ZHESTKOV UNIVERSITY

KollokBook

ЧИСЛА → ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ → ФУНКЦИИ

Важно понимать отличие между $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел – множество, на котором заданы "$\leq$", "$+$", "$\cdot$" и удовлетв. **15+1** аксиомам (а ещё $1 \neq 0$)

1) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a+b=b+a$
2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a+b)+c=a+(b+c)$
3) $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a+0=a$
4) $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists (-a) \in \mathbb{R} : a+(-a)=0$

5) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot b = b \cdot a$
6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
7) $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot 1 = a$
8) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$

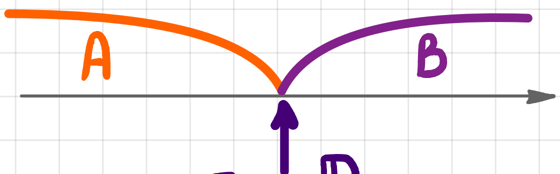
10) $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \leq a$
11) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \leq b$ или $b \leq a$
12) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b, \ b \leq c \hookrightarrow a \leq c$
13) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b, \ b \leq a \hookrightarrow a = b$

9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow a(b+c)=ab+ac$

14) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \hookrightarrow a+c \leq b+c$

15) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b, \ 0 \leq c \hookrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

16) Если $A, B \subset \mathbb{R}$ и A лежит слева от B, т.е. $\forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \leq b$, то $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \leq c \leq b$



$\exists c \in \mathbb{R}$ непрерывность

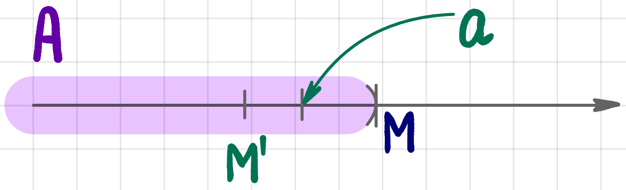
Для $\mathbb{Q}$ аксиомы 1–15 работают, а 16-я **НЕТ**:

$$\begin{cases} A: \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x^2<2 \end{array}\right. & \text{(числа до } \sqrt{2}\text{)} \\ B: \begin{cases} x>0 \\ x^2>2 \end{cases} & \text{(числа после } \sqrt{2}\text{)} \end{cases}$$

M — Верхняя грань (ВГ) мн-ва A, если $\forall a \in A \hookrightarrow a \le M$

$M = \max A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ВГ} \\ M \in A \end{cases}$ $(0,1]$ ВГ: $1, 2, 117, \ldots$ $\max A = 1$ $(1,2)$ ВГ: $2, 17, 4219\ldots$ $\max A =$ 😨

Число $M \in \mathbb{R}$ — точная ВГ мн-ва $A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ВГ} \\ \text{нет ВГ меньше} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A \hookrightarrow a \le M \\ \forall M' < M \ \exists a \in A : a > M' \end{cases}$

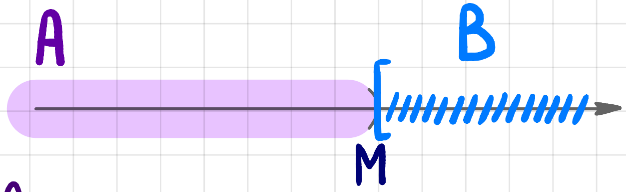


$M = \sup A$ (супре́мум)

$m = \inf A$ (и́нфимум, точная нижняя грань)

> **Теорема о ТВГ:** любое ограниченное сверху множество имеет ТВГ и притом только одну, т.е. $\forall A \subset \mathbb{R}$: A огр. сверху $\exists!\, M = \sup A$

Рассмотрим мн-во B всех ВГ A (их ∞ много)



По аксиоме **16** $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \le M \le b$

ВГ + наим. ВГ $\Rightarrow M$ — ТВГ мн-ва A

Покажем, что ТВГ одна.

Пусть не одна и $\exists\, M_1, M_2$ и $M_1 < M_2$, но тогда M_2 не min в B, противоречие

ТВГ неограниченного сверху множества равно $+\infty$

Множество X называется **счётным**, если между X и $\mathbb{N}$ можно построить взаимно однозначное соответствие (биекцию)

Важно не путать счётное и конечное мн-ва: в счётном ∞ много элементов

Например, $X = \{$чётные числа $> 0\}$ – счётное

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 6 & \dots & 140 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & 2 & 3 & & 70 & \end{array}$$

Теорема: множество $\mathbb{Q}$ счётно

СТАРТ

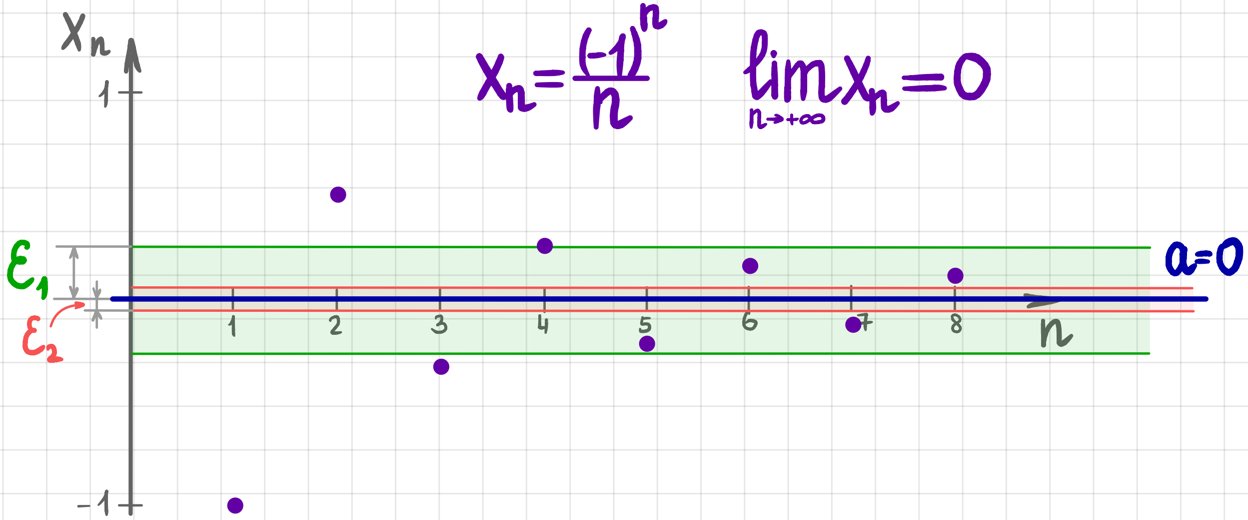
$n \backslash m$	0	1	-1	2	-2	3	...
1	$\frac{0}{1}$ 1	$\frac{1}{1}$ 2	7 $\frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}$ 8	$\frac{-2}{1}$		
2	– $\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$ 3	6 $\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{2}$ –	$\frac{-2}{2}$ –		
3	– $\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$ 4	5 $\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$ 9	$\frac{-2}{3}$		
4							
⋮							

- Обходим "змейкой"
- Если на пути встречается "повтор", его не учитываем
- В итоге построили биекцию

ч.т.д.

Предел последовательности

$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$



Для полосы сколь угодно малой ширины, построенной вокруг предела, существует номер, начиная с которого все точки попадут в эту полосу

$$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon}$$

Альтернатива: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$ для любого $\varepsilon>0$ вне полосы $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ лежит лишь конечное число членов $\{x_n\}$

$\{x_n\}$ – **сходящаяся** последовательность, если $a \in \mathbb{R}$

💥 CRASH TEST 💥

$\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ 👌

$\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ 👌

$\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n - a| \leq \varepsilon$ 👌

Бесконечные пределы

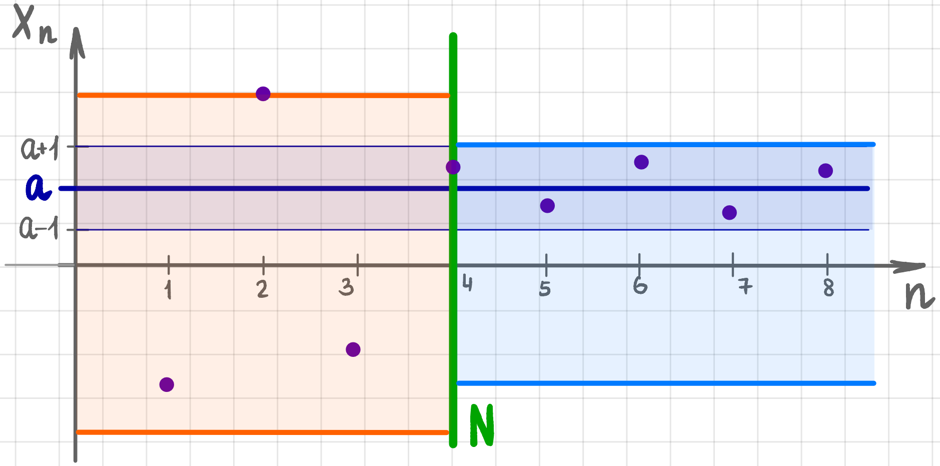
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \hookrightarrow x_n > \frac{1}{\varepsilon}$ $\quad 3^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \hookrightarrow x_n < -\frac{1}{\varepsilon}$ $\quad -3^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ $\quad (-3)^n$

беск. большая послед.

Теорема: сходящаяся последовательность ограничена



$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$

сходимость $\Downarrow$ $\not\Uparrow$ $(-1)^n$ **ограниченность** $\exists C: \forall n \hookrightarrow |x_n| \leq C$

$\varepsilon = 1 \ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow |x_n - a| < 1$

$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a|$ ⟵ нер-во $\triangle$

Итак, $\forall n \geq N \hookrightarrow |x_n| \leq 1 + |a|$ (После черты 👌)

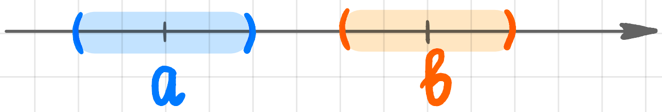
До черты число элементов конечное $\Rightarrow$

$\forall n < N \hookrightarrow |x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|\}$

Итого, $\forall n \hookrightarrow |x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, 1 + |a|\}$ ч.т.д.

Теорема: последовательность не может иметь более одного предела

Пусть предел не единственный: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$



$\varepsilon = \frac{b-a}{4} \ \exists N_1: \forall n \geq N_1 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$

$\varepsilon = \frac{b-a}{4} \ \exists N_2: \forall n \geq N_2 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(b)$

$\exists N = \max\{N_1, N_2\}: \begin{cases} x_n \in U_\varepsilon(a) \\ x_n \in U_\varepsilon(b) \end{cases}$ — противоречие, т.к. $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$ ч.т.д.

Мы рассмотрели случай a, b — числа. С $\pm\infty$ аналогично: в этих случаях тоже можно выбрать $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$, а далее аналогично

Бесконечно малые последовательности (БМП)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0 \Leftrightarrow \{\alpha_n\}$ – БМП

$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-a)=0$, т.е. $\{x_n-a\}$ – БМП

Например, $\alpha_n=\frac{1}{n}$, $\alpha_n=\frac{(-1)^n}{n^3}$, $\alpha_n=\frac{\sin n}{n}$

Теорема: свойства БМП

1) если $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ – БМП, то $\{\alpha_n\pm\beta_n\}$ тоже БМП
2) если $\{\alpha_n\}$ – огр. последов., $\{\beta_n\}$ – БМП, то $\{\alpha_n\cdot\beta_n\}$ тоже БМП

1) $\{\alpha_n\}$ – БМП $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N_1: \forall n\geq N_1 \hookrightarrow |\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\{\beta_n\}$ – БМП $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N_2: \forall n\geq N_2 \hookrightarrow |\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists N=\max\{N_1,N_2\} \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n\geq N \hookrightarrow |\alpha_n\pm\beta_n|\leq \underbrace{|\alpha_n|}_{<\varepsilon/2}+\underbrace{|\beta_n|}_{<\varepsilon/2}<\varepsilon$ ч.т.д.

2) $\{\alpha_n\}$ – огр. последов. $\Leftrightarrow \exists M: \forall n \hookrightarrow |\alpha_n|\leq M$

$\{\beta_n\}$ – БМП $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n\geq N \hookrightarrow |\beta_n|<\frac{\varepsilon}{M}$ $\Big]\times$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n\geq N \hookrightarrow |\alpha_n\beta_n|<\varepsilon$ ч.т.д.

Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, $b\neq 0$, $y_n\neq 0\ \forall n$, докажем, что $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – ограничена

$\varepsilon=\frac{|b|}{2}\ \exists N: \forall n\geq N \hookrightarrow |y_n-b|<\frac{|b|}{2} \xrightarrow{\text{н-во } \triangle} |y_n|>\frac{|b|}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|y_n|}<\frac{2}{|b|}$

$\forall n\geq N$ (после черты) $\hookrightarrow \frac{1}{|y_n|}<\frac{2}{|b|}$

$\forall n< N$ (до черты) $\hookrightarrow \frac{1}{|y_n|}\leq \max\left\{\frac{1}{|y_1|},\frac{1}{|y_2|},\ldots,\frac{1}{|y_{N-1}|}\right\}$

$\Rightarrow \forall n \hookrightarrow \frac{1}{|y_n|}\leq \max\left\{\frac{1}{|y_1|},\frac{1}{|y_2|},\ldots,\frac{1}{|y_{N-1}|},\frac{2}{|b|}\right\}$

Арифметические свойства предела последовательности

Теорема: пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b\in\mathbb{R}$, тогда,

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$ 3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{a}{b}$, $b\neq 0$, $y_n\neq 0\ \forall n$

1) $\{(x_n\pm y_n)-(a\pm b)\}=\{\underbrace{(x_n-a)}_{\text{БМП}}\pm\underbrace{(y_n-b)}_{\text{БМП}}\}$ – БМП $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$

2) $\{x_n\cdot y_n-a\cdot b\}=\{x_n\cdot y_n-x_n b+x_n b-a\cdot b\}=\{\underbrace{x_n}_{\text{огр.}}\cdot\underbrace{(y_n-b)}_{\text{БМП}}+b\underbrace{(x_n-a)}_{\text{БМП}}\}$ – БМП $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$

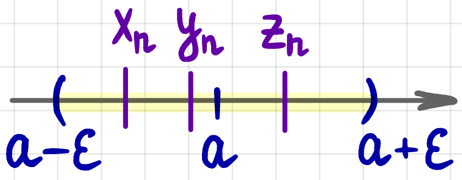
3) $\left\{\frac{1}{y_n}-\frac{1}{b}\right\}=\left\{\frac{b-y_n}{y_n\cdot b}\right\}=\left\{\underbrace{\frac{1}{y_n b}}_{\text{огр.}}\cdot\underbrace{(b-y_n)}_{\text{БМП}}\right\}$ – БМП $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{y_n}=\frac{1}{b}$, $\frac{x_n}{y_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{a}{b}$ по свойству 2)

Свойства предела последовательности, связанные с неравенствами

Теорема о 👮👮: Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$, $\exists N_0: \forall n \geq N_0 \hookrightarrow x_n \leq y_n \leq z_n$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a,\ a\in\mathbb{R}$

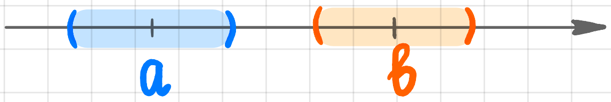
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N_1: \forall n\geq N_1 \hookrightarrow x_n\in U_\varepsilon(a)$$

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N_2: \forall n\geq N_2 \hookrightarrow z_n\in U_\varepsilon(a)$$



$$\exists N = \max\{N_1, N_2, N_0\}\quad \forall n\geq N \hookrightarrow \begin{cases} x_n\in U_\varepsilon(a) \\ z_n\in U_\varepsilon(a) \\ x_n\leq y_n\leq z_n \end{cases} \Rightarrow y_n\in U_\varepsilon(a)$$ ч.т.д

Теорема: пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, $a<b$, тогда $\exists N: \forall n\geq N \hookrightarrow x_n<y_n$



$\varepsilon = \frac{b-a}{4}$ $\exists N_1: \forall n\geq N_1 \hookrightarrow x_n\in U_\varepsilon(a)$

$\varepsilon = \frac{b-a}{4}$ $\exists N_2: \forall n\geq N_2 \hookrightarrow y_n\in U_\varepsilon(b)$

Мы рассмотрели случай a, b – числа. С $\pm\infty$ аналогично: в этих случаях тоже можно выбрать $U_\varepsilon(a)\cap U_\varepsilon(b)=\varnothing$, а далее аналогично

$\exists N = \max\{N_1, N_2\}: \begin{cases} x_n\in U_\varepsilon(a) \\ y_n\in U_\varepsilon(b) \end{cases}$, $U_\varepsilon(a)\cap U_\varepsilon(b)=\varnothing \Rightarrow$
$\Rightarrow x_n<y_n$ ч.т.д.

Теорема: пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, $\exists N: \forall n\geq N \hookrightarrow x_n\leq y_n$, тогда $a\leq b$

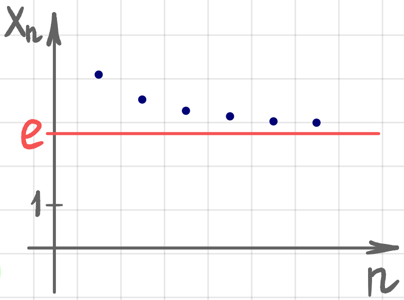
Пусть $b<a$, но тогда $\exists N_1: \forall n\geq N_1 \hookrightarrow y_n<x_n$ – противоречие ч.т.д.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$x_1=4$, $x_2\approx 3{,}37$, $x_3\approx 3{,}16$, ...

Очевидно: $x_n\geq 1$, $\{x_n\}$ огр. снизу

Н-во Бернулли: $\{x_n\}$ монот. убыв.



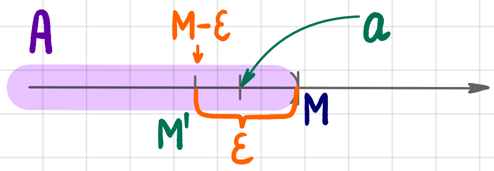
Ожидание: есть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

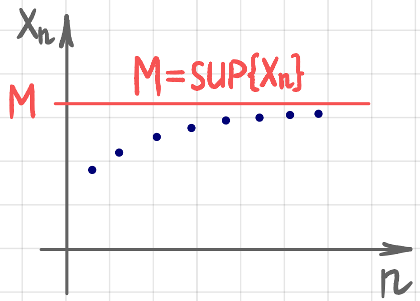
Реальность: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

Число Эйлера $e\approx 2{,}718$

Теорема Вейерштрасса: пусть $\{x_n\}$ ограничена снизу (сверху) и монотонно убывает (возрастает), тогда есть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\inf\{x_n\}$ $(\sup\{x_n\})$

$$\sup A=M \Leftrightarrow \begin{cases}\forall a\in A \hookrightarrow a\leq M\\ \forall M'<M\ \exists a\in A: a>M'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\forall a\in A \hookrightarrow a\leq M\\ \forall \varepsilon>0\ \exists a\in A: a>M-\varepsilon\end{cases}$$





$\forall\varepsilon>0\ \exists N: x_n>M-\varepsilon$

Но $\{x_n\}$ возрастает

$\Downarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n\geq N \hookrightarrow x_n>M-\varepsilon$

При этом $\forall n$, в т.ч. $\forall n\geq N \hookrightarrow x_n\leq M$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n\geq N \hookrightarrow x_n\in U_\varepsilon(M)$ ч.т.д.

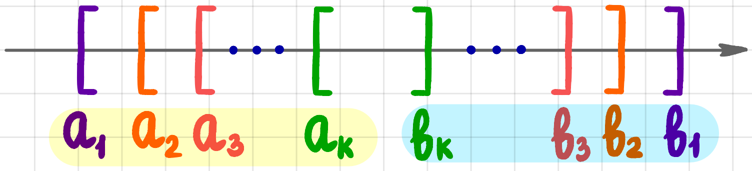
Примечание 1: монотонность можно требовать лишь с некоторого номера

Примечание 2: $\{x_n\}$ возр. и НЕ огран. сверху $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$

$\{x_n\}$ убыв. и НЕ огран. снизу $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=-\infty$

$\Rightarrow$ любая монотонная последов. имеет предел

$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset [a_3,b_3] \supset \ldots \supset [a_k,b_k] \supset \ldots$



Система вложенных отрезков

Если $b_k - a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, то ещё и стягивающихся

Теорема Кантора: 1) система вложенных отрезков имеет общую точку
2) если она ещё и стягивающаяся, то такая точка одна

1) A – мн-во левых концов $\forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \le b$

B – мн-во правых концов   👑 16-ая 👑 : $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \le c \le b$

2) Пусть не одна: c и d $\underset{0}{0} \le \underset{0}{|c-d|} \le \underset{0}{b_n - a_n} \Rightarrow c = d$ ч.т.д

Теорема: множество $\mathbb{R}$ несчетно

1) $[a_1,b_1] \subset [a_0,b_0]$ и $x_1 \notin [a_1,b_1]$

2) $[a_2,b_2] \subset [a_1,b_1]$ и $x_2 \notin [a_2,b_2]$

. . . .

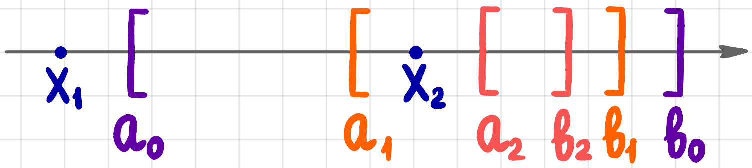
n) $[a_n,b_n] \subset [a_{n-1},b_{n-1}]$ и $x_n \notin [a_n,b_n]$

По теор. Кантора $\exists c \in \mathbb{R} \in [a_n,b_n]$

c нет в таблице ч.т.д

Пусть счётно:

$\mathbb{R}$	x_1	x_2	x_3	x_4	…
$\mathbb{N}$	1	2	3	4	…



$\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, \dots$

$\{x_{n_k}\}: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, \dots$

↳ $1, 4, 5, 7, 8, \dots$
$n_1\ n_2\ n_3\ n_4\ n_5$

$\{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность

n_k – строго возраст. последов. натуральных чисел

$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}$ – частичный предел

Теорема (критерий ч.п.): a – ч.п. $\{x_n\} \Leftrightarrow$ в любой окр. a беск. много элементов

1) $\Rightarrow$ Пусть a – ч.п.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall k \geqslant N \hookrightarrow x_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$ → в $U_\varepsilon(a)$ ∞ много эл-тов $\{x_{n_k}\}$

$\Downarrow$

в $U_\varepsilon(a)$ ∞ много эл-тов $\{x_n\}$ ч.т.д.

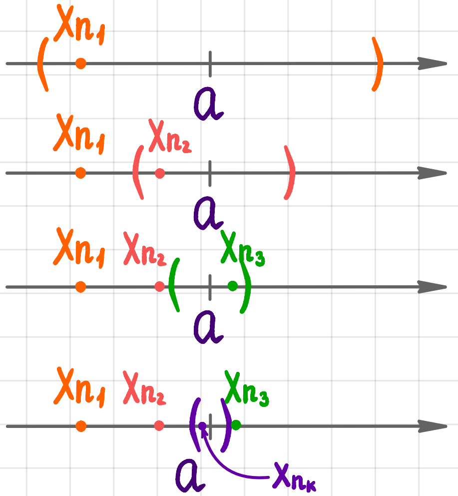
2) $\Leftarrow$ Пусть в любой $U_\varepsilon(a)$ ∞ много эл-тов $\{x_n\}$

$\varepsilon = 1$ — x_{n_1}

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ — x_{n_2} → $n_2 > n_1$, такой элемент есть, т.к. в $U_\varepsilon(a)$ ∞ много эл-тов (и вообще $\forall \varepsilon > 0\ \forall n_i\ \exists n_j \geqslant n_i : x_{n_j} \in U_\varepsilon(a)$)

$\varepsilon = \frac{1}{3}$ — x_{n_3} $n_3 > n_2$

$\varepsilon = \frac{1}{k}$ — x_{n_k} $n_k > n_{k-1}$



Руками построили подпоследов.

$a - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a + \frac{1}{k} \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = a$ ч.т.д.

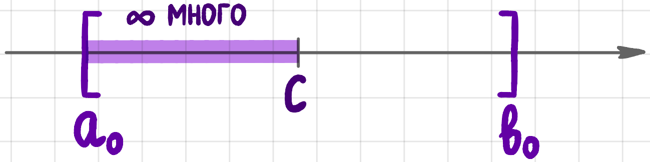
Теорема: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow a$ – единственный ч.п.

Вне $\forall U_\varepsilon(a)$ лишь конечное число эл-тов $\{x_n\} \Rightarrow$ вне $\forall U_\varepsilon(a)$ лишь конечное число эл-тов $\forall \{x_{n_k}\}$ ч.т.д.

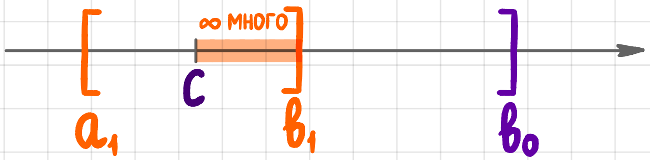
Теорема Больцано-Вейерштрасса: в любой ограниченной последов. можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Пусть $\forall n\ x_n \in [a_0, b_0]$

1) $[a_0, b_0]$ делим пополам, $[a_0, c] \hookrightarrow [a_1, b_1]$



2) $[a_1, b_1]$ делим пополам, $[c, b_1] \hookrightarrow [a_2, b_2]$



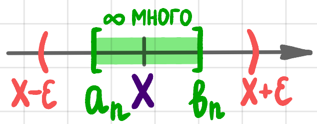
и так далее...

Получаем $[a_n, b_n]$ – систему вложенных стяг. отрезков

По теор. Кантора $\exists!\ x \in \mathbb{R} \in [a_n, b_n]$

Это и есть частичный предел

x – ч.п., если $\forall \varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(x)$ ∞ эл-тов



$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n:\ b_n - a_n < \varepsilon$, т.е.

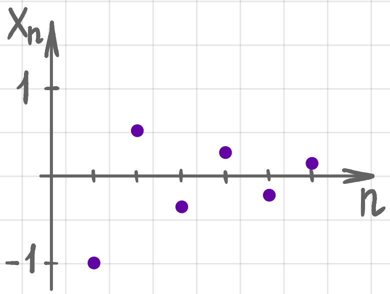
$[a_n, b_n] \subset U_\varepsilon(x) \Rightarrow$ в $U_\varepsilon(x)$ ∞ эл-тов ч.т.д.

Если последовательность $\{x_n\}$ – неограничена сверху, $\exists$ ч.п. $= +\infty$; неограничена снизу, $\exists$ ч.п. $= -\infty$

Теорема: a – единственный ч.п. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$

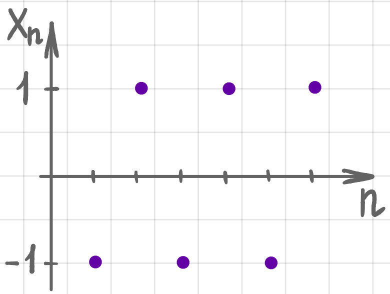
Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq a$, т.е. $\exists \varepsilon > 0$: вне $U_\varepsilon(a)$ бесконеч. число эл-тов $\{x_n\}$. Построим подпосл. $\{x_{n_k}\}$ из этих эл-тов. У $\{x_{n_k}\}$ есть ч.п. $b \neq a$, т.к $\forall k\ x_{n_k} \notin U_\varepsilon(a)$, противоречие ч.т.д.

А) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$



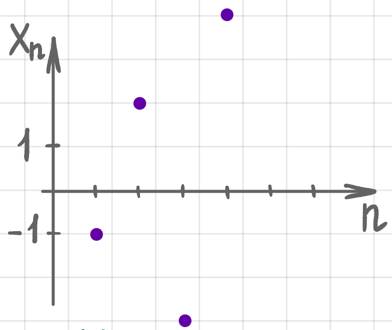
сходится
фундамент.
ограничена

Б) $x_n = (-1)^n$



не сходится
не фундамент.
ограничена

В) $x_n = (-1)^n \cdot n$

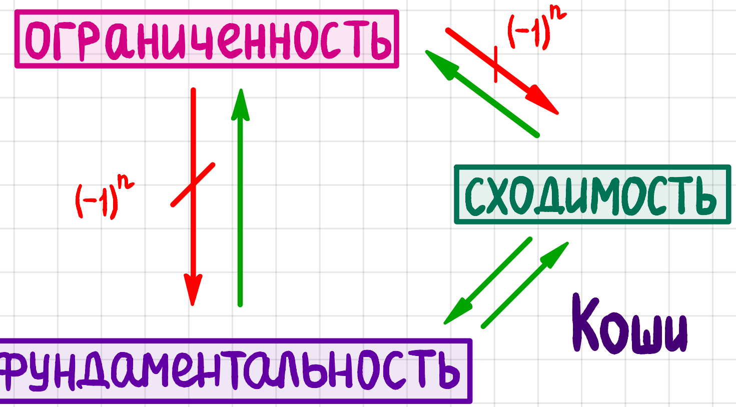


не сходится
не фундамент.
не ограничена

$\{x_n\}$ фундаментальна $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n, m \geq N_\varepsilon \hookrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$

$\{x_n\}$ не фундамент. $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall N\ \ \exists n, m \geq N\ :\ |x_m - x_n| \geq \varepsilon$

Если $\{x_n\}$ фундаментальна, то она ограничена



$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m \geq N \hookrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$

$\varepsilon = 1$ $\qquad\qquad$ $m = N$

$\forall n \geq N \hookrightarrow |x_N - x_n| < 1 \Rightarrow |x_n| < 1 + |x_N|$ (после черты)

$\forall n < N \hookrightarrow |x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|\}$ (до черты)

Итого, $\forall n \hookrightarrow |x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\}$ ч.т.д.

Теорема (критерий Коши): $\{x_n\}$ фундаментальна $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ сходится

1) $\Leftarrow$ Пусть $\{x_n\}$ сходится, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, покажем, что $\{x_n\}$ фундаментальна

$\forall \varepsilon>0\ \exists N:$ $\forall n\geqslant N \hookrightarrow |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall m\geqslant N \hookrightarrow |x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

$|x_n-x_m| = |(x_n-a)-(x_m-a)| \leqslant |x_n-a|+|x_m-a| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ч.т.д.

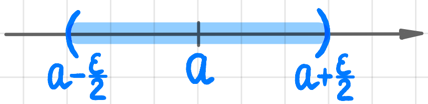
2) $\Rightarrow$ Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна, покажем, что $\{x_n\}$ сходится

фундаментальна $\Rightarrow$ ограничена $\overset{\text{Б.-В.}}{\Rightarrow}$ есть конечный частичный предел $a\in\mathbb{R}$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n\geqslant N \hookrightarrow |x_n-a|<\varepsilon$

Фундаментальность: $\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n, \overset{M}{\overset{\shortparallel}{m}}\geqslant N \hookrightarrow |x_n-x_{\underset{M}{m}}|<\frac{\varepsilon}{2}$

Критерий ч.п.: $\forall \varepsilon>0\ \exists \infty$ много эл-тов в $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \Rightarrow \exists M\geqslant N: |x_M-a|<\frac{\varepsilon}{2}$



$\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n\geqslant N \hookrightarrow |x_n-a| = |(x_n-x_M)+(x_M-a)| \leqslant |x_n-x_M|+|x_M-a| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ч.т.д.