Матан. Теорминимум

Скубачевский Антон

7 декабря 2021 г.

1. Множества

    - что такое счетное и несчетное множество, множество рациональных счетно, действительных несчетно
    - принцип Архимеда, принцип Дедекинда, теорема Кантора о вложенных отрезках(всякая система вложенных отрезков имеет неподвижную точку); всякая стягивающаяся система вложенных отрезков имеет единственную неподвижную точку. Уметь давать в кванторах определение системы вложенных отрезков и стягивающейся системы вложенных отрезков.
    - Что такое ограниченное множество. Что такое верхняя, нижняя, точная верхняя, точная нижняя грань. Существование и единственность точной верхней/нижней грани.

2. Последовательности

    - Определение последовательности
    - Предел последовательности. Сходящаяся последовательность
    - Ограниченная последовательность. Теорема Вейерштрасса о пределе ограниченной монотонной последовательности.
    - Сходящаяся=>ограничена, обратное неверно ($(-1)^n$)
    - У последовательности может быть только один предел
    - Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями (не забыть потребовать существование и конечность пределов обеих последовательностей)

- Теорема о 2 милиционерах
- Бесконечно малая и бесконечно большая последовательности
- "Табличные"пределы: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0,\ a>1,\ k\in\mathbb{N}$
- Замечательный предел $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$
- Определение подпоследовательности. Определение частичного предела.
- Сходящаяся последовательность имеет единственный частичный предел.
- Теорема Больцано-Вейерштрасса.
- Определение фундаментальной последовательности. Критерий Коши (не путайте критерий коши и определение фунд последовательности! Критерий Коши верная формулировка: "Последовательность сходится тогда и только тогда (в обе стороны, тут тоже многие косячат) когда она фундаментальна")

3. Предел функции
    - Определение функции.
    - Определение предела функции по Коши и по Гейне(не забыть проколоть окрестность!).
    - Определение односторонних пределов. Предел функции в данной точке существует $\Leftrightarrow$ существуют и равны односторонние пределы.
    - Теорема о 2 милиционерах для функции.
    - Замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$.
    - Замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$
    - Критерий Коши существования предела функции.
4. Непрерывность
    - Определение непрерывности в точке. Определение непрерывности справа и слева.

- Определение точек разрыва. 1го рода устранимые и неустранимые, 2го рода. Примеры функций с такими разрывами.
- Теорема о промежуточном значении непрерывной функции.
- Теорема Вейерштрасса о функции, непрерывной на отрезке.
- Теорема о непрерывности сложной функции.
- Знать (в идеале уметь доказывать), что функция Дирихле разрывна в каждой точке; функция Римана непрерывна в иррациональных, разрывна в рациональных.
- Теорема об обратной функции

5. Производные.

   - Определение производной
   - Определение дифференцируемости и дифференциала
   - Определение непрерывной дифференцируемости. На отл могут попросить привести пример дифференцируемой но не непрерывно диф функции и доказать это (см Бесов или мои семинары).
   - Дифференцируемость $\Leftrightarrow$ существование КОНЕЧНОЙ производной.
   - Из дифференцируемости следует непрерывность, обратное неверно (|x|).
   - Геометрический смысл производной
   - Определение второго дифференциала (подчеркнуть, что дифференциал независимой переменной dx в данном определении фиксирован)
   - Инвариантность формы первого дифференциала, отсутствие инвариантности старших дифференциалов

6. Теоремы о среднем и формула Тейлора.

   - Теорема Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.
   - Что такое формула Тейлора и при каких условиях ее можно записать (существование n-й производной). Теоремы о разложении по формуле Тейлора с ост членами в форме Пеано и Лагранжа. Теорема о единственности разложения.

- Правило Лопиталя (отдельно теоремы для случая разных видов неопределенностей и для пределов в конечной точке и на бесконечности)

7. Равномерная непрерывность.

   - Определение.
   - Привести пример равномерно непрерывной и не равномерно непрерывной.
   - Из равномерной непрерывности следует непрерывность, обратное неверно, привести контрпример.
   - Теорема Кантора.
   - Модуль непрерывности.

8. Применение производной к исследованию функций.

   - Условия монотонности (f - дифференцируема на всем исследуемом интервале и $f' \geq 0$ или $f' \leq 0$ на всем интервале)
   - Определение точки экстремума
   - Теорема Ферма о среднем
   - Достаточные условия строгого экстремума (f непрерывна в x_0 и дифференцируема на некоторой ее окрестности, а f' меняет знак при переходе через x_0, тогда x_0 - точка экстремума).
   - Достаточные условия строгого экстремума в терминах старших производных (например, Бесов 7.1 теорема 4)
   - Определение выпуклости и точек перегиба
   - Достаточные условия выпуклости вверх/вниз ($f'' \leq 0$ или $f'' \geq 0$)
   - Необх условие точки перегиба ($f'' = 0$)
   - Достаточные условия точки перегиба ($f'(x_0)$ существует, а f'' меняет знак при переходе через x_0)

9. Кривые

   - Знать для вектор-функций определение предела, непрерывности, дифференцируемости

- Аналог теоремы Лагранжа для вектор-функций: Пусть $\vec{r}(t)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда $\exists \xi \in (a, b): \quad |\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leq |\vec{r}'(\xi)|(b - a)$
- Определение кривой (множество точек пространства с конкретным его описанием. Важно также в определении сказать, что вектор-функция, задающая кривую, должна быть непрерывной, иначе определение будет неполным)
- Определение гладкой кривой, простой кривой, замкнутой кривой, кратной точки, особой точки
- Определение длины дуги кривой. Важная теорема: $s'(t) = |\vec{r}'(t)|$, где s(t) - переменная длина дуги
- Определение касательного вектора, вектора главной нормали и бинормали. Сопровождающий трехгранник Френе (тупа 3 этих вектора по определению). Уметь их находить через $\vec{r}(t)$ и его производные. Кривизна, радиус кривизны, центр кривизны. Уравнения касательной, нормали и бинормали уметь строить. Соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости.

10. комплексные числа.

    - Если нет времени, лучше не тратьте на это: спрашивать это будут вряд ли. Но мб и будут =)