Билеты к устному экзамену
Введение в математический анализ

1 БИЛЕТ 1

1.1 Действительные числа

Определение: Сечением α множества $\mathbb{Q}$ называется такое разбиение $\mathbb{Q}$ на два непустых множества A и A' ($A \cap A' = \varnothing$, $A \cup A' = \mathbb{Q}$), что $\forall x \in A$, $\forall x' \in A' \hookrightarrow x < x'$; множество A называется нижним классом сечения, множество A' - верхним классом сечения; применяется обозначение $\alpha = A|A'$.

Существуют сечения трёх типов:
1) В A есть наибольший элемент, в A' нет наименьшего элемента.
2) В A нет наибольшего элемента, в A' есть наименьший элемент.
3) В A нет наибольшего элемента, в A' нет наименьшего элемента.

Сечений 4-го типа, когда в нижнем классе есть наибольший элемент, а в верхнем - наименьший, нет.
□ Пусть $\exists r_1 \in A$, $\exists r_2 \in A'$ - соответственно наибольший и наименьший элементы в этих классах. Рассмотрим $r_0 = \frac{r_1+r_2}{2} \in \mathbb{Q}$. Так как $r_0 > r_1$, то $r_0 \notin A$; так как $r_0 < r_2$, то $r_0 \notin A' \Rightarrow r_0 \notin \mathbb{Q}$ - противоречие. ■

Определение: иррациональным числом называется сечение III типа.
Определение: действительным числом называется любое сечение II или III типа (в нижнем классе нет наибольшего элемента).

Определение: два действительных числа $\alpha = A|A'$ и $\beta = B|B'$ называют равными, если $A = B$.
Определение: рассмотрим два действительных числа $\alpha = A|A'$ и $\beta = B|B'$; говорят, что $\alpha < \beta$, если $A \subset B$, $\alpha > \beta$, если $A \supset B$ (включения считаются строгими).

Теорема: если действительные числа $\alpha \neq \beta$, то либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha > \beta$.
□ Пусть $\alpha = A|A'$ и $\beta = B|B'$; $\alpha \neq \beta \Rightarrow A \neq B$. Нужно доказать, что либо $A \subset B$, либо $A \supset B$.
Если не выполнено $A \subset B$, то $\exists r_1 \in \mathbb{Q} : r_1 \in A, r_1 \notin B$. Если не выполнено $A \supset B$, то $\exists r_2 \in \mathbb{Q} : r_2 \in B, r_2 \notin A$.
$r_1 \notin B \Rightarrow r_1 \in B'$, $r_2 \notin A \Rightarrow r_2 \in A'$
$r_1 \in A$, $r_2 \in A' \Rightarrow r_1 < r_2$; $r_1 \in B'$, $r_2 \in B \Rightarrow r_1 > r_2$ - противоречие. ■

Теорема (плотность рациональных чисел в $\mathbb{R}$): $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > \beta \hookrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : \alpha > r > \beta$.
□ $\alpha > \beta \Rightarrow A \supset B \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : r \in A, r \notin B$. У действительных чисел в нижнем классе нет наибольшего элемента $\Rightarrow \alpha > r \geq \beta$
Если $\beta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, то $r \neq \beta \Rightarrow \alpha > r > \beta$; всё доказано. Если $\beta \in \mathbb{Q}$, то $r \in A \Rightarrow$ в качестве можно рассмотреть число из A, которое больше β (оно существует так как включение $A \supset B$ нестрогое). ■

Теорема (принцип Архимеда): $\forall \alpha \in \mathbb{R} \hookrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > \alpha$
□ Пусть $\alpha = A|A'$. Любое $r \in A'$ таково, что $r > \alpha$. Выберем $n \in \mathbb{N} : n > r$, тогда $n > \alpha$. ■

Лемма: Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists s_1, s_2 \in \mathbb{Q} : s_1 \leq \alpha \leq s_2, s_1 \leq \beta \leq s_2, s_2 - s_1 < \varepsilon$, то $\alpha = \beta$.
□ Пусть $\alpha \neq \beta$, для определённости $\alpha > \beta$. По плотности рациональных чисел в $\mathbb{R}$: $\exists r_1, r_2 \in \mathbb{Q} : \alpha > r_1 > r_2 > \beta$. Рассмотрим $\varepsilon = r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$ и соответствующие ему по условию $s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$.

$s_1 \le \alpha \le s_2, s_1 \le \beta \le s_2 \Rightarrow s_2 > r_2 > r_1 > s_1 \Rightarrow s_2 - s_1 > r_2 - r_1$, что противоречит тому, что $s_2 - s_1 < \varepsilon$. ■

Определение: Сечением множества $\mathbb{R}$ называется такое разбиение $\mathbb{R}$ на два непустых множества $\tilde{A}$ и $\tilde{A}'$ ($\tilde{A} \cap \tilde{A}' = \varnothing$, $\tilde{A} \cup \tilde{A}' = \mathbb{R}$), что $\forall x \in \tilde{A}$, $\forall x' \in \tilde{A}' \hookrightarrow x < x'$.

Теорема Дедекинда: $\forall \tilde{A}|\tilde{A}'$ во множестве $\mathbb{R}$ $\exists \beta \in \mathbb{R}$, которое является либо наибольшим в $\tilde{A}$, либо наименьшим в $\tilde{A}'$.
□ Пусть $A = \tilde{A} \cap \mathbb{Q}$, $A' = \tilde{A}' \cap \mathbb{Q}$, тогда $A|A'$ - сечение в $\mathbb{Q}$, определяющее некоторое $\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \beta \in \tilde{A}$, либо $\beta \in \tilde{A}'$. Пусть для определённости $\beta \in \tilde{A}$. Покажем, что β - наибольший элемент в A (если $\beta \in \tilde{A}'$, доказательство аналогично).
Пусть β не является наибольшим элементом в A, тогда $\exists \gamma > \beta : \gamma \in \tilde{A}$. По теореме о плотности рациональных чисел в $\mathbb{R}$: $\exists r \in \mathbb{Q} : \gamma > r > \beta$. Так как $\gamma \in \tilde{A}$ и $\beta \in \tilde{A}$, то $r \in \tilde{A}$. Далее, так как $r \in \tilde{A}$ и $r \in \mathbb{Q}$, то $r \in A$.
$\beta = A|A'$, $r \in A \Rightarrow \beta > r$, но $\beta < r$ - противоречие. ■

1.2 Точные верхняя и нижняя грани

Определение: множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \hookrightarrow x \le M$ (M - верхняя граница X).
Определение: множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \hookrightarrow x \ge m$ (m - нижняя граница X).
Определение: множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Определение: $\alpha \in \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$ ($\alpha = \sup X$), если

$$(\forall x \in X \hookrightarrow x \le \alpha) \wedge (\forall \alpha' < \alpha \hookrightarrow \exists x \in X : x > \alpha')$$

Определение: $\beta \in \mathbb{R}$ называется точной нижней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$ ($\beta = \inf X$), если

$$(\forall x \in X \hookrightarrow x \ge \beta) \wedge (\forall \beta' > \beta \hookrightarrow \exists x \in X : x < \beta')$$

Лемма: Если $X \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший элемент α, то $\alpha = \sup X$. Если $X \subset \mathbb{R}$ имеет наименьший элемент β, то $\beta = \inf X$.
□ Докажем для наибольшего элемента, для наименьшего доказательство аналогично.
α - наибольший элемент $X \Rightarrow \forall x \in X \hookrightarrow x \le \alpha$. С другой стороны, $\forall \alpha' < \alpha \hookrightarrow \exists x \in X, x = \alpha : x > \alpha'$. Доказано, что $\alpha = \sup X$. ■

Теорема о точной верхней (нижней) грани: $\forall X \subset \mathbb{R}, X \ne \varnothing$, ограниченного сверху, существует и единственна точная верхняя грань. $\forall X \subset \mathbb{R}, X \ne \varnothing$, ограниченного снизу, существует и единственна точная нижняя грань.
□ Докажем для точной верхней грани, для точной нижней грани доказательство аналогично.
Пусть сначала ограниченное сверху множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший элемент, тогда по лемме этот элемент является точной верхней гранью.
Пусть теперь в X нет наибольшего элемента. Рассмотрим множества: $\tilde{A}'$ - все верхние границы X (они существуют в силу ограниченности X), $\tilde{A}$ - все остальные числа
Ясно, что $\tilde{A} \cap \tilde{A}' = \varnothing$, $\tilde{A} \cup \tilde{A}' = \mathbb{R}$, $\forall x \in \tilde{A}, \forall x' \in \tilde{A}' \hookrightarrow x < x'$ (по построению $x \ne x'$; если $x > x'$, то x больше некоторой верхней границы $\Rightarrow x$ - верхняя граница, но это не так) $\Rightarrow \tilde{A}|\tilde{A}'$ - сечение в $\mathbb{R}$. Также $X \subset \tilde{A}$, так как если $\exists x \in X : x \in \tilde{A}'$, то x - верхняя граница X, а значит x - наибольший элемент в X, но рассматривается случай, когда такого элемента нет.
По теореме Дедекинда $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ - либо наибольшее в $\tilde{A}$, либо наименьшее в $\tilde{A}'$. Если α - наибольшее в $\tilde{A}$, то так как $X \subset \tilde{A}$, то α - верхняя граница $X \Rightarrow \alpha \in \tilde{A}'$ - противоречие. Значит, α - наименьшее в $\tilde{A}'$.
Итак, α - верхняя граница, и никакое меньшее число верхней границей не является $\Rightarrow \alpha = \sup X$.
Докажем теперь единственность точной верхней грани. Пусть $\alpha = \sup X$ и $\beta = \sup X$. Для определённости $\alpha < \beta$. Так как $\beta = \sup X$, $\alpha < \beta$, то $\exists x \in X : x > \alpha$. Это противоречит тому, что $\alpha = \sup X$. ■

Определение: если множество $X \subset \mathbb{R}$ неограничено сверху, то $\sup X = +\infty$; если множество $X \subset \mathbb{R}$ неограничено снизу, то $\inf X = -\infty$.

1.3 Счётность множества рациональных чисел, несчётность множества действительных чисел

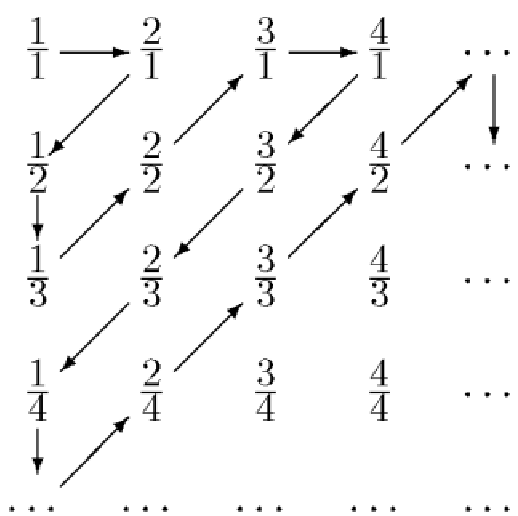
Определение: два множества A и B называются эквивалентными (равномощными), если между ними можно установить биекцию.
Определение: множество называется счётным, если оно эквивалентно множеству $\mathbb{N}$.

Лемма: любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.
□ Выберем $x_1 \in A$, где A - бесконечное множество. Так как множество бесконечно, можно выбрать x_2 среди оставшихся элементов, x_3 среди оставшихся и т.д. Процесс никогда не закончится в силу бесконечности множества. Построено счётное множество $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subseteq A$. ■

Лемма: любое бесконечное подмножество счётного множества счётно.
□ Пусть $B \subset A$, где A - счётное множество, B - бесконечное множество. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Выберем первый из этих элементов, принадлежащий B: $b_1 = a_{n_1}$. Из оставшихся номеров выберем первый $n_2 : a_{n_2} \in B$, тогда $b_2 = a_{n_2}$ $(n_2 > n_1)$. Из оставшихся номеров выберем первый $n_3 : a_{n_n} \in B$, тогда $b_3 = a_{n_3}$ $(n_3 > n_2 > n_1)$, и т.д. Каждый элемент B имеется среди a_n, поэтому через конечное число шагов он будет обозначен $b_k = a_{n_k}$. Таким образом, все элементы B занумерованы, и B - счётно. ■

Лемма: 1) объединение конечного и счётного множеств счётно; 2) объединение двух счётных множеств счётно.
□ 1) Пусть A счётно, B конечно. Если $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, $B \backslash A = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$ - также конечно (может быть и пусто). Тогда $A \cup B = A \cup (B \backslash A) = \{b_1, b_2, ..., b_k, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ - счётное множество.
2) Пусть A и B счётны. Если $B \backslash A$ конечно, то доказательство проходит, как в первом случае. Если $B \backslash A$ бесконечно, то оно счётно. Тогда $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$ и $A \cup B = A \cup (B \backslash A) = \{a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ...\}$ - счётное множество. ■

Теорема: множество $\mathbb{Q}$ счётно.
□ $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$, где $\mathbb{Q}^-$ - множество отрицательных рациональных чисел, $\mathbb{Q}^+$ - множество положительных рациональных чисел. Достаточно доказать, что $\mathbb{Q}^+$ счётно, так как в таком случае $\mathbb{Q}^- \sim \mathbb{Q}^+$ также счётно $\Rightarrow \mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+$ счётно как объединение двух счётных множеств. Таким образом, множество $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+) \cup \{0\}$ счётно как объединение счётного и конечного множеств.
Занумеруем множество положительных обыкновенных дробей следующим образом:



$\mathbb{Q}^+$ - бесконечное подмножество множества положительных обыкновенных дробей, которое счётно $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{Q}^+$ счётно. ■

2 БИЛЕТ 2

2.1 Теорема Кантора о вложенных отрезках

Теорема Кантора о вложенных отрезках: Если $[a_1; b_1] \subset [a_2; b_2] \subset ... \subset [a_n; b_n] \subset ...$ - бесконечная последовательность вложенных отрезков, то $\exists \gamma : \forall n \hookrightarrow a_n \leq \gamma \leq b_n$; если при этом $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, то такая точка γ единственна, и $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf b_n$.
□ Так как $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1$, то $\forall n, m \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq b_m$.
Рассмотрим множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ и $B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$. $\forall m \in \mathbb{N}$ множество A ограничено сверху числом $b_m \Rightarrow \exists \gamma_1 = \sup A = \sup a_n$. Так как $\forall m\mathbb{N} \hookrightarrow b_m$ - верхняя граница множества A, то $\gamma_1 \leq b_m$. Аналогично множество B ограничено снизу и $\exists \gamma_2 = \inf B = \inf b_n$; $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n$ - нижняя граница $B \Rightarrow \gamma_2 \geq a_n$.
γ_2 - верхняя граница $a_n \Rightarrow \gamma_2 \geq \sup a_n \Rightarrow \gamma_2 \geq \gamma_1$
Итак, $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq b_n$. Поэтому точки γ_1 и γ_2 (и весь отрезок $[\gamma_1; \gamma_2]$, если $\gamma_1 < \gamma_2$) принадлежат всем отрезкам $[a_n; b_n]$. Первая часть теоремы доказана.
Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Тогда $0 \leq |\gamma_2 - \gamma_1| \leq b_n - a_n$, и по теореме о двух милиционерах $\lim\limits_{n\to\infty} |\gamma_2 - \gamma_1| = 0 \Rightarrow$ $|\gamma_2 - \gamma_1| = 0 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Тогда $\gamma = \sup a_n = \inf b_n$. Последовательность a_n монотонно возрастает и ограничена сверху $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Аналогично $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Если $\exists \delta \neq \gamma : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq \delta \leq b_n$, то $|\gamma - \delta| \leq b_n - a_n \Rightarrow \delta = \gamma$. Единственность общей точки доказана. ■

Теорема о несчётности множества действительных чисел: множество $\mathbb{R}$ является несчётным.
□ Докажем сначала несчётность множества чисел отрезка $[a; b]$. Предположим, что все точки отрезка удалось занумеровать в виде последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ Пусть $[a_1; b_1] \subset [a; b]$ - такой отрезок, что $x_1 \notin [a_1; b_1]$; $[a_2; b_2] \subset [a_1; b_1]$ - такой отрезок, что $x_2 \notin [a_2; b_2]$ и т.д. Построенная последовательность вложенных отрезков имеет общую точку γ. $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \notin [a_n; b_n] \Rightarrow x_n \neq \gamma \Rightarrow \gamma$ не является членом последовательности x_n - противоречие $\Rightarrow$ множество точек любого отрезка несчётно. Так как $[a; b] \subset \mathbb{R}$, то $\mathbb{R}$ также несчётно. ■

3 БИЛЕТ 3

3.1 Предел числовой последовательности

Определение: функцией f с областью определения X и областью значений из Y называется такое соответствие между X и Y, что любому $x \in X$ соответствует единственный $y \in Y$.
Формальное определение: бинарное отношение $f \subseteq X \times Y$ называется функцией, если из $(x, y) \in f$ и $(x, y') \in f$ следует, что $y = y'$.
Определение: числовой последовательностью называется функция с областью определения $\mathbb{N}$ и множеством значений, принадлежащим $\mathbb{R}$.
Определение: Пусть $E(f) \subseteq \mathbb{R}$. Функция f называется ограниченной (ограниченной сверху/снизу) на множестве X, если $E(f)$ ограничено (ограниченной сверху/снизу); точные верхняя и нижняя грани $E(f)$ называются точной верхней и нижней гранями f на X и обозначаются $\sup\limits_X f(x)$ и $\inf\limits_X f(x)$ соответственно. Числовая последовательность x_n называется ограниченной (ограниченной сверху/снизу), если множество её значений ограничено (ограниченной сверху/снизу); точные верхняя и нижняя грани этого множества называются точной верхней и нижней гранями x_n и обозначаются $\sup x_n$ и $\inf x_n$ соответственно.

Лемма: Функция f ограничена на множестве $X \iff \exists C > 0 : \forall x \in X \hookrightarrow |f(x)| \leq C$.
□ $(\Leftarrow)$ $|f(x)| \leq C \iff -C \leq f(x) \leq C$. Так как это неравенство выполняется $\forall x$, то множество значений f ограничено.

($\Rightarrow$) Функция ограничена на множестве $X \Rightarrow \forall x \in X \hookrightarrow m \leq f(x) \leq M$, где $m = \inf\limits_X f(x)$, $M = \sup\limits_X f(x)$. Отсюда следует, что $|f(x)| \leq C$, где $C = max(|m|, |M|)$. ■

Определение: ε-окрестностью $U_\varepsilon(\alpha)$ символа α, где α - один из 6 стандартных предельных символов $(a, a+0, a-0, +\infty, -\infty, \infty)$, называется одно из следующих 6 множеств:
1) $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$;
2) $U_\varepsilon(a+0) = [a; a+\varepsilon)$;
3) $U_\varepsilon(a-0) = (a-\varepsilon; a]$;
4) $U_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon; +\infty)$;
5) $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\varepsilon)$;
6) $U_\varepsilon(\infty) = (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$,
где $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$.

Определение предела числовой последовательности: символ α называется пределом числовой последовательности x_n, если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(\alpha).$$

Обозначение предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.
Определение: последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся; последовательность, не имеющая конечного предела, называется расходящейся.

Лемма: если последовательность x_n ограничена при $n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}$ и определена $\forall n \in \mathbb{N}$, то она ограничена.
□ x_n ограничена при $n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N} \iff \exists m, M \in \mathbb{R} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow m \leq x_n \leq M$. Вне отрезка $[m; M]$ имеется не более конечного числа членов последовательности x_n (разве что $x_1, x_2, ..., x_{n_0-1}$). Рассмотрим $m_1 = min(x_1, x_2, ..., x_{n_0-1}, m), M_1 = max(x_1, x_2, ..., x_{n_0-1}, M)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow m_1 \leq x_n \leq M_1 \Rightarrow x_n$ ограничена. ■

Лемма: сходящаяся последовательность ограничена.
□ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. По определению предела последовательности при $\varepsilon = 1$:

$$\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n - a| < 1,$$

то есть $a - 1 < x_n < a + 1$. Последовательность ограничена при $n \geq n_0 \Rightarrow$ последовательность ограничена. ■

3.2 Единственность предела

Лемма: сходящаяся последовательность имеет единственный предел.
□ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$; для определённости $a < b$.
Зафиксируем $\varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$, то есть $\varepsilon \leq \frac{b-a}{2}$. По определению предела:

$$\exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$\exists n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(b)$$

Тогда при $n \geq n_3 = max(n_1, n_2) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$ - противоречие. ■

3.3 Бесконечно малые последовательности и их свойства

Определение: Последовательность называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Лемма: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff x_n = a + \alpha_n$, где α_n - бесконечно малая последовательность.
□ Пусть $\alpha_n = x_n - a$, тогда:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon \iff \forall\varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |\alpha_n| < \varepsilon \iff$
$\iff \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$ ■

Лемма: сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.
□ Пусть α_n и β_n - бесконечно малые последовательности. Тогда:

$$\forall\varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \hookrightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \hookrightarrow |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда при $n \geq n_0 = max(n_1, n_2)$ выполняется $|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, то есть $\alpha_n + \beta_n$ - бесконечно малая. ■

Лемма: произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью.
□ Если последовательность β_n ограничена, то $\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |\beta_n| \leq C$.
Если α_n - бесконечно малая, то

$$\forall\varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{C}$$

Тогда при $n \geq n_0$ выполняется $|\alpha_n \beta_n| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon$, то есть $\alpha_n \beta_n$ - бесконечно малая. ■

Следствие 1: если α_n - бесконечно малая последовательность, $C \in \mathbb{R}$, то $x_n = C\alpha_n$ - бесконечно малая последовательность.
□ Следует из того, что постоянная последовательность ограничена. ■

Следствие 2: произведение двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.
□ Следует из того, что одну из последовательностей можно рассматривать как имеющую конечный предел, следовательно, ограниченную. ■

3.4 Свойства пределов, связанные с неравенствами

Усиленная лемма о сохранении знака: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $a \neq 0$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n| > \frac{|a|}{2}$, причём $sign(x_n) = sign(a)$.
□ Пусть $a > 0$. Зафиксируем в определении предела $\varepsilon = \frac{a}{2}$, тогда:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \hookrightarrow |x_n - a| < \frac{a}{2}$$

Следовательно, $x_n > \frac{a}{2}$. В качестве n_0 можно рассмотреть $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_1$. Случай $a < 0$ рассматривается аналогично (в определении прелела берётся $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$). ■

Лемма о сохранении знака: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $a \neq 0$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow sign(x_n) = sign(a)$.
□ Напрямую следует из усиленной леммы о сохранении знака. ■

Теорема о предельном переходе в неравенстве: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причём $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq$
$\geq n_0 \hookrightarrow x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.
□ Предположим, что $a > b$. Рассмотрим $\varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$ (например, $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$), тогда:

$$\exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$\exists n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \hookrightarrow y_n \in U_\varepsilon(b)$$

При $n \geq n_3 = max(n_0, n_1, n_2)$ выполняется $x_n > y_n$, что противоречит условию. ■

Замечание: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причём $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n < y_n$, то $a \leq b$ (возможно $a = b$). Например: $x_n = -\frac{1}{n} < y_n = \frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Следствие: если $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in [a; b]$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, то $c \in [a; b]$.
□ 1) $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \geq a \Rightarrow c \geq a$; 2) $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \leq b \Rightarrow c \leq b$
Тогда $(c \geq a) \wedge (c \leq b) \Rightarrow c \in [a; b]$. ■

Теорема о двух милиционерах: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \leq y_n \leq z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$
□ По определению предела числовой последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \hookrightarrow z_n \in U_\varepsilon(a).$$

Тогда $\forall n \geq n_3 = max(n_0, n_1, n_2) \hookrightarrow a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_3 \hookrightarrow y_n \in U_\varepsilon(a).$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ■

3.5 Арифметические операции со сходящимися последовательностями

Теорема: пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R}$, тогда:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = ab$;
3) Если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.
□ $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где α_n, β_n - бесконечно малые последовательности.

1) $x_n + y_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n)$.
$\alpha_n + \beta_n$ - бесконечно малая как сумма двух бесконечно малых $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$.

2) $x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$.
$a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ - бесконечно малая как сумма двух произведений бесконечно малой на константу и произведения двух бесконечно малых $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = ab$.

3) Так как $b \neq 0$, то по лемме о сохранении знака $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n}$ определена $\forall n \geq n_0 \Rightarrow$ не нужно требовать $y_n \neq 0$.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n}{b(b + \beta_n)} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b + \beta_n)} = \frac{1}{y_n}(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n)$$

$\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n$ - бесконечно малая как сумма бесконечно малой и произведения бесконечно малой на константу.
$b \neq 0 \Rightarrow$ по усиленной лемме о сохранении знака $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \hookrightarrow |y_n| > \frac{|b|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|} \Rightarrow y_n$ ограничена при $n \geq n_1 \Rightarrow y_n$ ограничена.
$\frac{1}{y_n}$ ограничена, $\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n$ - бесконечно малая $\Rightarrow \frac{1}{y_n}(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n)$ - бесконечно малая $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. ■

Следствия (в обозначениях теоремы):
1) $\lim\limits_{n\to\infty} Cx_n = Ca$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = a^k$ (при $k \in \mathbb{N}$; если $a \neq 0$, то при $k \in \mathbb{Z}$);
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ (при $k \in \mathbb{N}$), так как $\frac{1}{n^k} = (\frac{1}{n})^k$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

3.6 Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности

Определение: последовательность x_n называется строго возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n+1} > x_n$; строго убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n+1} < x_n$; нестрого возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n+1} \geq x_n$; нестрого убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n+1} \leq x_n$; все такие последовательности называются монотонными.

Теорема Вейерштрасса: если последовательность x_n возрастает (строго или нестрого) и ограничена сверху, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup x_n$; если последовательность x_n убывает (строго или нестрого) и ограничена снизу, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf x_n$.
□ Докажем первую часть теоремы. Вторая доказывается аналогично.
По теореме о точной верхней (нижней) грани $\exists \sup x_n = \alpha$. Тогда

$$(\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \leq \alpha) \wedge (\forall \alpha' < a \hookrightarrow \exists n_0(\alpha') \in \mathbb{N} : x_{n_0} > \alpha')$$

Введём обозначение: $\varepsilon = \alpha - \alpha'$, $\varepsilon > 0$. Последовательность x_n монотонно возрастает $\Rightarrow \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \geq x_{n_0}$. При этом также $x_n \leq \alpha$. Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon(\alpha')) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(\alpha)$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha = \sup x_n$. ■

3.7 Число e

Определение: числом e называется предел $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.
□ Докажем корректность этого определения, то есть докажем существование такого предела.
Пусть $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Рассмотрим последовательность $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = x_n(1 + \frac{1}{n})$. Докажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (n+1)^{n+2}}{n^{n+1} \cdot (n+2)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{2n+4}}{(n(n+2))^{n+2}} \cdot \frac{n}{n+1} = (\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n})^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = (1 + \frac{1}{n^2+2n})^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \geq$$
$$\geq (1 + \frac{n+2}{n^2+2n}) \cdot \frac{n}{n+1} = (1 + \frac{1}{n}) \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

Итак, $y_{n+1} \leq y_n \Rightarrow$ последовательность y_n нестрого убывает. Также $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow y_n > 1$. По теореме Вейерштрасса, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf y_n$

$$x_n = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{1} = \lim_{n\to\infty} y_n$$

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$. ■

3.8 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства

Определение: последовательность x_n называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Лемма: бесконечно большая последовательность является неограниченной.
□ x_n неограничена:

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists n(E) \in \mathbb{N} : |x_n| > E$$

x_n является бесконечно большой:

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists n_0(E) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n| > E$$

Условию неограниченности, например, удовлетворяет n_0, поэтому бесконечно большая последовательность неограничена. ■

Лемма: 1) если последовательность x_n является бесконечно большой, то последовательность $y_n = \frac{1}{x_n}$ - бесконечно малая;
2) если последовательность x_n бесконечно малая, и $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \neq 0$, то последовательность $y_n = \frac{1}{x_n}$ - бесконечно большая.
□ По определению бесконечно большой последовательности:

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists n_0(E) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n| > E$$

Тогда по при $n \geq n_0$ выполняется $x_n \neq 0 \Rightarrow$ последовательность y_n определена, и не нужно делать дополнительную оговорку, как во второй части леммы.
$\forall E$ рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{E}$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon(E)) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n| > E \Rightarrow |y_n| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

То есть y_n - бесконечно малая.
2) Доказательство аналогично. ■

Лемма: 1) если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow y_n \geq x_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$;
2) если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow y_n \leq x_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$
□ 1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \forall E > 0 \hookrightarrow \exists n_1(E) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \hookrightarrow x_n > E$. Пусть $n_2 = max(n_0, n_1)$, тогда $\forall n \geq n_2 \hookrightarrow y_n \geq x_n > E \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$;
2) Доказательство аналогично. ■

Аналог теоремы Вейерштрасса для бесконечно больших последовательностей: если последовательность x_n возрастает (строго или нестрого) и неограничена сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; если последовательность x_n убывает (строго или нестрого) и неограничена снизу, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$
□ Докажем первую часть теоремы, вторая доказывается аналогично.
x_n неограничена сверху:

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists n_0(E) \in \mathbb{N} : x_{n_0} > E$$

Последовательность монотонно возрастает $\Rightarrow \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \geq x_{n_0}$. Поэтому:

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists n_0(E) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n > E$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. ■

4 БИЛЕТ 4

4.1 Подпоследовательности, частичные пределы

Определение: пусть x_n - числовая последовательность, а n_k - строго возрастающая последовательность натуральных чисел, тогда последовательность $y_k = x_{n_k}$ называется подпоследовательностью последовательности x_n.
Определение: число $a \in \mathbb{R}$ (или символ $+\infty$, $-\infty$) называется частичным пределом (предельной точкой) последовательности x_n, если существует такая строго возрастающая последовательность индексов n_k, что

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

Лемма: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, где α - один из 6 СПС, то $\forall x_{n_k} \hookrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$.
□ По определению предела, вне любой окрестности $U_\varepsilon(\alpha)$ содержится не более конечного числа членов x_n. Так как все n_k различны, то вне любой $U_\varepsilon(\alpha)$ имеется не более конечного числа членов $x_{n_k} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$. ■
Следствие: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, то a - единственный частичный предел x_n.
□ Все подпоследовательности имеют один и тот же предел, то есть он единственный. ■

Критерий частичного предела: пусть α - один из символов a, $+\infty$, $-\infty$, тогда α является частичным пределом $\iff$ в любой $U_\varepsilon(\alpha)$ содержится бесконечно много членов x_n.
□ ($\Rightarrow$) Если α - частичный предел x_n, то существует подпоследовательность $x_{n_k} : \lim\limits_{k\to\infty} = \alpha$. Тогда $\forall\varepsilon > 0$ внутри $U_\varepsilon(\alpha)$ содержатся все x_{n_k}, начиная с некоторого номера k_0, а значит, бесконечно много членов x_n.

($\Leftarrow$) Сначала рассмотрим случай $a \in \mathbb{R}$. Возьмём $\varepsilon = 1$, x_{n_1} - некоторый член x_n из $U_1(a)$. Возьмём теперь $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Так как в $U_{\frac{1}{2}}(a)$ бесконечно много членов, то выберем $x_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(a)$ так, что $n_2 > n_1$, и т.д. Пусть построены $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}$, где $n_1 < n_2 < ... < n_k$, $x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$. Так как в $U_{\frac{1}{k+1}}(a)$ бесконечно много членов x_n, то выберем $x_{k+1} \in U_{\frac{1}{k+1}}(a)$ так, чтобы $n_{k+1} > n_k$. Таким образом, построена бесконечная последовательность x_{n_k}, причём $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$, $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$. То есть $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow a - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a + \frac{1}{k}$. По теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, то есть a - частичный предел x_n.

Для $\alpha = +\infty$ и $\alpha = -\infty$ доказательство аналогично. Например, для $\alpha = +\infty$ нужно брать $\varepsilon = 1, 2, 3, ..., k, ...$, x_{n_k} выбирать таким, что $x_{n_k} \in U_k(+\infty)$, то есть $x_{n_k} > k$. Тогда по аналогу теоремы Вейерштрасса для бесконечно больших последовательностей, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. ■

4.2 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема Больцано-Вейерштрасса: любая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность (то есть имеет конечный частичный предел).
□ Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a \le x_n \le b$, где $a < b, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Выберем ту половину $[a; \frac{a+b}{2}]$ или $[\frac{a+b}{2}; b]$ отрезка $[a; b]$ (назовём её Δ_1), где содержится бесконечно много x_n (в обоих половинах конечного числа быть не может, так как в таком случае весь отрезок содержит конечное число членов последовательности, что неверно). Если обе половины содержат бесконечно много членов x_n, то Δ_1 - любая из половин. В отрезке Δ_1 аналогично выбираем половину Δ_2, содержащую бесконечно много членов x_n, и т.д. На k-м шагу в Δ_k выбираем половину Δ_{k+1}, содержащую бесконечно много членов x_n. Имеем последовательность вложенных отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset ... \supset \Delta_n \supset ...$, причём длина n-го отрезка равна $\frac{b-a}{2^n} = (b-a)(\frac{1}{2})^n$ и стремится к нулю ($\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = 0$). По теореме Кантора о вложенных отрезка, $\exists! c : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow c \in \Delta_n$. Отсюда следует:

$$\forall\varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 \hookrightarrow \Delta_n < \varepsilon \Rightarrow \forall n \ge n_0 \hookrightarrow \Delta_n \subset U_\varepsilon(c)$$

Значит, $U_\varepsilon(c)$ содержит бесконечно много членов $x_n \Rightarrow$ по критерию частичного предела, c - частичный предел x_n. ■

Аналог теоремы Больцано-Вейерштрасса для неограниченных последовательностей: если последовательность x_n неограничена сверху, то она имеет частичный предел $+\infty$; если последовательность x_n неограничена снизу, то она имеет частичный предел $-\infty$.
□ Докажем первую часть теоремы. Вторая доказывается аналогично.
Зафиксируем $E > 0$. x_n неограничена $\Rightarrow \exists n_1(E) \in \mathbb{N} : x_{n_1} > E$. Теперь в качестве нового E в определении неограниченности сверху рассмотрим x_{n_1}. Тогда $\exists n_2(x_{n_1}) \in \mathbb{N} : x_{n_2} > x_{n_1}$ и т.д. Мы выбрали бесконечно много различных членов последовательности x_n таких, что $x_{n_1} < x_{n_2} < ... < x_{n_k} < ...$ и $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n_k} \in U_E(+\infty) \Rightarrow$ по критерию частичного предела, $+\infty$ - частичный предел последовательности x_n. ■

Теорема о единственном частичном пределе: пусть последовательность x_n ограничена и имеет единственный частичный предел, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
$\square$ Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow m \leq x_n \leq M$, где $m < M$, $m \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$. Так как для некоторой подпоследовательности $x_{n_k} \hookrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, и $\forall k \hookrightarrow m \leq x_{n_k} \leq M$, то по теореме о предельном переходе в неравенстве: $m \leq a \leq M$.
Докажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Если это не так, то $\exists \varepsilon > 0 :$ вне $U_\varepsilon(a)$ содержится бесконечно много членов x_n. Пусть для определённости бесконечно много членов x_n справа от $U_\varepsilon(a)$, то есть на $[a+\varepsilon; M]$. По теореме Больцано-Вейерштрасса, на $[a+\varepsilon; M]$ существует частичный предел x_n, отличный от a - противоречие. $\blacksquare$

4.3 Критерий Коши существования конечного предела числовой последовательности

Определение: последовательность x_n называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Критерий Коши сходимости последовательности: последовательность x_n сходится $\iff$ x_n фундаментальна.
$\square$ ($\Rightarrow$) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m \geq n_0 \hookrightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда $\forall n, m \geq n_0$ выполняется $|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Значит, последовательность x_n фундаментальна.

($\Leftarrow$) Пусть x_n - фундаментальная последовательность. Докажем сначала, что она ограничена
При $\varepsilon = 1$ имеем

$$\exists n_0(1) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow |x_n - x_m| < 1$$

Зафиксируем $m = n_0$. Тогда $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n| = |x_n - x_m + x_m| \leq |x_n - x_m| + |x_m| < 1 + |x_m| = 1 + |x_{n_0}|$. Таким образом, последовательность x_n ограничена при $n \geq n_0 \Rightarrow x_n$ ограничена.
По теореме Больцано-Вейерштрасса последовательность x_n имеет конечный частичный предел. В силу теоремы о единственном частичном пределе достаточно доказать, что других частичных пределов последовательность не имеет. Предположим, что это не так и существуют два различных частичных предела a и b (для определённости $a < b$). Возьмём в определении фундаментальности $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$. Тогда для данного ε:

$$\exists n_0\left(\frac{b-a}{3}\right) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow |x_n - x_m| < \frac{b-a}{3}$$

В $U_\varepsilon(a)$ содержится бесконечно много членов x_n по критерию частичного предела. Значит:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, n_1 \geq n_0 : x_{n_1} \in U_\varepsilon(a)$$

Аналогично:

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, n_2 \geq n_0 : x_{n_2} \in U_\varepsilon(b)$$

Тогда $|x_{n_1} - x_{n_2}| > \frac{b-a}{3}$ - противоречие определению фундаментальности. $\blacksquare$

5 БИЛЕТ 5

5.1 Определения предела числовой функции одной переменной по Коши и по Гейне, их эквивалентность

Определение: проколотой ε-окрестностью $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(\alpha)$ символа α, где α - один из 6 стандартных предельных символов $(a, a+0, a-0, +\infty, -\infty, \infty)$, называется одно из следующих 6 множеств:
1) $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(a) = (a-\varepsilon; a) \cup (a; a+\varepsilon)$;
2) $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(a+0) = (a; a+\varepsilon)$;
3) $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(a-0) = (a-\varepsilon; a)$;
4) $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(+\infty) = (\varepsilon; +\infty)$;
5) $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(-\infty) = (-\infty; -\varepsilon)$;
6) $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(\infty) = (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$,
где $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$.

Определение предела функции по Гейне: пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности α, где α - один из 6 СПС, тогда говорят, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, где β - один из 6 СПС, если

$$\forall x_n : \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha,\ x_n \neq \alpha \hookrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \beta.$$

Определение предела функции по Коши: пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности α, где α - один из 6 СПС, тогда говорят, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, где β - один из 6 СПС, если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha) \hookrightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(\beta).$$

Теорема: Пусть α, β - каждый из 6 СПС. Тогда $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ в смысле определения по Коши $\iff$ $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ в смысле определения по Гейне.

$\square$ ($\Rightarrow$) Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ по Коши, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha) \hookrightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(\beta).$$

Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha, x_n \neq \alpha$

Для $\delta(\varepsilon)$ выберем $n_0(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha)$. Тогда из определения предела по Коши следует, что $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \in U_{\varepsilon}(\beta)$. Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \in U_{\varepsilon}(\beta) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$$

Так как x_n любая то выполнено определение по Гейне.

($\Leftarrow$) Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ по Гейне. Докажем от противного, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ по Коши. Если это не так, то

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \hookrightarrow \exists x(\delta) \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha) : f(x) \notin U_{\varepsilon}(\beta)$$

Рассмотрим сначала случай, когда α - конечный символ (a, $a+0$, $a-0$; $a \in \mathbb{R}$). Возьмём $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, тогда $x(\delta) = x(\frac{1}{n}) = x_n$ - некоторая последовательность такая, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \exists x_n \in \overset{\circ}{U}_{\frac{1}{n}}(\alpha) : f(x_n) \notin U_{\varepsilon}(\beta) \quad (*)$$

Окрестность α является проколотой, поэтому $x_n \neq \alpha$. Также по теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ (если $\alpha = a$, то $a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}$; если $\alpha = a-0$, то $a - \frac{1}{n} < x_n < a$; если $\alpha = a+0$, то $a < x_n < a + \frac{1}{n}$). Тогда в силу определения предела по Гейне имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \in U_{\varepsilon}(\beta)$$

То есть возникло противоречие с утверждением $(*)$. Значит, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ по Коши. $\blacksquare$

5.2 Свойства предела функции

Лемма о сохранении знака: если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, где α - один из 6 СПС, то $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha) \hookrightarrow sign(f(x)) = sign(b)$.
□ Пусть $b > 0$, тогда, согласно определению предела по Коши, при $\varepsilon = b$ имеем:

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha) \hookrightarrow f(x) \in U_b(b)$$

Отсюда следует, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha) \hookrightarrow 0 < f(x) < 2b \Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha) \hookrightarrow f(x) > 0$. В качестве δ_0 можно выбрать $\delta(\varepsilon)$. Случай $b < 0$ рассматривается аналогично ($\varepsilon = -b$). ■

Теорема о предельном переходе в неравенстве для функций: если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = c \in \mathbb{R}$, α - один из 6 СПС, причём $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha) \hookrightarrow f(x) \le g(x)$, то $b \le c$.
□ Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \ne \alpha$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = \delta_0$, тогда:

$$\exists n_0(\delta_0) \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 \hookrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha).$$

Значит, $\forall n \ge n_0 \hookrightarrow f(x_n) \le g(x_n)$.
Из определения предела по Гейне следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = c$. Тогда по теореме о предельном переходе в неравенстве для последовательностей: $b \le c$. ■

Теорема о двух милиционерах для функций: если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = b \in \mathbb{R}$, α - один из 6 СПС, причём $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha) \hookrightarrow f(x) \le h(x) \le g(x)$, то $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = b$.
□ Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \ne \alpha$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = \delta_0$, тогда:

$$\exists n_0(\delta_0) \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 \hookrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha).$$

Значит, $\forall n \ge n_0 \hookrightarrow f(x_n) \le h(x_n) \le g(x_n)$.
Из определения предела по Гейне следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$. Тогда по теореме о двух милиционерах для последовательностей: $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = b$. Так как x_n любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = b$. ■

Аналог теоремы о двух милиционерах для бесконечно больших функций: 1) если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$, и $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha) \hookrightarrow g(x) \ge f(x)$, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$.
2) если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$, и $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha) \hookrightarrow g(x) \le f(x)$, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$.
□ 1) Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \ne \alpha$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = \delta_0$, тогда:

$$\exists n_0(\delta_0) \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 \hookrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha).$$

Значит, $\forall n \ge n_0 \hookrightarrow g(x_n) \ge f(x_n)$. Согласно определению предела функции по Гейне, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$, поэтому по одноимённой теореме для последовательностей: $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = +\infty$. Так как x_n любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$.
2) Доказательство аналогично. ■

Лемма: если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}$, α - один из 6 СПС, то $\exists \delta_0 > 0 : f$ ограничена в $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha)$
□ Возьмём в определении предела по Коши $\varepsilon = 1$, тогда:

$$\exists \delta(1) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha) \hookrightarrow |f(x) - b| < 1$$

Отсюда следует, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha) \hookrightarrow b-1 < f(x) < b+1 \Rightarrow f$ ограничена в $\overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha)$. В качестве δ_0 можно взять $\delta(1)$. ■

Лемма: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \beta$, $a \in \mathbb{R} \iff \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \beta$, где β - один из 6 СПС.
□ ($\Rightarrow$) Если $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \hookrightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(\beta)$, то $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a-0), \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a+0) \hookrightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(\beta)$, так как $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a) =$

$= \mathring{U}_\delta(a-0) \cup \mathring{U}_\delta(a+0)$.

($\Leftarrow$) Пусть $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \beta$, тогда:

$$\forall\varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists\delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (a-\delta_1; a) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(\beta)$$

$$\forall\varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists\delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (a; a+\delta_2) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(\beta)$$

Если взять $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, то $\forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(\beta) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \beta$. ■

Лемма: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \beta \iff \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \beta$, где β - один из 6 СПС.
□ Доказывается аналогично предыдущей лемме, но нужно взять $\Delta = max(\Delta_1, \Delta_2)$. ■

Определение: функция f называется бесконечно малой при $x \to \alpha$, где α - один из 6 СПС, если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$; функция f называется бесконечно большой при $x \to \alpha$, где α - один из 6 СПС, если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$.

Лемма: пусть функция $f(x)$ ограничена в некоторой $\mathring{U}_{\delta_0}(\alpha)$, $\delta_0 > 0$, а функция $g(x)$ - бесконечно малая при $x \to \alpha$, тогда $f(x)g(x)$ - бесконечно малая при $x \to \alpha$.
□ Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = \delta_0$, тогда:

$$\exists n_0(\delta_0) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(\alpha).$$

Отсюда следует, что последовательность $f(x_n)$ ограничена при $n \geq n_0 \Rightarrow$ последовательность $f(x_n)$ ограничена. Далее, из определения предела функции по Гейне следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = 0$ (произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную). Так как x_n любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) =$ $= 0$, то есть $f(x)g(x)$ - бесконечно малая при $x \to \alpha$. ■

Лемма: 1) если функция $f(x)$ - бесконечно большая при $x \to \alpha$, то функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая при $x \to \alpha$;
2) если функция $f(x)$ - бесконечно малая при $x \to \alpha$, и $\exists\delta_0 > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(\alpha) \hookrightarrow f(x) \neq 0$, то функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая при $x \to \alpha$.
□ Докажем сначала вторую часть леммы. Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = \delta_0$, тогда:

$$\exists n_0(\delta_0) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(\alpha).$$

Отсюда следует, что $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \neq 0$. Согласно определению предела функции по Гейне, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Поскольку $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, то $g(x_n) = \frac{1}{x_n}$ - бесконечно большая последовательность. Так как x_n любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty \Rightarrow g(x)$ - бесконечно большая при $x \to \alpha$.

Теперь докажем первую часть теоремы. В определении предела $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ по Коши возьмём $\varepsilon = 1$:

$$\exists\delta(1) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow |f(x)| > 1$$

то есть заведомо $f(x) \neq 0$ в $\mathring{U}_\delta(\alpha)$. Далее доказательство аналогично первому пункту. ■

Теорема об арифметических операциях с пределами функции: пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = c \in \mathbb{R}$, где α - один из 6 СПС, тогда:
1) $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x) + g(x)) = b + c$;
2) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) = bc$;
3) Если $c \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$

$\square$ Докажем 3-й пункт теоремы, остальные доказываются аналогично.
Так как $c \neq 0$, то по лемме о сохранении знака: $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha) \hookrightarrow g(x) \neq 0$ и $g(x)$ определена в $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha)$.
Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Согласно определению предела функции по Гейне, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = c \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{b}{c}$. Так как x_n любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$. $\blacksquare$

Следствия (в обозначениях теоремы):
1) $\lim\limits_{x\to\alpha} Cf(x) = Cb$;
2) $\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x) - g(x)) = b - c$;
3) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)^k = b^k$ (при $k \in \mathbb{N}$; если $b \neq 0$, то при $k \in \mathbb{Z}$);
4) $\lim\limits_{x\to a} x^k = a^k$, если $a \in \mathbb{R}$ (при $k \in \mathbb{N}$; если $a \neq 0$, то при $k \in \mathbb{Z}$).

5.3 Критерий Коши существования конечного предела функции

Критерий Коши существования конечного предела функции: пусть $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности α, где α - один из 6 СПС, тогда

$$\exists \lim_{x\to\alpha} f(x) \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

$\square$ ($\Rightarrow$) Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}$, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x' \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Таким образом, $\forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| = |f(x') - b + b - f(x'')| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Условие Коши выполнено.

($\Leftarrow$) Пусть выполнено условие Коши. Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = \delta(\varepsilon)$ (здесь ε слева - из условия Коши, справа - из определения предела последовательности), тогда:

$$\exists n_0(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : (\forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)) \wedge (\forall m \geq n_0 \hookrightarrow x_m \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)).$$

Тогда из условия Коши получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{R} : \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $f(x_n)$ фундаментальна, и по критерию Коши сходится. Остаётся доказать, что $\forall x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ один и тот же.
Пусть для двух таких последовательностей x'_n и x''_n выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = b$, $a \neq b$.
Рассмотрим последовательность $\gamma_n = \{x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, ..., x'_n, x''_n, ...\}$. Так как вне любой проколотой окрестности α содержится не более конечного числа членов x'_n и не более конечного числа членов x''_n, значит, и не более конечного числа членов $\gamma_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \alpha$, $\gamma_n \neq \alpha$. Следовательно, $f(\gamma_n)$ также фундаментальна и сходится.
Однако последовательность $f(\gamma_n)$ имеет два конечных частичных предела a и b - противоречие. $\blacksquare$

5.4 Теорема о замене переменной под знаком предела

Теорема о замене переменной под знаком предела: пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ и $f(x) \neq \beta$ в некоторой $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha)$, и пусть $\lim\limits_{u\to\beta} g(u) = \gamma$, тогда $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = \gamma$.

$\square$ Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = \delta_0$, тогда:

$$\exists n_0(\delta_0) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(\alpha).$$

Значит $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \neq \beta$. Согласно определению предела функции по Гейне, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$. Рассмотрим последовательность $u_n = f(x_n)$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \beta$, $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow u_n \neq \beta$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) = \gamma$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \gamma$. Так как x_n - любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = \gamma$. $\blacksquare$

Контрпример на существенность условия $f(x) \neq \beta$:

$$f(x) = 0;$$

$$g(u) = \begin{cases} 0, u \neq 0 \\ 1, u = 0 \end{cases}$$

5.5 Существование односторонних пределов у монотонных функций

Определение: функция $f(x)$ называется строго (или нестрого) возрастающей на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \hookrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \leq f(x_2)$)); функция $f(x)$ называется строго (или нестрого) убывающей на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \hookrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geq f(x_2)$); все такие функции называются монотонными на множестве X.

Теорема о пределах монотонных функций:
1) Пусть функция $f(x)$ возрастает (строго или нестрого) на $(a;b)$, где $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \sup\limits_{(a;b)} f(x)$; если $f(x)$ ограничена сверху на $(a;b)$, то предел конечен, если нет - равен $+\infty$. Также $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf\limits_{(a;b)} f(x)$; если $f(x)$ ограничена снизу на $(a;b)$, то он конечен, если нет - равен $-\infty$.
2) Пусть функция $f(x)$ убывает (строго или нестрого) на $(a;b)$, где $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \inf\limits_{(a;b)} f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \sup\limits_{(a;b)} f(x)$ (с аналогичными оговорками).
Замечание: Если $b = +\infty$, то под $b - 0$ понимаем $+\infty$; если $a = -\infty$, то под $a + 0$ понимаем $-\infty$.

$\square$ Доказательство проведено для случая возрастающей функции и $x \to b - 0$, остальные случаи доказываются аналогично.
Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b - 0$ ($x_n < b$, если $b \in \mathbb{R}$). Нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M = \sup\limits_{(a;b)} f(x)$.
1) Пусть $M \in \mathbb{R}$, то есть $f(x)$ ограничена сверху на $(a;b)$. Тогда по определению точной верхней грани:

$$\forall x \in (a;b) \hookrightarrow (f(x) \leq M) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists x'(\varepsilon) \in (a;b) : f(x') > M - \varepsilon)$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b - 0$, то

$$\forall x' \in (a;b) \hookrightarrow \exists n_0(x'(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in (x';b).$$

Тогда в силу монотонности возрастания: $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \geq f(x') > M - \varepsilon$. Также $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow f(x_n) \leq M$. Окончательно:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \in (M - \varepsilon; M] \Rightarrow \forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(M) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = M.$$

Всё доказано.

2) Пусть $M = +\infty$, то есть $f(x)$ неограничена сверху на $(a;b)$. Тогда $\forall E > 0 \hookrightarrow \exists x'(E) \in (a;b) : f(x') > E$.
Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b - 0$, то

$$\forall x' \in (a;b) \hookrightarrow \exists n_0(x'(E)) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in (x';b).$$

Тогда в силу монотонности возрастания: $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \geq f(x') > E$.
Окончательно:
$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists n_0(E) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) > E \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty = M.$$
Всё доказано. ■

6 БИЛЕТ 6

6.1 Непрерывность функции в точке

Определение: пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$, тогда $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Определение: пусть $a \in \mathbb{R}$ и функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $a+0$ (или $a-0$), тогда $f(x)$ называется непрерывной справа (соответственно слева) в точке a, если $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ (соответственно $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$).
Определение: функция $f(x)$ называется разрывной в точке $a \in \mathbb{R}$, если она определена в некоторой проколотой окрестности точки a и не является непрерывной в этой точке; точка a при этом называется точкой разрыва функции $f(x)$.
Определение: если в точке a функции $f(x)$ $\exists f(a+0) \in \mathbb{R}$, $\exists f(a-0) \in \mathbb{R}$, то эта точка называется точкой разрыва первого рода. Величина $d = f(a+0) - f(a-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке a. Если в точке разрыва первого рода $f(a+0) = f(a-0)$, то разрыв называется устранимым. Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется точкой разрыва второго рода.

6.2 Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ непрерывны в точке a; если при этом $g(a) \neq 0$, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке a.
□ Следует из теоремы об арифметических операциях с пределами функций. ■

Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции: пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}$, а функция $g(x)$ непрерывна в точке b, тогда $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = g(b)$.
□ Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Согласно определению предела функции по Гейне: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Рассмотрим последовательность $u_n = f(x_n)$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = b$. В силу определения непрерывности по Гейне: $\lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) = g(b)$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(b)$. Так как последовательность x_n любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = g(b)$. ■

Следствие (непрерывность сложной функции): если функция $f(x)$ непрерывна в точке $c \in \mathbb{R}$, а функция $g(x)$ непрерывна в точке $b = f(c)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке c.
□ По предыдущей теореме: $\lim\limits_{x\to c} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x\to c} f(x)) = g(b) = g(f(c))$. ■

6.3 Разрывы монотонных функций

Лемма: если функция $f(x)$ монотонна на интервале $(a;b)$ (конечном или бесконечном), то её разрывы во внутренних точках $(a;b)$ могут быть только первого рода.
□ Пусть для определённости $f(x)$ возрастает на $(a;b)$ (строго или нестрого), $x_0 \in (a;b)$. Тогда $f(x)$ возрастает и ограничена сверху на $(a;x_0)$, так как $\forall x \in (a;x_0) \hookrightarrow f(x) \leq f(x_0)$. По теореме о пределе монотонных функций $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Аналогично $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Поэтому если x_0 - точка разрыва, то первого рода. ■

Лемма: функция $f(x)$, монотонная на интервале $(a;b)$ (конечном или бесконечном), не может иметь точек устранимого разрыва на $(a;b)$.

□ Пусть для определённости $f(x)$ возрастает на $(a;b)$ (строго или нестрого), $x_0 \in (a;b)$. $\forall x \in (a;x_0) \hookrightarrow f(x) \le f(x_0)$. Тогда по теореме о переходу к пределу в неравенстве: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x_0)$, то есть $f(x_0-0) \le f(x_0)$ (предел $f(x_0-0)$ существует по теореме о пределах монотонных функций). Аналогично $f(x_0) \le f(x_0+0)$. Поэтому если $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, то $f(x_0)$ равно их общему значению, и $f(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

Теорема: множество точек разрыва функции $f(x)$, монотонной на интервале $(a;b)$ (конечном или бесконечном), не более чем счётно.
□ По предыдущим двум леммам, каждая точка разрыва - первого рода и неустранимая, поэтому ей соответствует интервал $(f(x_0-0); f(x_0+0))$ в множестве $E(f)$. В силу монотонности функции $f(x)$ все такие интервалы, соответствующие различным точкам разрыва, не пересекаются. Выберем в каждом из них рациональную точку (по теореме о плотности рациональных чисел в $\mathbb{R}$). Все эти рациональных точки различны. Получим биекцию между множеством точек разрыва функции $f(x)$ и подмножеством $\mathbb{Q}$, которое не более чем счётно. ■

7 БИЛЕТ 7

7.1 Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение: функция называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она определена в каждой его точке, непрерывна во всех точках интервала $(a;b)$, непрерывна справа в точке a, непрерывна слева в точке b.

Первая теорема Вейерштрасса: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.
□ Пусть $f(x)$ не является ограниченной на $[a;b]$, тогда

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists x(E) \in [a;b] : |f(x)| > E.$$

Возьмём $E = 1, 2, 3, ..., n, ...$ Тогда полученные значения $x(E)$ образуют последовательность $x_n : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \in$ $\in [a;b]$. Тогда также $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f(x_n)| > n$. По теореме Больцано-Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} : \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Так как $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n_k} \in [a;b]$, то по следствию из теоремы о переходе к пределу в неравенстве: $x_0 \in [a;b]$.
$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Если x_0 - один из концов отрезка, например, $x_0 = a$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a + 0$, $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0, и равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ сохраняется.
Так как $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f(x_{n_k})| > n_k$ и $1 \le n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$, то $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f(x_{n_k})| > k \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$ - противоречие. Таким образом, $f(x)$ ограничена на $[a;b]$. ■

Вторая теорема Вейерштрасса: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то

$$\exists x_1, x_2 \in [a;b] : f(x_1) = \sup_{[a;b]} f(x), f(x_2) = \inf_{[a;b]} f(x).$$

□ Докажем, что достигается $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$. Для точной нижней грани доказательство аналогично.
По определению точной верхней грани, которая существует по первой теореме Вейерштрасса:

$$(\forall x \in [a;b] \hookrightarrow f(x) \le M) \land (\forall M' < M \hookrightarrow \exists x(M') \in [a;b] : f(x) > M')$$

Рассмотрим $M' = M - \frac{1}{n}$, тогда $x(M') = x(M - \frac{1}{n}) = x_n : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \in [a;b]$. Отсюда следует, что $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow$ $\hookrightarrow M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$. По теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$.
По теореме Больцано-Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} : \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in$ $\in [a;b]$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Случай, когда x_0 - один из концов отрезка, разбирается также, как и в доказательстве первой теоремы Вейерштрасса. С другой стороны: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$

(существует предел, значит, частичный предел единственный). Значит, $M = f(x_0)$, то есть x_0 - точка, в которой достигается точная верхняя грань $f(x)$ на $[a;b]$. $\blacksquare$

7.1.1 Теорема о промежуточных значениях непрерывных функций

Теорема Больцано-Коши: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимаем в точках a и b значения разного знака (то есть $f(a)f(b) < 0$), то $\exists c \in (a;b) : f(c) = 0$.
$\square$ Рассмотрим точку $x_1 = \frac{a+b}{2}$ - середину отрезка $[a;b]$. Если $f(x_1) = 0$, то искомая точка найдена. Если нет, то выберем Δ_1 - ту из половин отрезка $[a;b]$, на концах которой $f(x)$ принимает значения разных знаков. Рассмотрим теперь точку x_2 - середину отрезка Δ_1. Если $f(x_2) = 0$, то искомая точка найдена. Если нет, то выберем Δ_2 - ту из половин Δ_1, на концах которой $f(x)$ принимает значения разных знаков, и т.д. Если на n-м шаге $f(x_n) = 0$, то искомая точка найдена.
В противном случае получим бесконечную последовательность вложенных отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset ... \supset \Delta_n \supset ...$ такую, что на концах каждого из отрезков Δ_n функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Длина n-го отрезка равна $\frac{b-a}{2^n} = (b-a)(\frac{1}{2})^n$ - стремится к нулю.
По теореме Кантора о вложенных отрезках $\exists! c : \forall n \in \mathbb{R} \hookrightarrow c \in \Delta_n$. Ясно, что $c \in [a;b]$, так как каждый из отрезков Δ_n принадлежит $[a;b]$. Докажем, что $f(c) = 0$. Пусть это не так, и, например, $f(c) > 0$, тогда по лемме о сохранении знака для предела $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c) > 0$, верного в силу непрерывности $f(x)$:

$$\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in U_{\delta_0}(c) \hookrightarrow f(x) > 0$$

(в самой точке равенство выполняется, так как по договорённости $f(c) > 0$; если c - один из концов отрезка, то соответствующая окрестность односторонняя).
По определению предела последовательности длин отрезков Δ_n для $\varepsilon = \delta_0$:

$$\exists n_0(\delta_0) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow \Delta_n < \delta_0$$

Отсюда следует, что $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow \Delta_n \in U_{\varepsilon_0}(c) \Rightarrow \forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x) > 0$ в каждой точке Δ_n. Это противоречит тому, что на концах Δ_n функция принимает значения разных знаков. Значит, $f(c) = 0$. Также в силу того, что $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$, выполняется $c \in (a;b)$. $\blacksquare$

Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то $\forall y_0$, заключённого между $f(a)$ и $f(b)$, $\exists x_0 \in [a;b] : f(x_0) = y_0$.
$\square$ Если $y_0 = f(a)$ или $y_0 = f(b)$, то $x_0 = a$ или $x_0 = b$ соответственно.
В противном случае рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - y_0$. Тогда числа $g(a)$ и $g(b)$ имеют разный знак, и по теореме Больцано-Коши $\exists x_0 \in (a;b) : g(x_0) = 0$, то есть $f(x_0) = y_0$. $\blacksquare$

7.2 Равномерная непрерывность функции, непрерывной на отрезке

Определение: функция называется равномерно непрерывной на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Теорема Кантора: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она равномерно непрерывна на нём.
$\square$ Пусть $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a;b]$, тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \hookrightarrow \exists x'(\delta), x''(\delta) \in [a;b], |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon.$$

Возьмём $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, тогда $x'(\delta) = x'(\frac{1}{k}) = x'_k$ - последовательность. Аналогично, x''_k - последовательность. Так как $x'_k \in [a;b]$, то по теореме Больцано-Вейерштрасса можно выделить подпоследовательность $x_{k_m} : \lim\limits_{m\to\infty} x'_{k_m} = x_0$. По следствию из теоремы о переходе к пределу в неравенстве получаем, что $x_0 \in [a;b]$.
Далее $|x_0 - x''_{k_m}| = |x_0 - x'_{k_m} + x'_{k_m} - x''_{k_m}| \leq |x_0 - x'_{k_m}| + |x'_{k_m} - x''_{k_m}| < |x_0 - x'_{k_m}| + \frac{1}{k_m}$
Так как $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_m < ...$, то $k_m \geq m \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{k_m} = 0$. Также $\lim\limits_{m\to\infty} |x_0 - x'_{k_m}| = 0$. Тогда по теореме о предельном переходе в неравенстве: $\lim\limits_{m\to\infty} |x_0 - x''_{k_m}| = 0$, то есть $\lim\limits_{m\to\infty} x''_{k_m} = x_0$.

Так как $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in [a;b]$, то $\lim\limits_{m\to\infty} f(x'_{k_m}) = \lim\limits_{m\to\infty} f(x''_{k_m}) = f(x_0)$. Таким образом, выполняется $\lim\limits_{m\to\infty} |f(x'_{k_m}) - f(x''_{k_m})| = 0$, что противоречит тому, что $\forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f(x'_{k_m}) - f(x''_{k_m})| \geq \varepsilon$ ■

7.3 Теорема об обратной функции

Определение: промежутком называется содержащее более одной точки множество $X \subset \mathbb{R}$, которое вместе с любыми двумя точками содержит целиком отрезок с концами в этих точках.
Определение: функция $f(x)$ называется непрерывной на промежутке I, если она определена на этом промежутке, непрерывна во всех его внутренних точках, а в концах промежутка, если они ему принадлежат, имеет место соответствующая односторонняя непрерывность.

Лемма 1: если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I, то её множество значений $E(f) = f(I)$ - также промежуток или состоит из одной точки (для постоянной функции).
□ Пусть $y_1, y_2 \in f(I)$, тогда $\exists x_1, x_2 \in I : f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Так как $f(x)$ непрерывна на I, то по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции выполняется:

$$\forall y_0 \in [y_1; y_2] \hookrightarrow \exists x_0 \in [x_1, x_2] : f(x_0) = y_0$$

Отсюда следует, что $y_0 \in f(I)$. Значит, $f(I)$ - промежуток. ■

Лемма 2: пусть функция $f(x)$ нестрого монотонна и не является постоянной на промежутке I, тогда $f(x)$ непрерывна на $I \iff f(I)$ - промежуток.
□ ($\Rightarrow$) Следует из предыдущей леммы.
($\Leftarrow$) Для определённости считаем, что $f(x)$ возрастает на I. Пусть $f(x)$ разрывна во внутренней точке x_0 промежутка I. Так как разрыв первого рода и неустранимый, то $f(x_0+0) > f(x_0-0)$ (соответствующие леммы можно применять для промежутка, так как, точка разрыва внутренняя, а значит, от рассмотрения разрывов на промежутке можно перейти к рассмотрению разрывов на интервале, получаемом из промежутка удалением концов, если они ему принадлежат).
Рассмотрим точки $x_1, x_2 \in I : x_1 < x_0 < x_2$, тогда $y_1 = f(x_1) \leq f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0) \leq f(x_2) = y_2$. Ясно, что $y_1, y_2 \in f(I)$, но весь отрезок $[y_1, y_2] \notin f(I)$, так как из всех точек интервала $(f(x_0 - 0); f(x_0 + 0))$ множеству $f(I)$ принадлежит разве что точка $f(x_0)$. Значит, $f(I)$ не является промежутком - противоречие.
Теперь рассмотрим случай разрыва в конце промежутка I, если этот конец принадлежит промежутку. Пусть, например, левый конец $a \in I$ и в этой точке $f(x)$ не является непрерывной справа. Рассмотрим точку $x_2 \in I : x_2 > a$, тогда $f(a) < f(a + 0) \leq f(x_2) = y_2$. $f(a), y_2 \in f(I)$, но $[f(a); y_2] \notin f(I)$. Значит, $f(I)$ не является промежутком - противоречие. ■

Определение: пусть $f(x)$ - функция с областью определения $X = D(f)$ и множеством значение $Y = E(f)$, причём $f : X \to Y$ - биекция, тогда функция $f(x)$ называется обратимой на множестве X; обратное соответствие определяет функцию с областью определения Y и множеством значений X, которая называется обратной к функции $f(x)$ и обозначается $f^{-1}(y)$.

Теорема об обратной функции: пусть функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна на промежутке I, тогда на промежутке $J = f(I)$ определена, строго монотонна в ту же сторону и непрерывна обратная функция $f^{-1}(y)$.
□ Пусть для определённости $f(x)$ строго возрастает на I. $f(x)$ непрерывна на $I \Rightarrow$ по лемме 1, J - промежуток.
Покажем, что $f(x)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между I и J. Пусть это не так, то есть $\exists x_1, x_2 \in I : x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)$. Но если для определённости $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$ (в силу строгого возрастания) - противоречие. Значит, $\exists f^{-1}(y)$. При этом $D(f) = E(f^{-1}) = I$, $E(f) = D(f^{-1}) = J$.
Покажем, что $f^{-1}(y)$ строго возрастает на J. Пусть $y_1, y_2 \in J$, $y_1 < y_2$. Докажем, что $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Пусть это не так, то есть $x_1 = f^{-1}(y_1) \geq x_2 = f^{-1}(y_2)$, тогда в силу строгого возрастания $f(x)$: $y_1 = f(x_1) \geq y_2 = f(x_2)$ - противоречие.
Так как $E(f^{-1}) = I$ - промежуток, и $f^{-1}(y)$ монотонна на J, то $f^{-1}(y)$ непрерывна на J по лемме 2. ■

8 БИЛЕТ 8

8.1 Непрерывность элементарных функций

8.1.1 Степенная функция с натуральным или рациональным показателем

Функция $f(x) = x$ непрерывна в каждой точке (очень просто доказать по Гейне).

Функция $f(x) = x^n$, где $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ непрерывна в каждой точке как произведение/отношение непрерывных функций.

Функция $f(x) = \sqrt[n]{x}$, где $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ при чётных n или $x \in \mathbb{R}$ при нечётных n, непрерывна в каждой точке как обратная к $f(x) = x^n$ на соответствующем промежутке.

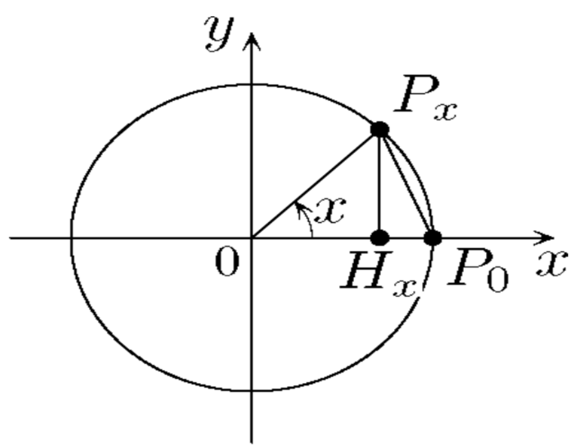
Функция $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m$, где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, x > 0$ непрерывна в каждой точке как произведение непрерывных функций $g(x) = \sqrt[n]{x}$.

Функция $f(x) = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ непрерывна, так как $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

8.1.2 Тригонометрические функции

Лемма: $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow |\sin x| \leq |x|$; если $x \neq 0$, то $|\sin x| < |x|$.
□ Если $x = 0$, то по определению функции $\sin x$: $\sin 0 = 0$.
Рассмотрим случай $x \neq 0$. В силу нечётности функций x и $\sin x$ достаточно доказать, что $|\sin x| < x$ при $x > 0$. Если $x \geq \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$. Если $x < \frac{\pi}{2}$, то

$$0 < \sin x = P_x H_x < P_x P_0 < \cup P_x P_0 = x.$$



Всё доказано. ■

Теорема: функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ непрерывны каждая на своей области определения.
□ В силу леммы:

$$|\sin x - \sin a| = |2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}| \leq 2 \cdot |\frac{x-a}{2}| \cdot 1 = |x-a|$$

Поэтому $\forall a \in \mathbb{R}$ выполняется:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon : \forall x, |x-a| < \delta \hookrightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\sin x$ непрерывна в каждой точке. Непрерывность $\cos x$ доказывается аналогично. $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ непрерывны на своих областях определения как отношения непрерывных функций. ■

Функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны как обратные функции соответственно к $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ на соответствующих промежутках.

8.2 Определение и свойства показательной функции

Определение: пусть $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$, тогда значение a^x определяется как $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$, где r_n - произвольная последовательность рациональных чисел такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

Установим корректность этого определения:
□ I) *Существование*:
Предварительно докажем, что $\forall a > 0 \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.
Если $a > 1$, то в силу того, что $\sqrt[n]{a} > 1$, выполняется $\sqrt[n]{a} = 1 + \beta_n$, где $\beta_n > 0$. Тогда:

$$a = (1 + \beta_n)^n \geq 1 + n\beta_n > n\beta_n \Rightarrow 0 < \beta_n < \frac{a}{n}.$$

По теореме о двух милиционерах, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
Если $0 < a < 1$, то $b = \frac{1}{a} > 1$. Тогда из предыдущего предела следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1.$$

При $a = 1$ последовательность постоянна, и утверждение очевидно.

Теперь перейдём к доказательству корректности определения.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}} = 1$. Значит:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N} : -\varepsilon < a^{-\frac{1}{k}} - 1 < a^{\frac{1}{k}} - 1 < \varepsilon$$

(указанное неравенство выполняется при всех $k \geq k_0(\varepsilon)$, но для доказательства достаточно одного такого числа).
Пусть теперь r_n - произвольная сходящаяся последовательность рациональных чисел. Докажем, что последовательность $y_n = a^{r_n}$ также сходится. Для произвольных $n, m \in \mathbb{N}$ имеем:

$$|y_n - y_m| = |a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1|$$

Так как r_n сходится, то она ограничена сверху: $\exists C \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow r_m \leq C$. Значит, $a^{r_m} \leq a^C$. Так как последовательность r_n сходится, то она фундаментальна $\Rightarrow$ для числа $k(\varepsilon)$:

$$\exists n_0(k(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow |r_n - r_m| < \frac{1}{k} \Rightarrow \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow -\frac{1}{k} < r_n - r_m < \frac{1}{k} \Rightarrow \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow a^{-\frac{1}{k}} - 1 < a^{r_n - r_m} - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1$$

Отсюда следует, что $\forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow -\varepsilon < a^{r_n - r_m} - 1 < \varepsilon$.
Окончательно имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1| < a^C \cdot \varepsilon \Rightarrow \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow |y_n - y_m| < a^C \cdot \varepsilon$$

Таким образом, последовательность y_n фундаментальна, следовательно, сходится.

II) *Единственность*:
Доказано, что $\forall r_n \in \mathbb{Q} : \lim\limits_{n\to\infty} r_n = x \in \mathbb{R} \hookrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} \in \mathbb{R}$.
Пусть $\exists r'_n \in \mathbb{Q}, r''_n \in \mathbb{Q} : \lim\limits_{n\to\infty} r'_n = \lim\limits_{n\to\infty} r''_n = x$, но $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n} = y \neq z = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r''_n}$.

Рассмотрим последовательность $\gamma_n = \{r'_1, r''_1, r'_2, r''_2, ..., r'_n, r''_n, ...\}$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = x$ (вне любой $U_\delta(x)$ не более конечного числа членов r'_n и не более конечного числа членов r''_n, значит не более конечного числа членов γ_n). Однако последовательность a^{γ_n} имеет два различных частичных предела, а значит, расходится - противоречие.

III) *Преемственность*:
Докажем, что если $x \in \mathbb{Q}$, то a^x в смысле возведения в действительную степень совпадает с a^x в смысле возведения в рациональную степень.
Рассмотрим последовательность $r'_n : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow r'_n = x$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = x$. В силу доказанной единственности, $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n} = a^{r'_n}$. ■

При $a = 1$ определим $a^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. При $0 < a < 1$ определим $a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$; это можно сделать, так как $\frac{1}{a} > 1$.

Таким образом, определена функция $f(x) = a^x$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Лемма: $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow a^x > 0$; если $a > 1$, то a^x строго возрастает на $\mathbb{R}$; если $0 < a < 1$, то a^x строго убывает на $\mathbb{R}$.
□ Докажем сначала, что если $a > 1$, то a^x строго возрастает на $\mathbb{R}$.
Пусть $x_1 < x_2$. Рассмотрим $r', r'' \in \mathbb{Q} : x_1 < r' < r'' < x_2$. $\forall n \in \mathbb{N}$ выберем $r_n \in \mathbb{Q} : r_n \in (x_1; x_1 + \frac{1}{n})$.
По теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_1$. Тогда по определению возведения в действительную степень: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{x_1}$. Так как $x_1 < r'$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow r_n < r' \Rightarrow \forall n \geq n_0 \hookrightarrow a^{r_n} < a^{r'}$. Тогда по теореме о переходе к пределу в неравенстве: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{x_1} \leq a^{r'}$. Аналогично, $a^{r''} \leq a^{x_2}$. Так как $a^{r'} < a^{r''}$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$, то есть a^x строго возрастает на $\mathbb{R}$ при $a > 1$.
По принципу Архимеда: $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : k > x \iff \exists k \in \mathbb{N} : -x > -k \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x > -k \Rightarrow a^x > a^{-k} > 0$.
Лемма доказана для $a > 1$.
Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$. Значит, $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x} > 0$ и строго убывает на $\mathbb{R}$.

Теорема: функция a^x непрерывна на $\mathbb{R}$ $\forall a > 0$.
□ В силу соотношения $a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$ теорему достаточно доказать при $a > 1$.
Рассмотрим любую последовательность $x_n \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_0 < x_n$. Тогда найдётся последовательность $r_n \in \mathbb{Q} : x_0 < x_n < r_n$ (достаточно выбрать $\forall n \in \mathbb{N}$ рациональную точку $r_n \in (x_n; x_n + \frac{1}{n})$).
Ясно, что $0 < r_n - x_0 < x_n - x_0 + \frac{1}{n}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_0) = 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_0 + \frac{1}{n}) = 0$. По теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_0$.
Так как $x_0 < x_n < r_n$, то $a^{x_0} < a^{x_n} < a^{r_n}$. По определению степени с действительным показателем: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{x_0}$.
Тогда по теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{x_0}$. Так как последовательность x_n любая, то $\lim\limits_{x\to x_0+0} a^x = a^x_0$.
Аналогично $\lim\limits_{x\to x_0-0} a^x = a^x_0$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. Значит, a^x непрерывная в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$. ■

Лемма: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +0$, если $a > 1$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, если $0 < a < 1$.
□ В силу соотношения $a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$ достаточно доказать первую часть леммы.
Так как при $a > 1$ функция a^x строго возрастает на $\mathbb{R}$, то по теореме о пределах монотонных функций: $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} a^x$ (конечный или $+\infty$). Достаточно доказать, что хотя бы для одной последовательности $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = +\infty$. Тогда для любой другой последовательности это также будет верно. Рассмотрим $x_n = n$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{a})^n = +0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$. Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Аналогично при $x_n = -n$ выполняются равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{a})^n = +0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +0$. ■

Лемма: $\forall a, b > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ выполняются следующие равенства:
1) $(ab)^x = a^x b^x$;
2) $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$;

3) $a^{x+y} = a^x a^y$;
4) $(a^x)^y = a^{xy}$.
□ Докажем свойство 3. Рассмотрим любые последовательности $x_n, y_n \in \mathbb{Q} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Тогда $a^{x_n+y_n} = a^{x_n}a^{y_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$. По определению непрерывности по Гейне:

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n+y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{y_n} = a^x \cdot a^y$$

Свойства 1, 2, 4 доказываются аналогично.

Докажем свойство 5.
Пусть сначала $y = r \in \mathbb{Q}$. Докажем, что $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a^x)^r = a^{xr}$.
Рассмотрим произвольную последовательность $x_n \in \mathbb{Q} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n r = xr$. В силу непрерывности функции a^x:

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x, \ \lim_{n\to\infty} a^{x_n r} = a^{xr}.$$

Так как $a^{x_n r} = (a^{x_n})^r$, то в силу непрерывности функции x^r в точке $a^x > 0$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n r} = \lim_{n\to\infty} (a^{x_n})^r = (a^x)^r.$$

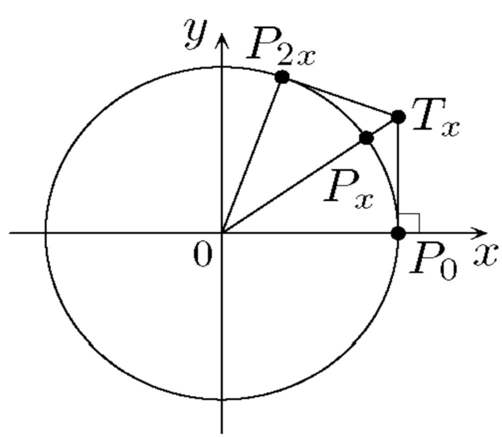
Пусть теперь $y \in \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольную последовательность $r_n \in \mathbb{Q} : \lim\limits_{n\to\infty} r_n = y$. В силу доказанного выше соотношения имеем: $(a^x)^{r_n} = a^{xr_n}$.
Так как при фиксированном x функция $f(y) = (a^x)^y$ непрерывна по y, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a^x)^{r_n} = (a^x)^y$.
Также $\lim\limits_{n\to\infty} xr_n = xy$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{xr_n} = a^{xy}$ в силу непрерывности функции a^x.
Так как $(a^x)^{r_n} = a^{xr_n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a^x)^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{xr_n} \Rightarrow (a^x)^y = a^{xy}$. ■

8.3 Замечательные пределы

Теорема (первый замечательный предел):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

□ Функция $\frac{\sin x}{x}$ определена при $x \neq 0$. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x$.



$\operatorname{tg} x = P_0T_x$. Далее, $P_0T_x + T_xP_{2x} > \cup P_0P_{2x}$. В силу симметрии относительно прямой OP_x, имеет место неравенство $P_0T_x > \cup P_0P_x$, то есть $\operatorname{tg} x > x$.
Итак, при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

В силу чётности функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ последнее неравенство выполняется при $|x| < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$, то есть в $\mathring{U}_{\frac{\pi}{2}}(0)$. Так как $\cos x$ непрерывна в точке $x = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$.

По теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ■

Теорема (второй замечательный предел):

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

□ По определению: $e = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, где $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Рассмотрим последовательность $n_k \in \mathbb{N} : \lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$. Вне любой $U_\varepsilon(e)$ содержится не более конечного числа членов a_n. Пусть $n_0(\varepsilon)$ - наибольший из их номеров. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, то среди членов n_k лишь конечное число не превосходит $n_0(\varepsilon)$. Значит, вне $U_\varepsilon(e)$ содержится лишь конечное число членов a_{n_k}. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k} = e \quad (*)$$

Рассмотрим теперь последовательности $x_k \in \mathbb{R} : \lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, $x_k > 0$ и $n_k = [\frac{1}{x_k}]$.

По определению целой части числа: $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow n_k \leq \frac{1}{x_k} < n_k + 1$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty \Rightarrow$ имеет место $(*)$. Также $\frac{1}{n_k+1} < x_k \leq \frac{1}{n_k}$. Поэтому:

$$(1+\frac{1}{n_k+1})^{n_k} < (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} < (1+\frac{1}{n_k})^{n_k+1}$$

Правая часть неравенств:

$$\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k}\cdot(1+\frac{1}{n_k}) = e\cdot 1 = e$$

Левая часть неравенств (следует из $(*)$):

$$\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k+1})^{n_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n_k+1})^{n_k+1}}{(1+\frac{1}{n_k+1})} = \frac{e}{1} = e$$

По теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e$. Так как x_k любая, то $\lim\limits_{x\to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Теперь найдём предел слева. Сначала сделаем замену $y = -x$: если $x \to -0$, то $y \to +0$, и $y \neq 0$ при $x \neq 0$. Имеем:

$$\lim_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +0}(1-y)^{-\frac{1}{y}}$$

Теперь сделаем замену $z = \frac{y}{1-y}$: если $y \to +0$, то $z \to +0$, и $z \neq 0$ при $y \neq 0$. При этом $y = \frac{z}{1+z}$Имеем:

$$\lim_{y\to +0}(1-y)^{-\frac{1}{y}} = \lim_{z\to +0}(1-\frac{z}{1+z})^{-\frac{1+z}{z}} = \lim_{z\to +0}(\frac{1}{1+z})^{-(1+\frac{1}{z})} = \lim_{z\to +0}(1+z)^{1+\frac{1}{z}} = \lim_{z\to +0}(1+z)^{\frac{1}{z}}\cdot\lim_{z\to +0}(1+z) = e\cdot 1 = e$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Итак, $\lim\limits_{x\to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. ■

Пример 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

□ Так как $g(u) = \ln(u)$ непрерывна в точке $u = e$, то по теореме о переходе к пределу под знаком непрерывной функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}(\ln(1+x))^{\frac{1}{x}} = \ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1 \quad ■$$

Пример 2:
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$
$\square$ В пределе $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$ сделаем замену $u=e^x-1$: если $x\to 0$, то $u\to 0$, и $u\neq 0$ при $x\neq 0$. Предел примет вид:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x-1)}{e^x-1}=1 \iff \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$$
Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$. $\blacksquare$

9 БИЛЕТ 9

9.1 Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную

Определение: производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, если этот предел конечен или равен $+\infty$ или $-\infty$; обозначается производная в точке x_0 как $f'(x_0)$.

Равносильная запись предела: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Определение: правой (левой) производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел $\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (соответственно $\lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$), если этот предел конечен или равен $+\infty$ или $-\infty$; обозначается правая (левая) производная в точке x_0 как $f'_+(x_0)$ (соответственно $f'_-(x_0)$).

Теорема: если функция $f(x)$ имеет конечную производную (правую производную, левую производную) в точке x_0, то эта функция непрерывна (соответственно непрерывна справа, непрерывна слева) в этой точке.
$\square$ Докажем для обычной производной, для односторонних производных доказательство аналогично.
Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A\in\mathbb{R}$, то $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A+\alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.
Тогда $f(x)=f(x_0)+(A+\alpha(x))(x-x_0)\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, то есть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. $\blacksquare$

9.2 Производная суммы, произведения, частного двух функций

Теорема: пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные в точке x_0, тогда функции $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеют конечные производные в точке x_0 (в последнем случае нужно требовать $g'(x_0)\neq 0$), причём в точке x_0 выполняются равенства:
$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$(\frac{f(x)}{g(x)})'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$
$\square$ 1) $(f(x_0)+g(x_0))'=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)+g(x_0+t)-f(x_0)-g(x_0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}+\lim\limits_{t\to 0}\frac{g(x_0+t)-g(x_0)}{t}=f'(x_0)+g'(x_0)$
2) $(f(x_0)g(x_0))'=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)g(x_0+t)-f(x_0)g(x_0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}(\frac{f(x_0+t)g(x_0+t)-f(x_0)g(x_0+t)}{t}+\frac{f(x_0)g(x_0+t)-f(x_0)g(x_0)}{t})=$
$=\lim\limits_{t\to 0}g(x_0+t)\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}+f(x_0)\lim\limits_{t\to 0}\frac{g(x_0+t)-g(x_0)}{t}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Функция $g(x)$ имеет конечную производную в точке $x_0\Rightarrow$ функция непрерывна в этой точке $\Rightarrow$
$\Rightarrow\lim\limits_{t\to 0}g(x_0+t)=g(x_0)$.
3) $(\frac{f(x)}{g(x)})'=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{f(x_0+t)}{g(x_0+t)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+t)+f(x_0)g(x_0)}{g(x_0)g(x_0+t)t}=$

$= \frac{1}{g(x_0)^2}(g(x_0)\lim\limits_{t\to0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} - f(x_0)\lim\limits_{t\to0}\frac{g(x_0+t)-g(x_0)}{t}) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ ■

Следствия:
1) $(Cf(x))' = Cf'(x)$
2) $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

Замечание: данная теорема естественно переносится на односторонние пределы.

9.3 Производная сложной функции

Теорема (производная сложной функции): пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0, а функция $g(u)$ имеет конечную производную в точке $u_0 = f(x_0)$, тогда функция $h(x) = g(f(x))$ имеет производную в точке x_0, причём $h'(x_0) = g'(u_0)f'(x_0)$.
□ Пусть $f'(x_0) = A$, $g'(u_0) = B$. Нужно доказать, что производная $h'(x_0)$ существует и равна AB.

По определению производной: $\lim\limits_{t\to0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = A$, $\lim\limits_{s\to0}\frac{g(u_0+s)-g(u_0)}{s} = B$.
Отсюда имеем:
$f(x_0+t) = f(x_0) + At + t\alpha(t)$, где $\lim\limits_{t\to0}\alpha(t) = 0$,
$g(u_0+s) = g(u_0) + Bs + s\beta(s)$, где $\lim\limits_{s\to0}\beta(s) = 0 \;\; (*)$.
Так как $\lim\limits_{t\to0}\alpha(t) = 0$, то $\alpha(t)$ определена в некоторой $\mathring{U}_\delta(0)$, но если доопределить $\alpha(0) = 0$, то $\alpha(t)$ определена в $U_\delta(0)$ и непрерывна в точке $t = 0$. Аналогично считаем, что функция $\beta(s)$ определена в $U_\varepsilon(0)$ и непрерывна в точке $s = 0$, причём $\beta(0) = 0$.
Рассмотрим функцию $s(t) = At + t\alpha(t)$. Она непрерывна в точке $t = 0$. Если равенство $(*)$ выполняется $\forall s \in U_\epsilon(0)$, то так как $\lim\limits_{t\to0}s(t) = 0$, то $(*)$ выполняется $\forall t \in U_{\delta_1}(0)$. Значит, $\forall t \in U_{\delta_1}(0)$ функцию $s(t)$ можно подставить в качестве s в $(*)$. Тогда:

$h(x_0+t) = g(f(x_0+t)) = g(f(x_0) + At + t\alpha(t)) = g(u_0 + s(t)) =$
$= g(u_0) + Bs(t) + s(t)\beta(s(t)) = h(x_0) + ABt + Bt\alpha(t) + \beta(s(t))(At + t\alpha(t))$

Таким образом:
$$\frac{h(x_0+t) - h(x_0)}{t} = AB + B\alpha(t) + \beta(s(t))(A + \alpha(t))$$
По теореме о непрерывности сложной функции:
$$\lim_{t\to0}\beta(s(t)) = 0$$
Отсюда следует:
$$h'(x_0) = \lim_{t\to0}\frac{h(x_0+t) - h(x_0)}{t} = AB. \;\; ■$$

9.4 Производная обратной функции

Теорема (производная обратной функции): пусть функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой $U_{\delta_0}(x_0)$, причём $\exists f'(x_0)$ (конечная, $+\infty$ или $-\infty$). Тогда обратная функция $g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причём $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Равенство формально сохраняется, если $f'(x_0) = 0$, $+\infty$ или $-\infty$ (если $f'(x_0) = 0$ и $f(x)$ строго возрастает в $U_{\delta_0}(x_0)$, то $g'(y_0) = +\infty$, если $f'(x_0) = 0$ и $f(x)$ строго убывает в $U_{\delta_0}(x_0)$, то $g'(y_0) = -\infty$, если $f'(x_0) = +\infty$ или $-\infty$, то $g'(y_0) = 0$).

□ Пусть $I = U_{\delta_0}(x_0)$ - промежуток. По теореме об обратной функции, на промежутке $J = f(I)$ определена, непрерывна и строго монотонна в ту же сторону обратная функция $g(y) = f^{-1}(y)$.

Рассмотрим $x_1 = x_0 - \frac{\delta_0}{2}$, $x_2 = x_0 + \frac{\delta_0}{2}$, $x_1, x_2 \in I$. Тогда $y_1 = f(x_1) \in J$, $y_2 = f(x_2) \in J$. Для определённости считаем, что $f(x)$ строго возрастает на I, тогда $y_1 < y_0 < y_2$, а так как J - промежуток, то $[y_1; y_2] \subset J$. Поэтому $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(y_0) \subset J$.

Для нахождения предела:

$$g'(y_0) = \lim_{s \to 0} \frac{g(y_0 + s) - g(y_0)}{s}$$

сделаем замену $s(t) = f(x_0 + t) - f(x_0)$, так как в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 имеет место равенство $\lim\limits_{t \to 0} s(t) = 0$, а также в силу строгой монотонности $s(t) \neq 0$ при $t \neq 0$.
Далее:

$$g(y_0) = x_0$$

$$g(y_0 + s) = g(f(x_0) + f(x_0 + t) - f(x_0)) = g(f(x_0 + t)) = x_0 + t$$

Таким образом, $g(x_0 + s) - g(x_0) = t$.
Поэтому:

$$g'(y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{t}{f(x_0 + t) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Если $f'(x_0) = 0$ и $f(x)$ строго возрастает на I, то $sign(f(x_0+t) - f(x_0)) = sign(t)$, дробь под знаком последнего предела положительна, и $g'(y_0) = -\infty$. Аналогично разбирается случай убывания $f(x)$. Если $f'(x_0) = +\infty$ или $-\infty$, то из предела видно, что $g'(y_0) = 0$. ■

Замечание: теорема о производной обратной функции вместе с доказательством сохраняется для односторонних окрестностей (у функции и обратной функции односторонние производные).

9.5 Производные элементарных функций

Производная экспоненты: $a > 0, \forall x \in \mathbb{R}$:

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

□ $(a^{x_0})' = \lim\limits_{t \to 0} \frac{a^{x_0+t} - a^{x_0}}{t} = a^{x_0} \lim\limits_{t \to 0} \frac{a^t - 1}{t} = a^{x_0} \ln a$ ■

Производная логарифма: $a > 0, a \neq 0, \forall x > 0$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$$

□ $(\log_a(x_0))' = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\log_a(x_0+t) - \log_a(x_0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\log_a(1 + \frac{t}{x_0})}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{t}{x_0})}{t \ln a} = \frac{1}{x_0 \ln a}$ ■

Производная степенной функции:
1) $\alpha \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

□ $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$ ■

2) $n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

□ Докажем по индукции.
При $n = 1$: $(x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1$ - верно.
2) Пусть при некотором $k \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $(x^k)' = k x^{k-1}$.
3) Тогда $(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = k x^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = k x^k + x^k = (k+1) x^k$
Нужное равенство получено при $n = k + 1$, значит, при $\alpha \in \mathbb{N}$ утверждение доказано.

3) $m \in \mathbb{Z}, \forall x \neq 0$

$$(x^m)' = m x^{m-1}$$

□ Если $m = 0$, то $(x^0)' = 1' = 0$ - верно при $x \neq 0$.
Если $m > 0$, то $m \in \mathbb{N}$ - уже доказано.
Если $m < 0$, то $m = -n, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$(x^{-n})' = (\frac{1}{x^n})' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} = mx^{m-1}$$

Всё доказано. ■

Производная тригонометрических функций:
1) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(\sin x)' = \cos x$$

□ $(\sin x_0)' = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(x_0+t)-\sin(x_0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{2\cos(x_0+\frac{t}{2})\sin\frac{t}{2}}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \cos(x_0+\frac{t}{2}) \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = \cos x_0$. ■

$$(\cos x)' = -\sin x$$

□ Доказывается аналогично. ■

2) $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

□ $(\operatorname{tg} x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. ■

3) $\forall x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

□ Доказывается аналогично. ■

Производная гиперболических функций: $\forall x \in \mathbb{R}$ (доказывается элементарно)

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Производная обратных тригонометрических функций:
1) В каждой точке $x \in (-1;1)$ имеют место равенства $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, в точках $x = -1$, $x = 1$ имеют место равенства:

$$(\arcsin x)'|_{x=1} = +\infty$$

$$(\arcsin x)'|_{x=-1} = +\infty$$

$$(\arccos x)'|_{x=1} = -\infty$$

$$(\arccos x)'|_{x=-1} = -\infty$$

2) В каждой точке $x \in \mathbb{R}$ имеют место равенства:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

□ 1) Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Функция строго возрастает на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; обратная функция $g(y) = f^{-1}(y) = \arcsin y$. В любой точке $y_0 \in (-1; 1)$ выполняется:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0{}^2}}$$

Здесь учтено, что $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \hookrightarrow \cos x > 0$. Таким образом, $\forall x \in (-1; 1) \hookrightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, равенство формально сохраняется для односторонних производных в точках $x = -1$ и $x = 1$.
Формула для производной функции $\arccos x$ доказывается аналогично.

2) Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$. Функция строго возрастает на $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$; обратная функция $g(y) = f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$. В любой точке $y_0 \in \mathbb{R}$ выполняется:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \cos^2 x_0 = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1+y_0{}^2}$$

Таким образом, $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
Формула для производной функции $\operatorname{arcctg} x$ доказывается аналогично. ■

9.6 Дифференцируемость функции в точке, дифференциал

Определение: функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется дифференцируемой в этой точке, если её приращение в этой точке может быть представлено в виде:

$$\Delta f(x_0) \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, A \in \mathbb{R},$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то есть:

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0$$

При этом линейная часть приращения $A \cdot \Delta x$ называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$.

Теорема: функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \iff \exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$, при этом в случае дифференцируемости $A = f'(x_0)$
□ ($\Rightarrow$) Если $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, то

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x) \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A \in \mathbb{R},$$

так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Таким образом, $\exists f'(x_0) = A \in \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = A \in \mathbb{R}$, тогда

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Поэтому $\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0$. ■

Теорема: пусть $u = u(x), v = v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, тогда имеют место равенства:

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

В последнем выражении $v(x_0) \neq 0$
$\square$ Доказывается умножением соответствующих выражений для производных на dx. $\blacksquare$

Теорема (инвариантность формы первого дифференциала относительно замены переменной):в равенстве $df(x) = f'(x)dx$, где x - независимая переменная, вместо x можно подставить любую дифференцируемую функцию $u(x)$.
$\square$ Пусть $u(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = u(x_0)$. Тогда:

$$f(u(x))|_{x=x_0} = f'(u_0)u'(x_0).$$

Умножим это равенство на dx:

$$df(u(x)) = f'(u_0)u'(x_0)dx = f'(u_0)du.$$

То есть:

$$df(u) = f'(u)du$$

Всё доказано. $\blacksquare$

9.7 Геометрический смысл производной

Определение: пусть $k(x)$ - угловой коэффициент хорды (секущей) графика функции $f(x)$, проходящей через точки $M_0(x_0; y_0)$ и $M(x; y)$, где $x \neq x_0$. Если $\exists k = \lim\limits_{x \to x_0} k(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, то прямая с угловым коэффициентом k, проходящая через точку M_0, называется касательной к графику в точке M_0.

Уравнение невертикальной касательной:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

9.8 Функции, заданные параметрически, их дифференцирование

Определение: пусть $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где $t \in I$ (I - некоторый промежуток), тогда множество точек плоскости $\Gamma = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in I\}$ называется кривой (параметрически заданной) на плоскости. Если $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на I, то кривая Γ называется непрерывной.

Теорема о локальном представлении параметрически заданной кривой: пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ непрерывны в $U_\delta(t_0)$, причём функция $x(t)$ строго монотонна в этой окрестности, тогда кривая $\Gamma = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in U_\delta(t_0)\}$ является графиком непрерывной функции $y = f(x)$. Если при этом $\exists x'(t_0) \in \mathbb{R}$ и $\exists y'(t_0) \in \mathbb{R}$, причём $x'(t_0) \neq 0$, то $\exists f'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ (иными словами $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$).
$\square$ Так как функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна на $I = U_\delta(t_0)$, то по теореме об обратной функции на промежутке $J = x(I)$ определена и непрерывна обратная функция $t = t(x)$. Поэтому $(x, y) \in \Gamma \iff y = y(t(x))$, где $x \in J$, то есть кривая является графиком функции $y = f(x)$ на промежутке J. Функция $y = f(x)$ непрерывна как суперпозиция непрерывных функций $y(t)$ и $t(x)$. Далее, по теореме о производной обратной функции в точке $x_0 = x(t_0)$: $\exists t'(x_0) = \frac{1}{x'(t_0)}$, и по теореме о производной сложной функции: $\exists f'(x_0) = y'(t_0)t'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$.
$\blacksquare$

10 БИЛЕТ 10

10.1 Производные высших порядков

Определение: производная порядка $n \in \mathbb{N}$ функции $f(x)$ в точке x_0 задаётся рекуррентным соотношением:

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})',$$

где $f^{(0)} = f$, при условии, что $f^{(n-1)}$ определена и конечна в некоторой окрестности точки x_0.

Свойство производной высших порядков:

$$(f^{(n)})^{(m)} = f^{(n+m)}$$

Производные порядка n некоторых элементарных функций (всё доказывается по индукции):

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n,\ n \in \mathbb{N}_0$$

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} = n!C_\alpha^n x^{\alpha-n},\ n \in \mathbb{N}_0$$

$$(\frac{1}{x})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}_0$$

$$(\ln x)^{(n)} = (\frac{1}{x})^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},\ n \in \mathbb{N}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2}),\ n \in \mathbb{N}_0$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2}),\ n \in \mathbb{N}_0$$

Производная порядка n от сложной функции (всё доказывается по индукции):

$$(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$

$$(f(kx+b))^{(n)} = k^n \cdot f^{(n)}(kx+b)$$

10.2 Формула Лейбница для производной порядка n произведения

Теорема (формула Лейбница): пусть при $n \in \mathbb{N}$ в точке x_0 $\exists u^{(n)}(x_0)$, $\exists v^{(n)}(x_0)$, тогда произведение $u(x)v(x)$ имеет в точке x_0 производную порядка n, причём в этой точке

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

□ Доказательство проведём по индукции.
При $n = 1$ имеем известную формулу $(uv)' = u'v + uv'$.
Пусть формула Лейбница верна при некотором $n = m \in \mathbb{N}$.
Докажем, что формула верна и при $n = m + 1$:

$$(uv)^{(n+1)} = ((uv)^{(n)})' = (\sum_{k=0}^{n} C_n^k (u^{(n-k)} v^{(k)})' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (u^{(n-k)} v^{(k)})' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} u^{(n-k+1)} v^{(k)} = C_n^0 u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) u^{(n-k+1)} v^{(k)} + C_n^n u v^{(n+1)} =$$

$$= C_{n+1}^0 u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + C_{n+1}^{n+1} u v^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} = (uv)^{(n+1)}$$

Нужное равенство получено при $n = m + 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$ равенство доказано. ■

10.3 Дифференциалы высших порядков

Определение: дифференциал порядка n функции $f(x)$ в точке x определяется рекуррентным соотношением:

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

При $n = 1 : d^1 f = df = f'(x)dx$ - функция от x и dx. Если $d^{n-1} f$ - функция от x и dx, то, считая dx фиксированным, а x - переменным, $d^n f$ - дифференциал от $d^{n-1} f$ как функции переменной x.

Свойство дифференциала порядка n: если в точке x $\exists f^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$, то $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$.
□ Докажем данное утверждение по индукции.
При $n = 1$ имеем: $df(x) = f'(x)dx$ - известное соотношение.
Пусть $d^{n-1} f(x) = f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}$, тогда dx^{n-1} считаем постоянным, откуда получаем:

$$d^n f(x) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = dx^{n-1} d(f^{(n-1)}(x)) = dx^{n-1} f^{(n)}(x)dx = f^{(n)} dx^n$$

Всё доказано. ■

Неинвариантность дифференциала второго порядка относительно замены переменной:
Пусть x - независимая переменная, тогда $d^2 f(x) = f''(x)dx^2$. Пусть теперь $u = u(x)$ имеет конечную вторую производную, тогда du нельзя считать постоянной величиной:

$$d^2 f(u) = d(df(u)) = d(f'(u)du) = d(f'(u))du + f'(u)d(du) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2 u$$

Если $u(x)$ - независимая переменная или линейная функция от независимой переменной, то $d^2 u = 0$. В остальных случаях $d^2 u \neq 0$. Поэтому второй дифференциал неинвариантен относительно замены переменной.

11 БИЛЕТ 11

11.1 Теорема Ферма

Определение: точка x_0 называется точкой строгого (нестрогого) локального максимума функции $f(x)$, если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и выполняется:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) < f(x_0) \ \ (f(x) \leq f(x_0)).$$

Точка x_0 называется точкой строгого (нестрогого) локального минимума функции $f(x)$, если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и выполняется:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) > f(x_0) \ \ (f(x) \geq f(x_0)).$$

Все точки локального максимума и локального минимума называются точками локального экстремума.

Теорема Ферма: если в точке локального экстремума x_0 функции $f(x)$ (строгого или нестрогого) существует производная, то она равна нулю.
□ Пусть для определённости x_0 - точка локального минимума (для точки локального максимума доказательство аналогично). Тогда

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

так как $f(x) \geq f(x_0)$ при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$.
Аналогично $f'_-(x_0) \leq 0$, так как $f(x) \leq f(x_0)$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$.
Так как $f'(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0$ и $f'(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0$, то $f'(x_0) = 0$. ■

11.2 Теоремы о среднем

Определение: функция $f(x)$ называется дифференцируемой на промежутке I, если она имеет конечную производную в каждой внутренней точке I, а в концах промежутка, если они ему принадлежат, - соответствующие конечные односторонние производные.

Определение: функция $f(x)$ называется дифференцируемой в широком смысле на промежутке I, если она непрерывна на I, в каждой внутренней точке $x_0 \in I$ $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, а в концах промежутка, если они ему принадлежат, существуют конечные односторонние производные (конечные, или равные $+\infty$ или $+\infty$).

Теорема Ролля: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в широком смысле на интервале $(a;b)$, причём $f(a) = f(b)$, то $\exists \xi \in (a;b) : f'(\xi) = 0$.

□ По первой и второй теоремам Вейерштрасса, $f(x)$ ограничена на $[a;b]$, причём $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$ достигаются.

Если обе точные грани достигаются в концах отрезка, то $m = M$, так как $f(a) = f(b)$, и функция постоянна на $[a;b]$ $\forall x \in [a;b] \hookrightarrow f'(x) = 0$.

Пусть теперь хотя бы одна из точных верхних граней (для определённости, M) достигается в точке $\xi \in (a;b)$. Тогда ξ - точка локального максимума $f(x)$ (вообще говоря, нестрогого). Так как функция дифференцируема в широком смысле на $(a;b)$, то $\exists f'(\xi) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. По теореме Ферма, $f'(\xi) = 0$. ■

Теорема Коши: пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, $f(x)$ дифференцируема в широком смысле на $(a;b)$, $g(x)$ дифференцируема на $(a;b)$, причём $\forall x \in (a;b) \hookrightarrow g'(x) \neq 0$, тогда $\exists \xi \in (a;b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□ Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Подберём λ так, чтобы $\varphi(a) = \varphi(b)$: $f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b)$. Получаем:

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Из условия теоремы следует, что $g(b) - g(a) \neq 0$: если всё же $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля $\exists x_0 \in (a;b)$: $g'(x_0) = 0$, но это неверно ни для какой точки интервала $(a;b)$.

Функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема в широком смысле на $(a;b)$ (так как $g(x)$ в всех точках интервала имеет конечную производную, а $f(x)$ во всех точках интервала имеет конечную или определённого знака бесконечную производную).

При найденном λ для $\varphi(x)$ выполнено условие теоремы Ролля $\Rightarrow \exists \xi \in (a;b) : \varphi'(\xi) = 0$, то есть $f'(\xi)+\lambda g'(\xi) = 0$. Отсюда получаем:

$$\lambda = -\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Приравнивая λ, полученные разными способами, получим:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Всё доказано. ■

Теорема Лагранжа: пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в широком смысле на интервале $(a;b)$, тогда $\exists \xi \in (a;b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

□ Применим теорему Коши при $g(x) = x$ $(g'(x) = 1 \neq 0)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\xi)}{1},$$

где $\xi \in (a;b)$. ■

Теорема: если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I, и во всех внутренних точках I $\exists f'(x) = 0$, то $f(x)$ постоянная на I.
□ Пусть $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$, тогда на отрезке $[x_1; x_2]$ функция $f(x)$ непрерывна, а на интервале $(x_1; x_2)$ дифференцируема.
По теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $\xi \in (x_1; x_2)$. Так как $\forall x \in (x_1; x_2) \hookrightarrow f'(x) = 0$, то $f'(\xi) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
Итак, $\forall x_1, x_2 \in I \hookrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ функция $f(x)$ постоянная на I. ■

Следствие: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке I, и во всех внутренних точках I $\exists f'(x), g'(x)$, причём $f'(x) = g'(x)$ во всех внутренних точках I, то во всех точках I имеет место равенство $f(x) = g(x) + C$, где C - постоянная.
□ Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, $x \in I$. Функция $\varphi(x)$ непрерывна на I, и во всех внутренних точках $\exists \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C$ на I, то есть $f(x) = g(x) + C$. ■

11.3 Формула Тейлора

Определение: пусть функция $f(x)$ такова, что при некотором $n \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, тогда многочлен

$$P_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции $f(x)$ в точке x_0; разность $r_n(f, x) = f(x) - P_n(f, x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора, а равенство $f(x) = P_n(f, x) + r_n(f, x)$ - формулой Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0.

Лемма 1: $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow 1)\ P_n'(f, x) = P_{n-1}(f', x),\quad 2)\ r_n'(f, x) = r_{n-1}(f', x)$ при $n \in \mathbb{N}$.
□ Первый пункт:

$$P_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Таким образом:

$$P_n'(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k-1)}(x_0)}{k!} k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(f')^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} = P_{n-1}(f', x)$$

Второй пункт:

$$r_n'(f, x) = (f(x) - P_n(f, x))' = f'(x) - P_n'(f, x) = f'(x) - P_{n-1}(f', x) = r_{n-1}(f', x)$$

Всё доказано. ■

Лемма 2: $\forall k \in \mathbb{N}_0 : k \le n \hookrightarrow P_n^{(k)}(f, x_0) = f^{(k)}(x_0),\quad r_n^{(k)}(f, x_0) = 0$.
□ Многочлен Тейлора:

$$P_n(f, x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j,$$

Продифференцируем данную сумму $k \le n$ раз. Тогда для всех слагаемых с $j < k$ выполняется $((x - x_0)^j)^{(k)} = 0$. Поэтому k-я производная многочлена имеет вид:

$$P_n^{(k)}(f, x) = \sum_{j=k}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} j(j-1)...(j-k+1)(x-x_0)^{j-k} = \sum_{j=k}^{n} C_j^k f^{(j)}(x_0)(x-x_0)^{j-k} = f^{(k)}(x_0) + \sum_{j=k+1}^{n} C_j^k f^{(j)}(x_0)(x-x_0)^{j-k}$$

Так как многочлен Тейлора рассматривается в точке $x = x_0$, то последняя сумма равна нулю. Поэтому

$$P_n^{(k)}(f, x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

Так как $r_n^{(k)}(f, x_0) = f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(f, x_0)$, то $r_n^{(k)}(f, x_0) = 0$. ■

Теорема (остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано): пусть при некотором $n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, тогда остаточный член формулы Тейлора имеет вид:

$$r_n(f, x) = o((x - x_0)^n), \ x \to x_0$$

□ Докажем данную теорему по индукции.
При $n = 1$ утверждение верно в силу эквивалентности дифференцируемости в точке и существования в ней конечной производной. Пусть теорема верна для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что она верна для $n + 1$.

Если $f(x)$ имеет $(n+1)$-ю конечную производную в точке x_0, то $f'(x)$ имеет n-ю конечную производную в точке x_0. По предположению индукции: $r_n(f', x) = o((x - x_0)^n), \ x \to x_0$.

Так как $\exists f^{(n+1)}(x_0) \in \mathbb{R}$, то $\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow \exists f^{(n)}(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ дифференцируема в $U_\delta(x_0)$ по крайней мере один раз.

$r_{n+1}(f, x) = f(x) - P_{n+1}(f, x)$. Каждое из слагаемых дифференцируемо в $U_\delta(x_0)$, поэтому $r_{n+1}(f, x)$ дифференцируема в $U_\delta(x_0)$.

При фиксированном значении $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ применим к функции $r(x) \equiv r_{n+1}(f, x)$ теорему Лагранжа на отрезке $[x_0; x]$ (или на отрезке $[x; x_0]$, смотря какое из двух чисел больше):

$$r(x) - r(x_0) = r'(\xi)(x - x_0),$$

где $x_0 < \xi < x$ (или $x < \xi < x_0$). В любом случае $\xi = \xi(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \xi(x) = x_0$, $\xi(x) \neq x_0$.

По лемме 1: $r'(x) \equiv r'_{n+1}(f, x) = r_n(f', x)$. Тогда из предположения индукции следует, что

$$r'(x) = o((x - x_0)^n), \ x \to x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{r'(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

По теореме о замене переменной под знаком предела:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r'(\xi(x))}{(\xi(x) - x_0)^n} = 0$$

Так как $x_0 < \xi < x$ или $x < \xi < x_0$, то $|\xi(x) - x_0| < |x - x_0|$. Теперь рассмотрим предел:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r'(\xi(x))}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r'(\xi(x))}{(\xi(x) - x_0)^n} \cdot \frac{(\xi(x) - x_0)^n}{(x - x_0)^n} = 0 \Rightarrow r'(\xi(x)) = o((x - x_0)^n)$$

Предел равен нулю как произведение бесконечно малой функции на ограниченную (числитель второй дроби меньше знаменателя).

По лемме 2: $r(x_0) = 0$. Тогда вернёмся к выражению из теоремы Лагранжа:

$$r(x) = r'(\xi)(x - x_0) = o((x - x_0)^n)(x - x_0) = o((x - x_0)^{n+1})$$

Утверждение теоремы верно для значения $n + 1$. ■

Лемма: пусть при некотором $n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \exists f^{(n)}(x_0)$, тогда если $f(x) = Q(x) + o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$, где $Q(x)$ - многочлен степени не выше n, то $Q(x) = P_n(f, x)$.
□ Опустим индекс n. Запишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для $f(x)$ в точке x_0:

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$$

По условию:
$$f(x) = Q(x) + o((x - x_0)^n)$$
Вычтем одно уравнение из другого: $P(x) - Q(x) = o((x - x_0)^n$. Введём обозначение: $T(x) = P(x) - Q(x)$. Докажем, что $T(x) \equiv 0$.
Так как $T(x) = o((x - x_0)^n)$, то
$$\lim_{x \to x_0} \frac{T(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$
По теореме о замене переменной под знаком предела ($x = x_0 + t$; $x \to x_0$ при $t \to 0$; $x \neq x_0$ при $t \neq 0$):
$$\lim_{t \to 0} \frac{T(x_0 + t)}{t^n} = 0 \Rightarrow T(x_0 + t) = o(t^n) \Rightarrow \lim_{t \to 0} T(x_0 + t) = 0$$
Пусть $T(x_0 + t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$ - многочлен степени не выше n. Докажем, что все коэффициенты этого многочлена равны нулю.

Так как $\lim\limits_{t \to 0} T(x_0 + t) = 0$, то $a_0 = 0$. Тогда $T(x) = a_1 t + ... + a_n t^n = o(t^n)$. Поделим уравнение на $t \neq 0$: $a_1 + a_2 t + ... + a_n t^{n-1} = o(t^{n-1})$. В пределе $t \to 0$ получим $a_1 = 0$ и т.д. Последовательно все коэффициенты многочлена равны нулю. ■

Теорема (остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа): пусть функция $f(x)$ имеет $(n+1)$-ю конечную производную в $U_\delta(x_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $\forall x \in U_\delta(x_0)$ остаточный член формулы Тейлора имеет вид:
$$r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$
где $\xi \in (x_0, x)$ (или $\xi \in (x, x_0)$, смотря какое из двух чисел больше).
□ При $x = x_0$ формула имеет вид $f(x_0) = f(x_0)$ и верна $\forall \xi$. Пусть $x > x_0$, то есть $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ (при $x < x_0$ доказательство аналогично).

Рассмотрим функцию $r(x) = r_n(f, x)$. Она имеет $(n+1)$-ю конечную производную в $U_\delta(x_0)$ (а значит непрерывна в этой окрестности), причём в силу леммы 2: $r(x_0) = r'(x_0) = ... = r^{(n)}(x_0) = 0$.

Рассмотрим также функцию $s(x) = (x - x_0)^{n+1}$. Она имеет производные всех порядков, причём $s(x_0) = s'(x_0) = ... = s^{(n)}(x_0) = 0$; $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow s^{(n+1)}(x) = (n+1)!$. Также ясно, что $\forall x \neq x_0 \hookrightarrow s'(x) \neq 0$; $s''(x) \neq 0$; ...; $s^{(n)}(x) \neq 0$.

По теореме Коши:
$$\frac{r(x)}{s(x)} = \frac{r(x) - r(x_0)}{s(x) - s(x_0)} = \frac{r'(\xi_1)}{s'(\xi_1)},$$
где $\xi_1 \in (x_0; x)$.

Далее применим теорему Коши к функциям $r'(x)$ и $s'(x)$:
$$\frac{r(x)}{s(x)} = \frac{r'(\xi_1) - r'(x_0)}{s'(\xi_1) - s'(x_0)} = \frac{r''(\xi_2)}{s''(\xi_2)},$$
где $\xi_2 \in (x_0; \xi_1)$.

Продолжим цепочку:
$$\frac{r(x)}{s(x)} = \frac{r''(\xi_2) - r''(x_0)}{s''(\xi_2) - s''(x_0)} = \frac{r'''(\xi_3)}{s'''(\xi_3)} = \frac{r^{(4)}(\xi_4)}{s^{(4)}(\xi_4)} = ... = \frac{r^{(n)}(\xi_n)}{s^{(n)}(\xi_n)} = \frac{r^{(n)}(\xi_n) - r^{(n)}(x_0)}{s^{(n)}(\xi_n) - s^{(n)}(x_0)} = \frac{r^{(n+1)}(\xi)}{s^{(n+1)}(\xi)},$$
где $x_0 < \xi < \xi_n < ... < \xi_2 < \xi_1 < x$, то есть $\xi \in (x_0; x)$.
Так как $P_n(f, x)$ - многочлен степени не выше n, то $P_n^{(n+1)} = 0 \Rightarrow r^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$. Тогда получим:
$$r(x) = \frac{r^{(n+1)}(\xi)}{s^{(n+1)}(\xi)} s(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Всё доказано. ■

11.4 Основные разложения по формуле Тейлора

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \to 0$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n), \quad x \to 0$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n), \quad x \to 0$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0$$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} C_{-\frac{1}{2}}^k \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6), \quad x \to 0$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6), \quad x \to 0$$