

Отчет о выполненной лабораторной работе 1.2.3

Антон Хмельницкий, Б01-306

November 14, 2023

Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса

1 Введение

Цели работы: измерение момента инерции тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

Оборудование: трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полный цилиндр и другие).

2 Теоретические сведения

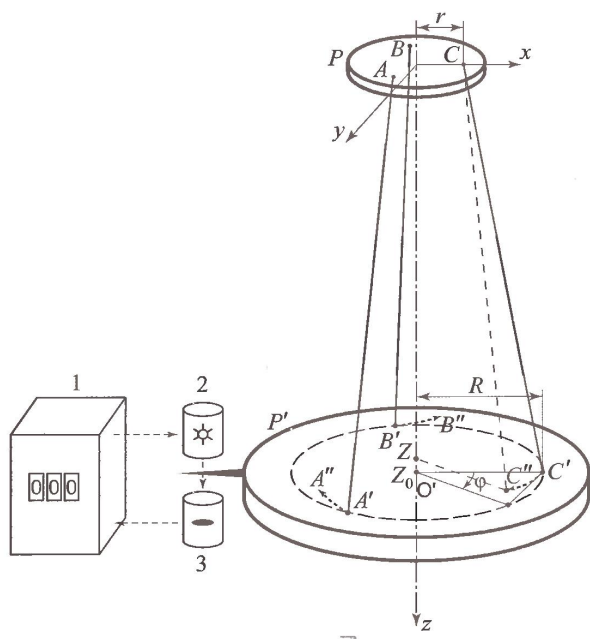


Рисунок 1: Физический маятник

Для наших целей удобно использовать устройство, показанное на Рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA' , BB' и CC' , вращающейся платформы P' .

Чтобы не вызывать дополнительных раскачиваний, лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси. После поворота верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа P' оказывается повернутой на угол φ относительно верхней платформы P , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. В результате платформа совершает крутильные колебания.

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле:

$$I = \int r^2 dm \quad (1)$$

Здесь r – расстояние элемента массы тела dm от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела m .

Если пренебречь потерями энергии на трение о воздух и крепление нитей, то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \quad (2)$$

Здесь I – момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, m – масса платформы с телом, φ – угол поворота платформы от положения равновесия системы, z_0 – координата по вертикали центра нижней

платформы O' при равновесии ($\varphi = 0$), z – координата той же точки при некотором угле поворота φ . Первый член в левой части уравнения – кинетическая энергия вращения, второй член – потенциальная энергия в поле тяжести, E – полная энергия системы (платформы с телом).

Воспользуемся системой координат x, y, z , связанной с верхней платформой, как показано на Рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки C в этой системе – $(r, 0, 0)$. Нижний конец данной нити C' , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты $(R, 0, z_0)$, а при повороте платформы на угол φ эта точка переходит в C'' с координатами $(R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$. расстояние между точками C и C'' равно длине нити, поэтому, после некоторых преобразований, получаем:

$$(R \cos \phi - r)^2 + R^2 \sin^2 \phi + z^2 = L^2$$

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr \cos \phi \approx z_0^2 - 2Rr(1 - \cos \phi) \approx z_0^2 - Rr\phi^2$$

$$z = \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0}$$

Подставляя z в уравнение (2), получаем:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E \quad (3)$$

Дифференцируя по времени и сокращая на $\dot{\varphi}$, находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = 0 \quad (4)$$

Производная по времени от E равна нулю, так как потерями на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем. Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}} t + \theta \right) \quad (5)$$

Здесь амплитуда φ_0 и фаза θ колебаний определяются начальными условиями. Период крутильных колебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \quad (6)$$

Из формулы для периода получаем:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} = kT^2 \quad (7)$$

где $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ – величина, постоянная для данной установки. При возбуждении крутильных колебаний маятникообразных движений платформы не наблюдается – устройство функционирует нормально.

При выводе формул мы предполагали, что потери энергии, связанные с трением, малы, то есть мало затухание колебаний. Это значит, что теоретические вычисления будут верны, если выполняется условие:

$$\tau \gg T \quad (8)$$

3 Приборы и данные

4 Обработка результатов

4.1 Измерение коэффициента k

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \approx 3,98 \cdot 10^{-4}$$

$$\sigma_k = k \sqrt{\left(\frac{dk}{dR}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{dk}{dr}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{dk}{dz_0}\right)^2 \sigma_{z_0}^2} = k \sqrt{\left(\frac{gr}{4\pi^2 z_0}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{gR}{4\pi^2 z_0}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{grR}{4\pi^2 z_0^2}\right)^2 \sigma_{z_0}^2} = 3 \cdot 10^{-9} (\varepsilon_k = 0,0008\%)$$

	Величина	Погрешность
R, радиус (ABC)	0,1141	0,5 мм
r, радиус ($A'B'C'$)	0,0305	0,5 мм
m, масса	1,0048	0,1 гр
L_0	2,168	1 см
z_0	2,171	1 см
$M_{\text{диск}}$	0,588	0,1 гр
$M_{\text{цил}}$	0,982	0,1 гр
$M_{\text{ст}}$	1,075	0,1 гр
$D_{\text{диск}}$	17,15	0,1 мм
$D_{\text{цил}}$	16,71	0,1 мм
$L_{\text{ст}}$	20,63	0,1 мм
$D_{\text{ст}}$	1,56	0,1 мм
$L_{\text{риска}}$	0,6	0,1 мм
M_1	527	0,1 гр
M_2	525,4	0,1 гр
D_{12}	8,4	0,1 мм

Таблица 1: Измеренные размеры тел

4.2 Доказательство аддитивности инерции

Используя $I = kT^2$ получаем рассчитываем моменты инерции для тел на трифилярном подвесе:

Тела	Период	I_{Σ} эксперим., кг · м ²	Табличный	I_{Σ} расчет., кг · м ²	Точность
Платформа	4,415	0,00765	—	—	—
Диск+Платформа	3,95	0,00989	0,00216	0,00981	0,82%
Цил+Платформа	4,24	0,0143	0,00686	0,0145	1,38%
Стерж+Платформа	3,756	0,01169	0,00383	0,01148	1,74%
Диск+Цил+Платформа	3,996	0,01638	—	0,01693	2,96%

Сравнивая моменты инерции полученные расчетно и экспериментально, убеждаемся что с высокой точностью в $\pm 1\%$ верна аддитивность моментов инерции!

4.3 Теорема Гюйгенса-Штейнера

Построим график $I(h^2)$:

№	h^2 , м ²	T, с	I, кг · м ²
1	0	3,25	0,001052516
2	0,25	3,264	0,001078202
3	1	3,285	0,001190875
4	2,25	3,31	0,001325952
5	4	3,331	0,001440207
6	6,25	3,38	0,001709613
7	9	3,42	0,001932454
8	12,25	3,5	0,002385999
9	16	3,55	0,00267479
10	20,25	3,64	0,003204936

С использованием аппроксимации получаем, что $I = kh^2 + b$, где $k = 1.043$ кг и $b = 10,57$ кг · м². При этом $m = 1.05$ кг установки также совпадает с k , а $I(0)$ с погрешностью 0,48% совпадает с b .

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 1.0426$$

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \approx 0,015(1,5\%)$$

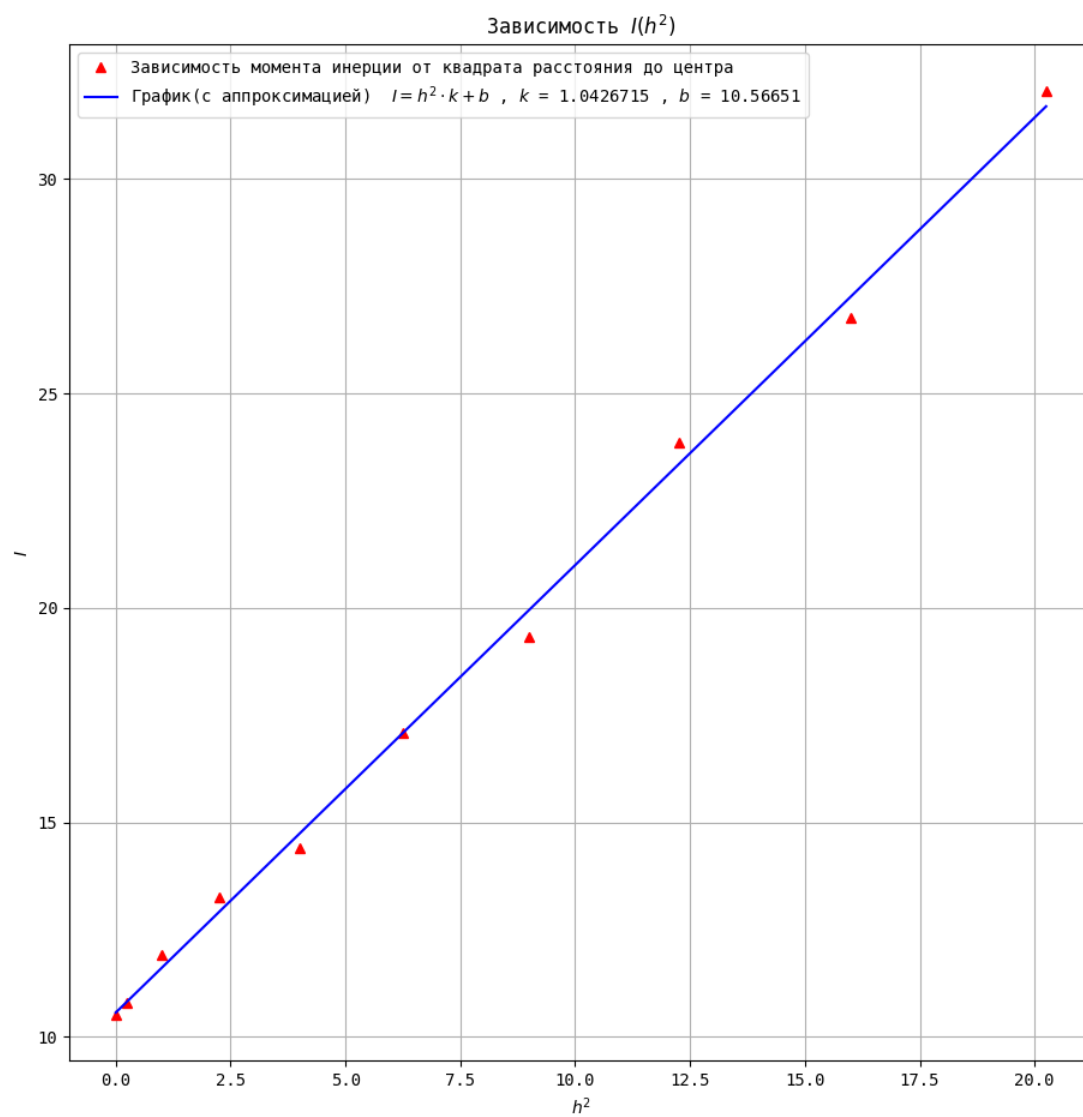


Рисунок 2: Зависимость $I(h^2)$

Итого: $k = 1,0426 \pm 0,015$ кг

5 Выводы

С помощью трифилярного подвеса было проведено измерение моментов инерций для различных простых тел: цилиндра, диска, параллелепипеда с высокой точностью $\pm 1\%$, которые подтвердили существующие формулы определения моментов инерций для этих тел. Также была экспериментально доказана аддитивность момента инерции, а также теорема Гюйгенса-Штейнера.