

Консультация

Действительных чисел / арифмет. операций **нет**

1) Теорема о ТВГ (Дедекинда считать известными)

2) Счетность мн-ва \mathbb{Q} -чисел и несчетность \mathbb{R} -чисел

Через Кантора (через представления не стоит)

3) Предел числовой последовательности.

Единственность предела

Св-ва, связанные с неравенствами (пределный переход в неравенствах
лемма о сохр. знака
теорема о 2-х милиу.)

4) Св-ва \lim последовательностей

Арифметические операции со сходящ. последовательностями

5) Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности

Доказывать в одну сторону

Пусть x_n возрастает (+нестро) и ограничена сверху, тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup x_n$

Если x_n возрастает и неограничена сверху, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (лучше не писать, и так спросят)

Тактика от Петровна: никогда не отвечать сразу, иначе экзаменатор перестанет спрашивать

6) Число e (тупой)

7) Теорема Кантора о вложенных отрезках

Пусть $\Delta_n = [a_n, b_n]$, $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots$

1) сущ. общая точка для всех отрезков

2) если $b_n - a_n \rightarrow 0$, то эта общая точка C единственная

При этом $C = \sup a_n = \inf b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

• верна ли для интервалов? Нет, например $(0, \frac{1}{n})$

$\sup \neq$ интервал

8) Частичные пределы. (опрег. подпослед., част. предела $(\mathbb{R}, +\infty, -\infty)$, критерий част. пред.)

Теорема Фольцано-Вейерштрасса

Подпослед.: x_{n_k} , n_k строго возрастает

Част. пред.: предел подпоследоват.

Критерий: можно только для $a \in \mathbb{R}$

9) Критерий Коши существования конечного предела последовательности.

Теорема о единственности последнего предела - могут попросить доказать

10) Коши \Leftrightarrow Рейне (можно только для \mathbb{R})

11) Критерий Коши существования конечного предела функции

При доказательстве достаточности можно доказать существование послед. Рейне,
нужно еще доказать, что предел один и тот же Рейне

12) Определение непрерывности функции в точке (по Коши по Рейне, одностронние непер., связь с обычной, разрывы)
Св-ва непер. функций (арифм. операции, лемма о сохр. знака,
Непер. сложной функцией

Переход к пределу под знаком непер. функции (доказать).

13) Теорема об односторонних пределах монотонной функции.

Разрывы монотонной функции.

Пусть $f(x)$ возрастает на (a, b) , тогда $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \sup_{(a, b)} f(x)$

Во многих курсах формулируется иначе

Обязательно 1 рода, неустранимый, счетное мн-во

14) Теоремы Вейерштрасса о функциях, непер. на отрезке

Стоит показать контр-примеры

15) Теорема о промежуточных значениях (сначала теорему Больцано-Коши)

16) Теорема об обратной функции (сначала 2 леммы)

17) Определение и св-ва показательной функции

Определение a^x , корректность: сущ, един, представ.

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n}, \quad q_n \rightarrow x$$

$$a^x > 0, \quad a^x \uparrow \text{ при } a > 1$$

$$\text{непрерывность, } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} a^x$$

5 свойств

"Хорошо отвечает \Leftrightarrow хороший человек"

18) Заменяемые пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

19) Теорема Кантора о РН

20) Производная ср-ции в точке

Односторонняя производная

Дифференц. в точке

Связь непрерыв. и дифференц. (дифференц. \Leftrightarrow контину. производная)

Геометрический смысл производной и дифференциала

21) Производная суммы, произведения, частного

22) Производная сложной функции

Инвариантность формы дифференциала ... замена переменных

23) Производная обратной функции

24) Производные элементарных функций

25) Производные высшего порядка, формула Лейбница

Дифференциал 2^{го} порядка

26) Функции, заданные параметрически и их дифференц. (Теорема о локальном представлении)

27) Теорема Ролля

28) Теорема Лагранжа и Коши

Коши Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) , причем $g'(x) \neq 0$

тогда $\exists \xi \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ (если $g(b) = g(a)$, то теорема Ролля)

Доказывать Коши через Лагранжа нельзя (и раз предупредил)

29) Теорема Лагранжа с остатком и теорема Пуанкаре

На письме так нельзя доказывать, т.к. верно только в окрестности нуля

30) Формула Лагранжа

31) Правило Лопиталя $\frac{0}{0}$

32) Правило Лопиталя $\frac{\infty}{\infty}$

можно и другие док-ва (тогда не к лектору)

33) Основные разложения по формуле Тейлора (забыл :))

$\sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}, e^x, (1+x)^a, \ln(1+x)$

Лемма единственности: ..., важно наличие n -ой производной ($f(x) = \begin{cases} x^3 \in \mathbb{Q} \\ 0 \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $f'''(0)$ не существует)

34) Необходимое условие монотонности

Достаточное условие монотонности

необх: Пусть $f(x)$ дифф на $(a;b)$ и I на $(a;b)$, тогда $f'(x) \geq 0$
(док-во по очр. производной)

дост: Пусть $f(x)$ непр на I , дифф во внутр. точках, тогда
 $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ монотонно возрастает (Лорант)

35) Теорема Ферма. Достаточное условие локального экстремума в терминах производной

36) Достаточное условие локального экстремума в терминах 2 и выше производных

37) Выпуклость и точки перегиба. Необх. и дост. условие выпуклости.

38) Оценка приращение вектор-функции через производную

39) Кривые на плоскости и пространстве

Плоские кривые, касательные

40) Длина кривой, производная переменный длины дуги

41) Естественный параметр, кривизна, формула для вычисления

42) Сопровождение трехгранник пространственной кривой