1. Кинематика точки: траектория, скорость, ускорение (нормальное, тангенциальное).

Движение мат. точки задается $\bar{r}(t)$

$$\bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k}$$

- Кривая описываемая движущейся точкой называется <u>траекторией</u>.
- Скоростью называется вектор

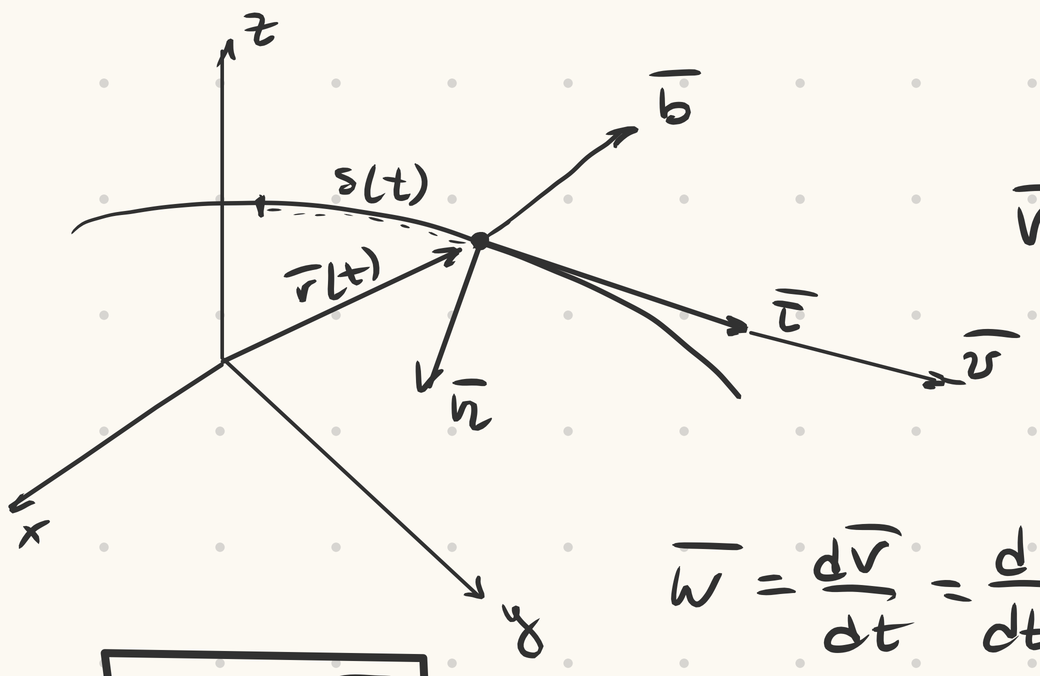
$$v(t) = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}$$

- Ускорение точки:

$$\bar{w}(t) = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}$$

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}\ ;\ w_n = \frac{v^2}{\rho}$$

2. Касательная, нормаль, бинормаль (сопровождающий трехгранник)



Путь $s(t)$

$$\bar{v} = \frac{d}{dt}\bar{r}(s(t)) = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \bar{\tau}\frac{ds}{dt}$$

$$\boxed{\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}} \qquad \left[v = |\bar{v}| = \frac{ds}{dt}\right]$$

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\bar{\tau}) = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + v\frac{d\bar{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt}\tau + v^2\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{dv}{dt}\tau + v^2\frac{\bar{n}}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{\bar{n}}{\rho}}$$

Разложение $\bar{\tau}$ по касат., $\bar{n} \perp \bar{\tau}$. Дополним до $\bar{b}$ ортогональным до базиса — сопр. трехгранник траектории

3. Криволинейные координаты. Коэффициенты Ламе. Разложение скорости и ускорения по базису ортогональных криволинейных координат

$$\bar r = \{x, y, z\} \longrightarrow \begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \rightarrow \bar r = \{q_1, q_2, q_3\}$$

Рассматривая в формуле замены переменных $\bar r = \bar r(q_1, q_2, q_3)$ по очереди каждую из переменных q_k в качестве параметра при фикс. оставшихся, получим 3 семейства кривых, называемых <u>координатными линиями</u>

Координаты q_k – <u>криволинейные координаты</u>

$$\left[\frac{\partial \bar r}{\partial q_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k}\bar i + \frac{\partial y}{\partial q_k}\bar j + \frac{\partial z}{\partial q_k}\bar k = H_k \bar e_k\right]$$

Векторы опред. направления касательных к координатным линиям

- H_k – коэфф. Ламе, норма векторов $\frac{\partial \bar r}{\partial q_k}$

  $\bar e_k$ – ед. <u>вектора направлений</u>, ортог. если

  $$H_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2}$$

- $$\bar v = \frac{d\bar r}{dt} = \frac{\partial \bar r}{\partial q_1}\dot q_1 + \frac{\partial \bar r}{\partial q_2}\dot q_2 + \frac{\partial \bar r}{\partial q_3}\dot q_3 = H_1 \dot q_1 \bar e_1 + H_2 \dot q_2 \bar e_2 + H_3 \dot q_3 \bar e_3$$

  $\bar v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ с компонентами $\boxed{v_k = H_k \dot q_k}$

- $\bar w = w_1 \bar e_1 + w_2 \bar e_2 + w_3 \bar e_3$

$$w_{q_k} = \bar w \cdot \bar e_k = \frac{d\bar v}{dt}\bar e_k = \frac{1}{H_k}\left(\frac{d\bar v}{dt}\cdot\frac{\partial r}{\partial q_k}\right) = \frac{1}{H_k}\left[\frac{d}{dt}\left(\bar v \cdot \frac{\partial \bar r}{\partial q_k}\right) - \bar v \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial q_k}\right)\right]$$

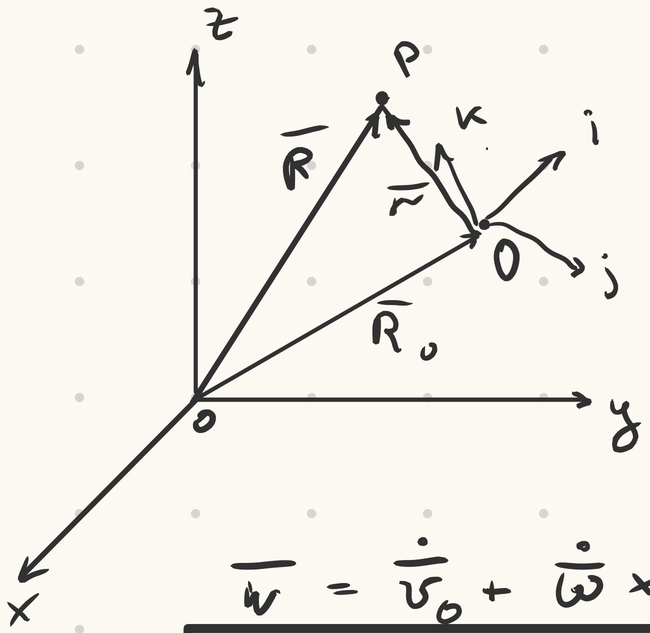
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar r}{\partial q_k}\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{\partial \bar v}{\partial q_k}; \quad \frac{\partial \bar r}{\partial q_k} = \frac{\partial \bar v}{\partial \dot q_k}$$

непр. дифф

$$\boxed{w_{q_k} = \frac{1}{H_k}\left[\frac{d}{dt}\left(\bar v \cdot \frac{d\bar v}{d\dot q_k}\right) - \left(\bar v \cdot \frac{\partial \bar v}{\partial q_k}\right)\right]}$$

$$\boxed{w_{q_k} = \frac{1}{H_k}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right), \quad T = \frac{v^2}{2}}$$

4. Формулы Эйлера и Ривальса (распределение скоростей и ускорений в твердом теле).



$$\bar R = \bar R_0 + A\bar\rho$$

• Теорема: сущ. ед. $\bar\omega$, угл. скорость по которой $\bar v$ точки P:

$\boxed{\bar v = \bar v_0 + \bar\omega \times \bar r}$, $\bar v_0$ - скорость полюса O

Формула Эйлера:

$$\bar w = \dot{\bar v}_0 + \dot{\bar\omega}\times\bar r + \bar\omega\times\dot{\bar r}$$

$$\boxed{\bar w = \bar w_0 + \bar\varepsilon\times\bar r + \bar\omega\times[\bar\omega\times\bar r]}$$ Формула Ривальса

Угл. скорость: $\bar\omega = \omega\cdot\bar e_\omega \to \bar\varepsilon = \underbrace{\dot\omega\,\bar e_\omega}_{\bar\varepsilon_1} + \underbrace{\omega\,\dot{\bar e}_\omega}_{\bar\varepsilon_2}$

изменение $\bar\omega$ по модулю

*Если МОВ вращается вокруг т. O с Ω, то $\bar\varepsilon_2 = \bar\Omega\times\bar\omega$

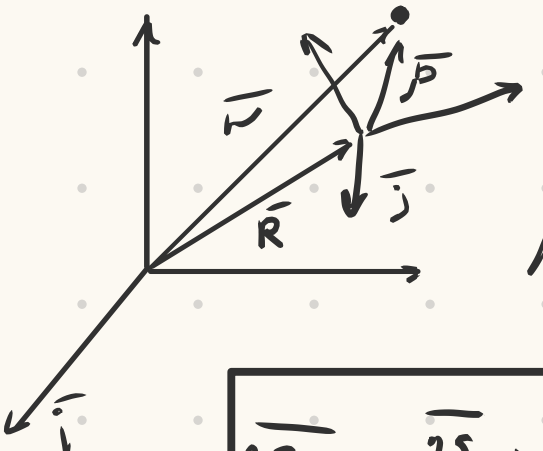
• $\bar w_{вр} = \bar\varepsilon\times\bar r = \bar\varepsilon_1\times\bar r + \bar\varepsilon_2\times\bar r$

$\bar w_{oc} = \omega^2\,\bar l$ – нормальное ускорение как если бы тело вращалось вокруг МОВ как неподвижной

осестремит.

5. Сложное движение. Сложение линейных и угловых скоростей и ускорений.

$$\bar r = \bar R + \bar\rho$$



$$\bar r^i = \bar R^i + A\bar\rho^j$$

$$\dot{\bar r}^i = \dot{\bar R}^i + \underbrace{\dot A}\,\bar\rho^j + \underbrace{A\dot{\bar\rho}^j}_{v_{отн}}$$

$$\dot A = [\omega]_\times A \qquad [\bar\omega^i]_\times \underbrace{A\rho^j}_{\rho^i}$$

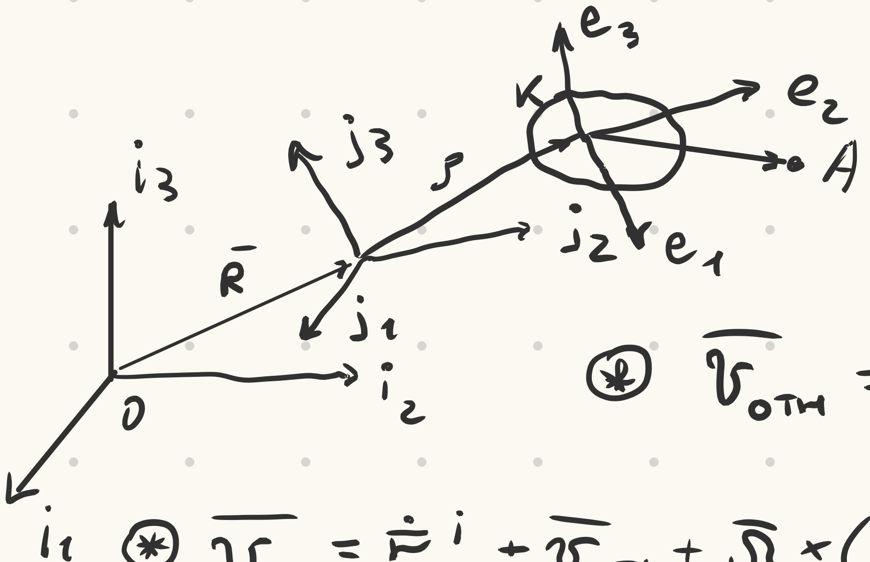
$$\boxed{\bar v_{абс} = \bar v_0 + \bar\omega\times\bar\rho + \bar v_{отн}}$$ Формула сложения линейных скоростей

$$\overline{W_{абс}} = \ddot{\overline{R}}^i + \underbrace{\frac{d}{dt}\left\{[\omega^i]_\times A\overline{\rho}^i\right\}} + \frac{d}{dt}\left\{A\dot{\overline{\rho}}^j\right\} \quad \Big) \quad \underbrace{[\omega^i]_\times A\dot{\overline{\rho}}^j}_{\overline{\omega}\times\overline{v}_{отн}} + \underbrace{A\ddot{\overline{\rho}}^j}_{\overline{W}_{отн}}$$

$$\underbrace{[\overline{\varepsilon}^i]_\times A\overline{\rho}^j}_{\overline{\varepsilon}\times\overline{\rho}} + \underbrace{[\omega^i]_\times[\omega^i]_\times A\overline{\rho}^j}_{\omega\times[\omega\times\rho]} + \underbrace{[\omega^i]_\times A\dot{\overline{\rho}}^j}_{\overline{\omega}\times\overline{v}_{отн}}$$

Получаем: $$\boxed{\overline{W_{абс}} = \underbrace{\overline{W}_0 + \overline{\varepsilon}\times\overline{\rho} + \overline{\omega}\times[\overline{\omega}\times\overline{\rho}]}_{W_{пер}} + 2\underbrace{[\overline{\omega}\times\overline{v}_{отн}]}_{W_{кор}} + \overline{W}_{отн}}$$

Формула сложения ускорения



$$\underbrace{\overline{i} \xrightarrow{\Omega} \overline{j} \xrightarrow{\omega_{отн}} \overline{e}}_{\overline{\omega}_{абс}\ -\ ?}$$

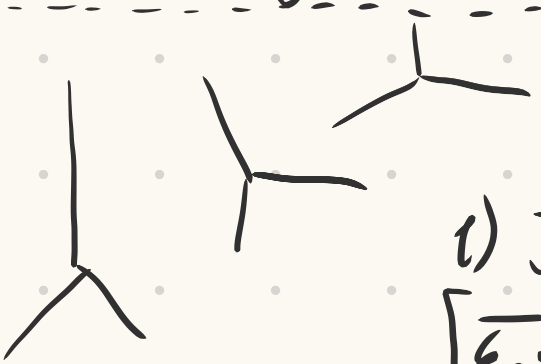
(*) $\overline{v}_{отн} = \dot{\overline{R}}^j + \overline{\omega}_{отн}\times\overline{\rho}$

(*) $$\overline{v}_{абс} = \dot{\overline{r}}^i + \overline{v}_{отн} + \overline{\Omega}\times(\overline{R}+\overline{\rho}) = \underbrace{\dot{\overline{r}}^i + \dot{\overline{R}}^j + \overline{\Omega}\times\overline{R}}_{v_к} + \underbrace{\overline{\omega}_{отн}\times\overline{\rho} + \overline{\Omega}\times\overline{\rho}}_{(\underbrace{\overline{\omega}_{отн}+\overline{\Omega}}_{\overline{\omega}_{абс}})\times\overline{\rho}}$$

Из формулы Эйлера находим:

$$\boxed{\overline{\omega}_{абс} = \overline{\omega}_{отн} + \overline{\Omega}_{пер}}$$ Формула сложения угловых скоростей

- Связь угловых ускорений:



$\overline{\Omega}, \overline{\omega}_{отн}, \overline{\varepsilon}^i_{абс}$ — ?

1) $\overline{\Omega}^i, \overline{\omega}^i_{отн}$ — изв. как $\overline{\Omega}^i(t), \overline{\omega}_{отн}(t)$

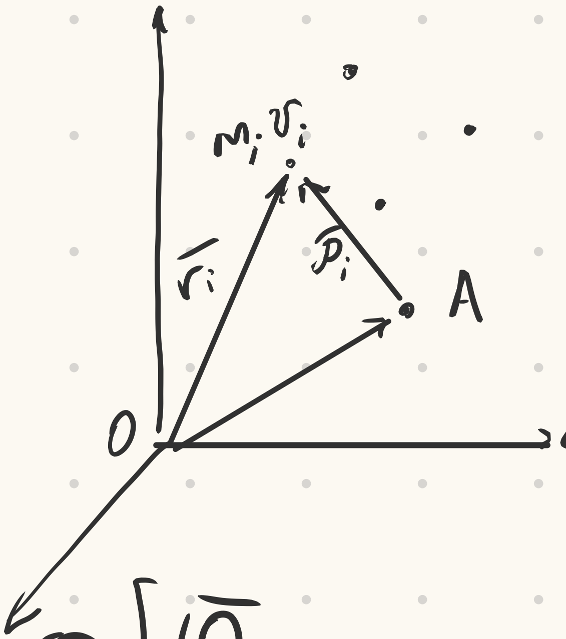
$$\left[\overline{\varepsilon}_{абс} = \frac{d}{dt}(\overline{\Omega} + \overline{\omega}_{отн}) = \dot{\overline{\Omega}}^i + \dot{\overline{\omega}}^i\right]$$

2) $\overline{\Omega}^i, \overline{\omega}^j_{отн}$

$$\Big[\overline{\varepsilon}_{абс} = \frac{d}{dt}(\overline{\Omega}^i + A\overline{\omega}^j_{отн}) = \dot{\overline{\Omega}}^i + \dot{A}\,\overline{\omega}^j_{отн} + A\dot{\overline{\omega}}^j_{отн}$$
$$= \overline{\varepsilon}_{пер} + \overline{\Omega}\times\overline{\omega}_{отн} + \overline{\varepsilon}_{отн}\Big]$$

6. Определение кинетического момента, кинетической энергии. Формулы преобразования кинетического момента при замене полюса, разложение кинетической энергии на энергию движения центра масс и вращательную (Теорема Кенига).

$\overline{\rho_i} = \overline{r_i} - \overline{OA}$



▲ Кинетический момент отн. т. A для системы точек:

$$\boxed{\overline{K_A} = \sum_i \overline{\rho_i} \times (m_i \overline{v_i})}$$

▲ Импульс системы точек:

$$\boxed{\overline{Q} = \sum m_i \overline{v_i}}$$

$$\circledast \left[\frac{d\overline{Q}}{dt} = \underbrace{\sum m_i \overline{w_i}}_{\overline{F}^{ext} + \overline{F}^{in}} = \sum F_i^{ext} \right]$$ Теорема об изменении импульса системы

$$\circledast \quad \frac{d\overline{K_A}}{dt} = \sum_i \Big(\underbrace{\dot{\overline{\rho_i}}}_{\overline{v_i} - \overline{v_A}} \times m_i \overline{v_i} + \overline{\rho_i} \times \underbrace{m_i \dot{\overline{v_i}}}_{F_i} \Big) =$$

$$= \sum (-v_A \times m_i \overline{v_i}) + \sum \underbrace{\overline{\rho_i} \times F_i}_{\text{моменты сил отн. т. A}} = -\overline{v_A} \times \overline{Q} + \underbrace{\overline{M_A}}_{\text{главный момент сил отн. A}}$$

M_A

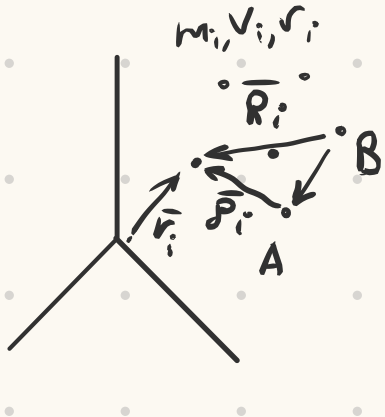
$$\left[\frac{d\overline{K_A}}{dt} = -\overline{v_A} \times \overline{Q} + \overline{M_A} \right]$$ Изменение кин. момента

- A неподвиж. $\rightarrow \overline{v_A} = 0 \Rightarrow \frac{d\overline{K_A}}{dt} = \overline{M_A}$
- A - ц.м.с, $\overline{v_A} = \frac{\sum m_i \overline{v_i}}{\sum m_i} = \frac{\overline{Q}}{\sum m_i} \Rightarrow \frac{d\overline{K_A}}{dt} = \overline{M_A}$

▲ Замена полюса:

$A \rightarrow B$, связь кин. моментов?

- $R_i = \overline{BA} + \overline{\rho_i}$

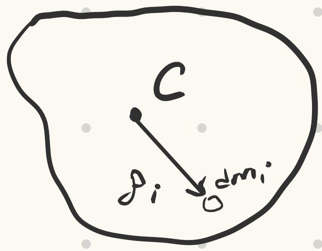


$$K_B = \sum \overline{R}_i \times m_i \overline{v}_i = \sum (\overline{BA} + \overline{\rho}_i) \times m_i v_i = \overline{BA} \times \overline{Q} + K_A$$

$$\boxed{K_B = K_A + \overline{BA} \times \overline{Q}}$$

Формула замены полюса

$$\overline{K}_c = \sum \overline{\rho}_i \times dm_i \overline{v}_i = \sum \overline{\rho}_i dm_i \times (\overline{v}_c + \overline{\omega} \times \overline{\rho}_i) =$$



$$\{\overline{v}_i = \overline{v}_c + \overline{\omega} \times \overline{\rho}_i\}$$

$$= \underbrace{\left(\sum \rho_i dm_i\right)}_{m_\Sigma \overline{CC} = 0} \times \overline{v}_c + \sum \overline{\rho}_i \times (\omega \times \overline{\rho}_i)\, dm_i = \underbrace{\left[\sum (E_3 \rho_i^2 - \rho_i \rho_i^T) dm_i\right]}_{J_c} \overline{\omega}$$

Линал: $\overline{a} \times [\overline{b} \times \overline{a}] = (E_3 a^2 - a a^T)\, \overline{b}$

Получаем в 2D: $\boxed{\overline{K}_c = I_c \overline{\omega}}$

- Консервативные силы:

1) $\overline{F}$ – либо не совершает работу
либо $\exists \Pi(r,t)$: $\overline{F} = -\mathrm{grad}\, \Pi$ и $\dfrac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$

Необходимое и дост. условие:

$$\overline{F} \text{ – пот.} \Leftrightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{в } R^n$$

- Кинетическая энергия системы точек:

$$\boxed{T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}}$$

- Кинетическая энергия твердого тела:

Зная $\overline{v}_0$, $\overline{\omega}$, M

$$\{\overline{v}_i = \overline{v}_0 + \overline{\omega} \times \overline{\rho}_i\}$$

$$T = \int \frac{dm}{2} v^2 = \int \frac{(\overline{v}_0 + \overline{\omega} \times \overline{\rho},\ \overline{v}_0 + \overline{\omega} \times \overline{\rho})}{2} dm = \int \frac{v_0^2 + 2(\overline{\omega} \times \overline{\rho}, \overline{v}_0) + (\overline{\omega} \times \overline{\rho}, \overline{\omega} \times \overline{\rho})}{2} dm$$

$$= \frac{v_0^2 M}{2} + \ldots$$

2) $\int (\bar{\omega}\times\bar{\rho}, \bar{v}_o)\,dm = (\bar{\omega}\times\underbrace{(\int \bar{\rho}\,dm)}_{M\cdot\overline{OC}}, \bar{v}_o)$ $\quad (a\times b, c)+(a\times d, c) = (a\times(b+d), c)$

3) $\int \underbrace{(\bar{\omega}\times\bar{\rho}, \bar{\omega}\times\bar{\rho})}_{(\bar{\omega}, \bar{\rho}\times(\bar{\omega}\times\bar{\rho}))}\,dm = (\bar{\omega}, \underbrace{\int \bar{\rho}\times(\bar{\omega}\times\bar{\rho})\,dm}_{J_o\bar{\omega}})$

Получаем $\boxed{T = \frac{v_o^2 M}{2} + (\bar{\omega}\times(M\cdot\overline{OC}), \bar{v}_o) + \frac{(\bar{\omega}, J_o\bar{\omega})}{2}}$

Теорема Кёнига

(*) $\exists O = C: \quad T = \frac{M v_c^2}{2} + \frac{(\bar{\omega}, J_c\bar{\omega})}{2}$

„Кин. энергия тв. тела есть кин. энергия его ц.м. + кин. энергия движения отн. системы Кёнига"

- СК Кёнига: • C – центр масс
  • оси – неподвижны ($\omega = 0$)

7. Основные законы динамики. Законы Ньютона, закон изменения кинетического момента, закон сохранения энергии.

- Законы Ньютона:

1. Существуют такие СО, относительно которых изолированная мат. точка покоится или движется равномерно и прямолинейно, называемые инерциальными

2. $m\bar{w} = \bar{F}$

3. Если одна мат. точка действует на другую, то и вторая точка действует на первую, причем силы взаимод. равны по величине и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки в противоположные стороны

- Закон изм. кин. момента:

$\left[\frac{dK_A}{dt} = -\bar{v}_A\times\bar{Q} + \bar{M}_A\right]$ Изменение кин. момента

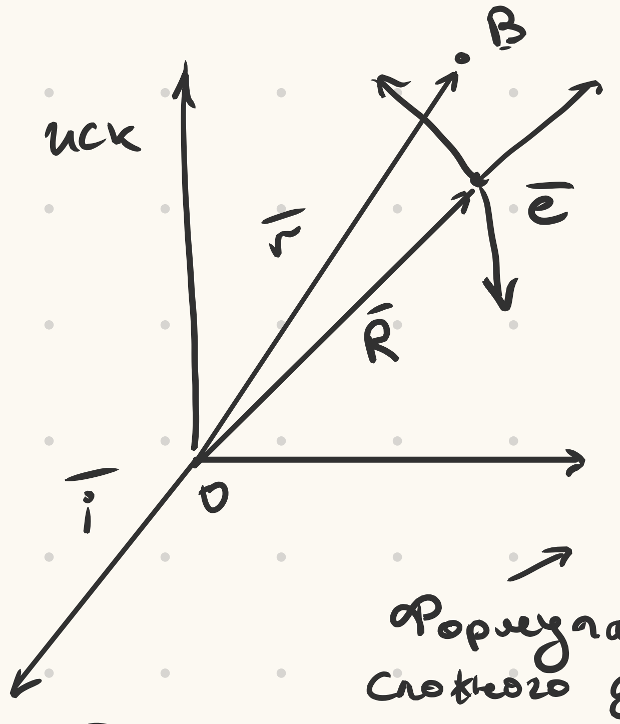
- Теорема об изменении импульса системы:

$$\left[\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \underbrace{m_i \bar{W}_i}_{\bar{F}^{ext} + \bar{F}^{in}} = \sum F_i^{ext}\right]$$

- ЗСЭ:

Если система замкнута, то полная энергия системы сохраняется $E + \Pi = const$

8. Законы динамики для неинерциальных систем отсчета. Кориолисовы и переносные силы инерции.



Формула сложного движения

$A,\ \omega,\ R(t)$

i, e

$\ddot{\bar{r}}_B = \frac{\bar{F}}{m}$ ← 2ЗН

$$\ddot{\bar{r}}_B = \ddot{\bar{R}} + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \bar{\rho}] + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{отн} + \bar{W}_{отн}$$

$$\left[\bar{W}_{отн} = \underbrace{-\ddot{\bar{R}} - \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \bar{\rho}] - \varepsilon \times \rho - 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{отн} - \frac{\bar{F}}{m}}_{\frac{F'}{m}}\right]$$

$$\left[\bar{W}_{отн} = \frac{\bar{F}'}{m} + \frac{\bar{F}}{m}\right]$$

силы инерции

Переносные силы:

- $m\ddot{\bar{R}}$ – поступательная сила инерции
- $m[\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}]$ – вращательная сила инерции
- $m \cdot \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \bar{\rho}]$ – центробежная сила

$2m[\bar\omega \times \bar v_{отн}]$ – сила Кориолиса

9. Движение точки в центральном поле. Интеграл площадей, интеграл энергии. Уравнение Бине

• <u>Центральное поле:</u> Движение под действием центральной силы

$\left[\bar F = \frac{\bar r}{r} f(\bar r, \bar v, t),\ f \text{ – скалярная}\right]$

$$m\ddot{\bar r} = \frac{\bar r}{r} f \,\Big|\, \bar r \times$$

$$m[\bar r \times \ddot{\bar r}] = \bar 0 \to [\bar r \times \ddot{\bar r}] = \bar 0$$

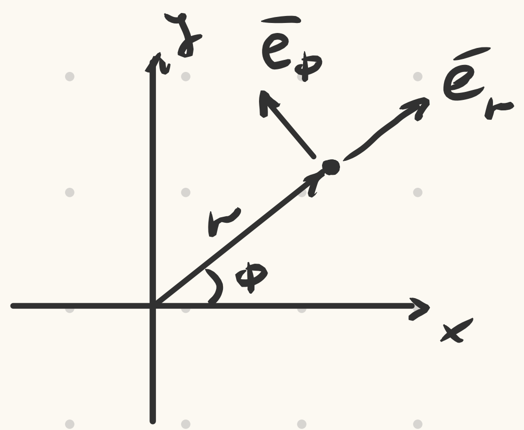
приведенный кин. момент

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{\bar r \times \dot{\bar r}}_{\bar c = \frac{\bar K}{m}}) = \underbrace{\dot{\bar r} \times \dot{\bar r}}_{0} + \bar r \times \ddot{\bar r} = \bar 0 \leftarrow$$

Интеграл площадей

$$\boxed{[\bar r \times \dot{\bar r}] = \overline{const}}$$

(*) $(\bar r, \bar c) = 0 \Rightarrow 3D \to 2D$



В полярных координатах:

$$mW_r = F_r = F$$

$$mW_\varphi = F_\varphi = 0$$

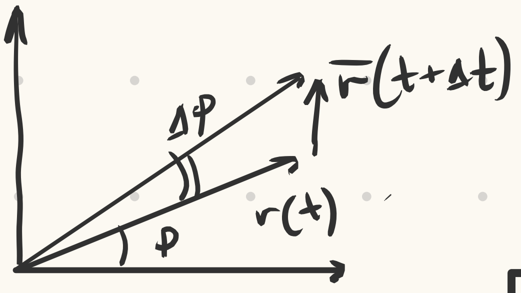
(*) $\dot{\bar r} = \begin{pmatrix} \dot\rho\cos\varphi - \rho\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot\rho\sin\varphi + \rho\dot\varphi\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left[v^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2\right]$ $\quad \frac{\partial v^2/2}{\partial \dot\rho} = \dot\rho$, $\quad \frac{\partial v^2/2}{\partial \rho} = \rho\dot\varphi^2$

$$W_r = \frac{1}{H_r}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial v^2/2}{\partial \dot r} - \frac{\partial v^2/2}{\partial r}\right) = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2$$

$$W_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial v^2/2}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial v^2/2}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi) - 0\right] = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi)$$

$$\begin{cases} \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 = \frac{F}{m} \quad (*) \\ \rho^2\dot\varphi = const \to \bar c = \bar r \times \dot{\bar r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho^2\dot\varphi \end{pmatrix} \end{cases}$$

• Р-м $r^2\dot{\varphi} = C$



$$\Delta S \simeq \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi$$

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$$

$$\boxed{\dot{S} = const}$$ 2 Закон Кеплера

„Геометрический смысл интеграла площадей"

• Потенциальность центральной силы

$$\delta A = F\delta r + 0\delta\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} dr - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial\varphi\partial r} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r\partial\varphi} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial 0}{\partial r} = 0 \Rightarrow$$ условие $\underline{F = F(r)}$ (нет завис. от φ)

- Для потенциального центрального поля выполнен ЗСЭ:

$$\begin{cases} \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \Pi(r) = E = const \\ r^2\dot{\varphi} = C \end{cases}$$

$$\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} + \underbrace{\frac{2\Pi(r)}{m}}_{\substack{u(r) \\ \text{потенциал}}} = \underbrace{\frac{2E}{m}}_{\substack{h \\ \text{приведенная энергия}}}$$

Получаем $$\boxed{h = const = \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{C^2}{r^2} + u(r)}_{V(r)}}$$ Интеграл энергии

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi} \rightarrow \frac{C}{\rho^2}\frac{d}{d\varphi} \Rightarrow \rho\dot{\varphi}^2 = \frac{C^2}{\rho^3}$$

Тогда $\rho^2\dot{\varphi} = C$, $\dot{\varphi} = \frac{C}{\rho^2}$

$$\dot{\rho} = \frac{d}{dt}\rho = \frac{C}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{C}{\rho^2}\rho'_\varphi = -C\left(\frac{1}{\rho}\right)'$$

Замена Бине
$\left\{ u = \frac{1}{\rho} \right\}$ $\rightarrow$ $\ddot{\rho} = \frac{d}{dt}(-cu') = -\frac{c^2}{\rho^2}u'' = -c^2u^2u''$

(*) $-c^2u^2u'' - c^2u^3 = \frac{F}{m}$

$$\boxed{u'' + u = -\frac{F}{mc^2u^2}} \quad \left\{u = \frac{1}{r}\right\}$$

Уравнение Бине

- Частный случай – Гравитация

$F = -\frac{\mu m}{r^2}$ $(\mu = \gamma M)$ $\rightarrow$ $u'' + u' = \frac{\mu}{c^2}$ ← диффур

...

$\frac{1}{\rho} = u = A\cos(\varphi + \alpha) + \frac{\mu}{c^2}$

$\rho = \frac{c^2/\mu}{1 + A\frac{c^2}{\mu}\cos(\varphi + \alpha)}$

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi + \alpha)}}$$

p – фокальный параметр
e – эксцентриситет