseteq B$, то $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $0 \le \mathbb{P}(A) \le 1$
3. $A, B \in \mathcal{F}$, то $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$

Теорема сложения: пусть $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, тогда
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \ldots A_n)$$

Теорема о непрерывности вероятностной меры: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятн. пр-во $\Rightarrow$ $\Rightarrow \forall$ монотонной пос-ти $\{A_n\} \mapsto \mathbb{P}(\lim A_n) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$

$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \ge n} A_k = \overline{\lim_{n \to \infty}} A_n$ — беск. много событий

$A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \ge n} A_k = \underline{\lim_{n \to \infty}} A_n$ — все события A_n за исключением быть может конечного числа

№2 Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса

! Опр Пусть A и B — два события $\in \mathcal{F}$ и $\mathbb{P}(B) > 0$. Тогда под условной вероятностью события A при условии B будем понимать $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$

Теорема умножения: пусть $A_1, \ldots, A_n$ — события $\in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A_1 \ldots A_n) > 0$. Тогда
$\mathbb{P}(A_1 \ldots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)\cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$

Теорема (формула полной вероятности): Пусть $H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{F}$: $H_iH_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\mathbb{P}(H_i) > 0$, $i = \overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) = 1$. Тогда $\forall A \in \mathcal{F}$: $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)$

Теорема (формула Байеса): Пусть события $H_1, \ldots, H_n$ такие, что $H_iH_j = \varnothing$ при $i \neq j$; $\forall i \mapsto \mathbb{P}(H_i) > 0$, $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) = 1$. ~~Тогда $\forall A \in \mathcal{F}$: $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}$~~ событие $A \in \mathcal{F}$ и $\mathbb{P}(A) > 0$, тогда для $k = 1, 2, \ldots, n$ имеют место равенства
$$\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(H_k)\cdot\mathbb{P}(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}$$

$\mathbb{P}(H_k)$ — априорная
$\mathbb{P}(H_k|A)$ — апостериорная

№3 Независимость событий (независимость в совокупности). Лемма Бореля-Кантелли

! Опр $A, B \in \mathcal{F}$ независимы, если $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

! Опр Семейство событий $\{A_i\}_{i \in I}$ называется независимым (в совокупности), если $\forall$ конечного подмножества индексов $I_0 \subset I$
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I_0} A_i\right) = \prod_{i \in I_0} \mathbb{P}(A_i)$$

(Из попарной независимости событий не следует, вообще говоря, независимость в совокупности)

Лемма (Бореля-Кантелли). Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — пос-ть событий. Тогда имеют место следующие утверждения:

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, то $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 0$
2. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ и $\{A_n\}$ — независимы, то $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$

№4 Независимые испытания. Схема Бернулли и полиномиальная схема. Теорема Пуассона

Допустим, что проводится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью $0 < p < 1$ может наступить и с вероятн. $q = 1 - p$ может не наступить некоторое событие A.

Пусть событие $B_n(k)$ заключается в том, что в проведении серии испытаний событие A произошло k раз $k=0,1,\dots,n$. Тогда вероятность этого события вычисляется по формуле:

$$\boxed{P(B_n(k)) = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

Замечание: События $B_n(k)$, $k=0,1,\dots,n$ образуют разбиение. Это подтверждается равенством $\sum_{k=0}^n P(B_n(k)) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$

Формула для $P(B_n(k))$ выражает распределение вероятностей числа успехов в n независимых испытаниях. Это распределение названо биномиальным

Полиномиальная схема является обобщением схемы Бернулли. Здесь результатом каждого испытания может быть один из r взаимоисключающих исходов $A_1,\dots,A_r$ с вероятностями появления $p_1,\dots,p_r$ соответственно, $p_1+\dots+p_r=1$

Подобно событию $B_n(k)$ в схеме Бернулли, в полиномиальной схеме вводятся события $B_n(k_1,\dots,k_r)$, состоящие в том, что в серии из n экспериментов произошло k_1 исходов с номером 1, … k_r исходов с номером r; $k_1+\dots+k_r=n$

Вер-ть такого события $= P(B_n(k_1,\dots,k_r)) = \frac{n!}{k_1!\dots k_r!} p_1^{k_1}\dots p_r^{k_r}$

Теорема (Пуассона) Если $n\to\infty$, $p\to 0$ так, что $np\to\lambda$, $0<\lambda<\infty$, то при всех $k=0,1,\dots,n$ выполняется соотношение $P(B_n(k)) = C_n^k p^k q^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

пуассоновское распределение

№5 Определение и свойства математического ожидания и дисперсии для простых случайных величин

!Опр ξ-дискр. случ. величина, если $\xi(\Omega)$-конечное либо счетное подмножество $\mathbb{R}$ и $\{\omega: \xi(\omega)=x\}\in\mathcal{F}$ $\forall x\in\mathbb{R}$. $\xi(\Omega)$-конечно $\Rightarrow$ ξ-простая случ. величина

Простейшая случайная величина - индикатор события $A\in\mathcal{F}$:

$$1_A(\omega) = \begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}$$

Св-ва ино: $1_\Omega(\omega)=1$; $1_\varnothing(\omega)=0$; $1_{\bar A}(\omega)=1-1_A(\omega)$; $1_{\cap A_i}=\prod 1_{A_i}$

$1_{\cup A_i} = 1-1_{\overline{\cup A_i}} = 1-1_{\cap \bar A_i} = 1-\prod(1-1_{A_i})$

ξ принимает значения $x_1,\dots,x_n$ соответственно на $D_1,\dots,D_n$, т.е. $\mathcal{D}_\xi=\{D_1,\dots,D_n\}$

Тогда $\xi=\sum_{i=1}^n x_i 1_{D_i}$

Мат. ожидание

!Опр Пусть ξ-случ. простая случ. величина, $\xi(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$, $P_\xi(x_i)_{i=1,\dots,n}$ - распределение вероятностей. Тогда под математическим ожиданием будем понимать: $E\xi=\sum_{i=1}^n x_i P(D_i)=\sum_{i=1}^n x_i P(\xi=x_i)$

Свойства мат. ожидания

1. $E 1_A = P(A)$
2. (Линейность) ξ,η-простые случ. величины, $c\in\mathbb{R}$, то $E(c\xi)=cE\xi$, $E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta$
3. (Монотонность) Если $\xi\ge 0$, то $E\xi\ge 0$ и $E\xi=0 \Leftrightarrow P(\xi=0)=1$ → $\xi=0$ почти наверное
4. $|E\xi|\le E|\xi|$
5. (Неравенство Шварца) $(E\xi\eta)^2\le(E\xi^2)(E\eta^2)$

!Опр Дисперсией случ. величины ξ называется число $D\xi=E(\xi-E\xi)^2$

$\sigma_\xi=\sqrt{D\xi}$ - стандартное (среднеквадратичное) отклонение

Св-ва дисперсии:

1. $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$
2. $\forall c\in\mathbb{R}$ и $\forall$ случ. величины $\xi \mapsto D(c\xi)=c^2 D\xi$, $D(\xi+c)=D\xi$
3. Равенство $D\xi=0$ возможно лишь в случае $P(\xi=E\xi)=1$, т.е. случайная величина ξ почти наверное равна постоянной

№6 Независимость простых случайных величин. Ковариация и коэффициент корреляции. Их св-ва

!Опр $\xi_1,\dots,\xi_n$ определённые на $(\Omega,\mathcal{F},P)$ называются независимыми, если независимы алгебры $\mathcal{A}_{\xi_1},\dots,\mathcal{A}_{\xi_n}$

Замечание $\xi_1,\dots,\xi_n$ - простые независимые величины, $\varphi_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, …, $\varphi_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\eta_1=\varphi_1(\xi_1)$, …, $\eta_n=\varphi_n(\xi_n)$ $\Rightarrow$ $\eta_1,\dots,\eta_n$ - независимы

!Опр алгебры $\mathcal{A}_{\xi_1},\dots,\mathcal{A}_{\xi_n}$ - независимы, если $\forall A_1\in\mathcal{A}_1,\dots,A_n\in\mathcal{A}_n \mapsto P(A_1\dots A_n)=\prod_{i=1}^n P(A_i)$

!Опр Пусть ξ и η - две случайные величины, определённые на одном вероятностном пространстве. Под ковариацией этих случайных величин понимается число:

$$cov(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)$$

!Опр Под коэффициентом корреляции понимается число:

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}\cdot\sqrt{\mathbb{D}\eta}}$$

Св-ва ковариации и коэффициента корреляции:

1. $cov(\xi,\eta) = \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$
2. Если ξ и η независимы, то $cov(\xi,\eta)=0$
3. $|\rho(\xi,\eta)| \le 1$ и $|\rho(\xi,\eta)| = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\eta = a\xi + b) = 1$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$

!Опр Случайные величины называются некоррелированными, если $cov(\xi,\eta) = 0$

№7 Целочисленные случайные величины. Производящие функции и их св-ва

!Опр Пусть случайная величина ξ принимает счётное число значений $\mathbb{P}(\xi = x_k) = p_k$, $k=1,2,\ldots,n\ldots$ Будем говорить, что для ξ определено математическое ожидание, если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k$. В этом случае определяется $\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$

!Опр Дискретную случайную величину ξ ~~называют целочисленной случайной величиной~~ принимающую только целые неотрицат. значение, называют целочисленной случайной величиной.

Её распределение вероятностей $\mathbb{P}(\xi = k) = p_k$, $k = 0,1,2,\ldots$ удобно представлять производящей функцией $\varphi_\xi(x) = \mathbb{E}x^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$

Свойства производящих функций:

1. $\varphi_\xi(x)$ непрерывна на $[-1,1]$ и $\varphi_\xi(1) = 1$
2. $\varphi_\xi(x)$ бесконечно дифференц. на $(-1,1)$ и $\frac{1}{k!}\varphi_\xi^{(k)}(0) = p_k$
3. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - независимые целочисленные случайные величины и $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, тогда производящая ф-я $\varphi_{S_n} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(x)$

№8 Определения σ-алгебры, лямбда-системы, π-системы и теорема о связи между ними.

!Определение Пусть $\mathcal{F}$ - класс подмножеств Ω, для которого выполнены следующие условия:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Если $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$ $\quad \Rightarrow \mathcal{F}$ - σ-алгебра
3. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

для любой посл-ти $\{A_i\} \subset \mathcal{F}$

!Опр Класс $\mathcal{J}$ подмножеств Ω называется π-системой, если из условия $A, B \in \mathcal{J}$ следует, что $AB \in \mathcal{J}$ (замкнут от операции пересечения)

!Опр Класс $\mathcal{G}$ подмножеств Ω называется λ-системой, если выполняются следующие условия:

1) $\Omega \in \mathcal{G}$
2) Если $A, B \in \mathcal{G}$ и $A \subseteq B$, то $B \setminus A \in \mathcal{G}$
3) Если посл-ть множеств $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{G}$ монотонно возрастает, то её предел $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$

Очевидно, что любая σ-алгебра подмножеств Ω одновременно является π-системой и λ-системой.

Теорема Класс $\mathcal{G}$ подмножеств Ω является σ-алгеброй $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$ одновременно является π-системой и λ-системой

№9 Понятие минимальной σ-алгебры. Борелевская σ-алгебра и порождающие её классы множеств.

!Опр Пусть $\mathcal{K}$ - некоторый класс подмножеств Ω. Тогда под $\sigma(\mathcal{K})$ будем понимать σ-алгебру подмножеств Ω, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathcal{K} \subset \sigma(\mathcal{K})$
2) Если $\mathcal{G}$ - σ-алгебра подмножеств Ω и $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$, то $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{G}$

Тогда $\sigma(\mathcal{K})$ - минимальная σ-алгебра

Опр. Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, а $\mathcal{T}$ — класс всех открытых множеств. Тогда $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ называется борелевской σ-алгеброй подмножеств $\mathbb{R}$

Опр. Мн-ва $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ называются борелевскими мн-ми

$\mathcal{B}$ содержит все открытые множества, все замкнутые множества и все их счётные пересечения и объединения

Замечание. Если $\mathcal{T}$ — класс полуинтервалов вида $(-\infty, x]$ (или $(-\infty, x)$, $[x, +\infty)$, $(x, +\infty)$), где $x \in \mathbb{R}$, то $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}$

Опр. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пр-во. Отображение $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если $\forall B \in \mathcal{B} \mapsto \xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$

№10 Теорема единственности продолжения меры с π-системы. Лемма Дынкина. Условие независимости σ-алгебр, порождённых π-системами.

Теорема (Единств. продолжения меры с π-системы) Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, а $\mathcal{T}$ — некоторая π-система подмножеств Ω, для которой $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}$. Допустим также, что на $(\Omega, \mathcal{F})$ определены две меры μ и ν, удовлетворяющие условиям $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ и $\mu(T) = \nu(T)$ для всех $T \in \mathcal{T}$. Тогда ~~F~~ μ и ν совпадают на $\mathcal{F}$, т.е. $\mu(A) = \nu(A)$ для всех $A \in \mathcal{F}$.

(**Опр.** $(\Omega, \mathcal{F})$ $\mu: \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ и $\mu(\Omega) < \infty \Rightarrow \mu$-мера)

Лемма Дынкина Пусть класс $\mathcal{T}$ подмножеств Ω является π-системой. Тогда $\delta(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{T})$

Теорема Пусть классы $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ подмножеств Ω являются π-системами и независимы. Тогда независимы также порождённые ими σ-алгебры $\sigma(\mathcal{T}_1), \dots, \sigma(\mathcal{T}_n)$

№11 Теорема об аппроксимации неотрицательной случайной величины. Общее определение математического ожидания

Теорема (Аппроксимационная) Пусть $\xi \geq 0$ — случайная величина, определённая на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Тогда существует последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ простых неотрицательных случайных величин такое, что $\xi_n \uparrow \xi$ (монотонно возрастая, стремятся к ξ) и $\sigma(\xi_n) \subset \sigma(\xi)$

Опр. Пусть ξ — неотриц. случайная величина и $\xi_n \uparrow \xi$, где $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность простых неотрицательных случайных величин. Тогда математическое ожидание ξ определяется как: $\mathbb{E}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n$, если этот предел конечен

Замечание Для произвольной случайной величины ξ рассматриваются две неотрицат. случайные величины:

$$\xi^+ = \max\{\xi, 0\} \quad \text{и} \quad \xi^- = \max\{-\xi, 0\}$$

В случае, когда ξ^+ и ξ^- — конечны, будем говорить, что ξ имеет конечное мат. ожидание $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^-$

В действительности, определение математич. ожидания является интегралом Лебега от функции $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ по мере $\mathbb{P}$, т.е.:

$$\boxed{\mathbb{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega \xi(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)}$$ (т.е. интегрир. идёт по всем событиям $\omega \in \Omega$)

С каждой случайной величиной ξ ассоциируется новое вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_\xi)$, и мы ~~должны~~ можем перенести все вычисления на него. То есть мы совершаем переход $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_\xi)$.

Тогда $$\boxed{\mathbb{E}\xi = \int_\mathbb{R} x\,d\mathbb{P}_\xi(x)}$$

Если $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — борелевская ф-я, то

$$\boxed{\mathbb{E}\varphi(\xi) = \int_\mathbb{R} \varphi(x)\,d\mathbb{P}_\xi(x)}$$

№12 Функция распределения и плотность. Вычисление математического ожидания и дисперсии для абсолютно непрерывных распределений

Опр. Пусть ξ — случайная величина, определённая на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Функция $F_\xi(x) = \mathbb{P}_\xi((-\infty, x]) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\})$, $x \in \mathbb{R}$ называется функцией распределения случайной величины ξ

Характеристические св-ва функции распределения

1° $F_\xi(x)$ является неубывающей функцией на $\mathbb{R}$

!Опр. Будем говорить, что посл-ть случ. величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по вероятности к случайной величине ξ, и писать $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, если для $\forall \varepsilon > 0$ выполняется предельное соотношение: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 0$

Замечание. Поскольку для любой посл-ти множеств выполняется нер-во $\mathbb{P}(\overline{\lim_n} A_n) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{P}(A_n)$, то из сход-ти последов. случайных величин почти наверное следует её сходимость по вероятности.

Теорема. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по вероятности к случайной величине ξ $\Leftrightarrow$ всякая её подпоследовательность содержит сходящуюся почти наверное подпоследовательность.

Теорема (Закон больших чисел Чебышёва). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, для которых $\mathbb{D}\xi_n \leq C$, $n = 1, 2, \ldots$ при некотором $C > 0$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = 0, \text{ где } S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$$

№17 Виды сходимости последовательностей случайных величин. Усиленный закон больших чисел

Виды: - почти наверное; - по вероятности;

- в среднем порядка r => **!Опр.** Пусть $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n \ldots$ - имеют конечные r-е моменты. Будем говорить, что ~~к ξ в среднем порядка r~~ последовательность $(\xi_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к ξ в среднем порядка r и писать $\xi_n \xrightarrow{L_r} \xi$, если $\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

- по распределению

Теорема (Усиленный з-н больших чисел) Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - посл-ть независимых, одинаково распределённых случайных величин с $\mathbb{E}\xi_k = a$, $\mathbb{D}\xi_n = \sigma^2$. Тогда $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{п.н.} a$, при $n \to \infty$, где $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$

№18 Сходимость по распределению. Центральная предельная теорема

!Опр. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ - функции распределения. Будем говорить, что $F_n \Rightarrow F$ (слабо сходится), если $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ в каждой точке непрерывности функции F.

!Опр. Будем говорить, что $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ (сходится по распределению), если $F_{\xi_n} \Rightarrow F_\xi$

Теорема (Центральная предельная теорема) Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ - последовательность независимых, одинаково распределённых случайных величин с $\mathbb{E}\xi_k = a$, $\mathbb{D}\xi_k = \sigma^2$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$ имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du = \Phi(x)$$

№19 Цепи Маркова и уравнение Колмогорова-Чепмена. Теорема о предельных вероятностях

$t = 1, 2, \ldots, T$ $E = \{e_1, \ldots, e_r\}$ - фазовое пространство

!Опр. Цепи Маркова - системы, у которых вероятности переходов из одного состояния в другое в данный момент времени не зависят от того, как вела себя система в предыдущие моменты времени.

$\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_T)$, где $\omega_t = i$, если система в момент времени t находилась в состоянии e_i

$$\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(\omega_0 = i_0, \omega_1 = i_1, \ldots, \omega_T = i_T) = \mathbb{P}(\omega_0 = i_0)\mathbb{P}(\omega_1 = i_1 | \omega_0 = i_0) \ldots \cdot \mathbb{P}(\omega_T = i_T | \omega_0 = i_0, \ldots, \omega_{T-1} = i_{T-1})$$

Условие марковости (независимость от прошлого): для любых двух моментов времени $s < t$

$$\mathbb{P}(\omega_t = j | \omega_0 = i_0, \ldots, \omega_{s-1} = i_{s-1}, \omega_s = i) = \mathbb{P}(\omega_t = j | \omega_s = i)$$

Однородность: $\mathbb{P}(\omega_{s+t} = j | \omega_s = i) = \mathbb{P}(\omega_t = j | \omega_0 = i) = p_{ij}(t)$

(т.е. условные вероятности перехода из состояния i в состояние j за время t не зависят от того, в какой момент времени s она находилась в состоянии i)

Св-ва вероятностей $p_{ij}(t)$ $\Pi(t) = (p_{ij}(t))$

1. $p_{ij}(t) \geq 0$
2. $\sum_{j=1}^{r} p_{ij}(t) = 1$ (матрица стохастическая) $p_{ij}(1) = p_{ij}$ - переходные вероятности
3. $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ $\Pi(1) = \Pi$ - матрица переход. вероят.

$\bar{p}(t)=(p_1(t)\, p_2(t) \dots p_r(t))$

Уравнение Колмогорова–Чепмена

p_{ij} из i в j

$$\forall s, t \geq 0 \quad p_{ij}(s+t)=\sum_{k=1}^{r} p_{ik}(s)\cdot p_{kj}(t)$$

в матричном виде $\Pi(s+t)=\Pi(s)\Pi(t)$

$\Pi(1)=\Pi; \ \Pi(t)=\Pi^t$

$$\bar{p}(t)=(p_1(t)\, p_2(t) \dots p_r(t)) \Rightarrow \bar{p}(t)=\bar{p}(0)\,\Pi(t)=\bar{p}(0)\,\Pi^t$$

Теорема (о предельных вероятностях) Пусть при некотором $t_0>0$ все элементы матрицы $\Pi^{t_0}=(p_{ij}(t_0))$ являются строго положительными. Тогда $\forall j=1,2,\dots,r$ существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)=p_j$, который не зависит от i и $p_1,\dots,p_r$ — единственные решения СЛУ

$$\sum_{k=1}^{r} x_k p_{kj}=x_j \qquad \sum_{k=1}^{r} x_k=1$$

№20 Вероятность вырождения процесса Гальтона–Ватсона и её выражение через производящую функцию. ~~функция~~ Классификация ветвящихся процессов.

A — процесс выродился; $A_n=\{\xi_n=0\}$ $A_n \uparrow A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}(A)=q$ — вер-ть вырождения процесса

Теорема Вероятность q вырождения процесса Гальтона–Ватсона с производящей функцией $f(x)$ определяется равенством

$$q=\lim_{n\to\infty} f^n(0)$$

и является наименьшим неотрицательным корнем ур-я $f(x)=x$

Классификация ветвящихся процессов

$\mathbb{E}(\xi_1)=m$ — среднее число потомков от одной частицы в следующем поколении.

Процесс называется:

- докритическим, если $m<1$
- критическим, если $m=1$
- надкритическим, если $m>1$ (или $m=\infty$)

Теорема Пусть $\xi_0=1$, $\xi_1, \xi_2, \dots$ — процесс Гальтона–Ватсона

Тогда, если процесс докритический или критический, то вероятность вырождения $q=1$. Если процесс надкритический, то $0\leq q<1$