

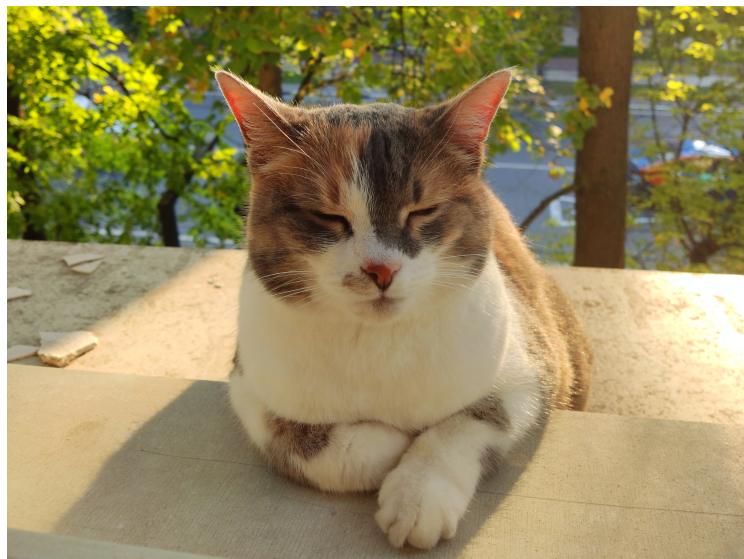
# Задачи с Экзамена по Линейной Алгебре

Папа Тоха

**Исходники(актуальная версия тут), Вопросы, предложения**

В данном файле содержатся условия и решения задач с экзамена по линейной алгебре 2015г в МФТИ. На момент создания файла(2024г) задачи в билетах не поменялись.

В нем содержатся все типовые задачи по линейной алгебре и их стандартные методы решения. Можете пользоваться для подготовки.



Игорь Андреевич Чубаров



Полторашка

## Из недоделанного:

25 задача - нет решения, если у кого-то есть правильное, красивое решение пишите мне.

Орфография/пунктуация - тоже не проверялась полностью, пишите строку кода, где описка.

## Задачи

Задача №1	3
Задача №2	4
Задача №3	5
Задача №4	6
Задача №5	7
Задача №6	8
Задача №7	9

Задача №8	10
Задача №9	11
Задача №10	12
Задача №11	13
Задача №12	14
Задача №13	15
Задача №14	16
Задача №15	17
Задача №16	18
Задача №17	19
Задача №18	20
Задача №19	21
Задача №20	22
Задача №21	23
Задача №22	24
Задача №23	25
Задача №24	26
Задача №25	27

## Задача №1

### Условие:

Найдите ранг матрицы  $A$  в зависимости от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & \beta \end{pmatrix}$$

### Решение:

1. Привести матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & \beta \end{array} \right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(4)} \left( \begin{array}{ccccc} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \end{array} \right) \xrightarrow{(2)-3/2\cdot(1)} \left( \begin{array}{ccccc} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 5 & -5/2 \\ 0 & 0 & 7/2 & -7 & \beta + 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\substack{(3)-5/7\cdot(2) \\ (4)+2/5\cdot(1)}} \left( \begin{array}{ccccc} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 5 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{array} \right) \end{array}$$

2. Найти разное количество ЛНЗ строк (в ступенчатом виде ненулевых) при разных параметрах  $\alpha, \beta$ :

$rg(A) = 2$ , при  $\beta + 1 = 0, \alpha - 1 = 0$ , т.е.  $\alpha = 1, \beta = -1$ .

$rg(A) = 3$  в остальных случаях, т.к. (3) и (4) будут ЛЗ

**Ответ:**  $\alpha = 1, \beta = -1 \rightarrow rg(A) = 2$ .

В остальных случаях  $rg(A) = 3$ .

## Задача №2

### Условие:

Найдите все значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых система совместна, решите систему при найденных значениях параметров:

$$\begin{cases} x_3 - 2x_4 = \alpha \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ -3x_1 + 6x_2 - x_3 - 4x_4 = \beta \end{cases}$$

### Решение:

1. Приводим матрицу СЛУ к ступенчатому виду.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & \beta \end{array} \right) \xrightarrow{(1)\cdot 3} \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & -12 & 9 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 6 & -12 & 4 & 4 & 4 \\ -6 & 12 & -2 & -8 & 2\beta \end{array} \right) \xrightarrow{(4)+(1);(1)/3} \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & 2\beta + 9 \end{array} \right)$$

2. По теореме Кронекера-Капелли: если СЛУ совместна, то  $rg(A) = rg(A|b)$ . Значит сначала считаем ранг матрицы без правого столбца и потом с ним, "подгоняя" коэффициенты. Тогда  $rg(A) = 2$  ((2),(3),(4) ЛЗ) и значит  $rg(A|b) = 2$ . Для этого  $\alpha = -1$  и  $2\beta + 9 = 7$ . Получаем  $\alpha = 1, \beta = -1$ .

3. Получаем при  $\alpha = 1, \beta = -1$  ЛНЗ систему из (1) и (2), решаем ее:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{x_2 \leftrightarrow x_3} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

### Ответ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

## Задача №3

### Условие:

Подпространство  $U$  пространства  $\mathbb{R}^4$  является линейной оболочкой векторов  $(0 \ 2 \ 1 \ -3)^T$ ,  $(2 \ -1 \ -2 \ 1)^T$ ,  $(2 \ 3 \ 0 \ -5)^T$ . Найдите систему линейных уравнений, для которой множеством решений является  $U$ . Единственное ли решение у этой задачи?

### Решение:

1. Ищем базис в ЛО  $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ , ищем ЛНЗ систему:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}, (1) \text{ и } (2) \text{ ЛНЗ}$$

Получаем базис  $\equiv \Phi \text{CP}, \Phi = \{a_1, a_2\}$ .

2. Если  $A$  - матрица СЛУ, то имеем  $A\Phi = 0$ , транспонируя получаем  $\Phi^T A^T = 0$ . Тогда решаем второе уравнение относительно  $A^T$  ( $\Phi^T$  получаем транспонированием ЛО).

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 6 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = A^T$$

$$\text{Получаем } A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ответ:**  $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

## Задача №4

### Условие:

В пространстве  $\mathbb{R}^4$  заданы подпространство  $U_1$ , являющееся линейной оболочкой векторов  $(0 \ 1 \ 1 \ 2)^T$  и  $(1 \ 2 \ 2 \ 3)^T$ , а также подпространство  $U_2$ , заданное системой  $\begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Найдите размерности и базисы в подпространствах  $U_1 + U_2$  и  $U_1 \cap U_2$ .

### Решение:

Имеем  $U_1 : \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$  и  $U_2 : \begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

1. Переведем  $U_2$  из СЛУ в ЛО. Для этого решим СЛУ, найдя ФСР:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow U_2 : \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

2. Сумма подпространств это объединение ЛО подпространств.  $U_1 + U_2 : \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

Осталось найти базис в этой ЛО:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Базис } U_1 + U_2 : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Переведем  $U_1$  из ЛО в СЛУ. Если  $A$  - матрица СЛУ, то имеем  $A\Phi = 0$ , транспонируя получаем  $\Phi^T A^T = 0$ . Тогда решаем второе уравнение относительно  $A^T$  ( $\Phi^T$  получаем транспонированием ЛО).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A^T$$

Получаем  $U_1 : \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$  и  $U_2 : \begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ .

Их пересечение есть общая СЛУ  $U_1 \cap U_2 = \begin{cases} U_1 \\ U_2 \end{cases}$ . Найдем ее базис, т.е. решим СЛУ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Базис } U_1 \cap U_2 : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Ответ:** Базис  $U_1 + U_2$ :  $\{(0 \ 1 \ 1 \ 2)^T, (1 \ 2 \ 2 \ 3)^T, (0 \ -1 \ 0 \ 1)^T\}$ ,  $\dim = 3$ .

Базис  $U_1 \cap U_2$ :  $\{(1 \ 1 \ 1 \ 1)^T\}$ ,  $\dim = 1$ .

## Задача №5

### Условие:

Найдите проекцию вектора  $(0 \ -1 \ -1 \ 4)^T$  пространства  $\mathbb{R}^4$  на подпространство  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$  вдоль линейной оболочки вектора  $(1 \ -1 \ 1 \ 0)^T$ .

### Решение:

Пусть вектор -  $X$ , а подпространства  $L_1$  и  $L_2$  соответственно.

1. Представим  $L_1 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$  как ЛО, т.е. решим СЛУ:

$$(1 \ 1 \ 1 \ 1 | 0) \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow L_1 : \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2. Проецирование вектора на ПП вдоль другого ПП - это разложение вектора на две составляющие, одна из которых лежит в первом ПП, а вторая во втором ПП. Чтобы найти первую составляющую  $X = X_1 + X_2$ , надо представить составляющие как линейные комбинации базисных векторов, т.е. векторов в ЛО.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1 \in L_1} + \underbrace{\beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_2 \in L_2} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Получаем СЛУ относительно  $(\alpha \ \beta \ \gamma \ k)^T$ , решаем ее, а затем находим вектор  $X_1$  как сумму 3-х векторов.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } X_1 = 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## Задача №6

### Условие:

Пусть линейное отображение  $\varphi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$  задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдите размерности и базисы  $Ker \varphi$  и  $Im \varphi$ .

### Решение:

1.  $Ker \varphi = \{x \in L : Ax = 0\} \Rightarrow Ker \varphi = \Phi - \Phi \text{CP}$  в уравнении  $AX = 0$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ }} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ }} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ }} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{x_2 \leftrightarrow x_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, dimKer \varphi = 3$$

2.  $Im \varphi = \{\varphi(x) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in L : Ax = \varphi(x)\}$ . Тогда т.к.  $A = (\varphi(e_1) \ \varphi(e_2) \ \dots \ \varphi(e_n)) \Rightarrow Im \varphi = \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ .

Значит  $Im \varphi = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ . Найдем базис в этой ЛО:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & -6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ }} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ }} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем  $Im \varphi = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle, dimIm \varphi = 2$

### Ответ:

$Ker \varphi = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, dimKer \varphi = 3; Im \varphi = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle, dimIm \varphi = 2$

## Задача №7

### Условие:

Докажите, что преобразование пространства  $P_2$  многочленов степени не выше двух, заданное правилом  $\varphi(f(x)) = 2f(x) + f'(x)$ , является изоморфизмом. Найдите матрицу  $\varphi^{-1}$ , выбрав базис в  $P_2$ .

### Решение:

1. Берем базис  $P_2 : \{1, x, x^2\}$ ,  $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2$

Общий вид:

$$P_2 : f(x) = ax^2 + bx + c \\ \varphi(f(x)) = 2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b = 2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c), \quad P_2^* : \{1, x, x^2\}$$

2. Найдем  $A = (\varphi(e_1) \quad \varphi(e_2) \quad \varphi(e_3))$

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_2) = 2x + 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_2) = 2x^2 + 2x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 3 \Rightarrow$  изоморфизм доказан. Найдем  $A^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right)$$

**Ответ:**  $\varphi^{-1} : A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

## Задача №8

### Условие:

Преобразование  $\varphi : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ , где  $M_{2 \times 2}$  - пространство матриц размера  $2 \times 2$ , задано правилом  $\varphi(X) = X^T \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Докажите, что  $\varphi$  линейно. Найдите базис  $\text{Ker } \varphi$  и  $\text{Im } \varphi$ . Найдите матрицу  $\varphi$ , выбрав базис в  $M_{2 \times 2}$ .

### Решение:

1. Базис  $\{(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})\}$ .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - c & -6a + 2c \\ 3b - d & -6b + 2d \end{pmatrix} = \varphi(X)$$

2. Найдем образы базисных векторов и составим из них матрицу преобразования:

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}; \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \varphi(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.  $\text{Ker } \varphi = \Phi \text{CP}$  в  $AX = 0$ .

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ker } \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$3. \text{ Im } \varphi = \{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)\} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle. \text{ Базис } \text{Im } \varphi \text{ будет } \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

### Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker } \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Im } \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

## Задача №9

### Условие:

Найдите матрицу (в данном ортонормированном базисе пространства  $\mathbb{R}^3$ ) преобразования отражения относительно плоскости  $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ .

### Решение:

1. Рассмотрим преобразование отражения с геометрической стороны (картинка).

$$\varphi(\vec{p}) = \vec{p} + (-2Pr_n(\vec{p}))$$

$$\varphi(\vec{p}) = \vec{p} - 2 \frac{(\vec{p}, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

2. Тогда из уравнения плоскости  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

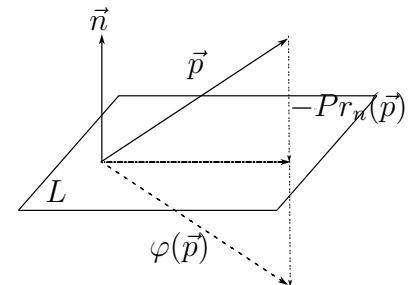
$$\vec{e}_1 = (1 \ 0 \ 0)^T, \vec{e}_2 = (0 \ 1 \ 0)^T, \vec{e}_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$$

$$\varphi(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{-2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3. Составляем матрицу  $A = (\varphi(\vec{e}_1) \ \varphi(\vec{e}_2) \ \varphi(\vec{e}_3))^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$



### Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

## Задача №10

### Условие:

Выясните, существует ли базис, в котором преобразование, заданное матрицей  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ , имеет диагональный вид. Если да, найдите этот базис и диагональный вид.

### Решение:

Если есть базис, в котором матрица  $A$  имеет диагональный вид, то этот базис будет собственный (из собственных векторов), а в диагональном виде на главной диагонали будут стоять собственные значения.

1. Ищем собственные значения

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 & 1 \\ -2 & -3 - \lambda & 2 \\ 3 & 6 & -\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (2 - \lambda)(\lambda(3 + \lambda) - 12) - 2(2\lambda - 6) + (-12 + 3(3 + \lambda)) &= 0 \\ -\lambda^3 - \lambda^2 + 17\lambda - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Решая это уравнение (сначала подбираем 1 корень потом раскладываем на множители), получаем  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -5$ . Все собственные значения различны, значит существует базис из собственных векторов и матрица имеет диагональный вид  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

2. Найдем собственные векторы, подставляя конкретные собственные значения, найденные выше:

- $\lambda_1 = 1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_3 = 0, x_1 + 2x_2 = 0 \rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2 = 3 : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda_3 = -5 : \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 9 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & 8/9 \end{pmatrix} \rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Получаем базис из собственных векторов  $\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \rangle$

### Ответ:

В базисе  $\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \rangle$  матрица  $A$  имеет диагональный вид  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

## Задача №11

### Условие:

Найдите инвариантные подпространства и выясните геометрический смысл преобразования  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , заданного в ортонормированном базисе матрицей  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Решение:

Для любого ортогонального преобразования существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования имеет блочно-диагональный вид

$$A' = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_r \end{pmatrix}, \Phi_i = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_j) & -\sin(\alpha_j) \\ \sin(\alpha_j) & \cos(\alpha_j) \end{pmatrix}$$

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Сравнивая  $A$  и  $A'$  получаем, что это преобразование - это поворот на  $90^\circ$  вокруг оси  $\vec{e}_3$ .

Альтернативное объяснение геометрического смысла преобразования:  $e_3$  переходит сам в себя,  $e_2$  поворачивается и становится  $-e_1$ ,  $e_1$  поворачивается и становится  $e_2$

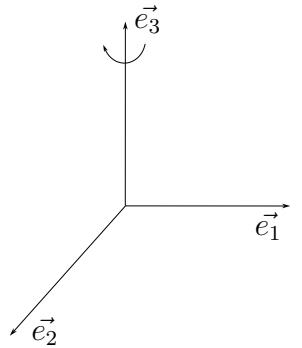
$$\begin{aligned} \varphi(\vec{e}_1) &= \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(\vec{e}_2) &= -\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(\vec{e}_3) &= \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Инвариантное подпространство - подпространство переходящее само в себя при действии на него преобразование. Тогда рассмотрим поворот на  $90^\circ$  вокруг одной из осей и инвариантные подпространства для всех размерностей  $n$ :

- $n = 0$  :  $\{\vec{0}\}$  - очев.
- $n = 1$  :  $\{\vec{e}_3\}$  - вращения вектора вокруг своей оси не изменяет его.
- $n = 2$  :  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  - поворот плоскости - оставляет плоскость.
- $n = 3$  :  $\mathbb{R}^3$  - вращение не меняет всего пространства.

### Ответ:

- $n = 0$  :  $\{\vec{0}\}$
- $n = 1$  :  $\{\vec{e}_3\}$
- $n = 2$  :  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$
- $n = 3$  :  $\mathbb{R}^3$



## **Задача №12**

### **Условие:**

Приведите квадратичную форму  $8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$  (в  $\mathbb{R}^3$ ) к каноническому виду, найдите положительный и отрицательный индексы инерции.

### **Решение:**

$$k(x) = 8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

1. Используя метод Лагранжа, выделяем полные квадраты:

$$\begin{aligned} k(x) &= 8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = (4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3) + (4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2) \\ &= (2x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (2x_1 + 2x_2)^2 \end{aligned}$$

2. Делаем замену координат  $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = 2x_1 + 2x_2 \end{cases}$

Получаем канонический вид  $k(y) = y_1^2 + y_2^2 + 0 \cdot y_3^2$ .

Положительный индекс -  $p = 2$ , отрицательный индекс -  $q = 0$ .

### **Ответ:**

$$k(y) = y_1^2 + y_2^2, p = 2, q = 0$$

## Задача №13

### Условие:

Найдите все значения  $\lambda$ , при которых будет положительно определенной квадратичная форма  $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3$  (заданная в  $\mathbb{R}^3$ ).

### Решение:

Матрица квадратичной формы  $B = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Согласно критерию Сильвестра, для положительной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы ее главные миноры были положительны.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = |2| = 1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 2 - \lambda^2 > 0 \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 3\lambda^2 > 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 - \lambda^2 > 0 \\ 5 - 3\lambda^2 > 0 \end{array} \right. \rightarrow \lambda \in \left( -\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}} \right)$$

**Ответ:**  $\lambda \in \left( -\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}} \right)$

## Задача №14

### Условие:

Найдите ортогональную проекцию вектора  $x = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}^T$  на линейную оболочку векторов  $a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$  и  $b = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$  (исходный базис ортонормированный).

### Решение:

1.  $L : \langle a, b \rangle$ .

Ортогонализируем вектора  $a$  и  $b$ , тогда в ортогональном базисе  $L : \langle c, d \rangle$  будет выполняться  $Pr_L^x = Pr_c^x + Pr_d^x$ .

2. Ортогонализируем по алгоритму Грамма-Шмидта:

$$c = a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = b - \frac{(a, d)}{(a, a)}a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Находим проекцию:

$$Pr_L^x = Pr_c^x + Pr_d^x = \frac{(c, x)}{(c, c)}c + \frac{(d, x)}{(d, d)}d = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$$

**Ответ:**  $Pr_L^x = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$

## Задача №15

### Условие:

В пространстве многочленов степени не выше второй скалярное произведение задано формулой  $(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ . Найдите некоторый ортонормированный базис в данном пространстве.

### Решение:

1. Берем стандартный базис  $\{1, t, t^2\}$ . Ортогонализируем по алгоритму Грамма-Шмидта:

- $h_1 = e_1 = 1$
- $h_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, h_1 \rangle}{|h_1|^2} h_1 = e_2 - \frac{\int_{-1}^1 e_2 \cdot h_1 dt}{\int_{-1}^1 h_1 \cdot h_1 dt} h_1 = e_2 - \frac{\int_{-1}^1 t dt}{\int_{-1}^1 1 dt} h_1 = t - \frac{0}{2} 1 = t$
- $h_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, h_1 \rangle}{|h_1|^2} h_1 - \frac{\langle e_3, h_2 \rangle}{|h_2|^2} h_2 = e_3 - \frac{\int_{-1}^1 t^2 \cdot 1 dt}{\int_{-1}^1 1 dt} h_1 - \frac{\int_{-1}^1 t^2 \cdot t dt}{\int_{-1}^1 t \cdot t dt} h_2 = t^2 - \frac{2/3}{2} 1 - 0 = t^2 - \frac{1}{3}$

2. Нормируем базис:

- $f_1 = \frac{h_1}{|h_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $f_2 = \frac{h_2}{|h_2|} = \frac{t}{\sqrt{\int_{-1}^1 t \cdot t dt}} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t$
- $f_3 = \frac{h_3}{|h_3|} = \frac{t^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^1 (t^2 - 1/3)(t^2 - 1/3) dt}} = \sqrt{\frac{45}{8}}(t^2 - \frac{1}{3})$

Получаем ортонормированный базис  $\{f_1, f_2, f_3\}$

### Ответ:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} 1, \sqrt{\frac{3}{2}} t, \sqrt{\frac{45}{8}} (t^2 - \frac{1}{3}) \right\}$$

## Задача №16

### Условие:

Найдите ортонормированный базис в ортогональном дополнении к линейной оболочке вектора  $a = (1 \ -1 \ -1 \ 1)^T$  (исходный базис в  $\mathbb{R}^4$  ортонормированный).

### Решение:

1.  $L^\perp = \{y \in E : (x, y) = 0, \forall x \in L\}$  - ортогональное дополнение.

Если  $L : \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ , то  $x \in L^\perp \Leftrightarrow (a_i, x) = 0$ .

Тогда из этого уравнения получится СЛОУ  $AX = 0$  с матрицей  $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \dots \\ a_m^T \end{pmatrix}$ , и решением ее будет ФСР - базис в  $L^\perp$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow L^\perp : \langle f_1, f_2, f_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2. Ортогоанализируем базис  $L^\perp$  по алгоритму Грамма-Шмидта:

- $h_1 = f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $h_2 = f_2 - \frac{(f_2, h_1)}{|h_1|^2}h_1 = f_2 - \frac{(f_2, h_1)}{(h_1, h_1)}h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $h_3 = f_3 - \frac{(f_3, h_1)}{|h_1|^2}h_1 - \frac{(f_3, h_2)}{|h_2|^2}h_2 = f_3 - \frac{(f_3, h_1)}{(h_1, h_1)}h_1 - \frac{(f_3, h_2)}{(h_2, h_2)}h_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Нормируем базис:

- $c_1 = \frac{h_1}{|h_1|} = \frac{h_1}{\sqrt{(h_1, h_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $c_2 = \frac{h_2}{|h_2|} = \frac{h_2}{\sqrt{(h_2, h_2)}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $c_3 = \frac{h_3}{|h_3|} = \frac{h_3}{\sqrt{(h_3, h_3)}} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Получаем ОНБ  $\{c_1, c_2, c_3\}$

**Ответ:**  $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$

## Задача №17

### Условие:

Найдите (в исходном ортонормированном базисе в  $\mathbb{R}^4$ ) матрицу ортогонального проектирования на подпространство, заданное уравнением

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

Является ли это преобразование самосопряженным? Является ли это преобразование ортогональным?

### Решение:

1. Вектор нормали в ОНБ у подпространства:

$$L : x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \equiv \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Ортогональное проектирование:  $\forall y \in \mathbb{R}^4 : y = y_{\parallel} + y_{\perp}$ , где  $y_{\perp}$  - перпендикулярная составляющая к подпространству, т.е. проекция на нормаль, а  $y_{\parallel}$  - проекция на подпространство.

Тогда  $\varphi(y) = y_{\parallel} = y - y_{\perp} = y - \frac{(y, n)}{(n, n)}n$  - ортогональное проектирование.

3. Беря базис ОНБ ищем матрицу преобразования:  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ищем скалярные произведения:

$$(n, n) = 4; \quad (e_1, n) = 1 = (e_4, n); \quad (e_2, n) = -1 = (e_3, n)$$

- $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $\varphi(e_2) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\varphi(e_3) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\varphi(e_4) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Получаем  $A_{\varphi} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  - симметрична, значит преобразование самосопряженно.

Необходимое условие ортогональности:  $A_{\varphi} \cdot A_{\varphi}^T = E$ . Проверим:

$$\begin{aligned} A_{\varphi} \cdot A_{\varphi}^T &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 12 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 12 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & 12 \end{pmatrix} \neq E \Rightarrow \text{не является ортогональным} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $A_{\varphi} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi$  - самосопряженное, не ортогональное.

## Задача №18

### Условие:

Подпространство  $U$  задано системой  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$  Найдите систему линейных уравнений, задающую  $U^T$  (исходный базис в  $\mathbb{R}^4$  ортонормированный).

### Решение:

$L^\perp = \{y \in E : (x, y) = 0, \forall x \in L\}$  - ортогональное дополнение.

Если  $L : \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ , то  $y \in L^\perp \Leftrightarrow (a_i, y) = 0$ .

Тогда из этого уравнения получится СЛОУ  $AX = 0$  с матрицей  $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \dots \\ a_m^T \end{pmatrix}$ .

Значит, транспонировав ЛО получается матрица СЛОУ для  $L^T$ .

1. Переведем СЛОУ в ЛО для  $L$ , для этого нужно найти базис подпространства, т.е. ФСР(решить СЛОУ):

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \Phi = \left( \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow L : \langle \left( \begin{array}{c} \frac{1}{-2} \\ \frac{1}{0} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \frac{2}{-3} \\ \frac{1}{1} \end{array} \right) \rangle$$

2. Теперь имея ЛО,  $L : \langle \left( \begin{array}{c} \frac{1}{-2} \\ \frac{1}{0} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \frac{2}{-3} \\ \frac{1}{1} \end{array} \right) \rangle \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \dots \\ a_m^T \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$ , т.е. транспонируем ЛО и получаем  $A$ .

Отсюда сразу получаем  $L^T : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

**Ответ:**  $L^T : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

## Задача №19

### Условие:

Найдите ортонормированный базис, в котором преобразование, заданное матрицей  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(в исходном ортонормированном базисе в  $\mathbb{R}^4$ ), имеет диагональный вид; укажите этот диагональный вид.

### Решение:

1.  $A = A^T$ , значит  $\varphi$  - самосопряженное. Тогда найдем базис из собственных векторов:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \dots = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3) = 0$$

- $\lambda_1 = 3 : \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2 = -3 : \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Получаем базис из собственных векторов  $\{h_1, h_2, h_3\}$  в котором матрица будет иметь диагональный вид

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Ортогонализируем базис из собственных векторов.

Заметим, что собственные векторы отвечающие различным собственным значениям всегда ортогональны, поэтому даже без проверки получаем, что  $h_1 \perp h_3, h_2 \perp h_3$ .

Осталось ортогонализировать вектора, отвечающие одному СЗ,  $h_1$  и  $h_2$  по алгоритму Грамма-Шмидта:

- $f_3 = h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , не меняем
- $f_1 = h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , берем первым
- $f_2 = h_2 - \frac{(h_2, f_1)}{|f_1|^2} f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Нормируем  $\{f_1, f_2, f_3\}$  и получаем  $\{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

### Ответ:

В базисе  $\{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$  матрица  $A$  имеет диагональный вид  $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

## Задача №20

### Условие:

Пусть  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  - ортогональное отражение относительно  $U^\perp$ , где подпространство  $U$  является линейной оболочкой вектора  $(1 \ -1 \ 1 \ -1)^T$ . Является ли  $\varphi$  - ортогональным? Является ли  $\varphi$  самосопряженным? Найдите матрицу  $\varphi$  (в данном ортонормированном базисе).

### Решение:

Любой вектор можно единственным образом разбить на две составляющие -  $u$  и  $z$ , принадлежащие  $U$  и  $U^\perp$  соответственно, т.к.  $U + U^\perp = E$

Тогда т.к.  $U$  представлено одним вектором - это вектор  $\vec{n}$  вектор нормали к  $U^\perp$ , с учетом преобразования отражения относительно  $U^T$ , получаем:

$$\begin{aligned} x' &= Pr_U^x \equiv x_\perp \\ x'' &= Pr_{U^\perp}^x \equiv x_\parallel \\ x &= x' + x'' \\ \varphi(x) &= x - 2x^\perp = x - 2Pr_U^x = x - 2\frac{(x, n)}{(n, n)}n \end{aligned}$$

Берем базис  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , считаем скалярные произведения:

$$(n, n) = 4; (e_1, n) = 1 = (e_3, n); (e_2, n) = -1 = (e_4, n)$$

$$\text{Получаем матрицу преобразования } A_\varphi = E - 2\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_\varphi$  - симметрическая матрица  $\Rightarrow$  самосопряженное.

Условие ортогональности:  $A_\varphi \cdot A_\varphi^T = E$

$$\text{Проверка: } \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = E \text{ - ортогональное}$$

$$\text{Ответ: } A_\varphi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \varphi \text{ - самосопряженное, ортогональное преобразование}$$

## Задача №21

### Условие:

В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  дана квадратичная форма

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

(исходный базис - ортонормированный). Найдите ортонормированный базис, в котором эта форма имеет диагональный вид, и укажите этот диагональный вид.

### Решение:

1.  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A$  - самоспорожженное преобразование.

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \dots = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3) = 0$$

- $\lambda = 3 : \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\lambda = -3 : \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Получили базис из собственных векторов  $\{f_1, f_2, f_3\}$  в котором кв.форма имеет вид  $B' = \text{diag}(3 \ 3 \ -3)$

2. Ортогонализируем по Грамму-Шмидту:

Заметим, что векторы отвечающие различным собственным значениям ортогональны всегда, поэтому  $h_1 \perp h_3, h_2 \perp h_3$ .

- $h_1 = f_1$
- $h_3 = f_3$
- $h_2 = f_2 - \frac{h_1, f_2}{h_1, h_1} h_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Нормируем:

- $e_1 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $e_2 = h_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $e_3 = h_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Также матрица перехода будет составлена из этих векторов(т.к. начальный был ОНБ):

$$S = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

### Ответ:

В базисе  $\{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$  с матрицей перехода  $S = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$  квадратичная форма будет иметь диагональный вид  $B' = \text{diag}(3 \ 3 \ -3)$ .

## Задача №22

### Условие:

Найдите базис в  $\mathbb{R}^2$ , в котором квадратичные формы  $13x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$  и  $-9x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$  имеют диагональный вид. Укажите полученный диагональный вид каждой из форм.

### Решение:

1. Пусть квадратичные формы будут  $f, g$ . Определим какая из них положительно определена:

$$F = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 13 > 0 \quad \Delta_1 = -9 < 0$$

$\Delta_2 = 13 \cdot 3 + 5 \cdot 5 > 0 \rightarrow$  по крит. Сильвестра:  $F_+$  - положительно определена,  $G$  - нет.

2. Ищем собственный базис, в котором обе формы имеют диагональный вид:

$$\det(G - \lambda F_+) = 0$$
$$\begin{vmatrix} -9 - 13\lambda & 1 + 5\lambda \\ 1 + 5\lambda & 1 - 3\lambda \end{vmatrix} = \dots = 2(7\lambda^2 + 2\lambda - 5) = 0$$
$$\lambda_1 = \frac{5}{7}, \lambda_2 = -1$$

- $\lambda_1 = \frac{5}{7} : \begin{pmatrix} -128/7 & 32/7 \\ 32/7 & -8/7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2 = -1 : \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Проверка, что правильно нашли с.в.:  $(h_1, h_2)_{F_+} = (1 \ 4) \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$  - верно.

3. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям ортогональны, осталось нормировать:

$$|h_1|^2 = (h_1, h_1)_{G_+} = (1 \ 4) \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 21$$

$$|h_2|^2 = (h_2, h_2)_{G_+} = (1 \ 1) \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

Получаем ОНБ:  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , матрица перехода  $S = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{7} \\ 4\sqrt{2} & \sqrt{7} \end{pmatrix}$

Т.к.  $F = F_+$ , то ее диагональный вид в новом базисе будет  $F = \text{diag}(1 \ 1)$ ,  $f(x') = x_1'^2 + x_2'^2$ , а  $G = \text{diag}(\frac{5}{7} \ -1)$ ,  $g(x') = \frac{5}{7}x_1'^2 - x_2'^2$

### Ответ:

В базисе  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , матрица перехода  $S = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{7} \\ 4\sqrt{2} & \sqrt{7} \end{pmatrix}$  квадратичные формы будут иметь диагональные виды:

$$f(x') = x_1'^2 + x_2'^2, \quad g(x') = \frac{5}{7}x_1'^2 - x_2'^2$$

## Задача №23

### Условие:

Найдите все действительные  $\lambda$ , при которых преобразование,

заданное матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$ , диагонализируемо.

### Решение:

Диагонализируемость означает, что характеристический многочлен имеет все действительные корни.

Рассмотрим корни в зависимости от параметра  $\lambda$ :

$$\det(A - xE) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - x \end{vmatrix} = (\lambda^2 - x)(1-x)^2 = 0 \text{ (разложение по 3 строке)}$$

$$x_1 = 1 \text{ (кратность 2)}, x_2 = \lambda^2 \text{ (кратность 1)}$$

- $\lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda = \pm 1$ :

$$-\lambda = 1:$$

$$x = 1 \text{ (алг.кратность 3)} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{решением будет базис в } \mathbb{R}^3 \text{ и геометрическая кратность (3 с.в.)} = \text{алгебр.кратности} = 3 - \underline{\text{подходит}}$$

$$-\lambda = -1:$$

$$x = 1 \text{ (алг.кратность 3)} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = x_1, x_2 = x_2 \end{cases} \rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{геом.крат.} = 2 \neq \text{алг.крат.} - \underline{\text{не подходит}}$$

- $\lambda^2 \neq 1$ :

$$x_1 = 1 \text{ (алг.кратность 2)} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = x_1, x_2 = x_2 \end{cases} \rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (2 с.в., геом.кратность = 2)}$$

$$x_2 = \lambda^2 \text{ (алг.кратность 1)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 & 0 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} -(\lambda^2 - \lambda) & 0 \\ 0 & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -(\lambda^2 - \lambda) \\ 0 \\ 1 - \lambda^2 \end{pmatrix} \text{ (1 с.в., геом.кратность = 1)}$$

Получаем, что вне зависимости от значения  $\lambda$ (кроме  $\lambda^2 \neq 1$ ), у обоих с.з. геометрические и алгебраические кратности совпадают - подходит

Ответ:  $\lambda \in \mathbb{R}^3 \setminus \{-1\}$

## Задача №24

### Условие:

Преобразование  $\varphi : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ , где  $M_{2 \times 2}$  - пространство матриц размера  $2 \times 2$ , задано правилом  $\varphi(X) = X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ . Докажите, что  $\varphi$  линейно. Найдите собственные значения и собственные подпространства преобразования  $\varphi$ . Выясните, диагонализируем ли  $\varphi$ .

### Решение:

1. Доказательство линейности:

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \alpha x \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} + \beta y \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y), \quad \varphi(0) = 0 / \text{ч.т.д.}$$

2. Найдем матрицу преобразования:

Пусть базис

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ и } x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ тогда: } \varphi(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3b & 3a+8b \\ 2c-3d & 3c+8d \end{pmatrix}$$

Тогда для базисных матриц:

- $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\text{Тогда } A = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_4)) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Найдем собственные значения и векторы:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 8 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \dots = (\lambda - 5)^4 = 0$$

Получаем собственное значение  $\lambda = 5$  с кратностью 4. Для него:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow L : \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle - \text{собст. подпр.}$$

Геометрическая кратность собственного подпространства равна 2(2 вектора в ЛО), алгебраическая - 4 (из характеристического уравнения). Значит, т.к. геометрическая кратность не равна алгебраической, то не диагонализируемо.

**Ответ:**  $\lambda = 5$  - собственное значение,  $L : \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  - собственное подпространство,  $\varphi$  - не диагонализируемое.

## Задача №25

### Условие:

Приведите квадратичную форму  $2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$  (в  $\mathbb{R}^4$ ) к каноническому виду и найдите канонический базис, положительный и отрицательный индексы инерции.

### Решение:

Мы пока не придумали решение, здесь только идеи не доведенные до конца:

Преобразуем с помощью метода Лагранжа. Т.к. в выражении нет квадратов, то делаем невырожденную замену координат:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2 \\ x_2 = x'_1 - x'_2 \\ x_3 = x'_3 \\ x_4 = x'_4 \end{cases} \longrightarrow$$

$$k(x') = 2(x'^2_1 - x'^2_2) + 2x'_1x'_3 - 2x'_2x'_3 + 2x'_3x'_4 = 2x'^2_1 + 2x'_1x'_3 + x'^2_3 - x'^2_3 - 2x'^2_2 - 2x'_2x'_3 + 2x'_3x'_4 = \\ = (x'_1 + x'_3)^2 - (x'_2 + x'_3)^2 + x'^2_1 - x'^2_2 + 2x'_3x'_4$$

$$\begin{cases} x'_1 = x^*_1 \\ x'_2 = x^*_2 \\ 2x'_3 = x^*_3 + x^*_4 \\ 2x'_4 = x^*_3 - x^*_4 \end{cases} \longrightarrow$$

$$k(x^*) = (x^*_1 + x^*_3 + x^*_4)^2 - (x^*_2 + x^*_3 + x^*_4)^2 + x^{*2}_1 - x^{*2}_2 + 2(x^*_3 + x^*_4)(x^*_3 - x^*_4)$$

Преобразуем с помощью метода Лагранжа. Т.к. в выражении нет квадратов, то делаем невырожденную замену координат:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 \rightarrow \\ 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4$$

Рассмотрим выражение и подведем его к замене координат:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4 = \\ = (x_1 + x_3 + x_4)^2 - 2x_3x_4 + 2x_2x_4 =$$

Тут мы ниче не придумали, надо сделать такую замену, чтобы влезала в 4 координаты

## Благодарности



Глав.Тайпер



Ревьюер