

# Устойчивость точек Лагранжа в ограниченной задаче трёх тел

Аналитическое и численное исследование

## Содержание

<b>1</b>	<b>Аналитический метод</b>	<b>2</b>
1.1	Ограниченная задача трех тел . . . . .	2
1.2	Устойчивость точек Лагранжа . . . . .	4
1.2.1	Коллинеарные точки $L_1, L_2, L_3$ . . . . .	4
1.2.2	Треугольные точки $L_4$ и $L_5$ . . . . .	6
1.3	Итоги аналитического метода . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Моделирование точек Лагранжа</b>	<b>7</b>
2.1	Математическая модель . . . . .	7
2.1.1	Координаты . . . . .	7
2.1.2	Эффективный потенциал . . . . .	7
2.1.3	Уравнения движения в вращающейся системе . . . . .	7
2.2	Поиск точек Лагранжа . . . . .	8
2.2.1	Коллинеарные $L_{1,2,3}$ . . . . .	8
2.2.2	Треугольные $L_{4,5}$ . . . . .	8
2.3	Вычисляемые величины для визуализации . . . . .	8
2.4	Обработка результатов . . . . .	8
2.4.1	$\mu = 0.03$ . . . . .	9
2.4.2	$\mu = 0.047$ . . . . .	11
2.4.3	$\mu = 0.057$ . . . . .	13
2.5	Интеграл Якоби . . . . .	14
2.6	Критические уровни $C_i$ . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Источники</b>	<b>14</b>

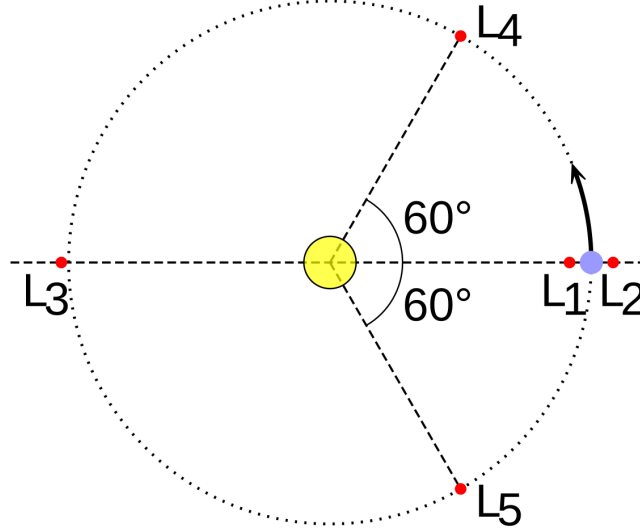


Рис. 1: Положения точек Лагранжа

## 1 Аналитический метод

### 1.1 Ограниченная задача трех тел

Перейдём к неинерциальной системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной плоскости орбит масс  $m_1$  и  $m_2$  и проходящей через их центр масс. В такой со-вращающейся системе  $m_1$  и  $m_2$  покоятся. Введём декартову систему координат  $(x, y)$  так, чтобы обе массивные частицы всегда находились на оси  $x$ .

Массы  $m_1$  и  $m_2$  занимают фиксированные положения

$$\mathbf{r}_1 = \mu_2 (-1, 0, 0), \quad \mathbf{r}_2 = \mu_1 (1, 0, 0), \quad (1)$$

где  $\mu_1 = m_1/(m_1 + m_2)$  и  $\mu_2 = m_2/(m_1 + m_2)$ , а положение пробной массы  $m_3$  опишем вектором.

Можно также ввести общий коэффициент  $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$   $\mu_2 = \mu, \mu_1 = 1 - \mu$ , использовался в численных методах

$$\mathbf{r} = (x, y, z). \quad (2)$$

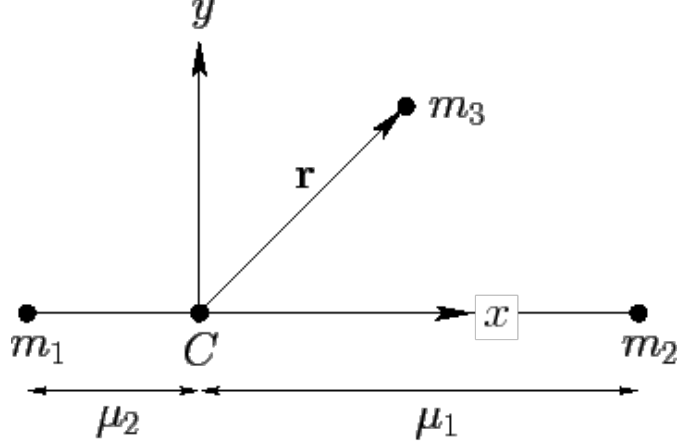


Рис. 2: Со-вращающаяся система координат, связанная с массами  $m_1$  и  $m_2$ .

Уравнение движения  $m_3$  в этой системе имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{\rho_1^3} - \frac{\mu_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{\rho_2^3} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (1050)$$

где  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ , а

$$\rho_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2, \quad (1051)$$

$$\rho_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2. \quad (1052)$$

Второй член в левой части (1050) — кориолисово ускорение, а последний член в правой части — центробежное ускорение.

Рассматривая декартовы компоненты, из (1050) получаем

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -\frac{\mu_1(x + \mu_2)}{\rho_1^3} - \frac{\mu_2(x - \mu_1)}{\rho_2^3} + \omega^2 x, \quad (1053)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = -\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\right)y + \omega^2 y, \quad (1054)$$

$$\ddot{z} = -\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\right)z. \quad (1055)$$

Введём комбинированный потенциал (гравитационный + центробежный)

$$U(x, y, z) = -\frac{\mu_1}{\rho_1} - \frac{\mu_2}{\rho_2} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (1059)$$

Тогда уравнения (1053)–(1055) можно записать компактно как

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} = -\nabla U, \quad \mathbf{q} = (x, y, z). \quad (1056\text{--}1058)$$

Следует дифференциальное тождество

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U \right] = 0, \quad (1063)$$

что приводит к интегралу Якоби

$$C = -2U - v^2, \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \quad (1064)$$

ограничивающему область допустимого движения условием  $-2U \geq C$ .

## 1.2 Устойчивость точек Лагранжа

Пять точек Лагранжа  $L_1$ – $L_5$  являются точками равновесия для массы  $m_3$  в со-вращающейся системе. Определим их устойчивость при малых возмущениях.

Пусть координаты точки Лагранжа  $(x_0, y_0, 0)$ . Для малых отклонений положим

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y, \quad z = 0. \quad (1097-1099)$$

Разложив потенциал в ряд Тейлора до второго порядка и учитывая, что  $\nabla U = 0$  в самой точке, получим

$$U \approx U_0 + \frac{1}{2}U_{xx}\delta x^2 + U_{xy}\delta x\delta y + \frac{1}{2}U_{yy}\delta y^2. \quad (1101)$$

Подставляя (1101) в линеаризованные уравнения движения и полагая  $\delta x, \delta y \propto e^{\gamma t}$ , приходим к системе

$$\begin{pmatrix} \gamma^2 + U_{xx} & -2\gamma + U_{xy} \\ 2\gamma + U_{xy} & \gamma^2 + U_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1104)$$

Необходимое условие ненулевого решения — зануление детерминанта, что даёт уравнение

$$\gamma^4 + (4 + U_{xx} + U_{yy})\gamma^2 + (U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2) = 0. \quad (1105)$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}, & B &= 3\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^5} + \frac{\mu_2}{\rho_2^5}\right)y^2, & (1106-1109) \\ C &= 3\left[\frac{\mu_1(x + \mu_2)}{\rho_1^5} + \frac{\mu_2(x - \mu_1)}{\rho_2^5}\right]y, & D &= 3\left[\frac{\mu_1(x + \mu_2)^2}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2(x - \mu_1)^2}{\rho_2^3}\right], & (3) \end{aligned}$$

что приводит к

$$U_{xx} = A - D - 1, \quad U_{yy} = A - B - 1, \quad U_{xy} = -C. \quad (1110-1112)$$

### 1.2.1 Коллинеарные точки $L_1, L_2, L_3$

Для  $y = 0$  получаем  $B = C = 0$ ,  $D = 3A$ , откуда

$$U_{xx} = -1 - 2A, \quad U_{yy} = A - 1, \quad U_{xy} = 0. \quad (*)$$

Обозначив  $\Gamma = \gamma^2$ , характеристическое уравнение принимает вид

$$\Gamma^2 + (2 - A)\Gamma + (1 - A)(1 + 2A) = 0. \quad (1113)$$

Обозначим

$$a_1 = 2 - A, \quad a_0 = (1 - A)(1 + 2A).$$

Для действительных корней справедливо(т.Виета)

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = -a_1 = -(2 - A), \quad \Gamma_1\Gamma_2 = a_0.$$

Чтобы оба корня были *отрицательными*, необходимо и достаточно

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 < 0 \text{ (сумма отрицательна),} \quad \Gamma_1\Gamma_2 > 0 \text{ (произведение положительно).}$$

Откуда

$$-(2 - A) < 0 \implies 2 - A > 0 \implies A < 2, \quad (4)$$

$$(1 - A)(1 + 2A) > 0. \quad (5)$$

Поскольку  $1 + 2A > 0$  при всех  $A > -\frac{1}{2}$ , второе неравенство эквивалентно

$$A < 1.$$

Требование вещественности (дискриминант):

$$D = (2 - A)^2 - 4(1 - A)(1 + 2A) = 9A^2 - 8A = A(9A - 8) \geq 0. \quad (6)$$

При условии  $A > 0$  получаем

$$A \geq \frac{8}{9}.$$

Сводя воедино требования

$$A < 1, \quad A \geq \frac{8}{9},$$

получаем

$$\frac{8}{9} \leq A < 1 \quad (7)$$

Используя условие на дискриминант и т.Виета получаем, что корни будут отрицательными и действительными лишь при

$$\frac{8}{9} \leq A \leq 1. \quad (1115)$$

На рис. 3 показано, что для любых  $0 < \mu_2 \leq 0.5$  величина  $A$  в точках  $L_1$ – $L_3$  превышает 1, значит, везде  $\exists \lambda : \text{Re} \lambda > 0$ , поэтому эти точки неустойчивы по т.Ляпунова о лин. приближении.

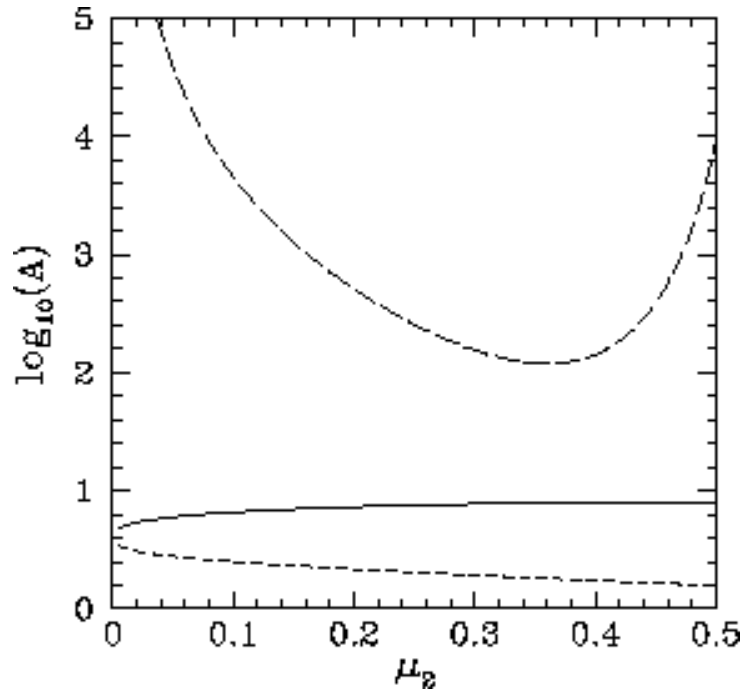


Рис. 3: Зависимость параметра  $A$  от массового отношения  $\mu_2$  для коллинеарных точек  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ .

### 1.2.2 Треугольные точки $L_4$ и $L_5$

Для этих точек  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ , откуда  $A = 1$ ,  $B = 9/4$ ,  $D = 3/4$  и

$$U_{xy} = \mp \sqrt{27/16} (1 - 2\mu_2).$$

Уравнение на  $\Gamma$ :

$$\Gamma^2 + \Gamma + \frac{27}{4} \mu_2 (1 - \mu_2) = 0. \quad (1116)$$

Чтобы корни были также действительными, проверяем дискриминант:

$$D = 1 - 4a_0 = 1 - 27 \mu_2 (1 - \mu_2) \geq 0. \quad (8)$$

Преобразуем:

$$1 - 27\mu_2 + 27\mu_2^2 \geq 0, \quad (9)$$

$$27\mu_2^2 - 27\mu_2 + 1 \geq 0. \quad (10)$$

Это квадратное неравенство имеет корни

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{23}{27}} \right).$$

Поскольку рассматриваемый физический параметр удовлетворяет  $0 < \mu_2 < 1$ , из двух интервалов  $(-\infty, \mu_-] \cup [\mu_+, \infty)$  нас интересует лишь левый. Следовательно,

$$\mu_2 < \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{23/27} \right) \approx 0.0385. \quad (1117)$$

Обозначив за критическое значение удельной массы  $\mu_{crit} = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{23/27}) \approx 0.0385$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} < \mu_{crit} \text{ (критерий Гаше (Gascheau stability criterion))} \quad (1118)$$

Возвращаясь к (1050) получаем, что  $a_1(\text{при } \gamma^3) = 0, a_3(\text{при } \gamma) = 0$  и условие, если  $\mu_2 < 0.0385$ , то  $\forall Re\lambda_i \leq 0$  - устойчивы по Ляпунову. При  $\mu_2 \geq 0.0385$  будет  $\exists \lambda : Re\lambda > 0$ , значит - неустойчивы по т.Ляпунова о лин. приближении.

### 1.3 Итоги аналитического метода

Для 5 точек лагранжа:

- Коллинеарные точки  $L_1, L_2, L_3$  - неустойчивы по Ляпунову  $\forall \mu$
- Треугольные точки  $L_4, L_5$  - устойчивы по Ляпунову при  $\mu < \mu_{crit}$  (критерий Гаше) и неустойчивы при  $\mu \geq \mu_{crit}$

Если малое тело удовлетворяет этому условию для  $L_4, L_5$ , возмущённое движение вокруг  $L_4$  или  $L_5$  остаётся ограниченным, что подтверждается орбитами троянских астероидов Юпитера и пылевыми облаками в системе Солнце–Земля.

## 2 Моделирование точек Лагранжа

### 2.1 Математическая модель

Модель — плоская ограниченная круговая задача трёх тел. Используются безразмерные величины

$$R^* = 1, \quad \Omega^* = 1, \quad G(m_1 + m_2) = 1.$$

#### 2.1.1 Координаты

$$m_1 : (-\mu, 0), \quad m_2 : (1 - \mu, 0), \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

#### 2.1.2 Эффективный потенциал

$$U(x, y) = -\frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}.$$

#### 2.1.3 Уравнения движения в вращающейся системе

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= -\frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= -\frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1}$$

Вектор состояния  $\mathbf{s} = (x, y, \dot{x}, \dot{y})$ .

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= x - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{r_2^3}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}. \end{aligned}} \tag{EOM}$$

Отдельный расчет в функции `rhs`:

$$\begin{aligned} dUdx &= x - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{r_2^3}, \\ dUdy &= y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}, \\ a_x &= 2\dot{y} + dUdx, \quad a_y = -2\dot{x} + dUdy. \end{aligned}$$

Вдоль оси  $y = 0$  точка Лагранжа задаётся уравнением

$$dUdx(x, \mu) = 0, \quad \text{где } dUdx \text{ указан выше.}$$

Решается система с начальными данными  $\mathbf{s}_0 = (x_0 + \delta, y_0, 0, 0)$  методом DOP853 до безразмерного времени  $t_{\max}^* = t_{\max} \Omega$ .

## 2.2 Поиск точек Лагранжа

### 2.2.1 Коллинеарные $L_{1,2,3}$

Корни уравнения

$$x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-1+\mu|^3} = 0,$$

при  $y = 0$  численно посчитаны.

### 2.2.2 Треугольные $L_{4,5}$

$$x = \frac{1}{2} - \mu, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

## 2.3 Вычисляемые величины для визуализации

**Траектория**  $x(t), y(t)$  — вид сверху.

**Фазовый портрет**  $(x, v_x)$  как 2-D проекция фазы.

**Либрационный радиус**  $|\delta r|(t) = \sqrt{(x - x_L)^2 + (y - y_L)^2}$ , ось  $y$  в лог-масштабе.

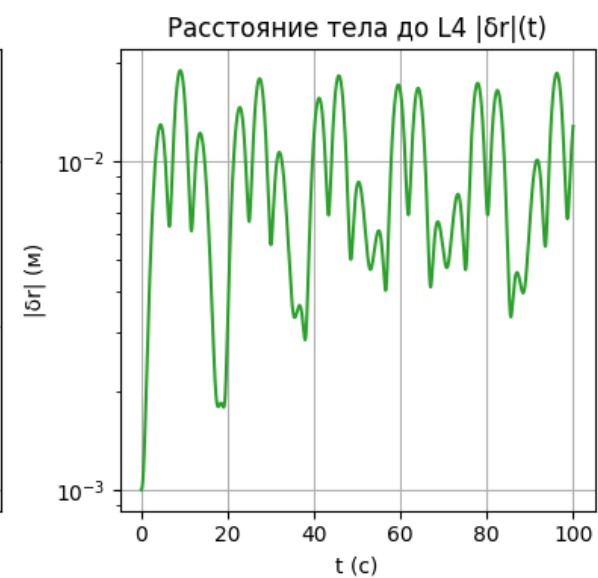
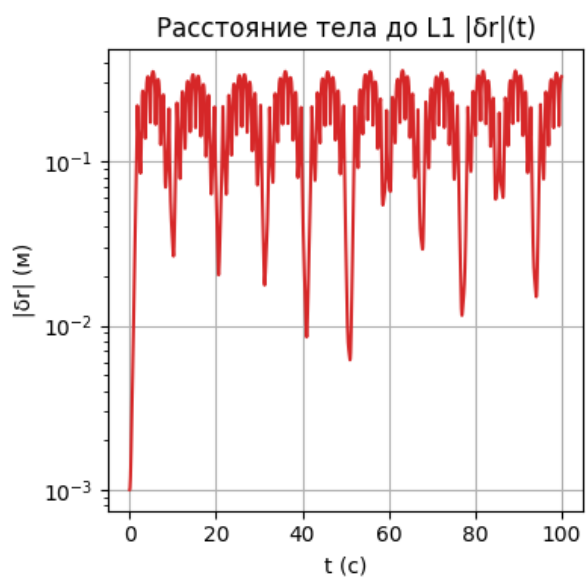
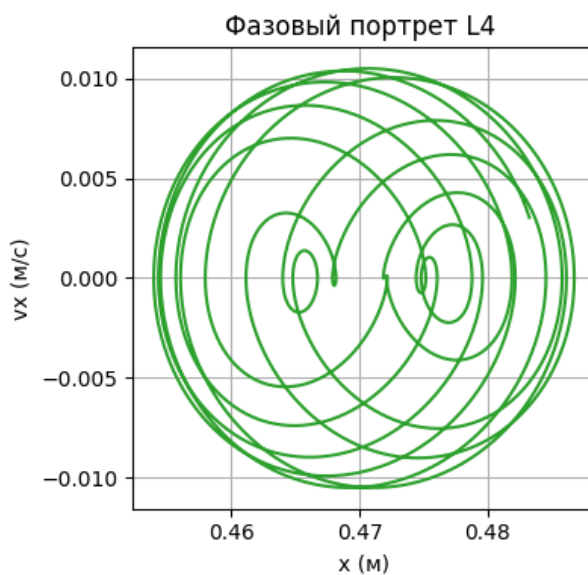
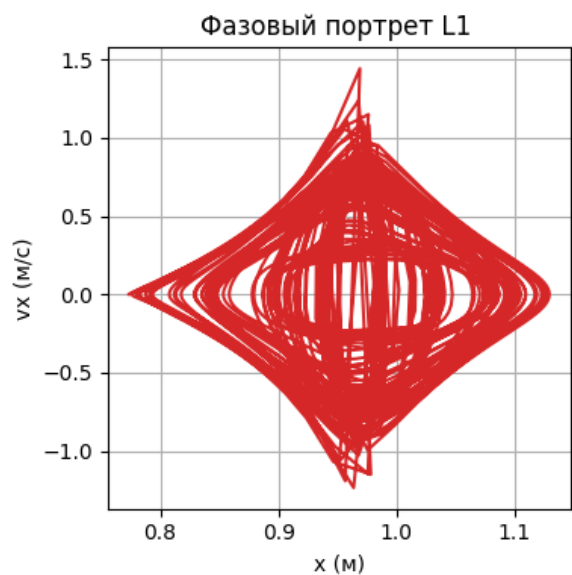
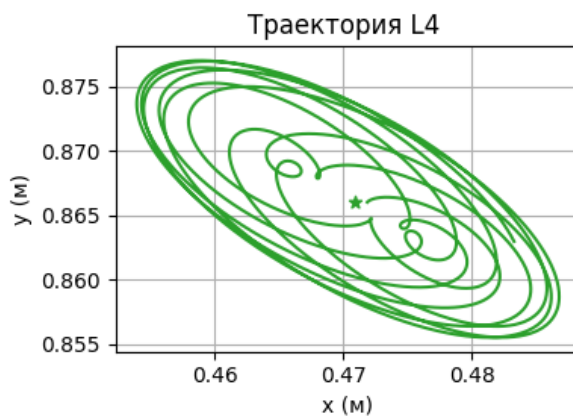
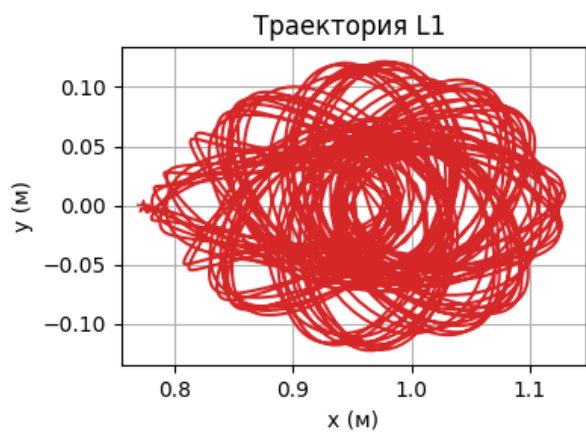
**Анимация** последовательные точки  $(x, y)$ ; хвост длины 300 точек создаёт «след».

## 2.4 Обработка результатов

Будем рассматривать  $L_1, L_4$ :

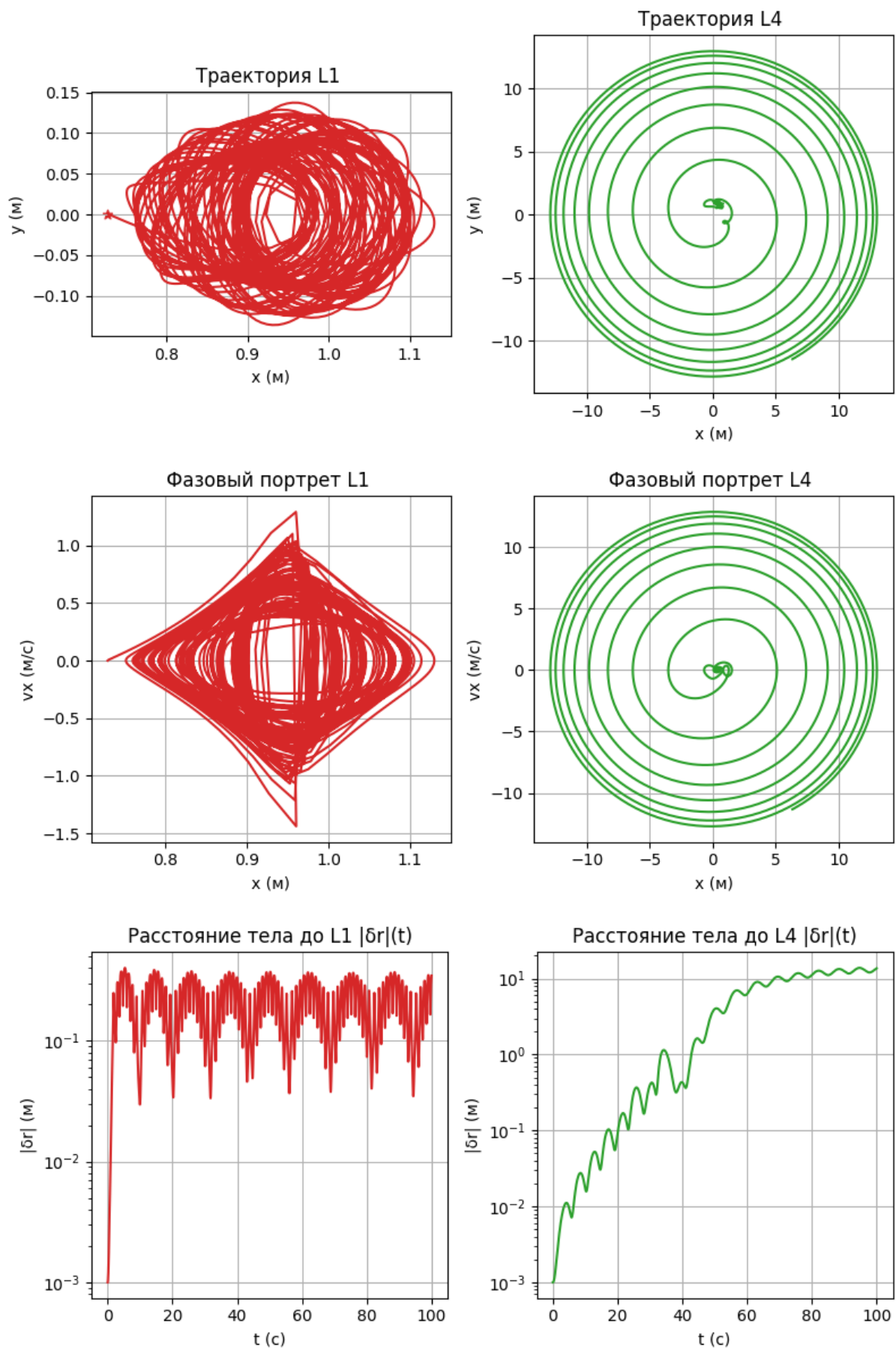


### 2.4.1 $\mu = 0.03$



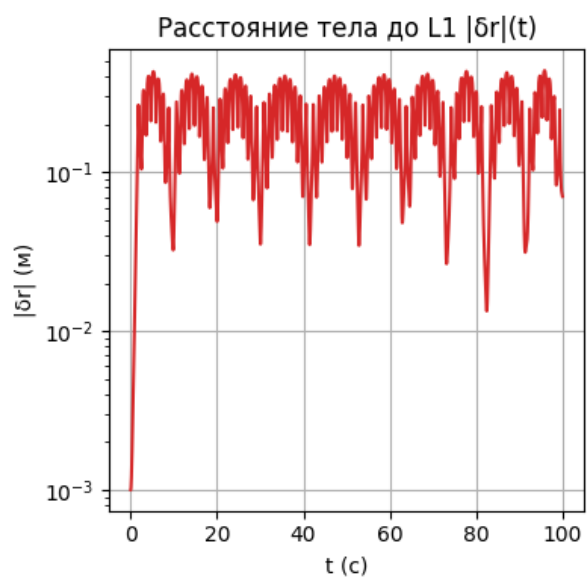
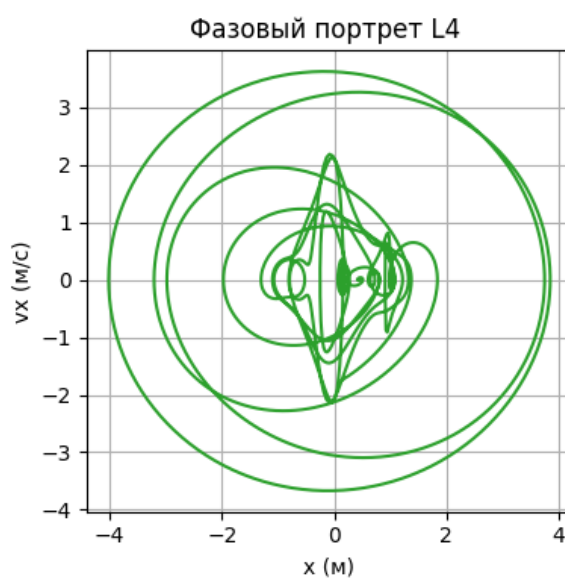
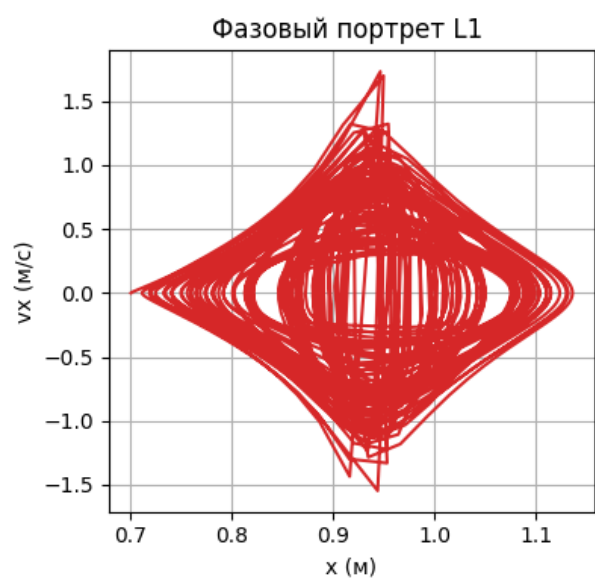
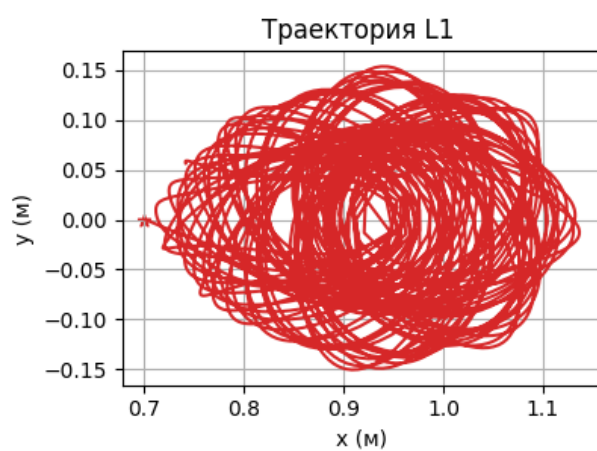
- **Параметры модели:**  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0.03$  ( $\mu = 0.0291 < 0.03852$ ).
- **Графики траекторий  $(x, y)$ :**  
 для  $L_4$  – узкая замкнутая кривая;  
 для  $L_1$  – расходящаяся спираль.
- **Фазовые портреты  $(x, v_x)$ :**  
 для  $L_4$  даёт концентрические овалы (центр Ляпунова);  
 для  $L_1$  заполняет ромбическую область (седло).
- **Лог-графики расстояния  $|\delta r|(t)$ :**  
 $L_4$ : амплитуда остаётся в пределах  $10^{-3}$ – $10^{-2}$  м;  
 $L_1$ : быстро растёт до  $\sim 10^{-1}$  м, далее колеблется возле границы ПНС.

### 2.4.2 $\mu = 0.047$



- **Параметры модели:**  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0.047$  ( $\mu = 0.044 > 0.03852$ ).
- **Графики траекторий  $(x, y)$ :**
  - для  $L_4$  – расходящаяся спираль;
  - для  $L_1$  – расходящаяся спираль.
- **Фазовые портреты  $(x, v_x)$ :**
  - для  $L_4$  расходящаяся окружность;
  - для  $L_1$  расходящийся ромб(седло).
- **Лог-графики расстояния  $|\delta r|(t)$ :**
  - $L_4$ : Наличие вещественного положительного собственного значения  $\lambda$ . Тело удаляется от точки Лагранжа;
  - $L_1$ : Виден рост расстояния от точки Лагранжа и достижение барьера ПНС.

### 2.4.3 $\mu = 0.057$



- **Параметры модели:**  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0.06$  ( $\mu = 0.057 > 0.03852$ ).
- **Графики траекторий**  $(x, y)$ :  
для  $L_4$  – смещение центра фигуры в  $m_1$  – уход из точки Лагранжа;  
для  $L_1$  – расходящаяся спираль.
- **Фазовые портреты**  $(x, v_x)$ :  
для  $L_4$  расходящаяся окружность с начальным ромбом;  
для  $L_1$  расходящийся ромб(седло).
- **Лог-графики расстояния**  $|\delta r|(t)$ :  
 $L_4$ : Наличие вещественного положительного собственного значения  $\lambda$ . Тело удаляется от точки Лагранжа;  
 $L_1$ : Виден рост расстояния от точки Лагранжа и достижение барьера ПНС.

## 2.5 Интеграл Якоби

В плоской ограниченной круговой задаче трёх тел действует первый интеграл

$$C = 2U(x, y) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (\text{постоянен по времени}),$$

где  $U = -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  – эффективный потенциал во вращающейся системе.

Из него следует *неравенство нулевой скорости*

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2U - C \implies 2U(x, y) \geq C.$$

Области, где  $2U < C$ , *запрещены* для движения (пришлось бы иметь отрицательную кинетическую энергию).

Поверхность  $2U = C$  называют **поверхностью нулевой скорости** (ПНС);

## 2.6 Критические уровни $C_i$

Для каждой точки Лагранжа

$$C_i = 2U(L_i).$$

- $L_1, L_2, L_3$  — *седловые* точки  $U$ : ПНС имеет “горловины” (pecks), которые открываются/закрываются в зависимости от того, выше или ниже текущий  $C$  относительного  $C_i$ .
- $L_4, L_5$  — *минимумы*  $U$ : окрестность точки всегда лежит *внутри* допускаемой области, а вокруг имеется замкнутый “остров” уровня  $C$ .

## 3 Источники

[https://ru.wikipedia.org/wiki/РЧРёРүРёСљРё\\_СЃГ'СЃСЖ\\_СЃРхРђ](https://ru.wikipedia.org/wiki/РЧРёРүРёСљРё_СЃГ'СЃСЖ_СЃРхРђ)

[https://ru.wikipedia.org/wiki/РЧР,СЃРхРүСЃГРёРђ\\_PsРёР«РЃРч](https://ru.wikipedia.org/wiki/РЧР,СЃРхРүСЃГРёРђ_PsРёР«РЃРч)

[https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-07-dynamics-fall-2009/lecture-notes/MIT16\\_07F09\\_Lec18.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-07-dynamics-fall-2009/lecture-notes/MIT16_07F09_Lec18.pdf)

<https://hal.science/hal-00552502/document>

[https://scholarworks.sjsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=8093&context=etd\\_](https://scholarworks.sjsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=8093&context=etd_)

theses

<https://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newton/node124.html>

<https://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newton/node126.html>

<https://math-mech-astr-journal.spbu.ru/article/view/15502/10422>