Устойчивость точек Лагранжа в ограниченной задаче трёх тел

Аналитическое и численное исследование

Содержание

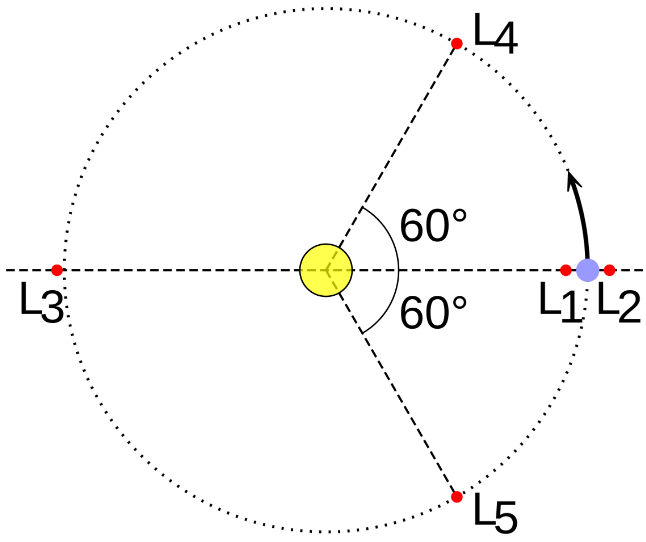


Рис. 1: Положения точек Лагранжа

1 Аналитический метод

1.1 Ограниченная задача трех тел

Перейдём к неинерциальной системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости орбит масс m_1 и m_2 и проходящей через их центр масс. В такой со-вращающейся системе m_1 и m_2 покоятся. Введём декартову систему координат (x, y) так, чтобы обе массивные частицы всегда находились на оси x.

Массы m_1 и m_2 занимают фиксированные положения

$$\mathbf{r}_1 = \mu_2\,(-1, 0, 0), \qquad \mathbf{r}_2 = \mu_1\,(1, 0, 0), \tag{1}$$

где $\mu_1 = m_1/(m_1 + m_2)$ и $\mu_2 = m_2/(m_1 + m_2)$, а положение пробной массы m_3 опишем вектором.

Можно также ввести общий коэффициент $\mu = m_2/(m_1 + m_2) \quad \mu_2 = \mu, \mu_1 = 1 - \mu$, использовался в численных методах

$$\mathbf{r} = (x, y, z). \tag{2}$$

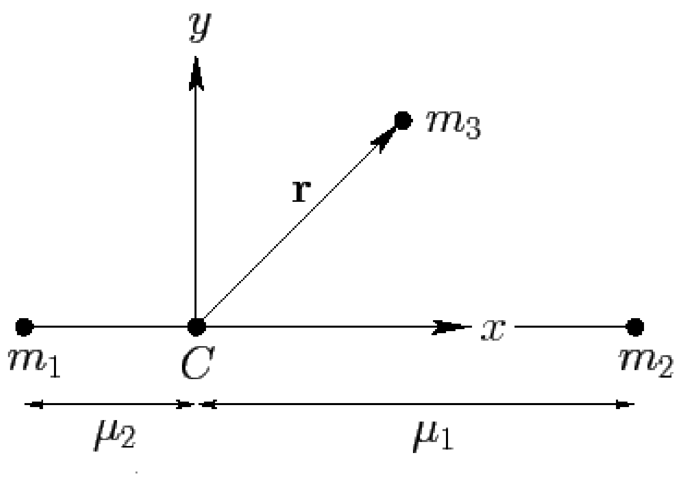


Рис. 2: Со-вращающаяся система координат, связанная с массами m_1 и m_2.

Уравнение движения m_3 в этой системе имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_1\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)}{\rho_1^3} - \frac{\mu_2\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)}{\rho_2^3} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$, а

$$\rho_1^2 = (x+\mu_2)^2 + y^2 + z^2, \tag{4}$$

$$\rho_2^2 = (x-\mu_1)^2 + y^2 + z^2. \tag{5}$$

Второй член в левой части (3) — кориолисово ускорение, а последний член в правой части — центробежное ускорение.

Рассматривая декартовы компоненты, из (3) получаем

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -\frac{\mu_1\,(x+\mu_2)}{\rho_1^3} - \frac{\mu_2\,(x-\mu_1)}{\rho_2^3} + \omega^2 x, \tag{6}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = -\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\right) y + \omega^2 y, \tag{7}$$

$$\ddot{z} = -\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\right) z. \tag{8}$$

Введём комбинированный потенциал (гравитационный + центробежный)

$$U(x, y, z) = -\frac{\mu_1}{\rho_1} - \frac{\mu_2}{\rho_2} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \tag{9}$$

Тогда уравнения (6)–(8) можно записать компактно как

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} = -\nabla U, \qquad \mathbf{q} = (x, y, z). \tag{10}$$

Следует дифференциальное тождество

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U\right] = 0, \tag{11}$$

что приводит к интегралу Якоби

$$C = -2U - v^2, \qquad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \tag{12}$$

ограничивающему область допустимого движения условием $-2U \geq C$.

1.2 Устойчивость точек Лагранжа

Пять точек Лагранжа L_1–L_5 являются точками равновесия для массы m_3 в со-вращающейся системе. Определим их устойчивость при малых возмущениях.

Пусть координаты точки Лагранжа $(x_0, y_0, 0)$. Для малых отклонений положим

$$x = x_0 + \delta x, \qquad y = y_0 + \delta y, \qquad z = 0. \tag{13}$$

Разложив потенциал в ряд Тейлора до второго порядка и учитывая, что $\nabla U = 0$ в самой точке, получим

$$U \approx U_0 + \tfrac{1}{2} U_{xx}\, \delta x^2 + U_{xy}\, \delta x\, \delta y + \tfrac{1}{2} U_{yy}\, \delta y^2. \tag{14}$$

Подставляя (14) в линеризованные уравнения движения и полагая $\delta x, \delta y \propto e^{\gamma t}$, приходим к системе

$$\begin{pmatrix} \gamma^2 + U_{xx} & -2\gamma + U_{xy} \\ 2\gamma + U_{xy} & \gamma^2 + U_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Необходимое условие ненулевого решения — зануление детерминанта, что даёт уравнение

$$\gamma^4 + (4 + U_{xx} + U_{yy})\gamma^2 + (U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2) = 0. \tag{16}$$

Введём обозначения

$$A = \frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}, \qquad B = 3\big(\frac{\mu_1}{\rho_1^5} + \frac{\mu_2}{\rho_2^5}\big) y^2, \tag{17}$$

$$C = 3\big[\frac{\mu_1(x+\mu_2)}{\rho_1^5} + \frac{\mu_2(x-\mu_1)}{\rho_2^5}\big] y, \qquad D = 3\big[\frac{\mu_1(x+\mu_2)^2}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2(x-\mu_1)^2}{\rho_2^3}\big], \tag{18}$$

что приводит к

$$U_{xx} = A - D - 1, \quad U_{yy} = A - B - 1, \quad U_{xy} = -C. \tag{19}$$

1.2.1 Коллинеарные точки L_1, L_2, L_3

Для $y = 0$ получаем $B = C = 0$, $D = 3A$, откуда

$$U_{xx} = -1 - 2A, \quad U_{yy} = A - 1, \quad U_{xy} = 0. \tag{20}$$

Обозначив $\Gamma = \gamma^2$, характеристическое уравнение принимает вид

$$\Gamma^2 + (2 - A)\Gamma + (1 - A)(1 + 2A) = 0. \tag{21}$$

Обозначим

$$a_1 = 2 - A, \qquad a_0 = (1 - A)(1 + 2A).$$

Для действительных корней справедливо(т.Виета)

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = -a_1 = -(2 - A), \qquad \Gamma_1\Gamma_2 = a_0.$$

Чтобы оба корня были *отрицательными*, необходимо и достаточно

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 < 0 \text{ (сумма отрицательна)}, \qquad \Gamma_1\Gamma_2 > 0 \text{ (произведение положительно)}.$$

Откуда

$$-(2-A)<0 \implies 2-A>0 \implies A<2, \tag{22}$$

$$(1-A)(1+2A)>0. \tag{23}$$

Поскольку $1+2A>0$ при всех $A>-\frac{1}{2}$, второе неравенство эквивалентно

$$A<1.$$

Требование вещественности (дискриминант):

$$D=(2-A)^2-4(1-A)(1+2A)=9A^2-8A=A\big(9A-8\big)\geq 0. \tag{24}$$

При условии $A>0$ получаем

$$A\geq\frac{8}{9}.$$

Сводя воедино требования

$$A<1, \quad A\geq\frac{8}{9},$$

получаем

$$\frac{8}{9}\leq A<1 \tag{25}$$

Используя условие на дискриминант и т.Виета получаем, что корни будут отрицательными и действительными лишь при

$$\frac{8}{9}\leq A\leq 1. \tag{26}$$

На рис. 3 показано, что для любых $0<\mu_2\leq 0.5$ величина A в точках L_1–L_3 превышает 1, значит, везде $\exists\lambda: Re\lambda>0$, поэтому эти точки неустойчивы по т.Ляпунова о лин. приближении.

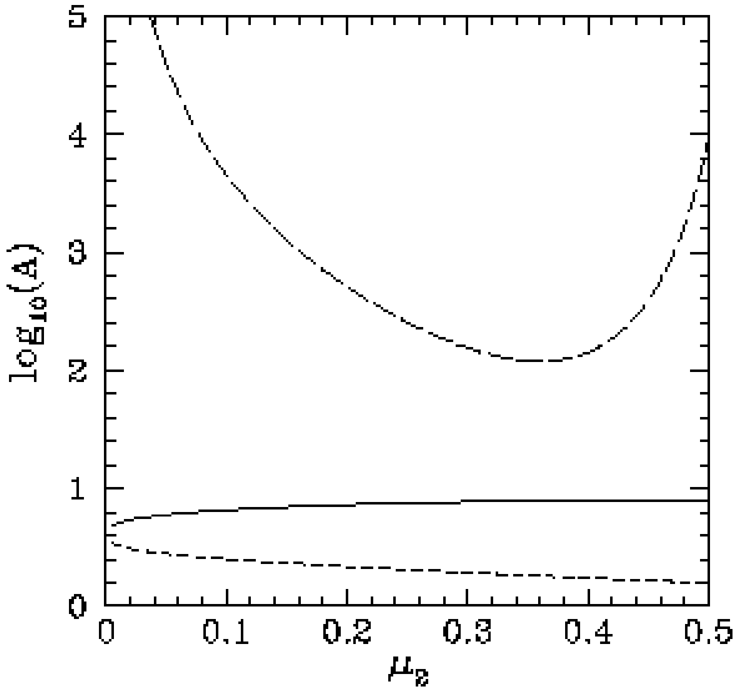


Рис. 3: Зависимость параметра A от массового отношения μ_2 для коллинеарных точек L_1, L_2 и L_3.

1.2.2 Треугольные точки L_4 и L_5

Для этих точек $\rho_1 = \rho_2 = 1$, откуда $A = 1$, $B = 9/4$, $D = 3/4$ и

$$U_{xy} = \mp\sqrt{27/16}\,(1 - 2\mu_2).$$

Уравнение на Γ:

$$\Gamma^2 + \Gamma + \frac{27}{4}\,\mu_2(1 - \mu_2) = 0. \tag{27}$$

Чтобы корни были также действительными, проверяем дискриминант:

$$D = 1 - 4a_0 = 1 - 27\,\mu_2\big(1 - \mu_2\big) \geq 0. \tag{28}$$

Преобразуем:

$$1 - 27\mu_2 + 27\mu_2^2 \geq 0, \tag{29}$$

$$27\mu_2^2 - 27\mu_2 + 1 \geq 0. \tag{30}$$

Это квадратное неравенство имеет корни

$$\mu_\pm = \frac{1}{2}\Big(1 \pm \sqrt{\frac{23}{27}}\Big).$$

Поскольку рассматриваемый физический параметр удовлетворяет $0 < \mu_2 < 1$, из двух интервалов $\big(-\infty, \mu_-\big] \cup \big[\mu_+, \infty\big)$ нас интересует лишь левый. Следовательно,

$$\mu_2 < \frac{1}{2}\big(1 - \sqrt{23/27}\big) \approx 0.0385. \tag{31}$$

Обозначив за критическое значение приведенной массы $\mu_{crit} = \frac{1}{2}\big(1 - \sqrt{23/27}\big) \approx 0.0385$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} < \mu_{crit} \quad \text{(Gascheau stability criterion)} \tag{32}$$

Возвращаясь к (16) получаем, что $a_1(\text{при } \gamma^3) = 0, a_3(\text{при } \gamma) = 0.$

$$\gamma^4 + a\gamma^2 + b = 0$$

Для треугольных точек:

$$U_{xx} = \frac{3}{4},\ U_{yy} = \frac{9}{4},\ U_{xy} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu) \quad \Longrightarrow \quad a = 4 - \frac{3}{4} - \frac{9}{4} = 1,$$

$$b = \frac{3}{4}\cdot\frac{9}{4} - \Big[\tfrac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\Big]^2 = \frac{27}{4}\,\mu(1 - \mu).$$

Решаем квадратное уравнение с заменой $s = \gamma^2$.

$$s^2 + a\,s + b = 0 \quad \Longrightarrow \quad s_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

При указанных a, b если брать $\mu < \mu_{crit}$, то:

- подкоренное выражение $a^2 - 4b > 0$;

- Числитель $-a \pm \sqrt{\ldots}$ отрицателен для обеих ветвей, потому что $0 < \sqrt{a^2 - 4b} < a$.

Получаем
$$s_{\pm} < 0.$$
Переходим к исходному биквадратному с γ.
$$\gamma^2 = s < 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \pm i\sqrt{|s|}, \qquad \operatorname{Re}\gamma = 0.$$

Значит L_4, L_5 устойчивы по Ляпунову (но не асимптотически), т.к. $\forall \gamma_i : Re\gamma_i = 0(\gamma = \pm i\omega)$ - т.Ляпунова о лин. приближении.
Иначе, при $\mu > \mu_{crit}$ будет существовать корень $s \geqslant 0$ у квадратного уравнения и как следствие у исходного $\exists \gamma : Re\gamma \geqslant 0 \quad \Longrightarrow$ по теореме Ляпунова о лин. приближении неустойчивы.

Получаем условие на μ (Gascheau stability criterion), если $\mu_2 < 0.0385$, то L_4, L_5 устойчивы по Ляпунову(но не ассимптотически). При $\mu_2 \geqslant 0.0385$ - неусточивы по т.Ляпунова о лин. приближении.

1.3 Итоги аналитического метода

Для 5 точек лагранжа:

- Коллинеарные точки L_1, L_2, L_3 - неустойчивы по Ляпунову $\forall \mu$
- Треугольные точки L_4, L_5 - устойчивы по Ляпунову при $\mu < \mu_{crit}$ и неустойчивы при $\mu \geqslant \mu_{crit}$, $\mu_{crit} \approx 0.0385$ (Gascheau stability criterion).

Если малое тело удовлетворяет этому условию для L_4, L_5, возмущённое движение вокруг L_4 или L_5 остаётся ограниченным, что подтверждается орбитами троянских астероидов Юпитера и пылевыми облаками в системе Солнце–Земля.

2 Моделирование точек Лагранжа

2.1 Математическая модель

Модель — плоская ограниченная круговая задача трёх тел. Используются безразмерные величины
$$R^* = 1, \quad \Omega^* = 1, \quad G\big(m_1 + m_2\big) = 1.$$

2.1.1 Координаты

$$m_1 : (-\mu, 0), \qquad m_2 : (1 - \mu, 0), \qquad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

2.1.2 Эффективный потенциал

$$U(x, y) = -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2},\ r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}.$$

2.1.3 Уравнения движения в вращающейся системе

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} = &\quad \frac{dU_{\text{эфф}}}{dx},\\ \ddot{y} + 2\dot{x} = &\quad \frac{dU_{\text{эфф}}}{dy}.\end{aligned}$$

Вектор состояния $\mathbf{s} = (x, y, \dot{x}, \dot{y})$.

$$\boxed{\begin{aligned}&\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3},\\ &\ddot{y} + 2\dot{x} = y - \frac{(1-\mu)\,y}{r_1^3} - \frac{\mu\,y}{r_2^3}.\end{aligned}}$$

Отдельный расчет в функции `rhs`:

$$\begin{aligned}dUdx &= x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3},\\ dUdy &= y - \frac{(1-\mu)\,y}{r_1^3} - \frac{\mu\,y}{r_2^3},\\ a_x &= 2\dot{y} + dUdx, \qquad a_y = -2\dot{x} + dUdy.\end{aligned}$$

Вдоль оси $y = 0$ точка Лагранжа задаётся уравнением

$$dUdx(x, \mu) = 0, \quad \text{где } dUdx \text{ указан выше.}$$

Решается система с начальными данными дифф.уравнений методом DOP853 до безразмерного времени $t^*_{\max} = t_{\max}\,\Omega$.

2.2 Поиск точек Лагранжа

2.2.1 Коллинеарные $L_{1,2,3}$

Корни уравнения

$$x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-1+\mu|^3} = 0,$$

при $y = 0$ численно посчитаны.

2.2.2 Треугольные $L_{4,5}$

$$x = \frac{1}{2} - \mu, \qquad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.3 Вычисляемые величины для визуализации

Траектория $x(t), y(t)$ — вид сверху.

Фазовый портрет (x, v_x) как 2-D проекция фазы.

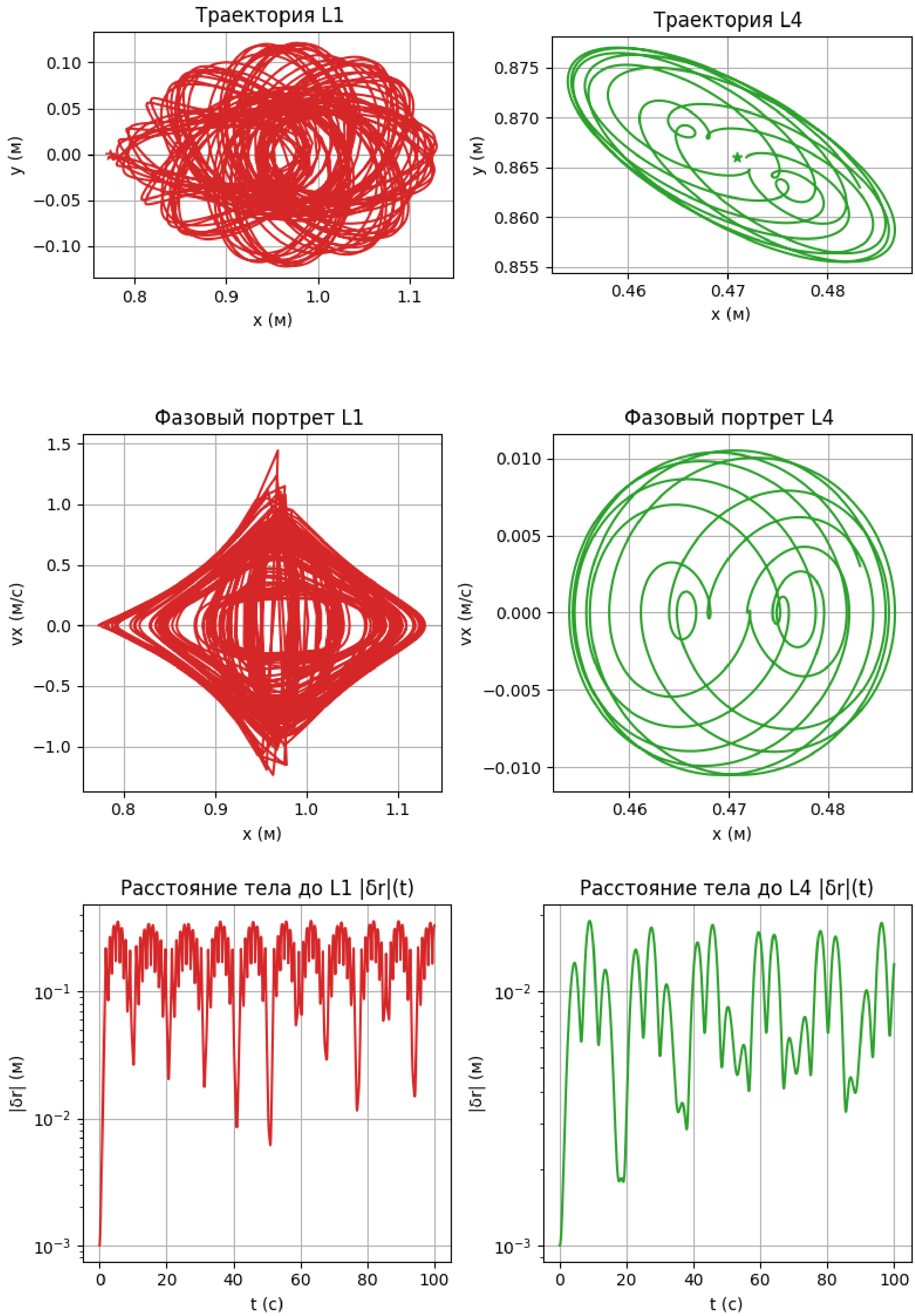
Либрационный радиус $|\delta r|(t) = \sqrt{(x - x_L)^2 + (y - y_L)^2}$, ось y в лог-масштабе.

Анимация последовательные точки (x, y); хвост длины 300 точек создаёт «след».

2.4 Обработка результатов

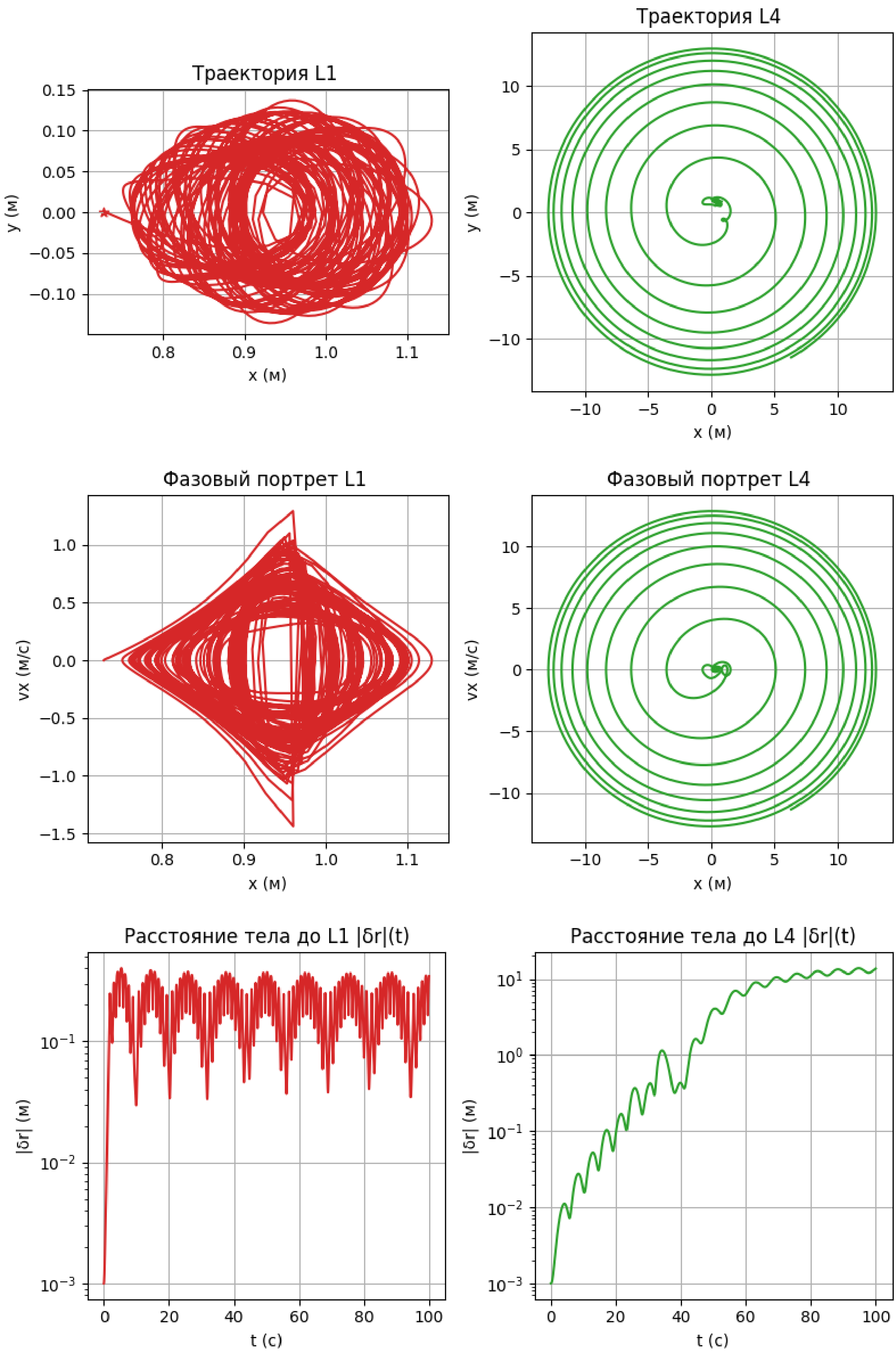
Будем рассматривать L_1, L_4:

2.4.1 $\mu = 0.029$


Траектория L1
y (м)
x (м)
Траектория L4
y (м)
x (м)
Фазовый портрет L1
vx (м/с)
x (м)
Фазовый портрет L4
vx (м/с)
x (м)
Расстояние тела до L1 |δr|(t)
|δr| (м)
t (c)
Расстояние тела до L4 |δr|(t)
|δr| (м)
t (c)

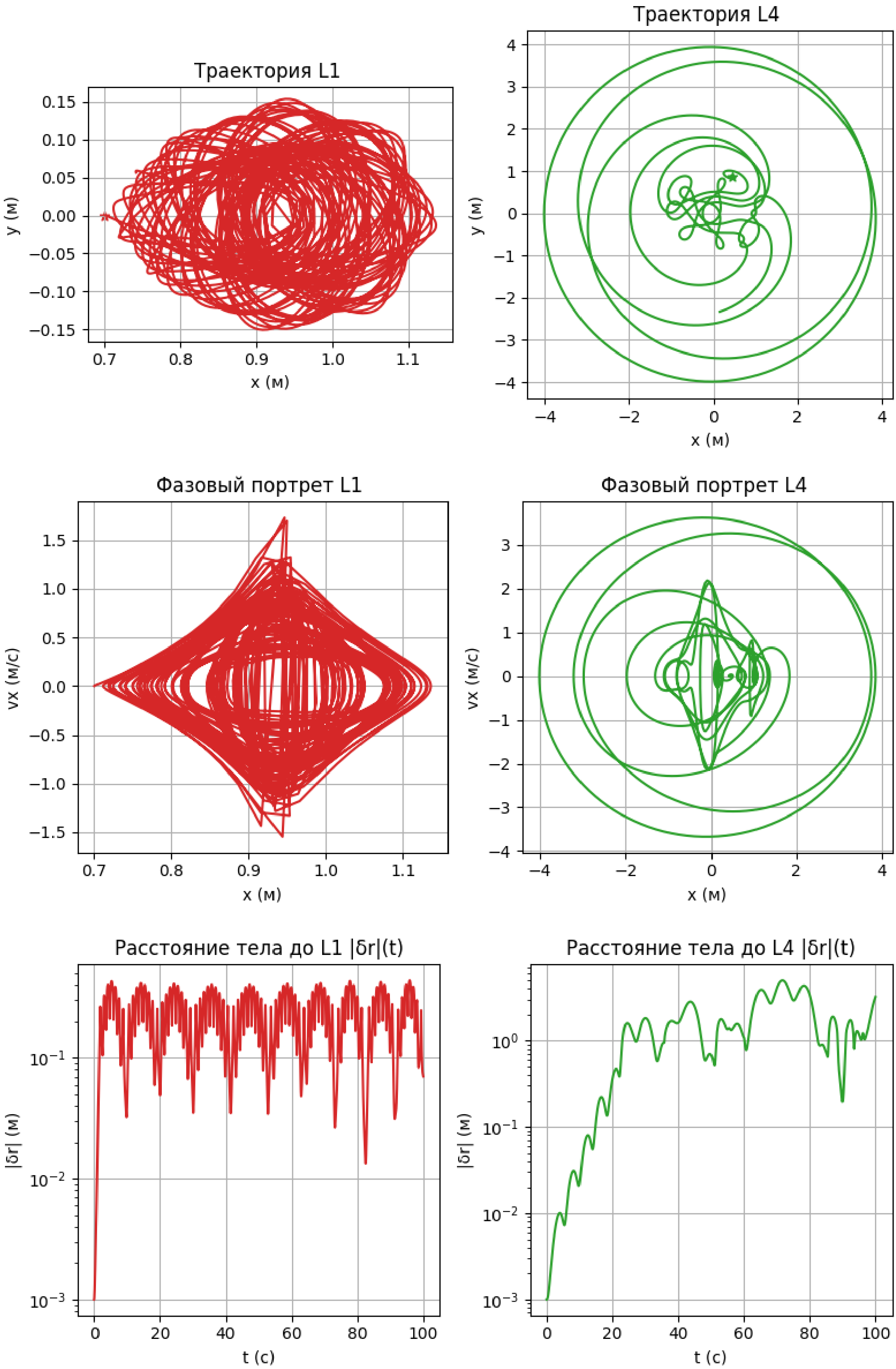
- **Параметры модели:** $m_1 = 1$, $m_2 = 0.03 \quad (\mu = 0.0291 < 0.03852)$.
- **Графики траекторий** (x, y)**:**
  для L_4 – узкая замкнутая кривая;
  для L_1 – расходящаяся спираль.
- **Фазовые портреты** (x, v_x)**:**
  для L_4 даёт концентрические овалы (центр Ляпунова);
  для L_1 заполняет ромбическую область (седло).
- **Лог-графики расстояния** $|\delta r|(t)$**:**
  L_4: амплитуда остаётся в пределах 10^{-3}–10^{-2} м;
  L_1: быстро растёт до $\sim 10^{-1}$ м, далее колеблется возле границы ПНС.

2.4.2 $\mu = 0.044$


Траектория L1
y (м)
x (м)
Траектория L4
y (м)
x (м)
Фазовый портрет L1
vx (м/с)
x (м)
Фазовый портрет L4
vx (м/с)
x (м)
Расстояние тела до L1 |δr|(t)
|δr| (м)
t (с)
Расстояние тела до L4 |δr|(t)
|δr| (м)
t (с)

- **Параметры модели:** $m_1 = 1$, $m_2 = 0.047 \quad (\mu = 0.044 > 0.03852)$.
- **Графики траекторий** (x, y)**:**
  для L_4 – расходящаяся спираль;
  для L_1 – расходящаяся спираль.
- **Фазовые портреты** (x, v_x)**:**
  для L_4 расходящаяся окружность;
  для L_1 расходящийся ромб(седло).
- **Лог-графики расстояния** $|\delta r|(t)$**:**
  L_4: Наличие вещественного положительного собственного значения λ. Тело удаляется от точки Лагранжа;
  L_1: Виден рост расстояния от точки Лагранжа и достижение барьера ПНС.

2.4.3 $\mu = 0.057$


Траектория L1
y (м)
x (м)
Траектория L4
y (м)
x (м)
Фазовый портрет L1
vx (м/с)
x (м)
Фазовый портрет L4
vx (м/с)
x (м)
Расстояние тела до L1 |δr|(t)
|δr| (м)
t (с)
Расстояние тела до L4 |δr|(t)
|δr| (м)
t (с)

- **Параметры модели:** $m_1 = 1$, $m_2 = 0.06 \quad (\mu = 0.057 > 0.03852)$.

- **Графики траекторий** (x, y)**:**
для L_4 – смещение центра фигуры в m_1 - уход из точки Лагранжа;
для L_1 – расходящаяся спираль.

- **Фазовые портреты** (x, v_x)**:**
для L_4 расходящаяся окружность с начальным ромбом;
для L_1 расходящийся ромб(седло).

- **Лог-графики расстояния** $|\delta r|(t)$**:**
L_4: Наличие вещественного положительного собственного значения λ. Тело удаляется от точки Лагранжа;
L_1: Виден рост расстояния от точки Лагранжа и достижение барьера ПНС.

2.5 Выводы

Подтверждая теоретические выкладки, мы получаем неустойчивость коллинеарных точек $L_1, L_2, L_3 \quad$ для $\quad \forall\mu$, устойчивость треугольных точек $L_4, L_5 \quad$ для $\quad \mu < \mu_{crit}$ и их неустойчивость при $\mu \geqslant \mu_{crit}$, где $\exists\mu_{crit}$ - критическое значение приведенной массы (Gascheau stability criterion). Чем ближе к нему, тем больший интервал времени нужно брать, для наблюдения эффекта нестабильности на графиках.

2.6 Интеграл Якоби

В плоской ограниченной круговой задаче трёх тел действует первый интеграл

$$C \;=\; 2\,U(x,y) \;-\; \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \quad \text{(постоянен по времени)},$$

где $U = -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ — эффективный потенциал во вращающейся системе.

Из него следует *неравенство нулевой скорости*

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2U - C \quad\Longrightarrow\quad 2U(x,y) \;\geq\; C.$$

Области, где $2U < C$, *запрещены* для движения (пришлось бы иметь отрицательную кинетическую энергию).

Поверхность $2U = C$ называют **поверхностью нулевой скорости** (ПНС);

Для каждой точки Лагранжа

$$C_i = 2\,U(L_i).$$

- L_1, L_2, L_3 — *седловые* точки U: ПНС имеет "горловины" (necks), которые открываются/закрываются в зависимости от того, выше или ниже текущий C относительного C_i.

- L_4, L_5 — *минимумы* U: окрестность точки всегда лежит *внутри* допускаемой области, а вокруг имеется замкнутый "остров" уровня C.

3 Источники

https://ru.wikipedia.org/wiki/РЧРөРүРөСЉРө_СЂСЃСҪСЖ_СЂРхРњ
https://ru.wikipedia.org/wiki/РЦР„СЂРхРүСЃРөРњ_РѕРәР«РҫРч
https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-07-dynamics-fall-2009/lecture-notes/MIT16_07F09_Lec18.pdf
https://hal.science/hal-00552502/document
https://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newton/node124.html
https://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newton/node126.html
https://math-mech-astr-journal.spbu.ru/article/view/15502/10422