

«Московский физико-технический институт»
Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий

Отчёт вопроса по выбору

Исследование колебаний воздуха в духовых инструментах

Выполнили:
Хмельницкий А.А. Б01-306
Выгузов А. В., Б01-304
Деканоидзе М.Г. Б01-304
Консультанты:
Зеленая А.В.
Яворский В.А.

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| 1 Аннотация | 3 |
| 2 Теоретические сведения | 4 |
| 2.1 Колебания воздуха в трубе | 4 |
| 2.2 Общее применение волновой теории для духовых инструментов | 8 |
| 2.3 Устройство флейты | 9 |
| 2.4 Устройство блок-флейты | 9 |
| 3 Результаты эксперимента | 12 |
| 4 Обработка результатов | 13 |
| 5 Выводы | 15 |
| 6 Приложение | 16 |
| 6.1 Таблицы | 16 |
| 6.2 Фотографии | 16 |
| 7 Источники | 17 |

1 Аннотация

Цель работы:

1. Вывести зависимости для колебаний воздуха в духовом инструменте.
2. Изучить продольные стоячие волны на примере колебаний воздуха.
3. Проверить справедливость формулы для зависимости частоты от номера гармоники для духовых инструментов.

Оборудование: 3 Блок-флейты HOHNER, HOHNER и YRS-23 YAMAHA; Большая флейта YFL 212; микрофон FIFINE K669; Программа анализа звука Friture.

2 Теоретические сведения

2.1 Колебания воздуха в трубе

Составим уравнение колебаний газа в трубе. Обозначим координату частиц, находящихся в каком-то поперечном сечении трубы через x , а смещение частиц этого сечения вдоль оси трубы при колебаниях через ξ . Рассмотрим объем газа в виде цилиндра с площадью основания S и высотой Δ (Рисунок 1). Масса газа, заключенного в этом объеме, равна $\rho S \Delta x$, где ρ — плотность газа в покое. Если колебания частиц газа отсутствуют, то давление в сечениях x и $+ \Delta$ одинаково и равно p . При колебаниях смещения ξ частиц с разными в каждый момент времени оказываются разными. Поэтому рассматриваемый объем деформируется, и давление в разных сечениях цилиндра уже не будет одинаковым. Мгновенное значение давления в некотором сечении трубы можно представить в виде:

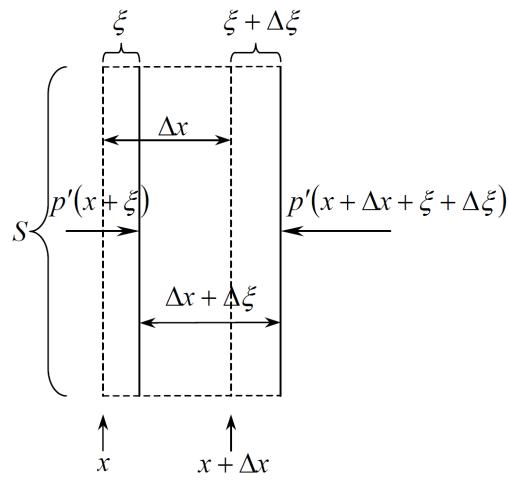


Рисунок 1: Смещение газа в трубе

$p' = p + \Delta p$, Δp — звуковое давление. Ввиду малости Δ проекцию ускорения на ось x для всех точек цилиндра можно считать одинаковой и равной $\frac{d^2\xi}{dt^2}$. Для нахождения проекции на ось силы, действующей на рассматриваемый объем, нужно взять произведение площади основания цилиндра S на разность давлений p' в сечениях $x + \xi$ и $x + \Delta x + \xi + \Delta \xi$:

$$F_x = (p'(x + \xi) - p'(x + \Delta x + \xi + \Delta \xi)) S \quad (1)$$

Пренебрегая слагаемыми высших порядков малости получаем $F_x \approx -S \Delta x \frac{dp'}{dx}$, $\Delta x \ll \Delta \xi$.

Второй закон Ньютона:

$$\rho S \Delta x \frac{d^2\xi}{dt^2} = -S \Delta x \frac{dp'}{dx} \quad (2)$$

$$\rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{dp'}{dx} \quad (3)$$

Получаем дифференциальное уравнение:

$$\rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{dp'}{dx} \quad (4)$$

в котором две неизвестные функции ξ и p' . Выразим одну из этих функций через другую. При колебаниях в трубе сжатия и разрежения газа следуют друг за другом так часто, что смежные участки среды не успевают обмениваться теплом, и процесс можно считать адиабатическим. При адиабатическом процессе связь между давлением и объемом газа задается уравнением:

$$pV^\gamma = const, \quad (5)$$

где γ — отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

В соответствии с этим уравнением получаем:

$$p(S\Delta x)^\gamma = p' [S(\Delta x + \Delta \xi)]^\gamma = p' \left[S \left(\Delta x + \frac{d\xi}{dx} \Delta x \right) \right]^\gamma = p' (S\Delta x)^\gamma \left(1 + \frac{d\xi}{dx} \right)^\gamma, \quad (6)$$

где p — давление газа в покое.

Сократим на $(S\Delta x)^\gamma$ и разложив выражение $\left(1 + \frac{d\xi}{dx} \right)^\gamma$ по степеням $\frac{d\xi}{dx}$ и считая, что $\frac{d\xi}{dx} \ll 1$ и

пренебрегая членами высших порядков малости получаем:

$$p = p' \left(1 + \gamma \frac{d\xi}{dx} \right) \quad (7)$$

$$p' = \frac{p}{1 + \gamma \frac{d\xi}{dx}} \approx p \left(1 - \gamma \frac{d\xi}{dx} \right). \quad (8)$$

Получаем $\frac{p' - p}{p} = -\gamma \frac{d\xi}{dx}$.

Так как γ порядка единицы, то $|\frac{d\xi}{dx}| \approx |\frac{\Delta p}{p}| \ll 1$ — отклонение давления от среднего много меньше самого давления (атмосферное давление 760 мм. рт. ст., а амплитуда колебания воздуха не превышает 1 мм. рт. ст.).

Продифференцировав по x , получаем

$$\frac{dp'}{dx} = -\gamma p \frac{d^2\xi}{dx^2} \quad (9)$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение, получаем уравнение колебаний смещения ξ в трубе с газом при адиабатическом законе

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = c^2 \frac{d^2\xi}{dx^2} \quad (10)$$

где $c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ — скорость распространения колебаний (скорость звука).

Так как при атмосферном давлении и обычных температурах большинство газов по своим свойствам близки к идеальному, то используя уравнение Менделеева-Клапейрона, получим для скорости звука формулу

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (11)$$

Уравнение 10 называется волновым. Частным решением уравнения 10 является бегущая волна вдоль оси x

$$\xi = A \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (12)$$

где ω — циклическая частота колебаний, $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число, φ — начальная фаза.

Волна бегущая навстречу описывается уравнением $\xi = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$.

Волна, бегущая вдоль трубы будет отражаться от конца, а закон ее отражения определяется физическими условиями на конце.

В нашем случае с духовыми инструментами оба конца открыты, в приближенной модели на обоих концах атмосферное давление, т.е. узлы. Источник находится вблизи одного конца.

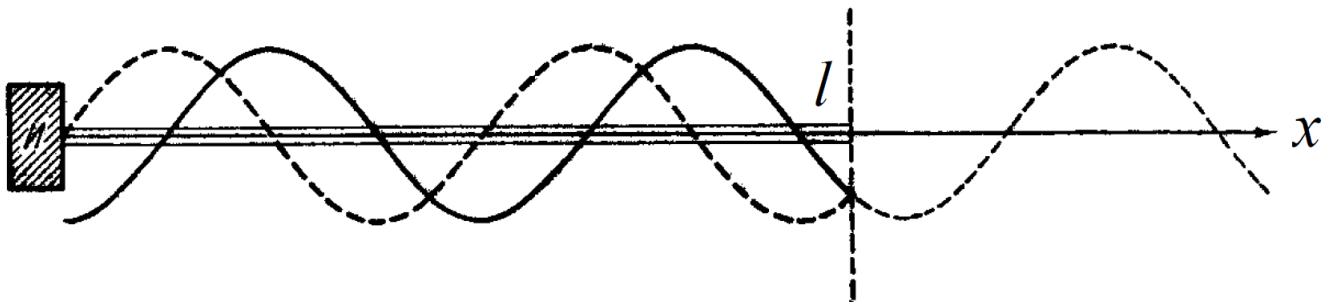


Рисунок 2: Сдвиг фазы волны в трубе

Теперь рассмотрим трубу, открытую на правом конце. Когда область сжатия достигнет открытого конца трубы, то у газа появится возможность распространяться во все стороны, в то время как в

звуковой волне в трубе движение происходило только вдоль x . Поэтому область сжатия быстро рассасывается с увеличением расстояния от конца трубы, пока на некотором расстоянии (порядка радиуса трубы) давление не станет равным внешнему. Таким образом, если труба «подсоединена» к большой комнате, то на расстояниях от конца трубы порядка ее радиуса звуковое давление очень близко к нулю.

Пусть область сжатия достигла открытого конца. На открытом конце воздух вытекает из трубы и создает разрежение. Воздух на ближайшей к трубе части области разрежения испытывает меньшее сопротивление, чем «обычно», и стремится заполнить эту область, которая, таким образом, смещается влево. Воздух, примыкающий к сместившейся области разрежения, снова стремится вправо и т.д. Мы видим, что сжатие, перемещавшееся в направлении $+x$, вызвало разрежение, перемещающееся в направлении $-x$, что иллюстрирует рис.2. Таким образом, в точке отражения за приходящим сжатием следует уходящее разрежение, и наоборот. Это значит, что на свободном конце трубы волна отражается, меняя свое направление на обратное.

При непрерывной работе источника волна, идущая от него будет складываться с отраженной волной. Считая, что отраженная волна имеет ту же амплитуду что и отраженная, записываем уравнения волны от источника ξ_1 и отраженной волны ξ_2 для открытой с одного конца трубы:

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx) \quad (13)$$

$$\xi_2 = A \cos(\omega t + kx) \quad (14)$$

В результате сложения колебание в точке x будет проходить по закону:

$$\xi = 2A \sin(\omega t) \sin(kx) = B(x) \sin(\omega t). \quad (15)$$

Получившаяся волна - стоячая. Точки, амплитуда колебаний которых равна нулю, называются узлами. Точки, колеблющиеся с максимальной амплитудой, называются пучностями.

Координаты узлов найдем из уравнения $B(x) = 0$ или $\sin(kx) = 0$:

Это уравнение имеет решения:

$$x = \frac{\pi n}{k} = \frac{n\lambda}{2}, n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Из полученной формулы видно, что расстояние между соседними узлами равно половине длины волны.

На открытых концах давление воздуха равно атмосферному, то есть будут возникать узлы звукового давления и, следовательно, пучности смещения и скорости. Поэтому на длине трубы будет укладываться целое число длин полуволн.

$$l = n \frac{\lambda}{2}, n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Длины волн уравнения 17 соответствуют частоты:

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c \cdot n}{2l} \quad (19)$$

Координаты пучностей найдем из уравнения $B(x) = \pm 1$ или $\sin(kx) = \pm 1$:

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Получаем, что частота будет:

$$\nu_n = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \frac{n}{2l} \quad (21)$$

где γ — показатель адиабаты, R — универсальная газовая постоянная, T — температура воздуха, M — молярная масса воздуха, l — длина трубы, n — номер гармоники.

2.2 Общее применение волновой теории для духовых инструментов

Духовой музыкальный инструмент — прибор, который издает звуки определенных частоты, которые называются нотами, с помощью колебаний воздуха внутри себя. Есть разные духовые инструменты, и у каждого свой способ возбуждения и усиления звуковых колебаний.



Рисунок 3: Фото блок-флейты №1



Рисунок 4: Фото блок-флейты №2



Рисунок 5: Фото блок-флейты №3



Рисунок 6: Фото большой флейты

В данной работе рассматриваются: поперечная(большая) флейта(рис.6), которая возбуждает колебания через амбушюр и блок-флейта(рис.3,4,5), которая возбуждает колебания через свисток.

Мы рассматриваем эти инструменты как приближенную модель трубы с открытыми в атмосферу концами. в которых возбуждаются продольные стоячие волны. Для этого флейту считаем трубой, а расстояние отсчитывается от конца флейты(в случае большой) и от конца свистка(в случае блок-флейты) до первого открытого тонального отверстия.

Воздух, нагнетаемый источником, рассекается о свисток(рис.11) или о стальной край амбушюра и затем создается два потока, один из которых создает давление в теле инструмента, за счет чего и начинаются колебания.

Они имеют разные особенности, и за счет этого можно изучить границы применимости приближений волновой теории.

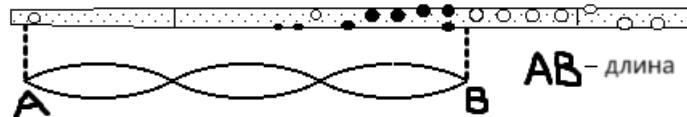


Рисунок 7: Схема волны в флейте при одном открытом отверстии

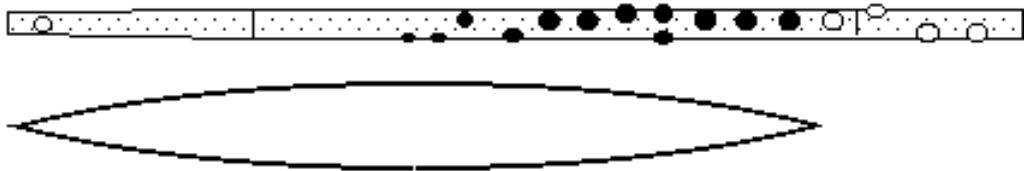


Рисунок 8: Границный случай

На рис.7 и рис.8 показано, как будет измеряться рабочая длина — от начала колебаний — амбушюра, до первого открытого отверстия. Для всех инструментов существует общая музыкальная теория, согласно которой они должны излучать одинаковые частоты — ноты. Существует четкое соответствие между нотами и соответствующим им нотам — таблица 2.

2.3 Устройство флейты

Рассмотрим устройство классической флейты (рис.9 и рис.10)

Особенности:

1. В сечении — цилиндр с фиксированным диаметром
2. Все отверстия рассматриваемых аппликатур имеют одинаковый диаметр.
3. Открыта с обоих концов(амбушюр и другой конец)



Рисунок 9: Устройство классической флейты

Из-за этих особенностей классическая флейта является очень близким к идеальному прибором для проверки волновой теории — колебания воздуха в трубе.

2.4 Устройство блок-флейты

Рассмотрим устройство блок-флейты (рис.11 и рис.12):

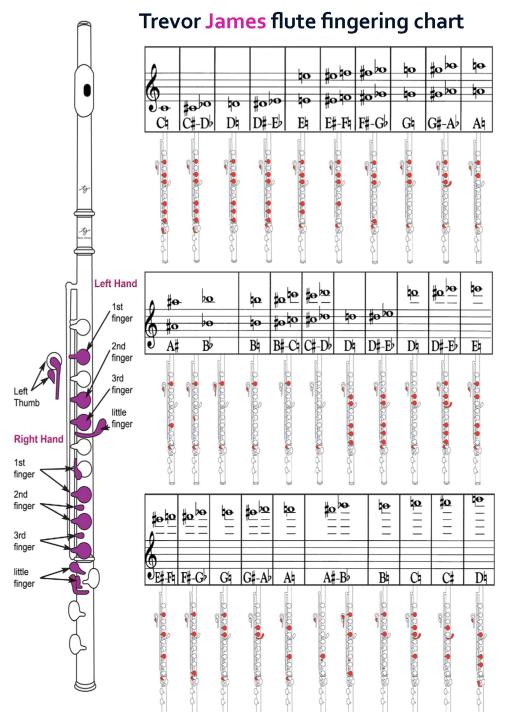


Рисунок 10: Аппликатура классической флейты

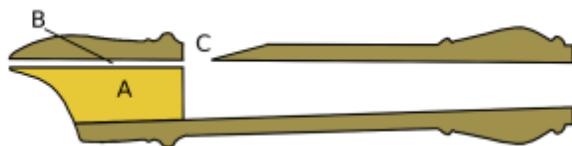


Рисунок 11: Разрез блок-флейты

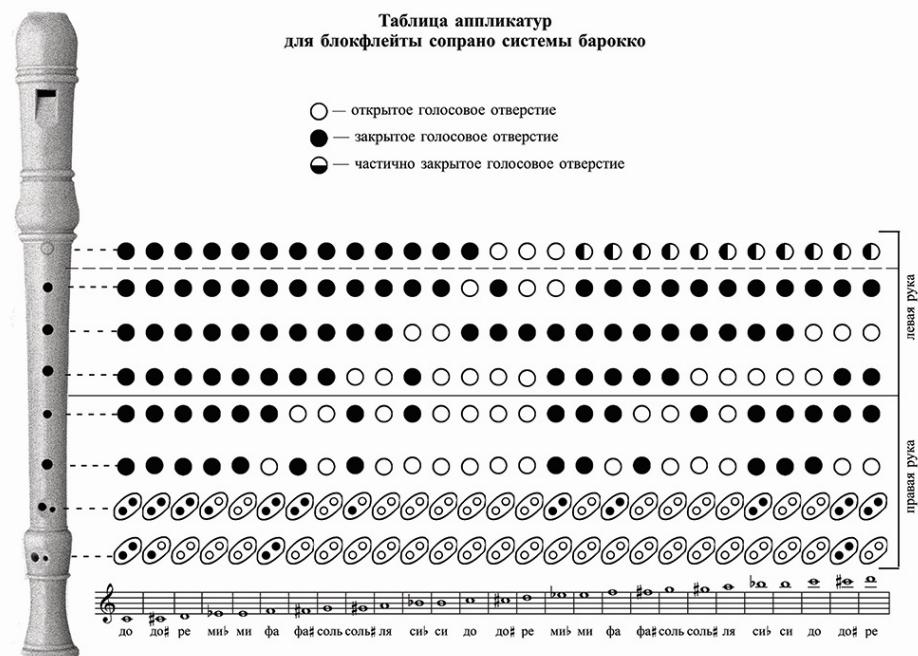


Рисунок 12: Аппликатура блок-флейты

Особенности:

1. В отличии от классической флейты блок-флейта имеет свисток.
2. Отверстия имеют разный диаметр, а также расположены на разном расстоянии друг от друга.
3. Ее внутреннее пространство — усеченный конус в отличии от классической цилиндрической флейты.

Из-за этих особенностей строения нужно учитывать, что на блок-флейту можно применять теорию колебаний воздуха в трубе, но как показал эксперимент с большими поправками.

3 Результаты эксперимента

Эксперимент заключался в измерении частот звуков, извлекаемых из духовых инструментов, и длин.

С помощью микрофона и анализатора частот, были зарегистрированы ноты и их частоты при разных гармониках. Результаты представлены в таблицах, сам эксперимент показан на рис.13

Далее обработав запись, были сняты частоты для разных гармоник — рис.14

Снятые данные для блок флейты 1,2,3 — 1 столбец таблицы 3, 4, 5

Снятые данные для большой флейты — 1 столбец таблицы 6

4 Обработка результатов

Воспользуемся зависимостью частоты колебаний воздуха в трубке, выведенными ранее:

$$v_{\text{зв}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \approx 347.8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad (22)$$

где $\gamma = 1.4$, $R = 8.31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$, $T = 28.5^\circ\text{C}$ (температура внутри флейты с погрешностью 0.1°C), $M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$,

$$l_{\text{эф}} = \frac{\lambda}{2} = \frac{v_{\text{зв}}}{2\nu} \quad (23)$$

где $l_{\text{эф}}$ — эффективная длина рабочей части инструмента

$$\nu(n, l) = 347.8 \frac{n}{2l} \quad (24)$$

После применения этих зависимостей можно рассчитать эффективную и реальную длину, а также снятую и расчетную частоту.

Для блок-флейты 1,2,3 — таблицы 3, 4, 5

Для большой флейты — таблица 6

По этим данным построим график реальной длины от обратной частоты $l_{\text{real}} = a + k \cdot \frac{1}{\nu}$, для проверки корректности использования уравнения колебаний для духового инструмента, используя аппроксимацию МНК.

Для блок-флейты 1,2,3 — рис.15,16,17.

Для большой флейты — рис.18.

Расчет погрешности при аппроксимации по МНК:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{N-2}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2}$$

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle$$

$$\sigma_b = \sigma_k \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle}$$

Систематические погрешности:

- При измерении длины инструментальная погрешность 0.5 мм.
- При измерении температуры 0.1°C .
- При измерении частоты погрешность микрофона 1 Гц.

Для графика зависимости реальной длины от обратной частоты, таблица 1

| | Блок-флейта №1 | Блок-флейта №2 | Блок-флейта №3 | Большая флейта |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | l_{real} | l_{real} | l_{real} | l_{real} |
| k | 182.39 | 181.50 | 179.83 | 172.01 |
| b | -0.061 | -0.0705 | -0.064 | -0.0025 |
| σ_k | 11.08 | 5.02 | 5.62 | 0.308 |
| σ_b | 0.015 | 0.0073 | 0.0082 | 0.00089 |

Таблица 1: Данные снятые с графиков и их погрешности

Коэффициент наклона $k = \frac{v_{3B}}{2}$ поэтому можно узнать реальную скорость звука в флейте: $v_1 = 364.6 \frac{\text{м}}{\text{с}}, v_2 = 363 \frac{\text{м}}{\text{с}}, v_3 = 359,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}, v_4 = 344 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Сравним данные полученные из графиков:

- Все зависимости линейны(в пределах погрешностей), что показывает применимость волновой теории на духовые инструменты
- В изучении большой флейты имеет место: высокая точность между коэффициентами наклона, незначительная погрешность. Значит расчетная с использованием волновой теории скорость звука точно совпала с реальной. Низкая погрешность означает что устройство большой флейты идеально
- В изучении блок-флейты(1,2,3) имеет место: график имеет свободный член и более высокий угол наклона, более высокая погрешность. Это объясняется тем что наша модель приближенная и зависит от многих факторов. Положение узлов не точно совпадает с положением отверстий, а зависит от многих параметров вплоть до диаметра сечения, размеры свистка. Эти поправки определяются чаще всего эмпирическим способом. Подробнее написано в работе Пауля Диккенса по моделированию флейты.

5 Выводы

В работе были исследованы колебания воздуха в трубе и изучена применимость волновой теории к духовым инструментам. Проведя серию экспериментов, были собраны данные для 4 инструментов, 3 блок-флейты и 1 большая флейта. Обработка данных показала, что волновая теория очень точно ложится на большую флейту, из-за ее строения близкого к идеальной трубе. Также обработка показала, что волновая теория плохо ложится на блок-флейту из-за ее неидеального строения, усеченный конус с разными расстояниями до отверстий.

6 Приложение

6.1 Таблицы

Для основных тонов: до, ре, ми, фа, соль, ля, си разных октав можно получить разные частоты. Но существует общая таблица перевода из нот в частоты.

| | Контр | Большая | Малая | Первая | Вторая | Третья | Четвертая | Пятая |
|------|-------|---------|-------|--------|--------|---------|-----------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| До | 32,7 | 65,4 | 130,8 | 261,6 | 523,2 | 1046,50 | 2093,00 | 4186 |
| Ре | 36,7 | 73,4 | 146,8 | 293,6 | 587,3 | 1174,7 | 2349,3 | 4698,6 |
| Ми | 41,2 | 82,4 | 164,8 | 329,6 | 659,2 | 1318,5 | 2637 | 5274 |
| Фа | 43,6 | 87,3 | 174,6 | 349,2 | 698,4 | 1396,9 | 2793,8 | 5587,6 |
| Соль | 49 | 98 | 196 | 392 | 784 | 1568 | 3135,9 | 6271,9 |
| Ля | 55 | 110 | 220 | 440 | 880 | 1760 | 3520 | 7040 |
| Си | 61,7 | 123,4 | 246,9 | 493,8 | 987,7 | 1975,5 | 3951,1 | 7902,1 |

Таблица 2: Табличная зависимость частоты от ноты по октавам

| Нота | Снятые частоты, Гц | Эффективная длина, м | Реальная длина, м |
|------|--------------------|----------------------|-------------------|
| До | 535 | 0,322 | 0,28 |
| Ре | 592 | 0,29 | 0,237 |
| Ми | 668 | 0,258 | 0,23 |
| Фа | 705 | 0,244 | 0,193 |
| Соль | 785 | 0,219 | 0,167 |
| Ля | 889 | 0,194 | 0,145 |
| Си | 979 | 0,176 | 0,123 |

Таблица 3: Данные для блок-флейты №1

| Нота | Снятые частоты, Гц | Эффективная длина, м | Реальная длина, см |
|------|--------------------|----------------------|--------------------|
| До | 521 | 0,331 | 28,4 |
| Ре | 586 | 0,294 | 23,3 |
| Ми | 662 | 0,260 | 20,4 |
| Фа | 697 | 0,247 | 18,5 |
| Соль | 785 | 0,219 | 16,2 |
| Ля | 879 | 0,196 | 13,8 |
| Си | 990 | 0,174 | 11,4 |

Таблица 4: Данные для блок-флейты №2

6.2 Фотографии

| Нота | Снятые частоты, Гц | Эффективная длина, м | Реальная длина, см |
|------|--------------------|----------------------|--------------------|
| До | 527 | 0,327 | 28,3 |
| Ре | 586 | 0,294 | 23,6 |
| Ми | 662 | 0,260 | 20,8 |
| Фа | 697 | 0,247 | 18,7 |
| Соль | 785 | 0,219 | 16,4 |
| Ля | 879 | 0,196 | 14,2 |
| Си | 984 | 0,175 | 12 |

Таблица 5: Данные для блок-флейты №3

| Нота | Снятые частоты, Гц | Эффективная длина, см | Реальная длина, см |
|-------|--------------------|-----------------------|--------------------|
| До | 521 | 67 | 65,7 |
| До# | 551 | 62,9 | 61,7 |
| Ре | 586 | 59,7 | 58,4 |
| Ре# | 621 | 56,3 | 55 |
| Ми | 656 | 53,2 | 52 |
| Фа | 697 | 50,1 | 49 |
| Фа# | 738 | 47,4 | 46,4 |
| Соль | 785 | 44,6 | 43,6 |
| Соль# | 832 | 42,3 | 41,2 |
| Ля | 879 | 39,8 | 38,9 |
| Ля# | 938 | 37,6 | 36,7 |
| Си | 990 | 35,4 | 34,6 |

Таблица 6: Данные сдвига длин для большой флейты

7 Источники

1. Flute acoustics: an introduction to how a flute works(сайт)
2. Равномерно темперированный строй(сайт)
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, 350 стр.
4. Paul Dickens. Flute acoustics: measurement, modelling and design. 2007 г.

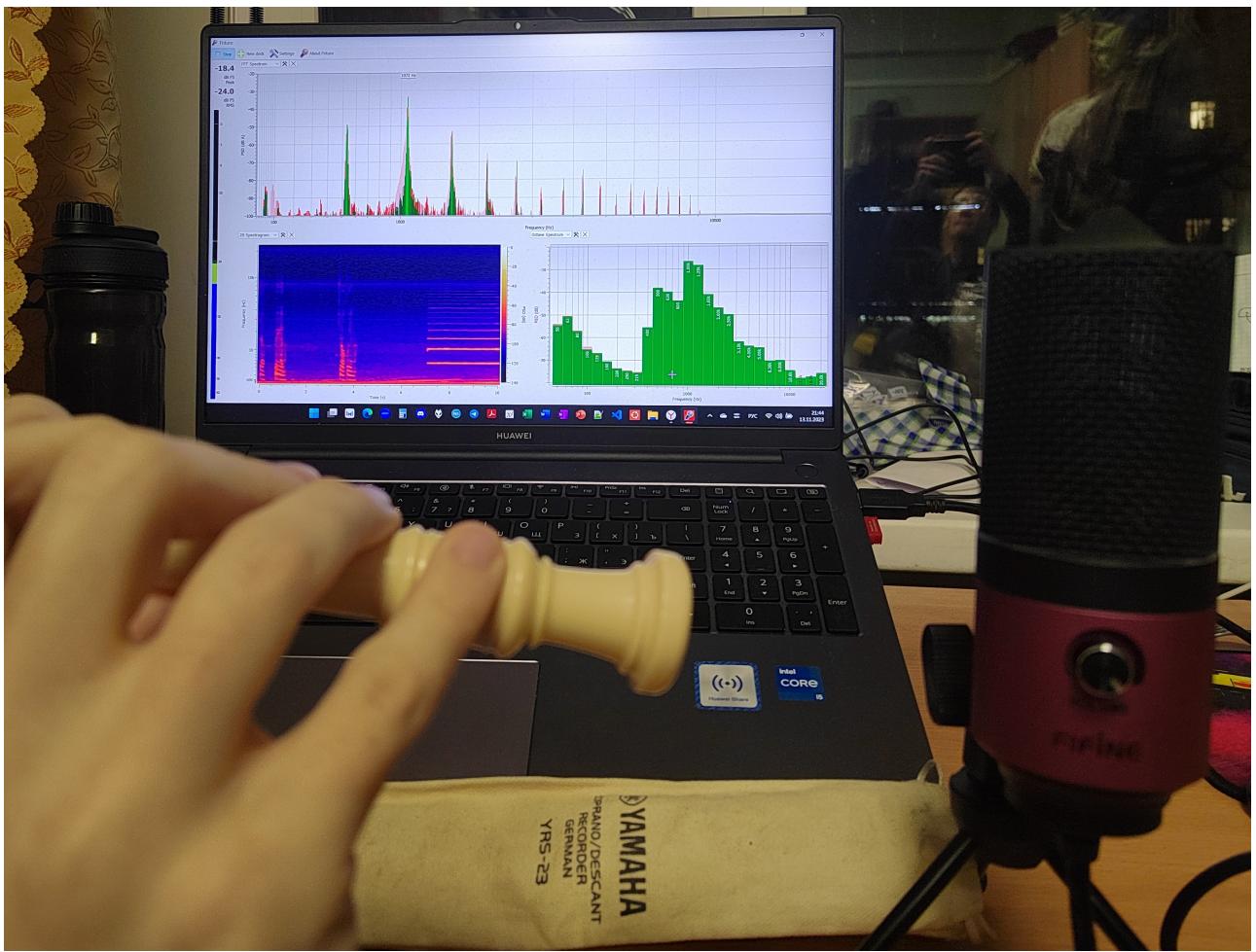


Рисунок 13: Постановка эксперимента(блок-флейта)

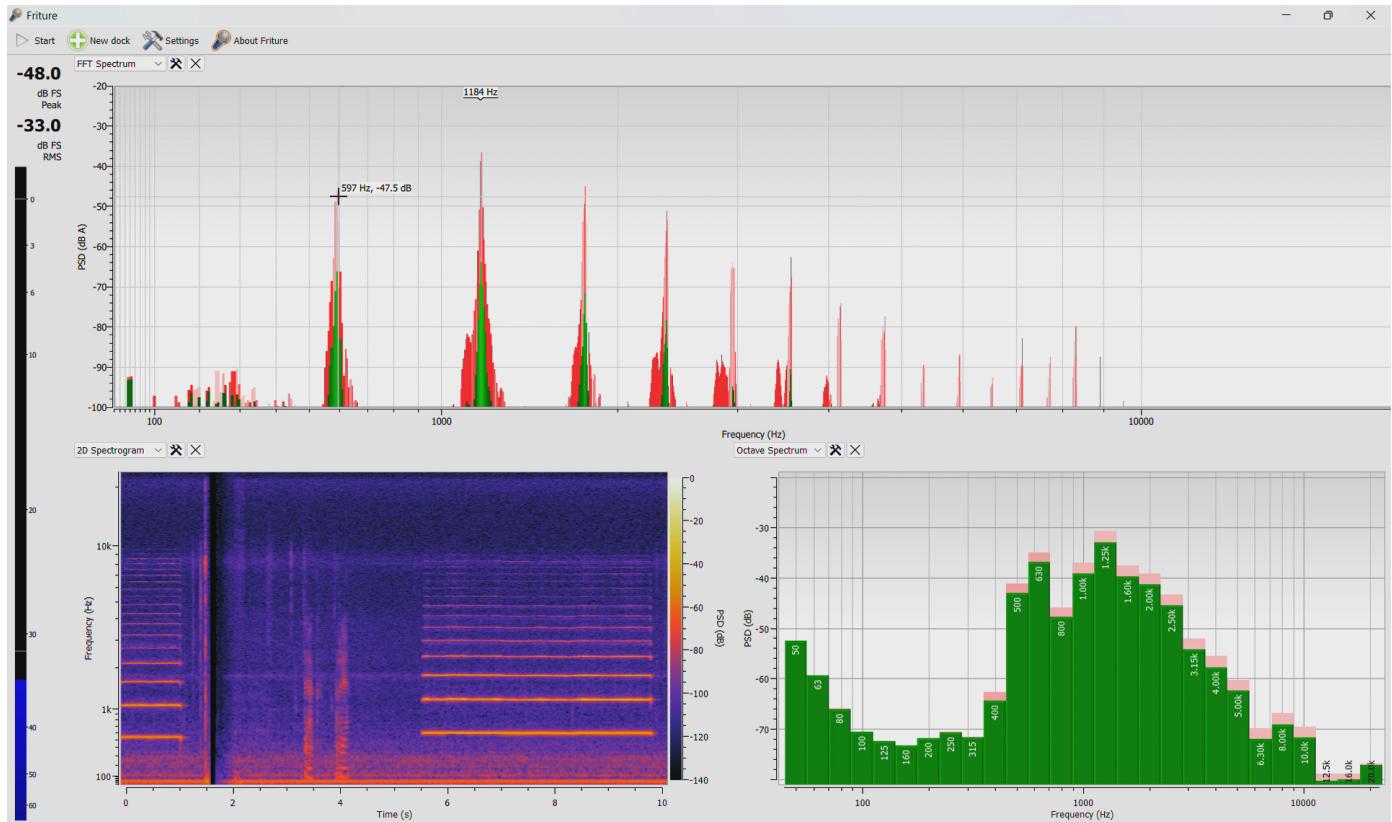


Рисунок 14: Пример данных полученных в эксперименте

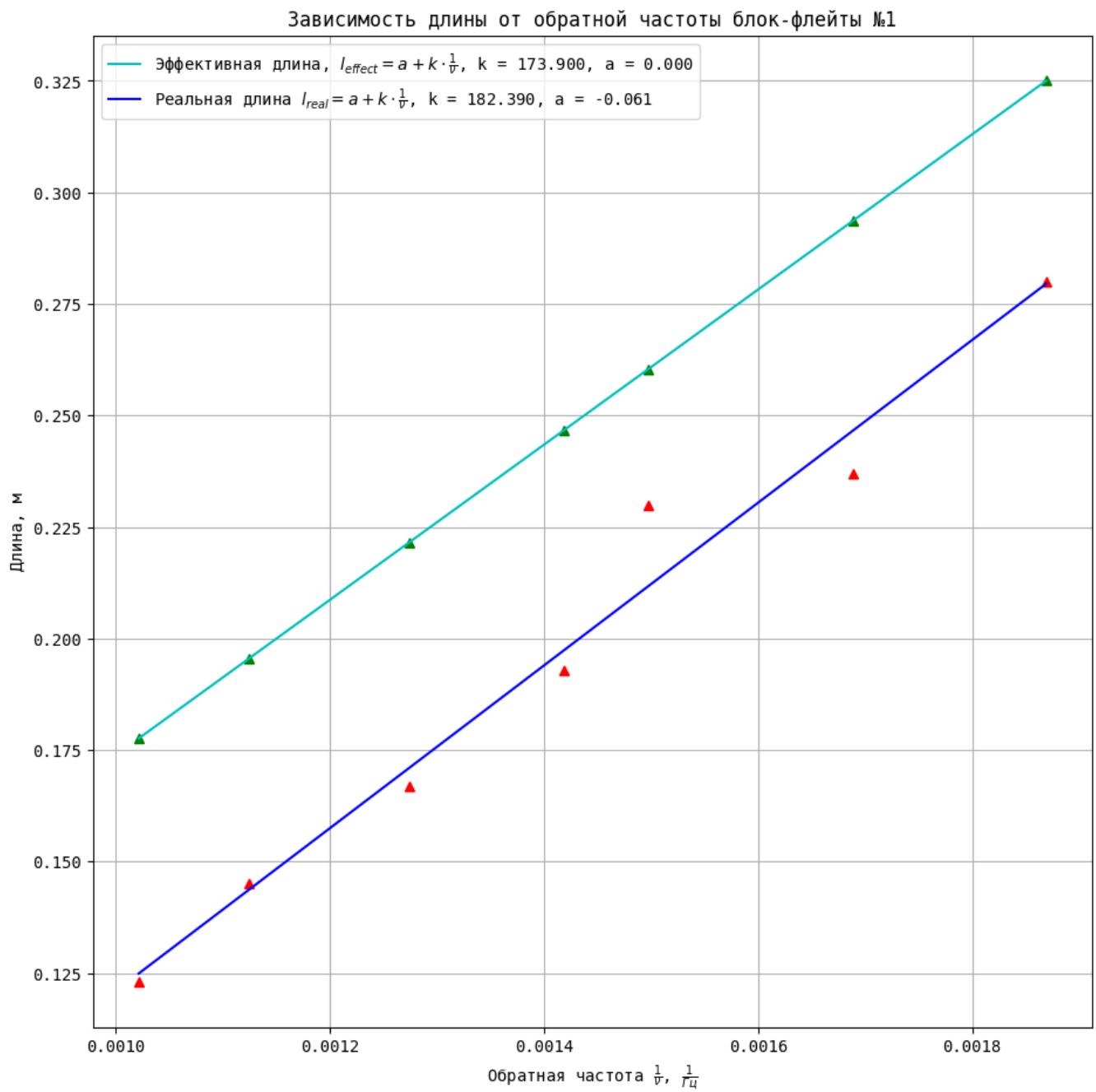


Рисунок 15: График зависимости реальной длины от обратной частоты для блок-флейты №1

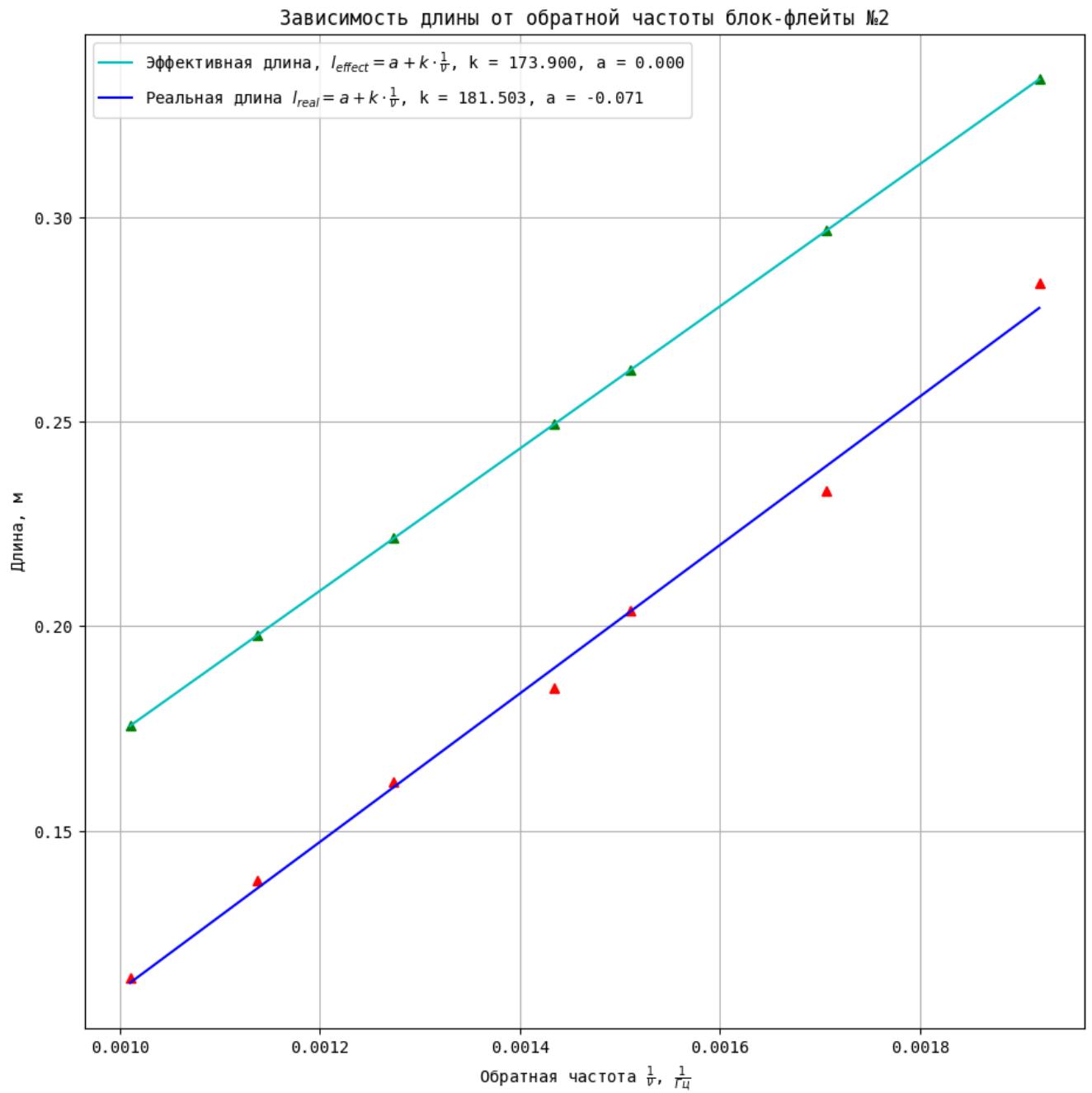


Рисунок 16: График зависимости реальной длины от обратной частоты для блок-флейты №2

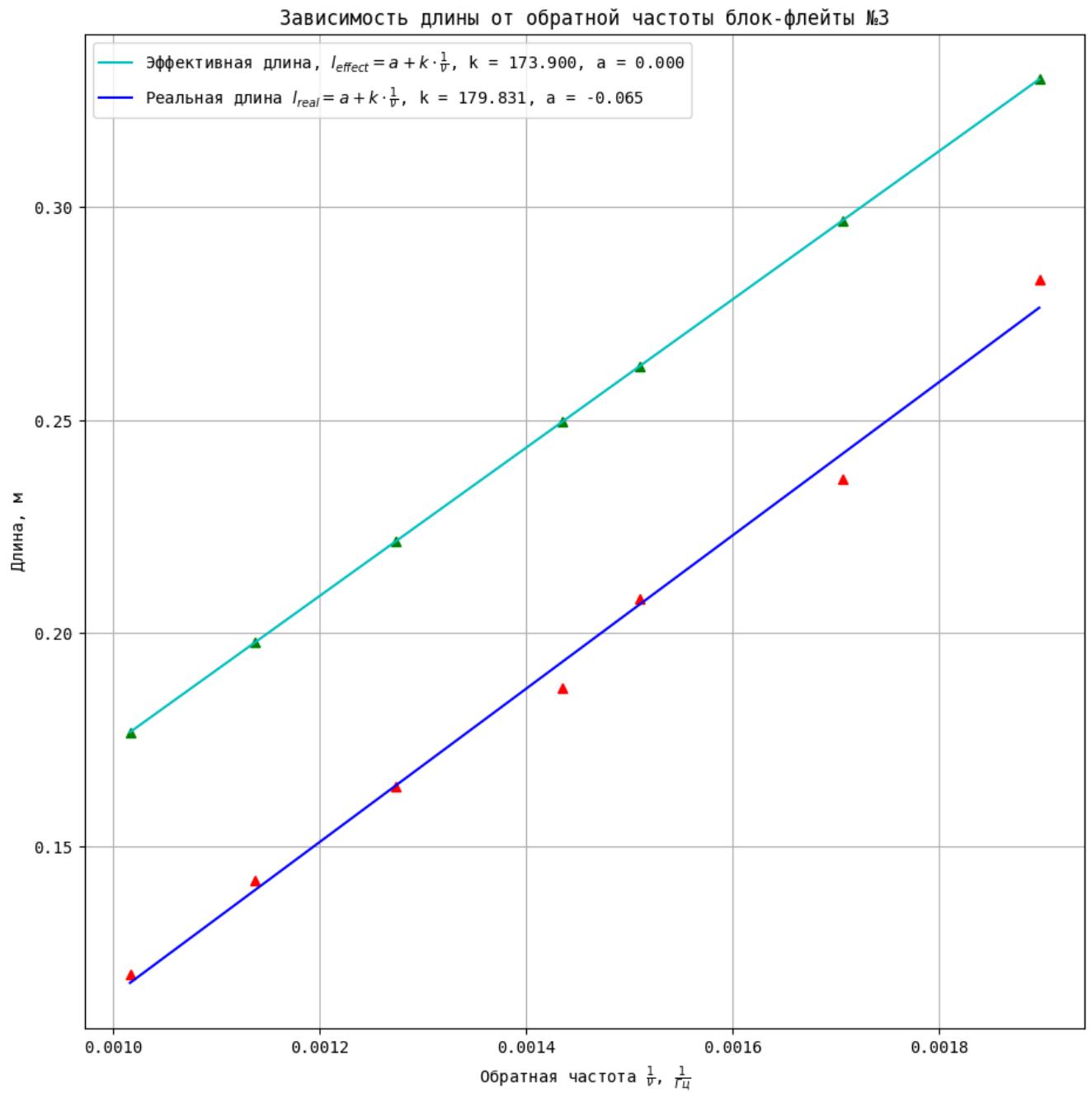


Рисунок 17: График зависимости реальной длины от обратной частоты для блок-флейты №3

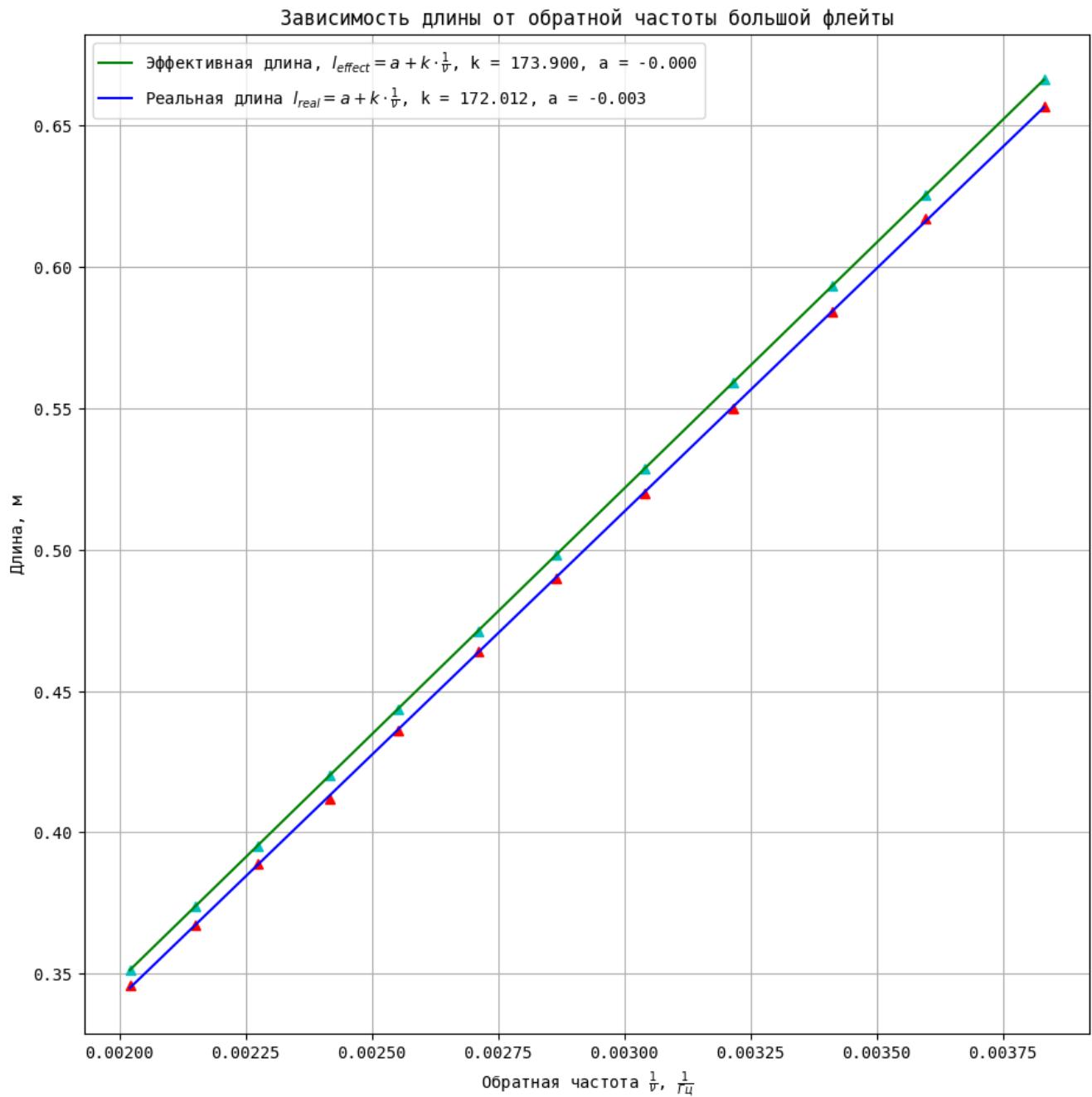


Рисунок 18: График зависимости реальной длины от обратной частоты для большой флейты