Лекция 7 (24.03.20) Инвариантные подпространства. Собственные векторы.

§ 6. Инвариантные подпространства.

Напомню, что в первом семестре рассматривались инвариантные прямые для аффинных преобразований плоскости. Наличие инвариантных прямых позволяло более наглядно представить себе, как действует преобразование.

Теперь это понятие обобщается на произвольные линейные преобразования линейных пространств.

Определение 1. Пусть $\varphi : L \to L$ – линейное преобразование пространства L. U – Подпространство U в L называется инвариантным относительно φ (короче, φ -инвариантным подпространством), если $\forall x \in U \Rightarrow \varphi(x) \in U$, т.е. $\varphi(U) \subseteq U$.

В этом случае можно определить ограничение (или сужение) преобразования φ на инвариантное подпространство U - $\varphi\big|_U : U \to U,\ \varphi\big|_U(x) = \varphi(x), \forall x \in U$ (1)

Ограничение является линейным преобразованием пространства U.

Теорема 1. 1) Если преобразование φ имеет инвариантное подпространство $U,\ \{o\} \neq U \neq L,\ \dim L = n, \dim U = m < n$, то в L существует базис ***e***, в котором матрица φ имеет блочно-треугольный вид

$$A_{\varphi;e} = \begin{Vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix},\ (2)$$

где A_1, A_2 - квадратные матрицы порядков m, n-m соответственно. При этом A_1 - матрица ограничения φ на U.

2) Если для U можно найти инвариантное дополнение V, т.е. такое инвариантное подпространство V, что $L = U \oplus V$ то в L существует базис ***e***, в котором матрица φ имеет блочно-диагональный вид

$$A_{\varphi;e} = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix},\ (3)$$

причем A_1 - матрица ограничения φ на U, A_2 - матрица ограничения φ на V.

Доказательство. 1) Выберем $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ - базис в U и дополним его до базиса $e = \{e_1, e_2, ..., e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ в L. Тогда $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i,\ j = 1, ..., m$, т.е. координаты векторов $\varphi(e_j), j = 1, ..., m$ с (m+1)-й по n-ю равны нулю. Таким образом, в выбранном базисе ***e*** матрица φ имеет вид (2).

2) На этот раз выберем базис в U и дополним его до базиса в L векторами из V. Тогда $\varphi(e_j) = \sum_{i=m+1}^{n} a_{ij} e_i,\ j = m+1, ..., n$, откуда видно, что в базисе, согласованном с разложением $L = U \oplus V$, матрица φ имеет вид (3). Ч.т.д.

Замечание. Верно и обратное. Если в некотором базисе пространства L матрица линейного преобразования φ имеет вид (2), то линейная оболочка первых m базисных векторов является инвариантным подпространством U. А если матрица φ имеет вид (3), то линейная оболочка остальных базисных векторов является инвариантным подпространством V, и $L = U \oplus V$.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть φ - поворот трехмерного пространства векторов $L = E_3$ (приложенных в начале координат) вокруг прямой l =U с направляющим вектором $\vec{a} \neq 0$ на угол α. Тогда инвариантные подпространства – эта прямая и плоскость $\pi = V$, перпендикулярная вектору $\vec{a}$, причем $L = U \oplus V$.

Пример 2. Пусть $L = L_1 \oplus L_2$ - прямая сумма ненулевых подпространств. Тогда любой вектор $x \in L$ единственным образом записывается в виде $x = x_1 + x_2,\ x_i \in L_i,\ i = 1,2$. Преобразование φ - проектирование L на L_1 параллельно L_2: $\varphi(x) = x_1$. Мы знаем уже, что это преобразование линейное, $L_1 = \operatorname{Im}\varphi,\ \ L_2 = Ker\varphi$. Эти подпространства являются инвариантными.
И это не случайно.
Утверждение 2. Для линейного преобразования $\varphi : L \to L$ инвариантными подпространствами являются: 1) $Ker\varphi$; 2) $\operatorname{Im}\varphi$; 3) Любое подпространство, содержащее $\operatorname{Im}\varphi$.
Отметим также инвариантность действий над инвариантными подпространствами.
Утверждение 3. Если $L_1, ..., L_k$ - φ-инвариантные подпространства в L, то 1) $L_1 + ... + L_k$ и 2) $L_1 \cap ... \cap L_k$ также инвариантны.
Доказательства оставляю в качестве упражнений.

§ 7. Собственные векторы и собственные значения линейных преобразований.

Вспомним сначала теорему о том, что любое аффинное преобразование плоскости является произведением ортогонального преобразования и сжатий к двум перпендикулярным прямым. Для многомерного обобщения осмысленно говорить о растяжениях вдоль направляющих векторов этих прямых.
Основное **определение 1.** Собственным вектором линейного преобразования $\varphi : L \to L$ над полем K называется **ненулевой** вектор $x \in L$, если $\exists \lambda \in K$: $\varphi(x) = \lambda x$ (1).
Это число λ называется собственным значением преобразования φ. Часто говорят, что x - собственный вектор с собственным значением λ.
Отметим, прежде всего, очевидное
Утверждение 1. Для данного $\lambda \in K$ множество всех векторов $L_\lambda := \{x \in L : \varphi(x) = \lambda x\}$ является линейным подпространством в L. Его можно охарактеризовать как $Ker(\varphi - \lambda E)$.
Оно называется собственным подпространством линейного преобразования φ, отвечающим собственному значению λ.
Примеры. 1. Пусть $L = C^\infty(R)$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций на прямой, $\varphi = \dfrac{d}{dx}$ - преобразование взятия производной. Для любого $\lambda \in R$ имеем $(Ce^{\lambda x})' = \lambda Ce^{\lambda x}$, т.е. эти функции – собственные для $\varphi = \dfrac{d}{dx}$. Можно доказать, что других таких функций нет.
Пример 2. В примере 2 предыдущего параграфа собственными подпространствами будут $L_1 = \operatorname{Im}\varphi, \lambda_1 = 1$ и $L_2 = Ker\varphi, \lambda_2 = 0$.
Покажем, что других собственных значений нет. Допустим, что $\exists \lambda \in K$: $\varphi(x) = \lambda x,\ x \neq 0$, т.е. $\varphi(x) = x_1 = \lambda x_1 + \lambda x_2 \Rightarrow (1-\lambda)x_1 = \lambda x_2$.
Так как $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, то $(1-\lambda)x_1 = 0$ и $\lambda x_2 = 0$. Отсюда следует, что либо $\lambda = 1,\ x_2 = 0$, либо $\lambda = 0,\ x_1 = 0$.
Теперь опишем способ вычисления собственных значений и собственных векторов в конечномерном пространстве с помощью матриц.
Пусть в данном базисе ***e*** пространства L преобразование φ имеет матрицу A_φ и $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = eX, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - собственный вектор. Тогда

$$A_\varphi X = \lambda X \Leftrightarrow (A_\varphi - \lambda E)X = 0 \quad (2).$$

Система уравнений (2) может иметь ненулевое решение только если

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = 0 \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется характеристическим уравнением матрицы A_φ, его корни – характеристическими корнями.
На этой стадии мы можем указать предварительный рецепт решения задачи о собственных векторах и собственных значениях.

1. Составить характеристическое уравнение (3) и найти его корни.
2. Для каждого характеристического корня λ, принадлежащего основному полю K, найти все (ненулевые) решения системы (2).
   (Обычно основное поле – действительные числа, и в качестве собственных значений подходят только действительные корни уравнения (3).)

На самом деле левая часть уравнения (3) – многочлен степени n, называемый характеристическим многочленом матрицы $A = A_\varphi$. Примем обозначение $\chi(\lambda) = \det(A_\varphi - \lambda E)$ (4).
Раскроем определитель:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii}-\lambda & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = \qquad (5)$$

$$= (a_{11}-\lambda)\cdot\ldots\cdot(a_{nn}-\lambda) + \textit{члены степени} \le (n-2) = (-\lambda)^n + (a_{11}+\ldots+a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \ldots + \det A$$

Утверждение 2. Характеристический многочлен матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса.
Доказательство. Пусть $e' = e\cdot S$ - новый базис, S –матрица перехода. Как мы знаем,

$$A'_\varphi = S^{-1}A_\varphi S \Rightarrow \det(A'_\varphi - \lambda E) = \det(S^{-1}A_\varphi S - \lambda S^{-1}\cdot S) = = \det(S^{-1}(A_\varphi - \lambda E)S) = \det(A_\varphi - \lambda E)$$, ч.т.д.

Тем самым можно говорить о характеристическом многочлене линейного преобразования.

Ключевой при изучении собственных векторов является
Теорема 3. Пусть $x_1,\ldots,x_m$- собственные векторы линейного преобразования φ с попарно различными собственными значениями $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$. Тогда $x_1,\ldots,x_m$ линейно независимы.
Доказательство. Надо доказать, что если $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m = 0$, то $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$.
Докажем индукцией по m. Для m = 1 это верно по определению. При m>1 предположим, что утверждение верно для m-1, и докажем для m. Вычислим φ от $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{m-1}x_{m-1} + \alpha_m x_m = 0$ (6):
$\alpha_1\lambda_1 x_1 + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda_{m-1}x_{m-1} + \alpha_m\lambda_m x_m = 0$ (7)
Умножим (6) на λ_m и вычтем из (7), получим $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_m)x_1 + \ldots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x_{m-1} = 0$. По предположению индукции, $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0, i = 1,\ldots,m-1$. Но $\lambda_i - \lambda_m \ne 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, 1 \le i \le m-1 \Rightarrow \alpha_m x_m = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0$. Утверждение доказано.
Следствие. Если характеристический многочлен имеет n различных (вещественных) корней $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (у многочлена степени n их не более n) и $h_1,\ldots,h_n$ - соответствующие собственные векторы, то $h_1,\ldots,h_n$ - базис в L.
В самом деле, по теореме 3, $h_1,\ldots,h_n$ линейно независимы, и количество их равно размерности L.

Посмотрим, какой вид приобретет матрица A_φ в базисе $h_1,...,h_n$ из собственных векторов. Вектор h_j, $1 \le i \le n$, в базисе $h_1,...,h_n$ имеет столбец координат $X_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1 равна j-я координата), вектор $\varphi(h_j)$ имеет столбец координат $\lambda_j X_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix}$, поэтому матрица $A_{\varphi;h} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{Vmatrix}$ диагональная, на диагонали находятся собственные значения (в выбранном порядке).

В следующем параграфе мы подробнее рассмотрим условия диагональности матрицы линейного преобразования.

Лекция 8. Диагонализируемость линейных преобразований

(31 марта 2020).

Прежде чем перейти к следующему параграфу, отметим связь коэффициентов характеристического многочлена с характеристическими корнями.

Утверждение 4. Пусть $\lambda_1,...,\lambda_n$ - корни характеристического многочлена $\chi(\lambda)=\det(A_\varphi-\lambda E)$ матрицы $A=A_\varphi$, тогда $\lambda_1+...+\lambda_n=a_{11}+...+a_{nn}=trA$ - след матрицы А, $\lambda_1\cdot...\cdot\lambda_n=\det A$.

Доказательство. Это утверждение – частный случай теоремы Виета. По условию,

$$\chi(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)\cdot...\cdot(\lambda_n-\lambda)=(-\lambda)^n+(\sum_{i=1}^n\lambda_i)(-\lambda)^{n-1}+\cdots+\prod_{i=1}^n\lambda_i .$$

Сравнив эти формулы с выведенными в (5) выражениями, получим требуемое.

Формулы из утверждения 4 часто применяются.

§ 8. Диагонализируемость линейных преобразований.

Определение. Линейное преобразование $\varphi:L\to L$ будем называть диагонализипуемым, если в L существует базис, в котором матрица A_φ диагональна.

Напомним определение собственного подпространства $L_\lambda:=\{x\in L:\varphi(x)=\lambda x\}$ преобразования φ.

Лемма 1. $\dim L_\lambda=n-rg(A_\varphi-\lambda E)$.

Доказательство. Координатные столбцы собственных векторов – решения системы линейных уравнений $(A_\varphi-\lambda E)X=0$, а количество линейно независимых решений системы как раз и равно $n-rg(A_\varphi-\lambda E)$.

Лемма 2. Пусть λ_0 - характеристический корень кратности k матрицы A_φ, тогда имеет место неравенство $\dim L_{\lambda_0}\le k$ (1).

Замечание. Размерность собственного подпространства $\dim L_{\lambda_0}$ часто называют геометрической кратностью корня λ_0, в то время как k – его алгебраическая кратность. В этих терминах неравенство (1) формулируется так: геометрическая кратность характеристического корня не превосходит его алгебраической кратности.

Доказательство. Пусть $\dim L_{\lambda_0}=m\ge 1$. Выберем базис $\{e_1,e_2,...,e_m\}$ в собственном подпространстве и дополним его до базиса $e=\{e_1,e_2,...,e_m,e_{m+1},\ldots,e_n\}$ в L. В этом базисе матрица преобразования φ приобретет блочно-треугольный вид

$A_{\varphi;e} = \begin{Vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda_0 E & B \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix}$ с диагональными блоками порядков m и n – m соответственно.

Вычислим характеристический многочлен матрицы преобразования φ (учтем, что он не зависит от выбора базиса):

$\chi(\lambda) = \det(A_\varphi - \lambda E) = \begin{vmatrix} (\lambda_0 - \lambda)E_m & B \\ 0 & A_2 - \lambda E_{n-m} \end{vmatrix} = (\lambda_0 - \lambda)^m \left| A_2 - \lambda E_{n-m} \right|$. Видим, что λ_0 - характеристический корень кратности по меньшей мере m, но он может быть еще корнем многочлена $\left| A_2 - \lambda E_{n-m} \right|$, так что полная кратность k больше или равна m. Ч.т.д.

Лемма 3. Если $L_{\lambda_1}, ..., L_{\lambda_r}$ - собственные подпространства, отвечающие попарно различным собственным значениям, то их сумма – прямая сумма: $L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_r}$.

Доказательство. Это следствие линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Пусть $e_{i1}, ..., e_{i,m_i}$ $(m_i = \dim L_{\lambda_i}), i = 1, ..., r$ - базис подпространства L_{λ_i}. Покажем, что векторы $e_{11}, ..., e_{r,m_r}$ (объединение всех базисов) линейно независимы. Проведем индукцию по r. Для r=1 это верно по построению.

Допустим, r >1 и $\sum_{i,j} c_{ij} e_{ij} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} e_{ij} = 0$. Если вектор $v_i = \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} e_{ij} \neq 0$, то он собственный с собственным значением λ_i. В этом случае хотя бы один коэффициент в этой линейной комбинации отличен от 0, без ограничения общности, c_{i1}. Тогда

$v_i = c_{i1} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{c_{i1}} e_{ij} = c_{i1} u_i$ и u_i тоже собственный. Таким образом, $\sum_{i: c_{i1} \neq 0}^{r} c_{i1} u_i = 0 \Rightarrow c_{i1} = 0,\ i = 1, ..., r$, в силу линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям – противоречие. Значит, $v_i = \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} e_{ij} = 0$, $\forall i = 1, ..., r \Rightarrow c_{ij} = 0, \forall i, j$, так как базисные векторы каждого подпространства линейно независимы. Итак, все векторы $e_{11}, ..., e_{r,m_r}$ линейно независимы, что и означает, что сумма собственных подпространств – прямая. Ч.т.д.

Сформулируем теперь необходимые и достаточные условия диагонализируемости матрицы линейного преобразования.

Теорема. Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_r$ - характеристические корни матрицы линейного преобразования $\varphi : L \to L$ кратностей соответственно $k_1, ..., k_r$ $(k_i \geq 1, i = 1, ..., r)$ следующие условия равносильны:

1) В L существует базис $h = \{h_1, ..., h_n\}$, в котором матрица преобразования φ диагональна.
2) В L существует базис из собственных векторов преобразования φ.
3) Все корни $\lambda_1, ..., \lambda_r$ принадлежат основному полю K (если основное поле R – поле действительных чисел, то все характеристические корни должны быть действительными), и для любого $i = 1, ..., r,\ k_i = \dim L_{\lambda_i}$.
4) $L = L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_r}$.

Доказательство. Равносильность 1) и 2) почти очевидна. Если матрица является диагональной: $A_{\varphi;h} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{Vmatrix}$ (диагональные числа могут повторяться), то все векторы базиса h собственные, причем $\varphi(h_j) = \lambda_j h_j,\ j = 1,...,n$.

Обратно, если $h = \{h_1,...,h_n\}$ - базис в L, причем $\varphi(h_j) = \lambda_j h_j,\ j = 1,...,n$, то матрица φ в этом базисе диагональна (как объяснялось в конце предыдущей лекции).

$1)\,(или\,2) \Rightarrow 3), 4)$. Пусть h – базис, в котором матрица A_φ диагональна. Все диагональные элементы являются собственными значениями и корнями характеристического многочлена, т.е. он имеет n корней, и все они принадлежат основному полю (действительны). Все векторы базиса h - собственные для φ. Занумеруем их таким образом, чтобы сначала на диагонали стояло характеристическое число λ_1 (p_1 раз), затем λ_2 (p_2 раз), и т.д. λ_r (p_r раз). Тогда $h_1,...,h_{p_1} \in L_{\lambda_1}, h_{p_1+1},...,h_{p_1+p_2} \in L_{\lambda_2}$ и т.д., тем самым $\dim L_{\lambda i} \geq p_i, i = 1,...,r$.

Следовательно,

$\dim(\sum_{i=1}^{r} L_{\lambda i}) = \sum_{i=1}^{r} \dim L_{\lambda i} \geq \sum_{i=1}^{r} p_i = n$, поскольку сумма собственных подпространств прямая, по лемме 3. Таким образом, $L = L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_r}$ - доказано 4).

Кроме того, теперь ясно, что $\dim L_{\lambda i} = m_i = p_i, i = 1,...,r$. Если для некоторого $k_i > \dim L_{\lambda_i} \Rightarrow n = \sum_{i=1}^{n} k_i > \sum_{i=1}^{n} m_i = n$ - противоречие. Доказано 3). Обратно,

$4)\,(или\,3) \Rightarrow 1)\,(или\,2)$. Теперь дано, что все характеристические корни вещественные, и $i = 1,...,r,\ k_i = \dim L_{\lambda_i} \Rightarrow \dim(\sum_{i=1}^{r} L_{\lambda i}) = \sum_{i=1}^{r} \dim L_{\lambda i} = \sum_{i=1}^{r} k_i = n$, т.е. из 3) следует 4). А справедливость 4) означает, что объединение базисов собственных подпространств – базис из собственных векторов преобразования φ. Теорема доказана.

Утверждение 4. Если φ диагонализируемо, то $L = \operatorname{Im}\varphi \oplus Ker\varphi$.

Доказательство. Собственные базисные векторы можно занумеровать так, что $h_1,...,h_r$ отвечают ненулевым собственным значениям, остальные $h_{r+1},...,h_n$, тогда $\langle h_1,...,h_r \rangle = \operatorname{Im}\varphi,\ \langle h_{r+1},...,h_n \rangle = Ker\varphi$.

Покажем два применения приведения матриц линейных преобразований к диагональному виду.

Применение 1. Решение систем линейных уравнений $AX = b,\ |A| \neq 0$.

Матрицу A можно воспринимать как матрицу некоторого линейного преобразования φ. Допустим, что A, как матрица этого преобразования, приводится к диагональному виду. Это значит, что $\exists S:\ A' = S^{-1}AS$ (S – матрица перехода к собственному базису) – диагональная матрица. Сделаем в системе замену $X = SY$, система примет вид $ASY = b \Leftrightarrow (S^{-1}AS)Y = S^{-1}b = b'$. Система привелась к виду $\begin{cases} \lambda_1 y_1 = b_1' \\ .... \\ \lambda_n y_n = b_n' \end{cases}$, $Y = \begin{pmatrix} b_1'/\lambda_1 \\ \vdots \\ b_n'/\lambda_n \end{pmatrix}$, $X = S^{-1}Y$.

Применение 2. Пусть A – квадратная матрица порядка n, и $\exists S:\ A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ диагональная матрица. Пусть требуется возвести A в натуральную степень m. Имеем

$$A = SA'S^{-1} \Rightarrow A^2 = (SA'S^{-1})(SA'S^{-1}) = S(A')^2 S^{-1}, ...,$$

$$A^m = S\begin{pmatrix} \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}S^{-1},$$

по индукции.

Что делать, если матрица не приводится к диагональному виду, обсудим в следующем параграфе.

Лекция 9 (7 апреля 2020) Билинейные и квадратичные функции. Приведение квадратичных форм к каноническому виду.

Определение 1. Пусть L – линейное пространство над полем K (достаточно считать, что поле скаляров – R – действительные числа). Функция двух векторных переменных $b(x,y): L\times L\to K$ называется *билинейной функцией*, если она линейна по каждому аргументу, то есть:

(1) $b(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y)=\alpha_1 b(x_1,y)+\alpha_2 b(x_2,y)$,

(2) $b(x,\beta_1 y_1+\beta_2 y_2)=\beta_1 b(x,y_1)+\beta_2 b(x,y_2)$ для любых векторов $x,x_1,x_2,y,y_1,y_2\in L$ и любых скаляров $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in K$.

Скалярное произведение геометрических векторов – самый наглядный пример билинейной функции.

Прежде чем перейти к рассмотрению билинейных функций в координатах, приведем примеры функций, заданных без координат.

Пример 1. Пусть $L=R[a,b]$ - линейное пространство функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$, для любых функций $f(x),g(x)\in L$ интеграл от произведения $I(f,g)=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ является билинейной функцией на L.

Пример 2. На пространстве $L=M_n(R)$ действительных матриц порядка n рассмотрим две функции для любых матриц $X,Y\in M_n(R)$ а) $b_1(X,Y)=tr(XY)$ - след произведения;

б) $b_2(X,Y)=tr(X^T\cdot Y)$. Билинейность этих функций следует из линейности функции следа $trX=x_{11}+...+x_{nn}$ и свойств действий над матрицами.

Пусть L имеет размерность n, $e=\|e_1,e_2,....,e_n\|$ - базис в L. Обозначим $b_{ij}=b(e_i,e_j)\,(1\le i,j\le n)$.

Определение 2. Матрицу $B=(b_{ij})=B_e$ называют *матрицей билинейной функции* $b(x,y)$ в базисе $e=\|e_1,e_2,....,e_n\|$.

Координатная запись билинейной функции.

Пусть $x=\sum\limits_{i=1}^n x_i e_i,\ y=\sum\limits_{j=1}^n y_j e_j$, тогда

$$b(x,y)=b(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_jb(e_i,e_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_ib_{ij}y_j=X^TBY \quad (3),$$

где $B=(b_{ij})$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, а $X^T=(x_1\dots x_n)$.

Определение 3. Запись билинейной функции в виде многочлена (3) называют билинейной формой. (По традиции, термин «билинейная форма» используется и для билинейной функции, не записанной в координатах.)

Утверждение 1. (Изменение матрицы билинейной функции при замене базиса). Пусть $e=(e_1,\dots,e_n)$ и $e'=(e_1',\dots,e_n')$ - два базиса пространства L, S – матрица перехода от базиса e к базису e', B, B' – матрицы билинейной формы **b** в базисах e,e' соответственно.

Тогда $B'=S^TBS$. (4)

Доказательство. Мы знаем, что $X=SX'$, $Y=SY'$ $(\det S\neq 0)$, где X', Y' - столбцы координат векторов x,y в новом базисе. Подставим эти выражения в (3):
$X^TBY=(SX')^TB(SY')=(X')^T(S^TBS)Y'$, для любых $X',\,Y'\in R^n$, следовательно, $B'=S^TBS$ (чтобы доказать совпадение матриц , нужно подставлять в равенство $(X')^T(S^TBS)Y'=(X')^TB'Y'$ координаты всех пар e_i',e'_j : $E_i^TBE_j=b_{ij}$), чтд.

Следствие из формулы (4): 1) ранг матрицы B и 2) знак ее определителя (если он не равен 0) не зависят от выбора базиса.

Определение 4. Билинейная форма $b(x,y)$ называется *симметрической*, если $\forall x,y\in L,\;\; b(x,y)=b(y,x)$, и кососимметрической, если $\forall x,y\in L,\;\; b(x,y)=-b(y,x)$.

Утверждение 2. Матрица *симметрической* билинейной формы в любом базисе является симметрической, т.е. $B^T=B$, а кососимметрической билинейной формы – кососимметрической: $B^T=-B$. Это очевидно.

Утверждение 3. Любая билинейная функция $b(x,y)$ единственным образом представляется в виде суммы симметрической и кососимметрической функций.

Доказательство. Будем искать разложение $b(x,y)=b_+(x,y)+b_-(x,y)$ (1), где $b_+(x,y)=b_+(y,x),\; b_-(x,y)=-b_-(y,x)$. Тогда $b(y,x)=b_+(x,y)-b_-(x,y)$ (2). Сложив равенства (1) и (2), получим $b_+(x,y)=\dfrac{b(x,y)+b(y,x)}{2}$, $b_-(x,y)=\dfrac{b(x,y)-b(y,x)}{2}$.

Замечание. Этому разложению соответствует разложение любой квадратной матрицы в сумму симметрической и кососимметрической: $B=\dfrac{B+B^T}{2}+\dfrac{B-B^T}{2}$.

Определение 5. Квадратичной функцией (формой), порожденной билинейной формой $b(x,y)$, называется функция $k(x)=b(x,x),\;\forall x\in L$, если $\exists x\in L: k(x)\neq 0$.

Отметим, что существует бесконечно много билинейных функций, порождающих одну и ту же квадратичную функцию, поскольку из
$b(x,y)=b_+(x,y)+b_-(x,y)\Rightarrow b_-(x,x)\equiv 0,\ b(x,x)=b_+(x,x)$.

Утверждение 4. Для любой квадратичной функции $k(x)$ существует единственная симметрическая билинейная форма $b(x,y)$ такая, что $k(x)=b(x,x),\ \forall x\in L$.

Доказательство. Имеем
$$k(x)=b(x+y,x+y)=b(x,x)+b(y,y)+2b(x,y)=k(x)+k(y)+2b(x,y)\Rightarrow$$
$$b(x,y)=\frac{k(x+y)-k(x)-k(y)}{2}$$, чтд.

Матрицей квадратичной формы называют матрицу породившей ее симметрической билинейной формы. Рассмотрим к*оординатную запись квадратичной формы*. Пусть
$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$, тогда

$$b(x,x)=b(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}x_je_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_jb(e_i,e_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_ib_{ij}x_j=X^TBX \quad (5),$$ где

$B=(b_{ij})$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, а $X^T=(x_1\dots x_n)$.

С учетом симметричности коэффициентов квадратичной формы, ее можно записать в виде

$$k(x)=b_{11}x_1^2+...+b_{nn}x_n^2+2\sum_{1\le i<j\le n}b_{ij}x_ix_j .$$

Далее будем рассматривать только вещественные квадратичные формы (до этого только нужно было, чтобы характеристика поля K не равнялась 2, чтобы можно было делить на 2.

Определение 6. Квадратичная форма вида $k(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i^2$ называется *диагональной*.

Она называется *канонической*, если $\alpha_i\in\{1,-1,0\}$. Более детально,

$k(x)=\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\sum_{i=p+1}^{p+q}x_i^2$. Числа p и q называются *положительным* и *отрицательным* индексами инерции квадратичной формы.

Лемма. Общее число ненулевых коэффициентов диагональной (или канонической) квадратичной формы равно рангу её матрицы.

В самом деле, матрица диагональной квадратичной формы $k(x)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i^2\ (r\le n)$ равна

$$B=\begin{Vmatrix}\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \alpha_r & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{Vmatrix}\ (\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_r\ne 0)\Rightarrow rgB=r.$$

Теорема 1. (О приведении квадратичной формы к каноническому виду) Для любой квадратичной формы $k(x)=b_{11}x_1^2+\ldots+b_{nn}x_n^2+2\sum_{1\le i<j\le n} b_{ij}x_i x_j$ существует такая невырожденная замена переменных $X=SY$ $(\det S\ne 0)$, что в новых переменных она принимает канонический вид $k=\sum_{i=1}^{p} y_i^2-\sum_{i=p+1}^{p+q} y_i^2$.

Теорема 2 (о единственности – **закон инерции**). Если $X=TZ$ $(\det T\ne 0)$ - другая замена переменных, приводящая квадратичную форму $k(x)$ к каноническому виду $k=\sum_{i=1}^{s} z_j^2-\sum_{i=s+1}^{s+t} z_j^2$, то $p=s, q=t$, причем $p+q=rgB$.

Заметим, что равенство $p+q=rgB$ следует из сохранения ранга матрицы В при замене базиса.

Доказательство теоремы 1 – ***алгоритм Лагранжа выделения полных квадратов.***

1) Допустим, что $\exists i:\ b_{ii}\ne 0$, при необходимости перенумеровав переменные, можем считать, что $b_{11}\ne 0$. Тогда выделим в квадратичной форме все одночлены, содержащие x_1, и дополним это выражение до квадрата:

$$k(x)=b_{11}x_1^2+2\sum_{j=2}^{n} b_{1j}x_1x_j+(\sum_{i=2}^{n} b_{ii}x_i^2+2\sum_{2\le i<j\le n} b_{ij}x_ix_j)\ =$$

$$=b_{11}(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2+(\sum_{i=2}^{n} b_{ii}x_i^2+2\sum_{2\le i<j\le n} b_{ij}x_ix_j-(\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2)=b_{11}(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2+k_1(x_2,\ldots,x_n)$$

Тогда сделаем замену $z_1=(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j),\ z_2=x_2,\ldots,\ z_n=x_n$.

Квадратичная форма $k_1(x_2,\ldots,x_n)$ не зависит от x_1, и к ней можно применить тот же метод, в результате получится квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i z_i^2\quad(\alpha_1=b_{11},\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r\ne 0, r=rgB).$$

Остается сделать замену $y_i=\sqrt{|\alpha_i|}z_i, i=1,\ldots,r;\ \ y_k=z_k, k=r+1,\ldots,n$

2) Препятствие к выделению квадратов может возникнуть, если $a_{ii}=0,\ \forall i=1,\ldots,n$. Так как

$k(x) \neq 0,\ \text{то}\ \exists i, j : b_{ij} \neq 0$. Перенумеровав при необходимости переменные, можем добиться, чтобы $b_{12} \neq 0$. Тогда сделаем подготовительную замену $x_1 = x'_1 - x'_2,\ x_2 = x'_1 + x'_2,\ x_j = x'_j\ (j \geq 3)$. и $k(x') = 2b_{12}(x'^2_1 - x'^2_2) + k'(x')$, где в $k'(x')$ нет x'^2_1. Далее можно продолжать, как в п. 1). □

(Замечание. Вместо параметров p и q, введенных выше, нередко рассматривают величины r=p+q – ранг B и $\sigma = p - q$ - сигнатуру.)

Примечание. Вместо дополнения до квадратов, можно упрощать матрицу квадратичной формы, имитируя алгоритм Гаусса, только обязательно делать согласованные преобразования столбцов и строк, в соответствии с формулой $B' = S^T BS$.

Доказательство теоремы 2. Пусть в базисе $e_1,...,e_p;e_{p+1},...,e_{p+q},...,e_n$ квадратичная форма имеет вид $k = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i^2$, а в базисе $f_1,...,f_s;f_{s+1},...,f_{s+t},...,f_n$ она имеет вид $k = \sum_{i=1}^{s} z_j^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} z_j^2$. Во-первых, $p + q = s + t = rgB$, так как ранг матрицы квадратичной формы не изменяется при замене базиса.

Предположим, что утверждение теоремы неверно и, скажем, t>q, тогда s < p. Рассмотрим подпространства

$L_1 = \langle e_1,...,e_p\rangle, L_2 = \langle f_{s+1},...,f_n\rangle$: ясно, что $k\big|_{L_1} > 0, k\big|_{L_2} \leq 0$ (последние записи обозначают ограничения функции k на L_1, L_2 соответственно). При этом

$n \geq \dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2)$ и

$\dim(L_1) + \dim(L_2) = p + (n - s) = n + (p - s) > n$, следовательно,

$$n \geq \dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2) > n - \dim(L_1 \cap L_2) \Rightarrow L_1 \cap L_2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\exists a \in L_1 \cap L_2, a \neq 0,\ k(a) > 0\ , k(a) \leq 0$$

противоречие.

Теперь предположим, что s > p, тогда, как и выше, $\langle e_{p+1},...,e_n\rangle \cap \langle f_1,...,f_s\rangle \neq 0$ - снова противоречие. Таким образом, s = p и, значит, t = q, чтд.

Лекция 10. (14 апреля 20) Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Определение. Квадратичная функция $k(x)$ на линейном пространстве L называется положительно определенной, если $\forall x \in L, x \neq 0,\ k(x) > 0$ (краткое обозначение этого свойства: $k > 0$);
отрицательно определенной, если $\forall x \in L, x \neq 0,\ k(x) < 0$ (краткое обозначение : $k < 0$);
неотрицательно определенной, если $\forall x \in L,\ k(x) \geq 0$ (краткое обозначение : $k \geq 0$);
неположительно определенной, если $\forall x \in L,\ k(x) \leq 0$ (краткое обозначение : $k \leq 0$);
неопределенной, если $\exists x \in L:\ k(x) > 0,\ \exists y \in L:\ k(y) < 0$ (краткое обозначение : $k >< 0$).

Пусть в некотором базисе квадратичная функция записана в виде квадратичной формы

$$k(x) = b_{11}x_1^2 + ... + b_{nn}x_n^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij}x_i x_j \quad (1)$$

с матрицей $B = (b_{ij}) = B^T$

Лемма. Квадратичная форма тогда и только тогда является положительно определенной, когда она приводится к диагональному виду

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2,\ \alpha_i > 0, i = 1,...,n \quad (2)$$

$\Leftrightarrow$

к каноническому виду $k(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$. (3)

(*Замечание*. От вида (2) к каноническому виду (3) можно перейти в результате замены $y_i = \sqrt{\alpha_i} z_i, i = 1,...,n$).

Доказательство леммы. То, что диагональная форма со всеми положительными коэффициентами или каноническая форма $k(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ является положительно определенной, ясно.

Обратно, допустим, что данная положительно определенная квадратичная форма $k(x)$ имеет канонический вид $k = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i^2$. Если, вопреки доказываемому, $p < n \Rightarrow k(0,...,0,1) \leq 0$, что противоречит положительной определенности. □

Примечание. Критерии всех случаев знака квадратичной формы в терминах инвариантов p, q таковы:
$k > 0 \Leftrightarrow p = n, q = 0$; $k < 0 \Leftrightarrow p = 0, q = n$); $k \geq 0 \Leftrightarrow p = r, q = 0$; $k \leq 0 \Leftrightarrow p = 0, q = r$;
$k >< 0 \Leftrightarrow p > 0, q > 0$).

В то же время желательно уметь исследовать знакоопределенность квадратичной формы непосредственно по её матрице, без приведения к каноническому виду.

Теорема (Критерий Сильвестра).
Для положительной определенности квадратичной формы $k(x)$ в R^n необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры её матрицы B, имеющие вид

$$\Delta_m = \det \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{Vmatrix} \quad , \; m = 1, \dots n \quad (b_{ij} = b_{ji}, \; \forall i, j),$$

были положительными.

Доказательство критерия Сильвестра.

Достаточность.

Дано, что все главные миноры матрицы квадратичной формы положительны, надо доказать, что она является положительно определенной.

Воспользуемся методом математической индукции и леммой.

Для $n=1$ достаточность очевидна.

Допустим, что $n>1$ и из положительности главных миноров матрицы квадратичной формы порядка до $n-1$ включительно следует возможность приведения квадратичной формы от $n-1$ переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$ к виду $k(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$.

Покажем, что в этом случае достаточность будет иметь место и для квадратичной формы, зависящей от *n* переменных.

В выражении для квадратичной формы, зависящей от *n* переменных $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$, выделим слагаемые, содержащие x_n:

$$k(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} b_{ji} x_j x_i + 2 \sum_{j=1}^{n-1} b_{jn} x_j x_n + b_{nn} x_n^2 .$$

Двойная сумма $\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} b_{ji} x_j x_i = k^*(x_1, \dots, x_{n-1})$ в правой части этого равенства есть квадратичная форма $k^*(x)$, зависящая от $n-1$ переменной, причем её матрица – подматрица порядка $n-1$ матрицы формы $k(x)$, расположенная в левом верхнем углу, так что главные миноры её матрицы совпадают с главными минорами матрицы $k(x)$ до порядка $n-1$ включительно, которые, по условию, положительны. Отсюда следует, по предположению индукции, что квадратичная форма $k^*(x)$ положительно определенная и для неё существует невырожденная замена переменных

$$x_j = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{ji} y_i \quad ; \qquad j = 1, \dots, n-1 ,$$

приводящая её к каноническому виду: $k^*(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$.

Запишем квадратичную форму $k(x)$ в новых переменных (x_n пока не заменяли):

$$k = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} b'_{in} y_i x_n + b_{nn} x_n^2$$

и выделим полные квадраты по $y_1, \dots, y_{n-1}$:

$$k=\sum_{i=1}^{n-1}(y_i^2+2b'_{in}y_ix_n+b'^{\,2}_{in}x_n^2)+(b_{nn}-\sum_{i=1}^{n-1}b'^{\,2}_{in})x_n^2=\sum_{i=1}^{n-1}z_i^2+b''_{nn}x_n^2,$$

где $b''_{nn}=b_{nn}-\sum_{i=1}^{n-1}b'^{\,2}_{in}$; $z_i=y_i+b'_{in}x_n$; $\quad i=1,\ldots n-1$.

В матричном виде эту замену переменных можно записать как

$$\begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_{n-1} \\ x_n \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b'_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ x_n \end{Vmatrix}$$

и поскольку определитель ее матрицы отличен от нуля, то эта замена невырожденная.

Наконец, вспомним, что определитель матрицы квадратичной формы сохраняет знак при замене базиса. Определитель матрицы В квадратичной функции в исходном базисе положительный, поскольку этот определитель является главным минором порядка n. Но из выражения для $k(x)$ в конечном базисе мы получаем, что определитель матрицы квадратичной формы k равен b''_{nn}. Поэтому $b''_{nn}>0$ и можно ввести переменную $z_n=\sqrt{b''_{nn}}x_n$, в результате чего получаем канонический вид квадратичной формы

$$k=\sum_{i=1}^{n}z_i^2 .$$

Следовательно, квадратичная функция $k(x)$ положительно определённа.
Достаточность доказана.

Необходимость.
Дано, что квадратичная функция положительно определенна, и надо доказать положительность главных миноров ее матрицы. Снова применим индукцию по числу переменных n.
Для $n=1$ это ясно.
Пусть $n>1$ и для форм от меньшего числа переменных утверждение теоремы верно.
Поскольку квадратичная форма $k^*(x)$ из доказательства достаточности также является положительно определенной (ее значения – это значения $k(x)$ при $x_n=0$), то по предположению индукции ее главные миноры, совпадающие с главными минорами матрицы В до порядка $n-1$, положительны. А определитель самой матрицы В, который является главным минором порядка n, положителен, поскольку $k(x)$ приводится к каноническому виду $k=\sum_{i=1}^{n}z_i^2$, и определитель матрицы полученной при этом квадратичной формы равен 1 и имеет такой же знак, как и определитель матрицы В.
Теорема полностью доказана. □

Следствие. (Критерий отрицательной определенности). **Для отрицательной определенности квадратичной формы $k(x)$ в R^n необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры её матрицы В имели чередующиеся знаки, начиная с минуса, т.е.** $(-1)^m\Delta_m>0, m=1,...,n$.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму $-k(x)>0$ с матрицей $B'=-B=(-b_{ij})$: для нее, по критерию Сильвестра,

$$\Delta'_m = \det \begin{Vmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \dots & -b_{1m} \\ -b_{21} & -b_{22} & \dots & -b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \dots & -b_{mm} \end{Vmatrix} = (-1)^m \Delta_m > 0 \quad , \ m = 1, \dots n \quad \textbf{, ч.т.д.}$$

Примечание. Знакоопределенность квадратичной формы понадобится для проверки достаточного условия экстремума функции нескольких переменных. А именно, пусть функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ имеет в окрестности точки $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ частные производные второго порядка по всем переменным. Если $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ - точка локального экстремума для $f(x)$, то все ее частные производные первого порядка равны нулю в этой точке. Далее можно рассмотреть квадратичную форму второго дифференциала в этой точке:
$d^2 f(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$. Если она является положительно определенной, то $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум, а если отрицательно определенной, то локальный максимум. Чаще всего применяют критерий Сильвестра к матрице $\left\| \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$ из вторых частных производных в этой точке.

Лекция 10а. (14 апреля 2020) ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО
Определение и основные свойства

В произвольном линейном пространстве отсутствуют понятия “длины”, “расстояния”, “величины угла” и других метрических величин. Однако их использование становится возможным, если в линейном пространстве дополнительно ввести специальную, определяемую ниже операцию.

Определение 1. Вещественное линейное пространство E называется *евклидовым пространством,* если каждой упорядоченной паре элементов x и y из E поставлено в соответствие вещественное число (x, y), называемое *скалярным произведением*, так, что выполнены аксиомы:

1°. $\forall x, y \in E, (x, y) = (y, x)$;

2°. $\forall x, y \in E, \lambda \in R,\ (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

3°. $\forall x_1, x_2, y \in E, (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

4°. $\forall x \in E, x \neq o,\ (x, x) > 0$.

Кроме того, геометры традиционно требуют, чтобы E было конечномерным. Но для приложений в теории функций, где функциональные пространства бесконечномерные, большинство нижеследующих результатов остается в силе.

Замечание: Аксиомы 1°- 4°. в совокупности означают, что скалярное произведение есть *билинейная* (что следует из 2° и 3°) и *симметричная* (п. 1°) функция, которая, кроме того, порождает *положительно определенную квадратичную* (п. 4°) функцию. Любая билинейная функция, обладающая данными свойствами, может быть принята за скалярное произведение.

Пример. Пространство n-мерных столбцов $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ со скалярным произведением,

определяемым по формуле $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$, есть евклидово пространство.

Определение 2. Пусть E – евклидово пространство. Назовем

1°. *Длиной* (или *нормой*) вектора x число $|x| = \sqrt{(x, x)}$;

2°. *Расстоянием* между элементами x и y число $\rho(x; y) = |x - y|$.

Теорема 1. (Неравенство Коши-Буняковского) . Для любых $x, y \in E$ имеет место неравенство $|(x, y)| \leq |x||y|$. Неравенство Коши-Буняковского превращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = |tx - y|^2\ :\ \forall t \in R, f(t) \geq 0$. Но

$$f(t) = (tx - y, tx - y) = t^2(x, x) - 2t(x, y) + (y, y) = t^2|x|^2 - 2t(x, y) + |y|^2 .$$

Этот квадратный трехчлен неотрицателен для любого t тогда и только тогда, когда его дискриминант меньше или равен 0, то есть

$$t^2|x|^2 - 2t(x, y) + |y|^2 \quad \frac{D}{4} = (x, y)^2 - |x|^2|y|^2 \leq 0 \Leftrightarrow |(x, y)| \leq |x||y| .$$

Пусть теперь $|(x, y)| = |x||y|$. Если x =0, то векторы линейно зависимы. Если $x \neq o$ то дискриминант квадратного трехчлена $f(t)$ равен 0, значит, он имеет единственный корень, т.е. $\exists t_0 :\ f(t_0) = |t_0 x - y|^2 = 0 \Rightarrow y = t_0 x$, в силу аксиомы 4°. Теорема доказана.

Следствие. Для любых $x, y \in E$ имеет место неравенство треугольника $|x + y| \leq |x| + |y|$. Равенство выполняется только если x, y сонаправлены.

Доказательство. $|x+y|^2=(x+y,x+y)=|x|^2+2(x,y)+|y|^2\le|x|^2+2|x||y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2$, по неравенству Коши-Буняковского. Следовательно, $|x+y|\le|x|+|y|$. Равенство означает, что $(x,y)=|x||y|, x=o$ *или* $y=\lambda x, (x,\lambda x)=\lambda(x,x)=|\lambda||x|^2\Rightarrow\lambda>0$.

Неравенство Коши-Буняковского позволяет ввести понятие угла между ненулевыми векторами.

.

Определение 3. Скажем, что угол между x и y равен α $(\alpha\in[0;\pi])$, где $\cos\alpha=\dfrac{(x,y)}{|x||y|}$.

Определение корректно, так как $\left|\dfrac{(x,y)}{|x||y|}\right|\le 1$. Итак, $\alpha=\arccos\dfrac{(x,y)}{|x||y|}$.

Векторы x и y называются *ортогональными*, $(x\perp y)$ если $(x,y)=0$. (Допускается, что хотя бы один из векторов равен 0).

Определение 4. Совокупность векторов $a_1,\dots,a_m$ евклидова пространства E называется ортогональной системой векторов, если $(a_i,a_j)=0, \forall i,j\,(i\ne j)$.

Утверждение 1. Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Доказательство. Допустим, что $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i=o$. Умножим это равенство скалярно на

$a_j\,(1\le j\le m):\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(a_i,a_j)=\lambda_j(a_j,a_j)=0\Rightarrow\lambda_j=0$, ч.т.д.

Отсюда следует, что если $m=n=\dim E$, *то* $a_1,\dots,a_m$ - базис в E.

Определение 5. В n-мерном евклидовом пространстве E базис $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ называется *ортогональным*, если $(e_i,e_j)=0,\ \forall i\ne j$, и *ортонормированным*, если $(e_i,e_j)=\delta_{ij},\ \forall i,j\ (1\le i,j\le n)$.

Разложение любого вектора по ортонормированному базису имеет вид $x=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$.

Теорема 2. Во евклидовом пространстве E существует ортонормированный базис.

Доказательство. Пусть $\dim E=n$ и $a_1,\dots,a_n$ некоторый базис в E. Построим из них ортогональный базис $b_1,\dots,b_n$.

Последовательное построение этих векторов называется алгоритмом, или *процессом ортогонализации Грама-Шмидта.* Этот процесс подчиняется, помимо ортогональности, требованию, чтобы $\forall k=1,...,n,\ \langle a_1,\dots,a_k\rangle=\langle b_1,\dots,b_k\rangle$

1) Выберем $b_1=a_1$. Вектор b_2 будем искать в виде $b_2=a_2-\alpha b_1$, где α - некоторый коэффициент. По требованию ортогональности,
$(b_1,b_2)=0,(b_1,a_2-\alpha b_1)=(b_1,a_2)-\alpha(b_1,b_1)=0\Rightarrow\alpha=\dfrac{(b_1,a_2)}{(b_1,b_1)},b_2=a_2-\dfrac{(b_1,a_2)}{(b_1,b_1)}b_1$. (Из вектора a_2 вычитается его ортогональная проекция на b_1 !).

   Заметим, что $b_2\ne o$, т.к. в противном случае оказалось бы, что $a_2-\alpha a_1=0$, т.е. базисные векторы линейно зависимы.

2) Шаг алгоритма. Пусть k > 1 и допустим, что попарно ортогональные векторы $b_1,\dots,b_{k-1}$ уже построены. Будем искать b_k в виде
$b_k=a_k-\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i^{(k)}b_i\perp b_1,...,b_{k-1}\Rightarrow(b_k,b_j)=(a_k,b_j)-\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i^{(k)}(b_i,b_j)=(a_k,b_j)-\alpha_j^{(k)}(b_j,b_j)=0,$

$\alpha_j^{(k)} = \dfrac{(a_k, b_j)}{(b_j, b_j)}$. Итак, $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{(a_k, b_j)}{(b_j, b_j)} b_i$. Как и выше, $b_k \neq o$, так как противное означало бы, что равна нулю нетривиальная линейная комбинация $a_1, \dots, a_k$ (поскольку $b_1, \dots, b_{k-1}$ - линейные комбинации векторов $a_1, \dots, a_{k-1}$), вопреки условию.

Процесс ортогонализации продолжается до k=n.

3) Чтобы получить искомый ортонормированный базис, надо нормировать векторы $b_1, \dots, b_n$, т.е. взять $c_k = \dfrac{b_k}{|b_k|}$, $k = 1, \dots, n$. Ч.т.д.

Координатная запись скалярного произведения.

Пусть в Е дан базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$, в нем $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, тогда (как и для любой билинейной функции)

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i g_{ij} y_j = X^T G Y \quad \text{, где } G = G_e = (g_{ij}),\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, а $X^T = (x_1 \dots x_n)$.

Определение 6. Матрица $G_e = \|(e_i, e_j)\|$ называется матрицей Грама базиса е.

Особенно просто записывается скалярное произведение в ортонормированном базисе: тогда $G_e = E, (x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Выясним, какой может быть матрица перехода между ортонормированными базисами.

Утверждение 2. Пусть S – матрица перехода от базиса $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ к базису $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$.

1) Если оба базиса ортонормированные, то матрица S ортогональная, т.е. $S^{-1} = S^T$.
2) Если $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ ортонормированный базис и матрица S ортогональная, то $e' = eS$ - ортонормированный базис.

Доказательство. 1) Вычислим произведение

$S^T S := C, c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s^T{}_{ik} s_{kj} = \sum_{k=1}^{n} s_{ki} s_{kj} = (e'_i, e'_j)$, по определению матрицы перехода и поскольку базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ ортонормированный. Но так как базис $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ тоже ортонормированный, то $(e'_i, e'_j) = \delta_{ij} \Rightarrow S^T S = E \Rightarrow S^T = S^{-1}$.

2) Так как матрица S ортогональная, то $S^T S = E$. Но, как было замечено при доказательстве п. 1), в ортонормированном базисе е произведение i-й и j-й строк матрицы S равно скалярному произведению $(e'_i, e'_j) \Rightarrow (e'_i, e'_j) = \delta_{ij}$, т.е. базис $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ ортонормированный. Ч.т.д.

Замечание. Из доказанного следует, что матрица, обратная к ортогональной, также ортогональна, т.к. она является матрицей обратного перехода между ортонормированными базисами.

Лекция 11. Ортогональное дополнение. Ортогональная проекция вектора на подпространство евклидова пространства. Расстояние и угол между вектором и подпространством.

Все события будут разворачиваться в евклидовом пространстве E.

Определение 1. Пусть $L \subset E$ - непустое подмножество. Ортогональным дополнением к L в E называется подмножество $L^{\perp} = \{y \in E : (x, y) = 0, \forall x \in L\}$. (1)

Так, если L –прямая в трехмерном векторном евклидовом пространстве, то ортогональным дополнением к L будет плоскость, перпендикулярная этой прямой.

Лемма 1. (а) $L^{\perp}$ – линейное подпространство в E;

(б) Если L содержит нулевой вектор ***o***, то $L \cap L^{\perp} = o$.

Доказательство. (а) Если $(x, y) = 0, \forall x \in L$, то $\forall \lambda \in R, (x, \lambda y) = \lambda(x, y) = 0, \forall x \in L \Rightarrow \lambda y \in L^{\perp}$.

Пусть также $(x, y_1) = 0, (x, y_2) = 0, \forall x \in L \Rightarrow (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 \in L^{\perp}$.

(б) Если вектор c принадлежит одновременно L и $L^{\perp}$, то $(c, c) = 0$. Из определения скалярного произведения следует, что $c = o$, что и утверждалось. Ч.т.д.

Выясним, как искать ортогональное дополнение к подпространству. Пусть L – подпространство в E размерности m, $L = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$.

Лемма 2. Вектор $y \in L^{\perp} \Leftrightarrow (a_i, y) = 0, \forall i = 1, ..., m$. (2)

Это утверждение напоминает признак перпендикулярности прямой и плоскости из школьной стереометрии.

Доказательство. Если $y \in L^{\perp}$, то $(x, y) = 0, \forall x \in L$, в частности, $(a_i, y) = 0, \forall i = 1, ..., m$.

Обратно, допустим, что $(a_i, y) = 0, \forall i = 1, ..., m$, тогда для любого вектора

$x \in L,\ x = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i,\ (x, y) = \sum_{i=1}^{m} x_i (a_i, y) = 0$. Ч.т.д.

Условия леммы 2 дают систему уравнений (2) для нахождения ортогонального дополнения, если известны координаты векторов $a_1, \ldots, a_m$ в некотором базисе $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Если базис ортонормированный, то матрицу A этой системы составляют строки координат векторов, линейной оболочкой которых является подпространство L. Таким образом, чтобы найти базис в $L^{\perp}$, нужно найти фундаментальную систему решений системы уравнений AX=0 (2).

В случае, когда L дано не как линейная оболочка, а как множество векторов, координаты которых в ортонормированном базисе удовлетворяют однородной системе уравнений $BX = 0$, причем строки матрицы B линейно независимы, то эти строки дают базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$, поскольку любое уравнение $b_{i1}x_1 + ... + b_{im}x_m = 0$ можно интерпретировать как скалярное произведение векторов $b_i = (b_{i1}, ..., b_{in})^T$ и $x = (x_1, ..., x_n)^T$, равное нулю.

Последние два абзаца дают способы решения нескольких задач из задания (и экзаменационных билетов) на ортогональные дополнения.

Следствие из леммы 2. $\dim L + \dim L^{\perp} = n = \dim E$.

В самом деле, размерность $L^{\perp}$ равна количеству базисных решений системы (2), а оно равно $n - rgA = n - \dim L$.

Прежде чем перейти к основному результату нашей темы, укажем некоторые свойства операции построения ортогонального дополнения.

Лемма 3. Для подпространств $L, L_1, L_2 \subset E$ справедливы равенства:

1) $(L^{\perp})^{\perp} = L$; 2) $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$; 3) $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$. (без доказательства)

%Доказательство. 1) $z \in (L^{\perp})^{\perp} \Leftrightarrow (z, y) = 0, \forall y \in L^{\perp}$, т.е. $(L^{\perp})^{\perp} \subseteq L$. Но $\dim(L^{\perp})^{\perp} = n - \dim L^{\perp} = n - (n - \dim L) = \dim L \Rightarrow (L^{\perp})^{\perp} = L$, ч.т.д.

2) Пусть

$$z \in L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}; \forall x = x_1 + x_2 \in L_1 + L_2, (x_1 + x_2, z) = (x_1, z) + (x_2, z) = 0 \Rightarrow$$

$$z \in (L_1 + L_2)^{\perp} \Rightarrow L_1^{\perp} \cap L_1^{\perp} \subseteq (L_1 + L_2)^{\perp}.$$

Но

$$\dim(L_1 + L_2)^{\perp} = n - \dim\ (L_1 + L_2) = n - (\dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_1)) =$$
$$= (n - \dim L_1) + (n - \dim L_2) - (n - \dim(L_1 \cap L_1)) = \dim L_1^{\perp} + \dim L_2^{\perp} - \dim(L_1 \cap L_1)^{\perp}$$

%

Теорема. $E = L \oplus L^{\perp}$.

Любой вектор $x \in E$ ***можно единственным образом представить в виде*** $x = y + z$***, где*** $y \in L,\ z \in L^{\perp}$**.**

Вектор y называется ***ортогональной проекцией*** вектора x на подпространство L, а вектор z называется ***ортогональной составляющей*** вектора x относительно подпространства L. Также применимы обозначения $y = x_{\|},\ z = x_{\perp}$, так что $x = x_{\|} + x_{\perp}$.

Доказательство теоремы. Согласно лемме 1(б), $L \cap L^{\perp} = o$, а по следствию из леммы 2, $\dim L + \dim L^{\perp} = n = \dim E$. По критерию прямой суммы, это и означает, что $E = L \oplus L^{\perp}$. Таким образом, любой вектор x из E единственным образом представляется в виде $x = y + z$, где $y \in L,\ z \in L^{\perp}$. Теорема доказана.

Следствие. Верна «теорема Пифагора»: если $x = y + z$, $y \in L,\ z \in L^{\perp}$, то $|x|^2 = |y|^2 + |z|^2$.

Действительно, $|x|^2 = (y + z, y + z) = (y, y) + 2(y, z) + (z, z) = |y|^2 + |z|^2$, так как $(y, z) = 0$.

Укажем способы разложения вектора в сумму ортогональной проекции и ортогональной составляющей.

1 способ. Пусть L – линейная оболочка базисных векторов $a_1, \ldots, a_m$: $L = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$. (1)Дополнить $a_1, \ldots, a_m$ до базиса в E векторами $a_{m+1}, \ldots, a_n$; (2) Ортогонализовать и нормировать базис $a_1, \ldots, a_n$, получить ортонормированный базис $b_1, \ldots, b_n$, при этом $b_1, \ldots, b_m$ - онб в L, а $b_{m+1}, \ldots, b_n$ - онб в $L^{\perp}$.

Теперь $y = \sum_{i=1}^{m} (x, b_i) b_i, z = \sum_{j=m+1}^{n} (x, b_j) b_j = x - y$.

2 способ – без ортогонализации и поиска базиса в $L^{\perp}$. Разложение искать в виде

$$x = y + z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + z,\ (x, a_j) = (y, a_j) + (z, a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (a_i, a_j) + 0,$$

Система уравнений $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (a_i, a_j) = (x, a_j), j = 1, ..., m$ для нахождения α_i имеет единственное решение, так как ее основная матрица $G_a = (a_i, a_j)$ есть матрица Грама базиса a и потому невырожденна. Теперь $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i,\ z = x - y$.

Определение 2. Углом между вектором x и подпространством L называется наибольший среди углов между векторами x и $v \in L$.

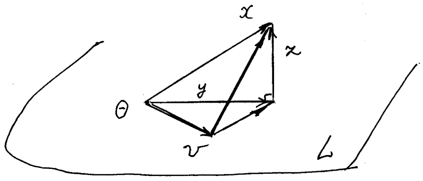
Определение 3. Расстоянием от вектора x до подпространства L называется наименьшая из длин разностей $x - v,\ v \in L$. Стандартное обозначение : $\rho(x, L)$.

Утверждение 4. 1. Угол между вектором x и подпространством L равен углу между x и его ортогональной проекцией на L.

2. Расстояние от вектора x до подпространства L равно длине его ортогональной составляющей z относительно L .

Доказательство.

Покажем, что для данного вектора $x \in E$, среди векторов $x - v, v \in L$, наименьшую длину имеет $z = x - y -$ ортогональная составляющая вектора x относительно L.



Запишем $x - v = (x - y) + (y - v) = z + (y - v), y, v \in L$ (см.чертеж) .

По следствию, $|x - v|^2 = |z|^2 + |y - v|^2 \geq |z|^2$, причем минимальное значение $|z|^2$ достигается, если $|y - v|^2 = 0 \Rightarrow v = y, z \in L^{\perp}$. Поэтому $\cos \measuredangle(x; v) = \dfrac{|(x, v)|}{|x||v|} \geq \dfrac{|y|}{|x|} = \cos \measuredangle(x; y)$.

Пример. В евклидовом пространстве R^4 (со стандартным скалярным произведением) дано подпространство $L = \langle a_1 = (1,1,1,1)^T, a_2 = (1,2,2,-1)^T \rangle$. Разложить вектор $x = (4,-1,-3,4)^T$ на сумму ортогональной проекции на L и ортогональной составляющей. Найти расстояние от вектора x до L и угол φ между x и L.

Решение. (2-й способ). Разложение x будем искать в виде $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + z,\ (a_1, z) = (a_2, z) = 0$.

Умножим желаемое равенство скалярно сначала на a_1, потом на a_2:

$(x, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_2, a_1) + (z, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_2, a_1)$,

$(x, a_2) = \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(a_2, a_2) + (z, a_2) = \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(a_2, a_2)$. Для нахождения α_1, α_2 получим систему уравнений $\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_2, a_1) = (x, a_1) \\ \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(a_2, a_2) = (x, a_2) \end{cases}$. В нашей задаче

$(a_1, a_1) = 4, (a_1, a_2) = (a_2, a_1) = 4, (a_2, a_2) = 10, (x, a_1) = 4, (x, a_2) = -8$, так что $\begin{cases} 4\alpha_1 + 4\alpha_2 = 4 \\ 4\alpha_1 + 10\alpha_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$,

$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -2$, $y = 3a_1 - 2a_2 = (3,3,3,3)^T - (2,4,4,-2)^T = (1,-1,-1,5)^T$,

$z = x - y = (4,-1,-3,4)^T - (1,-1,-1,5)^T = (3,0,-2,-1)^T$. Значит, $\rho(x, L) = \sqrt{9 + 4 + 1^2} = \sqrt{13}$,

$\cos \measuredangle(x, L) = \dfrac{|y|}{|x|} = \dfrac{\sqrt{1+1+1+25}}{\sqrt{16+1+9+16}} = \dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{42}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}},$. Итак, $\varphi = arc\cos(\dfrac{\sqrt{6}}{3})$.

Если подпространство задано не как линейная оболочка, а системой однородных линейных уравнений, надо сначала найти в нем базис, а затем решать, как выше.

Лекция 12. Линейные преобразования евклидовых пространств

Наличие в линейном (вещественном) пространстве создает определенную специфику при рассмотрении линейных преобразований. Дадим определение трёх типов линейных преобразований.

Пусть E – евклидово пространство, $\varphi : E \to E$ - линейное преобразование.

1. **Сопряженные преобразования.**

Определение 1. Линейное преобразование $\varphi^* : E \to E$ называется сопряженным к φ, если для любых векторов $x, y \in E$: $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$. (1)

Мотив такого определения будет объяснен чуть ниже.

Прежде всего выясним, как найти матрицу сопряженного преобразования, зная матрицу $A_{\varphi;e} = A_\varphi$ данного преобразования в некотором базисе ***e*** и матрицу Грама $G = G_e$. Запишем равенство (1) в координатах:

$(\varphi(x), y) = (A_\varphi X)^T GY = X^T(A_\varphi{}^T G)Y = (x, \varphi^*(y)) = X^T G(A_{\varphi^*}Y) = X^T(GA_{\varphi^*})Y, \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$.

Короче, $X^T(A_\varphi{}^T G)Y = X^T(GA_{\varphi^*})Y, \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ (*).

Отсюда (как и для билинейных форм, беря в качестве X, Y любые пары единичных столбцов) получаем: $A_\varphi{}^T G = GA_{\varphi^*}$, $A_{\varphi^*} = G^{-1}A_\varphi{}^T G$ (**). В ортонормированном базисе условие (**) выглядит особенно просто: $A_{\varphi^*} = A_\varphi{}^T$. В частности, доказано

Утверждение 1. Любое линейное преобразование $\varphi : E \to E$ имеет единственное сопряженное.

Установим основные взаимоотношения между преобразованиями и их сопряженными.

Теорема 1. Пусть $\varphi, \psi : E \to E$ - линейные преобразования. Тогда

1) $(\varphi^*)^* = \varphi$;
2) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;
3) Если U – инвариантное подпространство: $\varphi(U) \subseteq U$, то $\varphi^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$;
4) $\operatorname{Im}\varphi = (Ker\varphi^*)^\perp$;
5) $Ker\varphi = (\operatorname{Im}\varphi^*)^\perp$.

Доказательство. 1), 2) докажем в ортонормированном базисе.

$A_{\varphi^*} = A_\varphi{}^T \Rightarrow A_{(\varphi^*)^*} = (A_\varphi{}^T)^T = A_\varphi$ и $A_{(\varphi\psi)^*} = (A_{\varphi\psi})^T = A_\psi{}^T A_\varphi{}^T = A_{\psi^*}A_{\varphi^*}$.

3) Пусть $x \in U, y \in U^\perp \Rightarrow (x, \varphi^*(y)) = (\varphi(x), y) = 0$, т.к. $\varphi(x) \in U$.

4) Если

$z \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists x \in E : z = \varphi(x) \Rightarrow \forall y \in Ker\varphi^*, (z, y) = (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) = 0 \Rightarrow z \in (Ker\varphi^*)^\perp$.

Таким образом, $\operatorname{Im}\varphi \subseteq (Ker\varphi^*)^\perp$. Чтобы доказать равенство, сравним размерности этих подпространств: $\dim\operatorname{Im}\varphi = rgA_\varphi$, $Ker\varphi^* = \{Y : A_\varphi{}^T Y = 0\} = n - rgA_\varphi{}^T = n - rgA_\varphi \Rightarrow \dim(Ker\varphi^*)^\perp = rgA_\varphi$, чтд.

5)равносильно 4): $\operatorname{Im}\varphi = (Ker\varphi^*)^\perp \Leftrightarrow (\operatorname{Im}\varphi)^\perp = Ker\varphi^*$. Заменяя здесь φ на φ^* и φ^* на $\varphi = (\varphi^*)^*$, получаем требуемое.

Замечание 1. Равенство пункта 4 дает геометрическую интерпретацию и новое доказательство (правда, для систем с квадратной матрицей) теоремы Фредгольма.

Замечание 2. В общем случае сопряженное преобразование – это преобразование сопряженного пространства E*. А именно, $\varphi^* : E \to E$ определяется равенством

$\varphi^*(f)(x) := f(\varphi(x)), \forall f \in E^*, x \in E.$ Но скалярное произведение позволяет отождествить E и E^*.

Для $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = (a, x)$,если базис ортонормированный, то $f \leftrightarrow a = (a_1, ..., a_n)$.

2. Самосопряженные преобразования евклидовых пространств, свойства их собственных значений и собственных векторов

Определение 2. Линейное преобразование $\varphi : E \to E$ евклидова пространства E называется самосопряженным, если $\varphi^* = \varphi$, т.е. $\forall x, y \in E:\ (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$.

Пусть φ – самосопряженное преобразование евклидова пространства E. Из теоремы 1 следуют

Утв.1. Если U – подпространство в E, инвариантное относительно φ (короче, φ -инвариантное подпространство) (т.е. $\forall x \in U \Rightarrow \varphi(x) \in U$), то ортогональное дополнение $U^{\perp}$ также φ -инвариантно.

Утв. 2. В ортонормированном базисе матрица A самосопряженного преобразования φ является симметрической: $A^T = A$.

Замечание. Ограничение самосопряженного преобразования на инвариантное подпространство является самосопряженным, если на подпространстве рассматривать скалярное произведение, заданное во всем пространстве.

Утв.3. Собственные векторы самосопряженного преобразования φ, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Если $\begin{array}{l}\varphi(x_1) = \lambda_1 x_1,\ \varphi(x_2) = \lambda_2 x_2, x_1 \neq 0, x_2 \neq), \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (\varphi(x_1), x_2) = (x_1, \varphi(x_2)),\\ \lambda_1(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)\ \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow\ (x_1, x_2) = 0\end{array}$ □

В доказательстве свойства собственных значений понадобится

Лемма. Любое линейное преобразование конечномерного действительного линейного пространства L обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством U.

Доказательство. Если $\exists \lambda \in \mathbb{R}:\ \varphi(x) = \lambda x, x \neq 0 \Rightarrow U = \langle x \rangle$. Если все характеристические корни мнимые, пусть $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$ один из них, тогда $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ также является характеристическим корнем, т.к. $\det(A_\varphi - \lambda E)$ многочлен с действительными коэффициентами.

Рассмотрим φ как линейное преобразование пространства $\mathbb{C}^n$ по формуле

$\varphi(Z) = A_\varphi Z,\ \forall Z = (z_1, ..., z_n)^T$, в таком случае

$\exists Z_1 = (z_1, ..., z_n)^T = X_1 + iY_1 \neq 0\,(X_1, Y \in \mathbb{R}^n)_1 : A_\varphi Z_1 = \lambda_1 Z_1 \Leftrightarrow$

$A_\varphi(X_1 + iY_1) = (\alpha + i\beta)(X_1 + iY_1) = (\alpha X_1 - \beta Y_1) + i(\beta X_1 + \alpha Y_1) \Leftrightarrow$

$A_\varphi X_1 = \alpha X_1 - \beta Y_1, A_\varphi Y_1 = \beta X_1 + \alpha Y_1$

Это показывает, что $U = \langle X_1, Y_1 \rangle$ - двумерное инвариантное подпространство. □

Утверждение 4. Все характеристические корни (корни характеристического уравнения) самосопряженного преобразования (или симметрической матрицы) действительные.

Доказательство проводится индукцией по n=dim E.

Случай n =1 очевиден. При n = 2 в ортонормированном базисе

$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2=0$. Дискриминант этого уравнения $D=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}{}^2\geq 0$, следовательно, $\lambda_{1,2}\in\mathbb{R}$.

При n > 2 сделаем индуктивное предположение о том, что у любой симметрической матрицы порядка <n все характеристические корни действительные. Допустим, что хотя бы один характеристический корень матрицы A мнимый. Согласно лемме, существует двумерное инвариантное подпространство U. По утверждению 1, $U^{\perp}$ также инвариантно.

В ортонормированном базисе, составленном из базисов подпространств U и $U^{\perp}$, матрица преобразования имеет блочный вид $A'=\begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix}$, где A_1 - симметрическая матрица 2 порядка , A_2 – симметрическая матрица порядка n-2, $\det(A-\lambda E)=\det\begin{Vmatrix} A_1-\lambda E & 0 \\ 0 & A_2-\lambda E \end{Vmatrix}=|A_1-\lambda E|\cdot|A_2-\lambda E|$. По предположению индукции, уравнение $|A_2-\lambda E|$=0 имеет все действительные корни, следовательно (с учетом случая 2), уравнение $|A-\lambda E|=0$ – тоже – противоречие, следовательно, утверждение 4 верно для всех n. □

Теорема 2. Для любого самосопряженного преобразования существует ортонормированный базис из его собственных векторов. Матрица преобразования в этом базисе диагональна: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, где $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ - собственные значения матрицы этого преобразования.

Доказательство теоремы 2 – индукция по n.

При n = 1 доказывать нечего. При n > 1 пусть λ_1 – какой-либо характеристический корень (действительный, по теореме 1), h_1 соответствующий собственный вектор (можно сразу взять $|h_1|=1$) и $U=\langle h_1\rangle$ – одномерное инвариантное подпространство. Согласно утв.1, $U^{\perp}$ инвариантно размерности n–1, и для ограничения преобразования на $U^{\perp}$, по предположению индукции, существует ортонормированный базис $h_2,\ldots,h_n$ из собственных векторов. Тогда $h_1;h_2,\ldots,h_n$ – искомый базис.

□**Пример**. В некотором о.н.б. в R^3 линейное преобразование φ задано матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти для φ ортонормированный базис из собственных векторов и записать в нем матрицу преобразования.

□

$$|A-\lambda E| = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda) = 0$$

Собственные векторы: $\lambda_{1,2} = 1$, $A-E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Система уравнений для собственных векторов: $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, так что имеются два линейно независимых собственных вектора . Можно взять $h_1 = (1,1,0)^T$. Второй линейно независимый собственный вектор ищем ортогональный к h_1, т.е. как решение системы $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad = 0 \end{cases}$. Например, $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = x_2 - x_1 = -2$, т.е. $h_2 = (1,-1,-2)^T$.

Собственный вектор для $\lambda_3 = 4$, по утв. 2, ортогонален к h_1, h_2, так что в трехмерном пространстве он единственный, с точностью до множителя, вектор из $< h_1, h_2 >^{\perp}$. Читая уравнение $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ как скалярное произведение $((x_1, x_2, x_3), (1,-1,1)) = 0$, без вычислений находим $h_3 = (1,-1,1)^T$. (Разумеется, можно было решить характеристическую систему уравнений для $\lambda_3 = 4$ и получить то же самое.)

Окончательно, нормируя, получаем

$h_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), h_2' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}), h_3' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. В этом базисе $A' = diag(1,1,4)$.□

Можно упомянуть 2 типичных примера самосопряженных преобразований.
Пусть E – n-мерное евклидово пространство, U – подпространство в E, 0 ≠ U ≠ V, тогда любой вектор $x \in E$ единственным образом представляется в виде $x = y + z, y \in U, z \in U^{\perp}$.

Пример 1. Ортогональное проектирование V на U: $P(x) := y$. Проверка самосопряженности: $x_{1,2} = y_{1,2} + z_{1,2}, y_{1,2} \in U, z_{1,2} \in U^{\perp} \Rightarrow (P(x_1), x_2) = (y_1, y_2) = (x_1, P(x_2))$. Ядром преобразования является U.

Собственные векторы: $y \in U - \{0\}, \lambda_1 = 1; z \in U^{\perp} - \{0\}, \lambda_2 = 0$. В о.н.б., составленном из базисов подпространств U, $U, U^{\perp}$, матрица преобразования равна $diag(\underbrace{1,...,1}_{m}, \underbrace{0,...,0}_{n-m})$, если $\dim U = m$.

Пример 2. Ортогональная симметрия (или зеркальное отражение) S пространства E относительно U: S(x) = y – z. Проверить самосопряженность можно аналогично.
Собственные векторы: $y \in U - \{0\}, \lambda_1 = 1; z \in U^{\perp} - \{0\}, \lambda_2 = -1$. В о.н.б., составленном из базисов подпространств U, $U^{\perp}$, матрица оператора равна $diag(\underbrace{1,...,1}_{m}, \underbrace{-1,...,-1}_{n-m})$.

Лекция 13. Линейные преобразования евклидовых пространств – продолжение

Прежде чем перейти к ортогональным преобразованиям, отметим, что верно обратное к основной теореме

Утверждение. Если линейное преобразование евклидова пространства имеет ортонормированный базис из собственных векторов, то оно самосопряженное.

В самом деле, если в ортонормированном базисе матрица линейного преобразования диагональная. то и симметричная, что гарантирует самосопряженность.

3. Ортогональные преобразования

Пусть E – евклидово пространство, $\varphi : E \to E$ - линейное преобразование.

Определение 1. Линейное преобразование $\varphi : E \to E$ называется сопряженным к φ, если для любых векторов $x, y \in E$: $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ (1)

т.е. оно сохраняет скалярное произведение.

Достаточно было бы потребовать, что φ сохраняет длины векторов:

$(\varphi(x+y), \varphi(x+y)) = (x+y, x+y) \Leftrightarrow$

$(\varphi(x), \varphi(x)) + 2(\varphi(x), \varphi(y)) + (\varphi(y), \varphi(y)) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \Leftrightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$

На основе ортогональных преобразований можно было бы строить всю евклидову геометрию.

Утверждение 1. Если φ ортогональное преобразование, то φ обратимо, и обратное также ортогональное, и $\varphi^* = \varphi^{-1}$.

Доказательство. По определению,

$\forall x, y \in E$: $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, (\varphi^* \varphi)(y)) = (x, y)$

$\Rightarrow (x, (\varphi^* \varphi)(y) - y) = 0 \Rightarrow (\varphi^* \varphi)(y) - y \in E^{\perp} = 0$

значит, $\varphi^* \varphi = E = id$, чтд.

Выведем условие ортогональности в матричном виде.

Запишем равенство (1) в координатах:

$(\varphi(x), \varphi(y)) = (A_\varphi X)^T G (A_\varphi Y) = X^T (A_\varphi{}^T G A_\varphi) Y = (x, y) = X^T G Y,\ X, Y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow .$

$\Rightarrow \quad A_\varphi{}^T G A_\varphi = G$ (2). В ортонормированном базисе условие (2) выглядит особенно просто:

$A_\varphi{}^T A = E$. Итак, доказано

Утверждение 2. Линейное преобразование $\varphi : E \to E$ ортогонально тогда и только тогда, когда в ортонормированном базисе его матрица ортогональна.

Установим основные свойства ортогональных преобразований.

Теорема 1. Пусть $\varphi : E \to E$ - ортогональное преобразование. Тогда

1) Собственные значения векторы преобразования φ равны ± 1, собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.;
2) Характеристические корни по модулю равны 1.
3) Если U – инвариантное подпространство: $\varphi(U) \subseteq U$, то $\varphi(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$ (отметим, что в обоих случаях имеет место равенство, т.к. φ обратимо.

Доказательство. 1) Пусть

$\varphi(x_1) = \lambda_1 x_1,\ \varphi(x_2) = \lambda_2 x_2, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = \lambda_1 \lambda_2 (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

$\Rightarrow \ (\lambda_1 \lambda_2 - 1)(x_1, x_2) = 0$

Но для $x_1 = x_2$, $(\varphi(x_1), \varphi(x_1)) = \lambda_1{}^2 (x_1, x_1) = (x_1, x_1) \Rightarrow \ (\lambda_1{}^2 - 1)(x_1, x_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1{}^2 = 1$

Тогда $(\lambda_1 \lambda_2 - 1)(x_1, x_2) = 0,\ \lambda_1 \lambda_2 = -1 \Rightarrow (x_1, x_2) = 0$

2) Применим тот же прием, как при доказательстве существования двумерного инвариантного пространства для линейного преобразования вещественного линейного пространства. Доказывать будем в матричном виде. Пусть в ортонормированном базисе преобразование φ имеет матрицу

$A_\varphi, A_\varphi{}^T A = E$. Научим φ преобразовывать векторы пространства $\mathbb{C}^n$ по формуле $\varphi(Z) = A_\varphi Z,\ \forall Z = (z_1,...,z_n)^T$. Кроме этого, введем в $\mathbb{C}^n$ скалярное произведение по формуле $(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k\ \ \forall x = (x_1,...,x_n)^T, y = (y_1,...,y_n)^T \in \mathbb{C}^n$. (Вторые сомножители необходимо брать комплексно сопряженные, чтобы обеспечить положительную определенность: $(x,x) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 > 0\ if\ \ x \neq 0$). Благодаря тому, что матрица A_φ вещественная, φ по-прежнему сохраняет скалярное произведение. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$. В комплексном пространстве обязательно

$\exists Z = (z_1,...,z_n)^T \neq 0 : \varphi(z) = A_\varphi Z = \lambda z \Rightarrow (\varphi(z),\varphi(z)) = (\lambda z, \lambda z) = \lambda\bar{\lambda}(z,z) = (z,z) \Rightarrow |\lambda| = 1$, чтд.

3) Пусть $x \in U, y \in U^\perp \Rightarrow (x,\varphi(y)) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)),\varphi(y)) = (\varphi^{-1}(x)), y) = 0$, т.к. $\varphi^{-1}(x) \in U$. Чтд.

Выведем теперь основную теорему об ортогональных преобразованиях. Её можно рассматривать как аналог основной теоремы о самосопряженных преобразованиях.

Теорема 2. Для любого ортогонального преобразования существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования имеет блочно-диагональный вид

$$A' = \begin{Vmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_r \end{Vmatrix}, \Phi_j = \begin{Vmatrix} \cos\alpha_j & -\sin\alpha_j \\ \sin\alpha_j & \cos\alpha_j \end{Vmatrix}, j = 1,...,s,\ s,m,r \geq 0, 2s+m+r = n.$$

Доказательство. Обозначим через L_1, L_{-1} - собственные подпространства, отвечающие собственным значениям 1, -1 (если хотя бы одно из них ненулевое). Подпространство $U = L_1 \oplus L_{-1}$ инвариантно, и $V = U^\perp$ инвариантно. Ограничение $\varphi_{|U}$ одновременно является самосопряженным, поэтому в U существует ортонормированный базис, в котором матрица $\varphi_{|U}$ диагональна, и на диагонали стоят 1 и -1 (если они есть). На V ограничение $\varphi_{|V}$ не имеет вещественных характеристических корней (в противном случае получилось бы $U \cap V \neq 0$), и индукцией по s можно доказать, что V – прямая сумма попарно ортогональных двумерных инвариантных подпространств: $V = V_1 \oplus ... \oplus V_s$, и матрица $A_{\varphi_{V_j}} = \Phi_j = \begin{Vmatrix} \cos\alpha_j & -\sin\alpha_j \\ \sin\alpha_j & \cos\alpha_j \end{Vmatrix}$, чтд.

Замечание. У ортогональной матрицы 2-го порядка второго рода $\begin{Vmatrix} \cos\alpha_j & \sin\alpha_j \\ -\sin\alpha_j & -\cos\alpha_j \end{Vmatrix}$ собственные значения равны ±1, поэтому она не может встретиться среди $\Phi_j, 1 \leq j \leq s$.

Матрица вида $\begin{Vmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_r \end{Vmatrix}$ называется канонической для ортогонального преобразования φ, соответствующий ортонормированный базис – каноничским.

Разберем численный пример.

Пример. Пусть линейное преобразование φ в ортонормированном базисе имеет матрицу

$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Привести матрицу к каноническому виду, найти канонический базис.

Решение. Прежде всего, легко проверить, что матрица ортогональная.

Нам нужно найти подобную матрицу $A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda = \pm 1$ с ортогональной матрицей перехода S. Следы матриц A, A' равны, так что

$trA' = 2\cos\alpha + 1 = trA = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2},\ \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Определители матриц также равны, поэтому $\det A' = \lambda = \det A$. Вычислим

$$\det A = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (2)+2(1) \\ (3)+2(1) \end{matrix} = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 = \lambda .$$

Найдем собственный вектор для $\lambda = 1$:

$$A - E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \underset{(3)+(1)+(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim ((2)-(1)) \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (1)+(2) \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} h_3 = (1,1,1)^T$$

с точностью до множителя.

Далее, наше преобразование представляет собой поворот на угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$ вокруг прямой $U \parallel h_3$ в плоскости $V \perp h_3$, т.е. плоскости с уравнением $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и ортогональным базисом $h_1 = (1,-1,0)^T, h_2 = (1,1,-2)^T$. Чтобы определить направление поворота, проверим, правый это базис или левый. Вычислим

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (I)+(II) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} > 0$. Значит, базис правый. Теперь найдем образ первого вектора:

$\varphi(h_1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и скалярное произведение $(\varphi(h_1), h_2) = 3 > 0$,

поворот против часовой стрелки, $A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе

$h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, h_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T, h_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$.

4. Произвольные линейные преобразования. Полярное разложение.

В этом параграфе мы будем предполагать, что преобразование φ невырожденно, т.е. $\det A_\varphi \neq 0$, и выведем теорему, обобщающую теорему 1 семестра о разложении аффинного преобразования в произведении ортогонального преобразования и двух сжатий к двум взаимно перпендикулярным прямым.

Теорема. Любое невырожденное линейное преобразование $\varphi : E \to E$ евклидова пространства E может быть представлено в виде произведения $\varphi = \kappa \cdot \gamma$, где κ - ортогональное преобразование, а γ - самосопряженное преобразование с положительными собственными значениями. Такое разложение единственно.

(Замечание. Имеет место и разложение в другом порядке: $\varphi = \gamma' \cdot \kappa'$, γ', κ' имеют аналогичный смысл.)

Мы будем доказывать в основном матричную формулировку теоремы:

Для любой невырожденной вещественной матрицы А порядка n существуют единственные матрицы $Q, C \; (Q^T = Q^{-1}, C^T = C, \lambda_i > 0)$: $A = Q \cdot C$ **.(1)**

Доказательство.

Покажем, прежде всего, что все собственные значения самосопряженного преобразования $\varphi^* \varphi$ положительны: пусть f – собственный вектор для $\varphi^* \varphi$,

$(\varphi^* \varphi)(f) = \lambda f \; (f \neq 0) \Rightarrow ((\varphi^* \varphi)(f), f) = \lambda(f, f) = (\varphi(f), \varphi(f)) > 0 \Rightarrow \lambda > 0$, поскольку $\varphi(f) \neq 0$, так как φ невырожденно.

Теперь будем искать разложение матрицы $A = Q \cdot C$; транспонируем и перемножим:

$A = Q \cdot C,\; A^T = C^T Q^T = C Q^{-1} \Rightarrow A^T A = C(Q^{-1} Q) C = C^2$. Матрица C^2 симметричная с положительными собственными значениями. Следовательно, для нее существует ортогональная матрица S: $S^{-1}C^2S = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ $(\lambda_i > 0, i = 1,...,n)$, $\Rightarrow C^2 = SDS^{-1} = SDS^T$

Рассмотрим матрицу $\Lambda = \sqrt{D} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}$ $(\mu_i = \sqrt{\lambda}_i > 0, i = 1,...,n)$,тогда

получим $\Rightarrow C = S\Lambda S^{-1} = S\Lambda S^T$. Осталось найти $Q = AC^{-1}$. Проверим, что матрица Q ортогональна: $Q = AC^{-1}$, $Q^T = (C^{-1})^T A^T = C^{-1}A^T \Rightarrow Q^T \cdot Q = (C^{-1}A^T)(AC^{-1}) = C^{-1}C^2C^{-1} = E$, чтд.

Единственность. Допустим, $A = Q \cdot C = \tilde{Q} \cdot \tilde{C}$, тогда $A^T A = C^2 = \tilde{C}^2$. По построению, $C, \tilde{C}$ имеют общий собственный базис и потому коммутируют, поэтому $C^2 - \tilde{C}^2 = (C - \tilde{C})(C + \tilde{C}) = 0$. Так как $C, \tilde{C}$ имеют положительные собственные значения в общем базисе, то у $C + \tilde{C}$ положительные собственные значения, значит, $\exists\ (C + \tilde{C})^{-1}$ и потому $C = \tilde{C} \Rightarrow Q = \tilde{Q}$. Ч.т.д.

Запишем разложение $A = Q \cdot C$ с учетом построения С: $A = Q \cdot S\Lambda S^T = (Q \cdot S)\Lambda S^T = U\Lambda V$ (2), где U, V ортогональные матрицы, Λ - диагональная матрица с положительными диагональными элементами.

Разложение (2) называется ***сингулярным разложением.***

Лекция 14 (дополнительная)
Теоремы о существовании инвариантных подпространств,
Гамильтона-Кэли и Жордана

1. **Теорема о существовании одномерного или двумерного инвариантного подпространства**

Теорема. Любое линейное преобразование конечномерного действительного линейного пространства L обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством U.

Доказательство. Если $\exists\lambda\in\mathbb{R}:\ \varphi(x)=\lambda x, x\neq 0 \Rightarrow U=\langle x\rangle$.

Если все характеристические корни мнимые, пусть $\lambda_1=\alpha+i\beta,\beta\neq 0$ один из них, тогда $\overline{\lambda}_1=\alpha-i\beta$ также является характеристическим корнем, т.к. характеристический многочлен $\chi_\varphi(\lambda)=\det(A_\varphi-\lambda E)$ - многочлен с действительными коэффициентами. Значит, по теореме Безу,

$\chi_\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\overline{\lambda}_1)f(\lambda)=(\lambda^2-2\alpha\lambda+\alpha^2+\beta^2)f(\lambda)$, где $f(\lambda)$ - многочлен с действительными коэффициентами.

Рассмотрим φ как линейное преобразование пространства $\mathbb{C}^n$ по формуле $\varphi(Z)=A_\varphi Z,\ \forall Z=(z_1,...,z_n)^T$. В комплексном пространстве любой комплексный характеристический корень является собственным значением, следовательно,

$\exists Z_1=(z_1,...,z_n)^T=X_1+iY_1\neq 0\,(X_1,Y\in\mathbb{R}^n)_1 : A_\varphi Z_1=\lambda_1 Z_1 \Leftrightarrow$

$A_\varphi(X_1+iY_1)=(\alpha+i\beta)(X_1+iY_1)=(\alpha X_1-\beta Y_1)+i(\beta X_1+\alpha Y_1)\Leftrightarrow$

$A_\varphi X_1=\alpha X_1-\beta Y_1, A_\varphi Y_1=\beta X_1+\alpha Y_1$

Это показывает, что $U=\langle X_1,Y_1\rangle$ - инвариантное подпространство. Покажем, что оно двумерное. Допустим, что $Y_1=tX_1,\ X_1\neq 0\Rightarrow A_\varphi X_1=\alpha X_1-\beta Y_1=(\alpha-\beta t)X_1$, т.е. X_1 - собственный вектор (с вещественным собственным значением) – противоречие. □

Второй способ доказательства для комплексного характеристического корня. Как выше, пусть $\lambda_1=\alpha+i\beta,\beta\neq 0$ - характеристический корень, тогда $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$ также является характеристическим корнем, и

$\chi_\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\overline{\lambda}_1)f(\lambda)=(\lambda^2-2\alpha\lambda+\alpha^2+\beta^2)f(\lambda)$, где $f(\lambda)$ - многочлен с действительными коэффициентами. Обозначим

$g(\lambda)=\lambda^2-2\alpha\lambda+\alpha^2+\beta^2=\lambda^2+p\lambda+q$. Рассмотрим преобразование

$g(\varphi)=\varphi^2+p\varphi+qE$ с матрицей

$g(A)=A^2+pA+qE=(A-\lambda E)(A-\overline{\lambda}E)\Rightarrow \det g(A)=\left|A-\lambda E\right|\cdot\left|A-\overline{\lambda}E\right|=0$. Таким образом, $g(\varphi)$ - вырожденное преобразование, и подпространство

$U=Ker\, g(\varphi)\neq\{0\}$ - ненулевое инвариантное подпространство. Проверим инвариантность: для любого

$x\in U:\ g(\varphi)(x)=\varphi^2(x)+p\varphi(x)+qx=0\Rightarrow 0=\varphi(\varphi^2(x)+p\varphi(x)+qx)=$

$=\varphi^2(\varphi(x))+p\varphi(\varphi(x))+q\varphi(x)\Rightarrow\varphi(x)\in U$

Покажем, что для фиксированного вектора $U'=\langle x,\varphi(x)\rangle$ - двумерное инвариантное подпространство. В самом деле,

$\forall y=ax+b\varphi(x), a,b\in\mathbb{R}$,

$\varphi(y)=a\varphi(x)+b\varphi^2(x)=a\varphi(x)+b(-qx-p\varphi(x))=-bqx+(a-bp)\varphi(x)$,

т.е. U' инвариантно, и $\dim U'\leq 2$. Однако, если бы было

$\varphi(x)=\mu x,\ \mu\in\mathbb{R}\Rightarrow g(\varphi)(x)=g(\mu)x=0\Rightarrow g(\mu)=0$ - противоречие, т.к. $g(\lambda)$ не имеет действительных корней. Итак, U' - искомое двумерное инвариантное подпространство.

2. Теорема Гамильтона-Кэли.

Прежде введем одно техническое понятие.

Определение. Матрица $A(\lambda)$ называется λ- матрицей, если ее элементы являются многочленами от λ. Любую λ- матрицу можно записать как многочлен от λ, коэффициенты которого – числовые матрицы соответствующего размера. Например,

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 3 & 4\lambda - 1 \\ 6\lambda & 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{Vmatrix} \lambda^2 + \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -3 \end{Vmatrix} \lambda + \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 8 \end{Vmatrix}.$$

Квадратную матрицу A можно подставить в любой многочлен: пусть

$f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + ... + a_{m-1}\lambda + a_m, a_i \in R \Rightarrow f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + ... + a_{m-1}A + a_mE$.

A является корнем многочлена, если $f(A) = 0$

Утверждение. Любая квадратная матрица является корнем некоторого ненулевого многочлена.

Доказательство. Пусть A матрица порядка n. Матрицы порядка n образуют линейное пространство размерности n^2, поэтому любые n^2+1 матриц линейно зависимы, т. е. матрицы $E, A, A^2, ..., A^{n^2}$ линейно зависимы, значит, существуют такие числа $c_0, ..., c_{n^2}$, не все равные 0, что $c_0E + c_1A + ... + c_{n^2}A^{n^2} = 0$, таким образом,

$F(A) = 0, F(t) = c_0 + c_1t + ... + c_{n^2}t^{n^2}$, ч.т.д.

Теорема Гамильтона-Кэли. Любое линейное преобразование является корнем своего характеристического многочлена.

Матричная формулировка. Любая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена.

Доказательство. Доказывать будем в матричной формулировке. Пусть A - данная матрица порядка n. Рассмотрим характеристический многочлен

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \sum_{i=0}^{n} p_i\lambda^i,\ p_i \in R \Rightarrow$$

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \sum_{i=0}^{n} p_i\lambda^i\ ,\ p_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \chi(A) = \sum_{i=0}^{n} p_iA^i\ (A^0 = E)$$

Составим матрицу $D(\lambda) = (d_{ij}(\lambda)), d_{ij}(\lambda) = A_{ji}(\lambda)$, присоединенную к матрице $A - \lambda E$, её элементы – алгебраические дополнения к элементам транспонированной матрицы $(A - \lambda E)^T$.

Поскольку $D(\lambda)$ - многочленная матрица степени n-1 по λ, то $D(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i\lambda^i$, где D_i - числовые матрицы порядка n.

Из формул разложения и фальшивого разложения определителя следует, что (см. 1 семестр)

$$(A - \lambda E)D(\lambda) = \det(A - \lambda E)E = \chi(\lambda)E \Rightarrow$$

$$\chi(\lambda)E = \sum_{i=0}^{n-1} p_i\lambda^iE = (A - \lambda E)\sum_{i=0}^{n-1} D_i\lambda^i = \sum_{i=0}^{n-1} AD_i\lambda^i - \sum_{i=0}^{n-1} D_i\lambda^{i+1} = (i+1=k) =$$

$$= (k = i-1)AD_0 + \sum_{i=0}^{n-1}(AD_i - D_{i-1})\lambda^i - D_{n-1}\lambda^n$$

Матрицы-многочлены равны, если только равны их соответствующие матричные коэффициенты. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем систему равенств:

$$\left|\begin{array}{r} p_0E = AD_0, \\ p_1E = AD_1 - D_0, \\ \dots \\ p_kE = AD_k - D_{k-1}, \\ p_kE = AD_k - D_{k-1}, \\ \dots \\ p_{n-1}E = AD_{n-1} - D_{n-2} \end{array}\right.$$ умножим k-е уравнение при $k = 0,...,n$ на A^k и сложим:

$$\begin{array}{r} E\cdot \\ A\cdot \\ \dots + \\ A^k\cdot \\ A^{k+1}\cdot \\ \dots + \\ A^n\cdot \end{array}\left|\begin{array}{r} p_0E = AD_0, \\ p_1E = AD_1 - D_0, \\ \dots \\ p_kE = AD_k - D_{k-1}, \\ p_kE = AD_k - D_{k-1}, \\ \dots \\ p_{n-1}E = AD_{n-1} - D_{n-2} \end{array}\right.$$, получаем $\chi(A) = 0$, ч.т.д.

3. Теорема Жордана.

Мы хорошо знаем, что если для линейного преобразования φ существует базис из собственных векторов, то матрица преобразования в этом базисе принимает диагональный вид:

$$A_{\varphi;h} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{Vmatrix}$$, и это в каком-то смысле простейший вид. Зададимся вопросом, к какому простейшему виду можно привести матрицу преобразования, если она не приводится к диагональному виду, т.е. базис из собственных векторов не существует.

Рассмотрим одну специфическую матрицу – жорданову клетку порядка n с собственным значением λ_0: $$J_n(\lambda_0) = \begin{Vmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{Vmatrix} \quad (1)$$

(правее и выше диагонали стоят 1, остальные элементы равны 0). Посмотрим, как преобразование φ с такой матрицей действует на базисные векторы.

$\varphi(e_1) = \lambda_0 e_1, \varphi(e_2) = \lambda_0 e_2 + e_1, ..., \varphi(e_i) = \lambda_0 e_i + e_{i-1}, 2 \le i \le n$, или

$(\varphi - \lambda_0 E)(e_i) = e_{i-1}, 2 \le i \le n$ (2).

Векторы, которые преобразуются по правилу (2), называются ***жордановой цепочкой.*** Вектор e_i из равенства (2) называется *присоединенным* к вектору e_{i-1}.

В частности, e_1 - единственный (с точностью до пропорциональности) собственный вектор для преобразования с такой матрицей.
В общем случае жордановой матрицей называется блочно-диагональная матрица

$$J = \begin{Vmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & J_{n_s}(\lambda_s) \end{Vmatrix}, \ n_1 + ... + n_s = n \quad (3)$$

(λ_i не обязательно различны).

Теорема Жордана. Если все характеристические корни λ_i линейного преобразования $\varphi : L \to L$ принадлежат полю K, над которым определено пространство L (типично: $K = \mathbb{R}, \lambda_i \in \mathbb{R}$), то в L существует базис $h = \{h_1, ..., h_n\}$, в котором

$$A_{\varphi,h} = J = \begin{Vmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & J_{n_s}(\lambda_s) \end{Vmatrix}$$

(матрица J называется жордановой нормальной формой матрицы преобразования φ, а базис $h = \{h_1, ..., h_n\}$ называется жордановым базисом).
Таким образом, если S - матрица перехода к жорданову базису, то $S^{-1}AS = J$.(4)
Доказательство мы давать не будем, приведем только одно понятие и связанное с ним утверждение. Мы по-прежнему будем предполагать, что все характеристические корни линейного преобразования φ принадлежат основному полю (т.е. вещественные в случае K = R). Тогда характеристический многочлен полностью разлагается на множители 1 степени: $\chi_\varphi(\lambda) = \det(A_\varphi - \lambda E) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$, $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, \sum_{i=1}^{m} k_i = n$

Согласно теореме Гамильтона-Кэли, $\chi_\varphi(\varphi) = 0$. Рассмотрим подпространство $K_i = Ker(\varphi - \lambda_i E)^{k_i}$. Оно называется корневым подпространством преобразования φ, отвечающим собственному значению λ_i.
Утверждение. 1) $K_i, i = 1, ..., m$ - инвариантные подпространства; φ имеет на K_i единственное собственное значение; 2) $\dim K_i = k_i$; 3) $L = K_1 \oplus ... \oplus K_m$.
Жорданов базис в L является объединением жордановых базисов корневых подпространств. Особенно стоит отметить случай, когда φ имеет единственный характеристический корень кратности n. Мы не сможем здесь разобрать полный алгоритм приведения матрицы к жордановой форме, ограничимся примерами матриц порядков 2 и 3.

Пример 1. $A = \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{Vmatrix}$ (матрица A_{49} из задачника) привести к жордановой форме.
Решение. Найдем собственные значения для A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 12 & -8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0, \ \lambda_{1,2} = -2 .$$

Собственные векторы:

$$B = A + 2E = \begin{Vmatrix} 4+2 & -3 \\ 12 & -8+2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица к диагональному виду не приводится.

Найдем вектор h_2, присоединенный к h_1:

$$Bh_2 = h_1 \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 12 & -6 & 2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow 6x_1 - 3x_2 = 1,\ h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \end{pmatrix} \text{(например).}$$

В этом базисе $A' = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}, S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1/3 \end{Vmatrix}$.

Второй способ. Так как преобразование имеет единственное собственное значение, всё пространство является корневым. Поэтому в качестве второго базисного вектора возьмем любой вектор $h_2' : Bh_2' \neq 0$, например, $h_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ h_1' = Bh_2' = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}, A' = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}, S = \begin{Vmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 1 \end{Vmatrix}$

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ (A_{235} из задачника) привести к жордановой форме.

Решение. Собственные значения.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 4 \\ -1 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -(1) \\ +(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -\lambda & 3 \\ -\lambda & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ -\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-\lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda) - \lambda(\lambda^2 + 2\lambda - \lambda - 2 + \lambda) = -\lambda^3 = 0,\ \lambda_{1,2,3} = 0$$

Найдем собственные векторы:

$|A - \lambda E| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Теперь ищем присоединенные векторы. Сначала $h_2 : Bh_2 = h_1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Теперь $h_3 : Bh_3 = h_2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Второй способ. Снова все векторы корневые.

Возьмем $h_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ h_2' = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ h_1' = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим два применения жордановой формы на примере матрицы из примера 1.

а) Найти $A^n, A = \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{Vmatrix}$.

Решение.

$$A=\begin{Vmatrix}4 & -3\\ 12 & -8\end{Vmatrix}=-2E+\begin{Vmatrix}6 & -3\\ 12 & -6\end{Vmatrix}=-2E+B,\ A^n=(-2E)^n+C_n^1(-2E)^{n-1}B+C_n^2(-2E)^{n-2}B^2+\ldots=$$

$$(B^2=0)=\begin{Vmatrix}(-2)^n & 0\\ 0 & (-2)^n\end{Vmatrix}+(-2)^{n-1}n\begin{Vmatrix}6 & -3\\ 12 & -6\end{Vmatrix}=(-2)^{n-1}\begin{Vmatrix}-2+6n & -3n\\ 12n & -2-6n\end{Vmatrix}$$

б) Решить систему дифференциальных уравнений $X'=AX=\begin{Vmatrix}4 & -3\\ 12 & -8\end{Vmatrix}X,\ X=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$

т.е. $X'=AX=\begin{Vmatrix}4 & -3\\ 12 & -8\end{Vmatrix}X,\ X=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}\begin{cases}x_1'(t)=4x_1(t)-3x_2(t),\\ x_2'(t)=12x_1(t)-8x_2(t)\end{cases}.$

Решение. Сделаем замену переменных:

$$X=SY=\begin{Vmatrix}-3 & 0\\ -6 & 1\end{Vmatrix}\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix},X'=SY'=ASY\Leftrightarrow Y'=(S^{-1}AS)Y=JY\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}y_1'=-2y_1+y_2,\\ y_2'=-2y_2\end{cases}\Leftrightarrow y_2=C_2e^{-2t},\ y_1'=-2y_1+C_2e^{-2t},y_1=C_1e^{-2t}+C_2te^{-2t}$$

, и окончательно

$$X=SY=\begin{Vmatrix}-3 & 0\\ -6 & 1\end{Vmatrix}\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3y_1(t)\\ -6y_1(t)+y_2(t)\end{pmatrix}.$$

Этот метод систематически будет разработан в курсе дифференциальных уравнений.