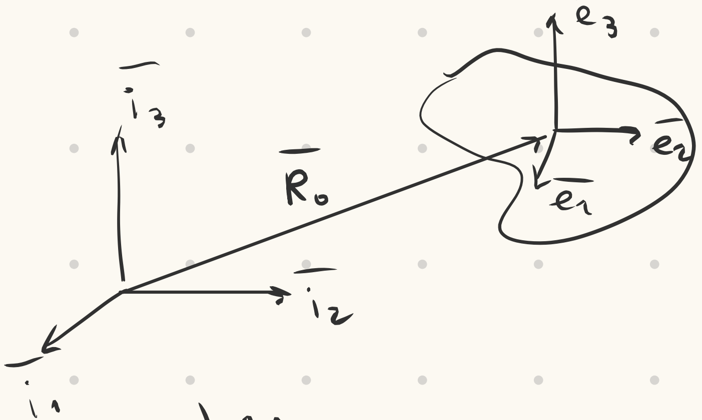
Анмех Теория 2

11. Параметризация углового движения: матрицы направляющих косинусов, углы Эйлера, кватернионы.

(11 семинар)

Движение мат точки: $\dot{\bar r} = \bar v$ — кватернионы

$\dot{\bar v} = \frac{F}{m}$ — геометрия масс



Как задать ориентацию?

1) Матрица перехода.

— Ортог. матрица $i \xrightarrow{A} j$ $AA^T = A^T A = E$

$\det A = \pm 1$, но -1 это отраж — не учитываем

$+1$ — поворот $\to$ $\boxed{\det A = 1}$

Получаем $SO(3)$ — группа преобразований — вращений (ортог матр, $\det A = 1$) которые мы рассматриваем.

$[\bar r^i = A \bar r^e]$ Матрица поворота ≡ Матрица косинусов

их рассматриваем

$$\begin{cases} \bar r \to A \\ \bar v \to \dot A \sim \bar\omega \end{cases}$$

⊛ Связь $\dot A$ и $\bar\omega$: $\dot{\bar e}_k^{\,i} = \bar\omega^i \times \bar e_k^{\,i} = [\bar\omega^i]_\times \cdot \bar e_k^{\,i}$ — соотношение Пуассона для базисных векторов

$$[\bar\omega^i]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\bar A = (\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3)$

$\dot{\bar A} = (\dot{\bar e}_1, \dot{\bar e}_2, \dot{\bar e}_3) = [\omega^i]_\times A$

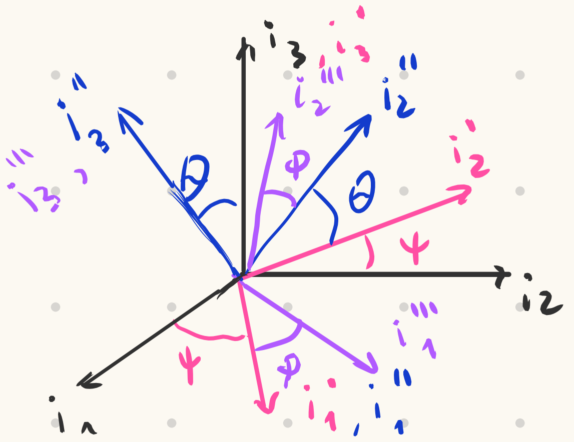
$\boxed{\dot{\bar A} = [\omega^i]_\times A}$ Соотношения Пуассона для матриц направляющих косинусов

+ 6 связей $\to$ 3 нез. пер.

• Имеем: $\left[\dot A = [\omega^i]_\times A = A[\omega^e]_\times\right]$ — соотношение Пуассона в связанном базисе $\{e\}$

$[\omega^i]_\times = [A\bar\omega^e]_\times = A[\omega^e]_\times A^T$

2) Углы Эйлера



Можем описать поворот 3мя поворотами.
Можем взять конкретные повороты:

$$\begin{bmatrix} 3 - 1 - 3 \\ \psi \quad \theta \quad \varphi \end{bmatrix}$$

- Углы Эйлера - тройка чисел, при этом 2 последовательных не должны быть одинаковыми и $\in \{1, 2, 3\}$ (12 возмож. послед.) $(3 \cdot 2 \cdot 3)$
- Каждое число - номер оси по которой вращаемся на заданный угол
- Получаем послед. трех поворотов

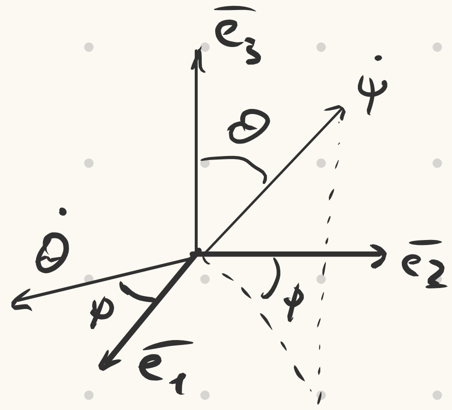
Как параметры связаны с $\bar{\omega}$?

$$\begin{matrix} \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{matrix} \overset{?}{\longleftrightarrow} \bar{\omega} \qquad \left[\bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\varphi}} + \bar{\dot{\theta}} = \bar{\omega}\right] \to \left[\bar{\dot{\psi}}^e + \bar{\dot{\varphi}}^e + \bar{\dot{\theta}}^e = \bar{\omega}^e\right]$$

(6 связ.)

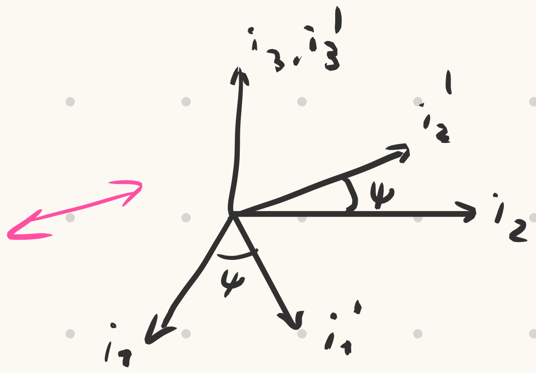
$$\bar{\dot{\varphi}}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\varphi}, \quad \bar{\dot{\theta}}^e = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\theta}$$

$$\bar{\dot{\psi}}^e = \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \dot{\psi}$$



$$(*) \quad \bar{\omega}^e = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

Пример: $A(3, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



- Получаем $\{i\} \xrightarrow{\psi - \theta - \varphi} \{e\} \equiv A(3, \varphi) - A(1, \theta) - A(3, \varphi)$

$$r^{i} = A(3,\psi)\, r^{i'} = A(3,\psi)A(1,\theta)\, r^{i''} = A(3,\psi)A(1,\theta)A(3,\varphi)\, r^{i'''}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi \\ \dot{\psi} = \dfrac{1}{\sin\theta}(p\sin\varphi + q\cos\varphi) \\ \dot{\varphi} = r - \operatorname{ctg}\theta\,(p\sin\varphi + q\cos\varphi) \end{cases}$$

— Углы Эйлера вырождаются + много sin, cos + $\frac{1}{\sin\theta}$, $\sin\theta = 0$?

Bad :(

3) Кватернионы

$$\Lambda = \lambda_0 \bar{1} + \lambda_1 \bar{i}_1 + \lambda_2 \bar{i}_2 + \lambda_3 \bar{i}_3 \overset{\in R^4}{=} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

1) $\Lambda + M = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 + \mu_0 \\ \bar{\lambda} + \bar{\mu} \end{pmatrix}$

2) $\alpha \Lambda = \begin{pmatrix} \alpha \lambda_0 \\ \alpha \bar{\lambda} \end{pmatrix}$

3) Умножение: $\bar{1} \circ \bar{i}_k = \bar{i}_k$, $\bar{1} \circ \bar{1} = \bar{1}$

$i_1 \circ i_2 = i_3$, $i_2 \circ i_3 = i_1$, $i_3 \circ i_1 = i_2$, $i_k \circ i_k = -1$

$i_2 \circ i_1 = -i_3$, ...

$$\Lambda \circ M = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \mu_0 - (\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \\ \lambda_0 \bar{\mu} + \mu_0 \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \times \bar{\mu} \end{pmatrix}$$

4) Сопряжение: $\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ -\bar{\lambda} \end{pmatrix}$, $\left[\Lambda \circ \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ -\bar{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \|\Lambda\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$\underset{\text{норма}}{\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda^2}$, $\underset{\text{модуль}}{|\Lambda| = \sqrt{\|\Lambda\|}}$, $\left[\Lambda \circ \underbrace{\frac{\tilde{\Lambda}}{\|\Lambda\|}}_{\Lambda^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right]$

Λ^{-1} – обратный элемент

Получаем кольцо

⊛ Подкласс $\|\Lambda\| = 1$:

$\Lambda = |\Lambda| \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \bar{e} \sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$, $\|\Lambda \circ M\| = \Lambda \circ M \circ (\widetilde{\Lambda \circ M}) = \Lambda \circ M \circ \tilde{M} \circ \tilde{\Lambda} = \|\Lambda\| \cdot \|M\|$

Кватернион поворота

$\|\Lambda \circ M\| = 1 \rightarrow \|\Lambda\| \cdot \|M\| = 1$

$$\boxed{\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \bar{e} \sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}}$$

. Th. Эйлера о конечном повороте – совмещаем 2 базиса одним поворотом, т.е. кватернион

$\{i\} \xrightarrow{\Lambda} \{e\}$: $\boxed{\bar{e}_k = \Lambda \circ \bar{i}_k \circ \tilde{\Lambda}}$ $\boxed{M^i = \Lambda \circ M^e \circ \tilde{\Lambda}}$

$$\dot{\Lambda} \overset{?}{=} \bar{\omega}$$

$$r^i = \Lambda \circ r^e \circ \tilde{\Lambda}$$

тут скалярная часть 0

$$v^i = \dot{\Lambda} \circ \bar{r}^e \circ \tilde{\Lambda} + \Lambda \circ \bar{r}^e \circ \dot{\tilde{\Lambda}} = \ldots = (2\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda}) \circ \bar{r} = (2\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda}) \times \bar{r}$$

$$\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \dot{\tilde{\Lambda}}$$

Получаем соотношение Пуассона: $\boxed{\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \bar{\omega}^i \circ \Lambda = \frac{1}{2} \Lambda \cdot \bar{\omega}^e}$

Ур-ие движения в кватернионах

$$\underbrace{i \xrightarrow{\Lambda} j \xrightarrow{M} e}_{N}$$

$$\bar{j}_k = \Lambda \circ i_k \circ \tilde{\Lambda}$$

$$\bar{e}_k = M \circ i_k \circ \tilde{M} = \underbrace{M \circ \Lambda}_{N} \circ i_k \circ \tilde{\Lambda} \circ \tilde{M}$$

$\boxed{N^i = M^i \circ \Lambda^i}$ Все заданы должны быть в одном базисе! <Проблема>

4) Параметры Родриго-Гамильтона —

— кватернион в собственном базисе (из которого совершается поворот)

обозначение кватерниона в параметрах Р-Г

$$\Lambda^i = \Lambda^*$$

$$M^j = M^*$$

$$M^i = \Lambda \circ M^j \circ \tilde{\Lambda}, \quad \Lambda = \Lambda^*, \; M^j = M^*, \; \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}^*$$

$$N^* = \underbrace{\Lambda \circ M^* \circ \tilde{\Lambda}}_{M^i} \circ \Lambda^* = \Lambda^* \circ M^* \circ \underbrace{\tilde{\Lambda}^* \circ \Lambda^*}_{\binom{1}{0}} = \Lambda^* \circ M^*$$

$$\boxed{N^* = \Lambda^* \circ M^*}$$

Переход в параметрах Родриго-Гамильтона

12. Сложение поворотов для матриц направляющих косинусов и кватернионов. Параметры Родриго-Гамильтона.

(11 семинар)

1) Сложение поворотов для матриц направляющих косинусов

$$\bar{r}^i = A\bar{r}^e \; ; \quad \bar{A} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "C"'] & j \arrow[r, "B"] & e \end{tikzcd} \quad \begin{cases} \bar{r}^i = A\bar{r}^j \\ \bar{r}^j = B\bar{r}^e \\ \bar{r}^i = C\bar{r}^e \end{cases} \qquad \bar{r}^i = A \cdot B\,\bar{r}^e \to \boxed{C = A \cdot B}$$

Сложение поворотов

2) Сложение поворотов для кватернионов:

$$\{i\} \xrightarrow{\Lambda} \{e\} : \quad \boxed{\bar{e}_k = \Lambda \circ \bar{i}_k \circ \tilde{\Lambda}} \qquad \boxed{M^i = \Lambda \circ M^j \circ \tilde{\Lambda}}$$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[rr, bend right, "N"'] & j \arrow[r, "M"] & e \end{tikzcd}$$

$$j_k = \Lambda \circ i_k \circ \tilde{\Lambda}$$

$$\bar{e}_k = M \circ i_k \circ \tilde{M} = \underbrace{M \circ \Lambda}_{N} \circ i_k \circ \tilde{\Lambda} \circ \tilde{M}$$

$$\boxed{N^i = M^i \circ \Lambda^i}$$ Все заданы должны быть в одном базисе!

< Проблема >

4) Параметры Родриго-Гамильтона —

— кватернион в собственном базисе (из которого совершается поворот)

$$\Lambda^i = \Lambda^*, \qquad N^* = \underbrace{\Lambda \circ M^* \circ \tilde{\Lambda}}_{M^i} \circ \Lambda^i = \Lambda^* \circ M^* \circ \underbrace{\tilde{\Lambda}^* \circ \Lambda^*}_{\left(\frac{1}{0}\right)} = \Lambda^* \circ M^*$$

$$M^j = M^*$$

$$M^i = \Lambda \circ M^j \circ \tilde{\Lambda}, \quad \Lambda = \Lambda^*, \; M^j = M^*, \; \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}^*$$

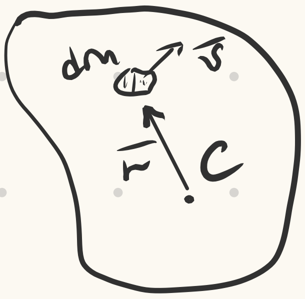
$$\boxed{N^* = \Lambda^* \circ M^*}$$

переход в параметрах Родриго-Гамильтона

Получаем, что есть кватернионы обычные и есть в параметрах Р-Г, т.е. в собств. базисе и там переход другой

13. Геометрия масс. Тензор инерции, обобщение теоремы Гюйгенса-Штейнера.

(10 семинар)



Считаем Кин. момент:

$$\overline{K}_c = \int [\overline{r} \times \overline{v}]\, dm \underset{\uparrow}{=} \int [\overline{r} \times \overline{v}_c]\, dm + \int \overline{r} \times (\overline{\omega} \times \overline{r})\, dm$$

$\overline{v} = \overline{v}_c + \overline{\omega} \times \overline{r}$ $\quad \underbrace{\int \overline{r}\, dm}_{0} \times v_c$ $\quad \int (r^2 \overline{\omega} - \overline{r}\,\overline{r}^T \overline{\omega})\, dm$

$$\boxed{\overline{K}_c = \int (r^2 \overline{\omega} - \overline{r}\,\overline{r}^T \overline{\omega})\, dm = \underbrace{\int (E_3 r^2 - \overline{r}\,\overline{r}^T)\, dm}_{J} \times \overline{\omega} = J_c \overline{\omega}}$$

Тензор инерции:

$$\boxed{J_c = \int (E_3 r^2 - \overline{r}\,\overline{r}^T)\, dm}$$ Общая формула отн полюса C

$$\boxed{J_c = \int \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dm}$$ Координатная форма

Характеризуется 6ю числами — на диаг. и не.
С другой стороны хватит 3х чисел — в матрице собственные числа (диагон)

$$\exists\, J_c^* = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad A = \int (y^{*2} + z^{*2})\, dm$$

полож. опред. кв. форма

$$B = \int (x^{*2} + z^{*2})\, dm \qquad A + B > C$$

$$C = \int (x^{*2} + y^{*2})\, dm$$

$$J = \begin{pmatrix} A & -D & -E \\ -D & B & -F \\ -E & -F & C \end{pmatrix}$$

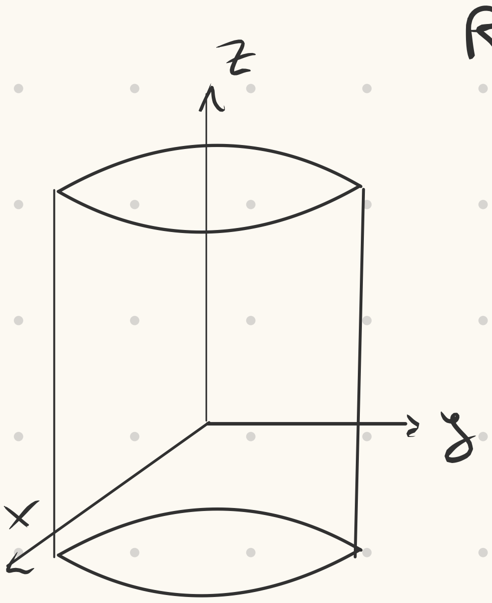
Имеем $\{i\} \xrightarrow{\varphi} \{j\}$: $\overline{r}^i = \varphi \overline{r}^j$, связь $J^i \to J^j$

$$J^i = E_3 r^{i2} - \overline{r}^i \overline{r}^{iT} = \varphi E_3 r^{j2} \varphi^T - \varphi r^j r^{jT} \varphi^T =$$

$r^{i2} = r^{iT} r^i = r^j \varphi^T \varphi r^j$

$$= \varphi (E_3 r^{j2} - r^j r^{jT}) \varphi^T$$

$$\boxed{J^i = \varphi J^j \varphi^T}$$ Переход из $i \to j$



R, H, m, J_c – ?

Просто задача:

$$J_c = \int \left(E_3 r^2 - \bar r \bar r^T\right) dm$$

Надо найти: $\int x^2 dm,\ \int y^2 dm,\ \int z^2 dm$

$\int xy\,dm,\ \int xz\,dm,\ \int yz\,dm$

$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ z\end{pmatrix}$: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $dm = \rho\cdot dx dy dz$

1) $\int x^2 dm = \int x^2 dx dy dz = \int r^2 \cos^2\varphi\, r dr d\varphi dz =$

$\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi\, d\varphi = 0$

$\int y^2 dm$ ‖

$$= \rho \int_{-H/2}^{H/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) dr d\varphi dz = \rho\cdot H\pi \int_0^R r^3 dr = \rho \frac{H\pi R^4}{4} = \frac{mR^2}{4}$$

2) $\int z^2 dm = \rho \int z^2 d\, r d\varphi dz = \rho \int_{-H/2}^{H/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R z^2 r dr d\varphi dz =$

$$= \rho \pi R^2 \frac{z^3}{3}\Big|_{-H/2}^{H/2} = \frac{mH^2}{12}$$

3) $\int xy\,dm = \int r^3 \underbrace{\sin\varphi\cos\varphi}_{\frac{\sin 2\varphi}{2} \to 0} d\varphi dr dz = 0$

4) $\int xz\,dm = \int r^2 z \underbrace{\cos\varphi}_{\to 0} dr d\varphi dz = 0$

5) $\int yz\,dm = 0$

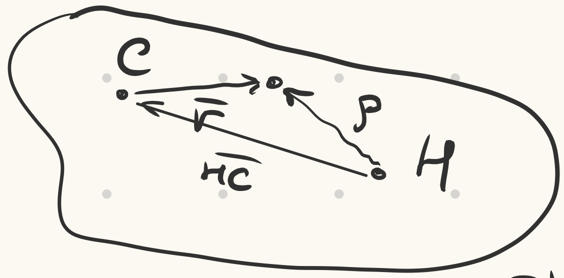
Получаем $J_c = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{12} + \frac{mH^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mH^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}$

⊛ Главные оси – выбираем одну ось вдоль оси симме три остальные к ней.

Базис в котором ТИ имеет диаг. вид.

• Главный момент инерции – собств. знач ТИ

⊛ Смена полюса:



$$J_H = \int (E_3\rho^2 - \rho\rho^T)\,dm =$$

$$= \int E_3(\overline{HC}^2 + r^2 + 2(\overline{HC}, r))\,dm - \int(\overline{HC}\,\overline{HC}^T + \bar r\bar r^T + \overline{HC}\,\bar r^T + \bar r\,\overline{HC}^T)\,dm$$

$$= J_C + m(E_3 \cdot \overline{HC}^2 - \overline{HC}\,\overline{HC}^T) \ (=)$$

• $2\int(\overline{HC},\bar r)\,dm = 2(\overline{HC}, \int r\,dm) = 0$

• $\int \overline{HC}\,\bar r^T dm = \overline{HC}\cdot\left(\overset{0}{\int \bar r\,dm}\right)^T = 0$

• $\int \bar r\,\overline{HC}^T = 0$

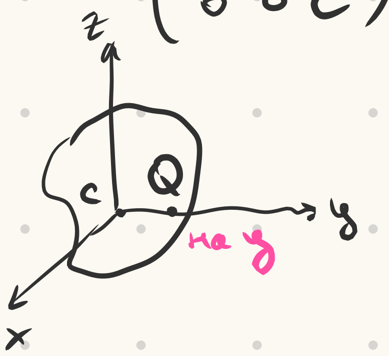
$$(=)\ J_C + m(E_3\overline{HC}^2 - \overline{HC}\,\overline{HC}^T)$$

Th. Гюйгенса-Штейнера: $\boxed{J_A = J_C + m(E_3\overline{HC}^2 - \overline{HC}\,\overline{HC}^T)}$

⊛ Главные центральные оси и моменты - для J_C, C - ц.м.

$$J_C = \begin{pmatrix} A&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{pmatrix} \qquad J_Q - ? = \begin{pmatrix} A&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{pmatrix} + m\left[\begin{pmatrix} l^2&0&0\\0&l^2&0\\0&0&l^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&l^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right] =$$

$$\overline{CQ} = \begin{pmatrix}0\\l\\0\end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix}A+ml^2&0&0\\0&B&0\\0&0&C+ml^2\end{pmatrix}$$

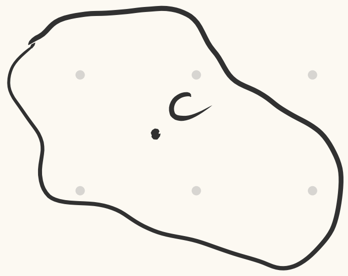
Школьная программа

14. Кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела.

15. Уравнения движения твердого тела. Случай Эйлера. Первые интегралы: энергия, кинетический момент. Системы координат. Осесимметричное тело в случае Эйлера.

Динамика тв. тела:

(12 семинар)



Дифф. ур-ие движения – 6 степ. свободы = 12 ур-ий

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}} = \bar{v} & \text{(3 ур-ия)} \\ \dot{\bar{v}} = \dfrac{\bar{F}}{m} & \text{(3 ур-ия)} \end{cases}$$ – СДУ для лин. перемещений (центра масс)

$+$

$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \bar{\omega}^e,\ |\Lambda| = 1$ – поворот (или углы Эйлера) (3 ур-ия)

$+$

$\dfrac{d\bar{K}_c^i}{dt} = \bar{M}^{i\,внеш}$ – ЗИКМ в у.м. на ИСО (3 ур-ия)

$\bar{K}_c = \underset{\displaystyle\int (E_3\rho^2 - \rho\rho^T)dm}{\underset{\shortparallel}{J_c}}\bar{\omega}$ $\quad \rightarrow \quad \dfrac{d\bar{K}_c}{dt} = \underset{\text{bad}\ \dot{i}}{\underset{\uparrow}{\dot{J}}}\bar{\omega} + J\dot{\bar{\omega}} = \bar{M}^{вн}$

• Идея брать J в базисе связанном с телом

$J^e = const$: $\quad \bar{K}_c^i = A\underbrace{(J^e\bar{\omega}^e)}_{\bar{K}_c^e}, \quad \bar{i} \xrightarrow{A} \bar{e}, \quad \dot{A} = A[\bar{\omega}^e]_\times$

Получаем $\quad \dfrac{d\bar{K}_c^i}{dt} = \underbrace{\underset{A[\bar{\omega}^e]_\times}{\underset{\shortparallel}{\dot{A}}}\ J^e\bar{\omega}^e}_{A[\bar{\omega}\times(J^e\bar{\omega})]^e} + AJ^e\dot{\bar{\omega}}^e = A\left(J^e\dot{\bar{\omega}}^e + [\bar{\omega}^e \times (J^e\bar{\omega}^e)]\right)$

$$A\left(J^e\dot{\bar{\omega}}^e + [\bar{\omega}^e \times (J^e\bar{\omega}^e)]\right) = M_c^i \ \Big|\ A^T\cdot$$

$$\boxed{J^e\dot{\bar{\omega}}^e + \bar{\omega}^e \times J^e\bar{\omega}^e = \bar{M}_c^e}$$

Динамическое ур-ие Эйлера (все в осях связанного базиса тв. тела)

Кин. момент в СДУ $\quad \boxed{J_o\dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times J_o\bar{\omega} = \bar{M}_o}$

Полюс O – либо $\left[\begin{array}{l} \bar{v}_o = 0 \\ O = C \end{array}\right.$

Кин. момент: $\overline{K_0} = \mathcal{J}_C \overline{\omega} + \overline{r_{oc}} \times m\overline{V_0}$ — общая формула

частный случ.: $\left[\begin{array}{l} \overline{V_0} = 0 \\ O = C \end{array}\right. \to \overline{K_0} = \mathcal{J}_c \overline{\omega}$

Модуль: $|K_0|^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$

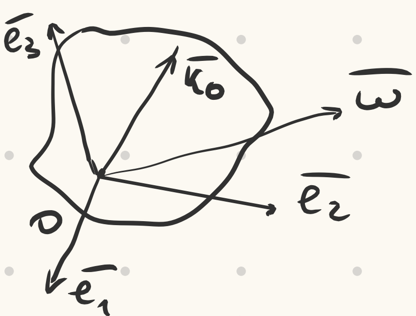
Кин. энергия: $T = \dfrac{mV_0^2}{2} + (\overline{\omega} \times (m \cdot \overline{OC}), \overline{V_0}) + \dfrac{(\overline{\omega}, \mathcal{J}_0 \overline{\omega})}{2}$ — общая формула

Частный случай: $\left[\begin{array}{l} O = C : T = \dfrac{mV_0^2}{2} + \dfrac{(\overline{\omega}, \mathcal{J}_0\overline{\omega})}{2} \\ \overline{V_0} = 0 : T = \dfrac{(\overline{\omega}, \mathcal{J}_0\overline{\omega})}{2} \end{array}\right.$

Итого имеем СДУ из 12 ур-ий, в общем случае не решаемую

Поэтому $\exists$ несколько частных случаев: Случай Эйлера
Случай Лагранжа

координ. $\overline{\omega}$ в связ. базисе



1) $\overline{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, $\dot{\overline{\omega}} = \begin{pmatrix} \dot p \\ \dot q \\ \dot r \end{pmatrix}$

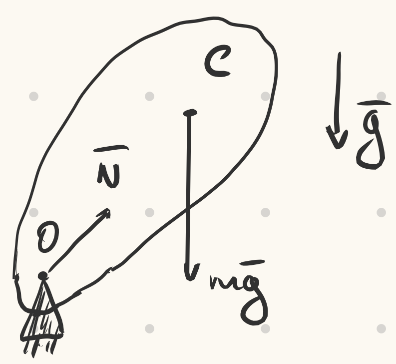
2) $\mathcal{J}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$ — берем связанный базис так, чтобы ТИ был diag()

• **Случай Эйлера** — движение с неподвижной точкой O

(движение по инерции) + центр масс совпадает с неподвиж. точкой ($O = C$)
+ $M_0 = \overline{0}$ (момента сил нет)

$\begin{cases} \dot{\overline{r}} = \overline{v} \\ \dot{\overline{v}} = 0 \end{cases}$ $\oplus$ $\mathcal{J}_0 \dot{\overline{\omega}} + \overline{\omega} \times \mathcal{J}_0 \overline{\omega} = \overline{M_0} = \overline{OC} \times m\overline{g}$

$\oplus$ $\overline{\omega}^e = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \end{pmatrix}$ — в общем случ не решаема



Применяем случай Эйлера:

$$\begin{cases} \mathcal{J}\dot{\overline{\omega}} + \overline{\omega} \times \mathcal{J}\overline{\omega} = 0 \\ \overline{\omega}^e = (\ldots) \end{cases}$$

• Первый интеграл — кин. момент ($M = 0$): $\boxed{\overline{K}^i = \mathrm{const}}$ — в ИСО!

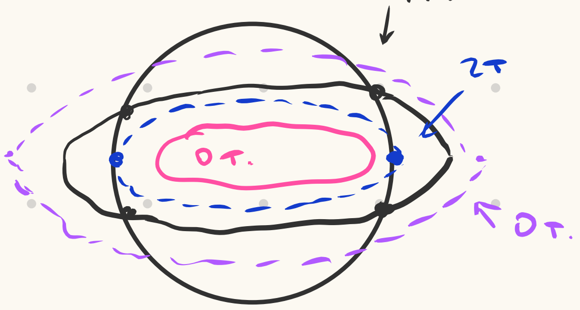
В связ. базисе $|K|^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \mathrm{const}$

• Первый интеграл — кин. энергия ($M = 0 \to A = 0$): $\boxed{T = \mathrm{const}}$

$T = \dfrac{(\overline{\omega}, \mathcal{J}\overline{\omega})}{2} = \dfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$

Гениальная замена: $\begin{cases} x = Ap \\ y = Bq \\ z = Cr \end{cases}$ $\rightarrow$ Тогда будет $x^2+y^2+z^2=\text{const}$ - из $|K|=\text{const}$ - ур-ие сферы

• ур-ие эллипсоида из энергии



Нахуя это надо?

Показывает связь и стаб. нестаб. положение а также мин, макс.

⊛ Частный случай Случай Эйлера – осесимметрическое тело.

$$J = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (A = B \neq C), \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Дин. ур-ие Эйлера: $J\dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times J\bar{\omega} = 0$

$$\begin{pmatrix} A\dot{p} \\ A\dot{q} \\ C\dot{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Ap \\ Aq \\ Cr \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} A\dot{p} + (C-A)qr = 0 \\ A\dot{q} + (A-C)pr = 0 \\ C\dot{r} + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow Cr = \text{const} = (\bar{K}, \bar{e}_3)$ – еще один первый интеграл

• Как задать СК в случае Эйлера?

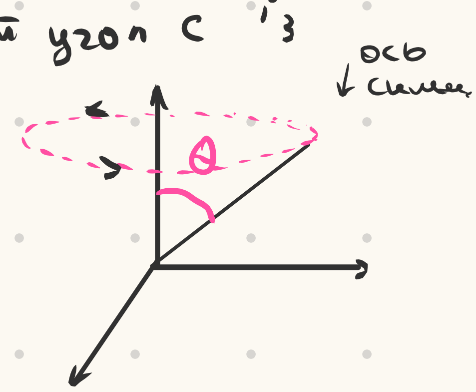
- Интеграл кин. момента в ИСО $\Rightarrow i_3 \uparrow\uparrow \bar{K}$ берем ось

Из углов Эйлера: $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \dot{\psi} \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

Аналогично $\bar{K}^e$ (если $i_3 \uparrow\uparrow \bar{K}$) $= \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \underset{\text{const}}{K} \rightarrow (\bar{K}, \bar{e}_3) = \text{const} = K\cos\theta \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{\cos\theta = \text{const}}$

- В ИСО ось симметрии координат имеет постоянный угол с i_3



$$K_1^e = K \sin\theta \sin\varphi = \underbrace{Ap}_{(J\bar{\omega})_1} = A\dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi \quad (\dot{\theta} = 0)$$

$$\boxed{\dot{\psi} = \frac{K}{A} = \text{const}}$$

$$\left[\dot{\varphi} = \underset{\text{const}}{r} - \underset{\text{const}}{\dot{\psi}} \underset{\text{const}}{\cos\theta} = \text{const}\right]$$

Итого: $\boxed{\begin{cases} \theta = \text{const} \\ \dot{\psi} = \text{const} \\ \dot{\varphi} = \text{const} \end{cases}}$ Регулярная прецессия

16. Случай Лагранжа. Системы координат в случае Лагранжа. Первые интегралы. Регулярная прецессия в случае Лагранжа.

(13 семинар)

- Регулярная прецессия: $\begin{cases} \theta = const & \text{в углах Эйлера} \\ \dot\psi = const = \Omega \\ \dot\varphi = const = \omega \end{cases}$

(*) Динамически симм. тело — тело с $J = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$

1) Дин. ур-ие Эйлера: $J\dot{\bar\omega} + \bar\omega \times J\bar\omega = \bar M$

2) Кинематика: $\bar\omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi \\ \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi \\ \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi \end{pmatrix}$ по осям связанной системы соотношения углов Эйлера 3 – 1 – 3 $\psi \quad \theta \quad \varphi$

3) $\dot{\bar r} = \bar v$

$\dot{\bar v} = \frac{\bar F}{m}$

Хотим найти движение с регулярной прецессией.

$$\begin{cases} A\dot p + (C-A) qr = M_x \\ A\dot q + (A-C) pr = M_y \\ C\dot r + 0 = M_z \end{cases}$$

из прецессии: $r = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi = const$

$r = const$

$\dot r = 0$

Получаем условие $\boxed{M_z = 0}$

$$\begin{cases} \dot p = \dot\psi\dot\varphi \sin\theta \cos\varphi \\ \dot q = \dot\psi \dot\varphi \sin\theta \sin\varphi \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} A\dot\psi\dot\varphi \sin\theta\cos\varphi + (C-A)\dot\psi \sin\theta\cos\varphi(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi) = M_x \\ A\dot\psi\dot\varphi \sin\theta \sin\varphi - (C-A)\dot\psi \sin\theta \sin\varphi(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi) = M_y \end{cases}$$

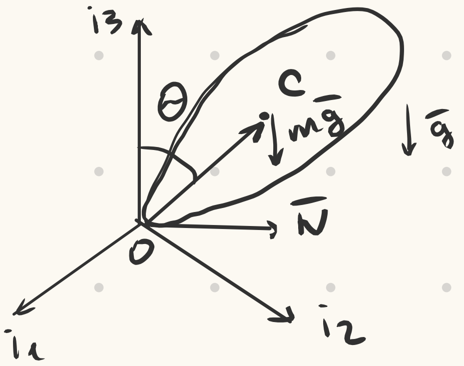
$$\begin{pmatrix} \dot\psi\dot\varphi \sin\theta\cos\varphi \\ -\dot\psi\dot\varphi \sin\theta \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \left(A + (C-A)\left(\frac{\dot\psi}{\dot\varphi}\cos\theta + 1\right)\right) = \bar M$$

=

(*) $\dot{\bar\psi} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, $\dot{\bar\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{pmatrix}$ Заметим, что $\dot{\bar\psi} \times \dot{\bar\varphi}$

Получаем $\boxed{\bar M = \dot{\bar\psi} \times \dot{\bar\varphi} \cdot \left(C + (C-A)\frac{\dot\psi}{\dot\varphi}\cos\theta\right)}$ Основная формула гироскопии

• <u>Случай Лагранжа</u> – Тело динамически симметрично и центр масс находится на оси симметрии тела



$J_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$

$\overline{OC} = \bar{e}_3 l$

ось симм. связ. с телом

• <u>Первый интеграл – кин. энергия</u>: $E = \frac{(\bar\omega, J\bar\omega)}{2} + mgl \cdot \cos\theta$

$(\bar\omega, J\bar\omega) = A(p^2 + q^2) + Cr^2 = A(\dot\psi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{K_3^2}{C}$

$\left[2E = A(\underbrace{\dot\psi^2}_{f^2(\theta)} \sin^2\theta + \underbrace{\dot\theta^2}_{\dot\theta = h(\theta)}) + \frac{K_3^2}{C} + 2mgl\cos\theta\right]$ – Решаем ур-ие отн $\theta(t)$

Получаем $\theta(t)$!

• <u>Первый интеграл – проекция кин. момента на вертикаль и ось дин. симметрии</u>:

• $\frac{d\bar{K}^i}{dt} = \bar{M} = l\bar{e}_3 \times m\bar{g} \;\; | \cdot Oz$

$\left(\frac{d\bar{K}^i}{dt}, \overline{Oz}\right) = \frac{d}{dt}\left(\bar{K}^i, \overline{Oz}\right) = 0 \to \boxed{K_z = const}$

• $C\dot{r} = M_3 = (l\bar{e}_3 \times m\bar{g}, \bar{e}_3) = 0 \to \boxed{K_3 = const}$

Р-м $K_z = (\bar{K}, \overline{Oz})$

$\overline{Oz}^e = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \to K_z = A\sin\theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi) + Cr\cos\theta =$

$\bar{K}^e = \begin{pmatrix} Ap \\ Aq \\ Cr \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{aligned} p &= \sin\theta\sin\varphi\dot\psi + \dot\theta\cos\varphi \\ q &= \sin\theta\cos\varphi\dot\varphi - \dot\theta\sin\varphi \\ r &= \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi \end{aligned}\right\} =$

$= A\sin^2\theta\dot\psi + K_3\cos\theta$

Получаем $K_z = A\sin^2\theta\dot\psi + K_3\cos\theta \Rightarrow \boxed{\dot\psi = F(\theta)}$!

(*)

$\left[\dot\varphi = \frac{K_3}{C} - \dot\psi\cos\theta = g(\theta)\right]$

Если найти $\theta(t)$, то сразу нашли $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ с нач. условие

– Случай Лагранжа является интегрируем.

Ур-ие энергии: $\left[2E = A(\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{K_3^2}{C} + 2mgl\cos\theta\right]$

Играем с энергией: $\left[a = 2E - \frac{K_3^2}{C}\right]$

$$A\left(\underbrace{\frac{(K_z - K_3\cos\theta)^2}{A^2\sin^2\theta}}_{\dot\psi^2\cdot\sin^2\theta} + \dot\theta^2\right) = a - 2mgl\cos\theta$$

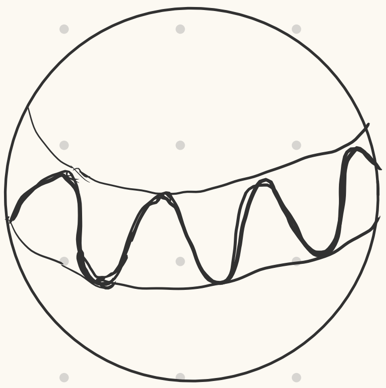
Берем $\begin{cases} u = \cos\theta \\ \dot u = -\sin\theta\cdot\dot\theta \end{cases}$

$$\to A\left(\frac{(K_z - K_3 u)^2}{A^2(1-u^2)} + \frac{\dot u^2}{(1-u^2)}\right) = a - 2mglu \quad |\cdot A^2$$

$$\left[A(K_z - K_3u)^2 + A^3\dot u^2 = A^2(1-u^2)(a - 2mglu)\right]$$

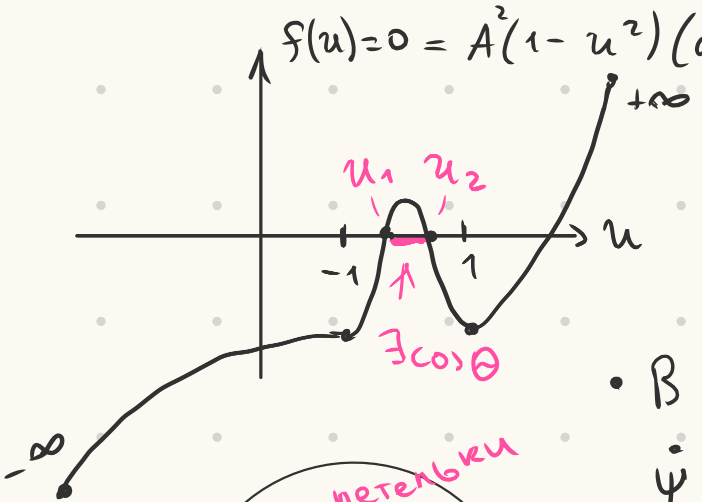
$\dot\theta = 0 = \dot u$ – крит. момент

1



Тогда получаем кубич. ур-ие!

После анализа получаем, что корни $\exists u = \cos\theta$ на $(-1;1)$



• Теперь смотрим на $\dot\psi$

$$\left[\dot\psi\Big|_{\cos\theta = u_2} = \frac{K_z - K_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}\right]; \quad \left[\dot\psi\Big|_{\cos\theta = u_1} = \frac{K_z - K_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}\right]$$

• В зависимости от K_z, K_3 и нач. усл., $\dot\psi$ может быть „+", „-", 0.

Тогда смотрим на знаки между $\dot\psi_{u_1}$ и $\dot\psi_{u_2}$!

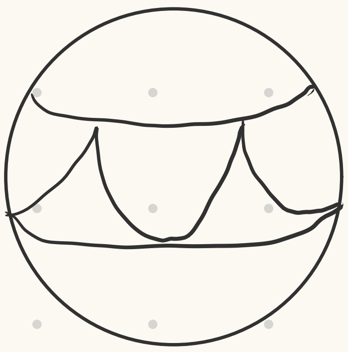
Одинаковые, то (1), разные – (2), 0 – (3) на верху.

* $\dot\psi_{u_1} \neq 0$, т.к. иначе не будет энергии

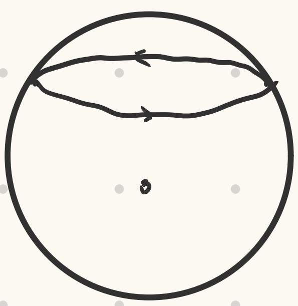
• Когда $u_1 = u_2$, то получается движение по окружности, т.е. регулярная прецессия

2

3

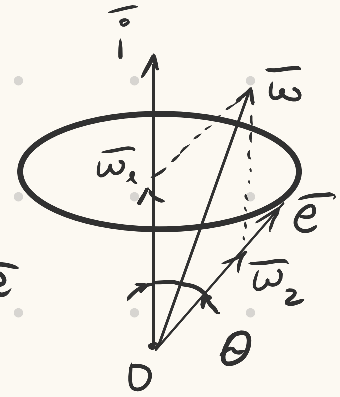


$u_1 = u_2$



17. Вынужденная регулярная прецессия.

Для динамически симм. тела



Вращение задано комбинацией двух вращений вокруг $\bar i$: $\bar\omega_1 = \omega_1 \cdot \bar i$

и вокруг оси симметрии $\bar e$: $\bar\omega_2 = \omega_2 \cdot \bar e$

Угол $\Theta = const$

1) $$\bar\omega = \bar\omega_1 + \bar\omega_2 = \underbrace{(\omega_2 + \omega_1 \cos\Theta)\,\bar e}_{\text{составляющая по } \bar e} + \underbrace{(\bar\omega_1 - \bar e \cdot \omega_1 \cos\Theta)}_{\text{сост. в плоскости дин. симметрии}}$$

2) $$\bar K_o = C(\omega_2 + \omega_1 \cos\Theta)\,\bar e + A(\bar\omega_1 - \bar e\, \omega_1 \cos\Theta) =$$

$$= [C\omega_2 + (C-A)\,\omega_1 \cos\Theta]\,\bar e + A\bar\omega_1$$

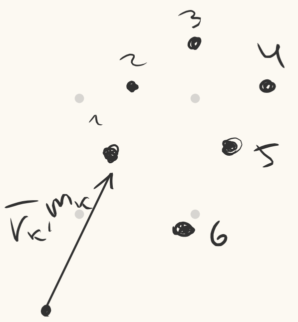
$$\bar M_o = \dot{\bar K}_o = [C\omega_2 + (C-A)\,\omega_1 \cos\Theta] \cdot \underbrace{\dot{\bar e}}_{[\underbrace{\bar\omega}_{\bar\omega_1 + \bar\omega_2} \times \bar e]} + 0 = [C\omega_2 + (C-A)\,\omega_1 \cos\Theta](\bar\omega_1 \times \bar e)$$

$\updownarrow 0$

При $\omega_2 \neq 0$:

$$\boxed{\bar M_o = \left[C + (C-A)\frac{\omega_1}{\omega_2}\cos\Theta\right](\bar\omega_1 \times \bar\omega_2)}$$

18. Уравнения Лагранжа. Степени свободы. Классификация связей.
19. Обобщенные координаты и скорости. Обобщенные силы.



(14 семинар)

- $\begin{pmatrix} \bar r_k \\ \bar v_k \end{pmatrix}$ – фазовый вектор мат. точки (вектор состояния)

- **Степени свободы:**

$\bar r = \begin{pmatrix} \bar r_1 \\ \bar r_2 \\ \vdots \\ \bar r_n \end{pmatrix}$ $\quad \bar v = \begin{pmatrix} \bar v_1 \\ \vdots \\ \bar v_n \end{pmatrix}$

⊛ Мат. точка: R^3 – 3 степ. $(\bar r \in R^3)$ и фаз. вектор $\in R^6$ $(\bar r \in R^3, \bar v \in R^3)$

R^2 – 2 степ. $(\bar r \in R^2)$

⊛ Твердое тело: R^3 – 6 степ. ($\bar r_{\text{полюса}} \in R^3$, 3 угла Эйлера)

R^2 – 3 степ. ($\bar r_{\text{полюса}} \in R^2$, 1 угол Эйлера)

- **Виды связей:** (не зависят от $\ddot{\bar r}$)

> Удерживающие → Геометрические $f(\bar r, t) = 0$ — голономные

> Удерживающие → Дифференциальные $f(\bar r, \bar v, t) = 0$ → Интегрируемые (можем проинтегр.) — голономные

Дифференциальные → Неинтегрируемые (не можем) (неголономные)

> Неудерживающие (нитка) $f(\bar r, \bar v, t) \le 0$

или

> Склерономная $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ (зависит от времени)

> Реономная $\frac{\partial f}{\partial t} \ne 0$

⊛ Голономные, независимые связи сокращают степени свободы!

$$\boxed{f(\bar r, \bar v, t) \text{ – интегрируема} \iff \exists F(\bar r, t) : \frac{dF}{dt} = 0 \to f(\bar r, \bar v, t) = 0}$$

Условие интегрируемости связи

Получаем связи:

$$\boxed{\begin{cases} f_k(\bar r, t) = 0 \\ g_k(\bar r, \bar v, t) = 0 \end{cases}}$$

связи на системе

⊕ Допущение в теормехе: $g(\bar r, \bar v, t) = 0$ связи линейны по скоростям ⇒

$$\boxed{(\bar a_k(\bar r, t), \bar v) + b_k(\bar r, t) = 0}$$

линейность по скоростям дифф. связей

$$f_k(\bar r, t) = 0 \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = \Big(\frac{\partial f_k}{\partial \bar r}, \underbrace{\bar v}_{\frac{\partial \bar r}{\partial t}}\Big) + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} (\bar a_k(\bar r, t), \bar v) + b_k(\bar r, t) = 0 \\ \frac{\partial f_k}{\partial t} = \Big(\frac{\partial f_k}{\partial \bar r}, \bar v\Big) + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0 \end{cases}}$$

Следствие из связей, СУ на $\bar v$

> $\bar v_{\text{возм.}}$ – возможные скорости удовл. СУ

> $\bar v_{\text{виртуал}}$ – виртуальные скорости, решение однородного ур-ия из этой СУ

> Виртуальные перемещения $= \bar v_{\text{вирт}} dt = \delta \bar r$

или

$\delta \bar r$ – решения $\begin{cases} (\bar a_k, \delta \bar r) = 0 \\ \left(\frac{\partial f_k}{\partial \bar r}, \delta \bar r\right) = 0 \end{cases}$

⊛ **Идеальные связи** – работа любых вирт. перемещений равна 0

$$\boxed{\sum_k (\bar R_k, \delta \bar r_k) = 0}$$ – определение

> 2зН: $m_k \bar W_k = \underbrace{\bar F_k}_{\text{внешние силы}} + \underbrace{\bar R_k}_{\text{силы реакции связей}}$

для мат. точки

Основное уравнение динамики для системы только с ид. связями

$$\boxed{\sum_k (m_k \bar W_k - \bar F_k, \delta \bar r_k) = 0}$$

> В системе из N мат. точек в R^3 итоговое кол-во степеней свободы =

$= 3N - M - H$ (M – геом. связи, H – дифф. связи интегр.)

• **Обобщенные координаты**: независимые переменные, описывающие положение системы с учетом связей

$$\begin{pmatrix} \bar r_1 \\ \vdots \\ \bar r_k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

исходные $\quad$ обобщенные

• обобщенные скорости – производные по времени обобщенных координат системы

Вирт. перемещение: $\bar r_k = \bar r_k(\bar q, t)$ $\quad$ не учитываем $\frac{\partial}{\partial t}$!

$$\left[\delta \bar r_k = \frac{\delta \bar r_k}{\delta \bar q} \delta \bar q = \sum_i \frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i} \delta q_i\right]$$

Берем $\sum_k (m_k \underbrace{\bar W_k}_{\frac{d\bar v}{dt}}, \delta \bar r_k) = \frac{d}{dt}\left(\sum (m_k \bar v_k, \delta \bar r_k)\right) - \sum \left(m_k \bar v_k, \frac{d}{dt} \delta \bar r_k\right) =$

$$= \ldots = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) \delta q_i$$

$$> \sum_k (\bar F_k, \delta \bar r_k) = \sum_k \Big(\bar F_k, \sum_i \frac{\partial r_k}{\partial q_i}\delta q_i\Big) = \sum_i \Big(\underbrace{\sum_k \Big(\bar F_k, \frac{\partial \bar r}{\partial q_i}\Big)}_{\text{замена } Q_i}\Big)\delta q_i$$

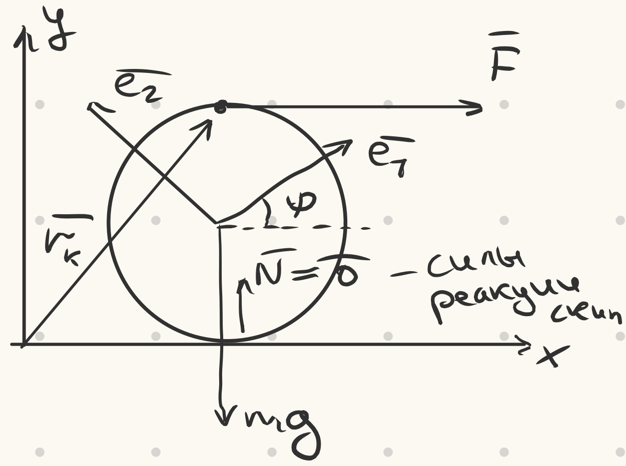
• Обобщенная сила: $\boxed{Q_i = \sum_k \Big(\bar F_k, \frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}\Big)}$

$$\boxed{\sum_i \Big(\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i}_{0}\Big)\delta q_i = 0}$$

δq_i — произвольные вирт. перемещ. уже учитывают связи, Q_i — обобщенная сила, T — кин. энергия

Уравнение Лагранжа 2го рода

⊛ Алгоритм:
1) Связи
2) Считаем обобщ. коорд
3) Вводим обобщ. коорд.
4) T
5) Q_i — обобщ
6) Ответ



Задачка:

1) $v_{кас} = 0 \equiv \dot x - \dot\varphi R = 0$

$y_{ц.м.} = R$

2) Изначально без связей: был $\bar r_c = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ — ц.м. и φ — ориентация $\begin{pmatrix}x\\y\\\varphi\end{pmatrix}$

Со связями: $3-2=1$ обобщенная координата!

3) Берем к примеру x

4) $T = \frac{mR^2}{4}\omega^2 + \frac{m\dot x^2}{2}$, $\omega^2 = \frac{\dot x^2}{R^2}$ $\Rightarrow$ $T = \frac{3}{4} m\dot x^2$

5) $Q_i^F = \sum_k \Big(F_k, \frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}\Big) =$, $\bar r_k = \begin{pmatrix}x\\2R\end{pmatrix}$. $\bar F = \begin{pmatrix}F\\0\\0\end{pmatrix}$

$= F$

$$Q^{mg} = \int_{\text{тело}} \Big(dm\,\bar g, \frac{\partial \bar r}{\partial x}\Big) = 0, \quad \bar r = \begin{pmatrix}x\\R\\0\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}\cos(\varphi+\varphi_0)\\\sin(\varphi+\varphi_0)\\0\end{pmatrix}, \quad l\in[0;R]$$

20. Случай потенциальных сил. Обобщенный потенциал.

$$Q_i = \sum_k \left(\bar{F}_k, \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) \ominus$$

Потенциальная сила: $\bar{F}_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{r}_k}(\bar{r}, t)$ Не зависит от $\bar{v}$!

$\Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\bar{r}}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}} = 0$

$$\ominus \sum_k \left(-\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{r}_k}, \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \boxed{-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i(q, t)}$$

> Если все силы потенциальны, то ур-ие Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_i}}_{L} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$$

Ур-ие лагранжа в случае потенциальных сил

> Лагранжиан: $\boxed{L = T - \Pi}$

- Обобщенный потенциал:

Если потенциальная сила зависит от $\dot{\bar{r}}$, т.е. $\bar{F}_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{r}_k}(\dot{\bar{r}}, \bar{r}, t)$, то

$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\bar{r}}} \neq 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}} \neq 0, \quad Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}(\dot{q}, q, t)$ (не меняется)

Тогда $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$

Введем $U(\dot{q}, q, t)$:

$$Q_i(\dot{q}, q, t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Введя лагранжиан $L = T - U \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

> $Q_i(\dot{q}, q, t)$ — обобщенно потенциальная сила
>
> $U(\dot{q}, q, t)$: $Q_i(\dot{q}, q, t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_i}$ — обобщенный потенциал
>
> $L = T - U$ — лагранжиан

21. Уравнения Лагранжа в неинерциальных системах координат.

$m\bar{W}_{отн} = \bar{F}_{внеш} + \bar{F}_{ин}$ — в НеИСО 2зН

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{отн}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_{отн}}{\partial q_i} = Q_i + Q_{инерц}}$$

Уравнение Лагранжа в НеИСО

Если сравнить ур-ие Лагранжа в ИСО и НеИСО

$$(*)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T_{абс}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_{абс}}{\partial q_i} = Q_i$$

$$(**)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T_{отн}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_{отн}}{\partial q_i} = Q_i + Q_{инерц}$$

$\ominus$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (\overbrace{T_{отн} - T_{абс}}^{V})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (\overbrace{T_{отн} - T_{абс}}^{V})}{\partial q_i} = Q_{ин}$$

Получаем обобщенный потенциал $\left[V(\dot{q}, q, t) = T_{отн} - T_{абс}\right]$

и ур-ие Лагранжа $\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_{ин}\right]$

+ Значит, что силы инерции — обобщенно потенциальные!