3 Неделя:

58.

№91

1) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n \geq N : |x_n| > \varepsilon$

$\forall C > 0 \; \exists n \in N : |x_n| > C$ – ?

Заметим, что при $C = \varepsilon$ ($\forall C$ и $\forall \varepsilon$)

Т.к. $\forall n_{\geq N} \Rightarrow \exists n \in N : |x_n| > \varepsilon \Rightarrow |x_n| > C \Rightarrow$ верно

2) Нет, пример: $\{x_n\} : x_n = n - n(-1)^n$ – неограниченная, но не является бесконечно-большой

№53(4)

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ – ? $\quad x_n = \sqrt[3]{n^3+n^2+2002} - n$

$$x_n = \frac{\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+2002} - n\right)\left(\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+2002}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3+n^2+2002}\,n + n^2\right)}{\ldots}$$

$$x_n = \frac{n^3+n^2+2002-n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+2002}\right)^2 + n\sqrt[3]{n^3+n^2+2002} + n^2}$$

$$x_n = \frac{n^2+2002}{\left(n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{2002}{n^2}}\right)^2 + n^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{2002}{n}} + n^2} = \frac{1+\frac{2002}{n^2}}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{2002}{n^2}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{2002}{n}} + 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1+0}{\left(\sqrt[3]{1+0+0}\right)^2 + \sqrt{1+0+0} + 1} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

№74(3)

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ – ? $\quad x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $a \geq 0, b \geq 0$

1) Пусть $a > b > 0$, тогда

$$x_n = \sqrt[n]{a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$a < a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n} < a\cdot\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a = a$

$\lim\limits_{n\to\infty} a\cdot\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a(1+0) = \lim\limits_{n\to\infty} a$

По т. о двух милиционерах: $\lim\limits_{n\to\infty} a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n} = a$

№7

$|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

1) $q = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

2) $q \in (0,1)$, то $q = \frac{1}{1+\alpha}$, $\alpha > 0$

$$q^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} \leq \frac{1}{1+\alpha n} < \frac{1}{\alpha n} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{n} = z_n$$

$z_n = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{n}$, т.к. $\frac{1}{\alpha} = const$, а $\frac{1}{n}$ – бесконечно малая, то на $[a,b]$, то $f(x)$ достигает

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \Rightarrow 0 < q^n < z_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \Rightarrow$

по т. о 2х милиц. : $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

3) $-1 < q_n < 0$, пусть $p_n = -q_n$, $p_n \in (0,1)$

Тогда по п.2. $\lim\limits_{n\to\infty} p_n^n = 0$

~~ограниченная~~

$q_n^n = (-1)^n \cdot p_n^n$ - произведение ограниченной

посл. на б.м. $\Rightarrow q^n$ - беск. малая $\Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ /ч.т.д.

$\boxed{№ 71.(1)}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ - ? $x_n = \frac{n!}{n^n}$

$0 < \frac{n!}{n^n}$ - очевидно

$x_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} < \frac{1}{n}$

Получаем, что $0 < x_n < \frac{1}{n}$

По т. о 2х милиционерах.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$\boxed{№60}$ $0 < a \leq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ - док-ть

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$

$b = \frac{1}{a} \Rightarrow b > 1$ и $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \sqrt{b}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$

2) Найдём $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}$, $b > 1$

Если $\sqrt[n]{b} - 1 = \beta_n$, то $\beta_n > 0$, тогда

$0 < \beta_n$ и $b = (1+\beta_n)^n \geq n\beta_n$

$0 < \beta_n \leq \frac{b}{n}$ - беск. малая

По т. о 2х мил. : $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\beta_n) = 1$

3) Тогда в п. 1

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1$

/ч.т.д.

...на $[a,b]$, то $f(x)$ достигает

№67 $\quad \forall a, \ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ Док-ть

Если $0 < a \leq 1$, то $0 < x_n < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$

Тогда по т. о 2-х милиц.:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

При $a > 1$, $z_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} =$

$$= \frac{a}{n+1}; \quad \lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

Для $\varepsilon = 1$: $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \to |z_n| < 1$

т.е. $0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$

Начиная с n_0 последовательность убывает и ограниченна снизу x_n то по т. Вейерштрасса она имеет предел.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \beta$$

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{a}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1}$$

$$= 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

/ч.т.д.

№63(4) $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \qquad |a| > 1, \ k \in N$

$a > 1 \quad a = 1 + b$, где $b > 0$

1) $a^n = (1+b)^n$, $\quad a^n > \frac{n(n-1)}{2} b^2$, $\quad n > 2$

$n - 2 > 0$

$2n - 2 > n$

$(n-1) > \frac{n}{2} \Rightarrow a^n > \frac{n^2}{4}(a-1)^2$

2)

$k = 1$:

$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{4n}{n^2(a-1)^2} = \frac{4}{n(a-1)^2}$$

беск. малая

Значит $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{a^{\frac{n}{k}}}\right)^k = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\right)^k$

$(a^{\frac{1}{k}}) > 1$, $k \in N \Rightarrow b = a^{\frac{1}{k}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{b^n}\right)^k = 0$ /ч.т.д.

...на $[a,b]$, то $f(x)$ достигает

№119 x_n - ограничена и имеет 1 част. предел

1) Ограниченна $\Rightarrow \forall n: m \le x_n \le M$

Для подпоследовательности x_{n_k}: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, то $m \le x_{n_k} \le M \to m \le a \le M$ (предельный переход)

2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne a$, то ~~это~~ есть $U_\varepsilon(a)$ вне которой есть бесконечное кол-во членов x_n. Если они правее $U_\varepsilon(a)$, то Тогда на отрезке $[a+\varepsilon; M]$ - бесконечно много членов $x_n \Rightarrow$ По т. Больцано-Вейерштрасса эта послед. имеет частичный предел x_n, при этом $\ne a$ - противоречие $\Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ч.т.д.

№121 По опред $\{x_n\}$ - неогр:

~~$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0,\ \forall n \ge N_0 \Rightarrow |x_n| \ge \varepsilon$~~

$\forall E > 0 \to \exists n: |x_n| > E$

1) Тогда если $\{x_n\}$ - беск. больше, то

$\forall E > 0 \to \exists n_0: \forall n \ge n_0 \to |x_n| > E$

Значит, б.б - неограниченна

2) Если $\{x_n\}$ - неограниченна и не б.б, то

$$\begin{cases} \forall E > 0,\ \exists n: |x_n| > E \\ \exists E_0 > 0 \to \forall n: \exists n_0 \ge n \to |x_n| < E_0 \quad (1) \end{cases}$$

Тогда $\exists k_1 \ge 1: |x_{k_1}| < E_0$ из (1)

$\exists k_2 \ge k_1: |x_{k_2}| < E_0$

$\dots$

$\exists k_n > k_{n-1}: |x_{k_n}| < E_0$

Получаем $\{x_{k_n}\}\ \forall n \to |x_{k_n}| < E_0$ - подпоследовательность

По критерию $\{x_{k_n}\}$ - сходящаяся, имеет частичный предел

ч.т.д.

№116 (2) $\{x_n = (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n}$

при $n = 2k$, $x_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = 2$

при $n = 2k+1$, $x_n = -\frac{2n+1}{n} = -2 + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = -2$

~~№117(2)~~

Тогда т.к. $2k$ и $2k+1$ покрывают всё, x_n имеет част. пред: 2 и $-2 \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -2$

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $f(x)$ достигает

№117(2) $x_n = (-1)^n \frac{3n-1}{n+2}$

1) $n = 2k$, $x_n = \frac{3n-1}{n+2} = \frac{n(3-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{2}{n})} = \frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = 3$

$\sup\{x_n\} = 3$

2) $n = 2k+1$, $x_n = -\frac{3n-1}{n+2} = -\frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = -3$

$\inf\{x_n\} = -3$

№141(2) $x_n = \frac{n+1}{3n-2}$, $n \in N$

оценим $|x_{n+p} - x_n|$:

$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{n+p+1}{3n+3p-2} - \frac{n+1}{3n-2} \right| =$

$= \left| \frac{n+p-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}}{3n+3p-2} - \frac{n-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}}{3n-2} \right| = \left| \frac{1}{3} + \frac{\frac{5}{3}}{3n+3p-2} - \frac{1}{3} - \right.$

$\left. - \frac{\frac{5}{3}}{3n-2} \right| = \left| \frac{5}{3(3n+3p-2)} - \frac{5}{3(3n-2)} \right| < \frac{5}{3(3n-2)} \le$

$\le \underbrace{\frac{5}{3(3N-2)} < \varepsilon}$

$\frac{5}{3\varepsilon} < 3N-2$

$\frac{5+6\varepsilon}{9\varepsilon} < N \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \left(N > \frac{5+6\varepsilon}{9\varepsilon}\right)$

$\forall n \ge N \ \& \ \forall p \in N \to$

$|x_{n+p} - x_n| < \frac{5}{3(3n-2)} \le \frac{5}{3(3N-2)} < \varepsilon \Rightarrow \{x_n\}$ фунд. по крит. Коши

ч.т.д.

№143(3) $\{x_n\}$, ~~$x_n = \ldots$~~

$x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

Оценим $|x_{n+p} - x_n|$, $p \in N$:

$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} \right| = \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} \le$

$\le \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p-1}} = \frac{1}{2^n}\left(1 + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) =$

$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} \le 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \le 2\left(\frac{1}{2}\right)^N < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^N < \varepsilon\right) : \forall n \ge N \ \& \ \forall p \in N \Rightarrow$

$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ по критерию Коши

фунд. $\Rightarrow$ сходится

ч.т.д.

№147(4) $x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$

~~$|x_{n+p} - x_n| = \left| \left(1 + \frac{(-1)^{n+p}}{n+p}\right)^{n+p} - \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n \right|$~~

1) $n = 2k \Rightarrow x_{2k} = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k} \ge 1 + 2k \cdot \frac{1}{2k} =$

$= 2$

2) $n = 2k-1$, $x_{2k-1} = \left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1}$

$= \left(\frac{2k-2}{2k-1}\right)^{2k-1} = \left(\frac{2k-2}{2k-1}\right)^{2k-2} \cdot \frac{2k-2}{2k-1}$

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ то $f(x)$ достигает

3) $x_{2k-2} = \left(1 + \frac{1}{2k-2}\right)^{2k-2} = \left(\frac{2k-1}{2k-2}\right)^{2k-2} =$

$= \frac{1}{x_{2k-1}} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \geq 2$ (п. 1)

$$x_{2k-1} \leq \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

Тогда $x_{2k-1} < \frac{1}{2}$, а $x_{2k} \geq 2 \Rightarrow$

$$|x_{2k} - x_{2k-1}| > \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$\exists \varepsilon = \frac{3}{2}$: $\forall N: \exists n \geq N$ &

$p = 1$: $|x_{n+1} - x_n| \geq \frac{3}{2}$

По отриц. усл. Коши : не фундамент. $\Rightarrow$ расходится

$\boxed{№158}$ $\{x_n\}$, расход.

$\lim\limits_{n\to\infty} |x_{n+p} - x_n| = 0$, $p \in N$

$x_n = \sqrt{n}$; $\lim \sqrt{n} = +\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+p} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}}\right) = 0$$

$\boxed{4 \text{ Неделя}}$

$\boxed{№164(1)}$ $x_1 = 13$, $x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ - ?

1) $\forall n \to x_n - x_{n+1} = x_n - \sqrt{12 + x_n}$

при $x_n > 4$ $x_n - \sqrt{12 + x_n} > 0$

<u>Док-ем по индукции:</u> $x_n > 4 \ \forall n$

База: $x_1 = 13 > 4$

Шаг: $x_n > 4$, $x_{n+1} > 4$?

$\sqrt{12 + x_n} > 4$

$12 + x_n > 16$

$x_n > 4$ - верно / ч.т.д.

2) Сравним $x_n \vee x_{n+1}$?

$x_n \vee \sqrt{12 + x_n}$

$x_n^2 \vee 12 + x_n$

$x_n^2 - x_n - 12 \vee 0$

$D = 1 + 48 = 49$

$x_n = \frac{1 \pm 7}{2} = \left[\begin{array}{l} 4 \\ -3 \end{array}\right.$

$(x - 4)(x + 3) \vee 0$

$x_n > x_{n+1}$

$\Downarrow$ убывает

т. Вейерштрасса

г)

Тогда $\{x_n\}$ убывающая и ограничена снизу 4 => по т. Вейерштрасса

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 4$$

№246 (1) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, Д-ть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) = 0$$

$a_n = \frac{1}{n}$ - ~~убывающая~~ бесконечно малая

$b_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ - ограничена

Тогда $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$, ч.т.д.

Т.5. $a_n: \exists M > 0 : |a_n| \leq M \ \forall n \in N$

$b_n: \exists P > 0 : |b_n| \leq P \ \forall n \in N$

$a_n: \forall a_1 \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geq N \to |a_n - a_1| \geq \varepsilon$

$b_n: \forall a_2 \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geq N \to |b_n - a_2| > \varepsilon$

1) $C_n = a_n + b_n$ - может сходиться?

Да. $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n-1}$

$C_n = a_n + b_n$ - сходится!

г) a_n имеет 6 част. пред. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

b_n имеет 3 част. пред. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$

а*) Может сходиться?

Пусть $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, тогда

$b_{n_k} = c_{n_k} - a_{n_k}$

$\lim_{k\to\infty} c_{n_k} = c$, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha_i$

Тогда b_n имеет 6 част. пределов (6 подпосл. имеют предел) - Противоречие => нет

б) Если $a_n = \{0, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots$ повтор, $\ldots\}$ - 6 част. пределов

$b_n = \{1, 0, -1, 1, 0, -1$, повтор, $\ldots\}$ - 3 част. предела

$c_n = \{1, -2, -2, 2, 2, -2$, повтор, $\ldots\}$

3 част. предела

Да.

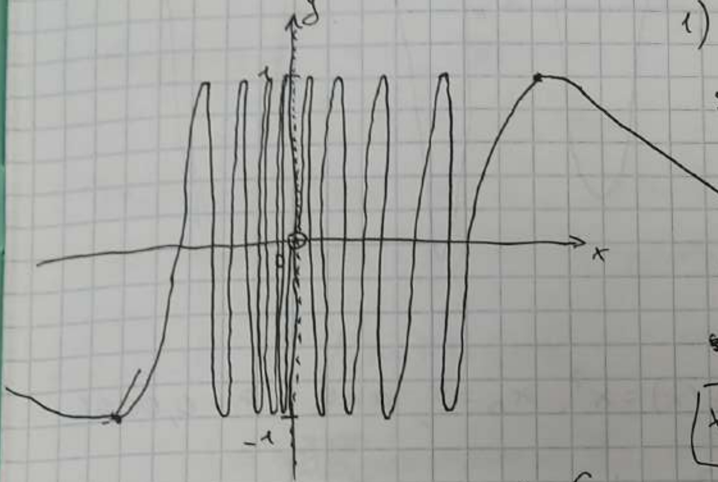
*в) Если $a_n = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots$, повтор, $\ldots\}$ 6 част. пред.

$b_n = \{1, 0, -1, 1, 0, -1$, повтор, $\ldots\}$ 3 част. пред.

$c_n = \{-2, -2, -2, 2, 2, 2, \ldots\}$ - 2 част. пред

Да.

№218(5) $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$



1) $\sin \in [-1; 1]$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\left[x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} = \frac{2}{\pi(1+4n)}\right]$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = -1$

$\boxed{x = \frac{2}{\pi(4n-1)}}$

2) Симметрия отн. центра

3) $y' = \sin'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos\frac{1}{x}$

$y' = 0 \Rightarrow \cos\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\pi + 2\pi n}$ – экстремумы

4) sin => периодическая

№219(3) $y = x^2 \cos x$

1) $f(-x) = f(x)$ => функция чётная, симм. отн. оси ординат

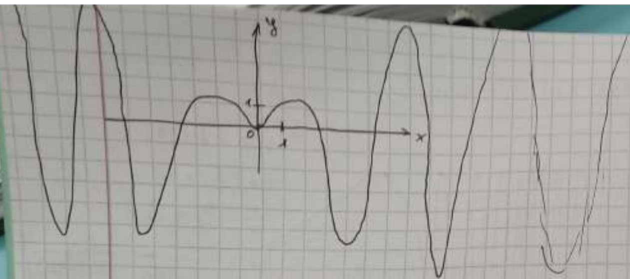
2) $y' = 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x$

$y' = 0 \rightarrow 2x\cos x - x^2 \sin x = 0$

$x = 0, \quad 2\cos x - x\sin x = 0$

$x \operatorname{tg} x = 2$

Бесконечно много экстремумов



§9.

$\boxed{№1(1)}$ $f(x) = x^2,\ x_0 = 2,\ a = 4,\ \varepsilon = 0{,}0001$

$|x^2 - 4| < \varepsilon$, $\delta - ?$ $|x-2| = \delta$

$|x-2| \cdot |x+2| =$

$= |x-2| \cdot |x-2+4| \leq \delta \cdot (\delta + 4) = \varepsilon$

$\delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$

$D = 16 + 4\varepsilon$

$\delta = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{4+\varepsilon}}{2}$, $\delta > 0 \Rightarrow$

$\delta = -2 + \sqrt{4+\varepsilon}$

$\delta = \sqrt{4+\varepsilon} - 2 = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon}+2} \leq \dfrac{\varepsilon}{4} = 0{,}000025$

<u>Ответ:</u> $\delta \leq 0{,}000025$

$\boxed{№8(1)}$ Док-ть $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ не сущ-ует, если $f(x) = \cos(x)$

Возьмем $x_n = 2\pi n$

$x_n' = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\{x_n\}$ сходится к 1, $\{x_n'\}$ сходится к 0 $\Rightarrow$ по критерию Гейне предела не существует.

$\boxed{№16}$ 1) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

2) $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$

$\forall E > 0 \rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \rightarrow |f(x)| > E$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\forall E > 0 \rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x,\ x < \delta \rightarrow f(x) > E$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\forall E > 0 \rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x,\ |x| > \delta \rightarrow f(x) < E$

№18

1) $\lim\limits_{x \to -0} f(x) \neq 0$

$\exists \varepsilon > 0 \rightarrow \forall \delta > 0 : \exists x,\ x \in (-\delta; 0) \wedge |f(x)| \geq \varepsilon$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \neq 4$

$\exists \varepsilon > 0 \rightarrow \forall \delta > 0 : \exists x,\ |x| > \delta \wedge |f(x) - 4| \geq \varepsilon$

3) $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) \neq -\infty$

$\exists \varepsilon > 0 \rightarrow \forall \delta > 0 : \exists x,\ x \in (1; 1+\delta) \wedge f(x) \geq \varepsilon$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \neq \infty$.

$\exists \varepsilon > 0 \rightarrow \forall \delta > 0 : \exists x,\ x < \delta \wedge |f(x)| \geq \varepsilon$

№25(5)

$$\lim_{x \to 5} \left(\frac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}} = \frac{6 - x - 1}{(3 - \sqrt{4+x})(\sqrt{6-x} + 1)} = \cancel{\frac{5 - x}{3\sqrt{6-x} + 3 - \sqrt{24+2x-x^2} - \sqrt{4+x}}}$$

$$= \frac{(5-x)(3+\sqrt{4+x})}{(9-4-x)(\sqrt{6-x}+1)} = \frac{5-x}{5-x}\left(\frac{3+\sqrt{4+x}}{\sqrt{6-x}+1}\right) = \frac{3+\sqrt{4+x}}{\sqrt{6-x}+1}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{3+\sqrt{4+x}}{\sqrt{6-x}+1} = \frac{\lim\limits_{x \to 5} 3 + \lim\limits_{x \to 5} \sqrt{4+x}}{\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{6-x} + \lim\limits_{x \to 5} 1} = \frac{3+3}{1+1} = \frac{6}{2} = \underline{3}$$

№26(2)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^6 - 1}{\sqrt{x^{12} + 5x^5 + 1}}.$$

$$\frac{5x^6 - 1}{\sqrt{x^{12} + 5x^5 + 1}} = \frac{x^6\left(5 - \frac{1}{x^6}\right)}{x^6\sqrt{1 + \frac{5}{x^7} + \frac{1}{x^{12}}}} = \Rightarrow \lim_{x \to \infty} = \frac{5 - \frac{1}{x^6}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x^7} + \frac{1}{x^{12}}}} =$$

$$= \frac{5}{1} = \underline{5}$$

№27(3)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{4x^4 + 13x^2 - 7} - 2x^2\right) =$$

$$\sqrt{4x^4 + 13x^2 - 7} - 2x^2 = \frac{4x^4 + 13x^2 - 7 - (4x^4)}{\sqrt{4x^4 + 13x^2 - 7} + 2x^2} =$$

$$= \frac{13x^2 - 7}{\sqrt{4x^4 + 13x^2 - 7} + 2x^2} = \frac{13 - \frac{7}{x^2}}{\sqrt{4 + \frac{13}{x^2} - \frac{7}{x^4}} + 2} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{13 - \frac{7}{x^2}}{\sqrt{4 + \frac{13}{x^2} - \frac{7}{x^4}} + 2} = \frac{13}{4} = \underline{3{,}25}$$

№30(3)

$$\lim_{x \to \infty} x \sin\frac{\pi}{x}$$

$$x \sin\frac{\pi}{x} = \frac{\pi x^2}{\pi x} \sin\frac{\pi}{x} = \frac{\pi x^2}{x} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} = \pi \cdot 1 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}$$

$$\lim_{x \to \infty} x \sin\frac{\pi}{x} = \pi \lim_{x \to \infty} \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} = \pi \cdot 1 = \underline{\pi}$$

1-ый замеч. пред.

№33(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^x$

$$\frac{x}{2x+1} = \frac{2x+1-x-1}{2x+1} = 1+\frac{-x-1}{2x+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-x-1}}\right)$$

$$x = \frac{2x+1}{-x-1}\cdot(-x-1) - x - 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^x = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-x-1}}\right)^{\frac{2x+1}{-x-1}}\right)^{\frac{(-x-1)x}{2x+1}}$$

$$x\to\infty:\ e^{\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{x+1}{2+\frac{1}{x}}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^x = \underline{0}$$

№35(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$

$$\frac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)} = \frac{e^{\sin x}\left(e^{5-20\sin^2 x+16\sin^4 x}-1\right)}{\ln(1+2x)}$$

$$\ln(1+2x)\sim 2x \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)} =$$

$$= \frac{e^{\sin x}\cdot\left(e^{5-20\sin^2 x+16\sin^4 x}-1\right)}{2x} = \frac{e^{\sin x}\cdot(5-20\sin^2 x+16\sin^4 x)}{2x}$$

При $x\to 0$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{x}}{\ln(1+2x)} =$

$$= \lim_{x\to 0} e^x \cdot \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\ln(1+2x)} =$$

$$= 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{4x}-1}{4x}}{\frac{\ln(1+2x)}{4x}} = 1\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{e^{4x}-1}{4x}}{\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 1\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{2x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}} = 1\cdot\frac{1}{1\cdot\frac{1}{2}} = \underline{2}$$

№61 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ \lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0 \overset{?}{\Rightarrow} \lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = a$

Пусть $g(t) = 0,\ t\in R \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0$

и $f(x) = \begin{cases} 0, & x\neq 0 \\ 1, & x = 0\end{cases}$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$\lim\limits_{t\to 0} f(g(t)) = 1 \Rightarrow$ не следует

*Для прерывных функций не работает.

$\boxed{№5(2)}$ $y = x^2$

$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x^2$
$= 2x_0\Delta x + \Delta x^2$

$\lim\limits_{x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 0 \Rightarrow$ непрерывна в каждой точке

ч.т.д.

$\boxed{№14}$ f непрерывна в x_0 и $f(x_0) \neq 0$

Док-ть $\exists C > 0$, и $\exists U_\varepsilon(x_0) : \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \to$
$|f(x)| \geq C$

По опред: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D(f)$:
$(|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

Если $f(x_0) > 0$, то

$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

Пусть $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, тогда $\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}$

Но $\frac{f(x_0)}{2} > 0$

Тогда $\exists C = \frac{f(x_0)}{2}$ для которого $f(x_0) > C$

При $f(x_0) < 0$, то $\exists C : -f(x) = |f(x)| > C \Rightarrow$
$|f(x)| > C = \frac{-f(x_0)}{2}$

$\Rightarrow \exists \delta > 0, \exists C = \frac{|f(x_0)|}{2} : \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \to$
$\to |f(x)| > C$

$\boxed{№22}$ $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in I \end{cases}$

разрывна - Док-ть

1) Док-ем, что $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$ - не существует

и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = c$ - не существует

2) Для $x \to x_0 + 0$:

Выберем $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = x_0$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = x_0$, $x_n' \neq x_0$, $x_n'' \neq x_0$ и
$x_n' \in Q$, $x_n'' \in I$ для $n = 1, 2 \ldots$

- Если $a \in Q$, то $x_n' = a + \frac{1}{n}$, $x_n'' = a + \frac{\gamma}{n}$, $\gamma \in I$

$a \in I$, то $x_n' = \overline{a_n}$, $x_n'' = a + \frac{1}{n}$

Тогда $f(x_n') = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') = 0$

Тогда $b=1$ и $b=0$ => не существует $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$

Аналогично если взять

$a \in Q$: $x_n' = a - \frac{1}{n}$, $x_n'' = a - \frac{\gamma}{n}$, $\gamma \in I$ ($\gamma = \sqrt{2}$ к примеру)

$a \in I$: $x_n' = \overline{a_n}$, $x_n'' = a_n - \frac{1}{n}$

Также $c = 1$, $c = 0$ => не существует $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$

Тогда в любой точке нет непрерывности ч.т.д.

$\boxed{№23}$ Пусть $x \neq 0$, тогда док-во из ~~рассуждения~~ №22 будет верно при $x_0 \neq 0$.

Р-м $x_0 = 0$: $f(x_0) = \begin{cases} x, & x \in Q \\ 0, & x \in I \end{cases}$

$a \in Q$: $x_n' = a + \frac{1}{n}$, $x_n'' = a + \frac{\gamma}{n}$, $\gamma \in I$

$a \in I$: $x_n' = \overline{a_n}$, $x_n'' = a + \frac{\gamma}{n}$,

Получаем $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x_n') = 0$; $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x_n'') = 0$

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x_n''') = 0$; $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x_n'''') = 0$

$\boxed{№40}$ $f(x)$ - непрерывная на интервале.

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ на интервале $(0,1)$

Неограниченна, т.к. $\forall E > 0 \to \exists x(E) = \frac{1}{2E}$: $f(x) > E$

2) $f(x) = x$ на $(0,1)$. $\sup\limits_{(0;1)} f(x) = 1$, $\inf\limits_{(0,1)} f(x) = 0$

ни одна из точных граней достигается

$\boxed{№41(1)}$ $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$

и $\forall x \in [a,b]$, $f(x) > 0$

Док-ть $\exists \mu > 0$: $f(x) \geq \mu$, $\forall x \in [a;b]$

• По т. Вейерштрасса: f ограничена на $[a,b]$

~~существует~~ $\exists x_1, x_2$: $f(x_1) = \sup\limits_{[a,b]} \{f(x)\}$, $f(x_2) = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$

Тогда берём $\mu = f(x_2) = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$ =>

=> $\exists \mu = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $\inf f(x)$ сущ. по т. Вейерштраса

ч.т.д.

№42 f непрерывна на (a,b)

$$m = \inf_{(a,b)} f, \quad M = \sup_{(a,b)} f$$

Док-ть: $\forall y \in (m;M) \to \exists x \in (a,b) \to f(x)=y$

По опред. inf и sup:

$M = \sup_{(a,b)} f \to \forall x \in (a,b) \to f(x) \le M$

~~тогда~~ и $\forall y < M \ \exists x' \in (a,b) : f(x') > y$

$m = \inf_{(a,b)} f \to \forall x \in (a,b) \to f(x) \ge m$

и $\forall y > m \ \exists x'' \in (a,b) : f(x'') < y$

$\forall y \in (m,M) \ \exists x', x'' \in (a,b) : f(x'') < y < f(x')$

Т.к. $f(x)$ непрерывна на (a,b) =>

если рассмотреть

$$g(x) = f(x) - y_0, \text{ где } y_0 \in (a,b)$$

$g(a)$ и $g(b)$ – имеют разные знаки

по т. Больцано-Коши $\exists x_0 \in (a,b)$ такая

что $g(x_0) = 0$, т.е. $f(x_0) = y_0$ =>

$\exists x \in (a,b) : f(x) = y$ ч.т.д.

№46 $y = f(x)$ определена и монотонна, $E(y)$ – промежуток

Док-ть непрерывность

Докажем от противного;

Если функция имеет разрыв в т. x_0, то

она определена в $\mathring{U}_\varepsilon(x_0)$ и не явл. непрерывной

в т. x_0.

2 случая:

1) $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, тогда можно выделить

послед. $\{f(x_n)\}$ не имеющую предела =>

$\exists U_\varepsilon(f(x_0))$ в которой конечное число членов, но

тогда $f(x)$ не промежуток. – противоречие.

2) Можно выделить две послед. имеющие

разные пределы $\{f(x_n')\}$ и $\{f(x_n'')\}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x_n') \ne \lim\limits_{x \to x_0} f(x_n'') \ne f(x_0)$, тогда

~~тогда~~ $\exists U_\varepsilon(f(x_0))$ конечное число членов =>

$f(x)$ – не промежуток => противоречие

Значит она непрерывна во всех точках. ч.т.д.

№76 | f непрерывна на $[a;+\infty)$ и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Док-ть, что f ограниченна на $[a;+\infty)$

1) По опред. предела:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>a\ \forall x: x>\delta \to |f(x)-b|<\varepsilon$

• Тогда $\forall x: x>\delta \to b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon$ =>
по опред. $f(x)$ ограниченна на $(\delta;+\infty)$

• На отрезке $[a;\delta]$ $f(x)$ непрерывна
тогда по т. Вейерштрасса:

f огр. на $[a;\delta]$ =>

$f(x)$ ограниченна на всём $[a;+\infty)$ /ч.т.д.