Письмак

Список:

1. n-ая производная
2. ф-ла Тейлора
3. $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ } Тоже Тейлор
4. $\lim g(x)^{f(x)}$
5. График $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$
6. График $\sqrt[n]{P(x)}$
7. Кривизна
8. Равномерная непрерывность

4 часа

① N-ая производная:

Таблица: • $f(x)=(x+a)^\alpha \to f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))\cdot(x+a)^{\alpha-n}$

• $f(x)=\ln(x+a) \to f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(x+a)^n}$

• $f(x)=\sin kx \to f^{(n)}(x)=k^n\cdot\sin(kx+\frac{\pi n}{2})$

• $f(x)=\cos kx \to f^{(n)}(x)=k^n\cos(kx+\frac{\pi n}{2})$

• $f(x)=e^x \to f^{(n)}(x)=e^x$

• $f(x)=a^x \to f^{(n)}(x)=\ln^n a\cdot a^x$

св-ва:

$(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}$

$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot f^{(k)}\cdot g^{(n-k)}$

Советы: • упростить
• должна выйти не более 4 членов
• все можно вывести

Ситуации: $\frac{2x-4}{x^2+2x-3}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}$; $\ln(x^2+x)=\ln x+\ln(x+1)$;

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

* Разложение на простые дроби

$\frac{2x-4}{(x+3)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$

$A(x+3)+B(x-1)=2x-4$ При один. степенях x коэфф. равны

$A+B=2$

$3A-B=-4$

$6-3B-B=-4$

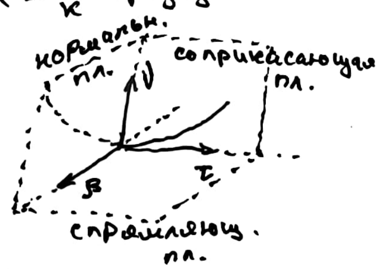
$\begin{cases} B=\frac{10}{4}=\frac{5}{2} \\ A=-\frac{1}{2}\end{cases} \to \frac{2x-4}{(x+3)(x-1)}=\frac{-1}{2(x-1)}+\frac{5}{2(x+3)}$

⑦ Кривизна:

$\bar r=\bar r(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$, $\bar r^{(n)}(t_0)=\begin{pmatrix}x^{(n)}(t_0)\\y^{(n)}(t_0)\\z^{(n)}(t_0)\end{pmatrix}$, $\bar r=\bar r(t_0)+\bar r'(t_0)\cdot(t-t_0)$

$k=\frac{|[r',r'']|}{|r'|^3}$ - кривизна ; $R=\frac{1}{k}$ - радиус

$[x,y]=\begin{vmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\ldots$



$\tau=\frac{r'}{|r'|}$ - касательный вектор

$\nu=\frac{[[r',r''],r']}{|[[r',r''],r']|}$ - нормальный вектор

$\beta=\frac{[r',r'']}{|[r',r'']|}$ - бинормальный вектор

Плоскости:

• Спрямляющая:
$(r-r_0,[r_0',r_0''],r_0')=0$

• Нормальная:
$(r-r_0,r_0')=0$

• Соприкасающая:
$(r-r_0,r_0',r_0'')=0$

* Смешанное произвед:

$(a,b,c)=0$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0$

В координатах:

$k=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ - без z

$k=\frac{|y''(x)|}{(1+y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$ - плоская

$x'=1,\ x''=0$

Неявно задана $(y^3)'=3y^2\cdot y'$

$(y'')'=y'''$

Могут спросить че угодно от кривизны до векторов/плоскостей

5, 6 - Графики:

План:

1) Область определения $D(f)$, точки $\cap$ осей ($f=0$, $x=0$)

2) Асимптоты:
   • Вертикальные: $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \pm\infty$ - к чему стремится, a - верт. асимпт.
   • Наклонные: $y = kx + b$ - наклонная если $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - (kx+b)) = 0$

   $$k = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$, если $k=\infty$ или $b=\infty$, то нет наклонных

   $$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx)$$

3) Монотонность + экстремумы:
   Ищем $f'(x) = \ldots$, дальше выносим на $\longrightarrow x$ и метод интервалов
   Там где $+ \to -$ или $- \to +$ - экстремумы, ищем $x_{экст}$ и $f(x_{экст})$.
   * Если $f'=0$ (кас. параллельна Ox), то нужно тоже отметить ее = баллы.
   * Критерий „Отметить точки на графике" все точки отмечаем с x_0 и $f(x_0)$! с точными знач.

   $\overset{-}{\searrow}\;\bullet\;\overset{+}{\nearrow}$

4) Выпуклость + т. перегиба:
   Ищем $f''(x) = \ldots$, дальше $\longrightarrow x$ и метод интервалов.
   f $+ \to -$, $- \to +$ - т. перегиба ищем $x_{пер}$ и $f(x_{пер})$.
   *Можно найти коэф. наклона в т. пер. $k_n = f'(x_{пер}) = \ldots$
   * $x \to +\inf$, f - вып. вниз ($\cup$) => график выше асимпт.
   $x \to -\inf$, f - вып. вверх ($\cap$) => график ниже асимпт.

   $\overset{-}{\cap}\;\bullet\;\overset{+}{\cup}$

5) Строим график.
   • Инициализация - все по макс. подписать
   • Асимптоты - подписать
   • Из (4) строим части близкие к асимптотам
   • Все точки которые получили x_0 и $f(x_0)$
   • На масштаб можно забить, главное все особые точки, асимптоты и график
   *В f' надо грамотно выносить за скобки

В 6 то же самое.
• Если $|x|$, то для асимптот - 2 случая, $\sqrt[3]{\ldots} - x = \dfrac{(\ldots)^3 - x^3}{\ldots}$ по $a^3 + b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
• При производной $|x| = x\,\mathrm{sign}(x)$ - $\mathrm{sign} = \mathrm{const}$, вторая так же, sign выносится
* Если где-то $f'(x) \to \infty$, то тоже отметить пунктиром

② ,③,④ Тейлор и пределы:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),\ x\to x_0$$ – Формула Тейлора

При $x_0=0$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!}\cdot x^k + o(x^n),\ x\to 0$

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+o(x^n)$
- $\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+o(x^{2n+2})$
- $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k} + o(x^{2n+1}) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+o(x^{2n+1})$
- $\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+o(x^{2n+2})$
- $\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+o(x^{2n+1})$
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n)$, $C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(k-1))}{k!}$
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1-x+x^2-x^3+\ldots+o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1+x+x^2+x^3+\ldots+o(x^n)$

⊗ Теорема о почленном интегрировании: $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),\ x\to x_0$

$\left[\hookrightarrow f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!\cdot(k+1)}\cdot(x-x_0)^{k+1} + o((x-x_0)^n)\right]$

- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\cdot x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+o(x^n)$

- $\arcsin(x) = x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^6)$
- $\arccos(x) = \frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$
- $\operatorname{arctg}(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^6)$
- $\operatorname{tg}(x) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6)$
- $\operatorname{th}(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6)$
- $\operatorname{arsh} x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^6)$
- $\operatorname{arth} x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^6)$

- Предел крокодила (дробь)

раскладываем числитель и знаменатель до $o(x^3)$-$o(x^5)$ так чтобы не 0 получилось.

- Предел крокодила (степень)

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to 0} g(x)\cdot\ln(f(x))}$$

Раскладываем $g(x)$, $f(x)$, потом $\ln(f(x))$ по Тейлору

Потом вычисляем $g(x)\cdot\ln(f(x))$