Теория по Аналитической Геометрии 1 задание

Антон Хмельницкий

September 2023

1 Введение в векторы

- Определение вектора:

  Отрезок, концы которого упорядочены, называется направленным отрезком или вектором. Первый из его концов называется началом, второй — концом вектора.

- Определение равенства векторов:

  Два вектора называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены, и имеют равные длины.

- Линейные операции над векторами

  Сложение векторов По правилу треугольника, по правилу параллелограмма $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$

  Умножение вектора на число $\lambda \cdot \overline{a} = \overline{b}$

  1. $|\overline{b}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$
  2. Если $\lambda > 0$, то $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены. Если $\lambda < 0$ то разнонаправленны.

  Разность векторов $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{a})$

- Свойства линейных операций

  1. Коммутативность векторов: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$

  2. Ассоциативность векторов: $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$

  3. $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$

  4. $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$

  5. Ассоциативность вектора и числа: $\alpha \cdot (\beta\overline{a}) = (\alpha \cdot \beta)\overline{a}$

  6. Дистрибутивность вектора и суммы чисел: $(\alpha \cdot \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$

  7. Дистрибутивность числа и суммы векторов: $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$

  8. $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$

- Определение коллинеарности и компланарности

  Векторы называются коллинеарными, если существует такая прямая, которой они параллельны.

  Векторы компланарны, если существует плоскость, которой все они параллельны.

- Линейная комбинация векторов

  Комбинация векторов $\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}$ с коэффициентами $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - это вектор $\lambda_1 \cdot \overline{a_1} + ... + \lambda_n \cdot \overline{a_n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_n \cdot \overline{a_n}$

  □ Тривиальная комбинация - комбинация векторов, где все коэффициенты нулевые и комбинация равна нулевому вектору

- Линейно независимая система

  Система векторов $a_1, ..., a_k$ называется линейно независимой, если нулевой вектор раскладывается по ней единственным образом(т.е. если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору)

  □ Любая часть линейно независимой системы линейно независима.

- Линейно зависимая система

  Система векторов $a_1, ..., a_k$ линейно зависима, если нулевой вектор раскладывается по ней не единственным образом, то есть если найдутся такие коэффициенты $\alpha_1, ..., \alpha_k$, что $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k = 0$, но не все они равны нулю $\alpha_1^2 + ... + \alpha_k^2 \neq 0$

1. Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда это — нулевой вектор.
2. Система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны.
3. Система из трех векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы компланарны.
4. Любые четыре вектора линейно зависимы.

□ Другое определение компланарности(некомпланарности) - линейная зависимость(независимость) трех векторов.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

□ Если среди векторов есть пара коллинеарных или нулевой вектор то они компланарны.

□ N некомпланарных(линейно независимых) векторов образуют базис.

- Определение базиса

  Непустое множество векторов, замкнутое относительно линейных операций, называется векторным пространством.

  Базисом в векторном пространстве называется упорядоченная линейно независимая система векторов такая, что любой вектор этого пространства по ней раскладывается.

  1. В нулевом пространстве базиса не существует.
  2. В одномерном пространстве (на прямой линии) базис состоит из одного ненулевого вектора.
  3. В двумерном пространстве (на плоскости) базис — упорядоченная пара неколлинеарных векторов.
  4. В трехмерном пространстве базис — упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

- Определение координат

  Коэффициенты разложения по базису для каждого вектора пространства определены однозначно. Они называются компонентами или координатами вектора в этом базисе.

- Действия с векторами в координатах

  Правило сложения векторов: Если $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3), \overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

  Правило умножения вектора на число: $\lambda\overline{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$

2 Переход от одного базиса к другому

- Определение ортонормированного базиса(ОНБ) и декартовой прямоугольной системы координат(ДПСК)

  Базис называется ортонормированным, если его векторы попарно ортогональны(перпендикулярны, скалярное произведение равно 0) и по длине равны единице. Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется декартовой прямоугольной системой координат.

- Матрица перехода и ее основное свойство

  Пусть $\overline{e'_1}, \overline{e'_2}, \overline{e'_3}$ новый базис, а $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ старый и $\begin{cases} \overline{e'_1} = a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + a_{31}\overline{e_3} \\ \overline{e'_2} = a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + a_{32}\overline{e_3} \\ \overline{e'_3} = a_{13}\overline{e_1} + a_{23}\overline{e_2} + a_{33}\overline{e_3} \end{cases}$

  Тогда матрицей перехода от старого базиса $\overline{e}$ к новому $\overline{e'}$ будет называться

$$S_{e \to e'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  □ Основное ее свойство: $S^{-1}_{e \to e'} = S_{e' \to e}$

  Тогда получаем разложение нового базиса в старом:

$$\begin{pmatrix} \overline{e'_1} \\ \overline{e'_2} \\ \overline{e'_3} \end{pmatrix} = S^T_{e \to e'} \cdot \begin{pmatrix} \overline{e_1} \\ \overline{e_2} \\ \overline{e_3} \end{pmatrix}$$

- Изменение координат вектора при замене базиса

  Если координаты вектора $\overline{a}$ в старом базисе были (x, y, z), а в новой (x', y', z'), то:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S_{e\to e'} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

- Изменение координат точки при замене базиса

  Пусть $O', \overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$ новая система координат, а $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ старая. Зная матрицу перехода $S_{e\to e'}$ и что координаты $O'(a_1, a_2, a_3)$ в старой системе координат.

  Если координаты точки а в старом базисе были (x, y, z), а в новой (x', y', z'), то:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S_{e\to e'} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

3 Скалярное произведение векторов

- Определение скалярного произведения

  Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хоть один из векторов — нулевой, то угол неопределен, и скалярное произведение по определению равно нулю. (Под углом между векторами мы понимаем угол между векторами, равными данным и имеющими общее начало. $\varphi \in (0, \pi)$)

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot cos(\varphi)$$

- Свойства скалярного произведения

  1. **Коммутативность:** $\forall \overline{a}, \overline{b} : (\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$
  2. **Линейность:** $(\overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b}) = (\overline{a_1}, \overline{b}) + (\overline{a_2}, \overline{b})$
  3. **Умножение произведения на число:** $\alpha(\overline{a}, \overline{b}) = (\alpha\overline{a}, \overline{b})$
  4. $\forall \overline{a} : (\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2$
  5. **В ОНБ:** $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, $(\overline{e_i}, \overline{e_j}) = \left[\begin{array}{l} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{array}\right.$

- Скалярное произведение в координатах в ОНБ

  Если базис ортонормированный, то скалярное произведение векторов a и b выражается через их компоненты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ по формуле:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

  В ОНБ длина вектора:

$$|\overline{a}| = \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

- Ортогональные проекции

  Пусть задан вектор $\overline{AB}$ и некоторая прямая l. Опустим из точек A и B перпендикуляры на прямую и обозначим их основания A' и B'. Вектор $\overline{A'B'}$ называется (ортогональной) векторной проекцией вектора $\overline{AB}$ на прямую l.

  Ортогональной состовляющей называется вектор $\overline{AB} - \overline{A'B'}$

- Матрица Грамма

  Если в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ и $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $b = (\beta_1, \beta_2)$, тогда

$$(\overline{a}, \overline{b}) = (\alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2}, \beta_1\overline{e_1} + \beta_1\overline{e_2}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\overline{e_1}, \overline{e_1}) & (\overline{e_1}, \overline{e_2}) \\ (\overline{e_2}, \overline{e_1}) & (\overline{e_2}, \overline{e_2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

  Матрица Грамма - это матрица из попарно перемноженных скалярно базисов: $\begin{pmatrix} (\overline{e_1}, \overline{e_1}) & (\overline{e_1}, \overline{e_2}) \\ (\overline{e_2}, \overline{e_1}) & (\overline{e_2}, \overline{e_2}) \end{pmatrix}$

  В ОНБ: $\begin{pmatrix} (\overline{e_1}, \overline{e_1}) & (\overline{e_1}, \overline{e_2}) \\ (\overline{e_2}, \overline{e_1}) & (\overline{e_2}, \overline{e_2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

  *В пространственном базисе будет то же самое, но определитель будет 3го порядка

- Формулы расстояния между точками и угла между векторами

  Пусть точки А и В имеют координаты (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1). Тогда расстояние между ними равно:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{((x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$$

  Угол между векторами выражается через скалярное произведение:

$$cos(\varphi) = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}$$

4 Смешанное и векторное произвдение

- Ориентация

  Все базисы (ненулевые векторы) на прямой разделяются на два класса: векторы из одного класса направлены одинаково, а векторы из разных классов направлены противоположно. Говорится, что прямая ориентирована, или что на ней задана ориентация, если из двух классов базисов выбран один. Базисы выбранного класса называются положительно ориентированными или положительными.

  Плоскость ориентирована, если из двух классов базисов на ней выбран один класс.

  Базис в пространстве называется правым, если (считая векторы имеющими общее начало) с конца третьего вектора мы видим кратчайший поворот от первого вектора ко второму направленным против часовой стрелки. В противном случае базис называется левым.

  Пространство называется ориентированным, если из двух классов базисов (правых или левых) выбран один. Базисы выбранного класса называются положительно ориентированными.

  *Всегда выбирается правый базис.

- Определение векторного произведения

  Векторное произведение - вектор $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$, который определяется условиями:

  1. $\overline{c} \perp \overline{a}, \overline{c} \perp \overline{b}$
  2. $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot sin(\varphi)$
  3. Направление: из конца вектора $\overline{c}$ кратчайший поворот от $\overline{a}$ к $\overline{b}$ виден против часовой стрелки(правило буравчика, правая рука).

  Геометрический смысл - длина вектора равна площади параллелограмма построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$

- Свойства векторного произведения

  1. Антикоммутативность: $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$

  2. Линейность: $[\overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b}] = [\overline{a_1}, \overline{b}] + [\overline{a_2}, \overline{b}]$

  3. Умножение произведения на число: $\alpha[\overline{a}, \overline{b}] = [\alpha\overline{a}, \overline{b}]$

- Выражение векторного произведения через координаты В произвольном базисе выражение векторного произведения через координаты будет таким:

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} [\overline{e_2}, \overline{e_3}] & [\overline{e_1}, \overline{e_3}] & [\overline{e_1}, \overline{e_2}] \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

  В ОНБ выражение векторного произведения через координаты будет таким:

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

- Двойное векторное произведения

  $[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]]$ называется двойным векторным произведением.

$$[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] = (\overline{a}, \overline{c})\overline{b} - (\overline{a}, \overline{b})\overline{c}$$

  Доказательство:

  С этой целью выберем правый ортонормированный базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ так, чтобы $\overline{e_1}$ был коллинеарен $\overline{b}$, а $\overline{e_2}$ был компланарен $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Тогда $\overline{b} = \beta\overline{e_1}$, $\overline{c} = \gamma_1\overline{e_1} + \gamma_2\overline{e_2}$ и $\overline{a} = \alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} + \alpha_3\overline{e_3}$. Отсюда получаем $[\overline{b}, \overline{c}] = \beta\gamma_2\overline{e_3}$ и $[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] = \gamma_1\beta\gamma_2\overline{e_2} + \alpha_2\beta\gamma_2\overline{e_1}$.

  С другой стороны, $(\overline{a}, \overline{c})\overline{b} = (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)\beta\overline{e_1}$ и $(\overline{a}, \overline{b})\overline{c} = \alpha_1\beta(\gamma_1\overline{e_1} + \gamma_2\overline{e_2})$. Разность будет равна тому что было. Ч.Т.Д.

- Условие компаланарности и коллинеарности

  Равенство нулю детерминанта матрицы из компонент трех векторов необходимо и достаточно для компланарности векторов.

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

  Условие необходимое для коллинеарности двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в пространстве:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

  Для плоскости: обращение в нуль детерминанта матрицы из компонент двух векторов на плоскости необходимо и достаточно для коллинеарности этих векторов.

- Смешанное произведение

  $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}])$

  Смешанным произведением векторов a, b и c (в данном порядке) называется число, равное объему ориентированного параллелепипеда, построенного на этих векторах, если они не компланарны, и равное нулю, если компланарны.

- Свойства смешанного произведения

  1. Антикоммутативность: $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}) = (\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}) = (\overline{c}, \overline{b}, \overline{a}) = (\overline{a}, \overline{c}, \overline{b})$

- Выражение смешанного произведения через координаты

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \end{pmatrix}$$

- Биортогональный базис

  Пусть задан базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$. Рассмотрим векторы $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$, которые для любых номеров i и j удовлетворяют равенствам.

$$(\overline{e_i}, \overline{e_j'}) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \quad (*)$$

  Базис, удовлетворяющий условиям (*) называется биортогональным. Если базис ортонормированный, то он совпадает со своим биортогональным.

  Для любого вектора есть разложение по базисам:

$$\overline{x} = (\overline{x}, \overline{e_1})\overline{e_1'} + (\overline{x}, \overline{e_2})\overline{e_2'} + (\overline{x}, \overline{e_3})\overline{e_3'} = (\overline{x}, \overline{e_1'})\overline{e_1} + (\overline{x}, \overline{e_2'})\overline{e_2} + (\overline{x}, \overline{e_3'})\overline{e_3}$$

  Координаты $\lambda_1 = (\overline{x}, \overline{e_1}), \lambda_2 = (\overline{x}, \overline{e_2}), \lambda_3 = (\overline{x}, \overline{e_3})$ называются ковариантными

  Скалярное произведение векторов равно сумме произведений координат одного из них на ковариантные координаты другого.

$$(\overline{a}, \overline{b}) = (\alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} + \alpha_3\overline{e_3}, \overline{b}) = \alpha_1(\overline{e_1}, \overline{b}) + \alpha_2(\overline{e_2}, \overline{b}) + \alpha_3(\overline{e_3}, \overline{b}) = \alpha_1\beta_1' + \alpha_2\beta_2' + \alpha_3\beta_3'$$