# **АЛКТГ. Дискретная математика.**

Домашнее задание

# Оглавление

# Глава 1

# Решение задач

## 1.1 Алгебра логики: введение

### 1.1.1 Задача №1

*$x, y, z$ – целые числа, для которых истинно высказывание:*

$$\neg(x = y) \wedge ((y < x) \rightarrow (2z > x)) \wedge ((x < y) \rightarrow (x > 2z))$$

*Чему равно $x$, если $z = 7$, $y = 16$?*

**Решение:**

### 1.1.2 Задача №2

*Постройте таблицу истинности для функции $\wedge((x \wedge \neg y) \wedge z)$*

**Решение:**

$\overline{((x \wedge \overline{y}) \wedge z)} = \overline{x \wedge \overline{y} \wedge z}$ построим таблицу истинности для данной функции:

| x | y | z | $\overline{y}$ | $x \wedge \overline{y}$ | $x \wedge \overline{y} \wedge z$ | $\overline{x \wedge \overline{y} \wedge z}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

### 1.1.3 Задача №3

*Докажите, что:*

$$1 \oplus x_1 \oplus x_2 = (x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1)$$

**<u>Решение:</u>**

Построим таблицы истинности для данных функций:

Таблица 1.1: $(x_1 \to x_2) \wedge \wedge (x_2 \to x_1)$

| $x_1$ | $x_2$ | $1 \oplus x_1$ | $1 \oplus x_1 \oplus x_2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

Таблица 1.2: $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1)$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_1 \to x_2$ | $x_2 \to x_1$ | $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Из таблиц истинности 1.1 и 1.2 $\Rightarrow$ левая часть равна правой, ч.т.д.

### 1.1.4 Задача №4

*Выполняется ли дистрибутивность для следующих операций:*

$$\textbf{а)}\ x \wedge (y \to z) \stackrel{?}{=} (x \wedge y) \to (x \wedge z);\ \textbf{б)}\ x \oplus (y \leftrightarrow z) \stackrel{?}{=} (x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z).$$

**<u>Решение:</u>**

**а)** Построим таблицы истинности для данных функций:

Таблица 1.3: $x \wedge (y \to z)$

| $x$ | $y$ | $z$ | $y \to z$ | $x \wedge (y \to z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Таблица 1.4: $(x \wedge y) \to (x \wedge z)$

| $x$ | $y$ | $z$ | $x \wedge y$ | $x \wedge z$ | $(x \wedge y) \to (x \wedge z)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Из таблиц истинности 1.3 и 1.4 $\Rightarrow$ левая часть $\neq$ правой $\Rightarrow$ дистрибутивность для данной операции не выполняется.

**б)** Построим таблицы истинности для данных функций:

Таблица 1.5: $x \oplus (y \leftrightarrow z)$

| $x$ | $y$ | $z$ | $y \leftrightarrow z$ | $x \oplus (y \leftrightarrow z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Таблица 1.6: $(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$

| $x$ | $y$ | $z$ | $x \oplus y$ | $x \oplus z$ | $(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Из таблиц истинности 1.5 и 1.6 $\Rightarrow$ левая часть $=$ правой $\Rightarrow$ дистрибутивность для данной операции выполняется.

### 1.1.5 Задача №5

*Выполняется ли для импликации:* **а)** коммутативность;
**б)** ассоциативность, т.е. $(x \to y) \to z \stackrel{?}{=} x \to (y \to z)$?

**<u>Решение:</u>**

**а)** Нам нужно доказать, что $x \to y = y \to x$. Распишем левую и правую части:

$$\left.\begin{array}{c} \text{Левая часть: } x \to y = \overline{x} \vee y \\ \text{Правая часть: } y \to x = \overline{y} \vee x \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Левая часть } \neq \text{праваой части} \Rightarrow$$
коммутативность не выполняется для импликации

**б)** Построим таблицы истинности для левой и правой частей:

Таблица 1.7: $(x \to y) \to z$

| $x$ | $y$ | $z$ | $x \to y$ | $(x \to y) \to z$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Таблица 1.8: $x \to (y \to z)$

| $x$ | $y$ | $z$ | $y \to z$ | $x \to (y \to z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Из таблиц истинности 1.7 и 1.8 $\Rightarrow$ левая часть $\neq$ правой части $\Rightarrow$ ассоциативность не выполняется для импликации.

### 1.1.6 Задача №6

*Указать существенные и несущественные (фиктивные) переменные следующих функций:*
**а)** $f(x_1, x_2, x_3) = 00111100$; **б)** $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to x_3$.

**Решение:**

**а)** Составим таблицу истинности для данной функции и исследуем ее переменне:

Таблица 1.9: $f(x_1, x_2, x_3)$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Таблица 1.10: Исследование $x_1$

| $x_2$ | $x_3$ | $f(0, x_2, x_3)$ | $f(1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Таблица 1.11: Исследование $x_2$

| $x_1$ | $x_3$ | $f(x_1, 0, x_3)$ | $f(x_1, 1, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Таблица 1.12: Исследование $x_3$

| $x_1$ | $x_2$ | $f(x_1, x_2, 0)$ | $f(x_1, x_2, 1)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

Из таблиц 1.10 и 1.11 $\Rightarrow$ переменные $x_1$ и $x_2$ – существенные, т.к. $f(0, x_2, x_3) \neq f(1, x_2, x_3)$ и $f(x_1, 0, x_3) \neq f(x_1, 1, x_3)$;
Из таблицы 1.12 $\Rightarrow$ переменная $x_3$ – несущественная, т.к. $f(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2, 1)$.
**б)** Распишим данную нам формулу:

$$(x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to x_3 = (\overbrace{\underbrace{\overline{x_1} \vee x_1}_{\underset{1}{\|}} \vee x_2}^{\overset{1}{\|}}) \to x_3 = 0 \vee x_3 \tag{1.1}$$

Из полученной формулы 1.1 $\Rightarrow$ переменные $x_1$ и $x_2$ – несущественные, а переменная $x_3$ – существенная.

## 1.2 Множества и логика

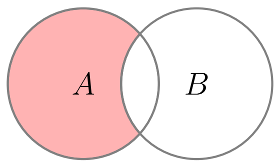
### 1.2.1 Задача №1

*Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется равенство:*
*$(A\backslash B) \cap ((A\cup B)\backslash(A\cap B))=A\backslash B$?*

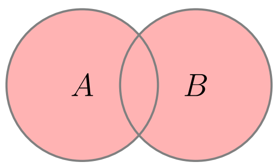
**<u>Решение:</u>**

Распишим каждое действие через диаграмму Эйлера — Венна:

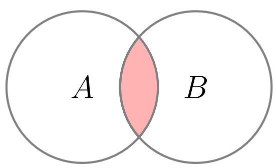
1. $A \setminus B$




2. $A \cup B$

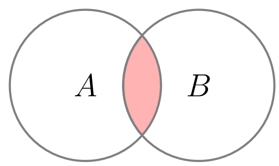



3. $A \cap B$



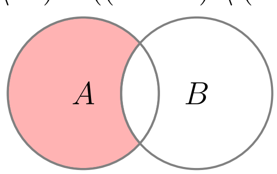

$\Longrightarrow$

4. $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$




Из (1) и (4) получаем, что:

5. $(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B))$




Заметим, что (1) совпадает с (5) $\Rightarrow$ утверждение верно.

**P.S.** Второй вариант решения (Для краткости будем писать $\chi_a(x) = \chi_a, \chi_b(x) = \chi_b$ и т.д.):

$$
\begin{gathered}
(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \Rightarrow (\chi_A(x) \wedge \overline{\chi_B(x)}) \wedge ((\chi_A(x) \vee \chi_B(x)) \wedge (\overline{\chi_A(x)} \vee \overline{\chi_B(x)})) = \\
= (\chi_A(x) \wedge \overline{\chi_B(x)}) \wedge (\chi_A(x) \vee \chi_B(x)) \wedge (\overline{\chi_A(x)} \vee \overline{\chi_B(x)}) = ((\chi_A(x) \wedge (\chi_A(x) \wedge \overline{\chi_B(x)})) \vee (\chi_B(x) \wedge \\
\wedge (\chi_A(x) \wedge \overline{\chi_B(x)}))) \wedge (\overline{\chi_A(x)} \vee \overline{\chi_B(x)}) = ((\chi_A(x) \wedge \overline{\chi_B(x)})0) \wedge (\overline{\chi_A(x)} \vee \overline{\chi_B(x)}) = \\
= (\overline{\chi_A(x)} \wedge (\chi_A(x) \wedge \overline{\chi_B(x)})) \vee (\overline{\chi_B(x)} \wedge (\chi_A(x) \wedge \overline{\chi_B(x)})) = (\chi_A(x) \wedge \overline{\chi_B(x)}) \Rightarrow A \setminus B
\end{gathered}
$$

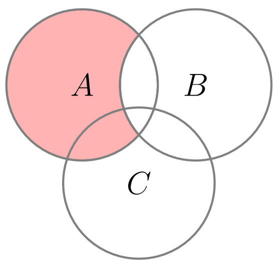
### 1.2.2 Задача №2

*Верно ли, что для любых множеств A, B и C выполняется равенство:*
$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)$?

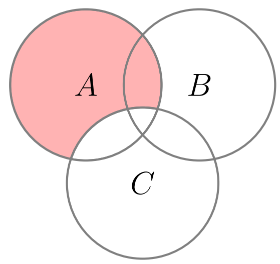
**Решение:**

Распишим каждое действие через диаграмму Эйлера — Венна:

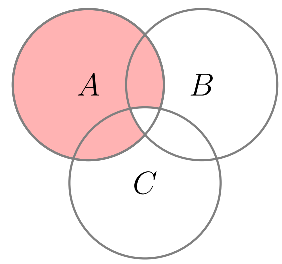
1. $A \setminus B$



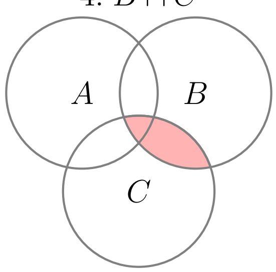

2. $A \setminus C$



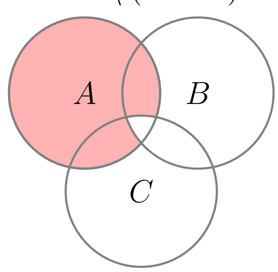

3. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$



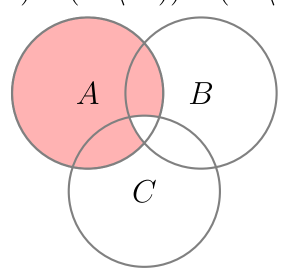

4. $B \cap C$



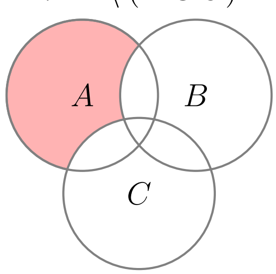

5. $A \setminus (B \cap C)$




6. $((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C))$




7. $A \setminus (B \cup C)$




$\Longrightarrow$ (6) не совпадает с (7) $\Rightarrow$ утверждение не верно.

**P.S.** Второй вариант решения:
Перейдем к характеристическим функциям:
(1) Левая часть: $((\chi_a \wedge \overline{\chi_b}) \vee (\chi_a \wedge \overline{\chi_c})) \wedge (\chi_a \wedge \overline{\chi_b \wedge \chi_c}) = \chi_a \wedge (\chi_a \vee \overline{\chi_c}) \wedge (\overline{\chi_b} \vee \chi_a) \wedge (\overline{\chi_b} \vee \overline{\chi_c}) \wedge$
$(\chi_a \wedge (\overline{\chi_b} \vee \overline{\chi_c})) = (\chi_a \wedge (\overline{\chi_b} \vee \overline{\chi_c})) \wedge (\chi_a \wedge (\overline{\chi_b} \vee \overline{\chi_c})) = \chi_a \wedge (\overline{\chi_b} \vee \overline{\chi_c})$;
(2) Правая часть: $\chi_a \wedge \overline{\chi_b} \wedge \overline{\chi_c}$;
Заметим, что левая (1) и правая (2) части не совпадают $\Rightarrow$ утверждение не верно.

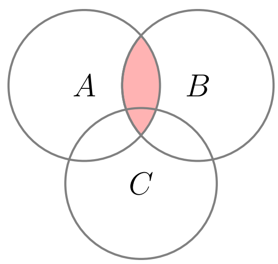
### 1.2.3 Задача №3

*Верно ли, что для любых множеств $A$, $B$ и $C$ выполняется равенство:*
$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$?

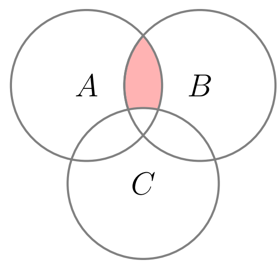
**<u>Решение:</u>**

Распишим каждое действие через диаграмму Эйлера — Венна:

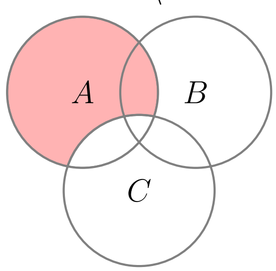
1. $A \cap B$



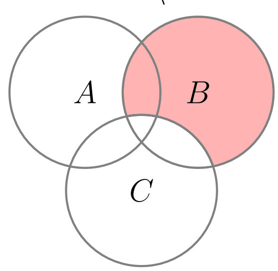

2. $(A \cap B) \setminus C$



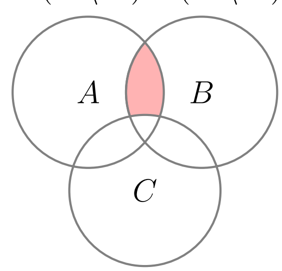

3. $A \setminus C$




4. $B \setminus C$




5. $(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$




Заметим, что (2) совпадает (5) $\Rightarrow$ утверждение верно.

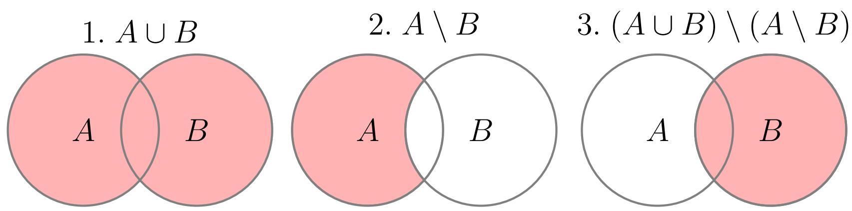
**P.S.** Второй вариант решения:
Перейдем к характеристическим функциям:
(1) Левая часть: $\chi_a \wedge \chi_b \wedge \chi_c$;
(2) Правая часть: $\chi_a \wedge \chi_c \wedge \chi_b \wedge \chi_c = \chi_a \wedge \chi_b \wedge \chi_c$;
Заметим, чточасти (1) и (2) совпадают $\Rightarrow$ утверждение верно.

### 1.2.4 Задача №4

*Верно ли, что для любых множеств $A$ и $B$ выполняется включение:*
$(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B$?

**<u>Решение:</u>**

Распишим каждое действие через диаграмму Эйлера — Венна:




Заметим, что полученное мн-во (3) $\subseteq B \Rightarrow$ утверждение верно.

**P.S.** Второй вариант решения:
Перейдем к характеристическим функциям:
$(\chi_a \vee \chi_b) \wedge \overline{\chi_a \wedge \overline{\chi_b}} = (\chi_a \vee \chi_b) \wedge (\overline{\chi_a} \vee \chi_b) = (\chi_a \wedge \chi_b) \vee (\chi_b \wedge \overline{\chi_a}) \vee \chi_b = \chi_b$ (Используем тожд-во $a \vee$ $\vee\, (a \wedge b) = a$)
Из этого получаем, что $B \subseteq B \Rightarrow$ утверждение верно.

### 1.2.5 Задача №5

. *Пусть* $P = [10, 40]$*;* $Q = [20, 30]$*; известно, что отрезок $A$ удовлетворяет соотношению*

$$((x \in A) \to (x \in P)) \wedge ((x \in Q) \to (x \in A))$$

**1.** *Найдите отрезок $A$ максимально возможной длины.*
**2.** *Найдите отрезок $A$ минимально возможной длины.*

**<u>Решение:</u>**

Оба операнда истинны. Первый операнд означает, что $A \leqslant P$, второй – $Q \leqslant A$. Значит, $A$ начинается между 10 и 20, и кончается между 30 и 40. Максимальная длина 30. Максимальная длина – 30 для $P$, минимальная – 10 для $Q$.

### 1.2.6 Задача №6

*Про множества $A, B, X, Y$ известно, что $A \cap X = B \cap X, A \cup Y = B \cup Y$.*
*Верно ли, что тогда выполняется равенство: $A \cup (Y \setminus X) = B \cup (Y \setminus X)$?*

<u>**Решение:**</u>

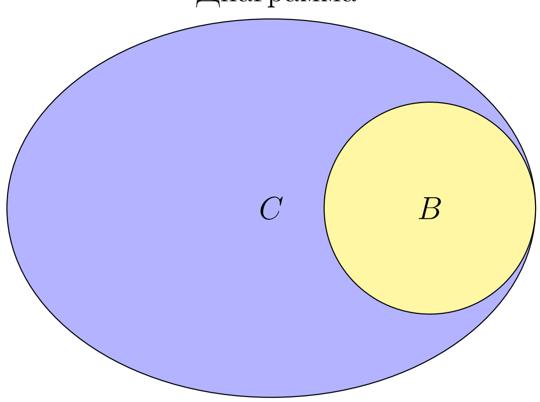
Из условия известно, что:
1)$A \cap X = B \cap X \Rightarrow \chi_a \wedge \chi_x = \chi_b \wedge \chi_x$;
2)$A \cup Y = B \cup Y \Rightarrow \chi_a \vee \chi_y = \chi_b \vee \chi_y$;
Заметим, что: $A \cup (Y \setminus X) = B \cup (Y \setminus X) \iff (\underbrace{\chi_a \vee \chi_y}_{(\chi_b \vee \chi_y)}) \vee (\chi_a \vee \overline{\chi_x}) = (\chi_b \vee \chi_y) \vee (\chi_b \vee \overline{\chi_x})$;
Для выполнения данного равенства нужно показать, что: $\chi_a \vee \chi_x = \chi_b \vee \chi_x$;
Заметим, что: $\chi_a \vee \overline{\chi_x} = \overline{\chi_x} \vee (\chi_a \wedge \chi_x),\ \chi_b \vee \overline{\chi_x} = \overline{\chi_x} \vee (\chi_b \wedge \chi_x) \Rightarrow$ нужно показать, что:
$\overline{\chi_x} \vee (\underbrace{\chi_a \wedge \chi_x}_{(\chi_b \wedge \chi_x)}) = \overline{\chi_x} \vee (\chi_b \wedge \chi_x)$, из этого уже видно, что левая и правая части равны $\Rightarrow$ рав-во вып-ся.

### 1.2.7 Задача №7

*Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A3_{\supseteq} \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$— невозрастающая последовательность множеств. Известно, что $A_1 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_9$. Докажите, что $A_2 \setminus A_7 = A_3 \setminus A_8$*

<u>**Докозательство:**</u>

Диаграмма




Для удобства будем использовать диагамму, где $A_1 = C$, $A_4 = B$.
Если $A_1 \neq A_4 \Rightarrow A_1 \setminus A_4 = B \oplus C$, но $A_6 \subseteq A_4$, $A_9 \subseteq A_4$, т.е. $A_6 \subseteq B$, $A_9 \subseteq B \Rightarrow A_6 \setminus$
$\setminus A_9 \neq B \oplus C$ ($B \oplus C$ вне $B$) и $A_1 \setminus A_4 \neq A_6 \setminus A_9 \Rightarrow A_1 = A_4$, $A_1 \setminus A_4 = 0 \Rightarrow A_6 \setminus A_9 = 0 \Rightarrow A_1 =$

$= A_2 = A_3 = A_4$, $A_6 = A_7 = A_8 = A_9$ (из условия невозрастания последовательности), $\Rightarrow A_2 \setminus A_7 = A_3 \setminus A_8 = 0$, ч.т.д.

**P.S.** Второй вариант решения:
Введем множества: $B_1 = A_1 \setminus A_2, B_2 = A_2 \setminus A_3, \ldots$ – они попарно не пересекаются $\Rightarrow$ вместо их объединения можно написать сумму: $A_1 \setminus A_4 = B_1 + B_2 + B_3$, $A_6 \setminus A_9 = B_6 + B_7 + B_8$
Ввиду совпадений этих множеств, получается, что $B$ под номерами 1,2,3,6,7,8 – пустые $\Rightarrow A_2 \setminus \setminus A_7 = B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 = B_4 + B_5, A_{38} = B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7 = B_4 + B_5 \Rightarrow A_2 \setminus A_7 = A_3 \setminus A_8$, ч.т.д.

### 1.2.8 Задача №8

*Пусть $A, B, C, D$ — такие отрезки прямой, что $A \triangle B = C \triangle D$ (симметрические разности равны). Верно ли, что выполняется включение $A \cap B \subseteq C$?*

**Решение:**

Пусть $A = [0; 2], B = [0; 3], C = [1; 3], D = [1; 2] \Rightarrow A \cap B = AA \triangle B = (2; 3], C \triangle B = (2; 3]$, но  не содержится в , а значит это контрпример $\Rightarrow$ Нет, не верно.

## 1.3 Математические определения, утверждения и доказательства

## 1.4 Графы I. Неориентированные графы

### 1.4.1 Задача №1

*Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?*

**Решение:**

Условие означает, что одна из вершин связана только с одной из 7 других одним ребром. Посчитаем максимальное число ребер в таком случае - оно будет максимальным, если все 7 других вершин связаны ребрами между собой. Число ребер - связей в этом случае будет равно: $C_7^2 = 21$, а всего ребер в графе будет 22 (добавили ребро, связывающее восьмую вершину с одной из 7 первоначальных). Мы выяснили что максимальное число ребер в графе, удовлетворяющем условию, равно 22, а значит подобный граф с 23 ребрами не существует.

### 1.4.2 Задача №2

*В стране Цифра есть 9 городов с названиями $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?*

**Решение:**

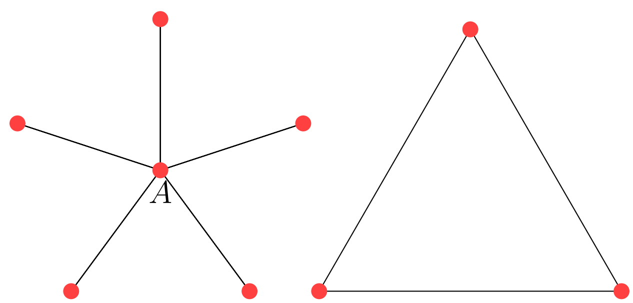
Двузначное число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3. Поэтому, число, включающее в себя цифру делящуюся на 3, будет также делится на 3 только тогда, когда вторая цифра также будет делится на 3 (или будет нулём). Но нуля у нас в наборе городов нет, а значит города $3, 6, 9$ (эти цифры делятся на три) будут образовывать изолированную от других компоненту связности, т.е. в них нельзя попасть из других городов и из них нельзя попасть в другие города $\Rightarrow$ из города 1 нельзя добраться в город 9.

### 1.4.3 Задача №3

*Найдите все графы, в которых каждая пара рёбер имеет общий конец.*

**<u>Решение:</u>**

К паре ребер с общим концом можно добавить еще одно ребро так, чтобы у всех пар ребер было по общему концу, только двумя способами. Первый – это взять общую точку пары ребер , и подсоединить к ней ребро одним из концов. Таким образом можно добавлять ребра бесконечно - у всех ребер будет общий конец, а значит и у всех пар ребер будет существовать общий конец. Второй – это подсоединить ребро так, чтобы образовался треугольник (граф-цикл с длиной 3). В любых других соединениях у каких-либо пар ребер не будет общей точки. Таким образом, все графы, удовлетворяющие условию, это граф-цикл с длиной 3 и множество графов, у которого все ребра имеют одну общую точку (A).




### 1.4.4 Задача №4

*В графе на* 400 *вершинах степень каждой вершины равна 201. Докажите, что в этом графе есть цикл длины* 3.

**<u>Решение:</u>**

Граф-цикл длины 3 образуется,если 2 вершины, соединенные ребром, имеют общую точку, с которой каждая из этих вершин также соединена ребром. Допустим, что такого подграфа в графе с 400 вершинами степени 201 каждая нет. Тогда, если мы возьмем любые 2 точки, соединенные ребром,то каждая из них соединена еще с $201 - 1 = 200$ различными точками, причем среди них нет точек, общих для этих двух. Из этого, для выполнения условия, в графе должно находится, кроме этих двух точек, еще $200 \cdot 2 = 400$ различных точек. Но в данном графе их осталось $400 - 2 = 398, 400 > 398$, из чего это невозможно. Из этого следует, что такой подграф обязательно найдется, ч.т.д.

### 1.4.5 Задача №6

*В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).*

**Докозательство:**

В стране 15 городов, значит из каждого города в другие есть от 0 до 14 дорог. Построим граф из 15 вершин (городов), которые соединены ребрами (дорогами). Условие, что из любого города можно добраться в любой означает связность данного графа. Сделаем так, чтобы у 14 вершин степень равнялась 7, а у одной - 8, такой граф существует ($14 \cdot 7 + 8 = 106$ - четное число). Если данный граф связен - то утверждение задачи и ее условие выполняется (из каждого города не менее 7 дорог, т.к. степень каждой вершины не менее 7). Если данный граф не связен, то возьмем его дополнение, которое, по теореме, будет однозначно связным. У такого графа степень 14 его вершин будет равна $147 = 7$, а у одной равна $148 = 6$. Проведем из последней вершины ребро к любой другой. Связность не исчезнет, у такого графа у 14 вершин степень будет равна 7, а у одной равна 8. Утверждение и его условие выполняется (граф связен, условие на 7 и более дорог из городов выполнено). Мы показали способ, с помощью которого можно построить ребра (дороги) между вершинами (городами) с выполнением условия (7 и более ребер (дорог) из каждой вершины (города), ч.т.д.

### 1.4.6 Задача №8

*Найдите все графы-пути и графы-циклы, дополнение которых графпуть или граф-цикл.*

**Решение:**

Тут нужен полный просмотр вариантов. У графа-пути $L_2$ дополнение пустое. У $L_3$ это отрезок и точка. У $L_4$ будет $L_4$ – подходит. У $L_5$ и выше, крайние вершины в дополнении приобретут степень $\geqslant 3$, что можно не смотреть.
С циклами аналогично: подходит $C_5$, а дальше в дополнении получатся степени вершин $\geqslant 3$. С циклическими графами $C_3$, $C_4$ всё ясно сразу.

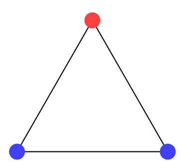
## 1.5 Графы II. Деревья и раскраски

### 1.5.1 Задача №1

*Степень каждой вершины графа равна 2. Верно ли, что этот граф 2−раскрашиваемый?*

**Решение:**

Нет, приведем пример:
Возьмем граф состоящий из трех вершин, каждая из которых соединена ребром с каждой (треугольник):



У такого графа степень каждой вершины равна $31 = 2$, но этот граф не 2−раскрашиваемый, поскольку если мы покрасим одну вершину в один цвет, то две другие должны будут быть покрашены в один другой цвет (иначе раскраска будет неправильна, т.к. они обе соединены с ней ребром), но они обе также соединеныребром,а значит должны быть разного цвета,чтобы раскраска была правильной, из чего правильная раскраска данного графа в 2 цвета невозможна.

### 1.5.2 Задача №2

*Докажите, что в дереве на $2n$ вершинах есть независимое множество размера $n$ (ни одна пара вершин множества не соединена ребром).*

**Доказательство:**

Для начала докажем, что что любое дерево 2-раскрашиваемо:
Покажем, что для $\forall$ дерева $T$ и любой его вершины $A$ существует единственная правильная 2-раскраска с красной вершиной $A$ и единственная — с синей. Очевидно, что из этого утверждения следует, что у всякого дерева ровно две правильные 2-раскраски.
Вершина $A$ связана с каждой вершиной $B$ дерева $T$ единственным простым путем $p_B$. Если длина $|p_B|$ пути $p_B \vdots 2$, то окрасим $B$ в красный, иначе – в синий.
Пусть вершины $B$ и $C$ смежны. Если $C$ не входит в путь $p_B$, то $p_C = p_B C$, в противном случае $|p_C| < |p_B| \Rightarrow B$ не входит в $p_C$ и $p_B = p_C B$. В каждом из случае числа $|p_B|$ и $|p_C|$ разной четности $\Rightarrow$ вершины $B$ и $C$ разного цвета и раскраска правильная. Еще одна правильная раскраска получится, если обратить цвет каждой вершины в уже построенной раскраске.
Покажем, что любая правильная 2-раскраска с красной вершиной $A$ совпадает с построенной выше (аналогично, любая с синей вершиной $A$ совпадает с ее обращением). Для этого

достаточно проверить, что вершина $B$ красная $\Leftrightarrow |p_B| \vdots 2$. Ведем индукцию по этой длине: При $|p_B| = 0$ вершина $B = A$ – красная. Пусть $|p_B| = k > 0$ и $p_B = A_1 \ldots v_k B$. Получаем, что: $|p_{Ak}| = k1 < k$, так что, по предположению индукции, вершина $A_k$ – синяя $\Leftrightarrow$ число $k-1$ – нечетно, т. е. $k$ – четно. С другой стороны, в силу правильности раскраски, вершина $A_k$ – синяя $\Leftrightarrow$ вершина $B$ – красная.

Теперь докажем, что что в дереве на $2n$ вершинах есть независимое множество размера $n$. Так как выше было доказано, что любое дерево 2-раскрашиваемо, то предположим, что вершин каждого цвета меньше $n$, откуда следует, что всего в дереве менее $2n$ вершин, что не так, следовательно вершин одного из двух цветов не менее чем $n$. Выберем любые $n$ среди таковых.

### 1.5.3 Задача №3

*В дереве на* 2019 *вершинах ровно три вершины имеют степень* 1*. Сколько вершин имеют степень* 3?

**Решение:**

В дереве степень 1 имеют только конечные вершины листьев дерева, иначе из них можно было бы проложить еще одно ребро и они перестали бы быть конечными вершинами листьев дерева. Если сменить степень конечной вершины листа дерева с 1 на 2, то общее число листьев не изменится, поскольку добавится одно ребро - один лист, и уничтожится предыдущийлист.Если сменить степень конечной вершины листа дерева с 1 на 3,то общее число листьев увеличится на 1, поскольку добавится два ребра - два листа, и уничтожится предыдущий лист. По аналогии, если сменить степень конечной вершины листа дерева с 1 на n, то общее число листьев увеличится на n-2. В дереве с диаметром один и больше обязательно есть хотя бы 2 вершины степени 1 (крайние вершины графа, т.к. дерево не имеет простых циклов длины больше 2). Но в дереве из условия 3 вершины степени 1, т.е. была добавлена одна вершина степени 1, т.е. был добавлен 1 дополнительный лист, т.е. в графе есть одна и только одна вершина степени 3.

### 1.5.4 Задача №4

*Есть два дерева на $n$ вершинах, каждое имеет диаметр длины $d$. Можно ли так добавить ребро между вершинами этих деревьев, чтобы длина диаметра полученного дерева равнялась $d$?*

**Решение:**

Минимальное расстояние до самой дальней точки дерева из любой точки дерева равно $\frac{d}{2}$, т.к. самые дальние друг от друга точки дерева лежат на концах диаметра дерева (иначе это не диаметр дерева), если выбранная точка лежит на диаметре, то минимальное расстояние до самой дальней точки дерева – $max(n; dn) \geqslant \frac{d}{2}$, если не лежит на диаметре, то минимальное расстояние до самой дальней точки дерева – $h+max(n; dn) \geqslant \frac{d}{2}$, h – расстояние до ближайшей точки на диаметре дерева. Из этого, минимальный диаметр дерева, полученного из соединения двух таких деревьев – $d + 1$ (в диаметр входит добавленное ребро), т.е. нельзя добавить ребро так, чтобы длина диаметра полученного дерева равнялась d.

### 1.5.5 Задача №5

*Докажите, что если степень каждой вершины графа не превосходит $d$, то его можно правильно раскрасить в $d + 1$ цвет.*

**Доказательство:**

Следует сделать следующее замечание: данное утверждение – теорема Брукса. Давайте докажем её. Начнем с нескольких простых наблюдений.
**1.** Если граф $H$ нельзя покрасить в $k$ цветов, то он содержит индуцированный подграф, в котором степени вершин не меньше $k$ (то есть можно выкинуть из него несколько вершин так, что степени оставшихся будут не меньше $k$).

> **Доказательство:**
> Если степень вершины $v$ меньше $k$, то граф $H - v$ также нельзя покрасить в $k$ цветов (иначе покрасим его, а потом докрасим $v$). Удалим вершину $v$ и продолжим процесс, в итоге останется подграф, в котором все степени не меньше $k$.

**2.** Пусть $u$,$v$ – две несмежные вершины графа $H$. Рассмотрим графы $H/uv$, в котором вершины $u$,$v$ склеены в одну (кратные ребра после склеивания сразу делаем простыми), и граф $H + uv$, в котором добавлено ребро $uv$. Граф $H$ можно покрасить в $k$ цветов если и только если хотя бы один из этих двух графов можно.

> **Доказательство:**
> Покраскам $H$, в которых вершины $u$ и $v$ одного цвета, соответствуют покраски $H/uv$, а тем, в которых $u$ и $v$ разного цвета, покраски $H + uv$.

Перейдем к доказательству теоремы Брукса. Будем считать, что для графов с меньшим чис-

лом вершин, чем у $G$, утверждение теоремы Брукса выполняется, а для графа $G$ нет. Тогда степени всех вершин графа $G$ равны $d$, потому что согласно (1) в $G$ есть подграф с таким свойством, а из-за связности он обязан совпадать с $G$.
Рассмотрим любую вершину $p$ графа $G$, у нее найдутся два несмежных соседа $u$,$v$. Рассмотрим граф $G/uv$. По (2)) его не покрасить в $d$ цветов. Этот граф связен, и степени всех его вершин, кроме, возможно, вершины $z$, получаемой отождествлением $u$ и $v$, не превосходят $d$. Кроме того, степень вершины $p$ строго меньше, чем $d$. Следовательно, в нем по (1) найдется индуцированный подграф $H$, в котором степени всех вершин не меньше $d$. Этот подграф непременно содержит вершину $z$, потому что степени оставшихся и так были не больше $d$, а из-за связности мы должны были удалить какие-то ведущие в них ребра. Таким образом, в графе $H$ есть вершина $z$ и несколько вершин степени $d$, которые не смежны, таким образом, с вершинами вне $H$.
Попробуем теперь покрасить граф $G + uv$. Он состоит из графа $H_1$, стягиванием ребра $uv$ в котором служит граф $H$, и графа $H_2$, состоящего из вершин $u$,$v$ и вершин, не входящих в $H_1$. Эти два графа имеют общее ребро $uv$, а их вершины, отличные от $u$ и $v$, не смежны. Таким образом, если мы покрасим каждый из них $d$ цветов, то склеивая эти раскраски по ребру $uv$ (можно считать, что вершины u,v покрашены оба раза в белый и голубой цвета соответственно) получим раскраску графа $G+uv$. Заметим, что степени всех вершин графов $H_1$, $H_2$ не превосходят $d$. В самом деле, для всех вершин, кроме $u$,$v$ это очевидно, и проверить следует лишь что, например, вершина $u$, имеющая степень $d + 1$ в графе $G + uv$, соединена не только с вершинами $H_1$ или не только с вершинами $H_2$. Первое ясно: вершина $u$ соединена с вершиной $p$, лежащей в $H_2$. Если же она соединена только с вершинами $H_2$, то в графе $H$ степень вершины $z$ будет строго меньше $d$ (ребрам, выходящим в графе $H$ из $z$, будут соответствовать лишь ребра, выходящие в $G$ из $v$, причем не все – например, не ребро $zp$). Таким образом, для графов $H_1$, $H_2$ (оба имеют меньше вершин, чем $G$) выполняется утверждение теоремы Брукса, так что один из них должен быть полным графом на $d + 1$ вершине. Это может быть только граф $H_2$, поскольку в графе $H_1$ вершины $u$,$v$ не имеют общих соседей (такой общий сосед имел бы степень меньше $d$ в графе $H$ и потому попал бы в $H_2$). В этом случае степень вершины $z$ в графе $H$ получается не больше, чем 2 – противоречие.

### 1.5.6 Задача №6

*Назовем не* $2-$*раскрашиваемый граф минимальным, если после удаления любого ребра он становится* $2-$*раскрашиваемым. Докажите, что в минимальном не* $2-$*раскрашиваемом графе на* 1000 *вершинах есть хотя бы одна изолированная вершина* (*т.е. вершина степени* 0).

**Доказательство:**

Граф является $2-$раскрашиваемым $\Leftrightarrow$ в нем нет циклов нечетной длины $\Rightarrow$ граф минимально не 2-раскрашиваемый когда в нем есть один единственный цикл нечетной длины, причем удаление любого ребра уничтожит этот цикл. Если в графе нет вершин степени 0, это значит что все вершины находятся в одном цикле нечетной длины. Но это невозможно, поскольку вершин 1000, и цикл будет четной длины (1000). Значит, в нем обязательно есть хотя бы одна вершина степени 0, чтобы получился цикл нечетной длины (999, 997 и т.д.), ч.т.д.

### 1.5.7 Задача №8

*Граф получен из графа-цикла $C_{2n}$ добавлением рёбер, соединяющих противоположные вершины ($v_1$ соединена с $v_{n+1}$, $v2$ с $v_{n+2}$ и т.д.). При каких $n$ получившийся граф правильно раскрашиваемый*
**а)** *в два цвета*; **б)** *в три цвета*?

**<u>Решение:</u>**

Если $n = 1$, то граф можно раскрасить в два и в три цвета (каждая 2-раскраска есть и$v$3-раскраска). Далее считаем, что $n > 1$. Мы можем описать наш граф $C_{2n}$ более формально: вершинами ему служат числа 0,1, . . . ,$2n - 1$, а смежны вершины $u$ и $v$ тогда и только тогда, когда $u - v = \pm 1(mod 2n)$ (это условие дает цикл $C_2n$) или $u - v \equiv n(mod2n)$. Заметим, кстати, что $-n \equiv n(mod2n)$.
**а)** Если граф $C_2n$ правильно раскрашен в два цвета, то вершины $u$ и $v$, отличныена единицу, смежны и разного цвета (цвета чередуются в цикле $C_2n$). Поэтому всечетные числа одного цвета, а нечетные другого. Если $n$ четно и $u - v \equiv n(mod2n)$, то и $u - v$ четно, т. е. смежные вершины $u$ и $v$ имеют одну четность, а значит, и один цвет. Поэтому при четных $n$ правильной 2-раскраски графа $C_{2n}$ нет.
Напротив, при нечетных $n$ раскраска четных чисел в один, а нечетных в другой цвет оказывается правильной, так как любые «противоположные» вершины $u$ и $v$, для которых $u - v \equiv n(mod2n)$, имеют разную четность.
**б)** Для всех нечетных $n$ 2-раскраска является и 3-раскраской. С другой стороны, простой перебор показывает, что $C_2$ (т.е. $K_4$) раскрасить в 3 цвета нельзя. Можно понять, что при всех других четных значениях $n$ искомая 3-раскраска существует и получается неким «локальным» изменением 2-раскраски (конкретно, мы раскрасим в третий, «красный» цвет ровно три вершины).
Итак, пусть вершина0будет белой (или черной); $1, 2n - 1$ и $n$ будут красные; $n - 1$ будет черной и $n + 1$ будет белой. Оставшиеся $2(n - 2)$ вершины раскрасим, чередуя черный и белый цвета в цикле $C_{2n}$. Очевидно, сам цикл $C_{2n}$ при этом раскрашен правильно. Убедимся, что ребра между «противоположными» вершинами не нарушают правильности. По построению, ребра $0n, 1(n + 1)$ и $(2n - 1)(n - 1)$ правильные. Остаются ребра $2(n+2)$,$3(n+3)$, . . . ,$k(n+k)$, . . . ,$(n-2)(2n-2)$, где $2 \leqslant k \leqslant n-2$. По построению, $n-1$ и все нечетные среди вершин $k$, $2 \leqslant k \leqslant n - 2$ черные, а все четные белые. Значит, поскольку $n$ четно, все четные среди вершин $n + k$ должны быть черные, а все нечетные – белые. Это так и есть, поскольку мы чередуем цвета, начиная с белой нечетной $n + 1$. Подводя итог, видим, что 3-раскраска графа $C_{2n}$ существует при всех натураль-ных $n \neq 2$.

### 1.5.8 Задача №9

*В графе на* 100 *вершинах, каждая из которых имеет степень* 3*, есть ровно* 600 *путей длины* 3*. Сколько в этом графе циклов длины* 3?

**Решение:**

Будем рассматривать все приведённые пути длины 3 в стандартном смысле этого слова, включая замкнутые. Приведённый путь не должен иметь вхождений вида $ee^{-1}$, то есть не должен проходить по тому же ребру туда-сюда друг за другом.
Такие пути имеют вид $e_1e_2e_3$. Сначала выбираем среднее ребро $e_2$. Оно определяется началом и концом. Начало – любая вершина; способов выбрать 100. Конец – любая из трёх соседних вершин. Итого 300 способов выбрать $e_2$. Пусть оно идёт из вершины $u$ в вершину $v$. Ребро $e_1$ теперь выбирается 2 способами: оно идёт в $u$ из любой соседней вершины, не считая $v$. Аналогично, 2 способа для $e_3$. Итого 1200 способов выбора пути из трёх рёбер.
Если из них 600 простых, согласно условию, то остальные 600 – это замкнутые приведённые пути. Поэтому циклов в смысле циклических подграфов $_3$ будет 100, так как любой такой подграф можно "прочитать"в виде замкнутого пути 6 способами.

## 1.6 Двудольные графы, паросочетания и функции

### 1.6.1 Задача №1

*Функция $h$ из множества $\{0, 1, \ldots, 8\}$ в множество $\{a, b, \ldots, g\}$ определена следующим образом:*

$$h : 1 \mapsto b,\ 2 \mapsto c,\ 3 \mapsto b,\ 4 \mapsto e,\ 5 \mapsto b,\ 6 \mapsto e,\ 8 \mapsto f.$$

Найдите **а)** $Dom(h)$; **б)** $Range(h)$; $h(\{0, 1, 2, 3, 4\})$; **в)** $h^{-1}(\{a,b,c\})$; **г)** $h^{-1}(h(\{0,1,2,6,7,8\}))$; **д)** $h(h^{-1}(\{a,b,c,d,e\}))$.

**Решение:**

**а)** $Dom(h) = \{1,2,3,4,5,6,8\}$;
**б)** $\mathrm{Range(h)} = \{\mathrm{b,c,e,f}\}$; $\mathrm{h}(\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}) = \{\mathrm{b,c,e}\}$;
**в)** $\mathrm{h}^{-1}(\{a,b,c\}) = \{1,2,3,5\}$;
**г)** $\mathrm{h}^{-1}(h(\{0,1,2,6,7,8\})) = h^{-1}(\{b,c,e,f\}) = \{1,2,3,4,5,6,8\}$;
**д)** $\mathrm{h}(\mathrm{h}^{-1}(\{a,b,c,d,e\})) = h(\{1,2,3,4,5,6\}) = \{b,c,e\}$.

### 1.6.2 Задача №2

*Функция $f$ из множества целых чисел в множество целых чисел сопоставляет числу $x$ наименьшее простое число, которое больше $x^2$. Докажите, что если множество целых чисел $X$ конечное, то и полный прообраз этого множества $f^{-1}(X)$ конечен.*

**Доказательство:**

Возьмем $f : A \to X$, причем $f$ определена на всех $A$ ($A$ - множество целых чисел). Тогда, $f^{-1}(X) = A$. $X$ состоит из простых чисел, а значит $\forall x \in X \hookrightarrow x \in \mathbb{N}$ (они все натуральны). Если множество $X$ конечно, то существует наибольший элемент в $X(x_{max})$, и из условия сопоставления функции $f$ ясно, что $\forall a \in A \hookrightarrow x_{max} > a^2 \Rightarrow x_{max} > a > -x_{max}$, и так как $A$ – множество целых чисел, а $x_{max}$ – заданное натуральное число, то $A$ конечно ($|A| > 2 \cdot x_{max} + 1$ – в $A$ могут быть целые числа, находящиеся между $x_{max}$ и $-x_{max}$). И так как $A$ конечно, то и прообраз $f^{-1}(X)$ конечен, ч.т.д.

### 1.6.3 Задача №3

*Пусть $f$ – функция из множества $X$ в множество $Y$ , при этом $A \subseteq X$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение*

$$f^{-1}(f(A))?A$$

*стало верным? (Возможные знаки сравнения в этой и двух следующих задачах: $\subseteq, \supseteq, =$. Нужно учесть все варианты.)*

**Решение:**

$f^{-1}(f(A)) \nsubseteq A$, так как возможна ситуация: $a_1 \in X, a_2 \in X, a_1 \in A, a_2 \notin A, b_1 \in Y, f(a_1) = b_1, f(a_2) = b1$, из чего следует, что не все элементы прообраза $f^{-1}(f(A))$ (который включает в себя $a_1$ и $a_2$) принадлежат $A$.
$f^{-1}(f(A)) \nsupseteq A$, потому что возможна ситуация: $a_1 \in X, a_1 \in A$, но $a_1$ не определен на $f$, а значит $\nexists f(a_1)$ и $a_1 \notin f^{-1}(f(A))$.
$f^{-1}(f(A)) = A$ – невозможно, поскольку это означает одновременное выполнение $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ и $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$, невозможность чего мы доказали выше. Из этого, никакой из знаков сравнения нельзя поставить вместо «?»

### 1.6.4 Задача №4

*Пусть $f$ – функция из множества $A \cup B$ в множество $Y$ . Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение*

$$f(A \setminus B)?f(A) \setminus f(B)$$

*стало верным?*

**Решение:**

Пусть $x_1, x_2, x_3 = A$; $x_2$,$x_3$,$x_4 = B : f(x_1) = y_1;\ f(x_2) = y_1;\ f(x_3) = y_2;\ f(x_4) = y_2, y_1, y_2 \in Y$. Тогда $y_1, y_2 \in f(A); y_1$,$y_2 \in f(B);\ y_1, y_2 \notin f(A) \setminus f(B);\ y_1 \in f(A \setminus B);\ y_2 \notin f(A \setminus B) \Rightarrow$ вместо «?» нельзя поставить $=$ или $\subseteq$. Функция $f$ сопоставляет элементу из множества $A \cup B$ элемент множества $Y$, т.е. создает стрелочки из $A \cup B$ в $Y$. $f(X)$, $X$ – какое-то множество, определяет концы стрелок из множества $X$. Тогда $f(A \setminus B)$ создает стрелочки из области множества , не входящей во множество $B$, а $f(A) \setminus f(B)$ сначала создает стрелочки из , а затем убирает те, которые входят во множество $B$, а также те, концы которых лежат на концах стрелочек из $A$, а начала во множестве $B \Rightarrow f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$

### 1.6.5 Задача №5

*Пусть $f$ – функция из множества $X$ в множество $Y$, при этом $A \cup B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение*

$$f^{-1}(A \setminus B) ? f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

*стало верным?*

**Решение:**

Функция $f$ сопоставляет элементу из множества $X$ элемент множества $Y$, т.е. создает стрелочки из $X$ в $Y$, часть из них попадает во множества $A$ и/или $B$. Тогда для множества $C \subseteq Y, f^{-1}(C)$ определяет начала стрелочек, чьи концы лежат во множестве $C$. $f^{-1}(A \setminus B)$ определяет начала стрелочек, чьи концы одновременно лежат в $A$ и не лежат в $B$. $f^{-1}(A)$ определяет начала стрелочек, чьи концы лежат в $A$, а $f^{-1}(B)$ – чьи концы лежат в $B$. Из этого следует, что $f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ определяет те начала стрелочек, чьи концы лежат в $A$ но не лежат в $B$, что эквивалентно определению $f^{-1}(A \setminus B)$. Из этого, $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

### 1.6.6 Задача №7

*Про функцию $f$ из множества $X$ в множество $Y$ и множество $B \subseteq Y$ известно, что $f^{-1}(B) = X$. Верно ли, что $B = Y$?*

**Решение:**

Нет, приведем пример:
$X = x_1, x_2, x_3$; $Y = y_1, y_2, y_3$; $B = y_1, y_2, (B \subseteq Y)$; $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_1, f(x_3) = y_2, (f^{-1}(B) = X)$. Все условия выполняются, но $B \neq Y (y_3 \in Y; y_3 \notin B)$, т.е. $B = Y$ – не верно.

### 1.6.7 Задача №8

*Приведите пример такой инъекции $f$ из множества $X$ в множество $Y$, что для некоторого $B \subseteq Y$ выполняются оба условия*

$$\begin{cases} B \neq \varnothing \\ f^{-1}(b) = \varnothing \end{cases}$$

**<u>Решение:</u>**

$X$ и $Y$ – множества всех натуральных чисел, $f$ сопоставляет все числа из $X$ с простыми числами в порядке возрастания из $Y$ (множество $X$ содержит номера простых чисел из $Y$, простые числа разнумерованы по возрастанию). Тогда можно взять $B \subseteq Y$, $B = \{4\}, B \neq \varnothing$ (включает в себя 4), $f^{-1}(B) = \varnothing$ (4 – не простое число).

### 1.6.8 Задача №9

*Постройте биекцию между конечными подмножествами множества положительных целых чисел и конечными строго возрастающими последовательностями положительных целых чисел.*

**<u>Решение:</u>**

Давайте приведем следующий приимер. Пусть дана строго возрастающая последовательность: 5, 7, 8, 11, 100. Сопоставляем ей 5, 2, 1, 3, 89 (сначала первое число, потом разности). онятно, что по второй последовательности однозначно восстанавливается первая. Пустой последовательности соответствует пустая; одноэлементным соответствуют одноэлементные. Это биекция, так как она обладает обратным отображением.

## 1.7 Комбинаторика I. Правила суммы и произведения

### 1.7.1 Задача №1

*Есть* 6 *кандидатов на* 6 *вакансий. Скольками способами можно заполнить вакансии?* (*Каждая вакансия должна быть заполнена.*)

**<u>Решение:</u>**

Первого кандидата можно поставить на одну из 6 вакансий, второго - на одну из 5 оставшихся, третьего - на одну из 4 оставшихся и.т.д. Из этого, число расстановок равно 6!

### 1.7.2 Задача №2

**а)** *Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых есть единица или тех, в записи которых её нет?*
**б)** *Тот же вопрос для первых* 10 *миллионов чисел.*

**<u>Решение:</u>**

**а)** Возьмем числа от 0 до 999999 (все числа из первого миллиона кроме 1000000, плюс 0), вероятность того,что цифра в числе не 1 – $\frac{9}{10}$ (всего существует 10 цифр), $\Rightarrow$ вероятность того, что среди чисел от 0 до 999999 встретится число без 1 – $\frac{9^6}{10^6}$, среди чисел от 1 до 1000000 – $\frac{9^6-1}{10^6}$ (убрали число 0 из числителя и знаменателя, добавили число 1000000 в знаменатель). $\frac{9^6-1}{10^6} \approx 0.53 > 1 - 0.53 \Rightarrow$ чисел в записи которых нет единицы среди первого миллиона больше, чем в записи которых они есть.
**б)** Возьмем числа от 0 до 9999999 (все числа из первого десятка миллионов кроме 10000000, плюс 0), вероятность того,что цифра в числе не 1 – $\frac{9}{10} \Rightarrow$ вероятность того, что среди чисел от 0 до 9999999 встретится число без 1 – $\frac{9^7}{10^7}$, среди чисел от 1 до 10000000 – $\frac{9^7-1}{10^7}$ (убрали число 0 из числителя и знаменателя, добавили число 10000000 в знаменатель). $\frac{9^7-1}{10^7} \approx 0.48 < 1 - 0.48 \Rightarrow$ чисел в записи которых нет единицы среди первого десятка миллионов меньше, чем в записи которых они есть.

### 1.7.3 Задача №3

*Найдите вероятность того, что в десятичной записи случайного шестизначного числа, в записи будет хотя бы две одинаковые цифры?*

**Решение:**

Подсчитаем число всех шестизначных чисел, где нет 2 одинаковых цифр. На первую позицию можно поставить одну из 9 цифр (любая кроме 0), на вторую – 9 цифр (любая кроме той что на первой позиции), на третью – 8 цифр (любая кроме тех что на первой и второй позиции), на четвертую – 7 цифр, на пятую – 6 цифр, на шестую – 5 цифр. Из этого, шестизначных чисел без повторения цифр – $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136080$. Всего шестизначных чисел – 900000 штук, значит чисел с повторением хотя бы двух цифр – $900000 - 136080 = 763920$, вероятность в случайной записи – $\frac{763920}{900000} = 0.8488$

### 1.7.4 Задача №4

*Из* 36*−карточной колоды карт на стол равновероятно и случайно выкладывается последовательность из* 4 *карт. Какова вероятность того, что две из них красные, а две черные?*

**Решение:**

Всего в колоде 18 черных и 18 белых карт, можно вытащить: 4 черные карты, 3 черные 1 красную карту, 2 черные и 2 красные карты, 1 черную 3 красные карты, 4 красные карты. Вероятности 1 и 5, 2 и 4 случаев равны (кол-во красных и черных карт изначально одинаково). Вероятность вытащить 4 черные (красные) карты: $\frac{18}{36} \times \frac{17}{35} \times \frac{16}{34} \times \frac{15}{33} = \frac{73440}{1413720}$, вероятность вытащить 3 черные (красные) карты и 1 красную (черную) (считаем вероятность для каждой позиции красной (черной) карты): $\frac{18}{36} \times \frac{18}{35} \times \frac{17}{34} \times \frac{16}{33} + \frac{18}{36} \times \frac{18}{35} \times \frac{17}{34} \times \frac{16}{33} + \frac{18}{36} \times \frac{17}{35} \times \frac{18}{34} \times \frac{16}{33} + \frac{18}{36} \times \frac{17}{35} \times \frac{16}{34} \times \frac{18}{33} = \frac{352512}{1413720} \Rightarrow$ вероятность вытащить 2 черные и 2 красные карты равна: $1 - 2 \times \frac{73440}{1413720} - 2 \times \frac{352512}{1413720} = \frac{561816}{1413720} = \frac{153}{385} \approx 0.3974$

### 1.7.5 Задача №5

*Сколько существует* $6-$*значных чисел, в которых чётных и нечётных цифр поровну*?

**Решение:**

Всего $\exists$ 900000 6-значных чисел. Четных и нечетных цифр существует по 5 штук. Каждая из них ставится независимо от предыдущей, т.е. кол-во чисел вычисляется перемножением вариаций цифр на каждой позиции. При подсчетах учитываем, что на первое место в числе нельзя ставить ноль (вариаций четных цифр на первом месте 4, а в остальных - 5). Чисел, в которых все цифры четные: $4 \times 55 = 12500$, все числа нечетные: $5^6 = 15625$. Чисел, в которых одна четная цифра (перемещещаем ее с 1 до 6 позиции): $45^5 + 5^6 + 5^6 + 5^6 + 5^6 + 5^6 = 90625$, в которых одна нечетная цифра (перемещаем ее с 1 до 6 позиции): $5^6 + 4 \times 5^5 + 4 \times 5^5 + 4 \times 5^5 + 4 \times 5^5 + 4 \times 5^5 = 78125$. Чисел, в которых 2 четных цифры (считаем все наборы, в которых четные цифры стоят на 1 и 2-6 позиции, 2 и 3-6 позиции, 3 и 4-6, 4 и 5-6, 5 и 6, т.е. перебираем все возможные наборы с 2 четными цифрами): $5 \times (4 \times 5^5) + 4 \times 5^6 + 3 \times 5^6 + 2 \times 5^6 + 1 \times 5^6 = 218750$, в которых 2 нечетных цифры (считаем наборы аналогично): $5 \times 5^6 + 4 \times (4 \times 5^5) + 3 \times (4 \times 5^5) + 2 \times (4 \times 5^5) + 1 \times (4 \times 5^5) = 203125 \Rightarrow$ шестизначных чисел в которых 3 четных и нечетных цифры (их поровну): $900000 - 12500 - 15625 - 90625 - 78125 - 218750 - 203125 = 281250$.

### 1.7.6 Задача №6

*Сколько существует* $7-$*значных чисел, в которых ровно две четные цифры и перед каждой четной цифрой обязательно стоит нечетная*?

**Решение:**

Отделим наборы нечетная-четная цифра от остальных. Всего вариаций такого набора: $5 \times 5 = 25$ (существует 5 четных и 5 нечетных цифр), наборов 2, значит вариаций наборов: $25 \times 25 = 625$. Наборы стоят на 4 позициях между 3 оставшимися нечетными цифрами (позиция есть также перед и после этих цифр). Варианий размещения 2 наборов на 4 позиции: $C_4^2 = 6$,вариаций значений 3 оставшихся нечетных цифр: $5 \times 5 \times 5 = 125 \Rightarrow$ всего семизначных чисел, удовлетворяющих заданному условию: $625 \times 6 \times 125 = 468750$.

### 1.7.7 Задача №7

*Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырехместную?*

__Решение:__

В одноместную надо поселить 1 из 7 студентов, т.е. $\exists C_7^1 = 7$ различных вариаций поселения. В двухместную надо поселить 2 из 6 оставшихся студентов, т.е. $\exists C_6^2 = 15$ различных вариаций поселения. В четырехместную надо поселить 4 из 4 оставшихся студентов, т.е. $\exists C_4^4 = 1$ вариант поселения $\Rightarrow$ студентов можно поселить в комнаты $7 \times 15 \times 1 = 105$ способами.

### 1.7.8 Задача №8

*Найдите количество диаметров в полном бинарном дереве ранга $n$.*

__Решение:__

В данной задаче ответ зависит от того, считаем ли мы два взаимно обратных пути одинаковыми или разными. Будем считать их разными, в противном случае при $n \geqslant 1$ нужно разделить на 2.

При $n = 0$ имеется один пустой (одновершинный) путь. Пусть $n \geqslant 1$. Нарисуем дерево сверху вниз (корень вверху, листья внизу). Простой путь в этом дереве устроен так: сначала какое-то число шагов поднимаемся вверх, потом спускаемся вниз, это следует из того, что после одного списка вниз далее мы подняться вверх уже не сможем. Подъём вверх занимает не более $n$ шагов, и то же для спуска вниз.

Итого не более $2n$. Длина $2n$ достигается для пути, который начинается в одном из листов, поднимается до корня, и далее спускается вниз до листа. Первый лист выбираем $2^n$ способами. Последний лист выбирается в другой половине дерева (не в той, где первый) $2^{n-1}$ способами. Итого $2^{2n-1}$ диаметров.

## 1.8 Комбинаторика II. Биномиальные коэффициенты

### 1.8.1 Задача №1

*Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить одну координату на* 1 *или обе координаты на* 2*. Сколько есть способов переместить Робота из точки* $(0, 0)$ *в точку* $(4, 5)$?

**Решение:**

Представим нашу координатную плоскость в виде таблички координат размером 5 на 6 (по x – от 0 до 4, по y – от 0 до 5), в которую будем записывать число способов добраться до поля (4,5) (в него напишем 1) из данного конкретного поля. Из того, что робот может двигаться только на одну клетку вправо или вверх (увеличение координаты на 1) и по диагонали на 2 клетки вверх и вправо (увеличение всех координат на 2), в каждую клетку необходимо записывать сумму чисел, находящихся в клетках на одну клетку вправо, вверх и на две клетки вправо и вверх от данной клетки (сумма 3 чисел). Проделывая данные действия, мы получим в клетке (0,0) число 189 - искомое число способов добраться из (0,0) в (4,5).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 3 | 18 | 12 | 7 | 3 | 1 |
| 2 | 47 | 26 | 12 | 4 | 1 |
| 1 | 101 | 47 | 18 | 5 | 1 |
| 0 | 189 | 76 | 25 | 6 | 1 |
| y \ x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

### 1.8.2 Задача №2

*В магазине продается* 10 *видов пирожных. Сколькими способами можно купить* 100 *пирожных* (*порядок покупки не важен*)?

**Решение:**

В задаче требуется найти число всевозможных групп по 100 элементов, которые можно составить из данных 10 различных элементов, причем указанные элементы в каждой группе могут повторяться, а сами группы отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Это задача на отыскание числа сочетаний с повторениями из 10 элементов по 100. Следовательно, $\overline{C}_{10}^{100} = C_{109}^{100} = \frac{109!}{100! \cdot 9!} = 4263421511271$

### 1.8.3 Задача №3

*Какое слагаемое в разложении* $(1+2)^n$ *по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?*

**Решение:**

В биноме Ньютона слагаемые нумеруются от 0 до n. Возьмем $0 < k \leqslant n$, тогда $k-$тое слагаемое в биноме Ньютона: $C_n^k \times 2^k \times 1^{n-k} = C_n^k \times 2^k$. Оно будет наибольшим, если $k$ наибольшее из возможных $k$, для которых выполняется: $\frac{C_n^k \times 2^k}{C_n^{k-1} \times 2^{k-1}} > 1$ (слагаемые возрас тают).

$$\frac{C_n^k \times 2^k}{C_n^{k-1} \times 2^{k-1}} > 1$$
$$\frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} \times 2 > 1$$
$$\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!} \times 2 > 1$$
$$k < \frac{2n+2}{3}$$

Из этого , наибольшим будет слагаемое с номером $k = [\frac{2n+2}{3}]$ (целая часть от $\frac{2n+2}{3}$).

### 1.8.4 Задача №4

*Найдите число слов длины* $n$ *над алфавитом* $\{0,1\}$*, в которых не двух единиц подряд.*

**Решение:**

Возьмем за $a_n$ – число слов длины $n$ заканчивающихся на 0, за $b_n$ – число слов длины $n$ заканчивающихся на 1. Тогда слов длины $n$ будет $a_n + b_n$.Так как две единицы подряд идти не может, то $b_n + 1 = a_n$ (в конец слова можно добавить 1 только если слово заканчивается на 0), для нуля ограничений нет $\Rightarrow a_n + 1 = a_n + b_n$ (0 можно добавить к любому слову). Из этого, справедливо: $a_{n+2} + b_{n+2} = a_{n+1} + a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n + a_{n+1} + b_{n+1}$.
$a_{n+2} + b_{n+2} = (a_n + b_n) + (a_{n+1} + b_{n+1})$ – рекурентное соотношение как в числах Фибоначчи. Учитывая то, что $a_1 = 1, b_1 = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 + b_1 = 2, b_2 = a_1 = 1, (a_1 + b_1) = 2 = F_3, (a_2 + b_2) = 3 =$ $= F_4$, то, аналогично числам Фибоначчи, таких слов длины $n$ будет – $F_{n+2}$ (число Фибоначчи с номером $n+2$).

### 1.8.5 Задача №5

*Дать комбинаторное доказательство тождества*

**а)** $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$;

**б)** $\binom{n}{m} = \binom{n-2}{m} + 2\binom{n-2}{m-1} + \binom{n-2}{m-2}$.

<u>**Решение:**</u>

**а)** В выражении слева мы вытаскиваем из $n$ шаров $m$ шаров (назовем их множеством $A$), а затем выбирают из этих $m$ шаров еще $k$ шаров (назовем их множеством $B$). В выражении справа мы вытаскиваем из $n$ шаров $k$ шаров (определяем множество $B$), а затем из оставшихся $n-k$ шаров достаем $m-k$ шаров (определяем множество $A \setminus B$). Комбинаторный смысл и правой, и левой части состоит в определении множеств $A$ и $B$, причем $B \subseteq A$. Определение таких множеств для левой части очевидно. Для правой части мы определили $B$ и $A \setminus B$, из чего ясно, что определено и $A$ ($A = (A \setminus B) \cup B$), т.е. таким же образом определили $AB$. Мы определили одни и те же множества, из чего тождество верно.

**б)** $C_n^m$ – число способов выбрать $m$ элементов из множества размером $n$ (в которое входят элементы $a$ и $b$).

$C_{n2}^m$ – число способов выбрать $m$ элементов (в числе которых однозначно нет $a$ и $b$) из множества размером $n$ (в которое входят элементы $a$ и $b$).

$C_{n2}^{m2}$ – число способов выбрать $m$ элементов (в числе которых однозначно есть $a$ и $b$) из множества размером $n$ (в которое входят элементы $a$ и $b$).

$C_{n2}^{m1}$ – число способов выбрать $m$ элементов (в числе которых однозначно есть $a$ ($b$) и однозначно нет $b$ ($a$)) из множества размером $n$ (в которое входят элементы $a$ и $b$).

Из определений выше, $C_m^{n-2} + 2 \times C_{m-1}^{n-2} + C_{m-2}^{n-2}$ – число способов выбрать $m$ элементов из множества размером $n$ (в которое входят элементы $a$ и $b$) (потому что других способов кроме описанных выше больше нет), что эквивалентно самому первому определению. Из этого, тождество верно.

### 1.8.6 Задача №6

*Какое из чисел больше* $\binom{F_{1000}}{F_{998}+1}$ *или* $\binom{F_{1000}}{F_{999}+1}$?

<u>**Решение:**</u>

$$C_{F_{1000}}^{F_{998}+1} \; ? \; C_{F_{1000}}^{F_{999}+1}$$
$$\frac{F_{1000}!}{(F_{998}+1)!(F_{1000}-F_{998}-1)!} \; ? \; \frac{F_{1000}!}{(F_{999}+1)!(F_{1000}-F_{999}-1)!}$$
$$\frac{1}{(F_{998}+1)!(F_{999}-1)!} \; ? \; \frac{1}{(F_{999}+1)!(F_{998}-1)!}$$

$$\frac{F_{999}}{F_{998}!F_{999}!\times(F_{998}+1)} \ ? \ \frac{F_{998}}{F_{999}!F_{998}!\times(F_{999}+1)}$$
$$\frac{F_{999}}{F_{998}+1} \ ? \ \frac{F_{998}}{F_{999}+1}$$
$$F_{999}\times(F_{999}+1) \ ? \ F_{998}\times(F_{998}+1)$$

Так как $F_{999} > F_{998}$, то и $F_{999}\times(F_{999}+1) > F_{998}\times(F_{998}+1) \Rightarrow \binom{F_{1000}}{F_{998}+1} > \binom{F_{1000}}{F_{999}+1}$

### 1.8.7 Задача №7

*Приведите комбинаторное доказательство равенства*

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant (n+1)/2} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}.$$

<u>**Решение:**</u>

$F_2$ - это число слов длины $n$ в двоичном алфавите, в котором нет соседних единиц (доказательство в Задаче №4). Обозначим число единиц за $k$. Ясно, что в таких словах $0 \leqslant k \leqslant \frac{n+1}{2}$.При фиксированном $k \geqslant 1$, для всех единиц, кроме последней, следующее число равно 0, таких нулей в слове $k-1$. Вычеркнем их, останется $n-k+1$ символов, среди которых $k$ единиц. В таких словах символы могут размещатся в любом порядке, и условие того, что две единицы не идут подряд для слова длиной $n$ будет выполнено. Таких слов всего $C^k_{n-k+1}$. Просуммируем для всех $k$ и получим формулу слева (для k=0 формула также дает правильный результат (1)), которая будет означать число слов длины n в двоичном алфавите, в котором нет соседних единиц для любого возможного числа единиц, что эквивалентно самому первому определению. Из этого, тождество верно.

### 1.8.8 Задача №8

*Сколько способов разместить* 20 *различных книг на* 5 *полках, если каждая полка может вместить все* 20 *книг? Размещения, отличающиеся порядком книг на полках, считаются различными.*

<u>**Решение:**</u>

Заметим, что данная задаче эквивалентна следующей: сколькими способами можно разделить полку на 5 секций, вмещающих в себя до 20 книг? Тогда вместо изначальных 5 полок у нас теперь 4 одинаковых доски-разделителя. Пусть $k_i, i \in [1{,}20]$ – наши книги, а разделители - $|$, тода ответом к данной задаче будет число последовательностей из элементов $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{20}, |, |, |, |$, как не трудно догадаться таких последовательностей – 24!, но, поскольку разделители между собой не различаются и их перестановки между собой учитывать не следует, то окончтательный ответом будет: $\frac{24!}{4!}$ способа.

### 1.8.9 Задача №9

*Студсовет из 8 человек выбирает из своего состава председателя путем тайного голосования. Каждый может отдать один голос за любого члена студсовета. Результат голосования – число голосов, отданных за каждого кандидата. Сколько существует различных результатов голосования?*

**Решение:**

Данная задача эквивалентна Задаче №2, а ответом является число сочетаний с повторениями из 8 по 8: $\overline{C}_n^k, k = n \Rightarrow \overline{C}_n^n = C_2^n n - 1 = C_{15}^8 = 6435$.
**P.S.** Второй вариант решения:
Результат голосования задаётся последовательностью из 8 целых неотрицательных чисел, сумма которых равна 8. Тогда получаем ряд из 15 эелементов, в котором 8 из них - голоса членов студсовета, 7 – "перегородки делящие ряд на 8 частей, представляющие собой 8 членов студсовета. Тогда ответом к задаче является число сочетаний из 7 по 15 – $C_{15}^7 = 6435$.

### 1.8.10 Задача №10

*Сколькими способами можно переставить буквы в слове* «ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ», *так чтобы две буквы* «О» *не стояли рядом?*

**Решение:**

Всего в слове 18 букв, из них 7 букв «О». Заметим, что буквы «О» образуют 8 "клеток"между собой и по краям, причем все средние клетки не должны остаться пустыми. В эти клетки мы должны расставлять остальные 11 букв. Подсчитаем способы так: число способов правильно выбрать позиции для букв «О» умножим на число способов расставить 11 букв в оставшиеся позиции. Число способов расставить 11 букв – $\frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$, $2! \cdot 2! \cdot 3!$ – повотряющиеся буквы «Б», «Н» и «С». Далее нужно расставить 7 букв «О» между согласными, тода Число способов правильно выбрать позиции для букв «О» – $C_{12}^7$. Из выше указанных утверждений следует, что ответ – $C_{12}^7 \cdot \frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 166320$.

## 1.9 Комбинаторика III. Формула включений-исключений

### 1.9.1 Задача №1

*Скольками способами можно закрасить клетки таблицы $3 \times 4$ так, чтобы незакрашенные клетки содержали или верхний ряд, или нижний ряд, или две средних вертикали?*

**Решение:**

Случаев когда однозначно не закрашен верхний ряд – $2^8$ (цвет 4 из них определен, а 8 – нет (2 варианта – закрашен/незакрашен)), аналогично случаев когда однозначно не закрашен нижний ряд – $2^8$, две средних вертикали – $2^6$.
Случаев, когда одновременно выполняются 1-ое и 2-ое условия – $2^4$ (однозначно не закрашены 8 клеток верхнего и нижнего ряда), 2-ое и 3-ье – $2^4$, 1-ое и 3-ье - $2^4$.
Случаев когда одновременно выполняются все три условия – $2^2$ (однозначно не закрашены 10 клеток).
Если взять выполнение каждого из условий за некоторое множество, то, по формуле включений-исключений, объединение всех трех множеств (искомый нами результат) равен: $(2^8+2^8+2^6)-(2^4+2^4+2^4)+2^2 = 532$ случая.

### 1.9.2 Задача №2

*Для полета на Марс набирают группу людей, в которой каждый должен владеть хотя бы одной из профессий повара, медика, пилота или астронома. При этом в техническом задании указано, что каждой профессией из списка должно владеть ровно 6 человек в группе. Кроме того указано, что в группе должен найтись ровно один человек, владеющий всеми этими профессиями; каждой парой профессий должны владеть ровно 4 человека; каждой тройкой — ровно 2.*
*Выполнимо ли такое техническое задание?*

**Решение:**

Пусть множества $A_1$ – повара, $A_2$ – медики, $A_3$ – пилоты, $A_4$ – астрономы. Тогда из условия

$$\Rightarrow \begin{cases} |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 6; \\ |A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = 4; \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2; \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1; \end{cases}$$

По формуле включений-исключений – $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = (6+6+6+6) - (4+4+4+4+$

$4+4)+(2+2+2+2)-1=7$ человек, но данное условие не выполнимо, покажем это. Возьмем 6 человек (в таблице 1-6 люди) которые владеют профессией повара (мн-во $A_1$). Тогда мы не сможем выбрать 6 человек, которые владеют профессией медика (мн-во $A_2$), и при этом выполнить условие $|A_1 \cap A_2| = 4$ (см. таблицу, при вставке значения в знак вопроса $|A_1 \cap A_2| \neq 4$, если не вставить одно значение $|A_2| \neq 6$)

| Мн-во \ Номер чел-ка | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | + | + | + | + | + | + | |
| $A_2$ | + | + | + | + | ? | ? | + |

Следовательно, данное техническое задание невыполнимо.

### 1.9.3 Задача №3

*Пусть $A$ и $B$ — конечные непустые множества, и $|A| = n$. Известно, что число инъекций из $A$ в $B$ совпадает с числом сюръекций из $A$ в $B$. Чему равно это число?*

**Решение:**

Так как, для f : $A \to B$ $\exists f$ – инъекция $\leftrightarrow |B| \geqslant |A|$, $\exists f$ – сюръекция $\leftrightarrow |B| \leqslant |A|$. А из условия или они обе есть, или их обеих нет (но одновременное не выполнение $|B| \geqslant |A||B| \leqslant |A|$ при не пустых $A$ и $B$ невозможно), а значит $|A| = |B| = n$ (они обе есть).
Из $|A| = |B|$, сюръекции и инъекции будут эквивалентными и являться биекциями, и их число совпадет, а число возможных биекций на множествах с размером $n$ равно числу возможных размещений $n$ элементов из множества $B$ напротив $n$ элементов множества $A$, т.е. равно: $[n]_n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$.

### 1.9.4 Задача №4

*В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.*

**Решение:**

Рассмотрим граф на 20 вершинах. Соединим вешрины красными и синими ребрами, где красное ребро – между учениками (вершинами), которые дружат, синее ребро – между учениками, которые не дружат. Получаем $\frac{20\cdot19\cdot18}{3!} = 1140$ треугольников, из которых часть – одноцыетные, другие –разноцветные. Наша задача найти количество одноцветных треугольников. Сначала посчитаем количество разноцветных: каждая из 20 вершин соединена 6 красными и 13 синими ребрами, тогда удвоенное число таких треугольников – $20 \cdot 6 \cdot 13 = 1560 \Rightarrow 780$ – кол-во разноцветных треугольников, тогда ответ: $1140 - 780 = 360$ компаний.

### 1.9.5 Задача №5

*Найдите количество неубывающих отображений*

$$f: \ 1,2,\ldots,n \to 1,2,\ldots,m$$

**Решение:**

Функция неубывающая, если $x \leqslant y$, то $f(x) \leqslant f(y)$. Пусть $f(i)$ через $x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Требуется найти количество последовательностей из $n$ чисел с условием: $1 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant m$.
Каждая такая последовательность задаётся составом своих элементов, так как расположить их по неубыванию можно единственным способом. Поэтому мы выбираем $n$ элементов из $m$, где элемнты могут повторяться. Это число сочетаний с повторениями из m по n. Из предыдущих парагрвфов мы знаем, что оно равно обычному числу сочетаний из $m+n-1$ по $n$, т.е.: $C^n_{m+n-1} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}$.

### 1.9.6 Задача №6

*Чего больше, разбиений $n$-элементного множества на не более чем $k$ подмножеств или разбиений $(n+k)$-элементного множества на ровно $k$ подмножеств?*

**Решение:**

При $k = 1$ способ в обоих случаях всего один. При $k \geqslant 2$ вторая величина больше (причём намного). Укажем какое-нибудь инъективное отображение. Возьмём способ разбиения $n$-элементного множества на меньше или равное $k$ частей. Пронумеруем эти части каким-то образом. У нас есть $k$ дополнительных элементов. Поместим первый из них в первую часть, второй во вторую, и так далее, пока хватает элементов. Из оставшихся элементов сформируем одноэлементные части. Получится разбиение $n + k$ элементов на $k$ частей. По нему восстанавливается прообраз (изымаем все дополнительные элементы). Ввиду того, что $k \geqslant 2$, среди разбиений $n$-элементного множества имеются такие, где частей не менее двух, и способ нумерации неоднозначен. Им будет соответствовать несколько разбиений множества из $n + k$ элементов. То есть неравенство для количеств окажется строгим.

### 1.9.7 Задача №7

*Сколькими способами можно рассадить за круглым столом n пар влюблённых так, чтобы ни одна пара влюблённых не сидела рядом.*

**Решение:**

Рассаживания пар влюбленных можно интерпретировать в терминах теории графов как ориентированные гамильтоновы циклы в графе корона. Корона получается удалением совершенного паросочетания из полного двудольного графа $K_{n,n}$. Она имеет $2n$ вершин двух цветов, и каждая вершина соединена со всеми рёбрами другого цвета, за исключением одной вершины. В данной задаче вершины представляют мужчин (синие вершины) и женщин (красные вершины)(смотри Рис. 2.1), а рёбра представляют пары мужчин и женщин, которые могут сидеть рядом. Этот граф получается из полного двудольного графа удалением совершенного паросочетания, где рёбра соединяют пары влюбленных. Любое правильное рассаживание пар можно описать последовательностью вершин, представляющую собой гамильтонов цикл в графе. Однако, два гамильтоновых цикла считаются эквивалентными, если они соединяют те же вершины в том же порядке, независимо от начальной точки, в то время как в данной задаче начальная позиция существенна – если, как в случае с чаепитием Алисы, все гости сдвинулись бы на одно сиденье, это было бы совсем другое рассаживание, хотя и является тем же циклом с точки зрения теории графов.
Таким образом, число ориентированных гамильтоновых циклов в короне меньше на множи-

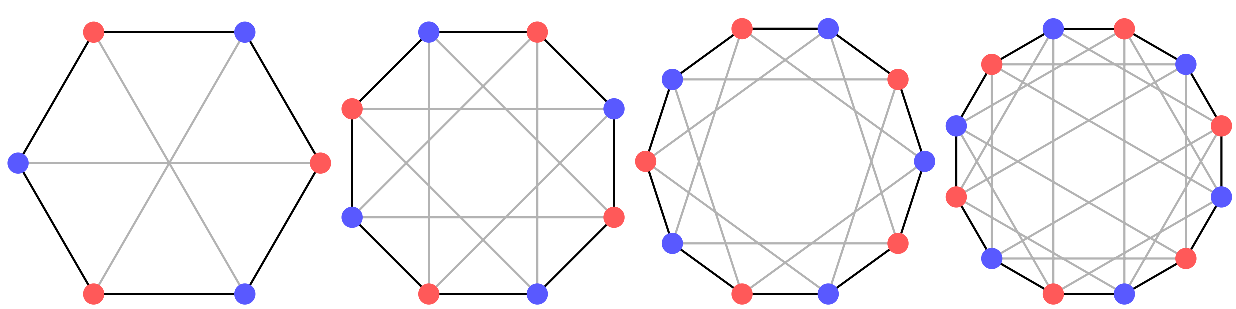


Рис. 1.1: Короны с шестью, восемью, десятью и двенадцатью вершинами.

тель $2n$ по сравнению с числом рассаживаний, но больше на множитель $(n^{-}1)!$ по сравнению с числами рассаживание. Последовательность числа циклов в таких графах (как и ранее, начиная с $n = 3$)

$$2, 12, 312, 9600, 416\,880, 23\,879\,520, 1\,749\,363\,840, \ldots$$

## 1.10 Бинарные отношения и их графы. Отношения эквивалентности

### 1.10.1 Задача №2

*Выразите отношение «племянник» через отношения «отец» и «мать» и операции над отношениями.*

**Решение:**

Невозможно корректно выразить отношение «племянник» через отношения «отец»($a$) и «мать»($b$), поскольку в отношениях «отец» и «мать» определяется пол лишь для верхней ступеньки генеалогического дерева, но не для нижней. Это значит что мы можем определить только отношение «племянник/племянница»: $(a^{-1} \cup b^{-1}) \circ ((a^{-1} \cup b^{-1}) \circ (a \cup b))$.

### 1.10.2 Задача №3

*Пусть бинарные отношения* $P_1, P_2 \subseteq A \times A$ *транзитивны. Будут ли* $\overline{P_1}, P_1 \cap P_2, P_1 \cup P_2, P_1 \circ P_2$ *обладать теми же свойствами?*

**Решение:**

**1.** $\overline{P_1}$ – не будет. Пример: $P_1 :=, \overline{P_1} :\neq$; $=$ транзитивно $a = 1, b = 1, c = 1, (a = b) \wedge (b = c) \to$ $\to (a = c)$; $\neq$ не транзитивнор: $(16 = 2)(2 \neq 1) \nrightarrow (1 \neq 1)$;
**2.** Если оба отношения транзитивны, то если в каждом из них есть пары $(a,b)$ и $(b,c)$, то в каждом из них есть пара $(a,c)$, которая войдет в отношение $P_1 \cap P_2$, а значит транзитивность для данного отношения сохранится;
**3.** $P_1 \cup P_2$ – не будет. Пример: $A = \{a,b,c\}$, $P_1 = \{(a,b)\}$, $P_2 = \{(b,c)\}$, $P_1 \cup P_2 = \{(a,b),(b,c)\}$, в данном случае $P_1$ и $P_2$ транзитивны, а $P1 \cup P_2$ – нет, так как в нем нет пары (a,c);
**4.** $P_1 \circ P_2$ – не будет. Пример $A = \{a,b,c,d,e\}$, $P_1 = \{(a,b),(c,d)\}$, $P_2 = \{(b,c),(d,e)\}$, $P_1 \circ P_2 =$ $= \{(a,c),(c,e)\}$, в данном случае $P_1$ и $P_2$ транзитивны, а $P_1 \circ P_2$ – нет, так как в нем нет пары $(a,e)$.

### 1.10.3 Задача №4

*Бинарное отношение на множестве из 6 элементов содержит 33 пары. Может ли оно быть* **а)** *симметричным*; **б)** *транзитивным*?

**<u>Решение:</u>**

Бинарное отношение задано на одном множестве из 6 элементов, значит пара из одинаковых элементов и пара из тех же элементов, которые поменяли местами - это одна и та же пара, и всего бинарное соотношение может содержать 36 пар. Представим их в виде таблицы, где номер строки - левый элемент пары, номер столбца - правый элемент пары, а на пересечении их - или +, означающие отсутствие/существование пары в отношении.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | + | + | + | + | + |
| 2 | + | - | + | + | + | + |
| 3 | + | + | - | + | + | + |
| 4 | + | + | + | + | + | + |
| 5 | + | + | + | + | + | + |
| 6 | + | + | + | + | + | + |

**а)** Да, может быть, его пример показан в таблице выше;
**б)** Нет, не может быть. Допустим, в отношении (таблице) существуют все 36 пар. Уберем одну. Для выполнения транзитивности вместе с ней надо убрать из таблицы или всю строку с ней, чтобы для $(xRy) \wedge (yRz) \to (xRz)$ не существовало пар с x в начале, или весь столбец с ней, чтобы не было $z$ в конце для того же самого, из чего пар станет 30. Из этого, нельзя сделать так, чтобы транзитивность выполнялась для 33 пар в отношении.

### 1.10.4 Задача №6

7 *Найдите число отношений эквивалентности на множестве* $\{1, 2, 3, 4\}$.

**<u>Решение:</u>**

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$ – множество и $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ – отношение эквивалентности на $A$. Здесь мы видим, что полное отношение $T = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ над множеством $C_1 = \{1, 2\}$, которое является подмножеством $A$, присутствует в $R$, т.е. подмножеством $R$. А также не существует такого полного отношения $T' \geqslant T$ над множеством $C_1' \geqslant C_1$, который присутствует в $R$, т.е. подмножество R. Следовательно, мы нашли класс

эквивалентности $E1 = \{1, 2\}$ по отношению $R$.
Точно так же существует другой класс эквивалентности $E_2 = \{3, 4\}$ над $R$. И больше таких классов эквивалентности в $R$ нет. Обратите внимание, что $E_1$ и $E_2$ являются непересекающимися множествами, и это всегда верно, потому что $E_1, E_2$ т.е. $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ является одним из возможных разделов множества $A$.
Следовательно, вышеупомянутое отношение эквивалентности $R$ соответствует разбиению $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ множества $A$. Точно так же каждое отношение эквивалентности на $A$ соответствует одному из разбиений $A$. На самом деле это отображение биективно.
Теперь мы подошли к нашему вопросу о нахождении числа возможных отношений эквивалентности на конечном множестве, равном количеству разбиений $A$.
Теперь мы подошли к нашему вопросу о нахождении числа возможных отношений эквивалентности на конечном множестве, равном количеству разбиений $A$. Количество разбиений множества на непересекающиеся подмножества, это число Белла:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n}(S(n,k))$$

$S(n,k)$ – число Стирлинга второго рода (количество разбиений множества из n элементов на k непересекающихся подмножеств).

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k) = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}S(j,k-1)$$

По опред $B_0 = 1$. Значения $B_n$ образуют последовательность:

$$1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21\,147, 115\,975, \ldots$$

В нашем случае ответ $B_4 = 15$, что легко проверить "руками":

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| {1,2,3,4} | {1},{2},{3},{4} | {1,2},{3,4} | {1,3},{2,4} | {1},{2,3,4,} |
| {1,4},{2,3} | {1,2,3},{4} | {1,2,4},{3} | {2,3,4}, {1} | {1,2},{3},{4} |
| {1,3},{2},{4} | {2,3},{1},{4} | {1,4},{2},{3} | {1},{2,4},{3} | {1},{2},{3,4} |

### 1.10.5 Задача №7

*Об отображениях (всюду определенных функциях) $f, g$ из множества $A$ в себя известно, что $f \circ g \circ f = id_A$. Верно ли, что $f$ – биекция? (Множество $A$ не обязательно конечное.)*

**Решение:**

Условие означает, что для $a$,$b$,$c \in A$ выполняется $f(a) = b, g(b) = c, f(c) = a$, или $f(g(f(a))) = a$. $f$ не может принимая разные значения выдавать одно и то же, поскольку иначе последующие функции (отображения) не смогут выявить изначальное, что необходимо, поскольку в конце их система выдает одно конкретное значение - изначально поданное в систему функций (в первую из них – в $f$). И так как $f$ и $g$ всюду определены, то $f$ – биекция, сопоставляющая друг другу 2 конкретных значения.

### 1.10.6 Задача №8

*Пусть $R$ – отношение эквивалентности на множестве $A$. Докажите, что существуют такие множество $B$ и отображение $f : A \to B$, что каждый класс эквивалентности $C$ представим в виде $C = f^1(b)$ для некоторого элемента $b \in B$.*

**Докозательство:**

Возьмем $B$ за фактормножество $A/R$, а $f$ – сопоставляет каждому элементу множества его класс эквивалентности, который представлен элементом фактормножества. Так как разбиение на классы эквивалентности единственно, то $f^1(b)$, $b \in B$ вернет один конкретный класс эквивалентности, который был сопоставлен элементу $b$ множества $B$, т.е. сможет представить каждый класс эквивалентности, ч.т.д.

### 1.10.7 Задача №9

*Множество A состоит из семи элементов. Найдите количество отображений $f : A \to A$, таких что $f \circ f = id_A$.*

**<u>Решение:</u>**

Условие означает, что нам подходят только такие функции (отображения), которые $f(f(x)) = x$. В нее подается один элемент, и возвращается он же (и только он), из чего функция – биекция. Возможны два варианта действия функции на конкретный элемент: $f(x) = x$ – элементы по одиночке; или $f(x) = y$ и $f(y) = x$ – элементы образуют пары. Одиночных элементов может быть $1, 3, 5, 7$ (иначе не образовать пары). Одиночные элементы можно выбрать $C_7^n$ способами, где $n$ – их число, а кол-во возможных комбинаций пар для 2 элементов – 1, для 4 – 3, для 6 – 15, для 0 – 1 (ее отстутсвие). Из этого, число вариантов функций (отображений): $15 \cdot C_7^1 + 3 \cdot C_7^3 + 1 \cdot C_7^5 + 1 \cdot C_7^7 = 7 \cdot 15 + 35 \cdot 3 + 21 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 232$

## 1.11 Ориентированные графы и отношения порядка

### 1.11.1 Задача №1

*Известно, что в неориентированном графе существует маршрут, проходящий по каждому ребру ровно два раза. Верно ли, что в графе есть замкнутый эйлеров маршрут?*

**Решение:**

Нет, не верно. Приведем пример (см. Рис.2.2). Путь проходящий по каждому ребру ровно 2 раза: 1-2-3-1-2-3-1-4-5-6-4-5-6-4-1. Но Эйлерова цикла в данном графе нет, поскольку он связен и в нем есть вершины с нечетными степенями (1 и 4, степень 3) (доказывалось на лекции). Из этого, утверждение не верно.

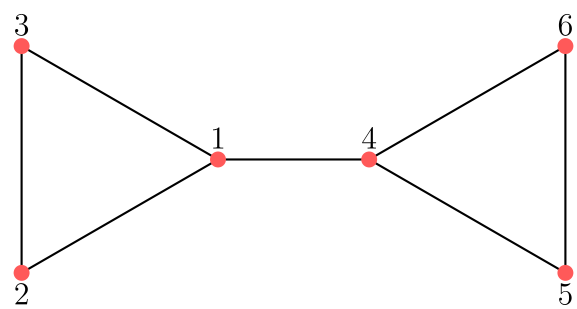



Рис. 1.2: Граф

### 1.11.2 Задача №2

*Выходная (она же исходящая) степень каждой вершины в ориентированном графе на $n$ вершинах равна $n - 2$. Какое количество компонент сильной связности может быть в этом графе? Укажите все возможные значения.*

**Решение:**

При $n = 2$ количество компонент связности равно 2 (ребер нет, 2 вершины). При $n \geqslant 3$ всегда может быть одна компонента сильной связности (ориентированный цикл, он требует по одному исходящему ребру из каждой вершины, остальные ребра направляем произвольно), две компоненты сильной связности (выберем $n-1$ вершин и направим все ребра каждой вершины этой группы в каждую вершину этой группы, тогда степень каждой вершины этой группы станет $n-2$ (в группе из $n-1$ вершины кроме 1 вершины есть еще $n-2$ вершины), и каждая вершина в ней будет соединена с каждой – образуется компонента сильной связности. Ни одно ребро не будет вести в оставшуюся вершину (из нее ребра идут произвольно), из чего всего компонент сильной связности в графе – 2). Три и более компонент сильной связности быть не может, поскольку при составлении примера с двумя компонентами сильной связности у нас образовалась "изолированная"вершина и полный ориентированный граф. При попытке "изолировать"одну из вершин полного ориентированного графа (это необходимо для создания третьей и/или более компоненты сильной связности), мы неизбежно перекинем одно из направляющих ребер на уже существующую "изолированную"вершину, тем самым добавив ее в компоненту сильной связности бывшего полного ориентированного графа, из чего количество компонент сильной связности останется равным 2. В итоге, при $n = 2$ компонент сильной связности – 2; при $n \geqslant 3$ компонент сильной связности – 1 или 2.

### 1.11.3 Задача №3

*Пусть в ориентированном графе для любой пары вершин $u, v$ есть либо ребро $(u, v)$, либо ребро $(v, u)$ (ровно одно из двух). Докажите, что в таком графе есть (простой) путь, включающий в себя все вершины.*

**Докозательство:**

Для двух вершин утверждение очевидно. Добавляем третью вершину. Если из последней вершины уже построенного пути ребро ведет в добавленную вершину, то добавляем ее в конец пути. Если из добавленной вершины ребро ведет в первую вершину пути, то добавляем ее в начало пути. При выполнении обоих условий, выбираем одно любое из выше указанных действий. Если ни одно из условий не выполняется, то это означает, что где-то в пути существует такие две соседние вершины, что ребро из первой из них ведет в добавленную, а во вторую ведет ребро из добавленной. В этом случае помещаем добавленную вершину между этими двумя вершинами. Повторяя эти действия для каждой новой добавленной вершины, мы получим простой путь, включающий в себя все вершины. Это значит, что в данном графе он существует, ч.т.д.

### 1.11.4 Задача №4

*Профессор Рассеянный построил частичный порядок* $<_P$ *для утреннего одевания:*

*очки* $<_P$ *брюки* $<_P$ *ремень* $<_P$ *пиджак,*
*очки* $<_P$ *рубашка* $<_P$ *галстук* $<_P$ *пиджак,*
*брюки* $<_P$ *туфли,*
*очки* $<_P$ *носки* $<_P$ *туфли,*
*очки* $<_P$ *часы.*

**Решение:**

Очки - брюки - носки - туфли - рубашка - галстук - ремень - пиджак - часы.
Обозначим: Очки - О, брюки - Б, носки - Н, туфли - Т, рубашка - Ру, галстук Г, ремень - Ре, пиджак - П, часы - Ч. Порядок обозначим за $<$. В порядок $О<Б<Ре<П$ вставим Ру и Г. Всего мест для вставки 3, но учитывая то, что оба элемента могут быть вставлены в одно место, они могут быть вставлены $C_4^2 = 6$ способами (порядок следования Ру и Г учтен). Фиксируем один из способов. Н и Т могут быть вставлены в 6 мест, но учитывая то, что оба элемента могут быть вставлены в одно место, они могут быть вставлены $C_7^2 = 21$ способами (порядок следования Н и Т учтен), всего станет $6 \cdot 21 = 126$ способов. Учитывая $Б<Т$, нужно убрать лишние способы. Если это не выполняется, то порядок будет $О<Н<Т<Б<Ре<П$, куда в 5 мест могут быть вставлены Ру и Г, но учитывая то, что оба элемента могут быть вставлены в одно место, они могут быть вставлены $C_6^2 = 15$ способами, а значит всего корректных способов: $126 - 15 = 111$. Учитывая Ч, которые могут быть вставлены в 8 мест, всего способов: $111 \cdot 8 = 888$, т.е. существует 888 таких линейных порядков.

### 1.11.5 Задача №5

*. В Вестеросе n городов, каждые два соединены дорогой. Дороги сходятся лишь в городах (нет перекрестков, одна дорога поднята эстакадой над другой). Злой волшебник хочет установить на всех дорогах одностороннее движение так, что если из города можно выехать, то в него нельзя вернуться.* 1. *Докажите, что*
**а)** *волшебник может это сделать;*
**б)** *найдется город, из которого можно добраться до всех, и найдется город, из которого нельзя выехать;*
**в)** *существует единственный маршрут, обходящий все города.*
2. *Сколькими способами волшебник может осуществить свое намерение*?

**Решение:**

**а)** Представим города за вершины ориентированного графа, а (односторонние) дороги – за его ребра. Возьмем одну вершину, добавим к ней вторую и ориентируем ребро между ними

или из второй вершины, или во вторую вершину. У нас получится 2 компоненты сильной связности. Добавим третью вершину, и ориентируем все дороги, ведущие в нее, или в нее, или из нее. Таким образом, или из этой вершины никуда нельзя будет вернуться, или в эту вершину нельзя будет вернуться, а значит она не войдет в какую-либо из существующих компонент сильной связности и создаст свою собственную. Повторяя данные действия для каждой новой добавленной вершины мы в конечном итоге образуем ориентированный граф из n вершин, в котором $n$ компонент сильной связности (а значит выйдя из города в него нельзявернуться обратно, иначе бы в одной из компонентсильнойсвязности было бы больше одной вершины, а значит их число было бы меньше $n$) и каждый город соединен с каждым дорогой. Все условия выполнены, значит волшебник сможет это сделать.
**б)** Такие города найдутся – это последняя вершина, для которой мы обозначили, что все дороги ведут из нее (она такая последняя, значит для последующих (или никаких, если данная вершина - последняя из вообще добавленных) мы обозначали, что все дороги идут в них, а значит ведут из выбранной в последующие) и последняя вершина, для которой мы обозначили, что все дороги ведут в нее (она такая последняя, значит для последующих (или никаких, если данная вершина – последняя из вообще добавленных) мы обозначали, что все дороги идут из них, а значит ведут в выбранную). Если одной из таковых последних вершин нет (обе не могут отсутсвовать, т.к. это равносильно отсутствию дорог вообще), то искомая вершина – это первая вершина, т.к. все дороги вели или из нее (в случае, если все добавленные вершины вели дороги в себя), или в нее (в случае, если все добавленные вершины вели дороги из себя).
**в)** Возьмем первую вершину. Если вторая вершина ведет дорогу из первой в себя, то поставим вторую вершину справа, а иначе – слева. Если третья вершина ведет все дороги из предыдущих в себя, то поставим ее справа от всех вершин, а если все из себя – слева от всех вершин. Повторяя эти действия для каждой вершины мы построим ряд из всех вершин, между которыми есть путь, обходящий все города (с самого левого города по порядку к самому правому). Такие действия задают единственный порядок вершин, а значит данный путь единственен.
**2.** Ряд, который мы построили выше, задает то, сколько вершин можно достичь из данной вершины и из скольки вершин данная вершина достижима, причем данное расположение единственно. Из этого, комбинации направления дорог различны, если в данном ряду часть вершин стоит не на тех же местах, т.е. всего способов волшебнику осуществить свое намерение – это число способов расставить вершины в данном ряду – $n$!

### 1.11.6 Задача №6

*Бинарное отношение $P$ называется турниром, если оно антирефлексивно, антисимметрично и линейно. (Неформально – это результат кругового турнира – каждую альтернативу сравнили с каждой и запомнили результат). Докажите, что либо турнир – строгий линейный порядок, либо существуют такие альтернативы $a, b, c$, что $aPb, bPc$ и $cPa$.*

**Доказательство:**

Из связности отношения, если для $a, b, c$ $aPb$, $bPc$, то выподняется или $aPc$, или $cPa$. Если $aPc$ выполняется для любых $a, b, c$, для которых $aPb$, $bPc$, то бинарное отношение транзитивно, а значит оно является строгим линейным порядком (отношение антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно). Если это не так, то существуют такие $a, b, c$, что $aPb$, $bPc$, $cPa$, из чего бинарное отношение не транзитивно и не является строгим линейным порядком. Мы показали, что бинарное отношение или строгий линейный порядок,или для каких то $a, b, c$ $aPb$, $bPc$, $cPa$, ч.т.д.

### 1.11.7 Задача №7

*Сколько есть порядков на $n$-элементном множестве, в которых ровно одна пара элементов несравнима?*

**Решение:**

Обозначим отношение порядка за стрелку ориентированного графа. Пары элементов сравнимы, если из одного элемента можно по стрелкам дойти в другой (применяем транзитивность отношений порядка). Если на $n$-элементном множестве только одна пара элементов несравнима, то каждый из этих элементов сравним с любым другим (кроме того что в паре). Это значит, что образуется конструкция (см. рисунокРис. 2.3), из которой число порядков - это число способов расставить элементы по местам в данной конструкции, деленное на 2 (порядок с элементом $x$ на месте $A$ и элементом $y$ на месте $B$ идентичен порядку с элементом $y$ на месте $A$ и элементом $x$ на месте $B$) – $\frac{n!}{2}$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{A} \arrow[dr] & & & \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{C} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{D} \arrow[r] & \mathrm{E} \arrow[r] & \cdots \\
 & & \mathrm{B} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Рис. 1.3: Граф

### 1.11.8 Задача №8

*. Докажите, что любой частичный порядок $P$ на конечном множестве $A$ можно продолжить до линейного. То есть можно добавить в $P$ некоторые пары элементов из $A \times A$ так, что любые два элемента $a, b \in A$ окажутся сравнимы: будет выполнено либо $aPb$ либо $bPa$.*

**Докозательство:**

Представим все элементы множества в виде вершин ориентированного графа,а отношения частичного порядка в виде ребер данного графа (направление ребра определяет положение элементов в паре отношения (будет выполено $aPb$, или же $bPa$)). Любые два элемента станут сравнимы, если между ними есть ребро в ориентированном графе. Мы всегда можем добавить в граф столько ребер, что каждая вершина будет соединена с каждой, т.е. мы сможем добавить в $P$ такие пары, что для $\forall a, b \in AaPb$ или $bPa$ (ребро направлено в какую-то из вершин), т.е. граф станет линейным, ч.т.д.

## 1.12 Булевы функции

### 1.12.1 Задача №1

*Укажите существенные и несущественные (фиктивные) переменные функции* $f(x_1, x_2, x_3) =$ 00111100 *и разложите её в ДНФ и КНФ.*

**Решение:**

Составим таблицу истинности для данной функции и исследуем ее переменне:

Таблица 1.13: $f(x_1, x_2, x_3)$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Таблица 1.14: Исследование $x_1$

| $x_2$ | $x_3$ | $f(0, x_2, x_3)$ | $f(1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Таблица 1.15: Исследование $x_2$

| $x_1$ | $x_3$ | $f(x_1, 0, x_3)$ | $f(x_1, 1, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Таблица 1.16: Исследование $x_3$

| $x_1$ | $x_2$ | $f(x_1, x_2, 0)$ | $f(x_1, x_2, 1)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

Из таблиц 1.14 и 1.15 $\Rightarrow$ переменные $x_1$ и $x_2$ – существенные, т.к. $f(0, x_2, x_3) \neq f(1, x_2, x_3)$ и $f(x_1, 0, x_3) \neq f(x_1, 1, x_3)$;
Из таблицы 1.16 $\Rightarrow$ переменная $x_3$ – несущественная, т.к. $f(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2, 1)$.
Построим ДНФ данной функции:
Найдём наборы, на которых функция принимает истинное значение: $\{0, 1, 0\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 0, 0\}, \{1, 0, 1\}$;
В соответствие найденным наборам поставим элементарные конъюнкции по всем переменным, причём если переменная в наборе принимает значение 0, то она будет записана с отрицанием:

$$K_1 : \{0,1,0\} - \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}; \qquad K_2 : \{0,1,1\} - \overline{x_1} x_2 x_3;$$

$$K_3 : \{1,0,0\} - x_1 \overline{x_2} \overline{x_3}; \qquad K_4 : \{1,0,1\} - x_1 \overline{x_2} x_3;$$

Объединим конъюнкции с помощью операции «ИЛИ» и получим совершенную дизъюнктивную нормальную форму:

$$K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3;$$

Построим КНФ данной функции:
Найдём наборы, на которых функция принимает ложное значение: $\{0,0,0\}, \{0,0,1\}, \{1,1,0\}, \{1,1,1\}$;
В соответствие найденным наборам поставим элементарные дизъюнкции по всем переменным, причём если переменная в наборе принимает значение 1, то она будет записана с отрицанием:

$$D_1 : \{0,0,0\} - x_1 \vee x_2 \vee x_3; \qquad D_2 : \{0,0,1\} - x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3};$$

$$D_3 : \{1,1,0\} - \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3; \qquad D_4 : \{1,1,1\} - \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3};$$

Объединим дизъюнкции с помощью операции «И» и получим совершенную конъюнктивную нормальную форму:

$$D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \wedge D_4 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

### 1.12.2 Задача №2

*Вычисляется ли константа* $0$ *в базисе* $\{\neg(x_1 \to x_2)\}$?

**<u>Решение:</u>**

В базисе $\neg(x_1 \to x_2)$, константа 0 вычисляется как $\neg((\neg(x_1 \to x_2)) \to x_1) = 0$, доказательство в таблице истиности ниже:

Таблица 1.17: Исследование функции и ее отрицания

| $x_1$ | $x_3$ | $x_1 \to x_2$ | $\overline{(x_1 \to x_2)}$ | $(\overline{(x_1 \to x_2)}) \to x_1$ | $\overline{(\overline{(x_1 \to x_2)}) \to x_1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

### 1.12.3 Задача №3

*Вычислите* $MAJ(x,y,z)$ *схемой в базисе Жегалкина* $\{1, \wedge, x_1 \oplus x_2\}$.

**Решение:**

Функция $MAJ(x,y,z)$ дает значения при различных $x, y, z$:

Таблица 1.18: $MAJ(x,y,z)$

| $x$ | $y$ | $z$ | $MAJ(x,y,z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Запишем данную функцию в виде полинома Жегалкина с неопределёнными коэффициентами:

$$f(x,y,z) = a_{000} \oplus a_{100}x \oplus a_{010}y \oplus a_{001}z \oplus a_{110}xy \oplus a_{101}xz \oplus a_{011}yz \oplus a_{111}xyz$$

$f(0,0,0) = a_{000} = 0 \Rightarrow a_{000} = 0;$

$f(1,0,0) = a_{000} \oplus a_{100} = 0 \oplus a_{100} = 0 \Rightarrow a_{100} = 0;$

$f(0,1,0) = a_{000} \oplus a_{010} = 0 \oplus a_{010} = 0 \Rightarrow a_{010} = 0;$

$f(0,0,1) = a_{000} \oplus a_{001} = 0 \oplus a_{001} = 0 \Rightarrow a_{001} = 0;$

$f(1,1,0) = a_{000} \oplus a_{100} \oplus a_{010} \oplus a_{110} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{110} = 1 \Rightarrow a_{110} = 1;$

$f(1,0,1) = a_{000} \oplus a_{100} \oplus a_{001} \oplus a_{101} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{101} = 1 \Rightarrow a_{101} = 1;$

$f(0,1,1) = a_{000} \oplus a_{010} \oplus a_{001} \oplus a_{011} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{011} = 1 \Rightarrow a_{011} = 1;$

$f(1,1,1) = a_{000} \oplus a_{100} \oplus a_{010} \oplus a_{001} \oplus a_{110} \oplus a_{101} \oplus a_{011} \oplus a_{111} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{111} = 1 \Rightarrow a_{111} = 0;$

Окончательно получаем: $xy \oplus xz \oplus yz$.

### 1.12.4 Задача №4

*Сколько ненулевых коэффициентов в многочлене Жегалкина, который равен* $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$?

**Решение:**

В многочлене Жегалкина дизъюнкция представляется как: $x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \wedge x_2)$. Возьмем $k$ за кол-во коэффициентов при $n$ переменных в дизъюнкции. При $n+1$ переменных:

$$(x_1 \oplus \dots \oplus x_k) \vee x_{n+1} = (x_1 \oplus \dots \oplus x_k) \oplus x_{n+1} \oplus (x_1 \oplus \dots \oplus x_k) \wedge x_{n+1}$$

Учитывая то, что $\wedge$ дистрибутивна относительно $\oplus$, из этого видно, что при $n+1$ переменных число коэффициентов станет $2k+1$. Учитывая это, а также то, что:
При $n = 1 : x_1 = x_1$, $k = 1$;
При $n = 2 : x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_{12})$, $k = 3$;
При $n = 3 : (x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \wedge x_2)) \vee x_3 = (x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \wedge x_2)) \oplus x_3 \oplus (x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \wedge x_2)) \wedge x_3 =$
$= x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus x_3 \oplus (x_1 \wedge x_3) \oplus (x_2 \wedge x_3) \oplus (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3), k = 7$
Можно сделать вывод, что $k = 2^n - 1(2^n + 1 - 1 = 2 \cdot 2^n 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2k + 1)$ В итоге, в многочлене Жегалкина, который равен $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$ всего $2^n 1$ ненулевых коэффициентов.

### 1.12.5 Задача №5

*Докажите полноту базиса, состоящего из одной функции* $x \mid y$*,которая по определению равна* $\neg(x \wedge y)$ *(штрих Шеффера, она же NAND).*

**Докозательство:**

Для удобства запишем таблицу истиности для штриха Шеффера:

Таблица 1.19:
Штрих
Шеффера

| $x$ | $y$ | $x \vert y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

С помощью нее выясняем, что базис не принадлежит ни одному из предполных классов:
$| \notin T_0\,(0|0 = 1)$; $| \notin T_1\,(1|1 = 0)$; $| \notin M\,((0,1) \leqslant (1,1);\ 0|1 > 1|1)$;
$| \notin L\,(x|y = 1\oplus(x))$, есть $\wedge$ в полиноме Жегалкина; $| \notin S\,(0|1 \neq \overline{(1|0)})$;
По теореме Поста, это означает, что базис, состоящий только из штриха Шеффера, полон, ч.т.д.

### 1.12.6 Задача №6

*Является ли полным базис $\{\vee; \rightarrow\}$ из дизъюнкции и импликации?*

**Решение:**

$1 \vee 1 = 1$, $1 \rightarrow 1 = 1$, значит {,ß} $\subset T_1$, т.е. базис, состоящий из дизъюнкции и импликации, принадлежит одному из предполных классов, а значит, по теореме Поста, он не является полным.

### 1.12.7 Задача №7

*Является ли полным базис $\{\neg, MAJ(x_1, x_2, x_3)\}$?*

**Решение:**

Из Задачи №2, $MAJ(x,y,z) = (xy)\oplus(xz)\oplus(yz)$;
$\overline{x} = \overline{\overline{\overline{x}}} \Rightarrow \neg \subset S$;
$\overline{MAJ(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} = \overline{((\overline{x}\overline{y})\oplus(\overline{x}\overline{z})\oplus(\overline{y}\overline{z}))} = \overline{((1\oplus x)(1\oplus y)\oplus(1\oplus x)(1\oplus z)\oplus(1\oplus y)(1\oplus z))} =$
$= \overline{(xy\oplus x\oplus y\oplus 1\oplus xz\oplus x\oplus z\oplus 1\oplus yz\oplus y\oplus z\oplus 1)} = \overline{(xy\oplus xz\oplus yz\oplus 1)} = (xy)\oplus(xz)\oplus(yz) = MAJ(x,y,z)$,
значит $MAJ(x,y,z) \subset S$;
Данный базис принадлежит предполному классу S, а значит, по теореме Поста, он не полон.

### 1.12.8 Задача №8

*Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – немонотонная функция. Докажите, что $x_i$ вычисляется в базисе $\{0, 1, f\}$.*

**<u>Решение:</u>**

$f(x_1, \ldots, x_n)$ – не монотонная функция, значит есть такие наборы переменных $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$, что $a \leqslant b$ и $f(a) > f(b)$, причем хотя бы для одного из $i$ верно $a_i < b_i$ (иначе наборы равны, и условие $f(a) > f(b)$ не сможет выполниться). Из $f(a) > f(b)$ очевидно, что $f(a) = 1$, $f(b) = 0$. Возьмем набор, где только для одного из $i$ верно $a_i < b_i$. Далее заменяем все $x_i$ на: если $a_i = b_i = 0$, $xi = 0$, если $a_i = b_i = 1$, $x_i = 1$, если $a_i < b_i$, $x_i = x$. Таким образом, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ преобразуется в функцию $F$ от одной переменной ($x$, остальные заменены на константы 0 или 1), которая будет эквивалентна $\overline{x}(F(0) = f(a) = 1$, $F(1) = f(b) = 0)$, существование которой и требовалось доказать.

### 1.12.9 Задача №9

*Докажите, что всякую монотонную булеву функцию можно вычислить монотонной схемой (с базисом $\wedge$, $\vee$, 1, 0).*

**<u>Докозательство:</u>**

Если функция – константа, то схема имеет вид $s_1 := 0$ или $s_1 := 1$. Иначе ее можно представить в совершенной дизъюнктивной нормальной форме. Если какая-то элементарная конъюкция СДНФ содержит отрицание $x_i$, то существуе набор $(a_1, \ldots, a_{i1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, что $f((a_1, \ldots, a_{i1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n)) = 1$, а из монотонности $f$ следует $f((a_1, \ldots, a_{i1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)) = 1$, значит среди элементарных конъюкций СДНФ есть конъюкция содержащая $x_i$. Из этого, применив закон склеивания (исключения), мы получим ДНФ без отрицания $x_i$, из чего можно представить монотонную функцию в ДНФ без отрицания переменных, а значит записать ее схему без $\neg$ в базисе $(0,1, \vee, \wedge)$.

### 1.12.10 Задача №10

*Булева функция* $PAR(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *равна* 1, *если количество единиц среди значений* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *нечётно и нулю, если чётно.*
**а)** *Выразите функцию* $PAR(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *через известные булевы функции (можно использовать связки* $\wedge, \vee, \neg, \oplus, \to$*).*
**б)** *При каких* $n > 1$ *можно представить функцию* $PAR(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в виде ДНФ без отрицаний?*

**Решение:**

**а)** $PAR(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

**б)**Нет, так как $x_1 \oplus x_2 = (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_1})$ XOR уже представляется функцией с отрицанием, поэтому нельзя.

### 1.12.11 Задача №11

*Булева функция* $f: \ \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *называется линейной, если она представляется в виде*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus (a_1 \wedge x_1) \oplus \cdots \oplus (a_n \wedge x_n)$$

*для некоторого набора* $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ *булевых коэффициентов.*
*Докажите, если* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *– нелинейная функция, то конъюнкция* $x_1 \wedge x_2$ *вычисляется схемой в базисе* $\{0, 1, , f\}$.

**Докозательство:**

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ не линейна, а значит в полиноме Жегалкина содержится хотя бы одна конъюкция двух переменных (не обращающаяся коэффициентом $a_i$ в ноль), переставим переменные в $f$ так, чтобы это была конъюкция $x_1$ и $x_2$. Далее, подберем такие $b_3, b_4, \ldots, b_n$, что $f(b_3, \ldots, b_n) = 1$, тогда $F(x1,x2) = f(x_1, x_2, b_3, b_4, \ldots, b_n) = x_1x_2 \oplus cx_1 \oplus dx_2 \oplus e$ ($c$,$d$,$e$ – константы, равные 0 или 1).
Используя $x1 = x1L1$ и $\neg$ к константам, можно представить функцию $g(x_1,x_2) =$
$= F(x_1 \oplus d, x_2 \oplus c) \oplus cd \oplus e = (x_1 \oplus d)(x_2 \oplus c) \oplus c(x_1 \oplus d) \oplus d(x_2 \oplus c) \oplus e \oplus cd \oplus e = x_1x_2 = x_1 \wedge x_2$, возможность представления которой и требовалось доказать.

## 1.13 Производящие функции-1

### 1.13.1 Задача №1

*Найдите производящую функцию для последовательности*
**а)** $a_k = k$; **б)** $a_k = \frac{1}{k!}c$

**Решение:**

**а)** Производящая функция имеет следующий вид:

$$\sum a_x \cdot x^n$$

Тогда в нашем случае будет:

$$\sum k \cdot x^k$$

Из курса математического анализа известно, что $\dfrac{1}{(1-x)} = 1+x+x^2+\ldots$. Взяв производную и домножив на $x$, получим, что: $\dfrac{x}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$, т.е получили нужную нам производящую функцию: $\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

**б)** Из курса математического анализа следует, что $\sum \dfrac{x^k}{k!} = e^x$.

### 1.13.2 Задача №2

*Выразите аналитически:*

**а)** $\sum\limits_{k\geqslant 0} \binom{n+k}{n} x^k$; **б)** $\sum\limits_{k\geqslant 0} \binom{k}{n} x^k$; **в)** $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k+1)x^k$

**Решение:**

**а)** Так как $\dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = (1-x)^{-k-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{-k-1}{n} \cdot (-x)^n$
$\dbinom{-k}{n} = \dfrac{-k \cdot (-k-1) \cdot (-k-2) \cdot \ldots \cdot (-k-n+1)}{n!} = (-1)^n \cdot \dfrac{k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (k+n-1)}{n!} = (-1)^n \times$
$\times \dbinom{k+n-1}{n}$;

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-k-1}{n}\cdot(-x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\binom{k+n}{n}\cdot(-1)^n\cdot x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{k+n}{n}\cdot x^n\Rightarrow$ ответ - $\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

**в)** Так как это задание аналогично пункту **(а)** данной задачи, то $\frac{x}{(1-x)^2}$

### 1.13.3 Задача №4

*Докажите, что* $\sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)2^{n-2}$.

**Докозательство:**

$$k\cdot(k-1)\cdot\binom{n}{k}=\frac{k\cdot(k-1)\cdot n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(k-2)!\cdot(n-2-k+2)}=n\cdot(n-1)\cdot\binom{n-2}{k-2}$$
$$\sum_{k=2}^{n}n\cdot(n-1)\cdot\binom{n-2}{k-2}=n\cdot(n-1)\cdot\sum_{l=0}^{n}\binom{n-2}{l}=n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2},\text{ ч.т.д.}$$

### 1.13.4 Задача №5

*Известна производящая функция $g(x)$ для последовательности $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$ частичных сумм последовательности $\{a_k\}$. Выразите через неё производящую функцию для последовательности $\{a_k\}$.*

**Решение:**

$g(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}S_k\cdot x^k$

$f(x)=g(x)-x\cdot g(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}S_k\cdot x^k-\sum\limits_{k=1}^{\infty}S_{k-1}\cdot x^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(S_k-S_{k-1})\cdot x^k+a_0$

Так как $S_k-S_{k-1}=a_k$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\cdot x^k+a_0\cdot x^0=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\cdot x^k$

## 1.14 Производящие функции-2

### 1.14.1 Задача №1

*Найдите производящую функцию и аналитическую формулу для последовательности:*
**а)**

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 0; \\ 1, & \text{при } n = 1; \\ F_{n-1} + 2F_{n-2}, & \text{при } n \geqslant 2. \end{cases}$$

**б)**

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 0; \\ 3, & \text{при } n = 1; \\ 4F_{n-1} - 4F_{n-2}, & \text{при } n \geqslant 2. \end{cases}$$

**<u>Решение:</u>**

**а)** Из условия известно что:

$$F_n = F_{n-1} + 2F_{n-2} \tag{1.2}$$

Давайте просуммируем 1.2:

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n \cdot x^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} \cdot x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} \cdot x^n \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} F_n \cdot x^n = F_n \cdot x^{n+1} + 2 \cdot F_n \cdot x^{n+2}$$
$$\text{Пусть } f(x) = F_n \cdot x^n \Rightarrow F(x) - F_1 \cdot x - F_0 = x \cdot f(x) - x \cdot F_0 + 2 \cdot x^2 \cdot f(x)$$
$$f(x)(1 - x - 2 \cdot x^2) = F_1 \cdot x + F_0 - F_0 \cdot x \underset{F_0=0, F_1=1}{\Longrightarrow} f(x) = \frac{x}{1 - x - 2 \cdot x^2};$$

$f(x) = \dfrac{x}{1 - x - 2 \cdot x^2}$ – наш искомый ответ на данную задачу.

### 1.14.2 Задача №2

*Докажите, что если последовательность $a_n$ определяется соотношением*

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0,$$

*где $p$, $q$ – некоторые числа, то для её производящей функции $F(t)$ верно, что*

$$F(t) = \frac{a_0 + (a_1 + pa_0)t}{1 + pt + qt^2}.$$

**<u>Докозательство:</u>**

Из условия известно что:

$$q \cdot a_n = -a_{n+2} - p \cdot a_{n+1} \tag{1.3}$$

Просуммируем 1.3:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q \cdot a_n \cdot t^n = -\sum_{n=0}^{\infty} p \cdot a_{n+1} \cdot t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} \cdot t^n \Longleftrightarrow q \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n = -p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^{n-2}$$

Пусть $F(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n \Rightarrow q \cdot F(t) = -\frac{p}{t} \cdot (F(t) - a_0) - \frac{1}{t^2} \cdot (F(t) - a_0 - a_1 \cdot t) \Leftrightarrow F(t) \cdot (q + \frac{p}{t} + \frac{1}{t^2}) =$
$= \frac{p \cdot a_0}{t} + \frac{a_0}{t^2} + \frac{a_1}{t} \Leftrightarrow F(t) \cdot \frac{q \cdot t^2 + p \cdot t + 1}{t^2} = \frac{(p \cdot a_0 + a_1) \cdot t + a_0}{t^2} \Leftrightarrow F(t) = \frac{a_0 + t \cdot (a_1 + p \cdot a_0)}{1 + p \cdot t + q \cdot t^2}$, ч.т.д

### 1.14.3 Задача №3

*Найдите производящую функцию для последовательности an, состоящей из числа двоичных слов длины $n$, в которых нет двух единиц подряд.*

**<u>Решение:</u>**

Рассмотрим числа Фибоначчи:$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2$ и т.д. Стоит заметить, что $a_0 = 1 = F_2$ - пустое слово, уд-яющее усл-ию, $a_1 = 2 = F_3$ – еще одно слово уд-яющее усл-ию $\Rightarrow$ оба слова уд-ют усл-ию, длина которых - $n = 1$, также стоить отметить, что полученные числа Фибоначчи уд-ют рекуррентному соотношению вида:$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, осталось проверить его для чисел $a_n$ при $n \geqslant 2$.
Разобьем все наши слова без двух единиц длины $n$, на слова заканчивающиеся на 0 и 01(ноль стоит здесь с целью выполнения условия задачи).
Перый случай: перед 0 может стоять любое слово длины $n - 1$, в котором нет двух идущих единиц подряд, таких слов - $a_{n-1}$.
Второй случай: это все такие слова, имеющие длину - $n - 2$, в которых тоже нет двух идущих единиц подряд, таких слов - $a_{n-2}$. В результате имеем следующую рекуррентную формулу вида: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, для $a_n$ это будет число Фибоначчи: $F_{n+2}$