ZHESTKOV UNIVERSITY

KollokBook

ЧИСЛА → ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ → ФУНКЦИИ

Важно понимать отличие между $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел – множество, на котором заданы "$\leq$", "$+$", "$\cdot$" и удовлетв. **15+1** аксиомам (а ещё $1 \neq 0$)

1) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a+b=b+a$
2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a+b)+c=a+(b+c)$
3) $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a+0=a$
4) $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists (-a) \in \mathbb{R} : a+(-a)=0$

5) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot b = b \cdot a$
6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
7) $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot 1 = a$
8) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$

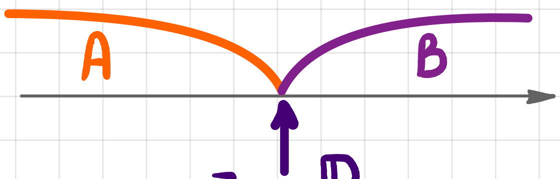
10) $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \leq a$
11) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \leq b$ или $b \leq a$
12) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b,\ b \leq c \hookrightarrow a \leq c$
13) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b,\ b \leq a \hookrightarrow a = b$

9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow a(b+c)=ab+ac$

14) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \hookrightarrow a+c \leq b+c$

15) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b,\ 0 \leq c \hookrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

16) Если $A, B \subset \mathbb{R}$ и A лежит слева от B, т.е. $\forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \leq b$, то $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \leq c \leq b$



$\exists c \in \mathbb{R}$ непрерывность

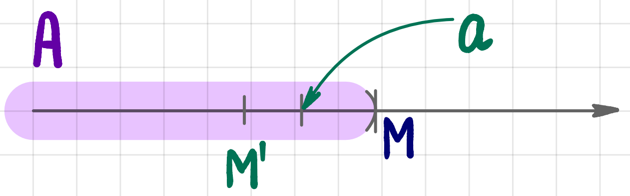
Для $\mathbb{Q}$ аксиомы 1-15 работают,

а 16-я **НЕТ**: $\begin{cases} A: \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x^2<2 \end{array} \right. & \text{(числа до } \sqrt{2}\text{)} \\ B: \left\{ \begin{array}{l} x>0 \\ x^2>2 \end{array} \right. & \text{(числа после } \sqrt{2}\text{)} \end{cases}$

M — Верхняя грань (ВГ) мн-ва A, если $\forall a \in A \hookrightarrow a \le M$

$M = \max A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ВГ} \\ M \in A \end{cases}$ $(0,1]$ ВГ: $1, 2, 117, \dots$ $\max A = 1$ $(1,2)$ ВГ: $2, 17, 4219 \dots$ $\max A =$ 😨

Число $M \in \mathbb{R}$ — точная ВГ мн-ва $A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ВГ} \\ \text{нет ВГ меньше} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A \hookrightarrow a \le M \\ \forall M' < M \ \exists a \in A : a > M' \end{cases}$

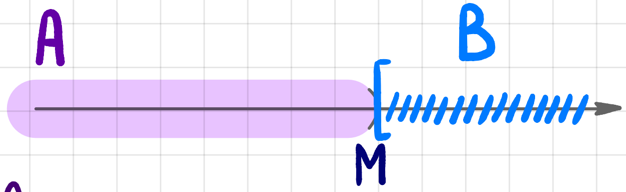


$M = \sup A$ (супрéмум)

$m = \inf A$ (и́нфимум, точная нижняя грань)

Теорема о ТВГ: любое ограниченное сверху множество имеет ТВГ и при том только одну, т.е. $\forall A \subset \mathbb{R}$: A огр. сверху $\exists! \, M = \sup A$

Рассмотрим мн-во B всех ВГ A (их ∞ много)



По аксиоме **16** $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \le M \le b$

ВГ + наим. ВГ $\Rightarrow M$ — ТВГ мн-ва A

Покажем, что ТВГ одна.

Пусть не одна и $\exists \, M_1, M_2$ и $M_1 < M_2$, но тогда M_2 не min в B, противоречие

ТВГ неограниченного сверху множества равно $+\infty$

Множество X называется **счётным**, если между X и $\mathbb{N}$ можно построить взаимно однозначное соответствие (биекцию)

Важно не путать счётное и конечное мн-ва: в счётном ∞ много элементов

Например, $X = \{\text{чётные числа} > 0\}$ – счётное

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 6 & \dots & 140 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & 2 & 3 & & 70 & \end{array}$$

Теорема: множество $\mathbb{Q}$ счётно

старт

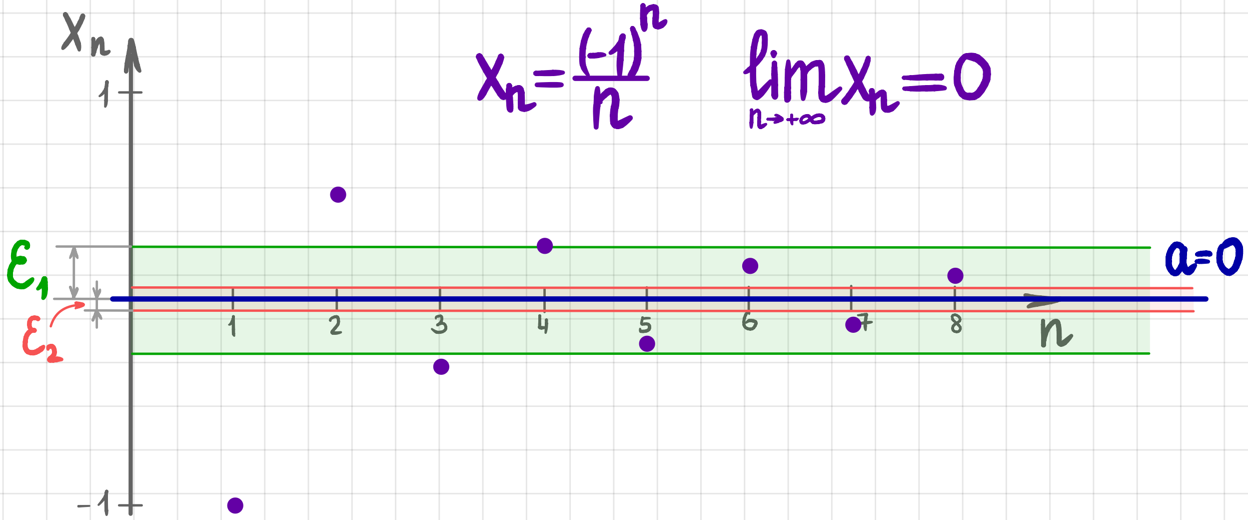
n\m	0	1	-1	2	-2	3	...
1	$\frac{0}{1}$ 1	$\frac{1}{1}$ 2	7 $\frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}$ 8	$\frac{-2}{1}$		
2	– $\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$ 3	6 $\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{2}$ –	$\frac{-2}{2}$ –		
3	– $\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$ 4	5 $\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$ 9	$\frac{-2}{3}$		
4							
⋮							

- Обходим "змейкой"
- Если на пути встречается "повтор", его не учитываем
- В итоге построили биекцию

ч.т.д.

Предел последовательности

$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$



Для полосы сколь угодно малой ширины, построенной вокруг предела, существует номер, начиная с которого все точки попадут в эту полосу

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon}$$

$\{x_n\}$ – **сходящаяся** последовательность, если $a \in \mathbb{R}$

Альтернатива: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$ для любого $\varepsilon>0$ вне полосы $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ лежит лишь конечное число членов $\{x_n\}$

💥 CRASH TEST 💥

$\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \cancel{\geq} N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ 👌

$\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ 👌

$\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n - a| \leq \varepsilon$ 👌

Бесконечные пределы

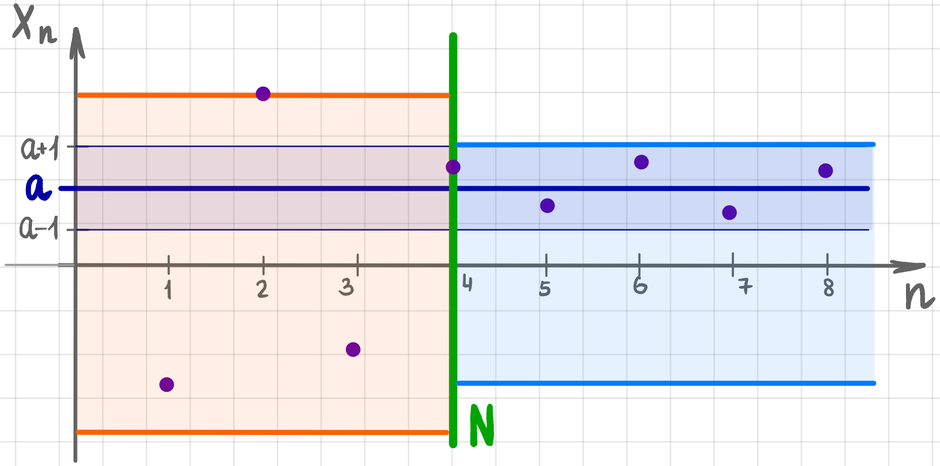
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \hookrightarrow x_n > \frac{1}{\varepsilon}$ $\qquad 3^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \hookrightarrow x_n < -\frac{1}{\varepsilon}$ $\qquad -3^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ $\qquad (-3)^n$

беск. большая послед.

Теорема: сходящаяся последовательность ограничена



$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$$

сходимость $\downarrow$ $\not\uparrow$ $(-1)^n$ ограниченность

$\exists C: \forall n \hookrightarrow |x_n| \leqslant C$

$\varepsilon = 1 \ \exists N: \forall n \geqslant N \hookrightarrow |x_n - a| < 1$

$|x_n| = |x_n - a + a| \leqslant |x_n - a| + |a|$ ← нер-во $\triangle$

Итак, $\forall n \geqslant N \hookrightarrow |x_n| \leqslant 1 + |a|$ (После черты 👌)

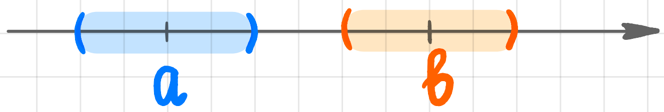
До черты число элементов конечное $\Rightarrow$

$\forall n < N \hookrightarrow |x_n| \leqslant \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|\}$

Итого, $\forall n \hookrightarrow |x_n| \leqslant \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, 1 + |a|\}$ ч.т.д.

Теорема: последовательность не может иметь более одного предела

Пусть предел не единственный: $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$



$\varepsilon = \frac{b-a}{4} \ \exists N_1: \forall n \geqslant N_1 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$

$\varepsilon = \frac{b-a}{4} \ \exists N_2: \forall n \geqslant N_2 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(b)$

$\exists N = \max\{N_1, N_2\}: \begin{cases} x_n \in U_\varepsilon(a) \\ x_n \in U_\varepsilon(b) \end{cases}$ — противоречие, т.к. $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$ ч.т.д.

Мы рассмотрели случай a, b – числа. С $\pm\infty$ аналогично: в этих случаях тоже можно выбрать $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$, а далее аналогично

Бесконечно малые последовательности (БМП)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \{\alpha_n\}$ – БМП

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - a) = 0$, т.е. $\{x_n - a\}$ – БМП

Например, $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$, $\alpha_n = \frac{\sin n}{n}$

Теорема: свойства БМП

1) если $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ – БМП, то $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ тоже БМП
2) если $\{\alpha_n\}$ – огр. последов., $\{\beta_n\}$ – БМП, то $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ тоже БМП

1) $\{\alpha_n\}$ – БМП $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \hookrightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\{\beta_n\}$ – БМП $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \hookrightarrow |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow |\alpha_n \pm \beta_n| \leq \underbrace{|\alpha_n|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|\beta_n|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$ ч.т.д.

2) $\{\alpha_n\}$ – огр. последов. $\Leftrightarrow \exists M : \forall n \hookrightarrow |\alpha_n| \leq M$

$\{\beta_n\}$ – БМП $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ $\Big]\times$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow |\alpha_n \beta_n| < \varepsilon$ ч.т.д.

Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, $b\neq 0$, $y_n \neq 0\ \forall n$, докажем, что $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – ограничена

$\varepsilon = \frac{|b|}{2}\ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow |y_n - b| < \frac{|b|}{2} \xrightarrow{\text{н-во } \triangle} |y_n| > \frac{|b|}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}$

$\left.\begin{array}{l} \forall n \geq N \text{ (после черты)} \hookrightarrow \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|} \\ \forall n < N \text{ (до черты)} \hookrightarrow \frac{1}{|y_n|} \leq \max\left\{\frac{1}{|y_1|}, \frac{1}{|y_2|}, \dots, \frac{1}{|y_{N-1}|}\right\} \end{array}\right] \Rightarrow \forall n \hookrightarrow \frac{1}{|y_n|} \leq \max\left\{\frac{1}{|y_1|}, \frac{1}{|y_2|}, \dots, \frac{1}{|y_{N-1}|}, \frac{2}{|b|}\right\}$

Арифметические свойства предела последовательности

Теорема: пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b \in \mathbb{R}$, тогда,

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = a\cdot b$ 3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $y_n \neq 0\ \forall n$

1) $\{(x_n \pm y_n) - (a \pm b)\} = \{\underbrace{(x_n - a)}_{\text{БМП}} \pm \underbrace{(y_n - b)}_{\text{БМП}}\}$ – БМП $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$

2) $\{x_n \cdot y_n - a\cdot b\} = \{x_n \cdot y_n - x_n b + x_n b - a\cdot b\} = \{\underbrace{x_n \cdot (y_n - b)}_{\text{огр.}\cdot\text{БМП}} + b\underbrace{(x_n - a)}_{\text{БМП}}\}$ – БМП $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = a\cdot b$

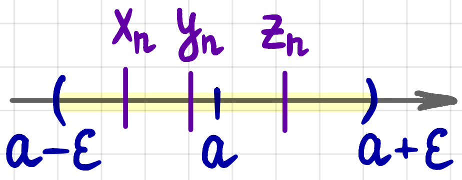
3) $\left\{\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right\} = \left\{\frac{b - y_n}{y_n \cdot b}\right\} = \left\{\underbrace{\frac{1}{y_n b}}_{\text{огр.}} \cdot \underbrace{(b - y_n)}_{\text{БМП}}\right\}$ – БМП $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$, $\frac{x_n}{y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{a}{b}$ по свойству 2)

Свойства предела последовательности, связанные с неравенствами

Теорема о 👮👮: Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$, $\exists N_0: \forall n \geq N_0 \hookrightarrow x_n \leq y_n \leq z_n$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a,\ a\in\mathbb{R}$

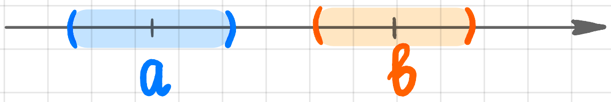
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \hookrightarrow z_n \in U_\varepsilon(a)$$



$$\exists N = \max\{N_1, N_2, N_0\}\quad \forall n \geq N \hookrightarrow \begin{cases} x_n \in U_\varepsilon(a) \\ z_n \in U_\varepsilon(a) \\ x_n \leq y_n \leq z_n \end{cases} \Rightarrow y_n \in U_\varepsilon(a)$$ ч.т.д

Теорема: пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, $a<b$, тогда $\exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow x_n < y_n$



Мы рассмотрели случай a, b – числа. С $\pm\infty$ аналогично: в этих случаях тоже можно выбрать $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$, а далее аналогично

$\varepsilon = \frac{b-a}{4}$ $\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$

$\varepsilon = \frac{b-a}{4}$ $\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \hookrightarrow y_n \in U_\varepsilon(b)$

$\exists N = \max\{N_1, N_2\}: \begin{cases} x_n \in U_\varepsilon(a) \\ y_n \in U_\varepsilon(b) \end{cases}$, $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing \Rightarrow$
$\Rightarrow x_n < y_n$ ч.т.д.

Теорема: пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, $\exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \leq y_n$, тогда $a \leq b$

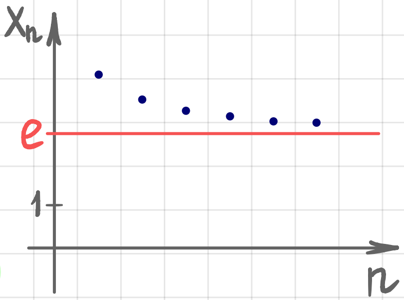
Пусть $b<a$, но тогда $\exists N_1: \forall n \geq N_1 \hookrightarrow y_n < x_n$ – противоречие ч.т.д.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$x_1=4$, $x_2\approx 3{,}37$, $x_3\approx 3{,}16$, ...

Очевидно: $x_n\geq 1$, $\{x_n\}$ огр. снизу

Н-во Бернулли: $\{x_n\}$ монот. убыв.



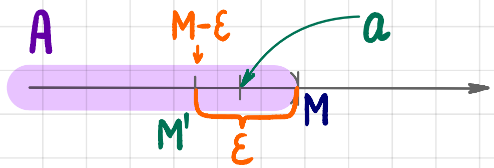
Ожидание: есть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

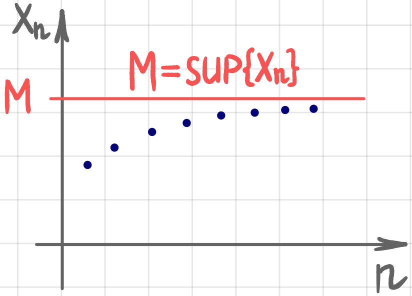
Реальность: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

Число Эйлера $e\approx 2{,}718$

Теорема Вейерштрасса: пусть $\{x_n\}$ ограничена снизу (сверху) и монотонно убывает (возрастает), тогда есть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\inf\{x_n\}$ $(\sup\{x_n\})$

$$\sup A=M \Leftrightarrow \begin{cases}\forall a\in A \hookrightarrow a\leq M\\ \forall M'<M\ \exists a\in A: a>M'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\forall a\in A\hookrightarrow a\leq M\\ \forall \varepsilon>0\ \exists a\in A: a>M-\varepsilon\end{cases}$$





$\forall\varepsilon>0\ \exists N: x_n>M-\varepsilon$

Но $\{x_n\}$ возрастает

$\Downarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n\geq N \hookrightarrow x_n>M-\varepsilon$

При этом $\forall n$, в т.ч. $\forall n\geq N\hookrightarrow x_n\leq M$

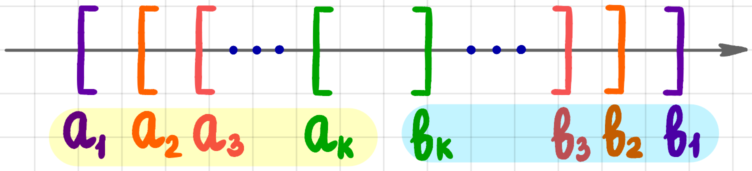
$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n\geq N\hookrightarrow x_n\in U_\varepsilon(M)$ ч.т.д.

Примечание 1: монотонность можно требовать лишь с некоторого номера

Примечание 2: $\{x_n\}$ возр. и НЕ огран. сверху $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$

$\{x_n\}$ убыв. и НЕ огран. снизу $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=-\infty$

$\Rightarrow$ любая монотонная последов. имеет предел



$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\ldots\supset[a_k,b_k]\supset\ldots$

Система **вложенных** отрезков

Если $b_k-a_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$, то ещё и **стягивающихся**

Теорема Кантора: 1) система вложенных отрезков имеет общую точку
2) если она ещё и стягивающаяся, то такая точка одна

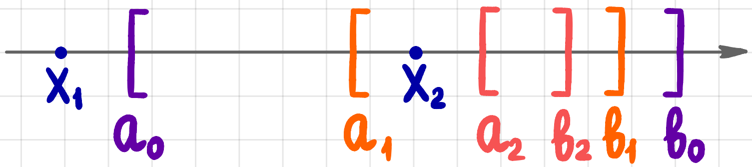
1) A – мн-во левых концов $\quad\forall a\in A,\ \forall b\in B\hookrightarrow a\leq b$
B – мн-во правых концов $\quad$ 👑 16-ая 👑 : $\exists c\in\mathbb{R}:\forall a\in A,\ \forall b\in B\hookrightarrow a\leq c\leq b$

2) Пусть не одна: c и d $\quad 0\leq|c-d|\leq \underset{0}{\underbrace{b_n-a_n}}\Rightarrow c=d$ ч.т.д

Теорема: множество $\mathbb{R}$ несчетно

Пусть счётно:

$\mathbb{R}$	x_1	x_2	x_3	x_4	...
N	1	2	3	4	...



1) $[a_1,b_1]\subset[a_0,b_0]$ и $x_1\notin[a_1,b_1]$

2) $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$ и $x_2\notin[a_2,b_2]$

. . . .

n) $[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$ и $x_n\notin[a_n,b_n]$

По теор. Кантора $\exists c\in\mathbb{R}\in[a_n,b_n]$

c нет в таблице ч.т.д

$\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, \dots$

$\{x_{n_k}\}: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, \dots$

$\hookrightarrow 1, 4, 5, 7, 8, \dots$

$n_1\ n_2\ n_3\ n_4\ n_5$

$\{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность

n_k – строго возраст. последов. натуральных чисел

$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}$ – частичный предел

Теорема (критерий ч.п.): a – ч.п. $\{x_n\} \Leftrightarrow$ в любой окр. a беск. много элементов

1) $\Rightarrow$ Пусть a – ч.п.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall k \geq N \hookrightarrow x_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$ → в $U_\varepsilon(a)$ ∞ много эл-тов $\{x_{n_k}\}$

$\Downarrow$

в $U_\varepsilon(a)$ ∞ много эл-тов $\{x_n\}$ ч.т.д.

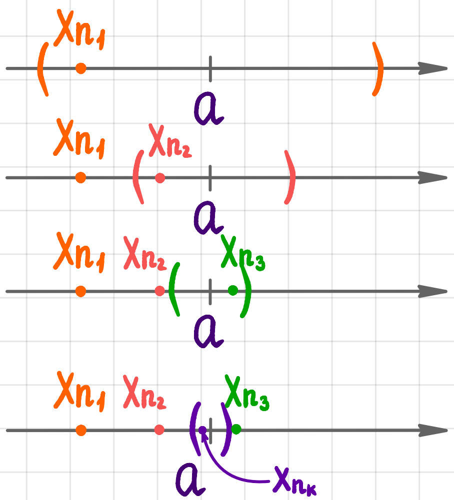
2) $\Leftarrow$ Пусть в любой $U_\varepsilon(a)$ ∞ много эл-тов $\{x_n\}$

$\varepsilon = 1$ x_{n_1}

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ x_{n_2} → $n_2 > n_1$, такой элемент есть, т.к. в $U_\varepsilon(a)$ ∞ много эл-тов (и вообще $\forall \varepsilon > 0\ \forall n_i\ \exists n_j \geq n_i : x_{n_j} \in U_\varepsilon(a)$)

$\varepsilon = \frac{1}{3}$ x_{n_3} $n_3 > n_2$

$\varepsilon = \frac{1}{k}$ x_{n_k} $n_k > n_{k-1}$



Руками построили подпоследов.

$a - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a + \frac{1}{k} \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = a$ ч.т.д.

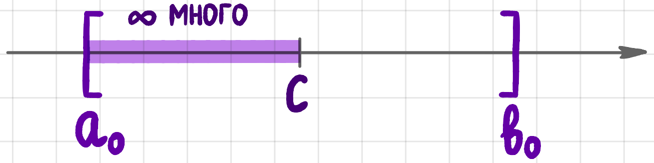
Теорема: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow a$ – единственный ч.п.

Вне $\forall U_\varepsilon(a)$ лишь конечное число эл-тов $\{x_n\} \Rightarrow$ вне $\forall U_\varepsilon(a)$ лишь конечное число эл-тов $\forall \{x_{n_k}\}$ ч.т.д.

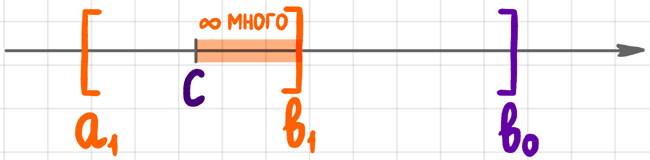
Теорема Больцано-Вейерштрасса: в любой ограниченной последов. можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Пусть $\forall n \ x_n \in [a_0, b_0]$

1) $[a_0, b_0]$ делим пополам, $[a_0, c] \hookrightarrow [a_1, b_1]$



2) $[a_1, b_1]$ делим пополам, $[c, b_1] \hookrightarrow [a_2, b_2]$



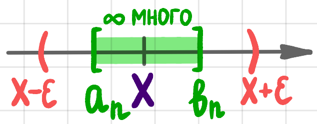
и так далее...

Получаем $[a_n, b_n]$ – систему вложенных стяг. отрезков

По теор. Кантора $\exists! \, x \in \mathbb{R} \in [a_n, b_n]$

Это и есть частичный предел

x – ч.п., если $\forall \varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(x)$ ∞ эл-тов



$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n: b_n - a_n < \varepsilon$, т.е.

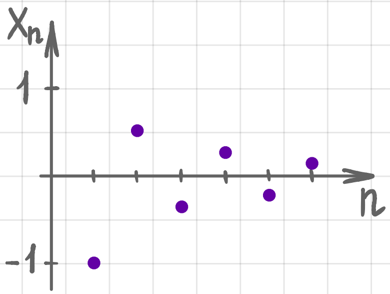
$[a_n, b_n] \subset U_\varepsilon(x) \Rightarrow$ в $U_\varepsilon(x)$ ∞ эл-тов ч.т.д.

Если последовательность $\{x_n\}$ – неограничена сверху, $\exists$ ч.п. $= +\infty$; неограничена снизу, $\exists$ ч.п. $= -\infty$

Теорема: a – единственный ч.п. $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$

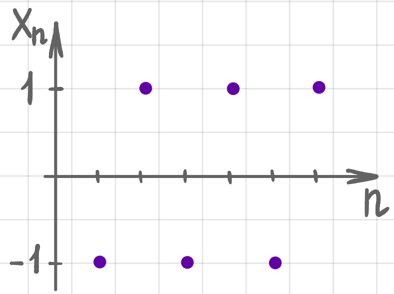
Пусть $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \neq a$, т.е. $\exists \varepsilon > 0$: вне $U_\varepsilon(a)$ бесконеч. число эл-тов $\{x_n\}$. Построим подпосл. $\{x_{n_k}\}$ из этих эл-тов. У $\{x_{n_k}\}$ есть ч.п. $b \neq a$, т.к $\forall k \ x_{n_k} \notin U_\varepsilon(a)$, противоречие ч.т.д.

А) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$



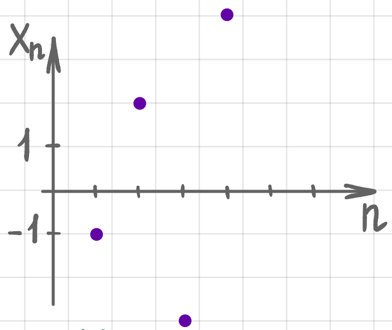
сходится
фундамент.
ограничена

Б) $x_n = (-1)^n$



не сходится
не фундамент.
ограничена

В) $x_n = (-1)^n \cdot n$



не сходится
не фундамент.
не ограничена

$\{x_n\}$ фундаментальна $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n, m \geq N_\varepsilon \hookrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$

$\{x_n\}$ не фундамент. $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall N\ \ \exists n, m \geq N : |x_m - x_n| \geq \varepsilon$

Если $\{x_n\}$ фундаментальна, то она ограничена

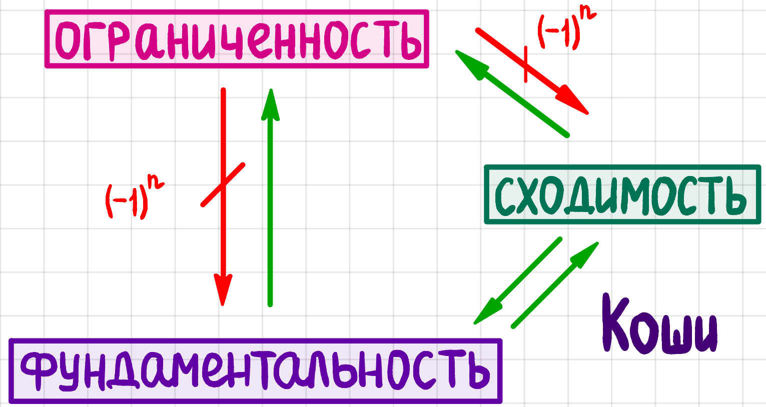
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m \geq N \hookrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$

$\varepsilon = 1$ $\qquad$ $m = N$

$\forall n \geq N \hookrightarrow |x_N - x_n| < 1 \Rightarrow |x_n| < 1 + |x_N|$ (после черты)

$\forall n < N \hookrightarrow |x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|\}$ (до черты)

Итого, $\forall n \hookrightarrow |x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\}$ ч.т.д.



Теорема (критерий Коши): $\{x_n\}$ фундаментальна $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ сходится

1) $\Leftarrow$ Пусть $\{x_n\}$ сходится, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, покажем, что $\{x_n\}$ фундаментальна

$\forall \varepsilon>0\ \exists N:$ $\forall n \geqslant N \hookrightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall m \geqslant N \hookrightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ч.т.д.

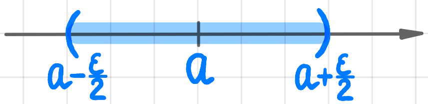
2) $\Rightarrow$ Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна, покажем, что $\{x_n\}$ сходится

фундаментальна $\Rightarrow$ ограничена $\overset{\text{Б.-В.}}{\Rightarrow}$ есть конечный частичный предел $a \in \mathbb{R}$

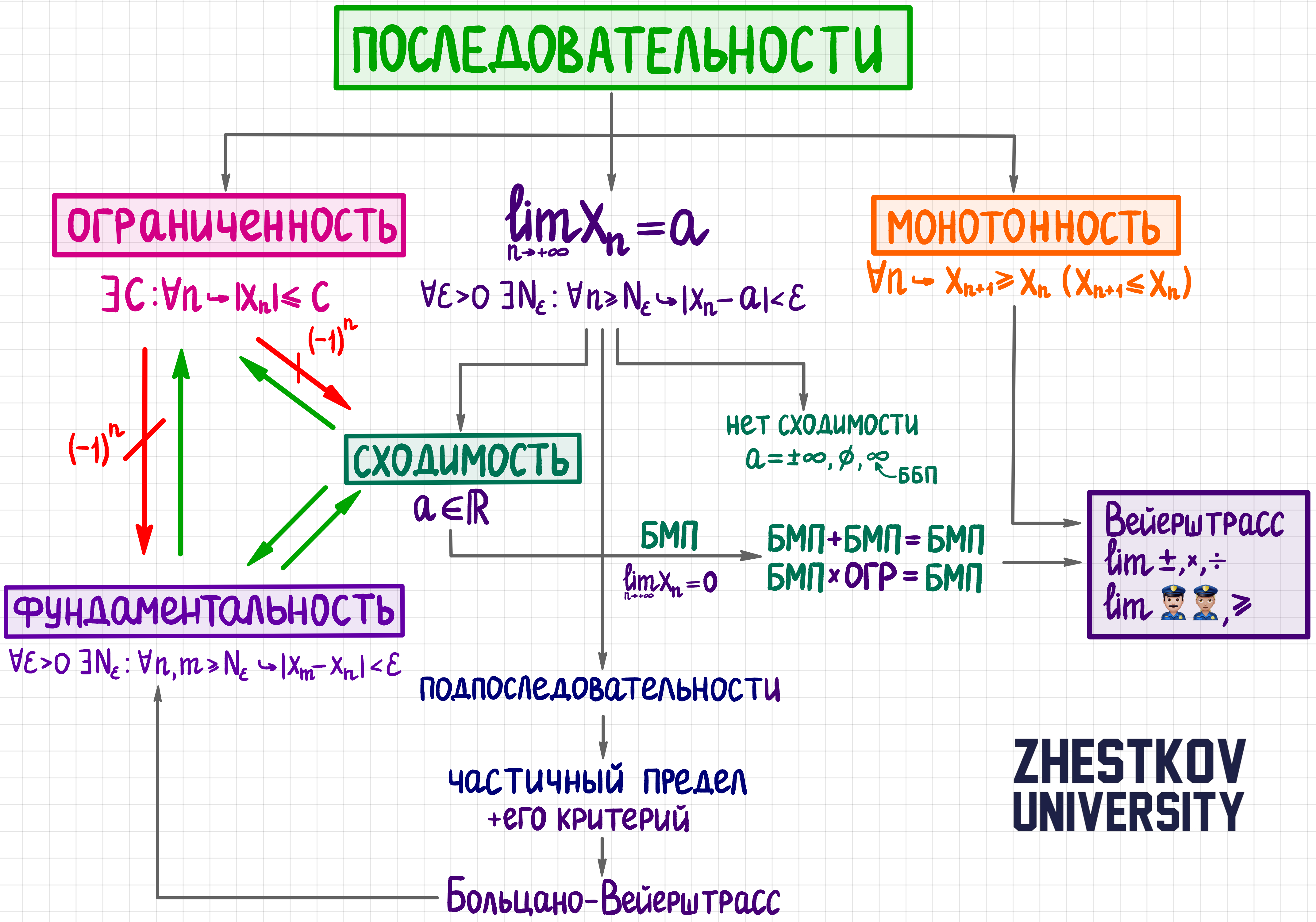
Покажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n \geqslant N \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Фундаментальность: $\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n, \underset{}{\overset{M}{\underset{=}{m}}} \geqslant N \hookrightarrow |x_n - x_{\underset{M}{m}}| < \frac{\varepsilon}{2}$

Критерий ч.п.: $\forall \varepsilon>0\ \exists \infty$ много эл-тов в $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \Rightarrow \exists M \geqslant N: |x_M - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

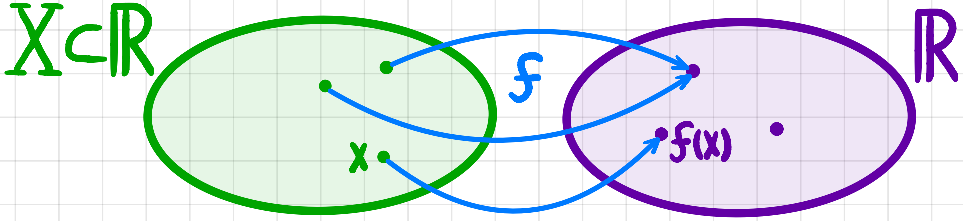


$\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n \geqslant N \hookrightarrow |x_n - a| = |(x_n - x_M) + (x_M - a)| \leqslant |x_n - x_M| + |x_M - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ч.т.д.



ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
ОГРАНИЧЕННОСТЬ
$\exists C : \forall n \hookrightarrow |x_n| \leq C$
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$
МОНОТОННОСТЬ
$\forall n \hookrightarrow x_{n+1} \geq x_n\ (x_{n+1} \leq x_n)$
$(-1)^n$
$(-1)^n$
СХОДИМОСТЬ
$a \in \mathbb{R}$
нет сходимости
$a = \pm\infty, \varnothing, \infty$ ББП
Вейерштрасс
lim ±, ×, ÷
lim 👮👮, ≥
БМП
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$
БМП + БМП = БМП
БМП × ОГР = БМП
ФУНДАМЕНТАЛЬНОСТЬ
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n, m \geq N_\varepsilon \hookrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$
подпоследовательности
частичный предел
+его критерий
Больцано-Вейерштрасс
ZHESTKOV
UNIVERSITY

Функция — правило, по которому каждому числу из $X \subset \mathbb{R}$ ставится в соответветствие единственное число из $\mathbb{R}$

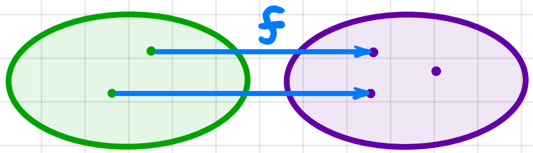


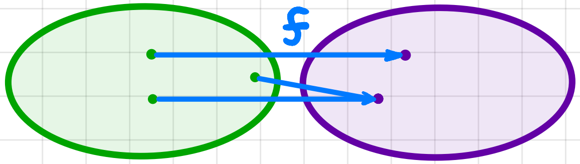
$f: X \to \mathbb{R}$

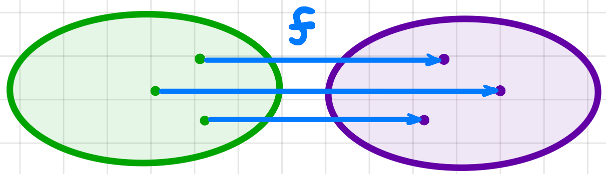
$f(X) = E(y)$ — множество значений

x — прообраз $\quad f(x)$ — образ

инъекция: $x_1 \neq x_2 \Downarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $\quad$ сюръекция: $f(X) = \mathbb{R}$ $\quad$ биекция: инъек. + сюр.







Свойства:

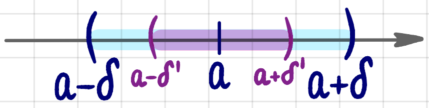
1°) $f(x)$ монот. возр. на X, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \mapsto f(x_1) < f(x_2)$

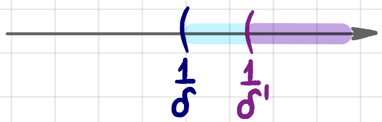
2°) $f(x)$ ограничена на X, если $\exists M: \forall x \in X \mapsto |f(x)| \leq M$

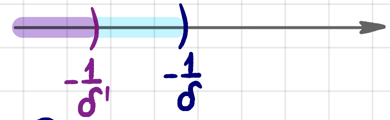
Окрестности

Обычная $\quad U_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) \quad U_\delta(+\infty) = (\frac{1}{\delta}; +\infty) \quad U_\delta(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\delta})$

$\delta' < \delta$

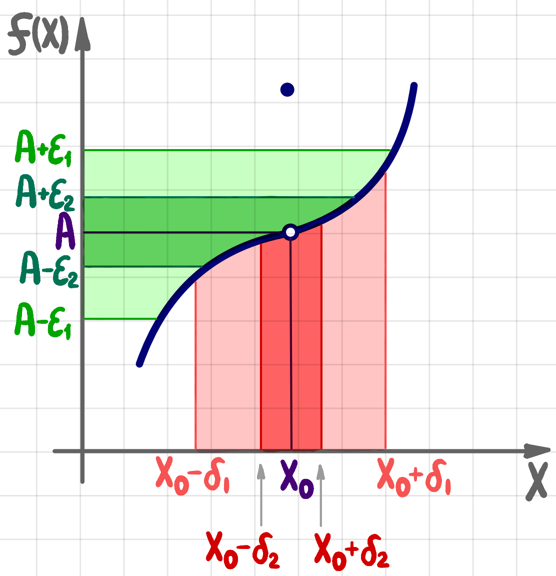






Проколотая $\quad \mathring{U}_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \quad \mathring{U}_\delta(+\infty) = (\frac{1}{\delta}; +\infty) \quad \mathring{U}_\delta(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\delta})$

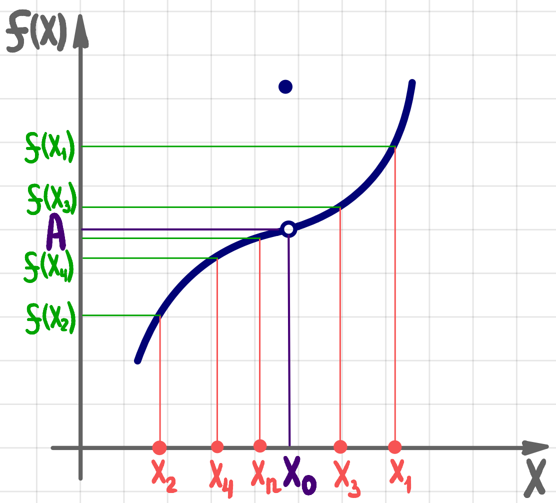
Основа: $f(x): X \to \mathbb{R}$, $\exists \delta_0 > 0: \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \subset X$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$ $\quad (\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$



Для зелёной полосы любой ширины существует розовая полоса такая, что для всех x из розовой полосы (кроме, быть может самой точки x_0) верно, что значения функции в них попадают в зелёную

Определение предела функции по Коши

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon \in (0, \delta_0]: \forall x \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$



Как бы мы не подбирались к точке x_0 (не попадая при этом в саму точку x_0), значения функции в этих точках будут подбираться к A

Определение предела функции по Гейне

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \text{ послед. Гейне } \begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \\ x_n \neq x_0, \forall n \end{cases} \hookrightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$$

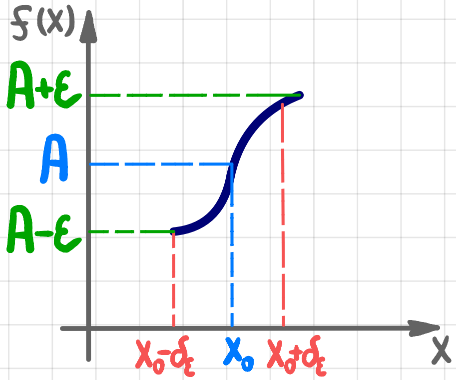
Теорема: Коши $\Leftrightarrow$ Гейне

$f(x): X \to \mathbb{R},\ \exists \delta_0 > 0: \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \subset X,\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}},\ A \in \overline{\mathbb{R}}$

1) Коши $\Rightarrow$ Гейне

Коши: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon \in (0, \delta_0]: \forall x \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Произв. посл. Гейне $\{x_n\}: \begin{cases} x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0 \\ x_n \neq x_0, \forall n \end{cases}$



$\forall \delta > 0\ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$

в том числе для $\delta = \delta_\varepsilon$ $\longrightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(A) \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = A$ ч.т.д.

2) Гейне $\Rightarrow$ Коши

Пусть не так и Гейне ✓, а Коши ✗

$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta \in (0, \delta_0]\ \exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0): f(x) \notin U_\varepsilon(A)$

$\delta_1 = \delta_0 \qquad \exists x_{\delta_1} = x_1: \quad f(x_1) \notin U_\varepsilon(A)$

$\delta_2 = \frac{\delta_0}{2} \qquad \exists x_{\delta_2} = x_2: \quad f(x_2) \notin U_\varepsilon(A)$

. . . .

$\delta_n = \frac{\delta_0}{n} \qquad \exists x_{\delta_n} = x_n: \quad f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$

. . . .

Построим послед. $\{x_n\}$

$x_n \in \mathring{U}_{\frac{\delta_0}{n}}(x_0) \Rightarrow x_n \neq x_0, \forall n$

$\underbrace{x_0 - \frac{\delta_0}{n}}_{\downarrow\, x_0} < x_n < \underbrace{x_0 + \frac{\delta_0}{n}}_{\downarrow\, x_0} \Rightarrow x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$

$\{x_n\}$ посл. Гейне, но $f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$,

т.е. $f(x_n) \not\xrightarrow[n \to +\infty]{} A$, противор., ч.т.д.

Арифметические свойства предела функции

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, тогда

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = a\pm b$ 2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = a\cdot b$ 3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{a}{b}$, $b\neq 0$

Лемма о сохранении знака

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $a\neq 0$. Тогда $\exists\delta : \forall x\in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x)$ тот же знак, что a

Свойства предела функции, связанные с неравенствами

1) Теорема о предельном переходе

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a\in\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b\in\overline{\mathbb{R}}$ и $\exists\delta>0: \forall x\in\mathring{U}_\delta(x_0)\hookrightarrow f(x)\leq g(x)$, то $a\leq b$

2) Теорема о 👮🏻‍♂️👮🏽

$$\left.\begin{array}{l}\text{Пусть } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a\in\mathbb{R} \\ \exists\delta>0: \forall x\in\mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)\hookrightarrow f(x)\leq g(x)\leq h(x)\end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$$

Для последовательностей было так:

$\{x_n\}$ фундаментальна $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon: \forall n,m \geq N_\varepsilon \hookrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$

Теорема (критерий Коши): $\{x_n\}$ фундаментальна $\Leftrightarrow \{x_n\}$ сходится

Для функций есть похожая история

Условие Коши $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon \in (0,\delta_0]: \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$

Теорема (критерий Коши): $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ выполнено условие Коши

$\Rightarrow$ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, покажем, что условие Коши ✓

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon \in (0,\delta_0]: \forall x \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

в частности $\forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow \begin{cases} |f(x_1) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |f(x_2) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

$|f(x_2) - f(x_1)| = |(f(x_2) - a) - (f(x_1) - a)| \leq |f(x_2) - a| + |f(x_1) - a| < \varepsilon$ ч.т.д.

$\Leftarrow$ Пусть выполнено условие Коши, то есть

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon \in (0,\delta_0]: \forall x_1,x_2 \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow |f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$. Покажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\in\mathbb{R}$

Рассмотрим произв. посл. Гейне $\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \\ x_n\neq x_0, \forall n \end{cases} \longrightarrow \forall\delta>0\ \exists N: \forall n\geq N \hookrightarrow x_n\in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$

в том числе для $\delta=\delta_\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n\geq N, \forall k\geq N \hookrightarrow x_n, x_k \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$, а значит $|f(x_n)-f(x_k)|<\varepsilon$

$\Rightarrow f(x_n)$ – фундам. $\Rightarrow$ по крит Коши для послед $f(x_n)$ сходится для $\forall\{x_n\}$ посл. Гейне. Но этого **мало**! Вдруг $f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $f(y_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} b\neq a$

(Кр. Коши для послед. **гарант**. сходимость, но не говорит к чему)

Покажем, что если для $\forall\{x_n\}$ посл. Гейне $\hookrightarrow f(x_n)$ сходятся, то сходятся они к одному и тому же числу a.

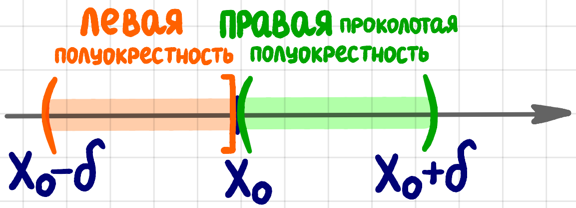
Пусть $f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $f(y_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} b$. Покажем, что $a=b$

Составим послед. $z_n: \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots\}$ – последов. Гейне $\Rightarrow f(z_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} M$

$f(z_n): \{f(x_1), f(y_1), \dots f(x_n), f(y_n), \dots\}$, т.е. $f(x_n), f(y_n)$ – подпослед. $f(z_n)$

Но $f(z_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} M$, а значит все ч.п. равны M, в том числе $f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} M$, $f(y_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} M$

ч.т.д.



Предел справа по Коши $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) = a$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon \in (0,\delta_0]: \forall x \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0+0) \hookrightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$

$U_\delta(x_0-0)$ $\quad \mathring{U}_\delta(x_0+0)$

$x\in(x_0-\delta, x_0]$ $\quad x\in(x_0, x_0+\delta)$

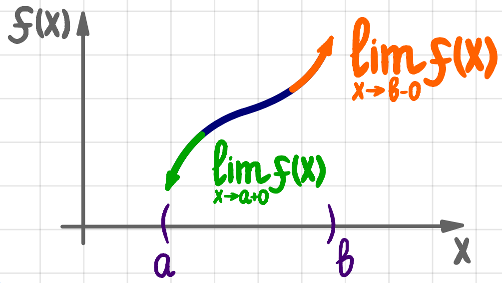
Предел слева по Гейне $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = b$

$\forall$ послед. Гейне $\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \\ x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0-0), \forall n \end{cases} \hookrightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$

Теорема об одностносторонних пределах. Пусть f опред. в $\mathring{U}_\delta(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$

тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = a$

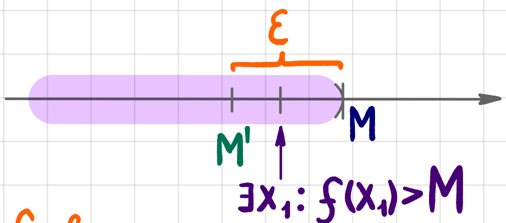
Теорема: пусть $f(x)$ возр. на (a,b), тогда $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \sup\limits_{(a,b)} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf\limits_{(a,b)} f(x)$



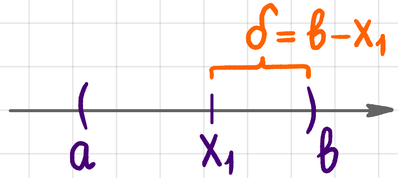
Пусть $M = \sup\limits_{(a,b)} f(x)$

$\forall\varepsilon>0\ \exists x_1\in(a,b): M-\varepsilon < f(x_1)$ (sup 2°)

При этом $\forall x\in(x_1,b) \hookrightarrow \begin{cases} f(x) \geq f(x_1) & (\uparrow\uparrow) \\ f(x)\leq M & (\sup 1^\circ) \end{cases}$



$\forall\varepsilon>0\ \exists x_1\in(a,b): \forall x\in(x_1,b) \hookrightarrow M-\varepsilon < f(x) \leq M$

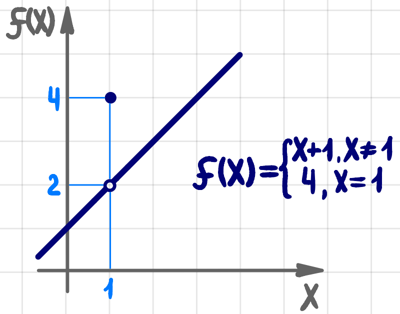


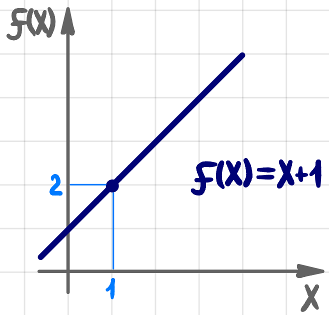
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x\in\mathring{U}_\delta(b-0) \hookrightarrow U_\varepsilon(M)$ ч.т.д.

Непрерывность функции в точке

$f(x): X \to \mathbb{R},\ \exists \delta_0 > 0: U_{\delta_0}(x_0) \subset X,\ x_0 \in \mathbb{R}$

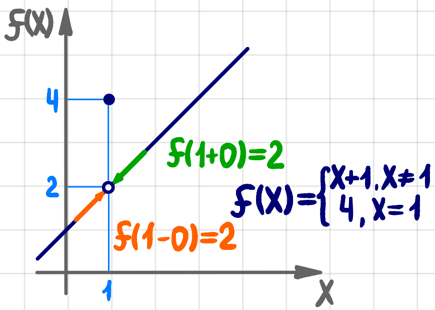
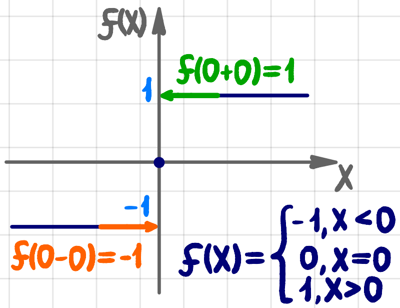
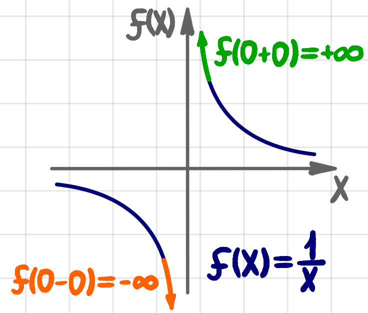
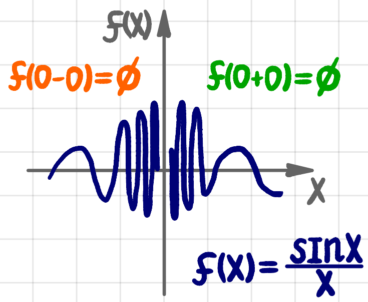
$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$





Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon \in (0, \delta_0]: \forall x \in U_{\delta_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

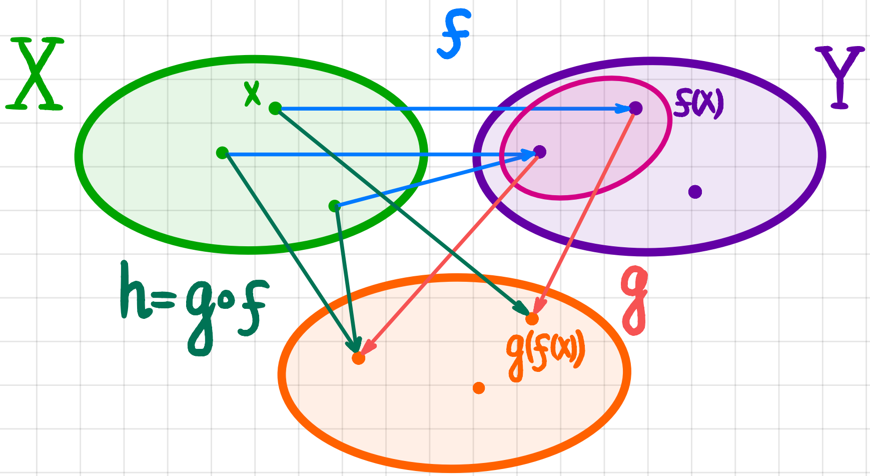
Гейне: $\forall$ послед. Гейне $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \hookrightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$

Устранимый разрыв	Разрыв I рода	Разрыв II рода
$\underbrace{f(x_0-0)}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{f(x_0+0)}_{\in \mathbb{R}}$ 	$\underbrace{f(x_0-0)}_{\in \mathbb{R}} \neq \underbrace{f(x_0+0)}_{\in \mathbb{R}}$ 	$\underbrace{f(x_0-0)}_{= +\infty \setminus -\infty}$ или $\underbrace{f(x_0+0)}_{= +\infty \setminus -\infty}$ или $\nexists f(x_0-0)$ или $\nexists f(x_0+0)$  

Если $f(x)$, $g(x)$ непр. в x_0, то $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x_0) \neq 0$) тоже непр. в x_0

Если $f(x)$ непр. в x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то $\exists \delta: \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x)$ тот же знак, что $f(x_0)$

Если $f(x)$ непр. в x_0, то $\exists \delta, M: \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x)| \leq M$ (ограниченность)



$f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$ и $f(X) \subset Y$

$h(x) = g(f(x))$ – сложная функция, $h: X \to \mathbb{R}$

Например, $h_1(x) = \sin x^2$, $h_2(x) = \operatorname{tg}^3 x$, $h_3(x) = \ln(x^2+4)$

g – внешняя функция, f – внутренняя функция

Теорема (непрерывность сложной функции): пусть $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$, $f(X) \subset Y$, $f(x)$ непр. в x_0, $g(y)$ непр. в $y_0 = f(x_0)$. Тогда $g(f(x))$ непр. в x_0

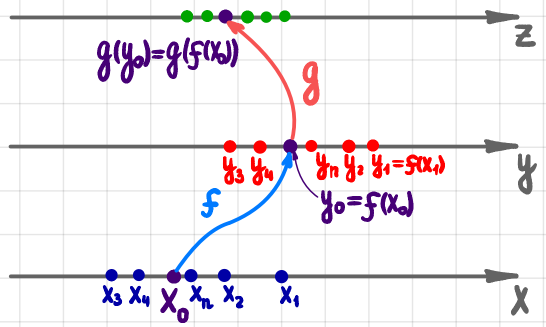
Рассмотрим произв. посл. Гейне $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$,

для неё $\underbrace{f(x_n)}_{=y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{f(x_0)}_{=y_0}$, т.к. $f(x)$ непр. в x_0

Получим новую посл. Гейне $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_0$,

для неё $g(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(y_0)$, т.к. $g(y)$ непр. в y_0

или $g(f(x_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(f(x_0)) \Rightarrow g(f(x))$ непр. в x_0 ч.т.д.



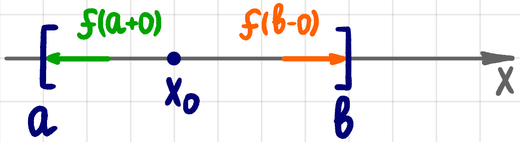
Без непр. ломается, но хватит $g(y)$ непр. в y_0 или $\exists \delta: \forall x \in U_\delta(x_0) \to f(x) \neq y_0$

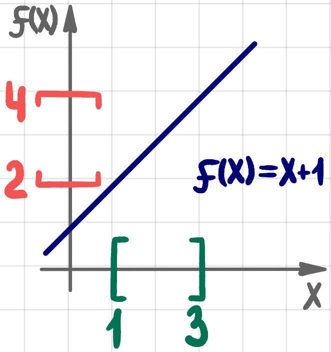
В терминах пределов $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \\ \lim\limits_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) \end{matrix}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$, т.е. $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = \lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))$

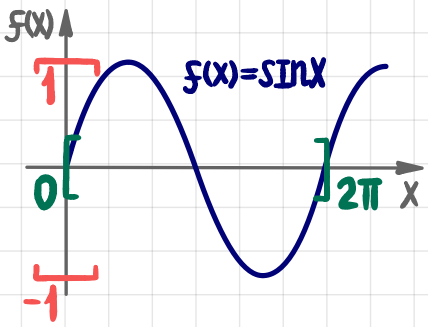
замена переменной

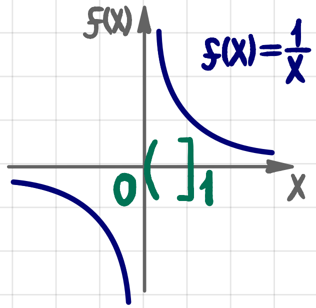
Непрерывность функции на отрезке

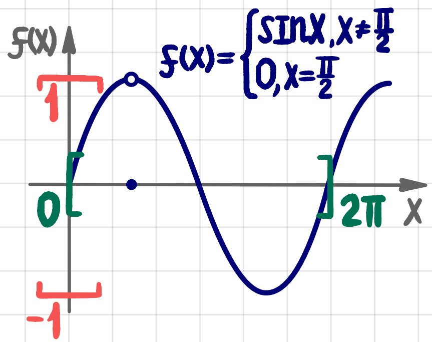
$$f(x) \text{ непрерывна на } [a,b] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ непрерывна справа в } x=a & f(a+0)=f(a) \\ f(x) \text{ непрерывна в } \forall x_0\in(a,b) & \\ f(x) \text{ непрерывна слева в } x=b & f(b-0)=f(b) \end{cases}$$

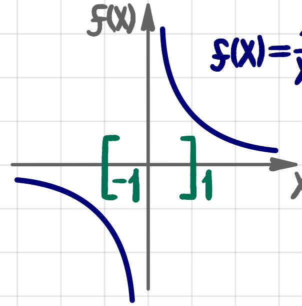












$[1,3]\xrightarrow[\text{непр.}]{f}[2,4]$ $[0,2\pi]\xrightarrow[\text{непр.}]{f}[-1,1]$ $(0,1]\xrightarrow[\text{непр.}]{f}[1,+\infty)$ $[0,2\pi]\xrightarrow[\cancel{\text{непр.}}]{f}[-1,1)$ $[-1,1]\xrightarrow[\cancel{\text{непр.}}]{f}(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

Есть ожидание, что $[\ ]\xrightarrow[\text{непр. на } [\ ]]{f}[\ ]$. Так и будет

Пусть $[\ ]\xrightarrow[\text{непр. на } [\ ]]{f}$ множество A. За три шага покажем, что A – отрезок

① A – ограниченное ② A содержит $\min A, \max A$ ③ A принимает все знач. от $\min A$ до $\max A$

Вейерштрасс I Вейерштрасс II Больцано-Коши

Теорема (Вейерштрасс I): пусть f непр. на $[a,b]$, тогда f огр. на $[a,b]$

Пусть не так и f неогр. на $[a,b]$

$\forall M>0\ \exists x\in[a,b]: |f(x)|>M$

$M_1=1\ \exists x_1\in[a,b]: |f(x_1)|>1$

$M_2=2\ \exists x_2\in[a,b]: |f(x_2)|>2$

. . . .

$M_n=n\ \exists x_n\in[a,b]: |f(x_n)|>n$

. . . .

$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in[a,b]: |f(x_n)|>n$

$f(x_n)$ – бесконечно большая послед.

$\{x_n\}$ огр., т.к. $\forall n \hookrightarrow x_n\in[a,b] \Rightarrow$ по теор Б.-В.

$\exists\{x_{n_k}\}$ – подпосл. $\{x_n\}: x_{n_k}\xrightarrow[n\to+\infty]{} C\in\mathbb{R}$

$\forall k \hookrightarrow a\le x_{n_k}\le b \Rightarrow C\in[a,b] \Rightarrow f(x_{n_k})\xrightarrow[k\to+\infty]{} f(C)\in\mathbb{R}$

т.к. f непр. на $[a,b]$

Но это противоречие, т.к. $|f(x_{n_k})|>n_k\ \forall k$, а значит у $\{f(x_{n_k})\}$ нет конеч. предела ч.т.д.

Теорема (Вейерштрасс II): пусть f непр. на $[a,b]$, тогда $f(x)$ достигает $\sup\limits_{[a,b]} f(x)$

Пусть $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Если $\exists x_0\in[a,b]: f(x_0)=M$ – победа. Пусть не так, тогда

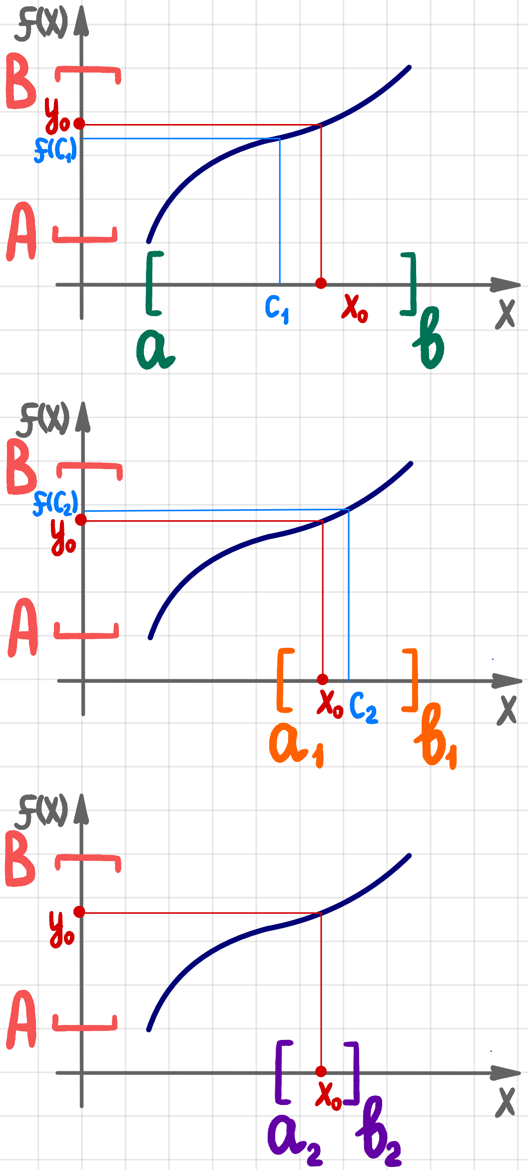
$\forall x\in[a,b] \hookrightarrow f(x)<M$. Пусть $g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$, $g(x)$ непр. на $[a,b]$ $\Rightarrow g(x)$ огр. на $[a,b]$, т.е.

как частное непр. ф-ций

$\exists M'>0: \forall x\in[a,b] \hookrightarrow g(x)\le M' \Leftrightarrow \dfrac{1}{M-f(x)}\le M' \Leftrightarrow f(x)\le M-\dfrac{1}{M'} \Rightarrow M\ne\sup\limits_{[a,b]} f(x)$ противоречие ч.т.д.

($\dfrac{1}{M'}>0$)

Теорема (Больцано-Коши): пусть f непр. на $[a,b]$, при этом $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A<B$. Тогда $\forall y_0\in[A,B]\ \exists x_0\in[a,b]:\ f(x_0)=y_0$



Пусть c_1 – середина $[a,b]$

- Если $f(c_1)=y_0$ – ПОБЕДА
- Если $f(c_1)<y_0$, то $[c_1,b]\to[a_1,b_1]$
- Если $f(c_1)>y_0$, то $[a,c_1]\to[a_1,b_1]$

Пусть c_2 – середина $[a_1,b_1]$, строим $[a_2,b_2]$

Продолжая аналогично строим систему вложенных стяг. отрезков

По теор. Кантора $\exists! c\in\mathbb{R}\in[a_n,b_n]$. Покажем, что $c=x_0$

$$\left.\begin{matrix} a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} c \\ b_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} c \end{matrix}\right|\ \left.\begin{matrix} a_k, b_k\in[a,b]\ \forall k \\ f \text{ непр. на } [a,b] \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} f(a_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c) \\ f(b_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c) \end{matrix}$$

По построению

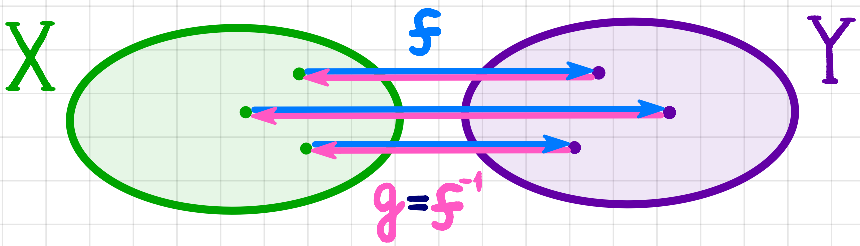
$$\begin{matrix} f(a_k) & < & y_0 & < & f(b_k) \\ \downarrow & & \| & & \downarrow \\ f(c) & & f(c) & & f(c) \end{matrix}$$

Ч.Т.Д.

Есть обобщение: пусть f непр. на (a,b), $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, $\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)=M\in\overline{\mathbb{R}}$, $\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)=m\in\overline{\mathbb{R}}$

Тогда $\forall y_0\in(m,M)\ \exists x_0\in(a,b):\ f(x_0)=y_0$

Обратная функция



$f: X \to Y$ $\quad f(X)=Y$ $\quad f$ – биекция

$f^{-1}: Y \to X$ $\quad f^{-1}(Y)=X$ $\quad f^{-1}$ – биекция

$f: X \to f(X)$

$g: f(X) \to X$

$$g=f^{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} f(g(y))=y & \forall y \in f(X) \\ g(f(x))=x & \forall x \in X \end{cases}$$

Пример: $X=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $\quad f(X)=[-1,1]$

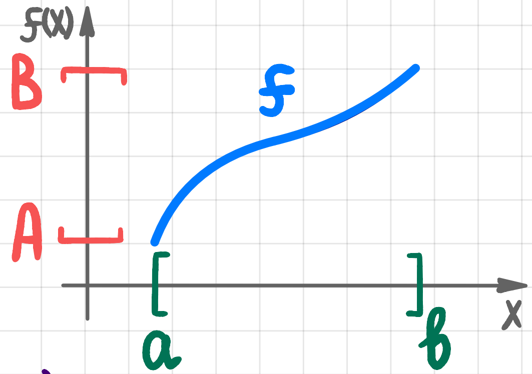
$f=\sin x$ $\quad g=\arcsin x$

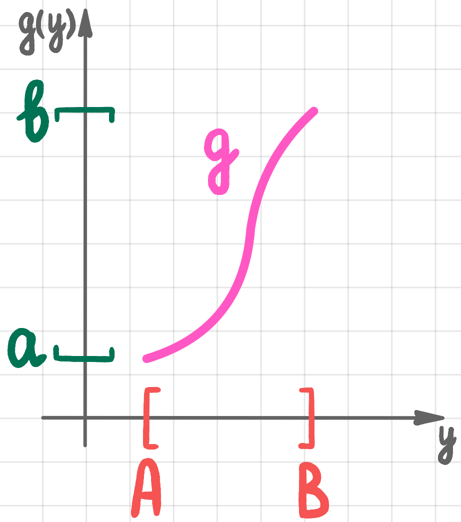
Теорема: пусть f непр. и строго возр. на $[a,b]$. Тогда существует $f^{-1}=g$ обратная функция тоже непр. и строго возр. на отрезке $[f(a),f(b)]$

Покажем $\exists f^{-1}$ Покажем, что f – биекция

сюръекция ✓ (Больцано-Коши)

инъекция ✓, т.к. если $x_1 \neq x_2$ $(x_1<x_2)$, то $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



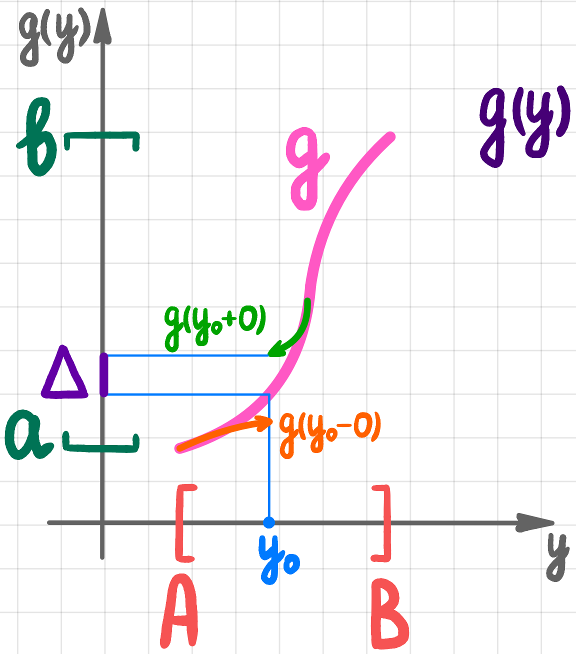


Покажем, что g строго возр.

Пусть нет и $\exists y_1, y_2$: $y_1 < y_2$, но $g(y_1) \geq g(y_2)$

$f(x_1)<f(x_2)$, но $x_1 \geq x_2$ противоречие, т.к. f строго возр. на $[a,b]$

Покажем, что g непр. на $[m,M]$



$$g(y)\text{ непр. на }[m,M] \Leftrightarrow \begin{cases} g(y)\text{ непр. справа в } y=m \\ g(y)\text{ непр. в } \forall y_0\in(m,M) \\ g(y)\text{ непр. слева в } y=M \end{cases}$$

← покажем это (остальное аналогично)

$$g(y)\text{ непр. в } \forall y_0\in(m,M) \Leftrightarrow \underbrace{g(y_0-0)}_{=\lim\limits_{y\to y_0-0} g(y)} = g(y_0) = \underbrace{g(y_0+0)}_{=\lim\limits_{y\to y_0+0} g(y)}$$

$g(y_0-0), g(y_0+0)$ существуют по теореме о $\lim$ монот. функций

Мы уже знаем, что $g(y_0-0)\le g(y_0)\le g(y_0+0)$, т.к. g строго возр.

Покажем, что строгие знаки недостижимы

Пусть $g(y_0)<g(y_0+0)$ ($g(y_0-0)<g(y_0)$ опровергается аналогично)

$$\begin{cases} \forall y\in[m,y_0] \hookrightarrow g(y)\le g(y_0) \\ \forall y\in(y_0,M] \hookrightarrow g(y)\ge g(y_0+0) \end{cases},$$ итак $\Delta=(g(y_0), g(y_0+0))\not\subset g([A,B])$, но по определению $g=f^{-1}$: $g([A,B])=(a,b)$ противоречие

ч.т.д.

Есть обобщение: пусть f непр. и строго возр. на $[a,b]$. Тогда существует $f^{-1}=g$ обратная функция тоже непр. и строго возр. на (m,M), где $m=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $M=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$

ФУНКЦИИ

$f: X \to \mathbb{R}$

инъекция
+
сюръекция
||
биекция

ограниченность
чётность
периодичность
монотонность

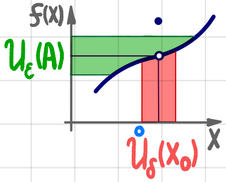
ZHESTKOV UNIVERSITY

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Гейне

Коши

$$\forall \{x_n\}: \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \\ x_n \neq x_0, \forall n \end{cases} \hookrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A$$



f непр.

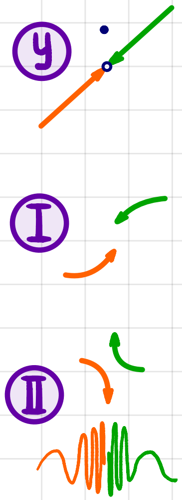
в x_0

да

непр. $\pm, \times, \div$

непр. $g(f(x))$

нет



(у) $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, $\in \mathbb{R}$, $\in \mathbb{R}$

(I) $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, $\in \mathbb{R}$, $\in \mathbb{R}$

(II) $f(x_0-0) / f(x_0+0)$, $= +\infty \backslash -\infty$, $= +\infty \backslash -\infty$; $f(x_0-0) / f(x_0+0)$, $= \varnothing$, $= \varnothing$

на $[a,b]$

Вейерштрасс I — [ ]

Вейерштрасс II — $f \downarrow$ непр. на [ ]

Больцано-Коши — [ ]

Теорема о $\exists f(x_0 \pm 0)$

$\lim \pm, \times, \div$

$\lim$ 👮‍♂️👮, $\geq$

Критерий Коши

$f(x_0+0)$

$f(x_0-0)$

Теорема о f^{-1}

Приходите к нам учиться! Мы решим ваши проблемы с вышматом

У нас есть курсы в записи, а ещё мы организуем групповые и индивидуальные занятия. Мы делаем всё для того, чтобы учёба приносила удовольствие и радость познания

Наша группа VK: Zhestkov University

Для записи и по вопросам пишите в сообщения группы

ZHESTKOV UNIVERSITY

Сергей Жестков — автор курсов Zhestkov University

11 лет опыта преподавания

@s_zhestkov

2011–2018 ЗФТШ МФТИ
2016–2021 Физтех-Лицей им. Капицы
2016–2018 Phystech.International, Наука в регионы
2015–2019 МФТИ, преподаватель года 2016, 2017
2020 – +∞ Zhestkov University

Образование должно быть с улыбкой!