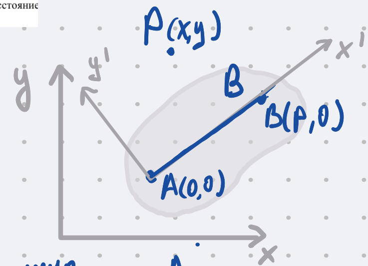
№ 3.2

3.2. Плоская фигура движется в своей плоскости. В некоторый момент отношение величин скоростей двух её точек $A(x,y)$ и $B(x,y)$ равно $\lambda \neq 1$. Найти геометрическое место возможных положений мгновенного центра скоростей, если расстояние между точками равно a.

Дано: $\dfrac{v_B}{v_A} = \lambda \neq 1$, $AB = a$,

$P(x,y)$ – ?



перейдем в СО x' связанную с т. А

М.Ц.С.: $v_A \cdot AP = v_B \cdot BP$; $v_B = \lambda v_A \Rightarrow AP = \lambda BP$

$$AP^2 = x^2 + y^2 \qquad BP^2 = (a-x)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 a^2 - 2\lambda^2 ax + \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2$$

$$(1-\lambda^2)x^2 + 2\lambda^2 ax + (1-\lambda^2)y^2 = \lambda^2 a^2$$

$$x^2 + 2\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}ax + y^2 = \frac{\lambda^2 a^2}{1-\lambda^2}; \quad \frac{\lambda^2 a^2}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda^4 a^2}{(1-\lambda^2)^2} = \frac{\lambda^2 a^2 - \lambda^4 a^2 + \lambda^4 a^2}{(1-\lambda^2)^2} = \left(\frac{\lambda a}{1-\lambda^2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{\lambda^2 a}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\lambda a}{1-\lambda^2}\right)^2$$

Ответ: **3.2.** Окружность $\left(x + \dfrac{a\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2$ в системе координат, связанной с фигурой так, что $A(0,0)$, $B(a,0)$.

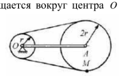
№ 3.20

Дано: $l, r, \omega, \varepsilon$

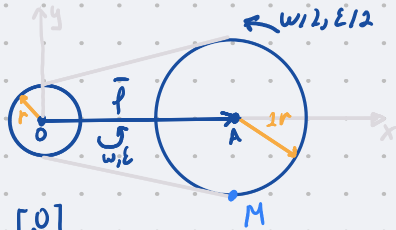
$AM \perp OA$

v_M, W_M – ?

3.20. Кривошип OA длины l вращается вокруг центра O неподвижной шестерёнки радиуса r и несет на конце A ось другой шестерёнки радиуса $R = 2r$. Угловая скорость и угловое ускорение кривошипа в рассматриваемый момент – ω и ε. Шестерёнки соединены между собой охватывающей их цепью. Найти величины скорости и ускорения точки M подвижной шестерёнки в момент, когда $AM \perp OA$.



К задаче 3.20



1) $\overline{V}_M = \overline{V}_A + \overline{\omega}_M \times \overline{\rho}$; $\overline{V}_A = \overline{\omega} \times \overline{l} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l\omega \\ 0 \end{bmatrix}$

$\omega r = \omega_M \cdot 2r \Rightarrow \omega_M = \dfrac{\omega}{2} \Rightarrow \overline{\omega}_A \times \overline{\rho} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\overline{V}_M = \begin{bmatrix} r\omega \\ l\omega \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_M = \omega\sqrt{l^2 + r^2}$

2) $\overline{W}_M = \overline{W}_A + \overline{\varepsilon}_M \times \overline{\rho} - \omega^2 \overline{\rho}$

$\overline{W}_A = \overline{\varepsilon} \times \overline{l} - \omega^2 \overline{l} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \omega^2 \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \omega^2 l \\ l\varepsilon + 0 \\ 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 l \\ l\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar W_M = \begin{bmatrix}-\omega^2 l\\ l\varepsilon\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \varepsilon/2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ -2r\\ 0\end{bmatrix} - \frac{\omega^2}{4}\begin{bmatrix}0\\ -2r\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\omega^2 l+\varepsilon r+0\\ l\varepsilon+0+\omega^2 r/2\\ 0+0+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\omega^2 l+\varepsilon r\\ l\varepsilon+\omega^2 r/2\\ 0\end{bmatrix}$$

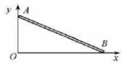
$$\boxed{W_M = \sqrt{(\omega^2 l-\varepsilon r)^2 + \left(l\varepsilon + \frac{\omega^2 r}{2}\right)^2}}$$

3.20. $v_M = \omega\sqrt{l^2+r^2}$, $w_M = \sqrt{\left(\varepsilon l + \frac{\omega^2 r}{2}\right)^2 + \left(\omega^2 l - \varepsilon r\right)^2}$.

№ 3.21

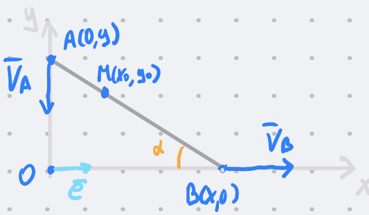
Дано: $V_A = const$

д-ть, что $W_M \perp O_y$,
$W_M \sim x^{-3}$



К задаче 3.21

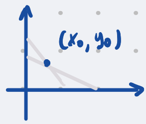
3.21. Концы A и B стержня движутся по двум взаимно перпендикулярным прямым Ox и Oy. Скорость точки A постоянна. Показать, что ускорение любой точки стержня перпендикулярно Oy и изменяется обратно пропорционально кубу расстояний этой точки от оси Oy.



□ 1) A - МЦУ, т.к. $\bar P_Q = \dfrac{\bar\varepsilon\times\overset{=\bar 0}{\bar W_A} + \omega^2\overset{=\bar 0}{\bar W_A}}{\varepsilon^2+\omega^4} = \bar 0$

$\bar{AM} \parallel \bar{AB} \Rightarrow \bar W_M \parallel \bar W_B \Rightarrow \bar W_M \perp O_y$

2) Считаем AM и AB известными, т.к. через одну точку могут проходить стержни разной длины



$\bar e = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ $\quad \bar W_M\cdot\bar e = \bar W_A\cdot\bar e + \bar\varepsilon\times\bar{AM}\cdot\bar e - \omega^2\,\bar{AM}\cdot\bar e$

$$W_M = 0 + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \varepsilon\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}AM\cdot\cos\alpha\\ -AM\cdot\sin\alpha\\ 0\end{bmatrix}\cdot\bar e - \omega^2 AM\cdot\cos\alpha = \varepsilon\cdot AM\cdot\sin\alpha - \omega^2 AM\cos\alpha$$

т.к. A - МЦУ: $tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \Rightarrow W_M = \omega^2 AM\cdot tg\alpha\sin\alpha - \omega^2 AM\cos\alpha =$

$= \omega^2 AM\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = \omega^2 AM\cdot\frac{1-2\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \omega^2 AM\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 2\cos\alpha\right)$

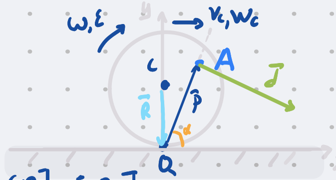
$$\left.\begin{aligned}&\bar V_B\cdot\bar e = \bar V_A\cdot\bar e + \bar\omega\times\bar{AB}\cdot\bar e \Rightarrow V_B = \omega y\\ &V_A\sin\alpha = V_B\cos\alpha \Rightarrow tg\alpha = \frac{V_A}{V_B} = \frac{y}{x} \Rightarrow V_B = \frac{y}{x}V_A\end{aligned}\right) \Rightarrow \omega = \frac{V_B}{y} = \frac{V_A}{x} = \frac{AM}{AB}\cdot\frac{V_A}{x_0}$$

$\cos\alpha = \frac{x_0}{AM} = \frac{x}{AB} \Rightarrow x = \frac{AB}{AM}x_0 \Rightarrow W_M = \left(\frac{AM}{AB}\cdot\frac{V_A}{x_0}\right)^2\cdot AM\left(\frac{AM}{x_0} - 2\frac{AM}{x_0}\right)$

$$\boxed{W_M = \frac{AM^4}{AB^2}\cdot V_A^2\left(\frac{1}{x_0^3} - \frac{2}{x_0}\right) \sim \frac{1}{x_0^3}}$$

■

3.25. Диск радиуса R катится по прямой без скольжения. Скорость и ускорение центра C диска в данный момент равны $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{w}_C$. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки $A(x, y)$ диска $(x \neq 0, \quad y \neq 0)$.



№3.25

Дано: V_c, W_c, R

W_n, W_τ -?

Без проскальзывания: $\omega = \frac{V_c}{R}$, $\varepsilon = \frac{W_c}{R}$

$$\overline{W}_Q = \overline{W}_c + \overline{\varepsilon}\times\overline{R} - \omega^2\overline{R} = \begin{bmatrix}W_c\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\-\varepsilon\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\-R\\0\end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix}0\\-R\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}W_c-\varepsilon R\\ \omega^2 R\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \omega^2 R\\0\end{bmatrix}$$

$$\overline{W}_c = \overline{W}_a + \overline{\varepsilon}\times\overline{p} - \omega^2\cdot\overline{p} = \begin{bmatrix}0\\ \omega^2 R\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\-\varepsilon\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix} - \omega^2\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\varepsilon-\omega^2x\\ \omega^2R-x\varepsilon-\omega^2y\\0\end{bmatrix}$$

$$\overline{p} = \begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}$$

$$W_p = \frac{1}{p}\overline{W}_c\cdot\overline{p} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[(y\varepsilon-\omega^2x)x - (x\varepsilon+\omega^2y-\omega^2R)y\right] = \frac{-\omega^2}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-yR) \Rightarrow$$

$$W_n = \frac{V_c^2(x^2+y^2-yR)}{R^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\overline{d} = \begin{bmatrix}y\\-x\\0\end{bmatrix} \perp \overline{p}$$

$$W_d = \frac{1}{d}\overline{W}_c\cdot\overline{d} = \frac{1}{d}\left[(y\varepsilon-\omega^2x)y + (x\varepsilon+\omega^2y-\omega^2R)x\right] = \frac{\varepsilon(x^2+y^2)-\omega^2Rx}{d} \Rightarrow$$

$$W_\tau = \frac{W_c(x^2+y^2)-V_c^2x}{R\sqrt{x^2+y^2}}$$

3.25. $w_{A\tau} = \dfrac{w_C(x^2+y^2)-v_C^2x}{R\sqrt{x^2+y^2}}$, $w_{An} = \dfrac{v_C^2(x^2+y^2-yR)}{R^2\sqrt{x^2+y^2}}$.

3.36. Точка движется в плоскости. Известны её скорость $\mathbf{v}(t)$ и радиус $\rho(t)$ кривизны её траектории. Найти угловую скорость и угловое ускорение сопровождающего точку трехгранника $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$.

К задаче 3.35

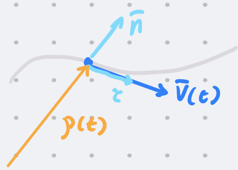
№3.36

Дано: $\overline{V}(t), \rho(t)$

$\overline{\varepsilon}, \overline{\omega}$ -?

$$\omega = \frac{V}{\rho} \Rightarrow \overline{\omega} = \overline{b}\cdot\frac{|\overline{V}|}{\rho} = \overline{b}\cdot\frac{\overline{V}\cdot\overline{\tau}}{\rho}$$

$$\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = \overline{b}\left(\frac{\dot{\overline{V}}\cdot\overline{\tau}}{\rho} - \frac{\overline{V}\cdot\overline{\tau}\,\dot{\rho}}{\rho^2}\right)$$



3.36. $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{b}\dfrac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}}{\rho}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}\left(\dfrac{\dot{\mathbf{v}}\cdot\boldsymbol{\tau}}{\rho} - \dfrac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\dot{\rho}}{\rho^2}\right)$.