

**Экзаменационная программа
по линейной алгебре,
весенний семестр 2023–2024 учебного года
для всех школ, кроме ЛФИ**

1. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Теорема о базисном миноре.
2. Системы линейных уравнений. Общее решение системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Теорема Кронекера–Капелли. Теорема Фредгольма.
3. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Размерность и базис.
4. Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Матрица перехода. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве. Теорема об изоморфизме.
5. Подпространства в линейном пространстве. Способы задания подпространств. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы двух подпространств. Прямая сумма.
6. Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и множество значений. Ранг линейного отображения. Условия инъективности, сюръективности и биективности. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование.
7. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базисов. Операции над линейными преобразованиями в координатной (матричной) форме.
(Для потоков О.Г. Подлипской, О.К. Подлипского и Д.А. Терёшина: простейший вид матрицы линейного отображения.)
8. Собственные векторы и собственные значения. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Ограничение преобразования на инвариантное подпространство. Собственные подпространства.
9. Характеристическое уравнение. Инвариантность характеристического многочлена.
(Для потоков О.К. Подлипского и И.А. Чубарова: выражение определителя и следа матрицы через корни характеристического многочлена.)
Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования.
10. Теорема Гамильтона–Кэли (для потока Д.А. Степанова: доказательство для случая, когда характеристический многочлен раскладывается на линейные множители).
(Для потоков О.Г. Подлипской, О.К. Подлипского и И.А. Чубарова: существование двумерного инвариантного подпространства, отвечающего комплексному корню характеристического многочлена линейного преобразования вещественного линейного пространства.)

11. Линейные функции. Сопряженное пространство (без доказательств).

(Для потоков Д.А. Терёшина и И.А. Чубарова: биортогональный базис. Пространство, сопряженное сопряженному пространству (второе сопряженное).)

12. Билинейные и квадратичные функции (формы). Их координатное представление. Изменение матриц билинейных и квадратичных форм при изменении базиса.

13. Диагональный и канонический вид квадратичных форм.

(Кроме потоков Д.А. Степанова и И.А. Чубарова: приведение квадратичных форм к каноническому виду с помощью элементарных преобразований.)

Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Лагранжа. Закон инерции квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

14. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства. Ортогональные базисы. Процесс ортогонализации. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональные матрицы.

15. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональное проектирование на подпространство.

16. Линейные преобразования евклидова пространства. Преобразование, сопряженное данному. Матрица сопряженного преобразования. Свойства сопряженного преобразования.

17. Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования.

18. (Для потоков О.Г. Подлипской, Д.А. Степанова и Д.А. Терёшина: отображения, сохраняющие скалярное произведение. Изоморфизм евклидовых пространств.) Ортогональные преобразования, их матрицы.

(Для потоков О.Г. Подлипской, О.К. Подлипского и И.А. Чубарова: свойства ортогональных преобразований. Свойства корней характеристического многочлена и собственных векторов ортогональных преобразований.)

(Для потока Д.А. Терёшина: преобразование, сопряженное ортогональному.)

19. (Кроме потока О.Г. Подлипской: полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства и матриц.)

(Для потоков О.К. Подлипского, Д.А. Терёшина и И.А. Чубарова: Сингулярное разложение.)

20. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых положительно определена.