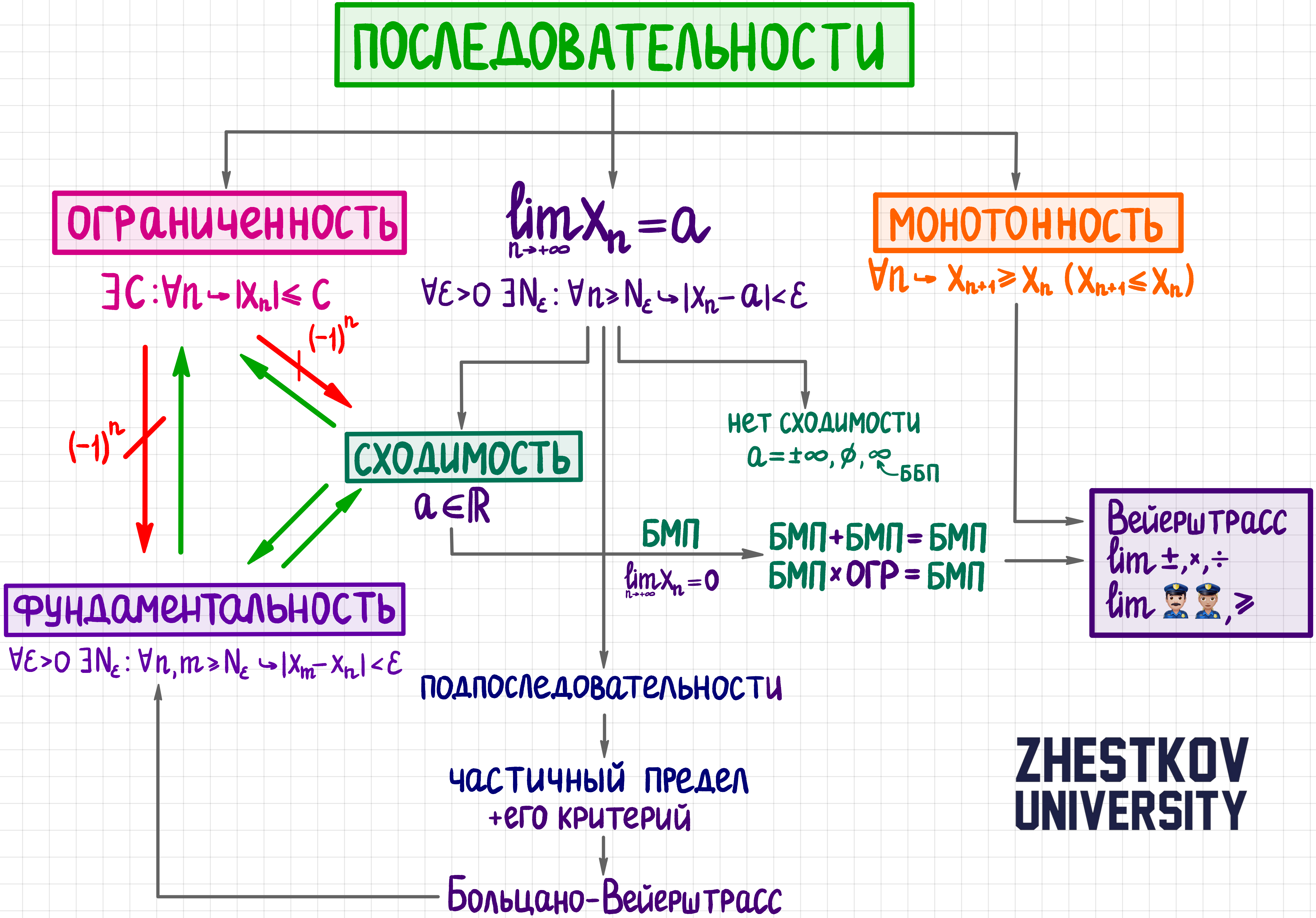
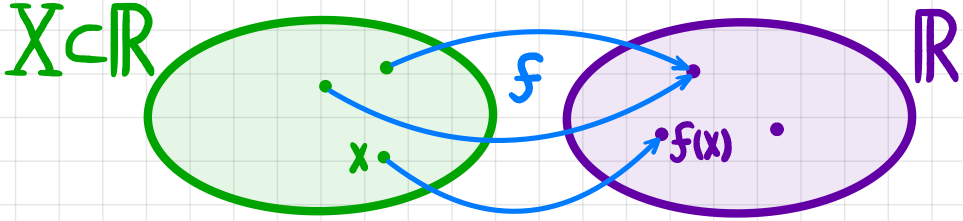


ZHESTKOV
UNIVERSITY

Функция — правило, по которому каждому числу из $X\subset\mathbb{R}$ ставится в соответветствие единственное число из $\mathbb{R}$

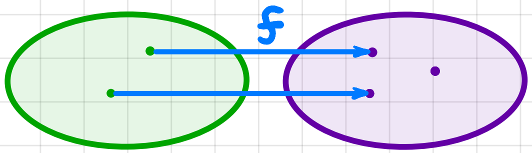


$f: X\to\mathbb{R}$

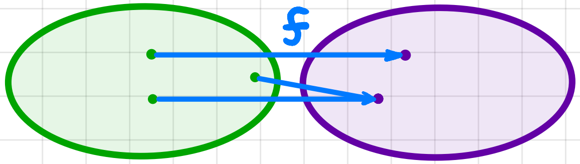
$f(X)=E(y)$ — множество значений

x — прообраз $f(x)$ — образ

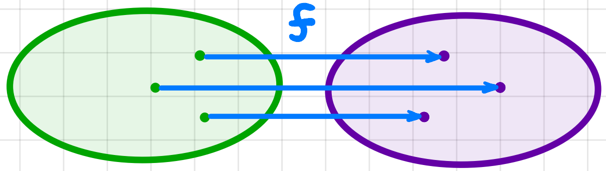
инъекция: $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$



сюръекция: $f(X)=\mathbb{R}$



биекция: инъек.+сюр.



Свойства:

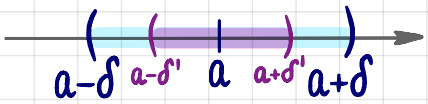
1°) $f(x)$ монот. возр. на X, если $\forall x_1,x_2\in X: x_1<x_2 \to f(x_1)<f(x_2)$

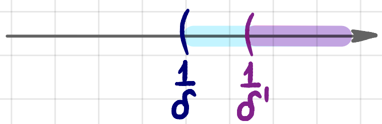
2°) $f(x)$ ограничена на X, если $\exists M: \forall x\in X \to |f(x)|\le M$

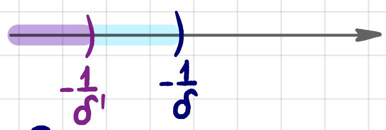
Окрестности

Обычная $U_\delta(a)=(a-\delta,a+\delta)$ $U_\delta(+\infty)=(\frac{1}{\delta};+\infty)$ $U_\delta(-\infty)=(-\infty;-\frac{1}{\delta})$

$\delta'<\delta$

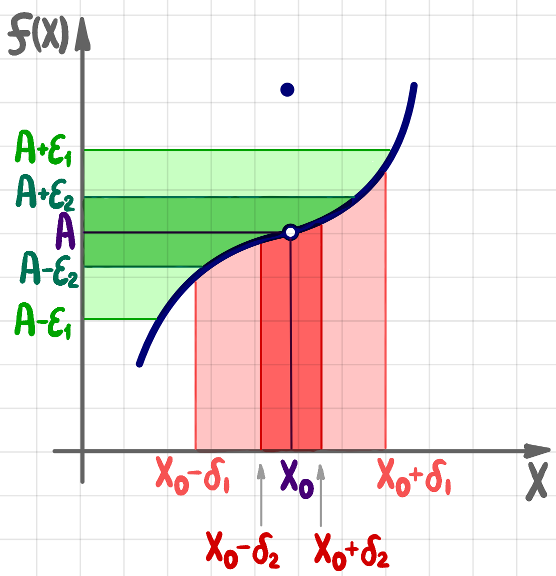






Проколотая $\mathring{U}_\delta(a)=(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$ $\mathring{U}_\delta(+\infty)=(\frac{1}{\delta};+\infty)$ $\mathring{U}_\delta(-\infty)=(-\infty;-\frac{1}{\delta})$

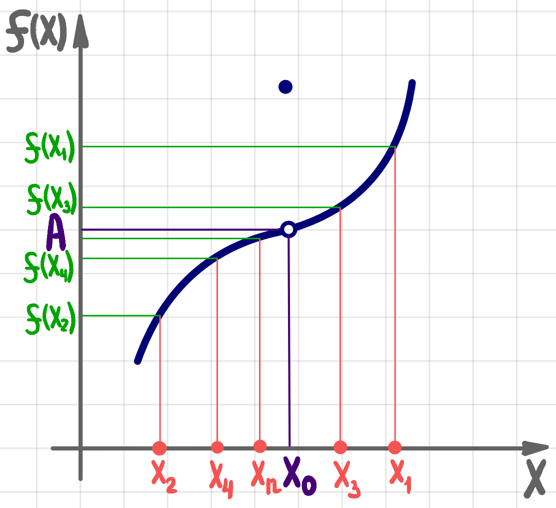
Основа: $f(x): X \to \mathbb{R},\ \exists \delta_0 > 0: \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \subset X,\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}},\ A \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$



Для зелёной полосы любой ширины существует розовая полоса такая, что для всех x из розовой полосы (кроме, быть может самой точки x_0) верно, что значения функции в них попадают в зелёную

Определение предела функции по Коши

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon \in (0, \delta_0]: \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)}$$



Как бы мы не подбирались к точке x_0 (не попадая при этом в саму точку x_0), значения функции в этих точках будут подбираться к A

Определение предела функции по Гейне

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \text{ послед. Гейне } \begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \\ x_n \neq x_0, \forall n \end{cases} \hookrightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} A}$$

Теорема: Коши $\Leftrightarrow$ Гейне

$f(x): X \to \mathbb{R},\ \exists \delta_0 > 0: \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \subset X,\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}},\ A \in \overline{\mathbb{R}}$

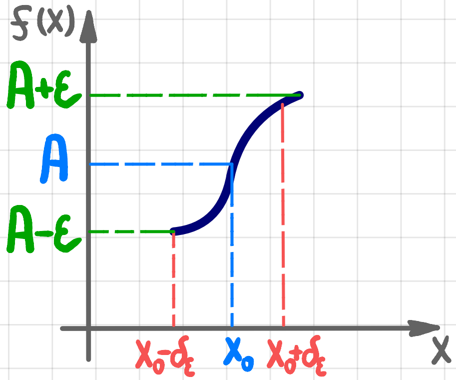
1) Коши $\Rightarrow$ Гейне

Коши: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon \in (0, \delta_0]: \forall x \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Произв. посл. Гейне $\{x_n\}: \begin{cases} x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0 \\ x_n \neq x_0, \forall n \end{cases}$

$\forall \delta > 0\ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$

в том числе для $\delta = \delta_\varepsilon$ $\longrightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(A) \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = A$ ч.т.д.



2) Гейне $\Rightarrow$ Коши

Пусть не так и Гейне ✓, а Коши ✗

$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta \in (0, \delta_0]\ \exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0): f(x) \notin U_\varepsilon(A)$

$\delta_1 = \delta_0 \qquad \exists x_{\delta_1} = x_1: \quad f(x_1) \notin U_\varepsilon(A)$

$\delta_2 = \frac{\delta_0}{2} \qquad \exists x_{\delta_2} = x_2: \quad f(x_2) \notin U_\varepsilon(A)$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$\delta_n = \frac{\delta_0}{n} \qquad \exists x_{\delta_n} = x_n: \quad f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

Построим послед. $\{x_n\}$

$x_n \in \mathring{U}_{\frac{\delta_0}{n}}(x_0) \Rightarrow x_n \neq x_0, \forall n$

$\underbrace{x_0 - \frac{\delta_0}{n}}_{\downarrow x_0} < x_n < \underbrace{x_0 + \frac{\delta_0}{n}}_{\downarrow x_0} \Rightarrow x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$

$\{x_n\}$ посл. Гейне, но $f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$,

т.е. $f(x_n) \not\xrightarrow[n \to +\infty]{} A$, противор. ч.т.д.

Арифметические свойства предела функции

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, тогда

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=a\pm b$ 2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=a\cdot b$ 3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{a}{b}$, $b\neq 0$

Лемма о сохранении знака

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $a\neq 0$. Тогда $\exists\delta: \forall x\in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x)$ тот же знак, что a

Свойства предела функции, связанные с неравенствами

1) Теорема о предельном переходе

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\in\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b\in\overline{\mathbb{R}}$ и $\exists\delta>0: \forall x\in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x)\leq g(x)$, то $a\leq b$

2) Теорема о 👮‍♂️👮‍♂️

$$\left.\begin{array}{l}\text{Пусть } \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=a\in\mathbb{R}\\ \exists\delta>0: \forall x\in \overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow f(x)\leq g(x)\leq h(x)\end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$$

Для последовательностей было так:

$\{x_n\}$ фундаментальна $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n,m \geq N_\varepsilon \hookrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$

$$\boxed{\text{Теорема (критерий Коши): } \{x_n\} \text{ фундаментальна} \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ сходится}}$$

Для функций есть похожая история

Условие Коши $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon \in (0,\delta_0]: \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$

$$\boxed{\text{Теорема (критерий Коши): } \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \text{выполнено условие Коши}}$$

$\Rightarrow$ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, покажем, что условие Коши ✓

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon \in (0,\delta_0]: \forall x \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

в частности $\forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \longrightarrow \begin{cases} |f(x_1) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |f(x_2) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

$|f(x_2) - f(x_1)| = |(f(x_2) - a) - (f(x_1) - a)| \leq |f(x_2) - a| + |f(x_1) - a| < \varepsilon$ ч.т.д.

$\Leftarrow$ Пусть выполнено условие Коши, то есть

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon \in (0,\delta_0]: \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow |f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$. Покажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\in\mathbb{R}$

Рассмотрим произв. посл. Гейне $\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \\ x_n \neq x_0, \forall n \end{cases} \longrightarrow \forall \delta>0\ \exists N: \forall n\geq N \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$

в том числе для $\delta=\delta_\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n\geq N, \forall k\geq N \hookrightarrow x_n, x_k \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$, а значит $|f(x_n)-f(x_k)|<\varepsilon$

$\Rightarrow f(x_n)$ – фундам. $\Rightarrow$ по крит Коши для послед $f(x_n)$ сходится для $\forall \{x_n\}$ посл. Гейне. Но этого **мало**! Вдруг $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b\neq a$

(Кр. Коши для послед. **гарант**. сходимость, но не говорит к чему)

Покажем, что если для $\forall\{x_n\}$ посл. Гейне $\hookrightarrow f(x_n)$ сходятся, то сходятся они к одному и тому же числу a.

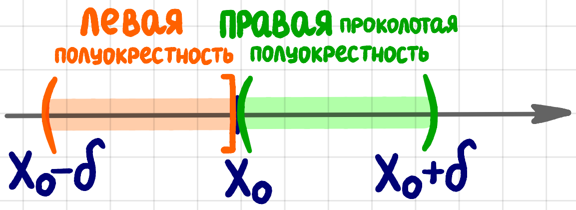
Пусть $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$. Покажем, что $a=b$

Составим послед. $z_n: \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots\}$ – последов. Гейне $\Rightarrow f(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$

$f(z_n): \{f(x_1), f(y_1), \dots f(x_n), f(y_n), \dots\}$, т.е. $f(x_n), f(y_n)$ – подпослед. $f(z_n)$

Но $f(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$, а значит все ч.п. равны M, в том числе $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$, $f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$

Ч.Т.Д.



$U_\delta(x_0-0)$ $\quad$ $\mathring{U}_\delta(x_0+0)$

$x\in(x_0-\delta, x_0]$ $\quad$ $x\in(x_0, x_0+\delta)$

Предел справа по Коши $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)=a$

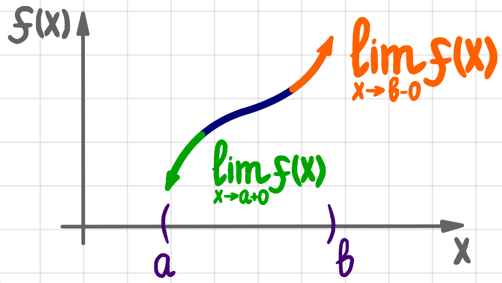
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon\in(0,\delta_0]: \forall x\in\mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0+0) \hookrightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$

Предел слева по Гейне $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)=b$

$\forall$ послед. Гейне $\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \\ x_n\in\mathring{U}_\delta(x_0-0), \forall n\end{cases} \hookrightarrow f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} b$

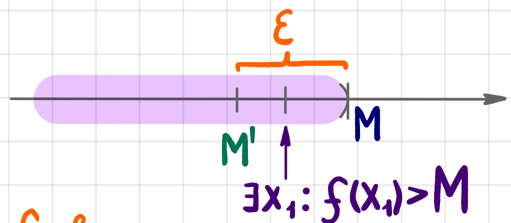
Теорема об односторонних пределах. Пусть f опред. в $\mathring{U}_\delta(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$ тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\in\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=a$

Теорема: пусть $f(x)$ возр. на (a,b), тогда $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\sup\limits_{(a,b)} f(x)$, $\exists\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\inf\limits_{(a,b)} f(x)$



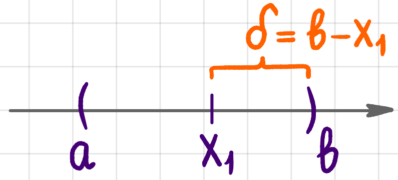
Пусть $M=\sup\limits_{(a,b)} f(x)$

$\forall\varepsilon>0\ \exists x_1\in(a,b): M-\varepsilon<f(x_1)$ $\quad$ (sup 2°)



При этом $\forall x\in(x_1,b) \hookrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant f(x_1) & (\uparrow\uparrow) \\ f(x)\leqslant M & (\sup 1°)\end{cases}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists x_1\in(a,b): \forall x\in(x_1,b) \hookrightarrow M-\varepsilon<f(x)\leqslant M$

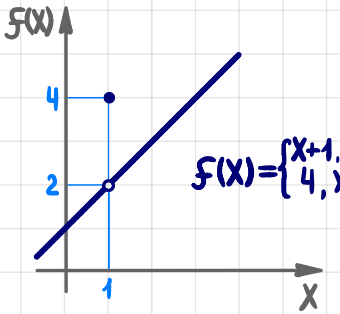


$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x\in\mathring{U}_\delta(b-0) \hookrightarrow U_\varepsilon(M)$ ч.т.д.

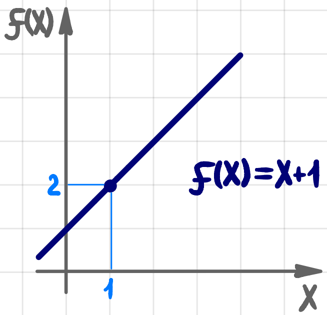
Непрерывность функции в точке

$f(x): X \to \mathbb{R}, \exists \delta_0 > 0: U_{\delta_0}(x_0) \subset X, x_0 \in \mathbb{R}$

$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$



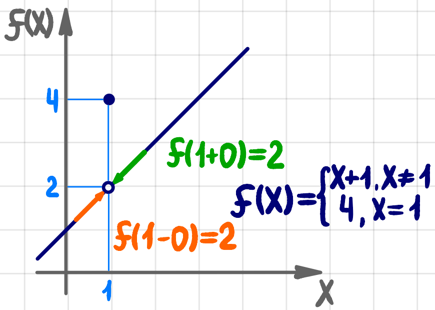
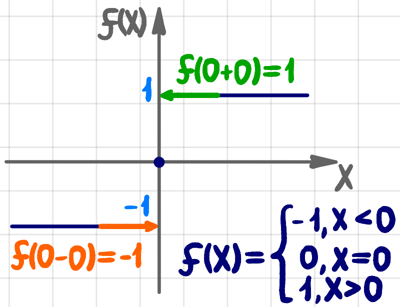
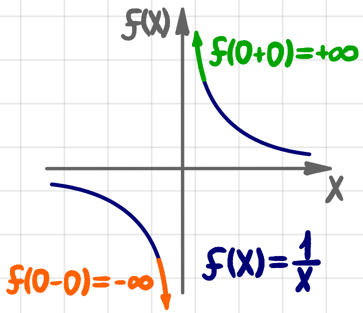
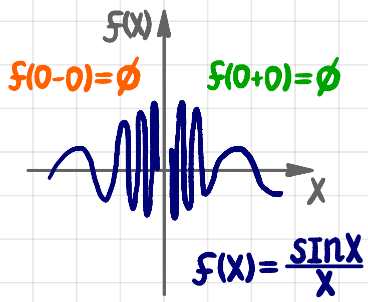
$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 4, & x = 1 \end{cases}$



$f(x) = x+1$

Коши: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon \in (0, \delta_0]: \forall x \in U_{\delta_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

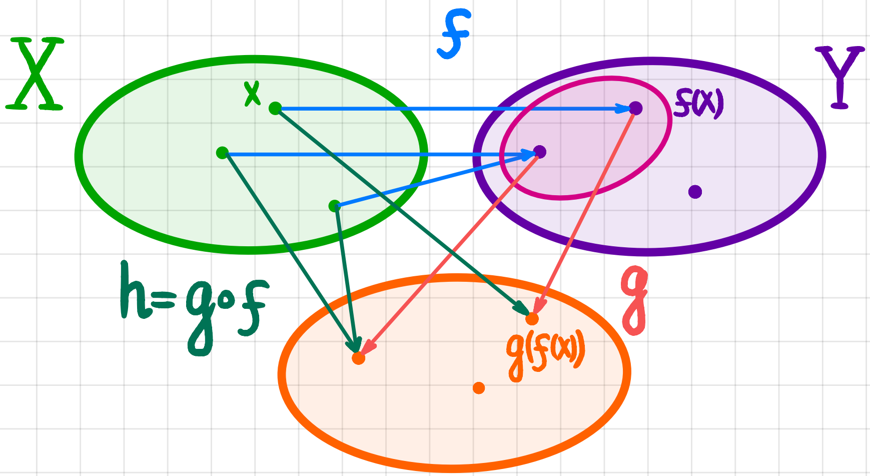
Гейне: $\forall$ послед. Гейне $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \hookrightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$

устранимый разрыв	разрыв I рода	разрыв II рода
$f(x_0-0) = f(x_0+0)$, $f(x_0-0) \in \mathbb{R}$, $f(x_0+0) \in \mathbb{R}$ 	$f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, $f(x_0-0) \in \mathbb{R}$, $f(x_0+0) \in \mathbb{R}$ 	$f(x_0-0) = +\infty \setminus -\infty$ или $f(x_0+0) = +\infty \setminus -\infty$ или $\nexists f(x_0-0)$ или $\nexists f(x_0+0)$  

Если $f(x)$, $g(x)$ непр. в x_0, то $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x_0) \neq 0$) тоже непр. в x_0

Если $f(x)$ непр. в x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то $\exists \delta: \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x)$ тот же знак, что $f(x_0)$

Если $f(x)$ непр. в x_0, то $\exists \delta, M: \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x)| \leq M$ (ограниченность)



$f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$ и $f(X) \subset Y$

$h(x) = g(f(x))$ – сложная функция, $h: X \to \mathbb{R}$

Например, $h_1(x) = \sin x^2$, $h_2(x) = \operatorname{tg}^3 x$, $h_3(x) = \ln(x^2+4)$

g – внешняя функция, f – внутренняя функция

Теорема (непрерывность сложной функции): пусть $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$, $f(X) \subset Y$, $f(x)$ непр. в x_0, $g(y)$ непр. в $y_0 = f(x_0)$. Тогда $g(f(x))$ непр. в x_0

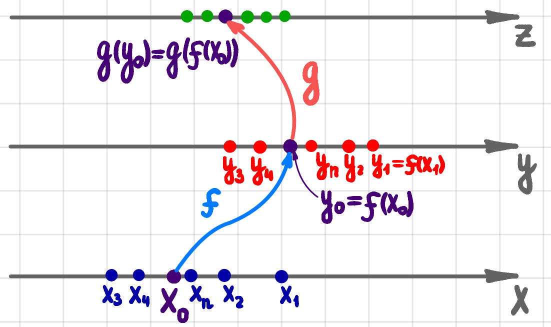
Рассмотрим произв. посл. Гейне $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$,

для неё $\underbrace{f(x_n)}_{y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{f(x_0)}_{y_0}$, т.к. $f(x)$ непр. в x_0

Получим новую посл. Гейне $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_0$,

для неё $g(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(y_0)$, т.к. $g(y)$ непр. в y_0

или $g(f(x_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(f(x_0)) \Rightarrow g(f(x))$ непр. в x_0 ч.т.д.



Без непр. ломается, но хватит $g(y)$ непр. в y_0 или $\exists \delta: \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \neq y_0$

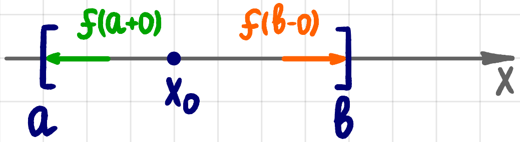
В терминах пределов

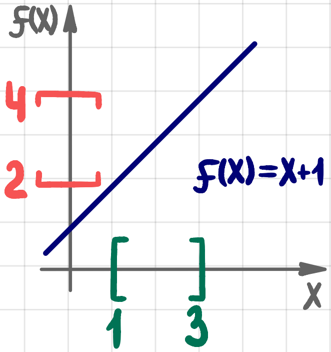
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) &= f(x_0) \\ \lim_{y\to y_0} g(y) &= g(y_0) \end{aligned}\right| \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)),\ \text{т.е.}\ \lim_{y\to y_0} g(y) = \lim_{x\to x_0} g(f(x))$$

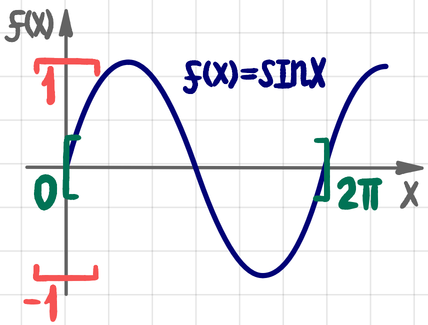
замена переменной

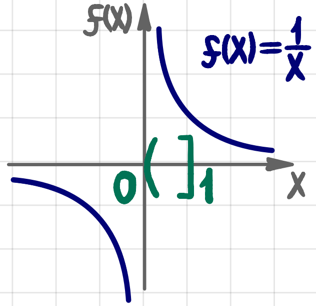
Непрерывность функции на отрезке

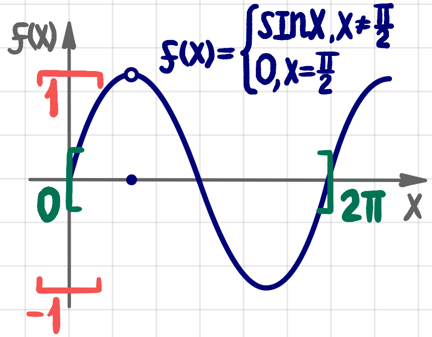
$$f(x) \text{ непрерывна на } [a,b] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ непрерывна справа в } x=a & f(a+0)=f(a) \\ f(x) \text{ непрерывна в } \forall x_0\in(a,b) & \\ f(x) \text{ непрерывна слева в } x=b & f(b-0)=f(b) \end{cases}$$

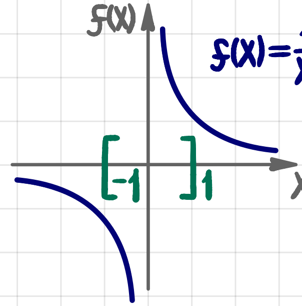












$[1,3]\xrightarrow[\text{непр.}]{f}[2,4]$ $\quad [0,2\pi]\xrightarrow[\text{непр.}]{f}[-1,1]$ $\quad (0,1]\xrightarrow[\text{непр.}]{f}[1,+\infty)$ $\quad [0,2\pi]\xrightarrow[\cancel{\text{непр.}}]{f}[-1,1)$ $\quad [-1,1]\xrightarrow[\cancel{\text{непр.}}]{f}(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

Есть ожидание, что $[\ ]\xrightarrow[\text{непр.на }[\ ]]{f}[\ ]$. Так и будет

Пусть $[\ ]\xrightarrow[\text{непр.на }[\ ]]{f}$ множество A. За три шага покажем, что A – отрезок

① A – ограниченное ② A содержит $\min A$, $\max A$ ③ A принимает все знач. от $\min A$ до $\max A$

Вейерштрасс I Вейерштрасс II Больцано-Коши

Теорема (Вейерштрасс I): пусть f непр. на $[a,b]$, тогда f огр. на $[a,b]$

Пусть не так и f неогр. на $[a,b]$

$\forall M>0\ \exists x\in[a,b]: |f(x)|>M$

$M_1=1\ \exists x_1\in[a,b]: |f(x_1)|>1$

$M_2=2\ \exists x_2\in[a,b]: |f(x_2)|>2$

$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$

$M_n=n\ \exists x_n\in[a,b]: |f(x_n)|>n$

$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$

$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in[a,b]: |f(x_n)|>n$

$f(x_n)$ – бесконечно большая послед.

$\{x_n\}$ огр., т.к. $\forall n \hookrightarrow x_n\in[a,b] \Rightarrow$ по теор Б.-В.

$\exists \{x_{n_k}\}$ – подпосл. $\{x_n\}: x_{n_k}\xrightarrow[n\to+\infty]{} C\in\mathbb{R}$

$\forall k \hookrightarrow a\le x_{n_k}\le b \Rightarrow C\in[a,b] \Rightarrow f(x_{n_k})\xrightarrow[k\to+\infty]{} f(C)\in\mathbb{R}$

т.к. f непр. на $[a,b]$

Но это противоречие, т.к. $|f(x_{n_k})|>n_k\ \forall k$, а значит у $\{f(x_{n_k})\}$ нет конеч. предела ч.т.д.

Теорема (Вейерштрасс II): пусть f непр. на $[a,b]$, тогда $f(x)$ достигает $\sup\limits_{[a,b]} f(x)$

Пусть $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Если $\exists x_0\in[a,b]: f(x_0)=M$ – победа. Пусть не так, тогда

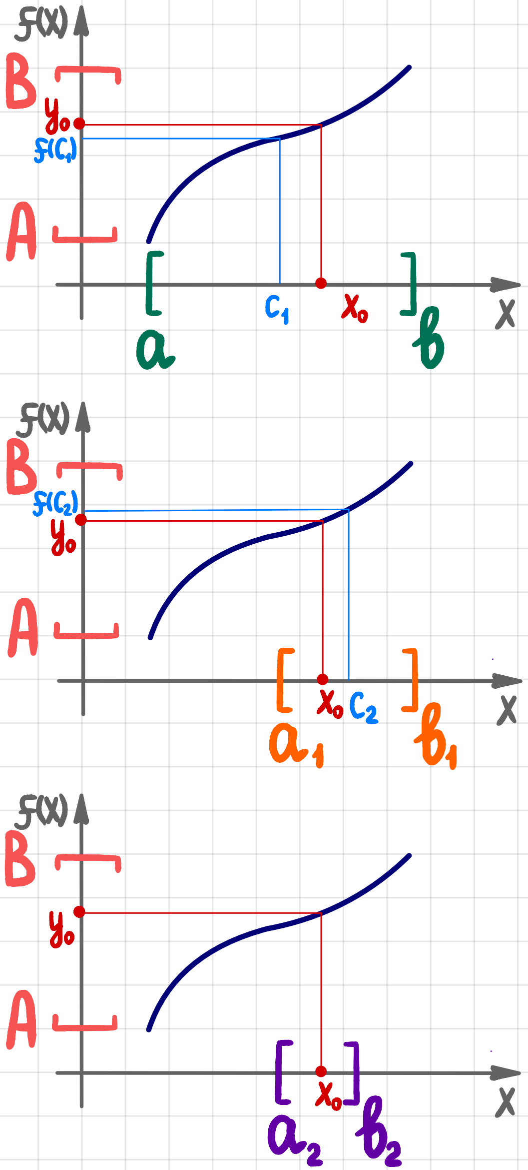
$\forall x\in[a,b] \hookrightarrow f(x)<M$. Пусть $g(x)=\frac{1}{M-f(x)}$, $g(x)$ непр. на $[a,b] \Rightarrow g(x)$ огр. на $[a,b]$, т.е.

как частное непр. ф-ций

$\exists M'>0: \forall x\in[a,b] \hookrightarrow g(x)\le M' \Leftrightarrow \frac{1}{M-f(x)}\le M' \Leftrightarrow f(x)\le M-\frac{1}{M'} \Rightarrow M\ne\sup\limits_{[a,b]} f(x)$ противоречие ч.т.д.

>0

Теорема (Больцано-Коши): пусть f непр. на $[a,b]$, при этом $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A<B$. Тогда $\forall y_0\in[A,B]$ $\exists x_0\in[a,b]$: $f(x_0)=y_0$



Пусть c_1 – середина $[a,b]$

- Если $f(c_1)=y_0$ – ПОБЕДА
- Если $f(c_1)<y_0$, то $[c_1,b]\to[a_1,b_1]$
- Если $f(c_1)>y_0$, то $[a,c_1]\to[a_1,b_1]$

Пусть c_2 – середина $[a_1,b_1]$, строим $[a_2,b_2]$

Продолжая аналогично строим систему вложенных стяг. отрезков

По теор. Кантора $\exists! C\in\mathbb{R}\in[a_n,b_n]$. Покажем, что $C=x_0$

$$\left.\begin{array}{l} a_k\xrightarrow[n\to+\infty]{}C \\ b_k\xrightarrow[n\to+\infty]{}C \end{array}\right| \begin{array}{l} a_k,b_k\in[a,b]\ \forall k \\ f \text{ непр. на } [a,b] \end{array} \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} f(a_k)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(C) \\ f(b_k)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(C) \end{array}$$

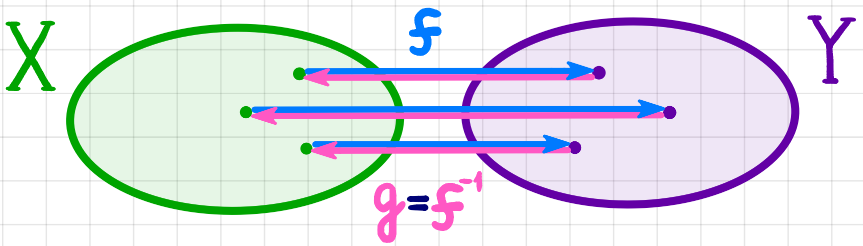
По построению

$$\begin{array}{ccccc} f(a_k) & < & y_0 & < & f(b_k) \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ f(C) & & f(C) & & f(C) \end{array}$$

Ч.Т.Д.

Есть обобщение: пусть f непр. на (a,b), $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$,
$\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)=M\in\overline{\mathbb{R}}$, $\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)=m\in\overline{\mathbb{R}}$
Тогда $\forall y_0\in(m,M)$ $\exists x_0\in(a,b)$: $f(x_0)=y_0$

Обратная функция



$f: X \to Y$ $\quad f(X)=Y \quad$ f – биекция

$f^{-1}: Y \to X$ $\quad f^{-1}(Y)=X \quad$ f^{-1} – биекция

$f: X \to f(X)$

$g: f(X) \to X$

$$g=f^{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} f(g(y))=y & \forall y \in f(X) \\ g(f(x))=x & \forall x \in X \end{cases}$$

Пример: $X=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $\quad f(X)=[-1,1]$

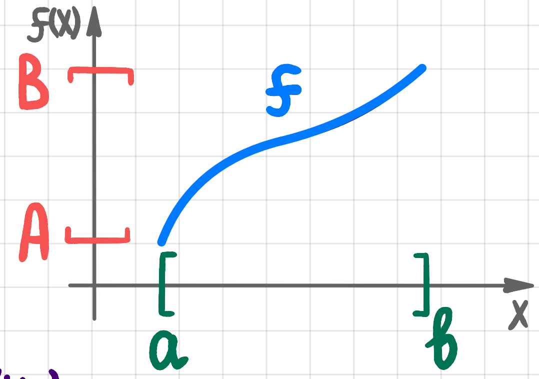
$f=\sin x \quad g=\arcsin x$

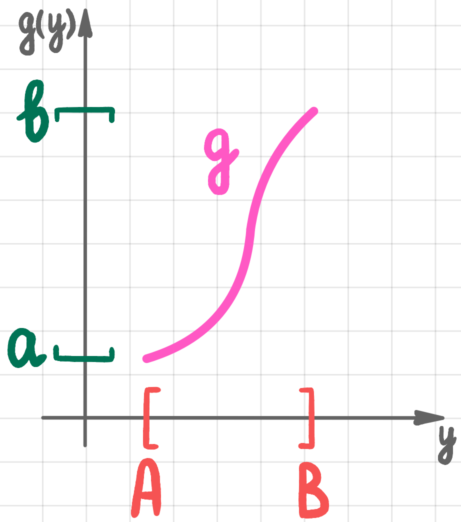
Теорема: пусть f непр. и строго возр. на $[a,b]$. Тогда существует $f^{-1}=g$ обратная функция тоже непр. и строго возр. на отрезке $[f(a),f(b)]$

Покажем $\exists f^{-1}$ Покажем, что f – биекция

сюръекция ✔ (Больцано-Коши)

инъекция ✔, т.к. если $x_1 \neq x_2$ $(x_1<x_2)$, то $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$



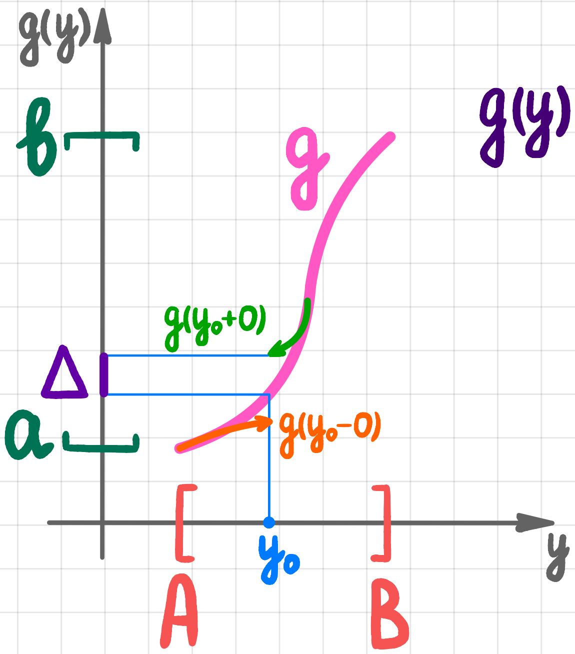


Покажем, что g строго возр.

Пусть нет и $\exists y_1,y_2: y_1<y_2$, но $g(y_1)\geq g(y_2)$

$f(x_1)<f(x_2)$, но $x_1 \geq x_2$ противоречие, т.к. f строго возр. на $[a,b]$

Покажем, что g непр. на $[m,M]$



$$g(y) \text{ непр. на } [m,M] \Leftrightarrow \begin{cases} g(y) \text{ непр. справа в } y=m \\ g(y) \text{ непр. в } \forall y_0 \in (m,M) \\ g(y) \text{ непр. слева в } y=M \end{cases}$$

← покажем это (остальное аналогично)

$$g(y) \text{ непр. в } \forall y_0 \in (m,M) \Leftrightarrow \underbrace{g(y_0-0)}_{=\lim\limits_{y\to y_0-0} g(y)} = g(y_0) = \underbrace{g(y_0+0)}_{=\lim\limits_{y\to y_0+0} g(y)}$$

$g(y_0-0), g(y_0+0)$ существуют по теореме о $\lim$ монот. функций

Мы уже знаем, что $g(y_0-0) \leq g(y_0) \leq g(y_0+0)$, т.к. g строго возр.

Покажем, что строгие знаки недостижимы

Пусть $g(y_0) < g(y_0+0)$ ($g(y_0-0) < g(y_0)$ опровергается аналогично)

$$\begin{cases} \forall y \in [m, y_0] \hookrightarrow g(y) \leq g(y_0) \\ \forall y \in (y_0, M] \hookrightarrow g(y) \geq g(y_0+0) \end{cases}$$

, итак $\Delta = (g(y_0), g(y_0+0)) \not\subset g([A,B])$, но по определению $g = f^{-1}$: $g([A,B]) = (a,b)$ противоречие

Ч.Т.Д.

Есть обобщение: пусть f непр. и строго возр. на $[a,b]$. Тогда существует $f^{-1} = g$ обратная функция тоже непр. и строго возр. на (m,M), где $m = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $M = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$

ФУНКЦИИ

ограниченность
чётность
периодичность
монотонность

$f: X \to \mathbb{R}$

инъекция
+
сюръекция
=
биекция

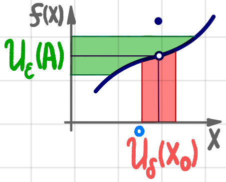
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

Гейне

Коши

$\forall \{x_n\}: \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0\\ x_n \ne x_0, \forall n\end{cases}$

$\hookrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$



ZHESTKOV UNIVERSITY

f непр.

в x_0

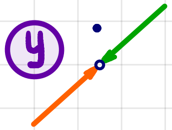
да

непр. $\pm, \times, \div$

непр. $g(f(x))$

нет

У

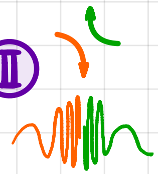


$f(x_0-0)=f(x_0+0)$
$\in\mathbb{R}$ $\in\mathbb{R}$

I

$f(x_0-0)\ne f(x_0+0)$
$\in\mathbb{R}$ $\in\mathbb{R}$

II



$f(x_0-0)/f(x_0+0)$
$= +\infty\backslash-\infty$ $= +\infty\backslash-\infty$

$f(x_0-0)/f(x_0+0)$
$= \varnothing$ $= \varnothing$

на $[a,b]$

Вейерштрасс I [ ]
Вейерштрасс II
Больцано-Коши [ ]

f ↓ непр. на [ ]

Теорема о $\exists f(x_0\pm0)$

lim $\pm, \times, \div$
lim 👮👮, $\geq$

Критерий Коши

$f(x_0+0)$
$f(x_0-0)$

Теорема о f^{-1}