Московский Физкультурно-Туристический Институт

Задачи с Экзамена по Линейной Алгебре

Папа Тоха, Эдик Пидр

Исходники(актуальная версия тут), **Вопросы, предложения**

В данном файле содержатся условия и решения задач с экзамена по линейной алгебре 2015г в МФТИ. На момент создания файла(2024г) задачи в билетах не поменялись.
В нем содержатся все типовые задачи по линейной алгебре и их стандартные методы решения. Можете пользоваться для подготовки.

Игорь Андреевич Чубаров

Полторашка

Из недоделанного:

Орфография/пунктуация - не проверялась полностью, пишите строку кода, где описка.

Задачи

Задача №1

Условие:

Найлите ранг матрицы A в зависимости от параметров α и β, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & \beta \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Привести матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(4)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)+3/2\cdot(1)]{(2)\text{-}3/2\cdot(1)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 5 & -5/2 \\ 0 & 0 & 7/2 & -7 & \beta+9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(4)+2/5\cdot(1)]{(3)\text{-}5/7\cdot(2)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 5 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

2. Найти разное количество ЛНЗ строк(в ступенчатом виде ненулевых) при разных параметрах α, β:

$rg(A) = 2$, при $\beta + 1 = 0, \alpha - 1 = 0$, т.е. $\alpha = 1, \beta = -1$.

$rg(A) = 3$ в остальных случаях, т.к. (3) и (4) будут ЛЗ

Ответ: $\alpha = 1, \beta = -1 \longrightarrow rg(A) = 2$.

В остальных случаях $rg(A) = 3$.

Задача №2

Условие:

Найдите все значения параметров α и β, при которых система совместна, решите систему при найденных значениях параметров:

$$\begin{cases} x_3 - 2x_4 = \alpha \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ -3x_1 + 6x_2 - x_3 - 4x_4 = \beta \end{cases}$$

Решение:

1. Приводим матрицу СЛУ к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & \beta \end{array}\right) \xrightarrow[(3)\cdot 2;(4)\cdot 2]{(1)\cdot 3} \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -12 & 9 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 6 & -12 & 4 & 4 & 4 \\ -6 & 12 & -2 & -8 & 2\beta \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(1)]{(4)+(1);(1)/3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & 2\beta+9 \end{array}\right)$$

2. По теореме Кронекера-Капелли: если СЛУ совместна, то $rg(A) = rg(A|b)$. Значит сначала считаем ранг матрицы без правого столбца и потом с ним, "подгоняя" коэффициенты. Тогда $rg(A) = 2$ ((2),(3),(4) ЛЗ) и значит $rg(A|b) = 2$. Для этого $\alpha = -1$ и $2\beta + 9 = 7$. Получаем $\alpha = 1, \beta = -1$.

3. Получаем при $\alpha = 1, \beta = -1$ ЛНЗ систему из (1) и (2), решаем ее:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{x_2 \leftrightarrow x_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Задача №3

Условие:

Подпространство U пространства $\mathbb{R}^4$ является линейной оболочкой векторов $\begin{pmatrix}0 & 2 & 1 & -3\end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix}2 & -1 & -2 & 1\end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & -5\end{pmatrix}^T$. Найдите систему линейных уравнений, для которой множеством решений является U. Единственное ли решение у этой задачи?

Решение:

1. Ищем базис в ЛО $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, ищем ЛНЗ систему:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \text{(1) и (2) ЛНЗ}$$

Получаем базис $\equiv$ ФСР, $\Phi = \{a_1, a_2\}$.

2. Если A - матрица СЛУ, то имеем $A\Phi = 0$, транспонируя получаем $\Phi^T A^T = 0$. Тогда решаем второе уравнение относительно A^T (Φ^T получаем транспонированием ЛО).

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 6 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = A^T$$

Получаем $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

Задача №4

Условие:

В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы подпространство U_1, являющееся линейной оболочкой векторов $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$ и $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}^T$, а также подпространство U_2, заданное системой $\begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Найдите размерности и базисы в подпространствах $U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2$.

Решение:

Имеем $U_1 : \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\end{pmatrix} \rangle$ и $U_2 : \begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

1. Переведем U_2 из СЛУ в ЛО. Для этого решим СЛУ, найдя ФСР:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to U_2 : \langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$$

2. Сумма подпространств это объединение ЛО подпространств. $U_1 + U_2 : \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$

Осталось найти базис в этой ЛО:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \text{Базис } U_1 + U_2 : \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

3. Переведем U_1 из ЛО в СЛУ. Если A - матрица СЛУ, то имеем $A\Phi = 0$, транспонируя получаем $\Phi^T A^T = 0$. Тогда решаем второе уравнение относительно A^T (Φ^T получаем транспонированием ЛО).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A^T$$

Получаем $U_1 : \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ и $U_2 : \begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Их пересечение есть общая СЛУ $U_1 \cap U_2 = \begin{cases} U_1 \\ U_2 \end{cases}$. Найдем ее базис, т.е. решим СЛУ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{Базис } U_1 \cap U_2 : \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Ответ: Базис $U_1 + U_2$: $\{\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T\}$, $\dim = 3$.
Базис $U_1 \cap U_2$: $\{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T\}$, $\dim = 1$.

Задача №5

Условие:

Найдите проекцию вектора $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}^T$ пространства $\mathbb{R}^4$ на подпространство $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ вдоль линейной оболочки вектора $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Решение:

Пусть вектор - X, а подпространства L_1 и L_2 соответственно.

1. Представим $L_1 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ как ЛО, т.е. решим СЛУ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \to L_1 : \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

2. Проецирование вектора на ПП вдоль другого ПП - это разложение вектора на две составляющие, одна из которых лежит в первом ПП, а вторая во втором ПП. Чтобы найти первую составляющую $X = X_1 + X_2$, надо представить составляющие как линейные комбинации базисных векторов, т.е. векторов в ЛО.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_1 \in L_1} + \underbrace{k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_2 \in L_2}$$

3. Получаем СЛУ отностительно $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & k \end{pmatrix}^T$, решаем ее, а затем находим вектор X_1 как сумму 3-х векторов.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Тогда $X_1 = 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ответ: $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Задача №6

Условие:

Пусть линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдите размерности и базисы $Ker\,\varphi$ и $Im\,\varphi$.

Решение:

1. $Ker\,\varphi = \{x \in L : Ax = 0\} \Rightarrow Ker\,\varphi = \Phi$ - ФСР в уравнении $AX = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{x_2 \leftrightarrow x_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, dimKer\,\varphi = 3$$

2. $Im\,\varphi = \{\varphi(x) \in \overline{L} \mid x \in L : Ax = \varphi(x)\}$. Тогда т.к. $A = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \dots & \varphi(e_n) \end{pmatrix} \Rightarrow Im\,\varphi = \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n) \rangle$.

Значит $Im\,\varphi = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. Найдем базис в этой ЛО:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & -6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем $Im\,\varphi = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle, dimIm\,\varphi = 2$

Ответ:

$$Ker\,\varphi = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, dimKer\,\varphi = 3; Im\,\varphi = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle, dimIm\,\varphi = 2$$

Задача №7

Условие:

Докажите, что преобразование пространства P_2 многочленов степени не выше двух, заданное правилом $\varphi(f(x)) = 2f(x) + f'(x)$, является изоморфизмом. Найдите матрицу φ^{-1}, выбрав базис в P_2.

Решение:

1. Берем базис $P_2:\ \{1, x, x^2\}$, $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2$

Общий вид:

$$P_2 : f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$\varphi(f(x)) = 2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b = 2ax^2 + (2a+2b)x + (b+2c), \quad P_2^* :\ \{1, x, x^2\}$$

2. Найдем $A = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = 2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(e_2) = 2x + 1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(e_2) = 2x^2 + 2x = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 3 \Rightarrow$изоморфизм доказан. Найдем A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

Ответ: $\varphi^{-1} :\ A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Задача №8

Условие:

Преобразование $\varphi : M_{2\times2} \to M_{2\times2}$, где $M_{2\times2}$ - пространство матриц размера 2×2, задано правилом $\varphi(X) = X^T \left(\begin{smallmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Докажите, что φ линейно. Найдите базис $Ker\,\varphi$ и $Im\,\varphi$. Найдите матрицу φ, выбрав базис в $M_{2\times2}$.

Решение:

1. Базис $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-c & -6a+2c \\ 3b-d & -6b+2d \end{pmatrix} = \varphi(X)$$

2. Найдем образы базисных векторов и составим из них матрицу преобразования:

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix};\ \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ \varphi(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $Ker\,\varphi =$ ФСР в $AX = 0$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Ker\,\varphi = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

3. $Im\,\varphi = \{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)\} = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$. Базис $Im\,\varphi$ будет $\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Ker\,\varphi = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

$$Im\,\varphi = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

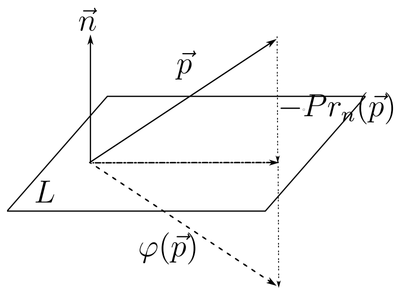
Задача №9

Условие:

Найдите матрицу (в данном ортонормированном базисе пространства $\mathbb{R}^3$) преобразования отражения относительно плоскости $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

Решение:

1. Рассмотрим преобразование отражения с геометрической стороны(картинка).



$$\varphi(\vec{p}) = \vec{p} + (-2Pr_n(\vec{p}))$$

$$\varphi(\vec{p}) = \vec{p} - 2\frac{(\vec{p}, \vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

2. Тогда из уравнения плоскости $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$

$$\varphi(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{-2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3. Составляем матрицу $A = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{e_1}) & \varphi(\vec{e_2}) & \varphi(\vec{e_3}) \end{pmatrix}^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Ответ:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Задача №10

Условие:

Выясните, существует ли базис, в котором преобразование, заданное матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, имеет диагональный вид. Если да, найдите этот базис и диагональный вид.

Решение:

Если есть базис, в котором матрица A имеет диагональный вид, то этот базис будет собственный (из собственных векторов), а в диагональном виде на главной диагонали будут стоять собственные значения.

1. Ищем собственные значения

$$\begin{aligned}
&det(A - \lambda E) = 0 \\
&det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -3-\lambda & 2 \\ 3 & 6 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \\
&(2-\lambda)(\lambda(3+\lambda) - 12) - 2(2\lambda - 6) + (-12 + 3(3+\lambda)) = 0 \\
&-\lambda^3 - \lambda^2 + 17\lambda - 15 = 0
\end{aligned}$$

Решая это уравнение(сначала подбираем 1 корень потом раскладываем на множители), получаем $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -5$. Все собственные значения различны, значит существует базис из собственных векторов и матрица имеет диагональный вид $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

2. Найдем собственные векторы, подставляя конкретные собстенные значения, найденные выше:

- $\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to x_3 = 0, x_1 + 2x_2 = 0 \to h_1 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$
- $\lambda_2 = 3: \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to h_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$
- $\lambda_3 = -5: \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 9 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & 8/9 \end{pmatrix} \to h_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{smallmatrix}\right)$

Получаем базис из собственных векторов $\langle \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{smallmatrix}\right) \rangle$

Ответ:

В базисе $\langle \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ матрица A имеет диагональный вид $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

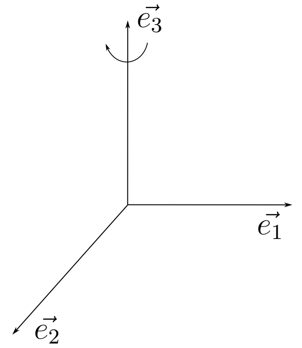
Задача №11

Условие:

Найдите инвариантные подпространства и выясните геометрический смысл преобразования $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного в ортонормированном базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

Для любого ортогонального преобразования существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования имеет блочно-диагональный вид



$$A' = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_r \end{pmatrix}, \Phi_i = \begin{pmatrix} cos(\alpha_j) & -sin(\alpha_j) \\ sin(\alpha_j) & cos(\alpha_j) \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Сравнивая A и A' получаем, что это преобразование - это поворот на 90^o вокруг оси $\vec{e_3}$.

Альтернативное объяснение геометрического смысла преобразования: e_3 переходит сам в себя, e_2 поворачивается и становится $-e_1$, e_1 поворачивается и становится e_2

$$\varphi(\vec{e_1}) = \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\vec{e_2}) = -\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\vec{e_3}) = \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Инвариантное подпространство - подпространство переходящее само в себя при действии на него преобразование. Тогда рассмотрим поворот на 90^o вокруг одной из осей и инвариантные подпространства для всех размерностей n:

- $n = 0 :$ $\{\vec{0}\}$ - очев.
- $n = 1 :$ $\{\vec{e_3}\}$ - вращения вектора вокруг своей оси не изменяет его.
- $n = 2 :$ $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ - поворот плоскости - оставляет плоскость.
- $n = 3 :$ $\mathbb{R}^3$ - вращение не меняет всего пространства.

Ответ:

- $n = 0 :$ $\{\vec{0}\}$
- $n = 1 :$ $\{\vec{e_3}\}$
- $n = 2 :$ $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$
- $n = 3 :$ $\mathbb{R}^3$

Задача №12

Условие:

Приведите квадратичную форму $8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$(в $\mathbb{R}^3$) к каноническому виду, найдите положительный и отрицательный индексы инерции.

Решение:

$k(x) = 8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

1. Используя метод Лагранжа, выделяем полные квадраты:

$k(x) = 8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = (4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3) + (4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2)$
$= (2x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (2x_1 + 2x_2)^2$

2. Делаем замену координат $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = 2x_1 + 2x_2 \end{cases}$

Получаем канонический вид $k(y) = y_1^2 + y_2^2 + 0 \cdot y_3^2$.

Положительный индекс - $p = 2$, отрицательный индекс - $q = 0$.

Ответ:

$k(y) = y_1^2 + y_2^2, p = 2, q = 0$

Задача №13

Условие:

Найдите все значения λ, при которых будет положительно определенной квадратичная форма $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^3 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3$ (заданная в $\mathbb{R}^3$).

Решение:

Матрица квадратичной формы $B = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Согласно критерию Сильвестра, для положительной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы ее главные миноры были положительны.

$$\begin{cases} \Delta_1 = |2| = 1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 2 - \lambda^2 > 0 \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 3\lambda^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 - \lambda^2 > 0 \\ 5 - 3\lambda^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \lambda \in \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}; \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

Ответ: $\lambda \in \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}; \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$

Задача №14

Условие:

Найдите ортогональную проекцию вектора $x = \begin{pmatrix}0 & 3 & -6 & 9\end{pmatrix}^T$ на линейную оболочку векторов $a = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$ и $b = \begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 1\end{pmatrix}^T$ (исходный базис ортонормированный).

Решение:

1. $L : \langle a, b\rangle$.

Ортогонализируем вектора a и b, тогда в ортогональном базисе $L : \langle c, d\rangle$ будет выполняться $Pr_L^x = Pr_c^x + Pr_d^x$.

2. Ортогонализируем по алгоритму Грамма-Шмидта:

$c = a = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad d = b - \frac{(a,d)}{(a,a)}a = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

3. Находим проекцию:

$$Pr_L^x = Pr_c^x + Pr_d^x = \frac{(c,x)}{(c,c)}c + \frac{(d,x)}{(d,d)}d = \begin{pmatrix}1\\7\\-3\\4\end{pmatrix}$$

Ответ: $Pr_L^x = \begin{pmatrix}1\\7\\-3\\4\end{pmatrix}$

Задача №15

Условие:

В пространстве многочленов степени не выше второй скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$. Найдите некоторый ортонормированный базис в данном пространстве.

Решение:

1. Берем стандартный базис $\{1, t, t^2\}$. Ортогонализируем по алгоритму Грамма-Шмидта:

- $h_1 = e_1 = 1$
- $h_2 = e_2 - \frac{(e_2,h_1)}{|h_1|^2}h_1 = e_2 - \frac{\int\limits_{-1}^{1} e_2 \cdot h_1\,dt}{\int\limits_{-1}^{1} h_1 \cdot h_1\,dt}h_1 = e_2 - \frac{\int\limits_{-1}^{1} t\,dt}{\int\limits_{-1}^{1} 1\,dt}h_1 = t - \frac{0}{2}1 = t$
- $h_3 = e_3 - \frac{(e_3,h_1)}{|h_1|^2}h_1 - \frac{(e_3,h_2)}{|h_2|^2}h_2 = e_3 - \frac{\int\limits_{-1}^{1} t^2 \cdot 1\,dt}{\int\limits_{-1}^{1} 1\,dt}h_1 - \frac{\int\limits_{-1}^{1} t^2 \cdot t\,dt}{\int\limits_{-1}^{1} t \cdot t\,dt}h_2 = t^2 - \frac{2/3}{2}1 - 0 = t^2 - \frac{1}{3}$

2. Нормируем базис:

- $f_1 = \frac{h_1}{|h_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $f_2 = \frac{h_2}{|h_2|} = \frac{t}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1} t \cdot t\,dt}} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t$
- $f_3 = \frac{h_3}{|h_3|} = \frac{t^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1} (t^2-1/3)(t^2-1/3)\,dt}} = \sqrt{\frac{45}{8}}(t^2 - \frac{1}{3})$

Получаем ортонормированный базис $\{f_1, f_2, f_3\}$

Ответ:

$\{\frac{1}{\sqrt{2}}1, \sqrt{\frac{3}{2}}t, \sqrt{\frac{45}{8}}(t^2 - \frac{1}{3})\}$

Задача №16

Условие:

Найдите ортонормированный базис в ортогональном дополнении к линейной оболочке вектора $a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$ (исходный базис в $\mathbb{R}^4$ ортонормированный).

Решение:

1. $L^\perp = \{y \in E : (x, y) = 0, \forall x \in L\}$ - ортогональное дополнение.

Если $L : \langle a_1, \dots, a_m \rangle$, то $x \in L^\perp \Leftrightarrow (a_i, x) = 0$.

Тогда из этого уравнения получится СЛОУ $AX = 0$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \dots \\ a_m^T \end{pmatrix}$, и решением ее будет ФСР - базис в $L^\perp$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to L^\perp : \langle f_1, f_2, f_3 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

2. Ортогонализируем базис $L^\perp$ по алгоритму Грамма-Шмидта:

- $h_1 = f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $h_2 = f_2 - \frac{(f_2, h_1)}{|h_1|^2} h_1 = f_2 - \frac{(f_2, h_1)}{(h_1, h_1)} h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $h_3 = f_3 - \frac{(f_3, h_1)}{|h_1|^2} h_1 - \frac{(f_3, h_2)}{|h_2|^2} h_2 = f_3 - \frac{(f_3, h_1)}{(h_1, h_1)} h_1 - \frac{(f_3, h_2)}{(h_2, h_2)} h_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Нормируем базис:

- $c_1 = \frac{h_1}{|h_1|} = \frac{h_1}{\sqrt{(h_1, h_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $c_2 = \frac{h_2}{|h_2|} = \frac{h_2}{\sqrt{(h_2, h_2)}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $c_3 = \frac{h_3}{|h_3|} = \frac{h_3}{\sqrt{(h_3, h_3)}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{15}}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Получаем ОНБ $\{c_1, c_2, c_3\}$

Ответ: $\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \}$

Задача №17

Условие:

Найдите (в исходном ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^4$) матрицу ортогонального проектирования на подпространство, заданное уравнением

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

Является ли это преобразование самосопряженным? Является ли это преобразование ортогональным?

Решение:

1. Вектор нормали в ОНБ у подпространства:

$L : x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \equiv \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Ортогональное проектирование: $\forall y \in \mathbb{R}^4 : \ y = y_{\|} + y_{\perp}$, где $y_{\perp}$ - перпендикулярная составляющая к подпространтсву, т.е. проекция на нормаль, а $y_{\|}$ - проекция на подпространство.

Тогда $\varphi(y) = y_{\|} = y - y_{\perp} = y - \frac{(y,n)}{(n,n)} n$ - ортогональное проектирование.

3. Беря базис ОНБ ищем матрицу преобразования: $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Ищем скалярные произведения:

$$(n, n) = 4; \quad (e_1, n) = 1 = (e_4, n); \quad (e_2, n) = -1 = (e_3, n)$$

- $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\varphi(e_2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\varphi(e_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\varphi(e_4) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Получаем $A_\varphi = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ - симметрична, значит преобразование самосопряженно.

Необходимое условие ортогональности: $A_\varphi \cdot A_\varphi^T = E$. Проверим:

$$A_\varphi \cdot A_\varphi^T = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 12 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 12 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & 12 \end{pmatrix} \neq E \quad \Rightarrow \quad \text{не является ортогональным}$$

Ответ: $A_\varphi = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, φ - самосопряженное, не ортогональное.

Задача №18

Условие:

Подпространтсво U задано системой $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ Найдите систему линейных уравнений, задающую U^T (исходный базис в $\mathbb{R}^4$ ортонормированный).

Решение:

$L^{\perp} = \{y \in E : (x, y) = 0, \forall x \in L\}$ - ортогональное дополнение.

Если $L : \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$, то $y \in L^{\perp} \Leftrightarrow (a_i, y) = 0$.

Тогда из этого уравнения получится СЛОУ $AX = 0$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \ldots \\ a_m^T \end{pmatrix}$.

Значит, транспонировав ЛО получается матрица СЛОУ для L^T.

1. Переведем СЛОУ в ЛО для L, для этого нужно найти базис подпространтсва, т.е. ФСР(решить СЛОУ):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to L : \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$$

2. Теперь имея ЛО, $L : \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \to A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \ldots \\ a_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. транспонирум ЛО и получаем A.

Отсюда сразу получаем $L^T : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

Ответ: $L^T : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

Задача №19

Условие:

Найдите ортонормированный базис, в котором преобразование, заданное матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (в исходном ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^4$), имеет диагональный вид; укажите этот диагональный вид.

Решение:

1. $A = A^T$, значит φ - самосопряженное. Тогда найдем базис из собственных векторов:

$$det(A - \lambda E) = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \dots = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3) = 0$$

- $\lambda_1 = 3 : \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to h_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), h_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$
- $\lambda_2 = -3 : \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to h_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

Получаем базис из собственных векторов $\{h_1, h_2, h_3\}$ в котором матрица будет иметь диагональный вид $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2. Ортогонализируем базис из собственных векторов.

Заметим, что собственные векторы отвечающие различным собственным значениям всегда ортогональны, поэтому даже без проверки получаем, что $h_1 \perp h_3, h_2 \perp h_3$.

Осталось ортогонализировать вектора, отвечающие одному СЗ, h_1 и h_2 по алгоритму Грамма-Шмидта:

- $f_3 = h_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, не меняем
- $f_1 = h_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, берем первым
- $f_2 = h_2 - \frac{(h_2, f_1)}{|f_1|^2} f_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

3. Нормируем $\{f_1, f_2, f_3\}$ и получаем $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$

Ответ:

В базисе $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ матрица A имеет диагональный вид $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Задача №20

Условие:

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ - ортогональное отражение относительно $U^\perp$, где подпространство U является линейной оболочкой вектора $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$. Является ли φ - ортогональным? Является ли φ самсопряженным? Найдите матрицу φ (в данном ортонормированном базисе).

Решение:

Любой вектор можно единственным образом разбить на две составляющие - y и z, принадлежащие U и $U^\perp$ соответсвтенно, т.к. $U + U^\perp = E$

Тогда т.к. U представлено одним вектором - это вектор $\vec{n}$ вектор нормали к $U^\perp$, с учетом преобразования отражения относительно U^T, получаем:

$$\begin{aligned}
&x^{'} = Pr_U^x \equiv x_\perp \\
&x^{''} = Pr_{U^\perp}^x \equiv x_\parallel \\
&x = x^{'} + x^{''} \\
&\varphi(x) = x - 2x^\perp = x - 2Pr_U^x = x - 2\frac{(x,n)}{(n,n)}n
\end{aligned}$$

Берем базис $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \}$, считаем скалярные произведения:

$(n,n) = 4;\ (e_1, n) = 1 = (e_3, n);\ (e_2, n) = -1 = (e_4, n)$

Получаем матрицу преобразования $A_\varphi = E - 2\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

A_φ - симметричная матрица $\Rightarrow$ самосопряженное.

Условие ортогональности: $A_\varphi \cdot A_\varphi^T = E$

Проверка: $\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = E$ - ортогональное

Ответ: $A_\varphi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, φ - самосопряженное, ортогональное преобразование

Задача №21

Условие:

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ дана квадратичная форма

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

(исходный базис - ортонормированный). Найдите ортонормированный базис, в котором эта форма имеет диагональный вид, и укажите этот диагональный вид.

Решение:

1. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A$ - самоспоряженное преобразование.

$$det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1\lambda \end{vmatrix} = \dots = -(\lambda-3)^2(\lambda+3) = 0$$

- $\lambda = 3 : \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to f_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), f_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$
- $\lambda = -3 : \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to f_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

Получили базис из собственных векторов $\{f_1, f_2, f_3\}$ в котором кв.форма имеет вид $B' = diag\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

2. Ортогонализируем по Грамму-Шмидту:

Заметим, что векторы отвечающие различным собственным значениям ортогональны всегда, поэтому $h_1 \perp h_3, h_2 \perp h_3$.

- $h_1 = f_1$
- $h_3 = f_3$
- $h_2 = f_2 - \frac{h_1, f_2}{h_1, h_1} h_1 = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$

Нормируем:

- $e_1 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$
- $e_2 = h_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$
- $e_3 = h_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

Также матрица перехода будет составлена из этих векторов(т.к. начальный был ОНБ):

$S = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Ответ:

В базисе $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)\}, \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ с матрицей перехода $S = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ квадратичнаая форма будет иметь диагональный вид $B' = diag\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Задача №22

Условие:

Найдите базис в $\mathbb{R}^2$, в котором квадратичные формы $13x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$ и $-9x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ имеют диагональный вид. Укажите полученный диагональный вид каждой из форм.

Решение:

1. Пусть квадратичные формы будут f, g. Определим какая из них положительно определена:

$$F = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 13 > 0 \qquad \Delta_1 = -9 < 0$

$\Delta_2 = 13 \cdot 3 + 5 \cdot 5 > 0 \to$ по крит. Сильвестра: F_+ - положительно определена, G - нет.

2. Ищем собственный базис, в котором обе формы имеют диагональный вид:

$$det(G - \lambda F_+) = 0$$
$$\begin{vmatrix} -9-13\lambda & 1+5\lambda \\ 1+5\lambda & 1-3\lambda \end{vmatrix} = \dots = 2(7\lambda^2 + 2\lambda - 5) = 0$$
$$\lambda_1 = \frac{5}{7}, \lambda_2 = -1$$

- $\lambda_1 = \frac{5}{7} : \begin{pmatrix} -128/7 & 32/7 \\ 32/7 & -8/7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to h_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$
- $\lambda_2 = -1 : \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to h_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

Проверка, что правильно нашли с.в.: $(h_1, h_2)_{F_+} = (1 \quad 4)\left(\begin{smallmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0$ - верно.

3. Собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям ортогональны, осталось нормировать:

$|h_1|^2 = (h_1, h_1)_{G_+} = (1 \quad 4)\left(\begin{smallmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) = 21$

$|h_2|^2 = (h_2, h_2)_{G_+} = (1 \quad 1)\left(\begin{smallmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 6$

Получаем ОНБ: $\{\frac{1}{\sqrt{21}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$, матрица перехода $S = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{7} \\ 4\sqrt{2} & \sqrt{7} \end{pmatrix}$

Т.к. $F = F_+$, то ее диагональный вид в новом базисе будет $F = diag\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, f(x') = {x'_1}^2 + {x'_2}^2$, а $G = diag\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -1 \end{pmatrix}, g(x') = \frac{5}{7}{x'_1}^2 - {x'_2}^2$

Ответ:

В базисе $\{\frac{1}{\sqrt{21}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$, матрица перехода $S = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{7} \\ 4\sqrt{2} & \sqrt{7} \end{pmatrix}$ квадратичные формы будут иметь диагональные виды:

$f(x') = {x'_1}^2 + {x'_2}^2, \; g(x') = \frac{5}{7}{x'_1}^2 - {x'_2}^2$

Задача №23

Условие:

Найдите все действительные λ, при которых преобразование, заданное матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$, диагонализируемо.

Решение:

Диагонализируемость означает, что характеристический многочлен имеет все действительные корни.

Рассмотрим корни в зависимости от параметра λ:

$$det(A - xE) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-x \end{vmatrix} = (\lambda^2 - x)(1-x)^2 = 0 \text{ (разложение по 3 строке)}$$

$$x_1 = 1 (\text{кратность } 2), x_2 = \lambda^2 (\text{кратность } 1)$$

- $\lambda^2 = 1 \to \lambda = \pm 1$:
  - $\lambda = 1$:

    $$x = 1 \text{ (алг.кратность 3)} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{решением будет базис в } \mathbb{R}^3 \text{ и геометрическая}$$

    кратность(3 с.в.) $=$ алгебр.кратности $= 3$ - подходит
  - $\lambda = -1$:

    $$x = 1 \text{ (алг.кратность 3)} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = x_1, x_2 = x_2 \end{cases} \to$$

    $$\to \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \text{геом.крат.} = 2 \neq \text{алг.крат.} \text{ - не подходит}$$

- $\lambda^2 \neq 1$:

  $$x_1 = 1 \text{ (алг.кратность 2)} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{pmatrix} \to$$

  $$\to \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = x_1, x_2 = x_2 \end{cases} \to \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (2 с.в., геом.кратность} = 2)$$

  $$x_2 = \lambda^2 \text{ (алг.кратность 1)} \to \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & 0 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

  $$\to \Phi = \begin{pmatrix} -(\lambda^2-\lambda) \\ 0 \\ 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \to h_1 = \begin{pmatrix} -(\lambda^2-\lambda) \\ 0 \\ 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \text{ (1 с.в., геом.кратность} = 1)$$

  Получаем, что вне зависимости от значения λ(кроме $\lambda^2 \neq 1$), у обоих с.з. геометрические и алгебраические кратности совпадают - подходит

Ответ: $\lambda \in \mathbb{R}^3 \backslash \{-1\}$

Задача №24

Условие:

Преобразование $\varphi : M_{2\times2} \to M_{2\times2}$, где $M_{2\times2}$ - пространство матриц размера 2×2, задано правилом $\varphi(X) = X\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$. Докажите, что φ линейно. Найдите собственные значения и собственные подпространства преобразования φ. Выясните, диагонализируемо ли φ.

Решение:

1. Доказательство линейности:

$\varphi(\alpha x+\beta y) = (\alpha x+\beta y)\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 8 \end{smallmatrix}\right) = \alpha x\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 8 \end{smallmatrix}\right) + \beta y\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 8 \end{smallmatrix}\right) = \alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y), \quad \varphi(0)=0$ / ч.т.д.

2. Найдем матрицу преобразования:

Пусть базис

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ и $x = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, тогда: $\varphi(x) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 8 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2a-3b & 3a+8b \\ 2c-3d & 3c+8d \end{smallmatrix}\right)$

Тогда для базисных матриц:

- $\varphi(e_1) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$
- $\varphi(e_2) = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 8 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$
- $\varphi(e_3) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$
- $\varphi(e_4) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 8 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$

Тогда $A = (\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_4)) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

3. Найдем собственные значения и векторы:

$$det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 8-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda-5)^4 = 0$$

Получаем собственное значение $\lambda = 5$ с кратностью 4. Для него:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \Phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to L : \langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \text{ - собст. подпр.}$$

Геометрическая кратность собственного подпространства равна 2(2 вектора в ЛО), алгебраическая - 4 (из характеристического уравнения). Значит, т.к. геометрическая кратность не равна алгебраической, то не диагонализируемо.

Ответ: $\lambda = 5$ - собственное значение, $L : \langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ - собственное подпространство, φ - не диагонализируемое.

Задача №25

Условие:

Приведите квадратичную форму $2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4$ (в $\mathbb{R}^4$) к каноническому виду и найдите канонический базис, положительный и отрицательный индексы инерции.

Решение:

$k(x) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$

$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ - симметричная матрица квадратичной формы

Матрицу можно диагонализировать.

Док-во:

Пусть B - матрица билинейной формы - она симметрична поставим в соответствие матрицу функции A (изоморфизм, скопируем все элементы $b_{i,j} \to a_{i,j}$)
Получаем $B_\psi = A_f$ - симметричны
Выберем скаляр произвольный столб такое, чтобы исходный базис $\{e_1...e_n\}$ был ОНБ
Тогда f - самосопр преобразование и $\exists$ОНБ $\{a_1...a_n\}$ в котором A_f - diag
Выполняется $B'_\psi = C^T B_\psi C = C^T A_f C = C^{-1} A_f C$

Уравнение:

$$det(K - \lambda E) = 0$$

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \dots = 0$$

Вычисляя уравнение четвертой степени получаем с.з. $\lambda_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \lambda_{3,4} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

<u>Ответ:</u> $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x_1' + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}x_2' + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x_3' + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x_4'$ - канонический вид.

Благодарности

Глав.Тайпер

Ревьюер