Стенограмма семинара по подтовке к письменному экзамену

Читал: А. Скубачевский; записал: Дима.

21 декабря 2021 г.

Задачи 1-4

1. n-ая производная;
2. ф-ла Тейлора
3. $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$;
4. $\lim g(x)^{f(x)}$

См. задачи 1-4 на разборе семестровой. Его можно найти тут:
https://drive.google.com/drive/folders/1bzQbCqjo6Zk21cJxBWjHtxHtQUvaku23

В задачах 3-4 правило Лопиталя не нужно. Эти задачи тоже на формулы Тейлора.

ВАЖНО: $\ln(f(x))$ нельзя разложить по Тейлору вот так: $\ln(1+(f(x)-1)) = ...$, потому что для использования формулы Тейлора, необходимо, чтобы аргумент раскладываемой функции **стремился к нулю.**

Задача 5. Построить график вида $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$

Задания на кривые здесь точно не будет. Задача: Построить график функции ниже:

$$f(x) = \frac{x^2(x-4)}{2(x+2)^2}$$

1) Найдём точки пересечения с осями и область определения:

$$f = 0 \text{ при } x = 0, x = 4 \text{ – с осью OX.}$$

$$f(0) = 0 \text{ – с осью OY}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

2) Найдём асимптоты:
а) Вертикальные:

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2(x-4)}{2(x+2)^2} = -\infty = \lim_{x\to 2+0}$$

$\Rightarrow x = -2$ – вертикальная асимптота.

б) Наклонная асимптота при $x \to +\infty$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,5$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 0,5x) = -4$$

$$\Rightarrow y = 0,5x - 4 \text{ – это накл. ас., } x \to +\infty$$

Замечание: Если $k = \infty$ или $b = \infty$, то наклонной асимптоты нету.

в) Наклонная асимптота при $x \to -\infty$.
Аналогично пункту б: $y = \frac{x}{2} - 4$ – накл. ас. при $x \to -\infty$.

3) Анализируем первую производную:

$$f' = \frac{1}{2}\frac{x(x^2 + 6x - 16)}{(x+2)^3} = \frac{1}{2}\frac{x(x+8)(x-2)}{(x+2)^3}$$

Методом интервалов (как в школе) определяем промежутки убывания, возрастания и точки минимумов и максимумов:

$$x_{max} = -8; f(-8) = -\frac{32}{3}$$

$$x_{max} = 0; f(0) = 0$$

$$x_{max} = 2; f(2) = -\frac{1}{4}$$

(техать метод интервалов мне лень, с этим сами разберётесь)
ВАЖНО: Если касательная параллельна оси OX (производная в точке равна 0, но это не точка минимума или максимума), то такую точку тоже нужно отметить (бывает в критериях).

ВАЖНО: Так как бывает критерий «Отметить точки на графике», нужно писать точные значения. Приблизительные значения могут служить только для оценки.

4) Анализируем вторую производную:

$$f'' = \frac{4(7x - 4)}{(x+2)^4}$$

Также методом интервалов анализируем выпуклость и точки перегиба:

$$x_\text{п} = \frac{4}{7}; f(\frac{4}{7}) = -\frac{16}{189} > -4$$

Для приличия следует найти коэф. наклона в точке перегиба, т. е. найти значение производной в этой точке $k_\text{п} = f'(\frac{4}{3}) = ...$

$$x \to +\inf, f\text{– вып. вниз} \Rightarrow \text{ график выше асимптотыж;}$$

$$x \to -\inf, f\text{– вып. вверх} \Rightarrow \text{ график ниже асимптоты.}$$

5) Строим график:

- Строим асимптоты. Для приличия стоит их подписывать.

- Исходя из пункта (4) начинаем строить части, которые близки к асимптотам.

- Затем ставим характерные точки. Не забываем по точки, в которых касательная параллельно оси, но точкой минимума или максимума не является.

  Чтобы не нагружать график, можно дать название точке и записать в легенде.

  ВАЖНО: на масштаб можно забить, главное уместить все особые точки, начало координат и асимптоты.

- Достраиваем график.

  ВАЖНО: Когда вы ищете первую производную – не надо раскрывать скобки, нужно грамотно выносить скобки за скобки.

  Многие авторитетные преподаватели рекомендуют строить эскиз, однако смысла в этом особого нет. За наличие эскиза могут повысить балл при не полном решении, но не более.

На чём можно потерять баллы:

1. не отметить на осях точки
2. не найти как график уходит на верт. асимптоту (вверх или вниз)
3. не написать про касательную параллельную оси OX
4. не написать в явном виде график выше или ниже асиптоты
5. нет начала координат или не обозначены оси
6. не посчитан угловой коэф. точки перегиба.

Задача 6. Построить график вида $\sqrt[n]{P(x)}$

Вероятность, что она будет около 0,75. Задача: построить график функции:

$$f(x) = \sqrt[3]{|x-2|(x+3)^2}$$

1) Пересечения с осями и ОДЗ:

$$f(x) = 0 \text{ при } x = 2, x = -3 \text{ – пересеч с OX}$$

$$f(0) = \sqrt[3]{18} \text{ – пересеч. с OY}$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

2) Ищем асимптоты:

а) Вертикальные: f – непрерывна на $\mathbb{R} \Rightarrow$ верт ас. нет.

б) Наклонная асимптота при $x \to +\infty$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{|x-2|(x+3)^2}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{|x-2|(x+3)^2} - x) = ...$$

$$\text{Используем: } a^3 + b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2);$$

$$... = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-2)(x^2+6x+9)-x^3}{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+3)^3} + \sqrt[3]{(x-2)(x+3)^2}x + x^2}$$

Вынося в знаменате x^2 за скобку, получаем:

$$b = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow y = x + \frac{4}{3} \text{ – наклонная асимптота при } x \to +\infty.$$

в) Наклонная асимптота при $x \to -\infty$:
Аналогично пункту б:

$$\Rightarrow y = -x - \frac{4}{3} \text{ – наклонная асимптота при } x \to -\infty.$$

3) Анализ производной.
Используя $|x| = x\mathrm{sign}x$:

$$f(x) = \mathrm{sign}(x-2)(x-2)^{\frac{1}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}$$

$$f(x)' = \frac{\mathrm{sign}(x-2)(3x-1)}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}}}$$

Методом интервалов находим промежутки возрастания и убывания и особые точки:

Так как в точках -3 и 2 производная стремтися к ∞, то касательная в них параллельная OY, это ВАЖНО отметить на графике (достаточно провести пуктиром отрезок касательной близ этой точки графика).

$$x_{min} = -3; f(-3) = 0$$
$$x_{min} = 2; f(2) = 0$$
$$x_{max} = \frac{1}{3}; f(\frac{1}{3}) = \frac{\sqrt[3]{500}}{3} > \sqrt[3]{18}$$

4) Находим вторую производную:

$$f''(x) = -\frac{50}{9}\frac{\mathrm{sign}(x-2)}{(x-2)^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)$ – выпукла вверх на $\mathbb{R}$, поэтому график лежит ниже асимптоты при $x \to \infty$.

5) Строим график (аналогично пред. задаче).

ВАЖНО: Так как мы строим не в масштабе, то если точки 1 и -1 не являются особыми, то не стоит их отмечать.

Проверить построение можно не только на https://www.wolframalpha.com/ , но и на https://www.geogebra.org/ или на https://www.desmos.com/

Задача 7. Найти кривизну или радиус кривизны

Маловероятно, что за 50 лет дадут нечто другое. Очень вряд ли.

Задача: найти радиус кривизны в точке $t = 0$

$$\begin{cases} x(t) = (t+2)\mathrm{ch}t - t\mathrm{sh}t \\ y(t) = t\mathrm{ch}t + (t-2)\mathrm{sh}t \end{cases}$$

Найдём k:

$$k = \frac{|[\vec{r''} \times \vec{r'}]|}{|\vec{r'}|^3}$$

Для этого посчитаем производные:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} (t+2)\mathrm{ch}t - t\mathrm{sh}t \\ t\mathrm{ch}t + (t-2)\mathrm{sh}t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r'} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}t + (t+1)\mathrm{sh}t - t\mathrm{ch}t \\ t\mathrm{sh}t + (t-1)\mathrm{ch}t + \mathrm{sh}t \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r'}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\vec{r'}(0)| = \sqrt{2}$$

$$\vec{r''}(0) = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}t + \mathrm{sh}t + (t+1)\mathrm{ch}t - t\mathrm{sh}t - \mathrm{ch}t \\ t\mathrm{ch}t + \mathrm{sh}t + \mathrm{ch}t + (t-1)\mathrm{sh}t + \mathrm{ch}t \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r''}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Числитель:

$$\vec{r'}(0) \times \vec{r''}(0) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \vec{k} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r'}(0) \times \vec{r''}(0)| = 2$$

Итого:

$$k(0) = \frac{|[\vec{r''}(0) \times \vec{r'}(0)]|}{|\vec{r'}(0)|^3} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \rho = \frac{1}{k} = \sqrt{2}$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

Также кривая может быть задана в неявном виде, например $x^4 + y^4 - 2xy = 0, \rho(1,1)$ (с. м. разбор именно этой задачи на доп. семинаре).

Задача:

$$x^3y + x\sin(y-x) - 1 = 0, A(1,1), \rho - ? \tag{1}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r'} = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r''} = \begin{pmatrix} 0 \\ y''(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдём $y'(1,1)$. Для этого возьмём производную от (1):

$$(1)': \quad 3x^3y + x^3y' + \sin(y-x) + x(y'-1)\cos(y-x) = 0 \qquad (2)$$

В точке (1,1):

$$3 + y' + (y'-1) = 0$$
$$y' = -1$$

Найдём $y''(1,1)$. Для этого возьмём производную от (2):

$$(2)': \quad 6xy + 3x^2y' + 3x^2y' + x^3y'' + \cos(y-x)(y'-1) +$$
$$+(y'-1)\cos(y-x) + xy''\cos(y-x) - x(y'-1)^2\sin(y-x) = 0$$

При $x = 1, y = 1, y' = -1$:

$$6 - 6 + y'' - 4 + y'' = 0$$
$$y'' = 2$$

Подставляем в формулы и получаем ответ:

$$\vec{r'} = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r'}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{r''} = \begin{pmatrix} 0 \\ y'' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r'} \times \vec{r''} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, |\vec{r'} \times \vec{r''}| = 2$$

$$k = \frac{|[\vec{r''} \times \vec{r'}]|}{|\vec{r'}|^3} = \frac{2}{\sqrt{2}^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \rho = \frac{1}{k} = \sqrt{2}$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

Задача 8. Равномерная непрерывность

1 тип

Задача первого типа, если функция имеет вид – синус или косинус с чем-нибудь. Почти всегда такая функция – **не равномерно непрерывна**. Задача:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\sin x \text{ – исследовать на р. н.}$$

Из того, что синус ограничен, а куб. корень нет, можно понять, что она не р. н. Чтобы это доказать, нужно подобрать две последовательности x_n' и x_n'', такие что:

$$|x_n' - x_n''| \to 0$$

$$|f(x_n') - f(x_n'')| \nrightarrow 0$$

Введем:

$$x_n' = 2\pi n^3;\ x_n'' = 2\pi n^3 + \frac{1}{n}$$

Очевидно, при $x \to \inf : |x_n' - x_n''| \to 0$.

При $n \to \infty$:

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = \left|\sqrt[3]{2\pi n^3 + \frac{1}{n}}\sin(2\pi n + \frac{1}{n})\right| \sim \left|\sqrt[3]{2\pi}n\frac{1}{n}\right| \to \sqrt[3]{2\pi} \neq 0$$

Теперь формализуем доказательство:

$$\forall\delta > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \to |x_n' - x_n''| < \delta$$

$$\exists\varepsilon = \frac{\sqrt[3]{2\pi}}{2} : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \to |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon$$

$$\exists\varepsilon = \frac{\sqrt[3]{2\pi}}{2}\ \forall\delta > 0\ \exists n_0 = \max\{n_1, n_2\}|x_{n_0}' - x_{n_0}''| < \delta, |f(x_{n_0}') - f(x_{n_0}'')| \geq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\exists\varepsilon = \frac{\sqrt[3]{2\pi}}{2}\ \forall\delta > 0\ \exists x_{n_0}', x_{n_0}'' \in \mathbb{R} : |x_{n_0}' - x_{n_0}''| < \delta, |f(x_{n_0}') - f(x_{n_0}'')| \geq \varepsilon$$

Задача решена, т. к. получено отрицание р. н. Рекомендуется посмотреть доп. семинар.

Ещё примеры и идеи решений:

$$\sqrt{x}\cos x^2 : x_n' = \sqrt{2\pi n}, x_n'' = \sqrt{2\pi n + \pi/2}$$

(Чтобы получить $x \to \inf : |x_n' - x_n''| \to 0$ нужно домножить на сопряженное)

$$f(x) = x\cos\sqrt{x} : x_n' = (2\pi n)^2, x_n'' = (2\pi n + \frac{1}{n^2})^2$$

Совет: задача не самая лёгкая, лучше сначала решить типовые.

Есть теорема: $f' \to \infty \Rightarrow$ не р. н. Пример $x^2\sin(\ln(x))$ нельзя решить так.

ВАЖНО: Если используется подобное утверждение, то его нужно писать полностью его формулировку (но доказывать не нужно).

2 тип

Если нет тригонометрии, вероятно это задача второго типа. Почти всегда такая функция – **равномерно непрерывна**. Задача:

$$\ln(1+4\sqrt{x}) \text{ – исследовать на р. непр на } E = [0, +\infty)$$

Скорее всего это задача второго типа, поэтому попробуем доказать по определению, что функция – р. н. Для этого нам понадобятся 3 универсальрные теоремы:

1) Теорема Кантора: Пусть f – непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ – р. н. на $[a, b]$;

2) Утв. 3.: Пусть f – дифф. на E и f' опр на $E \Rightarrow f$ – р. н. на E.

3) Утв*: Пусть $g(x)$ – непр. на $(a, +\infty)$, а также:

$$\begin{cases} \exists \lim_{x\to a+0} g(x) \in \mathbb{R} \\ \exists \lim_{x\to +\infty} g(x) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

тогда $g(x)$ – опр. на $(a, +\infty)$.

Задача решается в три действия:

I Покажем, что производная ограничена:

$$f' = \frac{2}{\sqrt{x} + 4x}$$

На E производная не огр., поэтому рассмотрим на $E_2 = [1, +\infty)$. На E_2 – непр. и $\exists \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, поэтому f' – огр. на E_2 по Утв.*, тогда по Утв. 3: f – р. н. на E_2.

II $E_1 = [0, 2], f$ – непр. на E_1, тогда по т. Кантора f – р. непр. на E_1

III Теперь нужно получить определение р. н. из первых двух пунктов:

$$f \text{ – р. н. на } E_1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 : \forall x', x'' \in E_1 : |x' - x''| < \delta_1 \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

$$f \text{ – р. н. на } E_2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 : \forall x', x'' \in E_2 : |x' - x''| < \delta_2 \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\} : \forall x', x'' \in E : |x' - x''| < \delta \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$f \text{ – р. н. на } E, \text{ ч. т. д.}$$

Мы берём минимум из E_1 и E_2 чтобы один из иксов со штрихом лежал в одном из этих интервалов, а минимум с учётом единицы, чтобы отбросить случай, когда оба икса со штрихом лежат вне этих интервалов.

Можно не понимать эти «волшебные строки», но написать их нужно, т. к. они идентичны для задач всех типов. По критериям можно потерять баллы за их отстутствие.

Задача 9. Теор. вопрос

Вполне возможно, что этой задачи не будет. Может попасть всё, что угодно, поэтому ботаем в последнюю очередь.

Исследовать на сходимость

Задача типовая. Обычно последовательность монотонная и ограничена своим же пределом. Задача: нужно исследовать на сходимость последовательность: $x_{n+1} = \sqrt{30 + x_n}$.

0) Найдём предел. В предположении, что x_n – сходится:

$$\lim_{x\to\infty} x_{n+1} = \lim_{x\to\infty} x_n = A$$

$$\lim_{x\to\infty} x_{n+1} = \sqrt{30 + \lim_{x\to\infty} x_n}$$

Поэтому:

$$A = \sqrt{30 + A} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x_n = 6$$

1) Нужно доказать что x_n – огр. сверху или снизу. В данном примере, огр. сверху 6. Докажем по индукции.

База: $x_1 = 1 < 6$ – верно.

Переход: предположим, $x_n < 6$.

Тогда проверим $x_{n+1} = \sqrt{30 + x_n} < 6$ – истина.

2) Нужно доказать, что x_n – возр., т. е.:

$$x_{n+1} > x_n$$
$$30 + x_n > x_n^2$$
$$x_n^2 - x_n - 30 < 0$$

Это верно при $x_n \in (0, 6)$. Из пункта (1) это верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) x_n – возр. и огр. сверху, тогда по т. Вейерштрасса последовательность сходится.

Рекомендован к ознанкомалению семинар номер 3 Скубачевского, где разбирается задача 246 (или около того).

Т. Лагранжа

Т. Лагранжа: Пусть f – непр. на $[a, b]$, диф. на $(a, b) \Rightarrow \exists\xi \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Задача: доказать $e^x > ex,\ x > 1$.

Пусть $f(x) = e^x$ и $(a, b) = (1, x)$. Очевидно $\forall x > 1$ – непр. на отрезке и диф. на интервале. Тогда по т. Лагранжа:

$$f(x) - f(1) = f'(\xi)(x - 1)$$

$$e^x - e^1 = e^\xi(x - 1)$$
$$\frac{e^x - e}{x - 1} = e^\xi > e$$
$$e^x - e > ex - e$$
$$e^x > ex, \text{ ч. т. д.}$$

Исследовать на диф.

Задача:

$$f(x) = |(4x-1)(e^{2x}-1)^3|, \quad \forall x$$

1) По т. об ариф. опер. с производными: $\forall x \neq 0, 0,25 : f(x)$ – диф.

2) Исследуем в т. $x = 0,25$:

$$f'_+(0,25) = \lim_{x\to 0,25+0} \frac{f(x)-f(0,25)}{x-0,25} = \lim_{x\to 0,25+0} \frac{(4x-1)(e^{2x}-1)^3}{x-0,25} = 4(e^{0,5}-1)^3$$

$$f'_-(0,25) = \lim_{x\to 0,25-0} \frac{f(x)-f(0,25)}{x-0,25} = -\lim_{x\to 0,25-0} \frac{(4x-1)(e^{2x}-1)^3}{x-0,25} = -4(e^{0,5}-1)^3$$

$$f'_-(0,25) \neq f'_+(0,25) \;\Rightarrow\; \text{не диф. в 0,25}$$

3) Аналогично исследуем в т. $x = 0$. Получаем: $f'_-(0) = f'_+(0) \Rightarrow f$ – диф. в 0.

Ответ: f – диф. на $\mathbb{R} \setminus \{0,25\}$.

Замечание: Если существует производная, это не значит, что функция диф. Необходимо существование равных односторонних пределов.

Заключение

Антон выложит у себя на стене список базовых вопросов – теор. минимум для устного экзамена. Сверх билета доказательств много спрашивать не будут, но могут спросить почти всё, что угодно. Не надо учить все доказательства. Чтобы понять какие будут билеты, нужно пообщаться с второкурсниками.

Рекомендация: в первый день поботали. На второй день стоит часик повторять, что учили вчера. Можно погулять с одногруппниками, поспрашивать друг друга. Стоит попроситься к лектору, потому что они в основном мягкие, но не все. Некоторые не берут к себе ребят с низким БРС. И помните:

ХАЛЯВЫ НЕ БУДЕТ