

Устойчивость точек Лагранжа в ограниченной задаче трёх тел

Аналитическое и численное исследование

Содержание

1	Аналитический метод	2
1.1	Ограниченная задача трех тел	2
1.2	Устойчивость точек Лагранжа	4
1.2.1	Коллинеарные точки L_1, L_2, L_3	4
1.2.2	Треугольные точки L_4 и L_5	6
1.3	Итоги аналитического метода	6
2	Моделирование точек Лагранжа	7
2.1	Математическая модель	7
2.1.1	Координаты	7
2.1.2	Эффективный потенциал	7
2.1.3	Уравнения движения в вращающейся системе	7
2.2	Поиск точек Лагранжа	8
2.2.1	Коллинеарные $L_{1,2,3}$	8
2.2.2	Треугольные $L_{4,5}$	8
2.3	Вычисляемые величины для визуализации	8
2.4	Обработка результатов	8
2.4.1	$\mu = 0.03$	9
2.4.2	$\mu = 0.047$	11
2.4.3	$\mu = 0.057$	13
2.5	Интеграл Якоби	14
2.6	Критические уровни C_i	14
3	Источники	14

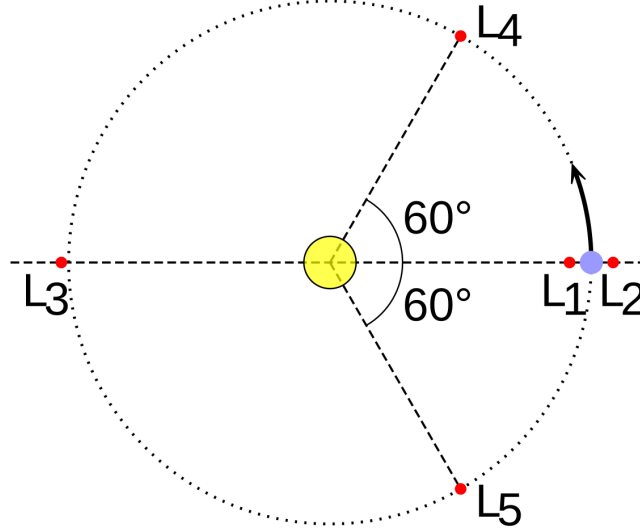


Рис. 1: Положения точек Лагранжа

1 Аналитический метод

1.1 Ограниченная задача трех тел

Перейдём к неинерциальной системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости орбит масс m_1 и m_2 и проходящей через их центр масс. В такой со-вращающейся системе m_1 и m_2 покоятся. Введём декартову систему координат (x, y) так, чтобы обе массивные частицы всегда находились на оси x .

Массы m_1 и m_2 занимают фиксированные положения

$$\mathbf{r}_1 = \mu_2 (-1, 0, 0), \quad \mathbf{r}_2 = \mu_1 (1, 0, 0), \quad (1)$$

где $\mu_1 = m_1/(m_1 + m_2)$ и $\mu_2 = m_2/(m_1 + m_2)$, а положение пробной массы m_3 опишем вектором.

Можно также ввести общий коэффициент $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ $\mu_2 = \mu, \mu_1 = 1 - \mu$, использовался в численных методах

$$\mathbf{r} = (x, y, z). \quad (2)$$

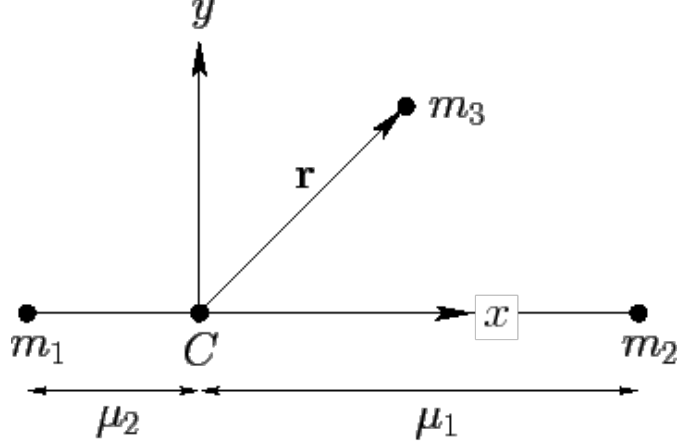


Рис. 2: Со-вращающаяся система координат, связанная с массами m_1 и m_2 .

Уравнение движения m_3 в этой системе имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{\rho_1^3} - \frac{\mu_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{\rho_2^3} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (1050)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$, а

$$\rho_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2, \quad (1051)$$

$$\rho_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2. \quad (1052)$$

Второй член в левой части (1050) — кориолисово ускорение, а последний член в правой части — центробежное ускорение.

Рассматривая декартовы компоненты, из (1050) получаем

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -\frac{\mu_1(x + \mu_2)}{\rho_1^3} - \frac{\mu_2(x - \mu_1)}{\rho_2^3} + \omega^2 x, \quad (1053)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = -\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\right)y + \omega^2 y, \quad (1054)$$

$$\ddot{z} = -\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\right)z. \quad (1055)$$

Введём комбинированный потенциал (гравитационный + центробежный)

$$U(x, y, z) = -\frac{\mu_1}{\rho_1} - \frac{\mu_2}{\rho_2} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (1059)$$

Тогда уравнения (1053)–(1055) можно записать компактно как

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} = -\nabla U, \quad \mathbf{q} = (x, y, z). \quad (1056\text{--}1058)$$

Следует дифференциальное тождество

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U \right] = 0, \quad (1063)$$

что приводит к интегралу Якоби

$$C = -2U - v^2, \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \quad (1064)$$

ограничивающему область допустимого движения условием $-2U \geq C$.

1.2 Устойчивость точек Лагранжа

Пять точек Лагранжа L_1 – L_5 являются точками равновесия для массы m_3 в со-вращающейся системе. Определим их устойчивость при малых возмущениях.

Пусть координаты точки Лагранжа $(x_0, y_0, 0)$. Для малых отклонений положим

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y, \quad z = 0. \quad (1097-1099)$$

Разложив потенциал в ряд Тейлора до второго порядка и учитывая, что $\nabla U = 0$ в самой точке, получим

$$U \approx U_0 + \frac{1}{2}U_{xx} \delta x^2 + U_{xy} \delta x \delta y + \frac{1}{2}U_{yy} \delta y^2. \quad (1101)$$

Подставляя (1101) в линеаризованные уравнения движения и полагая $\delta x, \delta y \propto e^{\gamma t}$, приходим к системе

$$\begin{pmatrix} \gamma^2 + U_{xx} & -2\gamma + U_{xy} \\ 2\gamma + U_{xy} & \gamma^2 + U_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1104)$$

Необходимое условие ненулевого решения — зануление детерминанта, что даёт уравнение

$$\gamma^4 + (4 + U_{xx} + U_{yy})\gamma^2 + (U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2) = 0. \quad (1105)$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}, & B &= 3\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^5} + \frac{\mu_2}{\rho_2^5}\right)y^2, & (1106-1109) \\ C &= 3\left[\frac{\mu_1(x + \mu_2)}{\rho_1^5} + \frac{\mu_2(x - \mu_1)}{\rho_2^5}\right]y, & D &= 3\left[\frac{\mu_1(x + \mu_2)^2}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2(x - \mu_1)^2}{\rho_2^3}\right], & (3) \end{aligned}$$

что приводит к

$$U_{xx} = A - D - 1, \quad U_{yy} = A - B - 1, \quad U_{xy} = -C. \quad (1110-1112)$$

1.2.1 Коллинеарные точки L_1, L_2, L_3

Для $y = 0$ получаем $B = C = 0$, $D = 3A$, откуда

$$U_{xx} = -1 - 2A, \quad U_{yy} = A - 1, \quad U_{xy} = 0. \quad (*)$$

Обозначив $\Gamma = \gamma^2$, характеристическое уравнение принимает вид

$$\Gamma^2 + (2 - A)\Gamma + (1 - A)(1 + 2A) = 0. \quad (1113)$$

Обозначим

$$a_1 = 2 - A, \quad a_0 = (1 - A)(1 + 2A).$$

Для действительных корней справедливо(т.Виета)

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = -a_1 = -(2 - A), \quad \Gamma_1\Gamma_2 = a_0.$$

Чтобы оба корня были *отрицательными*, необходимо и достаточно

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 < 0 \text{ (сумма отрицательна),} \quad \Gamma_1\Gamma_2 > 0 \text{ (произведение положительно).}$$

Откуда

$$-(2 - A) < 0 \implies 2 - A > 0 \implies A < 2, \quad (4)$$

$$(1 - A)(1 + 2A) > 0. \quad (5)$$

Поскольку $1 + 2A > 0$ при всех $A > -\frac{1}{2}$, второе неравенство эквивалентно

$$A < 1.$$

Требование вещественности (дискриминант):

$$D = (2 - A)^2 - 4(1 - A)(1 + 2A) = 9A^2 - 8A = A(9A - 8) \geq 0. \quad (6)$$

При условии $A > 0$ получаем

$$A \geq \frac{8}{9}.$$

Сводя воедино требования

$$A < 1, \quad A \geq \frac{8}{9},$$

получаем

$$\frac{8}{9} \leq A < 1 \quad (7)$$

Используя условие на дискриминант и т.Виета получаем, что корни будут отрицательными и действительными лишь при

$$\frac{8}{9} \leq A \leq 1. \quad (1115)$$

На рис. 3 показано, что для любых $0 < \mu_2 \leq 0.5$ величина A в точках L_1 – L_3 превышает 1, значит, везде $\exists \lambda : \text{Re} \lambda > 0$, поэтому эти точки неустойчивы.

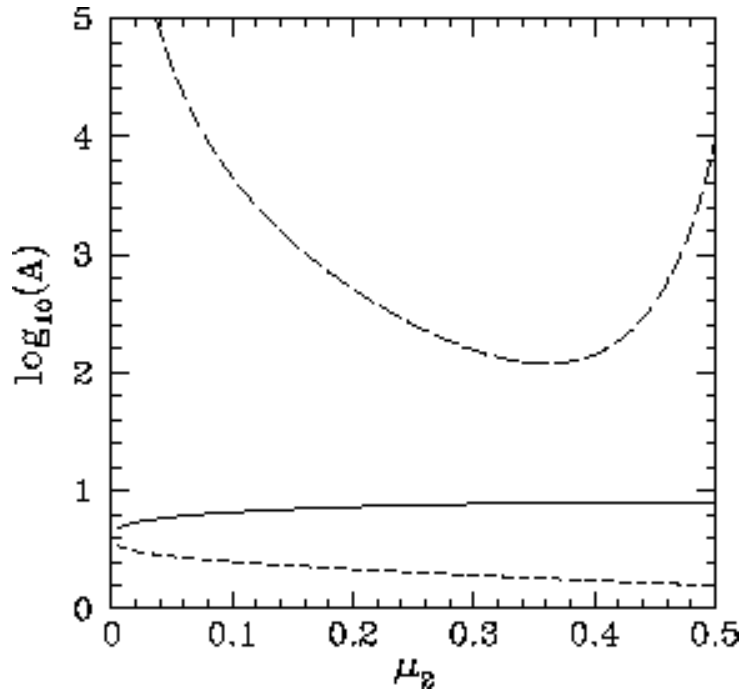


Рис. 3: Зависимость параметра A от массового отношения μ_2 для коллинеарных точек L_1 , L_2 и L_3 .

1.2.2 Треугольные точки L_4 и L_5

Для этих точек $\rho_1 = \rho_2 = 1$, откуда $A = 1$, $B = 9/4$, $D = 3/4$ и

$$U_{xy} = \mp \sqrt{27/16} (1 - 2\mu_2).$$

Уравнение на Γ :

$$\Gamma^2 + \Gamma + \frac{27}{4} \mu_2 (1 - \mu_2) = 0. \quad (1116)$$

Чтобы корни были также действительными, проверяем дискриминант:

$$D = 1 - 4a_0 = 1 - 27 \mu_2 (1 - \mu_2) \geq 0. \quad (8)$$

Преобразуем:

$$1 - 27\mu_2 + 27\mu_2^2 \geq 0, \quad (9)$$

$$27\mu_2^2 - 27\mu_2 + 1 \geq 0. \quad (10)$$

Это квадратное неравенство имеет корни

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{23}{27}} \right).$$

Поскольку рассматриваемый физический параметр удовлетворяет $0 < \mu_2 < 1$, из двух интервалов $(-\infty, \mu_-] \cup [\mu_+, \infty)$ нас интересует лишь левый. Следовательно,

$$\mu_2 < \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{23/27} \right) \approx 0.0385. \quad (1117)$$

Обозначив за критическое значение удельной массы $\mu_{crit} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{23/27} \right) \approx 0.0385$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} < \mu_{crit}. \quad (1118)$$

Возвращаясь к (1050) получаем, что $a_1(\text{при } \gamma^3) = 0$, $a_3(\text{при } \gamma) = 0$ и условие, если $\mu_2 < 0.0385$, то $\forall Re\lambda_i \leq 0$ - устойчивы по Ляпунову. При $\mu_2 \geq 0.0385$ будет $\exists \lambda : Re\lambda > 0$, значит - неустойчивые.

1.3 Итоги аналитического метода

Для 5 точек лагранжа:

- Коллинеарные точки L_1, L_2, L_3 - неустойчивы по Ляпунову $\forall \mu$
- Треугольные точки L_4, L_5 - устойчивы по Ляпунову при $\mu < \mu_{crit}$ и неустойчивы при $\mu \geq \mu_{crit}$

Если малое тело удовлетворяет этому условию для L_4, L_5 , возмущённое движение вокруг L_4 или L_5 остаётся ограниченным, что подтверждается орбитами троянских астероидов Юпитера и пылевыми облаками в системе Солнце–Земля.

2 Моделирование точек Лагранжа

2.1 Математическая модель

Модель — плоская ограниченная круговая задача трёх тел. Используются безразмерные величины

$$R^* = 1, \quad \Omega^* = 1, \quad G(m_1 + m_2) = 1.$$

2.1.1 Координаты

$$m_1 : (-\mu, 0), \quad m_2 : (1 - \mu, 0), \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

2.1.2 Эффективный потенциал

$$U(x, y) = -\frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}.$$

2.1.3 Уравнения движения в вращающейся системе

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= -\frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= -\frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1}$$

Вектор состояния $\mathbf{s} = (x, y, \dot{x}, \dot{y})$.

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= x - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{r_2^3}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}. \end{aligned}$$

 (EOM)

Отдельный расчет в функции `rhs`:

$$\begin{aligned} dUdx &= x - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{r_2^3}, \\ dUdy &= y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}, \\ a_x &= 2\dot{y} + dUdx, \quad a_y = -2\dot{x} + dUdy. \end{aligned}$$

Вдоль оси $y = 0$ точка Лагранжа задаётся уравнением

$$dUdx(x, \mu) = 0, \quad \text{где } dUdx \text{ указан выше.}$$

Решается система с начальными данными $\mathbf{s}_0 = (x_0 + \delta, y_0, 0, 0)$ методом DOP853 до безразмерного времени $t_{\max}^* = t_{\max} \Omega$.

2.2 Поиск точек Лагранжа

2.2.1 Коллинеарные $L_{1,2,3}$

Корни уравнения

$$x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-1+\mu|^3} = 0,$$

при $y = 0$ численно посчитаны.

2.2.2 Треугольные $L_{4,5}$

$$x = \frac{1}{2} - \mu, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.3 Вычисляемые величины для визуализации

Траектория $x(t), y(t)$ — вид сверху.

Фазовый портрет (x, v_x) как 2-D проекция фазы.

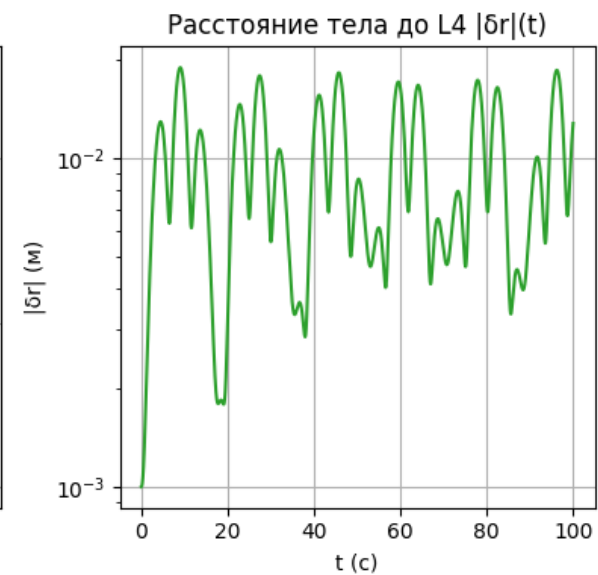
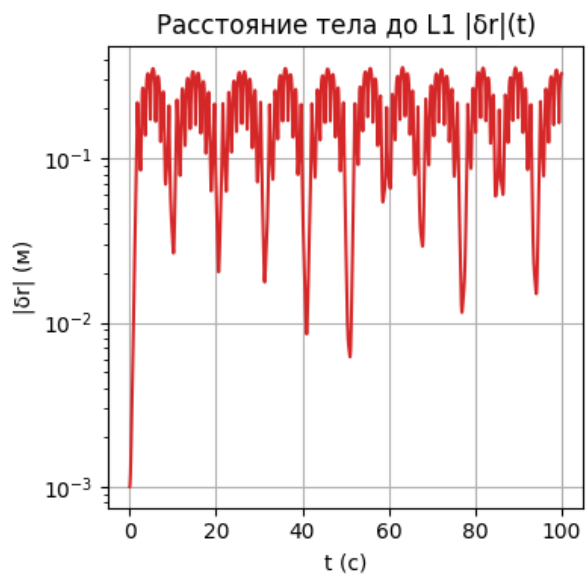
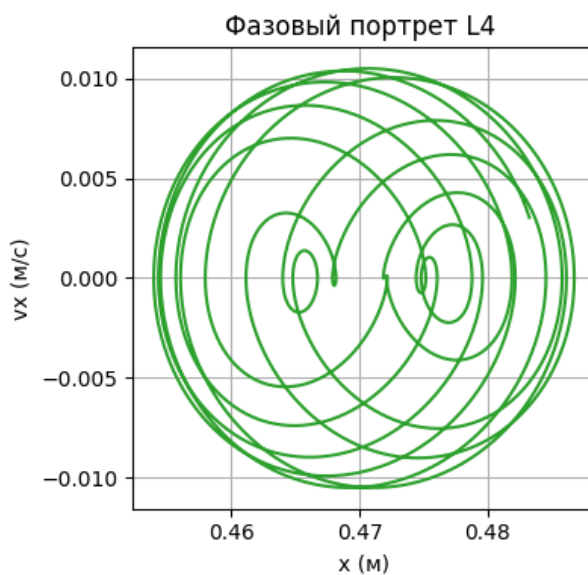
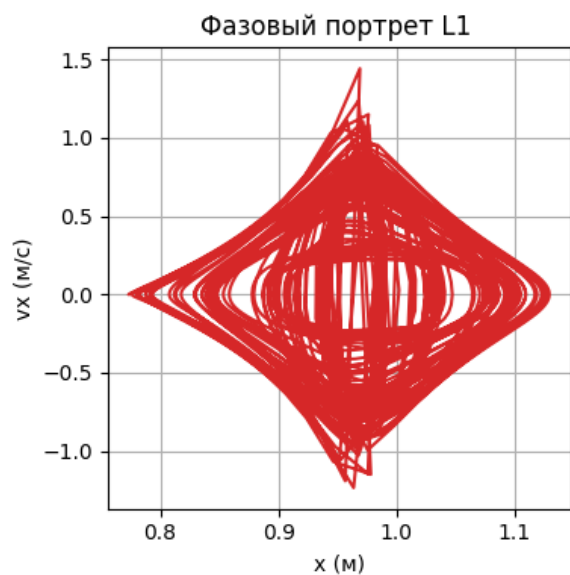
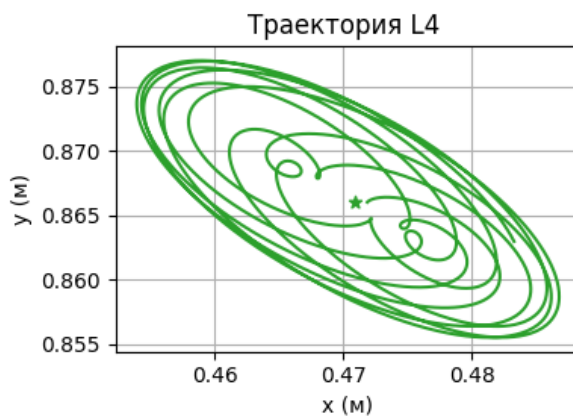
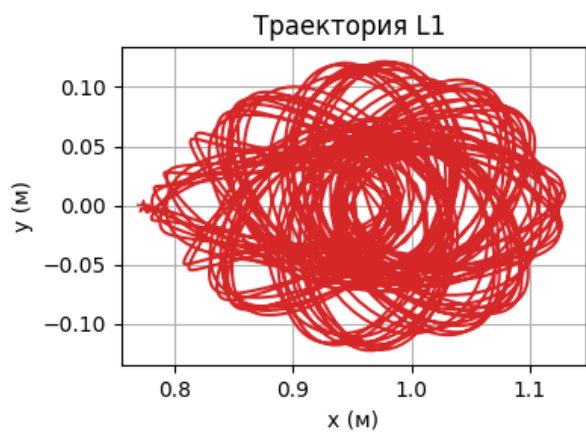
Либрационный радиус $|\delta r|(t) = \sqrt{(x - x_L)^2 + (y - y_L)^2}$, ось y в лог-масштабе.

Анимация последовательные точки (x, y) ; хвост длины 300 точек создаёт «след».

2.4 Обработка результатов

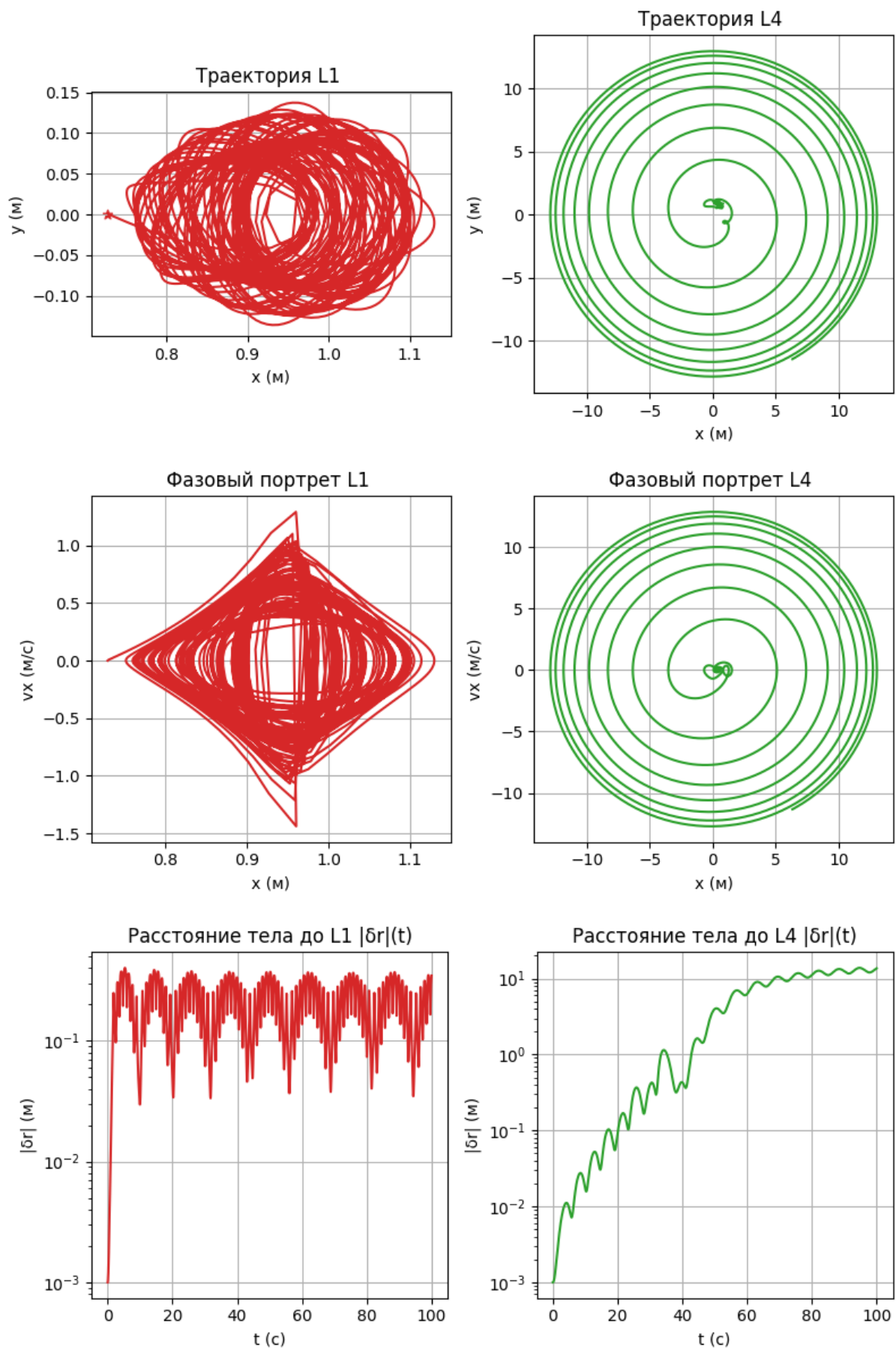
Будем рассматривать L_1, L_4 :

2.4.1 $\mu = 0.03$



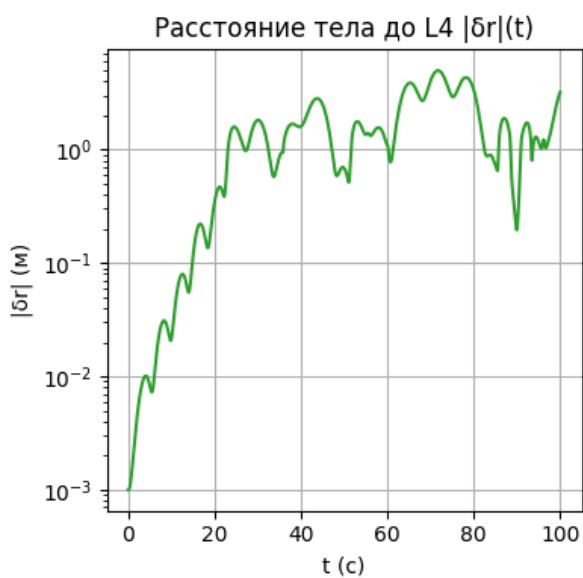
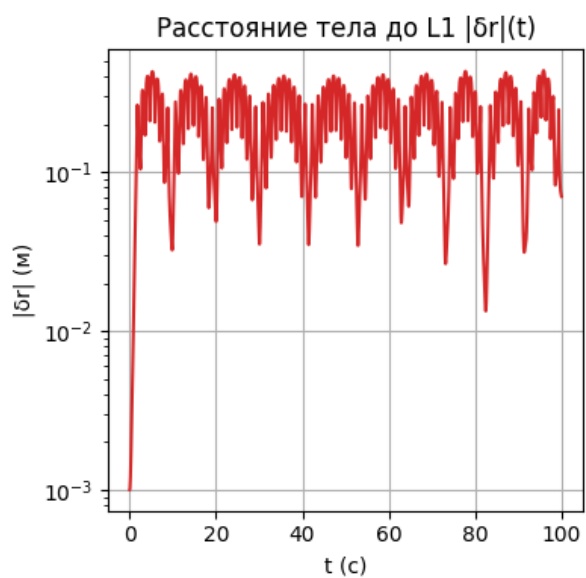
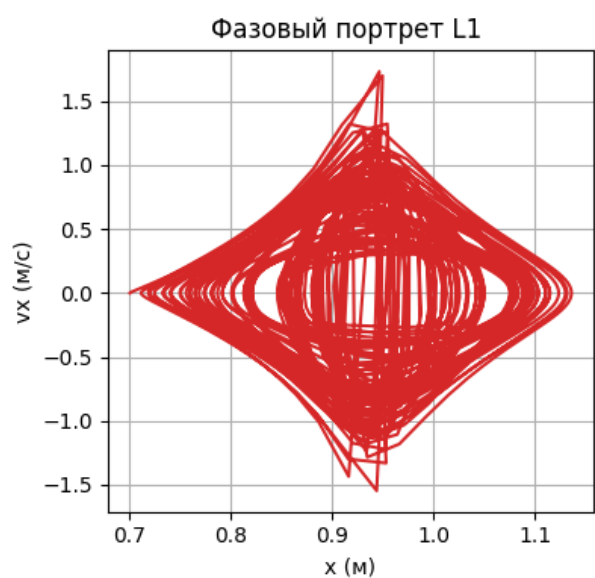
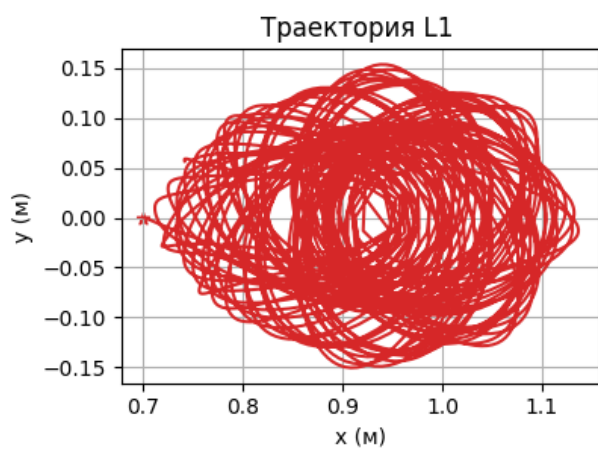
- **Параметры модели:** $m_1 = 1$, $m_2 = 0.03$ ($\mu = 0.0291 < 0.03852$).
- **Графики траекторий (x, y) :**
 для L_4 – узкая замкнутая кривая;
 для L_1 – расходящаяся спираль.
- **Фазовые портреты (x, v_x) :**
 для L_4 даёт концентрические овалы (центр Ляпунова);
 для L_1 заполняет ромбическую область (седло).
- **Лог-графики расстояния $|\delta r|(t)$:**
 L_4 : амплитуда остаётся в пределах 10^{-3} – 10^{-2} м;
 L_1 : быстро растёт до $\sim 10^{-1}$ м, далее колеблется возле границы ПНС.

2.4.2 $\mu = 0.047$



- **Параметры модели:** $m_1 = 1$, $m_2 = 0.047$ ($\mu = 0.044 > 0.03852$).
- **Графики траекторий (x, y) :**
 для L_4 – расходящаяся спираль;
 для L_1 – расходящаяся спираль.
- **Фазовые портреты (x, v_x) :**
 для L_4 расходящаяся окружность;
 для L_1 расходящийся ромб(седло).
- **Лог-графики расстояния $|\delta r|(t)$:**
 L_4 : Наличие вещественного положительного собственного значения λ . Тело удаляется от точки Лагранжа;
 L_1 : Виден рост расстояния от точки Лагранжа и достижение барьера ПНС.

2.4.3 $\mu = 0.057$



- **Параметры модели:** $m_1 = 1$, $m_2 = 0.06$ ($\mu = 0.057 > 0.03852$).
- **Графики траекторий** (x, y) :
для L_4 – смещение центра фигуры в m_1 - уход из точки Лагранжа;
для L_1 – расходящаяся спираль.
- **Фазовые портреты** (x, v_x) :
для L_4 расходящаяся окружность с начальным ромбом;
для L_1 расходящийся ромб(седло).
- **Лог-графики расстояния** $|\delta r|(t)$:
 L_4 : Наличие вещественного положительного собственного значения λ . Тело удаляется от точки Лагранжа;
 L_1 : Виден рост расстояния от точки Лагранжа и достижение барьера ПНС.

2.5 Интеграл Якоби

В плоской ограниченной круговой задаче трёх тел действует первый интеграл

$$C = 2U(x, y) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (\text{постоянен по времени}),$$

где $U = -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ – эффективный потенциал во вращающейся системе.
Из него следует *неравенство нулевой скорости*

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2U - C \implies 2U(x, y) \geq C.$$

Области, где $2U < C$, *запрещены* для движения (пришлось бы иметь отрицательную кинетическую энергию).

Поверхность $2U = C$ называют **поверхностью нулевой скорости** (ПНС);

2.6 Критические уровни C_i

Для каждой точки Лагранжа

$$C_i = 2U(L_i).$$

- L_1, L_2, L_3 – *седловые* точки U : ПНС имеет “горловины” (necks), которые открываются/закрываются в зависимости от того, выше или ниже текущий C относительного C_i .
- L_4, L_5 – *минимумы* U : окрестность точки всегда лежит *внутри* допускаемой области, а вокруг имеется замкнутый “остров” уровня C .

3 Источники

https://ru.wikipedia.org/wiki/РЧРерҮРөСљРө_СЃГГССЖ_СЃРхРњ

https://ru.wikipedia.org/wiki/РЧР,СЃРхРҮСГРөРњ_PsРәР«РҫРҫ

https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-07-dynamics-fall-2009/lecture-notes/MIT16_07F09_Lec18.pdf

<https://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newton/node124.html>

<https://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newton/node126.html>

<https://math-mech-astr-journal.spbu.ru/article/view/15502/10422>