

УДК 531  
ББК 22.2  
К 66

**Коряков В.П.**

**К 66 Методы решения задач в общем курсе физики. Механика: Учеб.  
пособие/В.П. Коряков. — М.: Высш. шк., 2007. — 375 с.: ил.**

**ISBN 978-5-06-005916-8**

В учебном пособии подробно разобраны методы решения задач по курсу механики. Задачи систематизированы по разделам, каждый из которых предваряется кратким изложением теоретического материала.

*Для студентов технических вузов, а также преподавателей физики высших и средних учебных заведений.*

УДК 531  
ББК 22.2

**ISBN 978-5-06-005916-8**

© ОАО «Издательство «Высшая школа», 2007

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа», и его репродукция (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается.

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Особенности преподавания физики в Московском физико-техническом институте (МФТИ) заключаются, во-первых, в значительности затрачиваемого времени (шесть семестров) и, во-вторых, в привлечении к преподаванию по совместительству сотрудников исследовательских физических институтов Российской академии наук и различных министерств, т. е. весьма квалифицированных специалистов.

Любая практическая деятельность физиков фактически сводится к решению конкретных задач. Понимание этого привело к тому, что в процессе обучения и при проверке знаний на экзаменах на кафедре общей физики МФТИ большое внимание уделяется умению решать задачи. Поэтому все экзамены включают письменные контрольные работы. О достаточной сложности предлагаемых задач свидетельствует то, что студентам на письменных экзаменах разрешается пользоваться учебниками, книгами, конспектами и другими учебными пособиями.

Придумывать новые задачи — обязательное требование к сотрудникам кафедры общей физики. О нужном количестве задач можно судить, например, по тому, что в первом семестре, посвященном изучению механики, надо предложить 20 задач (контрольная по первому заданию и экзаменационная работа по два варианта из 5 задач). Эта трудная работа (придумывание задач) проводится на кафедре более полувека. Накоплено много хороших задач. Практически исчерпаны все возможные варианты. Лучшие и показательные (представительные) задачи вошли в три тома сборника задач под редакцией В.А. Овчинкина. В первом томе (Сборник задач по общему курсу физики / Под ред. В.А. Овчинкина. В 3 ч. Ч. 1. Механика. Термодинамика и молекулярная физика. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во МФТИ, 2002) содержится 1060 задач по механике.

В предлагаемой книге систематизированы и приведены методы решения задач по механике. Полнота методов подтверждена ссылками на все задачи упомянутого выше сборника. Каждый из 14 тематических разделов начинается с краткого изложения основных теоретических результатов.

K 49

В.П. КОРЯВОВ

**МЕТОДЫ  
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
В ОБЩЕМ КУРСЕ  
ФИЗИКИ**

**МЕХАНИКА**

Составитель  
В.П. Коряков  
Год издания  
2007 год  
Издательский центр  
"Высшая школа"  
Москва

МОСКВА  
"ВЫСШАЯ ШКОЛА"  
2007



В отличие от имеющихся задачников с решениями здесь возможно впервые сделан акцент на изложении методов решения задач и соответствующей систематизации.

Предполагается, что основными читателями данной книги могут стать преподаватели и студенты физических специальностей университетов и институтов, а также преподаватели школ.

Более 40 лет автор имел возможность общаться с сотрудниками кафедры общей физики МФТИ и благодарен им за все полезное, что смог от них почерпнуть. Я благодарен заведующему кафедрой профессору А.Д. Гладуну за поддержку моей работы, А.В. Гуденко за полезные замечания, сделанные им после детального ознакомления с рукописью книги. Весьма полезна для меня была помощь, которую я получил от Д.А. Александрова, за что я ему очень признателен. За помошь в издании книги выражаю большую благодарность Д.П. Корякову.

## **ВВЕДЕНИЕ**

Методы решений новых задач создаются на основе общих сведений о рассматриваемых явлениях и известных методах решения похожих задач.

Затруднения при решении задач следует преодолевать дополнительными усилиями, чтением учебников, беседой с однокурсниками, обсуждением на семинарских занятиях с преподавателями. Эта книга также может быть полезна, если самостоятельные упорные предварительные попытки найти решение задачи не дают результата. Автор старался, чтобы книга не была «решебником», а помогала бы освоить методы решения задач, проясняла бы трудные вопросы. Если человек не хочет научиться решать задачи, а стремится лишь к сдаче тетради с заданием, он найдет, откуда переписать решения, может быть и неправильные, и сделает это без настоящей пользы для себя. Автор надеется, что, воспользовавшись этой книгой, даже ленивый чему-нибудь научится.

В общем курсе физики механика представляет раздел наиболее знакомый студентам по школьному курсу. Существенное отличие связано с использованием высшей математики. Поэтому важно как можно быстрее научиться пользоваться математикой, необходимой для решения конкретных физических задач. Отличие институтского курса от школьного связано также с включением в него разделов, посвященных врацательному движению твердых тел, неинерциальным системам отсчета, теории относительности.

Решение задач полезно проводить по следующему плану:

- 1) хорошо понять условие задачи, используя рисунки и дополнения их затем по ходу решения;
- 2) обдумать условие задачи и возможные пути и варианты решений;
- 3) используя нужные физические законы, выписать уравнения и, если они в векторном виде, то выбрать удобную систему координат и записать уравнения в проекциях;
- 4) выписать дополнительные условия, которые необходимы для решения задачи, и написать решение уравнений;
- 5) провести анализ результатов решения: по размерности, по

правильности предельных значений полученных зависимостей (с учетом области применимости решения), по разумности порядков вычисленных величин (по грубым оценкам и здравому смыслу).

В данной книге автор не стремился доводить решения конкретных задач до численных результатов (за некоторым исключением). Важно было проследить цепочки задач, попытаться их систематизировать и провести анализ различных вариантов. В скобках указываются номера задач из «Сборника задач по общему курсу физики» под редакцией В.А. Овчинкина (Ч. 1. М.: Изд-во МФТИ, 2002), в которых возможно применение излагаемых методов решения.

Наша цель — показать, как общие физические законы, которые будут кратко изложены, позволяют решить большое число задач.

# 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Физика начиналась с наблюдения движений. Раздел физики, который занимается описанием движений без выяснения причин, их вызывающих, называется **кинематикой**.

Движение — это смещение одного тела относительно другого, изменение их положений. Для определения положения и перемещения тела необходима **система отсчета** — другое тело и связанная с ним **система координат** и **часы**. Простейшая и чаще всего употребляемая система координат: прямоугольная трехмерная система (Декартова). Положение точек тела определяется **радиусом-вектором  $\mathbf{r}$** , который можно выразить через его проекции на оси координат ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ):

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — единичные векторы (**орты**) вдоль каждой оси координат. На рис. 1.1 показана эта система и две другие: **цилиндрическая** и **сферическая**. В цилиндрической системе в качестве координат используются:  $\rho$  — проекция  $\mathbf{r}$  на плоскость  $(x, y)$ ,  $\varphi$  — угол между  $\rho$  и осью  $x$ ,  $z$  — та же координата, что и в декартовых. Для плоскостей перпендикулярных  $z$  система координат переходит в двумерную, которая называется **полярной**. Она удобна при рассмотрении вращений относительно оси ( $z$ ). В сферической системе координат используются: длина радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , полярный угол  $\varphi$  и угол  $\theta$  между осью  $z$  и вектором  $\mathbf{r}$ . Эта система удобна, например, при расчете среднего импульса (давления) на площадку от ударяющих по ней частиц.

Движение тела иногда достаточно хорошо ассоциируется с движением одной его точки. Это возможно, если размеры тела значительно меньше, чем происходящие перемещения тела. Такое тело называют **точечным** (в дальнейшем — **точечной массой**). Бывают случаи, когда все точки перемещаются по одному и тому же закону (**поступательное движение**). Примером такого поступательного движения

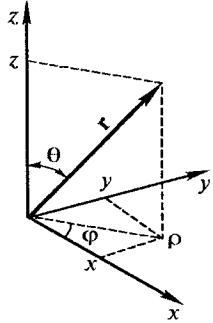


Рис. 1.1

является движение кабинок на «колесе обозрения», когда точки тела двигаются по окружностям одного и того же радиуса, но с разными центрами. В общем случае движение тела, в котором расстояние между любыми точками не меняется (**абсолютно твердое тело**), может быть описано по движению трех точек тела, не лежащих на одной прямой.

Рассмотрим **характеристики движения** на примере движения точечного тела. **Скорость** — это предел отношения **перемещения** тела  $\Delta r = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  к интервалу времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ , за которое оно происходит, при стремлении этого интервала к нулю (соответствует определению производной, в данном случае производной радиуса-вектора по времени)

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta r / \Delta t. \quad (1.2)$$

**Ускорение** — это первая производная по времени от скорости и вторая производная от радиуса-вектора (перемещения)

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2. \quad (1.3)$$

Интегрирование — это суммирование по бесконечно малым интервалам. Например, для **перемещения** тела получаем

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^2 \mathbf{v}_i \Delta t = \int_1^2 \mathbf{v} dt. \quad (1.4)$$

Путь также интеграл, но от абсолютной величины:

$$S = \int_1^2 v dt. \quad (1.5)$$

Линия, по которой движется точка, называется **траекторией**. В частности можно представлять ее в параметрическом виде (в зависимости от времени)

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (1.6)$$

Зависимости между координатами находим, исключая время.

Откладывая вектор скорости из начала координат, получаем линию движения его конца (**скоростной точки**), которая называется **годографом**. Очевидно, что вектор скорости через его проекции на оси координат записывается следующим образом:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}. \quad (1.7)$$

Для абсолютной величины скорости имеем

$$v = \left( v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right)^{1/2}. \quad (1.8)$$

**Средняя скорость движения** всегда равна пройденному пути, деленному на время, затраченное на этот путь. Следует отметить, что усреднение по времени (один час со скоростью  $v_1$ , а второй со скоростью  $v_2$ ) дает среднее арифметическое значение, а по расстоянию (один отрезок пути со скоростью  $v_1$ , а затем, например, такой же отрезок со скоростью  $v_2$ ) дает  $v_{\text{ср}} = 2v_1v_2/(v_1 + v_2)$ .

Простейшая задача состоит в **нахождении** одних характеристик движения по другим. Для примера рассмотрим **прямолинейное одномерное движение**. Линию движения примем за ось координат  $x$ . Начальная координата точки  $x_0$ . Точка может двигаться в положительном или отрицательном направлении оси. Вначале рассмотрим случай линейной зависимости координаты от времени (**равномерное движение**)

$$x = x_0 \pm v_0 t. \quad (1.9)$$

Здесь  $v_0$  — положительный постоянный коэффициент. Дифференцирование по времени показывает, что это скорость точки

$$v = \pm v_0. \quad (1.10)$$

Следующее дифференцирование дает ускорение

$$a = 0. \quad (1.11)$$

Путь вычисляем по (1.5)

$$S = v_0 t. \quad (1.12)$$

Результаты приведены на рис. 1.2. Они описывают **равномерное движение с постоянной скоростью**. По одной из этих зависимостей можно с помощью формул (1.2)–(1.5) построить другие. Отметим, что в данном случае скорость и ускорение не зависят от  $x$ .

Для **квадратичной** (параболической) зависимости координаты точки от времени

$$x = x_0 + v_0 t + (a/2)t^2 \quad (1.13)$$

получаем

$$v = v_0 + at, \quad (1.14)$$

и ускорение равно той постоянной  $a$ , которую мы использовали в параболической зависимости. Движение называется **равноускоренным**. Графики изменения функций зависят от знака ускорения и начальной скорости.

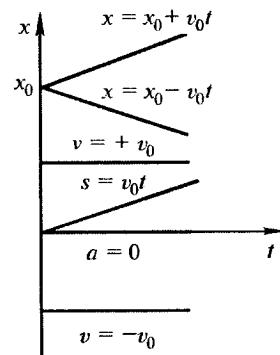


Рис. 1.2

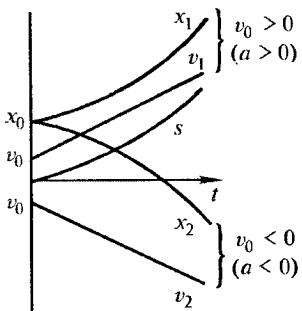


Рис. 1.3

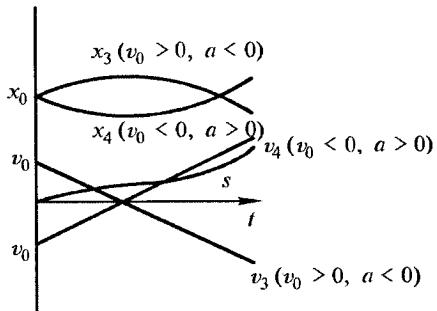


Рис. 1.4

На рис. 1.3 графики для равноускоренных движений, при которых ускорение и начальная скорость либо оба положительны, либо оба отрицательны. Пути при этом одинаковые. На рис. 1.4 результаты для случая разных знаков у ускорения и скорости. Обратим внимание, что экстремумы координат соответствуют скорости, равной нулю, и что пути опять одинаковы.

В случае равноускоренного движения ускорение не зависит от координаты, а скорость меняется с  $x$ . Чтобы получить связь между скоростью и координатой, напишем

$$a = dv/dt = (dv/dx)(dx/dt) = vdv/dx. \quad (1.15)$$

Интегрируя, получаем

$$(v^2 - v_0^2)/2 = a(x - x_0). \quad (1.16)$$

В дальнейшем выяснится, что это энергетическое соотношение.

Представляет интерес рассмотреть переход от одного типа движения к другому. На рис. 1.5 показано, как происходит переход от квадратичной зависимости координаты от времени к линейной. Для

простоты квадратичная зависимость взята с нулевыми начальными значениями координаты и скорости. В момент  $t_1$  скачком меняется ускорение. Это приводит к излуку зависимости скорости. Непрерывность скорости требует гладкости (непрерывности наклона) в зависимости координаты от времени (№ 1.1, 1.2).

Отметим, что при движении с переменным ускорением скорость экстремальна при обращении ускорения в ноль (№ 1.3).

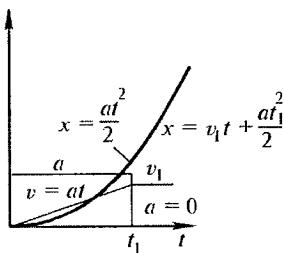


Рис. 1.5

Сложение двух равномерных или равноускоренных движений, происходящих по двум взаимно перпендикулярным осям (**плоское движение**), приводит к тем же результатам, что и выше, если соответствующим образом выбрать новую ось.

Рассмотрим задачу о **сложении равномерного и равноускоренного движений точечного тела (точки)** по двум взаимно перпендикулярным осям.

По оси  $x$  движение равномерное:

$$x = v_{0x} t, \quad v_x = v_{0x}, \quad a_x = 0.$$

По оси  $y$  движение равноускоренное:

$$y = v_{0y} t - (g/2)t^2; \quad v_y = v_{0y} - gt; \quad a_y = -g = \text{const.} \quad (1.17)$$

Начальные координаты считаем равными нулю. Приведенными зависимостями описывается **движение снаряда в поле тяжести**, которое направлено противоположно направлению вертикальной оси  $y$ . Из (1.17) находим время подъема на максимальную высоту (из условия  $v_y = 0$ )

$$t_n = v_{0y}/g$$

и величину максимального подъема

$$y_{\max} = v_{0y}^2/(2g).$$

Уравнение траектории представляет собой параболу

$$y = \left(v_{0y}/v_{0x}\right)x - gx^2/\left(2v_{0x}^2\right). \quad (1.18)$$

Вводя модуль полной начальной скорости  $v_0$  и угол  $\phi$  наклона вектора полной начальной скорости к оси  $x$ , получаем

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - gx^2/\left(2v_0^2 \cos^2 \alpha\right). \quad (1.19)$$

Дальность полета

$$x_{\max} = v_{0x} 2t_n = 2v_{0x} v_{0y}/g = (v_0)^2 \sin(2\phi)/g. \quad (1.20)$$

Видно, что дальность полета максимальна при  $\phi = 45^\circ$ . Следует подчеркнуть, что ускорение движения точки постоянно и равно  $-g$ . Полная скорость уменьшается (как и угол ее наклона к горизонту) при подъеме и равна горизонтальной на максимальной высоте.

Усложнение задачи может быть связано с **полетом точки** не над горизонтальной поверхностью, а над заданной некоторым уравнением, например, **наклонной** (№ 1.4, 1.5). Решая систему уравнений: траектория движения точки (1.19) и уравнение поверхности

(например,  $y = x$ ), определяем координату точки пересечения из уравнения

$$x \left[ gx / (2v_0^2 \cos^2 \alpha) - \operatorname{tg} \alpha + 1 \right] = 0.$$

Отсюда одна точка пересечения  $x = 0$ , а другая

$$x = 2v_0^2 \cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha - 1) / g.$$

Затем можно решать задачу о максимальных значениях координаты в зависимости, например, от угла, под которым вылетает тело. Для этого производную координаты по углу приравниваем нулю. В данном случае максимальное значение  $x$  получаем при  $\alpha = 3\pi/8$ .

Задачи о **попадании тела в некоторую точку** (неподвижную или движущуюся по заданному закону) решаются подстановкой координат этой точки в уравнение движения тела. В случае движущейся точки надо иметь в виду, что траектории тела и точки пересекаются в один и тот же момент времени.

При **упругом ударе** точечного тела о горизонтальную, вертикальную или наклонную поверхности будем считать, что угол между направлением скорости после удара и нормалью к поверхности равен углу между начальным направлением скорости и нормалью к поверхности. Модуль скорости не меняется. Величина и направление скорости после удара определяют дальнейшее движение. В случае вертикальной стенки движение происходит по линии, которая симметрична относительно стенки той линии, по которой бы двигалось тело в отсутствии стенки (№ 1.9).

Рассмотрим задачу о **движении точки по окружности**. При этом удобно воспользоваться полярными координатами. **Угловой скорость**  $\omega$  называется скорость изменения угла  $\varphi$ , который составляет радиус-вектор точки (выходящей из центра вращения) с осью  $x$ .

$$\omega = d\varphi/dt. \quad (1.21)$$

Для **углового ускорения** имеем:

$$\beta = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2. \quad (1.22)$$

Связь между линейной и угловой скоростями при вращении получаем, выражая смещение по дуге окружности через радиус окружности  $R$  и изменение угла:

$$v = d\varphi R/dt = \omega R. \quad (1.23)$$

Чтобы написать эту связь в векторном виде, необходимо напомнить о произведениях векторов.

## Скалярное произведение двух векторов

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \text{ и } \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$$

равно

$$\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \alpha.$$

Это произведение — число (скаляр). Угол  $\alpha$  — это угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

**Векторное произведение** представляет вектор, который вычисляется с помощью определителя следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Вектор  $\mathbf{c}$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , в ту сторону, куда движется правый винт при вращении его головки, лежащей в плоскости ( $a$ ,  $b$ ), от  $\mathbf{a}$  к  $\mathbf{b}$ . Абсолютное значение вектора  $\mathbf{c}$  определяется формулой

$$|\mathbf{c}| = ab \sin \alpha.$$

Направление  $\mathbf{c}$  зависит от порядка сомножителей и меняется на противоположное при их перестановке.

Вектор угловой скорости  $\omega$  лежит на оси вращения. Его направление зависит от используемой системы координат. В так называемой правой системе координат связь вектора угловой скорости с углом поворота (направлением вращения) такая, как для обычного винта — при повороте по часовой стрелке он удаляется от нас (рис. 1.6). В левой системе координат — направление противоположное. Векторы такого типа называются аксиальными, или псевдовекторами, в отличие от обычных векторов, какими являются радиус-вектор, скорость, ускорение (направление которых не зависит от используемой системы координат). Если пользоваться всегда правой системой координат, то указанное различие векторов проявляться не будет.

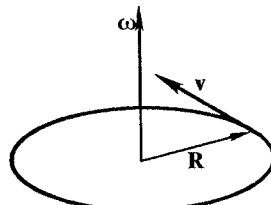


Рис. 1.6

**Связь между линейной и угловой скоростями и радиусом-вектором, проведенным из центра вращения в данную точку, при движении точки по окружности радиусом  $R$  имеет вид**

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{R}. \quad (1.25)$$

Линейная скорость при вращении меняется по направлению, но может меняться и по величине, если угловое ускорение отлично от нуля. В таком случае **ускорения точки**: нормальное (перпендикулярное направлению скорости)

$$\mathbf{a}_n = \omega \times \mathbf{v} = -\omega^2 \mathbf{R} = -v^2 \mathbf{R}/R^2 \quad (1.26)$$

и тангенциальное (в направлении скорости)

$$\mathbf{a}_\tau = (dv/dt)\mathbf{v}/v. \quad (1.27)$$

В целом полное ускорение для движения в плоскости

$$\mathbf{a} = a_\tau \mathbf{\tau} + a_n \mathbf{n}. \quad (1.28)$$

Здесь  $\tau$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении, перпендикулярном  $\mathbf{v}$ .

Если движение точки происходит не по окружности, а по некоторой плоской кривой линии  $\mathbf{r}(t)$ , то ускорение точки описывается (1.28), и при вычислении нормального ускорения в формулу (1.26) надо подставлять радиус кривизны линии, по которой движется точка (рис. 1.7).

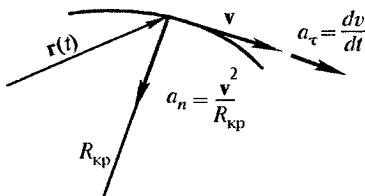


Рис. 1.7

Важной особенностью движения точки по окружности с постоянной угловой скоростью является периодичность, повторяемость положений.

К **периодическим** движениям относятся также **колебания** — точная повторяемость движения через некоторое время  $T$ , называемое **периодом**. Один из примеров колебательного движения — подпрыгивание стального шарика на стальной плите. Другой пример колебаний — маятник или качели. Такие движения можно считать **периодическими** только, если малы потери энергии.

Колебания называются гармоническими, если они описываются гармоническими функциями — синусами и косинусами. В общем гармоническое колебание можно записать в виде

$$y = a \sin(\omega t + \phi). \quad (1.29)$$

Здесь  $a$  — амплитуда колебаний;  $\omega$  — круговая частота,  $\phi$  — начальная фаза;  $t$  — время. Связь между обычной частотой  $v$  (число колебаний за одну секунду (герц)), круговой частотой и периодом колебаний  $T$ :

$$T = 1/v = 2\pi/\omega. \quad (1.30)$$

Отметим, что скорость и ускорение, которые получаются дифференцированием (1.29), также являются гармоническими функциями. Если задано гармоническое изменение ускорения, а скорость и перемещение определяются интегрированием, то необходимо учитывать начальные значения скорости и смещения, которые усложняют соответствующие зависимости.

Гармоническое движение по оси  $y$  с периодом  $T$  можно сложить с равномерным по оси  $x$ . В координатах  $(x, y)$  получаем синусоиду. В осциллографах придумали использовать повторяющееся равномерное движение по оси  $x$  (**пилообразное напряжение**), при котором равномерное движение длится некоторое время  $\tau$ , а затем начинается снова с нуля (мгновенно перескакивает). Это позволяет при совпадении  $\tau$  с  $T$  получить на экране осциллографа изображение синусоиды за один период, остановить время. Если  $\tau$  в два раза больше  $T$ , то видны будут два периода. При меньшем  $\tau$ , например, в два раза видны будут сразу две части синусоиды (№ 1.7).

Сложение двух гармонических движений (по обеим осям) дает так называемые **фигуры Лиссажу**, которые можно наблюдать на осциллографе. Их обычно используют для определения неизвестной частоты вдоль одной координаты по известной вдоль другой. Две одинаковые по частоте и амплитуде синусоиды при одинаковой начальной фазе дадут прямую линию с наклоном  $45^\circ$ , а при сдвиге фаз на  $\pi/2$  — окружность. При различных амплитудах прямая линия меняет наклон, а окружность превращается в эллипс. Решение подобных задач удобно проводить геометрически: вдоль каждой оси нарисовать зависимости от времени и находить точки в плоскости  $(x, y)$ , соответствующие каждому моменту времени. На рис. 1.8 показано сложение гармонических колебаний. По оси  $y$  период в два раза больше, чем по оси  $x$ . Соответственно частота в два раза меньше. Колебание по оси  $x$  отстает от колебания по

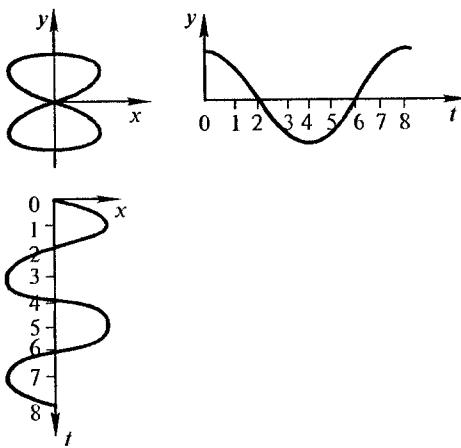


Рис. 1.8

оси  $y$  по фазе на  $\pi/2$ . В результате получаем фигуру Лиссажу, похожую на восмьку.

Рассмотрим движение в плоскости  $(x, y)$ , которое описывается гармоническими зависимостями координат от времени:

$$x = R \cos \omega t; y = R \sin \omega t.$$

Здесь  $R$  и  $\omega$  — постоянны.

Исключая время  $t$ , находим траекторию движения (окружность):

$$y^2 + x^2 = R^2.$$

Так как  $y/x = \operatorname{tg}(\omega t)$ , то видно, что  $(\omega t)$  — это угол поворота радиуса-вектора  $R$  и, следовательно,  $\omega$  — угловая скорость вращения. Возможно, что название круговая частота связано с этим результатом.

Дифференцируя  $y$  и  $x$  по времени  $t$ , находим

$$v = \{(v_x)^2 + (v_y)^2\}^{1/2} = \omega R.$$

Для компонент ускорения получаем

$$a_x = -\omega^2 x, a_y = -\omega^2 y.$$

Откуда

$$a = \{(a_x)^2 + (a_y)^2\}^{1/2} = \omega^2 R = v^2/R \text{ и } \mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{R}.$$

Ускорение направлено в центр окружности.

При разных амплитудах изменения  $x$  и  $y$  получается движение по эллипсу. При постоянном  $\omega$  и в этом случае получаем:  $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$

( $\mathbf{r}$  — вектор с компонентами  $x$  и  $y$ ), и вектор ускорения постоянно направлен в центр (а не в фокус) эллипса. Величина ускорения меняется вместе с  $\mathbf{r}$ . Только в четырех точках на эллипсе (пересечениях с осями координат) ускорение имеет лишь нормальную к траектории движения компоненту ускорения. Для движения по эллипсу с полуосами  $x_0$  и  $y_0$ , которое описывается уравнениями

$$x = x_0 \cos \omega t; \quad y = y_0 \sin \omega t,$$

скорости в этих точках равны:

$$v_x = -x_0 \omega y / y_0; \quad v_y = y_0 \omega x / x_0.$$

Видно, что движение происходит против часовой стрелки и  $\omega$  не является мгновенной угловой скоростью. В точке пересечения траектории с осью  $x$  ( $y = 0$ )

$$a_n = \omega^2 x_0; \quad v^2 = \omega^2 y_0^2$$

и в точке пересечения с осью  $y$  ( $x = 0$ )

$$a_n = \omega^2 y_0; \quad v^2 = \omega^2 x_0^2.$$

Для нахождения радиуса кривизны линии, описываемой зависимостью  $y(x)$ , воспользуемся тем, что бесконечно малый элемент кривой линии  $ds$  можно аппроксимировать элементом окружности. Радиус этой окружности является радиусом кривизны  $R_{kp}$  в этой точке. Используя рис. 1.9, получаем связь длины бесконечно малого элемента линии с изменениями координат, наклоном линии и радиусом кривизны. Для угла наклона линии  $\alpha$  имеем:

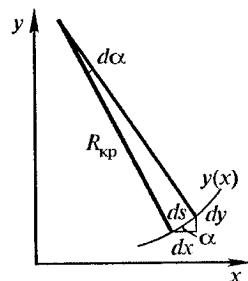


Рис. 1.9

Получаем:

$$ds = R_{kp} d\alpha = \{(dx)^2 + (dy)^2\}^{1/2} = dx \{1 + y'^2\}^{1/2}.$$

Вторая производная  $y(x)$  равна

$$y'' = (da/dx)/\cos^2 \alpha.$$

Так как  $\cos \alpha = dx/ds$  и  $1/\cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha = \{1 + y'^2\}$ , то

$$R_{kp} = \{1 + y'^2\}^{3/2} / y''. \quad (1.31)$$

Более простые способы нахождения радиусов кривизны могут быть использованы, если известны величина скорости и нормаль-

ная к направлению скорости компонента ускорения. По ним находим радиус окружности, на которой они имели бы такие значения при движении по окружности. В рассмотренной выше задаче о движении по эллипсу удается простым дифференцированием найти скорости и ускорения. В точках пересечения с осями координат ускорения нормальны к направлениям скоростей. Для **радиусов кривизны эллипса** в этих точках получаем

$$R_1 = y_0^2/x_0; \quad R_2 = x_0^2/y_0. \quad (1.32)$$

Полученные зависимости для радиусов кривизны эллипса в точках пересечения с осями координат позволяют решить задачу о вычислении ускорений в этих точках и при движении по эллипсу с **постоянной линейной скоростью**  $v$ :

$$a_1 = v^2 x_0/y_0^2; \quad a_2 = v^2 y_0/x_0^2. \quad (1.33)$$

Легко определяется и **кривизна баллистической кривой** (траектории полета снаряда в поле тяжести) в точке максимального подъема. Ускорение везде одинаково направлено вертикально вниз и равно  $g$ . Скорость равна горизонтальной скорости, которая постоянна и равна горизонтальной компоненте начальной скорости  $v_0 \cos \varphi$ . Поэтому радиус кривизны равен  $(v_0 \cos \varphi)^2/g$ .

Задача о **сложении скоростей** может возникнуть и при движении по одному направлению. Например, автобус едет по дороге, а внутри автобуса идет человек. Скорость человека относительно дороги равна сумме скоростей автобуса (**переносная**) и человека относительно автобуса (**относительная**). Общий принцип векторного сложения переносной  $\mathbf{u}$  и относительной  $\mathbf{v}'$  скоростей (**принцип Галилея**) является обобщением опытных фактов при не слишком больших скоростях движения:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}'. \quad (1.34)$$

Можно ввести системы отсчета, связанные, например, с дорогой и с автобусом и говорить о переходе от одной системы к другой. При этом по Галилею время абсолютно, т. е. одинаково в обеих системах.

Иногда простые задачи вызывают затруднение, которое мгновенно преодолевается при переходе в нужную систему отсчета. Вопрос о **скорости, получаемой мячом**, первоначально лежащим неподвижно на дороге, в результате упругого удара **бампером** автомобиля, движущегося со скоростью  $v$ , решается переходом в систему, движущуюся с автомобилем (мяч налетает со скоростью  $v$  и отскакива-

ет с такой же скоростью), а затем обратно в систему, связанную с дорогой. В результате скорость мяча будет  $2v$ .

В другой задаче о нахождении минимального **расстояния между двумя кораблями**, если заданы их скорости (постоянные по величине и направлению), достаточно перейти в систему, движущуюся с одним из кораблей. Траектория другого корабля в этой системе прямая линия, определяемая разностью скоростей, первого — неподвижная точка.

Рассмотрим задачи, в которых точка вращается **по окружности**, центр которой движется с постоянной скоростью в плоскости вращения (относительное движение по окружности и переносное с постоянной скоростью).

Например, колесо радиусом  $R$  движется горизонтально со скоростью  $u$  (скорость центра колеса) и вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Точка  $A$  на ободе описывает в плоскости некоторую траекторию. В системе координат  $(x', y')$ , связанной с центром колеса, движение точки  $A$ , находящейся на ободе и в начальный момент занимающей самое низкое по  $y'$  положение, при вращении по часовой стрелке описывается уравнениями

$$x' = -R \sin \omega t; \quad y' = -R \cos \omega t. \quad (1.35)$$

Так как эта система движется относительно системы  $(x, y)$  со скоростью  $u$ , а начальное положение точки  $A$  в начале координат, то

$$\begin{aligned} x &= u t + x' = u t - R \sin \omega t; \\ y &= R + y' = R - R \cos \omega t. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Угловая скорость вращения колеса  $\omega$  и скорость движения его центра  $u$  могут задаваться независимо. Для практических целей важен случай качения колеса без проскальзывания (№ 1.16). В этом случае, используя угол поворота колеса  $\varphi = \omega t$  и соотношения  $u t = \varphi R$  и  $u = v = \omega R$ , из уравнений (1.36) получаем

$$x = R(\varphi - \sin \varphi); \quad y = R(1 - \cos \varphi). \quad (1.37)$$

В плоскости  $(x, y)$  движение точки  $A$  описывается **циклоидой** (рис. 1.10), уравнение которой получается, если исключить из уравнений (1.37) угол  $\varphi$ .

Устройство колеса вагона электрички, идущей, например, из Москвы в Долгопрудную, таково, что на колесе есть точки, скорости которых имеют горизонтальную компоненту, направленную в сторону Москвы (противоположно направлению движения электрички). Это точки колеса, которые лежат ниже опорной поверхности

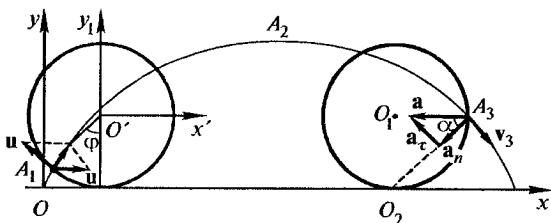


Рис. 1.10

ти колеса. Для таких точек циклоиды имеет вид, показанный на рис. 1.11:

$$x = R(\phi - \sin \phi) - h \sin \phi; \quad (1.38)$$

$$y = R(1 - \cos \phi) - h \cos \phi.$$

Здесь  $h + R$  — расстояние точки от оси вращения,  $R$  — радиус опорной части колеса.

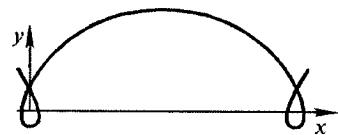


Рис. 1.11

Путь, проходимый точкой на ободе за полный оборот (длина циклоиды), можно вычислить по интегралу скорости (№ 1.17), или смещения, например, из (1.37)

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2} = 2R \sin(\phi/2) d\phi.$$

После интегрирования получаем путь, равный  $8R$ .

Кривизну циклоиды можно определять по общей формуле (1.31). Но в некоторых точках кривизна находится более простыми способами, основанными на связи нормального ускорения точки со скоростью и радиусом окружности, по которой движется точка (1.26):

$$a_n = \omega^2 R = v^2/R. \quad (1.39)$$

Для колеса, вращающегося с постоянной угловой скоростью, нормальное ускорение точки на ободе является полным ускорением, всегда направлено в центр колеса и равно (1.39). Переносное движение с постоянной скоростью ( $v = \omega R$  для движения без проскальзывания) ускорения не изменяет. В вершине циклоиды точка на ободе ( $A_2$  на рис. 1.10) относительно поверхности, на которой находится мгновенный центр вращения, имеет скорость  $2v$ . Поэтому для радиуса кривизны получаем соотношение

$$a_n = v^2/R = (2v)^2/R_{kp}.$$

Отсюда радиус кривизны равен  $4R$  (№ 1.14).

Для определения линейных скоростей точек колеса можно просто сложить относительные и переносные скорости (№ 1.15). Но можно найти мгновенный центр вращения, с помощью которого затем находится распределение линейных скоростей так же, как в случае вращения относительно обычного центра вращения. Напомним, что рассматривается плоское движение и мгновенный центр вращения представляет пересечение мгновенной оси с перпендикулярной к ней плоскостью движения. В случае качения колеса без проскальзывания — это точка соприкосновения колеса с поверхностью, по которой катится колесо и вместе с ним перемещаются мгновенная ось и мгновенный центр. На рис. 1.12 это точка  $O$ . Стрелками показаны линейные скорости в разных точках (№ 1.13, 1.15). При качении без проскальзывания для переносной скорости  $u$  и линейной скоростью  $v$  на ободе колеса радиусом  $R$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , имеем связь  $u = v = \omega R$ . Отметим, что на дуге  $ab$  (радиусом  $R$  из мгновенного центра вращения) линейные скорости равны  $u$ .

Подчеркнем, что вращение вокруг мгновенного центра определяет только линейные скорости (как при вращении относительно неподвижной оси). Перемещение центра не позволяет находить ускорения.

Полное ускорение при постоянной скорости вращения всегда направлено к центру колеса и равно  $u^2/R$ . При повороте на угол  $\phi$  (точка  $A_1$  на рис. 1.10) для горизонтальной составляющей ускорения получаем  $a_r = (u^2/R) \sin \phi$ , для вертикальной  $a_b = (u^2/R) \cos \phi$  (№ 1.19).

В точке  $A_3$  на рис. 1.10 радиус кривизны для качения без проскальзывания определяем, пользуясь тем, что известно полное ускорение  $a$  (всегда направленное в центр колеса и равное  $v^2/R$ ), а также направление и величина линейной скорости  $v_3 = v\sqrt{2}$  ( $O_2$  — мгновенный центр вращения), к которой нормальное ускорение перпендикулярно и определяется (1.39). Тогда для радиуса кривизны получаем  $R_{kp} = 2\sqrt{2}R$ . Что также следует из того, что точка  $O_2$  является мгновенным центром вращения.

В случае качения колеса с проскальзыванием, когда оно вращается с угловой скоростью  $\omega$  и переносится со скоростью  $u$  (№ 1.20), для нахождения радиуса кривизны снова воспользуемся (1.39). Так как полное ускорение точки направлено по радиусу  $R$  к центру колеса ( $a = \omega^2 R$  независимо от того, покоятся центр колеса или дви-

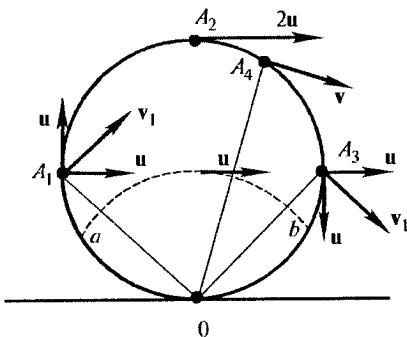


Рис. 1.12

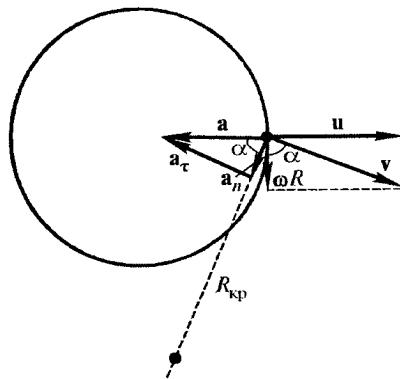


Рис. 1.13

жется с постоянной скоростью), используя, что полная скорость равна

$$v = (u^2 + \omega^2 R^2)^{1/2},$$

для нормальной к направлению скорости компоненты ускорения получаем (рис. 1.13)

$$a_n = a \cos \alpha = \omega^2 R \omega R / v = \omega^3 R^2 / (u^2 + \omega^2 R^2)^{1/2}.$$

Окончательно

$$R_{kp} = \{u^2 + \omega^2 R^2\}^{3/2} / (\omega^3 R^2).$$

Один из практических вопросов при движении автомобиля по грязной дороге: на каком расстоянии держаться от идущего впереди со скоростью  $u$  автомобиля, чтобы не попасть под вылетающую у него из-под колес грязь? В системе отсчета, движущейся вместе с автомобилями, максимальная дальность полета грязи определяется формулой баллистического полета (1.20)  $L = u^2/g$ . Другой вопрос: на какую максимальную высоту может быть заброшена грязь (№ 1.18)? Из (1.37) получаем вертикальную скорость

$$dy/dt = R \sin \phi (d\phi/dt) = u \sin \phi. \quad (1.40)$$

Для высоты подъема, используя (1.17), получаем

$$h = y + (u \sin \phi)^2 / (2g). \quad (1.41)$$

Здесь  $y$  определяется из (1.37).

Максимальное значение находим из условия  $dh/d\phi = 0$ , которое дает

$$\cos \phi = -Rg/u^2. \quad (1.42)$$

По условию  $u^2 > Rg$  и, следовательно, такой угол существует, что приводит к

$$h_{\max} = R + u^2/(2g) + gR^2/(2u^2). \quad (1.43)$$

До сих пор рассматривались задачи, в которых центр колеса двигался по прямой линии. При движении центра колеса, например, по баллистической кривой полное ускорение точки обода представляет сумму ускорения за счет вращения и ускорения свободного падения  $g$ . Кривизну траектории точки обода в момент ее максимального подъема можно найти по скорости, равной сумме горизонтальной скорости центра колеса (в № 1.21 — диск), которая постоянна и равна сумме начальной скорости ( $v_0 \cos \alpha$ ) и скорости за счет вращения ( $\omega R$ ). Радиус кривизны в таком случае  $R_{kp} = (v_0 \cos \alpha + \omega R)^2 / (\omega^2 R + g)$ .

Рассмотрим сложение вращения колеса с движением его центра по окружности. Точка обода вращается с угловой скоростью  $\omega'$  относительно системы координат  $(x', y')$ , а эта система поступательно движется в координатах  $(x, y)$  по окружности с угловой скоростью  $\omega$ . На рис. 1.14 представлено такое движение. Положение точки  $A$  в системе координат  $(x', y')$  описывается уравнениями

$$x' = r' \cos \varphi'; \quad y' = r' \sin \varphi'. \quad (1.44)$$

В системе  $(x, y)$  точка  $A$  через некоторое время  $t$  переходит в положение  $A_1$ . Ее движение описывается уравнениями:

$$x = r \cos \varphi + r' \cos \varphi'; \quad y = r \sin \varphi + r' \sin \varphi', \quad (1.45)$$

где  $\varphi' = \omega' t$ ;  $\varphi = \omega t$ .

Если в подвижной системе вращение отсутствует ( $\omega' = 0$ ), то точка  $A$  движется по окружности радиусом  $r$ . Каждая точка обода движется по окружности такого радиуса. Центры их, соответственно, в разных точках. Картина движения, как для точек кабины «колеса обозрения». Если  $\omega' = \omega$ , то точки обода вращаются по окружностям, радиусы которых определяются их расстоянием от начала координат  $(x, y)$ . Например, точка  $A$  движется по окружности радиусом  $r + r'$ .

Теперь рассмотрим сложение вращений. Колесо вращается в системе координат  $(x', y')$  с угловой скоростью  $\omega'$ , а эта система вращается в координатах  $(x, y)$  с угловой скоростью  $\omega$ . Если оси вращения

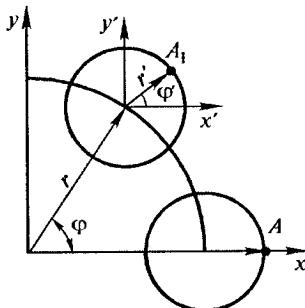


Рис. 1.14

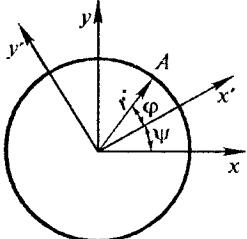


Рис. 1.15

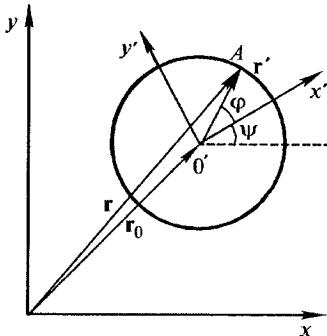


Рис. 1.16

совпадают, как показано на рис. 1.15, то очевидно, что угловая скорость вращения обода относительно системы координат  $(x, y)$  равна сумме угловых скоростей:  $\Omega = \omega + \omega'$ . Удобно точку на ободе отметить радиусом-вектором  $r'$  и следить за вращением этого вектора.

Если оси вращения не совпадают, как показано на рис. 1.16, то поворот вектора  $r'$  относительно координат  $(x, y)$  определяется только относительным вращением системы координат  $(x', y')$  и вращением в этой системе. Перемещение же начала координат подвижной системы на вращение  $r'$  не оказывается. Таким образом, угловая скорость вращения вектора  $r'$  в неподвижной системе  $(x, y)$  равна сумме угловых скоростей переносного вращения  $\omega$  и относительного  $\omega'$ :

$$\Omega = \omega + \omega'. \quad (1.46)$$

Движение оси относительного вращения приводит к перемещению оси суммарного вращения. Если известны в некоторый момент времени положения осей складываемых вращений, то мгновенное положение оси суммарного вращения находим из условия равенства нулю на ней суммарной линейной скорости.

Рассмотрим для примера **вращение Венеры** вокруг собственной оси и вокруг Солнца (№ 1.10). При вращении Венеры относительно неподвижной системы (относительно звезд) с периодом  $T_1$  угловая скорость  $\Omega = 2\pi/T_1$ . Угловая скорость орбитального движения с периодом  $T_2$ , как показали измерения, направлена противоположно  $\Omega$  и равна  $\omega = -2\pi/T_2$ . Обозначая продолжительность солнечных суток  $T$ , для угловой скорости в подвижной системе координат, связанной с Солнцем, имеем  $\omega' = 2\pi/T$ . Из (1.46)  $1/T = 1/T_1 + 1/T_2$ .

Можно решать эту задачу другим способом. На рис. 1.17 показана Венера в системе, связанной с Солнцем. Вычисляем линейные

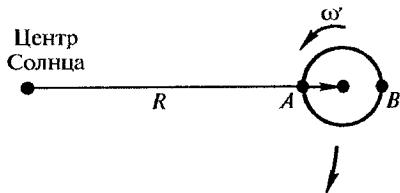


Рис. 1.17

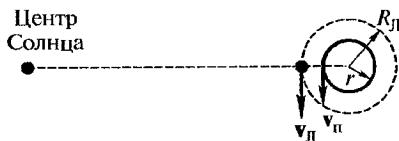


Рис. 1.18

скорости в точках  $A$  и  $B$  и по ним угловую скорость относительно неподвижных звезд:

$$\Omega = [\omega(R - r) + \omega'r - \omega(R + r) + \omega'r]/(2r) = \omega - \omega'.$$

Аналогичным образом можно определить скорость, с которой движется тень Луны по земной поверхности во время полного солнечного затмения, если оно наблюдается на экваторе. Для простоты считаем, что Солнце, Земля и Луна находятся в одной плоскости (рис. 1.18), а земная ось к этой плоскости перпендикулярна (№ 1.11). Скорость света считаем бесконечно большой по сравнению со всеми остальными скоростями. Радиус лунной орбиты  $R_L = 3,8 \cdot 10^5$  км.

Подчеркнем, что для простоты решения важно выбрать подходящую систему координат. В данном случае систему координат удобно связать с линией, соединяющей центры Земли и Солнца. В этой системе скорость движения поверхности Земли за счет собственного вращения  $v_n = 2\pi r/T_c$  ( $r$  — радиус Земли,  $T_c$  — продолжительность, сут), скорость вращения Луны вокруг Земли  $v_L = 2\pi R_L/T_L$ . Здесь расстояние от Земли до Луны  $R_L = 60r$ ,  $T_L$  — время обращения Луны вокруг Земли  $\sim 28$  сут. Для правильного представления о рассматриваемой системе следует привести расстояние от Земли до Солнца  $R = 23485r$ , радиус Луны  $r_L = 0,273r$ , радиус Солнца  $r_C = 109r$ . Если бы не было суточного вращения Земли, то тень Луны по поверхности Земли передвигалась бы со скоростью  $v_L$ , так как расстояние от Солнца до Земли много больше, чем расстояние от Луны до Земли. Учитывая собственное вращение Земли, которое происходит в ту же сторону, что и вращение Луны, получаем

$$v_{\text{тени}} = v_L - v_n = 2\pi(R_L/T_L - r/T_C) = 0,5 \text{ км/с.}$$

Движение начала координат подвижной системы нужно учитывать при вычислении линейной скорости точки  $A$  на рис. 1.16. Положение точки  $A$  в системе координат  $(x, y)$  определяется вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' \quad (1.47)$$

Вектор  $\mathbf{r}'$  в подвижной системе можно представить как

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}'. \quad (1.48)$$

При дифференцировании его по времени надо учесть, что орты подвижных осей вращаются с угловой скоростью  $\omega$ . Тогда получаем

$$d\mathbf{i}'/dt = \omega \times \mathbf{i}'; d\mathbf{j}'/dt = \omega \times \mathbf{j}'. \quad (1.49)$$

Для скорости точки  $A$  получаем

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = d\mathbf{r}_0/dt + d\mathbf{r}'/\delta t + \omega \times \mathbf{r}'. \quad (1.50)$$

Рассмотрим **сложение вращений**, когда угловые скорости вращений пересекаются в одной точке под некоторым углом. Мгновенная скорость суммарного вращения получается геометрическим сложением переносного и относительного вращений:

$$\Omega = \omega + \omega'. \quad (1.51)$$

Примеры таких вращений — это качение колеса с поворотом или конуса по плоскости или другому конусу. Мгновенную ось суммарного вращения находим из условия равенства нулю на ней линейных скоростей. В случае отсутствия проскальзывания мгновенная ось вращения лежит на поверхности, по которой катится колесо или конус. На рис. 1.19 показано колесо радиусом  $r$ , которое вокруг своей оси вращается с угловой скоростью  $\omega$  и поворачивает по окружности радиусом  $R$  с угловой скоростью  $\Omega$ . При отсутствии проскальзывания скорость центра колеса

$$v = r\omega = R\Omega.$$

Отсюда получаем связь между скоростями и углами, из которой следует, что полная угловая скорость  $\omega_p$  направлена через точку со-прикосновения колеса с плоскостью.

Качение колеса является движением тела конечных размеров, если следить не только за одной точкой обода. Рассмотрим другой пример плоского движения тела конечных размеров.

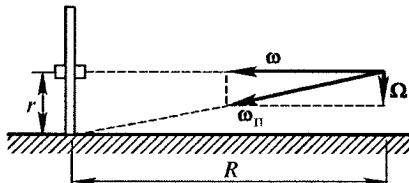


Рис. 1.19

Простейший пример — лестница длиной  $l$ , прислоненная к стене под углом  $\alpha$  к полу. Найдем мгновенную ось вращения, если лестница начнет скользить по стене и полу.

Так как скорости концов лестницы направлены по стене (ось  $y$ ) и полу (ось  $x$ ), то мгновенная ось вращения — пересечение перпендикуляров к полу и стенке из концов лестницы. Отметим, что средняя точка лестницы (центр масс) будет двигаться по дуге окружности, радиус которой равен половине длины лестницы.

## 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. СТАТИКА

Движение тела определяется взаимодействием с другими телами (либо полями, которые они создают). Мерой взаимодействия является **сила**. Для определения этого понятия можно воспользоваться советом известных физиков (Зоммерфельда и Фейнмана). Лучшим определением любого физического понятия является указание на способ его измерения. Силы можно мерить с помощью пружин или весов. Сила — векторная величина. Примеры сил, которые встречаются в задачах: притяжение к Земле, натяжение пружины, силы сопротивления и трения.

Первый закон Ньютона, который называют также законом инерции: тело, на которое не действуют другие тела, неподвижно или движется с постоянной скоростью. Этим утверждением отбирают системы отсчета, называемые **инерциальными**, где это выполняется, и для которых формулируется второй закон Ньютона. В **неинерциальных** же системах отсчета, например вращающихся, свободные тела имеют ускорения и сложное движение.

Во времена Аристотеля, основываясь на некоторых экспериментальных фактах, считали, что скорость, например, при перемещении груза по поверхности Земли пропорциональна силе. Более аккуратные эксперименты позволили Ньютону сформулировать второй закон. Ньютон ввел массу как произведение плотности на объем. Для нас **масса** новое понятие, характеризующее инерционность тела при **поступательном движении**. Для измерения массы, например, в условиях невесомости на спутниках используют второй закон Ньютона.

Второй закон Ньютона, который является основным уравнением динамики, заключается в том, что получаемое телом ускорение **a** пропорционально приложенной к телу силе **F**. Коэффициент пропорциональности — масса **m**, как уже сказано, характеризует инертность тела

$$ma = F. \quad (2.1)$$

Ускорение выражается через скорость  $v$  и перемещение — изменение радиуса-вектора  $r$ , определяющего положение тела,

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2. \quad (2.2)$$

Поэтому уравнение движения тела (2.1) можно записать в виде обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка относительно скорости:

$$m\mathbf{dv}/dt = \mathbf{F} \quad (2.3)$$

либо в виде обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно вектора  $r(t)$ :

$$m d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{F}. \quad (2.4)$$

Используя понятие массы  $m$ , получаем новое важное понятие — импульс:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (2.5)$$

Новой по сравнению со школьной программой для студентов является запись второго закона Ньютона в виде дифференциального уравнения для импульса, которое часто удобнее использовать, например, для описания движений тел с переменной массой:

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}. \quad (2.6)$$

Второй закон Ньютона — это дифференциальное уравнение движения. Для получения закона движения надо решить это уравнение — проинтегрировать.

Приведенные обыкновенные дифференциальные уравнения могут быть проинтегрированы, если, например, известна зависимость  $\mathbf{F}(v)$  или  $\mathbf{F}(r)$  и заданы дополнительные условия. В частности, дополнительными могут быть начальные условия: одно для уравнения первого порядка и два для уравнения второго порядка. Если же известен закон движения  $r(t)$ , закон изменения скорости  $v(t)$  или импульса  $p(t)$ , то, используя закон Ньютона, можно найти действующую силу.

Первый и второй законы Ньютона относились к одному телу, на которое действовала сила от каких-то других тел. Третий закон устанавливает взаимодействие между телами: действие равно противодействию. Отметим, что при конечной скорости передачи действия (силы) этот закон нарушается.

Если размеры тела малы по сравнению с перемещениями, т. е. его положение можно характеризовать одной точкой, то оно назы-

вается **материальной точкой**. В этом разделе рассматриваются тела, динамика которых определяется одной точкой.

Главным, особенно при рассмотрении системы тел, является обозначение всех сил (полезно пользоваться рисунками), а затем использование второго закона Ньютона и проектирование уравнения на подходящие оси координат.

Простейшим является **прямолинейное движение** вдоль одной координаты, например  $x$ .

В случае **постоянной силы** и постоянной массы тела при известной начальной скорости  $v_0$  и начальной координате  $x_0$  получаем:

$$a = F/m; v = v_0 + at; x = x_0 + v_0 t + at^2/2. \quad (2.7)$$

Примером постоянной силы может быть сила тяжести вблизи поверхности земли ( $a = g$ ) либо сила трения при движении по шероховатой горизонтальной поверхности ( $F_{\text{тр}} = kmg$ ). В последнем случае сила трения уменьшает скорость  $v_0$ , которая была в точке с координатой  $x_0$  при  $t = 0$ .

$$a = -kg; v = v_0 - gkt; x = x_0 + v_0 t - gkt^2/2. \quad (2.8)$$

В некоторых случаях удобно (2.3) переписать для одномерного случая в виде:

$$mdv/dt = m(dv/dx)(dx/dt) = mvdv/dx = F. \quad (2.9)$$

Отсюда, разделяя переменные, получаем

$$vdv = (F/m)dx. \quad (2.10)$$

При движении тела в жидкости (или по ее поверхности) сила сопротивления, направленная против скорости, может быть **пропорциональна величине скорости** (до некоторых значений, а при больших значениях скоростей ее квадрату):

$$F = \beta v. \quad (2.11)$$

Из (2.3) получаем

$$dv/v = -\beta dt/m. \quad (2.12)$$

Интеграл этого уравнения

$$\ln v = -\beta t/m + \text{const}. \quad (2.13)$$

В случае задания начальной скорости  $v = v_0$  при  $t = 0$  (№ 2.31) имеем

$$v = v_0 e^{-\beta t/m}. \quad (2.14)$$

Видно, что скорость стремится к нулю только при бесконечном времени. Используя (2.10), получаем

$$v = v_0 - \beta x/m. \quad (2.15)$$

Это зависимость скорости от пройденного пути  $x$ . Отсюда видно, что путь до остановки, когда скорость окажется равной нулю, конечен и равен  $m v_0 / \beta$ . Получение зависимости (2.14) и бесконечного по времени движения связано с тем, что не учитываются малые постоянные силы сопротивления.

Сила сопротивления всегда направлена противоположно скорости. Однако формула (2.11) справедлива и для проекций в случае сложного движения.

Например, в случае **сбрасывания груза с самолета** (№ 2.70) горизонтальное движение описывается (2.15) и, если позволит высота (будет достаточно большой), дальность определяется нулевой скоростью в (2.15).

Аналогичным образом можно включить и вертикальную компоненту, в том числе и с учетом силы тяжести (№ 2.68).

При увеличении скорости тела сила сопротивления становится пропорциональной квадрату относительной скорости. Для яхт и буеров сила сопротивления движению воздуха (ветру) приводит к их движению (по ветру).

Рассмотрим разгон парусного буера массой  $m$  при движении по ветру, дующему со скоростью  $v$ , и вычислим время, через которое мощность, отбираемая буером у ветра, будет максимальной, если сила сопротивления паруса ветру пропорциональна квадрату относительной скорости (№ 2.32):

$$F = k(v - v_b)^2.$$

Здесь  $v_b$  — скорость буера;  $k$  — заданный постоянный коэффициент пропорциональности.

Уравнение движения буера при пренебрежении трением о лед:

$$mdv_b/dt = k(v - v_b)^2.$$

После разделения переменных

$$d(v_b - v)/(v_b - v)^2 = kdt/m.$$

Если в начальный момент скорость буера была равна нулю, то

$$kt/m = 1/(v - v_b) - 1/v \quad (2.16)$$

и скорость буера

$$v_b = v - 1/(kt/m - 1/v).$$

Движение буера происходит за счет работы, совершающей ветром и отбираемой буером. Отбираемая мощность при этом

$$N = Fv_{\text{Б}} = kv_{\text{Б}}(v - v_{\text{Б}})^2.$$

Ее максимум определяется условием

$$dN/dv_{\text{Б}} = 0.$$

Откуда  $v_{\text{Б}} = v/3$  и момент времени, когда это происходит, определяем из (2.16):  $t = m/(2kv)$ .

Сила может иметь линейную зависимость от пройденного телом расстояния.

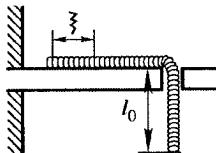


Рис. 2.1

Такая зависимость получается при движении тяжелого шнура длиной  $l$ , часть которого находится на гладкой горизонтальной поверхности, а часть длиной  $l_0$ , пропущенная через отверстие в поверхности, в начальный момент времени висит в поле тяжести (рис. 2.1). Сила, ускоряющая шнур, равна весу свешивающейся части. Обозначая длину свешивающейся части шнура  $x$ , из (2.10) получаем

$$vdv = g(x/l)dx.$$

Интегрируя с учетом начального условия, находим

$$v^2 = g(x^2 - l_0^2)/l.$$

Отсюда можно определить скорость, с которой выходит из отверстия при  $x = l$  конец шнура (№ 2.65).

Для нахождения  $x(t)$  воспользуемся уравнением (2.4), из которого, вводя обозначение

$$g/l = p, \quad (2.17)$$

имеем

$$d^2x/dt^2 - p^2x = 0. \quad (2.18)$$

Общее решение этого уравнения

$$x = Ae^{pt} + Be^{-pt}. \quad (2.19)$$

Учитывая, что в начальный момент при  $t = 0$ ,  $x = l_0$  и  $v = dx/dt = 0$ , определяем постоянные интегрирования:

$$A = B = l_0/2$$

и получаем

$$x = (l_0/2)(e^{pt} - e^{-pt}).$$

К шнту приложена внешняя сила  $F$ , определяемая полем тяжести (весом свешивающейся части). При этом все точки шнту имеют одинаковые ускорения (как бы движение точечной массы). В шнту, в каждом сечении, имеются внутренние силы. Для шнту массой  $m$  кусок длиной  $\xi$  (см. рис. 2.1) имеет массу  $m\xi/l$ . Этот кусок имеет то же ускорение, что и весь шнту  $a = F/m$ . Поэтому внутренняя сила, которая ускоряет этот кусок, равна  $f = F\xi/l$  (№ 2.1).

При падении тела в поле тяжести в жидкости (или воздухе) кроме силы тяжести действуют еще силы сопротивления и Архимеда. Сила сопротивления обычно пропорциональна скорости (2.11). Для шарика радиусом  $R$  сила сопротивления движению со скоростью  $v$  в жидкости с коэффициентом вязкости  $\eta$  определяется формулой Стокса:

$$F = 6\pi\eta Rv. \quad (2.20)$$

Сила Архимеда зависит от отношения плотности жидкости  $\rho_{ж}$  и плотности тела  $\rho_t$ . Учет этой силы приводит как бы к уменьшению силы тяжести. Вместо веса тела  $mg_0$  получаем некоторый эффективный вес:

$$mg = mg_0 - (\rho_{ж}/\rho_t)mg_0 = mg_0(1 - \rho_{ж}/\rho_t). \quad (2.21)$$

В таком случае из (2.3) имеем

$$mdv/dt = mg - \beta v. \quad (2.22)$$

Так как сила тяжести увеличивает скорость и, соответственно, увеличивается сила сопротивления, то при некотором значении скорости сумма сил оказывается равной нулю и ускорение прекращается. Для установившейся скорости (при ускорении равном нулю) из (2.22) получаем величину установившейся скорости

$$v_y = mg/\beta. \quad (2.23)$$

Разделяя переменные в (2.22), имеем

$$dv/(g - \beta v/m) = dt.$$

При нулевой начальной скорости

$$v = (mg/\beta)(1 - e^{-\beta t/m}). \quad (2.24)$$

Интегрируя еще раз, находим зависимость пути от времени:

$$x(t) = (mg/\beta)[t - (m/\beta)(1 - e^{-\beta t/m})]. \quad (2.25)$$

Отсюда, если задано время, находим глубину погружения (№ 2.42).

В случае, когда такое же тело начало падать раньше этого на время  $\tau$  (№ 2.69), расстояние между ними вычисляем по формуле  $\Delta x = x(t + \tau) - x(t)$ .

Падающее с установившейся скоростью тело при уменьшении его массы переходит на новое значение установившейся скорости.

Например, воздушный шар, имеющий сферическую оболочку радиусом  $R$ , которая заполнена газом массой  $m_r$ , и массу гондолы, оснастки и оболочки  $M$ , опускается в воздухе, масса которого в объеме оболочки  $m_B$ , а коэффициент вязкости  $\eta$ , с постоянной скоростью. Чтобы уменьшить скорость опускания за борт выбрасывают массу  $m$ . Найдем изменение скорости шара со временем (№ 2.36).

Предполагая для силы сопротивления зависимость Стокса (2.20), находим установившуюся скорость

$$v_y = (M + m_r - m_B)g_0/(6\pi\eta R).$$

После выбрасывания массы происходит изменение скорости. Отметим, что при ускоренном движении тела даже в идеальной (невязкой) жидкости возникает сила сопротивления, связанная с ускорением частиц окружающей среды. Предполагаем, что в данном случае этой силой, так же как и весом газа в оболочке шара, можно пренебречь по сравнению с  $(M - m)g_0$ . В таком случае уравнение движения

$$(M - m)dv/dt = (M - m - m_B)g_0 - 6\pi\eta Rv.$$

Отсюда новая установившаяся скорость

$$v_{yH} = (M - m - m_B)g_0/(6\pi\eta R).$$

Разделяя переменные, получаем

$$dv/(v - v_{yH}) = -6\pi\eta Rdt/(M - m).$$

Учитывая, что в начальный момент  $v = v_{yH}$ , находим

$$v = v_{yH} + mg\exp[-6\pi\eta R t/(M - m)]/(6\pi\eta R).$$

При бросании тела вертикально вверх (против силы тяжести) по оси  $x$  вместо (2.22) получаем

$$mdv/dt = -mg - \beta v. \quad (2.26)$$

Разделяя переменные и используя начальное условие (начальная скорость равна  $v_0$ ), а также (2.23), в результате интегрирования имеем (№ 2.37)

$$v = v_y [(1 + v_0/v_y) \exp(-gt/v_y) - 1]. \quad (2.27)$$

Используя формулу Стокса (2.20) и учитывая силу Архимеда (2.21), для установившейся скорости получаем (№ 2.35)

$$v_y = (2/9)R^2(\rho_t - \rho_\infty)g_0/\eta.$$

Интегрируя (2.27), имеем для перемещения

$$x = (v_0 + v_y)(v_y/g)[1 - \exp(-gt/v_y)] - v_y t. \quad (2.28)$$

Время подъема на максимальную высоту (№ 2.38) находим из (2.27) при обращении скорости в нуль:

$$\tau = (v_y/g) \ln(1 + v_0/v_y). \quad (2.29)$$

В отсутствии вязкости время подъема равно  $v_0/g$ . Следует подчеркнуть, что величина  $v_y$  определяется свойствами среды, а также формой и размерами тела, а  $v_0$  — действием на тело начального внешнего импульса, и в общем случае они независимы.

Для определения максимальной высоты подъема (№ 2.39) время из (2.29) подставляем в (2.28):

$$x_{\max} = (v_y^2/g) [v_0/v_y - \ln(1 + v_0/v_y)]. \quad (2.30)$$

Рассмотрим теперь системы тел, связанных нитями, в том числе и нитями, проходящими через блоки. В случае невесомых нитей натяжение вдоль них не меняется. В невесомых блоках натяжение нитей с обеих сторон блока одинаково.

На рис. 2.2 представлена система, состоящая из трех тел массами  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ , находящимися на гладкой горизонтальной поверхности и связанных нитями между собой и через блок с висящим телом массой  $M$ . Найдем ускорение системы и натяжение всех нитей (№ 2.4, 2.2). Трением в блоке, а также массами блока и нитей пренебрегаем.

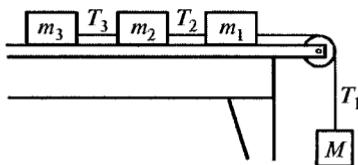


Рис. 2.2

Натяжение вдоль невесомой нити не меняется, поэтому силы, действующие на соседние тела, одинаковы. Для системы они являются внутренними. Система ускоряется телом массой  $M$ . Из (2.1) для ускорения системы

$$a = Mg/(m_1 + m_2 + m_3 + M). \quad (2.31)$$

Для нахождения натяжения каждой нити рассматриваем в отдельности движение соответствующего тела с найденным выше ускорением  $a$ :

$$T_1 = (m_1 + m_2 + m_3)a; T_2 = (m_2 + m_3)a; T_3 = m_3a.$$

Если поверхность не гладкая, а на ней действует сила трения с коэффициентом трения  $k$ , для ускорения получаем (см. рис. 2.2)

$$a = [M - k(m_1 + m_2 + m_3)]g/(m_1 + m_2 + m_3 + M). \quad (2.32)$$

В случае однородной весомой нити задача усложняется. Для примера рассмотрим движение двух тел массами  $m$  и  $M$ , связанных нерастяжимой, однородной весомой нитью массой  $m_n$  (рис. 2.3), перекинутой через невесомый блок (№ 2.10).

Обозначим длину свешивающейся части нити (расстояние тела массой  $m$  от оси блока)  $x$  и ускорение тел и нити в этот момент  $a = d^2x/dt^2$ . Тогда для уравнения движения системы получаем

$$(M + m + m_n)a = (m + m_n)x/l)g. \quad (2.33)$$

Так как нить обладает массой, то натяжение вдоль нити меняется. Найдем  $x_1$ , при котором равны силы, действующие на тела (№ 2.10). Сила, действующая на  $M$ , равна  $Ma$ , а сила, действующая на  $m$ ,  $m(g - a)$ . Отсюда  $a = mg/(M + m)$ . Подставляя это выражение в (2.33), находим  $x_1$ .

Для нахождения значения натяжения в некоторой точке весомой нити мысленно вставляем в это место кусочек невесомой нити и находим ее натяжение.

Усложнение задачи (см. рис. 2.3) может быть связано не с весом нити (ее считаем невесомой), а с трением на горизонтальной поверхности (с коэффициентом трения  $k$ ) и движением висящего тела (карабкается обезьяна массой  $m$ ) по нити с постоянным (относительно земли) ускорением  $A$  (№ 2.12).

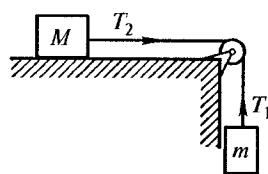


Рис. 2.3

Найдем ускорение  $A$ , при котором тело массой  $m$  сможет подняться на высоту  $H$  (начальное расстояние обезьяны от блока), пока еще тело массой  $M$  не успеет пройти расстояние до блока, которое вначале было равно

$$L > Hm/M. \quad (2.34)$$

Обозначая ускорение горизонтального движения  $a$  и учитывая, что в случае невесомой нити ее натяжение  $T$  вдоль нити не меняется, получаем уравнения движения тел:

$$Ma = T - kMg;$$

$$mA = T - mg.$$

Исключая натяжение нити, получаем

$$a = (A + g)m/M - kg, \quad (2.35)$$

т. е. это ускорение постоянно. Поэтому  $L = at^2/2$  и  $H = At^2/2$ .

Отсюда, исключая время, имеем  $L = Ha/A$ . Используя (2.35), находим

$$A \geq gH(m - kM)/(ML - mH). \quad (2.36)$$

Из (2.34) следует положительность знаменателя. Поэтому при  $k < m/M$  условие задачи выполняется при (2.36), а при  $k \geq m/M$  при любом  $A$ .

Для вертикального перемещения тел используют **блоки**. В случае невесомого блока, как уже говорилось, натяжения нитей одинаковы с обеих его сторон. Использование **подвижного блока** дает выигрыш в силе, но проигрыш в перемещении. Соединенные блоки называют **полиспастами**. Соединение двух двойных блоков (рис. 2.4) дает выигрыш в силе в четыре раза, соединение тройных блоков — в восемь раз.

Найдем натяжения нитей и ускорение массы  $m_1$  в системе (№ 2.7), изображенной на рис. 2.5.

Так как блоки и нити невесомые, то

$$T_1 = 2T_2. \quad (2.37)$$

Для каждой массы можно записать уравнения движения (второй закон Ньютона):

$$m_1a_1 = m_1g - T_1; \quad (2.38)$$

$$m_2a_2 = m_2g - T_2; \quad (2.39)$$

$$m_3a_3 = m_3g - T_2. \quad (2.40)$$

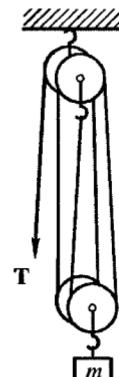


Рис. 2.4

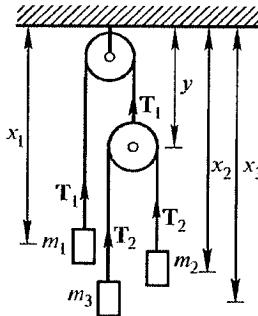


Рис. 2.5

Для длин нитей получаем

$$l_1 = x_1 + y;$$

$$l_2 = x_2 - y + x_3 - y.$$

Исключая  $y$ , имеем

$$2l_1 + l_2 = 2x_1 + x_2 + x_3. \quad (2.41)$$

Дважды дифференцируя это соотношение, находим

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0. \quad (2.42)$$

Используя для натяжений (2.37) и для ускорений (2.42), из (2.38), (2.39) и (2.40) получаем натяжения и ускорение.

Рассмотрим движение тел, продвигающихся по невесомой нити, перекинутой через невесомый блок, подвешенный в поле тяжести (рис. 2.6). Например, две обезьяны с одинаковыми массами, находящиеся на концах веревки (нити) длиной  $L$  (на расстояниях  $L/2$  от горизонтальной оси блока), начинают одновременно подниматься вверх, причем одна из них поднимается относительно веревки со скоростью  $v$ , а другая со скоростью  $2v$ . Найдем, через какое время каждая из обезьян достигнет блока (№ 2.13).

Силы, действующие на каждую из обезьян со стороны веревки, всегда одинаковы (одинаково меняются со временем), так как блок и веревка невесомы. Под действием одинаковых сил одинаковые массы будут иметь всегда одинаковые ускорения. Следовательно, если обезьяны в начальный момент находились на одном уровне и начинали двигаться из состояния покоя, то относительно земли (в лабораторной системе координат, в которой ось блока покоятся) они всегда будут находиться на одном уровне, двигаться с одинаковыми скоростями, и достигнут блока одновременно. Считая, что процесс установления скорости происходит быстро по сравнению с продолжительностью движения  $t$ , получаем, что практически все движение происходит с постоянной скоростью. Отметим лишь, что в процессе набора скорости не выполняется условие движения обезьяны относительно веревки с постоянной скоростью. Время движения до блока — это время, за которое обезьяны выберут всю веревку (одна со скорос-

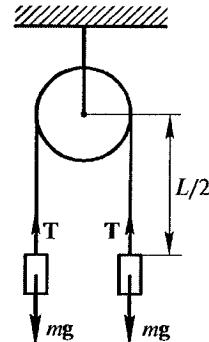


Рис. 2.6

тью  $v$ , а другая со скоростью  $2v$ , а в сумме обе —  $3v$ )  $t = L/(3v)$ . Веревка движется в сторону второй обезьяны со скоростью  $v/2$ .

Результат будет другим в случае других начальных условий. Например, если бы обезьянам предварительно перед помещением на веревку сообщили скорости: одной скорость  $v$ , а другой — скорость  $2v$ . При отсутствии сил и ускорений веревка была бы неподвижной, и одной обезьяне, чтобы добраться до блока, нужно было время  $L/(2v)$ , а другой  $L/(4v)$ . Очевидно, что вторая окажется у блока раньше.

В случае, когда обезьяны начинают двигаться с разными ускорениями относительно веревки, по-прежнему из-за равенства масс и равенства натяжений их ускорения относительно оси блока всегда будут одинаковыми. Поэтому обезьяны будут подниматься одинаково, а веревка придет в движение. Допустим, что одна обезьяна выбирает веревку с ускорением в два раза большим, чем другая (№ 2.15). Тогда время  $t$ , за которое они выберут веревку длиной  $l$ , определяется из условия  $l = at^2/2 + (2a)t^2/2$ .

Если массы обезьян разные, то важную роль играют начальные условия и переходной процесс — набор скорости обезьянами.

Допустим обезьяна, движущаяся с большей скоростью, обладает вдвое большей массой  $M$ , чем другая  $m$ . Найдем, которая обезьяна достигнет блока раньше (№ 2.14).

Относительное движение обезьян определяется выбиранием веревки. Если скорости выбирания постоянны, то постоянна скорость их относительного движения. Относительное ускорение их равно нулю, т. е. движутся обезьяны с одинаковым ускорением. Очевидно, что у более тяжелой обезьяны ускорение направлено вниз, а у более легкой вверх. Из второго закона Ньютона ускорение при движении обезьян  $a = (M - m)g/(M + m) = g/3$ . Сила натяжения веревки  $T = 4mg/3$ . Видно, что заданное относительное движение, определяемое выбиранием веревки, может быть удовлетворено только начальными скоростями: для легкой обезьяны  $v$ , для тяжелой обезьяны  $2v$ . Первоначально обезьяны находятся на одном и том же уровне на расстоянии, равном  $L/2$  от блока. Расстояние, которое проходит легкая обезьяна,  $x = vt + gt^2/6$ , а тяжелая  $X = 2vt - gt^2/6$ . На рис. 2.7 показаны эти зависимости. Это две параболы: одна выгибается вверх, другая вниз. Одинаковый путь  $x_1$  обезьяны пройдут за время  $t = 3v/g$ . Далее легкая будет опережать тяжелую. Если путь  $x_1 = 9v^2/(2g)$  меньше  $L/2$ , т. е.  $L > 9v^2/g$ , то при дальнейшем движении до блока раньше доберется более легкая обезьяна. В противном случае раньше доберется тяжелая обезьяна.

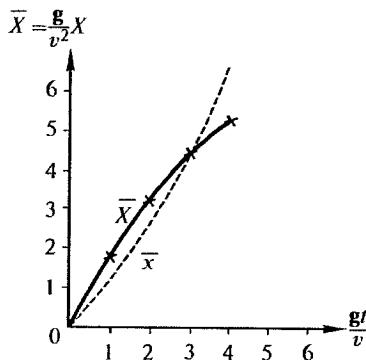


Рис. 2.7

При условии, что начальные скорости обезьян равны нулю, не выполняется условие постоянства относительной скорости. Для решения надо вводить время разгона. При этом будут меняться сила натяжения и ускорение.

Предполагаем, что разгон происходит быстро за счет больших сил, т. е. при разгоне сила, прикладываемая обезьяной к веревке, значительно больше ее веса. Тогда ускорения обезьян определяются только силой натяжения веревки и обратно пропорциональны их массам. Скорость легкой обезьяны в результате разгона  $v_{l0}$  в два раза больше скорости тяжелой  $v_{t0}$ . Так как их сумма по условию равна  $3v$ , получаем  $v_{t0} = v$ ,  $v_{l0} = 2v$ . В дальнейшем  $v_l = 2v + gt/3$  и  $v_t = v - gt/3$  и очевидно, что раньше до блока доберется легкая обезьяна.

Рассмотрим систему, состоящую из невесомого блока и невесомой веревки, на которую с одной стороны подвешен шест длиной  $l$  с находящейся на его нижнем конце обезьянкой массой, равной массе шеста. На другом конце веревки на той же высоте находится груз, уравновешивающий обезьяну с шестом (рис. 2.8). Найдем, на сколько относительно земли опустится шест, и поднимутся груз и обезьяна, когда она переместится в верхнюю точку шеста (№ 2.16). Так как нить не растягима, абсолютные значения ускорений шеста и груза относительно земли одинаковы ( $a$ ). Обозначая ускорение обезьяны относительно земли  $A$ , силу натяжения веревки  $T$  и силу, с которой обезьяна действует на шест и шест на обезьяну  $F$ , получаем уравнения движения: обе-

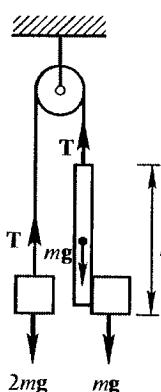


Рис. 2.8

зыяны  $mA = F - mg$ , шеста  $ma = F + mg - T$  и груза  $2ma = T - 2mg$ . Из этих уравнений следует  $A = 3a$ . Ускорение обезьяны в системе, связанной с шестом,  $A_{\text{ш}} = 4a$ . Отсюда следует, что смещение обезьяны относительно шеста, равное  $l$ , в четыре раза больше смещения шеста, т. е. шест опустится на  $l/4$ , груз поднимется на  $l/4$ , а обезьяна поднимется на  $3l/4$ .

Взаимодействие между телами может осуществляться с помощью сил трения.

Например, на столе лежит доска массой  $M$ , а на доске — груз массой  $m$ . Найдем, какую постоянную силу  $F$  нужно приложить к доске, чтобы доска выскользнула из-под груза, если коэффициент трения груза о доску  $k_r$ , а доски о стол  $k_c$  (№ 2.18). Уравнение движения доски относительно стола

$$Ma_d = F - k_c(m + M)g - k_r mg. \quad (2.43)$$

Уравнение движения груза относительно стола:

$$ma_r = k_r mg. \quad (2.44)$$

Чтобы доска выскользнула из-под груза, должно быть  $a_d > a_r$ . Отсюда  $F > (k_r + k_c)g(M + m)$ .

На доску можно действовать не постоянной силой, а кратковременным импульсом, который создает начальную скорость доски  $v_0$  (№ 2.19). В таком случае движение доски будет вместо (2.43) определяться уравнением

$$Mdv_d/dt = -k_c(m + M)g - k_r mg. \quad (2.45)$$

Уравнение движения груза совпадает с (2.44):

$$mdv_r/dt = k_r mg. \quad (2.46)$$

Найдем время, когда прекратится проскальзывание груза по доске. Для этого проинтегрируем (2.45) при заданной начальной скорости доски, а (2.46) при нулевой начальной скорости груза

$$v_d = v_0 - [k_d(1 + m/M) + k_r m/M]gt;$$

$$v_r = k_r gt.$$

Скольжение прекратится, когда скорости доски и груза станут одинаковыми. Отсюда время

$$t = v_0 / [(k_d + k_r)(1 + m/M)g].$$

Предполагаем, что доска достаточно длинная.

Импульс может действовать не на доску, а на груз, который получит скорость  $v_0$ . Определим время прекращения скольжения груза по доске, если доска в начальный момент была неподвижной, а трение есть только между доской и грузом (стол — гладкий) (№ 2.20). Так как одна и та же постоянная сила  $k_r mg$  тормозит груз и ускоряет доску, получаем время прекращения скольжения из равенства скоростей груза и доски  $v - kgt = k(m/M)gt$ .

Прежде чем рассматривать доску с грузом на **наклонной плоскости**, рассмотрим одно тело на наклонной плоскости.

На тело, находящееся на наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, действует по вертикали сила тяжести  $mg$  и по нормали к наклонной плоскости сила  $N = mg \cos \alpha$ .

На гладкой поверхности (при отсутствии силы трения) сумма этих сил (скатывающая сила  $mg \sin \alpha$ ) приводит к движению с постоянным ускорением  $g \sin \alpha$  вдоль наклонной поверхности. Пути, проходимые телом за одно и то же время по наклонным плоскостям с разными углами наклона  $l_\alpha = (g \sin \alpha)t^2/2$ , показаны на рис. 2.9. Видно, что концы путей лежат на окружности радиусом  $l/2$ .

В случае действия силы трения с коэффициентом трения  $k < \tan \alpha$

$$k < \tan \alpha \quad (2.47)$$

ускорение движения

$$a = g(\sin \alpha - k \cos \alpha). \quad (2.48)$$

При больших коэффициентах трения движение не возникает.

Если на доску массой  $M$ , которая может скользить по шероховатой наклонной плоскости, кладут груз массой  $m$ , для которого трением о доску можно пренебречь, изменяется нормальное давление доски на наклонную плоскость. В таком случае уравнение движения доски

$$Ma = Mgsin\alpha - k(m + M)gcos\alpha.$$

Видно, что равномерное движение доски ( $a = 0$ ) будет при  $m = M(\tan \alpha - k)/k$  (№ 2.21). При большей массе груза доска будет неподвижной (пока груз с нее не съедет).

В том случае, когда существует трение между доской и наклонной плоскостью с коэффициентом трения  $k_d$  и между грузом и доской

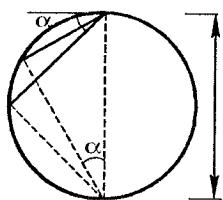


Рис. 2.9

занесены на рис. 2.9. Видно, что концы путей лежат на окружности радиусом  $l/2$ .

В случае действия силы трения с коэффициентом трения

ускорение движения

$$a = g(\sin \alpha - k \cos \alpha). \quad (2.48)$$

При больших коэффициентах трения движение не возникает. Если на доску массой  $M$ , которая может скользить по шероховатой наклонной плоскости, кладут груз массой  $m$ , для которого трением о доску можно пренебречь, изменяется нормальное давление доски на наклонную плоскость. В таком случае уравнение движения доски

$$Ma = Mgsin\alpha - k(m + M)gcos\alpha.$$

Видно, что равномерное движение доски ( $a = 0$ ) будет при  $m = M(\tan \alpha - k)/k$  (№ 2.21). При большей массе груза доска будет неподвижной (пока груз с нее не съедет).

В том случае, когда существует трение между доской и наклонной плоскостью с коэффициентом трения  $k_d$  и между грузом и доской

с коэффициентом трения  $k_r < k_d$  (№ 2.22), уравнения движения дают для ускорений груза и доски:

$$a_r = g(\sin \alpha - k_r \cos \alpha); \quad (2.49)$$

$$a_d = g[\sin \alpha - (k_d - k_r)(m/M) \cos \alpha - k_d \cos \alpha]. \quad (2.50)$$

Простое вычитание показывает, что ускорение груза больше. При уменьшении различия между коэффициентами трения приходим к равенству ускорений. Нет причин, по которым груз, находясь на доске, в дальнейшем начал двигаться относительно нее вверх. Поэтому груз перестает перемещаться относительно доски. Они движутся как одно целое в соответствии с уравнением (2.48). Таким образом в случае  $k_d < k_r < \tan \alpha$  ускорения груза и доски одинаковы и равны

$$a = g(\sin \alpha - k_d \cos \alpha).$$

Рассмотрим скатывание с ускорением  $b$  с наклонной плоскости, образующей угол  $\varphi$  с горизонтом, тележки, на которой на подставке подвешен математический маятник массой  $m$  (рис. 2.10).

Найдем направление нити маятника, т. е. угол  $\alpha$  нити маятника с вертикалью, и ее натяжение.

Второй закон Ньютона в проекции на направление ускорения  $b$  дает

$$mb = mg \sin \varphi - T \sin(\varphi - \alpha), \quad (2.51)$$

а для направления, перпендикулярного направлению  $b$ :

$$0 = T \cos(\varphi - \alpha) - mg \cos \varphi. \quad (2.52)$$

Разрешая относительно членов, содержащих  $(\varphi - \alpha)$ , возводя в квадрат и складывая, получим

$$T = m(b^2 + g^2 - 2bg \sin \varphi)^{1/2}. \quad (2.53)$$

Исключая  $T$  из (2.51) и (2.52), получим

$$\tan(\varphi - \alpha) \cos \varphi = \sin \varphi - b/g, \quad (2.54)$$

а затем

$$\sin(\varphi - \alpha) \cos \varphi = \sin \varphi \cos(\varphi - \alpha) - (b/g) \cos(\varphi - \alpha);$$

$$(b/g)(\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) = \\ = \sin \varphi \cos(\varphi - \alpha) - \sin(\varphi - \alpha) \cos \varphi = \sin \alpha$$

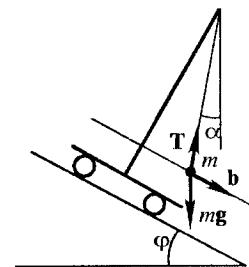


Рис. 2.10

и

$$\operatorname{tg} \alpha = \cos \varphi / (g/b - \sin \varphi). \quad (2.55)$$

При  $b = 0$  всегда  $\alpha = 0$ , а при  $\varphi = 0$  получаем  $\operatorname{tg} \alpha = b/g$ .

Рассмотрим движение тела в результате **удара**. Удар — это кратковременное воздействие очень большой силы, в результате которого импульс тела меняется на конечную величину.

Например, хоккейная шайба падает на лед со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  (рис. 2.11) и продолжает скользить по льду. Найдем скорость скольжения как функцию времени, если коэффициент трения шайбы о лед  $k$  не зависит от скорости и силы давления шайбы на лед (№ 2.24).

За время удара  $\tau$  скорость шайбы меняется из-за действия силы  $N$  нормальной к поверхности льда, которая уменьшает вертикальную скорость до нуля (предполагается неупругое взаимодействие шайбы со льдом и вследствие этого отсутствие подскока), и силы трения  $F_{\text{тр}} = kN$ , которая уменьшает горизонтальную компоненту скорости  $v_x$ . Уравнения для компонент скорости

$$mdv_x/dt = -kN; \quad (2.56)$$

$$mdv_y/dt = -N + mg. \quad (2.57)$$

При ударе возникает сила  $N \gg mg$ , действующая в течение времени  $\tau$ . Интегрируем с учетом этого:

$$m(v_{xt} - v_{x0}) = -k \int_0^\tau N dt;$$
$$m(0 - v_{y0}) = \int_0^\tau N dt. \quad (2.58)$$

Отсюда  $v_{xt} = v_{x0} - kv_{y0}$ . После удара  $N = mg$  и вдоль оси  $x$  получаем

$$m(v_x - v_{xt}) = -kmg t.$$

Окончательно

$$v_x = v_{0x} - kv_{0y} - kgt = v_0 \cos \alpha - kv_0 \sin \alpha - kgt. \quad (2.59)$$

Если шайба падает не на лед, а на доску, лежащую на гладкой (без трения) горизонтальной поверхности (№ 2.66), то движение

шайбы будет описываться уравнениями (2.56) и (2.57) до тех пор, пока скорость шайбы будет больше скорости доски, рост которой определяется уравнением, в котором используем (2.56):

$$Md\dot{v}_x/dt = kN = -md\dot{v}_x/dt.$$

Так как начальная скорость доски равна нулю, то используя (2.58), получаем

$$\begin{aligned} v_y &= -(m/M) \int_0^t dv_x = -(m/M) \left[ \int_0^\tau dv_x + \int_\tau^t dv_x \right] = \\ &= -(m/M) \left[ -(k/m) \int_0^\tau N dt - kg \int_\tau^t dt \right] = (m/M) k (v_0 \sin \alpha + gt). \end{aligned}$$

Приравнивая эту скорость скорости из (2.59), находим время, когда прекратится проскальзывание.

Рассмотрим движение тела по окружности с учетом силы трения.

Например, брускок массой  $m$  скользит по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью  $v_0$  и по касательной попадает в область, ограниченную забором в форме полуокружности (рис. 2.12). Определим время, через которое брускок покинет эту область. Радиус забора  $R$ , коэффициент трения скольжения бруска о поверхность забора  $k$ . Треним бруска о горизонтальную поверхность пренебрегаем, размеры бруска много меньше  $R$  (№ 2.43).

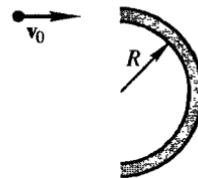


Рис. 2.12

На брускок действуют сила трения о забор  $F_{tp}$  и сила нормальная к поверхности забора  $N$ . Удобно поэтому уравнение движения бруска представить в виде проекций вдоль траектории движения

$$md\dot{v}/dt = -F_{tp}$$

и по нормали к траектории

$$N = mv^2/R.$$

Учитывая, что  $F_{tp} = kN$ , получаем

$$md\dot{v}/dt = -kmv^2/R.$$

Уравнение приводим к виду

$$dv/v^2 = -kdt/R.$$

Интегрируя при начальном условии  $v = v_0$  при  $t = 0$ , получаем

$$1/v - 1/v_0 = kt/R.$$

Чтобы определить время, за которое бруск пройдет всю длину забора, т. е. расстояние  $\pi R$ , воспользуемся соотношением  $v = dL/dt$ . Теперь можно либо воспользоваться полученной зависимостью  $v(t)$ , либо подставить  $dt = dL/v$  в дифференциальное уравнение. Второй способ менее громоздок. Получаем

$$dv/v = -k dL/R$$

и отсюда

$$v = v_0 e^{-kL/R}.$$

При  $L = \pi R$ , т. е. в конце забора для скорости получаем

$$v_{\text{кон}} = v_0 e^{-k\pi}$$

и, воспользовавшись полученной выше зависимостью скорости от времени, имеем окончательно для времени:

$$t = R(e^{k\pi} - 1)/(kv_0).$$

Движение по кривой линии на шероховатой поверхности возможно при достаточно большом трении, препятствующем сдвигу по нормали к скорости.

Чтобы тело массой  $m$  двигалось по окружности радиусом  $R$  со скоростью  $v$ , сила трения должна быть

$$F = mv^2/R.$$

Отсюда можно найти и коэффициент трения (№ 2.44).

Найдем максимальную скорость (№ 2.46), которую может развивать автомобиль, чтобы боковое проскальзывание не возникло при движении по синусоидальной линии, описываемой в горизонтальной плоскости  $(x, y)$  зависимостью  $y = A \sin(2\pi x/l)$ . Радиус кривизны плоской кривой определяется через ее первую производную  $y'$  и вторую производную  $y''$  (1.31)

$$R = (1 + y'^2)^{3/2}/y''.$$

Приравнивание производной по  $x$  нулю позволяет найти минимальный радиус кривизны. Абсолютное значение его равно  $l^2/(4\pi^2 A)$  при  $x = l/4$ . Максимальное нормальное к траектории ускорение при этом  $a_n = v^2/R = v^2 4\pi^2 A/l^2$  должна обеспечить сила трения  $F = kg$ . Таким образом, должно быть  $kg > v^2 4\pi^2 A/l^2$ . Откуда ограничение скорости  $v < (kg/A)^{1/2} l/(2\pi)$ .

Металлическое кольцо, подвешенное на нити к центробежной машине, которая раскручивает нить вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$ , заняло горизонтальное положение (рис. 2.13), при

котором нить составляет угол  $\alpha$  с вертикалью. Найдем расстояние  $x$  от центра кольца до оси вращения (№ 2.55).

Обозначая массу кольца  $m$ , движение центра масс кольца по окружности радиусом  $x$  определяется уравнением

$$m\omega^2 x = T \sin \alpha.$$

Равновесие по вертикали

$$mg = T \cos \alpha.$$

Отсюда  $x = g \operatorname{tg} \alpha / \omega^2$ .

Движение тела отсутствует, если суммы действующих на тело сил и моментов сил равны нулю.

Раздел, в котором рассматривается такое равновесие тел, называется **статикой**.

Для обеспечения равновесия с помощью малых сил используют рычаги, системы блоков. Можно использовать и силу трения. Чтобы затормозить движение большого корабля у причала, причальный трос наматывают на тумбу (кнект), после чего человек может трос удержать. Рассмотрим это на следующем примере.

**На врытый в землю столб навита веревка.** Найдем, какую силу надо приложить к концу веревки, чтобы она не проскальзывала при натяжении другого конца веревки силой  $F_0$ . Коэффициент трения веревки о столб  $k = 1/\pi$ . Веревка обвита вокруг столба  $n$  раз (№ 2.54).

Рассматриваем равновесие элемента веревки (рис. 2.14). Сила

$$F(x) = F(x + dx) + F_{tp}.$$

Так как

$$F(x + dx) = F(x) + (dF/dx) dx,$$

получаем

$$\begin{aligned} dF &= -F_{tp} = -kN = -k2F\alpha = \\ &= -k2Fdx/(2R) = -kFdx/R. \end{aligned}$$

Знак минус показывает, что сила убывает с увеличением  $x$ . Интегрируем по  $x$  от  $x = 0$ , когда сила равна  $F_0$ , до  $x = 2\pi Rn$ , когда сила равна силе, приложенной к другому концу:

$$F = F_0 \exp(-kx/R) = F_0 \exp(-2\pi n).$$

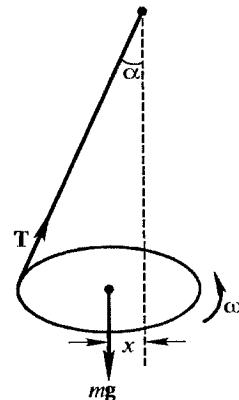


Рис. 2.13

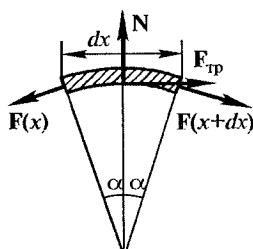


Рис. 2.14

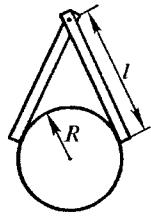


Рис. 2.15

Бревно массой  $m$  и радиусом  $R$  можно удержать на весу с помощью двух досок массой  $M$  и длиной  $l$ , подвешенных за один конец (рис. 2.15). Найдем коэффициент трения, который обеспечит равновесие (№ 2.63). Обозначая угол между досками  $2\alpha$  и нормальную к поверхности доски силу, действующую со стороны бревна  $N$ , получаем уравнение моментов сил для доски относительно точки подвеса:

$$Mg(l/2) \sin \alpha = Nl.$$

Условие равновесия сил для бревна:

$$Mg = 2F_{tp} \cos \alpha - N \sin \alpha.$$

Угол определяется соотношениями:

$$\sin \alpha = R/(l^2 + R^2)^{1/2}; \cos \alpha = l/(l^2 + R^2)^{1/2}.$$

Отсюда получаем

$$k = F_{tp \max}/N \geq m(l^2 + R^2)/(MIR) + R/l.$$

Катушку ниток радиусом  $R$  можно удержать у шероховатой стенки с помощью собственной нити длиной  $l$  (рис. 2.16). Найдем, при каких значениях коэффициента трения это возможно (№ 2.64).

Обозначив массу катушки  $m$ , натяжение нити  $T$ , нормальную реакцию стенки  $N$ , силу трения  $F$ , коэффициент трения  $k$  и угол нити с вертикалью  $\alpha$ , получаем условие момента сил, действующих на катушку, относительно точки закрепления нити на стенке:

$$Rmg = Tl \sin \alpha.$$

Так как нить от катушки может отходить только по касательной, то из равенства прямоугольных треугольников, образованных нитью, радиусами катушки и линией из центра катушки в точку подвеса нити, следует, что расстояние от точки подвеса нити до точки касания катушки со стенкой равно длине нити  $l$ .

Равновесие сил по горизонтали и вертикали:

$$N = T \sin \alpha, F = mg - T \cos \alpha.$$

Используя, что  $\operatorname{tg}(\alpha/2) = R/l$ , получаем  $k = F/N \geq (1/2)(l/R + R/l)$ .

При торможении автомобиля возникает сила инерции. Чтобы исключить ее, надо момент сил вычислять относительно центра масс.

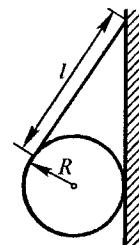


Рис. 2.16

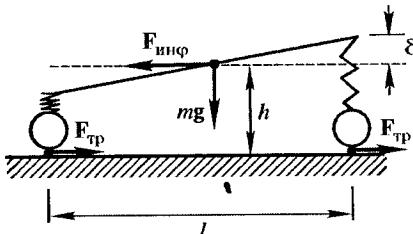


Рис. 2.17

Найдем угол наклона автомобиля  $\alpha$  при торможении, если центр масс находится посередине между колесами, расстояние между которыми равно  $l$ , на высоте  $h$  над землей, коэффициент трения колес, переставших вращаться о землю равен  $k$ , а деформация пружин неподвижного автомобиля на горизонтальной поверхности равна  $\Delta$  (№ 2.25). На рис. 2.17 показаны действующие силы.

Жесткость пружин  $mg/\Delta$ . При повороте кузова автомобиля на угол  $\alpha$  силы, создающие момент, вызывающие деформацию  $\alpha l/2$ , силу  $mg\alpha l/(2\Delta)$  и момент  $mg\alpha l^2/(4\Delta)$ , который уравновешивается моментом сил трения  $kmgh$ . Однаковые добавки сил, связанные с весом, врашающий момент не создают. В результате для угла наклона получаем  $\alpha = 4kh\Delta/l^2$ .

Равномерное движение с постоянной скоростью можно рассматривать как статическую задачу. Найдем, с какой силой надо тянуть балку массой  $m$  и длиной  $l$ , установленную на коротких санях, весом которых можно пренебречь, на высоте  $h$  (рис. 2.18), если коэффициент трения передних саней  $k_1$ , а вторых  $k_2$  (№ 2.27).

Обозначая нормальное давление передних саней на опору  $N_1$ , а задних  $-N_2$ , получаем для равновесия сил по горизонтали и вертикали:

$$F = k_1 N_1 + k_2 N_2; mg = N_1 + N_2.$$

Уравнение моментов удобно написать относительно точки касания поверхности задними санями:

$$mgl/2 + Fh = N_1 l.$$

Из этих уравнений получаем силу.

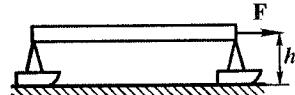


Рис. 2.18

### 3. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Этот раздел продолжает тему предыдущего (второй закон Ньютона), но по отношению к телам, масса которых меняется за счет отделения или присоединения вещества к телу. Следует подчеркнуть, что большинство ошибок при решении задач на движение с переменной массой связано с неправильным применением готовых формул. Поэтому, чтобы не ошибиться в сложных случаях, лучше всегда выводить уравнения движения.

Продемонстрируем обычный способ вывода дифференциальных соотношений (уравнений). Он заключается в том, что рассматривают состояния системы в произвольный момент времени  $t$  и в бесконечно близкий к нему момент времени  $t + dt$ . Для количества массы, присоединяемой или отделяемой за время  $dt$ , лучше ввести положительную величину  $\mu dt$ , где  $\mu$  — скорость изменения массы. Тогда изменение массы тела  $dm$  в случае присоединения массы будет  $dm = \mu dt$ , а в случае отделения массы  $dm = -\mu dt$ .

Пусть в момент времени  $t$  масса тела равна  $m$ , а скорость  $v$ . Считаем, для определенности, что за время  $dt$  масса тела уменьшилась на  $\mu dt$ , а скорость изменилась на  $dv$ . Если масса  $\mu dt$  выбрасывается со скоростью  $u$  относительно тела, то импульс системы, состоящей из уменьшившегося по массе тела и вылетевшей массы, в момент времени  $t + dt$  равен (рис. 3.1)

$$(m - \mu dt)(v + dv) + \mu dt(v + u).$$

Так как во втором члене масса — бесконечно малая величина, то нет смысла уточнять значение скорости тела (промежуточное между  $v$  и  $v + dv$ ), к которой добавляется  $u$ .

По второму закону Ньютона изменение импульса (или количества движения) тела равно импульсу внешних сил:

$$(m - \mu dt)(v + dv) + \mu dt(v + u) - mv = Fdt. \quad (3.1)$$

После раскрытия скобок получаем

$$md\mathbf{v} + \mu dt \mathbf{u} = \mathbf{F} dt, \quad (3.2)$$

или

$$md\mathbf{v} = \mathbf{u} dm + \mathbf{F} dt. \quad (3.3)$$

Последнее уравнение (3.3) годится как для выброса массы ( $dm = -\mu dt$ ), так и для присоединения ( $dm = \mu dt$ ).

Это и есть основное уравнение для движения с переменной массой, которое иногда записывают в форме Мещерского:

$$m(d\mathbf{v}/dt) = \mathbf{F} + \mathbf{u}(dm/dt). \quad (3.4)$$

Очень важный момент, на который нужно обратить внимание при решении конкретных задач, — переход от векторных уравнений к уравнениям в проекциях. Чтобы избежать путаницы со знаками, полезно нарисовать все векторы (например, для задачи с ракетой это  $\mathbf{v}$ ,  $d\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{F}$ ) и определить знаки их проекций относительно выбранного положительного направления.

Простейший случай: отделение массы (например, высыпание песка через отверстие в полу движущейся платформы) без начальной относительной скорости ( $u = 0$ ). Из (3.2) получаем

$$md\mathbf{v} = \mathbf{F} dt.$$

Предполагая, что масса уменьшается со временем линейно  $m = m_0 - \mu t$ , при **постоянной силе**  $F$  (№ 3.1) получаем ускорение

$$a = dv/dt = F/m = F/(m_0 - \mu t).$$

Откуда

$$dv = Fdt/(m_0 - \mu t).$$

Если в начальный момент скорость равнялась нулю, то

$$v = (F/\mu) \ln [m_0/(m_0 - \mu t)].$$

Найдем теперь, какой должна быть **сила**, чтобы платформа, на которую сверху насыпается, например, уголь, двигалась с **постоянной скоростью**  $v$  (№ 3.6). Так как в данном случае  $u = -v$ , то из (3.3) получаем

$$F = \nu\mu = v\Delta m/\Delta t.$$

**Работа** этой силы  $A = Fv\Delta t = v^2\Delta m$ . Эта величина в два раза больше кинетической энергии, приобретенной погруженной массой (№ 3.7). Другая часть работы из-за трения падающей массы о лежащую уже на платформе превращается в тепло.

Рассмотрим движение при **отсутствии** внешних сил. Например, на платформу массой  $m_0$  и длиной  $L$ , имеющую начальную скорость  $v_0$ , сверху падает (**загружается**) за единицу времени масса песка  $\mu$ . Найдем количество песка, которое будет на платформе, когда она пройдет пункт загрузки (№ 3.2).

Так как относительная скорость движущегося и падающего песка равна скорости платформы, то из (3.3) получаем

$$mdv + vdm = 0. \quad (3.5)$$

Из условия следует  $m = m_0 + \mu t$ . Для скорости имеем

$$v = dx/dt = m_0 v_0 / m = v_0 / (1 + \mu t / m_0). \quad (3.6)$$

Интегрируя, для относительного смещения с учетом, что при  $t = 0$  и  $x = 0$ , получаем

$$x = (m_0 v_0 / \mu) \ln(m/m_0) = (m_0 v_0 / \mu) \ln(1 + \mu t / m_0). \quad (3.7)$$

Отсюда можно найти количество упавшего песка при  $x = L$ :

$$m - m_0 = m_0 \{ \exp[\mu L / (m_0 v_0)] - 1 \}.$$

Интересно посмотреть, каким будет движение платформы, если все, что упадет за  $dt$ , **сбрасывать** в направлении, перпендикулярном скорости движения (№ 3.11). В этом случае масса платформы все время остается постоянной. Из закона сохранения компоненты импульса вдоль направления движения платформы (благодаря отсутствию сил в этом направлении), т. е. равенства импульсов в моменты  $t$  и  $t + dt$ :

$$m_0 v = m_0(v + dv) + \mu dt v. \quad (3.8)$$

Откуда

$$dv/v + \mu dt / m_0 = 0 \quad (3.9)$$

и

$$v = v_0 \exp(-\mu t / m_0). \quad (3.10)$$

Из сравнения (3.6) и (3.10) следует, что при сбрасывании массы скорость уменьшается быстрее. Лежащая на платформе масса участвует в разгоне вновь упавшей массы. Следует отметить, что при отсутствии трения в обоих случаях движение будет продолжаться бесконечно долго. Реально платформу останавливает трение и в первую очередь ту, у которой меньше скорость, т. е. платформу, с которой сбрасывают массу. В первом случае путь, который проходит

платформа при отсутствии трения, определяется по (3.7) и является бесконечно большим, а во втором случае путь конечный и равен

$$x = v_0 \int_0^{\infty} \exp(-\mu t/m_0) dt = m_0 v_0 / \mu. \quad (3.11)$$

Если платформа вначале стоит, а движется с постоянной скоростью  $v_0$  бункер, из которого сыпется песок, то из условия сохранения импульса в произвольный момент времени следует

$$(m + \mu dt)(v + dv) - \mu dt v_0 - mv = 0.$$

Подставляя  $m = m_0 + \mu t$  и разделяя переменные, получаем

$$dv/(v - v_0) = -\mu dt/(m_0 + \mu t).$$

Используя начальное условие  $v = 0$  при  $t = 0$ , имеем

$$v = v_0 [1 - m_0/(m_0 + \mu t)].$$

Найдем скорость платформы в момент, когда бункер ее обгонит (№ 3.3).

Момент обгона  $t_{ob}$  находим из условия:

$$v_0 t_{ob} - \int_0^{t_{ob}} v dt = L.$$

Подставляя это уравнение в предыдущее, находим скорость.

Выгодно песок подавать из бункера таким образом, чтобы он ложился на платформу **слоем постоянной высоты**. Найдем время загрузки  $t_s$ , если масса загруженного песка  $m_1$  (№ 3.4).

Условие сохранения количества движения  $(m + dm)(v + dv) = mv$  приводит к

$$mdv + vdm = 0, \text{ или } mv = m_0 v_0.$$

Условие постоянства высоты слоя песка  $h = m_1/(\rho b L)$  (здесь  $\rho$  — плотность песка, а  $b$  — ширина платформы) сводится к тому, что падающая за время  $dt$  масса

$$dm = \rho b h v dt = m_1 v dt / L = m_1 dx / L.$$

Отсюда

$$m = m_0 + m_1 x / L \text{ и } dx / dt = v = m_0 v_0 / m = m_0 v_0 / (m_0 + m_1 x / L).$$

Интегрируя и учитывая, что при  $t = 0$   $x = 0$ , а при  $t = t_s$   $x = L$ , получаем

$$t_s = [1 + m_1 / (2m_0)]L / v_0.$$

Движение изменяющейся массы может происходить **по вертикали в поле тяжести**. Например, через неподвижный блок перекинута веревка, на которой висят в равновесии два ведра с водой. Масса каждого ведра с водой  $m$ . В боковой стенке одного из ведер образовались щели, из которых начинает вытекать вода с постоянным расходом  $\mu$  и скоростью относительно ведра, направленной перпендикулярно боковым стенкам. Число щелей — четное, и они расположены симметрично относительно оси ведра. Определим скорость ведер в зависимости от времени. Массу блока и веревки, а также силу трения не учитываем.

Масса системы меняется со временем и равна  $2m - \mu t$ . Сила, создающая ускорение системы, равна  $\mu g$ . Второй закон Ньютона дает

$$(2m - \mu t)dv/dt = \mu g.$$

Разделяя переменные, получаем дифференциальное уравнение:

$$dv = \mu g dt / (2m - \mu t) = g [-dt - (2m/\mu) d(2m - \mu t)/(2m - \mu t)].$$

Откуда

$$v = g [-t - (2m/\mu) \ln(1 - \mu t/(2m))].$$

Рассмотрим движение **реактивного корабля** по воде. Корабль массой  $M$  движется за счет того, что насос забирает воду (массой  $\mu$  за единицу времени) из-за борта и выбрасывает с кормы с постоянной относительной скоростью  $u$ . Найдем зависимость скорости корабля  $v$  от времени и коэффициент полезного действия системы  $\eta$  как функцию  $v$  и  $u$  (№ 3.8).

Пренебрегая силами трения в насосе и сопротивлением воды движению корабля, получаем сохранение импульса:

$$Mv = M(v + dv) - (u - v)\mu dt.$$

Сокращая и разделяя переменные, имеем

$$dv/(v - u) = -\mu dt/M.$$

Отсюда, если в начальный момент скорость корабля равнялась нулю, получаем

$$v = u(1 - e^{-\mu t/M}).$$

Для коэффициента полезного действия имеем

$$\eta = d(Mv^2/2)/(\mu dt u^2/2) = 2Mvdv/(\mu u^2 dt) = 2v(u - v)/u^2.$$

При увеличении  $v$  коэффициент вначале растет, а затем падает. Максимум находим, приравнивая производную нулю.

Уравнение (3.2) в случае движения ракеты в отсутствие внешних сил приводит к формуле **Циолковского** для зависимости скорости от отношения начальной массы  $m_0$  к конечной  $m$

$$v = u \ln(m_0/m). \quad (3.12)$$

Отсюда

$$m = m_0 e^{-v/u}.$$

Для кинетической энергии получаем

$$K = mv^2/2 = m_0 e^{-v/u} v^2/2.$$

Чтобы найти, при какой скорости **кинетическая энергия максимальна** (№ 3.48), приравниваем производную нулю. Получаем, что при  $v = 2u$ .

### Импульс ракеты

$$p = mv = m_0 e^{-v/u} v = mu \ln(m_0/m).$$

Аналогично находим экстремумы. Импульс максимальен при  $v = u$ , а по массе при  $m = m_0/e$ .

**Режимы полета** ракеты могут быть различными. При постоянном расходе топлива  $m = m_0 - \mu t$ . При постоянном ускорении  $v = v_0 + at$ . При решении таких задач (№ 3.57, 3.56) используют формулу (3.3) или (3.12).

Ракету можно разгонять **двумя двигателями** по очереди. В первом масса топлива  $m_1$  и скорость выбрасываемой струи  $u_1$ , а во втором масса топлива  $m_2$  и скорость струи  $u_2 < u_1$ . Найдем, при какой последовательности получим большую скорость ракеты (№ 3.35). Обозначим массу корабля без топлива  $m_0$ . Возьмем в качестве первого варианта: вначале работает двигатель с  $u_2$ , а затем с  $u_1$ . В этом случае

$$v_1 = -u_2 \ln [(m_0 + m_1)/(m_0 + m_1 + m_2)] - u_1 \ln [m_0/(m_0 + m_1)].$$

Во втором случае

$$v_2 = -u_1 \ln [(m_0 + m_2)/(m_0 + m_1 + m_2)] - u_2 \ln [m_0/(m_0 + m_2)].$$

Для разности получаем

$$v_1 - v_2 = (u_1 - u_2) \ln \{(m_0 + m_1)(m_0 + m_2)/[m_0(m_0 + m_1 + m_2)]\}.$$

Эта разность положительна, так как под логарифмом величина, большая единицы.

Большую скорость ракеты можно получить, используя две ступени вместо одной. Найдем отношение скорости при двух ступенях  $v_2$  к скорости при одной ступени  $v_1$ , если масса второй ступени двухступенчатой ракеты составляет от массы первой ступени  $\alpha = M_2/M_1$ , а отношение массы горючего к полной массе ступени во всех случаях равно  $k = M_r/M$  (№ 3.37).

Из (3.12) для ракеты с одной ступенью

$$v_1 = u \ln [M/(M - M_r)] = u \ln [1/(1 - k)].$$

В случае двух ступеней от первой ступени получаем скорость

$$v_{11} = u \ln [(M_1 + M_2)/(M_1 + M_2 - M_r)] = u \ln [(1 + \alpha)/(1 + \alpha - k)].$$

После работы второй ступени получаем

$$v_2 = v_{11} + u \ln [M_2/(M_2 - M_r)] = v_{11} + u \ln [1/(1 - k)].$$

Отсюда находим отношение скоростей.

При разгоне ракеты можно рассмотреть некоторый экзотический случай **движения в облаке пыли**, когда количество налипающей пыли в точности равно выброшенной массе топлива. Найдем максимальную скорость ракеты, предполагая, что массой корпуса ракеты можно пренебречь по сравнению со стартовой массой топлива (№ 3.41).

В рассматриваемом случае до момента полного расхода топлива  $t_n$  масса ракеты с налипшей на нее пылью остается постоянной (обозначим  $m = \mu t_n$ ). Так как внешних сил (поля) нет, то приравниваем импульс системы в момент времени  $t$  импульсу в момент времени  $t + dt$

$$mv = (m - \mu dt)(v + dv) + \mu dt(v - u) + \mu dtv.$$

Откуда

$$dv/(v - u) = -\mu dt/m.$$

До момента полного расхода топлива получаем зависимость скорости от времени

$$v = u(1 - e^{-\mu t/m}).$$

После расхода всего топлива скорость будет уменьшаться. Поэтому максимальная скорость  $v_{max} = u(1 - e^{-1})$ .

Если движение ракеты происходит в поле тяжести по горизонтали, то оно описывается уравнением Циолковского. Например, ракета начинает двигаться по гладкой горизонтальной поверхности и

через время  $T_1$  упруго ударяется о вертикальную стенку. При этом ракета не меняет своей ориентации относительно вертикальной стени. Найдем, через какое время  $T_2$  после старта скорость ракеты оказывается равной нулю, если масса ракеты меняется со временем по закону  $m = m_0 - \mu t$  (№ 3.49). Скорость ракеты перед ударом равна  $v = u \ln [m_0/(m_0 - \mu t)]$ . После упругого удара она меняется на противоположную по направлению. Необходимое изменение массы находим из (3.12)

$$(m_0 - \mu T_1)/(m_0 - \mu T_2) = e^{v/u} = m_0/(m_0 - \mu T_1).$$

Отсюда находим время остановки.

Изменение направления движения ракеты можно достигнуть, выбрасывая струю газа в направлении, перпендикулярном к траектории движения ракеты, как показано на рис. 3.2. В таком случае скорость ракеты меняется только по направлению, а не по величине  $v$ . Найдем угол  $\alpha$ , на который повернется вектор скорости ракеты, если начальная масса его  $m_0$ , конечная  $m$ , а скорость  $u$  постоянна (№ 3.42).

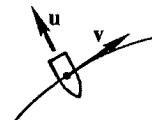


Рис. 3.2

Воспользуемся уравнением (3.3), в котором  $F = 0$ . Проекция его на направление  $v$  (рис. 3.3) дает  $dv_v = 0$ , а на направление, перпендикулярное  $v$ :  $mdv_n + udm = 0$  (так как  $dv$  по направлению противоположно  $u$ ). Отсюда, как уже говорилось, следует, что скорость по величине не меняется, а меняется только по направлению, и угол поворота за бесконечно малое время  $d\alpha = dv_n/v = -udm/(vm)$ . Полный поворот находим интегрированием

$$\alpha = -u/v \int_{m_0}^m dm/m = (u/v) \ln(m_0/m). \quad (3.13)$$

Вычислим расход топлива на поворот в обратное направление (на  $\pi$ ). Из (3.13) получаем

$$\ln(m_0/m_p) = \pi v/u. \quad (3.14)$$

Интересно сравнить эту величину с тем, сколько топлива будет затрачено на торможение до остановки и разгон в обратном направлении. Из (3.3) для прямолинейного движения имеем

$$dm/m = -dv/u. \quad (3.15)$$

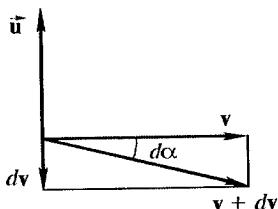


Рис. 3.3

Считая скорость после разгона положительной, а до начала торможения отрицательной, получаем

$$\ln(m_0/m_p) = 2v/u. \quad (3.16)$$

Сравнение (3.14) и (3.16) показывает (№ 3.43), что остающаяся после поворота масса топлива меньше (а, следовательно, расход больше), чем при торможении и разгоне.

При повороте, пользуясь (3.13), можно найти траекторию, если задано изменение массы во времени. Например, в случае  $\ln(m_0/m) = kt$ , для радиуса кривизны получаем

$$R = ds/da = vdt/(ukdt/v) = v^2/(uk),$$

т. е. движение происходит по окружности (№ 3.61).

Найдем связь между массой ракеты  $m(t)$ , достигнутой ею скоростью  $v(t)$  и временем  $t$ , если ракета движется вертикально вверх в поле тяжести Земли (№ 3.21). Скорость газовой струи относительно ракеты  $u$  считаем постоянной. Сопротивление воздуха и изменение ускорения свободного падения  $g$  с высотой не учитываем. Определим также, какую массу газов  $\mu(t)$  должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться неподвижной относительно Земли.

Движение описывается уравнением (3.2). Положительным считаем направление вверх по вертикали. Тогда проекции  $d\mathbf{v}$  и  $\mathbf{F}$  положительны, а  $u$  и  $\mathbf{F} = mg$  отрицательны. В итоге для взлета (старта) ракеты с Земли получаем

$$dv + u dm/m = -gdt \quad (3.17)$$

и, интегрируя от начальных значений  $v = 0$ ,  $m = m_0$  при  $t = 0$  до текущих значений  $v$  и  $m$  в некоторый момент  $t$ , получаем

$$v = u \ln(m_0/m) - gt. \quad (3.18)$$

Для неподвижной ракеты  $dv = 0$  и поэтому из (3.17)

$$udm/m = -gdt, \quad (3.19)$$

откуда

$$m = m_0 e^{-gt/u} \quad (3.20)$$

и

$$\mu = -dm/dt = (g/u)m_0 e^{-gt/u}. \quad (3.21)$$

В случае мягкой посадки, которая отличается от взлета направлением  $\mathbf{v}$  (поэтому уравнение движения (3.2) и соответственно (3.17)

не изменяется) и начальными и конечными условиями, которые теперь выглядят следующим образом: при  $t = 0$   $v = -v_0$  и  $m = m_0$ , а при  $t = \tau$  (момент посадки)  $m = m_\tau$ ,  $v = 0$ . Можно вычислить изменение массы, т. е. количество топлива для взлета и мягкой посадки (№ 3.33), и получить, что это одна и та же величина, если одинаково изменение скорости и время  $\tau$ .

Если двигатель ракеты запускается на очень короткое время, то последним членом в (3.18) можно пренебречь. В случае метеорологической ракеты (№ 3.29), когда двигатель запускается при взлете и посадке, массу ракеты после взлета  $M_1$  можно определить по массе до взлета  $M$  и после посадки  $m$  из условия одинаковых скоростей после взлета и перед посадкой  $v = u \ln(M/M_1) = u \ln(M_1/m)$  либо из одинакового расхода доли топлива  $(M - M_1)/M = (M_1 - m)/M_1$ . Получаем  $M_1 = (Mm)^{1/2}$ .

Из (3.17) ускорение ракеты при взлете

$$a = dv/dt = -g + u\mu/m = -g + u\mu/(m_0 - \mu t). \quad (3.22)$$

Если известно начальное ускорение  $a_0$ , то

$$a_0 = -g + u\mu/m_0.$$

Отсюда ускорение (№ 3.24)

$$a = -g + u/[-t + u/(a_0 + g)].$$

При нулевой начальной скорости получаем

$$v = u \ln \{u/[u - (a_0 + g)t]\} - gt.$$

В случае старта ракеты вертикально вверх с постоянным ускорением  $a$  космонавт испытывает перегрузку  $n$ , которая определяется весом астронавта на Земле  $P_0$  и «весом»  $P$ , который показали бы пружинные весы при взвешивании космонавта массой  $m_0$  в полете:

$$n = (P - P_0)/P_0 = (P/P_0) - 1 = m_0(a + g)/(m_0g) - 1 = a/g. \quad (3.23)$$

Из (3.3) для ракеты, масса которой  $m(t)$ , получаем

$$dm/m = -(a + g)dt/u = -g(n + 1)dt/u. \quad (3.24)$$

Если начальная масса  $M$ , то

$$\ln(M/m) = (n + 1)gt/u. \quad (3.25)$$

Отсюда при заданных  $M/m$  и  $u$  (№ 3.30) можно найти время  $t$ , скорость  $at$  и высоту подъема  $at^2/2$ .

**Опускание с постоянным ускорением** (№ 3.31) описывается тем же уравнением (3.24).

При постоянном расходе топлива из (3.18) (без учета сопротивления воздуха) получаем

$$dx/dt = v = u \ln [m_0/(m_0 - \mu t)] - gt. \quad (3.26)$$

Интегрируя, для высоты подъема в зависимости от времени, используя выражение для интеграла  $\int \ln x dx = x \ln x - x + \text{const}$ , имеем

$$x = (um_0/\mu)[(1 - \mu t/m_0) \ln(1 - \mu t/m_0) + \mu t/m_0] - gt^2/2. \quad (3.27)$$

Если известно отношение начальной массы к конечной  $\alpha$  и время работы двигателя  $\tau$  (№ 3.60), то для подъема за время работы двигателя получаем

$$h_\tau = u\tau [1 - \ln \alpha/(\alpha - 1)] - gt^2/2.$$

Скорость в этот момент  $v_\tau = u \ln \alpha - gt$ , поэтому ракета поднимется еще на

$$h_g = v_\tau^2/(2g).$$

Полная высота равна сумме вычисленных высот.

При очень быстром сгорании топлива ( $\tau \rightarrow 0$ ) влиянием тяжести на стадии работы двигателя можно пренебречь и можно воспользоваться (3.12). В таком случае  $v_{\text{разг}} = u \ln \alpha$ . Высота подъема при этом  $v_{\text{разг}}^2/(2g)$ .

Рассмотрим игрушечную ракету массой  $M$ , в которую наливается вода (массой  $m \ll M$ ), занимающая малую часть полости ракеты, а большую часть занимает воздух с высоким давлением  $p$ , которое выталкивает воду. Найдем высоту подъема ракеты, считая, что время истечения воды много меньше времени полета (№ 3.50).

При малом времени можно пренебречь последним членом в (3.18). Учитывая соотношение масс, получаем  $v = u \ln(1 + m/M)K \approx um/M$ . Видно, что это сохранение импульса: вода летит в одну сторону, ракета в другую. Зная скорость ракеты, получаем высоту подъема  $h = (1/2)(v^2/g) = (1/2)(u^2/g)(m/M)^2$ . Считая, что объем воздуха, а следовательно, давление и скорость истечения воды меняются мало, и пользуясь уравнением Бернулли, можем связать скорость истечения с давлением  $u^2/2 = p/\rho$ .

Вместо воздуха в игрушечной ракете можно использовать пружину жесткостью  $k$  (№ 3.51). При полном опорожнении камеры с водой пружина находится в несжатом состоянии, длина камеры  $L$ .

Эта задача сложнее предыдущей тем, что давление и скорость истечения непостоянны. Обозначим массу корпуса ракеты  $M$ , начальную массу воды  $m_0$ , площадь водяной камеры  $s$  и плотность воды  $\rho$ . Смещение поршня  $x$  (рис. 3.4), давление в воде  $p$ . В результате  $u^2/2 = p/\rho = (1/\rho)k(l-x)/s = k(l-x)l/m_0$ . Масса еще не выброшенной из ракеты воды  $m = m_0(l-x)/l$ . Считая время выброса малым и поэтому опуская последний член в (3.3) или (3.17), имеем

$$dv = (u/l)m_0 dx/(M+m) \approx (m_0/M)(u/l)dx = \\ = (m_0/M)(1/l)[2kl(l-x)/m_0]^{1/2}dx.$$

После интегрирования получаем  $v_k = (2/3)(l/M)(2km_0)^{1/2}$ .

Ракету можно запустить с некоторой высоты таким образом, что газы все время выбрасываются горизонтально (№ 3.44). В таком случае горизонтальная скорость определяется формулой Циолковского (3.12). В вертикальном направлении падение происходит с ускорением  $g$ . Если задана высота, то можно найти время падения и вертикальную скорость ракеты. При заданном расходе топлива определяется изменение горизонтальной скорости со временем. После полного расхода топлива горизонтальная скорость будет постоянной.

Чтобы ракета не падала, а двигалась горизонтально с ускорением  $a$ , надо струю газов направить под некоторым углом  $\alpha$  к горизонту (рис. 3.5). Найдем этот угол (№ 3.45). Для этого уравнение (3.3) спроектируем на вертикальное и горизонтальное направление

$$u \sin \alpha dm = -mgdt;$$

$$madt + u \cos \alpha dm = 0.$$

Отсюда находим  $\operatorname{tg} \alpha = g/a$ .

Изменение силы тяжести с высотой можно учесть, если, например, известно, что ракета поднимается с постоянной скоростью  $v$  (№ 3.25, 3.26). Обозначая радиус Земли  $R$ , расстояние от центра Земли  $r$  и ускорение свободного падения на поверхности Земли  $g$ , а также учитывая, что  $v = dr/dt$ , и не учитывая трение о воздух, из (3.3) получаем

$$udm/m = -gR^2dr/(vr^2). \quad (3.28)$$

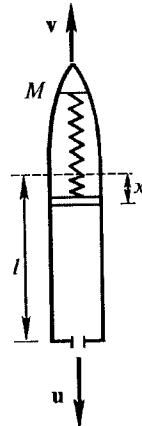


Рис. 3.4

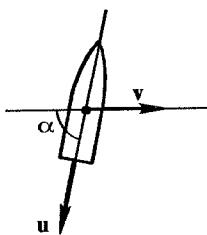


Рис. 3.5

Если известно, что практически скорость  $v$  была постоянной начиная от поверхности Земли в течение времени  $t$ , то для определения отношения конечной массы к начальной имеем:  $\ln(m_{\text{кон}}/m_{\text{нач}}) = -gRt/[u(R + vt)]$ .

Изменение массы тела может быть связано с испарением или конденсацией вещества (жидкости или пара) на его поверхности.

Например, сферическая капля воды свободно падает в атмосфере пересыщенного водяного пара и масса ее растет (№ 3.53). Считаем, что **скорость возрастания массы капли**  $dm/dt$  пропорциональна площади ее поверхности (коэффициент пропорциональности  $A$ ) и что силой сопротивления среды можно пренебречь. Так как относительная скорость присоединяющейся массы равна скорости капли, из (3.3) имеем

$$mdv + vdm = mgdt. \quad (3.29)$$

Из условия  $dm/dt = A4\pi r^2$  и  $m = (4/3)\pi\rho r^3$  следует  $r = (A/\rho)t$ . Подставляя в уравнение, получаем

$$gt^3 = 3vt^2 + t^3 dv/dt = d(vt^3)/dt.$$

Отсюда получаем  $gt^4/4 = vt^3 + \text{const}$ . Из условия, что  $v = 0$  при  $t = 0$ , следует

$$v = gt/4.$$

Если задана не скорость возрастания массы капли, а **скорость возрастания ее радиуса**  $dr/dt = \alpha$  (№ 3.54), то из (3.29) имеем  $d(mv) = mgdt$ . Откуда следует

$$d(r^3v) = gr^3dr/\alpha.$$

Интегрируя, для скорости получаем  $v = (1/4)(g/\alpha)r[1 - (r_0/r)^4]$ .

## 4. РАБОТА, ЭНЕРГИЯ, ИМПУЛЬС. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ. СТОЛКНОВЕНИЯ

Понятия **работы** и **энергии**, введенные первоначально как вспомогательные характеристики результатов движения, оказались важнейшими понятиями в механике.

Сила совершаает работу только, если вызывает перемещение в направлении действия силы. Сила  $\mathbf{F}$  при бесконечно малом перемещении тела  $d\mathbf{r}$  совершает работу

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{r} = Fdr \cos \alpha. \quad (4.1)$$

Необходимо подчеркнуть, что работа **скалярная** величина ( $\alpha$  – угол между векторами  $\mathbf{F}$  и  $d\mathbf{r}$ ).

**Работа силы трения** в вертикальном поле тяжести при смещении на  $ds$  по плоскости, которая наклонена к горизонтальной оси  $x$  под углом  $\alpha$ , равна

$$dA = Fds = km g \cos \alpha dx / \cos \alpha = km g dx.$$

При подъеме или спуске тела по горке, знак наклона которой не меняется, работа будет складываться, во-первых, из работы против силы трения, которая определяется, как следует из предыдущего соотношения, длиной основания горки, и, во-вторых, работой против силы тяжести, которая определяется высотой горки. Скорость движения считаем очень малой, и кинетической энергией пренебрегаем (№ 4.3). При соскальзывании с горки возможная полезная работа равна разности работы силы тяжести (потенциальной энергии, о которой будет сказано ниже) и работы силы трения (№ 4.4). К нормальному давлению на поверхность горки, от которого зависит сила трения, надо прибавить или вычесть из него  $mv^2/R$ , в зависимости от знака кривизны поверхности горки ( $R$  – радиус кривизны) (№ 4.2).

Найдем минимальную работу, которую надо затратить, чтобы втащить тело массой  $m$  по шероховатой (коэффициент трения  $k$ ) горке, представляющей в сечении дугу окружности радиусом  $R$  (рис. 4.1), силой, направленной все время под углом  $\alpha$  к направлению движе-

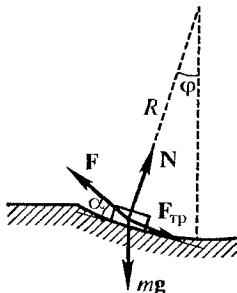


Рис. 4.1

Работа этой силы

$$A = \int_s \mathbf{F} d\mathbf{s} = \int_0^\phi F \cos \alpha R d\varphi.$$

В некоторых случаях при подсчете работы необходимо учитывать, что момент приложенной силы может менять давление на опоры.

Вычислим работу, которую надо совершить, чтобы куб массой  $M$ , с длиной ребра  $4L$ , лежащий на двух опорах 1 и 2 таким образом, что его центр  $O$  расположен посередине между опорами, находящимся на расстоянии  $2L$  друг от друга (рис. 4.2), сдвинуть (с постоянной скоростью) до тех пор, пока конец грани куба не окажется над опорой 2 (№ 4.48). Коэффициенты трения на опорах различны и равны  $k_1$  и  $k_2$ .

Из второго закона Ньютона для движения с постоянной горизонтальной скоростью получаем

$$F = k_1 N_1 + k_2 N_2; Mg = N_1 + N_2.$$

Если вращения нет, момент сил, действующих на куб, относительно центра масс всегда, в том числе и при смещении центра масс на  $x$ , равен нулю

$$N_1(L - x) = N_2(L + x) + k_1 N_1 2L + k_2 N_2 2L.$$

Из этого и предыдущего уравнений находим

$$N_1 = Mg[L(1 + 2k_2) + x]/[2L(1 + k_2 - k_1)]$$

$$\text{и } N_2 = Mg[L(1 + 2k_1) - x]/[2L(1 + k_2 - k_1)].$$

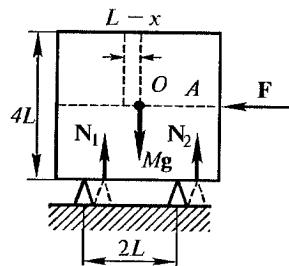


Рис. 4.2

Видно, что  $N_2$  обращается в нуль при  $x = L(1 - 2k_1)$ . Дальше начинается вращение куба. Работу вычисляем до этого момента:

$$A = \int_0^{l(1-2k_1)} F dx.$$

**Кинетическую энергию**  $E$  тело приобретает благодаря работе внешней силы. Используя второй закон Ньютона ( $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ ), получаем

$$\begin{aligned} dA &= \mathbf{F} d\mathbf{r} = d\mathbf{p} d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v} d\mathbf{p} = \mathbf{p} d\mathbf{p}/m = \\ &= d[p^2/(2m)] = d(mv^2/2) = dE. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Изменение кинетической энергии равно совершенной работе.

Если задано изменение силы со временем (№ 4.1), то из второго закона Ньютона изменение скорости

$$\Delta v = \int_1^2 dv = (1/m) \int_1^2 F(t) dt.$$

Произведенная работа зависит от начальной скорости  $v_0$  и определяется разностью кинетических энергий

$$A = m/2(v_0 + \Delta v)^2 - (m/2)v_0^2. \quad (4.3)$$

При линейном нарастании силы со временем  $F = \alpha t$  и спаде с тем же коэффициентом конечная скорость  $v$  тела массой  $m$ , на которое действует сила (№ 4.18), определяется из второго закона Ньютона:

$$mv = \int_0^\tau F dt = 2\alpha \int_0^{\tau/2} t dt = \alpha(\tau/2)^2.$$

Линейное нарастание силы может быть связано с определенной конструкцией системы. Например, однородная доска длиной  $L$  горизонтально лежит на двух одинаковых цилиндрических опорах, вращающихся в противоположных направлениях (рис. 4.3). Направления вращения таковы, что верхние точки цилиндров движутся в противоположные стороны от центра системы, а оси цилиндров неподвижны. Расстояние между осями равно  $l$ . Коэффициент трения между доской и опорами  $k$ . Найдем скорость, которую приобретет доска в момент времени, когда один из ее концов соскользнет с опоры (№ 4.45).

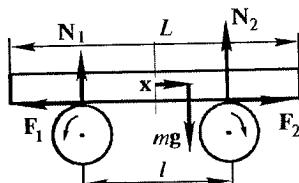


Рис. 4.3

Сумма давлений на опоры всегда равна весу доски  $N_1 + N_2 = mg$ . Отклонение центра масс от его положения при равновесии (неустойчивом) обозначим  $x$ . При отсутствии вращения доски момент сил, действующих на доску, относительно точки на нижней поверхности доски под центром масс равен нулю

$$N_1(l/2 + x) = N_2(l/2 - x).$$

В горизонтальном направлении на доску действует сила, равная разности сил трения на опорах:

$$F = F_2 - F_1 = k(N_2 - N_1) = 2kmgx/l.$$

Из второго закона Ньютона получаем

$$mdv/dt = mvdv/dx = 2kmgx/l.$$

Интегрируя это уравнение с учетом того, что в начальный момент при  $x = 0$  скорость доски  $v = 0$ , получаем  $v^2/2 = kgx^2/l$ . Отсюда при  $x = l/2$  находим искомую скорость.

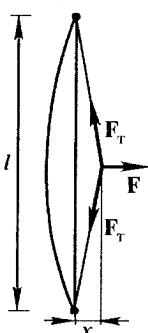


Рис. 4.4

Еще один пример линейной зависимости силы от смещения в случае действия лука на стрелу. На рис. 4.4 показаны силы, которые действуют на тетиву лука (длиной  $l$ ) при ее оттягивании. Изменением деформации лука в процессе оттягивания тетивы пренебрегаем. Поэтому натяжение вдоль тетивы  $F_t$  считаем постоянным. Сила  $F$ , с которой стрелок оттягивает тетиву, пропорциональна величине смещения  $x = (l/2)(F/2)/F_t$ . Благодаря линейной зависимости силы от смещения ее работа (упругая энергия) равна  $A = Fx/2$ . Энергия, созданная этой работой, затем переходит в кинетическую энергию стрелы (№ 4.51).

Кинетическая энергия характеризует также и возможность совершения работы телом при противодействии тормозящей силы.

Например, сила трения останавливает лодку (массой  $m$  и длиной  $L$ ), наезжающую по инерции на отмель и останавливающуюся (из-за трения), когда половина ее длины оказывается на суще. Найдем начальную скорость лодки, если коэффициент трения равен  $k$  (№ 4.16).

Сила трения лодки об отмель определяется силой нормального давления, которая увеличивается пропорционально увеличению части лодки, давящей на отмель. Из равенства изменения кинетической энергии работе силы трения получаем

$$mv^2/2 = \int_0^{L/2} kmg(x/L)dx = kmgL/8.$$

Отсюда начальная скорость  $v = (kgL)^{1/2}/2$ .

Трение может демпфировать колебания.

**Тело на пружине** жесткостью  $k$  находится на поверхности, которая с одной стороны от положения равновесия шероховатая (коэффициент трения  $\mu$ ), а с другой стороны гладкая (рис. 4.5).

Найдем, на какую величину  $L$  надо сдвинуть тело массой  $m$  в сторону гладкой части поверхности, чтобы после захода на шероховатую часть поверхности оно остановилось в положении равновесия (№ 4.19).

Обозначим расстояние, на которое тело заходит на шероховатую часть поверхности,  $l$ . Работа силы трения на пути  $2l$  равна энергии сжатой пружины при начальном сдвигании тела в сторону гладкой поверхности на  $L$

$$A = \mu mg2l = kL^2/2.$$

Для определения  $l$  воспользуемся тем, что при отклонении на  $l$  у пружины имеется упругая энергия. Поэтому

$$kL^2/2 = \mu mgl + kl^2/2.$$

Из этих двух уравнений можно найти  $L$ .

Рассмотрим торможение маленького **колечка** массой  $m$ , надетого на проволочное **кольцо** радиусом  $R$  за счет трения (коэффициент трения  $k$ , силу тяжести не учитываем) после получения в начальный момент скорости  $v_0$  (№ 4.40). Изменение кинетической энергии происходит за счет работы сил трения

$$d(mv^2/2) = -k(mv^2/R)Rd\phi.$$

Отсюда определяем скорость в зависимости от угла поворота по проволочному кольцу  $\phi$ :

$$\ln(v/v_0) = -k\phi \text{ и } v = v_0 e^{-k\phi}.$$

Найдем минимальную кинетическую энергию, которую должен футболист сообщить мячу массой  $m$  для попадания под штангу ворот высоты  $h$  с расстояния  $L$  (рис. 4.6). Введем компоненты начальной скорости  $v_x$  и  $v_y$ . Время полета  $t = L/v_x$ . Так как  $h = v_y t - g t^2/2$ , то подставляя  $t$ , получаем

$$v_y = hv_x/L + gL/(2v_x).$$

Для начальной энергии имеем

$$E = (m/2)(v_x^2 + v_y^2) = (m/2) \left[ v_x^2 + h^2 v_x^2/L^2 + gh + g^2 L^2/(4v_x^2) \right].$$

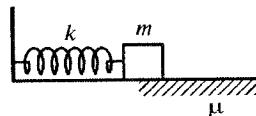


Рис. 4.5

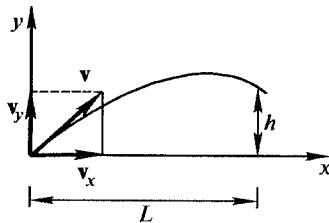


Рис. 4.6

Условие минимума энергии:

$$dE/d(v_x^2) = 0.$$

Находим скорость и подставляем в уравнение для вычисления энергии (№ 4.44).

Другим видом энергии, характеризующим возможность совершения работы, является **потенциальная энергия** в поле сил. Силы, для которых работа не зависит от формы траектории движения, называют **консервативными**. Примером таких сил являются силы притяжения тел к Земле и упругие силы. Для консервативных сил можно ввести **потенциал силы**, или потенциальную энергию  $U$ , зависящую только от координаты и связанную с работой следующим образом:

$$dU = -dA = -Fdr. \quad (4.4)$$

Убыль потенциальной энергии равна работе, совершаемой телом.

Используя полученную выше связь работы с кинетической энергией, получаем в случае консервативных сил

$$dA = Fdr = dE = -dU \quad (4.5)$$

или

$$E + U = E_n = \text{const.} \quad (4.6)$$

Это закон **сохранения механической энергии** для тел неизменной массы. Этим законом можно пользоваться, если малы потери, связанные с переходом механической энергии в другие ее виды, например в тепло при действии сил трения. Необходимо отметить, что обычно энергия определяется с точностью до некоторой постоянной, от которой отсчитывается ее изменение.

Падение тела в поле тяжести  $g$  с высоты  $h$  приводит к появлению вертикальной скорости

$$v = (2gh)^{1/2}. \quad (4.7)$$

Кинетическая энергия у тела может появиться в результате скатывания его с горки. В частности, горкой может быть плоский клин, гладкие боковые поверхности которого представляют собой (в сечении) четверть окружности радиусом  $R$  (рис. 4.7). Если массы клина и тела одинаковые и трением между клином и горизонтальной поверхностью, на которой он находится, можно пренебречь, то из закона сохранения импульса и полной энергии скорости тела и клина равны  $v = (gR)^{1/2}$ . В случае существования трения между телом и поверхностью (с коэффициентом трения  $k$ ) из второго закона Ньютона следует, что время до его остановки  $t = v/(kg)$ . Путь определяется из равенства кинетической энергии работе сил трения (№ 4.30).

В некоторых случаях можно вычислить и сравнить средние значения кинетической и потенциальной энергий. Сделаем это для вертикального движения упругого шарика в однородном поле тяжести при отражении его от горизонтального пола по законам упругого удара (№ 4.64).

При отсутствии потерь движение повторяется. Для вычисления среднего значения достаточно вычислить его за время подъема и опускания. Обозначим скорость шарика сразу после отскока от пола  $v_0$ , а время до следующего удара  $T$ . Изменение скорости со временем  $v = v_0 - gt$ , высоты подъема  $y = v_0 t - gt^2/2$ . Из первого соотношения получаем  $gT = 2v_0$ . Вычислим средние значения кинетической и потенциальной энергий:

$$\langle E \rangle = (1/T) \int_0^T \left( mv^2/2 \right) dt = mv_0^2/6;$$

$$\langle U \rangle = (1/T) \int_0^T mgy dt = mv_0^2/3.$$

Отсюда следует для средних значений

$$\langle U \rangle = 2\langle E \rangle. \quad (4.8)$$

Найдем давления на стол однородного каната, висевшего над столом вертикально, и нижним концом доходившего до стола (рис. 4.8), когда он начнет свободно падать (№ 4.55).

Элемент каната  $dm$  соприкасается со столом и за  $dt$  изменяет свою скорость от  $v$  до 0 под действием силы  $F$ . По второму закону Ньютона  $v dm = F dt$ . Предполагается, что канат не обладает

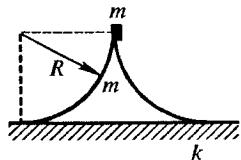


Рис. 4.7

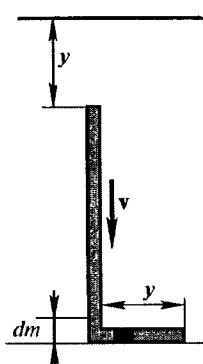
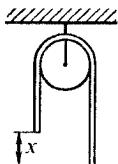


Рис. 4.8

жесткостью и все его части движутся независимо. Все части каната, которые не остановились, движутся с одинаковыми скоростями, которые определяются смещением  $u$ , равным длине куска, уже лежащего на столе (при отсутствии жесткости каната не возникает горизонтальной скорости),  $v = (2gy)^{1/2}$ . Учитывая, что  $dm = \rho dy$  ( $\rho$  — масса единицы длины каната), получаем  $\rho v dy/dt = F$  и так как  $dy/dt = v$ , то  $F = \rho v^2 = 2\rho gy$ . К этой силе добавляется вес куска, уже лежащего на столе,  $\rho gy$ . Поэтому  $F_{\text{сум}} = 3\rho gy$ .

Для нахождения полного импульса, переданного столу (№ 4.54),

надо вычислить интеграл  $\int_0^l \rho v dy$ .



Тяжелую однородную веревку массой  $m$  и длиной  $l$  можно перекинуть через невесомый блок (рис. 4.9). Найдем скорость веревки в зависимости от расстояния  $x$  между ее концами, если в начальный момент оно равно  $h$ .

Из второго закона Ньютона имеем

Рис. 4.9

$$mdv/dt = (m/l)gx.$$

Связь между  $x$  и скоростью веревки  $dx/dt = 2v$ . Поэтому

$$m(dv/dx)2v = (m/l)gx.$$

Отсюда закон сохранения энергии:

$$mv^2/2 = (m/l)(1/2)gx^2/2 + C.$$

Здесь  $C$  — постоянная, определяемая из начального условия. Используя начальное условие, находим скорость (№ 4.56).

Закон сохранения энергии в приведенной форме (4.6) годится только при постоянной массе движущегося тела. Например, в случае тяжелой веревки, подвешенной одним концом, а другим концом проходящей через неподвижный невесомый блок (рис. 4.10), движущаяся масса веревки меняется, и поэтому нельзя пользоваться законом сохранения энергии (№ 4.120). Решение должно учитывать изменение массы, как в предыдущем разделе. Если радиусом блока можно пренебречь по сравнению с длиной веревки  $l$ , то в равновесии конец веревки находится на уровне петли. Такое положение неустойчиво. Рассмотрим случай опускания конца веревки. Обозначая массу веревки  $M$ , для час-

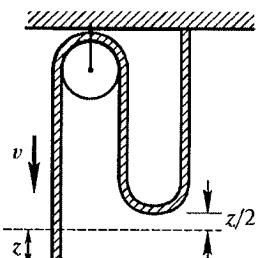


Рис. 4.10

ти, движущейся со скоростью  $v$ , при опускании конца веревки на расстояние  $z$  получаем, что ее масса равна

$$m(z) = [(2/3)l + z/2]M/l. \quad (4.9)$$

В произвольный момент движения  $t$  масса движущейся части веревки  $m$  и скорость  $v$ . В момент  $t + dt$  масса  $m + \mu dt$ , а скорость  $v + dv$ . Изменение импульса за  $dt$  равно весу неуравновешенного куска веревки:

$$(m + \mu dt)(v + dv) - mv = (M/l)(3/2)zgdt.$$

Откуда

$$\mu dt + mdv = (3/2)(M/l)zgdt.$$

Приращение массы можно выразить через скорость:

$$\mu dt = (M/l)vdt/2.$$

Подставляя это, а также  $dt = dz/v$ , получаем

$$(z + 4l/3)vdv + (v^2 - 3gz)dz = 0. \quad (4.10)$$

Найдем интегрирующий множитель  $y(z)$ , позволяющий найти решение этого уравнения. Условие заключается в том, что производная от  $y(z + 4l/3)v$  по  $v$  при постоянном  $z$  равна производной от  $y(v^2 - 3gz)$  по  $z$  при постоянном  $v$ . Получаем

$$y = (z + 4l/3).$$

Используя это  $y$ , из (4.10) получаем

$$\begin{aligned} y^2 vdv + y[v^2 - 3g(y - 4l/3)]dy &= dF = \\ &= (\partial F / \partial v)dv + (\partial F / \partial y)dy = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Отсюда

$$F(v, y) = (v^2 + 4lg)y^2/2 - gy^3 + C = 0. \quad (4.12)$$

Так как при  $t = 0$  имеем  $v = 0$ ,  $z = 0$ ,  $y = 4l/3$ , получаем

$$C = -(g/2)(4l/3)^3.$$

В результате имеем зависимость скорости от смещения конца веревки:

$$v^2/g = [2y^3 + (4l/3)^3 - 4ly^2]/y^2 = 18z^2(z + 2l)/(3z + 4l)^2. \quad (4.13)$$

Посмотрим, что получится, если пользоваться законом сохранения энергии. Изменение потенциальной энергии

$$(M/l)z(z/4 + z/2)g.$$

## Кинетическая энергия

$$(M/l)[(2/3)l + z/2]v^2/2.$$

Отсюда

$$v^2/g = 3z^2/(z + 4l/3). \quad (4.14)$$

Отношение точной зависимости (4.13) к (4.14), где использован закон сохранения энергии (хотя его использовать нельзя):

$$(2/3)(z + 2l)/(z + 4l/3). \quad (4.15)$$

При малых  $z$  это близко к единице, в пределе при  $z = 2l/3$  отношение равно 8/9.

Рассмотрим движение частицы, совершающей одномерное движение в положительном направлении оси  $x$  в консервативном поле с потенциальной энергией

$$U(x) = E[1 - (x/x_0)^{4/3}],$$

где  $E$  и  $x_0$  — постоянные величины, а начальное условие заключается в том, что при  $t = 0$  частица поконится в точке  $x = 0$  (№ 4.119).

Из начального условия следует, что  $E$  — полная энергия, и закон сохранения энергии имеет вид  $E = mv^2/2 + U(x)$ . Откуда

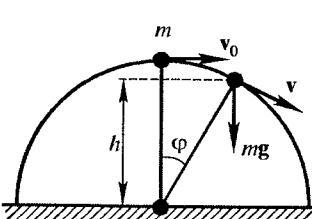
$$dx/dt = v = (2/m)^{1/2} (E - U)^{1/2} = (2/m)^{1/2} (E)^{1/2} (x/x_0)^{2/3}.$$

Теперь можно найти зависимость координаты от времени и соотношение параметров движения, например,  $(dx/dt)/x$ .

Другое решение получаем из второго закона Ньютона, подставляя в него силу, определяемую из потенциальной энергии  $F = -dU/dx$ .

Задачу о движении тела под действием известных сил при заданных начальных условиях можно полностью решить, используя второй закон Ньютона.

В некоторых случаях решение задачи может существенно упроститься, если воспользоваться законами сохранения. Особенно, когда для сил получаются сложные выражения, и поэтому трудно проинтегрировать уравнения движения.



Например, небольшое тело начинает двигаться с вершины гладкой полусферы радиусом  $R$  с горизонтальной скоростью  $v_0$  в поле тяжести (рис. 4.11). Найдем, на какой высоте оно оторвется от поверхности (№ 4.36).

Рис. 4.11

Закон сохранения энергии:

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = mgR(1 - \cos\varphi).$$

Условие отрыва из уравнения движения по окружности в момент, когда прекращается давление тела на поверхность полусферы:

$$mv^2/R = mg \cos\varphi.$$

Исключая из этих уравнений  $v$ , получаем

$$h = R \cos\varphi = (v_0^2 + 2Rg)/(3g).$$

Отметим, что результаты не зависят от массы тела.

Рассмотрим соскальзывание с вершины гладкой полусферы массой  $M$  двух тел разной массы (рис. 4.12). Во время движения тела будут находиться на одной и той же высоте, но давление их на полусферу будут зависеть от массы

$$\begin{aligned} N &= mg \cos\alpha - mv^2/R = mg \cos\alpha - 2mg(1 - \cos\alpha) = \\ &= mg(3 \cos\alpha - 2). \end{aligned}$$

Если известен угол, при котором полусфера начинает двигаться по горизонтальной поверхности, на которой удерживалась трением, то можно найти коэффициент трения (№ 4.41)

$$k = (N_1 - N_2) \sin\alpha / [Mg + (N_1 + N_2) \cos\alpha].$$

Потенциальная энергия может быть связана с силами упругости.

Например, мальчик стреляет из рогатки. Он растягивает резину вдвое, доведя усилие до  $F_0 = 10$  Н (рис. 4.13). Определим скорость камешка массой  $m = 10$  г, если длина резинки  $2L = 20$  см, а масса резинки  $M = 30$  г (№ 4.52).

В отличие от многих задач, в которых обычно пренебрегают массами пружин по сравнению с массами ускоряемых ими тел, в данной задаче масса резины в три раза больше массы камушка, и поэтому необходимо учесть кинетическую энергию, приобретаемую резиной  $W_p$ . Сложность здесь в том, что различные части резинового жгута имеют различные скорости: начало, закрепленное на рогатке, — не-

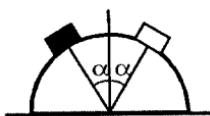


Рис. 4.12

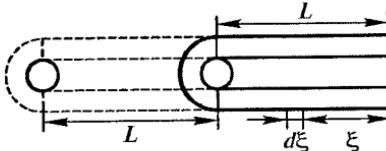


Рис. 4.13

подвижно, а конец (под ним понимаем середину всей длины резины) имеет такую же скорость, что и камушек, пока не перестанет действовать упругая сила натяжения резины. В момент отрыва камушки от резины ускорение его станет равно нулю, так как действующая сила становится равной нулю, а вся потенциальная энергия натяжения пружины перейдет в кинетическую энергию камушки и резины. Для подсчета кинетической энергии резины предполагаем, что скорость линейно меняется по массе резины или по так называемой лагранжевой координате  $\xi = (L/M)m_\xi$  ( $m_\xi$  — масса куска резины от начала до данной точки), представляющей расстояние каждого элемента массы резины от рогатки в нерастянутом состоянии. Тогда, обозначая скорость камушки в момент вылета  $v$ , получаем

$$W_p = (1/2) \int_0^M (vm_\xi M)^2 dm_\xi = (1/2) \int_0^L (v\xi/L)^2 (M/L) d\xi, \quad (4.16)$$

и в момент отрыва камушки кинетическая энергия камушки и резины равна:

$$W_k = mv_0^2/2 + (1/2) \int_0^L (v\xi/L)^2 (M/L) d\xi = (m + M/3)v^2/2. \quad (4.17)$$

Потенциальную энергию растянутой резины вычисляем как работу силы натяжения  $F$ , которая линейно зависит от удлинения. Максимальное значение силы  $F_0$ , максимальное удлинение  $L$  и упругая энергия  $W = F_0 L/2$ . Из закона сохранения механической энергии

$$F_0 L/2 = v_0^2 (m + M/3)/2 \text{ и } v_0 = (F_0 L/(m + M/3))^{1/2} = 7,1 \text{ м/с.}$$

Упругая сила, возникающая при **столкновении шаров**, по теории Г. Герца зависит от деформации поверхности (прогиба или смещения)  $x$  следующим образом  $F = kx^{3/2}$ . Найдем максимальную деформацию  $\Delta x$  двух сталкивающихся шаров одинакового радиуса, но разных масс  $m_1$  и  $m_2$ , движущихся навстречу друг другу с одинаковыми по величине скоростями  $v$  (№ 4.80).

Работа силы

$$A = \int_0^{\Delta x} F dx = (2/5)k(\Delta x)^{5/2}.$$

Предполагая, что первая масса больше второй, получаем скорость центра масс  $v_u = (m_1 - m_2)v/(m_1 + m_2)$ . Работа сил равна изменению кинетической энергии шаров за вычетом энергии движения системы в целом

$$m_1 v^2/2 + m_2 v^2/2 - (m_1 + m_2)v_u^2/2 = 2(2/5)k(\Delta x)^{5/2}.$$

Отсюда определяется максимальное смещение, когда прекращается относительное движение шаров.

Торможение частиц, летящих навстречу друг другу, может быть связано с **кулоновскими силами** при одинаковых знаках зарядов. В случае двух одинаковых частиц, например протонов (№ 4.83), обладающих каждый кинетической энергией  $E$ , они будут сближаться до расстояния между ними  $a$ , пока вся кинетическая энергия не перейдет в потенциальную:

$$2E = - \int_{\infty}^a F dr = - \int_{\infty}^a \left( e^2 / r^2 \right) dr = e^2 / a.$$

Рассмотрим задачу, в которой потенциальная энергия создается **тяжестью и упругими силами**.

**Гимнаст** падает с высоты  $H$  в **упругую сетку**. Найдем, во сколько раз максимальная сила, действующая на гимнаста со стороны сетки, больше его веса, если прогиб сетки под действием веса гимнаста равен  $a$  (№ 4.28).

Упругая энергия сетки при растяжении и прогибе на величину  $L$  равна изменению потенциальной энергии

$$kL^2/2 = mg(H + L).$$

Воспользовавшись тем, что  $ka = mg$ , находим  $L$ , и тогда

$$F = kL = mg[1 + (1 + 2H/a)^{1/2}].$$

Увеличение силы может привести к **разрушению** удерживающей конструкции.

Рассмотрим **разрыв нити** (длиной  $L$ ), на которой подвешен груз. Определим, на какую минимальную высоту надо поднять груз массой  $m$ , чтобы он, падая, разорвал нить, если минимальный покоящийся груз массой  $M$ , разывающий нить, растягивает ее перед разрывом на 1% длины (№ 4.31). Считаем, что сила, с которой нить действует на груз, пропорциональна растяжению нити вплоть до ее разрыва.

Условие разрыва нити — ее удлинение:  $\Delta L = 0,01L$ . Такое удлинение получается при статическом натяжении нити массой  $M$ . Тогда, из условия равновесия  $Mg = k\Delta L$ , находим величину  $k$  (рис. 4.14).

Удлинения  $\Delta L$  можно достигнуть и за счет динамического воздействия массой  $m < M$ . Необходимо рассмотреть два случая: 1) высота подъема груза  $h < \Delta L_1$  —

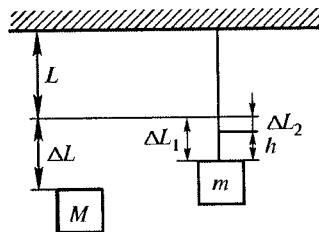


Рис. 4.14

статического удлинения нити под действием груза  $m$  и 2)  $h > \Delta L_1$ . Для первого случая в момент растяжения нити на величину  $\Delta L$  (необходимую для разрыва) приращение упругой энергии нити равно запасенной потенциальной энергии груза:

$$k(\Delta L)^2/2 - k(\Delta L_2)^2/2 = mg(\Delta L - \Delta L_2).$$

Отсюда  $\Delta L + \Delta L_2 = 2mg/k = 2\Delta Lm/M$ .

Учитывая, что

$$mg = k(\Delta L_1) \text{ и } (\Delta L_2) = (\Delta L_1) - h = \Delta Lm/M - h,$$

получаем

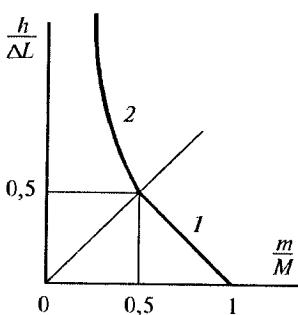


Рис. 4.15

$$h = \Delta L(1 - m/M).$$

На рис. 4.15 эта зависимость обозначена 1.

Во втором случае

$$k(\Delta L)^2/2 = mg(h + \Delta L - \Delta L_1)$$

и соответственно

$$h = \Delta L[M/(2m) - 1 + m/M].$$

На рис. 4.15 обозначено 2.

При  $m \ll M$  для больших  $h/\Delta L$  получаем

$$h \approx \Delta L[M/(2m) - 1].$$

Отметим, что при  $m/M = 1/2$  в обоих случаях  $\Delta L_1 = \Delta L/2$ ,  $h = \Delta L/2$ . При больших величинах отношения  $m/M$  имеем первый случай, при меньших — второй.

Одну и ту же работу можно совершить за различное время. Величина, характеризующая скорость совершения работы, называется **мощностью**,

$$P = (dA/dt) = Fv. \quad (4.18)$$

Рассмотрим пример применения этой формулы.

Через неподвижный блок, массой которого можно пренебречь, перекинута замкнутая тяжелая веревка массой  $M$ . В начальный момент времени за веревку в точке между блоком и нижним ее заворотом, цепляется **обезьяна** массой  $m$  и начинает карабкаться вверх так, чтобы удержаться на неизменной высоте. Определим, какую мощность  $P$  должна развить для этого обезьяна и через какое время она перестанет справляться со своей затей, если максимальная мощность, которую она может развивать, равна  $P_{\max}$  (№ 4.35).

Если обезьяна удерживается на одной и той же высоте, значит, со стороны веревки на нее действует сила  $mg$ . Такая же сила действует на веревку и разгоняет ее от нулевой скорости до  $v = at$ , где  $a = mg/M$ .

Поэтому

$$P = Fv = (mg)^2 t / M; t_{\max} = MP_{\max} / (mg)^2.$$

Если при движении автомобиля по горизонтали со скоростью  $v$  требуется мощность  $P$ , то при движении в гору под углом  $\alpha$  требуется большая мощность

$$P_1 = (F + mg \sin \alpha)v = P + mgv \sin \alpha.$$

Здесь  $F$  — сила тяги при горизонтальном движении,  $m$  — масса автомобиля.

Эта формула позволяет найти максимальную мощность при заданном максимальном угле подъема (№ 4.5) и величину силы трения,  $F_{tp} = P_1/v - Mg \sin \alpha$ , действующей на автомобиль (№ 4.6).

В случае вращательного движения мощность  $N$  выражается через момент сил  $M$  и угловую скорость  $\omega$ :

$$N = Fdl/dt = Fv = FR\omega = M\omega. \quad (4.19)$$

Найдем максимальную мощность, которую ведущий диск фрикционного сцепления, вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  и прижимаемый к ведомому диску с силой  $F_n$ , передает ведомому диску, если радиус дисков  $R$  и коэффициент трения  $\mu$  (№ 4.61). Как следует из приведенной выше формулы, для нахождения мощности надо найти момент действующих сил:

$$M = \int_0^R \mu \left[ F_n / (\pi R^2) \right] 2\pi r dr = \left( 2\mu F_n / R^2 \right) \int_0^R r^2 dr = (2/3)\mu F_n R.$$

Из второго закона Ньютона в случае отсутствия внешних сил для тела или системы тел получаем сохранение импульса. Импульс сохраняется и при взаимодействиях внутри системы, в том числе и сопровождающихся потерями энергии при действии внутренних сил либо выделением энергии.

При стрельбе всегда возникает отдача.

Оценим силу отдачи при выстреле из ружья в предположении, что эта сила постоянна и смешает плечо стрелка на  $s$ , а пуля покидает ствол практически мгновенно (№ 4.9). Обозначим массу ружья  $M$  и массу пули  $m$ , а скорость вылета пули  $v$ . При постоянной силе отдачи постоянно ускорение ружья  $a = F/M$ . Под действием силы в течение времени  $\tau$  ружье приобретает скорость  $v_p = (F/M)\tau$  и смешается на расстояние  $s = (F/M)\tau^2/2$ . Импульс, приобретенный ружьем, равен импульсу, унесенному пулей (разлетом продуктов горения или взрыва пренебрегаем),  $Mv_p = mv$ . Исключая время, получаем  $F = m^2 v^2 / (2Ms)$ .

Отдача при выстреле может остановить свободно соскальзывающую по гладкой **наклонной плоскости** пушку. Выстрел производится в горизонтальном направлении в момент, когда она прошла уже путь  $l$ . Масса пушки  $M$ . Угол наклона плоскости  $\alpha$ . Найдем необходимую для остановки пушки скорость снаряда  $v$ , если его масса  $m \ll M$  (№ 4.10).

Так как плоскость гладкая, то из равенства кинетической энергии изменению потенциальной получаем скорость пушки вдоль наклонной плоскости  $v_n = (2gl \sin \alpha)^{1/2}$ . Из закона сохранения импульса вдоль наклонной плоскости:  $Mv_n = mv \cos \alpha$ . Отсюда определяем скорость снаряда.

Отдача возникает и в лазере. Кристалл лазера массой  $m$ , излучающий световой поток в виде короткого импульса с энергией  $E$ , имеет скорость отдачи  $v$ , которая определяется из закона сохранения импульса:  $mv = E/c$  (№ 4.88).

Взаимодействие между телами может передаваться путем трения одного по другому. Например, на покоящееся тело массой  $M$ , находящееся на гладкой (трения нет) поверхности (или на воде), попадает другое тело массой  $m$ , движущееся горизонтально со скоростью  $v$  (№ 4.15). Между телами имеется трение (коэффициент трения  $k$ ). Конечная скорость тел  $v_k$ , когда проскальзывание прекратится, определяется сохранением импульса:

$$mv = (m + M)v_k.$$

Относительное смещение (путь)  $s$  определяется из равенства работы силы трения изменению кинетической энергии:

$$kmg s = mv^2/2 - (m + M)v_k^2/2.$$

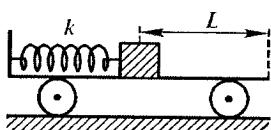


Рис. 4.16

Одно тело массой  $m$  может находиться на другом, например на тележке массой  $M$ , стоящей неподвижно на гладкой горизонтальной поверхности (рис. 4.16). Тело прикреплено к тележке пружиной жесткостью  $k$ , первоначально сжатой на  $x_0$ . Расстояние от тела до свободного края тележки  $L$  (длина пружины в несжатом состоянии меньше  $L$ ). Найдем, какая будет скорость тела  $v$ , когда оно соскользнет с тележки, если коэффициент трения тела о тележку равен  $\alpha$  (№ 4.20).

Из закона сохранения импульса следует  $mv = Mv_t$ , где  $v_t$  — скорость тележки. Для определения скорости тела используем сохранение энергии:

$$kx_0^2/2 - \alpha mgL = mv^2/2 + Mv_t^2/2 = (mv^2/2)(1 + m/M).$$

Если в тело массой  $M$ , подвешенное на нити длиной  $L$ , попадает и застrevает в нем пуля массой  $m$ , летевшая горизонтально, то начальная скорость движения тела с застрявшей в нем пулей  $v_h$  связана со скоростью движения пули  $v_0$  законом сохранения импульса:

$$mv_0 = (m + M)v_h.$$

Необходимо отметить, что механическая энергия при этом не сохраняется (происходит разогрев тела и пули из-за трения). При дальнейшем движении тела с пулей в однородном поле тяжести механическая энергия сохраняется. Чтобы тело все время после попадания пули двигалось по окружности, нить должна быть натянута. Это значит, что в наивысшей точке движения, где скорость минимальна, должно выполняться условие движения по окружности под действием силы тяжести:

$$(M + m)v_b^2/L = (M + m)g.$$

Скорость в наивысшей точке движения  $v_b$  связана с  $v_h$  и  $L$  законом сохранения энергии:

$$(M + m)(v_h^2 - v_b^2)/2 = 2(M + m)gL.$$

Из этих соотношений можно найти, при какой минимальной скорости пули тело совершил полный оборот по окружности вокруг точки подвеса. Получаем

$$v_0 \geq (5gL)^{1/2}(M + m)/m.$$

Результатами можно воспользоваться и при решении других задач (№ 4.32).

Маятник можно использовать для определения скорости попадающей в него пули  $v_0$ . Главное условие заключается в том, чтобы за время соударения маятник не успевал существенно сместиться. При этом передается сразу весь импульс пули. Такой маятник называется баллистическим. Масса его  $M$  должна значительно превосходить массу пули  $m$ . После соударения энергия маятника при отклонении сохраняется. По углу отклонения  $\alpha$  определяется скорость маятника после соударения  $v_1$ . Возможны различные процессы соударения:

- 1) пуля после удара застrevает в маятнике;
- 2) пуля отскакивает после удара со скоростью  $v$ ;
- 3) пуля падает вниз, потеряв свою скорость (№ 4.66).

Из закона сохранения импульса при соударении в первом, втором и третьем случаях имеем:

- 1)  $mv_0 = (m + M)v_1$ ;
- 2)  $m(v_0 + v) = Mv_1$ ;
- 3)  $mv_0 = Mv_1$ .

Закон сохранения энергии после соударения во всех случаях:

$$v_1^2/2 = gL(1 - \cos \alpha) \approx gl \alpha^2/2.$$

Эти соотношения позволяют определить скорость пули.

Движение тела по окружности можно обеспечить с помощью желоба. Начальную скорость создать не ударом, а спуском с плавной горки заданной высоты.

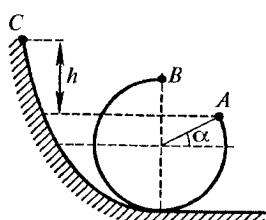


Рис. 4.17

На рис. 4.17 показан гладкий желоб с разрывом. Найдем, при каких начальных высотах тело, достигнув точки  $A$ , пролетит после свободного полета ниже верхней точки петли  $B$ , т. е. сможет попасть обратно в желоб (№ 4.37).

Чтобы тело достигло точки  $A$ , т. е. не оторвалось от желоба раньше, должно выполняться условие движения по окружности под действием только компоненты силы тяжести

(давление на желоб равно нулю):  $mv^2/R = mg \sin \alpha$ . Скорость исключаем с помощью уравнения сохранения энергии  $mv^2/2 = mgh$ . Откуда одно условие на  $h$  имеет вид  $h > (R/2) \sin \alpha$ . Ограничение высоты сверху определяется тем, чтобы тело, двигаясь свободно, не вылетело выше точки  $B$ . Расстояние между  $A$  и  $B$  по горизонтали  $I_A = R \cos \alpha$  и по вертикали  $I_B = R(1 - \sin \alpha)$ . По горизонтали движение с постоянной скоростью  $v \sin \alpha$ , по вертикали с постоянным ускорением  $g$ . Исключая из уравнений движения время, получаем  $h \leq (R/4)(1 + \sin \alpha)/\sin \alpha$ .

Рассмотрим торможение спутника за счет упругих соударений его с частицами пылевого облака. Спутник шарообразной формы радиусом  $R_0$  и массой  $M$ , движущийся по прямой со скоростью  $v_0$ , влетает в облако неподвижных тормозящих частиц с одинаковыми массами  $m \ll M$  и концентрацией (число частиц, в единице объема)  $n$ . Найдем, как будет меняться со временем скорость спутника (№ 4.116).

В системе координат, связанной со спутником, частицы имеют скорость  $v$ , которая до вхождения спутника в облако была  $v_0$ , а затем уменьшается. Проекция импульса, передаваемого одной частицей, на направление движения спутника зависит от угла  $\alpha$ , опреде-

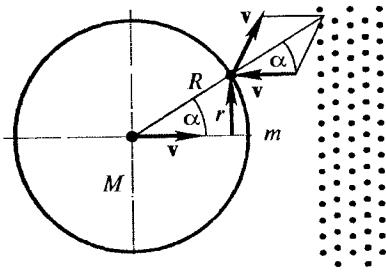


Рис. 4.18

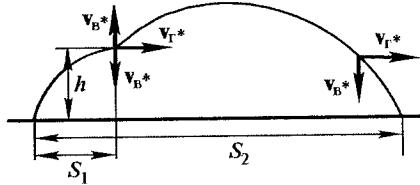


Рис. 4.19

ляющими точку удара частицы (рис. 4.18). При упругом ударе (угол падения  $\alpha$  равен углу отражения) проекция импульса равна  $2mv\cos^2\alpha$ . Полный импульс от всех частиц в единицу времени

$$p = \int_0^{R_0} 2mv \cos^2 \alpha n 2\pi r dr = \\ = \int_0^{\pi/2} 2mv \cos^2 \alpha n 2\pi R_0 \sin \alpha R_0 \cos \alpha d\alpha = \pi R_0^2 v^2 mn = Av^2.$$

Таким образом,  $dp/dt = Mdv/dt = -Av^2$ .

Откуда  $1/v = 1/v_0 + At/M$  и окончательно

$$v = v_0/(1 + Av_0 t/M) = v_0/(1 + Bt),$$

где  $B = \pi R_0^2 v_0 mn / M$ .

Применим закон сохранения импульса при взрыве (разделение на две одинаковые части) снаряда в верхней точке траектории на высоте  $h$ . Через время  $t_1$  после взрыва одна часть снаряда падает на землю под тем местом, где произошел взрыв. Найдем, на каком расстоянии  $S_2$  от места выстрела упадет вторая часть снаряда, если первая упала на расстоянии  $S_1$  от места выстрела (рис. 4.19). Силу сопротивления воздуха при решении задачи учитывать не будем.

Для первой части снаряда после взрыва задано: отсутствие горизонтальной скорости и время падения  $t_1$  с заданной высоты  $h$ . Откуда вертикальная скорость

$$v_{B*} = (h - gt_1^2/2)/t_1.$$

В зависимости от конкретных величин  $h$  и  $t_1$  эта скорость (положительное направление — вниз) может быть направлена как вниз

по вертикали при  $h > gt_1^2/2$ , так и вверх при  $h < gt_1^2/2$ . Полученное соотношение относительно  $t_1$  является квадратным уравнением, у которого один корень соответствует опусканию на землю сразу после взрыва, а второй — спуску после подъема. Рассмотрим случай, когда первый осколок получает вертикальную скорость вниз, а второй такую же вверх (№ 4.11). Из закона сохранения горизонтальной компоненты импульса получаем для горизонтальной компоненты скорости второго осколка  $v_{r^*} = mv_b/(m/2)$ . Тогда  $S_2 = S_1 + v_{r^*}t_2$ , где  $t_2$  — время полета второго осколка после взрыва. Дальнейшие вычисления существенно упрощаются, если мы заметим, что второй осколок, оказавшись после полета вверх, на который у него уйдет время равное  $2v_b/g$ , на высоте  $h$  будет иметь вертикальную скорость  $v_b$  ту же, что и первый, и, следовательно, дальнейшее расстояние  $h$  пройдет за время  $t_1$ . Таким образом, получаем  $t_2 = t_1 + 2v_b/g$ . Так как для точки максимального подъема снаряда  $S_1/v_r = (2h/g)^{1/2}$  (время движения по горизонтали равно времени подъема на высоту  $h$ ), то  $v_{r^*} = 2v_r = 2/(2h/g)^{1/2}$ , следовательно:

$$S_2 = S_1 + 2S_1/(2h/g)^{1/2} \left[ t_1 + 2(h - gt_1^2/2)/(gt_1) \right] = S_1 \left( 1 + 2(2h/g)^{1/2}/t_1 \right).$$

Использование законов сохранения продемонстрируем на **соударении брусков**.

На рис. 4.20 показана система и ее превращение. Бруск 1 лежит на таком же бруске 2. Оба они как целое скользят по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью  $v_0$  и сталкиваются с аналогичным покоящимся бруском 3. Удар бруска 2 о бруск 3 абсолютно неупругий (бруски 2 и 3 слипаются). Известно, что бруск 1 прекратил свое движение относительно брусков 2 и 3 из-за трения после того, как он полностью переместился с 2 на 3. Коэффициент трения между брусками 1 и 3 равен  $k$ . Трением о поверхность, а также между брусками 1 и 2 пренебречь. Найдем длину брусков  $L$ , при которой это происходит (№ 4.47).

Из закона сохранения импульса после соударения 2 и 3 и слипания их скорость  $v_0/2$ . Конечный импульс всей системы равен начальному

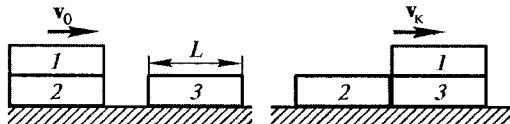


Рис. 4.20

$2mv_0 = 3mv_k$ . Откуда получаем конечную скорость  $v_k = 2v_0/3$ . Изменение кинетической энергии после удара равно работе сил трения:

$$mv_0^2/2 + m(v_0/2)^2 - 3m(2v_0/3)^2/2 = \int_0^L kmgdx/L = kmgL/2.$$

Откуда  $L = v_0^2/(6kg)$ .

Система отсчета, связанная с центром масс взаимодействующих тел, удобна, если первоначально центр масс покоялся. Он остается неподвижным и при возникновении относительного движения тел. Рассмотрим это на примере лодки массой  $M$  с находящимся в ней человеком массой  $m$ , неподвижно стоящей на спокойной воде. Пусть человек прошел вдоль по лодке путь  $L$ . Найдем, каковы будут при этом смещения лодки  $S_1$  и человека  $S_2$  относительно воды (№ 4.22).

Если предполагать, что отсутствует сила трения между лодкой и водой, то из отсутствия внешних сил в горизонтальном направлении следует неподвижность центра масс системы. Удобно ввести горизонтальную координату вдоль направления длины лодки (рис. 4.21). Обозначая через  $x$  — координату центра масс системы (точка С),  $x_1$  и  $x_2$  — координаты центров масс лодки и человека до перемещения, а  $x_{1^*}$  и  $x_{2^*}$  — после, получаем

$$(M+m)x = Mx_1 + mx_2 = Mx_{1^*} + mx_{2^*},$$

откуда

$$M(x_{1^*} - x_1) + m(x_{2^*} - x_2) = 0,$$

т. е.  $MS_1 + mS_2 = 0$ . Перемещение человека можно также записать  $S_2 = S_1 + L$ , тогда, подставляя это выражение в предыдущее, получаем

$$S_1 = -mL/(M+m); S_2 = ML/(M+m).$$

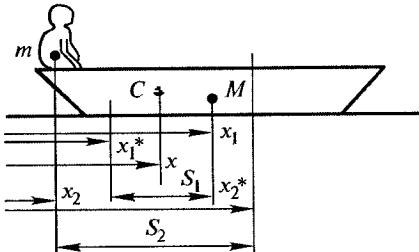


Рис. 4.21

Если человек на лодке длиной  $L$ , стоящей носом у причала, перемещается с кормы на нос, то лодка отодвинется от причала на

$$S = mL/(M + m).$$

В действительности в результате взаимодействия движущейся лодки с водой возникают не только силы, связанные с трением или образованием поверхностных волн, которые зависят от скорости лодки и уменьшаются при ее уменьшении, но и силы, связанные с ускорением лодки, которые существуют даже в идеальной (без трения) несжимаемой жидкости. Эти силы возникают из-за того, что при ускорении лодки ускоряется и часть жидкости вокруг лодки. Таким образом, масса лодки как бы увеличивается на некоторую величину, которая называется присоединенной массой. Величина присоединенной массы зависит от формы лодки. Если часть лодки, погруженную в воду, считать половиной эллипсоида с осями:  $a > b = c$  ( $a$  — в направлении движения), то присоединенная масса становится меньше 0,1 массы лодки уже при  $b/a = 0,3$  и при дальнейшем сужении лодки быстро падает.

Неподвижность центра масс позволяет найти смещение клина массой  $M$  по гладкой горизонтальной поверхности, когда по нему соскальзывает подобный клин массой  $m$  (№ 4.26). Используя обозначения длин на рис. 4.22, для смещения клина при опускании другого клина до поверхности получаем  $x = m(a - b)/(m + M)$ .

Если система находится в поле сил, в частности тяжести, то удобно следить за падением центра масс, а относительное движение рассматривать в системе центра масс.

Например, на дне маленькой запаянной пробирки, подвешенной над столом на нити, сидит муха, масса которой равна массе пробирки, а расстояние от дна до поверхности стола равно длине пробирки  $L$ . Нить пережигают, и за время падения муха перелетает со дна в самый верхний конец пробирки. Найдем время, по истечении которого нижний конец пробирки стукнется о стол (№ 4.25).

На рис. 4.23 начальное и конечное положение пробирки для удобства изображения смешены по горизонтали, центр масс пробирки обозначен  $\Pi$ , центр мухи —  $M$ , а центр масс системы (пробирка + муха) —  $C$ . Видно,

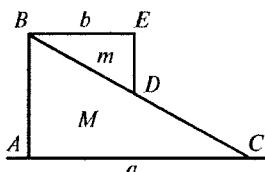


Рис. 4.22

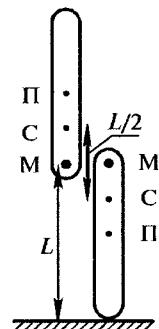


Рис. 4.23

что центр масс системы, движущийся в поле тяготения с ускорением  $g$ , проходит расстояние  $L/2$ . Таким образом,  $L/2 = gt^2/2$  и  $t = (L/g)^{1/2}$ . Здесь удобно подчеркнуть большую роль рисунка для быстрого решения задачи. Отметим, что действие мухи при перелете на пробирку передается через воздух. При решении предполагаем, что выравнивание давления внутри пробирки происходит со скоростью звука, которая значительно превышает скорость мухи.

### Рассмотрим столкновения.

При столкновении тел, происходящем при отсутствии внешних сил, всегда выполняется закон сохранения суммарного импульса. Для тел, имеющих массы  $m_1$  и  $m_2$  и скорости  $v_{01}$  и  $v_{02}$  до удара и  $v_1$  и  $v_2$  после удара, получаем

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (4.20)$$

Законом сохранения импульса при соударении можно воспользоваться и при действии внешних сил, если время соударения мало, т. е. за время соударения импульс внешних сил значительно меньше импульса сил, возникающих при взаимодействии.

**Упругим** называется соударение, при котором сохраняется кинетическая энергия системы. Для случая двух тел закон сохранения кинетической энергии имеет вид

$$m_1 (v_{01})^2 / 2 + m_2 (v_{02})^2 / 2 = m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2. \quad (4.21)$$

При центральном соударении (движение вдоль одной координаты) получаем

$$m_2 (v_2 - v_{02}) = m_1 (v_{01} - v_1);$$

$$m_2 (v_2^2 - v_{02}^2) = m_1 (v_{01}^2 - v_1^2).$$

Отсюда

$$(v_2 + v_{02}) = (v_{01} + v_1).$$

В случае, когда масса одного тела значительно превосходит массу другого, скорость первого остается постоянной, и его обычно называют **стенкой**.

Простейшая задача удара о стенку: какую скорость получит мяч, лежащий на дороге, если на него **наезжает** (упруго ударяет) автомобиль, движущийся со скоростью  $v$ . В системе отсчета, связанной с автомобилем, происходит удар о стенку, при котором скорость мяча меняет направление на противоположное. При переходе обратно в систему дороги получаем скорость в два раза большее скорости автомобиля.

Тело, ударяющее в подвижную стенку, может иметь начальную скорость.

При условии  $m_2 \gg m_1$  можно считать  $v_2 = v_{02}$  и в случае стенки, удаляющейся с постоянной скоростью  $v_{02} < v_{01}$ , имеем

$$v_1 = -v_{01} + 2v_{02}. \quad (4.22)$$

Изменение импульса  $\Delta p = -2m_1(v_{01} - v_{02})$ . Остановка ударяющего тела после удара, как следует из (4.22), будет при  $v_{01} = 2v_{02}$ .

Найдем изменение кинетической энергии при ударе (№ 4.70):

$$\Delta K = m_1(v_{01}^2 - v_1^2)/2 = 2m_1v_{02}(v_{01} - v_{02}).$$

Относительное изменение кинетической энергии

$$\Delta K/K = 4(v_{01} - v_{02})/v_{02} \approx 4v_{02}/v_{01}. \quad (4.23)$$

Рассмотрим движение тела между неподвижной стенкой и стенкой, удаляющейся от неподвижной со скоростью  $v_{02}$  (№ 4.72).

Обозначим расстояние между неподвижной и подвижной стенками в момент удара о подвижную стенку  $l$ , а полученную телом скорость  $v_{01}$ . Время до следующего удара о подвижную стенку  $T_1$ , находим из условия, что за это время подвижная стенка сдвинется на  $v_{02}T_1$ , т. е.  $T_1 = (2l + v_{02}T_1)/v_{01}$ . Откуда

$$T_1 = 2l/(v_{01} - v_{02}). \quad (4.24)$$

Аналогичным образом рассчитываем время до следующего удара, учитывая изменение скорости при ударе о подвижную стенку

$$T_2 = [2(l + v_{02}T_1) + v_{02}T_2]/(v_{01} - 2v_{02}).$$

Изменение времени

$$\Delta T = T_2 - T_1 = T_1 4v_{02}/(v_{01} - 3v_{02}) \approx T_1 4v_{02}/v_{01}.$$

Отсюда и из (4.23) получаем

$$dK/K + dT/T = 0.$$

Откуда следует

$$KT = \text{const.}$$

Подставляя выражение для кинетической энергии и время при медленном движении стенки, имеем (№ 4.72)

$$(mv^2/2)(2l/v) = mvl = \text{const.}$$

При постоянной массе

$$vl = \text{const.}$$

Эта величина постоянна при медленном смещении подвижной стенки и называется **адиабатическим инвариантом**.

Рассмотрим торможение тела массой  $M$ , движущегося со скоростью  $u_0$  (в начальный момент), пучком летящих навстречу со скоростью  $v$  частиц массой  $m$  ( $n$  частиц в единице объема). Плоская поверхность тела площадью  $S$  перпендикулярна скоростям (рис. 4.24). Найдем время остановки тела (№ 4.71).

При отсутствии внешних сил изменение импульса тела равно изменению импульса пучка:

$$Md\upsilon = vdtSm(-v - 2u - v) = -2(v + u)vdtSm.$$

Интегрируя с учетом начального условия, получаем

$$t = [M \ln(1 + u_0/v)] / (2vSm) \approx Mu_0 / (2mv^2 nS).$$

Определим долю энергии, теряемую частицей массой  $m_1$  при упругом столкновении ее с неподвижной частицей массой  $m_2$  (№ 4.86). После столкновения частица продолжает двигаться в прежнем (когда  $m_1 > m_2$ ) или прямо противоположном (когда  $m_1 < m_2$ ) направлении. Покажем, что доля теряемой энергии не зависит от того, какая частица движется, а какая покойится. Найдем, при каком соотношении масс  $m_1/m_2$  потеря энергии максимальна.

Для центрального удара и  $v_{01} = 0$  из (4.20) и (4.21) получаем

$$m_1(v_{01} - v_1) = m_2v_2; \quad m_1(v_{01}^2 - v_1^2) = m_2v_2^2.$$

Откуда  $v_2 = v_{01} + v_1$  и, следовательно,  $m_1(v_{01} - v_1) = m_2(v_{01} + v_1)$ . Поэтому

$$v_1/v_{01} = (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2).$$

Видно, что при  $m_2 > m_1$  первая частица летит назад ( $v_1 < 0$ ). Доля кинетической энергии, теряемая первой частицей, в результате соударения

$$\alpha = (v_{01}^2 - v_1^2) / (v_{01})^2 = 1 - (v_1/v_{01})^2 = \\ = 1 - \{(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)\}^2 = 4m_1m_2 / (m_1 + m_2)^2.$$

Отсюда видно, что при  $m_1 = m_2$  теряется вся энергия  $\alpha = 1$ .

Этот результат объясняет, почему в ядерных реакторах для замедления нейтронов используется рассеяние их на ядрах легких (действия, углерода), а не тяжелых атомов.

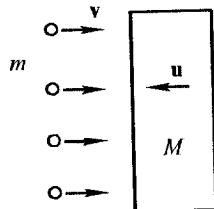


Рис. 4.24

Рассмотрим столкновение двух идеально упругих шаров с массами  $m_1$  и  $m_2$  движущихся вдоль одной и той же прямой со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Во время столкновения шарики начинают деформироваться, и часть кинетической энергии переходит в потенциальную (упругую) энергию деформации. Затем деформация уменьшается, и запасенная потенциальная энергия вновь переходит в кинетическую. Шары разлетаются. Найдем значение потенциальной энергии деформаций в момент, когда она максимальна (№ 4.73).

Условие в момент максимальной деформации — отсутствие относительного движения (скорости тел одинаковы). При этом из закона сохранения импульса (4.20) следует

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v.$$

Общая скорость  $v$  является скоростью центра масс. Потенциальная энергия определяется относительной скоростью

$$\begin{aligned} E_{\text{п}} &= m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2 - (m_1 + m_2) v^2 / 2 = \\ &= \{m_1 m_2 / (m_1 + m_2)\} (v_1 - v_2)^2 / 2. \end{aligned}$$

При упругом ударе одного тела с известной массой, двигавшегося в момент удара с известной скоростью, по другому неподвижному телу тоже с известной массой можно найти их скорости после удара, а затем, например, их движение с учетом трения о поверхность, по которой они скользят (№ 4.75).

Особый случай представляет **неупругое соударение**, при котором кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел обращается в нуль. В этом случае дополнительным соотношением, позволяющим решать задачи, является условие равенства скоростей после удара.

Рассмотрим **неупругое соударение** двух шаров с массами  $m_1$  и  $m_2$ , двигающихся навстречу друг другу, если кинетическая энергия одного, например, в 20 раз больше другого (№ 4.74).

Найдем, при каких условиях шары после удара будут двигаться в сторону движения шара, обладавшего меньшей энергией.

Предполагаем

$$m_2 v_2^2 / 2 = 20 m_1 v_1^2 / 2.$$

Из закона сохранения импульса и условия задачи

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_2 + m_1) v > 0.$$

Отсюда получаем  $m_1/m_2 > 20$ .

При соударении тел возможно, что только **часть** налетающего тела **прилипает** к другому. Обозначим долю прилипающей массы  $x$ , скорость налетающего тела  $v$ , скорость второго тела (такого же до соударения, но покончившегося) после удара и прилипания  $u$ . Из закона сохранения импульса имеем в случае, если часть первого тела отлетает обратно с той же по величине скоростью, какая у него была (№ 4.77):

$$v = (1 + x)u - (1 - x)v. \quad (4.25)$$

Предполагая, что в результате удара внутренняя энергия не уменьшается, для кинетической энергии имеем  $v^2 > (1 + x)u^2 + (1 - x)v^2$ . Из двух последних уравнений получаем  $x(v^2 - u^2) > u^2$  и  $x(v + u) = 2v - u$ . Разделив одно на другое, получаем  $u/v < 2/3$ . Для определения  $x$  подставляем полученный результат в (4.25). Учитывая, что прилипающая доля не может быть больше 1, получаем  $1 > x > 0,8$ .

Если известно, что после удара первое тело **остановилось** и задана доля кинетической энергии ( $y$ ), перешедшей в тепло (№ 4.78),

$$y = [v^2 - (1 + x)u^2]/v^2,$$

используя (4.25), можно найти  $x$ .

Рассмотрим неупругий удар по телу (брюску), скатывающемуся по **наклонной** плоскости под углом  $\alpha$  к горизонту. В тот момент, когда скорость бруска была  $v'$ , на него падает со скоростью  $v$  пластиковый шарик такой же массой, как брускок, и прилипает к нему (рис. 4.25). Определим время, через которое брускок с шариком остановится, если коэффициент трения равен  $k$ , а также при каком  $k$  это возможно (№ 4.59).

Условие неупругого соударения заключается в том, что после соударения тела движутся с одной и той же скоростью. Обозначим ее  $v_0$ . Эта скорость направлена вдоль наклонной плоскости, если предполагать, что и брускок деформируется неупругим образом и от наклонной поверхности не отскакивает. Изменение импульса системы тел вдоль нормали к наклонной плоскости происходит благодаря действию силы нормального давления со стороны наклонной плоскости:

$$mv \cos \alpha = \int_0^\tau N(t) dt,$$

где  $\tau$  — время соударения.

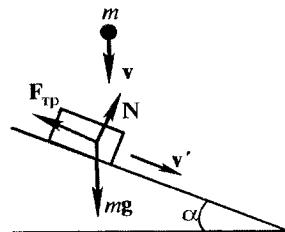


Рис. 4.25

Изменение импульса системы вдоль наклонной плоскости происходит из-за действия силы трения (за время удара):

$$2mv_0 - (mv' + mv \sin \alpha) = - \int_0^t F_{\text{тр}} dt = -k \int_0^t N dt.$$

Из этих соотношений  $v_0 = (v' + v \sin \alpha - kv \cos \alpha)/2$ . Эта формула имеет смысл только при  $v_0 > 0$  (в противном случае, система останавливается в процессе соударения,  $t < t$ ), т. е. при  $k \leq (v' + v \sin \alpha)/(v \cos \alpha)$ . Движение после соударения ( $t > t$ ) происходит с ускорением (как всегда для наклонной плоскости) и описывается дифференциальным уравнением (штрих означает дифференцирование по времени)  $x'' = g(\sin \alpha - k \cos \alpha)$ . Чтобы произошла остановка, должно быть  $x'' < 0$ , т. е.  $k > \tan \alpha$ . Таким образом,  $\tan \alpha < k < \tan \alpha + v'/(v \cos \alpha)$ . Время до остановки определяем из соотношения  $v_0 - x'' t_{\text{ост}} = 0$ :

$$t_{\text{ост}} = (v' + v \sin \alpha - kv \cos \alpha) / [2g(k \cos \alpha - \sin \alpha)].$$

Если брускок поконится на наклонной плоскости и коэффициент трения  $k = \tan \alpha$ , то компоненты импульса от вертикально падающего на него тела, аналогично компонентам силы тяжести бруска, при данном коэффициенте трения не вызывают движения (№ 4.58).

В общем случае при соударении может происходить **поглощение или выделение энергии**, и в этом случае для изменения кинетической энергии имеем

$$m_1 (v_{01})^2 / 2 + m_2 (v_{02})^2 / 2 = m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2 + Q. \quad (4.26)$$

Здесь положительное значение  $Q$  соответствует поглощению энергии (знак  $Q$  следует всегда проверять по смыслу, так как часто его считают положительным при выделении энергии).

При химических или ядерных реакциях выделяющаяся энергия является кинетической энергией частиц, образующихся при реакции. Если вещество до реакции практически поконилось, то полный импульс системы равен нулю. Для двух разлетающихся частиц, нейтрона  $n$  и  $\alpha$ -частицы (№ 4.105), равенство импульсов в нерелятивистском случае дает  $p = (2m_n E_n)^{1/2} = (2m_\alpha E_\alpha)^{1/2}$ . Получающееся отсюда отношение энергий подставляем в закон сохранения энергии  $E_n + E_\alpha = Q$  и тогда  $E_n = m_\alpha Q / (m_n + m_\alpha)$ ,  $E_\alpha = m_n Q / (m_\alpha + m_n)$ .

Если известны энергии двух одинаковых сталкивающихся частиц, движущихся навстречу друг другу (каждой  $E_0$ ), и массы образовавшихся частиц  $m_1$  и  $m_2$ , а также кинетическая энергия одной из двух разлетающихся после взаимодействия частиц  $E_1$  (№ 4.104), то из закона сохранения импульса можно определить кинетическую

энергию второй частицы  $E_2 = E_1 m_1 / m_2$ , а из закона сохранения энергии найти величину выделившейся энергии  $E = E_1 + E_2 - 2E_0$ .

При соударении одной частицы (массой  $m$ ) с другой (массой  $M$ ), ранее покинувшейся, основной вопрос: какая часть энергии частицы может пойти на внутренние превращения? Для превращения может быть использована только энергия относительного движения и не используется энергия движения центра масс всей системы в целом. Таким образом, максимальная энергия, которая может быть использована, например, для ионизации (№ 4.96), равна энергии, теряемой при неупругом соударении  $Q = p^2/(2m) - p^2/[2(m + M)]$ , где  $p = (2mE_0)^{1/2}$  — начальный импульс движущейся частицы, энергия которой  $E_0$ , которым будет обладать вся система после соударения. Поэтому  $Q = E_0 M / (m + M)$ , и если она меньше энергии, необходимой для ионизации, то ионизация не произойдет.

Налетающая частица массой  $m$ , движущаяся со скоростью  $v$ , может после соударения с неподвижным атомом массой  $M$  отскочить в прямо противоположном направлении, например, со скоростью  $v/2$ . Найдем увеличение внутренней энергии (возбуждения) атома  $E$  и его скорость  $u$  (№ 4.94). Сохранение импульса  $mv = -mv/2 + Mu$ . Сохранение энергии  $mv^2/2 = m(v/2)^2/2 + Mu^2/2 + E$ . Отсюда  $E = (3/8)mv^2(1 - 3m/M)$ . И следовательно, такой процесс возбуждения возможен только при  $M > 3m$ .

Энергия может тратиться на разогрев соударяющихся тел. Например, чтобы два одинаковых метеорита полностью испарились (удельная теплота нагревания и испарения  $Q$ ), их относительная скорость должна превысить  $v$ , которое определяется из баланса (сохранения) энергии  $2mQ = 2m(v/2)^2/2$  (№ 4.109). Здесь удобно было написать в системе центра масс.

Другой пример — пробивание пулей массой  $m$ , имеющей скорость  $v_0$ , последовательно стенки сферической оболочки массой  $M$  по диаметру. Если известно выделившееся тепло  $Q$ , то можно найти скорости пули  $v$  и оболочки  $u$  после вылета пули наружу (№ 4.113). Законы сохранения импульса и энергии дают:

$$mv_0 = mv + Mu; \quad mv_0^2/2 = mv^2/2 + Mu^2/2 + Q.$$

Может быть задана работа вместо тепла, в которое она переходит (№ 4.114).

Если известна скорость пули до и после вылета из оболочки (или шара), то можно найти скорость оболочки и затем ее движение, в том числе и с учетом заданной силы сопротивления (по второму закону Ньютона) (№ 4.76).

Чтобы произошла реакция, энергия налетающей частицы должна превысить некоторую величину, называемую **порогом**, или **пороговой энергией**.

Пороговая энергия представляет сумму энергии реакции  $Q$  и энергии движения центра масс, которая не может быть использована (как уже говорилось выше) для реакции. В случае бомбардировки протонами неподвижного лития в ядерной реакции  $\text{Li}^7 + p \rightarrow \text{Be}^{7+} n$  (№ 4.98), обозначая импульс протона  $p$ , получаем

$$E_{\text{пор}} = p^2/(2m_p) = p^2/(2(m_p + m_{\text{Li}})) + Q.$$

Отсюда, исключая  $p$ , имеем

$$E_{\text{пор}} = Q(m_p + m_{\text{Li}})/m_{\text{Li}}.$$

Закон сохранения энергии для продуктов реакции имеет вид:

$$E_p = p^2/(2m_p) = p_n^2/(2m_n) + p_{\text{Be}}^2/(2m_{\text{Be}}) + Q.$$

В случае, если нейtron летит назад, закон сохранения импульса:

$$p = p_{\text{Be}} - p_n.$$

Минимальная энергия протона будет при  $p_{\text{Be}} = p(p_n = 0)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} E_p &= p_{\text{Be}}^2/(2m_{\text{Be}}) + Q = p^2/(2m_{\text{Be}}) + m_{\text{Li}}E_{\text{пор}}/(m_p + m_{\text{Li}}) = \\ &= E_p m_p/m_{\text{Be}} + m_{\text{Li}}E_{\text{пор}}/(m_p + m_{\text{Li}}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$E_p = [(m_{\text{Be}}/(m_{\text{Be}} - m_n)]m_{\text{Li}}E_{\text{пор}}/(m_p + m_{\text{Li}}).$$

При большей энергии нейтроны летят назад. Естественно, что эта энергия больше пороговой, так как при пороговой энергии нет относительного движения частиц, т. е. скорости  $n$  и  $\text{Be}$  одинаковы:  $p_{\text{Be}}/m_{\text{Be}} = p_n/m_n$  и, следовательно, так как  $p = p_{\text{Be}} + p_n$ , получаем (при пороговой энергии)

$$p_n = pm_n/(m_{\text{Be}} + m_n), \quad p_{\text{Be}} = pm_{\text{Be}}/(m_{\text{Be}} + m_n).$$

Следует отметить, что из-за неподвижности одной из соударяющихся частиц большая доля кинетической энергии не может быть использована для реакции между частицами. Это устраняется при использовании так называемых **встречных пучков**, когда оказывается неподвижным центр масс пучков. Недостатки метода встречных пучков: уменьшение выхода реакции (так как плотность пучка зна-

чительно меньше плотности мишени) и неопределенность точки столкновения в пространстве.

Во всех соотношениях, куда входит кинетическая энергия, ее можно выразить через импульсы частиц

$$mv^2/2 = p^2/(2m).$$

Для системы отсчета, связанной с центром масс тел, суммарный импульс частиц равен нулю (и до и после соударения). Поэтому если для первой частицы массой  $m_1$  до соударения импульс  $p$ , после  $p^*$ , то для второй частицы массой  $m_2$  до соударения —  $(-p)$  после —  $(-p^*)$ . Но так как для упругого соударения

$$p^2/(2m_1) + p^2/(2m_2) = p^{*2}/(2m_1) + p^{*2}/(2m_2),$$

то получаем

$$p = p^*, \quad (4.27)$$

т. е. в системе центра масс при соударении происходит лишь поворот импульсов частиц. Угол поворота не определяется законами сохранения, а зависит от конкретного характера взаимодействия частиц и их взаимного расположения.

Определим, на какой максимальный угол  $\theta$  может произойти рассеяние (отклонение) одной частицы на другой (№ 4.93).

Полезно провести анализ и решение, используя систему координат, связанную с центром масс соударяющихся частиц.

Вектор скорости в системе центра масс (у каждой из частиц различный, так как различны массы) в результате соударения не меняется по величине, а лишь поворачивается на какой-то угол.

Скорость центра масс системы (движется  $m_1$ , покоятся  $m_2$ )

$$v_c = m_1 v_1 / (m_1 + m_2).$$

Здесь скорость первой частицы до удара  $v_1 = v_c + v_{1c}$  (все эти векторы лежат вдоль одной прямой,  $v_{1c}$  — скорость первой частицы до удара в системе центра масс). Скорость первой частицы после удара  $v_{1*} = v_c + v_{1c*}$  ( $v_{1c*}$  — скорости  $m_1$  после удара в системе центра масс). Сравнивая выражение для  $v_c$  с  $v_{1c} = v_1 - v_c = m_2 v_1 / (m_1 + m_2)$ , видим, что возможны два случая. Первый ( $v_c > v_{1c}$ ) изображен на рис. 4.26 (при  $m_1 > m_2$ ). Второй ( $v_c < v_{1c}$ ) — на рис. 4.27 (при  $m_1 < m_2$ ).

Во втором случае рассеяние может произойти на любой угол, а в первом, как видно из рис. 4.26,  $\sin \theta_{\max} = v_{1c} / v_c = m_2 / m_1$ .

Отметим, что при одинаковых массах имеем  $v_c = v_{1c}$ , и их сумма (начальная скорость первой частицы в лабораторной системе коорди-

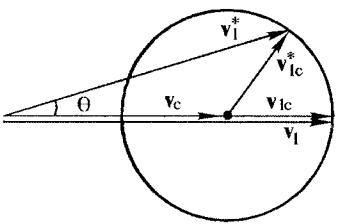


Рис. 4.26

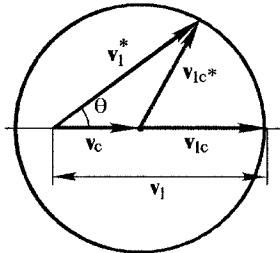


Рис. 4.27

нат) является диаметром окружности, на которой лежит конец вектора  $v_{l*}$ , причем вектор разности  $v_l$  и  $v_{l*}$ , который представляет скорость второй (ранее неподвижной) частицы, будет всегда перпендикулярен  $v_{l*}$ , т. е. частицы одинаковой массы в системе координат, в которой до удара одна из частиц покоялась, **разлетаются под прямым углом** (№ 4.82). Этот результат можно получить и непосредственно из законов сохранения. В случае центрального удара налетающая частица останавливается, а поконившаяся приобретает скорость налетающей частицы.

Угол отклонения налетающей частицы в лабораторной системе отсчета ( $\theta$ ) является вписанным в окружность, а угол отклонения в системе центра масс — центральным, т. е. в два раза большим (№ 4.91).

Рассмотрим соударение двух частиц, массы которых равны  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ), движущихся навстречу друг другу вдоль одной прямой с одинаковыми скоростями. Определим отношение  $m_1/m_2$ , если после упругого столкновения тяжелая частица отклоняется от направления своего первоначального движения на угол  $\alpha$  в лабораторной системе отсчета или на угол  $\beta$  в системе центра масс (№ 4.90).

На рис. 4.28  $v_l$  — скорость тяжелой частицы в лабораторной системе отсчета после столкновения (до столкновения  $v_0$ ) и  $v_{0\text{ц}}$  и  $v_{l\text{ц}}$  — скорости тяжелой частицы в системе центра масс до и после столкновения. В системе центра масс импульс частицы при столкновении не меняется по абсолютной величине, а меняется только по направлению. Поэтому  $|v_{0\text{ц}}| = |v_{l\text{ц}}|$ . Для скорости центра масс получаем

$$v_{\text{ц}} = (m_1 - m_2)v_0/(m_1 + m_2).$$

Скорость тяжелой частицы в системе центра масс

$$v_{0\text{ц}} = v_0 - (m_1 - m_2)v_0/(m_1 + m_2) = 2m_2v_0/(m_1 + m_2).$$

Теперь можно воспользоваться связью между проекциями скорости после столкновения для тяжелой частицы в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс. По вертикали они одинаковы

$$v_l \sin \alpha = v_{l\text{ц}} \sin \beta = 2m_2v_0 \sin \beta/(m_1 + m_2).$$

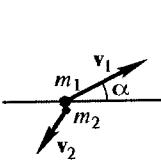


Рис. 4.28

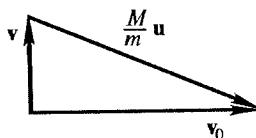
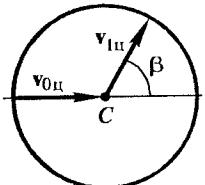


Рис. 4.29

По горизонтали скорости отличаются на величину скорости центра масс

$$\begin{aligned} v_1 \cos \alpha &= v_{0\parallel} \cos \beta + v_u = \\ &= 2m_2 v_0 \cos \beta / (m_1 + m_2) + (m_1 - m_2) v_0 / (m_1 + m_2). \end{aligned}$$

Разделив второе на первое, получаем

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta + (m_1 - m_2) / (2m_2 \sin \beta).$$

Откуда  $m_2/m_1 = 3$ .

Если известно, что налетающая частица отклоняется на  $90^\circ$  (№ 4.87), то для определения соотношения между массами частиц можно пользоваться методами, изложенными выше, а можно воспользоваться законами сохранения (4.20) и (4.21).

Обозначим массу налетающей частицы  $m$ , ее начальную скорость  $v_0$ , скорость после соударения  $v$ , а массу покойвшейся частицы  $M$  и ее скорость после соударения  $u$ . Из закона сохранения импульса (рис. 4.29)  $v_0 = v + (M/m)u$ . Из закона сохранения энергии (упругое столкновение)  $v_0^2 = v^2 + (M/m)u^2$ .

При рассеянии на  $90^\circ$  выполняется  $v_0^2 = v^2 + (M/m)u^2$ . Поэтому  $2v_0^2 = v^2 M (M + m) / m^2$ ,  $2v^2 = v^2 M (M - m) / m^2$ . Условие на массы, следующее из необходимости положительности  $v^2$ , имеет вид  $M > m$ . Из рис. 4.29 отклонение частицы массой  $M$  определяется из  $\operatorname{tg} \theta = v/v_0$ .

При упругом соударении гладких шаров сила взаимодействия направлена по радиусу. Если задано направление линии (угол  $\theta$ ), соединяющей центры шаров в момент удара, по отношению к направлению скорости  $v$  одного шара массой  $m$ , налетающего на другой неподвижный массой  $M$ , то таким образом задано движение второго шара (№ 4.81). Удобно сохранение импульса записать в направлении линии, соединяющей центры, и в перпендикулярном направлении:

$$Mv_2 + mv_{\parallel} = mv \cos \theta, \quad mv_{\perp} = mv \sin \theta.$$

Здесь  $v_2$  — скорость, приобретенная неподвижным шаром,  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  — скорости первого шара после соударения. Из закона сохранения кинетической энергии при упругом ударе

$$Mv_2^2/2 + mv_{\parallel}^2/2 + mv_{\perp}^2/2 = mv^2/2.$$

Отсюда находим скорости.

Рассмотрим рассеяние частицы (массой  $m_1$ ) при **неупругом соударении** с неподвижной частицей (атомом) массой  $m_2$ , когда теряется энергия  $Q$  на возбуждение (внутреннюю энергию) неподвижной частицы (№ 4.108).

В системе центра масс импульс системы равен нулю до и после соударения. Обозначим величину импульса каждой частицы до соударения  $p$ , а после соударения  $p^*$ . Связь между ними следует из баланса энергии:

$$p^2/(2m_1) + p^2/(2m_2) = p^{*2}/(2m_1) + p^{*2}/(2m_2) + Q.$$

Таким образом, при неупругом соударении в отличие от (4.27) получаем

$$p^{*2} = p^2 - 2m_1m_2Q/(m_1 + m_2). \quad (4.28)$$

На рис. 4.30 показаны скорости налетающей частицы:  $v$  — до соударения;  $v_*$  — после соударения (рассеяния на максимальный угол);  $v_{\text{ц}}$  — в системе центра масс до соударения;  $v_{\text{ц}}^*$  — в системе центра масс после соударения;  $v_{\text{цм}}$  — скорость центра масс. Может быть задана начальная скорость налетающей частицы, либо кинетическая энергия  $K = m_1v^2/2$ . Из (4.28) получаем

$$v_{\text{ц}}^* = v_{\text{ц}}[1 - (m_1 + m_2)Q/(m_2K)]^{1/2}.$$

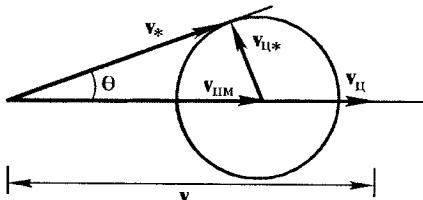


Рис. 4.30

Для скорости центра масс имеем

$$v_{\text{цм}} = m_1v/(m_1 + m_2).$$

Как следует из рис. 4.30, синус максимального угла рассеяния  $\sin \theta = v_{\text{ц}}^*/v_{\text{цм}}$ .

## 5. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Общий вид уравнения колебаний некоторой системы или тела:

$$mx'' = -kx - F_c + F_n + F. \quad (5.1)$$

Для механики — это второй закон Ньютона, где  $x$  — это смещение тела массой  $m$ , а штрихи обозначают вторую производную по времени. В механике  $x$  могло бы обозначать и угол отклонения маятника, а  $m$  момент инерции. В электричестве  $x$  — электрический заряд, или ток, а  $m$  — индуктивность. С колебаниями встречаемся в различных явлениях, в том числе и в экономике, и в общественной жизни, но примеры таковых ввиду их не наглядности обсуждать не имеет смысла. Главное отличие и то, что объединяет все колебания, — это первый член в правой части уравнения. Без этого никакие колебания не возникают. Чтобы возникли колебания, должно быть воздействие, **возвращающее систему к равновесию**. В механике — это возвращающая сила (натяжение пружины) или момент сил (например, тяжести). Если  $k$  — постоянная величина (например, жесткость пружины), то колебания линейные, если  $k$  зависит от  $x$  — нелинейные колебания. Потери энергии колебаний связаны с  $F_c$  — силой сопротивления, которая в простейших случаях может быть постоянной или пропорциональной первой производной по времени от  $x$  (т. е. скорости):  $F_c = bx'$ . Влияние внешних полей учитывается членом  $F_n$ . Силы, вынуждающие колебания и зависящие от времени, в частности периодическим образом, обозначены  $F$ . Отметим, что для вынужденных и релаксационных колебаний устойчивое положение равновесия не требуется, т. е. в них самих заложена возвращающая сила, и первый член в правой части (5.1) не нужен.

В случае, когда действует только возвращающая сила и  $k$  и  $m$  — постоянные величины, получаем уравнение, описывающее **свободные гармонические колебания системы, — гармонического осциллятора**:

$$x'' + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.2)$$

Здесь  $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$  — частота собственных колебаний осциллятора. Решение этого уравнения можно записать двумя способами:

$$x = a \sin(\omega_0 t + \varphi) \text{ или } x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t. \quad (5.3)$$

Две постоянные, входящие в эти выражения, определяются из дополнительных условий (например, начальных). Величину  $a$  называют амплитудой колебаний,  $(\omega_0 t + \varphi)$  — фазой, а  $\varphi$  — начальной фазой.

Интегрируя (5.2), получаем закон сохранения энергии. В случае собственных гармонических колебаниях осциллятора из (5.2) и (5.3) получаем

$$m(x')^2/2 + kx^2/2 = E = ka^2/2 = m\omega_0^2 a^2/2. \quad (5.4)$$

Если энергия сохраняется для сложной колебательной системы, то можно воспользоваться этим для определения периода колебаний. В общем случае для системы с одной степенью свободы сумма кинетических энергий частей системы выражается через скорость какой-то одной части, а сумма потенциальных энергий через перемещение этой же части:

$$A(x')^2 + Bx^2 = E. \quad (5.5)$$

### Частота колебаний

$$\omega = (B/A)^{1/2}. \quad (5.6)$$

Следует отметить, что свободные (собственные) колебания в поле постоянных сил (например, груз на пружине в поле тяжести) могут быть сведены к колебаниям относительно положения равновесия в этом поле. В уравнение сохранения энергии (5.4) войдет потенциальная энергия поля (если поле потенциально, например поле тяжести).

**Нелинейные колебания**, о которых следует упомянуть, это, например, колебания маятника. Уравнение этих колебаний получим из (5.1), где вместо  $kx$  берем  $k \sin x$ , а  $x$  является углом отклонения маятника от вертикали  $\varphi$ . При малых углах отклонения приходим к (5.2). Нелинейность приводит к увеличению периода колебаний, которая зависит от амплитуды (максимального угла отклонения  $\varphi_m$ ) в первом приближении следующим образом:

$$T/T_0 \approx 1 + \varphi_m^2/16. \quad (5.7)$$

Здесь  $T_0$  — период малых колебаний, когда нелинейностью можно пренебречь.

При учете сил сопротивления получаем уравнение затухающих колебаний системы:

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.8)$$

Здесь введено обозначение  $2\beta = b/m$ .

Решение уравнения имеет вид

$$x = ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (5.9)$$

Здесь

$$\omega = (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}. \quad (5.10)$$

Видно, что уменьшение отклонения со временем определяется коэффициентом затухания  $\beta$ , а периодической является не вся картина колебаний, а лишь прохождения нуля в одном направлении через время  $T = 2\pi/\omega$ . Декрементом затухания называется отношение максимального отклонения (когда синус равен единице)  $a_n$  к предыдущему (в ту же сторону)  $a_{n-1}$ , т. е.  $a_n/a_{n-1} = e^{\beta T}$ , а логарифмическим декрементом, обозначаемым  $\delta$ , — натуральный логарифм этого отношения

$$\delta = \beta T. \quad (5.11)$$

Используя связь амплитуды и энергии (5.4), можно получить для уменьшения энергии колебаний  $\Delta E$  за  $T$  («период»):

$$\Delta E/E = 2\beta T = 2\delta. \quad (5.12)$$

Для характеристики колебательной системы используется добродотность  $Q$ , которая определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi E/(\Delta E) = \pi/\delta = \pi/(\beta T) = \omega_0/(2\beta) = \\ &= m\omega_0/b = (km)^{1/2}/b = k/(b\omega_0) = \pi n. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Здесь  $n$  — число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Внешнее воздействие на колебательную систему (последний член в правой части уравнения (5.1)) может быть некоторым единичным толчком либо периодическим. Последнее всегда может быть представлено в виде ряда Фурье. Поэтому важно рассмотреть гармоническую внешнюю силу  $F = F_0 \sin \omega t$ . При наличии затухания устанавливающиеся колебания системы будут только на частоте, с которой подводится внешняя энергия. Уравнение вынужденных колебаний

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = f \sin \omega t. \quad (5.14)$$

Здесь  $f = F_0/m$ .

Решение имеет вид

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (5.15)$$

Здесь амплитуда и фаза:

$$A = f \sqrt{\left( (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right)}^{1/2}; \quad (5.16)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -2\beta\omega / (\omega_0^2 - \omega^2). \quad (5.17)$$

На рис. 5.1 приведены графики этих зависимостей. Максимальная амплитуда смещения (**резонанс**) получается при

$$\omega_m = (\omega_0^2 - 2\beta^2)^{1/2} \text{ и равно } A_m = f \sqrt{2\beta(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (5.18)$$

При слабом затухании ( $\omega_0^2 \gg 2\beta^2$ ) резонанс смещения происходит приблизительно при частоте собственных (свободных) колебаний и отношение максимальной амплитуды к амплитуде при нулевой частоте равно добротности. Ширина амплитудного пика по частоте  $2\Delta\omega$  на уровне  $A = A_m/(2)^{1/2}$  связана с добротностью:

$$2\Delta\omega/\omega_0 = 1/Q. \quad (5.19)$$

В заключение необходимо сказать об использовании при анализе колебаний **комплексных функций**. Комплексные числа вводятся как точки на комплексной плоскости, определяемые координатами вдоль действительной оси  $x$  и мнимой оси  $y$ . Длина радиуса-вектора

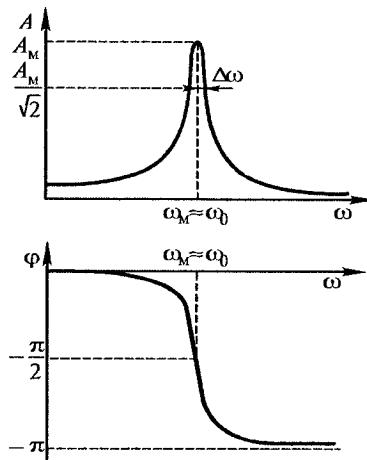


Рис. 5.1

из начала координат в точку  $z$ , соответствующую комплексному числу, равна  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ , и угол наклона этого вектора к оси  $x$  обозначен  $\varphi$ . Для комплексного числа можно написать  $z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ . Здесь  $i = \sqrt{-1}$ . Дифференцируя  $z$  по  $\varphi$ , получаем

$$dz/d\varphi = \rho(-\sin\varphi + i\cos\varphi) = iz. \quad (5.20)$$

Откуда  $dz/z = id\varphi$  и **показательная форма** записи комплексного числа

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}. \quad (5.21)$$

Отсюда можно получить выражение гармонических функций (косинуса и синуса) через действительную и мнимую части комплексного числа в показательной форме. Многие задачи о колебаниях удобнее и проще решать в комплексном виде. При этом **комплексная амплитуда** содержит и амплитуду, и фазу действительных колебаний. Например, для

$$\chi(t) = ae^{i(\omega t + \varphi)} = ae^{i\varphi}e^{i\omega t} = \hat{a}e^{i\omega t}. \quad (5.22)$$

Здесь  $\hat{a}$  — комплексная амплитуда.

**Тело**, лежащее на доске, совершающей горизонтальные колебания с периодом  $T$ , в зависимости от коэффициента трения при определенной амплитуде колебаний начинает скользить по доске. Ускорение доски (вторая производная по времени от перемещения) из (5.3) равно  $a\omega^2$ . Чтобы тело двигалось вместе с доской, сила трения должна равняться или превосходить  $ma\omega^2$ . Максимальная сила трения будет при начале проскальзывания и равна  $kmg$ . Откуда для коэффициента трения получаем  $k = 4\pi^2a/(gT^2)$  (№ 5.9).

Линейный рост возвращающей силы в зависимости от смещения, который приводит к уравнению для гармонического осциллятора, может обеспечиваться не только пружиной, но также и некоторыми другими устройствами.

Например, на двух горизонтальных параллельных круговых цилиндрах, вращающихся с одинаковой угловой скоростью в разные стороны, лежит горизонтально перпендикулярно к осям цилиндров доска массой  $m$  (рис. 5.2). Определим период гармонических колебаний доски, если расстояние между осями цилиндров равно  $2L$ , а коэффициент трения между доской и цилиндрами равен  $k$  (№ 5.26).

Возвращающая сила создается силой трения, которая увеличивается при увеличении нормального давления на вращающийся цилиндр со стороны доски. Если  $x$  — смещение центра масс доски от

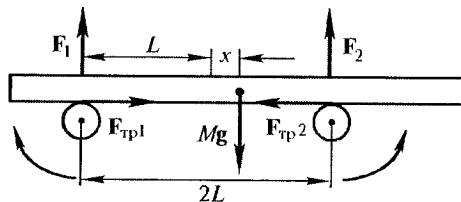


Рис. 5.2

положения равновесия (точки, находящейся посередине между точками опоры доски на цилиндры), то из условия равенства нулю суммарного момента, действующего на доску (следует из отсутствия вращения доски), получаем  $(F_2 - F_1)L = mgx$ . Движение доски описывается уравнением  $mx'' = -k(F_2 - F_1) = -kmgx/L$ . Отсюда период колебания  $T = 2\pi[L/(kg)]^{1/2}$ .

Тело с помощью пружины может быть прикреплено к другому телу. На гладкой горизонтальной поверхности удобно рассматривать колебания относительно центра масс.

Для примера рассмотрим два шарика с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных спиральной пружинкой с коэффициентом упругости  $k$  (рис. 5.3). Определим период колебаний шариков относительно центра масс системы, которые возникнут при растяжении пружинки (№ 5.44).

Удобно движение шариков рассмотреть относительно их общего центра масс. Расстояния шариков от центра масс при нерастянутой пружинке обозначим  $x_{10}$  и  $x_{20}$ . Эти расстояния соответствуют равновесию системы. Смещения шариков от положения равновесия  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$  обратно пропорциональны их массам  $\Delta x_1/\Delta x_2 = m_2/m_1$  (см. рис. 5.3). Сила, действующая со стороны пружинки на каждый шарик, одна и та же и равна коэффициенту упругости (жесткости) пружинки, умноженному на сумму смещений шариков (изменению длины пружины). Запишем второй закон Ньютона для одного из шариков (второго)  $m_2(\Delta x_2)'' = -k(\Delta x_1 + \Delta x_2)$ . Используя связь между смещениями, получаем

$$(\Delta x_2)'' + k\Delta x_2(m_1 + m_2)/(m_1 m_2) = 0.$$

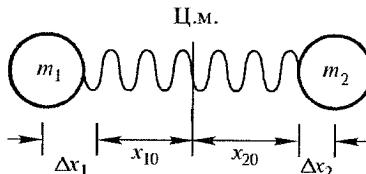


Рис. 5.3

Это уравнение гармонического осциллятора с периодом колебаний  $T = 2\pi\{m_1 m_2 / [k(m_1 + m_2)]\}^{1/2}$ .

Очевидно, что и первый шарик и вся система имеют тот же период колебаний. С таким же периодом будет колебаться один шарик на такой пружинке, если его масса, называемая приведенной, равна  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ .

Отметим, что у пружинки имеется неподвижная точка, и она совпадает с центром масс системы. Докажем это. Обозначим расстояния от неподвижной точки до первого шарика  $x_1$  и до второго  $x_2$ . Используя смещения концов пружинки и связь их с массами, можно написать  $x_1/x_2 = \Delta x_1/\Delta x_2 = m_2/m_1$ . Отсюда следует, что неподвижная точка является центром масс системы. Кусок пружинки  $x_2$  (от неподвижной точки до второй массы) обладает жесткостью  $k_2 = k(x_1 + x_2)/x_2 = k(x_1/x_2 + 1) = k(m_2/m_1 + 1) = k(m_1 + m_2)/m_1$ . Отсюда для периода колебаний второго шарика относительно неподвижной точки следует величина, полученная выше.

Отметим, что колебания каждого шарика происходят так, как будто он прикреплен к точке в центре масс системы на соответствующей части пружинки. Коэффициент упругости части пружинки равен коэффициенту упругости всей пружинки, деленному на долю, которую составляет эта часть от всей длины пружинки.

Можно было бы использовать произвольную систему координаты, в которой грузы находились бы на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 5.4). Тогда уравнения движения грузов:

$$mx_1'' = k(x_2 - x_1 - L_0); \quad mx_2'' = -k(x_2 - x_1 - L_0),$$

где  $L_0$  — длина недеформированной пружины. Умножая первое на  $m_2$ , а второе — на  $m_1$  и вычитая первое уравнение из второго, для расстояния между грузами  $y = x_2 - x_1 - L_0$  получаем уравнение  $y'' + k(m_1 + m_2)y/(m_1 m_2) = 0$ , которое соответствует колебанию на этой пружине приведенной массы:

$$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2). \quad (5.23)$$

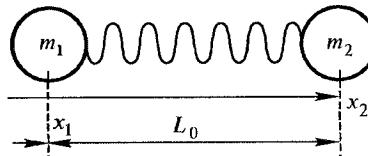


Рис. 5.4

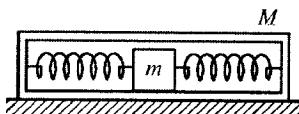


Рис. 5.5

Аналогичным образом можно рассмотреть два тела, связанных одинаковыми пружинами, когда **одно** помещено внутри **другого**, которое представляет собой коробку (№ 5.17), а трение между телом и коробкой отсутствует (рис. 5.5). Если коробку удерживать, то колебания внутреннего тела описываются уравнением  $mx'' = -2kx$ . Где  $x$  — отклонение тела от положения равновесия (посередине коробки). Частота колебаний  $\omega_0 = (2k/m)^{1/2}$ . Если коробка находится на гладкой горизонтальной поверхности, то центр масс коробки будет смещаться от положения равновесия (на  $x_M$ ), которое является также центром масс системы. Отклонение внутреннего тела от центра масс системы обозначим  $x_m$ . Из закона сохранения импульса (неподвижности центра масс системы)  $mx_m = Mx_M$ . Уравнение движения тела в этом случае имеет вид:

$$mx''_m = -2k(x_m - x_M) = -2kx_m(1 + m/M).$$

Откуда частота колебаний

$$\omega = [(2k/m)(1 + m/M)]^{1/2}. \quad (5.24)$$

Если полную деформацию пружины обозначить  $A = x_m + x_M$ , то

$$x_m = A/(1 + m/M). \quad (5.25)$$

Если внутреннее тело прикреплено пружинами разной жесткости  $k_1$  и  $k_2$  (№ 5.15), то  $2k$  надо заменить суммой  $k_1 + k_2$ .

Тело внутри коробки можно подвесить на жестком невесомом стержне (рис. 5.6). Такая задача (№ 5.18) аналогична рассмотренной выше. Возвращающей силой является горизонтальная компонента силы натяжения стержня, которая увеличивается пропорционально

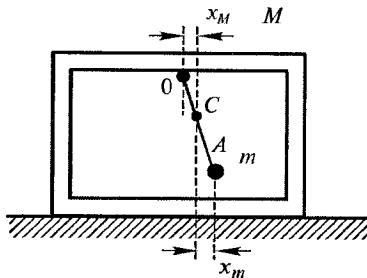


Рис. 5.6

отклонению стержня от вертикали. Точка пересечения стержня с вертикалью через центр масс системы *C* остается неподвижной при колебаниях. Колебания тела происходят как бы на более коротком стержне *CA*.

**Маятниковые часы на гладком столе**, когда их корпус может смещаться (№ 5.59), будут иметь меньший период, чем при их закреплении на столе, т. е. уходить вперед. Отношение периодов  $T/T_0 = (CA/OA)^{1/2}$ . Необходимый коэффициент трения о стол, так же как и в случае груза на пружинах внутри коробки (№ 5.13), определяется аналогично колебаниям груза на доске (№ 5.9). В случае коробки ее ускорение определяется максимальной силой, максимальным растяжением пружин (амплитудой), умноженным на сумму жесткостей:  $a(k_1 + k_2)$ . Если максимальная сила трения  $\mu(M+m)g$  меньше силы, необходимой для ускоренного движения с амплитудой  $a$ , то возникает проскальзывание (№ 5.13).

**Воздействие на колеблющееся тело** приводит к изменению параметров колебаний. Например, на брускок массой  $M$ , совершающий колебания на гладком столе под действием двух пружин с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$ , прикрепленных к двум боковым опорам (№ 5.16), в момент прохождения бруском положения равновесия падает и прилипает к нему кусок пластилина массой  $m$ . Из закона сохранения импульса при соударении

$$Mv_0 = (M+m)v.$$

Амплитуда колебаний определяется кинетической энергией в положении равновесия. Поэтому отношение амплитуд

$$a/a_0 = [(M+m)v^2/(Mv_0^2)]^{1/2} = [M/(M+m)]^{1/2}.$$

Период колебаний меняется из-за того, что меняется масса при неизменной жесткости:

$$T/T_0 = [(M+m)/M]^{1/2}.$$

Если математический маятник поднести к движущейся стенке, то в результате **удара** стенки по нему он отклоняется на некоторый угол, т. е. поднимается на высоту  $H$ . Роль стенки может сыграть колеблющаяся ножка камертонов (рис. 5.7). Определим амплитуду колебания  $A$  ножки камертонов (№ 5.20) при частоте колебаний ножки  $v$ . Масса шарика много меньше массы камертонов. Камертон — источник звука в

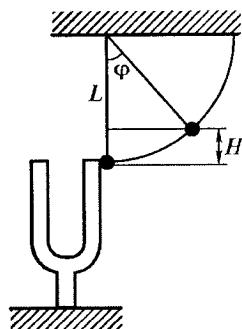


Рис. 5.7

виде *U*-образного металлического стержня, закрепленного так, что его концы могут свободно колебаться. Это эталон частоты (высоты звука).

Движение ножки камертона можно описать зависимостью:  $x = A \sin \omega t$ . Отсюда для ее скорости получаем:  $v = dx/dt = A\omega \cos \omega t$ ,  $v_{\max} = A\omega$ .

В результате удара ножки камертона по неподвижному маятнику в виде легкого шарика начальная скорость шарика  $v_0 = 2A\omega$  (в системе координат, связанной с ножкой камертона, происходит упругое отражение шарика, как в задаче о мяче, на который наезжает автомобиль). Из закона сохранения энергии  $mv_0^2/2 = mgH$  получаем  $v_0 = (2gH)^{1/2}$  и  $A = v_0/(2\omega) = (2gH)^{1/2}/(4\pi\nu)$ .

После опускания шарика произойдет повторный удар о камертон. Если в момент соударения ножка будет неподвижна, то шарик поднимется на ту же высоту. Максимальный подъем шарика (№ 5.21) произойдет при максимальной встречной скорости ножки камертона. В этом случае начальная скорость шарика

$$v_0 = (2gH)^{1/2} + 2v_{\max} = (2gH)^{1/2} + 4\pi\nu A$$

и, следовательно,  $H_{\max} = V_0^2/(2g)$ .

Рассмотрим соударение шарика с колебательной системой. Шарик массой  $m$  налетает со скоростью  $v_0$  на шарик массой  $m_1$ , который скреплен пружиной жесткостью  $k$  с шариком массой  $m_2$ . Определим скорость движения центра масс и амплитуду колебаний шариков, скрепленных пружиной, при условии  $m < m_1$ . Удар абсолютно упругий, за время удара пружина не деформируется, центры шаров находятся на одной прямой, их радиусы одинаковы (№ 5.55, № 5.50).

За время удара пружина не успеет сжаться, так как первый шарик приобретает после удара скорость, но не успевает сдвинуться. Второй шарик на удар не влияет. Из условий сохранения импульса и энергии при ударе получаем: начальная скорость первого шара

$$v_1 = 2mv_0/(m + m_1),$$

скорость налетавшего шара после удара

$$V'_0 = V_0(m - m_1)/(m + m_1)$$

(при  $m < m_1$  она направлена противоположно начальной). Следует отметить, что при  $m > m_1$  могло бы произойти второе соударение, так как скорость первого шара из-за действия пружины уменьшается. Удар задает начальное условие для последующих колебаний и

движения. По импульсу, приобретенному первым шаром, определяем скорость центра масс  $v_c = 2m_1v_0/[(m + m_1)(m_1 + m_2)]$ .

Амплитуда колебаний проще всего определяется из условия сохранения энергии

$$kA^2/2 = m_1v_1^2/2 - (m_1 + m_2)v_c^2/2.$$

Здесь под амплитудой подразумевается деформация пружины.

Второй член — энергия движения центра масс, которая не может перейти во внутреннее движение — колебания (внутренняя энергия).

Чтобы представить относительное движение масс, удобно перейти в систему отсчета, связанную с центром масс шариков, скрепленных пружиной. На рис. 5.8 качественно показано в этой системе движение первого шарика в виде синусоиды и налетающего шарика в виде линии  $OD$ . Линия  $OB$  соответствует начальной скорости первого шарика. При заданных массах и жесткости пружины (периода колебаний и амплитудах) можно определить, произойдет ли повторный удар (пересечение линии  $OD$  с синусоидой). Как следует из (5.25), смещение первого шарика  $A_1 = x_m = A/(1 + m_1/m_2)$ . Эта величина показана на рис. 5.8.

Интересно рассмотреть отражение от неподвижной стенки колебательной системы из двух шариков равной массы, соединенных невесомой пружиной жесткостью  $k$ , двигавшейся перпендикулярно к стенке со скоростью  $v$  без колебаний. При упругом ударе передний шарик меняет направление скорости на обратное, и центр тяжести системы останавливается на полпериода колебаний системы. После второго удара о стенку (вследствие возникших колебаний) шарик приобретает ту же скорость, которую имеет другой шарик в момент второго удара. Так как в этот момент пружина не деформирована, система будет удаляться от стенки без колебаний со скоростью  $v$ .

В случае неупругого удара (№ 5.54) первый шарик останавливается и стоит, пока его не потянет растягивающаяся пружина. На второй шарик приходится половина начальной кинетической энергии  $K_0/2$ . Эта энергия переходит в упругую энергию пружины, а затем возвращается второму шарику. Таким образом, скорость второго шарика  $v_0$  в результате удара меняет направление на противоположное. Очевидно, что скорость центра масс системы будет равна половине скорости второго шарика, т. е. половине начальной скорости системы  $v_0/2$ . В системе центра масс скорости шариков в момент начала растяжения

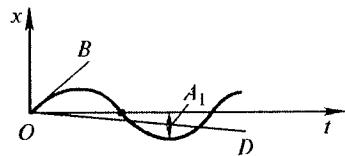


Рис. 5.8

пружины  $v_0/2$ . Энергия колебаний системы (внутренняя энергия) — это кинетическая энергия в системе центра масс

$$E = 2(m/2)(v_0/2)^2 = m v_0^2/4 = K_0/4.$$

Кинетическую энергию движения системы после удара получим, вычитая из энергии сразу после удара энергию движения системы как целого (все массы при скорости центра масс)  $m v_0^2/2 - K_0/4$ .

Аналогом подобного соударения является удар мяча о стенку (№ 5.63). Предполагаем, что давление внутри мяча не меняется, и сила, останавливающая мяч, равна произведению этого давления  $p$  на площадку, образующуюся при деформации мяча,  $\pi r^2$  (рис. 5.9). Пренебрегая остановившейся частью массы по сравнению со всей массой мяча  $m$ , получаем уравнение движения мяча

$$\begin{aligned} mx'' &= -p\pi r^2 = -p\pi[R^2 - (R-x)^2] = \\ &= -p\pi[R^2 - R^2 + 2Rx - x^2] \approx -2pRx. \end{aligned}$$

Время соударения равно половине периода колебаний, описываемых этим уравнением:

$$\tau = [2\pi m/(pR)]^{1/2}.$$

Рассмотрим колебания тела, подвешенного на пружине в поле тяжести. На рис. 5.10 показано тело массой  $m$ , подведенное на пружине жесткостью  $k$ , и приведены характеристики:  $l_0$  — длина ненагруженной пружины;  $l_p$  — длина пружины при равновесии и  $l$  — длина пружины в некоторый произвольный момент колебания, когда отклонение от равновесия равно  $x$ . При равновесии  $mg = k(l_p - l_0)$ . Уравнение колебаний (второй закон Ньютона)

$$mx'' = mg - k(l - l_0) = mg - k(l - l_p + l_p - l_0) = -kx.$$

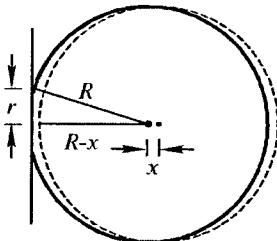


Рис. 5.9

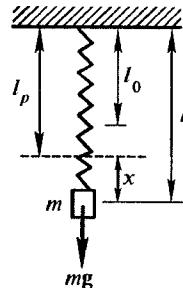


Рис. 5.10

Для отклонения от положения равновесия — это уравнение гармонического осциллятора. При вычислении энергии надо учитывать потенциальную энергию поля тяжести и нелинейность упругой энергии пружины.

Период колебаний  $T = 2\pi(m/k)^{1/2}$ . Поэтому статическое удлинение пружины (№ 5.2)  $l_p - l_0 = mg/k = gT^2/(4\pi^2)$ . Через статическое удлинение определим период  $T = 2\pi[(l_p - l_0)/g]^{1/2}$  (№ 5.1).

Для определения периода вертикальных колебаний шарика массой  $m$ , подвешенного на двух последовательно соединенных пружинках с коэффициентами упругости  $k_1$  и  $k_2$  (№ 5.5), предполагаем, что собственным весом пружинок можно пренебречь. Тогда сила натяжения одинакова во всех точках пружинок. Обозначим растяжение пружинок  $x_1$  и  $x_2$ , а коэффициент упругости системы из соединенных пружинок  $k$ . Для каждой пружинки и системы получаем  $F = k_1x_1 = k_2x_2 = k(x_1 + x_2)$ . Откуда

$$x_1/k = (x_1 + x_2)/k_1, \quad x_2/k = (x_1 + x_2)/k_2$$

и, следовательно,  $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$ .

Поэтому  $T = 2\pi[m(1/k_1 + 1/k_2)]^{1/2}$ .

Период колебаний шарика, подвешенного на невесомой пружине и совершающего гармонические колебания в вертикальном направлении с периодом  $T_0$  и амплитудой  $a$ , изменится, если к нему снизу поднести массивную твердую горизонтальную плиту, с которой шарик будет периодически упруго **сталкиваться**. Возьмем расстояние плиты от положения равновесия шарика равным  $a/2$  (рис. 5.11). Предполагаем, что масса шарика пренебрежимо мала по сравнению с массой плиты (№ 5.39).

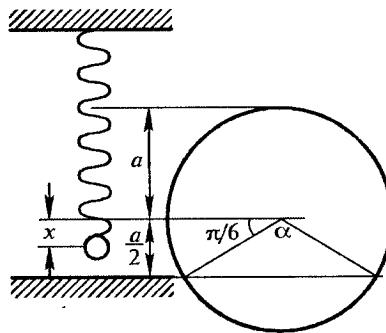


Рис. 5.11

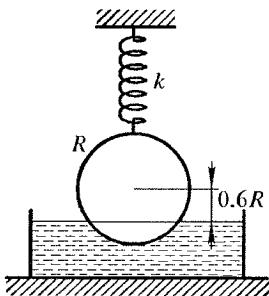


Рис. 5.12

которая соответствует отклонению на половину амплитуды колебаний. То есть при отражении из периода  $2\pi$  исключается  $2\pi/3$  и, следовательно,  $T/T_0 = (2\pi - 2\pi/3)/(2\pi) = 2/3$ .

Если подвешенный на пружине жесткостью  $k$  железный шарик (плотностью  $\rho_{ж}$ ) радиусом  $R$  частично погружен в широкую чашку с ртутью (плотностью  $\rho_{рт}$ ), стоящую на столе (рис. 5.12), то при колебаниях необходимо учитывать силу Архимеда. Обозначим растяжение пружины при равновесии  $x_0$  и отклонение от положения равновесия  $x$ . Уравнение колебаний

$$mx'' = -k(x_0 + x) + \rho_{ж}(4/3)\pi R^3 g - \rho_{рт}(\pi/3)(h + x)^2(3R - h - x)g.$$

(В последнем члене объем шарового сегмента, соответствующего вытесненной ртути, взят из справочника по математике И.Н. Бронштейна и К.А. Семендаева.) При равновесии

$$0 = -kx_0 + \rho_{ж}(4/3)\pi R^3 g - \rho_{рт}(\pi/3)h^2(3R - h)g.$$

Подставляя в предыдущее уравнение, получаем

$$mx'' = -kx - \rho_{рт}(\pi/3)[(3R - h)2 - h]hgx.$$

Отсюда определяется период колебаний (№ 5.29).

При погружении тела (не полностью погруженного) **сила Архимеда** растет и противодействует погружению. Для двух тел на коромысле или нити, переброшенной через блок, силы Архимеда могут вызвать колебания. Рассмотрим колебания двух одинаковых цилиндрических железных гирь (плотность  $\rho_{ж}$ , высота  $h$  и площадь  $S$ ), подвешенных на невесомой нити, перекинутой через неподвижный блок, которые частично погружаются, одна в воду (плотность  $\rho_{в}$ ), другая в масло (плотность  $\rho_{м}$ ). Найдем период колебания этих гирь (№ 5.28). На рис. 5.13 показана система в равновесии, для которого необходимо, чтобы уровень масла был выше, так как его плотность мень-

ше. При смещении грузов от положения равновесия (один опускается, другой поднимается) на  $x$  движение системы описывается уравнением  $2\rho_{\infty}Sgx'' = -(\rho_b + \rho_m)Sgx$ . Обе силы направлены против смещения. Отсюда определяется период колебания системы.

Найдем амплитуду колебаний, вызванных падением груза с некоторой высоты. С высоты  $h$  на невесомую чашку, подвешенную на пружине жесткостью  $k$ , падает (и остается на ней, не подпрыгивая) груз массой  $m$  (№ 5.10). Колебания чашки с грузом возникнут относительно положения равновесия, которому соответствует растяжение пружины на  $l$ , определяемое соотношением  $kl = mg$ . Обозначая амплитуду колебаний  $a$  и учитывая, что энергия пружины при максимальном растяжении равна изменению потенциальной энергии груза, получаем  $k(l+a)^2/2 = mg(h+l+a)$ . Исключая  $l$ , определяем амплитуду.

Воздействие импульса на колебательную систему рассмотрим на следующем примере. Мальчик, стоящий на пружинных весах, подбрасывает мяч массой  $m$  вертикально вверх и затем ловит его. Известно, что за время полета мяча весы совершили  $n$  целых колебаний. Это важное условие, которое показывает, что брошен мяч из положения равновесия системы и пойман так же в положении равновесия. Для определения амплитуды колебаний системы (масса чашки весов с мальчиком  $M$ , жесткость пружины  $k$ ), после того как мальчик поймает мяч (№ 5.31), пользуемся сохранением импульса и энергии. После бросания мяча период колебаний весов  $T = 2\pi(M/k)^{1/2}$ . Используя условие ( $n$  полных колебаний) из времени полета мяча в поле тяжести, получаем начальную скорость бросания  $v_0 = gnT/2$ . Из сохранения импульса в момент бросания  $mv_0 = Mv$ . После возвращения мяча  $(M+m)v = mv_0 + Mv$ . Введенная здесь начальная скорость колебаний и позволяет найти амплитуду колебаний  $a$  из закона сохранения энергии  $(M+m)v^2 = ka^2$ .

Аналогичным образом действуем, если мальчик находится на качелях, а мяч отражается от вертикальной стенки (№ 5.32).

Возвращающей силой при колебаниях в вертикальном направлении может быть **натяжение**, например, **нити**, на которой укреплено тело массой  $m$  (рис. 5.14). Если натяжение нити происходит за счет

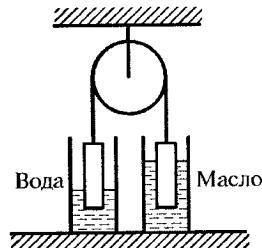


Рис. 5.13

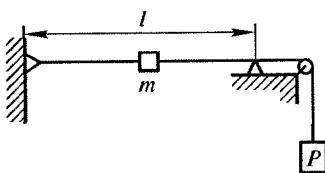


Рис. 5.14

веса груза  $p$ , то уравнение малых колебаний массы  $mx'' = -2p(2/l)x$ . Так как при прогибе нити на  $x$  натяжение  $p$  даст вертикальную силу с каждой стороны  $px/(l/2)$ . Откуда находим период колебаний (№ 5.37). Силой тяжести пренебрегаем.

Тело, лежащее (не закрепленное) на колеблющейся в вертикальном направлении подставке, не может иметь ускорение падения большее, чем ускорение свободного падения. Этим ограничивается амплитуда колебаний без подскоков тела. Из закона колебаний (5.3) получаем для максимального ускорения  $a\omega^2$ . Максимальное ускорение, направленное вниз, будет в точке наибольшего отклонения вверх. Чтобы тело двигалось вместе с подставкой, должно быть  $a\omega^2 < g$  (№ 5.7, 5.8). Обозначая силу со стороны подставки на тело  $N$ , получаем уравнение движения тела массой  $m$  в виде  $mx'' = mg - N$ . Пока тело движется вместе с подставкой по гармоническому закону  $x = a \sin \omega t$ , получаем  $N = mg + ma\omega^2 \sin \omega t$  (№ 5.6). Так как положительное направление  $x$  взято в направлении  $g$ , то в ноль  $N$  обращается при  $\sin \omega t = -1$  и  $a = g/\omega^2$ .

Аналогичным образом могут быть рассмотрены колебания груза, подвешенного к пружине на нити (№ 5.12). При увеличении амплитуды колебаний нить не будет все время натянута. Это происходит при амплитуде превышающей растяжение пружины при равновесии  $l = mg/k$ .

Начальное отклонение (амплитуда колебаний) может быть получено при подвешивании к чашке пружинных весов массой  $m$ , на которой находится груз пренебрежимо малой массы, груза **массой  $M$** , который затем **быстро убирают** (№ 5.11). Амплитуда колебаний определяется тем, что новое положение равновесия находится выше начального на  $a = Mg/k$ . Для груза, находящегося на чашке весов, условие подскакивания  $g < a\omega^2 = (Mg/k)(k/m) = (M/m)g$ , т. е.  $M > m$ .

Рассмотрим систему в виде тела массой  $m$ , подвешенного на двух вертикальных пружинах жесткостью  $k_1$  и  $k_2$  внутри коробки массой  $M$ , стоящей на горизонтальной поверхности (рис. 5.15). Суммарная жесткость  $k = k_1 + k_2$ . Отклонение тела при равновесии (отсутствии колебаний) от положения, когда суммарное действие пружин ( $F_{np}$ ) равно нулю,  $\Delta x_1 = mg/k$ . При таком отклонении  $F_{np} = k\Delta x_1 = mg$ . Колебания будут происходить относительно этого положения. Суммарное действие пружин на коробку меняет направление, когда тело (внутреннее) находится выше уровня  $F_{np} = 0$ . При смещении

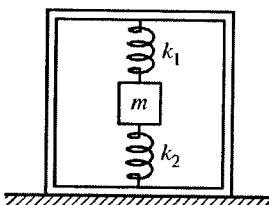


Рис. 5.15

выше этого уровня на  $\Delta x_2 = Mg/k$  и более коробка начнет подскакивать (№ 5.14), так как сила со стороны пружин на коробку становится больше веса коробки. Чтобы этого достигнуть, амплитуда должна превышать  $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (m + M)g/k$ .

Тело можно подвесить на двух пружинах не последовательно соединенных, а расположенных параллельно. Пружины соединяются рейкой или блоком (рис. 5.16). Если пружины разной жесткости, то деформации их будут разными, а растягивающие силы благодаря блоку одинаковые и равные  $F = k_1x_1 = k_2x_2$ . Смещение тела при колебаниях  $x$  связано с деформациями пружин  $x = (x_1 + x_2)/2 = (x_1/2)(1 + k_1/k_2)$ . Для нахождения периода колебаний системы (№ 5.30) имеем  $mx'' = -2F$ . Подставляя выражения для смещения и силы, находим  $\omega^2 = 4k_1k_2/[m(k_1 + k_2)]$ . Чтобы происходили гармонические колебания, необходимо ограничение амплитуды  $a < g/\omega^2$  (ускорение тела меньше  $g$ ).

Рассмотрим колебания сложной системы, которая состоит из нерастяжимой веревки, двух блоков, двух грузов и пружины жесткостью  $k$ , как это изображено на рис. 5.17. Найдем период малых колебаний системы и определим, при какой амплитуде колебаний груза веревка будет время от времени терять натяжение. Массой веревки и блоков пренебрегаем (№ 5.35).

Запишем вначале условие равновесия системы:

$$m_1g + kx_0 = 2m_2g.$$

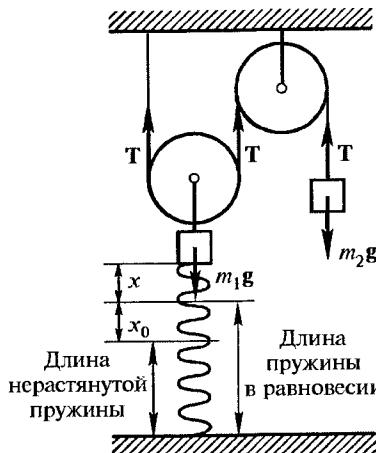


Рис. 5.17

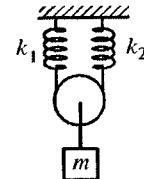


Рис. 5.16

Уравнения движения для  $m_1$  и  $m_2$ :

$$m_1x'' = -k(x + x_0) - m_1g + 2T;$$

$$m_2a_2 = m_2g - T.$$

Учитывая, что смещение  $m_2$  в два раза больше, чем  $m_1$ , и, следовательно,  $a_2 = 2x''$ , исключая  $T$  и используя условие равновесия, получаем

$$(m_1 + 4m_2)x'' = -kx.$$

Откуда  $\omega^2 = k/(m_1 + 4m_2)$  или

$$T_0 = 2\pi\{(m_1 + 4m_2)/k\}^{1/2}.$$

Из уравнения движения массы  $m_2$  для силы натяжения веревки получаем  $T = m_2g - m_2a_2$ . Таким образом, если в решении получится, что  $a_2 \geq g$  и, следовательно,  $x'' \geq g/2$ , то натяжение веревки становится отрицательным. Из колебательного уравнения для движения массы  $m_1$  следует:

$$x = A\sin(\omega t), x' = A\omega\cos(\omega t), x'' = -A\omega^2\sin(\omega t).$$

Можно сразу сказать, что ослабление веревки будет при  $|x'| > g/2$ , т. е. при  $A > g/(2\omega^2)$ . Но можно, используя решение и выписанные выше соотношения, написать выражение для натяжения веревки:

$$T = m_2g + [2km_2/(m_1 + 4m_2)]A\sin(\omega t)$$

и проанализировать его. Это выражение обращается в нуль при отрицательном значении синуса. Наименьшее  $A$  будет при синусе, равном  $-1$ . Таким образом, для ослабления веревки должно быть  $A > g(m_1 + 4m_2)/(2k)$ .

Продемонстрируем использование энергетических соотношений (5.5) и (5.6) для определения периода колебаний.

Рассмотрим колебание гантели, которая представляет две точечные массы  $m$ , соединенные невесомым стержнем длиной  $2l$ , по гладкой сферической поверхности радиусом  $r$  (№ 5.22). На рис. 5.18 показана эта система. Колебания могут происходить в перпендикулярном к плоскости рисунка направлении или в плоскости рисунка. В первом случае при малых отклонениях полная (кинетическая и потенциальная) энергия

$$E_1 = 2m(r^2 - l^2)(\phi')^2/2 + 2mg(r^2 - l^2)^{1/2}\phi^2/2.$$

Во втором случае

$$E_2 = 2m(r\phi')^2/2 + 2mg(r^2 - l^2)^{1/2}\phi^2/2.$$

Рис. 5.18

Для этих случаев из (5.6) следует

$$T_1 = 2\pi(r^2 - l^2)^{1/4}/(g)^{1/2} \text{ и } T_2 = 2\pi r/[g(r^2 - l^2)^{1/2}]^{1/2}.$$

Аналогичный подход можно использовать в случае колебаний системы, состоящей из двух точечных масс, закрепленных на невесомой цилиндрической поверхности радиусом  $R$ , находящейся на горизонтальной плоскости (рис. 5.19). Найдем частоту малых колебаний при отсутствии проскальзывания цилиндрической поверхности по плоской и расстоянии между массами  $L$  (№ 5.25). При повороте системы на угол  $\varphi$  центр масс системы поднимется на высоту

$$(R^2 - L^2/4)^{1/2}(1 - \cos \varphi) \approx (R^2 - L^2/4)^{1/2}\varphi^2/2.$$

Потенциальная энергия равна  $mg(R^2 - L^2/4)\varphi^2/2$ . Скорость центра масс системы равна  $[R - (R^2 - L^2/4)^{1/2}]\dot{\varphi}$ . Кинетическая энергия определяется движением центра масс и вращением относительно него:

$$\begin{aligned} m[R - (R^2 - L^2/4)^{1/2}]^2(\dot{\varphi})^2 + m(L^2/4)(\dot{\varphi})^2 = \\ = 2m[R^2 - R(R^2 - L^2/4)^{1/2}](\dot{\varphi})^2. \end{aligned}$$

Отсюда частота колебаний

$$\omega^2 = g(R^2 - L^2/4)^{1/2}/[2R^2 - 2R(R^2 - L^2/4)^{1/2}].$$

В подобных задачах главное написать выражения для энергий.

Например, при колебаниях невесомой спицы длиной  $2l$  с точечными массами на концах на неподвижном шероховатом цилиндре радиусом  $R$  (№ 5.27) подъем центра масс при повороте спицы на угол  $\varphi$  определяем из рис. 5.20. Высота подъема  $h = R\varphi^2/2$ .

Кинетическая энергия в данном случае определяется в основном вращением относительно центра масс  $2ml^2(\dot{\varphi})^2/2$ . Кинетической энергией движения центра масс можно пренебречь.

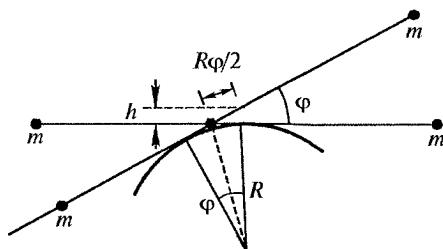


Рис. 5.20

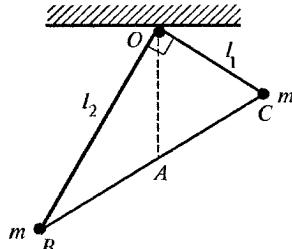


Рис. 5.21

В некоторых задачах главным является определение положения центра масс системы. Например, для системы, состоящей из двух точечных масс, подвешенных на невесомой штанге, согнутой под прямым углом, (№ 5.33) центр масс (точка  $A$ ), как видно из рис. 5.21, является центром окружности, описанной вокруг треугольника  $OBC$ . Расстояние центра масс от точки подвеса равно половине гипотенузы.

Иногда изменение потенциальной энергии при колебаниях можно найти, как бы перемещая части системы. В случае колебаний велосипедного колеса, у которого вся масса  $M$  сосредоточена на ободе, но удален сектор с углом  $\alpha$  относительно оси колеса, расположенной горизонтально (№ 5.34), при повороте на малый угол  $\varphi$  границы удаленного сектора показаны на рис. 5.22 пунктиром. Вместо поворота можно переместить часть  $R\varphi$ , масса которой  $M\varphi/(2\pi)$ , с правой стороны на левую. Подъем центра масс при этом равен  $h = R\varphi \sin(\alpha/2)$ . Изменение потенциальной энергии связано только с этим перемещением.

Пружина может действовать на тело под углом. Такое возможно, если тело может двигаться только по гладкой горизонтальной штанге или гладкой поверхности, к которым пружина направлена под углом (№ 5.41). На рис. 5.23 показана муфта массой  $m$  на гладкой штанге на расстоянии  $l$  от точки закрепления пружины, которая другим концом прикреплена к муфте. Величина  $l$  больше длины нерастянутой пружины. Имея длину  $l$ , пружина растянута силой  $F$ . Обозначая отклонение муфты от равновесия  $x$  и длину нерастянутой пружины  $a$ , получаем уравнение  $mx'' = -k[(l^2 + x^2)^{1/2} - a]x/(l^2 + x^2)$ , где  $k = F/(l - a)$ . При малых  $x$  по сравнению с  $l$  разложим правую часть в ряд Тейлора и оставим только линейные члены. В таком случае  $mx'' = -Fx/l$ . Отсюда определим период колебаний.

Нелинейное уравнение колебаний получится и при движении груза (масса  $m$ ) по гладкой горизонтальной поверхности под действием пружины жесткостью  $k$ , расположенной под углом  $\alpha$  к по-

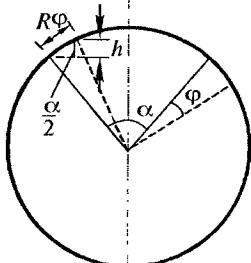


Рис. 5.22

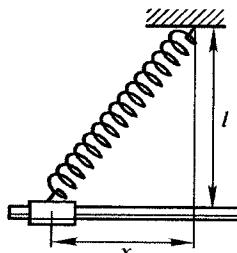


Рис. 5.23

верхности (в положении равновесия). Уравнение превращается в линейное при достаточно длинной пружине, когда угол с поверхностью при колебаниях практически не меняется и остается таким же, как при равновесии (рис. 5.24). Найдем период малых колебаний (№ 5.42). Если смещение от равновесия по поверхности равно  $x$ , то сила вдоль пружины  $kx \cos \alpha$ , а ее проекция на направление движения по плоскости  $kx \cos^2 \alpha$ . Уравнение колебаний  $mx'' = -kx \cos^2 \alpha$ . Отсюда находим период колебаний. Груз не будет подпрыгивать, пока вертикальная компонента натяжения пружины  $kx \cos \alpha \sin \alpha \leq mg$ .

Найдем частоту малых колебаний шарика массой  $m$ , подвешенного на **нелинейной пружине**, если сила растяжения пружины пропорциональна квадрату растяжения, т. е.  $F = k(L - L_0)^2$ , где  $L_0$  — длина пружины в ненагруженном состоянии (№ 5.43).

Растяжение пружины  $\Delta L_0$  грузом массой  $m$  при равновесии определяется соотношением  $mg = k(\Delta L_0)^2$ . Если  $x$  — отклонение от равновесия, то

$$mx'' = -k(\Delta L_0 + x)^2 + mg = -k(\Delta L_0)^2 - kx(2\Delta L_0 + x) + mg.$$

Если  $x \ll 2\Delta L_0$ , то, пренебрегая соответствующим членом, получаем

$$mx'' + 2k\Delta L_0 x = 0.$$

Используя выражение для  $\Delta L_0$ , получаем частоту колебаний  $\omega = (4kg/m)^{1/2}$ .

**Влияние массы пружины на колебания груза на пружине жесткостью  $k$**  рассмотрим для случая, когда масса пружины  $m_{\text{пр}}$  много меньше массы груза  $m$ .

Характер движения пружины зависит от соотношения массы пружины и подвешенного на ней груза. Пружина без груза подобна упругой среде, по которой напряжения и деформации распространяются с конечной скоростью в виде волн. Движение частей пружины начинается с конца, к которому прикладывается внешнее воздействие, и постепенно захватывает всю пружину. При медленном внешнем воздействии, как, например, в случае колебаний тяжелого груза на пружине, волны успевают многократно пробежать по пружине и выровнять напряжения и деформации по всей длине пружины. В этом случае смещения элементов пружины и их скорости

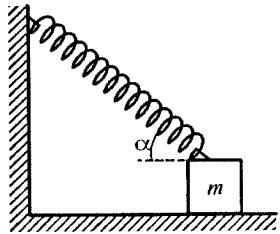


Рис. 5.24

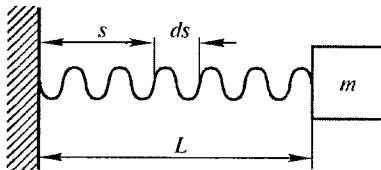


Рис. 5.25

будут пропорциональны расстояниям, на которых находятся эти элементы от закрепленного конца пружины. Таким образом, пружина обладает кинетической энергией, которая должна учитываться в кинетической энергии колебательной системы. Найдем кинетическую энергию пружины, выражая скорости ее элементов через их расстояние от точки закрепления пружины  $s$  (рис. 5.25), отнесенное к длине пружины  $L$ , и скорость груза  $x'$  (скорость конца пружины)

$$E_{np} = \left(1/2\right) \int_0^L \left(x's/L\right)^2 \left(m_{np}/L\right) ds = \left(1/2\right) \left(m_{np}x'^2/L^3\right) \int_0^L s^2 ds = m_{np}x'^2/6.$$

Полная энергия системы

$$E = (m + m_{np}/3)x'^2/2 + kx^2/2.$$

Используя (5.5) и (5.6), получаем

$$\omega = [k/(m + m_{np}/3)]^{1/2}. \quad (5.26)$$

Данное решение поможет решить задачи № 5.67 и № 5.68.

Рассмотрим затухающие колебания.

Уравнение движения маятника с затуханием колебаний (5.8):

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0.$$

Решение уравнения имеет вид (5.9)

$$x = ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi).$$

Определим **добротность маятника**, если за время, в течение которого было совершено 10 колебаний, амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза (№ 5.71).

Изменение амплитуды за  $n$  колебаний (время равно  $nT$ )

$$a_i/a_{i+n} = e^{\beta n T}.$$

Откуда  $\beta T = \ln(a_i/a_{i+n})/n$ . Из (5.13) добротность

$$Q = \pi/(\beta T) = n\pi/[\ln(a_i/a_{i+n})] = 10\pi/\ln 2 = 45,3.$$

**Коэффициентом сопротивления** называется  $r = F_{\text{сопр}}/x' = 2m\beta$ . Определим его для некоторой среды, про которую известно, что энергия колеблющегося в ней маятника массой  $m$  за время  $t$  уменьшилась в  $n$  раз. Из (5.9) отношение амплитуд  $x/a = e^{-\beta t}$ . Отношение энергий  $E/E = (x/a)^2 = e^{-2\beta t}$ . Отсюда находим коэффициент сопротивления.

Рассмотрение воздействия вынуждающей силы на колебательную систему начнем со случая, когда на тело массой  $m$ , прикрепленное к неподвижной точке пружиной жесткостью  $k$ , действует вынуждающая сила, меняющееся по синусоидальному закону  $f = f_0 \sin \omega t$  (рис. 5.26). Найдем закон движения тела, пренебрегая трением о поверхность, на которой лежит тело.

Уравнение движения  $mx'' + kx = f_0 \sin \omega t$  имеет решение  $x = a \sin \omega t$ . В этом можно убедиться подстановкой его в уравнение, которое при этом дает выражение для  $a$  — амплитуды колебаний:

$$a = f_0 / [m(\omega_0^2 - \omega^2)],$$

где введено обозначение для частоты свободных (собственных) колебаний (т. е. при отсутствии внешних сил)  $\omega_0^2 = k/m$ . При  $\omega < \omega_0$  в момент времени  $t$  положительное направление силы и положительное направление смещения  $x$  (фазы совпадают) при  $\omega > \omega_0$  при положительной силе смещение отрицательно (движение в противофазе). При  $\omega \rightarrow \omega_0$  амплитуда колебаний будет возрастать до бесконечности. Это соответствует резонансу. В реальных колебательных системах всегда имеется трение. При учете трения уравнение колебаний и его решение определяются (5.14)–(5.18).

Рассмотрим колебательную систему, состоящую из двух одинаковых грузов, скрепленных пружиной жесткостью  $k$ , на одну из масс которой действует гармоническая сила с амплитудой  $A_0$ , направленная вдоль пружины (рис. 5.27). Найдем амплитуду  $A$  установившихся колебаний системы, если частота вынуждающей силы вдвое превышает собственную частоту системы (№ 5.62).

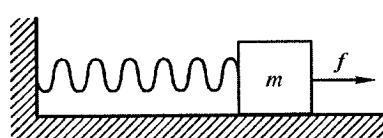


Рис. 5.26

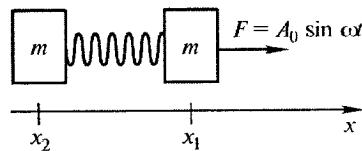


Рис. 5.27

В произвольный момент времени расстояние грузов от начала координатной оси, идущей вдоль линии движения грузов,  $x_1$  и  $x_2$ . Движение грузов описывается уравнениями:

$$mx_1'' = A_0 \sin \omega t - k(x_1 - x_2 - L_0);$$

$$mx_2'' = k(x_1 - x_2 - L_0).$$

Вводя обозначение  $u = x_1 - x_2 - L_0$ , получаем

$$mu'' + 2ku = A_0 \sin \omega t.$$

Решение этого уравнения ищем в виде суммы частного решения неоднородного и общего решения однородного уравнений

$$u = A \sin \omega t + B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t,$$

где  $\omega_0^2 = 2k/m$ .

Подставляя  $u$  в уравнение колебаний, получаем, что  $A = -A_0/(6k)$ . Амплитуды собственных колебаний должны определяться дополнительными условиями. Если первоначально  $B$  и  $C$  равны нулю, то собственные колебания не возникают. Отрицательный знак амплитуды указывает на то, что колебания происходят в противофазе с вынуждающей силой. Это связано с тем, что частота вынуждающей силы в два раза больше собственной частоты системы. О фазах уже говорилось в предыдущей задаче и дана ссылка на формулы (5.14)–(5.18).

Полученные выше формулы можно использовать для определения **добротности** колебательной системы  $Q$  в случае, когда амплитуда колебаний груза при действии внешней синусоидальной силы с амплитудой  $F_0$  на частоте  $\omega = 0,9\omega_0$  ( $\omega_0$  – резонансная частота) в  $k$  раз больше отклонения под действием постоянной силы той же величины.

Обозначим  $n = \omega/\omega_0$ . По условию  $n = 0,9$ . Из (5.13)  $Q = \omega_0/(2\beta)$ . Используем зависимость (5.16) для амплитуды вынужденных колебаний. Учитывая, что постоянная сила соответствует  $\omega = 0$ , получаем

$$A(0)/A(\omega) = [(1 - n^2)^2 + 4n^2/Q^2] = 1/k.$$

Отсюда  $Q = n/[1/k^2 - (n^2 - 1)]^{1/2} = 14,24$ .

Возбуждение **параметрических колебаний** рассмотрим на примере раскачивания качелей. В некоторый момент качели, на которых находится человек, имеют угловую амплитуду  $\phi_0$ . Когда качели проходят через положение равновесия, человек резко встает, а в момент максимального отклонения качелей он снова садится. Опреде-

лим, на сколько изменится угловая амплитуда за период и как зависит амплитуда от числа колебаний  $n$ , если колебания малые (№ 5.56). На рис. 5.28 приведены параметры колебательной системы. Масса человека  $M$ . Центр тяжести человека поднимается и опускается на высоту  $H$ . Длина веревок качелей  $l$ . Считаем, что  $l \gg H$ . Массой качелей по сравнению с массой человека пренебрегаем.

В момент прохождения положения равновесия потенциальную энергию полагаем равной нулю, а кинетическая энергия при этом

$$K_0 = mgh_0 = mv_0^2/2 = mgl(1 - \cos\varphi_0) \approx mgl\varphi_0^2/2.$$

Здесь  $v_0$  — скорость при прохождении положения равновесия.

При отклонении на угол  $\varphi_1$  кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная

$$P = mgH + mg(l - H)(1 - \cos\varphi_1) \approx mgH + mg(l - H)\varphi_1^2/2.$$

Увеличение полной энергии происходит за счет работы против силы тяжести и центробежной силы:

$$A = mgH + m(v^2/l)H \approx mgH + mg\varphi_0^2H.$$

Приравнивая изменение энергии работе, получаем

$$\varphi_1^2(1 - H/l) = \varphi_0^2(1 + 2H/l).$$

Извлекая корень и разлагая по малой по сравнению с 1 величине  $H/l$ , получаем

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_0(1/2)H/l + \varphi_0H/l \approx (3/2)\varphi_0H/l.$$

Такое изменение амплитуды будет за половину периода. За период в два раза больше.

За период угол увеличивается в  $(1 + 3H/l)$  раз. За  $n$  периодов — эта величина в  $n$ -й степени. Увеличению амплитуды препятствует сопротивление, которое здесь не учитывается.

Уравнением, описывающим движение тела в классической механике, является второй закон Ньютона. Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по координате или первого порядка по скорости. В последнем случае необходимо добавить связь скорости с координатой, которая является обыкновенным диффе-

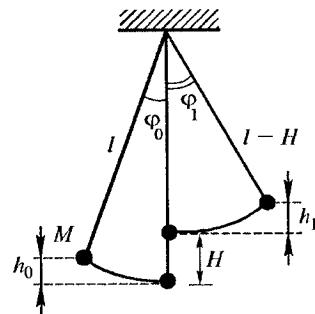


Рис. 5.28

ренциальным уравнением первого порядка, т. е. в таком случае получаем систему двух дифференциальных уравнений. Для решения уравнения необходимо задать в некоторый момент времени координату и скорость тела. Решение определяет в любой момент времени координату и скорость тела, описывающие, как говорят, состояние движения. Удобно представлять движение тела в пространстве состояний, которое чаще называют **фазовым пространством**. В общем случае это шестимерное пространство. Мы ограничимся одномерным движением и, соответственно, фазовой плоскостью. По оси ординат откладываем скорость, по оси абсцисс — координату. Состояние движения определяется точкой на плоскости, которая называется изображающей или представляющей. С течением времени эта точка перемещается по фазовой плоскости, обозначая **фазовую траекторию**. Фазовая плоскость, заполненная фазовыми траекториями, называется **фазовым портретом** системы. Поясним вышеизложенное на примере простейшей системы, которой является тело на пружине — **одномерный осциллятор**. Сразу можно написать первый интеграл уравнения движения — закон сохранения энергии:  $mx'^2/2 + kx^2/2 = E$ , где  $m$ ,  $x'$  и  $x$  — масса, скорость и координата тела,  $k$  — жесткость пружины,  $E$  — полная энергия системы. Это уравнение можно переписать следующим образом

$$(x')^2/(2E/m) + x^2/(2E/k) = 1. \quad (5.27)$$

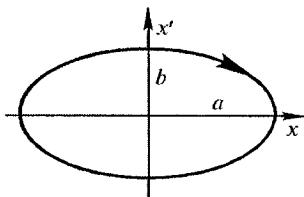


Рис. 5.29

Эта линия на фазовой плоскости, показанная на рис. 5.29, представляет эллипс с полуосами  $a = (2E/k)^{1/2}$  и  $b = (E/m)^{1/2}$ , по которому точка, изображающая состояния системы, движется по часовой стрелке ( $x$  растет при  $x' > 0$ ,  $x$  убывает при  $x' < 0$ ), совершая полный оборот за период колебания  $T$ . Семейство фазовых траекторий (эллипсов) для данной системы при различных значениях энергии называется ее

фазовым портретом. Площадь внутри фазовой траектории называется объемом фазового пространства одномерного гармонического осциллятора. Эта площадь через полную энергию системы  $E$  и частоту собственных колебаний осциллятора  $\omega_0$  выражается следующим образом:

$$S = \oint x'dx = 2\pi E/\omega_0. \quad (5.28)$$

Вместо скорости в (5.27) можно использовать импульс  $p = mx'$ .

Представление колебаний в фазовом пространстве особенно полезно при рассмотрении более сложных колебаний с учетом затухания, накачки энергии, нелинейности и неограниченных амплитуд.

Для нелинейных колебаний маятника из уравнения вращательного движения получаем закон сохранения механической энергии (первый интеграл):

$$\dot{\varphi}^2 / 2 + \omega_0^2 (1 - \cos \varphi) = E_0 / J, \quad (5.29)$$

где  $\omega_0$  — частота колебаний при малых отклонениях, когда нелинейностью можно пренебречь,  $\omega_0^2 = mga/J$ ;  $E_0$  — полная энергия с учетом того, что потенциальная энергия в положении равновесия равна нулю. Фазовый портрет колебаний маятника представлен на рис. 5.30. При малых углах отклонения маятника траектории такие же эллипсы, как на рис. 5.29. При увеличении энергии (амплитуды) колебаний траектория перестает быть эллиптической. При достаточно больших энергиях колебания переходят во вращательное движение. Границчная фазовая траектория, отделяющая ограниченное (финитное) движение маятника от вращательного, называется сепаратрисой. Траектории, соответствующие неограниченному движению, называются убегающими.

Сепаратриса

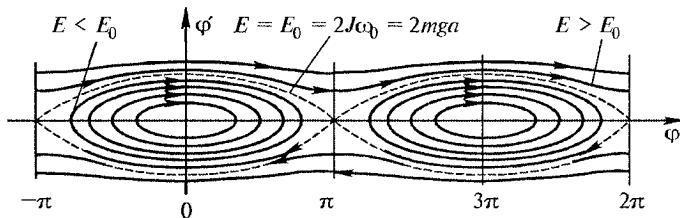


Рис. 5.30

Введенные представления движений оказываются очень плодотворными в термодинамике и квантовой механике. В частности, каждому квантовому состоянию системы соответствует ячейка (объем) в фазовом пространстве.

Использование фазовых траекторий продемонстрируем на конкретной задаче.

Груз массой  $m$ , соединенный пружиной жесткостью  $k$  с вертикальной стенкой, совершает колебания, двигаясь по горизонтальной поверхности вдоль оси  $x$ , перпендикулярной к стенке (рис. 5.31). Коэффициент трения между грузом и поверхностью равен  $\mu$ . В каждый момент времени, когда пружина максимально растянута, грузу щелч-

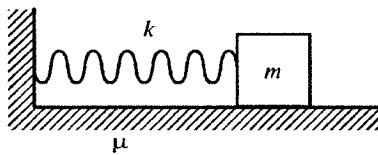


Рис. 5.31

ком сообщают некоторую энергию, так что он приобретает скорость  $v_0$  в направлении к стенке. Найдем скорость  $v_0$ , если колебания оказываются стационарными, причем максимальное удлинение пружины равно  $L$ . Считаем, что  $L > \mu mg/k$  (№ 5.46).

Трение приводит к затуханию колебаний. Однако при постоянной силе трения движение в течение половины периода описывается уравнением гармонического осциллятора (без затухания). Движение груза имеет вид

$$mx'' = -kx \pm \mu mg. \quad (5.30)$$

Знак минус относится к скорости большей нуля (в положительном направлении оси  $x$ ), а знак плюс — к отрицательной скорости груза. Введем обозначение

$$y = x \pm \mu mg/k. \quad (5.31)$$

Получаем уравнение гармонических колебаний:

$$my'' + ky = 0. \quad (5.32)$$

Удобно воспользоваться фазовой траекторией, т. е. изобразить движение в координатах ( $y'$ ,  $y$ ):

$$my'^2/2 + ky^2/2 = A = \text{const}. \quad (5.33)$$

Отсюда получаем уравнение эллипса:

$$y'^2/(2A/m) + y^2/(2A/k) = 1. \quad (5.34)$$

В координатах ( $x'$ ,  $x$ ) центр эллипса на каждой половине периода будет смещаться (в соответствии с формулой (5.31)). Для положительной скорости груза центр эллипса имеет координату  $x = -mg/k$ , для отрицательных скоростей  $x = mg/k$ . Полная энергия колебаний  $A$  уменьшается для каждой следующей половины периода. Полезно нарисовать картину затухания. Это сделано на рис. 5.32 для частного случая:  $\mu g = 0,1 \text{ м/с}^2$ ;  $\omega = b/a = (k/m)^{1/2} = 0,5 \text{ с}^{-1}$ ;  $h = \mu g/\omega^2 = 0,4 \text{ м}$ ;  $x = y \pm h$ . Здесь  $a$  — большая полуось, а  $b$  — малая полуось эллипса (5.34). Точки пересечения эллипсов с осью  $x$  соответствуют: 5 м,

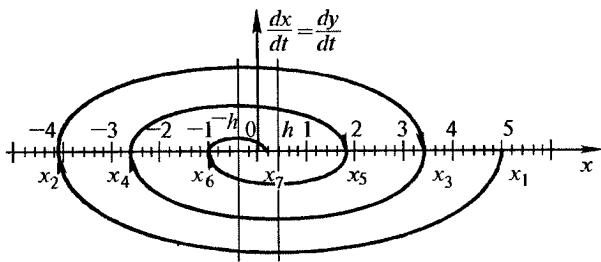


Рис. 5.32

$-4,2$  м,  $3,4$  м,  $-2,6$  м,  $1,8$  м,  $-1$  м,  $0,2$  м. В последней точке происходит остановка, так как возвращающая сила меньше силы трения ( $x < h$ ).

Чтобы колебания были стационарными, нужен подвод энергии. По условию подводится кинетическая энергия, которой должно быть столько, сколько тратится на работу сил трения:

$$mV_0^2/2 = \mu mg4(L + \mu mg/k).$$

В данном случае  $x_3 = L$ , а путь равен  $4(L + h)$ .

## 6. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

В этом разделе вводится новое понятие — **момент импульса**, или момент количества движения относительно точки, которую называют полюсом. Выбрав точку, всегда можно совместить с ней начало координат. Положение точечной массы  $m$ , движущейся со скоростью  $v$ , определяется вектором  $r$ , проведенным из начала координат к этой точечной массе. Векторное произведение этого радиуса-вектора на импульс  $p = mv$  называется моментом импульса:  $L = r \times p$ . Используя второй закон Ньютона (умножая обе его части векторно на  $r$ ), получаем основное соотношение для связи момента импульса и момента сил  $r \times dp/dt = r \times F$ . Так как  $d(r \times p)/dt = dr/dt \times p + r \times dp/dt$  и первый член равен нулю (скорость и импульс направлены одинаково), то

$$dL/dt = r \times F = M. \quad (6.1)$$

Следует подчеркнуть, что моменты могут быть написаны относительно любых точек для любых движений (а не только относительно центра вращения для вращательного движения). Если момент силы (или его проекция на некоторое направление) равен нулю, то момент импульса (или его проекция на это направление) сохраняется (не изменяется). В случае, когда сила, действующая на тело, всегда направлена в одну точку (центральные силы, например тяжение), момент импульса сохраняется относительно этой точки.

Напомним, что проекция вектора момента относительно точки на некоторую ось, проходящую через эту точку, является моментом относительно этой оси.

Можно отметить, что векторы, полученные в результате векторного умножения, не являются обычными векторами, которые называются **полярными**, так как их направление (знак) зависит от выбора системы координат. Такие векторы называются **аксиальными**, или **псевдовекторами**.

Начнем с рассмотрения **движения в поле центральных сил**. Сила называется центральной, если в процессе движения она направлена в одну точку. Примером таких сил являются силы гравитационного взаимодействия между телами. Момент силы относительно точки, в

которую сила направлена, равен нулю. Поэтому момент количества движения  $\mathbf{L}$  не меняется по величине и направлению. Движение происходит в одной плоскости. Рассмотрение таких движений будет дано в разделе, посвященном тяготению (гравитационному взаимодействию).

Другим примером движения в поле центральных сил может служить движение небольшого тела, привязанного к нитке, продетой через отверстие  $O$  в гладком горизонтальном столе (№ 6.1). Тело движется равномерно со скоростью  $v$  на расстоянии  $r$  от отверстия. В некоторый момент нить начинают плавно протягивать через отверстие, и за время  $t$  тело делает оборот, описав заштрихованную на рис. 6.1 фигуру. Момент силы, действующей на тело через нить, относительно точки  $O$ , равен нулю. Поэтому вертикальная составляющая момента количества движения относительно этой точки сохраняется. Площадь треугольника, которую «заметает» вектор  $\mathbf{r}$  (см. рис. 6.1), можно выразить как векторное произведение. Площади соответствует вектор  $d\mathbf{S}$ , который равен величине площади и направлен по нормали к ней:  $d\mathbf{S} = 0,5\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ . Тогда момент количества движения  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt = 2md\mathbf{S}/dt = \text{const}$ . Величина  $d\mathbf{S}/dt$  называется секториальной скоростью и используется в законах Кеплера (о них в разд., посвященном тяготению). Отсюда  $d\mathbf{S} = Ldt/(2m) = rvd\mathbf{t}/2$ . Интегрируя, получаем  $S = rv^2t/2$ . Эта площадь заштрихована на рис. 6.1. Кинетическая энергия тела  $W = mv^2/2 = mrv\omega/2$ . Отношение  $W/\omega = mrv/2$ , а момент количества движения  $L = mrv\sin\phi$ , где  $\phi$  — угол между  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ . Если нить протягивается медленно, то угол  $\phi$  близок к  $\pi/2$ , и постоянство  $L$  приводит к постоянству  $W/\omega$ . Этую величину называют адиабатическим инвариантом потому, что она сохраняется только при медленных изменениях расстояния тела от отверстия.

Момент количества движения можно выразить и через угловую скорость  $\omega$ . Тогда угловая скорость  $\omega = L/(mr^2)$ , сила натяже-

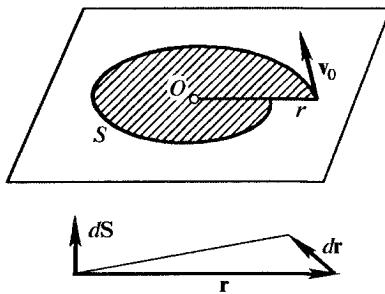


Рис. 6.1

ния  $F = m\omega^2 r = L^2/(mr^3)$ , работа этой силы равна интегралу от  $F dr$  (№ 6.9).

Движение тела, прикрепленного к неподвижной точке с помощью пружины (№ 6.11), также является движением в поле центральных сил. Однако простое решение можно получить только в случае, когда усилие пружины пропорционально ее длине  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ . Это выполняется приближенно для коротких пружин, которые могут сильно растягиваться, т. е. обладают малой жесткостью.

### Уравнение движения

$$m\mathbf{r}'' = -k\mathbf{r}. \quad (6.2)$$

Проектируем его на взаимно перпендикулярные оси  $x$  и  $y$ , проходящие через точку закрепления пружины:

$$my'' = -ky; mx'' = -kx. \quad (6.3)$$

Оба уравнения описывают гармонические колебания с частотой  $\omega = (k/m)^{1/2}$ . Для координат тела получаем

$$x = a\cos\omega t; y = b\sin\omega t. \quad (6.4)$$

Исключая косинус и синус, получаем траекторию движения тела (эллипс):

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1. \quad (6.5)$$

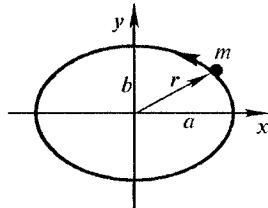


Рис. 6.2

Траектория показана на рис. 6.2. Обозначая максимальные значения компонент скорости  $x'_M$  и  $y'_M$ , для момента импульса тела получаем

$$L = may'_M = mbx'_M. \quad (6.6)$$

Сохранение механической энергии системы (тело, пружина) дает

$$E = m(y'_M)^2/2 + ka^2/2 = m(x'_M)^2/2 + kb^2/2. \quad (6.7)$$

Используя выражение для частоты колебаний и соотношение (6.6), получаем

$$L = mab\omega. \quad (6.8)$$

Для площади эллипса

$$S = \pi ab = \pi L/(m\omega). \quad (6.9)$$

Средняя за период кинетическая энергия (используем (6.4))

$$\langle K \rangle = (1/T) \int_0^T \left( m(x')^2/2 + m(y')^2/2 \right) dt = m\omega^2 (a^2 + b^2)/4. \quad (6.10)$$

Средняя за период энергия пружины (потенциальная)

$$\langle \Pi \rangle = (1/T) \int_0^T \left( k(x^2 + y^2)/2 \right) dt = k(a^2 + b^2)/4. \quad (6.11)$$

Отсюда следует равенство средних кинетической и потенциальной энергий, так как  $\omega^2 = k/m$ .

Еще одна возможность для выполнения закона сохранения момента импульса возникает, если силы всегда направлены к некоторой оси. При движении маленького шарика по гладкой (без трения) внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально (рис. 6.3), силы, действующие на шарик (тяжесть и реакция опоры), лежат в плоскости, проходящей через ось симметрии конуса. Момент сил относительно этой оси равен нулю. Следовательно, сохраняется момент импульса шарика относительно оси конуса  $mv_{\text{топ}} r_{\perp} = \text{const}$ , где  $v_{\text{топ}}$  — горизонтальная составляющая скорости шарика,  $r_{\perp}$  — расстояние шарика от оси конуса. Для конуса отношение  $h/r_{\perp}$  постоянно. Поэтому (так как и  $m$  — постоянно)  $v_{\text{топ}} h = \text{const}$ . Считаем, что в начальный момент шарик находился на высоте  $h_0$ , а скорость его  $v_0$  была горизонтальна. При дальнейшем движении шарик поднимается до высоты  $h$ , а затем начинает опускаться. Так как в верхней и нижней точках траектории  $v_{\text{верт}} = 0$ , то из закона сохранения энергии

$$v_0^2/2 + gh_0 = v^2/2 + gh. \quad (6.12)$$

Из закона сохранения момента импульса

$$v_0 h_0 = vh. \quad (6.13)$$

Следовательно, для скоростей в верхней и нижней точках в зависимости от высот получаем (№ 6.8)

$$v_0 = h \sqrt{2g/(h_0 + h)}; \quad v = h_0 \sqrt{2g/(h_0 + h)}. \quad (6.14)$$

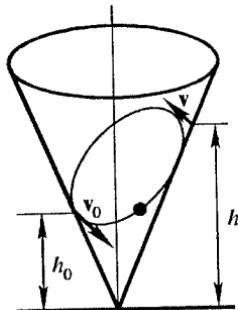


Рис. 6.3

Еще один пример использования закона сохранения момента импульса в задаче о движении человека на аттракционе «гигантские шаги» (№ 6.7). Здесь также сохраняется вертикальная составляющая момента количества движения. В верхней и нижней точках траектории движения тела скорости имеют только горизонтальные составляющие. Расстояния от точки подвеса одинаковые ( $R$ ), а от оси разные. Обозначим это расстояние  $r$ . Если отсчитывать высоту подъема человека  $h$  от его положения при равновесии, то, как следует из теоремы Пифагора,

$$r^2 = R^2 - (R - h)^2 = h(2R - h). \quad (6.15)$$

Из закона сохранения момента импульса, используя (6.15), получаем для точек максимального и минимального положений

$$h(2R - h)v^2 = \text{const}. \quad (6.16)$$

Из закона сохранения механической энергии

$$v^2 + 2gh = \text{const}. \quad (6.17)$$

В ряде задач можно воспользоваться тем, что момент импульса системы сохраняется относительно точки приложения внешних для системы сил. Это может быть точка, на которую опирается рассматриваемая система. Примером может служить трамплин, используемый в цирке. Трамплин представляет собой горизонтальную доску, шарнирно закрепленную в середине. На один конец доски, которую можно считать невесомой, с достаточно большой высоты прыгает гимнаст массой  $m_1$ . Клоун массой  $m_2$ , стоящий на другом конце доски, при этом подбрасывается в воздух. Расстояние от клоуна до шарнира равно  $L_2$ . Определим (№ 6.2), на каком расстоянии  $L_1$  (рис. 6.4) от шарнира должен оказаться гимнаст, чтобы клоун был подброшен на максимальную высоту.

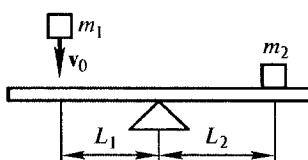


Рис. 6.4

Гимнаст ударяет (неупруго) по доске, доска по клоуну. В конце удара клоун отделяется от доски. Его начальная скорость  $v_2$  определяется угловой скоростью доски в этот момент. Во время удара на систему (гимнаст, доска, клоун) действуют силы тяжести и реакция в шарнире. Часть силы реакции, связанная с ударом, значительно превосходит часть, связанную с силами тяжести. Можно считать, что силы тяжести за очень малое время удара никак не проявляются. То есть внешняя сила — это реакция опоры, возникающая во

время удара. Тогда относительно точки приложения силы реакции (шарнир) сохраняется момент импульса системы:

$$m_1 v_0 L_1 = m_1 v_1 L_1 + m_2 V_2 L_2 = \omega (m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2). \quad (6.18)$$

Удар считаем неупругим, т. е. после соприкосновения с доской гимнаст движется вместе с ней, и после удара угловая скорость доски:

$$\omega = m_1 v_0 L_1 / (m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2).$$

Угловая скорость зависит от  $L_1$ , и максимальное значение  $\omega$  достигается при  $d\omega/dL_1 = 0$ , т. е. при  $L_1 = L_2(m_2/m_1)^{1/2}$ . Высота, на которую поднимется клоун, зависит от скорости гимнаста, т. е. от высоты, с которой прыгает гимнаст. Если эта высота задана и известно отношение  $L_1/L_2$  (№ 6.4), то можно вычислить, на какую высоту поднимется клоун.

Задачу можно усложнить, например, прикрепив один конец доски к полу с помощью упругой пружины жесткостью  $k$  (№ 6.3). Вместо клоуна можно взять шар массой  $m_2$ , который, взлетев, не падает обратно на доску. Пружина после удара растягивается, а затем подбрасывает гимнаста массой  $M$ . Рассматриваем случай, когда  $L_1 = L_2 = L$  (рис. 6.5). Из (6.18) получаем

$$v_1 = v_2 = v_0 M / (M + m). \quad (6.19)$$

С такой скоростью начнет сжиматься пружина под действием массы  $M$ , кинетическая энергия которой превращается в упругую энергию пружины. Другая масса  $m$  не связана с доской, которая тормозится пружиной быстрее, чем эта масса силой тяжести. После сжатия пружины масса  $M$  получит свою кинетическую энергию обратно и поднимется на высоту  $x = v_1^2 / (2g)$ . Скорость  $v_0$  определяется, если задана высота, с которой падает гимнаст.

Вместо доски можно рассмотреть какую-то конструкцию, например вертушку, которая состоит из трех невесомых стержней длиной  $a$ , лежащих в одной плоскости под углами  $120^\circ$ , с одинаковыми точечными массами  $m$  на концах (№ 6.6). На вертушку снизу (рис. 6.6) со скоростью  $v$  налетает и прилипает к ней масса  $M$ . Найдем угловую скорость вертушки после того, как в некоторой точке, где скорость максимальна, эта масса оторвется. При ударе можно воспользоваться законом сохранения момента импульса относительно оси вертушки:

$$Mva\sqrt{3}/2 = (3m + M)a^2\omega_0. \quad (6.20)$$

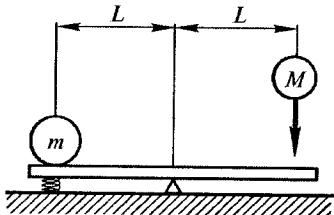


Рис. 6.5

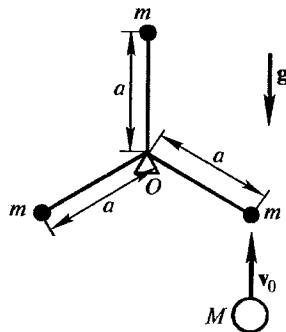


Рис. 6.6

Очевидно, что максимальная скорость вертушки будет тогда, когда масса  $(M + m)$  окажется в самой нижней точке. Легко видеть, что эта масса опустится на  $a/2$ . Поэтому из закона сохранения энергии получаем

$$(3m + M)a^2(\omega_m^2 - \omega_0^2)/2 = Mga/2. \quad (6.21)$$

Если система, по которой наносят удар, не закреплена на оси, а может свободно двигаться, то она, сохранив импульс, будет вращаться относительно центра масс. Например, система из трех одинаковых маленьких шариков массой  $m$  каждый (рис. 6.7) на невесомом жестком горизонтальном стержне на одинаковых расстояниях ( $l$ ) друг от друга падает с постоянной скоростью  $v_0$  и левым шариком упруго ударяет о массивный выступ с горизонтальной верхней поверхностью (№ 6.5).

Так как поверхность выступа горизонтальна, то сила, действующая на систему, направлена вертикально. Все скорости после удара направлены вертикально. Момент импульса относительно точки удара сохраняется, так как силами тяжести при ударе можно пренебречь по сравнению с реакцией со стороны выступа. Обозначая скорость центра масс системы после удара  $v_k$ , а угловую скорость вращения системы относительно центра масс  $\omega$ , получаем

$$3mv_0l = 3mv_kl + 2ml^2\omega. \quad (6.22)$$

Откуда

$$v_0 - v_k = (2/3)l\omega. \quad (6.23)$$

Сохранение механической энергии дает

$$3m v_0^2/2 = 3m v_k^2/2 + 2ml^2 \omega^2/2. \quad (6.24)$$

Используя (6.23), получаем

$$v_0 + v_k = l\omega. \quad (6.25)$$

Исключая скорость после удара, имеем

$$\omega = (6/5)v_0/l. \quad (6.26)$$

Если соударение происходит не с массивным выступом, а с телами конечной массы (№ 6.12, 6.13, 6.15, 6.16), то необходимо еще использовать закон сохранения импульса.

В некоторых случаях уравнение вращательного движения (6.1) удобно записать относительно мгновенного центра вращения. Тогда необходимо учитывать момент инерциальных сил. Например, цилиндр радиусом  $r$  вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью  $\omega_0$ . Вместе с ним на тонкой (невесомой) нерастяжимой нити длиной  $l \gg r$ , прикрепленной одним концом к поверхности цилиндра, вращается небольшой шарик (обозначим его массу  $m$ ). Внезапно цилиндр останавливается. Найдем, через какое время нить намотается на цилиндр (№ 6.10). На рис. 6.8 показаны три положения шарика: (1) в момент остановки вращения цилиндра, (2) в момент, когда прекращается его движение по окружности радиусом  $l$ , (3) в момент, когда уже часть нити намоталась на цилиндр. От положения (1) до положения (2) шарик будет двигаться с постоянной по абсолютной величине линейной скоростью, приобретенной к моменту остановки цилиндра,  $\omega_0(l+r)$ , и четверть окружности радиусом  $l$  пройдет за время  $t_1 = (\pi/2)l/[\omega_0(l+r)] \approx \pi/(2\omega_0)$ . Если дальнейшее движение описывать уравнением (6.1) относительно мгновенного центра вращения, то надо учитывать ускорение этого центра  $\omega^2r$ , меняющееся со временем из-за изменения угловой скорости. В произвольный момент, когда нить повернется на угол  $\phi$ , момент импульса шарика  $L = m(l - r\phi)^2\omega$ . Уравнение движения шарика с учетом момента инерциальных сил

$$d[m(l - r\phi)^2\omega]/dt = -m(l - r\phi)\omega^2.$$

Учитывая, что  $\omega = d\phi/dt$ , получаем

$$d\omega/\omega = -d\phi/(\phi - l/r).$$

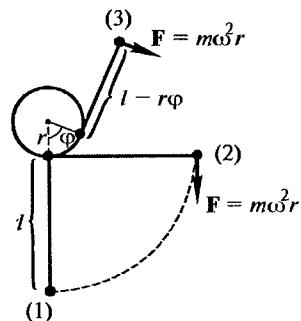


Рис. 6.8

Откуда

$$\omega(\varphi - l/r) = \text{const} = -\omega_0 l/2 \text{ и } \omega/\omega_0 = 1/(1 - \varphi r/l).$$

Выражая  $\omega$  как производную  $\varphi$  по  $t$ , имеем

$$r\omega_0 t = l/2 \text{ и } t_2 = l/(2r\omega_0).$$

Полное время равно сумме двух времен  $t_1$  и  $t_2$ .

## 7. ГРАВИТАЦИЯ (ТЯГОТЕНИЕ)

Между телами существует взаимодействие, называемое тяготением, или гравитацией. Роль зарядов, определяющих силу взаимодействия между телами, как установлено теперь с большой точностью, играют массы — характеристики инертности, входящие во второй закон Ньютона.

На основании имевшихся экспериментальных измерений и наблюдений за движением небесных тел Ньютон установил **закон всемирного тяготения**: сила притяжения между телами пропорциональна их массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Предполагается, что тела являются точечными, т. е. их размеры значительно меньше расстояний между ними. Для силы  $F$ , действующей на массу  $m_2$  со стороны массы  $m_1$ , имеем

$$F = -\gamma(m_1 m_2 / r^2)(\mathbf{r}/r). \quad (7.1)$$

Здесь вектор  $\mathbf{r}$  идет от первой массы ко второй, и так как сила притяжения  $F$  направлена к первой массе, то перед правой частью равенства стоит минус (такая же, но противоположно направленная сила действует на первую массу). Постоянную тяготения  $\gamma$ , впервые определенную Кавендишем с помощью лабораторных измерений, в настоящее время принимают равной  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ .

Экспериментально установлено, что для сил тяготения выполняется **суперпозиция** (геометрическое сложение сил от разных масс). Интегрирование позволяет находить силы тяготения между телами любой формы. Для сферически симметричных тел получается формула (7.1), в которой  $r$  — расстояние между центрами тел.

Необходимо отметить и некоторый новый аспект описания реальности. Одна отдельная масса меняет свойства окружающего ее пространства, создает **поле тяготения**. Характеристикой поля является его **напряженность**, выражение для которой легко получается из (7.1):

$$\mathbf{g} = F/m_2 = -\gamma(m_1/r^2)(\mathbf{r}/r). \quad (7.2)$$

Такая сила будет действовать на единичную (пробную) массу, если она окажется в этом поле. Эта величина является также ускорением свободного падения в поле тяжести.

Из суперпозиции и (7.2) можно получить **теорему Гаусса** для потока вектора напряженности поля через замкнутую поверхность. Потоком называется скалярное произведение вектора на площадку, через которую вектор как бы протекает. Площадке при этом соответствует вектор, по величине равный ее площади и направленный к ней по нормали (для кривой поверхности по внешней нормали). Для меняющегося по пространству поля в случае потока через площадки конечной величины надо вычислять интеграл по бесконечно малым площадкам. Используя выражение (7.2), для потока от точечной массы через замкнутую поверхность, получаем

$$\oint \mathbf{g} d\mathbf{S} = -\oint g dS_g = -\oint \gamma m_1 dS_g / r^2 = -\oint \gamma m_1 d\Omega = -4\pi \gamma m_1.$$

Здесь минус появляется из-за того, что направление поля противоположно направлению внешней нормали к поверхности,  $d\Omega$  — телесный угол из точечной массы на бесконечно малую площадку поверхности.

Используя суперпозицию, для любой массы  $m$  (суммы масс) внутри замкнутой поверхности получаем **теорему Гаусса**:

$$\oint \mathbf{g} d\mathbf{S} = -4\pi \gamma m. \quad (7.3)$$

Теорема Гаусса может быть полезна для вычисления напряженности поля в тех случаях, когда легко вычислить интеграл. Например, в случае симметрии поля: сферической, цилиндрической или плоской.

В случае **сферической симметрии** напряженность одинакова для всех направлений на одном и том же расстоянии  $r$  от центра симметрии, и для переменной плотности вещества  $\rho$  получаем

$$-g(r)4\pi r^2 = -4\pi \gamma \int_0^r \rho(r)4\pi r^2 dr.$$

Откуда

$$g(r) = (1/r^2)4\pi \gamma \int_0^r \rho(r)r^2 dr. \quad (7.4)$$

Для **постоянной плотности** имеем линейную зависимость:

$$g(r) = (4/3)\pi \gamma \rho r.$$

В векторном виде

$$\mathbf{g}(r) = -(4/3)\pi \gamma \rho \mathbf{r}. \quad (7.5)$$

Если плотность отлична от нуля только до некоторого  $R$ , то далее из (7.4) следует

$$\mathbf{g}(r) = -(4/3)\pi R^3 \gamma \rho \mathbf{r} / r^3 = -\gamma(m/r^2)(\mathbf{r}/r). \quad (7.6)$$

Это совпадает с выражением (7.2) для точечной массы. Отсюда для взаимодействия двух сферически симметричных распределений масс (шаров) получаем взаимодействие такое же, как для точечных масс. Логика такая: поле первой массы такое же, как от точечной, значит, сила взаимодействия та же, что для точечной и второй массы. Но силу со стороны второго тела на точечную массу вычисляем по полю от второй массы, которое такое же, как для точечной массы, равной массе второго тела.

На рис. 7.1 показано изменение поля тяготения в случае шара радиусом  $R$  постоянной плотности.

Из (7.6) получаем, что отношение расстояний, на которых одинаковая напряженность поля для разных масс, равно квадратному корню из отношения масс.

Отсюда можно определить, например, на каком расстоянии суммарное поле Земли и Луны равно нулю (№ 7.123).

У многих шарообразных тел, в частности у планет Солнечной системы, плотность вещества уменьшается с расстоянием от центра. При линейной зависимости (№ 7.139)

$$\rho(r) = \rho_1 - (\rho_1 - \rho_2)r/R, \quad (7.7)$$

из (7.4) получаем

$$g(r) = (4/3)\pi\gamma[\rho_1r - 3(\rho_1 - \rho_2)r^2/(4R)]. \quad (7.8)$$

Приравнивая производную по радиусу нулю, находим, что при

$$r_m = (2/3)\rho_1 R / (\rho_1 - \rho_2) \quad (7.9)$$

имеем максимальную напряженность поля тяготения. Заметим, что (7.8) и (7.9) получены для  $r < R$ , и чтобы возникла максимум в этой области, должно быть  $\rho_1/\rho_2 > 3$ .

Для реальной Земли плотность с глубиной увеличивается, в некоторых местах скачками, поэтому под поверхностью напряженность поля тяготения не уменьшается, как должно быть для постоянной плотности, а немного возрастает.

Изменение плотности скачком от  $\rho_1$  до  $\rho_2$  при некотором  $r_1$  (№ 7.140) приводит к излуку в зависимости  $g(r)$ . При  $0 < r < r_1$  имеем  $g(r) = (4/3)\pi\gamma\rho_1r$ , а при  $r_1 < r < R$  из (7.4) получаем

$$g(r) = (4/3)\pi\gamma\rho_2r + (4/3)\pi\gamma(\rho_1 - \rho_2)r^3/r^2.$$

Эта зависимость будет приводить к увеличению напряженности поля при увеличении расстояния от центра, если производная по  $r$  боль-

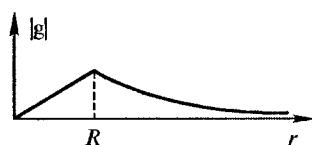


Рис. 7.1

ше нуля, т. е. при  $\rho_1/\rho_2 < 1,5$ . Если это не выполняется, то максимальное значение напряженности поля будет при  $r_1$ .

По измеренной зависимости  $g(r)$  из (7.4) дифференцированием получаем изменение плотности (№ 7.133).

Зная изменение напряженности поля, можно найти, например, период колебаний математического маятника на башне или в шахте (№ 7.135).

Найдем гравитационное давление в центре Земли в предположении постоянной плотности (№ 7.132). Считаем Землю однородным шаром радиусом  $R = 6400$  км и плотностью  $\rho = 5,5$  г/см<sup>3</sup>. Основное уравнение получаем из рассмотрения равновесия элемента массы в виде столбика вдоль радиуса  $r$  высотой  $dr$  и единичной площадью сечения (рис. 7.2). Давление зависит только от  $r$ , и при увеличении  $r$  на  $dr$  оно изменяется на  $dp$ . Тогда для равновесия в поле тяжести получаем  $\rho dr g = p - (p + dp)$ . Откуда  $dp = -\rho g dr$ . Знак минус показывает, что с увеличением  $r$  давление падает. Интегрируем это уравнение, учитывая, что на поверхности Земли давление равно нулю (атмосферным давлением пренебрегаем), а ускорение свободного падения  $g = -g_0 r/R$  ( $g_0$  — напряженность гравитационного поля или ускорение свободного падения на поверхности Земли):

$$p(r) = -\rho g_0 / R \int_R^r r dr = \rho g_0 (R^2 - r^2) / (2R).$$

Откуда давление в центре Земли  $p(0) = \rho g_0 R / 2 = 2 \cdot 10^6$  атм.

Следует отметить, что, так как в действительности плотность Земли с глубиной увеличивается и зависимость  $g(r)$  имеет максимум на некоторой глубине, то давление в центре Земли по более точным расчетам получается несколько большим.

Рассмотрим движение малой массы по тонкому гладкому прямолинейному каналу внутри однородного массивного шара (например, в Земле). На рис. 7.3 изображена диаметральная плоскость, проходящая через канал. Ось  $x$  вдоль канала отсчитываем от его середины. Сила, действующая на массу  $m$ , равна  $mgr/R$ , а ее составляющая вдоль канала  $F = mg(r/R)(x/r) = mgx/R$ . Из второго закона Ньютона получаем

$$d^2x/dt^2 + (g/R)x = 0. \quad (7.10)$$

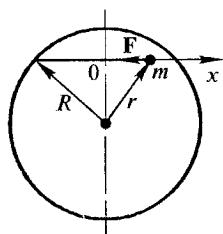


Рис. 7.3

Замечательно, что период этих колебаний (№ 7.137)

$$T = 2\pi(R/g)^{1/2} \quad (7.11)$$

не зависит от их амплитуды и от того, где проходит канал, в частности, он может проходить и через центр шара (№ 7.129).

При падении по диаметральному каналу двух одинаковых масс, связанных пружиной жесткостью  $k$ , для которых период колебаний  $T_0 = 2\pi[m/(2k)]^{1/2}$ , получаем деформацию пружины из-за неоднородности поля. Так как сила  $F = mgr/R$ , то ее изменение на длине пружины  $l_0$  равно  $\Delta F = mgl_0/R = k\Delta l$ . Откуда относительное сжатие пружины (№ 7.128)  $\Delta l/l_0 = mg/(kR)$ .

Переходя в уравнении (7.10) к скорости  $v = dx/dt$ , получаем

$$vdv + (g/R)x dx = 0.$$

После интегрирования

$$v^2 + (g/R)x^2 = \text{const.} \quad (7.12)$$

Это позволяет определять скорости в зависимости от дополнительных условий. Если при  $x = R$  скорость равна нулю, то в центре она равна  $v_{\text{ц}} = (gR)^{1/2}$ . Если в центре скорость равна  $2v_{\text{ц}}$ , то на поверхности (№ 7.134) она равна  $(3gR)^{1/2}$ .

Рассмотрим, какая напряженность поля в сферических полостях внутри шаров постоянной плотности.

Если центр полости совпадает с центром шара, то поля в полости нет, в окружающем ее сферическом слое вещества напряженность поля нарастает нелинейно, в соответствии с (7.4), а за границей шара падает, как от точечной массы.

Для полости, центр которой отстоит на  $a$  от центра шара (№ 7.125), воспользуемся суперпозицией полей для шара и «отрицательной» массы в объеме полости. Тогда поле внутри полости (рис. 7.4) определяется уравнением

$$\mathbf{g} = -(4/3)\pi\mu\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ц}}) = -(4/3)\pi\mu\rho\mathbf{a}. \quad (7.13)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_{\text{ц}}$  — расстояния до произвольной точки внутри полости от центра шара и центра полости,  $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ц}}$  — вектор расстояния от центра шара до центра полости.

Оказывается в полости поле постоянно по направлению и величине и определяется величиной и направлением вектора  $\mathbf{a}$ . Это поле определяет движение тел в полости и период колебаний помещенного в нее математического маятника (№ 7.131).

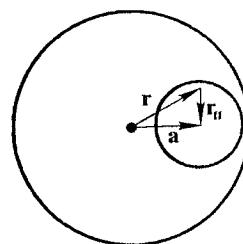


Рис. 7.4

Рассмотрим случай **осевой симметрии** в распределении вещества (цилиндрической симметрии). Поток и массу вычисляем на единицу длины вдоль оси симметрии. Из (7.3) получаем

$$-g(r)2\pi r = -4\pi \int_0^r \rho(r) 2\pi r dr.$$

Откуда

$$g(r) = (1/r) 4\pi \int_0^r \rho(r) r dr. \quad (7.14)$$

Внутри цилиндра при постоянной плотности

$$g(r) = -2\pi \gamma r. \quad (7.15)$$

Вектор  $\mathbf{g}$  направлен противоположно вектору  $\mathbf{r}$  (т. е. к оси симметрии). Линейность, как и в случае шара, приводит к постоянному полю в цилиндрических полостях, оси которых параллельны оси симметрии цилиндра. Вокруг цилиндра конечного радиуса напряженность, как следует из (7.14), определяется массой, приходящейся на единицу длины:

$$g(r) = 2\gamma m/r. \quad (7.16)$$

Для цилиндра конечных размеров эту формулу можно использовать на расстояниях от оси много меньших длины цилиндра. Изменение поля вдоль оси симметрии на расстояниях, значительно больших радиуса цилиндра, можно найти, вычисля силу взаимодействия между точечной массой  $m$  и тонким стержнем массой  $M$  и длиной  $L$ , центр масс которого находится на расстоянии  $r$  от  $m$ . Ось стержня направлена вдоль линии, проходящей через  $m$  (рис. 7.5).

Используя закон тяготения для взаимодействия массы  $m$  с любым малым элементом стержня и принцип суперпозиции, находим суммарную силу, действующую на массу  $m$ :

$$F = - \int_{r-L/2}^{r+L/2} \gamma m M dx / (Lx^2) = -\gamma m M / (r^2 - L^2/4).$$

Отсюда следует, что при вычислении силы взаимодействия массу стержня можно считать сосредоточенной в центре масс только в

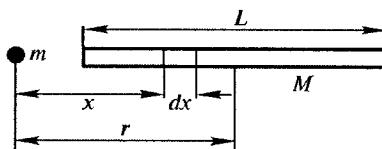


Рис. 7.5

случае  $r \gg L$ . Отметим, что если ось стержня не направлена вдоль или перпендикулярно линии, соединяющей  $m$  и центр массы стержня, то на него действует еще момент сил (вызванный неоднородностью поля тяготения от точечной массы).

Таким образом, поле от цилиндра (стержня) убывает сильнее, в направлении его оси и медленнее в направлении, перпендикулярном оси. В итоге на значительных расстояниях изменение поля происходит по закону обратных квадратов.

Если вокруг бесконечно длинного цилиндра в поле (7.16) по круговой орбите вращается небольшое тело массой  $m$ , то движение его описывается уравнением

$$mv^2/r = m2\gamma\mu/r.$$

Видно, что скорость не зависит от расстояния, а зависит только от погонной массы. По скорости вычисляем период обращения  $T = 2\pi r/v$  (№ 7.142).

Тело, пролетающее мимо прямолинейного массивного образования бесконечной длины (струны), получает скорость в направлении этого образования. В результате направление скорости тела изменяется на некоторый угол  $\phi$ . Если тело пролетает на значительном расстоянии от струны, то можно считать, что скорость  $v$  меняется только в перпендикулярном направлении (поворачивает) (№ 7.144). Движение в перпендикулярном направлении определяется компонентой поля (7.16)

$$mdv_1/dt = m2\gamma\mu \sin\alpha/r = 2m\gamma\mu \sin^2\alpha/b.$$

Здесь  $\alpha$  — угол между осью  $x$ , по которой летело тело, если бы не было влияния струны, и направлением на ось струны;  $b = rsin\alpha$  — так называемое прицельное расстояние. Считая продольную скорость тела (вдоль оси  $x$ ) постоянной, заменяем  $dt$  на  $dx/v$ . Если за нуль на оси  $x$  взять точку, ближайшую к струне, то

$$\sin^2\alpha = b^2/(b^2 + x^2).$$

Интегрируя по  $x$  от минус бесконечности до плюс бесконечности, получаем  $v = 2\pi\gamma\mu/v$ . Для поворота скорости  $\Delta\phi \approx v_1/v = 2\pi\gamma\mu/v^2$ .

Поле внутри шара постоянной плотности определяется по (7.5). Если по диаметру шара просверлено отверстие, диаметр которого значительно меньше диаметра шара, то поле внутри отверстия определяется по (7.15) с отрицательной плотностью (той же по абсолютной величине). Суперпозиция (сложение) позволяет найти поле, например, в точке на поверхности отверстия, ближайшей к центру шара (№ 7.130).

Если цилиндрический тоннель проходит под поверхностью земли (№ 7.136), то его влияние на поле над поверхностью определяется по (7.15) с отрицательной массой.

Аналогичным образом можно найти поле в сферической полости внутри длинного цилиндра (№ 7.143).

В случае распределения вещества симметрично относительно плоскости поле направлено всегда к плоскости симметрии. Из (7.3) поток через площадку  $S$  равен

$$-2gS = -4\pi\rho S 2x,$$

или

$$g = 4\pi\rho rx. \quad (7.17)$$

Обратим внимание, что так же, как в случаях сферической и цилиндрической симметрии, наблюдается линейность поля по расстоянию от оси симметрии. Вне плоского бесконечного слоя вещества поле постоянно и равно его значению на границе.

В плоском слое однородного вещества внутри тонкого гладкого канала, перпендикулярного к плоскости симметрии, колебания небольшого тела (№ 7.141) описываются уравнением

$$d^2x/dt^2 + 4\pi\rho rx = 0. \quad (7.18)$$

Отсюда можно найти период колебаний.

Работа против силы тяжести (гравитации), как известно, приводит к увеличению потенциальной энергии  $U$ . Силы поля гравитации совершают работу за счет уменьшения потенциальной энергии взаимодействия между телами

$$\mathbf{F} d\mathbf{r} = -dU. \quad (7.19)$$

Используя (7.1), для точечных масс получаем

$$U_2 - U_1 = \gamma m_1 m_2 (1/r_1 - 1/r_2). \quad (7.20)$$

Вблизи поверхности Земли (радиус  $R$ )  $r_1 = R$ ,  $r_2 = R + h$  и тогда  $U_2 - U_1 = m_2 gh$ .

Для характеристики поля вокруг массой  $m$  удобно ввести потенциал взаимодействия с единичной массой ( $m_1 = m$ ,  $m_2 = 1$ ) и учесть, что взаимодействие равно нулю ( $U_2 = 0$ ) при  $r_2 = \infty$ . В таком случае для изменения потенциала поля с расстоянием получаем

$$\phi = U/m_2 = -\gamma m/r. \quad (7.21)$$

Такую работу совершают поле при переходе единичной массы из бесконечности на расстояние  $r$  от  $m$ . Обратим внимание, что и по-

тенциал, и потенциальная энергия в гравитационном поле являются отрицательными величинами. Это связано с выбором начала отсчета. Работу сил определяет только изменение энергии.

Соединение масс создает систему, обладающую энергией связи, в данном случае называемой гравитационной энергией. Это значит, чтобы разделить, например, однородный шар на бесконечно удаленные друг от друга частицы, надо затратить работу. Подсчитаем эту работу (гравитационную энергию) для шара радиусом  $R$  и массой  $M$  с постоянной плотностью (№ 7.124). Так как гравитационное поле потенциальное, т. е. работа не зависит от пути, по которому работа совершается, а зависит только от начального и конечного положений, то можно взять удобный способ разделения шара. Будем удалять на бесконечность последовательно тонкие поверхностные слои. На удаляемый слой действуют только силы со стороны массы, находящейся внутри него, и не действуют ранее удаленные. В произвольный момент радиус шара  $r$  и масса  $m = M(r/R)^3$ , а масса удаляемого слоя  $dm = 3Mr^2dr/R^3$ . Используя (7.21), получаем

$$U = -3\gamma \left( M^2/R^6 \right) \int_0^R r^4 dr = (3/5)\gamma M^2/R.$$

Энергия связи в Земле приводит к существенному выделению тепла при опускании более тяжелых частей (фрагментов) ближе к центру (акреция).

На рис. 7.6 показано, как меняется в соответствии с (7.19), (7.6) и (7.5) потенциал вне и внутри однородного шара. Удобно в формулу (7.21), пользуясь (7.2), ввести значения напряженности поля  $g_0$  на поверхности шара радиусом  $R$ :

$$\phi = -g_0 R^2/r. \quad (7.22)$$

Потенциальная энергия тела (точки) массой  $m$  равна  $m\phi = -mg_0 R^2/r$  (№ 7.4).

Когда под поверхностью Земли находится более плотный шар, то он создает большую напряженность поля гравитации. Если над поверхностью находятся подвижные частицы, например жидкости, то они будут притягиваться в область над шаром до тех пор, пока их потенциальная энергия не станет такой же, как у частиц, которые находятся вдали от шара. Дополнительная масса  $m$  в области, где находится шар, определяется разностью плотностей шара и окружающей сре-

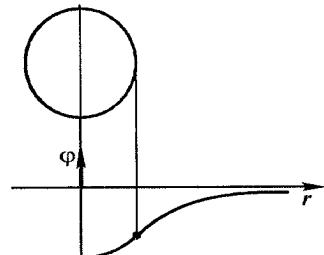


Рис. 7.6

ды  $\Delta\rho$  и радиусом шара  $R$  и равна  $m = (4/3)\pi R^3 \Delta\rho$ . Потенциал от этой добавки должен быть равен потенциальну от превышения на  $z$  уровня жидкого слоя, толщина которого  $H$  (когда шар находится непосредственно под жидким слоем):

$$\gamma m/(R + H) \approx gz.$$

Отсюда найдем превышение уровня (№ 7.138).

Для потенциала, так же как для гравитационных сил, существует суперпозиция. Однако потенциалы являются скалярными функциями и просто складываются.

Вычислим, например, разность потенциалов между поверхностями Луны и Земли, расстояние между которыми обозначим  $l$ . На поверхности Луны потенциал

$$\Phi_2 = -g_3 R_3^2 (R_3 + l) - g_{\text{Л}} R_{\text{Л}},$$

а на поверхности Земли

$$\Phi_1 = -g_3 R_3 - g_{\text{Л}} R_{\text{Л}}^2 / (R_{\text{Л}} + l).$$

Работа по перемещению единицы массы равна разности потенциалов. Пренебрегая членами, в которых в знаменателе стоит расстояние между Землей и Луной, получаем (№ 7.120) разность потенциалов:

$$\Phi_2 - \Phi_1 \approx g_3 R_3 - g_{\text{Л}} R_{\text{Л}}.$$

Рассмотрим теперь движение тел массой  $m$  и  $M$  при гравитационном взаимодействии.

В отсутствие других сил движение будет определяться центральными силами, направленными к центру масс системы, который будет оставаться неподвижным. Если одна масса значительно превосходит другую, то ее можно считать неподвижной. В случае точечных или сферически симметричных тел их взаимное притяжение описывается (7.1), которое удобно записать в следующем виде:

$$F = \gamma m M / r^2 = mg_0 R_0^2 / r^2. \quad (7.23)$$

Здесь напряженность поля на поверхности тела массой  $M$  радиусом  $R_0$

$$g_0 = \gamma M / R_0^2. \quad (7.24)$$

При движении по окружности связь между радиусом этой окружности  $r$  и скоростью движения  $v$  описывается вторым законом Ньютона (с использованием закона тяготения)

$$mV^2/r = \gamma m M / r^2 = mg_0 R_0^2 / r^2. \quad (7.25)$$

Вводя период обращения

$$T = 2\pi r/v, \quad (7.26)$$

получаем

$$r^3/T^2 = \gamma M/(4\pi^2) = g_0 R_0^2/(4\pi^2). \quad (7.27)$$

Скорость движения спутника по круговой орбите близкой к поверхности Земли (первая космическая) из (7.25):

$$v_1 = (g_0 R_0)^{1/2}. \quad (7.28)$$

Отсюда можно получить период обращения (№ 7.127):

$$T_1 = 2\pi R_0/v_1 = 2\pi(R_0/g_0)^{1/2}. \quad (7.29)$$

Этот период совпадает с периодом колебаний в канале внутри Земли (7.11). Если плотность увеличивается с глубиной, то  $g(r)$  имеет максимум внутри планеты, и, так как на поверхности и вне поле зависит только от общей массы и одинаково для разных распределений внутри, то, следовательно, поле в любой точке внутри будет превосходить линейное поле от однородной плотности. Это можно продемонстрировать для планеты, у которой плотность меняется линейно с глубиной (7.7). Значение напряженности поля (ускорение свободного падения) (7.8) во всех точках будет больше линейного значения для постоянной средней плотности. При движении с большим ускорением время будет меньше.

Период обращения близкого к поверхности планеты спутника, как следует из (7.27), зависит только от средней плотности планеты:

$$T_1 = [3\pi/(\gamma\rho)]^{1/2}. \quad (7.30)$$

Это соотношение можно использовать для оценки периода обращения близкого спутника нейтронной звезды (№ 7.9, № 7.29).

По радиусам орбит и периодам обращения спутников разных планет с помощью (7.27) можно найти отношение масс планет (№ 7.28).

Из (7.29) можно найти радиус **стационарной орбиты**, когда спутник, двигаясь по окружности в плоскости экватора, остается над одной и той же точкой поверхности, т. е. период обращения равен для Земли одним суткам (№ 7.30).

Если известно отношение радиуса орбиты спутника к радиусу планеты и период обращения, то можно из (7.27) найти среднюю плотность планеты (№ 7.155).

Соотношение между радиусами орбиты  $R$  и планеты (звезды)  $r$  могут быть заданы более сложным образом. Например, по измере-

нию с большого расстояния периода обращения  $T$  и времени невидимости спутника за планетой  $\tau$  (№ 7.154). Если  $\tau \ll T$ , то скорость прохождения за планетой равна орбитальной:  $2r/\tau = 2\pi R/T$ .

При движении тела массой  $m$  в поле тела массой  $M \gg m$  закон сохранения механической энергии (суммы кинетической и потенциальной) имеет вид:

$$mv^2/2 - \gamma m M/r = E = \text{const.} \quad (7.31)$$

Иногда потенциальную энергию удобно выражать, используя (7.24) и (7.28).

При движении по окружности выполняется (7.25). Поэтому из (7.31) следует, что полная энергия  $E$  равна кинетической  $K$  с обратным знаком (№ 7.23) и потенциальная  $P$  удвоенной кинетической с обратным знаком:

$$E = -K = -mv^2/2 = P/2; P = -2K. \quad (7.32)$$

Если на бесконечном расстоянии скорость была равна нулю, то из (7.31) при  $r = R_0$  она равна

$$v = (2\gamma M/R_0)^{1/2} = (2g_0 R_0)^{1/2}.$$

Зная, что с такой скоростью тело входит в канал внутри однородного шара, можно с помощью (7.12) определить скорость в центре шара (№ 7.126).

Рассмотрим случай, когда маленький шарик массой  $m$ , имеющий на бесконечности скорость  $v_0$ , пролетает через шар массой  $M$  и радиусом  $R$ , в котором вдоль диаметра просверлен канал в направлении движения шарика. Принимая во внимание гравитационное взаимодействие между шариками, определим их относительную скорость в момент, когда маленький шарик пролетает через центр большого шара. Начальную скорость большого шара считаем равной нулю (№ 7.117).

При вычислении потенциальной энергии взаимодействия необходимо учесть, что сила притяжения действует и при движении маленького шарика внутри большого. Поэтому

$$U = -\int_{-\infty}^R \mathbf{F} dr - \int_R^0 \mathbf{F} dr = (3/2) \gamma m M / R.$$

Обозначая  $v_1$  и  $v_2$  скорости шаров в системе центра масс, имеем  $mv_1 = Mv_2$ ;  $v_{\text{отн}} = v_1 + v_2$ , кинетическая энергия шаров в системе центра масс (относительная)

$$E_{\text{отн}} = mv_1^2/2 + Mv_2^2/2 = mM/(m+M)v_{\text{отн}}^2/2.$$

Из закона сохранения энергии

$$mv_0^2/2 = - (3/2) \gamma m M/R + E_{\text{отн}} + E_c,$$

где кинетическая энергия движения системы в целом  $E_c = (m+M)v_c^2/2$  и импульс системы  $(m+M)v_c = mv_0$ , получаем

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v_0^2 + 3\gamma(m+M)/R}.$$

При пролете маленького шарика через **тёкое кольцо** массой  $M$  и радиусом  $R$  (по оси его симметрии) задача упрощается, так как потенциал в плоскости кольца на оси симметрии равен  $\gamma M/R$ .

Возможны и более экзотические зависимости для силы при одномерном движении. Например, тело массой  $m$  влетает в пространство, в котором на него будет действовать сила притяжения к точке влета  $F = \alpha m/x^3$ . Здесь  $x$  — расстояние от точки влета. Если задано расстояние  $L$ , на которое тело углубляется в это пространство, то можно найти время возвращения  $T$  (№ 7.118). Уравнение движения  $mdv/dt = -\alpha m/x^3$  можно записать в виде  $vdv/dx = -\alpha m/x^3$ . Разделяя переменные и используя, что при  $x = L$  скорость  $v = 0$ , получаем

$$v^2 = \alpha(1/x^2 - 1/L^2) = \alpha(L^2 - x^2)/(Lx)^2.$$

Вблизи точки влета имеется особенность, которая не влияет на дальнейшее интегрирование  $xdx/dt = [\alpha(L^2 - x^2)]^{1/2}/L$ . Время до остановки  $t = L^2/(\alpha)^{1/2}$ . Все время  $T$  (до выхода) в два раза больше.

Если космический корабль свободно падает на Землю из удаленной точки на расстоянии  $r$ , то расстояние, на котором его можно перевести на круговую орбиту, изменив только направление скорости на  $90^\circ$ , определяется из (7.31) и (7.25)  $E = -\gamma m M/r_1 = -\gamma m M/(2r_2) - \gamma m M/r_2$  (№ 7.37).

При вертикальном движении, например, ракеты с **постоянной перегрузкой**  $n$  (№ 7.2 и № 7.3) уравнение движения

$$mdv/dt = mdv/dr = nmg_0 - mg_0 R_0^2/r^2 \quad (7.33)$$

интегрируется с учетом того, что в начальный момент скорость ракеты была равна нулю. Ракета уйдет в бесконечность, если в (7.31)  $E = 0$ , и вернется на Землю, если  $E < 0$ . Для подсчета в одном случае по заданной скорости определяем расстояние (и, следовательно, потенциальную энергию), в другом по заданному расстоянию — скорость.

**Второй космической скоростью** называется скорость тела, при которой оно уходит с поверхности планеты на бесконечно большое расстояние, и там его скорость равна нулю, т. е.  $E = 0$ . Из (7.31) и (7.24)

$$v_2 = (2g_0 R_0)^{1/2}. \quad (7.34)$$

Зная примерную высоту прыжка человека на Земле ( $h$ ), можно вычислить начальную скорость, создаваемую работой мышц  $v = (2g_{\text{Земли}} h)^{1/2}$ , и сравнить ее со второй космической скоростью для каких-то, например, астероидов (№ 7.1), которые человек пытается покинуть подпрыгнув.

Если для какой-то планеты известны радиус орбиты и период обращения спутника, то по (7.27) и (7.28) находим первую космическую скорость. Вторая в  $\sqrt{2}$  раз больше (№ 7.36).

Так как вторая космическая скорость определяется потенциальной энергией в точке запуска, то при неравномерном распределении гравитационного потенциала она будет наименьшей в точке наименьшего потенциала. Для планеты радиусом  $R_0$  с полостью радиуса  $\alpha R_0$ , заполненной веществом с большей в  $\beta$  раз плотностью, касающейся поверхности планеты, можно найти минимальный потенциал на поверхности (№ 7.159). Он будет в точке поверхности на диаметре, проходящем через центры планеты и полости. Обозначая массу, которая была бы у однородной планеты  $M$ , и вторую космическую скорость  $v_0$  и используя суперпозицию, для потенциала получаем  $\phi = -\gamma M/R_0 + \gamma\alpha^3(1-\beta)M/(\alpha R_0) = -(v_0^2/2)[1-(1-\beta)\alpha^2]$ . По этому потенциалу определяются удельная кинетическая энергия  $v^2/2 = -\phi$  и вторая космическая скорость  $v$ .

Третьей космической скоростью называется минимальная скорость, которую надо сообщить ракете относительно Земли, чтобы ракета навсегда покинула пределы Солнечной системы. Для определения этой скорости  $v$  (№ 7.121) задачу о взаимодействии трех тел разбиваем на две части. Ракета уходит на бесконечное расстояние от Земли и имеет там скорость  $v_\infty^2 = v^2 - 2v_k^2$ . Круговая скорость определяется по (7.25). Далее рассматриваем движение ракеты относительно Солнца. При этом начальное положение ее на орбите Земли, а скорость равна геометрической сумме скорости ракеты относительно Земли ( $v$ ) и скорости орбитального движения Земли относительно Солнца.

В случае если массы тел не сильно отличаются по величине, движение может происходить по окружностям вокруг общего центра масс. Радиусы окружностей обратно пропорциональны массам. Если массы тел  $m_1$  и  $m_2$ , а расстояния их центров (предполагаем, что тела — сферы) от общего центра масс  $r_1$  и  $r_2$ , которые связаны соотношением

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad (7.35)$$

то, учитывая равенство угловых скоростей и обозначая расстояние между центрами масс  $r = r_1 + r_2$ , получаем

$$\omega^2 r_1 = \gamma m_2 / r^2, \quad \omega^2 r_2 = \gamma m_1 / r^2. \quad (7.36)$$

Складывая эти соотношения и разрешая относительно  $r$ , получаем (№ 7.11, 7.12)

$$r^3 = \gamma(m_1 + m_2) / \omega^2. \quad (7.37)$$

Отсюда можно найти суммарную массу, если заданы расстояние между телами и период обращения (угловая скорость), непосредственно (№ 7.41), либо через наблюдаемые с большого расстояния период изменения углового размера системы и сам максимальный угловой размер  $\phi$ , по которому, зная расстояние до системы  $l$ , находим  $r = \phi l$  (№ 7.114).

Если  $m_1 \gg m_2$ , то из (7.35)  $r_2 = m_1 r_1 / m_2 \gg r_1$ . Используя это, получаем из (7.37)  $(m_1 r_1 / m_2)^3 = \gamma m_1 / \omega^2$ . Отсюда можно получить  $m_2$  (№ 7.115).

При неизменном расстоянии можно из (7.37) найти отношение периодов при одинаковых и сильно различающихся массах (№ 7.10).

Рассмотрим теперь сближение двух масс под действием силы притяжения, которые находились на расстоянии  $R$  (№ 7.146, 7.70) либо двигались в соответствии с (7.37) и внезапно остановились (№ 7.145, 7.71). Ускорения к общему центру масс определяются аналогично (7.36). Поэтому суммарное ускорение

$$d^2r/dt^2 = vdv/dr = -\gamma(m_1 + m_2)/r^2. \quad (7.38)$$

Здесь  $r$  — расстояние между массами в произвольный момент времени.

Интегрируя и учитывая, что при  $r = R$  скорость  $v = 0$ , получаем

$$v = [2\gamma(m_1 + m_2)(1/r - 1/R)]^{1/2}. \quad (7.39)$$

Отметим, что тела обладают конечными размерами, и расстояние между ними не может уменьшиться до нуля.

Так как с уменьшением расстояния скорость увеличивается, то для изменения расстояния между телами получаем уравнение

$$dr/dt = -v = -[2\gamma(m_1 + m_2)(1/r - 1/R)]^{1/2}. \quad (7.40)$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение, надо воспользоваться подстановкой  $r = R \sin^2 \theta$ .

Для времени изменения  $r$  от  $R$  до 0 получаем

$$\tau = (\pi/2) R^{3/2} [\gamma(m_1 + m_2)]^{-1/2}. \quad (7.41)$$

Если скорость одного тела не направлена к центру другого, то кроме второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения нуж-

но воспользоваться законом сохранения момента импульса относительно центра сил

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const.} \quad (7.42)$$

Расстояние от центра сил до линии, по которой движется тело на бесконечно большом расстоянии от центра, называется **прицельным**. Под действием силы тяготения направление и величина скорости изменяются, но момент импульса относительно центра сил остается неизменным. Этим можно воспользоваться, например, для определения величины скорости метеорита  $v_0$ , имеющего массу  $m$ , если известно максимальное прицельное расстояние  $R$ , при котором он еще попадает на Землю (№ 7.81). Используя еще и закон сохранения энергии (31), имеем  $mv_0R = mvr$ ;  $mV_0^2/2 = mV^2/2 - \gamma m M/r$ . Здесь  $r$  — радиус Земли,  $v$  — скорость у поверхности Земли. Получаем  $v_0 = [2\gamma M/(R^2 - r^2)]^{1/2}$ .

Если идет поток частиц с известной скоростью в бесконечности, то по этим же формулам можно найти прицельное расстояние и вычислить число **упавших на Землю частиц** (№ 7.84, 7.85, 7.86).

Рассмотрим для примера космическое тело шарообразной формы, имеющее массу  $M$  и радиус  $r$ , равные массе и радиусу Земли. Двигаясь со скоростью  $v_0 = 11,3$  км/с, тело проходит **через облако космической пыли** со средней плотностью  $\rho = 10^{-4}$  кг/м<sup>3</sup> и толщиной вдоль направления движения  $h = 10^9$  м, захватывая частицы пыли (рис. 7.7). Найдем увеличение массы тела, когда оно выйдет из облака.

Сохранение момента импульса космической пылинки относительно центра космического тела позволяет определить расстояние (прицельное) от оси движения тела до частицы, которая пройдет (в системе координат, связанной с Землей) у поверхности Земли  $mv_0R = mvr$ . Скорость  $v$  определяется из закона сохранения энергии:

$$mv_0^2/2 = m v^2/2 - \gamma m M/r.$$

Взаимодействие между пылинками не учитывается. Радиус  $R$  определяет цилиндр, из которого частицы упадут на Землю.

$$\Delta m = \rho \pi R^2 h = 2,6 \cdot 10^{19} \text{ кг.}$$

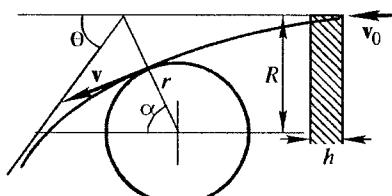


Рис. 7.7

Напомним, что масса Земли  $\sim 6 \cdot 10^{24}$  кг, масса воздуха, окружающего Землю,  $\sim 5 \cdot 10^{18}$  кг. Следует обратить внимание на траекторию частицы, которая при движении касается космического тела. Во-первых, это гипербола, так как на бесконечности частица по условию обладает положительной кинетической энергией. Во-вторых, эта траектория касается тела в точках под некоторым углом  $\alpha$  от оси симметрии задачи. Для гиперболы угол  $\theta$  выражается через  $R$  и  $r$  следующим образом:  $\operatorname{tg}(\theta/2) = (R^2 - r^2)/(2rR)$ . Подставляя значения

$r = 6400$  км,  $R = rv/v_0 = 8960$  км, так как  $v = \sqrt{v_0^2 + 2gR} = 15,8$  км/с, получаем  $\theta = 38,8^\circ$ . Отсюда  $\alpha = 70,6^\circ$ . Этот угол определяет зону тени, в которую частицы пыли не попадают.

Если только два тела с одинаковыми массами  $m$  движутся из бесконечности навстречу друг другу по параллельным траекториям, расстояние между которыми равно  $l$ , каждое со скоростью  $v$ , то для нахождения минимального расстояния между ними (№ 7.5) надо воспользоваться сохранением момента импульса относительно центра масс и сохранением энергии системы. Отмечая минимальное расстояние от центра масс  $r_1$  и скорость в этой точке  $v_1$ , имеем  $2mv_1l/2 = 2mv_1r_1/2$ ,  $2mv^2/2 = 2mv_1^2/2 - \gamma m^2/r_1$ .

Сохранением момента импульса надо воспользоваться и при нахождении радиуса орбиты спутника планеты, который образуется из вещества, сконцентрированного первоначально в кольцевых структурах, вращавшихся вокруг планеты (№ 7.112). Предполагаем, что кольцевая структура — тонкий диск с внутренним радиусом  $r_1$  и внешним радиусом  $r_2$ , имеющий постоянную плотность на единицу площади  $\rho$ , скорости элементов которого определяются условием движения по окружности (7.25). Масса вещества, формирующая спутник,  $m = \rho\pi(r_2^2 - r_1^2)$ . Момент импульса

$$L = \int_{r_1}^{r_2} rv(r)dm = 2\pi(\gamma M)^{1/2} \rho \int_{r_1}^{r_2} r^{3/2} dr = (4/5)\pi(\gamma M)^{1/2} \rho(r_2^{5/2} - r_1^{5/2}).$$

Такими величинами массы и момента импульса должен обладать спутник, а скорость его определяется по (7.25).

Наблюдения движения планет вокруг Солнца и соответствующая обработка позволили Кеплеру сформулировать следующие законы. Первый: каждая планета движется по своему эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Второй: у каждой планеты своя постоянная секториальная скорость. Третий: для всех планет Солнечной системы отношение квадрата периода обраще-

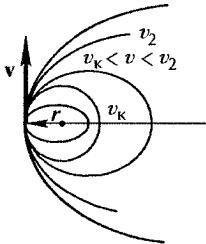


Рис. 7.8

ния к кубу большой полуоси эллипса, по которому движется планета, одно и то же. На основе этих законов Кеплер не сумел получить закон всемирного тяготения. Из-за того, что эллипсы — плоские фигуры, ему казалось, что сила взаимодействия должна убывать обратно пропорциональна первой степени расстояния. Как только Ньютона предположил квадратичный закон, он смог получить все законы Кеплера.

Характер орбит меняется в зависимости от величины начальной скорости баллистического полета. Качественное изменение орбиты происходит при первой и второй космических скоростях (рис. 7.8). Первая космическая скорость (7.28) соответствует движению по окружности  $v_K$ . Она получается из уравнений движения и тяготения и для низких орбит вокруг Земли равна 8 км/с. Вторая космическая скорость  $v_2$  (7.34) получается из закона сохранения энергии и соответствует случаю, когда полная энергия ракеты на бесконечном расстоянии будет равна нулю. Для старта с поверхности Земли вторая космическая скорость равна 11,2 км/с. На рис. 7.8 рассмотрен случай, когда скорость в точке перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку из центра Земли. Если  $v < v_K$ , то движение происходит по эллипсу, дальний фокус которого находится в центре Земли. Если  $v_K < v < v_2$ , то движение осуществляется по эллипсу, ближний фокус которого находится в центре Земли. Если  $v > v_2$ , то движение — по гиперболе. Движение по замкнутым орбитам называется финитным, при этом  $E < 0$ . Отрицательная величина полной энергии связана с выбором отсчета потенциальной энергии, которая отрицательна и достигает нуля только на бесконечности. Напомним, что невесомость в ракете наступает в момент выключения двигателей. Дальнейший полет называется баллистическим. Если можно пренебречь сопротивлением окружающей среды, то на ракету действует только сила тяжести.

Не интегрируя уравнений движения, а пользуясь только законами сохранения энергии и момента импульса и тем, что планета движется вокруг Солнца по эллипсу ( $E < 0$ ), выведем выражение для длины большой оси  $2a$  этого эллипса (№ 7.20).

Для точек пересечения эллиптической орбиты с большой осью (рис. 7.9) законы сохранения энергии (7.31) и момента импульса (7.42) дают  $mv^2/2 - gmM/r = E$  и  $mvr = L$ . Следующее отсюда квадратное уравнение

$$2Er^2/m + 2gMr - (L/m)^2 = 0 \quad (7.43)$$

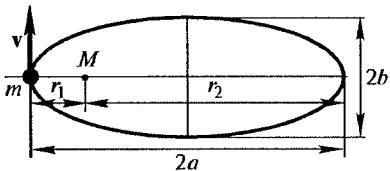


Рис. 7.9

имеет два корня:

$$r_{1,2} = \{-\gamma M \pm [\gamma^2 M^2 + (L/m)^2 2(E/m)]^{1/2}\}/(2E/m), \quad (7.44)$$

которые определяют расстояние точек пересечения орбиты с большой осью от фокуса эллипса. Отсюда

$$2a = r_1 + r_2 = -\gamma m M / E. \quad (7.45)$$

Видно, что длина большой оси эллипса зависит только от полной энергии. Полезно получить выражение для малой полуоси  $b$ :

$$b = \{[(r_1 + r_2)/2]^2 - [(r_2 - r_1)/2]^2\}^{1/2} = (r_1 r_2)^{1/2} = L(-2Em)^{-1/2}. \quad (7.46)$$

Используя выражение для секториальной скорости  $ds/dt = L/(2m)$  и площади эллипса  $S = \pi ab$ , в случае постоянной секториальной скорости (что соответствует постоянному  $L$ ) получаем период

$$T = \pi ab 2m / L = (\pi \gamma M m \sqrt{m}) / \left[ \sqrt{2} (-E)^{3/2} \right] = 2\pi a^{3/2} / (\gamma M)^{1/2}. \quad (7.47)$$

Отсюда третий закон Кеплера:

$$a^3 / T^2 = \gamma M / (4\pi^2). \quad (7.48)$$

Величина в правой части уравнения называется **постоянной Кеплера**.

В случае, когда  $m$  и  $M$  сравнимы по величине, можно воспользоваться (7.37) и записать закон движения:

$$m\omega^2 r = \gamma(m + M)mM / (Mr^2) = \gamma_s m M / r^2.$$

В общем случае вместо ускорения при движении по окружности можно написать ускорение, вызванное силой тяготения. Главное, что вводится эффективная гравитационная постоянная, позволяющая воспользоваться полученными соотношениями для неподвижной массы  $M$ . В таком случае (№ 7.7) закон Кеплера имеет вид:

$$a^3 / T^2 = \gamma(m + M) / (4\pi^2). \quad (7.49)$$

Если при движении по эллипсу заданы максимальное и минимальное удаления от центра сил и одна из скоростей в этих точках,

то другая скорость находится из закона сохранения момента импульса (7.42) относительно центра сил (№ 7.40).

При периодическом движении, каким является движение по эллипсу, через время, равное периоду, значения всех величин повторяются. Это можно отнести и к скалярному произведению импульса  $\mathbf{p}$  на радиус-вектор  $\mathbf{r}$ . Поэтому среднее значение производной по времени от этого произведения

$$(1/T) \int_t^{t+T} d(\mathbf{pr})/dt = \mathbf{p}(t+T)\mathbf{r}(t+T) - \mathbf{p}(t)\mathbf{r}(t) = 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{pr})/dt &= (d\mathbf{p}/dt)\mathbf{r} + (\mathbf{p}d\mathbf{r}/dt) = (\mathbf{Fr}) + (\mathbf{pv}) = \\ &= -\gamma Mm/r + 2K = E + K. \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения кинетической энергии  $K$  и полной  $E$ . Таким образом, для средних значений при движении по эллипсу получаем (№ 7.22)

$$\langle E \rangle + \langle K \rangle = 0. \quad (7.50)$$

То, что в случае движения по окружности выполнялось для самих функций (7.32), при эллиптическом движении выполняется только для средних значений.

В случае, когда  $m$  по величине сравнимо с  $M$ , движение происходит по двум эллипсам, как показано на рис. 7.10, вокруг общего центра масс, который находится в фокусах этих эллипсов. В случае движения по окружностям для скорости массы  $m$  получаем

$$v^2/r_m = \gamma M/r^2,$$

где  $r_m$  — расстояние массы  $m$  от центра масс;  $r$  — расстояние между массами,  $r = r_m(m+M)/M$ .

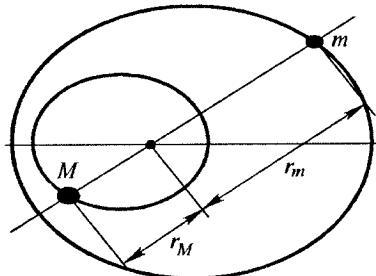


Рис. 7.10

Отсюда скорость

$$v = [M/(m + M)](\gamma M/r_m)^{1/2} \quad (7.51)$$

и период

$$T = 2\pi r_m/V = 2\pi(m + M)r_m \sqrt{r_m}/[M(\gamma M)^{1/2}] \quad (7.52)$$

Обозначая периоды при  $m \ll M$  и  $m = M$  соответственно через  $T_0$  и  $T_1$ , получаем:  $T_0/T_1 = \sqrt{2}$ .

Если для спутника, вращающегося по эллиптической орбите, задана **скорость в точке пересечения орбиты с малой осью** (№ 7.32), то, вычисляя момент импульса как произведение этой скорости на величину малой полуоси и на массу спутника и подставляя в (7.46), а затем в (7.45), получаем величину **большой полуоси**.

При задании скоростей в точках пересечения с большой полуосью (№ 7.31) для нахождения **большой полуоси** надо воспользоваться для этих точек сохранением момента импульса относительно центра сил (центра Земли) и сохранением энергии.

Пользуясь (7.47), по заданным  $r_1$  и  $r_2$  (или периодам обращения по круговым орбитам, по которым сразу определяем эти радиусы) можно найти **период движения по эллипсу и его большую полуось** (№ 7.59, 7.147). Если задан этот период и один из периодов круговых орбит, можно найти другой период круговой орбиты (№ 7.60, 7.148). По параметрам орбиты можно найти массу  $M$  (№ 7.26, 7.27), или полную энергию, а по ней с помощью (7.34) и (7.45) **начальную скорость**, необходимую для вывода на эту орбиту (№ 7.24).

Может возникнуть вопрос: в каком случае дальше от Земли уйдет снаряд, если его посылают с одной и той же скоростью  $v_0$  (больше первой и меньше второй космической) с некоторого возвышения на полюсе (чтобы не влияло вращение Земли) **по направлению радиуса Земли или перпендикулярно ему** (№ 7.33)? При движении по радиусу на максимально далеком расстоянии  $R_1$  скорость снаряда будет равна нулю и из (7.31), обозначая радиус Земли  $R_0$ , получаем

$$m v_0^2/2 - \gamma m M/R_0 = -\gamma m M/R_1.$$

При движении по эллипсу для большой оси из (7.45) и (7.31) имеем

$$2a = -\gamma m M/(m v_0^2/2 - \gamma m M/R_0).$$

Максимальное удаление от центра Земли в этом случае  $R_2 = 2a - R_0$ . Воспользовавшись (7.24), находим отношение расстояний

$$R_1/R_2 = 2g R_0/v_0^2.$$

Видно, что при  $v_0$  равной второй космической скорости расстояния одинаковы и, как известно, равны бесконечности, а при первой космической — отличаются в два раза.

Если снаряды посылают в плоскости экватора: один в сторону вращения Земли, другой против вращения (№ 7.34), то снова можно воспользоваться (7.45), (7.31) и (7.24), учитывая, что начальные скорости, входящие в уравнения, у снарядов разные при одинаковой скорости относительно поверхности Земли.

Этими же формулами можно воспользоваться и при запуске снарядов с двух полюсов в разные стороны, чтобы определить максимальное расстояние между снарядами (№ 7.35).

Под действием импульсов, связанных с работой двигателей, ударов других тел, взрывами и стрельбой, спутники могут переходить на другие орбиты.

Рассмотрим переходы с круговых орбит (см. рис. 7.8). При уменьшении скорости происходит переход на эллиптическую орбиту, которая может перейти в падение по прямой в направлении центра сил. При увеличении скорости можно перейти на эллиптическую, параболическую или гиперболическую орбиты.

При увеличении скорости спутника, врачающегося по круговой орбите радиусом  $R$  с периодом  $T_1$ , в  $\alpha$  раз (№ 7.45) он перейдет на новую орбиту, полная энергия которой  $E_2$  будет складываться из увеличенной в  $\alpha^2$  кинетической  $E_k$  и той же потенциальной, для которой из (7.32) имеем  $E_n = -2E_k$ . Таким образом, для полной энергии новой орбиты получаем

$$E_2 = \alpha^2 E_k + E_n = \alpha^2 E_k - 2E_k = (\alpha^2 - 2)E_k = -(\alpha^2 - 2)E_1.$$

Здесь полная энергия при вращении по круговой орбите  $E_1 = E_k + E_n = -E_k$ . Орбита будет эллиптической, если  $\alpha^2 < 2$ . Из (7.45) имеем

$$a/R = E_1/E_2 = 1/(2 - \alpha^2), \quad (7.53)$$

а из (7.47)

$$T_2/T_1 = (a/R)^{3/2} = (2 - \alpha^2)^{-3/2}. \quad (7.54)$$

Отсюда можно определить и необходимое увеличение скорости для перелета на заданное расстояние и время перелета (№ 7.61, 7.62, 7.72, 7.75, 7.78, 7.96). Скорости можно находить, используя закон сохранения момента импульса (№ 7.63, 7.64). Если заданы величина перигея и скорость в апогее, то уравнение для определения величины апогея (№ 7.149, 7.150) получим с помощью (7.45), (7.31) и (7.24). При заданных величинах перигея и афелия можно найти полную

энергию, а затем кинетические энергии и скорости в перигее и афелии (№ 7.151). Если для тела, движущегося по эллиптической орбите и находящегося в данный момент на известном расстоянии от центра сил (фокуса эллипса), заданы радиальная и тангенциальная скорости, то можно найти полную энергию, затем по (7.45) большую ось и по (7.47) период обращения (№ 7.152, 7.153).

Заданная ошибка в выводе на круговую орбиту (№ 7.91) это, например, заданное отклонение от скорости кругового движения при заданном направлении. Это приводит к движению по эллипсу с большой полуосью  $a$  и малой полуосью  $b$ . Пользуясь (7.53), находим  $a/R$ . В эллипсе  $a^2 = b^2 + (a - R)^2$ . Находим  $b/R$ , а затем  $b/a$ .

Если при выводе на круговую орбиту достигнута соответствующая скорость, но есть отклонение по углу на  $\delta$  (№ 7.92), то, пользуясь (7.45) и (7.46), можем написать

$$b/a \left[ 2(-E) L^2 / (m^3 g_0^2 R_0^4) \right]^{1/2}.$$

Подставляем в уравнение значения расчетной энергии из (7.31) и (7.32)

$$E = -mg_0 R_0^2 / (2R)$$

и момент импульса

$$L = mvR\cos\delta = mR_0(g_0R)^{1/2}\cos\delta.$$

При попадании в спутник микрометеорита с известной массой и скоростью, направленной навстречу скорости спутника (№ 7.90), используется тот же метод.

Если астероид, двигавшийся вокруг Солнца по круговой орбите со скоростью  $v$ , в результате взрыва распадается на две одинаковые части, и одна из них полностью теряет скорость, тогда вторая по закону сохранения импульса увеличивает скорость в два раза (№ 7.18). Потенциальная энергия половинок астероида не изменится, и из (7.25) она отрицательна и равна  $-(m/2)v^2$ . Учитывая увеличение скорости для второй половинки в два раза, получаем

$$E = (m/2)(2v)^2/2 - (m/2)v^2 = mv^2/2 > 0.$$

Движение происходит по гиперболе.

Когда со спутника, движущегося по круговой орбите со скоростью  $v_0$ , стреляют в направлении, составляющем  $120^\circ$  к курсу, то пуля, масса которой значительно меньше массы спутника, при определенной относительно спутника скорости  $v_1$  может уйти в бесконечность (№ 7.44). На рис. 7.11 показаны скорости:  $v_0$  — скорость пули вместе

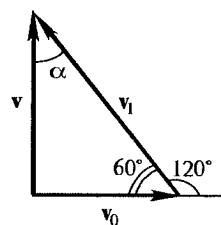


Рис. 7.11

со спутником;  $v_1$  — скорость пули относительно спутника;  $v$  — суммарная скорость пули, которая достаточна, чтобы пуля ушла в бесконечность. Движение пули вместе со спутником вокруг планеты массой  $M$  описывается уравнением  $v_0^2/r = \gamma M/r^2$ . Для ухода пули на бесконечность должно быть  $v^2/2 - \gamma M/r = 0$ . Отсюда  $v/v_0 = \sqrt{2}$ . По теореме синусов  $\sin \alpha = \sin 60^\circ / \sqrt{2}$ . Еще раз используя теорему синусов, получаем

$$v_1/v_0 = (\sqrt{5} + 1)/2.$$

Рассмотрим **соударение** тел (массами  $m_0$  и  $m$ ), движущихся по одной круговой орбите, например, на высоте  $h = 320$  км от поверхности Земли. Найдем минимальную массу, которую должно иметь тело меньшей массы, застревающее в большем теле, чтобы они **вместе упали на Землю** (№ 7.88). Обозначим скорость тел на орбите  $v_0$ , а у поверхности Земли  $v_1$ . Тогда из закона сохранения момента импульса, учитывая, что тела движутся навстречу друг другу

$$(m_0 - m)(R_0 + h)v_0 = (m_0 + m)R_0 v_1.$$

В случае кругового движения из (7.25)

$$v_0^2 = \gamma M/(R_0 + h) = gR_0^2/(R_0 + h).$$

По закону сохранения энергии

$$\begin{aligned} (1/2)(m_0 - m)^2 v_0^2 / (m_0 + m) - (m_0 + m)g_0 R_0^2 / (R_0 + h) = \\ = (m_0 + m)v_1^2 / 2 - (m_0 + m)g_0 R_0. \end{aligned}$$

Обозначая  $\bar{m} = m/m_0$ ,  $\bar{h} = h/R_0$ , получаем

$$\begin{aligned} v_1 &= (1 - \bar{m})(1 + \bar{h})v_0 / (1 + \bar{m}), \\ (1 - \bar{m})^2 \left[ (1 + \bar{h})^2 - 1 \right] / (1 + \bar{h}) &= 2(1 + \bar{m})^2 \left[ 1 - 1 / (1 + \bar{h}) \right], \\ \text{или } (1 - \bar{m})^2 (2 + \bar{h}) &= 2 / (1 + \bar{m})^2. \end{aligned}$$

Предполагая, что  $\bar{m} \ll 1$  и  $\bar{h} \ll 1$ , получаем

$$-4\bar{m} + \bar{h} \approx 4\bar{m}, \text{ или } \bar{m} = \bar{h}/8.$$

При  $m_0 = 1000$  кг  $m = 6$  кг. Точное решение

$$\bar{m} = 4/\bar{h} + 1 \pm \sqrt{\left[ (4/\bar{h}) + 1 \right]^2 - 1}.$$

Годится только решение со знаком «—», так как требуется найти минимальную массу. В результате:  $m = 6,17$  кг.

Тела могут не соединяться, а **разделяться**, и одно из них падает на Землю или Луну (№ 7.52). Решение аналогично приведенному выше. Для определения угла при соприкосновении с поверхностью, например, Луны (№ 7.80) надо иметь в виду, что в уравнение моментов входит компонента скорости, перпендикулярная радиусу (параллельная поверхности), а в уравнение энергии геометрическая сумма этой скорости и скорости перпендикулярной поверхности. Их отношение дает тангенс угла наклона скорости поверхности.

Может оказаться, что тело, движущееся **по круговой орбите** известного радиуса, **разделяется на две равные части** устройством, приводящим к изменению их скоростей таким образом, что обе движутся по эллиптическим орбитам, для одной из которых известна величина большой оси, а для другой ее требуется найти (№ 7.94). По (7.25) находим скорость на круговой орбите и гравитационный потенциал. Его используем при написании полных энергий для обеих эллиптических орбит. Поскольку для одной орбиты большая ось известна, то определяются кинетическая энергия и скорость в момент разделения. Из закона сохранения импульса при разделении определяются скорость другой части, а затем ее полная энергия и большая ось.

Если тело меньшей массы ударяет в большее тело и застrevает в нем, двигаясь **по радиусу от центра Земли** (№ 7.87), то из закона сохранения момента импульса:  $m_0(R_0 + h)v_0 = (m_0 + m)R_0v_1$ . Орбитальная скорость та же, что и в предыдущем решении. Для импульса  $p$  после удара имеем соотношение  $p^2 = (m_0v_0)^2 + (mv)^2$ . Здесь  $v$  — скорость тела до удара. Чтобы найти ее, например, для случая касания орбитой поверхности Земли, надо записать еще закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned} p^2 / [2(m_0 + m)] - \gamma(m_0 + m)M/(R_0 + h) &= \\ = (m_0 + m)v_1^2/2 - \gamma(m_0 + m)M/R_0. \end{aligned}$$

Для того чтобы узнать параметры эллиптической орбиты спутника, движущегося вначале по близкой к Земле орбите, при попадании в него микрометеорита, летящего **к центру Земли** со скоростью  $v$ , (№ 7.89), воспользуемся (7.44). Спутник переходит на эллиптическую орбиту, у которой разница между апогеем и перигеем равна

$$\Delta r = r_1 - r_2 = 2 \left[ g_0^2 R_0^4 + 2L^2 E/(m_0 + m)^3 \right] / \left[ 2E/(m_0 + m) \right].$$

Момент импульса спутника при ударе не меняется:

$$L = m_0 R_0 (g_0 R_0)^{1/2}.$$

После удара

$$p^2 = m_0^2 g_0 R_0 + (mV)^2 \text{ и } E = p^2/[2(m_0 + m)](m_0 + m)g_0 R_0.$$

Если у спутника, вращающегося по круговой орбите на заданном расстоянии, появляется **радиальный импульс**, равный по величине продольному (№ 7.50), то полная энергия из (7.32) равна нулю. По законам сохранения импульса и энергии в точке изменения и в точке ближайшего подхода к центру сил определяем скорость и расстояние до центра сил.

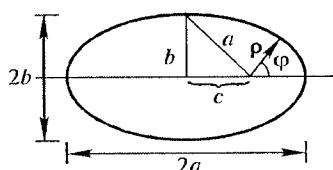


Рис. 7.12

$\rho = b/(a + c \cos \phi)$ . Для параметров эллипса имеем  $a^2 = b^2 + c^2$ . Перигею соответствует  $\phi = 0$ ,  $\rho_1 = a - c$ , апогею  $\phi = \pi$ ,  $\rho_2 = a + c$ . При описании движения спутника массой  $m$  вокруг планеты массой  $M$  полная энергия спутника равна

$$E = (m/2)[(dp/dt)^2 + (\rho^2 d\phi/dt)^2] - \gamma m M / \rho.$$

Момент импульса относительно центра сил  $L = m\rho(p d\phi/dt)$ . Объединяя это уравнение с уравнением энергии, получаем (7.43), из которого следует и (7.44) и (7.45). При заданном перигее и скорости (№ 7.46) находим апогей и другие характеристики движения.

Если задана скорость на круговой орбите, например, вокруг Земли (№ 7.47), то по (7.25) находим радиус орбиты и затем, зная **увеличение скорости**, с помощью (7.43), (7.44) и (7.45) можем найти нужные параметры. Из закона сохранения момента импульса можно найти скорость при максимальном удалении. При известных величинах радиуса круговой орбиты и большой оси эллипса, на который переходит спутник (№ 7.48), аналогичным образом находим нужные параметры.

**Изменение скорости** может происходить и в **радиальном направлении** к круговой орбите заданного радиуса в сторону от центра сил (№ 7.49). В этом случае для определения скорости, нужной для уда-

Иногда удобно описывать движение в **полярных координатах**. На рис. 7.12 изображен эллипс и показаны его параметры и полярные координаты  $\rho$  — расстояние от фокуса и  $\phi$  — угол, который вектор  $\rho$  составляет с направлением большой оси эллипса. В этих координатах уравнение эллипса имеет вид

ления спутника на бесконечность, пользуемся (7.31) с  $E = 0$ . Полная скорость равна геометрической сумме этой скорости и скорости на круговой орбите, которую находим из (7.25).

В телах конечных размеров, попадающих в меняющееся с расстоянием гравитационное поле, могут возникнуть деформации (изменение формы, приливы). При вращении тела этот процесс становится периодическим. На деформирование тратится энергия вращения. Возникает так называемое приливное трение. Под воздействием Луны на Земле происходят хорошо наблюдаемые приливы и отливы. За счет приливного трения должна уменьшаться скорость вращения Земли и период обращения Луны вокруг Земли. Изменения скорости вращения действительно происходят. Однако существуют и другие процессы, например циркуляция в атмосфере, которая иногда может приводить даже к увеличению скорости вращения.

Предполагая, что известно, на сколько удлиняются сутки на Земле за счет **приливного трения**, оценим изменение расстояния между Землей и Луной (№ 7.16). Для кругового движения Луны (массой  $m$  по радиусу  $R_{\text{Л}}$ ), пренебрегая изменением скорости  $v$  за период, получаем из (7.27)  $\omega_{\text{Л}}^2 R_{\text{Л}}^3 = \gamma M = \text{const}$ . Отсюда  $2d\omega_{\text{Л}}/\omega_{\text{Л}} = -3dR_{\text{Л}}/R_{\text{Л}}$ . Так как в системе Земля—Луна при отсутствии момента внешних сил сохраняется момент импульса, то  $dL_3 + dL_{\text{Л}} = 0$ . Здесь  $L_3 = I_3 \omega_3$ ,  $L_{\text{Л}} = m\omega_{\text{Л}} R_{\text{Л}}^2$ . Для изменения расстояния от Земли до Луны получаем  $dR_{\text{Л}} = -2I_3 d\omega_3 / (m\omega_{\text{Л}} R_{\text{Л}})$ . Связь угловой скорости с периодом  $d\omega_3/\omega_3 = -dT_3/T_3$ .

Для определения предельного расстояния  $L$  от Земли до Луны и угловой скорости вращения Луны вокруг Земли (№ 7.15), которая будет равна скорости вращения Земли вокруг собственной оси  $\omega = \omega_{\text{Л}} = \omega_3$ , используем закон сохранения момента импульса и закон Кеплера:

$$m\omega_{\text{Ло}} R_{\text{Л}}^2 + I_3 \omega_{3o} = \omega (mL^2 + I_3), \quad R_{\text{Л}}^3 \omega_{\text{Ло}}^2 = L^3 \omega^2.$$

Считая заданными все параметры для современного состояния (отмеченные индексом «о»), находим неизвестные  $L$  и  $\omega$ . Для упрощения выкладок можно пренебречь моментом инерции Земли по сравнению с моментом инерции орбитального движения Луны.

**Тормозиться** спутник может за счет **неупругого столкновения** с молекулами атмосферы (№ 7.74). Тормозящая сила равна изменению импульса налетающих на спутник частиц за единицу времени. При радиусе поперечного сечения спутника  $r$ , скорости  $v$  и плотности атмосферы  $\rho$  сила торможения  $F = \rho \pi r^2 v u$ . Работа этой силы за виток (потеря энергии)  $\Delta E = 2\pi RF = 2\pi^2 \rho R r^2 v^2$ . Из (7.32) для движения по круговой орбите имеем  $E = -mv^2/2 = -\gamma m M/(2R)$ . Отсюда

$\Delta E/E = -\Delta R/R = -2\pi^2 \rho R r^2 v^2 / (-mv^2/2) = 4\pi^2 R r^2 \rho/m$ . Приращение радиуса отрицательное, т. е. радиус уменьшается. Кинетическая энергия растет, полная энергия уменьшается.

Если задано изменение потенциальной энергии  $\Delta U$  при переходе в результате торможения с одной круговой орбиты (радиусом  $r$ ) на другую меньшего радиуса ( $r_1$ ), то можно найти соответствующую работу сил сопротивления (№ 7.156). Изменение потенциальной энергии  $\Delta U = -\gamma m M/r_1 + \gamma m M/r$ . Это отрицательная величина. Потенциальная энергия уменьшается. Учитывая, что скорость при круговом движении связана с потенциалом (7.25)  $v^2 = \gamma M/r_1$ , получаем для разности кинетических энергий

$$\Delta K = m v_1^2/2 - m v^2/2 = \gamma m M/(2r_1) - \gamma m M/(2r) = -\Delta U/2.$$

Кинетическая энергия увеличивается. Так как работа равна изменению полной энергии, то  $A = \Delta K + \Delta U = \Delta U/2$ .

При разгоне спутника, когда он переходит с более низкой круговой орбиты радиусом  $r$  на более высокую радиусом  $r_1$  (№ 7.157), работа сил тяги  $W$  равна сумме изменения полной энергии и работы сил сопротивления  $W = E_1 - E + A$ .

Для силы сопротивления, действующей на спутник, движущийся по круговой орбите, можно предположить степенную зависимость от скорости  $F = -Av^\alpha v/v$ . В случае заданной постоянной скорости опускания спутника  $dh/dt = -C$  можно в выражении для силы определить  $A$  и  $\alpha$  (№ 7.158). Изменение высоты спутника за время одного оборота  $T$  равно  $h = CT$ . Учитывая (7.32) и то, что работа силы сопротивления равна изменению полной энергии, получаем

$$Av^\alpha 2\pi r = \gamma m M h / [2r(r-h)]. \quad (7.55)$$

Подставляя  $h$  и пренебрегая им по сравнению с  $r$ , имеем

$$\gamma m M / (4\pi A C) = v^\alpha r T = (2\pi r/T)^\alpha r^3 / T.$$

С помощью (7.27) выражаем  $r$  через  $T$  и требуем, чтобы показатель степени при  $T$  был равен нулю, так как левая часть постоянная величина. Отсюда определяем  $\alpha$ . И из (7.55) определяем  $A$ .

Если заданы величина большой оси эллиптической орбиты спутника и изменение периода его обращения из-за трения (№ 7.25), то используя (7.45) и (7.48), получаем связь между уменьшением энергии и периода  $[(E - \Delta E)/E]^3 = [(T - \Delta T)/T]^2$ .

Рассмотрим переход космического корабля с эллиптической орбиты на круговую. Например, определим, в какой точке орбиты и как надо изменить направление скорости без изменения ее величины, чтобы перейти на круговую орбиту (№ 7.38). Так как при изменении направ-

лении скорости кинетическая и полная энергии не меняются, то радиус круговой орбиты равен величине большой полуоси эллипса. Значит, в момент изменения скорости корабль должен находиться на пересечении эллиптической орбиты с малой осью эллипса, так как при этом расстояние до центра притяжения равно большой полуоси эллипса. Скорость надо направить перпендикулярно к линии, соединяющей эту точку с центром притяжения. Соотношение между кинетической, потенциальной и полной энергией в точке пересечения эллиптической орбиты с малой осью эллипса такое же, как для движения по круговой орбите. Поэтому для перехода на параболическую орбиту (№ 7.39) кинетическую энергию надо увеличить в два раза (чтобы полная равнялась нулю), а соответственно скорость — в корень из двух раз.

**Спутник на круговую орбиту** заданного радиуса можно вывести через запуск на эллиптическую орбиту, у которой апогей равен радиусу круговой орбиты, а перигей находится в точке запуска. Для определения начальной горизонтальной скорости в точке запуска, расстояние которой от центра притяжения известно, и увеличения скорости в апогее (№ 7.51) можно воспользоваться (7.45), (7.31) и (7.25).

Движение **нескольких тел** под действием их взаимного гравитационного взаимодействия может быть рассмотрено в случае их устойчивого симметричного расположения. Например, четыре материальные точки массой  $M$ , расположенные в вершинах квадрата, в некоторый момент имеют одинаковые скорости, перпендикулярные к диагоналям квадрата, длина которых равна  $2R$  (№ 7.116). Если известно, что дальнейшее движение происходит симметричным образом и точки приближаются к центру квадрата на минимальное расстояние  $r$ , то все точки всегда находятся в вершинах некоторых квадратов и движутся по эллипсам, у которых, как следует из (7.45) и (7.46), большая ось  $2a = R + r$ , а малая  $2b = (rR)^{1/2}$ . Сила, действующая на каждую частицу, определяется из суперпозиции. В начальной точке

$$F/M = \gamma M/(2R)^2 + \gamma M(2)^{1/2}/(2R^2) = \gamma M[1 + 2(2)^{1/2}]/(4R^2).$$

Чтобы воспользоваться (7.47), следующей из (7.43)–(7.46), введем обозначение  $\gamma_1 = \gamma[1 + 2(2)^{1/2}]/4$ . Тогда

$$T = 2\pi a^{3/2}/(\gamma_1 M)^{1/2} = 2\pi(R + r)^{3/2}/\{2\gamma M[1 + 2(2)^{1/2}]\}^{1/2}.$$

Найдем период малых колебаний (№ 7.110) легкой спицы длиной  $2r$  с двумя небольшими шариками на концах, подвешенной за середину на неупругой нити, которые возникают из-за притяжения шариков к двум массам  $M$ , расположенным симметрично на расстоянии  $R$  от оси вращения (рис. 7.13). При повороте спицы на угол  $\alpha$  расстояние от  $m$  до ближнего тела массой  $M$  равно  $(R^2 - 2rR\cos\alpha + r^2)^{1/2}$ ,

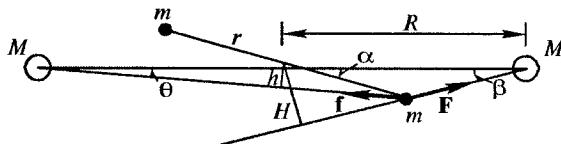


Рис. 7.13

а до дальнего тела  $(R^2 + 2rR\cos\alpha + r^2)^{1/2}$ . Используя теоремы синусов, определяем синусы  $\beta$  и  $\theta$  и плечи сил ( $H$  и  $h$ ). В результате для определения периода получаем уравнение колебаний

$$2mr^2d^2\alpha/dt^2 + 2\gamma mMrR\sin\alpha[(R+r)^3 - (R-r)^3]/(R^2 - r^2)^3 = 0.$$

При малых углах заменяем синус на угол.

Рассмотрим движение некоторой конструкции в виде межпланетного корабля, который состоит из двух одинаковых отсеков  $A$  и  $B$ , соединенных легким, прочным, гладким переходным коридором  $AB$ . Корабль движется по круговой орбите вокруг малой планеты, имеющей радиус  $R$  и ускорение свободного падения на поверхности  $g_0$ . При этом продолжение прямой  $AB$  всегда проходит через центр планеты. Радиусы орбит отсеков  $A$  и  $B$  равны соответственно  $r_1 = 4R$  и  $r_2 = 3R$ . Определим, как изменится кинетическая энергия предмета массой  $m$ , брошенного вдоль по гладкому коридору из отсека  $B$  в отсек  $A$  с достаточной для преодоления коридора скоростью.

Во-первых, найдем угловую скорость движения конструкции из двух отсеков, связанных коридором. На каждый отсек действует сила притяжения к планете и сила взаимодействия между отсеками (которую обозначим  $T$ ), передаваемая через коридор. Обозначая массу планеты  $M$  и массу отсека  $m$ , можем написать законы движения отсеков по круговым орбитам (с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ ):

$$\omega^2 r_1 = \gamma M / r_1^2 + T/m_0; \quad \omega^2 r_2 = \gamma M / r_2^2 - T/m.$$

Учитывая, что  $\gamma M = g_0 R^2$ , получаем  $\omega^2 (r_1 + r_2) = g_0 R^2 (1/r_1^2 + 1/r_2^2)$ . Потенциальная энергия, связанная с тяготением, увеличивается в направлении от  $B$  к  $A$ , а, связанная с вращением системы, уменьшается в том же направлении:  $\Pi(r) = -\gamma Mm/r - m\omega^2 r^2/2$ . Надо обратить внимание на знак перед вторым членом уравнения. Для полной энергии при движении в поле тяготения знак другой. Таким образом, изменение кинетической энергии предмета, движущегося из отсека  $B$  в отсек  $A$ , равно

$$\begin{aligned} \Delta K = -\Delta \Pi &= \Pi_B - \Pi_A = \gamma Mm/r_1 - \gamma Mm/r_2 + m\omega^2 r_1^2/2 - m\omega^2 r_2^2/2 = \\ &= mg_0 R^2 (r_1 - r_2)^3 (2r_1^2 r_2^2) = mg_0 R/288. \end{aligned}$$

## 8. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Принцип относительности по Ньютону заключается в том, что в инерциальных системах отсчета физические законы имеют одинаковый вид. Потребность в новой формулировке возникла в связи с уравнениями Максвелла. Они хорошо подтверждались опытами, но изменялись при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой посредством преобразований Галилея. Уравнения Максвелла, описывающие электромагнитные явления, здесь рассматриваться не будут. Единственно, о чем надо сказать, что скорость электромагнитных волн конечна и по измерениям ее величина совпадает со скоростью света в пустоте. Исследования показали, что свет — электромагнитная волна.

Новая формулировка **принципа относительности** (эквивалентности всех инерциальных систем отсчета) заключается в распространении его на все явления природы (включая распространение света) и в отказе от абсолютного времени. В преобразованиях Галилея подразумевалось, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой меняется только координата, а ход времени тот же самый. Введение в каждой инерциальной системе отсчета своего хода времени дало возможность объяснить экспериментально установленное Майкельсоном постоянство скорости света в разных инерциальных системах отсчета. Эффекты специальной теории относительности существенны только при скоростях движения тел, близких к скорости света, которая является для них предельной.

Получим **связь промежутка времени**  $\tau$  по часам в неподвижной системе отсчета  $K$  и  $\tau_0$  (собственное время) по часам в системе отсчета  $K'$ , движущейся со скоростью  $v$  относительно  $K$ , используя одну и ту же скорость света в обеих системах. Для этого рассмотрим устройство, состоящее из источника и приемника света, совмещенных в одном месте, и зеркала на расстоянии  $L_0$  от них. От источника свет приходит к зеркалу, отражается и возвращается к приемнику (источнику) через время  $\tau_0 = 2L_0/c$  ( $c$  — скорость света). Для системы отсчета, в которой зеркало и источник-приемник света движутся со скоростью  $v$ , направленной перпендикулярно линии, соединяющей

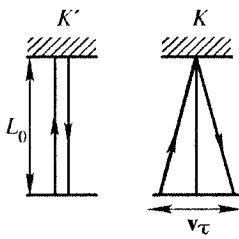


Рис. 8.1

няющей источник-приемник и зеркало, свет возвращается к приемнику через время  $\tau$ . Распространение света в системах отсчета  $K$  и  $K'$  показано на рис. 8.1. Учитывая, что к моменту прихода света зеркало сдвинулось на  $v\tau/2$ , а приемник к моменту возвращения света на  $v\tau$ , имеем  $\tau = 2(L_0^2 + (v\tau/2)^2)^{1/2}/c$ . Разрешая это равенство относительно  $\tau$  и подставляя в него  $L_0$  из предыдущего, имеем

$$\tau = \tau_0 [1 - (v/c)^2]^{-1/2} = \tau_0 / (1 - \beta^2)^{1/2} = \gamma \tau_0. \quad (8.1)$$

Здесь введены обозначения

$$\beta = v/c, \gamma = 1/(1 - \beta^2)^{1/2}. \quad (8.2)$$

Видно, что в движущейся системе отсчета ход времени замедляется.

Если задан промежуток времени в движущейся системе, то можно найти по (8.1) соответствующий промежуток в неподвижной системе и по заданной скорости движения определить пройденный путь (№ 8.1).

**Отставание часов** в движущемся межзвездном корабле  $\Delta t = \tau - \tau_0$  (№ 8.6).

Используя (8.1), можно найти время, прошедшее в неподвижной и движущейся системе (№ 8.11, 8.12).

Если известны скорость частицы и пробег ее от рождения до распада, то определяем время существования в этой системе отсчета (лабораторной), а затем по (8.1) определяем собственное время жизни.

Рассмотрим, как изменяется время между сигналами (кратковременными световыми импульсами), посыпаемыми из начала координат отсчета системы  $K$  (по часам  $K$  это  $T$ ) и принимаемыми наблюдателем в системе  $K'$  в случае удаления и сближения наблюдателя и источника, и получим релятивистские формулы для **продольного эффекта Доплера** (№ 8.15, 8.29).

Если некоторый импульс из начала координат неподвижной системы  $K$  достигает приемника, находящегося в начале координат системы  $K'$ , движущейся относительно  $K$  со скоростью  $v$ , в тот момент, когда приемник находится в точке  $A$  (в системе  $K$ ), то следующий импульс попадает в приемник, когда он будет находиться в точке  $B$  (в системе  $K$ ) через время  $T_1$  (по часам в  $K$ ). Время  $T_1$  складывается из

времени  $T$ , через которое следующий сигнал придет в точку  $A$ , и времени, которое требуется, чтобы этому сигналу пройти путь  $vT_1$  (на столько сдвинется приемник), т. е.  $T_1 = T + vT_1/c$ . Отсюда  $T_1 = T/(1 - v/c)$ . Время, проходящее между событиями в движущейся и неподвижной системах, определяется формулой (8.1). Используя это, получаем соотношение времени между излучениями в неподвижной ( $T$ ) и времени между приемами сигналов в движущейся системе

$$T_0 = T_1 (1 - v^2/c^2)^{1/2} = T[(1 + v/c)/(1 - v/c)]^{1/2}. \quad (8.3)$$

Это результат для удаляющейся системы  $K'$ . Для приближающейся системы  $K'$  получаем  $T_1 = T - vT_1/c$  и

$$T_0 = T[(1 - v/c)/(1 + v/c)]^{1/2}. \quad (8.4)$$

Вместо периода можно использовать частоту  $\omega = 2\pi/T$ . Тогда для удаляющейся  $K'$  (релятивистский эффект Доплера)

$$\omega_0 = \omega [(1 - v/c)/(1 + v/c)]^{1/2}. \quad (8.5)$$

При удалении приемника от источника частота уменьшается. В случае сближения приемника с источником (изменение знака скорости)

$$\omega_0 = \omega [(1 + v/c)/(1 - v/c)]^{1/2}. \quad (8.6)$$

При малых скоростях ( $v \ll c$ ) получаем известное соотношение для Доплеровского сдвига частоты  $\Delta\omega = |\omega - \omega_0|$ :

$$\Delta\omega/\omega = v/c. \quad (8.7)$$

Можно графически изобразить движение космического корабля (система  $K'$ ) и распространение сигналов в системе координат ( $K$ ), связанной, например, с Землей (рис. 8.2).

Линия 1—2—3 изображает движение корабля со скоростью  $v$ . А линия  $0t$  — ось времени — изображает положение Земли в системе отсчета, связанной с Землей. Первый сигнал от корабля на Землю посыпается из точки 1 и, двигаясь со скоростью  $c$ , достигает Земли в момент времени  $t_1$ .

Следующий сигнал от корабля посыпается из точки 2 и приходит на Землю в момент  $t_2$ . Время  $\Delta t$  между этими сигналами на Земле равно:  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Между отправлением сигналов с корабля из точек 1 и 2

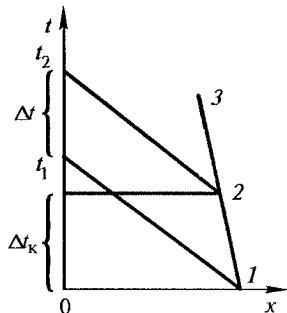


Рис. 8.2

по земным часам проходит время  $\Delta t_k$ , которое со временем, прошедшим между этими событиями в движущемся со скоростью  $v$  корабле  $\Delta t_{k0}$ , связано формулой (8.1):

$$\Delta t_{k0} = \Delta t_k (1 - v^2/c^2).$$

Связь между  $\Delta t_k$  и  $\Delta t$  можно найти из различия путей, проходимых сигналами от корабля до Земли  $ct_1 - c(t_2 - \Delta t_k) = v\Delta t_k$ . Окончательно получаем  $\Delta t_{k0} = [(c + v)/(c - v)]^{1/2}$ .

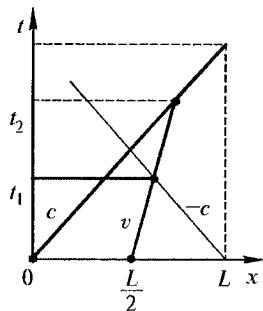


Рис. 8.3

Удобно пользоваться графиками при **распространении световых сигналов**. Например, на движущийся со скоростью  $v$  космический корабль с одинаковых расстояний направляются световые сигналы (№ 8.7). На рис. 8.3 показано движение корабля со скоростью  $v$  — линия из  $L/2$ , распространение световых сигналов со скоростью  $c$  из 0 и  $L$ . Из геометрии  $(c + v)t_1 = L/2$  и  $(c - v)t_2 = L/2$ . Откуда  $\Delta t = t_2 - t_1 = L v/(c^2 - v^2)$ . Используя формулу (8.1), получаем промежуток между приходами сигналов на корабле.

Рассмотрим теперь движение источника и зеркала в направлении линии их соединяющей. Расстояние между источником и зеркалом в связанной с ними системе отсчета обозначим  $L_0$ , а в системе отсчета, относительно которой они движутся,  $L$ . В таком случае  $\tau_0 = 2L_0/c$ , а  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  (сумма времени распространения света до зеркала и обратно до источника). Зеркало движется со скоростью  $v$ , и поэтому  $c\tau_1 = L + v\tau_1$ . Когда свет идет от зеркала,  $c\tau_2 = L - v\tau_2$ . Используя связь (8.1) между  $\tau_0$  и  $\tau$ , получаем

$$L = L_0/\gamma. \quad (8.8)$$

**Размер движущегося тела (расстояние между его концами) сокращается в направлении его движения. Длина может определяться по прохождению концов тела мимо метки в неподвижной системе.**

Если две частицы движутся с одинаковой скоростью  $v$  и попадают в мишень одна за другой через время  $t$ , то расстояние между ними в системе отсчета, связанной с мишенью,  $L = vt$ . Расстояние между частицами в системе отсчета, связанной с частицами,  $L_0$  вычисляется по (8.8).

Найдем относительную скорость двух одинаковых линеек (собственной длины  $L_0$ ), если наблюдатель, связанный с одной из линеек, зафиксировал, что между совпадениями левых и правых концов

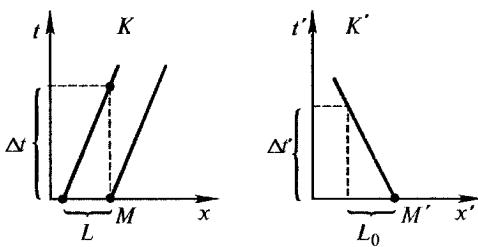


Рис. 8.4

линеек прошло время  $\tau$  (№ 8.4), т. е. движущаяся линейка короче на  $v\tau$ . В соответствии с (8.8)  $L = L_0(1 - v^2/c^2)^{1/2} = L_0 - v\tau$ . Откуда и определяется скорость.

**Стержень** движется со скоростью  $v$  относительно метки в неподвижной системе отсчета. На рис. 8.4 показаны движение стержня в неподвижной системе отсчета  $K$  относительно метки  $M$  и движение метки  $M'$  в системе  $K'$ , связанной со стержнем. Если заданы время прохождения стержня относительно метки  $\Delta t$  и время  $\Delta t'$ , то можно найти скорость стержня и его собственную длину  $L_0$  (№ 8.79). Из рисунка находим  $\Delta t = L/v$  и  $\Delta t' = L_0/v$ . Отношение времен дает отношение длин и, следовательно, из (8.8) скорость стержня. Тогда его собственная длина  $L_0 = v\Delta t'$ .

Может возникнуть вопрос: какой размер движущегося стержня увидит **наблюдатель** или зафиксирует фотоаппарат? При наблюдении сбоку свет от обоих концов стержня приходит одновременно. Поэтому размер будет определяться (8.8). В направлении, близком к направлению движения, размер другой. Он определяется одновременным приходом света от обоих концов стержня. Можно рассмотреть движущийся стержень, на концах которого на короткое время вспыхивают лампы (№ 8.3). Чтобы одновременно увидеть вспышки обеих ламп на дальнем конце стержня, лампа должна вспыхнуть раньше на  $\Delta t$ . Координата, в которой вспыхнет дальняя лампа, равна  $x_1$ . Координату, в которой должна вспыхнуть ближняя лампа, обозначим  $x_2$ . Учитывая смещение и сокращение длины стержня, получаем  $x_2 - x_1 = c\Delta t = v\Delta t + L_0/\gamma$ . Отсюда определяем  $\Delta t$ . В результате

$$x_2 - x_1 = c\Delta t = L_0[(1 + \beta)/(1 - \beta)]^{1/2}.$$

Это расстояние — размер стержня, который увидит наблюдатель в таком направлении. Он больше собственной длины и размера в неподвижной системе отсчета.

Для **куба** с ребром  $L_0$ , движущегося со скоростью  $v$  в направлении ребра (№ 8.17), можно снова воспользоваться условием одно-

временности прихода и формулой (8.8). Чтобы в фотоаппарат свет пришел одновременно от дальнего и ближнего ребер, он от дальнего ребра должен выйти раньше и мимо плоскости, по которой движется ближнее ребро, пройдет, когда ребро сдвинется на  $v(L_0/c)$ . Таким образом, на пленке изображаются дальнее и ближнее ребра. Ребро, направленное вдоль скорости, сократится в соответствии с (8.8). Изображение на фотографии такое, как будто куб повернут на угол  $\varphi = \arcsin(v/c)$ .

Найдем преобразование координат и времени для двух инерциальных систем отсчета: неподвижной  $K$  и движущейся относительно нее со скоростью  $v$  подвижной системы  $K'$ . Преобразование должно удовлетворять условию постоянства скорости распространения света. Если источник света находится в начале системы отсчета  $K$ , то для света, испускаемого в момент времени  $t = 0$ , уравнение сферического волнового фронта имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (8.9)$$

Уравнение описывает сферическую поверхность, радиус которой увеличивается со скоростью  $c$ .

Подвижную систему отсчета всегда можно выбрать таким образом, чтобы в системах отсчета  $K$  и  $K'$  совпали начальные значения отсчета времени и начала пространственных координат в этот (нулевой) момент времени. Тогда уравнение сферического волнового фронта в  $K'$  будет иметь вид

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (8.10)$$

Величина скорости света  $c$  здесь та же, что в системе  $K$ .

Считаем, что система  $K'$  движется в положительном направлении оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$  относительно  $K$ .

Чтобы найти преобразования координат и времени, заметим, что  $y = y'$  и  $z = z'$ , а преобразования  $x$  и  $t$  должны быть линейными для удовлетворения однородности и изотропности пространства и однородности времени, а также для возвращения в исходную систему при повторном применении преобразования с заменой  $v$  на  $-v$ .

Из (8.9) и (8.10) получаем

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2. \quad (8.11)$$

Подставляем линейные соотношения

$$x = Ax' + Bt', \quad t = Cx' + Dt'. \quad (8.12)$$

При этом (8.11) должно превратиться в тождество. Поэтому, приравнивая коэффициенты при переменных  $(x^2, t^2, x't')$  нулям, получаем

$$A^2 - c^2 C^2 = 1, 2(AB - c^2 CD) = 0, c^2 D^2 - B^2 = c^2. \quad (8.13)$$

Для движения начала координат подвижной системы  $x' = 0$  из (8.11) получаем

$$x = Bt', t = Dt'. \quad (8.14)$$

Поэтому скорость движения начала координат

$$v = x/t = B/D. \quad (8.15)$$

Находя из (8.13) коэффициенты и подставляя в (8.12), а также используя обозначения формулы (8.2), получаем преобразования Лоренца

$$x = \gamma(x' + vt'), y = y', z = z', t = \gamma(t' + vx'/c^2) \quad (8.16)$$

и обратные

$$x' = \gamma(x - vt), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - vx/c^2). \quad (8.17)$$

Отсюда для событий, происходящих в некоторой точке в движущейся системе отсчета ( $x'$  — постоянно), связь хода времени из последнего уравнения (8.16)  $\Delta t = \gamma \Delta t'$ . Для одного и того же момента времени ( $t$  одно и то же) из первого уравнения (8.17) получаем  $\Delta x' = \gamma \Delta x$ . Результаты те же, что и полученные выше для источника света и зеркала (8.1) и (8.8). Следует подчеркнуть, что преобразования Лоренца обеспечивают одинаковый вид уравнений, описывающих физические явления, во всех инерциальных системах.

Рассмотрим движение стержня относительно линейки со скоростью  $v$ . В системе стержня ( $K'$ ) длина его  $L_0$  называется собственной длиной. Если зафиксировать положение обоих концов стержня одновременно ( $t = 0$ ) в системе отсчета, связанной с линейкой ( $K$ ), то для концов стержня получаем  $x_1 = 0$  и  $x_2 = L_1$ . В системе, связанной со стержнем ( $K'$ ), при  $t' = 0$  и  $x'_1 = 0$  из (8.16) и (8.17) получаем  $x'_2 = \gamma x_2 = \gamma L_1 = L_0$ . Переводя эту точку в систему  $K$  по (8.16), получаем  $x_{22} = \gamma x'_2 = \gamma^2 L_1$ .

Иногда возникает как бы парадоксальная ситуация. Таков «парадокс шеста и сарая». Шест имеет длину 20 м. Если его двигать вдоль его длины с такой скоростью, чтобы в лабораторной системе отсчета он оказался длиной 10 м, тогда в некоторый момент времени этот шест целиком можно спрятать в сарае, длина которого 10 м.

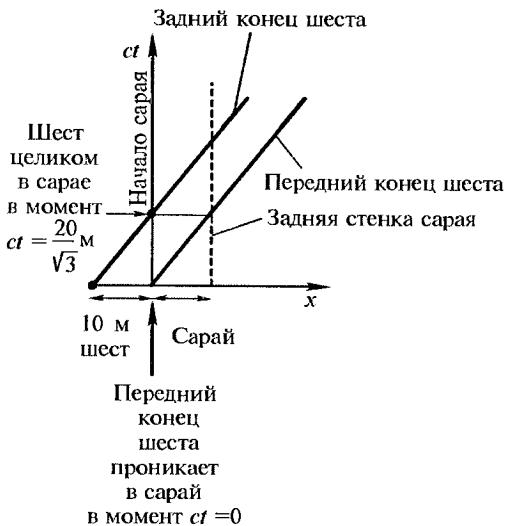


Рис. 8.5

На рис. 8.5 показано движение шеста в лабораторной системе отсчета. При  $\gamma = 2$  получаем  $\beta = (3)^{1/2}/2$ . «Парадокс» заключается в том, что в системе отсчета, связанной с шестом, сарай имеет длину 5 м и, конечно, не может уместить 20-метровый шест. Однако, как следует из (8.17), концы шеста совпадают с границами сарая в разные моменты времени. Это изображено на рис. 8.6. Заметим, что

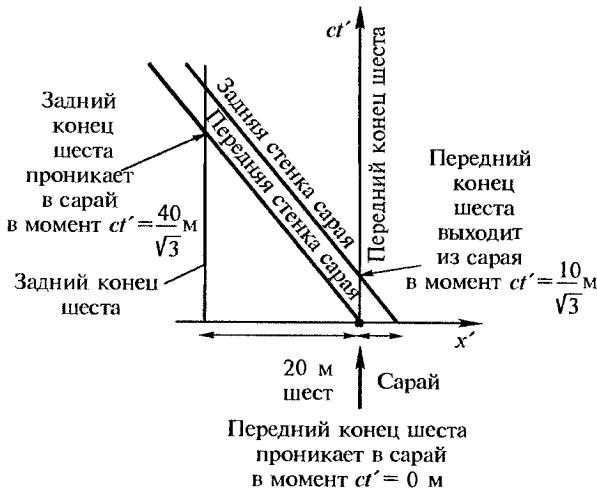


Рис. 8.6

несовпадение времен может привести к тому, что следствие наблюдается раньше, чем причина.

В движущейся системе стержень длиной  $L_0$  может составлять с осью  $x'$  угол  $\phi'$ . Для определения длины и угла стержня в неподвижной системе (№ 8.16) надо воспользоваться тем, что компоненты вдоль оси  $x$  преобразуются с помощью (8.8), а вдоль оси  $y$  не меняются:  $\Delta x = \Delta x'/\gamma$ ,  $\Delta y = \Delta y'$ . Учитывая, что  $\Delta x' = L \cos \phi'$ , получаем  $\tan \phi = \Delta y/\Delta x$  и  $L = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}$ .

**Связь скоростей тел в движущейся и в неподвижной системе отсчета из преобразований Лоренца для дифференциалов имеет вид (вдоль движения системы)**

$$u_x = (u'_x + v)/(1 + u'_x v/c^2) \quad (8.18)$$

и (в перпендикулярном)

$$u_y = u'_y / [\gamma(1 + u'_x v/c^2)]; \quad (8.19)$$

$$u_z = u'_z / [\gamma(1 + u'_x v/c^2)]. \quad (8.20)$$

Обратные соотношения

$$u'_x = (u_x - v)/(1 - u'_x v/c^2); \quad (8.21)$$

$$u'_y = u_y / [\gamma(1 - u'_x v/c^2)]; \quad (8.22)$$

$$u'_z = u_z / [\gamma(1 - u'_x v/c^2)]. \quad (8.23)$$

Рассмотрим, как **сложение скоростей** используется в решении конкретной задачи.

Приборы звездолета, дрейфующего с почти нулевой скоростью в окрестностях звезды Бетельгейзе, зафиксировали периодические электромагнитные импульсы, излучаемые пульсирующим сгустком плазмы, вырвавшимся из звезды и движущимся по направлению к звездолету со скоростью  $\beta_1 = 0,4$ . Промежутки времени между импульсами по часам звездолета равны  $\tau_1$ . Чтобы избежать столкновения, звездолет начал удаляться от звезды со скоростью  $\beta_2 = 0,8$  по линии движения сгустка. Какие промежутки времени  $\tau_2$  между импульсами стали регистрировать приборы звездолета?

Предполагаем, что в системе отсчета, связанной с неподвижным звездолетом и звездой Бетельгейзе, некоторый импульс излучается в момент  $t_0$  и до звездолета доходит в момент  $t_1$ . Расстояние, которое проходит импульс, равно  $c(t_1 - t_0)$ . Следующий импульс пройдет

меньшее расстояние из-за движения сгустка. На звездолете он появится в момент  $t_1 + \tau_1$ , а от сгустка он уйдет в момент  $t_0 + \Delta t$ . Время  $\Delta t$  — это время между импульсами на сгустке по часам звездолета. Разность путей первого и второго импульсов равна смещению сгустка  $c(t_1 - t_0) - c(t_1 + \tau_1 - t_0 - \Delta t) = \beta_1 c \Delta t$ . Откуда  $\Delta t = \tau_1 / (1 - \beta_1)$ . Время  $\tau_0$  между импульсами по часам, связанным со сгустком, получаем из (8.1)

$$\tau_0 = \Delta t \left(1 - \beta_1^2\right)^{1/2} = \tau_1 \left[\left(1 + \beta_1\right)/\left(1 - \beta_1\right)\right]^{1/2}.$$

Для движущегося звездолета система отсчета, связанная с Бетельгейзе, движется со скоростью  $\beta_2$ , а в ней сгусток движется со скоростью  $-\beta_1$ . Скорости складываются по (8.18):

$$\beta = (\beta_2 - \beta_1)/(1 - \beta_1 \beta_2) = 10/17.$$

В системе отсчета, связанной со звездолетом, в этом случае сгусток удаляется. Учитывая это, из предыдущего получаем

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \tau_0 \left[\left(1 + \beta\right)/\left(1 - \beta\right)\right]^{1/2} = \\ &= \tau_1 \left[\left(1 + \beta_1\right)/\left(1 - \beta_1\right)\right]^{1/2} \left[\left(1 + \beta\right)/\left(1 - \beta\right)\right]^{1/2} = 3\tau_1.\end{aligned}$$

Решение данной задачи значительно упрощается, если понять, что для удаляющегося звездолета картина такая, как если бы импульсы излучались из того места, где он находился вначале, с периодом  $\tau_1$ . Воспользовавшись полученной выше формулой для периода пульсаций в системе отсчета, связанной со сгустком, получаем

$$\tau_2 = \tau_1 \left[\left(1 + \beta_2\right)/\left(1 - \beta_2\right)\right]^{1/2}.$$

Если известно, что две частицы движутся в перпендикулярных направлениях со скоростями  $u_1$  и  $u_2$ , то для определения их относительной скорости и угла ее направления можно воспользоваться соотношениями (8.18) и (8.19). Допустим в неподвижной (лабораторной) системе  $u_{1x} = u_1$ ,  $u_{1y} = 0$ ,  $u_{2x} = 0$ ,  $u_{2y} = u_2$ . Перейдем в систему, которая движется со скоростью  $v = u_1$ , т. е. неподвижна относительно первой частицы. Для определения скоростей второй частицы в подвижной системе воспользуемся соотношениями из (8.18) и (8.19)

$$u_{2y}' = u_{2y}' \left(1 - u_1/c^2\right)^{1/2} / \left(1 + u_{2x}' u_1/c^2\right) = u_2;$$

$$u_{2x}' = (u_{2x}' + u_1) / \left(1 + u_{2x}' u_1/c^2\right)^{1/2} = 0.$$

Отсюда

$$u'_{2x} = -u_1 \text{ и } u'_{2y} = u_2 \left(1 - u_1^2/c^2\right)^{1/2}.$$

Относительная скорость второй частицы

$$u'_2 = \left(u_1^2 + u_2^2 - u_1^2 u_2^2/c^2\right)^{1/2}.$$

Угол наклона относительно оси  $x$  определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\theta = u_2 \left(1 - u_1^2/c^2\right)^{1/2}/u_1.$$

Происходящее в некоторой точке пространства в некоторый момент времени называется **событием**. Это может быть, в частности прохождение тела или света. Общую связь между событиями при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую дают преобразования Лоренца. Каждое событие определяется тремя пространственными координатами и временем. Удобно воспользоваться четырехмерным пространством (четвертая координата часто записывается в виде  $ct$  и имеет тогда размерность длины), чтобы событие изображалось точкой (называемой **мировой**). Движению частицы соответствует линия (**мировая линия**). Для равномерно и прямолинейно движущейся частицы это прямая линия. Расстояние между двумя событиями в четырехмерном пространстве называется **интервалом**

$$S_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2}. \quad (8.24)$$

Из принципа относительности следует **инвариантность интервала**, т. е. интервал одинаков во всех инерциальных системах отсчета. Из инвариантности интервала можно получить формулы преобразований Лоренца. Для света, который распространяется со скоростью  $c$ , интервал равен нулю.

Графическое изображение событий в четырехмерном пространстве затруднительно. Три пространственные координаты, правда, можно объединить в виде трехмерного вектора  $\mathbf{r}$ . В случае движений вдоль одной пространственной координаты остается эта координата и время. Можно продемонстрировать, как последующие или предыдущие события связаны с событием здесь и сейчас ( $x = 0, ct = 0$ ). Точки (события), соответствующие распространению света из нулевой точки (в положительном направлении  $x = ct$ , в отрицательном направлении  $x = -ct$ ), образуют **световой конус** (точнее проекцию конуса). Любое событие, вызванное событием в нуле, может находиться внутри конуса в верх-

ней части, которая называется **будущим**. На событие в нулевой точке могут повлиять только события, находящиеся в нижней части (**прошлое**). Интервалы внутри светового конуса называются **времениподобными**. Они могут иметь причинно-следственную связь. Если два события происходят с одним и тем же телом, то интервал между ними всегда времениподобный, так как скорость тела не может быть больше скорости света. Интервалы вне светового конуса называются **пространственноподобными**. Между ними причинной связи не может быть.

Использование графиков очень полезно при решении задач. На рис. 8.7 в координатах  $(\tau = ct, x)$  показана мировая линия движения тела. Длина мировой линии складывается из суммы интервалов

$$\Delta s = [(\Delta\tau)^2 - (\Delta x)^2]^{1/2}. \quad (8.25)$$

Эту длину называют **собственным временем мировой линии**. В лоренцовой геометрии искривленная мировая линия между двумя заданными событиями короче, чем прямая мировая линия между теми же двумя событиями, — короче в смысле соответствующего ей промежутка собственного времени. Промежуток собственного времени короче для того путешественника, который улетел, ускорившись до большой скорости, а затем повернул обратно и вернулся назад, чем для человека, оставшегося у себя дома (**парадокс часов**). Определяющим признаком мировой линии движущегося тела является наличие ускорения. Если у системы отсчета есть ускорение, то время меньше, чем при отсутствии ускорения.

Рассмотрим, например, задачу о близнецах Петре и Павле. Петр отправился в направлении оси  $x$  на 7 лет своего времени со скоростью  $24/25$  скорости света, после чего сменил скорость на обратную и за 7 лет вернулся назад, тогда как Павел оставался на Земле (№ 8.77). Парадокс заключается в том, что движение относительное, и каждый из них себя может считать неподвижным (в своей системе), а следо-

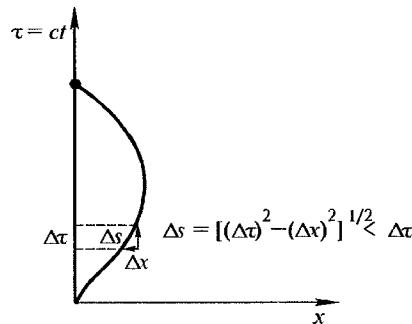


Рис. 8.7

вательно, время у него идет быстрее. В действительности у них не все одинаково. Система отсчета Петра при повороте в обратное направление перестает быть инерциальной. Это свидетельствует о том, что ее надо считать подвижной, и время в ней идет медленнее. На рис. 8.8 представлены мировые линии Петра и Павла. Инерциальной можно считать только систему отсчета Павла. В ней и надо провести расчет.

Если в момент отправления Петра близнецам было по 21 году, то через 14 лет Петру будет 35. Из (8.1) для времени в неподвижной системе получаем  $t = 14[1 - (24/25)^2]^{-1/2} = 50$  лет. Таким образом, Павлу будет 71 год.

**Оси подвижной** системы отсчета можно изобразить в **осях неподвижной**. Мировую линию, описывающую перемещение в неподвижной системе отсчета начала пространственной системы координат движущейся системы отсчета, на рис. 8.9 изображает линия  $0t'$ . Наклон ее определяется углом из соотношения

$$\operatorname{tg} \theta = \beta = v/c. \quad (8.26)$$

и соответственно уравнение, описывающее линию,

$$x = \beta ct. \quad (8.27)$$

Пунктиром на рисунке показана мировая линия света.

Так как по принципу относительности скорость света должна быть одинакова в обеих системах отсчета, то ось  $x'$  должна отклоняться от оси  $x$  также на угол  $\theta$ . Поэтому ее уравнение

$$x' = ct/\beta. \quad (8.28)$$

Задача о соударении двух одинаковых частиц позволяет найти новое выражение для импульса, которое обеспечивает сохранение импульса в инерциальных системах. Выберем систему отсчета, показанную на рис. 8.10, таким образом, что в ней центр масс частиц покойится.

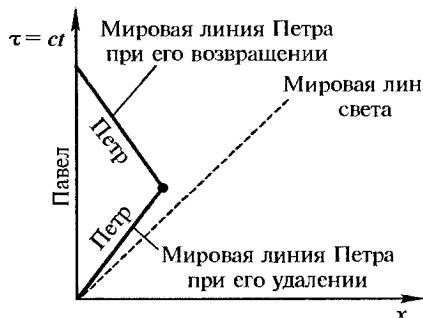


Рис. 8.8

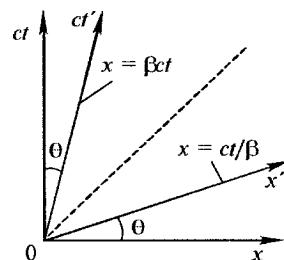


Рис. 8.9

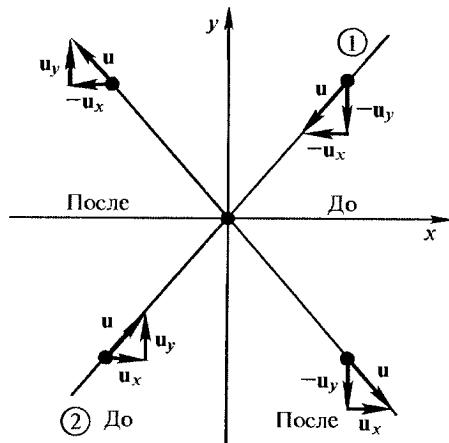


Рис. 8.10

Составляющая полного импульса вдоль оси  $y$  должна быть равна нулю как до, так и после столкновения. Это будет справедливо независимо от выражения импульса. В системе отсчета, движущейся со скоростью  $v = u_x$ , движение частиц показано на рис. 8.11. Используя данные рис. 8.10 и уравнения (8.21) и (8.22), получаем

$$u'_x(1) = -2v/(1+v^2)/c^2; \quad (8.29)$$

$$u'_x(2) = 0; \quad (8.30)$$

$$u'_y(1) = u_y/\left[\gamma(1+v^2/c^2)\right]; \quad (8.31)$$

$$u'_y(2) = u_y/\left(1-v^2/c^2\right)^{1/2} > u'_y(1). \quad (8.32)$$

Видно, что выражение для импульса, когда он пропорционален скорости, не может обеспечить сохранение импульса. Смещение ( $\Delta y$ ) в направлении, перпендикулярном движению системы, одинаково

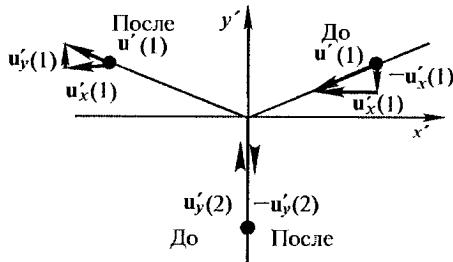


Рис. 8.11

для всех систем. Однако время ( $\Delta t$ ), затрачиваемое на прохождение расстояния  $\Delta y$ , зависит от системы отсчета. Независимым от системы отсчета будет собственное время  $\Delta t = \Delta t(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ . Таким образом, величина  $\Delta y/\Delta t$  одинакова для всех систем отсчета. Отсюда следует, что во всех системах одинакова будет величина  $v/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ .

Чтобы закон сохранения импульса выполнялся в инерциальных системах отсчета, необходимо новое (релятивистское) определение импульса:

$$p = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = \gamma mv = mc\beta\gamma. \quad (8.33)$$

Отсюда

$$p^2 = m^2 c^2 \beta^2 \gamma^2. \quad (8.34)$$

Воспользуемся тождеством

$$1/(1 - v^2/c^2)^{1/2} - (v/c)^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = 1 \text{ или } \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1. \quad (8.35)$$

Это дает готовый инвариант относительно преобразования Лоренца, поскольку единица — постоянная величина. Умножая обе части (8.35) на  $m^2c^4$ , получим

$$m^2c^4(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2) = m^2c^4$$

или, используя (8.34),

$$m^2c^4\gamma^2 - p^2c^2 = m^2c^4. \quad (8.36)$$

Правая часть уравнения является инвариантом для преобразования Лоренца (это постоянная величина), но что такое первый член в (8.36). При  $\beta \ll 1$  получаем

$$mc^2\gamma = mc^2/(1 - \beta^2)^{1/2} \approx mc^2(1 + \beta^2/2 + ...) \approx mc^2 + mv^2/2. \quad (8.37)$$

Предполагаем, что полная релятивистская энергия

$$E = mc^2\gamma = mc^2/(1 - \beta^2)^{1/2}. \quad (8.38)$$

Тогда из (8.36) получаем связь энергии с импульсом

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4. \quad (8.39)$$

Для неподвижной частицы получаем энергию покоя

$$E_0 = mc^2. \quad (8.40)$$

Тогда кинетическая энергия

$$K = E - E_0. \quad (8.41)$$

Еще одно полезное соотношение из (8.33) и (8.38)

$$p = Ev/c^2. \quad (8.42)$$

Отметим, что при переходе к движущейся системе  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ , и  $E/c^2$  преобразуются по Лоренцу так же, как соответственно  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ ,

$$p'_x = \gamma(p_x - \beta E/c), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z; \\ E' = \gamma(E - p_x c \beta). \quad (8.43)$$

Обратные преобразования

$$p_x = \gamma(p'_x + \beta E/c), \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z; \\ E = \gamma(E' + p'_x c \beta). \quad (8.44)$$

Аналогично координатам и времени компоненты импульса и энергия позволяют сформировать четырехмерный вектор энергии-импульса.

Движение тела под действием силы  $\mathbf{F}$  определяется вторым законом Ньютона:

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}. \quad (8.45)$$

При увеличении скорости  $\gamma$  увеличивается и при  $v = c$  обращается в бесконечность. Это обращает в бесконечность импульс и энергию. Отсюда следует, что тело конечной массы не может достигнуть скорости света, а частица, двигающаяся со скоростью света (фотон), не имеет массы покоя. Для света

$$p = E/c. \quad (8.46)$$

Вопрос о массе покоя решается измерением скорости движения. Отличие скорости от скорости света позволяет оценить массу покоя.

Если, например, измерено, что от вспышки сверхновой звезды приход **нейтрино запаздывает** по времени на  $\Delta t$  от прихода гравитационной волны, для которой скорость распространения считается равной скорости света ( $c$ ), то, обозначая расстояние до звезды  $l$ , получаем  $\Delta t = l/v - l/c = (l/c)(c/v - 1)$ . Откуда  $v/c = 1/(1 + \Delta t c/l) \approx 1 - \Delta t c/l$ . Связь энергии с массой из (8.38)  $E = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = mc^2/(2\Delta t c/l)^{1/2}$  (№ 8.23). Отсюда при известном расстоянии находим энергию по массе покоя, или массу по измеренной энергии.

Приведенные релятивистские зависимости для импульса и энергии могут быть проверены в экспериментах на ускорителях и в космических лучах. Эти эксперименты подтверждают теорию относительности даже лучше, чем опыт Майкельсона.

При  $v \ll c$  энергия  $E \approx mc^2 + mv^2/2$ , а кинетическая энергия  $K = mv^2/2$ .

Найдем, какую часть энергии покоя частицы должна составлять релятивистская кинетическая энергия  $K_r$ , чтобы **относительная ошибка**

ка, полученная при использовании нерелятивистского выражения для кинетической энергии, составляла бы 1 % (№ 8.20). Найдем также соответствующие величины для протона и электрона.

Воспользовавшись формулой (8.41) для релятивистской кинетической энергии  $K_r$  разложим ее в ряд Тейлора по  $\beta^2 = (v/c)^2$ . Получаем

$$K_r = mc^2[l/(1 - v^2/c^2)^{1/2} - 1] = mc^2[v^2/(2c^2) + (3/8)v^4/c^4 + \dots] = \\ = K + (3/8)mv^4/c^2 + \dots .$$

Здесь  $K = mv^2/2$  — нерелятивистская кинетическая энергия. По условию  $0,01 = (K_r - K)/K = (3/4)v^2/c^2$ . Отсюда  $v^2/c^2 = (4/3)0,01$ ; ( $v = 3,4 \cdot 10^4$  км/с). При этом в том же приближении имеем  $K_r/(mc^2) = (1/2)v^2/c^2 = 1/150$ .

Для протона:  $mc^2 = 938,23$  МэВ =  $1,5 \cdot 10^{-3}$  эрг,  $K_r = 8,25$  МэВ =  $= 10^{-5}$  эрг;

для электрона:  $mc^2 = 0,511$  МэВ =  $0,8 \cdot 10^{-6}$  эрг,  $K_r = 0,003$  МэВ =  $= 5 \cdot 10^{-9}$  эрг.

Найдем скорость частицы (заряд  $e$ , масса  $m$ ), прошедшей разность потенциалов  $U$  без начальной скорости (№ 8.18). Работа электрического поля  $eU$  идет на увеличение кинетической энергии (8.41)  $eU = mc^2(\gamma - 1)$ . Отсюда можно определить скорость, в том числе и в предельных случаях.

Если задана начальная энергия частицы и напряженность электрического поля, которое тормозит движение частицы, то (8.41) позволяет найти пробег (№ 8.19).

В космических лучах протоны могут обладать очень большой энергией  $E_k$ . В таком случае скорость их можно считать равной скорости света, и для вычисления времени прихода с расстояния  $l$  (например, от границы Галактики) получаем  $T = l/c$ . Предполагая (№ 8.24), что после рождения протонов на границе Галактики их энергия все время росла линейно со временем (от энергии покоя)  $E = mc^2 + At$ , найдем время движения в системе отсчета протона. Зная  $A = (E_k - mc^2)/T$  и пользуясь (8.1) и (8.83), находим время.

Рассмотрим ускорение электронов от энергии покоя до достаточно большой конечной энергии  $E_k$  в ускорителе, в котором ускорение электрона происходит вдоль прямой трубы длиной  $L_0$  равномерно (т. е. его полная энергия растет пропорционально проходимому расстоянию). Найдем длину трубы в системе отсчета, связанной с электроном (№ 8.25).

Каждый элемент трубы длиной  $dx$  в системе координат, движущейся вместе с электроном, будет, как следует из формулы (8.8), сокращаться до  $dL = dx(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ . Используя условие линейной

зависимости энергии электрона от расстояния, пройденного вдоль трубы,  $E = E_0 + Ax$ , из формул (8.38) и (8.40) получаем

$$(1 - v^2/c^2)^{1/2} = E_0/E = E_0/(E_0 + Ax),$$

где  $A = (E_k - E_0)/L_0$ . Здесь  $E_0$  и  $E_k$  — начальная и конечная энергии. Отсюда

$$L = \int_0^{L_0} E_0/(E_0 + Ax) dx = L_0 E_0 \ln(E_k/E_0)/(E_k - E_0).$$

Если известно время  $\tau_0$  жизни частицы (в собственной системе отсчета), то можно найти величину энергии  $E$  в системе, относительно которой она движется со скоростью  $v$ , чтобы частица смогла пройти расстояние  $l$  (№ 8.27). Используя (8.1) и (8.38), получаем

$$E = mc^2/l/\tau_0.$$

По энергии частицы можно определить ее время жизни  $\tau = \gamma\tau_0 = Et_0/(mc^2)$  (№ 8.32).

Теория относительности применима и к сложным телам и системам тел. В таких случаях под массой надо понимать полную массу покоя системы как целого  $M$ , а под скоростью — скорость движения как целого. В энергию  $Mc^2$ , которую иногда называют внутренней, при этом кроме суммы энергий покоя составляющих ее частиц включается их кинетическая энергия и энергия взаимодействия. Очевидно, что при превращениях системы нет закона сохранения массы. Масса сложного тела не равна сумме масс его частей. Разность их называется дефектом массы, а умноженная на квадрат скорости света — энергией связи. Тело может самопроизвольно распасться при положительном дефекте массы. При отрицательном дефекте — необходимо подвести энергию, равную энергии связи.

Энергией системы частиц является сумма энергий частиц  $E_c$ , а импульсом векторная сумма импульсов всех частиц  $\mathbf{p}_c$ . При превращениях системы частиц и при переходе к другим системам отсчета сохраняется величина

$$(E_c)^2 - (\mathbf{p}_c c)^2 = \text{инвариант.} \quad (8.47)$$

Это соотношение используют при решении задач о взаимодействии частиц.

Для определения скорости центра инерции (масс) системы (движения как целого) можно применить формулу (8.42), в которую подставить суммарные энергию и импульс в данной системе отсчета

$$\mathbf{v}_u = \mathbf{p}_c c^2/E_c. \quad (8.48)$$

Например, определим скорость центра масс относительно лабораторной системы отсчета, в которой **частица** массой  $m_1$  и импульсом  $\mathbf{p}_1$  **сталкивается с покоящейся** частицей массой  $m_2$  (№ 8.67). Из (8.48)

$$\mathbf{v}_{\text{ц}} = \mathbf{p}_1 c^2 / \left[ \left( p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4 \right)^{1/2} + m_2 c^2 \right].$$

Рассмотрим **столкновение** двух одинаковых частиц, летящих навстречу друг другу: одна со скоростью  $\beta$ , а другая со скоростью  $k\beta$ . Если заданы  $k$  и скорость центра масс  $\beta_{\text{ц}}$ , то можно найти  $\beta$  из условия равенства импульсов и в данном случае скоростей в системе центра масс. Используя (8.21), получаем

$$(k\beta - \beta_{\text{ц}}) / (1 - k\beta\beta_{\text{ц}}) = (\beta - \beta_{\text{ц}}) / (1 + \beta\beta_{\text{ц}}).$$

При столкновении двух частиц: например (№ 8.72), одной с массой  $3m$  и импульсом  $4mc$ , движущейся вдоль оси  $x$ , и другой с массой  $4m$  и импульсом  $3mc$ , движущейся вдоль оси  $y$ , скорость центра масс будет  $v_{\text{ц}} = (16m^2c^2 + 9m^2c^2)^{1/2}c^2 / (E_1 + E_2)$ . Здесь энергии вычисляются с помощью (8.39). Угол, который направление скорости составляет с осью  $x$ , определяется отношением модулей импульсов  $\tan\theta = 3mc / (4mc)$ .

Рассмотрим **столкновение и слипание** двух частиц. Например, на покоящуюся частицу массой  $m_1$  налетает частица массой  $m_2$ , кинетическая энергия которой равна  $K_2$ . После столкновения частицы движутся как целое. Найдем массу  $M$  образовавшейся частицы и посмотрим, при каких условиях эта масса приблизительно равна сумме масс исходных частиц. Найдем также скорость образовавшейся частицы (№ 8.38).

В релятивистском случае для системы тел (в том числе и соударяющихся и объединяющихся), как следует из (8.47), сохраняется величина  $I = E_c^2 - p_c^2 c^2$ . Здесь  $E_c$  и  $p_c$  — полная энергия и импульс системы в любой системе отсчета. Энергия системы до соударения  $E_c = m_1 c^2 + m_2 c^2 + K_2$ .

Импульс системы — это импульс массы  $m_2$ . Выразим его через кинетическую энергию. Так как  $p_2^2 c^2 = E_2^2 - m_2^2 c^4$ , а  $E_2 = m_2 c^2 + K_2$ , то

$$p_2^2 c^2 = K_2^2 + 2K_2 m_2 c^2 = K_2 (K_2 + 2m_2 c^2).$$

В системе координат, связанной с центром масс системы, после соударения  $I = M^2 c^4$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} M^2 c^4 &= (m_1 c^2 + m_2 c^2 - K_2)^2 - (K_2^2 + 2K_2 m_2 c^2) = \\ &= (m_1 + m_2)^2 c^4 + 2m_1 c^2 K_2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$M = [(m_1 + m_2)^2 + 2K_2 m_1/c]^{1/2}.$$

При  $2K_2 m_1/c^2 \ll (m_1 + m_2)^2$ ,  $M \approx m_1 + m_2$ . Скорость слипшихся частиц — это скорость центра инерции и, как следует из (8.48):

$$v = p_c c^2/E_c = c[K_2(K_2 + 2m_2 c^2)]^{1/2}/[(m_1 + m_2)c^2 + K_2].$$

Использование законов сохранения при распаде частиц рассмотрим на примере распада покоящегося  $\pi^+$ -мезона, который распадается на антимюон  $\mu^+$  и нейтрино  $\nu$  (энергия покоя равна нулю). Найдем кинетические энергии  $T_\mu$  и  $T_\nu$  продуктов распада (№ 8.44).

Учитывая, что для нейтрино импульс  $p_\nu$  и энергия  $E_\nu$  связаны  $E_\nu = p_\nu c$ , из закона сохранения импульса  $p_\mu = p_\nu = p$  и закона сохранения энергии  $m_\pi c^2 = E_\nu + (m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2)^{1/2}$  получаем

$$T_\nu = E_\nu = pc = (m_\pi^2 + m_\mu^2)^{1/2} / (2m_\pi).$$

Так как  $E_\mu = m_\mu c^2 + T_\mu$ , то  $T_\mu = m_\pi c^2 - m_\mu c^2 - T_\nu$ .

Рассмотрим упругое столкновение релятивистского протона с покоящимся протоном, при котором протоны разлетаются симметрично относительно первоначального направления движения первого протона (№ 8.42). Обозначим угол между разлетающимися частицами  $\theta$ , первоначальный импульс  $p$ , импульсы разлетающихся протонов  $p_1$  и  $p_2$ . Из симметрии разлета следует равенство импульсов разлетающихся протонов. Из одинаковости их следует равенство энергий. Сохранение импульса  $p = 2p_1 \cos(\theta/2)$ . Сохранение энергии  $E + mc^2 = 2E_1$ . Если задана кинетическая энергия налетающего протона  $K$ , то получаем  $\cos\theta = K/(K + 4mc^2)$ .

Если частица массой  $m$  на лету распадается на два фотона с энергиями в неподвижной системе отсчета  $E_1$  и  $E_2$  (№ 8.43), то удобно воспользоваться инвариантом (8.47). Параметры фотонов берем в неподвижной системе, а значение инварианта вычисляем для частицы в системе ее центра масс

$$\begin{aligned} m^2 c^4 &= (E_1 + E_2)^2 - c^2 (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = \\ &= (E_1 + E_2)^2 - c^2 (p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\theta). \end{aligned}$$

Используя связь энергии фотона с его импульсом, получаем для угла разлета

$$\cos\theta = 1 - m^2 c^4 / (2E_1 E_2).$$

Рождение новых частиц при ядерных реакциях происходит за счет кинетических энергий сталкивающихся частиц. Возможные варианты определяются законами сохранения. Минимальная кинетическая энергия, например, для образования протона и анти-протона при столкновении движущегося протона с неподвижным протоном (№ 8.47) определяется с помощью инвариантa (8.47). Значения инвариантa пишем для исходных частиц в неподвижной (лабораторной) системе отсчета, а для всех частиц после рождения дополнительных в системе центра масс

$$[mc^2 + (m^2c^4 + p^2c^2)^{1/2}]^2 - p^2c^2 = (4mc^2)^2.$$

Отсюда определяем импульс, а затем с помощью (8.41) кинетическую энергию.

Аналогичным образом действуем и в случае, если сталкиваются две разные частицы, а в результате получается набор разных частиц (№ 8.61).

Найдем, при какой кинетической энергии одинаковой у двух протонов, сталкивающихся под прямым углом, возможно рождение пары протон-антипротон. Обозначим энергию покоя протона  $E_0$ , а полную энергию  $E_1 = nE_0$ . Импульс каждого протона из (8.39)

$$(p_1c)^2 = (nE_0)^2 - E_0^2 = (n^2 - 1)E_0^2.$$

Для системы двух протонов  $E_c = 2nE_0$  и  $(p_c c)^2 = 2(n^2 - 1)E_0^2$ . Из (8.47) для рождения пары должно выполняться  $E_c^2 - (p_c c)^2 \geq (4E_0)^2$ . Определяем  $n$  и затем по (8.41) находим кинетическую энергию.

При движении частицы (тела) изменение его ускорения  $\mathbf{a}$  под действием силы  $\mathbf{F}$  в релятивистской теории определяется уравнением

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = m\gamma\mathbf{a} + m\gamma^3\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{a})/c^2. \quad (8.49)$$

Из этого соотношения для ускорения  $\mathbf{a}$  можно получить

$$m\gamma\mathbf{a} = \mathbf{F} - \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{F})/c^2. \quad (8.50)$$

Следует обратить внимание на то, что направления силы и ускорения в общем случае не совпадают.

Использование (8.50) покажем на частном примере. Релятивистская частица, падающая в поле тяжести, в некоторый момент времени, когда скорость частицы составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с направлением действующей на нее

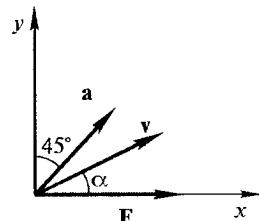


Рис. 8.12

силы, имеет ускорение, составляющее с этой силой угол  $45^\circ$ . На рис. 8.12 показаны сила, скорость и ускорение. Проекции (8.50) на оси координат дают

$$m\gamma a_x = F(1 - \beta^2 \cos^2 \alpha), \quad m\gamma a_y = -F \cos \alpha \beta^2 \sin \alpha.$$

По условию ( $\text{угол } 45^\circ$ ) компоненты ускорений равны. Поэтому  $1 - \beta^2 \cos^2 \alpha = \beta^2 \cos \alpha \sin \alpha$ . Используя условие для  $\alpha$ , находим  $\beta = v/c$ . Чтобы найти **минимальную скорость**, при которой возможно равенство компонент ускорений при некотором угле  $\alpha$ , найдем максимум величины  $1/\beta^2 = \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)$ . Приравнивая производную по  $\alpha$  нулю, для положительных  $\alpha$  получаем  $\tan \alpha = (2)^{1/2} - 1$  и  $\alpha = 22,5^\circ$ . Откуда определяем  $\beta = 0,91$ .

Рассмотрим два важных случая (№ 8.74), пользуясь (8.33).

Сила действует в направлении, перпендикулярном скорости, т. е. скорость частицы изменяется только по направлению. Тогда

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = m\gamma d\mathbf{v}/dt = m\gamma \mathbf{a}. \quad (8.51)$$

Сила действует в направлении скорости, т. е. скорость не меняется по направлению, но меняется по величине

$$F = dp/dt = md(\gamma v)/dt = m\gamma^3 a, \quad (8.52)$$

Найдем, например (№ 8.76), за какое время по собственным часам покившаяся частица достигнет скорости  $v$  под действием постоянной по величине и направлению силы  $\mathbf{F}$ . Учитывая начальное условие, из (8.52) получаем

$$\gamma m v = Ft. \quad (8.53)$$

Отсюда из (8.2) для скорости имеем

$$v = (Ft/m)/[1 + (Ft)^2/(mc)^2]^{1/2}.$$

Из (8.1) находим

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^t dt/\gamma = \int_0^t \left\{ 1 - \left[ (Ft)^2 / (mc)^2 \right] / \left[ 1 + (Ft)^2 / (mc)^2 \right] \right\}^{1/2} dt = \\ &= (mc/F) \ln \left\{ (Ft) / (mc) + \left[ 1 + (Ft)^2 / (mc)^2 \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Значение времени подставляем из (8.53).

Рассмотрим движение частицы массой  $m$ , которая начинает двигаться под действием постоянной по величине и направлению силы  $\mathbf{F}$ . Определим расстояние, пройденное частицей за время, за

которое скорость частицы, например (№ 8.75), достигнет значения  $v = 0,8 c$ .

В данном случае можно применить формулу (8.52). Для ускорения  $a$  получаем

$$a = dv/dt = vdv/dx = (1/2)dv^2/dx = -(1/2)c^2dz/dx.$$

Здесь введено обозначение  $z = 1 - v^2/c^2 = 1/\gamma^2$ . Теперь формула (8.52) имеет вид

$$Fdx = -m(c^2/2)dz/(z)^{3/2}.$$

Интегрируя, получаем  $Fx = mc^2(1/(z)^{1/2} - 1) = mc^2(\gamma - 1)$ .

Этот результат можно получить и из закона сохранения энергии. Кинетическая энергия (8.41) равна работе силы. Подставляя значение скорости, получаем

$$(\gamma - 1) = 2/3 \text{ и } x = (2/3)mc^2/F.$$

## 9. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоским называется движение твердого тела, при котором для определения положения точек тела в пространстве достаточно указать две координаты, третья остается неизменной.

Для материальной точки было получено уравнение  $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$ , связывающее момент импульса (или количества движения)  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$  и момент сил  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . Это уравнение можно применить и при вращательном движении твердого тела. В случае вращательного движения вводится угловая скорость  $\omega$ . Линейная скорость точек тела зависит от вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного в данную точку из точки на оси вращения (его составляющая, перпендикулярная оси вращения, равна расстоянию точки от оси),  $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ .

Твердое тело всегда можно представить в виде набора точечных масс. При вращении твердого тела угловые скорости всех составляющих его точечных масс одинаковы. Расстояние точечной массы от оси вращения обозначим  $b_i$ . Тогда момент количества движения (импульса) относительно оси равен

$$L = \sum b_i m_i v_i = \sum m_i b_i^2 \omega = I\omega. \quad (9.1)$$

Величина

$$I = \sum m_i b_i^2. \quad (9.2)$$

называется **моментом инерции относительно оси**. Переходя к бесконечно малым точечным массам, т. е. от суммирования к интегрированию по массе, получаем

$$I = \int b^2 dm. \quad (9.3)$$

Именно эта величина является коэффициентом пропорциональности между моментом сил, вызывающих вращение, и угловым ускорением твердого тела

$$dL/dt = d(I\omega)/dt = I d\omega/dt = M = \sum r_i F_i. \quad (9.4)$$

Здесь  $r_i$  — плечо силы.

Следует подчеркнуть, что **инерционность** твердого тела при вращении относительно оси определяется моментом инерции, а не массой, как в случае поступательного движения. Момент инерции зависит от распределения масс относительно оси вращения. Общей же характеристикой инерционности конкретного тела при вращательном движении является **тензор инерции** — совокупность нескольких (в данном случае 9) величин, которые называются компонентами (элементами) тензора, значение которых зависит от выбранной системы координат. Через эти компоненты можно выразить момент инерции тела относительно произвольной оси (обычно проведенной через центр масс), если заданы углы, которые эта ось составляет с координатами (также проведенными через центр масс). Можно задать углы  $\alpha, \beta, \gamma$  с осями  $x, y, z$ , а можно задать компоненты (проекции) единичного вектора этой оси  $s$  на оси координат:  $s_x = \cos\alpha, s_y = \cos\beta, s_z = \cos\gamma$ .

Для момента инерции относительно оси, определяемой вектором  $s$ , имеем

$$I = I_{xx}s_x^2 + I_{yy}s_y^2 + I_{zz}s_z^2 + 2I_{xy}s_xs_y + 2I_{yz}s_ys_z + 2I_{zx}s_zs_x. \quad (9.5)$$

Компоненты вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm, & I_{xy} &= I_{yx} = - \int xy dm; \\ I_{yy} &= \int (z^2 + x^2) dm, & I_{yz} &= I_{zy} = - \int yz dm; \\ I_{zz} &= \int (x^2 + y^2) dm, & I_{zx} &= I_{xz} = - \int zx dm. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Равенство перекрестных компонент делает тензор симметричным. Тензор записывается в виде таблицы

$$\begin{matrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{matrix} \quad (9.7)$$

Еще раз подчеркнем, что элементы (компоненты) тензора зависят от выбранной системы координат. Можно всегда выбрать декартову систему координат таким образом, что тензор определяется только тремя элементами, которые называются **главными моментами инерции**. Иногда удобно вводить обозначения  $I_{xx} = I_1, I_{yy} = I_2, I_{zz} = I_3$ . Оси находят из условия, что остальные элементы тензора (9.7), определяемые формулами (9.6), равны нулю. Соответственно оси

называются **главными**. Момент инерции относительно любой оси может быть выражен через главные моменты и углы, которые эта ось составляет с главными

$$I = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma. \quad (9.8)$$

Важной особенностью главных осей является то, что произвольным образом закрученное тело стремится перейти к вращению относительно оси с максимальным или минимальным моментом (**свободным осям**). Наблюдать это можно, подбрасывая и закручивая произвольным образом простой спичечный коробок.

Геометрическим образом тензора инерции является эллипсоид инерции, полуоси которого (в соответствующих размерных координатах) выражаются через главные моменты  $a_i = (I_i)^{-1/2}$ .

Если все (три) главные моменты инерции тела совпадают, то эллипсоид превращается в сферическую поверхность. При этом момент инерции тела один и тот же относительно любой оси. Примером такого тела является куб и, естественно, шар.

Для решения задач необходимо знать теорему Гюйгенса—Штейнера, которую можно получить с помощью (9.2)

$$I = I_0 + ma^2. \quad (9.9)$$

Здесь  $I_0$  — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, а  $I$  — момент инерции тела относительно оси, проходящей параллельно первой на расстоянии  $a$  от нее. Приведем формулы для **моментов инерции** некоторых тел массой  $m$ . Момент инерции стержня длиной  $l$  относительно оси, проходящей через его конец, равен  $ml^2/3$ , а относительно центра масс  $ml^2/12$ . Момент инерции цилиндра радиусом  $R$  относительно оси симметрии  $mR^2/2$ , а цилиндрической оболочки  $mR^2$ . Момент инерции однородного шара радиусом  $R$  относительно оси, проходящей через его центр, равен  $2mR^2/5$ , а для сферической оболочки  $2mR^2/3$ . У прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $a$ ,  $b$  и  $c$  момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс параллельной ребру  $c$ , равен  $m(a^2 + b^2)/12$ . Соответственно у куба с ребром  $a$  момент инерции относительно любой оси, проходящей через центр масс,  $I_0 = ma^2/6$ . Для куба центральный эллипсоид инерции, когда моменты инерции вычисляются относительно осей, проходящих через центр масс, представляет сферу радиусом  $R = 1/(I_0)^{1/2}$ .

Найдем параметры эллипсоида инерции для осей, проходящих через вершину куба с ребром  $a$  и массой  $m$  (№ 9.170). Момент инерции относительно оси, проходящей через вершину и центр куба,

равен  $I_0$  — моменту инерции относительно любой оси, проходящей через центр куба. Моменты относительно осей перпендикулярных к ней определяем по теореме Гюйгенса—Штейнера  $I = I_0 + ml^2$ . Здесь  $l$  — расстояние от вершины до центра куба, которое равно  $l = a(3)^{1/2}/2$ . Очевидно, что эти моменты одинаковы, так как одинаковы все моменты инерции относительно осей, проходящих через центр куба. Для эллипсоида инерции получаем для главной полуоси вдоль диагонали куба  $R_1 = 1/(I_0)^{1/2}$ , а две другие полуоси одинаковые и равны  $R_2 = R_3 = 1/(I)^{1/2}$ . Так как  $I > I_0$ , то эллипсоид вытянут вдоль диагонали куба. Отношение большой оси к малым (одинаковым)  $R_1/R_2 = (I/I_0)^{1/2} = (5,5)^{1/2}$ .

Момент инерции прямоугольного параллелепипеда с длиной ребер  $l$ ,  $m$ ,  $n$  относительно его диагонали (№ 9.171) можно найти по формуле (9.8), учитывая, что главные моменты инерции

$$I_1 = M(m^2 + n^2)/12, \quad I_2 = M(l^2 + n^2)/12, \quad I_3 = M(l^2 + m^2)/12$$

и что

$$\cos\alpha = l/d, \quad \cos\beta = m/d, \quad \cos\gamma = n/d,$$

где  $d^2 = l^2 + m^2 + n^2$ .

Для примера покажем, как вычислить момент инерции для **тонкого, однородного** (постоянной плотности) стержня и однородного цилиндра. На рис. 9.1 представлен тонкий стержень массой  $m$  и длиной  $l$ . Под тонкостью стержня понимается, что масса стержня сосредоточена вдоль одной линии, которую иногда называют осью стержня. Используем (9.3)

$$I = \int_0^l x^2 (m/l) dx = ml^2/3.$$

На рис. 9.2 показан разрез цилиндра массой  $m$ , радиусом  $R$  и высоты  $h$ . С помощью (9.3) интегрируем по кольцам радиусом  $r$  и толщины  $dr$

$$I = \int_0^R r^2 [m/(h\pi R^2)] h 2\pi r dr = m R^2/2.$$

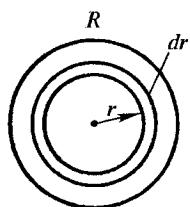


Рис. 9.2

Сложнее подсчитать, например, момент инерции конуса (№ 9.1). Кроме стандартного интегрирования приведем способ, связанный с представлением о моменте инерции относительно точки. Такой способ может быть использован и в других задачах.

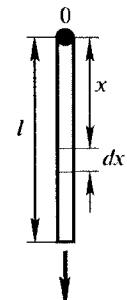


Рис. 9.1

Момент инерции конуса относительно его оси симметрии (рис. 9.3) можно представить в виде интеграла по бесконечно тонким дискам

$$I_x = \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^M r^2 dm = \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^L r^2 \rho \pi r^2 dx = \\ = \left(\frac{1}{2}\right) \pi \rho \int_0^L (xR/L)^4 dx = \left(\frac{1}{2}\right) \pi \rho (R/L)^4 \int_0^L x^4 dx = 0,1 \pi \rho R^4 L.$$

Учитывая, что объем конуса  $v = \pi R^2 L / 3$ , получаем  $I_x = 0,3 MR^2$ .

Вычисление момента инерции  $I_z$  относительно оси  $OZ$  можно провести непосредственным интегрированием по бесконечно малым элементам массы.

Однако существует менее громоздкий способ, который использует связь между **моментом инерции** элемента массы  $dm$  относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  (рис. 9.4)

$$dI_x = (y^2 + z^2) dm, \\ dI_y = (z^2 + x^2) dm, \quad dI_z = (x^2 + y^2) dm$$

и относительно начала координат

$$dI_0 = r^2 dm = (x^2 + y^2 + z^2) dm.$$

Проинтегрируем эти соотношения по всей массе тела. Получаем  $2I_0 = I_x + I_y + I_z$ . Применим это к бесконечно тонкому диску. Момент относительно средней точки на оси симметрии диска относительно этой оси  $I_0 = I_x$ , и тогда  $I_x + I_y + I_z = 2I_x$ , а в результате  $I_z = I_y = I_x/2$ . Используя теорему Штейнера, получаем

$$I_z = \left(\frac{1}{2}\right) I_x + \int_0^L \rho \pi (xR/L)^2 x^2 dx = 0,15 MR^2 + 0,6 ML^2.$$

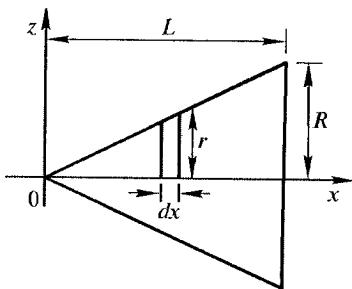


Рис. 9.3

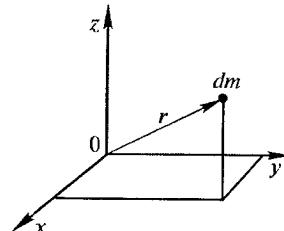


Рис. 9.4

Воспользуемся полученными формулами для вычисления момента инерции цилиндра относительно оси, перпендикулярной к оси симметрии и проходящей через центр масс, которую назовем осью  $x$ . Тонкий диск массой  $\rho\pi R^2 dx$  имеет момент инерции относительно оси, перпендикулярной оси симметрии  $\rho\pi R^2 dx R^2/4$ . Используя теорему Гюйгенса–Штейнера для момента инерции цилиндра относительно оси, перпендикулярной оси симметрии и проходящей через центр масс, получаем

$$I_2 = 2 \int_0^{H/2} \left( \rho\pi R^2 dx R^2/4 + \rho\pi R^2 dx x^2 \right) = \rho\pi R^2 H (3R^2 + H^2)/12.$$

Используем формулу (9.8) для вычисления момента инерции цилиндра относительно диагональной оси, угол которой с осью симметрии обозначим  $\alpha$ . Учитывая, что момент инерции относительно оси симметрии  $I_1 = \rho\pi R^4 H/2$  и  $\beta = \pi/2 - \alpha$ , а  $\gamma = \pi/2$ , получаем уравнение для определения  $R/H$  в случае, когда диагональный момент инерции равен моменту относительно оси симметрии (№ 9.172):

$$\rho\pi R^4 H/2 = (\rho\pi R^4 H/2) \cos^2 \alpha + \rho\pi R^2 H (3R^2 + H^2)/12 \sin^2 \alpha.$$

Перенося первый член в левую и сокращая на синус в квадрате, получаем зависимость, из которой находим отношение радиуса к высоте  $R/H = 1/(3)^{1/2}$ . Решение значительно упростится, если вспомнить, что равенство моментов инерции относительно различных осей будет в случае, когда эллипсоид инерции представляет сферу. В данном случае должны совпадать момент инерции относительно оси симметрии и перпендикулярной к ней оси, проходящей через центр масс  $I_1 = I_2$ .

В случае **полого цилиндра**  $I_1 = mR^2$ , а  $I_2 = mH^2/12 + mR^2/2$  и  $R/H = 1/(6)^{1/2}$ .

Рассмотрим вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Если при этом момент инерции постоянен, то уравнение имеет вид

$$Id\omega/dt = M. \quad (9.10)$$

Следует обратить внимание на **аналогию** этого уравнения со вторым законом Ньютона. Роль массы здесь играет момент инерции, силы — момент сил, скорости — угловая скорость, смещения — угол поворота.

Простейший тип задач — вращение блоков с **неподвижной осью**, которые при определении для них момента инерции  $I$  обычно можно считать дисками (цилиндрами). Если нить по блоку (массой  $m$  и

радиусом  $R$ ) идет без проскальзывания, то можно связать поступательное движение грузов, подвешенных на нити, с вращением блока. Считая нить нерастяжимой и невесомой, получаем, что ускорения грузов (№ 9.2) одинаковы по абсолютной величине ( $a$ ) и связаны с изменением угловой скорости вращения блока  $\omega$ :

$$a = r\omega/dt.$$

Вращение блока происходит благодаря разнице натяжения нитей  $T_2 > T_1$ . Различие натяжений связано с разницей подвешенных масс  $m_2 > m_1$ . Движения грузов определяются уравнениями

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1 \text{ и } m_2 a_2 = m_2 g - T_2. \quad (9.11)$$

Здесь  $a_2 = -a_1 = a$ .

Вращательное движение блока описывается уравнением

$$Id\omega/dt = (T_2 - T_1)r. \quad (9.12)$$

Из этих уравнений  $a = (m_2 - m_1)g/(m_1 + m_2 + I/r^2)$ . Натяжения определяем из уравнений движения грузов (9.11). На подвеску блока действуют сумма натяжений и вес блока.

Аналогичным способом решается и задача о вращении цилиндра радиусом  $R$  и массой  $M$  под действием намотанной на него невесомой и нерастяжимой нити с грузом массой  $m$  (№ 9.3). Уравнение поступательного движения груза

$$md^2x/dt^2 = mg - T$$

и уравнение вращательного движения блока

$$(MR^2/2)d^2\phi/dt^2 = RT$$

связаны условием отсутствия проскальзывания  $dx = Rd\phi$  или  $x = R\phi$ . Пользуясь этим и исключая силу натяжения нити  $T$ , получаем уравнение

$$d^2\phi/dt^2 = mg \cdot R/(MR^2/2 + mR^2).$$

Так как правая часть постоянна (движение с постоянным ускорением), уравнение легко интегрируется. Считаем, что при  $t = 0 \phi = 0$  и  $d\phi/dt = 0$ . Тогда

$$\phi = (1/2R)gt^2/[1 + M/(2m)].$$

Дальнейшим усложнением является задача о ступенчатом блоке с цилиндрами радиусами  $r$  и  $R$ , на которые намотаны в противоположных направлениях невесомые и нерастяжимые нити с грузами мас-

сой  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 9.5). Поступательные движения описываются уравнениями (9.11). Предполагаем  $m_2 > m_1$ . Связь вращательного ускорения с поступательными можно записать в виде уравнения

$$d\omega/dt = a_2/R = -a_1/r.$$

Уравнение вращательного движения для блока с моментом инерции  $I$

$$Id\omega/dt = T_2R - T_1r.$$

Из этих уравнений и (9.11) для углового ускорения (№ 9.4) получаем

$$d\omega/dt = g(m_2R - m_1r)/(I + m_2R^2 + m_1r^2).$$

Натяжения определяем из (9.11).

Рассмотрим задачу о двух обезьянах одинаковой массы, висящих на невесомой веревке, перекинутой через блок, представляющий собой сплошной цилиндр массой  $M$ . Одна из обезьян начинает подниматься относительно веревки с ускорением  $a$ . Найдем ускорение второй обезьяны относительно неподвижной системы координат (№ 9.10). Движение обезьян в неподвижной системе координат описываются уравнениями

$$ma_1 = T_1 - mg \text{ и } ma_2 = T_2 - mg.$$

Обозначая радиус блока  $R$ , получаем уравнение вращения блока

$$(MR^2/2)d\omega/dt = (T_1 - T_2)R.$$

Учитывая, что ускорение нити равно  $a$ , получаем  $a_1 = a - a_2$ . Отсутствие проскальзывания нити по блоку дает

$$d\omega/dt = a_2/R.$$

Из всех этих уравнений следует, что

$$a_2 = 2ma/(M + 4m).$$

Если невесомая веревка не перекинута через блок, а намотана на тяжелый барабан радиусом  $R$  с моментом инерции  $I$ , и по ней поднимается с постоянной скоростью относительно земли обезьяна массой  $m$  (№ 9.11), то для описания движения обезьяны и блока получаем уравнения  $T - mg = 0$ ,  $Id\omega/dt = TR$ . Так как в данном случае ускорение обезьяны относительно веревки равно ускорению веревки, получаем

$$a_{\text{отн}} = Rd\omega/dt = mgR^2/I.$$

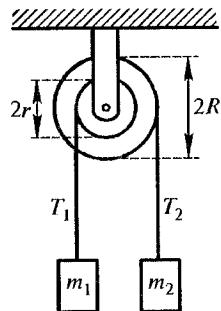


Рис. 9.5

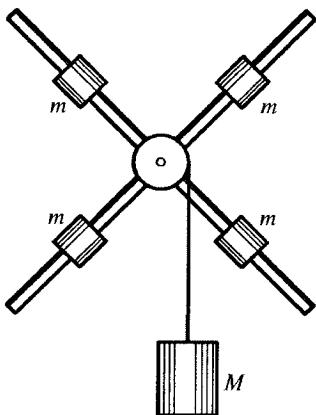


Рис. 9.6

**Маятником Обербека** называется блок с прикрепленными к нему взаимно перпендикулярными стержнями, на которых находятся одинаковые грузы массой  $m$  на расстояниях  $R$  от оси вращения (рис. 9.6). Вращение маятника происходит под действием груза массой  $M$ , привязанного к нити, намотанной на блок (втулку). Вращение маятника описывается уравнением

$$Id\omega/dt = Tr.$$

Потерями на трение в осях пренебрегаем. Уравнение движения груза

$$Ma = Mg - T.$$

Считаем, что сила сопротивления движению в окружающей среде несущественна. Отсюда для ускорения получаем

$$a = Mg/(M + I/r^2).$$

Возможно, эта конструкция называется маятником из-за постоянства ускорения и соответственно вращательного ускорения, а также времени опускания на всю длину нити и, как будет показано ниже, подъема. Для силы натяжения нити (№ 9.8) получаем

$$T = Mg/(1 + Mr^2/I).$$

При подъеме груза уравнение его движения записывается в виде

$$Ma_n = T_n - Mg,$$

а уравнение вращения маятника

$$Id\omega/dt = -rT_n.$$

Ускорение подъема

$$a_n = -Mg/(M + I/r^2).$$

Замедление при подъеме равно ускорению при падении. Натяжение нити при подъеме такое же, как при падении. При разматывании нити на полную ее длину  $h$ , когда скорость груза  $v = (2ha)^{1/2}$ , происходит рывок — увеличение силы натяжения нити. Эта сила меняет направление скорости груза на противоположное (направленное вверх). За время рывка блок поворачивается на  $180^\circ$ , не ме-

няя угловую скорость вращения (из-за большого момента инерции маятника). Таким образом, получаем

$$(T_p - Mg)\Delta t = 2Mv \text{ и } \Delta t = \pi r/v,$$

откуда

$$T_p = Mg + 4M^2g^2hr/[\pi(Mr^2 + I)].$$

Момент инерции маятника  $I = 4mR^2$ .

Рассмотрим закручивание и торможение диска, момент инерции которого  $I_0$ , на вертикальной оси. Тормозит диск сила трения в оси вращения, момент которой постоянен и равен  $M_0$ . Вращение диска возникает из-за того, что на него падает и прилипает к нему другой диск (например, монета) радиусом  $r$  и массой  $m$ , закрученный вокруг вертикальной оси до угловой скорости  $\omega_m$ . Расстояние между осями дисков равно  $d$ . Момент инерции системы диск—монета  $I = I_0 + m(d^2 + r^2/2)$ . Начальная угловая скорость вращения системы определяется из закона сохранения момента импульса

$$mr^2\omega_m/2 = I\omega_0,$$

что всегда имеет место при малом времени соударения и отсутствии очень больших внешних для рассматриваемой системы моментов. Торможение затем определяется уравнением

$$Id\omega/dt = -M_0.$$

Интегрируя, получаем

$$\omega = d\phi/dt = \omega_0 - M_0 t/I.$$

Еще раз интегрируя, для угла поворота имеем

$$\phi = \omega_0 t - M_0 t^2/(2I).$$

Для подсчета числа оборотов (№ 9.21) угол надо разделить на  $2\pi$ .

Законом сохранения момента импульса можно воспользоваться и при падении **раскрученного** диска (момент импульса  $I_1\omega_1$ ) на другой **раскрученный** (момент импульса  $I_2\omega_2$ ), когда оси вращения идут по одной вертикали (№ 9.22). При слипании или жестком (мгновенном) соединении дисков потери кинетической энергии связаны не с силами трения, так как относительного смещения дисков нет, а с энергией деформации дисков, которая затем переходит в тепловую. Суммарный момент импульса  $(I_1 + I_2)\omega = I_1\omega_1 + I_2\omega_2$ . Уменьшение кинетической энергии  $I_1\omega_1^2/2 + I_2\omega_2^2/2 - (I_1 + I_2)\omega^2/2$ . Сюда подставляем  $\omega$  из предыдущего соотношения.

Если диски не слипаются, а проскальзывают вначале, то при отсутствии внешнего момента сил момент импульса системы сохраняется, и можно найти скорости дисков после прекращения проскальзывания (№ 9.27). Потери на трение находятся по изменению кинетической энергии.

Сохранение момента импульса позволяет решать задачи о движении тела по свободно вращающемуся диску (№ 9.32). Угловая скорость увеличивается при уменьшении момента инерции системы (движении к оси вращения). Кинетическая энергия системы увеличивается в том же соотношении из-за работы, совершаемой в данном случае против центробежных сил.

Неподвижный диск начнет вращаться, если по нему вдоль окружности, центр которой лежит на оси вращения диска, начнет двигаться тело. Скорость определяется законом сохранения момента импульса (№ 9.33).

Если на гладкий горизонтальный стержень, который может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец, надевают кольцо, которое имеет скорость вдоль и поперек стержня, то оно будет раскручивать стержень и менять момент инерции системы (№ 9.146). Решение получаем из сохранения (постоянства) момента импульса.

Рассмотрим вращение в горизонтальной плоскости стержня длиной  $2l$  и массой  $m$  на невесомой штанге длиной  $l$ , жестко прикрепленной к центру стержня в перпендикулярном к нему направлении. На середине стержня находится жук массой  $2m/3$ . Первоначально система поконится. Затем жук начинает ползти с постоянной относительно стержня скоростью  $v$ . Найдем, насколько повернется стержень, когда жук доползет до конца стержня (№ 9.148). При отсутствии момента внешних сил сохраняется момент импульса системы. Для стержня момент импульса

$$L_{\text{ст}} = (ml^2/3 + ml^2)\omega = (4/3)ml^2\omega.$$

Для жука сложнее, так как он участвует в двух движениях:

$$L_{\text{ж1}} = -(2/3)mvl \text{ и } L_{\text{ж2}} = (2/3)m(l^2 + v^2t^2)\omega.$$

Из равенства моментов импульса стержня и жука получаем

$$\omega = d\alpha/dt = vl/(3l^2 + v^2t^2).$$

Интегрируя по времени от 0 до  $l/v$ , получаем

$$\alpha = (3)^{-1/2} \operatorname{arctg}(3)^{-1/2} = \pi(3)^{-1/2}/6.$$

**Закручивание** горизонтального диска вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью симметрии диска, может быть произведено с помощью выбрасывания с него другого тела (№ 9.40). Скорость после броска находится из закона сохранения момента импульса. В случае дальнейшего торможения, например, постоянным моментом из уравнения вращения находим время до остановки.

К поверхности **раскрученного диска** на некотором расстоянии от оси вращения можно прислонить другой диск, плоскость которого перпендикулярна плоскости первого диска и **ось вращения которого параллельна поверхности** первого диска и проходит через ось вращения первого диска (№ 9.34). Благодаря силе трения второй диск раскручивается до скорости, при которой прекращается проскальзывание (равенство линейных скоростей в точке соприкосновения). Это условие связывает конечные (устанавливающиеся) скорости, определяемые при интегрировании уравнений вращения дисков, в одном из которых сила трения замедляет, а в другом ускоряет вращение. Силы трения из этих уравнений исключаем и находим уставившиеся угловые скорости и потери энергии из-за трения.

Если на диске стоит **цилиндр**, то при вращении он может опрокинуться при большой силе трения между ним и диском либо съехать при малой силе трения (№ 9.36). Сила трения растет при раскручивании. Ее максимальное значение  $kmg = m\omega^2 R$ . Вопрос об опрокидывании решается сравнением момента центробежной силы и момента силы тяжести, действующих на цилиндр относительно нижнего края цилиндра.

**Торможение** вращения диска массой  $m$  и радиусом  $R$ , раскрученного и затем поставленного на шероховатую поверхность, происходит за счет сил трения. Нормальное давление  $mg/(\pi R^2)$ , умноженное на коэффициент трения  $k$ , дает величину силы трения, приходящуюся на единицу площади (напряжение трения). Пользуясь рисунком 9.2, находим момент сил трения для каждого колечка площадью  $2\pi r dr$  и интегрируем по всей площади основания диска

$$M = k mg / (\pi R^2) \int_0^R 2\pi r dr = (2/3) kmgR.$$

**Уравнение вращательного движения диска**

$$(mR^2/2)(d\omega/dt) = -(2/3)kmgR.$$

После сокращения

$$d\omega = -(4/3)kgdt/R = -(4/3)kgd\phi/(\omega R).$$

Интегрируя от начальной угловой скорости до остановки и от нуля до конечного угла поворота, получаем

$$\varphi_k = (3/8)\omega_0^2 R/(kg).$$

Разделив на  $2\pi$ , находим число поворотов (№ 9.23).

Аналогичный момент сил трения возникает между диском, лежащем на платформе, которая крутится по синусоидальному (для угла поворота времени) закону вокруг оси, совпадающей с осью симметрии диска, в момент начала проскальзывания. Максимальная амплитуда колебаний платформы определяется равенством этого момента сил трения произведению момента инерции диска на максимальное угловое ускорение (№ 9.55).

В общем случае вращения цилиндра с моментом инерции  $I$  под действием раскручивающего момента сил  $M$  и тормозящего, например пропорционального угловой скорости (№ 9.17), описывается уравнением

$$Id\omega/dt = M - k\omega.$$

Решение этого уравнения при заданном начальном условии легко найти после разделения переменных

$$d\omega/(\omega - M/k) = -kdt/I.$$

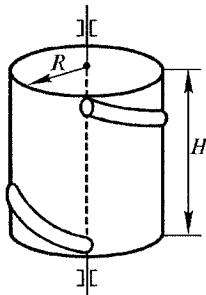


Рис. 9.7

Рассмотрим вращение вокруг оси симметрии вертикально расположенного сплошного цилиндра массой  $M$ , радиусом  $R$  и высотой  $H$ , к боковой поверхности которого прикреплена трубка, согнутая в виде одного витка спирали с шагом, равным высоте цилиндра (рис. 9.7), по которой может скользить без трения шарик массой  $m$  (№ 9.24). В случае желоба (№ 9.25) решение подобно приведенному ниже для трубки.

Шарик опускают в верхнее отверстие трубы без начальной скорости. Найдем скорость шарика после вылета из нижнего конца трубы. Массой трубы и трением в оси пренебрегаем. Считаем, что  $2\pi R = H$ , а масса шарика  $m = M/4$ .

В системе координат, связанной с концом трубы, шарик вылетает из трубы под углом  $\alpha$  к горизонтали, который определяется кинетическим соотношением (рис. 9.8)

$$\operatorname{tg} \alpha = H/(2\pi R) = v_b/(v_r + \omega_c R).$$

Здесь  $v_b$  — вертикальная скорость шарика, одинаковая во вращающейся и неподвижной сис-

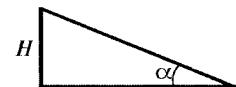


Рис. 9.8

темах координат;  $v_r = \omega_1 R$  — горизонтальная скорость шарика в неподвижной системе координат,  $\omega_1$  — соответствующая угловая скорость,  $\omega_c$  — угловая скорость цилиндра.

Из закона сохранения момента импульса вокруг вертикальной оси

$$(MR^2/2)\omega_c = mR^2\omega_1$$

следует

$$\omega_c/\omega_1 = 2m/M.$$

Используя кинематическое соотношение, получаем:

$$v_b = v_r(1 + 2m/M)H/(2\pi R).$$

Из закона сохранения энергии

$$mgH = (MR^2/2)\omega_c^2/2 + mR^2\omega_1^2/2 + mv_b^2/2$$

находим

$$v_u^2 = 2gH / \left\{ (1 + 2m/M) \left[ 1 + (1 + 2m/M)H^2/(4\pi R^2) \right] \right\}.$$

Окончательно

$$v^2 = v_b^2 + v_r^2; \quad v = \sqrt{50gH/33}.$$

Если к массе вращающегося диска  $M$  добавляется равномерно по диску за единицу времени **масса**  $\mu$  (на всю площадь), например за счет падающего на диск снега (№ 9.28), то при отсутствии момента внешних сил из закона сохранения момента импульса получаем меняющуюся со временем угловую скорость диска

$$\omega_1 = (MR^2\omega_0/2)/(MR^2/2 + \mu tR^2/2) = M\omega_0/(M + \mu t).$$

Здесь  $\omega_0$  — начальная скорость диска в тот момент, когда начал падать снег. Затухание вращения будет другим при сбрасывании снега вдоль радиуса диска. За время  $dt$  масса снега  $\mu dt$  упадет на диск, ее сдвинут к краю и сбросят с диска по радиусу. Запишем сохранение момента импульса в произвольный момент времени  $t$  и бесконечно близкий к нему момент  $t + dt$ :

$$MR^2\omega/2 = MR^2(\omega + d\omega)/2 + \mu dt R^2\omega.$$

Отсюда

$$d\omega/\omega = -2\mu dt/M.$$

Интегрируя, получаем изменение угловой скорости

$$\omega^2 = \omega_0^2 \exp(-2\mu t/m).$$

Затухание вращения в этом случае сильнее, так как экспонента растет быстрее.

Вращение системы может происходить за счет выброса части массы. Примером может служить круговой фейерверк. Для его получения на концах шеста длиной  $2l$  и массой  $M$ , который может свободно вращаться относительно оси, проходящей через его середину, укреплены пороховые заряды, которые при поджигании выбрасывают продукты сгорания со скоростью  $u$  в плоскости вращения перпендикулярно стержню (№ 9.128).

Если обозначить массу, выбрасываемую за единицу времени,  $\mu$ , то изменение массы заряда за время  $dt$  равно  $dm = -\mu dt$ . Так как внешние моменты сил отсутствуют, момент импульса системы сохраняется. Обозначая угловую скорость системы в момент времени  $t$  через  $\omega$  и массу заряда  $m$ , записываем равенство нулю разности моментов импульса системы в моменты времени  $t$  и  $t + dt$ :

$$[MI^2/3 + 2(m - \mu dt)l^2](\omega + d\omega) + \\ + 2\mu dt l^2(\omega - u/l) - (MI^2/3 + 2ml^2)\omega = 0,$$

отсюда

$$d\omega = -(u/l)dm/(m + M/6),$$

что позволяет найти все интересующие нас величины.

При вращении **работа** определяется произведением момента сил на угол поворота, а **мощность** произведением момента сил на угловую скорость ( $p = M\omega$ ). Изменение момента импульса системы  $L = I\omega$  связано с моментом сил уравнением вращательного движения  $dL/dt = M$ .

Рассмотрим движение колечка массой  $m$ , надетого на горизонтальный вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  стержень. Момент инерции системы изменяется только за счет смещения колечка, которому препятствует сила трения. Если сила трения такова, что на перемещение колечка затрачивается постоянная мощность (№ 9.35), то постоянен момент сил

$$M = dL/dt = \omega d(mr^2)/dt = \omega 2mrdr/dt = 2\omega mrv = \text{const.}$$

Это дает связь скорости и положения.

Рассмотрим случаи, когда ось вращения движется поступательно вместе с вращающимся телом.

Движение диска Максвелла (рис. 9.9) является примером вертикального движения оси вращения в поле тяжести. Диск массой  $M$  и радиусом  $R$  наглухо наложен на валик радиусом  $r$  и массой выступающих из диска частей  $m$ , на который наматываются нити, при помощи которых диск подвешен к штативу (неподвижной опоре). При опус-

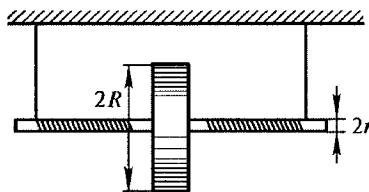


Рис. 9.9

кании диска нити разматываются, и диск с валиком раскручиваются. Вращение диска приводит к тому, после полного разматывания нитей они снова начинают наматываться, и диск поднимается. Для нахождения ускорения опускания диска (№ 9.5) напишем уравнение поступательного движения диска с валиком

$$(m + M)a = (m + M)g - 2T$$

и уравнение вращения относительно оси симметрии, проходящей через центр масс системы (диск, валик):

$$(MR^2/2 + mr^2/2)d\omega/dt = 2rT.$$

Очень важно, что ось проходит через центр масс, так как в этом случае равен нулю момент силы инерции, которая возникает в системе, связанной с осью из-за ускоренного движения диска. Конечно, те же результаты получим, если уравнение напишем относительно мгновенного центра вращения, учитывая момент сил инерции и момент инерции тела относительно мгновенного центра вращения.

Из этих уравнений и связи поступательного и вращательного ускорений

$$d\omega/dt = a/r$$

получаем

$$a = 2(m + M)r^2g/[2(m + M)r^2 + mr^2 + MR^2].$$

Если массой валика и нити можно пренебречь, то

$$a = 2r^2g/(R^2 + 2r^2).$$

При движении вверх

$$Ma_n = 2T_n - Mg \text{ и } (MR^2/2)d\omega/dt = -2rT_n.$$

Получаем, что замедление равно ускорению, с которым происходило падение,  $a_n = -a$  (№ 9.7). Сила натяжения при опускании и подъеме оказывается одинаковой

$$T = (1/2)Mg(1 - a/g).$$

При опускании на полную длину нити  $l$  и изменении направления движения диска происходит рывок — возрастание силы натяжения до  $T_p$ . Импульс силы равен изменению количества движения  $(2T_p - Mg)\Delta t = 2Mv$ . Время изменения количества движения определяется временем поворота валика на  $180^\circ$  и равно  $\Delta t = \pi r/v$ . Скорость к моменту рыва  $v^2 = 2al$ . Поэтому получаем

$$T_p = (Mg/2)[1 + 4al/(\pi rg)].$$

При движении подвеса вверх таким образом, что ось диска остается неподвижной (№ 9.9), для диска имеем  $Mg = 2T$ . Эта сила крутит диск на неподвижной оси

$$Id\omega/dt = 2Tr = Mgr.$$

Ускорение конца нити (подвески)

$$a = rd\omega/dt = Mgr^2/I.$$

Сила, которая совершают работу по подъему подвеса, равна силе натяжения нитей  $2T$ . Работа этой силы  $A = MgL$ , где  $L$  — длина раскручивания нитей.

Аналогичным образом решается задача о катушке с моментом инерции  $I_0$  и массой  $M$ , на которую намотана на расстоянии  $r$  от оси нить, затем перекинутая через неподвижный блок и присоединенная к грузу массой  $m$ . Масса  $m$  будет неподвижна (№ 9.173), если натяжение нити  $T$  при падении катушки равна  $mg$ . Движение катушки описывается уравнениями

$$Ma = Mg - T, Id\omega/dt = rT, rd\omega/dt = a.$$

Отсюда  $m = M/(1 + Mr^2/I_0)$ .

Если устройства, подобные маятнику Максвелла, находятся в движущемся с ускорением  $a$  лифте, например вверх (№ 9.20), то вместо ускорения силы тяжести надо брать величину  $g' = g + a$ .

Рассмотрим качение цилиндра в горизонтальном направлении. Простым примером является задача о качении цилиндра по горизонтальным брускам под действием вертикально направленной постоянной силы  $F$ , приложенной к опущенному вниз концу намотанной на цилиндр веревки (рис. 9.10). Для нахождения горизонтального ускорения цилиндра  $a$  и минимального (чтобы не было проскальзывания) коэффициента трения между цилиндром и брусками  $k$  (№ 9.12) напишем уравнение горизонтального движения центра массы цилиндра и уравнение вращения цилиндра вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр масс:

$$ma = F_{tp}, Id^2\phi/dt^2 = (F - F_{tp})r.$$

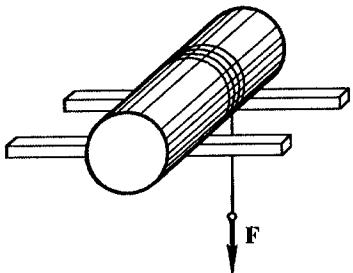


Рис. 9.10

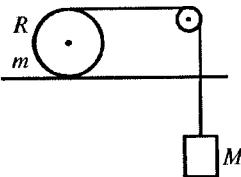


Рис. 9.11

При отсутствии проскальзывания

$$a = rd^2\varphi/dt^2.$$

Поэтому

$$a = F/(m + I/r^2).$$

Проскальзывания не будет, пока  $F_{tp} \leq kN = k(mg + F)$ .

Если веревку перебросить через невесомый блок так, чтобы она тянула цилиндр в горизонтальном направлении, а на конец веревки подвесить груз массой  $M$  (рис. 9.11), то движение описывается уравнениями:  $Mg - F = Ma$  (опускание груза с ускорением  $a$ ,  $F$  — сила натяжения веревки),  $F + F_{tp} = ma/2$  (горизонтальное движение оси цилиндра, ускорение которого  $a/2$ ),  $Ia/(2R) = (F - F_{tp})/R$  (вращение цилиндра, момент инерции которого относительно оси симметрии  $I = mR^2/2$ ). Отсюда ускорение (№ 9.13) равно

$$a = g/[1 + 3m/(8M)].$$

Сила трения  $F_{tp} = ma/8$ . Для движения без проскальзывания должно быть  $k \geq 1/(8 + 3m/M)$ . При проскальзывании надо учесть, что сила трения  $F_{tp} = kmg$  и направлена она против направления скольжения. В таком случае получаем для горизонтального движения оси цилиндра с ускорением  $b$  уравнение  $mb = F + F_{tp}$ , для вращения цилиндра относительно оси симметрии цилиндра с угловым ускорением  $\beta$  уравнение  $(mR^2/2)\beta = (F - F_{tp})R$ , для вертикального падения груза с ускорением  $Ma = Mg - F$ . Из условия нерастяжимости веревки получаем связь  $a = b + \beta R$ . Окончательно имеем

$$a = g(3 - km/M)/(3 + m/M).$$

Ускорение при отсутствии трения получаем при  $k = 0$ .

Задача о качении цилиндра с намотанной на него веревкой усложняется, если цилиндр имеет выступающие оси радиусом  $r$ , которые катятся по горизонтальным брускам (рис. 9.12). При качении

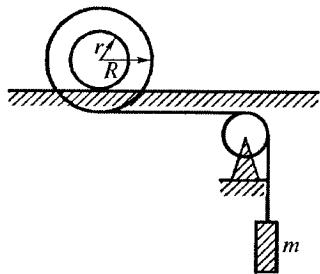


Рис. 9.12

без проскальзывания угловое ускорение  $\beta$  связано с ускорением оси цилиндра  $b$  формулой  $b = r\beta$ , а ускорение опускания груза  $a$  зависимостью  $a = R\beta - b = (R - r)\beta$ . Ускорение опускания груза (№ 9.15) находим, записав уравнения опускания груза, поступательного движения оси цилиндра и вращения его относительно оси симметрии.

Веревка может быть намотана на цилиндр и на ось, а груз подвешен на подвижном невесомом блоке (рис. 9.13). В таком случае снова  $b = r\beta$ , а  $a = (R + r)\beta/2$ . Кроме вертикального ускорения груза у него будет и горизонтальное (№ 9.14), сообщаемое ему через наклон веревки.

Аналогичным способом можно рассмотреть качение катушки по столу, когда тянут за намотанную не ее нитку (рис. 9.14). Определим, с каким ускорением  $a$  будет двигаться ось катушки, если тянуть за нитку с силой  $F$  (№ 9.37), и каким образом надо тянуть за нитку для того, чтобы катушка двигалась в сторону натянутой нитки. Предположим, что катушка катится по поверхности стола без скольжения, и найдем силу трения между катушкой и столом. Уравнения движения:

$$m(d^2x/dt^2) = ma = F\cos\alpha - F_{tp};$$

$$I(d^2\phi/dt^2) = RF_{tp} - rF; a = R(d^2\phi/dt^2).$$

Направление  $x$  указано на рисунке. Исключая  $F_{tp}$ , находим

$$a = F(\cos\alpha - r/R)/\{m[1 + I/(mR^2)]\}.$$

Знак ускорения, определяющий направление движения катушки, меняется при  $\alpha^*$ , которое определяется из соотношения  $\cos\alpha^* = r/R$ . При этом направление силы  $F$  проходит через точку опоры катушки. При  $\alpha < \alpha^*$  ускорение  $a$  будет положительным, и катушка будет

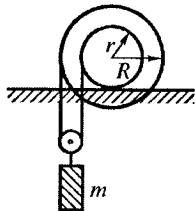


Рис. 9.13

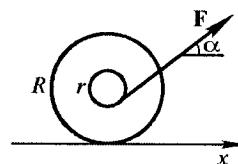


Рис. 9.14

двигаться в сторону действующей силу. Сила трения всегда направлена в одну и ту же сторону, но по величине меняется при изменении  $\alpha$ :

$$F_{\text{tp}} = F \cos \alpha - F(\cos \alpha - r/R) / [1 + I/(mR^2)] = \\ = F(\cos \alpha + mRr/I) / [1 + (mR^2)/I].$$

Катушка может находиться на наклонной плоскости, и нитка, намотанная на катушку, закреплена за некоторую стенку так, что она идет параллельно наклонной плоскости (№ 9.39). Поступательное движение оси катушки параллельно наклонной плоскости при опускании катушки описывается уравнением

$$ma = mg \sin \alpha + F_{\text{tp}} - T,$$

а вращение относительно оси катушки

$$I(d^2\phi/dt^2) = -RF_{\text{tp}} + rT.$$

Между ускорениями связь  $a = r(d^2\phi/dt^2)$ . Для силы трения имеем  $F_{\text{tp}} = -kmg \cos \alpha$ . Аналогичным способом решается и другой вариант намотки нити в противоположном направлении (№ 9.38).

Качение, например, обруча (масса  $M$  и радиус  $R$ ) по горизонтальной поверхности может возникнуть, если на нем закрепить некоторое тело (масса  $m$ ). Найдем, при каком минимальном коэффициенте трения  $k$  начнется качение без проскальзывания, если на покоящемся обруче тело поместили на конце горизонтального диаметра (№ 9.159). Центр масс системы будет находиться на этом диаметре на расстоянии от центра обруча  $R_c = Rm/(M+m)$ . Зная это, можно найти момент инерции системы относительно центра масс  $I_c$ . Для обруча используем теорему Гюйгенса—Штейнера. Уравнения вращения относительно центра масс и движения центра масс

$$I_c d\omega/dt = NmR/(m+M) - F_{\text{tp}}R, (M+m)dv_c/dt = F_{\text{tp}}.$$

Здесь  $N$  — нормальная сила со стороны поверхности.

Выражение для силы трения  $F_{\text{tp}} = kN$  и условие отсутствия проскальзывания  $dv_c/dt = R d\omega/dt$ . Отсюда находим коэффициент трения.

Для невесомого обруча с навеской массой  $m$  при качении его без проскальзывания по шероховатой поверхности величину нормального давления на поверхность в зависимости от угла отклонения радиуса, проведенного в точку прикрепления навески, от вертикали (№ 9.161) можно определить из закона сохранения энергии (сила трения работы не совершает)  $mgR(1 - \cos \alpha) = mR^2\omega^2$  и центробежной силы  $F = m\omega^2R$ , вклад которой зависит от угла отклонения. В итоге  $N = mg - F \cos \alpha = mg \cos \alpha$ .

Рассмотрим движение цилиндра, который закрутили относительно оси симметрии с угловой скоростью  $\omega_0$  и положили боковой поверхностью на горизонтальный, шероховатый стол (№ 9.45). Возникающая при проскальзывании постоянная сила трения замедляет вращение и сообщает ускорение  $I(d\omega/dt) = -RF_{\text{тр}}$ ,  $mdv/dt = F_{\text{тр}}$ . Интегрируя, получаем  $I(\omega - \omega_0) = RF_{\text{тр}}t$  и  $mv = F_{\text{тр}}t$ . Время  $T$ , через которое прекращается проскальзывание и начинает выполняться соотношение  $R\omega = v$ , равно  $T = mR\omega_0/[F_{\text{тр}}(1 + mR^2/I)]$ . После этого момента сила трения равна нулю, ускорение равно нулю и скорость постоянна. Она определяется из приведенных выше формул. Но для ее определения можно воспользоваться **законом сохранения момента импульса** относительно оси на поверхности, по которой катится тело, так как момент сил относительно этой оси равен нулю. Получаем  $I\omega_0 = I\omega + mvR$ . После прекращения проскальзывания  $v = \omega_0 R / (1 + mR^2/I)$ .

Подобным образом решается и задача о движении цилиндра, обладающего в начальный момент **только поступательной** скоростью (№ 9.42). В этом случае сила трения тормозит поступательное движение и создает вращение. Конечные значения скоростей можно получить из закона сохранения момента импульса относительно точки на поверхности

$$mv = I\omega_k + mv_k r = (3/2)mv_k r.$$

Для шара, имеющего поступательную скорость либо вращение вокруг горизонтальной оси, положенного на горизонтальную шероховатую поверхность (№ 9.43), также можно применить закон сохранения момента импульса относительно точки на поверхности.

Цилиндр может катиться по поверхности и под действием силы, возникающей, например, когда по нему бежит собака, как показано на рис. 9.15. Для простоты предполагается, что собаку можно идентифицировать с точечной массой  $m$ , находящейся все время на одном и том же расстоянии от точки  $A$ . Цилиндр имеет массу  $M$ , и вся она сосредоточена вблизи его поверхности на радиусе  $R$  (№ 9.76). На рис. 9.16 показаны силы, действующие на цилиндр. Воздействие собаки на цилиндр описывается силами  $F_1$  и  $F_2$  (нормальной и касательной к поверхности цилиндра). Поступательное движение оси цилиндра (по координате  $x$ ) описывается вторым законом Ньютона  $Ma = F_{\text{тр}} + F_2 \cos \alpha - F_1 \sin \alpha$ . Уравнение вращательного движения цилиндра относительно оси симметрии  $MR^2 d\omega/dt = (F_2 - F_{\text{тр}})R$ . Отсутствие проскальзывания дает связь поступательного и вращательного ускорений  $a = Rd\omega/dt$ . Движение собаки по координате  $x$  с

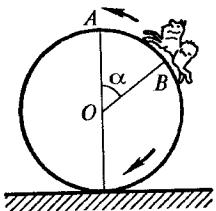


Рис. 9.15

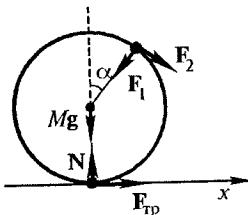


Рис. 9.16

учетом того, что действие равно противодействию и ускорение равно  $a$ , описывается уравнением  $ma = -F_2 \cos \alpha + F_1 \sin \alpha$ . Очевидно, что движение системы цилиндр—собака определяется только силой трения. Это получаем и в результате сложения уравнений движения по координате  $x$ . Ускорение системы постоянно и равно

$$a = m g \sin \alpha / [2M + m(1 + \cos \alpha)].$$

Сила трения  $F_{\text{тр}} = (M + m)a$ . Кинетическая энергия системы со временем растет. Так как  $v = at$  и  $\omega = v/R$ , кинетическая энергия системы

$$W = (M + m)v^2/2 + I\omega^2/2 = (2M + m)v^2/2.$$

Мощность  $P = dW/dt = (2M + m)a^2 t$ .

Цилиндр или обруч можно закрутить при бросании таким образом, чтобы он возвращался обратно к точке бросания под действием силы трения при проскальзывании (№ 9.75). Для обруча массой  $m$  и радиусом  $R$ , закрученного до угловой скорости  $\omega_0$  и брошенного со скоростью  $v_0$ , получаем

$$mdv/dt = -F_{\text{тр}} = -kmg; mR^2d\omega/dt = -F_{\text{тр}}R = -kmgR.$$

Отсюда имеем  $v - v_0 = -kgt$  и  $R\omega - R\omega_0 = -kgt$ . Исключение времени дает  $v - v_0 = R\omega - R\omega_0$ . Остановка обруча произойдет в некоторый момент, если  $\omega_{\min} = v_0/R$ . Назад обруч покатится при  $\omega_0 > \omega_{\min} = v_0/R$ . В момент остановки ( $v = 0$ ) имеем  $\omega = \omega_0 - v_0/R$ . Сила трения приводит к появлению и увеличению скорости оси обруча в направлении, противоположном начальному движению  $v = kgt$ , и к торможению вращения обруча  $R(\omega - \omega_0 + v_0/R) = -kgt$ . В момент, когда  $v = \omega R$ , возникает качение без проскальзывания, скорость которого из этих уравнений  $v = (R\omega_0 - v_0)/2$ .

Катящийся цилиндр или шар может попасть на движущуюся поверхность (№ 9.49). Если он катится со скоростью  $v_0 = R\omega_0$ , а поверхность движется навстречу со скоростью  $v$ , то сохранение момента импульса относительно оси на движущейся поверхности (из-за того, что момент сил равен нулю) дает  $m(v + v_0)R + I\omega_0 = (I + mR^2)\omega$ . Это

определяет скорости (в системе координат, связанной с движущейся поверхностью), когда проскальзывание прекращается, и сила трения обращается в нуль. В тепло переходит энергия

$$(1/2)m(v + v_0)^2 + I\omega_0^2/2 - (I + mR^2)\omega^2/2.$$

Рассмотрим закрученный однородный шар радиусом  $r$ , вращающийся с угловой скоростью  $\omega_0$ , положенный на горизонтальную плоскость так, что ось его вращения наклонена под углом  $\phi$  к вертикали (№ 9.54). При этом вертикальная составляющая момента количества движения  $L_v$  не будет меняться, так как вертикальная составляющая момента сил равна нулю (если не учитывать деформацию шара и плоскости)  $dL_v/dt = Id\omega_v/dt = 0$ . Горизонтальная составляющая момента количества движения будет уменьшаться из-за действия момента силы трения, появляющейся при проскальзывании шара,  $dL_r/dt = Id\omega_r/dt = rF_{tp}$ . Горизонтальная составляющая угловой скорости  $\omega_r$  будет уменьшаться, а скорость центра масс шара  $v$  — расти (в соответствии с уравнением движения  $mdv/dt = F_{tp}$ ) до тех пор, пока не установится качение без проскальзывания. Предполагаем, что трением качения можно пренебречь. Для сохраняющейся вертикальной компоненты угловой скорости имеем  $\omega_v = \omega_0 \cos \phi$ . Исключая  $F_{tp}$  и затем интегрируя при условиях, что в начальный момент при  $t=0$ :  $v=0$ ,  $\omega_r = \omega_0 \sin \phi$ , а при качении без проскальзывания  $v = r\omega_r$ , получаем  $I\omega_r - I\omega_0 \sin \phi = -mr v$ .

Окончательно

$$v = r\omega_r = r\omega_0 \sin \phi / (1 + mr^2/I) = (2/7)r\omega_0 \sin \phi.$$

Трение между телами может быть не только сухим — пропорциональным силе нормального давления, но и вязким — пропорциональным относительной скорости. Рассмотрим случай, когда сухим и трением качения можно пренебречь по сравнению с вязким. Найдем, как будут меняться угловая и поступательная скорости раскрученного до угловой скорости  $\omega_0$  сплошного цилиндра, положенного на поверхность, взаимодействие с которой определяется вязким трением (№ 9.53). Из уравнений поступательного и вращательного движений ( $mdv/dt = F$ ,  $Id\omega/dt = -Fr$ ), исключая силу трения ( $F$ ), получаем  $r\omega_0 - r\omega = 2v$ . Используя зависимость для силы трения, получаем уравнение поступательного движения

$$mdv/dt = k(r\omega - v) = k(r\omega_0 - 3v).$$

Решение его имеет вид

$$v = (r\omega_0/3)(1 - e^{-3kt/m}).$$

Отсюда находим скорость при бесконечном времени. Угловую скорость определяем из полученной выше связи с поступательной. По скоростям находим кинетические энергии и потери на трение.

Однородный цилиндр массой  $m_1$  и радиусом  $r$ , раскрученный до угловой скорости  $\omega_0$ , опускается без начальной поступательной скорости на шероховатую доску массой  $m_2$ , лежащую на гладкой горизонтальной поверхности. Чтобы найти скорость цилиндра при переходе на качение без проскальзывания (№ 9.46), надо написать уравнения поступательного движения цилиндра и доски в системе координат, связанной с поверхностью, на которой лежит доска ( $m_1 dv_1/dt = F$ ,  $m_2 dv_2/dt = F$ ), и уравнение вращения цилиндра относительно его оси ( $Id\omega/dt = -Fr$  при этом силы инерции не дают момента). Условие отсутствия проскальзывания записываем в системе координат, связанной с доской ( $\omega r - v_1 = v_2 = m_1 v_1/m_2$ , так как  $m_1 v_1 = m_2 v_2$ ). Из уравнений поступательного и вращательного движений цилиндра получаем  $\omega r - \omega_0 r = -2v_1$ . Подставляя сюда условие отсутствия проскальзывания, получаем искомые результаты.

Аналогичный метод можно применить в более сложной задаче. Длинная тонкая доска массой  $M$  лежит на гладком столе вплотную к гладкой стене. По доске без проскальзывания катится цилиндр массой  $m$  и радиусом  $r$  в направлении, перпендикулярном стене. Цилиндр абсолютно упруго ударяется о стену (№ 9.51). Трение качения не учитываем. Начальные скорости отметим нулевыми индексами ( $v_0 = \omega_0 r$ ). После удара цилиндра о стенку скорость центра масс цилиндра изменит направление на противоположное. Угловая скорость не изменяется. Возникает сила трения, которая будет тормозить цилиндр и ускорять доску. Движение центра масс цилиндра относительно стола описывается уравнением

$$mdv/dt = -F_{tp} = -kmg.$$

Для решения уравнения необходимо задать начальное условие: при  $t = 0$  скорость  $v = v_0$ . Решение  $v = v_0 - kgt$ . Вращение цилиндра описывается уравнением

$$Id\omega/dt = F_{tp}r.$$

Здесь положительное направление вращения соответствует положительному направлению скорости движения центра цилиндра, поэтому начальное условие: при  $t = 0 \omega = -\omega_0$ . Решение для угловой скорости

$$\omega = kmgrt/I - \omega_0.$$

Учитывая, что  $I = mr^2/2$ , получаем  $\omega = 2kgt/r - \omega_0$ . Движение доски описывается уравнением

$$Md\upsilon/dt = F_{\text{тр}} = kmg.$$

Начальное условие: при  $t = 0$ ,  $\upsilon_{\text{д}} = 0$ . Решение  $\upsilon_{\text{д}} = kmgt/M$ .

Скорость центра цилиндра увеличивается, а скорость вращения уменьшается. Прокальзывание прекратится, когда  $\omega r = \upsilon - \upsilon_{\text{д}}$ . После этого сила трения равна нулю и скорости не меняются. Подставляя решения в это условие с учетом связи масс доски и цилиндра, например  $m = M/2$ , а также соотношение между начальными скоростями, получаем время прекращения проскальзывания

$$t_n = 4\upsilon_0/(7kg).$$

При этом

$$V_{\text{п}} = 3V_0/7, \quad \omega_{\text{п}} = V_{\text{п}}/r, \quad V_{\text{дп}} = 2V_0/7;$$

$$E_{\text{п}} = 5mV_0^2/28, \quad E_0 = 3mV_0^2/4.$$

Доля первоначальной кинетической энергии, перешедшей в тепло при трении между цилиндром и доской к моменту, когда цилиндр скатится с доски, равна 16/21.

Из решения можно получить, что при  $m > M$  проскальзывание прекращается при отрицательной угловой скорости и цилиндр скатывается в другую сторону (№ 9.183). Аналогичным методом можно решить и задачу, в которой к стенке движется доска, а цилиндр поконится на ней (№ 9.182).

Движение цилиндра по шероховатой доске может быть вызвано движением самой доски. Если доску начинают двигать с ускорением, то в системе координат, связанной с доской, на цилиндр действует сила инерции. Эта сила и сила трения определяют поступательное и вращательное движение цилиндра. Предполагая отсутствие проскальзывания (№ 9.48), получаем третье уравнение для определения ускорения цилиндра в системе координат, связанной с доской. По нему определяем и скорость, и путь.

Рассмотрим движение доски массой  $M$  по шероховатой горизонтальной поверхности на двух однородных одинаковых цилиндрах массой  $m$  под действием силы  $F$  без проскальзывания цилиндров по поверхности и доске (№ 9.47). Вместо обычного метода с использованием второго закона Ньютона можно воспользоваться тем, что силы трения работы не совершают (нет проскальзывания), а работает, т. е. изменяет, кинетическую энергию только приложенная сила.

Учитывая, что скорость доски в два раза больше поступательной скорости цилиндров, для кинетической энергии системы получаем

$$E = Mv^2/2 + 2m(v/2)^2/2 + mr^2\omega^2/2 = (M + 3m/4)v^2/2.$$

Мощность, создаваемая силой,

$$Fv = dE/dt = (M + 3m/4)vdv/dt.$$

Отсюда определяем ускорение.

**Сохранение энергии в случае качения без проскальзывания**, либо при возможности пренебречь потерями на трение, позволяет найти скорости, например, обруча при скатывании с горки (№ 9.44). Начальная потенциальная энергия равна сумме энергии поступательного движения центра масс и энергии вращения.

Если с горки скатывается шарик (массой  $m$  и радиус  $r$ ) и попадает на вертикально стоящий желоб радиусом  $R$ , то он может описать **мертвую петлю по желобу** (№ 9.61). Чтобы найти достаточную для этого высоту горки  $H$ , в случае качения без проскальзывания, т. е. без потерь на трение, можно воспользоваться законом сохранения энергии

$$mg(H - 2R) = (1/2)mv^2 + (2/5)mr^2(v/r)^2/2$$

и условием прохождения верхней точки петли  $mv^2/R = mg$ . Здесь считалось, что  $r \ll R$ .

При недостаточной высоте горки шарик **отрывается** от желоба, не достигнув его верхней точки (№ 9.74). К закону сохранения энергии надо добавить уравнение движения по окружности

$$mv^2/R = N + mg\cos\alpha.$$

В точке отрыва  $N = 0$ . Используя закон сохранения энергии, находим  $\cos\alpha = 10/17$  (для  $H = 2R$ ). Это определяет точку отрыва, а также скорость в этой точке. По вертикальной составляющей скорости можно найти высоту, на которую затем поднимается шарик.

Сохранением энергии можно воспользоваться и при **вращении**, например, первоначально **покоившегося на краю стола шарика** (массой  $m$  и радиусом  $r$ ) относительно этого края, пока не начнется проскальзывание. Считаем, что скольжению препятствует сухое трение о край, определяемое коэффициентом трения  $k$  и нормальным (перпендикулярным поверхности шарика) давлением  $N$ . Найдем коэффициент трения, если известно, что проскальзывание начинается при повороте шара на угол  $\alpha = 30^\circ$  (№ 9.57). На рис. 9.17 показаны положение шара при повороте на угол  $\alpha$  и силы, действующие

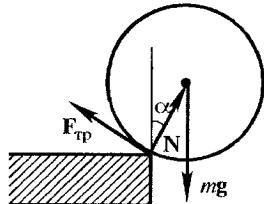


Рис. 9.17

на шар. Пока нет скольжения, скорость центра шара  $v$  связана угловой скоростью вращения относительно края стола  $\omega$  с соотношением  $v = r\omega$ . Вращение описывается уравнением

$$mv^2/r = mg \cos \alpha - N.$$

Закон сохранения энергии описывается уравнением

$$mv^2/2 + (2/5)mr^2\omega^2/2 = mgr(1 - \cos \alpha).$$

Из этих уравнений определяется нормальное давление. В уравнение вращения входило нормальное к траектории движения центра масс шара ускорение. Для тангенциального ускорения  $a$  уравнение имеет вид

$$ma = mgs \sin \alpha - F_{tp}.$$

Для вращения

$$(2/5)mr^2a/r = rF_{tp}.$$

Отсюда определяются ускорение и сила трения. Затем находим коэффициент трения.

Нормальное давление на оси вращения (угол стола) уменьшается с увеличением угла поворота. Равенство давления нулю означает, что дальше шар движется в поле тяжести в соответствии с имеющейся в этот момент тангенциальной скоростью центра масс. Соответствующий угол поворота определяет максимальный угол излома (поворота) поверхности (от горизонтального направления), при котором шар, катившийся по этой поверхности, не подскочит при переходе через излом (для цилиндра № 9.58).

При качении цилиндра или шара (массой  $m$ , радиусом  $R$  с моментом инерции  $I$ ) по горизонтальной поверхности без проскальзывания сила трения равна нулю. При качении по **наклонной плоскости** сила трения отлична от нуля. На рис. 9.18 показаны силы, действующие на тело. Для ускорения  $a$  поступательного движения оси цилиндра в направлении  $x$  получаем

$$ma = mgs \sin \alpha - F_{tp},$$

для углового ускорения, которое при **отсутствии проскальзывания** связано с  $a$  соотношением  $\beta = a/R$ , имеем  $I\beta = F_{tp}R$ . Решая эти уравнения, получим

$$a = gs \sin \alpha / [1 + I/(mR^2)],$$

$$F_{tp} = mgs \sin \alpha / [mR^2/I + 1].$$

Отсюда, в частности, можно получить силу трения для цилиндра (№ 9.59).

Замечательно, что ускорение не зависит от коэффициента трения и по величине тем меньше, чем больше момент инерции тела. Отношение  $I/(mR^2)$  для полого цилиндра равно 1, а для сплошного — 0,5. Зная это, легко ответить на вопрос: быстрее или медленнее будет скатываться деревянный цилиндр, если

в нем просверлить отверстие вдоль оси цилиндра? Ответ очевиден, так как цилиндр с отверстием занимает промежуточное положение между сплошным и полым. При увеличении угла наклона плоскости сила трения возрастает. Так как предельное значение силы трения при этом уменьшается  $F_{\text{тр, max}} = k mg \cos \alpha$ , то **при некотором угле начинается проскальзывание** (№ 9.62). Угол начала проскальзывания определяется соотношением  $\tan \alpha = k(1 + mR^2/I)$ .

При скатывании шара (№ 9.65), для которого  $I/(mR^2) = 2/5$ , ускорение и сила трения определяются по тем же формулам.

Для шара возможно скатывание по рельсам или желобу (№ 9.60). В этом случае момент силы трения определяется расстоянием плоскости опор до оси вращения.

Если по скатывающемуся цилинду бежит собака, оставаясь все время в наивысшей точке цилиндра (№ 9.77), то, как и раньше (№ 9.76), собаку считаем точечной массой, а ее действие на цилиндр описываем двумя силами, нормальной и касательной к поверхности цилиндра.

При скатывании с проскальзыванием уравнения поступательного движения и вращения решаются независимо. При этом должен быть задан коэффициент трения (№ 9.70).

**Скатывание без проскальзывания**, например, цилиндра с клином, стоящего на гладкой горизонтальной поверхности (№ 9.69), приводит к смещению клина таким образом, что центр масс системы остается неподвижным. При отсутствии проскальзывания сохраняется энергия. Изменение потенциальной энергии при опускании цилиндра равно кинетическим энергиям клина и цилиндра, у которого кроме поступательной есть еще вращательная кинетическая энергия.

Два скатывающихся по одной наклонной плоскости цилиндра (№ 9.71) взаимодействуют, если передний скатывается медленнее. Для цилиндров одинакового радиуса взаимодействие возможно, когда впереди находится полый, а сзади сплошной цилиндр. Предполагая, что существует трение между цилиндрами (коэффициент тре-

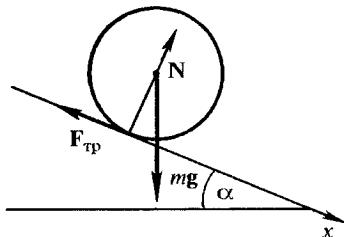


Рис. 9.18

ния  $k$ ), которое зависит от силы взаимодействия между цилиндрами  $N$ , получаем для поставленного впереди полого цилиндра

$$ma = mgsin\alpha - F_{tp} + N, I_n \beta = F_{tp}r - kNr, a = \beta r.$$

Для следующего за ним сплошного цилиндра с той же массой и радиусом имеем

$$ma = mgsin\alpha - F_{tp} - N, I_c \beta = F_{tp}r - kNr, a = \beta r.$$

Отсюда, учитывая, что  $I_n = mr^2$  и  $I_c = mr^2/2$ , находим  $a$  и  $N$ .

Установленный на наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтальной поверхностью, сплошной однородный цилиндр радиусом  $r$ , закрученный соответствующим образом до угловой скорости  $\omega_0$ , начинает вкатываться по ней вверх (№ 9.63, 9.64). Силы, действующие на цилиндр, те же, что и показанные на рис. 9.18.

Под действием силы трения, если  $F_{tp} > mgsin\alpha$  (в случае, когда  $F_{tp} = kN = kmg \cos \alpha$ , получаем, что  $\operatorname{tg} \alpha < k$ ), цилиндр начинает двигаться вверх с ускорением, т. е. поступательная скорость оси будет увеличиваться), а вращение будет тормозиться, т. е. скорость его вращения будет уменьшаться. Поэтому в некоторый момент  $t_1$  окажется, что  $v = \omega r$ . С этого момента цилиндр катится вверх без проскальзывания и скорость движения его центра масс начинает уменьшаться, так как продолжает уменьшаться скорость вращения. Для уменьшения поступательной скорости должно выполняться  $F_{tp} < mgsin\alpha$ . Сила трения изменяется скачком при переходе к качению без проскальзывания. В момент остановки (при максимальном подъеме цилиндра)  $v = \omega r = 0$ . Для определения времени достижения наивысшей точки  $t_{\text{под}}$  из уравнений движения

$$m(d^2x/dt^2) = F_{tp} - mgsin\alpha, I(d^2\phi/dt^2) = -rF_{tp} \quad (9.13)$$

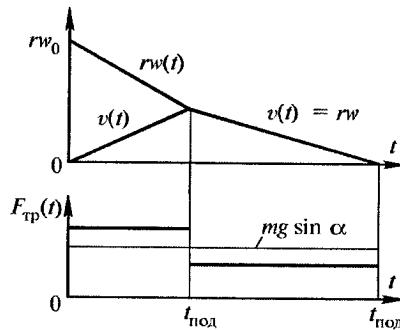


Рис. 9.19

исключаем  $F_{\text{тр}}$ :

$$m(d^2x/dt^2) + (I/r)(d^2\phi/dt^2) + mgsin\alpha = 0$$

(это уравнение справедливо независимо от того, существует скольжение или нет). Интегрируем его, используя то, что в начальный момент  $v(0) = 0$ , а  $\omega(0) = \omega_0$ , и получаем

$$v = I(\omega_0 - \omega)/(mr) - gtsin\alpha. \quad (9.14)$$

Откуда следует

$$t_{\text{под}} = I\omega_0/(mgrsin\alpha) = r\omega_0/(2gsin\alpha).$$

Если предположить, что  $F_{\text{тр}} = kN$ , то каждое уравнение можно проинтегрировать в отдельности и построить зависимости  $v(t)$  и  $\omega(t)$ , а также  $F_{\text{тр}}(t)$  (см. рис. 9.19). Из условия  $\operatorname{tg}\alpha < k$  следует, что наклон прямой  $r\omega(t)$ , который определяется  $r(d\omega/dt) = F_{\text{тр}}r^2/I = 2kg\cos\alpha$ , всегда больше наклона прямой  $v = r\omega(t)$  при движении без проскальзывания, равного

$$r(d\omega/dt) = gsina/[1 + I/(mr^2)] = (2/3)gsina.$$

Скатывание цилиндров всегда происходит без проскальзывания, так как для проскальзывания необходимо, чтобы  $\operatorname{tg}\alpha < k[1 + (mr^2)/I]$ , а для движения вверх уже выполнялось более жесткое условие  $\operatorname{tg}\alpha < k$ .

На начальном этапе поступательное ускорение направлено вверх по наклонной плоскости и равно  $a_1 = g(k\cos\alpha - \sin\alpha)$ . Так как ускорение постоянно, легко вычисляем скорость и сопоставляем с решением для угловой скорости  $\omega = \omega_0 - kmgsin\alpha rt/I$ . Откуда, используя условие отсутствия проскальзывания:

$$t_1 = \omega_0 r / [g(3k\cos\alpha - \sin\alpha)].$$

По ускорению и времени вычисляем скорость в этой точке, а также путь и высоту подъема цилиндра. Интегрируем (9.13) при условии отсутствия проскальзывания и получаем  $a_2 = -(2/3)gsin\alpha$ . Зная скорость в начале этого участка и дальнейшее ускорение, находим высоту максимального подъема. Скатывание, как уже говорилось, происходит без проскальзывания, и ускорение равно  $a_2$ .

Если задано соотношение между временем подъема и опускания (№ 9.66), то по приведенным формулам можно найти все характеристики движения.

Те же уравнения с другими начальными условиями позволяют рассчитать подъем цилиндра по наклонной плоскости, если он не закручен, а имеет начальную поступательную скорость вдоль наклонной плоскости (№ 9.67).

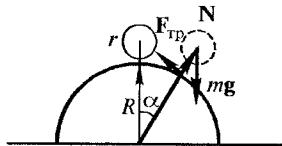


Рис. 9.20

Скатывающийся цилиндр радиусом  $r$  может с другого **неподвижного цилиндра** радиусом  $R$  (№ 9.56). Связь скорости оси скатывающегося цилиндра  $v$  с угловой скоростью его вращения  $\omega$  запишем через изменения угла  $\alpha$ , определяющего положение скатывающегося цилиндра,

$$v = (R + r)d\alpha/dt = \omega r. \quad (9.15)$$

На рис. 9.20 показаны силы, действующие на цилиндр. Вращение цилиндра относительно его оси симметрии описывается уравнением

$$Id\omega/dt = rF_{tp}. \quad (9.16)$$

Уравнение движения оси симметрии цилиндра в проекции на направление (скорость) движения

$$m dv/dt = mgsin\alpha - F_{tp}. \quad (9.17)$$

Проекция уравнения движения на направление, перпендикулярное скорости:

$$mv^2/(R + r) = mgcos\alpha - N. \quad (9.18)$$

Исключая силу трения из (9.16) и (9.17), при отсутствии проскальзывания и с учетом величины момента инерции для сплошного цилиндра получаем

$$dv/dt = rd\omega/dt = (2/3)gsin\alpha.. \quad (9.19)$$

Из (9.16) и (9.19) для силы трения имеем

$$F_{tp} = (1/3)mgsin\alpha. \quad (9.20)$$

Учитывая, что при  $\alpha = 0$  и  $v = 0$ , из (9.15) и (9.19) получаем

$$v^2 = (4/3)g(R + r)(1 - cos\alpha). \quad (9.21)$$

Это соотношение можно получить и из закона сохранения энергии, так как сила трения работы не совершает при отсутствии проскальзывания

$$mg(R + r)(1 - cos\alpha) = mv^2/2 + I\omega^2/2. \quad (9.22)$$

Из (9.18) и (9.21) следует

$$N = (1/3)mg(7cos\alpha - 4). \quad (9.23)$$

Условие начала проскальзывания  $F_{tp} = kN$  приводит к уравнению

$$sin\alpha = k(7cos\alpha - 4). \quad (9.24)$$

При заданном коэффициенте трения угол можно найти графическим способом. При малых углах пользуемся разложениями тригонометрических функций.

Аналогично можно рассмотреть скатывание шара с другого закрепленного шара (№ 9.73). В некоторый момент времени при скатывании без проскальзывания подвижный шар, который в начальный момент времени находился в наивысшем положении и не имел начальной скорости, приходит в точку, направление в которую из центра неподвижного шара составляет угол  $\alpha$  с вертикалью (см. рис. 9.20). Уравнения движения центра подвижного шара запишем в виде проекций на направление вдоль и перпендикулярно к направлению скорости:

$$m(dv/dt) = mgsin\alpha - F_{tp}, \quad mv^2/(R + r) = mgcos\alpha - N.$$

Уравнение вращательного движения:

$$I(d\omega/dt) = rF_{tp}.$$

Момент инерции шара  $I = (2/5)mr^2$ . Условие отсутствия проскальзывания:

$$v = \omega r = (R + r)(d\alpha/dt).$$

Используя это условие и исключая  $F_{tp}$  из уравнений движения, получаем

$$(dv/dt) = r(d\omega/dt) = (5/7)gsin\alpha.$$

Подставляем это выражение в уравнение движения, используя то, что

$$(dv/dt) = (dv/d\alpha)(d\alpha/dt) = (dv/d\alpha)v/(R + r),$$

имеем

$$F_{tp} = (2/7)mgsin\alpha, \quad v^2 = (10/7)g(R + r)(1 - cos\alpha)$$

(это уравнение можно получить и из закона сохранения механической энергии, так как сила трения не совершает работы при отсутствии проскальзывания),

$$N = (1/7)mg(17cos\alpha - 10).$$

Видно, что при  $\alpha = 0$ :  $N = mg$ ,  $F_{tp} = 0$ . Затем с увеличением  $\alpha$  увеличивается и  $F_{tp}$  и уменьшается  $N$ . При некотором значении  $\alpha$  соответствующей величины  $N$  уже недостаточно для обеспечения движения без проскальзывания. Это произойдет при  $F_{tp} = kN$ . От-

сюда для определения  $\alpha$  получаем:  $2\sin\alpha = k(17\cos\alpha - 10)$ . Предполагая  $\alpha$  малым, имеем уравнение

$$\alpha^2 + 4\alpha/(17k) - 14/17 = 0,$$

и при  $k = 0,044$  получаем

$$\alpha = 0,15 \text{ или в градусах } \alpha = 8,6^\circ$$

(т. е., действительно, угол мал).

Рассмотрим соударения при вращательных движениях. Начнем с подвешенных к одной горизонтальной оси стержня длиной  $L$  и массы  $M$  и сосредоточенной массы (шарика)  $m$  на нити длиной  $l$ . При отклонении шарика на угол  $\alpha$  он поднимается на

$$h = l(1 - \cos\alpha). \quad (9.25)$$

Его потенциальная энергия при отсутствии трения в подвесе переходит в кинетическую. Отсюда можно определить скорость при прохождении положения равновесия

$$v_0^2 = 2gh. \quad (9.26)$$

В положении равновесия происходит взаимодействие шарика со стержнем. Считаем, что время взаимодействия настолько мало, что можно пренебречь смещениями за это время. Такие системы называются баллистическими. Так как момент сил, действующих на систему, относительно точки подвеса равен нулю, то всегда выполняется закон сохранения момента импульса при соударении

$$I\omega = mv_0l + mvl. \quad (9.27)$$

Для стержня момент инерции  $I = ml^2/3$ ,  $\omega$  — угловая скорость стержня после удара, скорость шарика после удара  $v$  считаем направленной противоположно  $v_0$ .

При упругом соударении сохраняется энергия

$$I\omega^2/2 = mv_0^2/2 - mv^2/2. \quad (9.28)$$

Из (9.27) и (9.28) получаем

$$v_0 - v = \omega l. \quad (9.29)$$

Из (9.27) и (9.29) следует

$$v = (1/2)\omega l[I/(ml^2) - 1]. \quad (9.30)$$

Отсюда легко определить, например, длину подвеса шарика, чтобы он остановился после удара (№ 9.99), если массы шарика и стержня одинаковы:  $I = ml^2$  и  $l = L(1/3)^{1/2}$ .

Для стержня длиной  $L = (3/2)l$  остановка шарика происходит при  $M = (4/3)m$  (№ 9.107).

Если шарик после упругого удара останавливается, то из закона сохранения энергии и (9.25) для угла отклонения стержня  $\beta$  получаем

$$mlg(1 - \cos\alpha) = M(L/2)g(1 - \cos\beta). \quad (9.31)$$

При одинаковых массах и малых углах отклонения (№ 9.108) имеем  $\beta \approx \alpha$   $(2l/L)^{1/2}$ . Для отношения времени опускания шарика к времени отклонения стержня, учитывая, что они являются полупериодами колебаний, получаем  $[2L/(3l)]^{1/2}$ .

При отклонении шарика на  $90^\circ$  (№ 9.102) из приведенной выше формулы (9.31) получаем угол отклонения стержня.

В случае неупругого соударения из (9.26) и закона сохранения момента импульса получаем для угловых скоростей шарика и стержня, которые из-за неупругости удара (№ 9.100) должны быть одинаковы,  $mv_0l = I\omega$ . Здесь  $I$  — суммарный момент инерции шарика и стержня:  $I = ml^2 + ML^2/3$ . Дальнейшие замедления стержня и шарика, в случае их раздельных движений, определялись бы уравнениями

$$I_c(d\omega/dt)_c = -Mg(L/2)\sin\varphi, \quad I_m(d\omega/dt)_m = -mglsin\varphi.$$

В случае  $L = l$  получаем

$$(d\omega/dt)_c = -(3/2)(g/l)\sin\varphi, \quad (d\omega/dt)_m = -(g/l)\sin\varphi.$$

То есть стержень замедляется быстрее. Поэтому они будут двигаться вместе, как приклёенные. При отклонении стержня и шарика после неупругого удара можно воспользоваться законом сохранения энергии

$$I\omega^2/2 = (m + M/2)gH.$$

Откуда и получаем высоту отклонения  $H$ .

Если в начальный момент отклоняется стержень, то аналогичным образом пользуемся сохранением момента импульса

$$mv_l = I(\omega_0 + \omega).$$

Считаем, что после соударения стержень движется в противоположном направлении. При упругом соударении выполняется закон сохранения энергии

$$mv^2/2 = I(\omega_0^2 - \omega^2)/2.$$

Для случая, когда шарик и стержень после удара движутся с одинаковыми угловыми скоростями в разные стороны (№ 9.101), до-

полнительное условие  $v = \omega l$ . Чтобы найти соотношение между массами, надо учесть, что стержень ударит по шарику в том случае, если длина стержня больше длины нити, на которой висит шарик.

Если стержень отклоняют на угол  $\phi$  от вертикали (№ 9.106) и он упруго ударяет по висящему шарику, то из законов сохранения момента импульса и сохранения энергии находим скорости и кинетические энергии. Приравниваем их потенциальным энергиям при отклонении стержня и шарика, чтобы найти углы отклонений.

Стержень можно отклонить на  $90^\circ$ , а в точку на вертикальной линии от оси вращения, через которую проходит нижний конец стержня, на гладкую горизонтальную поверхность поместить малое тело массой  $m$  (№ 9.103). Стержень отпускают, и он упруго ударяет по телу. Угловую скорость стержня в момент удара находим из закона сохранения энергии

$$MgL/2 = ML^2\omega^2/6.$$

При ударе в данном случае сохраняются момент импульса и энергия

$$ML^2\omega/3 = ML^2\omega_1/3 + mvL,$$

$$ML^2\omega^2/6 = ML^2\omega_1^2/6 + mv^2/2.$$

Исключая угловую скорость стержня после удара  $\omega_1$ , находим скорость тела.

По этим же формулам можно найти скорость тела после удара, если стержень остановится (№ 9.104). Затем можно найти расстояние, на которое сдвинется тело, если на горизонтальной поверхности в результате трения кинетическая энергия переходит в работу.

В нижний конец висящего стержня может **ударить** пуля, летящая горизонтально (№ 9.110). Если скорость пули до пробивания стержня (доски)  $v_0$ , а после  $v$ , то из закона сохранения момента импульса получаем

$$I\omega = mL(v_0 - v).$$

Угол отклонения стержня определяется из закона сохранения энергии

$$I\omega^2/2 = Mg(L/2)(1 - \cos\alpha).$$

Из последнего соотношения получаем, что для отклонения стержня на  $90^\circ$  (№ 9.98)  $\omega = (3g/L)^{1/2}$ .

Стержень может быть подвешен не за конец, а пуля **ударять под некоторым углом** к плоскости вращения (№ 9.112). По-прежнему из

закона сохранения момента импульса при ударе и закона сохранения энергии после удара получаем результат.

Стержень, подвешенный на короткой ниточке (или шарнире), можно отклонить на некоторый угол, а затем сообщить его концу скорость, перпендикулярную плоскости отклонения. Если скорость достаточно велика, то стержень поднимется до уровня подвеса. Чтобы найти нужную для этого скорость (№ 9.109), используем сохранение момента импульса относительно вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, и сохранение энергии. Момент инерции стержня, отклоненного от оси на угол  $\alpha$ , равен  $I = ml^2(\sin^2 \alpha)/3$ .

Действие на нижний конец висящего стержня длиной  $L$  и массой  $M$ , вертикально висящего в поле тяжести на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец, можно задать импульсом  $p$  (№ 9.150). Под действием этого импульса возникают движение центра масс стержня и его вращение. Закрепление в точке подвеса не позволяет сдвигаться верхнему концу стержня. Импульс, действующий в точке подвеса  $p_1$ , направлен в ту же сторону, что и приложенный к нижнему концу стержня, так как подвес противодействует вращению стержня вокруг центра масс. Их сумма из закона сохранения импульса равна изменению импульса стержня (его массы, умноженной на скорость центра масс)  $p + p_1 = Mv_c$ . Изменение момента импульса относительно точки подвеса  $pL = I\omega$ . Угловая скорость связана со скоростью центра масс  $v_c = \omega L/2$ . Отсюда получаем

$$p_1 = Mv_c - p = M\omega L/2 - p = p[ML^2/(2I) - 1] = p/2.$$

Импульс в точке подвеса составляет половину действующего на нижний конец.

Реакция в подвесе зависит от расстояния, на котором прикладывается импульс. Найдем расстояние  $l$ , на котором надо приложить импульс, чтобы импульс в точке подвеса отсутствовал. Отметим, что именно импульс, а не реакция, так как всегда есть сила, противодействующая силе тяжести. Сохранение момента импульса относительно точки подвеса надо записать  $pl = I\omega$ . В таком случае

$$l = 2I/(ML) = (2/3)L. \quad (9.32)$$

При приложении импульса на таком расстоянии от точки подвеса в нем не будет толчка.

Задача об ударе саблей (стержнем) по неподвижному предмету (№ 9.113) решается этим же методом. Надо только перейти в систему координат, связанную с саблей, где подвес — это рука, держащая саблю.

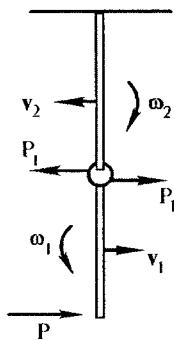


Рис. 9.21

К висячemu стержню можно на шарнире присоединить такой же и к концу нижнего приложить горизонтальный импульс  $p$  (№ 9.152). В таком случае центр тяжести нижнего стержня будет смещаться в направлении импульса со скоростью  $v_1$  и вращаться вокруг центра масс с угловой скоростью  $\omega_1$ . Предполагая, что закручивание преобладает над поступательным движением, получаем, что импульс со стороны верхнего стержня  $p_1$  действует в том же направлении, что и  $p$ , как показано на рис. 9.21. При невыполнении этого предположения знаки скоростей изменяются на противоположные. Для движения центра масс нижнего стержня получаем  $p + p_1 = mv_1$ .

Вращение нижнего стержня относительно его центра масс описывается уравнением

$$(p - p_1)l/2 = ml^2\omega_1/12.$$

Вращение верхнего стержня относительно точки подвеса

$$p_1l = ml^2\omega_2/3.$$

Условие одинакового смещения нижнего конца верхнего стержня и верхнего конца нижнего

$$\omega_2l = \omega_1l/2 - v_1.$$

Из этих уравнений получаем окончательный результат. Отметим, что у стержней возникает и вертикальная скорость, которая на вращение не оказывается.

Если стержни не висят в поле тяжести, а лежат на гладком горизонтальном столе свободно (№ 9.153), то при действии импульса на конец одного из них получаем уравнения

$$p + p_1 = mv_1, (p - p_1)l/2 = ml^2\omega_1/12, p_1 = mv_2, p_1l/2 = ml^2\omega_2/12$$

и

$$v_2 + \omega_2l/2 = \omega_1l/2 - v_1.$$

Центр тяжести системы движется только в направлении импульса  $p$ , а центры стержней имеют скорости также в направлении, перпендикулярном к импульсу.

Напомним, что баллистическим называется маятник, который не успевает сдвинуться (отклониться) за время удара. Его движение развивается после удара за счет полученного импульса. Рассмотрим

баллистический маятник в виде цилиндра радиусом  $R$  и массой  $M$ , подвешенного так, что он может отклоняться вдоль оси и в направлении, перпендикулярном оси цилиндра (рис. 9.22). Расстояние от оси цилиндра до точки подвеса  $L \gg R$ . В результате попадания в центр основания цилиндра и проникновения внутрь цилиндра горизонтально летящей со скоростью  $v$  и вращающейся вокруг продольной оси с угловой скоростью  $\omega$  пули, которую можно считать цилиндром радиусом  $r \ll R$  и массой  $m$ , происходит отклонение маятника (№ 9.97). Скорость, которую получит маятник вдоль оси цилиндра  $v_1$ , определяем из закона сохранения импульса  $mv = (m + M)v_1$ . Скорость маятника в направлении, перпендикулярном оси цилиндра  $v_2$ , определяем из закона сохранения момента импульса относительно точки подвеса

$$I_{\text{n}}\omega = [MR^2/2 + (M+m)L^2]\omega_2.$$

Она равна

$$v_2 = \omega_2 L = L(1/2)mr^2\omega/[MR^2/2 + (M+m)L^2].$$

Откуда находится направление суммарного вектора скорости маятника после удара относительно траектории пули, определяемое углом  $\alpha$  из соотношения  $\operatorname{tg}\alpha = v_2/v_1$ . Отметим, что момент импульса пули относительно оси, проходящей через точку подвеса, равен моменту относительно ее оси вращения (подобно моменту пары сил однаковому относительно любой точки).

Мгновенная раскрутка баллистического маятника может быть вызвана моментами внутренних сил. Такой момент возникает в **электромоторе** при его запуске. Если электромотор жестко присоединить к невесомому стержню и подвесить за верхний конец на горизонтальной оси (рис. 9.23), то при включении и резкой раскрутке мотора возникнет момент импульса, который будет отклонять такой баллистический маятник (№ 9.149). Обозначим массу электромотора  $m$ , расстояние оси вращения ротора мотора от точки подвеса  $I$ , момент инерции ротора  $I_p$ , угловую скорость ротора в результате его мгновенной раскрутки  $\omega$ , момент инерции статора, жестко скрепленного со стержнем  $I_c$ . Начальную угловую скорость вращения всего мотора относительно точ-

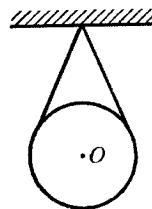


Рис. 9.22

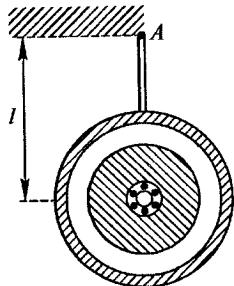


Рис. 9.23

ки подвеса  $\Omega$  определяем из закона сохранения момента импульса. До раскрутки момент импульса всей системы был равен нулю. Так как момент внешних сил относительно точки подвеса равен нулю, момент импульса системы не изменяется. Поэтому момент раскрутки, который относительно оси подвеса такой же, как относительно оси вращения ротора, равен моменту импульса при вращении маятника  $I_p \omega = (ml^2 + I_c) \Omega$ . Отклонение маятника (его подъем на высоту  $H$ ) определяется переходом кинетической энергии в потенциальную

$$mgH = (I_p \omega)^2 / [2(ml^2 + I_c)].$$

Если позволяет подвеска, то максимально  $H = 2l$ . При угловой скорости раскрутки ротора

$$\omega^2 \geq 4mgl / (ml^2 + I_c) / I_p^2$$

возникнет вращение маятника относительно оси подвеса.

Стержень длиной  $l$  и массой  $M$ , находящийся на гладкой горизонтальной плоскости, может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. В покоящийся стержень упруго ударяет точечная масса  $m$ , движущаяся со скоростью  $v_0$ , перпендикулярной стержню на расстоянии  $x$  от оси вращения (№ 9.122). Из закона сохранения при соударении момента импульса

$$mv_0x = I\omega - m\dot{x}$$

и сохранение энергии

$$mv_0^2/2 = I\omega^2/2 + mv^2/2$$

получаем угловую скорость стержня

$$\omega = 6mv_0x / (Ml^2 + 3mx^2).$$

Она зависит от  $x$ . Для нахождения максимума можно продифференцировать выражение по  $x$  и приравнять нулю, а можно из законов сохранения найти  $x$  при условии остановки налетающей массы, когда вся энергия переходит к стержню. В результате

$$x = l[M/(3m)]^{1/2} \text{ и } \omega = (v_0/l)(3m/M).$$

Рассмотрим аналогичное соударение точечной массы  $m$  (шарика) со свободным неподвижным стержнем. Сохранение импульса дает

$$mv_0 = mv + Mv_c. \quad (9.33)$$

Сохранение момента импульса запишем относительно центра масс стержня

$$mv_0x = mvx + I\omega. \quad (9.34)$$

Здесь  $x$  — расстояние от центра масс стержня до траектории шарика;  $v_0$  и  $v$  — скорости шарика до и после удара;  $\omega$  — угловая скорость стержня после удара;  $I$  — момент инерции стержня относительно его центра масс.

Сохранение энергии

$$mv_0^2/2 = mv^2/2 + Mv_c^2/2 + I\omega^2/2. \quad (9.35)$$

Из этих соотношений можно найти  $x$ , при котором шарик останавливается и полностью передает энергию стержню (№ 9.115)

$$x = (l/2)[(M - m)/(3m)]^{1/2}.$$

Используя аналогичные уравнения, можно определить и максимальную угловую скорость стержня (№ 9.177).

Если заданы скорости концов стержня после удара  $v_A$  и  $v_B$  (№ 9.114), то для определения  $x$  достаточно воспользоваться (9.33) и (9.34), подставив  $v_c = (v_A + v_B)/2$  и  $\omega = (v_A - v_B)/l$ . Закон сохранения энергии при этом не используется и в принципе может соответствовать неупругому удару.

Стержень также может двигаться навстречу шарику (№ 9.120). Если по гладкой горизонтальной поверхности стола поступательно движется твердый стержень длиной  $L$  и массой  $M$  со скоростью  $v_0$ , перпендикулярной к его продольной оси, а навстречу стержню перпендикулярно к той же оси движется твердый шарик массой  $m$ , который ударяет в конец стержня, а затем отскакивает от него, то, считая удар абсолютно упругим и предполагая, что трение между поверхностью стола и движущимися по ней предметами пренебрежимо мало, находим, с какой скоростью  $v_0$  должен двигаться шарик, чтобы после удара центр масс стержня остановился. Находим также угловую скорость вращения стержня вокруг центра масс после удара.

Из закона сохранения импульса системы

$$Mv_0 - mv_0 = mv.$$

Нужно отметить, что благодаря мгновенности удара движение шарика после удара происходит по той же линии, что и до удара. Из закона сохранения кинетической энергии системы

$$Mv_0^2/2 + mv_0^2/2 = I_0\omega^2/2 + mv^2/2.$$

Здесь момент инерций стержня относительно центра масс  $I_0 = ML^2/12$ . В результате получаем

$$v_0 + v = Mv_0/m, \quad v_0^2 - v^2 = I_0\omega^2/m - Mv_0^2/m,$$

откуда

$$\begin{aligned} v_0 - v &= I_0\omega^2/(Mv_0) - v_0, \\ 2v_0 &= I_0\omega^2/(Mv_0) - v_0 + Mv_0/m. \end{aligned}$$

Угловую скорость вращения стержня определяем из закона сохранения момента импульса системы (так как внешних сил нет) относительно точки на линии, по которой движется шарик,

$$Mv_0L/2 = I_0\omega.$$

Следовательно,

$$\omega = Mv_0L/(2I_0).$$

Окончательно

$$\omega = 6v_0/L, \quad v_0 = (M + 2m)v_0/(2m).$$

Аналогичным образом решается задача о соударении вращающегося вокруг собственного центра тяжести стержня с неподвижным шариком (№ 9.178).

При взаимодействии тела деформируются, накапливают упругую энергию. При максимальной деформации прекращается относительное перемещение тел. В этот момент их скорости одинаковы, как при абсолютно неупругом ударе. Найдем максимальную энергию деформации при ударе шарика массой  $m$ , который движется по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью  $v_0$ , перпендикулярной покоящемуся стержню массой  $M$  и длиной  $L$ , и попадает в его конец (№ 9.118). Используем (9.33) и (9.34). В (9.34)  $x = L/2$ . В правую часть (9.35) добавляем член, описывающий упругую энергию, которую затем и вычисляем.

Если соударение тел происходит на шероховатой плоскости, то на соотношения при ударе трение не оказывается, а изменяет дальнейшее движение после удара. Рассмотрим удар стержня длиной  $L$  и массой  $m$ , имеющего скорость  $v$ , перпендикулярную его длине, с таким же неподвижным стержнем, который может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец (№ 9.126). Предполагаем, что стержни слипаются. Угловую скорость слипшихся стержней после удара  $\omega$  находим из закона сохранения момента

импульса относительно оси вращения  $mvI/2 = I\omega$ . Здесь  $I = 2ml^2/3$ . Кинетическая энергия системы после удара расходуется на работу сил трения

$$A = \int_0^\phi d\phi \int_0^l r (2m/l) g k dr = kmgl\phi.$$

Аналогичным способом можно рассмотреть столкновение вращающегося стержня с другим таким же или вдвое меньшим (№ 9.124), (№ 9.127). В случае удара (№ 9.123) начальную угловую скорость определяем из закона сохранения импульса при ударе.

Рассмотрим стержень длиной  $l$  и массой  $m$ , лежащий в поле тяжести на двух опорах, симметричных относительно центра масс стержня, на расстоянии  $l$  друг от друга. Если быстро удалить одну из опор (№ 9.154), то реакция на второй опоре изменяется скачкообразно. «Быстро» означает, что за это время стержень не успевает существенно повернуться, т. е. остается на месте. Для нахождения реакции опоры учтем, что угловое ускорение стержня  $\beta$  одно и то же относительно любой точки на стержне. Напишем уравнения вращательного движения относительно центра масс стержня и относительно точки опоры. Надо учесть, что силы инерции относительно центра масс дают нулевой момент сил. Получаем  $I_0\beta = Fl/2$  и  $I\beta = mgl/2$ . Здесь  $I_0 = mL^2/(12)$  — момент инерции стержня относительно центра масс,  $F$  — сила реакции, которую надо определить сразу после удаления одной из опор,

$$I = (m/L)[(L + l)^3/2 + (L - l)^3/2]/3 = mL^2(1 + 3l^2/L^2)/(12)$$

— момент инерции стержня относительно точки опоры. Из этих уравнений следует

$$F = mgI_0/I = mg/(1 + 3l^2/L^2).$$

Стержень длиной  $l$  и массой  $M$  можно положить на горизонтальный стол так, что часть стержня выступает за поверхность стола. Если в выступающий конец стержня абсолютно неупруго ударяет шарик массой  $m$ , который двигался снизу вверх со скоростью  $v$ , вертикальной и перпендикулярной стержню, то стержень начинает вращаться относительно конца, лежащего на столе. Считая, что сила реакции приложена к этому концу, найдем импульс силы реакции (№ 9.151). Силу тяжести можно не учитывать, так как за время соударения импульс силы тяжести мал по сравнению с импульсом силы реакции опоры. Из второго закона Ньютона следует, что

$$p = \int_{\tau} F dt = mv_1 + Mv_1/2 - mv.$$

Здесь  $v$  — скорость шарика после неупругого удара, которая совпадает со скоростью выступающего конца стержня и в два раза больше скорости центра масс стержня. Момент импульса относительно точки приложения силы реакции сохраняется, так как моментом импульса сил тяжести можно пренебречь. Отсюда

$$mv_l = mv_1 l + I\omega = mv_1 l + Ml^2 v_1 / (3l).$$

Для скорости после удара получаем

$$v_1 = v/[1 + M/(3m)].$$

Из первого уравнения находим импульс силы реакции.

Рассмотрим такой же стержень, который может вращаться относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс. На один из концов стержня, покоящегося горизонтально, с высоты  $h$  вертикально падает шарик массой  $m$  (№ 9.176). Для определения скорости шарика и стержня после упругого удара используем сохранение момента импульса (как и в предыдущем случае)

$$mv_0 l/2 = mv_l/2 + I\omega$$

и закон сохранения энергии

$$mv_0^2 = mv^2 + I\omega^2.$$

Учитывая, что  $V_0^2 = 2gh$ , находим скорости. По результатам получаем, что шарик летит назад, если  $m < M/3$ .

Если горизонтально расположенный стержень длиной  $l$  и массой  $m$ , падая в поле тяжести с высоты  $h$  над столом и приобретая скорость  $v_0 = (2gh)^{1/2}$ , упруго ударяет концом в край стола (№ 9.137), то его скорость определяется из закона сохранения момента импульса относительно края стола

$$Mv_0 l/2 = Mv_l/2 + I\omega \quad (9.36)$$

и закона сохранения энергии при упругом ударе

$$Mv_0^2 = Mv^2 + I\omega^2. \quad (9.37)$$

Подчеркнем, что моментом силы инерции, приложенной в центре масс стержня, можно пренебречь, так как импульс ее мал при малом времени удара. Импульс силы реакции конечен, а момент импульса равен нулю, так как плечо силы равно нулю. В момент импульса входит момент инерции стержня относительно центра масс  $I = ml^2/12$ . Для симметричных тел момент импульса один и тот же относительно разных точек.

Из уравнений получаем

$$v_0 + v = I\omega/2, \quad v = v_0/2 = (gh/2)^{1/2} \text{ и } \omega = 3v/I.$$

Для определения **неподвижной** после удара точки **стержня** (№ 9.175) учтем, что в ней скорость от вращения вокруг центра масс равна поступательной скорости центра масс.

Если в системе тел действуют только внутренние силы, то состояние до взаимодействия и после связаны законами сохранения импульса и момента импульса. При этом в отличие от удара взаимодействие может быть длительным. Примером такого взаимодействия является **проникновение шарика** массой  $m$  в **спиральный лабиринт**, который может свободно двигаться в пространстве (рис. 9.24). Начальная скорость шарика равна  $v$ , радиус лабиринта  $R$ , его масса  $M$ , момент инерции  $I$ . Относительно лабиринта шарик перестает двигаться, когда доходит до его центра (№ 9.95).

Центр масс системы (шарик и лабиринт) движется в направлении оси  $x$  со скоростью

$$v_c = mv/(M + m).$$

Поэтому координата его по оси  $OX$

$$x_c = mv/(M + m).$$

После остановки шарика центр масс совпадает с центром лабиринта. Координата центра масс системы по оси  $OY$ , ввиду отсутствия внешних сил, меняться не будет. В выбранной системе координат координата центра масс системы по оси  $OY$  равна

$$y_c = mR/(M + m).$$

Таким образом, после остановки шарика в лабиринте центр лабиринта сместится с  $y = 0$  в  $y = y_c$ . Угловую скорость найдем из уравнения сохранения момента количества движения относительно произвольной точки, лежащей на линии движения центра масс системы,  $mva_1 = I\omega$ , где  $a_1$  — начальное расстояние шарика от линии движения центра масс системы, которое определяется по формуле:  $a_1 = R - y_c = aM/(M + m)$ .

Отсюда

$$\omega = ma_1v/I = RvmM/[I(M + m)].$$

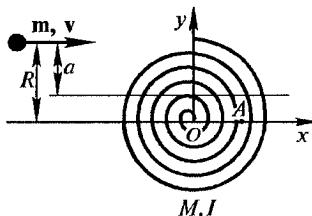


Рис. 9.24

Можно найти угловую скорость вращения лабиринта и скорость его центра масс в некоторый промежуточный момент, когда шарик еще не дошел до центра лабиринта, а находится (см. рис. 9.24), например, на расстоянии  $R/2$  на линии от шарика до центра лабиринта ( $AO$ ) параллельной начальной скорости шарика (№ 9.181). В этот момент скорость лабиринта и шарика в направлении линии  $AO$  одинакова и из закона сохранения импульса равна  $v = mv_0/(m + M)$ . Сохранение момента импульса пишем относительно центра масс системы, который в этот момент находится на линии  $AO$  на расстояниях от  $A$  и  $O$ , обратно пропорциональных массам. Скорости, перпендикулярные линии  $AO$ , также обратно пропорциональны массам.

Рассмотрим соударения бильярдных шаров. Один бильярдный шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью  $v$  и ударяется в другой такой же покоящийся бильярдный шар, причем линия центров параллельна скорости движения (№ 9.79). Считаем, что при столкновении шаров передачи вращательного движения не происходит. Потерей энергии на трение при чистом качении пренебрегаем. Для определения скоростей обоих шаров после того, как их движения перейдут в чистые качения и доли первоначальной кинетической энергии, переходящей в тепло, используем законы сохранения. При ударе существенны только те силы, которые за бесконечно малое время удара  $\tau$  дают конечную величину импульса силы:

$$\int_{\tau} F dt,$$

так как только они вызовут изменение количества движения (т. е. скорости) тела. Поэтому в закон сохранения импульса не войдут силы трения, имеющие конечную (а не бесконечно большую) величину:

$$mv_0 = mv_1 + mv_2.$$

В законе сохранения энергии пренебрегаем работой сил трения, так как за время удара смещения малы. Учитывая, что по условию передачи вращательного движения при ударе не происходит, т. е. не изменяется момент количества движения каждого шара относительно его центра масс, а следовательно, и вращательная энергия, получаем

$$mv_0^2/2 = mv_1^2/2 + mv_2^2/2.$$

Из этих соотношений  $v_1 = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_0$ ,  $v_2 = v_0$ ,  $\omega_2 = 0$ . Таким образом, после удара первый шар имеет начальное вращение с угловой

скоростью  $\omega_0$ , а второй — поступательную скорость  $v_0 = \omega_0 r$ . Для нахождения движения шаров пользуемся тем, что момент количества движения относительно точки на поверхности, через которую проходит направление силы трения, сохраняется, так как момент внешних сил при этом равен нулю. Движение шаров переходит в качение без скольжения, поэтому из закона сохранения момента импульса для первого шара

$$I\omega_0 = I\omega_1 + mv_1 r = (I + mr^2)\omega_1$$

$$\text{и } v_1 = \omega_1 r = v_0/(1 + mr^2/I) = (2/7)v_0,$$

для второго шара

$$mv_0 r = I\omega_2 + mv_2 r = mv_2 r + [1 + I/(mr^2)]$$

$$\text{и } v_2 = \omega_2 r = v_0/[1 + I/(mr^2)] = (5/7)v_0.$$

Кинетическую энергию шара, катящегося без скольжения, можно выразить через скорость центра масс:

$$E = mv^2/2 + I\omega^2/2 = (mv^2/2)(1 + I/mr^2) = (7/10)mv^2.$$

Тогда относительные потери кинетической энергии

$$(E_{k0} - E_{k1} - E_{k2})/E_{k0} = 1 - v_1^2/v_0^2 - v_2^2/v_0^2 = 1 - 4/49 - 25/49 = 20/49.$$

Определим угол **отражения** при ударе катящегося без проскальзывания бильярдного шара от гладкой **вертикальной стенки** (№ 9.168). Начальные скорости шара заданы  $v_0 = r\omega_0$ . Направление движения составляет угол  $\alpha$  со стенкой. После упругого удара о стенку центр масс шара имеет скорость вдоль стенки  $v_x = v_0 \cos \alpha$  в направлении, перпендикулярном к стенке  $v_y = v_0 \sin \alpha$ , и угловые скорости  $\omega_x = \omega_0 \cos \alpha$  и  $\omega_y = -\omega_0 \sin \alpha$ . Из закона сохранения импульса относительно точки на поверхности

$$mv_y r + I\omega_y = mv_{yk} r + I\omega_{yk} \text{ и } mv_x r + I\omega_x = mv_{xk} r + I\omega_{xk}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \beta = v_{yk}/v_{xk} = (3/7) \operatorname{tg} \alpha.$$

Лежащий на шероховатой поверхности шар можно ударить не шаром, а, например, кием или летящим шариком, пулей.

**Удар кием** — это приложение горизонтального импульса  $p$  в вертикальной плоскости, проходящей через центр шара и точку касания шара бильярдного стола. Рассмотрим, как движение шара зависит от высоты  $h$  приложения импульса над столом (№ 9.80). Сохра-

нение импульса при ударе с учетом импульса реакции сил трения  $p_t$  дает

$$p + p_t = mv. \quad (9.38)$$

Из закона сохранения момента импульса относительно точки на поверхности стола

$$ph = mir + I\omega \quad (9.39)$$

и условия качения без проскальзывания  $v = r\omega$  и  $p_t = 0$  находим высоту удара для дальнейшего качения без проскальзывания  $h = (7/5)r$ . В этом случае точка касания шаром бильярдного стола является мгновенным центром вращения. При увеличении высоты удара увеличиваются момент импульса и скорость центра масс, происходит ускорение за счет импульса сил трения. При уменьшении высоты — обратный эффект — замедление.

Изменение высоты удара приводит к различному закручиванию шара, который при столкновении с покоящимся шаром может продолжать движение или отскакивать назад (№ 9.81).

Отметим, что ударный импульс  $p$  значительно превосходит импульс силы трения, которая конечна, и не может дать конечную величину импульса за бесконечно малое время удара. Поэтому вместо (9.38) можно писать  $p = mv$ . Если ударом шару сообщают импульс  $p$  на высоте  $kr$  над центром шара (№ 9.82), то, используя (9.39), получаем  $I\omega = pkr$ . В результате поступательная энергия  $E_k = p^2/(2m)$  и вращательная  $E_\omega = I\omega^2/2 = (5/4)p^2k^2/m$ . Для отсутствия проскальзывания из (9.39) находим  $k = 2/5$ .

В шар массой  $M$  и радиусом  $R$ , лежащий на горизонтальной, шероховатой поверхности, попадает на высоте  $R/2$  выше центра пуля массой  $m$ , летящая горизонтально со скоростью  $v_0$ , и рикошетом отскакивает вертикально вверх (№ 9.89). Для определения скорости пули после удара  $v$ , в случае если спустя некоторое время шар начинает равномерно катиться со скоростью  $v_1$ , запишем сохранение момента импульса относительно точки касания поверхности

$$mv_0(3/2)R = Mv_{\text{ш}}R + I\omega + mvR(3)^{1/2}/2.$$

Здесь  $v_{\text{ш}}$  — скорость шара сразу после удара. При дальнейшем движении шара сохранение момента импульса до начала качения без проскальзывания

$$Mv_{\text{ш}}R + I\omega = Mv_1R + I\omega/R = (7/5)Mv_1R.$$

Из этих соотношений определяется скорость пули после удара.

Если пуля пробивает шар по горизонтальному диаметру (№ 9.93), то по заданной скорости движения шара после перехода в качение без проскальзывания  $v_1$  находим скорость  $v$  пули после пробивания, используя закон сохранения момента импульса относительно точки на поверхности:

$$m(v_0 - v)R = I\omega_1 + Mv_1R = (7/5)Mv_1R.$$

Рассмотрение **удара по цилинду или трубе** можно провести аналогичным образом. По **толстостенной трубе** с наружным диаметром  $D$  наносится горизонтальный удар на расстоянии  $(7/8)D$  от поверхности шероховатого стола, на котором труба покоялась (№ 9.94). Найдем толщину трубы  $d$ , при которой после удара она покатится без проскальзывания. Вводя плотность материала трубы  $\rho$ , получаем для массы и момента инерции относительно оси симметрии (через центр масс) на единицу длины:

$$m = \int_{R-d}^R \rho 2\pi r dr = \pi\rho [R^2 - (R-d)^2]; \quad (9.40)$$

$$I = \int_{R-d}^R r^2 \rho 2\pi r dr = (1/2)\pi\rho [R^4 - (R-d)^4]. \quad (9.41)$$

Движение центра масс трубы

$$mdv/dt = F. \quad (9.42)$$

Вращение относительно оси симметрии трубы

$$Id\omega/dt = (3/4)RF. \quad (9.43)$$

При отсутствии проскальзывания  $v = R\omega$  и, следовательно,

$$m = (4/3)I/R^2. \quad (9.44)$$

Поэтому из (9.44), (9.40) и (9.41)

$$R^2 + (R-d)^2 = (3/2)R^2 \text{ и } d/R = 1 - 1/(2)^{1/2}.$$

Задача усложняется, если пуля попадает, например, в покоящийся на гладкой горизонтальной поверхности **обруч** и застревает в нем (№ 9.169). Для определения скоростей после удара надо аналогичным образом написать уравнение изменения вертикального импульса, т. е. учесть **появление вертикальной составляющей скорости** центра масс системы за счет действия силы реакции поверхности. Только она существенна в течение времени удара. Второе уравнение — изменение за

время удара момента импульса относительно центра масс системы под действием момента силы реакции поверхности. При вычислении момента инерции системы относительно центра масс для обруча используем теорему Гюйгенса—Штейнера. Ограничение максимальной скорости вращения связано с тем, что вертикальная составляющая скорости обруча в точке опоры не может быть отрицательной.

Если сталкиваются два одинаковых шара или цилиндра, **двигаящихся навстречу** друг другу с одинаковыми постоянными скоростями (значит, без проскальзывания), то это можно рассматривать, как столкновение с гладкой вертикальной стенкой. При упругом столкновении вращение сохраняется, а поступательная скорость меняется на противоположную. Дальнейшее движение находим обычными способами. В частности, можно воспользоваться сохранением момента импульса относительно точки на поверхности

$$mvR - I\omega = mv_k R + Iv_k/R.$$

Существует особый случай (№ 9.84), когда цилиндры тонкостенные. В этом случае  $I = mR^2$ , и цилиндры, как следует из приведенного выше уравнения, не переходят в качение без проскальзывания, а останавливаются. Вводя силу трения  $F = kmg$ , находим путь цилиндра до остановки

$$mdv/dt = m(dv/dx) (dx/dt) = m(dv/dx)v = (m/2)dv^2/dx = -kmg.$$

Отсюда путь, проходимый одним цилиндром,  $x = v^2/(2kg)$ , а расстояние между цилиндрами в два раза больше. Отметим, что остановку цилиндра можно было бы рассчитать из равенства кинетической энергии, включающую поступательную и вращательную, работе сил трения. Надо только учесть, что путь, на котором сила трения совершает работу, в два раза больше  $x$  за счет скольжения при вращении.

**При столкновении катящегося без проскальзывания тонкостенного цилиндра с таким же покоящимся** (№ 9.83) у одного остается вращение, у другого появляется поступательная скорость. Однаковая и постоянная сила трения сообщает одинаковые по величине ускорение и замедление. Для первого получаем

$$v = kgt, r\omega = r\omega_0 - kgmr^2t/I.$$

В случае тонкостенного цилиндра получаем для момента перехода на качение без проскальзывания

$$t_n = v_0/(2kg).$$

Для второго получаем такое же время. То есть тонкостенные цилиндры в данном случае перейдут в качение без проскальзывания в один и тот же момент. Разность координат цилиндров

$$x_2 - x_1 = v_0 t - kgt^2/2 - kgt^2/2 = v_0 t - kgt^2 = v_0^2/(4kg).$$

Если шар падает на шероховатую горизонтальную поверхность со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  и не отскакивает (№ 9.167), то его скорость и закрутку после удара определяем по изменению импульса и момента импульса. Обозначив импульс нормальной к поверхности силы реакции

$$p = \int_0^\tau N dt,$$

получаем для вертикальной компоненты

$$p = -mv_0 \sin \alpha,$$

для горизонтальной (с учетом силы трения, так как нормальная сила  $N$  очень большая)

$$m(v_\tau - v_0 \cos \alpha) = kp$$

и для вращения

$$I\omega_\tau = rk p.$$

Отсюда, подставляя  $p$ , определяем параметры движения сразу после удара. Затем, как и раньше, находим скорость при переходе к качению без проскальзывания.

Рассмотрим соударение и отскок баскетбольного мяча, закрученного до угловой скорости  $\omega_0$  и брошенного на пол под углом  $\alpha = 5,7^\circ$  к вертикали со скоростью  $v_0 = 1,5$  м/с. Ось вращения перпендикулярна плоскости падения (№ 9.162). Коэффициент трения мяча о пол  $k = 0,2$ , радиус мяча  $R = 15$  см. Считаем, что вся масса мяча сосредоточена в тонком поверхностном слое, изменением формы мяча при ударе пренебрегаем. Для определения величины угловой скорости  $\omega_0$ , при которой мяч отскочит от пола обратно под тем же углом, воспользуемся уравнениями движения центра масс и вращения вокруг центра масс.

Обозначим время соударения  $T$ , а  $\tau$  — время пока мяч скользит по полу (до начала качения). Сила трения мяча о пол существует, пока есть проскальзывание. Из второго закона Ньютона для изменения импульса по вертикали и горизонтали получаем

$$2V_0 \cos \alpha = (1/m) \int_0^T N dt;$$

$$2V_0 \sin \alpha = (k/m) \int_0^\tau N dt.$$

Из закона вращательного движения для изменения момента количества движения относительно центра масс шара находим

$$I(\omega_0 - \omega) = Rk \int_0^{\tau} N dt.$$

При очень большой угловой скорости или очень малых коэффициентах трения проскальзывание не прекращается в течение всего времени соударения ( $\tau = T$ ). При этом из первых двух уравнений получаем  $\operatorname{tg} \alpha = k$ . По условию для заданного угла  $\operatorname{tg} \alpha \geq 0,1$ . Эта величина меньше заданного в условии коэффициента трения. Поэтому время скольжения в данной задаче меньше времени соударения. В таком случае из второго и третьего уравнений и условия, что скорость качения без проскальзывания равна горизонтальной скорости в момент начала соударения (отскакивает под тем же углом), следует

$$\omega_0 R - v_0 \sin \alpha = 2R^2 m v_0 \sin \alpha / I.$$

Подставляя момент инерции сферической оболочки  $I = (2/3)mR^2$ , получаем

$$\omega_0 = 4v_0 \sin \alpha / R \cong 4 \text{ рад/с.}$$

При некоторой скорости закрутки и каком-то коэффициенте трения мяч может отскочить от пола вертикально (№ 9.163). Уравнения отличаются тем, что во втором (для горизонтального движения) отсутствует множитель два. Если проскальзывание не прекращается в течение всего времени соударения, то из первых двух уравнений  $\operatorname{tg} \alpha = 2k$ . В условии задачи № 9.163 коэффициент трения меньше величины, определяемой из этого соотношения при заданном угле падения. Поэтому проскальзывание прекращается раньше момента отскока. То есть в момент отскока поступательная и вращательная скорости связаны. Для вертикального отскока необходима нулевая поступательная скорость. Но из-за связи должно прекратиться вращение. В последнем уравнении конечная угловая скорость равна нулю. Из двух последних уравнений и определяется необходимая скорость закрутки.

Аналогичным образом решаются задачи № 9.164 и 9.166.

Возможен удар закрученного шара, например катящегося без проскальзывания бильярдного шара, о вертикальную шероховатую стенку (борт), при котором трение об эту стенку приводит к появлению вертикальной скорости (№ 9.165). Уравнения движения того же типа. Так как по условию удар упругий, то горизонтальная скорость после удара равна поступательной скорости катящегося шара. Если тре-

ние мало, то время проскальзывания равно времени удара и угла отражения, определяется из двух первых уравнений по отношению вертикальной скорости к горизонтальной  $\operatorname{tg} \alpha = 2k$ . В случае достаточно больших коэффициентов трения проскальзывание прекращается до момента отскока и конечная угловая скорость связана с вертикальной скоростью. Из двух последних уравнений получаем  $\operatorname{tg} \alpha = 2/7$ . Отсюда получаем и значение коэффициента трения, при котором происходит смена режимов.

Рассмотрим вращение стержня длиной  $L$  и массой  $m$  в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси, проходящей через его конец. Например, это может быть вертикальный столб, который подпилен у основания и падает на землю, поворачиваясь вокруг нижнего основания (№ 9.133). Чтобы определить линейную скорость его верхнего конца в момент удара о землю, можно написать уравнение вращения либо воспользоваться законом сохранения энергии.

Потенциальная энергия столба в поле тяжести переходит в кинетическую энергию вращения его относительно нижнего основания в момент удара

$$mgL/2 = I\omega^2/2.$$

Так как  $I = mL^2/3$ , то  $\omega^2 = 3g/L$ . И следовательно,  $v = \omega L = \sqrt{3gL}$ .

При горизонтальном положении стержня (№ 9.134) горизонтальная сила в оси вращения определяется центростремительным ускорением центра масс  $\omega^2 L/2$ , а вертикальная из связи вертикального ускорения в этот момент с угловым ( $Id\omega/dt = mgL/2$ ,  $a_{\text{верт}} = Ld\omega/dt/2$ ).

Аналогичные соотношения позволяют найти и угловую скорость гимнаста, вращающегося на перекладине, и соответственно увеличение нагрузки на его руки за счет центробежной силы (№ 9.111).

Для любой точки столба, находящейся на расстоянии  $x_1$  от точки вращения, т. е. падающей с высоты  $x_1$ , имеем  $v_1 = \omega x_1$ .

Для некоторого  $x_1$  эта скорость равна скорости падения с высоты  $x_1$ . Приравнивая их  $\sqrt{2gx_1} = \omega x_1$ , получаем

$$x_1 = 2g/\omega^2 = 2L/3.$$

Следует отметить, что кинетическую энергию можно представить и как сумму кинетической энергии поступательного движения центра масс, и вращательной энергии относительно центра масс.

Если стержень (столб) опирается на шероховатую горизонтальную поверхность, то трение может обеспечивать неподвижность

нижнего конца стержня. Найдем необходимый для этого коэффициент трения. Уравнение вращения стержня относительно неподвижного конца

$$I\omega/dt = mg(L/2)\sin\alpha. \quad (9.45)$$

Здесь  $\alpha$  — угол наклона стержня к вертикали. Движение центра масс стержня описывается уравнениями

$$mdv_x/dt = F_{\text{тр}}; \quad (9.46)$$

$$mdv_y/dt = mg - N. \quad (9.47)$$

Для компонент скорости имеем

$$v_x = v\cos\alpha = (L/2)\omega\cos\alpha; \quad (9.48)$$

$$v_y = v\sin\alpha = (L/2)\omega\sin\alpha. \quad (9.49)$$

Сила трения работы не совершает. Поэтому воспользуемся законом сохранения энергии

$$I\omega^2/2 = mg(L/2)(1 - \cos\alpha). \quad (9.50)$$

Дифференцируя (9.48) и (9.49) по времени и пользуясь (9.45), (9.46), (9.47) и (9.50), для коэффициента трения получаем

$$\begin{aligned} k &= F_{\text{тр}}/N = \\ &= \sin\alpha(3\cos\alpha - 2)/[4I/(mL^2) - 1 + \cos\alpha(3\cos\alpha - 2)]. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Коэффициент трения обращается в нуль при  $\alpha = 0$  и  $\cos\alpha = 2/3$ . Численное решение дает максимальное значение трения около 0,37 при  $\alpha = 35^\circ$ .

Эти уравнения можно применить и для тонкого диска, момент инерции которого равен

$$I = mR^2/4 + mR^2 = (5/4)mR^2.$$

Рассмотрим падение стержня на гладком полу из вертикального положения. Определим зависимость скорости центра масс от его высоты  $h$  над полом (№ 9.135). Из закона сохранения энергии (потенциальная переходит в кинетическую)

$$mg(L/2 - h) = mv^2/2 + I\omega^2/2.$$

На рис. 9.25 изображен стержень в некоторый момент. Так как трение о пол отсутствует, центр масс стержня  $O$  движется вертикально, а нижний конец стержня скользит по полу. Известные на-

правления скоростей в двух точках позволяют найти мгновенный центр вращения стержня — точку  $A$ . Расстояние  $AO = (L^2/4 - h^2)^{1/2}$ . Связь между скоростью центра масс и угловой скоростью вращения стержня

$$v = \omega(L^2/4 - h^2)^{1/2}.$$

Учитывая, что  $I = mL^2/12$ , находим скорость.

Силу, действующую на стержень со стороны пола, обозначим  $N$ . Так как пол гладкий, то эта сила направлена перпендикулярно к поверхности пола. Уравнение движения центра масс стержня

$$mdv/dt = mg - N. \quad (9.52)$$

Уравнение вращения стержня относительно центра масс

$$Id\omega/dt = I(d\omega/d\alpha)(d\alpha/dt) = I(d\omega/d\alpha)\omega = N(L/2)\sin\alpha. \quad (9.53)$$

Связь между скоростями

$$v = \omega(L/2)\sin\alpha. \quad (9.54)$$

Эту формулу можно получить, рассматривая точку касания пола как мгновенный центр вращения или напрямую вычисляя смещение центра масс за бесконечно малое время.

Дифференцируя, получаем

$$dv/dt = (L/2)\sin\alpha(d\omega/dt) + (L/2)\omega^2\cos\alpha. \quad (9.55)$$

Из закона сохранения энергии и (9.54) следует

$$\begin{aligned} Mg(L/2)(1 - \cos\alpha) &= I\omega^2/2 + mv^2/2 = \\ &= \omega^2[I + m(L/2)^2\sin^2\alpha]/2. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Отсюда зависимость  $\omega$  от  $\alpha$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= mgL(1 - \cos\alpha)/(I + m(L/2)^2\sin^2\alpha) = \\ &= 12(g/L)(1 - \cos\alpha)/(1 + 3\sin^2\alpha). \end{aligned} \quad (9.57)$$

Для нахождения скорости центра масс и давления стержня на поверхность (№ 9.156) используем (9.54), (9.52) и (9.57). Учитывая выражение для момента инерции стержня относительно центра масс, получаем

$$v = [3gL(1 - \cos\alpha)\sin^2\alpha/(1 + 3\sin^2\alpha)]^{1/2} \quad (9.58)$$

$$N = mg[(1 + 3(1 - \cos\alpha)^2)/(1 + 3\sin^2\alpha)^2]. \quad (9.59)$$

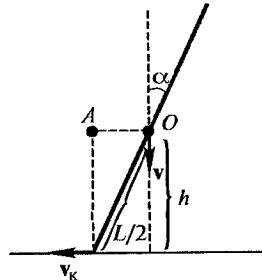


Рис. 9.25

Максимальное значение давления при нулевом угле равно весу стержня, а при увеличении угла давление падает, достигая минимального значения примерно при  $61,5^\circ$ , и далее возрастает до четверти веса при  $90^\circ$ . При  $\alpha = 60^\circ$   $N = 0,1656$ .

Те же уравнения позволяют решить задачу о падении не из вертикального, а из наклонного положения (№ 9.155).

Результаты приведенного решения могут быть использованы при рассмотрении падения **тонкого диска** (№ 9.157) и **обруча** (№ 9.158). Для определения минимального коэффициента трения, при котором край падающего предмета будет оставаться неподвижным, надо находить минимальное давление тела на поверхность.

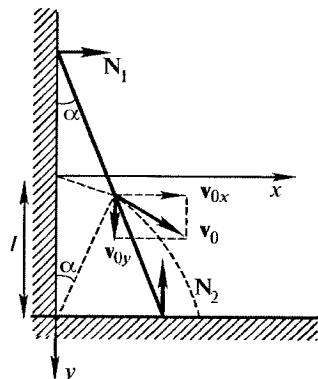


Рис. 9.26

Рассмотрим падение стержня массой  $m$  и длиной  $2l$ , когда его верхний конец опирается на гладкую вертикальную стенку, и во время падения он всегда находится в вертикальной плоскости перпендикулярной к вертикальной плоскости, на которую опирается верхний конец стержня (№ 9.179). На рис. 9.26 показан стержень, реакции, которые при отсутствии трения перпендикулярны к плоскостям, и скорости центра масс стержня. Используя показанную на рисунке систему координат, получаем для координат центра масс  $x = l \sin \alpha$  и  $y = l - l \cos \alpha$ . Легко видеть, что это окружность радиусом  $l$

центром в точке  $x = 0$ ,  $y = l$ . Центр окружности все время является мгновенным центром вращения стержня, так как скорости концов стержня направлены вдоль плоскостей, по которым они скользят. Поэтому полная скорость центра масс  $v_0 = l\omega$ . Из закона сохранения энергии

$$m v_0^2 / 2 + I_0 \omega^2 / 2 = mgl(1 - \cos \alpha).$$

Здесь момент инерции стержня длиной  $2l$  относительно центра масс  $I_0 = ml^2/3$ .

Отсюда

$$\omega^2 = (3/2)(g/l)(1 - \cos \alpha).$$

Так как  $d\alpha/dt = \omega$ , то, дифференцируя, получаем

$$d\omega/dt = (3/4)(g/l)\sin \alpha.$$

Для движения центра масс по оси  $x$  имеем  $v_{0x} = I\omega \cos\alpha$  и

$$mdv_{0x}/dt = md(I\omega \cos\alpha)/dt = N_1.$$

Используя полученные выше формулы, находим

$$N_1 = (3/2)mgsin\alpha[(3/2)\cos\alpha - 1].$$

Из этой формулы (№ 9.180) следует, что реакция растет, а затем уменьшается. При  $\cos\alpha = 3/2$  реакция обращается в нуль. Отъезжая, стержень не успевает поворачиваться, и его верхний конец отходит от стенки. Уравнение вращательного движения

$$I_0 d\omega/dt = I(N_2 \sin\alpha - N_1 \cos\alpha).$$

Откуда

$$N_2 = mg/4 + N_1/\tan\alpha.$$

После отрыва верхнего конца стержня от вертикальной стенки горизонтальная скорость центра масс будет оставаться постоянной. Если перейти в систему координат, движущуюся горизонтально с такой же скоростью, то центр масс движется вертикально, и задачу можно свести к рассмотренным ранее с некоторыми начальными условиями для вертикальной и вращательной скоростей.

При вращении тела вокруг вертикальной оси момент импульса ( $I\omega$ ) сохраняется, если моментом сил трения на оси можно пренебречь. Для примера рассмотрим свободное с некоторой угловой скоростью вращение вокруг вертикального диаметра проволочного кольца массой  $M$  и радиусом  $R$ , по которому сверху вниз начинает скользить бусинка массой  $m$  (№ 9.174). По мере опускания бусинки от верхнего положения до среднего момент инерции системы кольцо—бусинка увеличивается от момента инерции кольца  $MR^2/2$  до момента инерции системы  $MR^2/2 + mR^2$ . Отношение максимальной угловой скорости при нахождении бусинки вблизи оси вращения к минимальной, когда бусинка на максимальном удалении от оси вращения,  $(M/2 + m)/(M/2)$ .

## 10. КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. ВОЛНЫ

Частным, но очень важным видом вращательного движения вокруг неподвижной оси являются колебания физического маятника. **Физическим маятником** называется любое твердое тело, совершающее колебания относительно неподвижной точки или оси под действием возвращающих сил. Рассмотрим случай, когда возвращающей является **сила тяжести**. При устойчивом равновесии центр масс маятника лежит на одной вертикали с точкой подвеса ниже ее. При колебаниях прямая линия, соединяющая точку подвеса с центром масс, отклоняется на угол  $\varphi$  от вертикали (положения равновесия). Обозначая момент инерции маятника относительно оси вращения  $I$ , массу маятника  $m$ , расстояние от оси вращения до центра масс  $a$ , записываем уравнение вращательного движения

$$Id^2\varphi/dt^2 = -mg\sin\varphi. \quad (10.1)$$

Это нелинейное уравнение при малых углах отклонения, когда  $\sin\varphi \approx \varphi$ , превращается в линейное уравнение гармонических колебаний

$$Id^2\varphi/dt^2 = -mga\varphi. \quad (10.2)$$

Вводя обозначение

$$\omega^2 = mga/I, \quad (10.3)$$

получаем уравнение

$$d^2\varphi/dt^2 + \omega^2\varphi = 0 \quad (10.4)$$

и его решение

$$\varphi = A\sin\omega t + B\cos\omega t = C\sin(\omega t + \varphi_0). \quad (10.5)$$

Входящие сюда постоянные  $A$  и  $B$  или  $C$  и  $\varphi_0$  определяются из начальных условий.

Циклическая частота  $\omega$  связана с частотой  $v$  и периодом  $T$ :

$$T = 1/v = 2\pi/\omega = 2\pi[I/(mga)]^{1/2}. \quad (10.6)$$

В случае, если массу маятника можно считать сосредоточенной в центре масс, маятник называется математическим. Для математического маятника

$$I = ma^2 \quad (10.7)$$

$$T = 2\pi(a/g)^{1/2}. \quad (10.8)$$

Длина математического маятника, обозначенная здесь  $a$ , называется приведенной длиной физического маятника, если его период совпадает с периодом математического. Для приведенной длины из (10.6) получаем

$$I_{\text{пр}} = I/(ma). \quad (10.9)$$

Для определения периода малых колебаний физического маятника надо найти момент инерции относительно оси колебаний. Часто при этом пользуются формулой Гюйгенса—Штейнера, связывающей момент инерции относительно некоторой оси  $I$  с моментом инерции  $I_0$  относительно параллельной оси, проходящей через центр масс,

$$I = I_0 + ma^2. \quad (10.10)$$

Здесь  $a$  — расстояние между осями.

Если (10.10) подставить в (10.9), получим

$$I_{\text{пр}} = a + I_0/(ma). \quad (10.11)$$

Для решений задачи о колебаниях однородного стержня массой  $m$  и длиной  $l$ , подвешенного за конец, в формулу (10.6) надо подставлять  $I = ml^2/3$  и  $a = l/2$ . Если ось вращения отстоит от центра масс на  $x$  (№ 10.8), то, используя (10.10), получаем из (10.3)  $g/\omega^2 = x + l^2/(12x)$ . Экстремум этого выражения получаем, приравнивая нулю его производную по  $x$ . Находим  $x = l/(2\sqrt{3})$  и соответственно максимальная частота  $\omega^2 = g\sqrt{3}/l$ .

Если однородный стержень длиной  $2l$  скользит по гладкой вертикальной окружности радиусом  $R$  (рис. 10.1), то движение стержня будет таким, как будто он за концы подведен на невесомых стержнях длиной  $R$  к центру окружности (точке  $O$ ) (№ 10.39). Момент от реакций опор (или натяжения стержней) относительно точки  $O$  равен нулю. Остается только момент силы тяжести. При этом входящее в (10.3) и (10.6),

$$a = (R^2 - l^2)^{1/2}$$

$$\text{и } I = m(2l)^2/12 + m(R^2 - l^2) = m(R^2 - 2l^2/3).$$

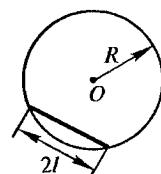


Рис. 10.1

Отсюда

$$T = 2\pi \sqrt{\left(R^2 - 2I^2/3\right)\left(g\sqrt{R^2 - I^2}\right)}.$$

При стремлении  $I \rightarrow 0$  период колебаний будет стремиться к периоду колебаний математического маятника с той же массой  $m$  и длиной  $R$ .

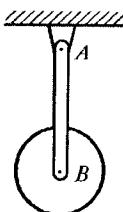


Рис. 10.2

Если на конце **стержня** длиной  $l$  и массой  $m$  прикреплен сплошной диск радиусом  $R$  и массой  $M$  (рис. 10.2), то момент инерции маятника состоит из момента инерции стержня (относительно конца  $ml^2/3$ ) и момента инерции массы  $M$  относительно точки  $A$ . При колебаниях в отсутствие трения на оси  $B$  не происходит вращения диска, и он движется лишь поступательно (№ 10.43). Поэтому движение ничем не отличается от того, которое было бы, если бы вся масса диска была сосредоточена в его центре масс. (Если бы диск был жестко закреплен на стержне, то в момент инерции маятника входил бы еще момент инерции диска относительно точки  $B$ :  $MR^2/2$ ).

Таким образом,

$$I = (m l^2/3) + Ml^2 = (3M+m)l^2/3.$$

Момент сил

$$(mgl/2 + Mgl)\varphi = [(2M + m)gl/2]\varphi$$

и

$$T = 2\pi \sqrt{(2/3)[(3M + m)/(2M + m)](l/g)}.$$

Для маятника в виде невесомого **стержня**, на котором **обруч** радиусом  $R$  закреплен на расстоянии от центра обруча до точки подвеса, равном  $2R$  (№ 10.42),  $a = 2R$ ,  $I = 5mR^2$ .

На концах невесомого стержня можно закрепить два одинаковых массивных шара радиусом  $r$ . Расстояние от оси колебаний до центра верхнего шара ( $b$ ), до общего центра масс ( $a$ ), между центрами шаров ( $x = 2a + 2b$ ) (рис. 10.3). Для периода колебаний такого маятника из (10.6) и (10.11) находим

$$T = 2\pi \sqrt{[(2/5)R^2 + (a + b)^2 + a^2]/(ga)}.$$

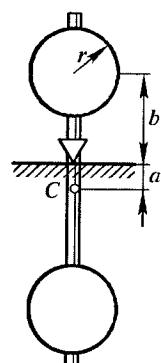


Рис. 10.3

Минимальное значение периода (№ 10.9) находим по правилам нахождения экстремума. Оно будет при  $a = \{(1/2)[(2/5)R^2 + b^2]\}^{1/2}$  и равно  $T = 2\pi(I_{\text{пп}}/g)^{1/2}$ , где приведенная длина  $I_{\text{пп}} = a + [(a + b)^2 + R^2]/a$ .

Очевидно, что при уменьшении  $a$  период колебаний растет до бесконечности. Это позволяет иметь компактные маятники с большими периодами, например, для изучения нелинейных колебаний, при которых период зависит от амплитуды. Так как изменение составляет проценты периода, то для использования обычных секундомеров надо иметь периоды порядка 10 с. Для математического маятника длина при этом порядка 24 м.

Обруч, подвешенный за точку на нем (№ 10.1), обладает моментом инерции при колебаниях в плоскости обруча

$$I_1 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2,$$

а в перпендикулярной к плоскости обруча

$$I_2 = mR^2/2 + mR^2 = (3/2)mR^2.$$

Из (10.6) следует  $T_1/T_2 = (I_1/I_2)^{1/2} = 2/\sqrt{3}$ .

Для диска, подвешенного за точку на его краю (№ 10.6), момент инерции при колебаниях в плоскости диска равен  $(3/2)mR^2$ . Из (10.9) приведенная длина равна  $(3/2)R$ .

Чтобы найти расстояние ( $x$ ) от центра диска, на котором нужно расположить ось, перпендикулярную к плоскости диска, для получения **минимального периода** колебаний, запишем период, используя (10.6) и (10.10),  $T = 2\pi[(R^2 + 2x^2)/(2gx)]^{1/2}$ .

Для обруча радиусом  $R$  и массой  $m$  с закрепленным в его центре шаром радиусом  $R/2$  и массой  $M = 2m$  (№ 10.38) момент инерции  $2mR^2 + (2/5)MR^2 + MR^2 = (21/5)mR^2$ . Момент сил  $(m + M)gR = 3mgR$ . Отсюда  $T = 2\pi[(7/5)R/g]^{1/2}$ .

В некоторых конструкциях важно разобраться, что определяет момент инерции, и что момент сил. Например, при колебании **колодезного ворота** (№ 10.32) момент инерции складывается из момента деревянного цилиндра и момента инерции тяжелой ручки. Причем момент горизонтальной части ручки можно считать равной весу этой части, умноженной на квадрат расстояния ее от оси колебаний. Момент сил будет равен моменту, создаваемому всей ручкой.

Колеса автомобиля не всегда хорошо сбалансированы. Предполагаем, что колесо можно считать обручем массой  $M$  и радиусом  $r$ . В некоторой точке обода имеется довесок, масса которого  $m \ll M$ . **Несбалансированность колеса** характеризуется периодом колебаний

колеса с довеском на оси колеса. Используя формулу (10.6) для данного физического маятника, имеем  $T = 2\pi[Mr^2/(mgr)]^{1/2}$ . Если автомобиль с таким колесом движется со скоростью  $v$ , то давление колеса на дорогу будет меняться (№ 10.49). Разница между максимальным и минимальным значениями давления определяется удвоенной центробежной силой, действующей на довесок. Относя эту разницу к весу колеса, получаем  $2m(v/r)^2r/(Mg)$ . Подставляем сюда отношение  $m/r$  из приведенной выше формулы для периода колебания, который характеризует несбалансированность колеса и может быть изменен.

**Крестообразный маятник** Обербека представляет шкив, который практически без трения вращается на оси, со спицами прикрепленными к нему (взаимно перпендикулярными), на которых крепятся грузы. Момент инерции шкива со спицами можно найти, измеряя период колебания маятника при отсутствии одного (рис. 10.4) или трех грузов из четырех (№ 10.33). Зная массы грузов и их расстояние от оси, можем к измеренному при колебаниях (по периоду и положению центра масс) моменту инерции добавлять моменты инерции грузов и подсчитать таким образом момент инерции маятника.

Рассмотрим физические маятники, представляющие подвешенные пластиинки и кубики. Момент инерции квадратной пластиинки (со стороной  $a$  и массой  $m$ ) относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости пластиинки, равен  $ma^2/6$ . Такой же момент инерции относительно оси через центр масс для кубика. Для кубика момент инерции одинаков для любых направлений. Периоды колебаний маятников зависят от того, как подвешены пластиинки и кубики.

Например, для пластиинок (№ 10.3), подвешенных с помощью легких нитей двумя способами, как это изображено на рис. 10.5, периоды их малых колебаний в плоскости, совпадающей с плоскостью пластиинки, различны. Первая пластиинка представляет физический маятник, который совершает колебания относительно точки, в которой соединяются нити подвеса. Момент инерции плас-

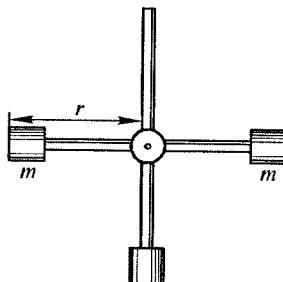


Рис. 10.4

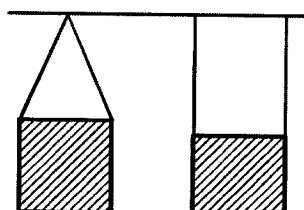


Рис. 10.5

тинки относительно точки подвеса  $I = I_0 + M(3a/2)^2$ , где  $I_0$  — момент инерции относительно центра масс пластиинки.

Для периода колебаний этой пластиинки получаем

$$T_1 = 2\pi\sqrt{I/(2Mg \cdot 3a/2)} = 2\pi\sqrt{29/(18g)}.$$

Вторая пластиинка совершает колебания без вращения. Каждая ее точка является как бы математическим маятником (рис. 10.6) со своей точкой подвеса, но одинаковыми длинами подвеса, в том числе центр масс (ц. м.). В таком случае период  $T_2 = 2\pi\sqrt{a/g}$ . Отношение периодов  $T_1/T_2 = \sqrt{29/18}$ .

В похожей задаче с подвешенными кубиками (№ 10.4) массой  $m$  с ребрами длиной  $a$  надо воспользоваться тем, что момент инерции кубика относительно любой оси, проходящей через центр масс, один и тот же. Расстояние от центра масс до оси колебаний (точки подвеса) в случае подвеса за вершину (рис. 10.7)  $\sqrt{3}a/2$ , а в случае подвески за ребро, так же как шарнирно за центр ребра (№ 10.73),  $\sqrt{2}a/2$ . При шарнирной подвеске за середину диагонали грани (№ 10.73) расстояние от центра масс до точки подвеса  $a/2$ .

Эти расстояния используются при вычислении моментов инерции и моментов сил в формулах (10.10) и (10.6).

При колебаниях пластиинки относительно оси, проходящей вдоль ребра, момент инерции аналогичен моменту стержня, длина которого равна длине другого ребра  $l$  (для прямоугольной пластиинки). Если ось вращения имеет наклон  $\alpha$  к вертикали (№ 10.48), то при вычислении момента сил получаем по (10.2)  $M = mg(l/2)\sin\alpha \cdot \phi$ . Период колебаний  $T = 2\pi[2l/(3gsin\alpha)]^{1/2}$ .

Для пластиинки в виде равностороннего треугольника момент инерции относительно оси, совпадающей со стороной, равен  $m h^2/6$ . Период малых колебаний относительно горизонтальной оси (№ 10.37) получаем  $T = 2\pi[h/(2g)]^{1/2}$ .

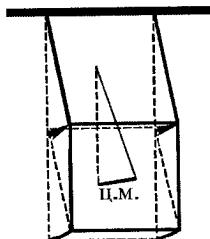


Рис. 10.6

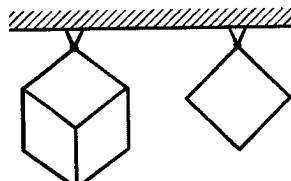


Рис. 10.7

Чтобы рассмотреть малые колебания конуса, надо вспомнить, что момент инерции конуса относительно оси, проходящей перпендикулярно оси симметрии через вершину (см. разд. 9, стр. 192), равен

$$I_1 = (3/20)mR^2 + (3/5)mL^2.$$

Здесь  $R$  — радиус основания, а  $L$  — высота. При равенстве радиуса высоте (№ 10.52)  $I_1 = (3/4)mR^2$ . Центр масс конуса находится на  $3/4$  высоты от вершины. Используя (10.10), получаем для момента инерции относительно центра масс  $I_0 = (3/16)mR^2$ . Момент инерции относительно оси через центр основания вычисляем по (10.10)  $I_2 = (1/4)mR^2$ . Оказывается, что период малых колебаний относительно этой оси равен периоду колебаний относительно оси через вершину.

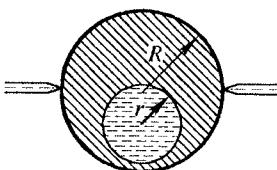


Рис. 10.8

Рассмотрим малые колебания **твёрдого шара** радиусом  $R$  и массой  $m$  (до образования полости) с **полостью**, заполненной **идеальной жидкостью** (рис. 10.8), плотность которой в шесть раз больше плотности шара, на оси, проходящей через его центр. Радиус полости  $r = R/2$  (масса, вынутая из неё  $m/8$ ), а ее центр находится на расстоянии  $l = 0,4R$  от оси колебаний на линии, перпендикулярной оси, проходящей через центр шара (№ 10.50). Эта задача интересна тем, что жидкость в полости не будет вращаться, как вращалась бы вынутая часть твёрдого шара. Учтем это при вычислении момента инерции и момента сил. Момент инерции равен

$$I = (2/5)mR^2 - (2/5)(m/8)r^2 - (m/8)l^2 + 6(m/8)l^2.$$

Момент возвращающих сил  $M = 5(m/8)gl$ . Из (10.6) получаем

$$T = 2\pi[(39/20)R/g]^{1/2}.$$

В поле тяжести возвращающий момент пропорционален углу ( $\phi$ ) отклонения маятника от положения равновесия. Момент, возникающий при изгибе упругой пластинки, пропорционален углу изгиба. На стержень массой  $m$  и длиной  $l$ , закрепленный с помощью пластиинки в поле тяжести (рис. 10.9), действуют и момент силы тяжести, и упругий момент (№ 10.5). Уравнение колебаний стержня в двух вариантах

$$Id^2\phi/dt^2 = -k\phi \pm mg(l/2)\phi.$$

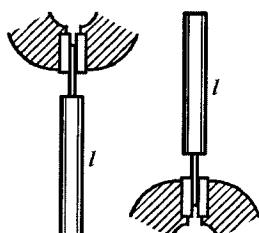


Рис. 10.9

Отношение периодов в рассматриваемых вариантах

$$T_1/T_2 = (2k - mgl)^{1/2}/(2k + mgl)^{1/2}.$$

Рассмотрим маятник на вращающемся валу (рис. 10.10). Созданием теории колебаний такого маятника занимались В. Фруд и Н.Е. Жуковский. Вращающийся вал трется о муфту, к которой прикреплен маятник. В результате на маятник действует момент сил  $M$ . Уравнение колебаний маятника (10.2) дополнено учетом затухания и момента от вала

$$Id^2\phi/dt^2 + bd\phi/dt + mgl\phi = M. \quad (10.12)$$

Здесь  $I$  и  $m$  — момент инерции и масса маятника;  $l$  — расстояние от центра масс маятника до оси колебаний;  $b$  — коэффициент затухания, связанный, например, с трением о воздух. Положение равновесия маятника смещается в сторону действия момента сил

$$\phi_0 = M/(mgl). \quad (10.13)$$

Трение между валом, вращающимся с угловой скоростью  $\Omega$ , и муфтой маятника, угловая скорость которого  $d\phi/dt$ , можно считать сухим, зависящим от относительной скорости вала и муфты:

$$\omega = \Omega - d\phi/dt. \quad (10.14)$$

Предполагаемая зависимость показана на рис. 10.11.

Важной особенностью является область уменьшения момента трения с увеличением относительной скорости. Рассмотрим колебания маятника, при которых  $|d\phi/dt| \ll \Omega$ . Разлагая момент сил трения в ряд Тейлора, получаем

$$M(\omega) = M(\Omega) - cd\phi/dt + \dots . \quad (10.15)$$

Вводя угол отклонения от положения равновесия

$$\psi = \phi - \phi_0, \quad (10.16)$$

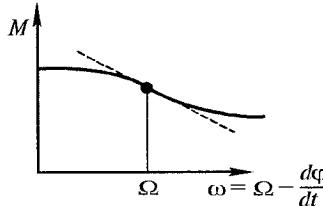


Рис. 10.11

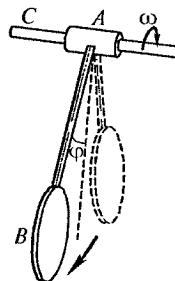


Рис. 10.10

получаем вместо (10.12)

$$Id^2\psi/dt^2 + (b + c)d\psi/dt + mgl\psi = 0. \quad (10.17)$$

Коэффициент затухания этих колебаний

$$\delta = (b + c)/2. \quad (10.18)$$

При  $c = dM/d\omega < 0$  затухание уменьшается, а если модуль  $c$  превышает  $b$ , то колебания будут возрастать. Это связано с тем, что момент силы трения совершает большую работу, пока маятник вращается в направлении вращения вала, чем когда он движется против вращения, когда относительная скорость больше (№ 10.61). Иногда это называют отрицательным трением. Важной особенностью зависимости момента сил трения от относительной скорости вала и муфты является нелинейность (уменьшение наклона), благодаря которой и возникают автоколебания при непериодическом воздействии. Частота колебаний равна собственной частоте колебаний маятника. Для начала колебаний нужен начальный толчок. Колебания будут регулярными при  $\delta = 0$ . Если трение о воздух малое ( $b \approx 0$ ), то это будет при отсутствии зависимости момента трения от относительной скорости. Чтобы направление момента трения не менялось, должно быть  $|d\phi/dt| < \Omega$  (№ 10.60).

Маятник превращается в более сложную колебательную систему, если к нему присоединить пружину. В простейшем случае горизонтально расположенная пружина жесткостью  $k$  прикреплена к центру тяжести **физического маятника**, имеющего момент инерции  $I$  и расстояние от точки подвеса до центра масс  $a$ , и к неподвижной стенке (рис. 10.12). Считая, что в положении равновесия маятника пружина не деформирована, найдем период малых колебаний системы (№ 10.11). Вместо (10.2) получаем

$$Id^2\phi/dt^2 = -mga\phi - ka^2\phi.$$

Отсюда  $T = 2\pi[I/(mga + ka^2)]^{1/2}$ .

Для маятника в виде **стержня** с моментом инерции  $I = ml^2/3$  и  $a = l/2$  (№ 10.13) получаем  $T = 2\pi[(3k/m) + 6g/l]^{-1/2}$ .

Для маятника в виде **стержня** длиной  $l$  и массой  $m$ , равновесие которого в **горизонтальном** положении обеспечивается с помощью вертикально расположенной пружины (рис. 10.13), действующей на конец стержня, условие равновесия дает для растяжения пру-

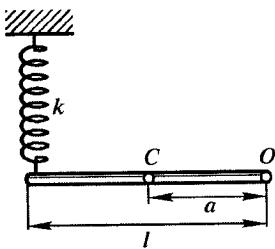


Рис. 10.13

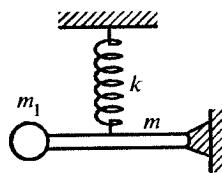


Рис. 10.14

жины при равновесии  $x_0 = mga/(kl)$ . Входящие в уравнение колебаний маятника  $Id^2\phi/dt^2 = M$  момент сил и момент инерции равны  $M = mga - k(x_0 + l\phi)l$  и  $I = ml^2/3$ . Поэтому для периода малых колебаний (№ 10.12) получаем  $T = 2\pi[I/(kl^2)]^{1/2}$ .

На рис. 10.14 показана аналогичная система. Пружина прикреплена к середине стержня, а на конец присоединена масса  $m_1$  (№ 10.14). Равновесие системы дает  $mgl/2 + m_1gl = kx_0l/2$ . Отсюда определяется растяжение пружины при равновесии  $x_0$ . Уравнение колебаний

$$[ml^2/3 + m_1l^2]d^2\phi/dt^2 = mgl/2 + m_1gl - kl^2\phi/4.$$

Рассмотрим несколько задач, в которых колебания возникают вследствие **удара** по системе. На рис. 10.15 показан стержень длиной  $l$  и массой  $M$ , который находится на гладкой (без трения) горизонтальной поверхности и может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов (№ 10.22). Некоторая точка стержня  $C$  (обозначим ее расстояние от оси вращения  $a$ ) соединена пружиной жесткостью  $k$  с неподвижной точкой поверхности так, что пружина в начальный момент перпендикулярна стержню. В незакрепленный конец стержня попадает и прилипает к нему шарик массой  $m$ , который имел скорость  $v$ , перпендикулярную стержню. Считаем, что за время удара пружина не успевает деформироваться. В таком случае сохраняется момент импульса относительно оси вращения  $mvl = (Ml^2/3 + ml^2)\omega_0$ . Возникающие колебания описываются уравнением  $(Ml^2/3 + ml^2)d^2\phi/dt^2 = -ka^2\phi$ . Используя общее решение  $\phi = Asin\omega t + Bcos\omega t$  и начальные условия  $\phi(0) = 0$ ,  $d\phi/dt = \omega_0$ , получаем для амплитуды колебаний стержня

$$A = \omega_0/\omega = mv[k(M + 3m)/3]^{-1/2}/a.$$

Амплитуда колебаний пружины  $Aa$ .

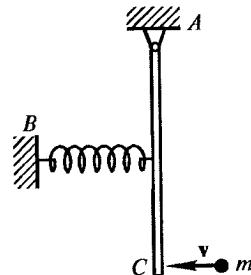


Рис. 10.15

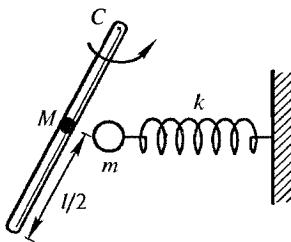


Рис. 10.16

Аналогично решается задача об **ударе** вращающегося на гладкой горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через точку *C*, стержня длиной *l* и массой *M* и слизания его с шариком массой *m* на пружине жесткости *k* (№ 10.23). На рис. 10.16 показана система. В момент удара стержень имеет угловую скорость  $\omega_0$  и перпендикулярен к направлению пружины, которая не деформирована, а шарик оказывается на середине стержня. Используем сохранение момента импульса относительно оси вращения при ударе для нахождения угловой скорости, определяющей колебания,

$$\omega_1 = (Ml^2/3)\omega_0/(Ml^2/3 + ml^2/4).$$

Уравнение колебаний системы

$$(Ml^2/3 + ml^2/4)d^2\phi/dt^2 = -kl^2\phi/4.$$

Другой вариант задачи: стержень неподвижен, а пружина с прикрепленным к ней шариком сжата на  $\Delta l$  и затем расправляется, **бьет по стержню**, шарик слизается со стержнем (№ 10.25). По условию в момент соприкосновения шарика со стержнем пружина не напряжена. Значит, для удара можно пользоваться сохранением момента импульса относительно оси вращения. Скорость шарика в момент удара находим из условия превращения упругой энергии пружины в кинетическую энергию шарика  $k(\Delta l)^2/2 = mv^2/2$ . Уравнение колебаний  $(Ml^2/3 + ml^2/4)d^2\phi/dt^2 = -kl^2\phi/4$ . При определении амплитуды колебаний шарика жесткость пружины в ответ не войдет.

Усложнение задачи может быть связано с заменой стержня на конструкцию из **соединенных стержней** (№ 10.24), как показано на рис. 10.17. Затруднение здесь может быть связано только с вычислением момента инерции системы

$$I = ml^2/3 + ml^2/12 + m(l^2 + l^2/4) + m2l^2 = (11/3)ml^2.$$

В случае **упрогоудара налетающего тела** на колебательную систему (№ 10.31) кроме закона сохранения момента импульса надо использовать закон сохранения упругой энергии. Для системы из двух скрепленных стержней и пружины, показанной на рис. 10.18, сохранение энергии  $mv^2/2 = I\omega^2/2 + mv_1^2/2$  и сохранение момента импульса  $ml = I\omega + mv_1l$ . Момент инерции системы

$$I = m4l^2/3 + m4l^2/12 + ml^2 = (8/3)ml^2.$$

Далее аналогично предыдущим задачам.

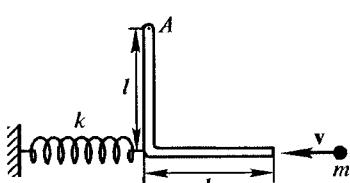


Рис. 10.17

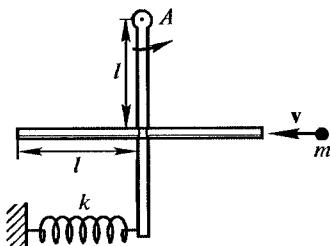


Рис. 10.18

Лежащий на гладкой горизонтальной поверхности стержень может быть прикреплен только к пружине (№ 10.30), как показано на рис. 10.19. Если по концу стержня, соединенному с пружиной, наносится удар, то возникают колебания стержня на поверхности. Пружина вызывает движение центра масс стержня и вращение стержня вокруг центра масс. При этом некоторая точка стержня будет оставаться на месте. Обозначим ее расстояние от конца стержня, где прикреплена пружина  $a$ . Деформация пружины  $x$  определяет силу, действующую на стержень. Смещение центра масс стержня  $x_{\text{ц}}$  описывается уравнением  $md^2x_{\text{ц}}/dt^2 = -kx$ , а вращение вокруг неподвижной точки уравнением  $Id^2\phi/dt^2 = -kx$ . Смещение центра масс стержня определяется соотношением  $x_{\text{ц}}/x = (a - l/2)/a$ , угол поворота при малых колебаниях  $\phi = x/a$ , момент инерции относительно оси вращения

$$I = ml^2/12 + m(a - l/2)^2.$$

Для определения  $a$  приравниваем частоты колебаний центра масс и угла поворота  $ka/[m(a - l/2)] = ka/[ml/12 + m(a - l/2)]$ . Отсюда  $a = (2/3)l$ . Период малых колебаний  $T = \pi(m/k)^{1/2}$ .

В колебательной системе со стержнем могут быть использованы две пружины (с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$ ). Один пример изображен на рис. 10.20. Момент инерции в этом случае  $I = ml^2/12$ . Момент сил  $M = -(k_1 + k_2)l^2\phi/4$ . Период малых колебаний этой системы (№ 10.15) равен  $T = 2\pi\{m/[3(k_1 + k_2)]\}^{1/2}$ .

Стержень можно просто подвесить на пружинах, не закрепляя его шарниром в центре. В случае одинаковых жесткостей (№ 10.20)

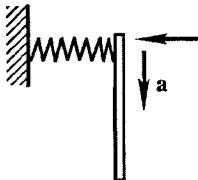


Рис. 10.19

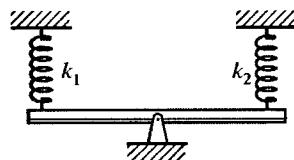


Рис. 10.20

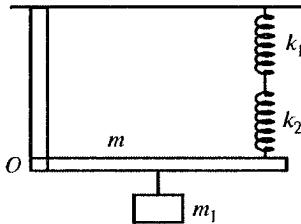


Рис. 10.21

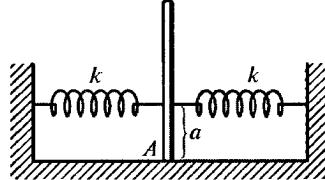


Рис. 10.22

возможны вращательные колебания вокруг центра масс стержня с периодом  $T = 2\pi\{m/(6k)\}^{1/2}$  и колебания с поступательным движением стержня с периодом  $T = 2\pi\{m/(2k)\}^{1/2}$ .

Другой пример с двумя пружинами, соединенными последовательно, представлен на рис. 10.21. Момент инерции системы, состоящей из стержня массой  $m$  и длиной  $l$ , который может вращаться вокруг горизонтальной оси  $O$ , присоединенного к середине стержня груза массой  $m_1$  и последовательно соединенных пружин с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$ , которые удерживают стержень в горизонтальном положении,

$$I = ml^2/3 + m_1l^2/4.$$

Момент сил

$$M = -k_0(x_0 + l\varphi)l + mg/l/2.$$

Здесь  $k_0 = k_1k_2/(k_1 + k_2)$  — жесткость соединенных последовательно пружин (см. разд. 5, стр. 109),  $x_0$  — суммарное растяжение пружин при равновесии, определяемое из условия  $M = 0$  при  $\varphi = 0$  и равное  $x_0 = mg/(2k)$ . Период малых колебаний  $T = \pi[(3m_1 + 4m)/(k_1 + k_2)]^{1/2}$  (№ 10.16).

В системе, показанной на рис. 10.22, момент силы тяжести выводит из равновесия, а момент сил натяжения пружин возвращает в

положение равновесия. Момент инерции системы  $I = ml^2/3$ . Момент сил при отклонении на угол  $\varphi$   $M = -2ka^2\varphi + mg\varphi$ . Чтобы возникли колебания, должно быть положительным выражение для  $\omega^2 = 6ka^2/(ml^2) - 3g/(2l)$ . Это дает условие для жесткости пружин  $k > mgl/(4a)$ . Период малых колебаний (№ 10.27)  $T = 2\pi/\omega$ .

Стержень можно закрепить на горизонтальной оси и с помощью двух пружин за концы, как показано на рис. 10.23, удерживать в вертикальном положении. Если в нижний конец стержня длиной  $l$  и массой  $m$  по-

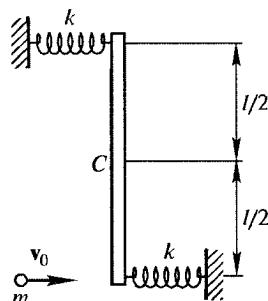


Рис. 10.23

падает и застревает в нем пуля массой  $m$ , двигавшаяся со скоростью  $v$ , то при не слишком больших скоростях пули возникают малые колебания стержня (№ 10.29). При ударе пружины не успевают сжаться и создать момент сил, поэтому сохраняется момент импульса системы (пуля, стержень) относительно оси подвеса стержня

$$mvl/2 = (I + ml^2/4)\omega.$$

Здесь  $I = ml^2/12$ . Отсюда  $\omega = 3v/(2l)$ . Для определения частоты колебаний можно написать уравнение вращения либо воспользоваться выражением для полной энергии системы. Чтобы определить амплитуду колебаний, т. е. максимальный угол отклонения стержня от положения равновесия, достаточно записать закон сохранения энергии — равенство начальной кинетической энергии потенциальной энергии поднятия пули и упругой энергии пружин:

$$(I + ml^2/4)\omega^2/2 = 2kx^2/2 + mg(l/2)(1 - \cos\phi).$$

Деформация пружины  $x = (l/2)\sin\phi \approx l\phi/2$ , а  $1 - \cos\phi \approx \phi^2/2$ .

В таком случае  $\phi = 3mv/[2l(kl + mg)]$ .

Если бы пуля попадала в верхний конец стержня, то потенциальная энергия пули при максимальном отклонении стержня уменьшалась.

На рис. 10.24 показана система из двух стержней одинаковой длины с массами  $m_1$  и  $m_2$ , лежащих на гладкой горизонтальной плоскости и соединенных пружиной жесткостью  $k$  (№ 10.28). Стержни могут вращаться относительно вертикальных осей. В положении равновесия стержни параллельны друг другу. Естественно, что пружина в равновесии не напряжена. При возникновении колебаний стержни поворачиваются в противоположные стороны. Если абсолютные значения углов отклонения обозначить  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , то колебания стержней будут описываться системой

$$(m_1l^2/3)d^2\phi_1/dt^2 = (m_2l^2/3)d^2\phi_2/dt^2 = -kl(\phi_1 + \phi_2).$$

Интегрируя первую часть системы, получаем  $m_1\phi_1 = m_2\phi_2$ . Подставляя это в уравнение колебаний, получаем период малых колебаний  $T = 2\pi\{m_1m_2/[3k(m_1 + m_2)]\}^{1/2}$ .

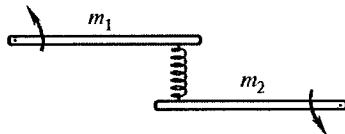


Рис. 10.24

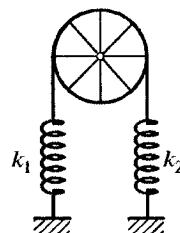


Рис. 10.25

Вместо стержня может быть использован блок. На рис. 10.25 показана колебательная конструкция из блока в виде колеса (масса обода  $M$ , масса всех спиц  $m$ ) и двух пружин с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$ , прикрепленных к невесомой нити, перекинутой через блок и не проскальзывающей по нему (№ 10.19). Момент инерции при вращательных колебаниях блока равен  $I = Mr^2 + mr^2/3$ . Пружины создают возвращающий момент  $-(k_1 + k_2)r^2\phi$ . Здесь  $\phi$  — угол поворота блока. Для периода малых колебаний получаем

$$T = 2\pi[(M + m/3)/(k_1 + k_2)]^{1/2}.$$

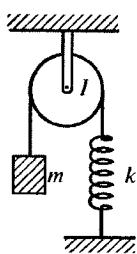


Рис. 10.26

Если одну из пружин заменить грузом, то кроме уравнения, описывающего вращение блока, надо написать уравнение поступательного движения груза. На рис. 10.26 показана система из блока радиусом  $r$  с моментом инерции  $I$ , груза массой  $m$  и пружины жесткостью  $k$  (№ 10.10). Растяжение пружины при равновесии  $x_0 = mg/k$ . Смещение груза от положения равновесия  $x$  связано с углом поворота блока  $\phi$  условием отсутствия проскальзывания невесомой нити по блоку  $x = \phi r$ . Обозначая силу натяжения нити  $F$ , получаем уравнение поступательного движения груза  $md^2x/dt^2 = mg - F$  и уравнение вращательного движения блока  $Id^2\phi/dt^2 = r[F - k(x + x_0)]$ . Исключая  $F$  и решая уравнение, получаем период малых колебаний системы.

Отметим, что в случае подобных или более сложных систем можно воспользоваться методом определения периода из **закона сохранения энергии**. В данном случае кинетическая энергия системы

$$mv^2/2 + I(v/r)^2/2 = (m + I/r^2)v^2/2.$$

Потенциальная энергия пружины возрастет, а груза уменьшится

$$k(x + x_0)^2/2 - kx_0^2/2 - mgx = kx^2/2.$$

Отношение коэффициентов при  $v^2$  и  $x^2$  определяет частоту и период колебаний.

Аналогичным способом можно рассмотреть и систему с **подвижным блоком**, изображенную на рис. 10.27. Так как блок подвижный, то удлинение пружины  $x$  в два раза больше снижения груза и блока. Соответственно

$$v = (1/2)dx/dt.$$

Поэтому кинетическая энергия системы

$$\begin{aligned} (1/2)(dx/dt)^2[(M + m)/4 + m/8] &= \\ &= (1/2)(dx/dt)^2(M/4 + 3m/8). \end{aligned}$$

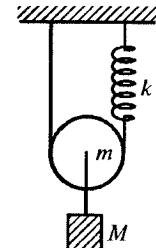


Рис. 10.27

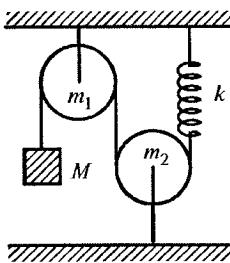


Рис. 10.28

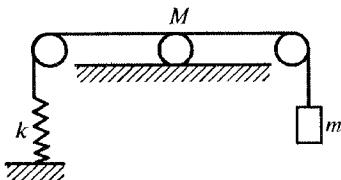


Рис. 10.29

Потенциальная энергия  $kx^2/2$ . Период малых колебаний (№ 10.17)  
 $T = \pi[(M + 3m/2)/k]^{1/2}$ .

Для двух неподвижных блоков (№ 10.18), изображенных на рис. 10.28, кинетическая энергия равна  $Mv^2/2 + (m_1 + m_2)v^2/4$ , а потенциальная  $kx^2/2$ . Откуда определяем период малых колебаний.

На рис. 10.29 показана колебательная система из сплошного цилиндра массой  $M$ , который может без проскальзывания кататься по горизонтальной поверхности под действием горизонтальной, невесомой, не проскальзывающей по цилиндру нити, перекинутой через два невесомых блока и присоединенной одним концом к вертикальной, невесомой пружине, а другим к грузу массой  $m$ , который может перемещаться по вертикальному направлению (№ 10.21). Обозначим перемещение груза относительно положения равновесия  $x$ . Уравнение движения груза по вертикали  $md^2x/dt^2 = mg - T_1$ . Сила, действующая на нить со стороны пружины, равна  $k(x_0 - x)$ . Из условия равновесия  $kx_0 = mg$ . Вращение цилиндра удобно рассмотреть относительно мгновенного центра вращения цилиндра на горизонтальной поверхности  $Id^2\phi/dt^2 = 2r[T - k(x + x_0)]$ . Момент инерции цилиндра относительно мгновенного центра вращения  $I = (3/2)Mr^2$ . Используя условия равновесия, отсутствия проскальзывания и связь смещения с поворотом ( $x = 2r\phi$ ), получаем

$$T = 2\pi[(3M/8 + m)/k]^{1/2}.$$

Энергетический метод (см. (5.5) и (5.6)) особенно помогает при рассмотрении сложных систем. Примером может служить задача (№ 10.26) о колебаниях гайки на абсолютно гладкой винтовой шпильке с диаметром  $d$  и шагом резьбы  $h$ . Гайка (цилиндрическая с массой  $M$  и внешним диаметром  $D$ ) зажата с торцов спиральными пружинами с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 10.30). При вращении гайки

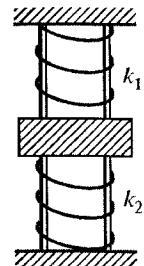


Рис. 10.30

концы пружин свободно проскальзывают по торцам гайки. Равновесие гайки на шпильке определяется соотношением  $Mg = k_2x_{20} - k_1x_{10}$ . Смещение гайки из положения равновесия  $x$  (например, для определенности вверх) связано с углом поворота гайки  $\phi$  соотношением  $x = h\phi/(2\pi)$ . Соответственно скорость смещения связана с угловой скоростью вращения гайки  $v = h\omega/(2\pi)$ . Момент инерции гайки определяем интегрированием  $I = M(D^2 + d^2)/8$ . Кинетическая энергия подъема и вращения гайки  $Mv^2/2 + I4\pi v^2/(2h^2)$ . Потенциальная энергия пружин и подъема гайки определяется выражением

$$k_1(x_{10} + x)^2/2 + k_2(x_{20} - x)^2/2 - k_1x_{10}^2/2 - k_2x_{20}^2/2 + Mgx = \\ = k_1x^2/2 + k_2x^2/2.$$

Отсюда период малых колебаний гайки

$$T = 2\pi\{M[2h^2 + \pi^2(D^2 + d^2)]/[2(k_1 + k_2)]\}^{1/2}/h.$$

Задачу можно решать и с помощью уравнений движения гайки. Главное не забыть, что на гайку со стороны шпильки по нормали к резьбе действует сила. Обозначим ее  $F$ . Тогда движение гайки по вертикали описывается уравнением

$$Md^2x/dt^2 = -k_2(x_{20} + x) - k_1(x_{10} - x) - Mg - F\cos\alpha = \\ = -(k_2 + k_1)x - F\cos\alpha.$$

Здесь  $\alpha$  определяется из соотношения  $\operatorname{tg}\alpha = h/(\pi d)$ .

Вращение гайки описывается уравнением  $Id^2\phi/dt^2 = rFs\sin\alpha$ .

Обращаем внимание, что  $F$  всегда направлено против направления смещения, а угол поворота связан с направлением резьбы на гайке и шпильке. Исключая  $F$ , получаем уравнение колебаний.

Энергетический метод позволяет решать задачи, в которых затруднительно написать динамические уравнения. Рассмотрим несколько задач.

На рис. 10.31 показана система из двух сваренных в нижней точке обрущей одинаковой массы, но в два раза отличающихся радиусов

(№ 10.40). Период малых колебаний на горизонтальном столе определяем из закона сохранения энергии. Предполагается отсутствие проскальзывания системы по столу, и, следовательно, сила трения работы не совершает. Обозначим угол поворота системы  $\phi$ , а скорость поворота  $\omega$ . Скорость центра масс большого обруча  $2\omega r$ , а малого  $\omega r$ . Так как массы одинаковы, то момент инерции большего

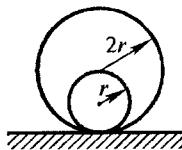


Рис. 10.31

обруча  $m(2r)^2$ , а меньшего  $mr^2$ . Кинетическая энергия системы  $m(2r)^2\omega^2/2 + m(2\omega r)^2/2 + mr^2\omega^2/2 + m(\omega r)^2/2 = 10mr^2\omega^2/2$ . Потенциальная энергия определяется поднятием центра масс малого обруча  $mgr(1 - \cos\varphi) \approx mg\varphi^2/2$ . Период малых колебаний равен  $T = 2\pi(10r/g)^{1/2}$ .

Более громоздкой является задача о малых колебаниях на горизонтальной поверхности **сплошного цилиндра** радиусом  $R$ , в котором сделана цилиндрическая полость радиусом  $R/2$  (№ 10.41), как показано на рис. 10.32. Обычно такую систему представляют в виде цилиндра без полости и цилиндра с отрицательной плотностью. Масса цилиндра без полости (здесь и далее на единицу длины) равна  $\rho\pi R^2$ , а момент инерции  $\rho\pi R^4/2$ .

Масса цилиндра с отрицательной плотностью ( $-\rho\pi R^2/4$ ), а момент инерции ( $-\rho\pi R^4/32$ ). Угловые скорости вращения цилиндров одинаковые ( $\omega$ ). Скорость центра масс цилиндра без полости равна  $\omega R$ , а цилиндра с отрицательной массой  $3\omega R/2$ . Кинетическая энергия системы равна

$$\rho\pi R^4\omega^2 (1/4 + 1/2 - 1/64 - 9/32) = \rho\pi R^4\omega^2 29/64.$$

Увеличение потенциальной энергии при повороте на угол  $\varphi$  равно  $\rho\pi R^3 g(1 - \cos\varphi) \approx \rho\pi R^3 g\varphi^2/2$ . Отсюда период малых колебаний

$$T = \pi(29R/g)^{1/2}.$$

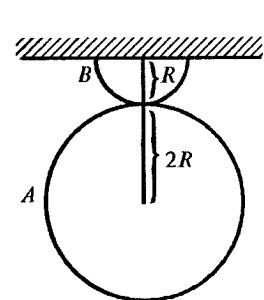


Рис. 10.33

Аналогичным способом можно решить и задачу (рис. 10.33), когда диск массой  $M$  и радиусом  $2R$  может кататься без проскальзывания по неподвижному цилинду радиусом  $R$  с помощью стержня массой  $m$ , соединяющего центры цилиндра и диска (№ 10.47). Отсутствие проскальзывания между диском и цилиндром приводит к тому, что при отклонении стержня на угол  $\varphi$  диск относительно вертикального направления поворачивается на этот угол плюс поворот на  $\varphi/2$  относительно стержня за счет подкручивания диска цилиндром. Таким образом, диск поворачивается на  $3\varphi/2$ . Потенциальная энергия при отклонении стержня и диска

$$\begin{aligned} \Pi &= (3/2)Rmg(1 - \cos\varphi) + 3RMg(1 - \cos\varphi) = \\ &= (3/2)Rg\varphi^2(M + m/2). \end{aligned}$$

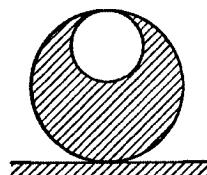


Рис. 10.32

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии вращения стержня, кинетической энергии движения центра масс диска и его вращения относительно центра:

$$K = m(3R)^2\omega^2/6 + M(3R\omega)^2/2 + M(2R)^2(3\omega/2)^2/4 = \\ = (3/2)mR^2\omega^2 + (27/4)MR^2\omega^2.$$

Отсюда период малых колебаний

$$T = 2\pi[(R/g)(2m + 9M)/(m + 2M)]^{1/2}.$$

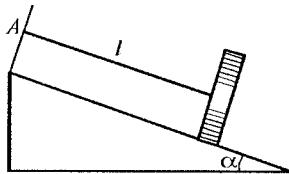


Рис. 10.34

Изменение потенциальной энергии может быть связано с движением диска массой  $m$  и радиусом  $r$  на наклонной плоскости, как это показано на рис. 10.34. Диск привязан таким образом, что по наклонной плоскости он катается по дуге окружности радиусом  $l$  (№ 10.46). При отклонении от положения равновесия на угол  $\phi$  потенциальная энергия диска увеличивается на  $mgl(\phi^2/2)\sin\alpha$ . Отсутствие проскальзываия дает связь угловой скорости вращения диска  $\omega$  и скорости изменения угла отклонения по наклонной плоскости  $r\omega = ld\phi/dt$ .

Кинетическая энергия диска

$$ml^2(d\phi/dt)^2/2 + mr^2\omega^2/4 = (3/4)ml^2(d\phi/dt)^2.$$

Отсюда период малых колебаний  $T = 2\pi[3l/(2gsin\alpha)]^{1/2}$ .

Конструкция из двух обручей каждый радиусом  $r$  и массой  $m$ , сваренных в верхней точке так, что плоскости обручей составляют угол  $2\alpha$ , может совершать малые колебания (№ 10.51). Проекция обруча на плоскость колебаний представляет эллипс. Поэтому можно рассмотреть колебания эллипса на горизонтальной плоскости. Если колебания малые, то дугу эллипса можно заменить дугой окружности. Радиус этой окружности равен радиусу кривизны эллипса  $R$ . На рис. 10.35 показан эллипс. Большая полуось  $OA = r$ , малая полуось  $OB = r \cos \alpha$ . Радиус кривизны эллипса в точке  $B$  равен  $R = r/(\cos \alpha)$  (см. (1.31)). При повороте эллипса относительно точки  $O_1$  на угол  $\phi$  центр масс

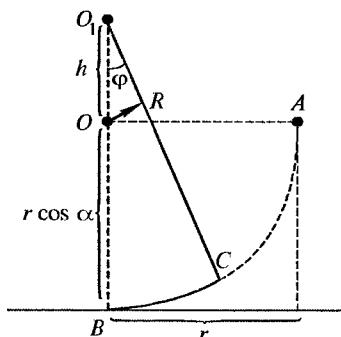


Рис. 10.35

эллипса поднимается на высоту  $h(1 - \cos\phi) \approx h\phi^2/2 = r\sin^2\alpha/\cos\alpha(\phi^2/2)$ . Умножая это на  $mg$ , получаем потенциальную энергию. Для получения кинетической энергии вычислим момент инерции эллипса. На рис. 10.36 окружность радиусом  $r$  и массой  $m$  имеет главные моменты инерции  $I_x = mr^2$ ,  $I_y = I_z = mr^2/2$ . Момент инерции относительно оси, составляющей с главными углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , равен  $I = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma$  (см. (9.8)). Для случая, изображенного на рисунке,  $I = mr^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha/2)$ . Если угловая скорость вращения эллипса равна  $\omega(R - h) = \omega r \cos\alpha$ . Для кинетической энергии получаем  $mr^2\omega^2(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha/2)/2$ . Отсюда получаем период малых колебаний.

Если ось цилиндра радиусом  $r$ , массой  $m$  и с моментом инерции  $I$ , находящегося на горизонтальной поверхности, с помощью двух горизонтальных пружин прикреплен к стенке (рис. 10.37), то возможны колебания цилиндра. Считаем, что пружины работают одинаково на растяжение и сжатие, а цилиндр катается без проскальзывания (№ 10.34). Обозначая скорость оси цилиндра  $v$  и жесткость пружин  $k$ , для суммы кинетической и потенциальной энергий системы получаем  $(v/r)^2/2 + mr^2/2 + 2kx^2/2 = E$ . Отсюда находим период колебаний  $T = 2\pi[(I + mr^2)/(2k)]^{1/2}/r$ . Отметим, что в данном случае легко написать и уравнения движения. Для поступательного движения оси цилиндра в горизонтальном направлении  $md^2x/dt^2 = F_{\text{тр}} - 2kx$ . Для вращательного движения цилиндра  $Id^2\phi/dt^2 = -F_{\text{тр}}r$ . Исключая силу трения и используя отсутствие проскальзывания, получаем тот же результат. Видно, что энергетический метод позволяет получить результат быстрее.

В случае двух одинаковых цилиндров, связанных пружинами, картина колебаний симметрична, и решение может быть получено из предыдущей задачи.

Однако, если цилиндры отличаются моментом инерции либо массой, то решения усложняются. Рассмотрим случай двух цилинд-

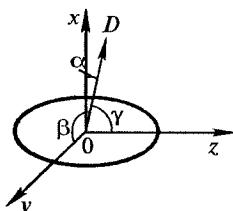


Рис. 10.36

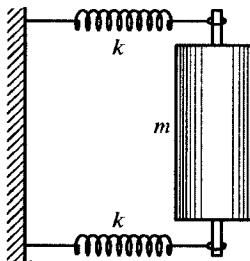


Рис. 10.37

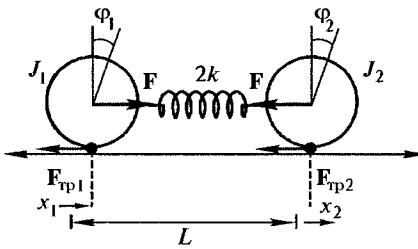


Рис. 10.38

ров с одинаковой массой и радиусами, но отличающихся моментами инерции из-за неодинакового распределения плотности материала:  $I_1 = mr^2/2$  и  $I_2 = mr^2/4$ . В начальный момент времени пружины, имеющие длину без нагрузки  $L$ , растянуты на  $l$ , а цилиндры неподвижны (№ 10.35). В этой задаче решение проще, если воспользоваться уравнениями движения. Координаты центров цилиндров на горизонтальной оси координат (рис. 10.38) определяем отклонениями  $x_1$  и  $x_2$  от положений цилиндров, когда пружины не напряжены. Соответствующие повороты  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Силы трения  $F_{tp1}$  и  $F_{tp2}$ . Со стороны пружин действует сила  $F = 2k(x_2 - x_1)$ . Движения цилиндров определяются уравнениями

$$md^2x_1/dt^2 = F - F_{tp1} \text{ и } md^2x_2/dt^2 = -F - F_{tp2}.$$

Используя отсутствие проскальзывания и уравнения вращения, получаем

$$(I_2 + mr^2)d^2x_2/dt^2 = -(I_1 + mr^2)d^2x_1/dt^2.$$

Интегрируем и используем, что в начальный момент поступательные скорости цилиндров равны нулю:

$$(I_2 + mr^2)dx_2/dt = -(I_1 + mr^2)dx_1/dt.$$

Еще раз интегрируем, и для определенности считаем  $x_1(0) = 0$  и  $x_2(0) = l$ . Тогда

$$(I_2 + mr^2)(x_2 - l) = -(I_1 + mr^2)x_1. \quad (10.19)$$

Подставляем это в уравнение колебаний

$$(I_2/r^2 + m)d^2x_2/dt^2 = -2k(x_2 - x_1). \quad (10.20)$$

Получаем

$$\begin{aligned} & (I_2/r^2 + m)d^2x_2/dt^2 = \\ & = -2k[1 + (I_2 + mr^2)/(I_1 + mr^2)]x_2 + 2k(I_2 + mr^2)l/(I_1 + mr^2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$T = 2\pi \{(I_2/r^2 + m)[1/(2k)]/[1 + (I_2 + mr^2)/(I_1 + mr^2)]\}^{1/2} = \\ = \pi[(15/11)(m/k)]^{1/2}.$$

Для заданных моментов инерции из полученных соотношений и начального условия следует

$$x_2 = (5/11)l + (6/11)l \cos \omega t, x_1 = (5/11)l - (5/11)l \cos \omega t.$$

Движение центра масс определяется соотношением

$$x_u = (x_1 + x_2)/2 = (5/11)l + (1/22)l \cos \omega t.$$

Отсюда амплитуда колебаний центра масс системы равна  $(1/22)l$ . Движение центра масс системы происходит под действием сил трения.

Если цилиндры имеют одинаковые моменты инерции  $I_1 = I_2 = mr^2/2$ , но разные массы  $m_1 = m$ , а  $m_2 = 2m$  (№ 10.36), то вместо (10.19) получаем  $(I_2 + 2mr^2)(x_2 - l) = -(I_1 + mr^2)x_1$ , а вместо (10.20)

$$(I_2/r^2 + 2m)d^2x_2/dt^2 = -2k(x_2 - l).$$

Для периода малых колебаний получаем

$$T = 2\pi \{(I_2/r^2 + 2m)[1/(2k)]/[1 + (I_2 + 2mr^2)/(I_1 + mr^2)]\}^{1/2} = \\ = 2\pi[(15/32)(m/k)]^{1/2}.$$

Для заданных моментов инерции и масс из полученных соотношений и начального условия следует

$$x_2 = (5/8)l + (3/8)l \cos \omega t, x_1 = (5/8)l - (5/8)l \cos \omega t.$$

Движение центра масс определяется соотношением

$$x_u = (x_1 + 2x_2)/3 = (15/24)l + (1/24)l \cos \omega t.$$

Отсюда амплитуда колебаний центра масс системы равна  $(1/24)l$ . Движение центра масс системы, как и в предыдущей задаче, происходит под действием сил трения.

Особый тип колебаний возникает в случае подвеса тел на нескольких нитях из разных точек подвеса (двух — бифилярных, трех — трифилярных и так далее). Возвращающей силой при таких колебаниях является сила тяжести.

На рис. 10.39 показан стержень длиной  $2a$ , симметрично подвешенный на двух вертикальных нитях длиной  $l$ , расстояние между которыми  $2b$  (№ 10.45). При закручивании стержня относитель-

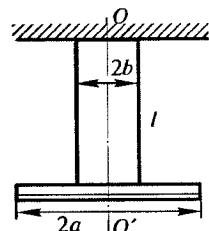


Рис. 10.39

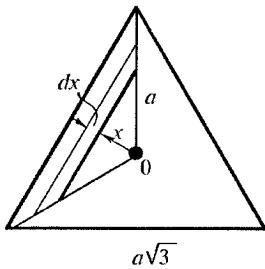


Рис. 10.40

Подставляя момент инерции стержня, получаем для периода малых колебаний

$$T = 2\pi(a/b)[l/(3g)]^{1/2}.$$

В случае, если нити прикреплены к концам стержня (№ 10.44), результат получаем из этой формулы при  $a = b$ . Проводя аналогичные вычисления для квадратной плиты, подвешенной на четырех нитях (№ 10.54), получим результат, который возможно очевиден из решения для стержня. Для равносторонней треугольной пластинки на трех нитях (№ 10.58) расчеты немного сложнее. Обозначим плотность пластинки на единицу площади  $\rho$ , а расстояние вершин треугольника от оси вращения  $a$ . На рис. 10.40 представлен треугольник, в котором выделен элемент, используемый при интегрировании. Масса треугольника равна

$$m = \int_0^a dm = 2\sqrt{3}\rho \int_0^{a/2} x dx = 3\sqrt{3}\rho a^2/4.$$

Момент инерции треугольника относительно оси, проходящей через центр масс,

$$I = 3(2\sqrt{3})\rho 2 \int_0^{a/2} x^3 dx = 3\sqrt{3}\rho a^4/16.$$

При повороте треугольника на малый угол  $\phi$  он поднимается на высоту  $h = a^2\phi^2/(2l)$ . Используя выражения для кинетической (вращательной) и потенциальной энергии при подъеме в поле тяжести, получаем для периода малых колебаний системы  $T = \pi(l/g)^{1/2}$ .

Рассмотрим теперь **крутильные колебания**. Возвращающий момент при повороте крутильного маятника относительно вертикальной оси на угол  $\phi$  пропорционален модулю кручения  $k$  и углу поворота  $\phi$

$$Id^2\phi/dt^2 = -k\phi. \quad (10.21)$$

В случае переменного модуля кручения, например, для диска, подвешенного на соединенных последовательно двух стержнях (№ 10.53), необходимо учесть, что угол закручивания диска  $\phi$  равен сумме закручиваний каждого стержня  $\phi = \phi_1 + \phi_2$  и возвращающий момент постоянен вдоль стержней, если можно пренебречь моментами инерции стержней,  $k_1\phi_1 = k_2\phi_2 = k(\phi_1 + \phi_2)$ . Отсюда для модулей кручения стержней и их соединения следует  $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$ . Периоды колебаний диска на каждом стержне и на их соединении поэтому связаны соотношением  $T^2 = T_1^2 + T_2^2$ .

Возможен случай крепления кривошильного маятника не к неподвижной опоре, а, например, к другому диску. В карманных часах ось маятника может проходить через их центр. Если такие часы положить на горизонтальный абсолютно гладкий стол, то период колебания маятника изменится (№ 10.55), и следовательно, изменится их ход (показания).

Обозначим момент инерции корпуса часов  $I_0$ , а момента инерции маятника  $I$  (по условию в 500 раз меньше). Углы поворота корпуса часов  $\phi_1$  и маятника  $\phi_2$  (рис. 10.41) отсчитываем от их положения в момент неизнапряженной пружины (равновесия) часов в разные стороны (чтобы иметь положительные значения).

Тогда корпус и маятник, вращаясь в разных направлениях, закручивают пружину на угол  $\phi_1 + \phi_2$  и момент, действующий на корпус и маятник (одинаковый из-за отсутствия внешних моментов), равен  $\alpha(\phi_1 + \phi_2)$ . Здесь  $\alpha$  — жесткость пружины на скручивание. Уравнение движения корпуса:  $I_0\ddot{\phi}_1 = -\alpha(\phi_1 + \phi_2)$ , маятника:  $I\ddot{\phi}_2 = -\alpha(\phi_1 + \phi_2)$ . Умножая первое на  $I$ , а второе на  $I_0$  и складывая, получаем  $I_0(\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2) + \alpha(I + I_0)(\phi_1 + \phi_2) = 0$ . Частота колебания суммы углов  $\sqrt{\alpha(I + I_0)/(I_0)}$ . Для неподвижного корпуса часов  $T_0 = 2\pi\sqrt{I/\alpha}$ . В случае скольжения корпуса часов по гладкому столу

$$T = T_0\sqrt{I_0/(I_0 + I)}. \quad (10.22)$$

Для частного случая

$$T \approx T_0[1 - I/(2I_0)] = T_0(1 - 0,001)(T_0 - T)/T_0 = 0,001 = 0,1\%.$$

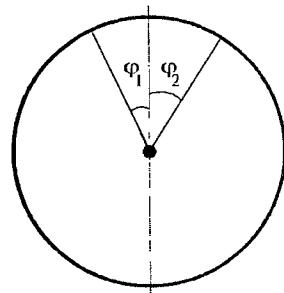


Рис. 10.41

Решение можно получить и находя соотношение между углами поворота  $\phi_1$  и  $\phi_2$  из закона сохранения момента импульса  $I_0\phi_1$  и  $I\phi_2$  и подставляя в любое из уравнений движения.

Формула (10.22) описывает также колебания крутильного маятника на скамье Жуковского (№ 10.56) и колебания ротора и компрессора в воздушно-реактивном двигателе (№ 10.57).

**Вынужденные колебания** колебательных систем из твердых тел и пружин рассматриваем так же, как ранее для маятников.

На рис. 10.42 показана колебательная система. Горизонтально подвешенный невесомый стержень длины  $a$ , на котором на некотором расстоянии (обозначим его  $\beta a$ ) закреплена масса  $m$ , поддерживается последовательно соединенными невесомыми пружинами с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$  (№ 10.59). К концу стержня приложена гармоническая сила  $F_0 \cos \omega t$ . Уравнение вынужденных колебаний

$$\begin{aligned} I d^2\phi/dt^2 &= -ka\phi + mg\beta a + F_0 \cos \omega t = \\ &= -ka(\phi - mg\beta/k) + F_0 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Здесь  $I = m(\beta a)^2$ , а суммарный коэффициент жесткости (см. разд. 5, стр. 109)

$$k = k_1 k_2 / (k_1 + k_2).$$

Собственная частота колебаний системы при отсутствии вынуждающей силы равна  $\omega_0 = (ka/I)^{1/2}$ . Частное решение уравнения ищем в виде  $\phi = mg\beta/k + A \cos \omega t$ . Откуда

$$A = (F/I)/(ka/I - \omega^2).$$

Для случая, когда частота вынуждающей силы вдвое меньше собственной частоты, получаем

$$A = (4/3)F(1/k_1 + 1/k_2).$$

При рассмотрении колебательных систем предполагалось, что изменения напряжений или деформаций распространяются по сис-

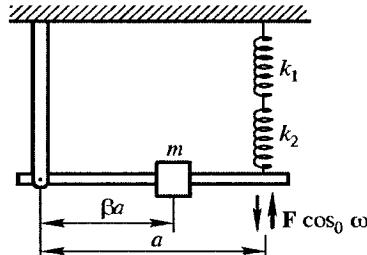


Рис. 10.42

теме мгновенно. В действительности возмущения (изменения) передаются с конечной скоростью. По частям системы или по совокупности систем распространяется волна.

В общем волной называют распространение по пространству какого-то возмущения, например, изменения массовой скорости (скорости частиц), давления (напряжения), плотности или другой характеристики состояния среды, находящейся в этом пространстве. Так, повышение давления в воздухе в одном месте передается соседним областям: по воздуху распространяется звуковая либо ударная (взрывная) волна. Скоростью волны называют скорость, с которой распространяется возмущение. Она, как правило, значительно превосходит скорость смещения частиц среды, которые увлекаются волной (массовую скорость).

Для различных возмущений возможно общее единое описание процесса распространения волн. Наиболее простым оно является для так называемых слабых волн, когда величины возмущений, переносимых волной, малы по сравнению с соответствующими характеристиками состояния среды. Например, волна сжатия, распространяющаяся в воздухе или в воде, является слабой, если изменение давления в волне значительно меньше модуля объемного сжатия (обратной величины объемной сжимаемости). Такая волна называется звуковой. Далее будут рассматриваться только слабые волны. Ограничимся также одномерным, плоским случаем. При этом величина возмущения в волне будет зависеть от двух переменных: пространственной координаты  $x$  и времени  $t$ .

На рис. 10.43 показано распространение волны (возмущения) по одномерной цепочке частиц (масс), связанных пружинами. Первоначально все частицы неподвижны и находятся на оси  $x$ . По оси

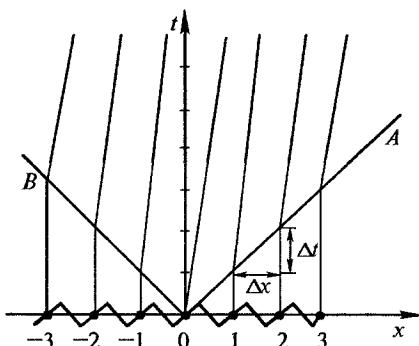


Рис. 10.43

ординат отложено время. Если в результате некоторого воздействия частица, находившаяся в точке  $x = 0$ , начнет смещаться со скоростью  $u$ , то соседние частицы, связанные с ней пружинами, начнут смещаться только через некоторое время  $\Delta t$ . Расстояние между частицами  $\Delta x$  и это время определяют скорость распространения возмущений, т. е. скорость волны  $c = \Delta x / \Delta t$ . В положительном направлении оси  $x$  идет волна сжатия (линия  $OA$ ), в отрицательном — волна растяжения (линия  $OB$ ). Для слабых, линейных возмущений скорости волны и частиц постоянны. Сплошными линиями показаны движения частиц: до прихода фронта волны ( $OA$  или  $OB$ ) они стоят, а затем двигаются со скоростью  $u$ .

Получим уравнение распространения волны по натянутой струне.

Основное свойство струны — гибкость, является следствием ее большой длины по сравнению с поперечными размерами. Даже жесткие материалы, имея форму струны (нити), практически не сопротивляются изгибу, если размер изгибающего участка значительно больше поперечного размера струны. Это позволит в дальнейшем при рассмотрении струны не учитывать изгибные напряжения.

Горизонтально расположенная струна с закрепленными концами провисает в поле тяжести, если она плохо натянута. При увеличении натяжения струна вытягивается практически в прямую линию. Сила натяжения при этом значительно превосходит силу веса струны. Поэтому для прямой натянутой струны в дальнейшем силами тяжести будем пренебрегать.

Движение элементов струны может быть вызвано изменением ее формы или передачей ей импульса (как-то распределенного по ее длине) в начальный момент, либо продолжительным воздействием в некоторой точке струны. Первое называется начальным, а второе граничным условием. Натяжение струны стремится вернуть струну в начальное, прямолинейное положение, и это приводит к тому, что возникает движение элементов струны (по струне бегут возмущения).

Здесь будут рассмотрены такие движения струны, происходящие в одной плоскости (**поляризованные**), при которых смещение любого ее элемента от начального положения равновесия (прямой линии) мало по сравнению с расстояниями между ближайшими к нему несмещеными в данный момент элементами. Отсюда следует, что малы также повороты элементов струны относительно начального равновесного положения, т. е. в любой точке струны касательная к ее контуру составляет малый угол с линией начального равновесного положения струны.

На рис. 10.44 показан участок струны в области возмущения.

Система координат выбрана таким образом, что ось  $x$  совпадает с начальным равновесным положением струны, а ось  $y$  — перпендикулярна оси  $x$  и лежит в плоскости смещения элементов струны. Для удобства изображения на рисунке масштаб по оси  $y$  значительно больше, чем по оси  $x$ .

При малых смещениях элементов струны можно считать, что у них меняется только координата  $y$ , а координата  $x$  — постоянна. Величина смещения элемента по оси  $y$  является функцией двух переменных: координаты элемента струны  $x$  и времени  $t$ . По смещению можно найти скорость движения элемента

$$u(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (10.23)$$

Такое обозначение дифференциалов означает, что дифференцирование производится только по времени при постоянном  $x$ . Такая производная называется частной. Ускорение элемента  $A(x, t)$  определяется второй производной

$$A(x, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (10.24)$$

Ускорение элемента струны связано с его массой и силой на него действующей.

Струну считаем однородной и будем характеризовать погонной плотностью  $\rho_L$ , которая с плотностью материала струны  $\rho$  и площадью поперечного сечения струны  $S$  связана следующим образом

$$\rho_L = \rho S. \quad (10.25)$$

Масса элемента струны от  $x$  до  $x + dx$  равна  $\rho_L dx$ .

На концы элемента действуют силы натяжения струны  $F$ , имеющие одинаковую величину по всей струне, но немного разное направление. Как отмечалось выше, другими силами можно пренебречь. Обозначая угол наклона сил натяжения к оси  $x$   $\alpha(x)$  и учитывая его малость, для проекции сил натяжения струны на ось  $y$  получаем

$$F \sin [\alpha(x + dx)] - F \sin [\alpha(x)] \equiv F \operatorname{tg} [\alpha(x + dx)] - F \operatorname{tg} [\alpha(x)].$$

Тангенсы углов можно вычислить как наклоны касательных к контуру струны в данный момент времени, т. е. при постоянном

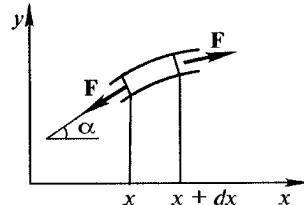


Рис. 10.44

времени. Это опять частные производные от  $y$ , но уже по  $x$ , при постоянном времени. Для разности тангенсов имеем

$$\operatorname{tg}[\alpha(x+dx)] - \operatorname{tg}[\alpha(x)] = \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+dx} - \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \quad (10.26)$$

Здесь разность производных выражена через вторую производную.

Окончательно из второго закона Ньютона получаем

$$\rho_L dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \quad (10.27)$$

Введем обозначение

$$c^2 = \frac{F}{\rho_L}. \quad (10.28)$$

Из (10.27) при этом получаем **волновое уравнение**

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}. \quad (10.29)$$

Для описания процесса смещения элементов струны, т. е. распространения возмущения по натянутой струне, получилось уравнение в частных производных, которое и называется **волновым уравнением**.

Уравнение является общим для описания распространения **слябых** возмущений. Волновое уравнение связывает частные производные второго порядка, которые вычисляются дифференцированием только по одной (в данном случае из двух) переменной и обозначаются круглыми буквами для дифференциалов. Легко проверить, что решением уравнения (10.29) будет любая произвольная функция, аргументом которой является  $x - ct$  или  $x + ct$ . Общее решение (10.29) представляет сумму двух произвольных функций от этих аргументов

$$y(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (10.30)$$

Аргументы функций называются фазами. Постоянство аргумента приводит к постоянству функции. Постоянной  $f_1(x - ct)$  будет при

$$x - ct = \text{const}. \quad (10.31)$$

Эта постоянная фаза так же, как и  $f_1(x - ct)$ , распространяется по  $x$  со скоростью, которую определяем как  $dx/dt$  при условии выполнения (10.31)

$$\frac{dx}{dt} = c. \quad (10.32)$$

Поэтому  $f_2(x - ct)$  называется волной, бегущей (или бегущей волной) в положительном направлении оси  $x$ .

Аналогичным образом  $f_2(x - ct)$  будет постоянным при

$$x + ct = \text{const.} \quad (10.33)$$

Скорость этой фазы из (10.33)

$$\frac{dx}{dt} = -c. \quad (10.34)$$

Поэтому  $f_2(x + ct)$  называется волной, бегущей в отрицательном направлении оси  $x$ .

Скорость распространения волн  $c$  определяется для струны формулой (10.28).

Уравнение (10.29) является уравнением гиперболического типа. Линии (10.31) и (10.33) называются **характеристиками**. По ним распространяются постоянные значения функции, описывающей возмущение.

Общее решение (10.30) уравнения (10.29) есть сумма волн, бегущих в положительном и отрицательном направлениях оси  $x$ .

Для нахождения конкретного вида функций  $f_1$  и  $f_2$  должны быть заданы дополнительные условия. Это могут быть **начальные или граничные условия**. Например, для струны в начальный момент времени задаются распределения по  $x$  смещения и скорости смещений элементов струны, либо в некоторой точке пространства заданы изменения со временем смещения и скорости смещения, либо в двух точках пространства заданы изменения со временем смещения или скорости смещения.

Волна может охватывать разные по величине области пространства. Если возмущение локализовано в небольшой области по сравнению с расстоянием, на которое оно распространяется, то его называют **одиночной волной**. Несколько одиночных волн, распространяющихся вместе (группой), называются **цугом волн**. Когда волна занимает все пространство от  $x = -\infty$  до  $x = +\infty$ , ее называют **бесконечно протяженной**. Такая волна может обладать **периодичностью**, т. е. повторяемостью следования возмущений. Например, при распространении такой волны вдоль натянутой струны величины смещений в каждый момент времени периодически повторяются в зависимости от  $x$ . При этом периодическим будет и изменение величины смещений в каждой точке пространства в зависимости от времени. Если эти периодические изменения описываются гармоническими функциями (синусом или косинусом), то волна называется **гармо-**

нической. Расстояние по  $x$  между ближайшими одинаковыми смещениями, происходящими в одну и ту же сторону, в один и тот же момент времени ( $t = \text{const}$ ), называется **длиной волны**. С периодом  $T$  и скоростью распространения фазы волны  $c$  длина волны, обозначаемая обычно  $\lambda$  и представляющая путь, проходимой фазой за период, связана следующим образом:

$$\lambda = cT. \quad (10.35)$$

Очевидно, что расстояние между ближайшими нулевыми значениями величины возмущения равно  $\lambda/2$ . Величина, обратная периоду  $v = 1/T$ , называется **частотой**. Вводятся также **круговая частота**  $\omega = 2\pi/T$  и волновое число  $k = 2\pi/\lambda$ . Используя эти обозначения из (10.35), получаем

$$c = \omega/k. \quad (10.36)$$

Для гармонических волн вместо использованных выше аргументов обычно берут для бегущей в положительном направлении оси  $x$  аргумент  $\omega t - kx = -k(x - ct)$ , а для бегущей в отрицательном направлении оси  $x$  аргумент  $\omega t + kx = k(x + ct)$ . Решение волнового уравнения (10.30) для гармонических волн имеет вид

$$y(x, t) = A\sin(\omega t - kx) + B\sin(\omega t + kx). \quad (10.37)$$

Здесь  $A$  — величина максимального смещения (амплитуда) волны, бегущей в положительном направлении оси  $x$ ,  $B$  — аналогичная величина для волны, бегущей в отрицательном направлении оси  $x$ .

Преобразовывая (10.37), получаем

$$y(x, t) = -2A\sin kx \cos \omega t + (A + B)\sin(\omega t + kx) \quad (10.38)$$

либо

$$y(x, t) = 2B\sin kx \cos \omega t + (A + B)\sin(\omega t - kx). \quad (10.39)$$

Очень важным является случай, когда волны, бегущие навстречу друг другу, имеют одинаковые амплитуды и противоположные фазы, т. е.  $A = -B$ . Такие волны показаны на рис. 10.45. Сплошной линией

волна, бегущая в положительном направлении оси  $x$ , а пунктиром — бегущая в отрицательном направлении оси  $x$ . В этом случае суммарное движение струны, как следует из (10.38) или (10.39), описывается формулой

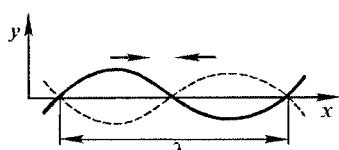


Рис. 10.45

$$y(x, t) = 2B\sin kx \cos \omega t. \quad (10.40)$$

Это движение называют **стоячей волной**. Возмущения как бы стоят на месте. В случае струны ее элементы совершают гармонические колебания, амплитуда которых по  $x$  меняется гармоническим образом (по синусоиде). Легко видеть, что пространственная периодичность равна длине волны  $\lambda$ . Если амплитуда смещения элемента равна  $2B$ , то говорят, что он находится в пучности, а при отсутствии смещения (амплитуда равна нулю), что он находится в узле. Из (10.40) можно найти положение узлов. Для обращения синуса в нуль должно выполняться

$$kx_n = \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \quad (10.41)$$

Отсюда определяются координаты узлов

$$x_n = (\lambda/2)n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \quad (10.42)$$

Координаты пучностей смещены от узлов на  $\lambda/4$ .

Узловые (неподвижные) точки можно интерпретировать, как точки закрепления струны. Отсюда следует, что в точке жесткого закрепления струны происходит образование отраженной волны, которая в результате сложения с падающей создает стоячую волну. Чтобы образовалась стоячая волна в струне, длина струны  $L$  должна содержать целое число половин длин волн.

$$L = n\lambda/2, \quad n = 1, 2, \dots . \quad (10.43)$$

Колебания при  $n = 1$ , когда длина струны равна  $\lambda/2$ , называют основным тоном, а при больших значениях  $n$  — обертонами, или гармониками.

При **жестком закреплении** конца струны бегущая волна отражается от этого конца с изменением фазы отраженной волны на  $\pi$  (в длинах волн на  $\lambda/2$ ), что соответствует изменению знака амплитуды на противоположный. Из такого условия и была выше получена стоячая волна. Закрепление конца струны можно сделать по-другому. Так, чтобы было натяжение по оси  $x$ , но **отсутствовало сопротивление движению** по оси  $y$ . В этом случае движение точки закрепления в направлении оси  $y$  соответствует пучности стоячей волны (сложению волн в одинаковой фазе). Значит, при таком закреплении отражение бегущей волны происходит в **той же фазе** (без потери фазы).

Для длины **стоячей** волны в струне из (10.35) и связи периода с круговой частотой колебаний  $\omega$  получаем

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{F}{\rho_L}}, \quad (10.44)$$

где  $F$  — сила натяжения струны;  $\rho_L$  — ее погонная плотность.

Для частоты колебания струны длины  $L$  из этой формулы и (10.43) получаем

$$v = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho_L}}. \quad (10.45)$$

Если частота колебаний увеличивается в полтора раза при укорочении ее на  $l$  (№ 10.63), то длина струны  $L$  определяется соотношением  $L/(L - l) = 1,5$ .

Для струн одинаковой длины, из одного и того же материала, но отличающихся диаметром, из (10.45) и (10.25) получаем  $T \sim d$  (№ 10.64). Уменьшение диаметра приводит к уменьшению периода колебаний струны.

Чтобы уменьшить частоту колебаний, можно уменьшить силу натяжения (№ 10.65)  $F \sim v$ .

Частоту колебаний струны можно увеличить, зажимая ее на некотором расстоянии (№ 10.66), так как  $v \sim 1/L$ . Очевидно, что уменьшить частоту можно только увеличивая ее длину.

Для элемента струны массой  $\rho_L dx$  ( $\rho_L$  — масса струны, приходящаяся на единицу ее длины, погонная) можно найти кинетическую энергию, вычисляя его скорость как производную от смещения (10.40) по времени

$$\begin{aligned} dE_k &= (1/2)\rho_L dx u^2 = (1/2)\rho_L dx \omega^2 4B^2 \sin^2 kx \sin^2 \omega t = \\ &= (1/2)\rho_L dx \omega^2 (y_{\max}^2 - y^2). \end{aligned}$$

Здесь, как следует из (10.40),

$$y_{\max} = 2B \sin kx. \quad (10.46)$$

Это максимальное смещение элемента с координатой  $x$ .

Потенциальная энергия элемента струны определяется работой силы, действующей на элемент. Эту силу можно найти, используя второй закон Ньютона. Дважды дифференцируя (10.40) по времени при постоянном  $x$  и умножая на массу элемента, получаем силу

$$f = -\rho_L dx \omega^2 y. \quad (10.47)$$

Видно, что сила тормозит движение, и величина ее растет пропорционально смещению. В таком случае потенциальная энергия равна

$$dE_n = (1/2)\rho_L dx \omega^2 y^2. \quad (10.48)$$

## Полная механическая энергия элемента струны

$$dE = dE_k + dE_p = (1/2) \rho_L dx \omega^2 y_{\max}^2 \quad (10.49)$$

не зависит от времени, но меняется по элементам струны. Ее зависимость от координаты элемента определяется формулой (10.46). Полная энергия максимальна в пучностях и равна нулю в узлах стоячей волны.

Аналогичным путем можно вычислить потенциальную и кинетическую энергию элементов струны для гармонической волны, бегущей в одном направлении. Для волны, бегущей в положительном направлении оси  $x$ , имеем

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx). \quad (10.50)$$

**Кинетическая энергия** элемента струны массой  $\rho_L dx$ , учитывая, что скорость движения элемента струны равна  $dy/dt$ ,

$$dE_k = (1/2) \rho_L dx \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (10.51)$$

## Потенциальная энергия в соответствии с (10.48)

$$dE_p = (1/2) \rho_L dx \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (10.52)$$

Кинетическая и потенциальная энергии распространяются по струне с фазовой скоростью. Складывая кинетическую и потенциальную энергии, получаем, что полная **механическая энергия** для всех элементов струны (длины  $dx$ ) в гармонической бегущей волне одинакова и равна

$$dE = \frac{1}{2} \rho_L dx \omega^2 A^2. \quad (10.53)$$

Если рассматривать распространение энергии не по струне, а через единичную площадку, перпендикулярную к направлению распространения, то вместо погонной плотности надо брать плотность материала  $\rho$ .

В бегущей волне существует поток энергии в направлении ее распространения, который равен

$$W = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 A^2. \quad (10.54)$$

Такая энергия проходит при распространении гармонической волны через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, за единицу времени. Входящее в это соотношение величина  $\rho c$  называется **акустическим сопротивлением** сре-

ды. Эта величина определяет изменение амплитуды волны при переходе волны из одной среды в другую.

Постоянство потока энергии в бесконечной гармонической волне делает невозможным передачу с помощью таких волн сигналов (информации). Сигналом может быть только искажение формы волны. Но при этом она перестает быть гармонической.

Рассмотренное выше для гармонических волн в струне относится ко всем гармоническим волнам. Струна использована лишь для более простого вывода.

Скорость распространения волн  $c$  определяется свойствами среды, по которой она распространяется, и типом возмущения.

Как получено выше, для струны, погонная плотность которой  $\rho_L$ , натянутой силой  $F$ , скорость распространения поперечных к направлению равновесного положения струны смещений равна

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho_L}}. \quad (10.55)$$

В жидкости или газе, где возможны продольные волны объемного сжатия, при которых смещения частиц среды происходят только в направлении распространения волны, скорость слабых возмущений (скорость звука) определяется адиабатической сжимаемостью среды  $\chi$

$$\chi = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_S, \quad (10.56)$$

где  $v$  — объем элемента среды, сжимаемого давлением  $p$  при постоянной энтропии (адиабатически).

Скорость волны в среде плотности  $\rho$  равна

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho \chi}}. \quad (10.57)$$

В идеальном газе для скорости звука имеем

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\mu}}, \quad (10.58)$$

где  $\gamma = c_p/c_v$  — показатель адиабаты, равный отношению теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме;  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность газа;  $T$  — абсолютная температура;  $\mu$  — молекулярный вес;  $R$  — газовая постоянная.

Скорость звука в воздухе при нормальных условиях  $c = 330$  м/с. Пуля может лететь со скоростью  $v = 660$  м/с. Если пуля пролетает от человека на расстоянии  $l = 5$  м, то звук от пули дойдет до человека, когда пуля будет от него на расстоянии  $L$  (№ 10.62). Для определения этого расстояния воспользуемся рис. 10.46. Пуля в каждой точке, через которую она проходит, создает звуковое возмущение (сжимает воздух). До человека, находящегося в точке  $A$ , доходит звуковая волна, созданная в точке  $O$ , через время  $t$ . Фронт волны для момента достижения ею поверхности, на которой находится человек, показан пунктиром. За время  $t$  пуля переместится в точку  $B$ . Линия  $AB$  представляет волну от пули (волна Маха). Из подобия треугольников  $L/l = vt/(ct) = v/c$ .

Волновое уравнение для одномерных, плоских звуковых волн в воздухе получим из законов сохранения. На рис. 10.47 показано движение элемента среды, имеющего первоначально длину от  $x$  до  $x + dx$  и площадь поперечного сечения, равную единице. Обозначая начальную плотность среды  $\rho$  и ее изменение в волне  $d\rho$ , которое много меньше  $\rho$ , из закона сохранения массы при смещении на  $u(x, t)$ , для которого считаем  $u(x + dx, t) - u(x, t) \ll dx$ , получаем

$$\rho dx = (\rho + d\rho)[x + dx + u(x + dx, t) - x - u(x, t)].$$

Отсюда  $\rho = (\rho + d\rho)(1 + \partial u / \partial x)$  и

$$d\rho = -\rho \partial u / \partial x / (1 + \partial u / \partial x) \approx -\rho \partial u / \partial x. \quad (10.59)$$

С точки зрения математики это выглядит не очень хорошо. Возможно, лучше было бы вместо  $d\rho$  писать  $\Delta\rho$ .

Для этого же элемента среды записываем второй закон Ньютона

$$\rho(\partial^2 u / \partial t^2)dx = p(x, t) - p(x + dx, t) = -(\partial p / \partial x)dx. \quad (10.60)$$

Вводим обозначение

$$dp = c^2 d\rho. \quad (10.61)$$

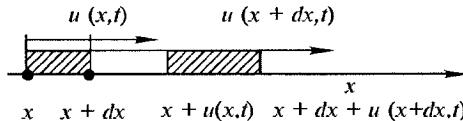


Рис. 10.46

Из (10.60), (10.61) и (10.59) получаем

$$\rho(\partial^2 u / \partial t^2) = -(\partial p / \partial x) = -c^2(\partial \rho / \partial x) = \rho c^2(\partial^2 u / \partial x^2). \quad (10.62)$$

В результате имеем для смещения волновое уравнение

$$(\partial^2 u / \partial t^2) = c^2(\partial^2 u / \partial x^2). \quad (10.63)$$

Решение аналогично (10.30). Скорость волн определяется (10.61).

Опыт показал, процесс адиабатический.

Для бегущей в положительном направлении волны получаем

$$u(x, t) = f(x - ct) = f(\xi). \quad (10.64)$$

Из (10.59)  $d\rho/\rho = -\partial u / \partial x = -df/d\xi$ . Так как  $v = \partial u / \partial t = -cdf/d\xi$ , то

$$d\rho/\rho = v/c. \quad (10.65)$$

Массовая скорость мала по сравнению со скоростью звука.

Тогда из (10.61) получаем

$$dp = c^2 d\rho = \rho c v. \quad (10.66)$$

При заданной звуковой (акустической) волне  $u = a \sin(\omega t - kx)$  частота колебаний  $v = \omega/(2\pi)$ , скорость распространения  $c = \omega/k$ , длина волны  $\lambda = 2\pi/k$ , амплитуда массовой скорости  $a\omega$ , амплитуда давления  $dp = \gamma p v/c$  (№ 10.72).

Если задана амплитуда колебаний давления в звуковой волне, то для потока энергии через перпендикулярную площадку  $S$  (№ 10.71) получаем

$$W = (\rho v^2/2)cS = (\Delta p)^2 S / (2\rho c).$$

В упругих твердых телах кроме возмущений, связанных с объемным сжатием, возможны сдвиговые возмущения без изменения объема. Поэтому в твердом теле кроме продольных волн, как в жидкости, существуют и поперечные волны. Плоскую одномерную продольную волну в твердом теле можно рассматривать как волну, распространяющуюся по упругому стержню. В случае толстого по сравнению с длиной волны стержня поперечные деформации не успевают происходить за время изменения напряжения в волне (т. е. за период волны  $T$ ) и можно пренебречь влиянием боковых границ стержня. Если же стержень тонкий и его боковые поверхности не нагружены, то в волне успевает происходить боковая разгрузка. Напряжения и деформации в упругом теле связаны законом Гука (см. далее в разд. 13). Коэффициенты, связывающие их, называются модулями. При одноосновном растяжении или сжатии это модуль Юнга  $E$ , при объемной деформации модуль объемного сжатия  $K$ , при сдвиге — модуль сдвига  $G$ . Между модулями существует связь, в которую входит еще коэф-

фициент Пуассона  $\mu$ , представляющий отношение поперечной деформации к продольной (всегда меньше 0,5).

Скорость упругой **продольной волны в стержне**, толщина которого значительно больше длины волны,

$$c_{L1} = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}. \quad (10.67)$$

Здесь и далее  $\rho$  — плотность материала.

**В стержне, толщина которого меньше длины волны, скорость волны равна**

$$c_{L2} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (10.68)$$

Эти зависимости получаются при использовании закона Гука для упругой среды. Однако, зная, что скорость распространения волны  $v$  определяется модулем упругости среды  $E$  и плотностью  $\rho$ , связь скорости с модулем и плотностью можно получить с помощью теории размерности (№ 10.68). Размерности выражаем через массу  $M$ , длину  $L$  и время  $T$ . Тогда размерность модуля  $[E] = ML^{-1}T^{-2}$ , размерность плотности  $[\rho] = ML^{-3}$ , размерность скорости  $[v] = LT^{-1}$ . Предполагая степенные зависимости, получаем уравнение  $[v] = [E^m \rho^n]$ . Подставляя выражения для модуля и плотности, находим  $m = -n = 1/2$ . То есть  $v \sim (E/\rho)^{1/2}$ .

Для натянутой струны формулу (10.55) можно получить из размерности аналогичным способом. Размерность силы натяжения  $[F] = MLT^{-2}$ . Размерность плотности на единицу длины  $[\rho_L] = ML^{-1}$ . Предполагая степенные зависимости  $[V] = LT^{-1} = [F^m \rho_L^n]$ , находим значения  $m$  и  $n$  (№ 10.69).

Для поперечных (сдвиговых) волн скорость равна

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (10.69)$$

Модуль сдвига связан с модулем Юнга соотношением

$$E = 2G(1 + \mu). \quad (10.70)$$

С помощью формул (10.67), (10.69) и (10.70) можно найти зависимость коэффициента Пуассона  $\mu$  от отношения  $a = c_{L1}/c_{\perp}$  (наибольшей скорости продольных волн к скорости поперечных волн):

$$\mu = \frac{a^2 - 2}{2(a^2 - 1)}. \quad (10.71)$$

В безграничной, однородной среде возможно существование волны, бегущей в одном направлении. Присутствие жестких границ, как об этом было сказано выше, привело к образованию стоячей волны.

Рассмотрим прохождение звуковой бегущей волны **через границу раздела двух упругих сред**, характеристики которых различны и будут отмечены индексом 1 и 2.

При нормальном падении волны на такую границу в первой среде, кроме падающей волны

$$y_{\text{пад}} = A \sin(\omega t - k_1 x), \quad (10.72)$$

возникает отраженная волна, движущаяся навстречу падающей:

$$y_{\text{отр}} = B \sin(\omega t + k_1 x). \quad (10.73)$$

Во второй среде распространяется преломленная волна

$$y_{\text{прел}} = D \sin(\omega t - k_2 x). \quad (10.74)$$

Найдем **коэффициент отражения** на границе. Смещение частиц слева от границы равно смещению справа, так как среда непрерывна:

$$A \sin(\omega t - k_1 x) + B \sin(\omega t + k_1 x) = D \sin(\omega t - k_2 x). \quad (10.75)$$

Пусть граница расположена при  $x = 0$ . Полагая  $x = 0$  и сокращая равенство на  $\sin \omega t$ , найдем:

$$A + B = D. \quad (10.76)$$

Поток энергии определяется (10.54). Из закона сохранения энергии на границе следует, что поток в падающей волне равен сумме потоков энергии в преломленной и отраженной волнах:

$$\frac{1}{2} \rho_1 c_1 A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \rho_1 c_1 B^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \rho_2 c_2 D^2 \omega^2. \quad (10.77)$$

Введем обозначение:

$$N = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}. \quad (10.78)$$

Величина  $N$  равна отношению акустических сопротивлений соседних сред. Формула (10.77) при этом приобретает вид

$$N(A^2 - B^2) = D^2.$$

Деля это равенство на (10.76), найдем:

$$N(A - B) = D. \quad (10.79)$$

Система уравнений (10.76) и (10.79) дает:

$$B = \frac{N-1}{N+1} A, \quad D = \frac{2N}{N+1} A. \quad (10.80)$$

Формулы (10.80) определяют отражение и преломление на границе.

Коэффициентом отражения волны называют отношение потоков энергии в отраженной и падающей волне. Формулы (10.54) и (10.80) дают:

$$R = \frac{W_{\text{отр}}}{W_{\text{пад}}} = \left( \frac{N-1}{N+1} \right)^2. \quad (10.81)$$

Формула (10.81) показывает, что коэффициенты отражения при переходе звука из первой среды во вторую и из второй в первую равны друг другу (замена  $N$  на  $1/N$  приводит к тому же  $R$ ).

Рассмотрим суперпозицию двух синусоидальных волн от двух источников, находящихся от точки сложения, один на расстоянии  $d_1$ , а другой на расстоянии  $d_2$ . Источники колеблются в одинаковой фазе, с одинаковой частотой, и в рассматриваемой точке направления колебаний совпадают (№ 10.70).

Для каждой волны можно написать

$$y = a \sin(\omega t - kd) = a \sin(\omega t - \varphi).$$

Складывая две волны, получаем

$$y = y_1 + y_2 = a \sin(\omega t + \varphi).$$

Здесь

$$a = \left[ a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right]^{1/2};$$

$$\varphi = \arctg [(a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2) / (a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2)].$$

Проходя через среду, звуковая волна испытывает затухание. Амплитуда колебаний в плоской волне уменьшается с расстоянием по экспоненциальному закону

$$A = A_0 \exp(-\delta x). \quad (10.82)$$

Коэффициент  $\delta$  носит название коэффициента затухания. Так как интенсивность колебаний  $I$  пропорциональна квадрату амплитуды  $A$ , то

$$I = I_0 \exp(-2\delta x). \quad (10.83)$$

Затухание звука является следствием того, что часть энергии поглощается веществом, превращаясь в тепловую энергию.

Выше рассматривались слабые волны, и скорость их распространения считалась постоянной. Поэтому профиль волны всегда оставался одним и тем же. В некоторых средах скорость волны может зависеть от длины волны. Зависимость скорости распространения волны от ее длины называется дисперсией. В средах, обладающих дисперсией, профили волн меняются. Максимальная амплитуда волны имеет скорость, отличающуюся от скорости распространения фазы  $c = \omega/k$ . Эта скорость называется групповой и равна  $d\omega/dk$ . Для ее вычисления надо знать, как частота зависит от волнового числа либо как скорость фазы зависит от длины волны. Тогда групповая скорость равна

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \quad (10.84)$$

Так как искажение профиля волны идет с групповой скоростью, она является скоростью передачи информации.

При отсутствии дисперсии групповая скорость совпадает с фазовой.

## 11. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА. ГИРОСКОПЫ

В этом разделе будут рассмотрены вращательные движения, при которых ось вращения перемещается. В основном это задачи о прецессии гироскопов. Под гироскопом понимается тело, вращающееся (обычно с достаточно большой скоростью) относительно оси, фиксированной в теле. Чаще всего это ось симметрии.

Для тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно собственной оси симметрии, которая сама вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  относительно некоторой оси (пересекающейся с осью симметрии), общий момент импульса представляет сумму

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_\omega + \mathbf{L}_\Omega. \quad (11.1)$$

Отметим, что момент импульса относительно собственной оси симметрии тела  $\mathbf{L}_\omega$  направлен по этой оси, а момент, связанный с прецессией  $\mathbf{L}_\Omega$ , направлен по оси прецессии, только когда угол между векторами  $\omega$  и  $\Omega$  равен  $90^\circ$  или  $0^\circ$ . Прецессию вызывает момент сил  $\mathbf{M}$ , который связан с изменением момента импульса уравнением

$$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}. \quad (11.2)$$

Изменение вектора момента импульса  $d\mathbf{L}$  всегда можно представить (рис. 11.1) в виде суммы проекций  $d\mathbf{L}$  на направления вдоль  $\mathbf{L}$  и перпендикулярно  $\mathbf{L}$  и оси прецессии:

$$d\mathbf{L} = d\mathbf{L}_n + d\mathbf{L}_\tau. \quad (11.3)$$

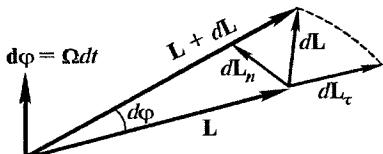


Рис. 11.1

Тогда

$$\begin{aligned} d\mathbf{L}/dt &= d(\mathbf{L}_c + \mathbf{L}_n)/dt = d\mathbf{L}_c/dt + (d\phi \times \mathbf{L})/dt = \\ &= d\mathbf{L}_c/dt + [\Omega \times \mathbf{L}] = \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Если силы лежат в плоскости, проходящей через оси собственного вращения и прецессии, то момент сил перпендикулярен этой плоскости, и вектор полного момента импульса меняется только по направлению.

Если вектор момента количества движения  $\mathbf{L}$  меняется только по направлению, но не меняется по величине, то из (11.4) получаем

$$[\Omega \times \mathbf{L}] = \mathbf{M}. \quad (11.5)$$

Начнем рассмотрение гироскопических эффектов на примере раскрученного тела типа волчка. Далее и гироскопы иногда будем называть волчками и не делать между ними различия.

Волчок может быть закреплен в точке шарнирно или в кардановом подвесе либо опираться на горизонтальную поверхность. Сила тяжести создает момент, приводящий к прецессии. Сила трения оси волчка о поверхность, на которую он опирается, приводит к изменению и направления, и величины момента импульса. При малых коэффициентах трения, на достаточно гладких поверхностях, силами трения часто можно пренебречь.

Если момент импульса, связанный с прецессией, значительно меньше, чем момент импульса собственного вращения, то можно использовать уравнение:

$$[\Omega \times \mathbf{L}_\omega] = \mathbf{M}. \quad (11.6)$$

Это же уравнение получаем для случаев, когда  $\mathbf{L}_\omega$  направлено по оси прецессии.

Считая изменения величины момента импульса волчка малыми (т. е. потери энергии на трение малы), получаем уравнение

$$\Omega \times \mathbf{L}_\omega = \mathbf{r} \times mg = -mg \times \mathbf{r}. \quad (11.7)$$

Так как направления  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{L}_\omega$  совпадают (рис. 11.2), получаем

$$\Omega = -rmg/L_\omega. \quad (11.8)$$

Направление угловой скорости прецессии при такой закрутке волчка противопо-

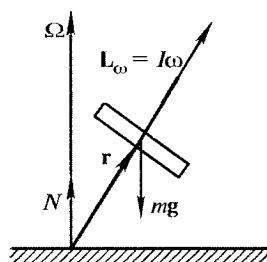


Рис. 11.2

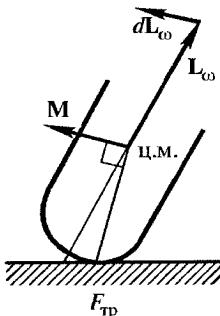


Рис. 11.3

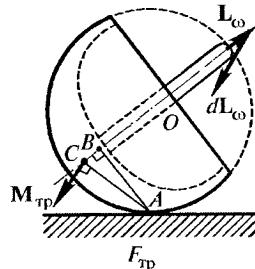


Рис. 11.4

ложно направлению силы тяжести, момент которой и вызывает прецессию.

Чтобы выяснить роль силы трения, вычислим момент ее относительно центра масс волчка. При показанной (рис. 11.3) закрутке сила трения направлена из плоскости рисунка к нам. Это дает показанное на рисунке направление момента силы трения  $M$  и соответствующее ему  $dL_{\omega}$ . Следовательно, волчок стремится выпрямиться.

Если бы оказалось (рис. 11.4), что центр масс волчка лежит ниже основания перпендикуляра к оси вращения волчка из точки касания горизонтальной поверхности (китайский волчок), то волчок стремился бы опрокинуться.

Сила трения вызывает также перемещение волчка по плоскости, на которую он опирается. Это довольно беспорядочное движение, так как направление силы трения меняется из-за прецессии.

Если точка опоры волчка неподвижна (№ 11.1), т. е. закреплена, то сила, действующая в этой точке на волчок, имеет вертикальную компоненту, равную весу волчка ( $mg$ ), и горизонтальную, которая равна центробежной силе  $m\Omega^2 as \sin \alpha$ . Здесь  $\Omega$  — скорость прецессии волчка, которая определяется уравнением (11.8), где  $L_{\omega} = I\omega$  и расстояние от точки опоры до центра масс  $r = a$ . Наклон волчка от вертикали равен  $\alpha$ . Наклон силы реакции  $\beta$  определяется из соотношения  $\operatorname{tg} \beta = m\Omega^2 as \sin \alpha / (mg)$ .

В случае если опорный конец волчка движется по некоторой окружности, а центр масс, оставаясь на одной и той же высоте, по окружности радиусом  $R$  (№ 11.13), то наклон силы реакции определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \beta = m\Omega^2 R / (mg) = 4r^2 g R / (I^2 \omega^2).$$

Здесь приведен окончательный результат для волчка в виде диска радиусом  $l$  на тонкой оси на расстоянии  $r$  от ее конца.

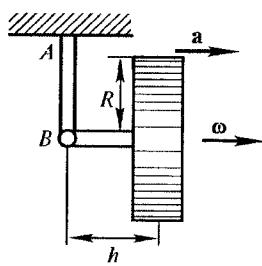


Рис. 11.5

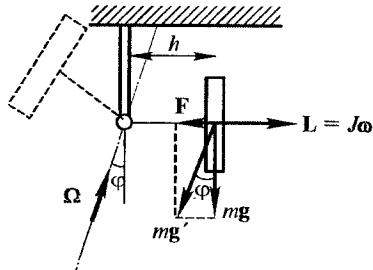


Рис. 11.6

При ускоренном движении точки подвеса волчка (№ 11.2) на волчок действует сила инерции и равная ей сила реакции в точке закрепления волчка, которая создает момент относительно центра масс волчка и будет вызывать его прецессию с угловой скоростью  $\Omega$ , определяемую (11.6). В случае ускорения равного  $a$  для волчка массой  $m$  и моментом инерции  $I$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , угол отклонения от первоначального вертикального направления оси волчка будет равен  $\alpha = \Omega t = mlat/(I\omega)$ . Здесь  $l$  — расстояние центра масс волчка от точки подвеса, а  $t$  — время действия ускорения.

Если волчок подведен так, как изображено на рис. 11.5, и точка подвеса движется с ускорением  $a$ , прецессия определяется моментом суммы сил тяжести и инерции (№ 11.16). На рис. 11.6 показаны направление суммарного поля ( $mg'$ ) и ось прецессии ( $\Omega$ ), проходящая через точку подвеса параллельно суммарному полю. Угол наклона оси прецессии  $\phi$  определяется соотношением  $\tan \phi = a/g$ , а скорость прецессии из уравнения  $\Omega L \cos \phi = mg' h \cos \phi$ .

Другой возможный случай подвески волчка изображен на рис. 11.7 (№ 11.17). На рис. 11.8 показаны силы и ось прецессии. Соотношения аналогичны использованным в предыдущем случае.

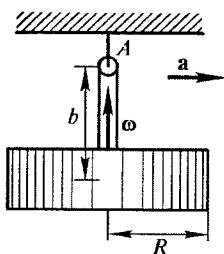


Рис. 11.7

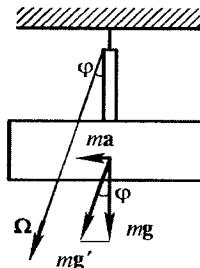


Рис. 11.8

Для вращения оси гироскопа (волчка), т. е. создания прецессии, необходимо приложить момент сил, как это следует из (11.6). В качестве гироскопа можно рассматривать, например, велосипедное колесо (№ 11.4), либо пропеллер (№ 11.8), либо гребной винт миноносца (№ 11.9), либо ротор турбины корабля (№ 11.10). При рассмотрении вращения тонкого кольца (№ 11.19) можно действовать аналогично, либо использовать теорему Кориолиса, о которой будет сказано в следующем разделе.

При ударе по гироскопу сила и ее момент действуют только в течение времени соударения. Прецессия существует в течение этого времени и приводит к повороту оси вращения гироскопа на некоторый угол. Рассмотрим случай, когда точечная масса  $m$ , имеющая скорость  $u$ , упруго ударяет в центр неподвижного гладкого кожуха гироскопа (рис. 11.9), у которого точка с координатами  $x = y = z = 0$  закреплена (неподвижна), а координаты центра гироскопа  $x = y = 0$ ,  $z = z_0$  (№ 11.12). Для угла поворота момента импульса гироскопа  $L$  за время соударения получаем

$$\alpha = \int \Omega dt = \int (M/L) dt = (z_0/L) \int F dt = mu z_0 / L.$$

В качестве гироскопического тела можно рассматривать и вращающуюся Землю. Для оценки поворота оси вращения Земли при ударе метеорита (№ 11.7), имеющего массу  $m$  и скорость  $u$ , пользуясь тем, что передаваемый метеоритом импульс  $mu = Ft$ . Здесь  $\tau$  — время действия силы  $u$ , и, следовательно, время вращения оси Земли с угловой скоростью прецессии, определяемой (11.6). Обозначая угол направления скорости метеорита к вертикали  $\beta$ , получаем угол поворота оси вращения Земли в результате прецессии

$$\alpha = \Omega \tau = Mt/(I\omega) = R \sin \beta Ft/(I\omega) = muR \sin \beta / (I\omega).$$

Здесь  $R$ ,  $I$  и  $\omega$  — радиус, момент инерции и угловая скорость вращения Земли.

Аналогичным образом можно рассматривать действие выпущенного с полюса Земли снаряда (№ 11.5) или ракеты (№ 11.6). Необходимо иметь в виду, что для получения существенных поворотов оси скорости должны быть очень большими, и надо учить-

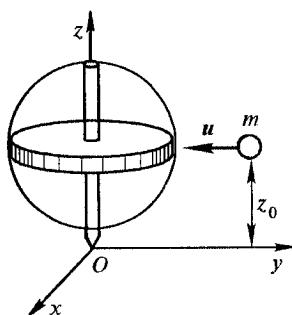


Рис. 11.9

тывать релятивистский эффект, т. е. для импульса использовать формулу

$$p = mv/(1 - u^2/c^2)^{1/2}.$$

Рассмотрим упругий удар точечной массы  $m$ , имеющей скорость  $v_0$ , в конструкцию в виде шара радиусом  $R$  и массой  $M$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , и невесомой спицы, прикрепленной к шару в направлении оси вращения. Точечная масса, скорость которой перпендикулярна спице, упруго ударяет в спицу на расстоянии  $2R$  от центра шара и останавливается (№ 11.20 и № 11.21). На рис. 11.10 показана конструкция и точечная масса. Из закона сохранения импульса получаем скорость центра шара после удара

$$v = mv_0/M.$$

Кроме заданного вращения у шара появится вращение с угловой скоростью  $\Omega$ , определяемое из закона сохранения момента импульса системы (шар и точечная масса)

$$mv_0 2R = (2/5)MR^2\Omega.$$

На рис. 11.11 показано сложение скоростей вращения.  
Закон сохранения энергии дает

$$mV_0^2/2 + (2/5)MR^2\omega^2/2 = MV^2/2 + (2/5)MR^2(\omega^2 + \Omega^2)/2.$$

Отсюда при заданном отношении скорости точечной массы к угловой скорости вращения шара определяем новое направление вращения шара вместе со спицей после удара (тангенс угла  $\beta$  равен отношению  $\Omega$  к  $\omega$ ) и максимальный угол отклонения спицы от горизонтали  $2\beta$ . Если бы был задан угол, то можно было бы найти отношение скоростей.

В некоторых задачах (№ 11.14) постоянство угловой скорости прецессии  $\Omega$  и угловой скорости собственного вращения  $\omega$  задаются условиями задачи. В таком случае соотношения между величина-

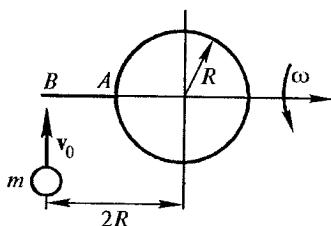


Рис. 11.10

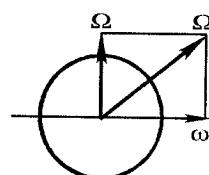


Рис. 11.11

ми скоростей и моментов импульса определяются из дополнительных условий (например, из отсутствия проскальзывания). Использование уравнения (11.6) оправдывается тем, что момент импульса, связанный с прецессией ( $L_\Omega$ ), направлен по оси прецессии.

Гирокинетические эффекты используются в дисковых мельницах. Массивный (массой  $m$ ) цилиндрический каток (бегун), могущий вращаться вокруг своей геометрической оси, приводится во вращение вокруг вертикальной оси (с угловой скоростью  $\Omega$ ) и катится по горизонтальной опорной плите. Такое вращение можно рассматривать как вынужденную прецессию гирокопа, каковым является бегун. При вынужденной прецессии возрастает сила давления бегуна на горизонтальную плиту, по которой он катится. Эта сила растирает и измельчает материал, подсыпаемый на плиту под каток.

Момент сил, который вызывает прецессию с угловой скоростью  $\Omega$ , равен  $M = \Omega L_\omega = \Omega mr^2\omega/2 = F_1 R$  (рис. 11.12). Так как проскальзывания нет и  $\Omega R = \omega r$ , получаем для силы, которая создает момент относительно центра масс бегуна:  $F_1 = (1/2)mr\Omega^2$ . Эта сила добавляется к весу катка, поэтому сила нормального давления будет

$$F_n = mg + (1/2)mr\Omega^2.$$

При  $r = 0,5$  м и  $\Omega = 1$  об/с =  $2\pi$  с<sup>-1</sup> добавка порядка  $mg$ , а  $F_n \approx 2mg$ .

Конец оси бегуна, закрепленный на оси, вокруг которой происходит прецессия, для обеспечения равновесия по вертикальному направлению надо удерживать с силой, равной  $F_1$ . Если этого не делать, то конец поднимется вверх, а бегун покатится по прямой. Следует подчеркнуть, что полный момент импульса катка имеет две составляющие  $L_\omega$  и  $L_\Omega$  и не направлен вдоль оси катка.

Гирокоп с моментом инерции  $I$  может быть прикреплен к мотоциклу, едущему по вертикальной цилиндрической стене, таким образом, чтобы обеспечивать движение в строго горизонтальной плоскости. Полная масса мотоцикла  $m$  отстоит от стены на расстоянии  $h$  (рис. 11.13). Радиус колеса обозначим  $r$ . Коэффициент трения между

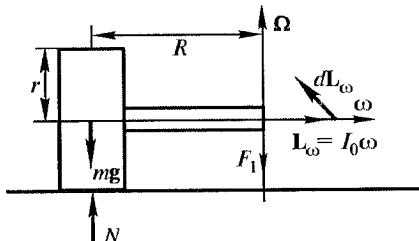


Рис. 11.12

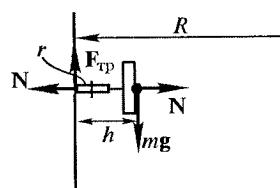


Рис. 11.13

ду колесами и стеной равен  $k$ . Для получения соотношения между угловой скоростью вращения колес  $\omega_k$  и угловой скоростью вращения гироскопа  $\omega$  (№ 11.11) используем: связь между угловой скоростью движения мотоцикла по цилиндрической стене  $\Omega$  и угловой скоростью вращения колес мотоцикла ( $\Omega R = \omega_k r$ ), выражение для центробежной силы ( $N = m\Omega^2 R$ ), соотношения для силы трения ( $kN = mg$ ) и ее момента, вызывающего прецессию гироскопа со скоростью  $(kNh = I\omega\Omega)$ . В итоге  $\omega/\omega_k = khrt/I$ .

**Диск катится по окружности**, если он имеет **наклон** относительно вертикали (№ 11.15). При движении колеса по кругу достаточно большого радиуса нельзя пренебречь моментом импульса прецессии по сравнению с моментом импульса относительно оси колеса. Хотя скорость вращения колеса значительно больше скорости поворота (прецессии), но большой радиус поворота и соответствующий этому вращению момент инерции приводят к тому, что момент импульса прецессии больше момента импульса относительно оси колеса.

Рассматриваем задачу, в которой диск радиусом  $r$ , вращающийся вокруг собственной оси с угловой скоростью  $\omega_0$ , катится без проскальзывания в наклонном положении (угол между вертикалью и плоскостью диска равен  $\phi$ ) по горизонтальной плоскости, описывая окружность радиусом  $R \gg r$ , за время  $T$ . Найдем  $R$  и  $T$ . Движение по кругу будем рассматривать как прецессию с угловой скоростью  $\Omega = 2\pi/T$ . Так как диск (рис. 11.14) катится без проскальзывания, то

$$\omega_0 r = \Omega R, \quad (11.9)$$

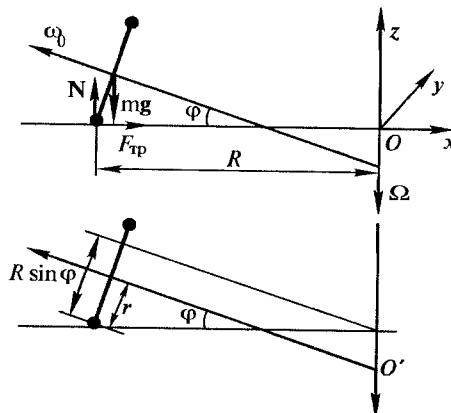


Рис. 11.14

где  $\omega_0$  — угловая скорость вращения диска вокруг собственной оси, а  $\Omega$  — угловая скорость вращения этой оси относительно земли.

Если момент количества движения не меняется по абсолютной величине, а меняется только по направлению, уравнение движения относительно точки пересечения оси собственного вращения (относительно оси симметрии тела) и оси прецессии (точка  $O'$ ) имеет вид (11.5):

$$\mathbf{M} = \Omega \times \mathbf{L} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ L_x & 0 & L_z \end{vmatrix} = \mathbf{j} \Omega L_x. \quad (11.10)$$

Скорость прецессии направлена по вертикали, которую обозначили как  $z$ , а момент количества движения лежит в вертикальной плоскости (одна координата  $z$ , а другую обозначим  $x$ ). Момент сил  $\mathbf{M}$  создается парой сил ( $\mathbf{N}$  и  $mg$ ) и силой трения, которая определяется стационарным движением центра масс диска по окружности:

$$m\Omega^2(R - r\sin\phi) = F_{tp}, \quad (11.11)$$

где  $m$  — масса диска, а  $\phi$  — угол наклона оси диска к горизонтальной плоскости.

Уравнение вращательного движения (11.10) теперь можно записать

$$\Omega L_x = -mgr\sin\phi - m\Omega^2(R - r\sin\phi)(R\sin\phi - r)/\cos\phi. \quad (11.12)$$

Первый член в правой части — момент пары  $\mathbf{N}$  и  $mg$ , который одинаков для любой оси, параллельной  $\mathbf{j}$ , а второй член — момент силы трения (11.11). В (11.10) направление  $\Omega$  не определено. Оно зависит от момента сил. Данное соотношение показывает, что  $\Omega$  направлено в отрицательном направлении оси  $z$ . Это согласуется с качением диска без проскальзывания.

Момент количества движения диска можно представить в виде суммы по направлению вдоль оси диска и перпендикулярно оси, используя соответствующие моменты инерции,

$$\mathbf{L} = I_{\parallel}\omega_{\parallel} + I_{\perp}\omega_{\perp} = I_{\parallel}(\omega_0 + \Omega_{\parallel}) + I_{\perp}\Omega_{\perp}. \quad (11.13)$$

Входящие в это выражение моменты инерции имеют вид:

$$I_{\parallel} = mr^2/2, I_{\perp} = mr^2/4 + m(R - r\sin\phi)^2/\cos^2\phi. \quad (11.14)$$

Большое различие величин моментов инерции приводит к тому, что даже при малых скоростях прецессии нельзя пренебрегать мо-

ментом количества движения, связанным с прецессией, по сравнению с моментом количества движения собственного вращения диска относительно оси его симметрии. Отношение моментов количества движения имеет вид:

$$\begin{aligned} I_{\parallel}|\omega_{\parallel}|/(I_{\perp}|\omega_{\perp}|) &= \\ = [(1/2)mr^2|\omega_0 + \Omega_{\parallel}|]/\{[(1/4)mr^2 + m(R - r\sin\phi)^2/\cos^2\phi]\Omega_{\perp}\} &\equiv \\ \equiv (mr^2\omega_0/2)/(mR^2\Omega_{\perp}) &= (r/R)r\omega_0/(2R\Omega) \equiv (r/R)/2. \end{aligned}$$

Так как  $r \ll R$ , то в (11.13) второй член (в первой части равенства) намного больше первого. Этот результат не очевиден и связан с тем, что хотя скорость прецессии и мала, но очень велик момент инерции  $I_{\perp}$ .

Для компоненты момента, которая входит в уравнение движения (11.12), из (11.13) и (11.14) с учетом (11.9) получаем:

$$\begin{aligned} -L_x &= (mr^2/2)(\Omega R/r - \Omega \sin\phi) \cos\phi + \\ &+ [mr^2/4 + m(R - r\sin\phi)^2/\cos^2\phi]\Omega \cos\phi \sin\phi = \\ &= m\Omega[(1/2)rR\cos\phi - (r^2/2)\sin\phi \cos\phi + (r^2/4)\sin\phi \cos\phi + \\ &+ (R - r\sin\phi)^2\sin\phi/\cos\phi] \equiv m\Omega[R^2\tg\phi + rR(\cos\phi/2 - 2\sin^2\phi/\cos\phi)] = \\ &= m\Omega[R^2\tg\phi + rR(5\cos^2\phi - 4)/(2\cos\phi)]. \end{aligned}$$

Здесь сохранен член с произведением  $rR$ , так как в дальнейшем выяснится, что члены с  $R$  сокращаются.

Подставляем в уравнение движения (11.12)

$$\begin{aligned} -\Omega L_x &= m\Omega^2[R^2\tg\phi + rR(5\cos^2\phi - 4)/(2\cos\phi)] = \\ &= mgrs\in\phi + m\Omega^2(R - r\sin\phi)(R\sin\phi - r)/\cos\phi. \end{aligned}$$

После преобразования получаем  $\Omega = 2gtg\phi/(3\omega_0 r)$ .

Отсюда для периода получаем  $T = 2\pi/\Omega = 3\pi\omega_0 r tg\phi/g$ .

Используя (11.9), для радиуса окружности, по которой катится диск, получаем

$$R = \omega_0 r / \Omega = 3\omega_0^2 r^2 \tg\phi / (2g).$$

Аналогичным образом решается задача о качении колеса (№ 11.18), у которого вся масса сосредоточена на ободе.

Рассмотрим движения вращающихся шаров. У шара момент инерции не зависит от направления оси в теле.

Один однородный шар радиусом  $r$  вращается с угловой скоростью  $\omega_0$  на горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси. При

касании плоскости в одной точке (если не учитывать деформацию шара и плоскости) момент сил трения равен нулю, и вертикальный момент количества движения не меняется. В этот шар упруго ударяет такой же шар, имеющий в момент удара горизонтальную скорость  $v_0$  (№ 11.22). Считаем, что вращение при ударе не передается. Первый шар получает горизонтальную скорость  $v_0$ , а второй останавливается или продолжает движение с меньшей скоростью, которая возникает, если было его вращение вокруг горизонтальной оси. Нас интересует движение первого шара. Сила трения о поверхность тормозит горизонтальное движение (уменьшает скорость центра масс) и создает вращение вокруг горизонтальной оси. Предполагаем, что трением качения можно пренебречь.

Поступательное движение центра масс шара описывается уравнением

$$m(dv/dt) = -F_{\text{тр}} = -kmg. \quad (11.15)$$

Его решение

$$v = v_0 - kgt. \quad (11.16)$$

Сила трения возникает из-за проскальзывания и кроме торможения шара вызывает его вращение вокруг горизонтальной оси. Уравнение вращения относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс шара, имеет вид

$$Id\omega_r/dt = rF_{\text{тр}} = kmgr. \quad (11.17)$$

Подставляя момент инерции шара, для горизонтальной угловой скорости вращения получаем

$$\omega_r = (5/2)kgtr/r. \quad (11.18)$$

Наклон суммарной угловой скорости к вертикали

$$\operatorname{tg} \alpha = (5/2)kgtr/(r\omega_0), \quad (11.19)$$

где  $\omega_0$  — вертикальная угловая скорость. Она в процессе движения не меняется. Момент начала чистого качения (без проскальзывания)  $t_n$  определяется из (11.16) и (11.18) при условии  $v = \omega_r r$ :

$$t_n = 2v_0/(7kg). \quad (11.20)$$

Подставляя это в (11.19), находим угол наклона в момент начала качения.

Рассмотрим теперь вращение тел, при котором **ось вращения не совпадает с осью симметрии** тела, и полный момент количества движения не направлен вдоль оси вращения, а вращается вокруг нее. Про-

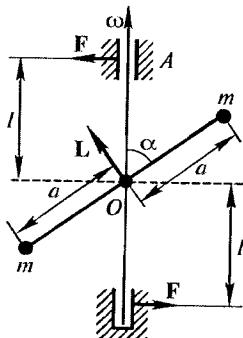


Рис. 11.15

стейший пример такого движения (№ 11.23) — вращение двух точечных масс ( $m$ ), укрепленных на невесомой штанге длиной  $2a$ , которая закреплена на оси вращения под углом  $\alpha$  (рис. 11.15). Ось вставлена в подшипники, находящиеся от точки закрепления штанги на расстоянии  $l$ , и вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Линейные скорости масс определяются векторным произведением

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{a}. \quad (11.21)$$

Импульсы масс представляют так называемую пару — одинаковые по абсолютной величине векторы, идущие вдоль параллельных линий в противоположных направлениях. Сумма таких векторов равна нулю, а момент (в данном случае импульса) не зависит от положения полюса (точки, относительно которой он вычисляется).

На рис. 11.15 видно, что полный момент импульса системы

$$\mathbf{L} = m2a \times \mathbf{v}. \quad (11.22)$$

Используя (11.21), для момента импульса системы получаем

$$\mathbf{L} = 2ma \times \mathbf{v} = 2ma \times (\omega \times \mathbf{a}) = 2m[\omega a - \mathbf{a}(\omega a)]. \quad (11.23)$$

Здесь использована формула для двойного векторного произведения (см. И.Н. Бронштейн, К.А. Семеняев. Справочник по математике).

Этот вектор перпендикулярен к  $\mathbf{a}$  и вращается вокруг оси, проходящей через подшипники. Его длина равна

$$L = 2ma^2\omega \sin \alpha. \quad (11.24)$$

Изменение момента импульса связано с моментом внешних сил ( $F$ ), приложенных в подшипниках. Эти силы можно найти из условия равновесия — равенства момента центробежных сил, действующих на массы, моменту сил в подшипниках

$$F = m\omega^2 a^2 \sin \alpha \cos \alpha / l. \quad (11.25)$$

С другой стороны, можно использовать уравнение вращательного движения

$$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M} = 2\mathbf{l} \times \mathbf{F}. \quad (11.26)$$

Так как  $\mathbf{l} = l\omega/\omega$  и  $d\mathbf{l}/dt = \omega \times \mathbf{l}$ , то

$$\omega \times (2\mathbf{F}/\omega - \mathbf{L}) = 0. \quad (11.27)$$

Это уравнение в общем случае удовлетворяется, если

$$F = \omega L/(2l) + A\omega. \quad (11.28)$$

Здесь  $A$  — некоторая функция, определяющая составляющую силы в направлении оси вращения, так как первый член, который при подстановке (11.23) дает выражение

$$m[\omega^2 a^2 - a(\omega a)\omega^2]/(\omega l) = m(\omega a)[\omega(\omega a) - a\omega^2]/(\omega l),$$

проекция которого на направление  $\omega$  дает нуль. Проекция силы (11.28) на направление, перпендикулярное  $\omega$ , приводит к соотношению (11.25).

В случае весомого сплошного **стержня** (вместо точечных масс), закрепленного на оси вращения под углом  $\alpha$  (№ 11.24), решение усложняется лишь необходимостью интегрирования по длине стержня (при вычислении момента импульса и момента сил).

В заключение — о **вращении стержня** длиной  $l$  и массой  $m$ , подвешенного за конец к центробежной машине, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , таким образом, что он может отклоняться от равновесного положения в поле тяжести (№ 11.3). Решение находится из равенства момента силы тяжести моменту центробежных сил

$$mgl/2 \sin \alpha = \int_0^l (m/l) \omega^2 x^2 dx \sin \alpha \cos \alpha = ml^2 \sin \alpha \cos \alpha / 3.$$

Отсюда  $\cos \alpha = 3g/(2\omega^2 l)$ . Важно отметить, что отклонение стержня возможно лишь при достаточно большой скорости вращения, начиная со значения, когда косинус равен единице.

## 12. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

**Инерциальные системы отсчета** — это системы, в которых выполняется первый закон Ньютона: свободное тело (отсутствует или скомпенсировано взаимодействие с другими телами) сохраняет состояние покоя или равномерного (с постоянной скоростью) движения. Всякая инерциальная система движется с постоянной скоростью относительно другой. Система отсчета, двигающаяся с ускорением относительно инерциальной системы, уже не будет инерциальной. Тело, покоящееся или двигающееся с постоянной скоростью в инерциальной системе, в системе отсчета, движущейся относительно нее с ускорением, имеет ускорение. Чтобы в этой **неинерциальной** системе пользоваться вторым законом Ньютона, надо ввести фиктивные (**инерционные**) силы. В системе отсчета, двигающейся **поступательно с ускорением  $a$** , на массу  $m$  действует сила инерции  $F_i = -ma$ . Минус показывает, что сила направлена противоположно ускорению. Такую силу ощущает каждый, кто находится в резко затормозившем автомобиле.

Силы инерции складываются с реальными силами, например, силами тяжести как векторы. В вагоне, движущемся с ускорением  $a$ , для определения периода колебаний математического маятника (№ 12.1) — вместо ускорения свободного падения (напряженности гравитационного поля)  $g_0$  надо брать сумму  $\mathbf{g} = (g_0^2 + a^2)^{1/2}$  (векторное сложение). В ракете (№ 12.2) и в поднимающемся лифте геометрическое сложение векторов дает  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{a}$ .

При решении некоторых задач могут возникнуть затруднения. Например, на вопрос, в каком направлении отклоняется пламя свечи, стоящей на столике в вагоне, скорость которого уменьшается, а всякими перемещениями воздуха внутри вагона можно пренебречь, часто отвечают, что вперед (по ходу поезда). Так отклонился бы маятник (груз на нитке), а шарик, наполненный гелием, отклонится в противоположном направлении. Пламя свечи — разогретый воздух, который вслыхивает вверх против суммы (геометрической) силы тяжести и силы инерции (в направлении выталкивающей силы Архимеда).

Если лифт, в котором висит груз на пружине, движется с медленно изменяющимся от нуля ускорением, то сила, действующая на груз, постепенно увеличивается (все время существует равновесие) и пружина (жесткостью  $k$ ) растягивается (от длины при начальном равновесии) на  $x = ma/k$ . Колебания при этом не возникает. Если же ускорение меняется скачком (до  $a$ ), то сразу нарушается равновесие и возникают колебания относительно положения равновесия с амплитудой  $x$  и частотой  $\omega = (k/m)^{1/2}$ .

Очевидно, что аналогичным образом можно рассмотреть и ускоренное движение в горизонтальном направлении (№ 12.3).

В системе отсчета, вращающейся относительно инерциальной, также появляются ускорения, для объяснения которых необходимо вводить фиктивные силы, чтобы пользоваться вторым законом Ньютона в том же виде, как в инерциальных системах.

На рис. 12.1 представлена движущаяся (с вращением) система координат, отмеченная штрихами. Положение начала координат этой системы  $O'$  определяется в неподвижной системе ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) вектором  $\mathbf{r}_0(t)$ . Относительно этой точки система вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Единичные векторы вдоль осей координат меняются со временем только по направлению

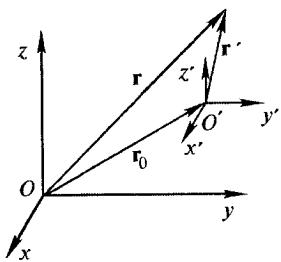


Рис. 12.1

$$d\mathbf{i}'/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}', d\mathbf{j}'/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}', d\mathbf{k}'/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}'. \quad (12.1)$$

Положение произвольной точки  $A$  в неподвижной системе определяется вектором  $\mathbf{r}$ , а в подвижной вектором  $\mathbf{r}'$ . Эти векторы связаны следующим образом

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'. \quad (12.2)$$

Производную вектора  $\mathbf{r}' = r_x \mathbf{i}' + r_y \mathbf{j}' + r_z \mathbf{k}'$  по времени можно записать

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}'/dt &= (dr'_x/dt)\mathbf{i}' + (dr'_y/dt)\mathbf{j}' + (dr'_z/dt)\mathbf{k}' + \mathbf{r}'_x(d\mathbf{i}'/dt) + \\ &+ \mathbf{r}'_y(d\mathbf{j}'/dt) + \mathbf{r}'_z(d\mathbf{k}'/dt) = \delta\mathbf{r}'/\delta t + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Для скорости точки  $A$  в подвижной системе координат использованы необычные обозначения дифференциалов, чтобы отличить от используемых в неподвижной системе. Дифференцируя (12.2) по

времени и используя (12.3), получаем **связь скоростей в неподвижной и подвижной системах координат**

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \quad (12.4)$$

Дифференцируем еще раз для получения **связи между ускорениями**. При дифференцировании скорости в подвижной системе координат действуем аналогично (12.3).

В результате имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2 = \\ &= \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + (\delta\boldsymbol{\omega}/dt) \times \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Уравнение движения тела массой  $m$  (второй закон Ньютона) имеет вид

$$m[\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + (\delta\boldsymbol{\omega}/dt) \times \mathbf{r}'] = \mathbf{F}, \quad (12.6)$$

где  $\mathbf{a}_0$  — ускорение движения начала координат подвижной системы относительно неподвижной;  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость вращения подвижной системы;  $\mathbf{r}'$  — координата в подвижной системе;  $\mathbf{v}' = (\delta\mathbf{r}'/\delta t)$  — скорость и  $\mathbf{a}' = (\delta\mathbf{v}'/\delta t)$  — ускорение тела массой  $m$  относительно подвижной системы координат.

Для того чтобы записать уравнение Ньютона в неинерциальной системе в такой же форме, как для инерциальных систем, надо вводить силы инерции

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \sum \mathbf{F}_i. \quad (12.7)$$

Следует подчеркнуть, что **силы инерции** — это следствие выбора системы отсчета. В этом их отличие от сил, обусловленных взаимодействием тел, таких как гравитационные, электрические, силы трения, которые не зависят от выбора системы координат. Для некоторых инерциальных сил введены специальные названия.

**Силой Кориолиса** называется

$$\mathbf{F}_k = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. \quad (12.8)$$

**Центробежной силой** называется

$$\mathbf{F}_u = m\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}'_\perp. \quad (12.9)$$

В эту формулу входит компонента радиуса-вектора перпендикулярная оси вращения. Силы, скорость и соответствующие радиусы-векторы показаны на рис. 12.2 для вращения с постоянной угловой скоростью.

Следует отметить, что благодаря линейности (12.9) по расстоянию от оси вращения, для тела конечных размеров центробежную силу, действующую на тело, можно считать сосредоточенной в центре масс тела (№ 12.76), так как угловая скорость всех частей твердого тела одинакова

$$F_{\text{ц}} = \int_M \omega^2 r'_\perp dm = \omega^2 \int_M r'_\perp dm = \omega^2 R'_\perp M,$$

где  $M$  — масса тела, а  $R'_\perp$  — расстояние центра масс от оси вращения.

Из (12.9) видно, что относительно оси вращения момент центробежных сил равен нулю. В том числе и в случае, когда ось вращения проходит через центр масс (№ 12.77).

Так как в твердом теле для всех его частей одинаковы и угловая скорость, и относительная скорость поступательного движения (вращение можно присоединить к угловой скорости), то в формулу (12.8) для равнодействующей сил инерции входит масса всего тела и скорость центра масс (№ 12.78).

Простейшая задача связана с движением тела массой  $m$  вдоль трубы или стержня, вращающегося в горизонтальной плоскости. О напряжениях во вращающемся стержне (№ 12.56) см. в разд. 13 «Упругие деформации». При отсутствии трения движение тела вдоль трубы определяется центробежной силой (12.9). Обозначая расстояние тела от оси вращения  $r$ , получаем уравнение движения

$$md^2r/dt^2 = m\omega^2 r. \quad (12.10)$$

Интеграл этого уравнения можно получить, написав ускорение через скорость

$$d^2r/dt^2 = v dv/dr = \omega^2 r. \quad (12.11)$$

В результате получаем решение, зависящее от двух констант

$$r = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}. \quad (12.12)$$

Например, можно задать положение и скорость тела в начальный момент (№ 12.37). Если в начальный момент тело находилось на середине трубы (при  $r = l/2$ ) и его скорость была равна нулю, то  $A + B = l/2$  и  $A - B = 0$ . Таким образом,  $A = B = l/4$ . Для определения

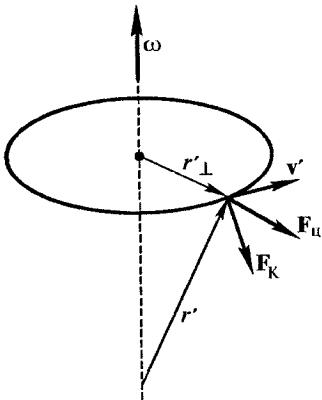


Рис. 12.2

ния времени  $\tau$  движения тела до конца трубы из (12.12) получаем квадратное уравнение. Решение его  $e^{\omega\tau} = 2 + \sqrt{3}$ . Взят только корень с плюсом, так как экспонента при положительных значениях  $\tau$  больше единицы.

**Положение** тела в любой момент времени, если первоначально оно покоялось на расстоянии от оси, равном  $a$  (№ 12.42), определяется из (12.12) уравнением

$$r = a(e^{\omega t} + e^{-\omega t})/2 = a/ch(\omega t). \quad (12.13)$$

Момент импульса тела  $L = mr^2\omega$  со временем растет. Момент сил  $M$  равен производной по времени от момента импульса. Чтобы угловая скорость трубы, по которой скользит тело, не менялась при изменении положения тела, должно быть

$$M = 2m\omega r dr/dt = m\omega^2 a^2 (e^{2\omega t} - e^{-2\omega t}) = 2m\omega^2 a^2 sh(2\omega t). \quad (12.14)$$

Если тело первоначально находилось на оси вращения и имело начальную скорость, равную нулю (№ 12.41), то его скорость из (12.11)

$$v^2/2 = \omega^2 r^2/2 \text{ и } v = \omega r. \quad (12.15)$$

Это соответствует тому, что кинетическая энергия равна работе центробежной силы.

Для достижения центра тело должно получить  $v > \omega r$  (№ 12.36).

При вылете из трубы длиной  $l$  тело имеет скорость вдоль трубы  $v = \omega l$ . Такую же скорость имеет конец трубы относительно неподвижной системы. Полная скорость вылетевшего тела относительно неподвижной системы будет равна  $\sqrt{2}\omega l$  и направлена под углом  $45^\circ$  к направлению трубы в этот момент.

Если после вылета тело попадает на горизонтальную поверхность и скорость его тормозится за счет трения с коэффициентом трения  $k$  (№ 12.40), то путь его определяется из равенства работы сил трения кинетической энергии тела в момент вылета

$$L = v/(2kg) = \omega^2 l^2/(kg). \quad (12.16)$$

Во вращающейся трубке могут находиться, например, два одинаковых тела, связанных нерастяжимой нитью (№ 12.45). Если в начальный момент движения одно тело находилось на оси вращения, а второе на расстоянии  $l/2$  от оси, то потенциальная энергия тел в поле центробежных сил равна  $[m\omega^2(l/2)^2]/2$ . Очевидно, что тело, находящееся дальше от оси, тянет другое. Нить все время натянута, и скорости тел одинаковы. В момент выхода одного тела

из трубы кинетическая энергия тела равна разности потенциальных энергий

$$2mv^2/2 = m\omega^2[(l/2)^2 + l^2 - (l/2)^2].$$

Откуда  $v = \omega l(2)^{-1/2}$ . В лабораторной системе отсчета, относительно которой происходит вращение трубы, конец трубы имеет скорость  $\omega l$ , а вылетевшее тело

$$v = (\omega^2 l^2 + \omega^2 l^2/2)^{1/2} = \omega l(3/2)^{1/2}.$$

Сила, действующая на тело, определяется (12.9). Работа  $A$  по продвижению против этой силы при движении от внешнего конца трубы к оси вращения (№ 12.38) равна

$$A = m\omega^2 l^2/2. \quad (12.17)$$

Если имеется трение тела о трубку, то к (12.17) надо добавить работу сил трения. При этом надо учесть, что нормальное давление на трубку складывается из силы тяжести и силы Кориолиса. При постоянной скорости перемещения (№ 12.39) сила Кориолиса постоянна и ее геометрически складываем с силой тяжести. Работа сил трения будет равна

$$A_t = kml(4\omega^2 v^2 + g^2)^{1/2}.$$

При некотором трении возможно, что скорость тела, которое первоначально находилось на расстоянии  $r_0$  от оси вращения и имело скорость  $v_0$ , будет меняться следующим образом (№ 12.48)

$$v = v_0 r/r_0. \quad (12.18)$$

Найдем коэффициент трения, при котором это возможно. Используя (12.10) и предполагая, что тяжестью можно пренебречь, а учитывать только силу Кориолиса, получаем

$$md^2r/dt^2 = m\omega^2 r - k2mv\omega. \quad (12.19)$$

После некоторого преобразования имеем

$$vdv/dr = vv_0/r_0 = \omega^2 vr_0/v_0 - 2kv\omega. \quad (12.20)$$

Отсюда получаем  $k = \omega r_0/(2v_0) - v_0/(2\omega r_0)$ . Очевидно, чтобы коэффициент трения был положительным, должно выполняться  $\omega r_0 > v_0$ .

В случае, если можно пренебречь силой тяжести и центробежной силой (№ 12.79), уравнение движения имеет вид

$$mdv/dt = -k2m\omega v.$$

Решение его при условии, что в начальный момент тело находилось на оси вращения и его скорость была равна  $v_0$ , имеет вид

$$dr/dt = v = v_0 e^{-2k\omega t}.$$

Интегрируя это уравнение, можно получить связь длины трубы  $l$  и времени движения до конца трубы  $\tau$

$$l = v_0(1 - e^{-2k\omega \tau})/(2k\omega).$$

При учете центробежной силы, силы Кориолиса и силы тяжести вместо (12.19) имеем

$$\begin{aligned} md^2r/dt^2 &= mdv/dt = mvdv/dr = \\ &= m\omega^2 r - km(g^2 + 4v^2\omega^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Если вместо некоторого частного условия типа (12.18) ставится условие, что скорость тела уменьшается до расстояния  $r_1$ , а затем начинает увеличиваться (№ 12.49), то из (12.21) для уменьшения скорости начиная от точки  $r = r_0$

$$k > \omega^2 r_0 / (g^2 + 4\omega^2 v_0^2)^{1/2}. \quad (12.22)$$

Скорость уменьшается и в точке  $r = r_1$  достигает минимума, условия которого

$$dv/dr = 0; \quad (12.23)$$

$$d^2v/dr^2 > 0. \quad (12.24)$$

Из первого условия и (12.21) получаем

$$v_{\min}^2 = (\omega^4 r_1^2 / k^2 - g^2)(4\omega^2). \quad (12.25)$$

Чтобы скорость была действительным числом, должно быть

$$k < \omega^2 r_1 / g. \quad (12.26)$$

Легко (простым дифференцированием) убедиться, что условие минимума (12.24) выполняется автоматически.

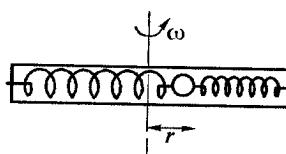


Рис. 12.3

Рассмотрим движение тела внутри гладкой (без трения) трубы, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  относительно вертикальной оси, проходящей через ее середину, которое прикреплено одинаковыми пружинами к концам трубы (№ 12.43). Обозначая расстояние тела от оси вращения  $r$  (рис. 12.3),

а жесткость пружин  $k$  и используя (12.10), получаем уравнение движения

$$md^2r/dt^2 = m\omega^2r - 2kr. \quad (12.27)$$

Величина силы действия пружин не зависит от их натяжения в положении равновесия. Это показано на рис. 12.4. Разность действия пружин всегда равна  $2kr$ .

Из (12.27) получаем уравнение колебаний

$$d^2r/dt^2 + (2k/m - \omega^2)r = 0. \quad (12.28)$$

Общее решение

$$r = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t, \quad (12.29)$$

где  $\Omega = (2k/m - \omega^2)^{1/2}$ .

Если описанную выше трубку с телом и пружинами вращать на некоторой штанге, прикрепленной перпендикулярно к середине трубы (№ 12.63), как показано на рис. 12.5, то вместо (12.27) получаем

$$md^2x/dt^2 = m\omega^2h(x/h) - 2kx.$$

Частота колебаний будет той же.

Если в начальный момент тело во вращающейся трубке (см. рис. 12.3) поконится на расстоянии  $l$  от оси вращения, то дальнейшее его движение описывается зависимостью, следующей из (12.29):

$$r = l \cos \Omega t. \quad (12.30)$$

Такое колебательное движение происходит при условии, что

$$\Omega^2 = 2k/m - \omega^2 > 0. \quad (12.31)$$

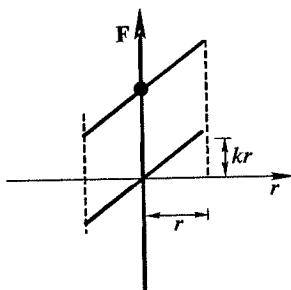


Рис. 12.4

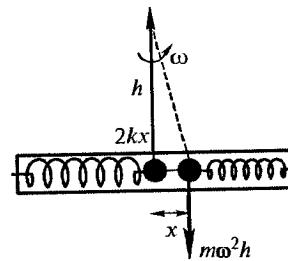


Рис. 12.5

В случае равенства этого соотношения нулю движение отсутствует. При  $m\omega^2 > 2k$  общее решение

$$r = Ae^{pt} + Be^{-pt}, \quad p = (\omega^2 - 2k/m)^{1/2}. \quad (12.32)$$

Учитывая начальные условия, получаем

$$r = l(e^{pt} + e^{-pt})/2 = l/ch(pt). \quad (12.33)$$

При слабых пружинах движение неустойчиво, и тело доходит до края трубки.

Можно проследить, как меняется движение тела при **медленном увеличении угловой скорости вращения трубки** (№ 12.46). При отсутствии вращения малые колебания, как это следует из (12.28) и (12.31), происходят с частотой  $\Omega_0 = (2k/m)^{1/2}$ . С появлением вращения частота будет определяться формулой (12.31). Для расчета амплитуды колебаний воспользуемся тем, что угловая скорость меняется очень медленно, и можно пренебречь работой раскручивающего момента, т. е. подводом энергии. Тогда не меняется энергия колебаний, которая до раскручивания была равна  $kl_0^2/2$ . Здесь  $l_0$  — амплитуда до раскручивания. При вращении трубы с угловой скоростью  $\omega$  на тело действуют упругая сила пружины и центробежная (противоположно направленная)  $kr - m\omega^2 r$ . Работа этих сил равна начальной энергии колебаний

$$kl_0^2/2 = kl^2/2 - m\omega^2 l^2/2.$$

Отсюда получаем

$$l = l_0 \left(1 - \omega^2/\Omega_0^2\right)^{-1/2}.$$

Тело можно с помощью пружины прикрепить к **точке на оси вращения** (№ 12.44). Используя (12.10), уравнение движения тела с учетом действия пружины, длина которой в ненапряженном состоянии равна  $a$ , получаем

$$md^2r/dt^2 = m\omega^2 r - k(r - a). \quad (12.34)$$

Отсюда следует уравнение для осциллятора со смешенным положением равновесия

$$d^2r/dt^2 + (k/m - \omega^2)[r - ka/(k - m\omega^2)] = 0. \quad (12.35)$$

Положение равновесия

$$r_0 = ka/(k - m\omega^2). \quad (12.36)$$

Эта величина не должна превышать длину трубы  $l$ . Откуда следует ограничение частоты вращения  $\omega^2 < k(1 - a/l)/m$ . Период малых колебаний из (12.35)

$$T = 2\pi[m/(k - m\omega^2)]^{1/2}, \Omega = 2\pi/T = (k/m - \omega^2)^{1/2}. \quad (12.37)$$

Отсюда можно найти, при какой скорости вращения давление на стенку трубы будет максимальным (№ 12.50). Обозначая отклонения от равновесия  $x$ , имеем

$$x = A \sin \Omega t, v = dx/dt = A\Omega \cos \Omega t. \quad (12.38)$$

Таким образом, давление, создаваемое силой Кориолиса (12.8), будет пропорционально  $\omega\Omega = \omega(k/m - \omega^2)^{1/2}$ . Для нахождения максимума приравниваем производную этого выражения по  $\omega$  нулю. Получаем, что максимальное давление на стенку будет при  $2\omega^2 = k/m$ .

Работу сил трения о боковую поверхность из-за силы Кориолиса за период колебания (№ 12.51) вычисляем с помощью (12.8) и (12.38).

При решении уравнения (12.34) используют

$$\mu 2m\omega A^2 \Omega \int_0^{2\pi} \cos^2(\Omega t) d(\Omega t) = 2\pi\mu m\omega A^2.$$

Трубка может составлять с осью вращения угол  $\alpha$  (№ 12.55). На рис. 12.6 показаны силы, действующие на тело. В уравнение (12.34) надо добавить силу тяжести. Проектируя силы на направление трубы, получаем

$$md^2r/dt^2 = m\omega^2 r \sin^2 \alpha - k(r - a) - mg \cos \alpha$$

или

$$d^2r/dt^2 + (k/m - \omega^2 \sin^2 \alpha)[r - (ka - mg \cos \alpha)/(k - m\omega^2 \sin^2 \alpha)] = 0. \quad (12.39)$$

Положение равновесия определяется равенством нулю второй производной. Равновесие будет при

$$r_p = (ka - mg \cos \alpha)/(k - m\omega^2 \sin^2 \alpha).$$

Для отклонений от положения равновесия  $x = r - r_p$  из (12.39) получаем

$$d^2x/dt^2 + (k/m - \omega^2 \sin^2 \alpha)x = 0.$$

Для устойчивости положения равновесия это уравнение должно быть уравнением гармонических колебаний. Это выполняется при положительном выражении в скобках.

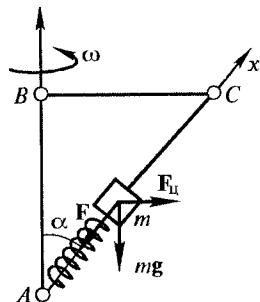


Рис. 12.6

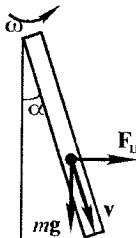


Рис. 12.7

Максимальное давление тела на стенку трубы в момент прохождения положения равновесия (№ 12.61) получаем из (12.38) и (12.8).

Рассмотрим движение тела в наклонной трубке без пружины (рис. 12.7). В начальный момент тело находилось вблизи оси вращения. Затем оно разгоняется центробежной силой и силой тяжести. Работа этих сил равна кинетической энергии

$$\int_0^l \left( mg \cos \alpha + m\omega^2 x \sin^2 \alpha \right) dx = m v^2 / 2.$$

Есть момент, когда сила, действующая на стенку трубы, перпендикулярна плоскости, проходящей через  $\omega$  и  $v$ , и определяется из равенства компонент центробежной силы и силы тяжести:

$$mg \sin \alpha = m \omega^2 l \sin \alpha \cos \alpha.$$

В этот момент на стенку трубы действует только сила Кориолиса (№ 12.62), которую можно вычислить по (12.8).

Если тело находится на гладкой вращающейся горизонтальной поверхности и совершает колебания в направлении к оси вращения (№ 12.64), то период колебаний определяется (12.37).

Рассмотрим случай **нелинейной** зависимости упругой силы пружины (№ 12.47)

$$F = k [(r - r_0)/r_0]^2. \quad (12.40)$$

Здесь  $r_0$  — длина пружины в свободном состоянии.

При вращении трубы с угловой скоростью  $\omega$  для положения равновесия ( $r_p$ ) получаем

$$m\omega^2 r_p = k [(r_p - r_0)/r_0]^2 = k [\Delta l/r_0]^2. \quad (12.41)$$

При отклонении от положения равновесия на  $x$  для колебаний имеем

$$md^2x/dt^2 = m\omega^2(r_p + x) - k [(\Delta l + x)/r_0]^2. \quad (12.42)$$

Последний (нелинейный) член разлагаем, считая отклонения  $x$  малыми, а затем используем условие равновесия. Откуда получаем

$$md^2x/dt^2 + (2k \Delta l/r_0^2 - m\omega^2)x = 0. \quad (12.43)$$

Выражение для  $\Delta l$  берем из (12.41).

Для **изогнутых трубок** в поле центробежных сил, которые являются консервативными, т. е. зависят только от расстояния от оси

вращения, можно вычислить изменение потенциальной энергии. Сила Кориолиса всегда направлена перпендикулярно скорости движения и работы не совершает. Она определяет силу трения, как нормальное давление, когда существенно трение между телом и трубкой. Если трением можно пренебречь, то кинетическая энергия и, следовательно, модуль скорости определяются изменением потенциальной энергии в соответствии с (12.15). После вылета из трубы скорость тела в неподвижной (лабораторной) системе отсчета является геометрической суммой скорости из (12.15) и скорости конца трубы, имеющей ту же абсолютную величину. При направлении конца трубы в сторону движения конца скорость удваивается, при противоположном направлении равна нулю.

В гладкой трубке радиусом  $r$  в виде **полого тора** (радиусом  $R \gg r$ ), вращающегося относительно некоторой точки на стенке тора вокруг вертикальной оси, перпендикулярной плоскости тора, с угловой скоростью  $\omega$  (№ 12.30) тело, первоначально покоявшееся вблизи оси вращения в самой дальней от оси вращения точке, имеет скорость относительно тора  $2\omega R$ , а относительно неподвижной системы отсчета либо  $4\omega R$ , либо нулю.

Тело, помещенное в торе в самую дальнюю от оси вращения точку, будет находиться в равновесии. Вычислим период малых колебаний тела относительно положения равновесия (№ 12.54). При малом размере тела его движение будет соответствовать колебаниям математического маятника, подвешенного в центре тора и находящегося в поле центробежных сил, действующих на тело вблизи положения равновесия. Поэтому в формулу для периода математического маятника  $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$  надо вместо  $l$  поставить  $R$ , а вместо  $g$  напряженность поля центробежных сил в точке расположения тела  $\omega^2 R$ :

$$T = (2)^{1/2} \pi / \omega.$$

Если на расстоянии  $R$  от оси вращения подвесить стержень длиной  $L$  и массой  $m$  (физический маятник) (№ 12.65), то получаем уравнение колебаний

$$(mL^2/3) d^2 \phi / dt^2 = -(m/L) \omega^2 \phi \int_0^L (R + x) dx.$$

После интегрирования для частоты малых колебаний имеем

$$\Omega = \omega [(3/2)R/L + 1]^{1/2}.$$

В трубке, изогнутой под **прямым углом** и вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  в горизонтальной плоскости (рис. 12.8), работа по пе-

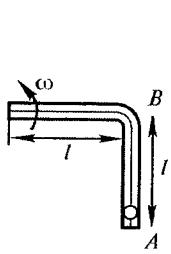


Рис. 12.8

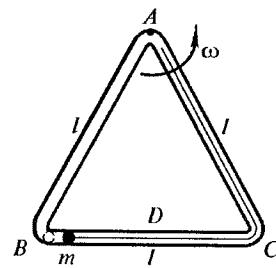


Рис. 12.9

ремещению тела массой  $m$  из точки  $A$  в точку  $B$  (№ 12.52) вычисляется по (12.17)

$$m\omega^2(2l^2 - l^2)/2 = m\omega^2l^2/2.$$

Для трубки в виде равностороннего треугольника (рис. 12.9) работа по перемещению тела из точки  $B$  в точку  $D$  (№ 12.53) по (12.17) равна  $m\omega^2(2l^2 - 3l^2/4)/2 = m\omega^2l^2/8$ . При дальнейшем движении до точки  $C$  происходит превращение потенциальной энергии в кинетическую.

Рассмотренные выше методы решения задач о движении вдоль трубы (или стержня) можно использовать в задачах о движении на карусели (горизонтальном диске), вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ .

Едущий по карусели вдоль радиуса от края к центру **велосипедист** (№ 12.32) должен наклониться, чтобы геометрическая сумма силы тяжести ( $mg$ ) и силы Кориолиса (12.8) лежала в плоскости велосипеда (рамы). Для угла наклона  $\alpha$  получаем  $\tan \alpha = \pi nv/(15g)$ . Здесь  $n$  — число оборотов карусели в минуту, а  $v$  — скорость велосипедиста. При угловой скорости, направленной вверх (вращение против часовой стрелки при взгляде сверху), сила Кориолиса тянет вправо. Следовательно, велосипед надо наклонить влево.

Когда по вращающейся карусели от края к центру с постоянной скоростью идет **человек** (№ 12.33), то он должен наклоняться вбок подобно велосипедисту. Кроме того, он должен наклоняться вперед против центробежной силы на угол  $\beta$ , который определяется соотношением  $\tan \beta = \omega^2 r/g$ . Этот угол уменьшается по мере уменьшения расстояния до оси вращения  $r$ .

**В самолете**, летящем по окружности в горизонтальной плоскости, соотношение между центробежной и гравитационной силами является таким же, как на карусели. Это позволяет определить поле,

действующее на маятник (№ 12.23). На пружинные часы это поле не действует. Напряженность поля (ускорение свободного падения) в этом самолете  $g' = (g^2 + v^4/R^2)^{1/2}$ . Так как ускорение увеличивается по сравнению со значением при прямолинейном полете, период маятниковых часов уменьшается. Они покажут большее время

$$t' = tT/T' = t(g'/g)^{1/2} = t[1 + v^4/(gR)^2]^{1/4}.$$

Естественно, что пол салона самолета перпендикулярен суммарному полу. Направление положения равновесия маятника перпендикулярно полу (№ 12.22). Если наклон равен  $\alpha$ , то  $g' = g/\cos\alpha$ .

Можно пол **карусели** изогнуть симметрично относительно оси вращения, которую обозначим  $z$ , чтобы тела покоились на таком полу. Нормаль к поверхности должна составлять с осью вращения угол  $\beta$ . Поэтому

$$dz/dr = \omega^2 r/g \text{ и } z = z_0 + \omega^2 r^2/(2g).$$

Суммарное поле силы тяжести и центробежной силы определяется и вращения так называемых **конических маятников**. Примером физического конического маятника является вращение стержня длиной  $l$  и массой  $m$ , подвешенного (шарнирно) за конец (№ 12.24). Угол отклонения от оси вращения определяется равенством моментов силы тяжести и силы инерции

$$mg(l/2)\sin\alpha = \int_0^l (m/l) dx \omega^2 x \sin\alpha \cos\alpha. \quad (12.44)$$

После интегрирования получаем

$$\omega^2 = 3g/(2l\cos\alpha).$$

Сила реакции в точке подвеса (№ 12.82) складывается из вертикальной компоненты  $mg$  и горизонтальной  $m\omega^2 l \sin\alpha/2$ . Видно, что направление силы реакции не совпадает с направлением стержня.

Если стержень подведен не за конец, а так, что от одного конца до точки подвеса расстояние  $a$ , а от другого  $b$  (№ 12.25), то равенство моментов дает

$$mg(a - b)/2 = \omega^2 \cos\alpha m(a^3 + b^3)/[3(a + b)].$$

Стержень, подвешенный за конец в точке на оси, может совершать небольшие колебания в вертикальной плоскости (№ 12.81). Вводя угол отклонения при колебаниях  $\phi$  и используя выражения для моментов, вошедших в (12.44), получаем уравнение колебаний

$$(ml^2/3) d^2\phi/dt^2 = -(1/2) mg l \sin(\alpha + \phi) + (1/6) m\omega^2 l^2 \sin[2(\alpha + \phi)].$$

При малых углах  $\phi$  получаем

$$d^2\phi/dt^2 + [(3/2)(g/l) \cos \alpha - \omega^2 \cos(2\alpha)]\phi = 0.$$

Отсюда получаем частоту колебаний.

Если на стержень прикрепить **дополнительную массу** (№ 12.83), то надо это учесть в моменте инерции и моментах сил.

Можно стержень подвесить за конец на вертикальной стойке, расположенной, например, на карусели, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , на расстоянии  $R = 3l$  от оси вращения (№ 12.84). В таком случае уравнение колебаний стержня в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси, перпендикулярной к этой плоскости при угле отклонения в равновесии  $\alpha = 30^\circ$ :

$(ml^2/3)d^2\phi/dt^2 = -(1/2)mgl\sin\phi + (1/6)m\omega^2 l^2 \sin 2\phi + (3/2)ml\omega^2 \cos\phi$ , откуда находим частоту колебаний:

$$\Omega^2 = (37/40)(3)^{1/2} g/l.$$

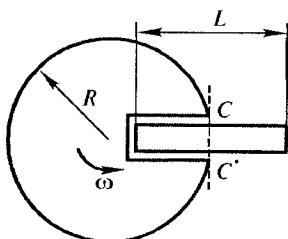


Рис. 12.10

Если стержень подвесить на оси, проходящей через его центр тяжести, то возвращающий момент сил создают только центробежные силы. Подвесить стержень можно и на вращающемся диске (№ 12.66), как показано на рис. 12.10. В щели диска радиусом  $R$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , находится стержень длиной  $L$ , который может вращаться на оси  $CC'$ , проходящей через его центр масс, закрепленной на

краю диска. Для определения периода малых колебаний стержня, надо написать уравнение вращения стержня на оси  $CC'$ . Так как центробежная сила меняется с расстоянием от оси, рассматриваем элементарный момент, действующий на симметричные относительно оси  $CC'$  элементы стержня

$$\begin{aligned} dM(x) &= dm\omega^2 [(R + x\cos\phi) - (R - x\cos\phi)]x\sin\phi = \\ &= 2dm\omega^2 x^2 \cos\phi \sin\phi \cong 2\omega^2 \phi (m/L)x^2 dx. \end{aligned}$$

Здесь  $\phi$  — угол между стержнем и поверхностью диска,  $x$  — расстояние рассматриваемого элемента стержня от оси  $CC'$ .

Момент, действующий на весь стержень,

$$M = 2(m/L)\phi \int_0^{L/2} x^2 dx = \left(m L^2/12\right)\omega^2 \phi.$$

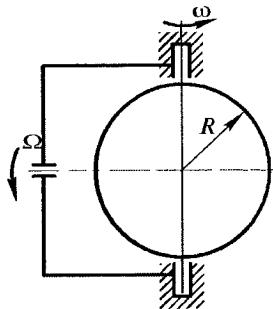


Рис. 12.11

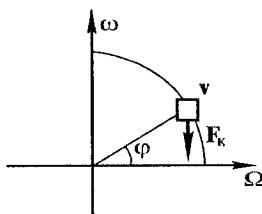


Рис. 12.12

При увеличении угла отклонения стержня момент будет направлен против увеличения угла, и следовательно,

$$Id^2\phi/dt^2 = -(mL^2/12)\omega^2\phi.$$

Так как момент инерции стержня  $I = mL^2/12$ , то  $\phi'' + \omega^2\phi = 0$  и период колебания стержня  $T = 2\pi/\omega$ .

Рассмотрим теперь вращение во вращающейся системе. Представим это таким образом. Ось вращается с угловой скоростью  $\Omega$ , а на этой оси с угловой скоростью  $\omega$  вращается обруч (рис. 12.11) радиусом  $R$  и массой  $m$ . Найдем максимальный момент, действующий на подшипники, в которых вращается обруч (№ 12.59). Центробежные силы, действующие на элементы обруча, из-за симметрии дают нулевой момент. Момент создают силы Кориолиса. Максимальный момент будет тогда, когда линейные скорости элементов обруча будут перпендикулярны  $\Omega$ . Из-за симметрии моменты одинаковы от каждой четверти обруча, показанной на рис. 12.12. Максимальный момент получаем интегрированием, учитывая, что  $dm = mRd\phi/(2\pi R)$ :

$$M = 4 \int_0^{\pi/2} 2dm\Omega\omega R \cos\phi \cos\phi R = 4m\Omega\omega R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\phi d\phi = m\Omega\omega R^2.$$

Если человек идет по троллейбусу, движущемуся со скоростью  $v$  по окружности радиусом  $R$  (соответствует вращению карусели с угловой скоростью  $\omega = v/R$ ), со скоростью  $u$  относительно троллейбуса (№ 12.26), то сумма сил Кориолиса (12.8) и центробежной (12.9)  $m\omega(\omega R + 2u)$ . Эта сила перпендикулярна силе тяжести, и поэтому угол наклона человека  $\alpha$  определяется уравнением  $\tan\alpha = v(v + 2u)/(gR)$ . Надо подчеркнуть, что простое сложение скоростей  $v$  и  $u$  и вычисление по этой сумме центробежной силы дало бы неправильный результат, так как человек идет по прямой, а не по окружности.

Рассмотрим движение пули от стрелка к мишени, которые находятся на карусели радиусом  $R$  в диаметрально противоположных точках (№ 12.19). Найдем, под каким углом  $\alpha$  к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень. Приближение будет в том, что скорость пули значительно превосходит максимальную линейную скорость вращающейся карусели  $\omega R$ . Пренебрегаем также влиянием центробежных сил, так как они лишь незначительно меняют скорость пули в направлении радиуса, по которому фактически движется пуля.

Задача интересна тем, что движение просто рассмотреть как в системе карусели (отклонение под действием силы Кориолиса) так и в системе, связанной с Землей. В первом случае (рис. 12.13):  $ms'' = F_K = 2m\omega v$  ( $s$  — смещение, перпендикулярное диаметру, вдоль которого направлена скорость в начальный момент),  $t = 2R/v$  и, следовательно,

$$s = \omega vt^2 = 4\omega R^2/v. \quad (12.45)$$

Угол, соответствующий этому смещению,  $\alpha = s/(2R) = 2\omega R/v$ . Изменением направления силы Кориолиса из-за изменения направления скорости пули в результате появления  $s$  пренебрегаем, так как эти изменения малы:

$$s = 2\omega vt = 2\omega 2R/v = 4\omega R \ll v.$$

Можно отметить, что в том же приближении  $\omega R \ll v$  можно траекторию движения пули считать окружностью, так как сила Кориолиса всегда перпендикулярна к направлению скорости, а центробежными силами мы пренебрегаем.

При решении в системе координат, связанной с Землей (рис. 12.14), необходимо учесть, что в момент вылета пуля имеет также нормальную к направлению ружья (за счет его движения вместе с каруселью) компоненту скорости  $v_1 = \omega R$ . При прохождении пулей рассто-

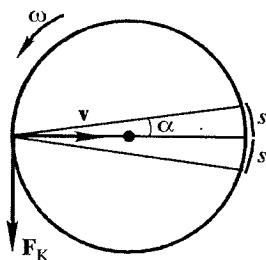


Рис. 12.13

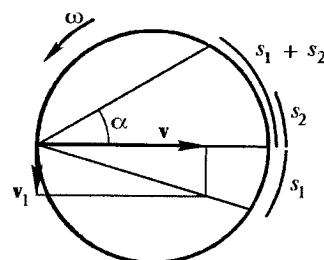


Рис. 12.14

яния  $2R$  это даст:  $s_1 = \omega R 2R/v$ . Так как за время полета пули и мишень уйдет в том же направлении на  $s_2 = \omega R 2R/v$ , то снова  $\alpha = 2\omega R/v$ .

Аналогично движению пули будет движение шайбы (№ 12.13) по медленно вращающейся ледяной площадке. Шайбу пускают перпендикулярно борту площадки, и она движется к противоположному борту и от него отскакивает. Смещение шайбы от линии начального движения, проходящего через ось вращения, при выходе на противоположную сторону площадки определяется по (12.45), где  $R$  надо заменить на  $l/2$ .

Отметим, что угловая скорость для твердого тела одинакова для всех точек, независимо от положения оси вращения. Для силы Кориолиса, которая определяет отклонение, нет зависимости от положения оси вращения в отличие от центробежной силы.

Отклонение пули можно компенсировать угловым ускорением вращения карусели (№ 12.20).

Из уравнений (12.5) и (12.7) следует, что боковое ускорение в системе отсчета, связанной с каруселью, определяется силой Кориолиса и угловым ускорением

$$\mathbf{a} = 2v \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\omega}/dt. \quad (12.46)$$

На рис. 12.15 показаны карусель, стрелок, мишень и пуля. Вектор угловой скорости направлен к нам, как и положительное угловое ускорение. Радиальное расстояние от оси вращения положительно выше точки  $O$  и отрицательно ниже

$$r = vt - R. \quad (12.47)$$

Угловая скорость

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + (d\boldsymbol{\omega}/dt)t. \quad (12.48)$$

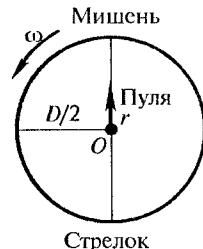


Рис. 12.15

Проектируем (12.41) на направление, перпендикулярное диаметру, соединяющему стрелку и мишень, и подставляем (12.42) и (12.43):

$$a = d^2x/dt^2 = 2v[\boldsymbol{\omega}_0 + (d\boldsymbol{\omega}/dt)t] + (vt - R)(d\boldsymbol{\omega}/dt). \quad (12.49)$$

Дважды интегрируем это уравнение по времени, учитывая, что в начальный момент боковое смещение и боковая скорость были равны нулю, и приравниваем результат нулю. В итоге получаем  $(d\boldsymbol{\omega}/dt) = -2v\boldsymbol{\omega}_0/R$ . Минус означает замедление.

Рассмотрим теперь вращение в вертикальной плоскости с учетом силы тяжести. Такое вращение будет, если автобус едет по горке радиусом  $R$  со скоростью  $v$ . В системе отсчета, связанной с автобусом

сом, пассажир идет противоположно направлению движения автобуса со скоростью  $u$ . Сумма сил по вертикали (тяжести, центробежная, Кориолиса и реакция пола) должна равняться нулю:

$$mg = mv^2/R - 2muh/R + N.$$

Для определения относительной потери веса (№ 12.28) получаем

$$(mg - N)/mg = v(v - 2u)/(Rg).$$

Чтобы «взлететь» (№ 12.27), т. е. чтобы было  $N = 0$ , должно быть  $u > gR/(2v) = v/2$ .

Если трубка, в которой без трения может двигаться **тело, прикрепленное пружиной** к точке на оси вращения, вращается в вертикальной плоскости (№ 12.80), то необходимо учесть действие силы тяжести. К уравнению (12.34) надо добавить вынуждающую силу

$$md^2r/dt^2 = m\omega^2r - k(r - a) + mg\cos(\omega t). \quad (12.50)$$

Для отклонения  $x$  от положения равновесия получаем

$$d^2x/dt^2 + \Omega^2x = g\cos(\omega t), \quad (12.51)$$

где  $\Omega^2 = k/m - \omega^2$ .

Свободные колебания происходят с частотой  $\Omega$  (12.37). Общее решение представляет сумму решений для свободных и частного решения для вынужденных. Частное решение для отклонения  $x$  от положения равновесия ищем в виде

$$x = A\cos(\omega t).$$

Дифференцируя это и подставляя в (12.51), получаем для  $A$ :

$$A = g/(\Omega^2 - \omega^2).$$

Можно рассмотреть **колебания математического маятника** во вращающейся системе отсчета, например, в космическом корабле в виде тора радиусом  $R$ , вращающегося со скоростью  $\omega$  (№ 12.60). Для математического маятника массой  $m$  и длиной  $l$  в искусственном поле тяжести с напряженностью (ускорением силы тяжести)

$$g = \omega^2R \quad (12.52)$$

колебания маятника происходят с частотой

$$\Omega = (g/l)^{1/2}. \quad (12.53)$$

и угол отклонения

$$\varphi = \varphi_m \sin(\Omega t), \quad (12.54)$$

где  $\varphi_m$  — угол максимального отклонения.

На маятник действуют: искусственная сила тяжести, которая является центробежной во вращающейся системе отсчета:

$$F_t = mg = m\omega^2 R, \quad (12.55)$$

сила Кориолиса из-за движения маятника со скоростью  $v = (d\phi/dt)l$  во вращающейся системе отсчета, связанной с тором:

$$F_K = 2m(d\phi/dt)l\omega \quad (12.56)$$

и центробежная сила вращения маятника относительно точки подвеса

$$F_u = m(d\phi/dt)^2 l. \quad (12.57)$$

На рис. 12.16 показаны силы, создающие натяжение маятника. Силы (12.56) и (12.57) зависят от скорости маятника, которая максимальна при прохождении маятником положения равновесия и из (12.54) равна  $\phi_m \Omega l$ . Сила Кориолиса при движении направо (положение 2) уменьшает натяжение нити, а при движении влево (положение 4) — увеличивает. Таким образом, разность натяжения нити

$$(F_{\max} - F_{\min})/(mg) = 2F_{K\max}/(mg) = 4\phi_m \Omega \omega l / (\omega^2 R). \quad (12.58)$$

Так как нет сил, действующих перпендикулярно плоскости качания маятника, то не будет изменения ее направления.

Земля является неинерциальной системой отсчета. При движении тел в этой системе отсчета надо учитывать центробежную силу и силу Кориолиса. Начнем с движений на экваторе. Центробежная сила приводит к уменьшению силы тяжести. Обычно ее учитывают путем изменения ускорения свободного падения. Обозначая угловую скорость вращения Земли  $\omega$  и радиус Земли  $R$ , для ускорения свободного падения на экваторе получаем

$$g' = g - \omega^2 R, \quad (12.59)$$

где  $g$  — ускорение без вращения, например на полюсе. Для гидростатического давления в центре в однородном шаре было получено (разд. 7, стр. 138)  $p = \rho g R$ . Обозначая радиус в направлении полюса  $R$ , а в направлении экватора  $R + \Delta R$  (больше из-за сплюснутости Земли), вследствие одинакового давления в центре и одинаковой плотности (предположение) получаем

$$gR = g'(R + \Delta R) = (g - \omega^2 R)(R + \Delta R).$$

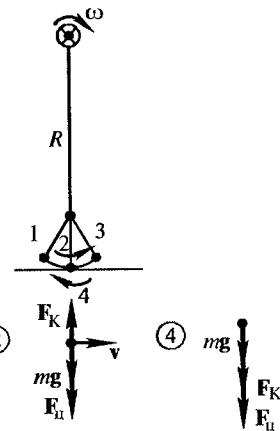


Рис. 12.16

Отсюда

$$\Delta R/R = 1/[2 + g/(\omega^2 R)].$$

Для получения числа (№ 12.75) можно подставить любые значения радиуса Земли и ускорения, так как они мало различаются.

На пулю, движущуюся над линией экватора (№ 12.10), кроме силы, определяемой (12.59), действует еще сила Кориолиса (12.8). Точки поверхности Земли на экваторе движутся на восток. Если пуля также летит на восток, то сила Кориолиса действует в том же направлении, что и центробежная, и уменьшает силу притяжения к Земле. При движении пули на запад сила Кориолиса добавляется к силе притяжения. Разница ускорений падения определяется силой Кориолиса  $\Delta a = 4\omega$ . Разница снижений за одну секунду пропорциональна разнице ускорений и равна  $\Delta s = 2\omega$ .

Аналогичным является и действие силы Кориолиса при **разбеге самолета** вдоль экватора (№ 12.31). Если подъемная сила пропорциональна квадрату скорости, то в момент отрыва самолета от Земли при разбеге с запада на восток  $mg' - 2m\omega v_{3B} = kv_{3B}^2$ , а при разбеге с востока на запад  $mg' + 2m\omega v_{3B} = kv_{3B}^2$ . При разбеге вдоль меридиана сила Кориолиса равна нулю. Если при этом скорость отрыва  $v_m$ , то получаем

$$v_{3B} - v_{3B} = 2\omega v_m^2/g'.$$

На стержень, вращающийся вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс стержня, на экваторе, также действует сила Кориолиса (№ 12.58). На ось вращения при этом действует изменяющийся момент сил. На рис. 12.17 показан стержень в двух положениях: в первом скорости частиц стержня параллельны оси вращения, и следовательно, силы Кориолиса и их момент равны нулю, во втором — силы Кориолиса и их момент максимальны. Обозначая угловую скорость вращения стержня  $\Omega$ , для момента сил Кориолиса, действующего на ось, получаем

$$M = 4\omega \int_0^{l/2} (m/l) dx \Omega xx = ml^2 \omega \Omega / 6.$$

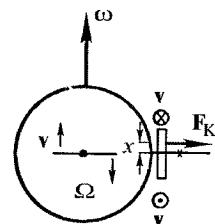


Рис. 12.17

Если на экваторе снаряд летит вертикально вверх, то сила Кориолиса (12.8) направлена на запад. Пока снаряд массой  $m$  движется в стволе орудия длиной  $l$  с постоянным ускорением  $a$ , он давит на

ствол (№ 12.16). Движение орудия массой  $M$ , которое может двигаться по рельсам вдоль линии экватора, описывается уравнением

$$(M + m)dv/dt = 2m\omega at.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем скорость орудия после вылета из него снаряда

$$v = 2m\omega l/(M + m).$$

Землю можно моделировать однородным по плотности шаром. В таком случае напряженность поля тяготения линейно зависит от расстояния от центра Земли. В плоскости экватора линейно меняется и ускорение свободного падения, так как центробежная сила также меняется линейно. Обозначая радиус Земли  $R$  и ускорение свободного падения на поверхности Земли  $g$ , для движения тела (расстояния от центра Земли  $r$  в зависимости от времени) по каналу вдоль радиуса получаем

$$d^2r/dt^2 = -gr/R = -\Omega^2r. \quad (12.60)$$

Это уравнение гармонических колебаний. Его решение

$$r = A\sin\Omega t + B\cos\Omega t.$$

Если в начальный момент тело покоялось на поверхности Земли, то  $r = R\cos\Omega t$  и скорость тела  $v = -R\Omega\sin\Omega t$ . Минус соответствует тому, что тело движется противоположно положительному направлению  $r$ . Центр Земли достигается в момент, когда

$$\Omega t = \pi/2. \quad (12.61)$$

Под действием силы Кориолиса происходит движение «вбок». Обозначая это смещение  $x$ , получаем уравнение

$$d^2x/dt^2 = 2\omega R\Omega\sin(\Omega t). \quad (12.62)$$

Интегрируем, учитывая, что начальное смещение и начальная скорость равны нулю, получаем для скорости  $u = 2\omega R(1 - \cos\Omega t)$  и для смещения

$$x = 2\omega R(t - \sin\Omega t/\Omega).$$

Смещение в центре Земли определяем с помощью (12.61). Таким образом определяется размер шахты, в которой при падении тело не коснется стенки (№ 12.70).

Для максимального давления на стенку в центре Земли (№ 12.71) получаем

$$F = 2m\omega R\Omega = 2mg\omega(R/g)^{1/2}.$$

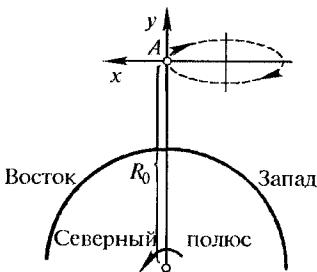


Рис. 12.18

Рассмотрим движение тела массой  $m$ , первоначально «висящего» неподвижно над некоторой точкой Земли в плоскости экватора на расстоянии  $R_0$  от центра Земли массой  $M$ . Обозначая угловую скорость вращения Земли  $\omega$ , получаем условие равновесия (невесомости)

$$m\omega^2 R_0 = \gamma m M / R_0^2. \quad (12.63)$$

Если тело получает толчок в направлении по радиусу (скорость  $v_0$ ), то на него

будет действовать сила Кориолиса (№ 12.69). На рис. 12.18 показана система координат, которая используется для описания движения тела. Сила Кориолиса (12.8) имеет две составляющие в плоскости экватора, в которой и будет двигаться тело. При не очень больших смещениях в направлении  $x$  можно считать, что сила притяжения к Земле и центробежная сила дают составляющую только вдоль направления  $y$ . Учитывая (12.63), получаем

$$-\gamma m M / (R_0 + y)^2 + m\omega^2 (R_0 + y) \approx 2\gamma m M y / R_0^3 + m\omega^2 y = 3m\omega^2 y.$$

В таком случае получаем проекции уравнения движения

$$d^2x/dt^2 = -2\omega dy/dt, \quad d^2y/dt^2 = 3\omega^2 y + 2\omega dx/dt. \quad (12.64)$$

Отсюда

$$dx/dt = -2\omega y, \quad d^2y/dt^2 + \omega^2 y = 0.$$

Так как в начальный момент времени  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $dy/dt$  (в нуле) =  $v_0$ , то

$$y(t) = (v_0/\omega) \sin \omega t, \quad x(t) = -2(v_0/\omega)(1 - \cos \omega t). \quad (12.65)$$

В плоскости ( $x$ ,  $y$ ) это эллипс

$$y^2/(v_0/\omega)^2 + (x + 2v_0/\omega)^2/(2v_0/\omega)^2 = 1. \quad (12.66)$$

Аналогичное решение будет и для тела, которое запускают со спутника на любой круговой орбите (№ 12.67). В качестве угловой скорости в таком случае надо брать угловую скорость спутника. Земля при этом создает поле тяжести.

Для оценки максимальной скорости, которую можно сообщить небольшому телу в кабине спутника диаметром  $2a$  (№ 12.68), воспользуемся (12.66) и получим  $v_0 = \omega a$ .

Влияние угловой скорости вращения Земли на движение тел в различных точках на поверхности Земли зависит от широты. В Север-

ном полушарии сила Кориолиса действует вправо от направления скорости движения (подмыается правый берег реки, больше стирается правый рельс железной дороги), в Южном полушарии — влево.

Если паровоз движется по рельсам вдоль меридиана с юга на север на широте  $\phi$  со скоростью  $v$  (№ 12.14), то сила Кориолиса (12.8) давит на правый рельс (на восток). Она равна  $F_K = 2mv\sin\phi$ .

Важной и наглядной демонстрацией влияния вращения Земли является **маятник Фуко**. Чтобы понять, как влияет вращение Земли на маятник, проще всего рассмотреть движение маятника на полюсе и на экваторе.

На полюсе движение маятника не зависит от вращения Земли, так как предполагаем, что через точку подвеса нельзя повлиять на движение маятника. Колебания маятника в инерциальной системе координат, относительно которой происходит вращение Земли, будет происходить в одной и той же плоскости. Земля относительно этой плоскости совершил полный поворот за сутки. Соответственно относительно Земли плоскость колебания маятника совершил полный поворот за сутки. В системе координат, связанной с Землей, на маятник действует сила Кориолиса, которая определяет вращение плоскости колебания маятника. Картина перемещения центра масс маятника относительно поверхности Земли зависит от того, каким образом маятник приводится в движение (отклонением на некоторый угол от положения равновесия либо толчком из положения равновесия).

На экваторе сила Кориолиса действует в плоскости колебаний. Поэтому плоскость колебаний неподвижна относительно земной поверхности.

**Сила Кориолиса на широте  $\phi$**  пропорциональна проекции угловой скорости вращения Земли  $\omega_0$  на направление вертикали на данной широте. Обозначая ее  $\omega$ , имеем

$$\omega = \omega_0 \sin\phi. \quad (12.67)$$

Эта составляющая определяет движение в горизонтальной плоскости. Движение по вертикали будет определяться

$$\omega = \omega_0 \cos\phi. \quad (12.68)$$

Для времени полного поворота плоскости качания маятника Фуко (периода) получаем

$$T = T_0 / \sin\phi, \quad (12.69)$$

где  $T_0$  — время полного поворота на полюсе (сутки).

**Река при повороте подмывает тот берег, от которого она отворачивает, так как она по инерции стремится двигаться прямо. Если сила Кориолиса обеспечивает движение по этому повороту, то берега не подмываются (№ 12.29). Уравнение для определения радиуса поворота (кривизны)**

$$mv^2/R = 2mv\omega \sin\varphi,$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли.

**Свободное падение тела на Землю на некоторой широте  $\varphi$  происходит с ускорением, которое определяется геометрической суммой силы тяготения и центробежной на данной широте. На рис. 12.19 показано это сложение. Учитывая, что центробежная сила много меньше силы тяжести ( $m\omega^2 R \cos\varphi \ll mg_0$ ), получаем**

$$g = g_0(1 - \omega^2 R \cos^2\varphi/g_0). \quad (12.70)$$

Этим ускорением будет определяться вес тела в неподвижной точке на Земле. Если пружинные весы установлены на пароходе, движущемся со скоростью  $v$  вдоль параллели на восток (№ 12.15), то вес меняется. Для центробежной силы теперь получаем

$$F = m(\omega + v/r)^2 r = m\omega^2 r + 2m\omega v + mv^2/r.$$

Здесь  $r = R \cos\varphi$  — расстояние от оси вращения Земли.

Для веса тела на пароходе через вес в покое, определяемый (12.70), получаем

$$mg_n = mg[1 - 2v\omega \cos\varphi/g - v^2/(gR)].$$

Рассмотрим еще, как меняется вес тела в полдень и в полночь. Для простоты считаем, что взвешивание проводится на экваторе на пружинных весах.

Система координат, связанная с Землей (точнее с центром Земли), является неинерциальной. Начало неинерциальной системы

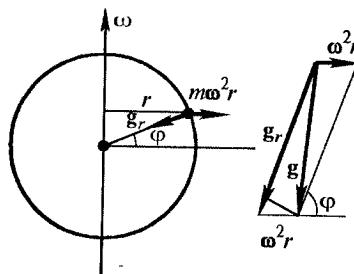


Рис. 12.19

можно поместить в центре Земли. Это начало системы координат движется по орбите вокруг Солнца с ускорением

$$a_0 = \gamma M_c / R^2,$$

где  $R$  — расстояние между центрами Солнца и Земли, а  $M_c$  — масса Солнца. Такое ускорение неинерциальной системы (одинаковое для всех точек) порождает инерциальные силы, действующие в этой системе на любую массу.

Еще действуют силы притяжения к Земле и Солнцу (рис. 12.20). Силу притяжения к Земле ( $F$ ) считаем постоянной на поверхности Земли и направленной к ее центру. Сила притяжения к Солнцу будет различной из-за неоднородности поля и будет равна: в ближней к Солнцу точке поверхности Земли

$$F_{c1} = \gamma m M_c / (R - r)^2,$$

а в дальней

$$F_{c2} = \gamma m M_c / (R + r)^2.$$

Кроме этих сил на тела, покоящиеся на поверхности Земли, и, следовательно, вращающиеся (с постоянной угловой скоростью) в неинерциальной системе координат, действуют центробежная сила и сила Кориолиса, которые не меняются по величине в разных точках на поверхности и направлены вдоль радиуса Земли.

Если через  $F_3$  обозначить сумму сил (постоянную для всех точек на поверхности Земли и направленную к центру Земли), включающую силу притяжения к Земле, центробежную и Кориолиса, то вес тела массой  $m$  на поверхности Земли: в ближней к Солнцу точке

$$P_1 = F_3 - \gamma m M_c / (R - r)^2 + ma_0,$$

а в дальней

$$P_2 = F_3 + \gamma m M_c / (R + r)^2 - ma_0.$$

Вводя обозначение:  $P = \gamma m M_3 / r^2$ , где  $M_3$  — масса Земли, получаем:

$$\begin{aligned} (P_2 - P_1) / P &= (M_c / M_3)(r^2 / R^2)[1/(1 + r/R)^2 - 1 + 1/(1 - r/R)^2 - 1] = \\ &= (M_c / M_3)(r^2 / R^2)[1 - 2r/R + 3(r/R)^2 - 4(r/R)^3 - 1 + 1 + \\ &+ 2r/R + 3(r/R)^2 + 4(r/R)^3 - 1] = 6(M_c / M_3)(r/R)^4 = 6,6 \cdot 10^{-12}. \end{aligned}$$

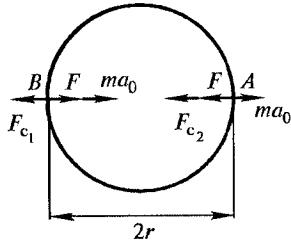


Рис. 12.20

Под действием силы Кориолиса (12.8) падающее тело (№ 12.6) смещается на восток. Для смещения имеем уравнение

$$d^2x/dt^2 = 2v\omega \cos\varphi. \quad (12.71)$$

Так как скорость падения  $v = gt$ , интегрируя, получаем

$$x = gt^3\omega \cos\varphi/3.$$

Скорость тела при движении по вертикали строго вверх (по линии отвеса) с начальной скоростью  $v_0$  на географической широте места  $\varphi$  определяется ускорением свободного падения  $g$  по формуле (12.70) и имеет вид  $v = v_0 - gt$ . Под действием силы Кориолиса происходит смещение в направлении вдоль параллели на запад (№ 12.7).

Так как на Земле угловая скорость вращения направлена от Южного полюса к Северному, то сила Кориолиса при движении вверх (в Северном полушарии) будет направлена к западу, а при движении вниз, как уже отмечено выше, — к востоку. Величина ее равна

$$F_k = 2m\omega(v_0 - gt)\cos\varphi.$$

В направлении силы Кориолиса появляются ускорение и скорость. Эта добавка будет изменять направление силы Кориолиса, которая остается перпендикулярной к полной скорости. В первом приближении, когда смещение по вертикали значительно больше смещения, вызванного силой Кориолиса, будем пренебречь этой добавкой и считать силу Кориолиса направленной горизонтально так же, как в начальный момент. Тогда, обозначая смещение к западу через  $x$ , имеем уравнение:

$$md^2x/dt^2 = 2m\omega \cos\varphi(v_0 - gt). \quad (12.72)$$

Так как начальная скорость и смещение в направлении силы Кориолиса отсутствуют, то постоянные при первом и втором интегрировании равны нулю. Поэтому:

$$dx/dt = 2\omega \cos\varphi(v_0 t - gt^2/2),$$

$$x = \omega \cos\varphi(v_0 t^2 - gt^3/3). \quad (12.73)$$

Движение вверх до максимальной высоты длится:  $t_1 = v_0/g$ , а полное время движения:  $t_n = 2v_0/g$ .

Хотя сила Кориолиса меняет в точке максимального подъема направление на противоположное, смещение будет происходить по-прежнему в западном направлении, так как уже существует начальная скорость в этом направлении, приобретенная при движении вверх. Отклонение при движении вверх

$$x_1 = (2/3)\omega \cos\varphi v_0^3/g^2.$$

Полное отклонение (так же к западу)

$$x_n = (4/3)\omega \cos \varphi v_0^3 / g^2.$$

На рис. 12.21 показано, как с высотой ( $y$ ) меняется отклонение тела при движении вниз (*a*) и вверх (*b*).

Чтобы тело упало в начальную точку (№ 12.8), надо создать начальную горизонтальную скорость в противоположном направлении — наклон начальной скорости ( $\alpha$ ). Так как смещения малы, то  $v_0 \alpha t_n = x_n$ . Отсюда можно определить  $\alpha$ .

Если внутри трубы массой  $M$  и длиной  $l$ , висящей вертикально на широте  $\varphi$  на горизонтальной оси, направленной по меридиану, начинает скользить со скоростью  $v$  тело массой  $m$  (№ 12.17), то момент силы Кориолиса вращает трубку. Обозначив угловую скорость трубы в произвольный момент времени  $\Omega$ , для ее изменения получаем уравнение

$$d[(Ml^2/3 + mr^2)\Omega]/dt = 2mv\omega \cos \varphi.$$

При интегрировании используем, что  $v = dr/dt$  (или  $r = vt$ ).

Можно рассмотреть и раскрутку, например, карусели вокруг вертикальной оси. Когда человек массой  $m$  идет с востока на запад из центра карусели к ее краю с постоянной скоростью  $v$  (№ 12.34), то, обозначая момент инерции карусели  $I$ , а расстояние человека от центра карусели  $r = vt$ , получаем уравнение вращения карусели

$$d[(I + mr^2)\Omega]/dt = 2mv\omega \sin \varphi.$$

**Движение подъемного крана по рельсам** вдоль меридиана возникает при повороте его стрелы в плоскости, перпендикулярной к рельсам в результате действия силы Кориолиса (№ 12.35). Только горизонтальная составляющая скорости стрелы дает силу в направлении меридиана. Вертикальная составляющая приводит к силе, перпендикулярной рельсам. Для скорости  $v$  движения крана массой  $M$  получаем

$$Mdv/dt = F_k \sin \varphi = 2m\omega v_r \sin \varphi.$$

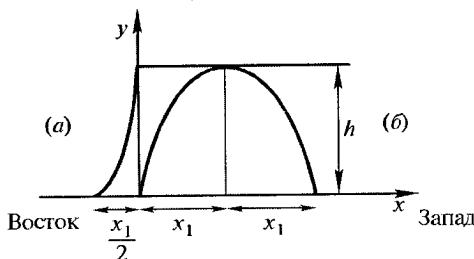


Рис. 12.21

Здесь  $m$  — масса стрелы,  $v_r$  — горизонтальная скорость центра масс стрелы (при интегрировании по времени дает смещение центра масс).

**Снаряд**, выпущенный из **орудия** на широте  $\phi$  под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$ , имеет как горизонтальную, так и вертикальную скорости. Вертикальное движение приводит к отклонению на запад. Если снаряд летит вдоль параллели на восток (№ 12.5), то составляющая силы Кориолиса от вертикального движения, которая действует вдоль параллели, уменьшает дальность, а составляющая от горизонтального — отклоняет снаряд вправо, т. е. на юг. Для величины отклонения  $x$  получаем

$$md^2x/dt^2 = 2m\omega v_0 \cos\alpha \sin\phi.$$

Интегрируя по времени, имеем

$$x = \omega v_0 \cos\alpha \sin\phi t^2. \quad (12.74)$$

Время полета равно удвоенному времени подъема, которое равно  $t_p = v_0 \sin\alpha/g$ . В результате

$$x = 4\omega v_0^3 \sin\phi \cos\alpha \sin^2\alpha.$$

При чисто горизонтальном движении (настильная траектория) и известной дальности полета, которая определяет время полета (№ 12.9), отклонение определяем по (12.74). Если пренебречь влиянием центробежной силы, то отклонение не зависит от направления стрельбы.

В случае такой стрельбы в направлении на север (№ 12.11) отклонение к востоку под действием силы Кориолиса определяется (12.74), а недолет (отклонение к югу) определяется центробежной силой, которая входит в уравнение

$$md^2y/dt^2 = -m\omega^2 R \cos\phi.$$

При выстреле в направлении на юг на широте  $\phi$  в горизонтальной плоскости (№ 12.12) сила Кориолиса (12.74) отклоняет пулю на запад на расстояние  $x = \omega v_0 t^2 \sin\phi$ .

Рассмотрим действие **снаряда на орудие**, установленное на полуоси, которое может свободно вращаться (№ 12.18). Считаем, что основной вклад в момент инерции орудия дает ствол массой  $M$  и длиной  $l$ . Масса снаряда, который в начальный момент находился на оси вращения Земли, а затем двигался с постоянным ускорением  $a$ , равна  $m \ll M$ . В системе отсчета, связанной с Землей, вращение орудия вызывается силой Кориолиса и описывается уравнением

$$(1/3)Ml^2 d\omega/dt = 2m\omega_0 atr.$$

Здесь  $\omega_0$  — угловая скорость вращения Земли, а  $r = at^2/2$  — расстояние, пройденное снарядом.

Действие центробежной силы приводит, в частности, к смещению подвижных зарядов в проводниках, пока их не останавливает возникающая разность потенциалов. Если металлический рельс длиной  $h$  вбит вертикально в Землю на широте  $\phi$  (№ 12.74), то из уравнения равенства центробежной силы и силы электрического поля, возникшего благодаря смещению электронов (массой  $m$  и заряда  $e$ ),  $(m\omega^2 R \cos \phi) \cos \phi = ev/h$ . Отсюда определяется разность потенциалов  $v$ .

Если металлическая лента ширины  $l$  протянута с севера на юг по поверхности Земли на широте  $\phi$  и по ней пропускают ток (№ 12.73), то между восточным и западным краями ленты возникает разность потенциалов. Это происходит под действием силы Кориолиса. При известной скорости  $v_0$  движения электронов (заряд  $e$ , масса  $m$ ) для определения разности потенциалов  $v$  получаем  $2mv_0 \sin \phi = ev/l$ .

Внутри Земли, если считать плотность постоянной, напряженность поля тяготения меняется линейно. В сферической полости напряженность поля тяготения постоянна и зависит от расстояния между центрами полости и Земли. Однородный шар радиусом  $R_0$  вращается с угловой скоростью  $\omega_0$ . Внутри шара имеется полость радиусом  $r_0$ , центр которой находится на расстоянии  $a = 2r_0$  от центра шара на линии, идущей под углом  $\alpha = 45^\circ$  к оси вращения. Тонкая трубка соединяет центр шара и центр полости (рис. 12.22). Найдем скорость точечной массы, которая без трения скользит от центра шара к центру полости (№ 12.72). При отсутствии потерь на трение кинетическая энергия равна изменению потенциальной (работе центробежной и гравитационной сил). Работа центробежных сил

$$A = (1/2)m\omega_0^2 a^2 \cos^2 \alpha.$$

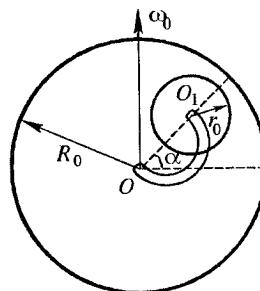


Рис. 12.22

Гравитационный потенциал складывается из потенциала от однородного шара плотности  $r$  и шара отрицательной плотности —  $\rho$ . Поскольку оба потенциала не зависят от пути, по которому приходят в данную точку, вычисления потенциала можно сделать, в частности, по линии  $OO_1$ . Разность гравитационных потенциалов равна

$$\Delta\varphi = \int_0^{a-r_0} g_1 dr + \int_{a-r_0}^a g_2 dr, \quad (12.75)$$

где  $g_1$  — поле на прямой  $OO_1$  вне полости, а  $g_2$  — внутри полости.

Поле внутри полости постоянно и направлено параллельно вектору  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{g}_2 = -(4/3)\pi\rho\gamma\mathbf{a}.$$

Вне полости

$$\mathbf{g}_1 = (4/3)\pi\rho\gamma\mathbf{r} - (4/3)\pi\rho\gamma(\mathbf{a} - \mathbf{r})r_0^3/(a - r)^3,$$

где  $g$  — гравитационная постоянная.

Интегрируем (12.75) по линии  $OO_1$  и получаем

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho\gamma r_0^2.$$

Вводя напряженность поля гравитации на поверхности шара

$$g_0 = (4/3)\pi\rho\gamma R_0,$$

получаем

$$\Delta\varphi = -3g_0 r_0^2/R_0,$$

и для скорости

$$v^2/2 = (1/2)\omega^2 a^2 \cos\alpha - 3g_0 r_0^2/R_0 = r_0^2 (\omega^2 - 3g_0/R_0).$$

## 13. УПРУТИЕ ДЕФОРМАЦИИ

Характеристики деформации твердых тел удобно ввести в простом случае, например, при растяжении стержня прямоугольного сечения.

Действие сил на твердые тела приводят к их движению (если сумма сил либо их момент не равны нулю) и вызывает изменение их размеров и формы — деформацию. Деформация определяется не самой силой, а отношением ее к площади, на которой она действует, — напряжением.

В случае растяжения прямоугольного стержня длиной  $a$ , шириной  $b$  и высотой  $c$  (рис. 13.1) силами  $F$ , параллельными осям  $x$  и равномерно распределенными по площади торцов внутри стержня, возникает напряжение  $\sigma_{xx} = F/(bc)$ . Если напряжения в направлении осей  $y$  и  $z$  отсутствуют ( $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ ), то такое напряженное состояние называется **одноосным напряженным состоянием**. При действии такой нагрузки стержень удлиняется по оси  $x$  на  $\Delta a$  и становится тоньше на  $\Delta b$  по оси  $y$  и на  $\Delta c$  по оси  $z$ . Относительные изменения размеров вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  называются **деформациями**

$$\epsilon_{xx} = \Delta a/a, \epsilon_{yy} = \Delta b/b, \epsilon_{zz} = \Delta c/c.$$

Измерения, произведенные для многих материалов, показывают, что при малых по сравнению с единицей деформациях выполняется линейная связь между напряжениями и деформациями (закон Гука):

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx}. \quad (13.1)$$

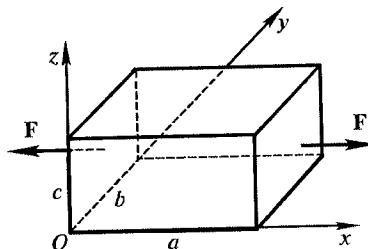


Рис. 13.1

Коэффициент пропорциональности для случая одноосного напряженного состояния называется **модулем Юнга**. Это характеристика конкретного вещества, которую можно найти в справочниках физических констант. Для большинства веществ модуль Юнга очень велик по сравнению с нагрузками, до которых выполняется закон Гука (часто и разрушение образцов происходит в почти упругой области деформации), а относительное изменение размера мало. Этим оправдывается использование в механике модели жесткого, не деформируемого тела. Напряжение, до которого выполняется линейный закон, называется **пределом пропорциональности**. **Пределом упругости** называется напряжение, после которого в твердом теле начинается текучесть — увеличение деформации при постоянном напряжении. При превышении предела упругости тело после снятия нагрузки уже не возвращается к начальному размеру, а имеет **остаточную деформацию**. Разрушение тела происходит при достижении напряжения, называемого **пределом прочности**. Разрушение либо вызывается текучестью, приводящей к изменению геометрии тела и резкому увеличению напряжения, либо происходит практически в упругой области и называется **хрупким разрушением**. При растяжении и сжатии пределы прочности могут различаться. Иногда прочность задается не предельным напряжением, а предельной деформацией. В общем, разрушение определяется некоторой функциональной зависимостью между напряжениями и деформациями.

Изменения поперечных размеров определяются еще одной характеристикой упругих свойств материала (которую также можно найти в справочниках) — **коэффициентом Пуассона**  $\mu$ . Связь между деформациями

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\mu \epsilon_{xx}. \quad (13.2)$$

Для относительного изменения объема стержня получаем

$$\begin{aligned} \Delta v/v &= [(a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) - abc]/(abc) = \\ &= (1 - 2\mu)\Delta a/a = (1 - 2\mu)\epsilon_{xx}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Для различных веществ  $\mu$  может меняться от 0 до 1/2. Очевидно, что при растяжении (положительной деформации) неестественно уменьшение объема, так же как увеличение объема при сжатии. Это же следует из рассмотрения всестороннего сжатия, для которого формулы будут приведены чуть позднее.

Предполагая суперпозицию деформаций, при действии напряжений по трем осям получаем

$$\epsilon_{xx} = (1/E)[\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]. \quad (13.4)$$

Аналогично по другим осям

$$\epsilon_{yy} = (1/E)[\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})]; \quad (13.5)$$

$$\epsilon_{zz} = (1/E)[\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]. \quad (13.6)$$

Разрешая эти уравнения относительно напряжений, имеем

$$\sigma_{xx} = E'[\epsilon_{xx} + \mu(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})/(1 - \mu)]; \quad (13.7)$$

$$\sigma_{yy} = E'[\epsilon_{yy} + \mu(\epsilon_{zz} + \epsilon_{xx})/(1 - \mu)]; \quad (13.8)$$

$$\sigma_{zz} = E'[\epsilon_{zz} + \mu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})/(1 - \mu)]. \quad (13.9)$$

Здесь

$$E' = E(1 - \mu)/[(1 + \mu)(1 - 2\mu)]. \quad (13.10)$$

**Одноосным по деформациям** называется напряженное состояние, при котором  $\epsilon_{xx}$  отлично от нуля, а  $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 0$ . Напряжения при этом

$$\sigma_{xx} = E'\epsilon_{xx}, \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \mu\sigma_{xx}/(1 - \mu). \quad (13.11)$$

Такое напряженное состояние осуществляется при сжатии цилиндрического образца материала в жесткой цилиндрической трубке либо в неограниченном объеме.

Если кубик сжимать одинаковым давлением  $p$  на все грани ( $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$ ), то получаем **всестороннее сжатие**, для которого

$$p = K\Delta\nu/v. \quad (13.12)$$

Здесь **модуль объемного сжатия**  $K = (1/3)E/(1 - 2\mu)$ .

Деформация без изменения объема называется **сдвигом**. Сдвиг характеризуется изменением угла  $\gamma$  (между гранями кубика, в котором происходит сдвиг), связанным с касательным напряжением на гранях куба  $\tau$  линейным соотношением (рис. 13.2)

$$\tau = G\gamma. \quad (13.13)$$

Модуль сдвига  $G$  может быть выражен через упругие характеристики материала

$$G = (1/2)E/(1 + \mu). \quad (13.14)$$

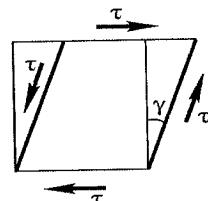


Рис. 13.2

Отметим, что упругие модули зависят также от процесса деформирования, т. е. от термодинамики деформирования. При адиабатических и изотермических процессах деформирования модули различаются. Однако при обычных условиях для многих твердых тел это различие не велико.

На площадку, выделенную в твердом теле, например, перпендикулярную оси  $x$ , действует нормальное к ней напряжение  $\sigma_{xx}$  и два взаимно перпендикулярных касательных напряжения  $\sigma_{xy}$  и  $\sigma_{xz}$ . Аналогично можно написать и для площадок, перпендикулярных осям  $y$  и  $z$ . Эти напряжения являются компонентами тензора напряжений, который определяет напряженное состояние в данной точке тела. Численные значения компонент зависят от выбора осей координат. Деформации в общем случае также определяются тензором (деформации). Закон Гука в общем виде предполагает линейную зависимость между тензорами напряжений и деформаций.

Выше рассматривался стержень прямоугольного сечения. Для стержня круглого сечения надо учесть, что он имеет ось симметрии. Площадь поперечного сечения стержня диаметром  $d$  равна  $s = \pi d^2/4$ . Если ось  $x$  является осью симметрии и  $a$  — длина стержня, то выполняется (13.1), где  $\sigma_{xx} = F/s$ . Чтобы использовать формулы (13.2) — (13.11) для цилиндрического стержня, надо положить  $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_d$ ,  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_d$ .

Например, для уменьшения диаметра на  $\Delta d = d_0 - d$  (№ 13.17) надо приложить силу

$$F = sE\Delta a/a = \pi d_0^2 E \Delta d (4d_0\mu) = \pi E d_0 (d_0 - d)/(4\mu).$$

Некоторые свойства, например, электрическое сопротивление проволоки  $R$  с удельным сопротивлением  $\rho$  зависят как от длины  $l$ , так и от площади поперечного сечения (радиусом  $r$ )  $R = \rho l / (\pi r^2)$ . При растяжении такой проволоки (тензометра) надо учесть связь поперечной и продольной деформаций  $\Delta r/r = -\mu \Delta l/l$ . Для связи относительных изменений сопротивления и длины (№ 13.14) получаем

$$\Delta R/R = (1 + 2\mu)\Delta l/l.$$

Так как коэффициент Пуассона ни для какого материала не может превосходить 0,5, относительное изменение сопротивления может превышать относительное изменение удлинения не более чем в два раза.

Увеличение относительной длины стержня ( $\epsilon = \Delta l/l$ ) при нагревании можно компенсировать приложением давления (№ 13.20)

$$p = E\Delta l/l = E\alpha\Delta t.$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения,  $\Delta t$  — увеличение температуры,  $E$  — модуль Юнга.

Аналогичным образом находятся колебания напряжений при колебании температуры (№ 13.21). При соединении (сваривании) двух

или нескольких пластиночек, различающихся модулями Юнга и коэффициентами теплового расширения (№ 13.22), необходимо учесть равновесие сил, которые возникают из-за неодинаковых коэффициентов расширения частей сварки. При увеличении температуры на одну и ту же величину  $\Delta T$  имеем

$$\Delta T = \epsilon_1/\alpha_1 = \epsilon_2/\alpha_2 = \epsilon_{\text{эфф}}/\alpha_{\text{эфф}}.$$

Из равенства сил

$$s_1 E_1 (\epsilon_1 - \epsilon_{\text{эфф}}) = s_2 E_2 (\epsilon_{\text{эфф}} - \epsilon_2).$$

Вводя коэффициенты теплового расширения, получаем

$$s_1 E_1 (\alpha_1 - \alpha_{\text{эфф}}) = s_2 E_2 (\alpha_2 - \alpha_{\text{эфф}}).$$

Откуда

$$\alpha_{\text{эфф}} = (s_1 E_1 \alpha_1 + s_2 E_2 \alpha_2) / (s_1 E_1 + s_2 E_2).$$

Для вычисления напряжений в пластинах при заданном изменении температуры (№ 13.23) имеем

$$\sigma = E_1 (\alpha_1 - \alpha_{\text{эфф}}) \Delta T.$$

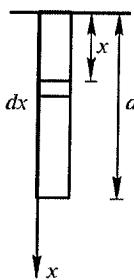
**Упругая энергия**, накапливающаяся при деформировании, — это работа, которую надо совершить, чтобы привести тело в данное напряженное состояние (работа приложенного напряжения на пути деформирования). Вычислим ее, используя обозначения на рис. 13.1 для одноосного напряженного состояния. Площадь поперечного сечения стержня  $bc$ , длина  $a$ , объем  $v = abc$ ,  $F$  — сила, действующая на основание,  $\sigma = F/s$  — напряжение,  $\epsilon = \Delta a/a$  — деформация. Напряжение растет с увеличением деформации в соответствии с (13.1). Упругая энергия равна работе

$$U = \int_0^{\Delta a} F d(\Delta a) = abc \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon = vE \epsilon^2 / 2 = v\sigma^2 / (2E) = v\sigma\epsilon / 2. \quad (13.15)$$

Эти формулы позволяют найти отношение упругих энергий в стержнях одинаковой формы из различных материалов (№ 13.8). Если одинаковая деформация, то энергии относятся как модули Юнга. Если одинаковое напряжение, то отношение энергий обратно отношению модулей Юнга.

Изменение **объема стержня** при одноосном напряженном состоянии определяется формулой (13.3) и (13.1). При заданной силе (№ 13.2)

$$\Delta v = (1 - 2\mu) aF/E.$$



В стержнях, находящихся в поле тяжести или под действием сил инерции, в том числе и центробежных, напряжение меняется по длине. В стержне, подвешенном за конец в поле тяжести (№ 13.4), сила, действующая в сечении на расстоянии  $x$  от закрепленного конца (рис. 13.3), равна весу части стержня, находящейся ниже этого сечения. Если масса стержня  $m$ , а длина  $a$ , то сила равна

Рис. 13.3

$$F = mg(a - x)/a. \quad (13.16)$$

Для малого элемента  $dx$  можно написать закон Гука. Удлинение этого элемента обозначим  $d(\Delta l)$ . Изменением площади сечения стержня пренебрегаем. Тогда по закону Гука

$$d(\Delta l)/dx = F/(bcE). \quad (13.17)$$

Подставляя выражение для силы и интегрируя, получаем

$$\Delta l = mga/(2bcE). \quad (13.18)$$

Увеличение объема вычисляем по формуле (13.3). Для элемента стержня

$$d(\Delta v)/(bcdx) = (1 - 2\mu)d(\Delta l)/dx.$$

Откуда

$$\Delta v = (1 - 2\mu)\Delta l bc. \quad (13.19)$$

Упругая энергия элемента стержня

$$dU = \sigma^2 bcdx/(2E). \quad (13.20)$$

Подставляя  $\sigma = F/(bc)$  и интегрируя, получаем

$$U = (mg)^2 a / (6bcE). \quad (13.21)$$

Задачи о стержне, стоящем на горизонтальной поверхности в поле тяжести (№ 13.7), решаются аналогично. Рисунок 13.3 надо перевернуть либо считать, что сила тяжести направлена в отрицательном направлении оси  $x$ , т. е. вверх. При этом стержень будет сжиматься на ту же величину (13.18). Упругая энергия будет та же (13.21). Если же на стержень действует еще дополнительная сила, например вес аналогичного стержня, то к силе (13.16) добавляется постоянная величина, например,  $mg$ . В этом случае

$$\sigma = F/(bc) = mg(2 - x/a)/(bc). \quad (13.22)$$

Подставляя это в (13.20) и интегрируя, получаем

$$U = (mg)^2 a / (2Ebc) \int_0^h (2 - x/a)^2 d(x/a) = 7(mg)^2 a / (6bcE). \quad (13.23)$$

Следует подчеркнуть, что для упругой энергии нет суперпозиции, т. е. в данном случае нельзя было сложить упругую энергию цилиндра под действием собственного веса с упругой энергией под действием постоянной нагрузки.

Стрекень можно поддерживать в поле тяжести за некоторое промежуточное между концами сечение (№ 13.9). В этом случае длина верхней части будет уменьшаться, а нижней — увеличиваться. Для подсчета изменения длины каждой части можно использовать (13.18).

При рассмотрении очень длинных конструкций приходится учитывать изменение поля тяжести. Конструкция может находиться над поверхностью сферически симметричного тела (например, астероида) (№ 13.37). Используем рис. 13.4. Для равновесия элемента конструкции (трубы) плотности  $\rho$  имеем

$$\rho g dx = p - (p + dp) = -dp. \quad (13.24)$$

Здесь  $p$  — напряжение сжатия в конструкции.

Поле тяжести можно выразить через напряженность  $g_0$  (ускорение свободного падения) на поверхности

$$g = g_0(R/x)^2. \quad (13.25)$$

Подставляя в (13.24) и интегрируя от  $2R$  до  $x$ , получаем

$$p(x) = \rho g R (R/x - 1/2). \quad (13.26)$$

Обозначая изменение (увеличения) длины элемента  $dx$  как  $d(\Delta l)$ , из закона Гука получаем

$$p(x) = E d(\Delta l) / dx. \quad (13.27)$$

Разделяя переменные и интегрируя от  $R$  до  $2R$ , получаем изменение длины конструкции  $\Delta l$ .

Для определения изменения (увеличения) длины трубы при помещении ее внутрь сферически симметричного тела (подвешивании ее за верхний конец на поверхности тела) (№ 13.36) вместо (13.25) надо использовать

$$g = g_0 x / R. \quad (13.28)$$

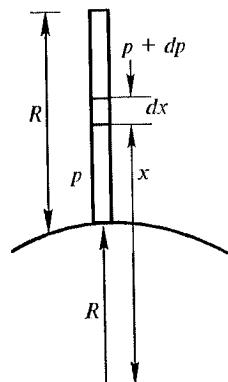


Рис. 13.4

При действии силы, равномерно распределенной по торцу стержня, стержень движется с ускорением. Переходя в систему отсчета, связанную со стержнем, получаем, что на массу действуют **силы инерции**. Это аналогично полю тяжести с напряженностью равной ускорению. В таком случае в № 13.24, 13.25 и 13.27 надо использовать (13.18), (13.19) и (13.21). Задачи могут быть усложнены системой блоков и грузов (№ 13.28). Тогда надо выписать все уравнения, найти ускорение стержня и подставить в указанные выше соотношения.

Отметим, что при **свободном падении** стержня в поле тяжести (№ 13.26) стержень находится в состоянии невесомости и нет воздействия одних элементов стержня на другие. Напряжения и деформации в таком случае не возникают.

При **вращении** однородного тонкого упругого стержня **вокруг оси**, проходящей через один из его концов с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 13.5), условие равновесия элемента стержня, плотность которого на единицу длины равна  $\rho = m/L$ , описывается уравнением для определения усилия  $T$

$$\rho dx \omega^2 x = T - (T + dT) = -dT. \quad (13.29)$$

Решая это уравнение с учетом того, что на конце стержня при  $x = L$  напряжение равно нулю, получаем (№ 13.33)

$$T = \rho \omega^2 (L^2 - x^2)/2. \quad (13.30)$$

Изменение длины элемента  $dx$  обозначим  $d(\Delta L)$ . Тогда по закону Гука получаем

$$T/s = Ed(\Delta L)/dx. \quad (13.31)$$

Для полной деформации стержня (№ 13.33)

$$\Delta L = \int_0^L d(\Delta L) = \int_0^L T dx / (sE) = \rho \omega^2 L^3 / (3Es). \quad (13.32)$$

Относительная деформация

$$\Delta L/L = \rho \omega^2 L^2 / (3Es). \quad (13.33)$$

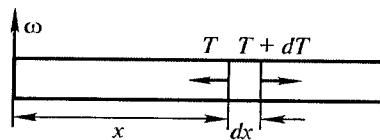


Рис. 13.5

Если в некоторый момент времени стержень срывается с оси (№ 13.34), он продолжает свободное вращение. В случае свободного вращения стержня угловая скорость сохраняется. Так как оба конца остаются свободными, растяжение стержня происходит относительно центра. В этом случае относительное удлинение каждой половинки и, следовательно, всего стержня

$$\Delta L/L = \Delta L_{\text{пол}}/(L/2) = \rho \omega^2 (L/2)^2 / (3Es) = (1/4) \rho \omega^2 L^2 / (3Es). \quad (13.34)$$

Относительное удлинение уменьшится в четыре раза.

Отметим, что момент импульса относительно точки подвеса сохраняется. Из этого можно также получить сохранение угловой скорости

$$ml^2\omega/3 = m\omega(l/2)(l/2) + ml^2\omega_k/12.$$

Может случиться (в фантастических проектах), что необходимо учитывать и тяжесть, и вращение (№ 13.43). Используя (13.24) и (13.29), имеем для напряжения

$$d\sigma = \rho g(R/x)^2 dx - \rho dx \omega^2 x. \quad (13.35)$$

Здесь  $x$  — расстояние от центра Земли. Интегрировать надо от радиуса Земли ( $R$ ) до радиуса стационарной орбиты (куда, например, тянется трос), для которой

$$R^3 = gR/\omega^2.$$

Формулу (13.33) можно использовать и в случае, когда однородный тонкий стержень свободно движется в горизонтальной плоскости со скоростью  $v$ , направленной перпендикулярно самому стержню, и концом зацепляется за вертикальную ось (№ 13.35). Необходимо воспользоваться законом сохранения момента количества движения относительно оси вращения

$$mvL/2 = mL^2\omega/3.$$

В некоторых случаях можно рассмотреть напряжения и деформации в стержнях переменного поперечного сечения. Например, для осесимметричного стержня, подвешенного вертикально за один конец, растягиваемого силой  $F$ , равномерно распределенной по площади поперечного сечения нижнего конца радиуса  $r_0$  (№ 13.44), можно найти зависимость радиуса сечения  $r(x)$  для выполнения постоянства напряжений  $\sigma$  во всех сечениях стержня. На рис. 13.6 показан стержень.

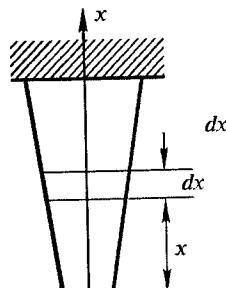


Рис. 13.6

Обозначая плотность стержня  $\rho$ , для равновесия элемента стержня на расстоянии  $x$  от нижнего конца

$$\rho\pi r^2 dx/g = f + df - f = df = \sigma(s + ds) - \sigma s = \sigma ds = \sigma 2\pi r dr.$$

Здесь  $\sigma = F / (\pi r_0^2)$ . Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$r = r_0 \exp \left[ \frac{\rho \pi r_0^2 g x}{(2F)} \right]. \quad (13.36)$$

Аналогично можно рассмотреть и **случай вращения** стержня длиной  $l$  и плотности  $\rho$  относительно одного конца, когда на другом закреплен груз массой  $m$  (№ 13.45). Постоянное напряжение равно напряжению на конце  $\sigma = m\omega^2 l / s_0$ . Здесь  $s_0$  — площадь поперечного сечения стержня на конце, где прикреплен груз. Для равновесия элемента стержня на расстоянии  $x$  от оси вращения получаем

$$\rho s dx \omega^2 x = -\sigma(s + ds) + \sigma s = -\sigma ds.$$

Умение рассчитать напряжения позволяет вычислять предельные нагрузки на системы. И наоборот, если известно, какую нагрузку выдерживает канат заданной площади сечения, т. е. **предельное напряжение** (№ 13.1), то можно найти разрушение при других сечениях и нагрузках. Если лифт движется с ускорением  $8g$ , то сила, действующая на трос, в 9 раз превышает статическую нагрузку.

При **резком торможении** спускающегося лифта (№ 13.30) к силе веса кабины (весом троса пренебрегаем) добавляется динамическая сила, которую можно вычислить из перехода кинетической энергии кабины в упругую энергию натянутого троса (13.15)

$$mV_0^2/2 = \sigma^2 sl/(2E). \quad (13.37)$$

Отсюда для динамической силы получаем

$$F = s\sigma = v_0(msE/l)^{1/2}. \quad (13.38)$$

И окончательно для полной силы  $mg + F$ .

При заданной прочности троса можно найти  $F$ , а затем допустимую максимальную скорость опускания лифта из (13.37) (№ 13.31).

Если трос соединяется с кабиной лифта через пружину жесткостью  $k$  (№ 13.42), то в (13.36) надо учесть энергию пружины

$$mV_0^2/2 = \sigma^2 sl/(2E) + kx^2/2. \quad (13.39)$$

Здесь  $x$  — максимальное растяжение пружины, которое можно найти из равенства сил, действующих на пружину и трос лифта  $F = kx = s\sigma$ . В таком случае, используя (12.38), получаем

$$F = s\sigma = v_0 [msEk/(kl + sE)]^{1/2}.$$

До сих пор рассматривались одноосные напряженные состояния, при которых отсутствуют напряжения на боковых поверхностях. **Одноосное деформированное состояние** возникает в очень широких (в пределе бесконечно широких) стержнях, когда нет разгрузки с боковой поверхности. При сжатии такое состояние можно обеспечить с помощью жестких поверхностей, препятствующих боковому расширению. В частности, можно резиновый жгут сжимать в жесткой трубе (№ 13.16). Используя (13.11) и (13.10), получаем для относительного сжатия стержня площадью  $s$ , с коэффициентом Пуассона  $\mu$  и модулем Юнга  $E$  под действием силы  $F$

$$\Delta l/l = (1 + \mu)(1 - 2\mu)F/[E(1 - \mu)s].$$

**Деформация может быть ограничена, например, по отдельным направлениям.** На рис. 13.7 два кубика (ребро  $a$ ), стоящие на абсолютно твердой горизонтальной поверхности и прикасающиеся друг к другу гранями, находятся между двумя вертикальными стенками, препятствующими расширению по горизонтальной оси  $x$ . При приложении к верхней грани одного кубика равномерно распределенного давления  $p = -\sigma_{zz} = F/a^2$  в направлении, противоположном вертикальной оси  $z$ , по оси  $x$  (задача 4А на экзамене в 2004 г.) возникает напряжение  $\sigma_{xx}$ . По третьей оси напряжение отсутствует  $\sigma_{yy} = 0$ . Используя (13.4), для первого кубика получаем

$$\varepsilon_{xx} = (\sigma_{xx} - \mu\sigma_{zz})/E,$$

а для второго та же деформация со знаком минус

$$-\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E.$$

Откуда

$$\sigma_{xx} = \mu\sigma_{zz}/2.$$

В таком случае из (13.6) для деформации второго кубика по оси  $z$  получаем

$$\Delta a/a = -\mu^2\sigma_{zz}/(2E) = \mu^2F/(2Ea^2).$$

Отметим, что при сжатии напряжение отрицательно, и поэтому искомая деформация положительна (растяжение).

Обычно прочность материала на сжатие больше, чем прочность на растяжение или сдвиг. Если прочность задана, то можно вычис-

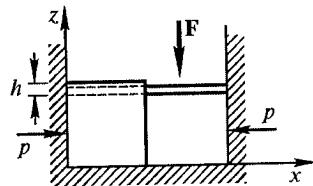


Рис. 13.7

лить предельную нагрузку. При заданном допускаемом напряжении и площади поверхности (№ 13.3) допускаемая нагрузка — просто произведение напряжения на площадь.

Сжимать материал (вещество) можно со всех сторон. Если напряжения одинаковые, то это **всестороннее сжатие**.

Изменение объема при всестороннем сжатии можно найти, если известно изменение объема при одноосном напряженном состоянии (№ 13.19). Для этого используем (13.3) и (13.12).

При замерзании воды, превращении ее в лед внутри жесткого (не изменяющего объем) сосуда имеем фактически сжатие льда, так как он обладает меньшей плотностью, чем вода. Для определения максимального давления, которое может произвести вода при замерзании (№ 13.18), предполагаем, что при превращении воды в лед и во льду будет всестороннее сжатие. Всестороннее сжатие можно рассматривать как сумму одноосных сжатий по трем осям координат. Если при одноосном сжатии по оси  $x$  деформация  $\epsilon_{xx}$ , то при трехосном, с учетом действия напряжений по другим осям, деформация по оси  $x$  будет равна  $(1 - 2\mu)\epsilon_{xx}$ . Так как аналогичные деформации и по другим осям, то изменение объема кубика

$$\Delta v/v = [1 + (1 - 2\mu)\epsilon_{xx}]^3 - 1 \equiv 3(1 - 2\mu)\epsilon_{xx} = 3(1 - 2\mu)\sigma_{xx}/E.$$

При растяжении напряжение и деформация — положительное, при сжатии — отрицательное. Поэтому при сжатии  $\sigma_{xx} = -p$ , где  $p$  — давление.

Отсюда для объемного сжатия получим (13.12)

$$p = -(1/3)E/(1 - 2\mu)\Delta v/v = K\Delta v/v.$$

Модуль объемного сжатия  $K$  — величина, обратная сжимаемости:

$$1/K = -(1/v)(\partial v/\partial p).$$

Таким образом, максимальное давление  $p$  при превращении воды в лед:

$$p = -K\Delta v/v = K\Delta\rho/\rho \equiv \{(1/3)E/(1 - 2\mu)\}(\rho_b - \rho_l)/\rho_b.$$

Здесь введены плотности воды и льда. Если подставить плотность воды ( $1 \text{ г}/\text{см}^3$ ) и для льда плотность ( $0,917 \text{ г}/\text{см}^3$ ), модуль Юнга  $E = 2,8 \cdot 10^{11} \text{ дин}/\text{см}^2$  и коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ , то максимальное давление воды

$$p = 2 \cdot 10^{10} \text{ дин}/\text{см}^2 \cong 2 \cdot 10^4 \text{ атм} = 2 \text{ ГПа}.$$

Представляет интерес подсчитать упругую энергию при **всестороннем сжатии**, например, шара радиусом  $R$  под действием давления  $p$

(№ 13.12). Упругая энергия шара равна работе сил, приложенных на поверхности шара и уменьшающих его объем. Если внутри шара действуют только упругие силы, то из условия равновесия (неподвижности) элементов шара давление в шаре постоянно. Связь давления с изменением объема, описываемая формулой (12), показана на рис. 13.8. Работу вычисляем следующим образом:

$$A = \int_0^{\Delta v} pd(\Delta v) = v \int_0^{\Delta v} pd(\Delta v/v) = Kv \int_0^{\Delta v} (\Delta v/v)d(\Delta v/v) = \\ = vp^2/(2K) = 2\pi R^3 p^2/(3K).$$

В телах, находящихся в поле тяжести, напряжение растет сверху вниз. Если внизу достигается предельное для упругости напряжение, то начинается разрушение или течение (растекание вбок). Этим можно, в частности, объяснить конечную высоту гор на планетах. На Земле максимальная высота гор может быть измерена непосредственно, а на других оценена из сравнения полей тяжести (№ 13.15). Считая, что свойства горных пород (плотность и прочность) одинаковы, из (13.24), полагая постоянными при интегрировании  $\rho$ ,  $g$  и используя предельное давление в подошве гор, получаем постоянство для разных планет произведения высоты гор на напряженность поля тяжести на поверхности  $g = \gamma M/R^2$ .

При изгибе стержня возникают сдвиговые напряжения. Деформация при этом происходит таким образом, что, с одной стороны, стержень растянут, а с другой — сжат. Средняя линия сохраняет длину. На рис. 13.9 показан элемент стержня. Радиус средней линии  $R$ . Длина средней линии элемента  $dl_0 = Rda$ . Длина линии, отстоящей от средней на  $x$ , равна  $dl = (R + x)da$ . Напряжение вдоль этой линии связано с ее удлинением законом Гука, если можно считать, что напряженное состояние соответствует одноосному напряженному (поперечное напряжение равно нулю). Для напряжения получаем

$$\sigma = E\varepsilon = E(dl - dl_0)/dl_0 = Ex/R.$$

Напряжение растет линейно по толщине стержня и на поверхности стержня толщиной  $d$  максимальное

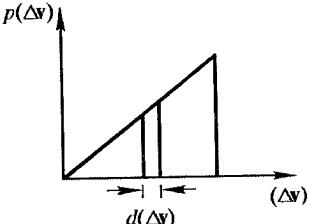


Рис. 13.8

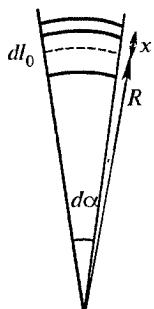


Рис. 13.9

напряжение (№ 13.10) равно  $Ed/(2R)$ . Работу по сворачиванию в кольцо линейки длиной  $L$  (№ 13.41) можно получить из того, что она равна упругой энергии в ней (13.40). Для плотности энергии используем (13.15). На рис. 13.10 показано распределение напряжения поперек линейки. Интегрируя поперек линейки и используя, что  $L = 2\pi R$ , получаем

$$A = U = 2 \int_0^{d/2} 2\pi^2 E x^2 b L dx / L^2 = \pi^2 d^3 b E / (6L). \quad (13.40)$$

В стержне, имеющем площадь поперечного сечения  $s$  и растягиваемом силой  $F$  только вдоль оси  $x$ , в сечениях, перпендикулярных оси  $x$ , имеются нормальные напряжения  $\sigma_{xx} = F/s$  и отсутствуют касательные. В сечениях под углом к оси  $x$  имеются и нормальные, и касательные (**сдвиговые**) напряжения. Чтобы найти нормальное  $\sigma$  и касательное  $\tau$  напряжения на площадке, нормальной к которой ( $N$ ) составляет угол  $\alpha$  с осью  $x$  (рис. 13.11), рассмотрим равновесие призмы, сечение которой в плоскости  $(x, y)$   $PBC$ . Если площадка вдоль  $BC$  единичная, то площадки вдоль  $PC$  и  $PB$  соответственно равны  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$ . Из равновесия призмы получаем компоненты напряжений, действующих на грань  $BC$ ,  $x = \sigma_{xx} \cos \alpha$  и  $y = 0$ . Отсюда

$$\sigma = x \cos \alpha = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha; \quad (13.41)$$

$$\tau = x \sin \alpha = \sigma_{xx} \cos \alpha \sin \alpha = \sigma_{xx} \sin 2\alpha / 2. \quad (13.42)$$

Такие напряжения будут внутри в растягиваемом стержне (№ 13.6). Для нахождения максимального сдвигового напряжения производную по  $\alpha$  приравниваем нулю. Получаем, что максимальное напряжение будет на площадке под углом  $45^\circ$  и равно половине  $\sigma_{xx}$ .

Общие формулы (13.4)—(13.9) можно использовать для рассмотрения деформации тонких пластинок. Простейший случай равномерного их растяжения боковыми силами. Если  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma$ , а  $\sigma_{zz} = 0$ , то

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = (1 - \mu)\sigma/E.$$

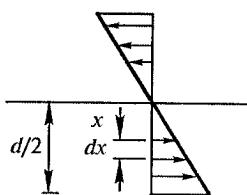


Рис. 13.10

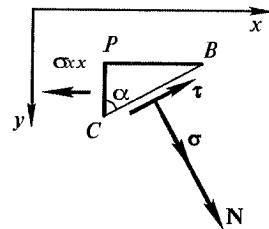


Рис. 13.11

## Относительное изменение площади пластиинки

$$\Delta s/s = 2(1 - \mu)\sigma/E. \quad (13.43)$$

Рассмотрим расширение сферической оболочки под действием внутреннего давления (№ 13.11). На рис. 13.12 показан элемент тонкой оболочки. Сила, обусловленная разностью внутреннего и внешнего давлений, равна  $\Delta p dxdy$  и уравновешивается суммой компонент сил, действующих внутри оболочки. Считая  $dy = dx$  и  $dx/(2R) = \alpha$ , можно записать

$$\Delta p dxdy = \Delta p(dx)^2 = 4\sigma dx h \alpha = 2\sigma(dx)^2 h/R.$$

Отсюда

$$\sigma = \Delta p R/(2h). \quad (13.44)$$

Для тонкой сферической оболочки радиусом  $R$  внутренний объем связан с площадью поверхности

$$v = (4/3)\pi[s/(4\pi)]^{3/2}.$$

Относительное изменение объема выражаем через относительное изменение площади поверхности, а затем используем (12.43) и (12.44)

$$\Delta v/v = (3/2)\Delta s/s = 3(1 - \mu)R\Delta p/(2Eh). \quad (13.45)$$

Для тонкой цилиндрической оболочки, элемент сечения которой показан на рис. 13.13, условие равновесия на единицу длины вдоль образующей цилиндра

$$\Delta p dx = 2\sigma h \alpha = \sigma dx h/R.$$

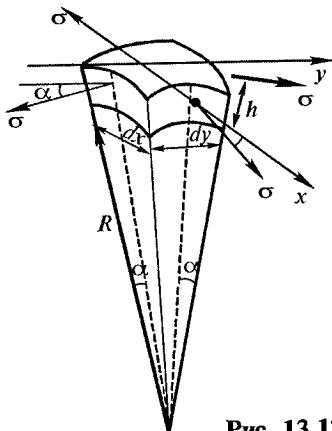


Рис. 13.12

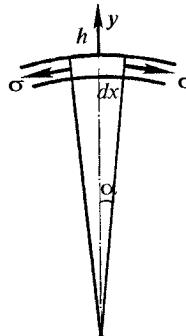


Рис. 13.13

Если радиус цилиндрической оболочки будет увеличиваться, например, при симметричных колебаниях (расширении и сжатии) и одинаковом давлении с обеих сторон ( $\Delta p = 0$ ), то тормозящими будут силы, связанные с возникающими напряжениями из-за растяжения (и сжатия). Обозначая размер элемента при равновесии  $dx_0$  и модуль Юнга  $E$ , имеем

$$\sigma = E(dx - dx_0)/dx_0 = E(dx/dx_0 - 1).$$

Если элемент смещается по радиусу на  $y$ , то  $dx_0/R = dx/(R + y)$ , так как угол, вырезающий этот элемент, не меняется, второй закон Ньютона, описывающий колебательное движение элемента, дает

$$\rho h dx_0 y'' = -2\sigma h \alpha = -h(dx_0/R)E(y/R).$$

Отсюда

$$y'' + Ey/(\rho R^2) = 0.$$

Это определяет частоту колебаний.

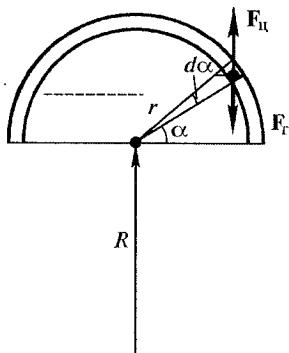


Рис. 13.14

Падение тела в однородном (постоянном) поле тяжести, как уже говорилось, не вызывает напряжений в теле. Но если поле неоднородно, т. е. меняется на размере конструкции, то в теле возникают напряжения. В качестве примера конструкции можно рассмотреть тонкую сферическую оболочку. При прохождении такой оболочки вблизи некоторого тела (например, нейтронной звезды) на оболочку действуют изменяющиеся гравитационное поле и центробежные силы, связанные с искривлением траектории (№ 13.38). Возникающие силы стремятся разорвать оболочку в направлении радиуса кривизны траектории. На рис. 13.14 показаны разрез оболочки (радиусом  $r$  и толщиной  $h$ ) и силы — центробежная  $F_u$  и гравитационная  $F_g$ . Так как имеется ось симметрии, то интегрируем по кольцам (в плоскостях, перпендикулярных  $R$ )

$$\int_0^{\pi/2} \rho h r d\alpha 2\pi r \cos \alpha \left[ \omega^2 (R + r \sin \alpha) - \gamma M / (R + r \sin \alpha)^2 \right] = Th 2\pi r.$$

Здесь  $T$  — напряжение в диаметральном кольце. Оно определяется прочностью.

Из условия движения по дуге окружности радиусом  $R$  получаем  $\omega^2 = \gamma M/R^3$ . Для минимального радиуса кривизны получаем

$$R = [3\rho r \gamma M / (2T)]^{1/3}.$$

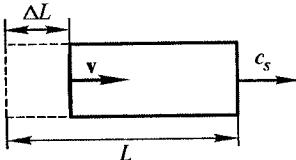


Рис. 13.15

Действие сил на упругие твердые тела — это процесс, который всегда сопровождается **распространением упругих волн**. Рассмотрим распространение волны сжатия под действием постоянного давления  $p$ , приложенного к торцу однородного упругого тонкого стержня, напряжение в котором можно считать одноосным, и будем пользоваться соответствующим выражением для упругой энергии. Волна, распространяясь со скоростью  $c_s$ , приводит веществу, из которого состоит стержень, в движение со скоростью  $v$  (рис. 13.15). Когда фронт волны проходит расстояние  $L$  за время  $t = L/c_s$ , то торец стержня, двигаясь со скоростью  $v$ , как и все точки за фронтом волны, в течение того же времени проходит расстояние  $\Delta L = vL/c_s$ . Деформация охваченной движением части стержня равна

$$\epsilon = \Delta L/L = v/c_s. \quad (13.46)$$

Тогда по закону Гука получаем

$$p = E\epsilon = Ev/c_s. \quad (13.47)$$

По закону Ньютона импульс силы  $p\Delta t$  равен изменению количества движения (произведению массы  $\rho c_s \Delta t$  на скорость)  $\rho c_s \Delta t v$ . Следовательно,

$$p = \rho c_s v. \quad (13.48)$$

Из этих соотношений, в частности, следует формула для **скорости распространения упругой волны**

$$c_s = \sqrt{E/\rho}. \quad (13.49)$$

При заданной скорости волны, используя (13.49) и (13.18), можно найти удлинение стержня в поле тяжести (№ 13.5).

Подчеркнем, что соотношения, в которые входят скорости, получены и годятся только для волны, в то время как закон Гука пригоден всегда. Плотность потенциальной (упругой) энергии в волне  $p^2/(2E)$ . С помощью полученных выше соотношений находим, что это равно кинетической энергии  $\rho v^2/2$ , как и указано в условии данной задачи.

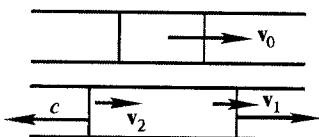


Рис. 13.16

Начальное состояние в некоторой ограниченной области стержня (рис. 13.16) может быть задано независимо (произвольно) и является суммой тех волн, на которые оно затем распадается. Поэтому возможно, что в этой области потенциальная энергия в  $\alpha$  раз больше кинетической  $p_0^2/(E\rho v_0^2) = \alpha$ . Представим начальное состояние в виде суммы двух упругих волн, которые расходятся в разные стороны. Считаем, что направление движения частиц в обеих волнах такое же, как в начальный момент в возмущенной зоне. Действительное направление, как будет видно из решения, определяется величиной  $c$ . Принимаем это направление за положительное. В волне, идущей в положительном направлении, — сжатие  $p_1 = \rho v_1 c_s$ . В волне, идущей в отрицательном направлении, — растяжение  $p_2 = -\rho v_2 c_s$ . Тогда для начальных скорости и давления получаем

$$v_0 = v_1 + v_2; p_0 = p_1 + p_2 = \rho c_s (v_1 - v_2).$$

Отсюда

$$v_1 = (v_0/2)(1 + \sqrt{\alpha}); v_2 = (v_0/2)(1 - \sqrt{\alpha}).$$

Видно, что при  $\alpha > 1$  знак, а следовательно, и направление  $v_2$  меняется на обратное. Это, однако, не влияет на отношение кинетических энергий, которое пропорционально отношению квадратов скоростей:

$$v_1^2/v_2^2 = (1 + \sqrt{\alpha})^2 / (1 - \sqrt{\alpha})^2.$$

При  $\alpha = 1$  начальное соотношение представляет соотношение в волне, движущейся в положительном направлении.

Волны возникают и при **столкновении стержней**. Если сталкиваются торцами два одинаковых стержня плотности  $\rho$ , длиной  $L$ , имеющие модуль Юнга  $E$  и движущиеся с одинаковыми скоростями  $v$  (№ 13.39), то после их соприкосновения по ним побегут упругие волны сжатия, скорость которых определяется (13.49). За волнами вещество стержня становится неподвижным, давление возрастает до величины, определяемой (13.48), где  $v$  — скорость движения стержней, а максимальное сжатие получаем по (13.46). Так как на конце стержня напряжение равно нулю (нет никаких сил), то после выхода волн на торец начинается процесс разгрузки стержня. По стержню со скоростью упругой волны (13.49) распространяется процесс снятия давления в стержне и возникновения движения вещества

стержня в сторону свободного конца. Когда волна разгрузки дойдет до точки соприкосновения стержней, они начнут расходиться — закончится время соприкосновения (соударения). Если один из стержней покоится (№ 13.40), то для решения нужно перейти в систему отсчета, связанную с их центром масс. Задача о соударении сводится к предыдущей задаче.

Для получения связи между модулями упругого тела и характеристиками межмолекулярного взаимодействия необходимо силу молекулярного взаимодействия отнести к площади поперечного сечения, приходящейся на одну пару взаимодействующих молекул, и связать это отношение с относительным изменением расстояния между молекулами. Например, энергия взаимодействия двух атомов, находящихся на расстоянии  $r$ , может описываться формулой Морзе (№ 13.46)

$$U(r) = U_0 \left[ e^{-2\alpha(r-r_0)} - 2e^{-\alpha(r-r_0)} \right],$$

где  $r_0$  — межатомное расстояние. Покажем, как можно оценить модуль Юнга  $E$  кристалла с простой кубической решеткой, для которого заданы равновесное межатомное расстояние  $r_0 = 2 \cdot 10^{-8}$  см и параметры  $U_0 = 10^{-12}$  эрг и  $\alpha = 2,5 \cdot 10^8$  см<sup>-1</sup>.

Напомним, что уменьшение потенциальной энергии равно работе сил взаимодействия между атомами:  $dU = -Fdr$ . Минус показывает, что при положительной работе потенциальная энергия уменьшается. После дифференцирования получаем:

$$F = 2U_0\alpha \left[ e^{-2\alpha(r-r_0)} - e^{-\alpha(r-r_0)} \right]. \quad (13.50)$$

Рассматривая небольшие деформации, т. е. малые отклонения  $r$  от  $r_0$ , получим

$$F \equiv -2U_0\alpha^2(r - r_0).$$

При увеличении расстояния между атомами сила взаимодействия является силой притяжения. Для растяжения кристалла надо приложить внешнюю силу  $F = -F$ . Вводя  $\sigma = F'/r_0^2$  и  $\epsilon = (r - r_0)/r_0$ , получаем

$$\sigma = E\epsilon,$$

где  $E = 2\alpha^2 U_0/r_0 = 6,25 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>.

Сила взаимодействия (13.50) растет, достигает максимальной величины, а затем уменьшается. Это приводит к неустойчивости и разрушению. Для нахождения максимальной силы надо приравнять производную от (13.50) нулю. Получаем  $F_{\max} = \alpha U_0/2$ .

## 14. ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОДИНАМИКИ

Вещества по так называемому агрегатному состоянию разделяют на твердые, жидкые и газообразные. Иногда добавляют еще жидкие кристаллы и плазму — газ, содержащий заряженные частицы. Даже относительно небольшое количество заряженных частиц может существенно повлиять на некоторые свойства среды (вещества).

Жидкости и газы отличаются от твердых тел тем, что в равновесии они не выдерживают сдвиговые напряжения, и напряжение в них не зависит от ориентации площадки, на которую напряжение (давление) действует по нормали к площадке (**закон Паскаля**). Жидкости от газов отличаются большей (при нормальных условиях примерно в тысячу раз) плотностью, при которой силы взаимодействия между молекулами играют существенную роль (создают прочность на разрыв и малую сжимаемость).

Для описания движения жидкости (течения) достаточно указать, как параметры и характеристики течения меняются по пространству, в котором находится жидкость, со временем. Линия, в каждой точке которой в некоторый момент времени вектор скорости частицы, находящейся в этой точке, направлен по касательной, называется **линией тока**. Область жидкости, ограниченная (выделенная) линиями тока, называется **трубкой тока**.

Течение, картина которого со временем не меняется, называется **стационарным**. При стационарном движении линии тока неподвижны и являются **траекториями** движения частиц жидкости.

Дифференциальные уравнения, описывающие течения жидкости, можно получить, используя в каждой точке (бесконечно малой области) законы сохранения массы, импульса, энергии и уравнение состояния. Для интегрирования уравнений необходимо задать начальные и граничные условия. В общем случае интегрирование уравнений сложная задача. Но в случае стационарного течения невязкой (идеальной) жидкости можно получить интегралы для **тонкой трубки течения**. Трубка считается тонкой, если можно пренебречь изменением параметров течения поперек трубы.

Обозначая плотность жидкости  $\rho$ , скорость течения  $v$  и площадь сечения трубы тока  $S$ , для расхода жидкости, т. е. массы

жидкости, проходящей через данное сечение за единицу времени,  $q$  получаем

$$q = \rho v S. \quad (14.1)$$

Из закона сохранения массы жидкости, протекающей по трубке тока, для различных сечений одной и той же трубки тока имеем

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \quad (14.2)$$

Для получения уравнения **Бернулли**, которое описывает стационарное движение жидкости по тонкой трубке тока, необходимо воспользоваться также законом сохранения энергии. В законе сохранения энергии будем учитывать изменение кинетической и потенциальной энергии жидкости за счет работы сил давления, но не будем учитывать изменение тепловой энергии, связанное со сжимаемостью, вязкостью и теплопроводностью, которое в рассматриваемых движениях мало. Жидкость, при течении которой можно пренебречь сжимаемостью, изменением тепловой энергии, вязкостью и теплопроводностью, называется **идеальной**.

На рис. 14.1. представлен разрез участка трубки тока вертикальной плоскостью, т. е. плоскостью, в которой лежит сила тяжести. На рисунке указаны высоты, на которых находятся сечения 1 и 2, и соответствующие параметры течения. За бесконечно малое время  $dt$  частицы жидкости смещаются на бесконечно малое расстояние  $vdt$ . Частицы жидкости, находившиеся в сечении  $S_1$ , перейдут в сечение  $S_1'$ , а частицы из  $S_2$  в  $S_2'$ . Из-за малости смещений изменением величин площадей при смещении пренебрегаем. Работа сил давления по перемещению массы жидкости, находящейся между сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , складывается из положительной работы  $p_1 S_1 v_1 dt$  и отрицательной (сила направлена против перемещения) работы  $p_2 S_2 v_2 dt$ . Эта работа идет на изменение потенциальной и кинетической энергии. Энер-

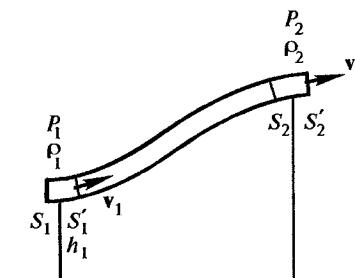


Рис. 14.1

гия жидкости, находящейся между сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , не меняется. Изменение связано как бы с переходом массы, находившейся между сечениями  $S_1$  и  $S_1^1$  и равной  $dm = \rho_1 S_1 v_1 dt = \rho_2 S_2 v_2 dt$ , в положение между сечениями  $S_2$  и  $S_2^1$ . Используя сохранение массы в выражении для работы сил давления и приравнивая эту работу изменению потенциальной и кинетической энергии, имеем:

$$(p_1/\rho_1 - p_2/\rho_2) dm = dm \left[ g(h_2 - h_1) + (v_2^2 - v_1^2)/2 \right]. \quad (14.3)$$

Отсюда получаем уравнение Бернулли

$$v_1^2/2 + gh_1 + p_1/\rho_1 = v_2^2/2 + gh_2 + p_2/\rho_2 = \text{const}. \quad (14.4)$$

**Сжимаемость** жидкостей при нормальных условиях мала. Например, для воды увеличение плотности на 1 % требует давления более 200 атмосфер (такое давление создается на глубине 2 км), а для увеличения плотности на 10 % — свыше 3000 атмосфер. Поэтому при небольших давлениях воду считают несжимаемой жидкостью. Тогда вместо (14.2) и (14.4) можно написать

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (14.5)$$

$$p_1 + \rho v_1^2/2 + \rho g h_1 = p_2 + \rho v_2^2/2 + \rho g h_2. \quad (14.6)$$

С помощью уравнения Бернулли для несжимаемой жидкости (14.6) можно получить формулу Торричелли для скорости истечения струи жидкости из отверстия в сосуде. Считаем, что площадь отверстия намного меньше площади свободной поверхности жидкости в сосуде, т. е. скоростью жидкости на свободной поверхности можно пренебречь по сравнению со скоростью истечения жидкости из отверстия. Струе жидкости, вытекающей из отверстия, соответствует трубка тока, начинающаяся на свободной поверхности. Давление в вытекающей струе равно атмосферному, так как граница струи, вытекающей в атмосферу, неподвижна. На свободной поверхности жидкости давление тоже равно атмосферному. Напомним, что уравнение записывается для тонкой трубки тока, начинающейся на поверхности и выходящей в отверстие. Для малого отверстия можно считать скорость не изменяется по сечению отверстия. Если отверстие находится ниже свободной поверхности жидкости на  $h$ , то из (14.6) для скорости истечения струи получаем формулу Торричелли:

$$v = (2gh)^{1/2}. \quad (14.7)$$

Отметим, что величина скорости не зависит от ее направления (от направления нормали к площади отверстия), а только от высо-

ты, на которой находится центр отверстия. Величина  $\rho v^2/2$  называется **скоростным напором**. Из (14.6) следует, что она равна гидростатическому давлению ( $\rho gh$ ). Полное давление в неподвижной жидкости на этой глубине в покоящейся жидкости получим, если добавим атмосферное. Это давление называется **давлением торможения** и может быть получено из уравнения Бернулли (14.6).

Необходимо упомянуть еще об одном важном явлении, возникающем в жидкости, движущейся по трубе, — **гидравлическом ударе**. Несжимаемая жидкость, движущаяся по трубе, при мгновенном перекрывании сечения трубы некоторой заслонкой должна вся мгновенно остановиться. Торможение большого количества жидкости приводит к очень большому увеличению давления на заслонку, стени трубы и в жидкости. Это давление намного превосходит давление торможения в потоке, которое может быть вычислено по (14.6). Для оценки давления гидравлического удара необходимо оценить количество останавливающейся в трубе жидкости. Это можно сделать лишь, рассматривая распространение по жидкости волны сжатия (рис. 14.2). Если скорость течения жидкости  $v$ , а скорость волны сжатия  $c$ , то за время удара  $t$  остановится объем жидкости  $Sct$ , масса которого  $\rho Sct$ , а импульс  $\rho Sctv$ . Этой величине равно изменение импульса при остановке, которое равно импульсу силы  $Ft$ . Для давления получаем

$$p = F/S = \rho vc.$$

Эта величина намного больше давления торможения ( $p = \rho v^2/2$ ), так как скорость звука, например, в воде равна 1500 м/с.

Давление гидравлического удара при скорости течения 10 м/с доходит до полутора сотен атмосфер.

Движение некоторого количества идеальной жидкости в изогнутой трубке в поле тяжести может иметь **колебательный** характер. В трубке постоянного сечения  $S$  длина заполненной жидкостью части  $l$ . Колена трубы, как показано на рис. 14.3, составляют с горизонтом углы  $\alpha$  и  $\beta$  (№ 14.2). Возвращающей силой является сила тяжести. Если в колене граница жидкости сместится на  $x$  от равно-

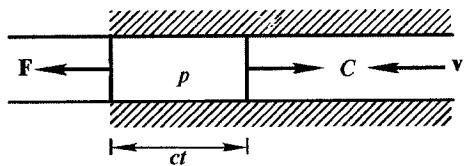


Рис. 14.2

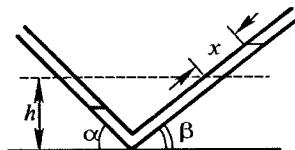


Рис. 14.3

весного уровня, то в правом колене потенциальная энергия возрастет на  $\rho x S g (h + x \sin \beta)/2$ , а в левом уменьшится на  $\rho x S g (h - x \sin \alpha)/2$ . В целом изменение потенциальной энергии будет равно

$$E_n = \rho g S x^2 (\sin \beta + \sin \alpha)/2.$$

Кинетическая энергия жидкости  $E_k = \rho I S v^2/2$ . Если эту систему рассматривать как осциллятор с частотой колебаний  $\omega$ , то для полной энергии осциллятора, отнесенной к массе системы, имеем

$$E/m = v^2/2 + \omega^2 x^2/2.$$

Отсюда следует для частоты колебаний жидкости в трубке

$$\omega^2 = g(\sin \alpha + \sin \beta)/l.$$

Колена трубы могут иметь разное сечение. Движением и смещением в широком колене (№ 14.3) или даже в резервуаре (№ 14.4) в таком случае можно пренебречь. Если длина тонкой трубы  $l$ , то уравнение движения массы жидкости в тонкой трубке

$$\rho S l x'' = -\rho S x g. \quad (14.8)$$

Из этого уравнения колебаний получаем

$$T = 2\pi(l/g)^{1/2}.$$

**Истечение жидкости из сосуда через отверстие** рассчитывается с помощью уравнения Бернулли (14.6). Простейший случай — истечение через малое отверстие площади  $\sigma$  в дне сосуда площадью  $S$  (№ 14.6). Движение не стационарно — скорость истечения (14.7) меняется, так как верхняя граница жидкости опускается от максимального уровня  $H$  до  $h$  в произвольный момент времени  $t$  (см. рис. 14.4). Уравнением Бернулли, полученным для стационарного течения, можно пользоваться, если изменение происходит медленно (квазистатически), как в данном случае, когда  $\sigma \ll S$ .

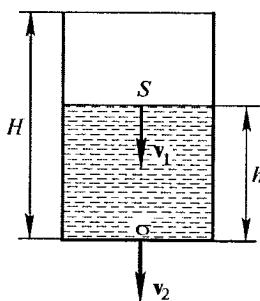


Рис. 14.4

Скорость движения частиц, находящихся на поверхности, расположенной на высоте  $h$ , равна скорости понижения уровня  $v_1 = -dh/dt$ . Обозначим скорость жидкости в отверстии  $v_2$ . Учитывая, что давление на верхней поверхности жидкости и на поверхности вытекающей струи одинаково (равно атмосферному), получаем из уравнения Бернулли  $v_2^2 - v_1^2 = 2gh$ . При этом так как плотность жидкости не ме-

няется, для расхода жидкости имеем  $v_1 S = v_2 \sigma$ . Учитывая, что  $\sigma \ll S$ , получаем  $v_2 \approx (2gh)^{1/2}$  и дифференциальное уравнение

$$-dh/\sqrt{h} = \sigma \sqrt{2g} dt/S. \quad (14.9)$$

Используя начальное условие (уровень равен  $H$ ), для времени достижения уровня  $h$  получаем

$$t = (S/\sigma) \sqrt{2/g} (\sqrt{H} - \sqrt{h}). \quad (14.10)$$

Время вытекания всей жидкости

$$T = (S/\sigma) \sqrt{2H/g}. \quad (14.11)$$

Скорость истечения зависит только от разности уровней свободной поверхности и отверстия. В рассмотренной задаче скорость будет такой же для отверстия в боковой поверхности вблизи дна. Для отверстий, поднятых над дном, скорость будет уменьшаться в соответствии с (14.7). При этом возникает вопрос: на какую высоту надо поднять отверстие, чтобы струя встречала поверхность, на которой стоит сосуд, на максимальном расстоянии от сосуда (№ 14.7)? Считаем, что частицы в струе движутся независимо: как тело, падающее в поле тяжести (рис. 14.5). Горизонтальная скорость постоянна и равна скорости истечения. Время падения  $t$  связано с высотой отверстия  $h$  формулой для пути при равноускоренном движении в поле тяжести  $t = (2h/g)^{1/2}$ . Для искомого расстояния при нахождении свободной поверхности жидкости на высоте  $H$  получаем

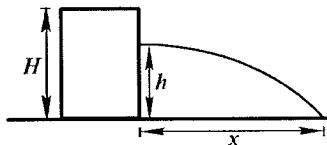


Рис. 14.5

$$x = [2g(H - h)2h/g]^{1/2} = 2[(H - h)h]^{1/2}.$$

Максимальное расстояние определяем, приравнивая производную  $x$  по  $h$  нулю. Отсюда максимальное расстояние будет при  $h = H/2$  и равно  $H$ .

При вытекании струи на сосуд действует сила. Из второго закона Ньютона сила равна изменению импульса за единицу времени. Масса жидкости, вытекающей в единицу времени, равна  $\rho \dot{V}$ . Изменение импульса  $\rho \dot{V}v^2$  равно силе. Если отверстие в боковой поверхности находится на расстоянии  $h$  от поверхности жидкости, то скорость определяется (14.7). Сила, действующая на сосуд, равна  $F = 2\rho Sgh$ . Отметим, что эта сила в два раза больше статической, действующей на закрытое отверстие. Для сосуда с двумя отверстиями на разных высотах (№ 14.14)  $F = 2\rho Sg(h_1 - h_2)$ .

Если над свободной поверхностью давление  $p$  отличается от атмосферного  $p_0$  (№ 14.8), то из (14.6) получаем

$$p + \rho gh = p_0 + \rho v^2/2.$$

Отсюда

$$v = [2gh + 2(p - p_0)/\rho]^{1/2}.$$

При уменьшении давления  $p$  скорость будет уменьшаться. Истечение прекратится ( $v = 0$ ), когда будет  $p = p_0 - \rho gh$ . Чтобы скорость истечения была постоянной (№ 14.9), надо обеспечить уменьшение давления при уменьшении уровня. Это достигается опусканием в закупоренный сосуд трубки, открытой в атмосферу (рис. 14.6). Когда давление в жидкости у конца трубки опускается ниже атмосферного, проскаивает пузырек воздуха, и давление над поверхностью жидкости увеличивается. Скорость истечения определяется высотой  $h_1$  конца трубы над отверстием, через которое вытекает жидкость (14.7).

Если жидкость из сосуда вытекает через отверстие в верхней поверхности сосуда вертикально вверх (рис. 14.7), то для определения связи давления, скорости истечения и высоты поднятия струи надо рассмотреть параметры, входящие в уравнение Бернулли, в трех точках. Внутри сосуда давление  $p$ , а в струе и в точке вытекания (внизу струи), и в точке наивысшего поднятия давление атмосферное  $p_0$ . Скорость внутри сосуда и на максимальной высоте равна нулю. Из уравнения Бернулли получаем

$$p - p_0 = \rho v^2/2 = \rho gh.$$

Естественно рассмотреть также **втекание жидкости в сосуд**, опущенный в жидкость. Если в дне сосуда, находящемся на глубине  $h$ , имеется небольшое отверстие (чтобы считать неизменной скорость по сечению), то скорость втекания можно найти по уравнению Бер-

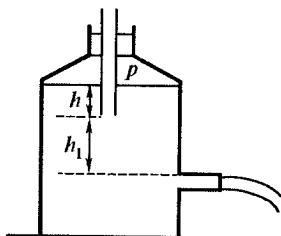


Рис. 14.6

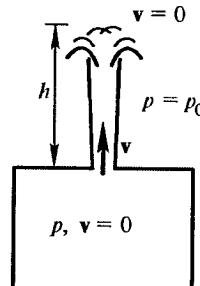


Рис. 14.7

нули. Скорости движения жидкости вокруг сосуда значительно меньше скорости в отверстии. Ими можно пренебречь в уравнении Бернулли. Чтобы не рассматривать потенциальную энергию, берем начало трубы течения на уровне отверстия (конец трубы в отверстии). Из (14.6) получаем

$$\rho gh + p_0 = \rho v^2/2 + p_0. \quad (14.12)$$

Таким образом, скорость определяется (14.7).

Если сосуд высоты  $H$  с площадью  $S$  погружен на  $h$  (рис. 14.8), то его вес равен весу вытесненной жидкости  $mg = \rho ghS$ . Если в сосуде уровень жидкости окажется на расстоянии  $x$  от дна, то сосуд опустится на  $x$ . То есть уровень жидкости в сосуде при наполнении его жидкостью будет всегда находиться на расстоянии  $h$  от поверхности жидкости вокруг сосуда. Чтобы рассчитать погружение сосуда при наполнении его через малое отверстие в дне (№ 14.12), запишем сохранение массы (объема втекающей жидкости)

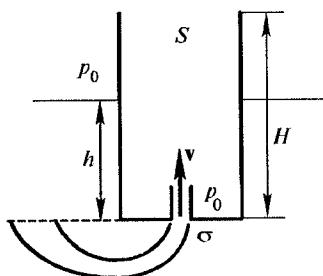


Рис. 14.8

$$\sigma v = Sdx/dt. \quad (14.13)$$

Здесь  $dx/dt$  — скорость частиц на уровне ее свободной поверхности в сосуде. Подставляя в (14.13) скорость из (14.12), получаем

$$dt = Sdx/[\sigma(2gh)^{1/2}].$$

Отсюда для времени, через которое сосуд погрузится в жидкость, получаем

$$t = S(H - h)/[\sigma(2gh)^{1/2}].$$

При рассмотрении вытекания струи из сосуда возникает и задача об ее форме. В простейшем случае это задача об истечении из отверстия в дне сосуда (№ 14.11). Вытекающую струю считаем трубкой тока. Начало этой трубы берем на свободной поверхности жидкости в сосуде (рис. 14.9), где давление равно атмосферному, скорость равна нулю и потенциальная энергия равна нулю. Тогда из уравнения Бернулли (14.4) для скорости в зависимости от расстояния от дна сосуда получаем

$$v^2/2 + g(-h - y) = 0. \quad (14.14)$$

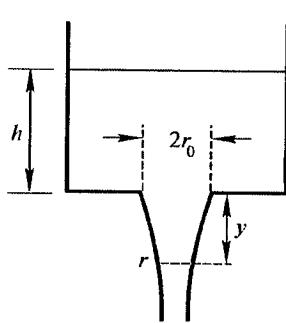


Рис. 14.9

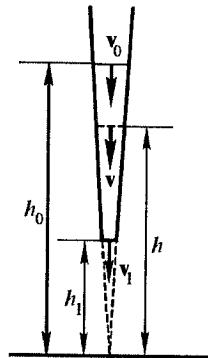


Рис. 14.10

Из закона сохранения массы для струи имеем

$$vr^2 = v_0 r_0^2 = (2gh)^{1/2} r_0^2. \quad (14.15)$$

Используя (14.14), получаем изменение радиуса струи

$$r = r_0 [h/(h + y)]^{1/4}. \quad (14.16)$$

Можно задать границы вертикально движущейся жидкости, например, в виде тонкого (для постоянства параметров по сечениюю трубки тока) конуса (№ 14.13), и вычислить изменение давления. На рис. 14.10 приведены обозначения, используемые в уравнениях. Для трех сечений записываем сохранение массы и уравнение Бернули

$$vr^2 = v_0 r_0^2 = v_1 r_1^2; \quad (14.17)$$

$$v^2/2 + gh + p/\rho = v_0^2/2 + gh_0 = v_1^2/2 + gh_1. \quad (14.18)$$

К этому надо добавить  $r = r_0 h/h_0$  (для конуса). Отсюда находим  $p(h)$ .

**Струя падающей жидкости** (рис. 14.11) может быть направлена в сосуд (№ 14.5). Давление на дно сосуда складывается из веса жидкости в сосуде и давления торможения вертикального движения струи. Вертикальная скорость струи определяется падением в поле тяжести

$$v = [2g(H - h)]^{1/2}. \quad (14.19)$$

Зная объем жидкости  $Q$ , падающей в сосуд за одну секунду, находим динамическую составляющую силы, действующей на дно, которая образуется за счет изменения вертикальной составляющей импульса струи,  $\rho Qv$ .

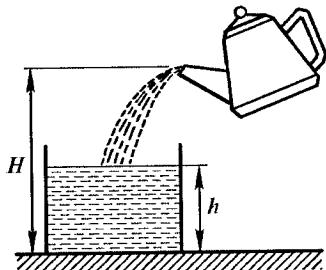


Рис. 14.11

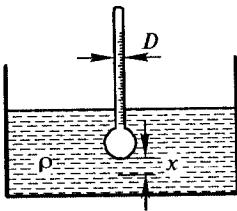


Рис. 14.12

К этому добавляется вес жидкости в сосуде в этот момент  $\rho Qtg$ . В итоге сила, действующая на дно, равна

$$F = \rho Q[gt + (2gH - 2gQt/S)^{1/2}].$$

В жидкости, находящейся в поле тяжести, давление увеличивается с глубиной

$$p = \rho gh. \quad (14.20)$$

Это соответствует закону Архимеда: на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной жидкости:

$$F = \rho vg. \quad (14.21)$$

Плавающее в жидкости тело, например ареометр (№ 14.1), может совершать колебания под действием силы Архимеда. При погружении ареометра на  $x$  (рис. 14.12) нарушается равновесие. Увеличившаяся на  $\rho\pi D^2 g/4$  сила Архимеда тормозит движение (возвращающая сила). Если масса ареометра  $m$ , то из второго закона Ньютона получаем

$$mx'' = -\rho\pi D^2 g/4. \quad (14.22)$$

Откуда для периода колебаний имеем

$$T = 4[\pi m/(\rho g)]^{1/2}D.$$

Силу Архимеда надо учитывать и при опускании в жидкость тяжелых предметов на тросах (№ 14.10). Если на тросе постоянного сечения  $S_0$ , имеющего прочность  $T$ , опускается предмет массой  $M$ , плотностью  $\rho$  и объемом  $v$ , то предельная длина троса  $L$  определяется уравнением

$$TS_0 = (\rho - \rho_*)S_0 Lg + Mg - \rho_* vg. \quad (14.23)$$

Очевидно, что максимальное напряжение в тросе и его обрыв в верхней точке.

Выгодно изменять сечение троса, чтобы максимальное напряжение достигалось во всех точках троса одновременно. Для элемента троса на расстоянии  $x$  от верхней точки условие равновесия сил

$$(\rho - \rho_{\infty})Sdxg = F - (F + dF) = -dF.$$

Из постоянства напряжения  $T = F/S$  следует уравнение

$$dF/F = -(\rho - \rho_{\infty})dxg/T.$$

Интегрируя и используя, что при  $x = 0$  сила равна  $F = S_0T$ , получаем

$$\ln(ST/F) = (\rho - \rho_{\infty})xg/T. \quad (14.24)$$

Откуда связь

$$x = T \ln(S_0T/F)/[(\rho - \rho_{\infty})g]. \quad (14.25)$$

На нижнем конце троса

$$F = Mg - \rho_{\infty}vg. \quad (14.26)$$

Откуда длина троса

$$L = T \ln[S_0T/(Mg - \rho_{\infty}vg)]/[(\rho - \rho_{\infty})g]. \quad (14.27)$$

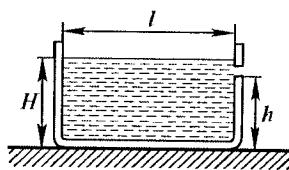
Из (14.24) и  $F = ST$  получаем

$$S = S_0 \exp[-gx(\rho - \rho_{\infty})/T]. \quad (14.28)$$

При постоянном сечении из (14.23) и (14.26) следует

$$L = [S_0T - (Mg - \rho_{\infty}vg)]/[(\rho - \rho_{\infty})g]. \quad (14.29)$$

На жидкость в сосуде, двигающемся с ускорением, действуют силы инерции. Если еще действует поле тяжести, то поверхность жидкости перпендикулярна к направлению суммы сил. Угол наклона поверхности при движении по горизонтали с ускорением  $a$  определяется соотношением  $\tan \alpha = a/g$ . В сосуде шириной  $l$ , в котором жидкость первоначально находилась на высоте  $H$  (рис. 14.13), а нижний край отверстия в боковой стенке на высоте  $h$  (№ 14.15), жидкость не будет выливаться при горизонтальном движении с ускорением



$\tan \alpha = a/g$ . В сосуде шириной  $l$ , в котором жидкость первоначально находилась на высоте  $H$  (рис. 14.13), а нижний край отверстия в боковой стенке на высоте  $h$  (№ 14.15), жидкость не будет выливаться при горизонтальном движении с ускорением

Рис. 14.13

$$a = g \tan \alpha = 2(H - h)g/l.$$

В цилиндрическом сосуде, вращающемся относительно оси симметрии (назовем ее  $z$ ) с угловой скоростью  $\omega$ , наклон поверхности жидкости определяется отношением центробежной силы к силе тяжести

$$dz/dr = \omega^2 r/g. \quad (14.30)$$

Интегрируя это уравнение, для формы свободной поверхности жидкости (№ 14.16) получаем (рис. 14.14)

$$z(r) = z(0) + \omega^2 r^2/(2g). \quad (14.31)$$

Давление на дне сосуда (№ 14.17) можно определить из условия изменения давления по радиусу сосуда за счет центробежной силы

$$dp = \rho dr \omega^2 r. \quad (14.32)$$

Интегрируя, получаем

$$p(r) = p(0) + \rho \omega^2 r^2/2. \quad (14.33)$$

Сравнивая с (14.31), видим, что давление просто определяется уровнем жидкости

$$p(r) = \rho g z(r). \quad (14.34)$$

Зная форму свободной поверхности (14.31), можно подсчитать, например, объем жидкости, находящейся выше центральной точки свободной поверхности вплоть до радиуса сосуда  $R$ :

$$Q = \int_0^R z 2\pi r dr = \pi \omega^2 R^4 / (4g). \quad (14.35)$$

Чтобы найти точку на свободной поверхности, которая соответствует уровню жидкости, когда она не вращается (№ 14.36), надо (14.35) приравнять  $\pi R^2 z_1$ . Используя (14.31), получаем  $r_1 = R(2)^{1/2}$ .

По формуле (14.35) можно подсчитать угловую скорость, при которой жидкость, налитая в цилиндрический сосуд радиусом  $R$  до уровня  $H$ , коснется свободной поверхностью дна сосуда (задача 1Б на экзамене в 2005 г.). Приравнивая (14.35)  $\rho R^2 H$ , получаем  $\omega = 2(gH)^{1/2}/R$ .

Подсчитаем момент инерции вращающейся жидкости плотностью  $\rho$  в объеме (14.35)

$$I = \rho \int_0^R r^2 z 2\pi r dr = (\rho \pi \omega^2 / g) \int_0^R r^5 dr = \rho \pi \omega^2 R^6 g. \quad (14.36)$$

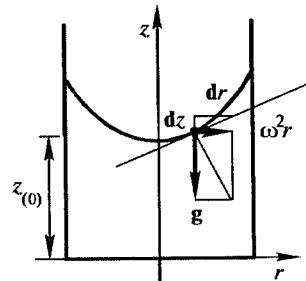


Рис. 14.14

В общую массу жидкости  $m_0$  добавляется масса, находящаяся ниже центральной точки свободной поверхности

$$m = m_0 - \rho Q. \quad (14.37)$$

Ее момент инерции равен моменту инерции цилиндра.

При вытекании жидкости через отверстие в дне вблизи оси вращения (№ 14.19) сохраняется момент количества движения

$$m_0 R^2 \omega_0 / 2 - \rho \pi \omega_0^3 R^6 / (8g) + \rho \pi \omega_k^3 R^6 / (6g) = \rho \pi \omega_k^3 R^6 / (8g). \quad (14.38)$$

Отсюда получаем конечную скорость вращения сосуда. Конечная скорость  $\omega_k$  определяется тем, что жидкость перестает вытекать, когда свободная поверхность доходит до отверстия. Очевидно, что в сосуде остается еще жидкость, имеющая объем (14.35). На рис. 14.15 остающаяся в сосуде жидкость находится за пунктиром.

Если жидкость вытекает из вращающегося сосуда, например, через отверстие в боковой поверхности (№ 14.18), то появляется вторая сила инерции (Кориолиса), которая перпендикулярна скорости движения и работы не совершает, а только искривляет траекторию движения (трубку тока). В уравнении Бернулли потенциальная энергия будет определяться силой тяжести и силой инерции. Таким образом, вместо (14.4) получаем

$$v^2/2 + gz - \omega^2 r^2 + p/\rho = B = \text{const}. \quad (14.39)$$

В качестве начальной точки трубы тока, заканчивающейся в отверстии, можно взять точку  $A$  (рис. 14.16). В этой точке, как и на всей свободной поверхности, скоростью опускания свободной поверхности можно пренебречь. Давление в этой точке равно атмосферному, как и в вытекающей струе (точка  $B$ ). Координаты  $z$  и  $r$  будем отсчитывать от этой точки. Тогда из (14.35) для точек  $B$  и  $A$  имеем

$$v^2/2 - gh - \omega^2 R^2 = 0.$$

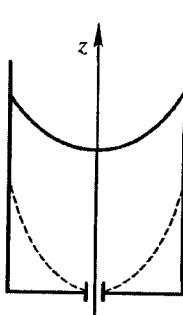


Рис. 14.15

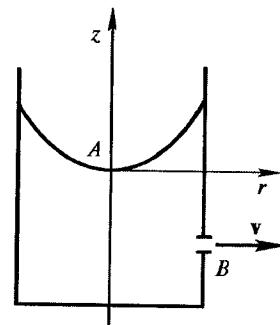


Рис. 14.16

Отсюда определяется скорость относительно отверстия. В неподвижной системе к этой скорости надо добавить скорость точки *B*.

При обтекании жидкостью тел также пользуемся уравнением Бернулли. На теле есть точка, в которой жидкость останавливается (**критическая точка**). Давление в этой точке по уравнению Бернулли равно скоростному напору

$$p = \rho v^2 / 2.$$

Молекулярное движение в жидкости приводит к обмену молекулами, движущимися по соседним линиям тока. Если соседние слои жидкости движутся с разными скоростями, то слой с большей скоростью тормозится, а с меньшей скоростью ускоряется. Передача импульса посредством молекулярного движения называется **вязкостью**, или **внутренним трением**. Сила трения между слоями, отнесенная к единице площади поверхности, разделяющей слои, называемая **напряжением трения**  $\tau$ , определяется законом Ньютона для **вязкой жидкости**

$$\tau = \eta dv/dy. \quad (14.40)$$

Это частные производные, которые употребляются, когда функция зависит от нескольких переменных. При дифференцировании по одной все остальные переменные считаются постоянными. Этот закон применяется и для нестационарных течений, т. е. для скоростей, меняющихся со временем, а также для газов. Величина, обозначенная буквой  $\eta$ , называется **коэффициентом вязкости**. В идеальных газах он растет с увеличением температуры  $\sim \sqrt{T}$ , где  $T$  — абсолютная температура, а в жидкостях падает  $\sim \exp(b/T)$ , где  $b$  — постоянная величина. Для воды при  $0^\circ\text{C}$  коэффициент вязкости

$$\eta = 1,792 \cdot 10^{-2} \text{ г/(см} \cdot \text{с}),$$

а при  $20^\circ\text{C}$

$$\eta = 1,005 \cdot 10^{-2} \text{ г/(см} \cdot \text{с}).$$

Использованная здесь единица измерения коэффициента вязкости названа **пузазом** по имени Пузазеля, который внес большой вклад в исследование вязких течений жидкости.

При течении идеальной жидкости по трубке ее стенки являются линиями тока, т. е. идеальная жидкость движется относительно стенок трубы. Вязкая жидкость из-за трения о неподвижную стенку трубы тормозит и на поверхности стенки имеет нулевую скорость. Вязкая жидкость как бы прилипает к поверхности твердого тела.

И это не зависит от того, является жидкость смачивающей или не смачивающей по отношению к данной поверхности. Скорость жидкости растет с увеличением расстояния от поверхности стенки. А градиент скорости в направлении поперек потока обычно быстро убывает. При малых градиентах (вдали от стенки) вязкость не проявляется, и течение соответствует течению идеальной жидкости. В таком случае слой, в котором необходимо учитывать действие вязкости, называется **пограничным слоем**. Разделение течения на идеальную жидкость и пограничный слой позволяет решать много практических важных задач. Однако есть течения, в которых из-за большой вязкости или малого поперечного размера области течения приходится всю жидкость считать вязкой. Примером такого хорошо изученного течения является течение Пуазейля.

**Течение Пуазейля** — это стационарное течение вязкой жидкости по цилиндрической трубке круглого поперечного сечения при отсутствии сил тяжести или при возможности ими пренебречь. Экспериментальные исследования такого течения хорошо согласуются с теоретическими расчетами.

На рис. 14.17 в трубке радиусом  $R$  выделен элемент, представляющий цилиндр радиусом  $r$  (от оси симметрии). Разность сил, действующих на поперечные сечения, находящихся на расстоянии  $dx$  друг от друга, равна касательной силе на боковой поверхности цилиндра

$$\pi r^2 [p(x) - p(x + dx)] = -\pi r^2 dp = 2\pi r dx \tau = -2\pi r dx \eta dv/dr. \quad (14.41)$$

Отсюда

$$rdp/dx = 2\eta dv/dr. \quad (14.42)$$

Для стационарного течения в трубе постоянного сечения скорость и распределение ее по радиусу не меняется по  $x$ . Поэтому

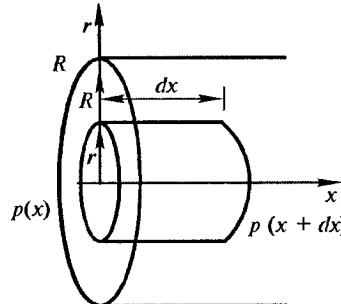


Рис. 14.17

градиент давления также не меняется по длине трубы. Если давление на входе в участок трубы длиной  $l$  давление  $p_1$ , а на выходе  $p_2$ , то

$$dp/dx = (p_2 - p_1)/l.$$

Получаем

$$dv/dr = -(p_1 - p_2)r/(2\eta l). \quad (14.43)$$

Знак минус показывает, что с удалением от оси симметрии скорость уменьшается. Интегрируя и используя условие, что на стенке трубы скорость равна нулю, имеем

$$v = (p_1 - p_2)(R^2 - r^2)/(4\eta l) = v_m(1 - r^2/R^2). \quad (14.44)$$

Из расчета следует, что **скорость поперек потока** меняется по параболическому закону. Здесь  $R$  — радиус внутренней поверхности трубы,  $r$  — расстояние от оси трубки,  $v_m$  — **максимальная скорость** (на оси трубки):

$$v_m = (p_1 - p_2)R^2/(4\eta l). \quad (14.45)$$

При расчете считалось, что по сечению (поперек потока) давление не меняется. **Расход жидкости** через трубку, т. е. масса жидкости, проходящая через сечение трубы за единицу времени:

$$q = \rho \int_0^R v 2\pi r dr = \rho \pi (p_1 - p_2) R^4 / (8\eta l) = \rho \pi R^2 v_m / 2. \quad (14.46)$$

Отсюда видно, что **средняя по сечению скорость** равна половине максимальной

$$v_{cp} = v_m / 2. \quad (14.47)$$

Если в однородном (одинаковом по пространству) потоке вязкой жидкости установлена по направлению потока цилиндрическая трубка круглого сечения (№ 14.35), то расход через трубку определяется средней скоростью. На входе трубки средняя скорость равна скорости потока. Максимальная скорость на конце трубы, если успевает установиться течение Пуазейля, в два раза больше средней. Импульс на выходе из трубы определяем по формуле

$$\rho \int_0^R v^2 2\pi r dr = \rho v_m^2 R^2 / 3. \quad (14.48)$$

Чтобы получить импульс на единицу массы, надо эту величину разделить на (14.46).

Расход жидкости зависит от перепада давления. Вытекание жидкости из широкого сосуда через узкую длинную трубку, в которой устанавливается течение Пуазейля (№ 14.27), зависит от уровня жидкости в широком сосуде. Давление на входе в трубку равно  $p_1 = p_0 + \rho gh$ , а на выходе  $p_2 = p_0$  (атмосферное давление). Течение в трубке устанавливается постепенно после прохождения некоторого начального участка. Ниже будет дана оценка длины переходного участка. Здесь предполагаем, что им можно пренебречь и считать, что изменение давления происходит на длине трубы  $l$ . Объемный расход, определяемый из (14.46), связан с изменением уровня в сосуде

$$Q = \rho(p_1 - p_2)r^4/(8\eta l) = \pi\rho g h r^4/(8\eta l) = -Sdh/dt. \quad (14.49)$$

Интегрируя от  $H$  до высоты  $h$  в произвольный момент времени  $t$ , получаем

$$h(t) = H \exp(-t/\tau). \quad (14.50)$$

Здесь  $\tau = 8S\eta l/(\pi\rho gr^4)$ . Из (14.50) следует, что вытекание продлится до бесконечности. Для определения времени вытекания можно взять уровень, составляющий процент или долю процента от начального уровня.

Если задан расход, поддерживающий постоянный уровень жидкости в сосуде, в который столько же жидкости поступает (№ 14.28), то диаметр трубы может быть определен из (14.49).

При движении жидкости по трубке на нее действует **сила трения**, которая определяется формулой (14.40). На участок трубы длиной  $L$  и радиусом  $R_1$  действует сила  $F = \tau 2\pi R L = 4\pi L \eta v_m$ . С помощью (14.46) выражаем силу через объемный расход жидкости ( $Q = q/\rho$ ):

$$F = 8\pi\eta L Q / (\pi R_1^2).$$

Под действием этой силы тонкостенная трубка (внутренний радиус  $R_1$ , внешний радиус  $R_2$ ), закрепленная в некоторой точке, оказывается растянутой на  $\Delta L$  на длине  $L$ . Оценить это растяжение (№ 14.30) можно по закону Гука, учитывая, что растягивает трубку средняя сила, равная  $F/2$ :

$$(F/2)/[\pi(R_2^2 - R_1^2)] = E\Delta L/L.$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга.

Отсюда получаем

$$\Delta L = 4\pi Q L^2 / [\pi R_1^2 (R_2^2 - R_1^2) E].$$

Наличие осевой симметрии позволяет решить задачу о стационарном течении вязкой жидкости между коаксиальными цилиндрами вдоль оси симметрии (№ 14.20). Для этого напишем дифференциальное уравнение равновесия сил для кольцевого слоя (рис. 14.18). Длина его  $l$ , а радиусы цилиндрических поверхностей  $r$  и  $r + dr$

$$2\pi l \eta [(rdv/dr)_{r+dr} - (rdv/dr)_r] = \\ = 2\pi l \eta [d(rdv/dr)/dr]dr = -(p_1 - p_2)2\pi r dr.$$

Первое интегрирование дает

$$rdv/dr = -(p_1 - p_2)r/(2l\eta) + C. \quad (14.51)$$

Здесь  $C$  — постоянная интегрирования, которая должна быть определена из граничного условия. Разделяя переменные в (14.51) и интегрируя от  $r$  до  $R_2$ , получаем

$$V = (p_1 - p_2)(R_2^2 - r^2)/(4l\eta) - C \ln(R_2/r). \quad (14.52)$$

Используем, что при  $r = R_1$   $v = 0$ . Из (14.52) определяем  $C$  и подставляем в (14.52):

$$V = (p_1 - p_2) \left[ R_2^2 - r^2 + (R_2^2 - R_1^2) \ln(r/R_2) / \ln(R_2/R_1) \right] / (4l\eta). \quad (14.53)$$

Для определения расхода жидкости (14.53) подставляем в интеграл

$$q = \rho \int_{R_1}^{R_2} v 2\pi r dr = \pi r (p_1 - p_2) \left[ R_2^4 - r^4 - (R_2^2 - R_1^2)^2 / \ln(R_2/R_1) \right] / (8l\eta).$$

Цилиндр меньшего радиуса может двигаться со скоростью  $v_0$  и увлекать жидкость (№ 14.21). Сила, которая требуется для продвижения единицы длины цилиндра с этой постоянной скоростью, равна силе трения на боковой поверхности цилиндра и на любой поверхности в потоке коаксиальной цилинду. Постоянство силы при изменении радиуса — следствие стационарности и постоянства приложенной силы. Поэтому

$$F = \tau 2\pi r = -2\pi \eta r dv/dr. \quad (14.54)$$

Разделив переменные и проинтегрировав от одного цилиндра до другого, получаем

$$v_0 = F \ln(R_2/R_1) / (2\pi \eta). \quad (14.55)$$

Отсюда находим силу. Распределение скоростей по сечению находим, интегрируя (14.54) от  $R_1$  до произвольного радиуса  $r$ ,

$$v = v_0 \ln(R_1/r) / \ln(R_2/R_1). \quad (14.56)$$

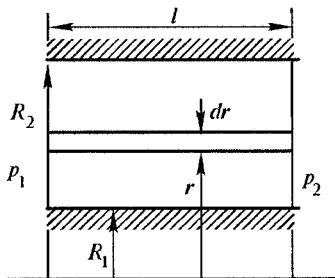


Рис. 14.18

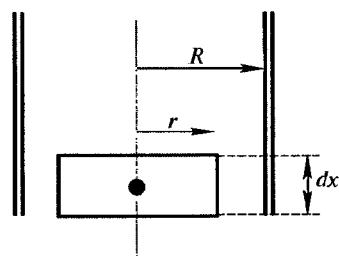


Рис. 14.19

В вертикальной трубке (или капилляре) длиной  $L$  и радиусом  $R$  (№ 14.22) вязкая жидкость вытекает под действием силы тяжести. Считаем движение стационарным, изменением давления в жидкости по вертикали пренебрегаем. Тогда для элемента жидкости (рис. 14.19) радиусом  $r$  и толщиной  $dx$  равновесие сил даёт

$$\rho\pi r^2 dx g = -2\pi r dx \eta dv/dr. \quad (14.57)$$

Разделив переменные, получаем

$$dv = -\rho g r dr / (2\eta). \quad (14.58)$$

На оси течения скорость максимальна  $v_m$ , на стенке трубы равна нулю.

Интегрируя (14.58) от оси до стенки, получаем

$$v_m = \rho g R^2 / (4\eta). \quad (14.59)$$

Интегрирование от оси до произвольного радиуса  $r$  даёт

$$v = v_m (1 - r^2/R^2). \quad (14.60)$$

Расход определяется аналогично (14.46)

$$q = \pi R^4 \rho^2 g / (8\eta). \quad (14.61)$$

Чтобы определить время вытекания, надо общее количество жидкости в трубке  $\rho\pi R^2 L$  разделить на  $q$ .

Если горизонтальная трубка немножко расширяется (рис. 14.20): стенка составляет малый угол  $\phi$  с осью трубы (№ 14.23), то объемный расход из (14.46)

$$Q = \pi d p R^4 / (8\eta dx).$$

Так как  $dx \approx \phi dR$  и расход не меняется, получаем

$$dp = 8 Q \eta dR / (\pi \phi R^4).$$

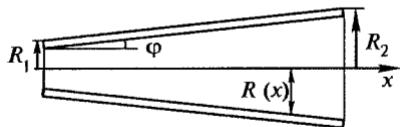


Рис. 14.20

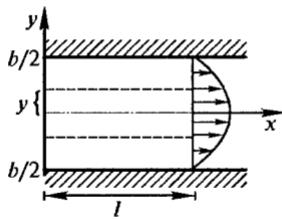


Рис. 14.21

Интегрируя от начала трубы до конца, имеем окончательно

$$Q = 3\pi\varphi R_1^2 R_2^2 \Delta p / [8\eta(R_2^2 - R_1^2)].$$

К рассмотренным выше течениям с осевой симметрией можно добавить течения в щелях, обладающие плоскостью симметрии. В сильно сплющенной трубке, когда толщина в 100 раз меньше ширины (№ 14.25), течение можно считать плоским и пренебречь искажением течения на краях щели. На рис. 14.21 показано плоское (не меняющееся по оси  $z$ ) течение через щель толщиной  $b$  и длиной  $l$  (масштаб на рисунке не соблюдается). Для слоя жидкости с границами на расстоянии  $y$  от плоскости симметрии единичной ширины (по  $z$ ) можно записать равенство силы давления по оси  $x$  и силы трения на границах слоя

$$\Delta p 2y = 2l\eta dv/dy.$$

Разделяя переменные, получаем

$$dv = \Delta p y dy / (l\eta). \quad (14.62)$$

Интегрируя от оси, где скорость  $v_m$ , до стенки трубы, где скорость равна нулю, имеем

$$v_m = \Delta p b^2 / (8l\eta). \quad (14.63)$$

Интегрируя от оси до произвольного  $y$ , получаем распределение скорости по сечению

$$v = v_m [1 - y^2/(b^2/4)]. \quad (14.64)$$

Объемный расход через щель шириной  $a$  равен

$$Q = 2 \int_0^{b/2} v a dy = ab^3 \Delta p / (12l\eta). \quad (14.65)$$

Разность давлений может быть связана с уровнем жидкости в сосуде, в дне которого имеется щель (№ 14.24). При этом  $\Delta p = \rho gh$ .

Расход через щель, разделенную перегородкой (№ 14.26), складывается из расхода через две щели в два раза меньшей толщины. Из (14.65) следует уменьшение в 4 раза.

Выше рассматривались течения под действием разности давлений в разных поперечных сечениях трубы. Предполагалось, что давление по сечению постоянно. Это оправдывается тем, что выравнивание давления поперек сечения происходит со скоростью звука, т. е. очень быстро. Разность давлений возникала также под действием силы тяжести. Возникновение течения под действием движения одной из стенок (внутреннего цилиндра) также рассматривалось. Теперь рассмотрим **течение между двумя бесконечными плоскостями, одна из которых движется с постоянной скоростью** (рис. 14.22). Сила трения, действующая на стенке, равна силе трения на любой линии тока, чтобы ускорение равнялось нулю, как это должно быть в стационарном течении. Постоянство силы трения в плоском случае приводит к постоянству напряжения трения. Из закона Ньютона для вязкой жидкости (14.40) следует постоянство перпендикулярного к направлению потока градиента скорости. Скорость линейно меняется, увеличиваясь от неподвижной стенки к подвижной. Если разность скоростей  $v$ , а расстояние между стенками  $a$ , то напряжение трения

$$\tau = \eta v/a. \quad (14.66)$$

Такое же течение возникает при **вращении диска** в жидкости между двумя **стенками** (№ 14.29). Если диск находится на расстояниях  $a$  и  $b$  от стенок камеры (рис. 14.23) и можно пренебречь эффектами, связанными с радиальной конвекцией жидкости, и явлениями на краю диска, то момент сил, действующий на диск, получаем интегрированием

$$M = 2 \int_0^R r \eta \omega r (1/a + 1/b) 2\pi r dr = \pi \eta \omega R^4 (a + b)/(2ab).$$

Мощность, необходимая для вращения диска, равна моменту, умноженному на угловую скорость.

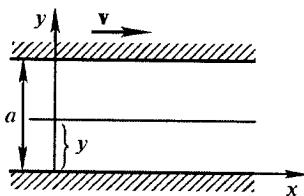


Рис. 14.22

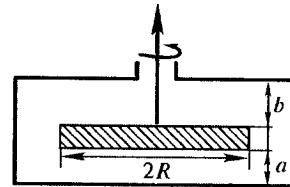


Рис. 14.23

В случае малого расстояния  $h$ , заполненного жидкостью, между движущимися относительно друг друга стенками при изменении относительной скорости  $\Delta v$  можно считать, что напряжение равно

$$\tau = \eta \Delta v / h. \quad (14.67)$$

Можно рассмотреть устройство из двух тонкостенных цилиндров массы  $m$  и радиусом  $R$  и  $R + h$  ( $h \ll R$ ) на одной оси (рис. 14.24). Между цилиндрами находится вязкая жидкость с коэффициентом  $\eta$ . Внутренний цилиндр в начальный момент имеет угловую скорость  $\omega$ , а внешний в начальный момент стоит на шероховатой поверхности, затем движется без проскальзывания (№ 14.31). Поступательное движение цилиндров определяется силой трения

$$2mdv/dt = F_{\text{тр}}. \quad (14.68)$$

Вращение наружного цилиндра описывается уравнением

$$mR^2d\omega_1/dt = -F_{\text{тр}}R + \eta(\omega_2 - \omega_1)R^2S/h. \quad (14.69)$$

Для вращения внутреннего цилиндра имеем

$$mR^2d\omega_2/dt = -\eta(\omega_2 - \omega_1)R^2S/h. \quad (14.70)$$

Здесь  $S$  — площадь, на которой действует вязкое трение. Добавляем условие отсутствие проскальзывания  $\omega_1R = v$ , исключаем силу трения и получаем

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega - 3\omega_1, \\ \omega_1 &= \omega [1 - \exp(-4\eta S t / (3mRh))] / 4. \end{aligned} \quad (14.71)$$

Начальная кинетическая энергия устройства — это энергия вращения внутреннего цилиндра. Конечная кинетическая энергия складывается из энергии вращения обоих цилиндров с одинаковой угловой скоростью ( $\omega/4$ ) и поступательной энергии движения центра масс устройства со скоростью, соответствующей отсутствию проскальзывания.

В случае значительно различающихся радиусов цилиндров, вращающихся с разными скоростями, скорость стационарного течения

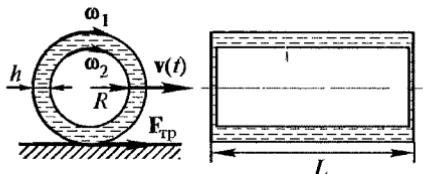


Рис. 14.24

жидкости между цилиндрами меняется по радиусу. В твердом теле при вращении постоянная угловая скорость. В жидкости угловая скорость может меняться. Из условия стационарности момента сил трения (на единицу длины) не должен зависеть от радиуса

$$\tau 2\pi r^2 = -\eta(dv/dr)2\pi r^2 = C_1 = \text{const.}$$

$$v = C_1/(\eta r) + C_2.$$

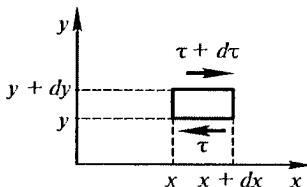


Рис. 14.25

Вопрос о роли различных сил при описании движения жидкости может быть рассмотрен на примере простого плоского движения. Скорость  $v(x, y, t)$  направлена вдоль оси  $x$ . По оси  $z$  ничего не меняется. Рассмотрим движение элемента жидкости, имеющего объем  $dx dy dz$ . Единичная длина по оси  $z$ . На рис. 14.25 показан такой элемент. Уравнение движения (второй закон Ньютона) записывается следующим образом:

$$\rho dy dx dv/dt = -dp dy + dx (\partial \tau / \partial y) dy.$$

Разделив на массу, получаем

$$dv/dt = -(1/\rho) dp/dx + (\eta/\rho) \partial^2 v / \partial y^2. \quad (14.72)$$

Разные задачи отличаются значениями входящих в уравнение функций и переменных. Можно воспользоваться ими и привести уравнение к безразмерному виду, которое будет одинаковым для разных задач. В качестве характерных величин выберем для скорости  $v_0$ , для  $x$  и  $y$  —  $L$ , для отношения давления к плотности  $v_0^2/L$ , для времени  $L/v_0$ . Тогда, обозначая безразмерные величины теми же буквами, получаем

$$dv/dt = -(1/\rho) dp/dx + (1/Re) \partial^2 v / \partial y^2. \quad (14.73)$$

Здесь введено число Рейнольдса

$$Re = \rho v L / \eta. \quad (14.74)$$

При больших значениях числа Рейнольдса последним членом в уравнении можно пренебречь, и давление работает на преодоление сил инерции. При малых числах Рейнольдса надо учитывать вязкость.

Характерное время установления вязкого течения при числе Рейнольдса порядка единицы можно оценить, используя (14.74),

$$T \sim L/v = \rho L^2 / \eta. \quad (14.75)$$

По этой формуле можно оценить время раскручивания вязкой жидкости в бочке (№ 14.32), т. е. время установления стационарного движения жидкости после начала вращения бочки (стенки относительно массы жидкости). Вращение бочки происходит под действием силы трения, которая возникает, когда бочке сообщают скорость  $v$  перпендикулярно ее оси симметрии вдоль горизонтальной поверхности. Сила трения и, следовательно, вращающий момент на бочку действует, пока существует проскальзывание, т. е. до начала качения без проскальзывания. На рис. 14.26 показаны графики движения двух бочек, заполненных жидкостями, у которых вязкости отличаются в 10 раз. Первая бочка почти мгновенно переходит к движению без проскальзывания, а вторая долго движется с начальной скоростью. Поэтому расстояние между бочками можно оценить как  $l = (v_0 - v)t$ . Скорость движения без проскальзывания можно найти из закона сохранения момента импульса относительно точки на поверхности

$$mv_0R = mvR + (1/2)mR^2(v/R) = (3/2)mvR.$$

Откуда

$$v = (2/3)v_0.$$

Задачу можно несколько видоизменить. По тонкостенной бочке массой  $m$  и радиусом  $R$ , заполненной жидкостью массой  $M$  с очень малой вязкостью, наносят удар, после которого она начинает скользить по поверхности со скоростью  $v_0$  и раскручиваться силой трения. Из за того что вязкость очень малая, на первом этапе жидкость не успевает раскрутиться. Скорость бочки при движении без проскальзывания определяем из закона сохранения момента количества движения относительно точки на поверхности (момент силы трения равен нулю)

$$L = (m + M)vR = (m + M)v_1R + mR^2v_1/R.$$

Откуда

$$v_1 = (m + M)v/(2m + M).$$

Когда жидкость раскрутится, конечную скорость определяем из закона сохранения момента количества движения с учетом принципа жидкости

$$L = (m + M)v_k R + (m + M/2)R^2v_k/R.$$

Отсюда определяем конечную скорость.

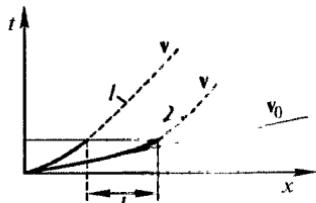


Рис. 14.26

При получении соотношений (14.44)–(14.47) предполагалось, что линии тока параллельны оси симметрии, т. е. слои жидкости не перемешиваются. Такое течение называется **ламинарным**. Однако при увеличении скорости течение в трубке перестает быть ламинарным, становится **турбулентным**. Начинается перемешивание слоев. Характер течения определяется степенью влияния сил трения (вязкости). Для характеристики этого влияния используется введенная выше безразмерная величина — **число Рейнольдса**, которое представляет также отношение кинетической энергии жидкости к работе сил трения, т. е. к потерям энергии из-за вязкости. Кинетическая энергия жидкости в объеме с характерным размером  $L$  равна:

$$W = \rho v^2 L / 2. \quad (14.76)$$

Работу силы трения на пути  $L$  оценим, считая градиент скорости порядка  $v/L$  и пользуясь формулой для напряжения трения (14.40), действующего на площадке  $L^2$ ,

$$A = \eta(v/L)L^2L. \quad (14.77)$$

Отсюда для числа Рейнольдса получаем снова (14.74).

При больших числах Рейнольдса работой сил вязкости можно пренебречь по сравнению с кинетической энергией жидкости. Следует обратить внимание на зависимость числа Рейнольдса от плотности жидкости. В менее плотных жидкостях влияние вязкости увеличивается. Поэтому вязкие свойства жидкостей удобно характеризовать не просто коэффициентом вязкости  $\eta$ , а так называемой **кинематической вязкостью**  $v = \eta/\rho$ . Некоторая неопределенность величины числа Рейнольдса связана с тем, что не всегда точно можно выбрать характерную величину скорости и характерный размер. Например, при течении вязкой жидкости в трубке не ясно, что взять в качестве характерного размера: радиус или длину трубы. Выбор связан с конкретно рассматриваемой задачей. Если рассматривается возможность пренебрежения влиянием вязкости, то надо взять размер, который дает меньшее число Рейнольдса, так как пренебрегать вязкостью можно только при больших по сравнению с единицей числах Рейнольдса. Для трубы это обычно радиус сечения.

При увеличении скорости и, следовательно, числа Рейнольдса течение в трубке, как уже говорилось, перестает быть ламинарным, происходит перемешивание слоев, развивается турбулентность. Число Рейнольдса, при котором возникает турбулентность, называют **критическим**. Обычно это происходит при  $Re = 1,3 \cdot 10^3$ . При плавности входа течения в трубку (очень гладком начальном участке трубы)

критическое число Рейнольдса может увеличиться до  $5 \cdot 10^4$ . Часто пользуются  $Re_{kp} = 2300$ . Изменение площади сечения трубы по ее длине приводит к изменению критических чисел Рейнольдса. В сужающихся по потоку трубках оно растет, а в расширяющихся — падает.

Течение в трубке устанавливается постепенно после прохождения некоторого начального участка. Торможение потока начинается на стенках трубы, где образуется вязкий пограничный слой. Увеличение толщины пограничного слоя по потоку приводит к уменьшению площади той части сечения трубы, в которой жидкость можно рассматривать как идеальную. Это приводит к ускорению, разгону потока. Для длины участка разгона  $L_p$ , который называют также входным, или начальным, экспериментально получено:

$$L_p = 0,06 \cdot R \cdot Re. \quad (14.78)$$

Здесь  $R$  — радиус трубы.

При изменении чисел Рейнольдса от 200 до 20 000 длина участка разгона (формирования течения Пуазеля) меняется от 6 до 600 диаметров трубы.

Влияние вязкости приводит к тому, что даже в горизонтальной цилиндрической трубке постоянного сечения давление в потоке падает, т. е. нарушаются закон Бернуlli. При этом не выполняется формула Торричелли.

Движение тел в вязкой жидкости всегда можно свести к обтеканию их жидкостью, переходя в систему координат, связанную с телом.

Установившееся падение шарика, в частности, сферической капли воды в воздухе при больших числах Рейнольдса соответствует обтеканию идеальной жидкостью, а при малых — вязкой. Если две капли воды с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  падают с постоянными скоростями  $v_1$  и  $v_2$  в воздухе (№ 14.34) и известно, что для движения первой капли число Рейнольдса  $Re_1 = 10^3$  и сопротивление среды описывается формулой  $\pi r_1^2 \rho v_1^2 / 2$ , а для движения второй капли  $Re_2 = 0,1$  и сопротивление среды описывается формулой  $6\pi r_2 v_2$ , где  $\rho$  и  $\eta$  — плотность и вязкость воздуха, то можно оценить отношение радиусов капель.

В системе координат, связанной с каплей воды, происходит стационарное течение воздуха вокруг капли, для которого  $Re = \rho v r / \eta$ . На каплю, кроме силы сопротивления, действуют сила тяжести и сила Архимеда, определяемая плотностью воды  $\rho_b$ . В идеальной жидкости (большое  $Re$ ):

$$(4/3) \pi r_1^3 g (\rho_b - \rho) = \pi r_1^2 \rho v_1^2 / 2 = \pi \eta^2 Re_1^2 / (2\rho).$$

Для радиуса капли получаем

$$r_1^3 = (3/8) \eta^2 Re_1^2 / [\rho g (\rho_b - \rho)].$$

В случае вязкой жидкости (малое  $Re$ ) получаем:

$$(4/3) \pi r_2^3 g (\rho_b - \rho) = 6 \pi \eta r_2 v_2 = 6 \pi \eta^2 Re_2 / \rho.$$

Отсюда

$$r_2^3 = (9/2) \eta^2 Re_2 / [\rho g (\rho_b - \rho)].$$

Отношение радиусов

$$r_1^3 / r_2^3 = Re_1^2 / (12 Re_2) = 8,33 \cdot 10^5.$$

Окончательно

$$r_1 / r_2 = 94.$$

Полученное выше уравнение (14.73) описывает различные по масштабу течения разных жидкостей, если числа Рейнольдса этих течений одинаковы. Говорят, что такие течения подобны, а число Рейнольдса является критерием подобия. Число Рейнольдса — безразмерная комбинация характерных величин, определяющих рассматриваемые явления (включенные в уравнение движения). Это число (безразмерную комбинацию) можно было бы получить и не выписывая уравнение, а только зная, какими характерными величинами определяется явление.

Если на движение жидкости влияет сила тяжести, то в уравнение (14.73) надо добавить член, описывающий эту силу. Перед безразмерной напряженностью силы тяжести (отнесенной к характерному значению) стоит коэффициент  $1/Fr$ , где критерий подобия Фруда

$$Fr = V_0^2 / (gL). \quad (14.79)$$

Когда в уравнения входят два критерия подобия, то не всегда одновременно можно удовлетворить оба. Если вязкостью можно пренебречь, то подобие определяется только критерием Фруда.

Для моделирования картины гравитационных волн в воде от движения корабля со скоростью  $v$  (№ 14.33) с характерным размером  $L$  при испытании модели с характерным размером  $l$  ее скорость, как следует из (14.79):

$$u = v(l/L)^{1/2}.$$

## **СОДЕРЖАНИЕ**

<i>Предисловие</i> .....	3
<i>Введение</i> .....	5
1. Кинематика материальной точки.....	7
2. Динамика материальной точки. Статика .....	28
3. Движение тел с переменной массой .....	50
4. Работа, энергия, импульс. Законы сохранения импульса и энергии. Столкновения .....	63
5. Гармонические колебания материальной точки .....	97
6. Момент импульса .....	126
7. Гравитация (тяготение) .....	135
8. Специальная теория относительности .....	165
9. Плоское движение твердого тела .....	188
10. Колебания твердого тела. Волны .....	244
11. Пространственное движение твердого тела. Гироскопы .....	285
12. Неинерциальные системы отсчета .....	298
13. Упругие деформации .....	329
14. Элементы гидродинамики .....	348

*Учебное издание*

**Корявов Владимир Павлович**

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
В ОБЩЕМ КУРСЕ ФИЗИКИ  
МЕХАНИКА**

Редактор *Л.А. Савина*  
Внешнее оформление *К.И. Мандель*  
Компьютерная верстка *Н.А. Попова*  
Корректор *Г.Н. Петрова*

Изд. № РЕНТ-494. Подп. в печать 28.08.07. Формат 60×88  $\frac{1}{16}$ . Бум. офсетн.  
Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная. Объем 23,03 усл. печ. л.  
23,76 усл. кр.-отт. Тираж 3000 экз. Зак. № 3707.

ОАО «Издательство «Высшая школа»,  
127994, Москва, Неглинная ул., 29/14, стр. 1.

Тел.: (495) 694-04-56.  
<http://www.vshkola.ru>. E-mail: [info\\_vshkola@mail.ru](mailto:info_vshkola@mail.ru)

Отдел реализации: (495) 694-07-69, 694-31-47, факс: (495) 694-34-86.  
E-mail: [sales\\_vshkola@mail.ru](mailto:sales_vshkola@mail.ru)

Отпечатано в ОАО «Ивановская областная типография».  
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.  
E-mail: [091-018@rambler.ru](mailto:091-018@rambler.ru)