

Отчет о выполненной лабораторной работе 1.3.2

Антон Хмельницкий, Б01-306

November 28, 2023

Определение модуля кручения

1 Аннотация

Цель работы: измерение углов закручивания в зависимости от приложенного момента сил, определение модулей для проволоки по измерениям периодов крутильных колебаний подвешенного на ней маятника

Оборудование: проволока из исследуемого материала, грузы, секундомер, микрометр, рулетка, линейка.

2 Теоретические сведения

При закручивании цилиндрических стержней круглого сечения распределение деформаций и напряжений одинаково по длине стержня только вдали от мест, где прикладываются закручивающие моменты. Для этих областей можно считать, что каждое поперечное сечение поворачивается поворачивается как жесткое, то есть частички материала не сходят с радиальных линий, на которых они были в начале, и все эти линии поворачиваются на один и тот же угол. Такое напряженное состояние называется чистым кручением.

При такой деформации любая прямая линия, проведенная до закручивания цилиндра по частицам материала и параллельная оси симметрии, при закручивании превращается в спираль (винтовую линию).

Покажем, что касательное напряжение в поперечном сечении увеличивается пропорционально расстоянию до оси вращения. Рассмотрим в цилиндре колечко бесконечно малой толщиной dr и высоты dl . При закручивании верхнее колечко поворачивается относительно нижнего на угол $d\varphi$, а образующая наклоняется на угол α . Тогда при малых углах справедливо соотношение:

$$\alpha dl = r d\varphi \quad (1)$$

Касательное напряжение τ связано с углом α линейной зависимостью через модуль сдвига G , и следовательно растет с увеличением расстоянием от оси:

$$\tau = G \cdot \alpha = Gr \frac{d\varphi}{dl} \quad (2)$$

Эти касательные напряжения создают момент сил относительно оси цилиндра:

$$dM = 2\pi r dr \cdot r \cdot \tau \quad (3)$$

Интегрируя это выражение по всем колечкам от оси цилиндра до его радиуса R находим суммарный момент сил:

$$M = \frac{\pi G R^4}{2} \frac{d\varphi}{dl} \quad (4)$$

Так как момент сил не меняется по длине цилиндра. Тогда для связи приложенного момента сил M и угла поворота φ поперечных сечений цилиндра имеем:

$$M = \frac{\pi R^4 G}{2l} \varphi = f \varphi \quad (5)$$

Где f - модуль кручения связанный с модулем сдвига G соотношением:

$$G = \frac{2l}{\pi R^4} f \quad (6)$$

3 Определение модуля кручения стержня статическим методом

3.1 Экспериментальная установка

Эту часть работы будем проводить на установке, схематично изображённой ниже. Она состоит из вертикально расположенного стержня C , верхний конец которого прочно закреплён на стойке, а нижний соединён с диском D . Момент M , закручивающий стержень создают две навитые на диск и перекинутые через блоки B нити, к концам которых подвешиваются одинаковые грузы Γ . Диск снабжён зеркальцем $З$. Для того, чтобы узнать угол поворота диска, нужно направить зрительную трубу на зеркальце и сделать так, чтобы в неё была чётко видна шкала, укреплённая на том же штативе, что и трубка. По изменению положения шкалы можно определить угол закручивания φ .

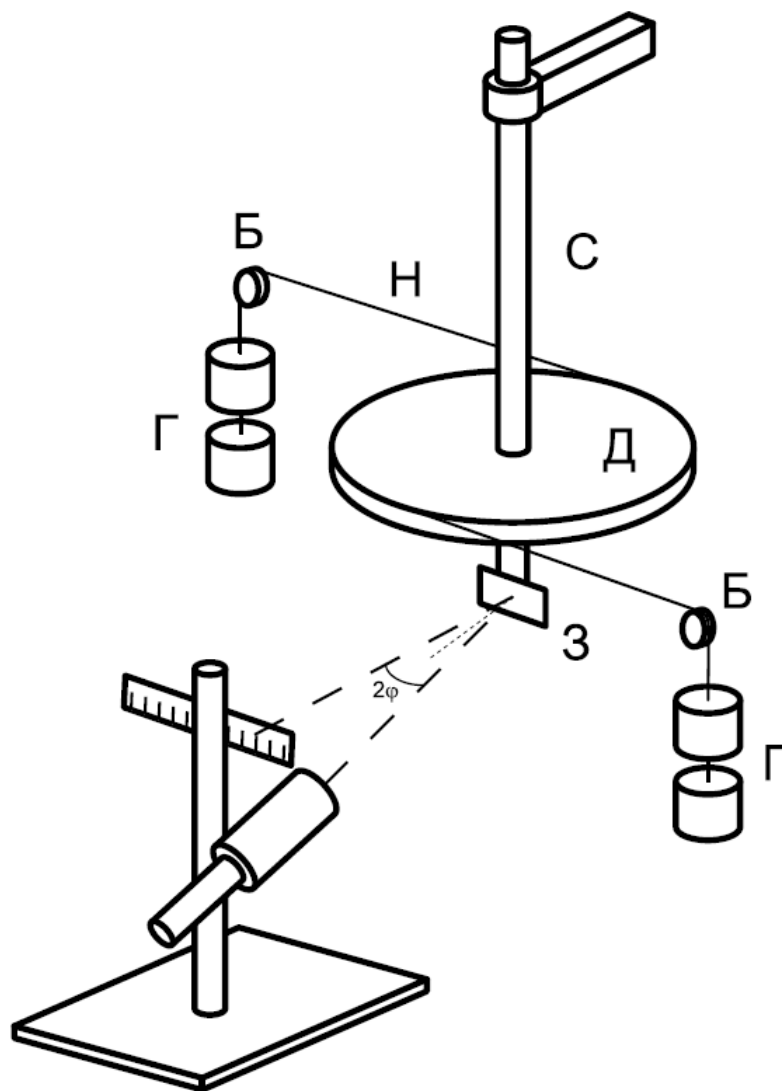


Рисунок 1: Схема установки

3.2 Расчет всех данных

Диаметр стержня	$d_{ст}, \text{ мм}$	$4,83 \pm 0,1$
Диаметр диска	$d_{д}, \text{ мм}$	$92 \pm 0,1$
Расстояние до шкалы	$L, \text{ см}$	140 ± 1
Длина стержня	$l, \text{ см}$	$132,8 \pm 0,1$
Масса платформы	$m_0, \text{ гр}$	$50 \pm 0,01$

Таблица 1: Размеры установки

Момент силы грузов будет равен $M = (m_1 + m_0)gR_{\text{диск}} + (m_2 + m_0)gR_{\text{диск}} \approx 2(m + m_0)gR_{\text{диск}}$.
 Угол поворота будет равен $\varphi = \arctg(\frac{\Delta l}{L}) \approx \frac{\Delta l}{L} (\Delta l \ll L)$.

Масса груза 1/2, m , гр	Момент силы, M , Н · м	Отклонение по шкале, Δl , см	Угол поворота, φ , рад
0	0	0	0
50	0,09016	2,6	0,018571
100	0,13524	3	0,021429
150	0,18032	6	0,042857
200	0,2254	8,4	0,06
250	0,27048	11,1	0,079286
300	0,31556	10,85	0,0775
350	0,36064	13,85	0,098929
400	0,40572	15,95	0,113929

Таблица 2: Экспериментальные данные

3.3 Обработка результатов

Расчет погрешность при аппроксимации по МНК:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$
$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2}$$

Тогда $k = 0,291 \pm 0,015 (\varepsilon_k \approx 5,1\%)$.

Получаем $f = \frac{1}{k} = 3,44 \pm 0,175 (\varepsilon_f \approx 5,1\%)$.

$$G = \frac{2l}{\pi R^4} f$$

Погрешность:

$$\varepsilon_G = \sqrt{(\varepsilon_f)^2 + (\varepsilon_l)^2 + (4\varepsilon_R)^2}$$

Получаем $\varepsilon_G = 5,12\%$ и $G = 0,76$ ГПа

σ_l	0,5 см	l	141 см	ε_l	0,35%
σ_R	0,1 мм	R	92 мм	ε_R	0,1%
σ_f	3,44 $\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}}$	f	0,175 $\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}}$	ε_f	5,1%

Таблица 3: Погрешности

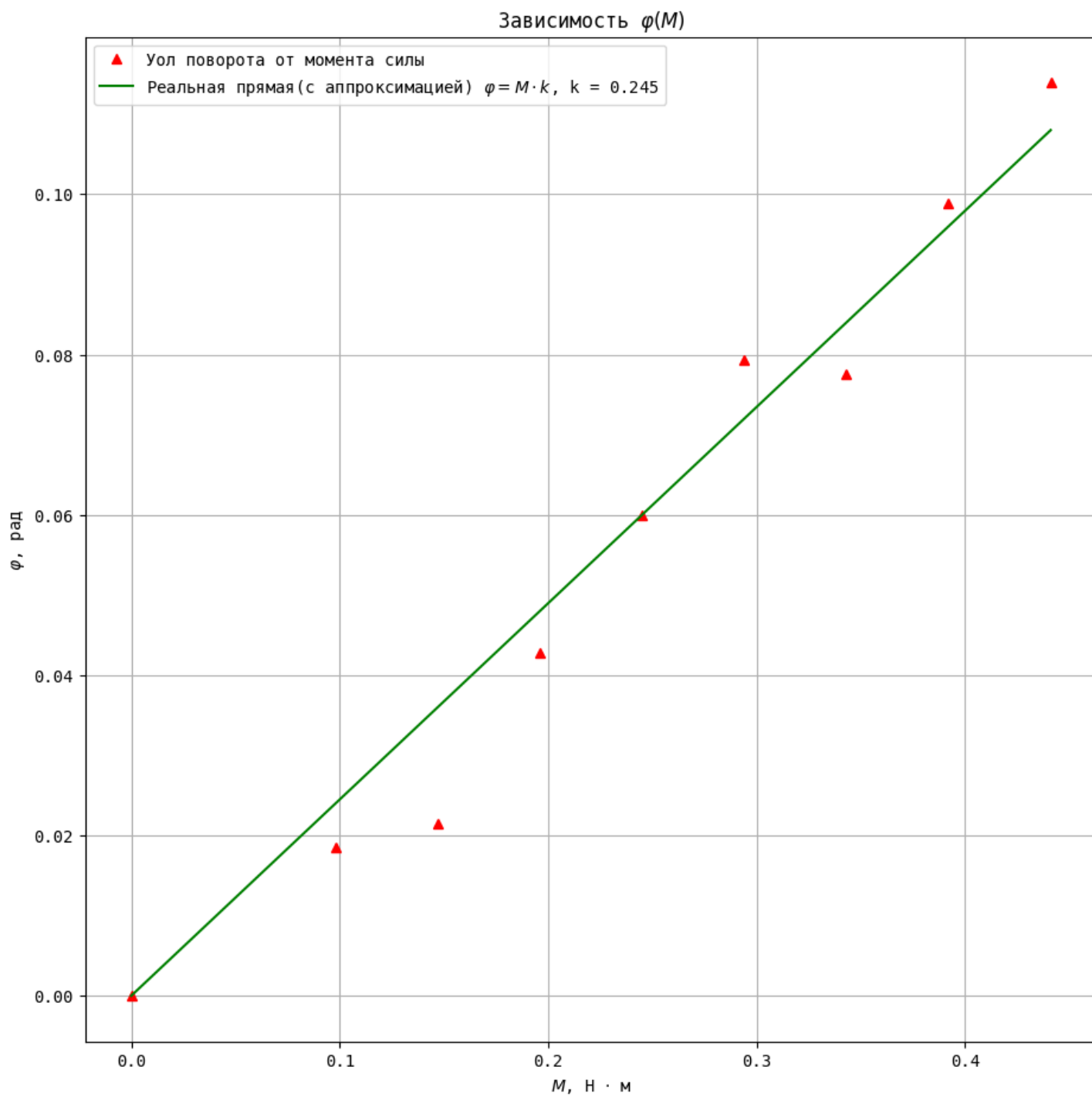


Рисунок 2: Зависимость $\varphi = k \cdot M$

4 Выводы

В работе была исследована зависимость между кручением и нагрузкой. Был рассчитан модуль кручения для стального стержня $G = 0,76 \pm 0,039 (\varepsilon_G = 5,12\%) \text{ ГПа}$. Полученное значение лежит в пределах одного σ_G при сравнении с табличным значением.

5 Определение модуля сдвига при помощи крутильных колебаний

5.1 Теоретическая часть

В системе можно возбудить крутильные колебания. Вращение стержня с закрепленными на нем грузиками вокруг вертикальной оси происходит под действием упругого момента M . С учетом выражения для момента M получим, что это вращение описывается уравнением колебаний:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + f \varphi = 0 \quad (7)$$

Следовательно период колебаний системы связан с расстоянием r от оси вращения до грузов и моментом инерции стержня I_0 следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{f}{I} \quad (8)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}} \quad (9)$$

Эти зависимости были получены для незатухающих колебаний. Поэтому для их применения необходимо убедиться, что в рассматриваемой системе диссипативными силами можно пренебречь. Для этого стоит убедиться, что период колебаний не зависит от начальной амплитуды и что амплитуда уменьшается не более чем в 2 раза после около 10 колебаний.

Применяя Теорему Гюйгенса-Штейнера

$$T^2 = (2\pi)^2 \frac{I}{f} = (2\pi)^2 \frac{I_0}{f} + (2\pi)^2 \frac{(m_1 + m_2)r^2}{f} \quad (10)$$

,где $I_0 = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$

5.2 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка, используемая в этой части работы, изображена на рис. 1 и состоит из длинной вертикально висящей проволоки П, к нижнему концу которой прикреплен горизонтальный металлический стержень С с двумя симметрично расположенными грузами Г. Их положение на стержне можно фиксировать. Верхний конец проволоки зажать в цангу и при помощи специального приспособления может вместе с цангой поворачиваться вокруг вертикальной оси. Таким способом в системе можно возбуждать крутильные колебания. Вращение стержня С с закрепленными на нем грузами Г вокруг вертикальной оси происходит под действием упругого момента, возникающего в проволоке.

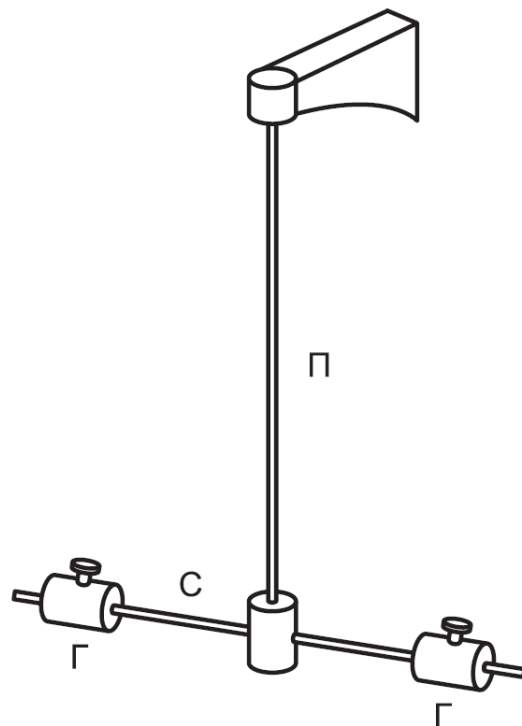


Рисунок 3: Схема установки

5.3 Расчет всех данных

Масса груза 1, гр	$202,5 \pm 0,1$
Масса груза 2, гр	$204,1 \pm 0,1$
Диаметр проволоки, мм	$1,39 \pm 0,01$
Длина проволоки, мм	1730 ± 2
Длина цилиндра, мм	$48 \pm 0,1$

Таблица 4: Размеры установки

l , см	Период, T , с
5,8	1,623
6,8	1,666
7,8	1,732
8,8	1,81
9,8	1,867
10,8	1,974
11,8	2,065
12,8	2,177
13,8	2,26
14,8	2,357

Таблица 5: Экспериментальные данные

5.4 Обработка результатов

$$T^2 = (2\pi)^2 \frac{I}{f} = (2\pi)^2 \frac{I_0}{f} + (2\pi)^2 \frac{(m_1 + m_2)r^2}{f} \quad (11)$$

, где $I_0 = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$

Расчет погрешность при аппроксимации по МНК:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2}$$

Тогда $k = 0,065 \pm 0,00089 (\varepsilon_k \approx 1,35\%) \frac{c^2}{\text{см}^2}$.

$$k = (2\pi)^2 \frac{(m_1 + m_2)}{f} \quad (12)$$

$$f = (2\pi)^2 \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad (13)$$

Погрешность:

$$\varepsilon_f = \sqrt{(\varepsilon_{m_1})^2 + (\varepsilon_{m_2})^2 + (\varepsilon_k)^2}$$

Получаем $\varepsilon_f = 1,35\%$ и $f = 0,0247 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

$$G = \frac{2l}{\pi R^4} f$$

Погрешность:

$$\varepsilon_G = \sqrt{(\varepsilon_f)^2 + (\varepsilon_l)^2 + (4\varepsilon_R)^2}$$

Получаем $\varepsilon_G = 3,16\%$ и $G = 11,5 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$

σ_{m_1}	0,1 гр	m_1	202,5 гр	ε_{m_1}	0,05%
σ_{m_2}	0,1 гр	m_2	204,1 гр	ε_{m_2}	0,05%
σ_k	$0,00089 \frac{c^2}{\text{см}^2}$	k	$0,065 \frac{c^2}{\text{см}^2}$	ε_k	1,3%
σ_l	2 мм	l	1730 мм	ε_l	0,11%
σ_R	0,005 мм	R	0,695 мм	ε_R	0,72%

Таблица 6: Погрешности

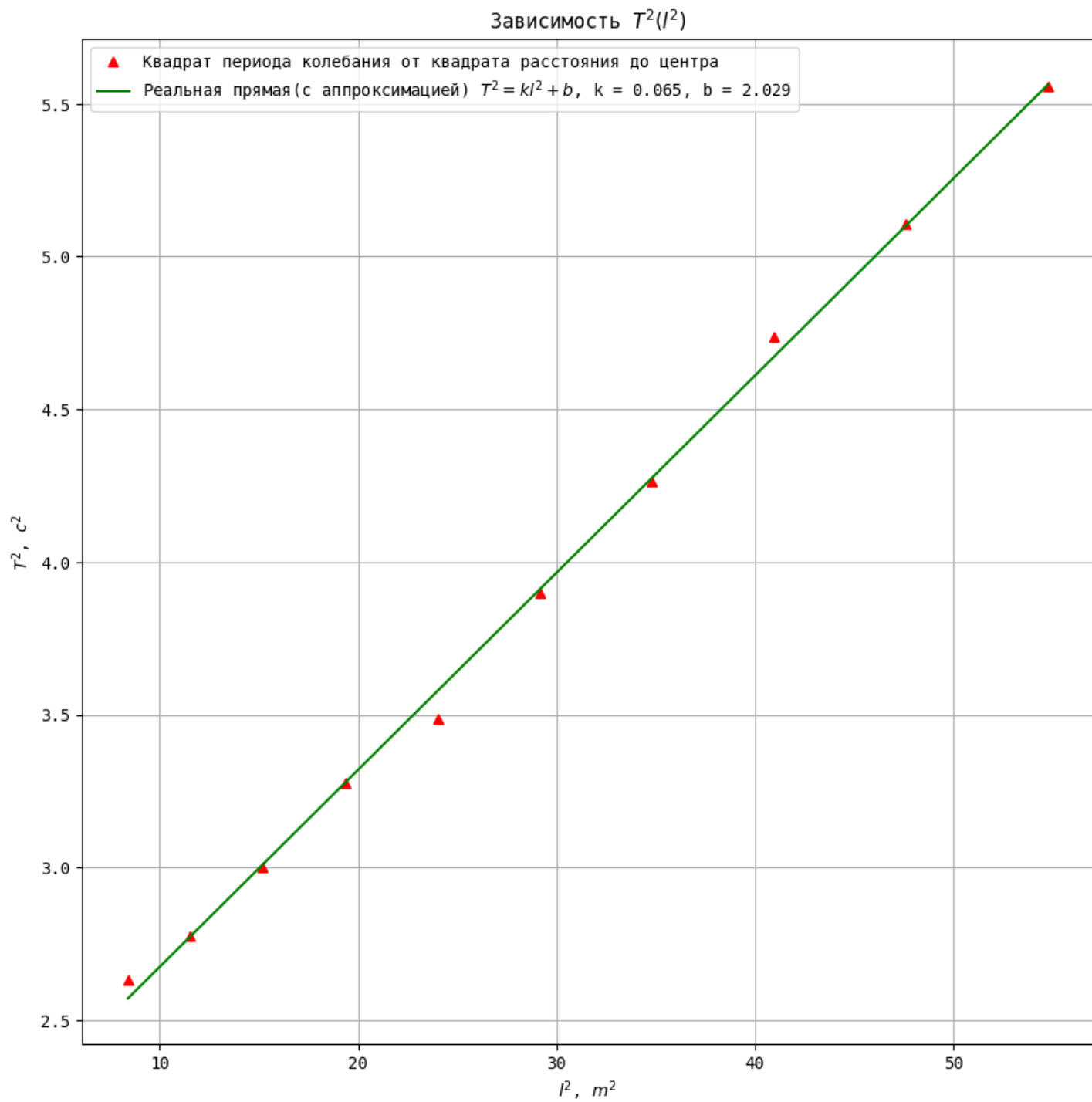


Рисунок 4: Зависимость $T^2 = kl^2 + b$

6 Выводы

В работе была исследована зависимость между кручением и нагрузкой. Был рассчитан модуль кручения для стального стержня $G = 11,5 \pm 0,36 \cdot 10^{10} (\varepsilon_G = 3,16\%) \text{ ГПа}$. Полученное значение лежит в пределах одного σ_G при сравнении с табличным значением.