TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG

TỔ TOÁN

---ꕥ📖ꕥ---

CHUYÊN ĐỀ

ĐẾM BẰNG HAI CÁCH

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN

PHẠM THỊ THÙY

HỌC SINH THỰC HIỆN

LƯƠNG THỊ PHƯƠNG AN

LÊ ĐĂNG KHOA

PHẠM VIỆT THÁI

LỚP 11A1

Cần Thơ, Tháng 5/ 2020

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG

TỔ TOÁN

CHUYÊN ĐỀ

ĐẾM BẰNG HAI CÁCH

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN

PHẠM THỊ THÙY

HỌC SINH THỰC HIỆN

LƯƠNG THỊ PHƯƠNG AN

LÊ ĐĂNG KHOA

PHẠM VIỆT THÁI

LỚP 11A1

Cần Thơ, Tháng 5/ 2020

MỤC LỤC

Trang

DANH SÁCH BẢNG

Trang

Phần 1. GIỚI THIỆU

1.1. Đặt vấn đề

Có nhiều công cụ để giải quyết các bài toán tổ hợp như sử dụng nguyên lý Dirichlet, nguyên lý bao hàm loại trừ, xây dựng công thức truy hồi, phương pháp hàm sinh và đếm bằng hai cách,... Trong các công cụ đó thì những bài toán sử dụng tư duy đếm bằng 2 cách là những bài toán hay giúp rèn luyện và kiểm tra được khả năng tư duy của học sinh. Vì nó là những bài toán có tính trừu tượng và phải biết cách khai thác những giả thiết của bài toán mà nhiều khi ta khó nhìn ra được mối liên hệ giữa những giả thiết hoặc giữa giả thiết và kết luận. Hơn nữa trong nhiều bài toán ta cần sử dụng bất đẳng thức tổ hợp để đánh giá. Thực tế vì những lý do trên mà các bài toán sử dụng công cụ này xuất hiện nhiều trong các kì thi như IMO, China MO, Russia MO và cả trong kì thi VMO nữa. Tuy nhiên, chưa có nhiều tài liệu viết về vấn đề này. Vì vậy, chuyên đề "Đếm bằng 2 cách" được thực hiện nhằm phục vụ cho các bạn học sinh có cơ hội tìm hiểu sâu hơn về phương pháp này.

1.2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu chính khi nghiên cứu đề tài này là để nắm vững lí thuyết cơ bản về phép đếm trong tổ hợp. Cùng với đó là ứng dụng các quy tắc đếm và một số đẳng thức, bất đẳng thức tổ hợp vào các bài toán trong các kì thi chọn học sinh giỏi. Đề tài là tài liệu tham khảo bổ ích cho các học sinh chuyên Toán, những người có niềm đam mê với môn Toán Tổ hợp và muốn tìm hiểu, mở rộng hiểu biết về các quy tắc đếm. Đồng thời, có thể áp dụng để giải các bài toán ở bậc trung học một cách dễ dàng hơn.

Phần 2. KẾ HOẠCH THỰC HIỆN

THỜI GIAN	NỘI DUNG CÔNG VIỆC	NGƯỜI THỰC HIỆN
06/09/2019	Nhận đề tài	Cả nhóm
02/09/2019 – 01/10/2019	Nghiên cứu, phân tích, tìm tài liệu	Cả nhóm
02/10/2019 – 08/10/2019	Viết đề cương	Cả nhóm
09/10/2019 – 15/10/2019	Trao đổi với giáo viên hướng dẫn và hoàn thiện đề cương	Cả nhóm
12/11/2019 – 19/11/2019	Báo cáo đề cương chuyên đề	Cả nhóm
15/12/2019 – 5/1/2020 12/1/2020 – 20/2/2020 23/2/2020 – 28/3/2020	Viết nội dung chuyên đề ➢ Phần 1 ➢ Phần 2 ➢ Phần 3	Cả nhóm
21/3/2020 – 30/4/2020	Giáo viên hướng dẫn và góp ý Học sinh sửa chữa và hoàn thiện đề tài	Cả nhóm
25/5/2020	Báo cáo đề tài	Cả nhóm

Phần 3. NỘI DUNG CHUYÊN ĐỀ

3.1. Kiến thức cơ bản

3.1.1. Các qui tắc đếm

a. Qui tắc cộng

Một công việc được hoàn thành trong k trường hợp khác nhau.

Trường hợp thứ 1 có n_1 cách thực hiện

Trường hợp thứ 2 có n_2 cách thực hiện

...

Trường hợp thứ k có n_k cách thực hiện

Khi đó, có $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ cách để hoàn thành công việc đã cho.

$\Rightarrow$ Một đẳng thức tổ hợp có k số hạng thì phải xây dựng được cấu hình đếm sao cho có đủ k trường hợp.

b. Qui tắc nhân

Một công việc được hoàn thành trong k bước khác nhau.

Bước thứ 1 có m_1 cách thực hiện

Bước thứ 2 có m_2 cách thực hiện

...

Bước thứ k có m_k cách thực hiện

Khi đó, có $m_1.m_2...m_k$ cách để hoàn thành công việc đã cho.

$\Rightarrow$ Một đẳng thức tổ hợp có tích của k số thì phải hiểu cách xây dựng cấu hình đếm sao cho có đủ k bước.

3.1.2. Ý nghĩa của một số giá trị trong phép đếm

- $n!$ là số cách sắp xếp n vật vào n vị trí khác nhau hay số hoán vị của n vật khác nhau.
- A_n^k là số cách lấy ra k vật từ n vật và xếp vào k vị trí khác nhau.
- C_n^k là số cách lấy ra k vật từ n vật đã cho hoặc là số tập con có k phần tử của tập X có n phần tử.
- 2^m là số tập con của tập X có m phần tử hoặc số cách chọn m phần tử từ m cặp, mỗi cặp lấy 1 phần tử.
- $2^m - 1$ là số tập con khác rỗng của tập X có m phần tử.
- $\left[\frac{n}{k}\right]$ là số các bội số của k trong n số tự nhiên đầu tiên.
- n^k là số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử.

3.2. Nguyên lí đếm bằng hai cách

3.2.1. Phát biểu nguyên lí

Nếu cùng một số lượng được đếm theo hai cách thì các kết quả thu được phải bằng nhau.

3.2.2. Những dạng toán ứng dụng nguyên lí đếm bằng hai cách

a. Các bài toán về đẳng thức tổ hợp

Bài 1: Cho k,n là các số tự nhiên sao cho $0 \le k \le n$. Chứng minh $C_n^k = C_n^{n-k}$

Lời giải

Áp dụng đếm bằng 2 cách:

Cách 1: Giả sử $X = \{1,2,...,n\}$.

Lấy ra k phần tử trong X được tập con A có k phần tử của X

$\Rightarrow$ số cách lấy là C_n^k.

Cách 2: Ta lấy từ X ra $n-k$ phần tử và bỏ $n-k$ phần tử này đi

$\Rightarrow$ Còn lại k phần tử ta được tập A là con của X có k phần tử.

$\Rightarrow$ Số cách lấy $n-k$ phần tử bỏ đi là C_n^{n-k}

Vậy suy ra $C_n^k = C_n^{n-k}$ (đpcm).

Bài 2: Cho $n \ge 2$, k là số tự nhiên thỏa mãn $1 \le k \le n$. Chứng minh: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Hướng dẫn: Vế trái là C_n^k cho ta ý tưởng về việc đếm số tập con có k phần tử của một tập có n phần tử. Vế phải là một tổng 2 số hạng $\Rightarrow$ chia hai trường hợp đếm số tập con có k phần tử.

Lời giải

Giả sử $X = \{1,2,...,n\}$

Cách 1: Số tập con có k phần tử của X là C_n^k.

Cách 2: Xét $X = \{1,2,\ldots,n-1\} \cup \{n\} = Y \cup \{n\}$. Tập con A của X có 2 trường hợp

TH1: A là tập con có k phần tử của Y: có C_{n-1}^k tập

TH2: $n \in A$. Lấy thêm $k-1$ phần tử từ Y để được tập có k phần tử: Có C_{n-1}^{k-1} cách

$\Rightarrow$ Số tập A là $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Vậy ta có: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ (đpcm)

Bài 3: Cho $n \geq 1$, n là số tự nhiên. Chứng minh: $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$

Hướng dẫn: Vế phải là số tập con có n phần tử của tập có $2n$ phần tử.

Đẳng thức tương đương với: $C_n^0.C_n^n + C_n^1.C_n^{n-1} + \ldots C_n^n.C_n^0 = C_{2n}^n$

Lời giải

Giả sử $X = \{1, 2, \ldots, 2n\}$. Đếm số tập con A có n phần tử của tập X.

Cách 1: Có C_{2n}^n tập con A như vậy.

Cách 2: Chia $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$, $X_2 = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$

Với mỗi k, $0 \leq k \leq n$. Lấy từ X_1 ra k phần tử có C_n^k cách, bổ sung thêm $n-k$ phần tử từ tập X_2 để được tập có n phần tử: có C_n^{n-k} cách. Vậy có $C_n^k.C_n^{n-k}$ cách.

Cho k chạy từ 0 đến n ta có tổng số cách lấy tập A có n phần tử là: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k.C_n^{n-k}$

Bài 4: Cho $0 \leq k \leq n$. Chứng minh: $\sum_{k=0}^{n} 2^k.C_n^k.C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} = C_{2n+1}^n$

Hướng dẫn: Vế phải là số tập con A có n phần tử của tập X có $2n+1$ phần tử $\Rightarrow$ Đếm số tập con A

Lời giải

Giả sử $X = \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$

Cách 1: Số tập con A của X có n phần tử là C_{2n+1}^n

Cách 2: Ta chia X thành n cặp $\{1,2\}, \{3,4\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}$ và $2n+1$.

Ta đếm như sau: Chọn ra k cặp từ n cặp trên: có C_n^k cách

Từ mỗi cặp đã chọn, lấy ra 1 phần tử $\Rightarrow$ có 2^k cách. Ta được k phần tử.

Từ $n-k$ cặp còn lại, lấy ra $\left[\frac{n-k}{2}\right]$ cặp $\Rightarrow$ có $C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$ cách

- Nếu $n-k$ chẵn $\Rightarrow \left[\frac{n-k}{2}\right] = \frac{n-k}{2} \Rightarrow$ Có $n-k$ phần tử
- Nếu $n-k$ lẻ $\Rightarrow \left[\frac{n-k}{2}\right] = \frac{n-k-1}{2} \Rightarrow$ Có $n-k-1$ phần tử

Ta chọn thêm phần tử x_{2n+1} để được $n-k$ phần tử

$\Rightarrow$ Ta được tập A có n phần tử.

Vậy số cách chọn tập A với mỗi k là: $2^k.C_n^k.C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$

Từ đó, ta có đẳng thức: $\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} = C_{2n+1}^n$ (đpcm).

Bài 5: Chứng minh với mọi số nguyên dương n: $\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^k 2^{m-k} + \sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^k.2^{n-k} = 2^{m+n+1}$

Hướng dẫn: Vế trái là số tập con của tập X có $m+n+1$ phần tử.

Lời giải

Giả sử $X = \{1, 2, 3, \ldots, m+n+1\}$, ta đếm số tập con của tập X

Cách 1: Có 2^{m+n+1} tập con của tập X.

Cách 2: Ta chia số tập con của X gồm 2 loại:

Loại 1: Số tập con của X có nhiều hơn n phần tử.

Xét $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+i}\}$ với $1 \le i \le m+1, x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+i}$ và $x_{n+1} = n+k+1$

$\Rightarrow$ A là tập có nhiều hơn n phần tử.

Ta đếm số tập A như sau:

- Trong tập $\{1, 2, 3, \ldots, n+k\}$ lấy ra n phần tử được tập B

$\Rightarrow$ Có C_{n+k}^n tập B, $0 \le k \le m$.

- Ta bổ sung vào tập B một tập con của tập $\{n+k+1, n+k+2, \ldots, n+m+1\}$

$\Rightarrow$ Có 2^{m-k} tập.

Vậy được $C_{n+k}^n.2^{m-k}$ tập A.

Cho k chạy từ 0 đến m $\Rightarrow$ Có số tập A là: $\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^m.2^{m-k}$

Loại 2: Số tập con của X có không ít hơn n phần tử bằng số tập con của X có nhiều hơn m phần tử.

Tương tự ta có: $\sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^n.2^{n-k}$

$\Rightarrow$ Số tập con của X là: $\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^m.2^{m-k} + \sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^n.2^{n-k}$

Ta có đẳng thức: $\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^m.2^{m-k} + \sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^n.2^{n-k} = 2^{m+n+1}$ (đpcm).

Bài 6: Chứng minh $\forall n\in\mathbb{N}^*$, ta có: $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=n.2^{n-1}$

Hướng dẫn: Vế phải là $n.2^{n-1}$, mà 2^{n-1} là số tập con của tập có $n-1$ phần tử, $n=C_n^1$ là số tập con có 1 phần tử của tập có n phần tử $\Rightarrow$ Đếm số cặp (a,A) với $\begin{cases} a\in X \\ A\subset X\setminus\{a\} \\ |X|=n \end{cases}$

Lời giải

Giả sử $X=\{1,2,\ldots,n\}$

Cách 1: Ta đếm số cặp (a,A) với $a\in X, A\subset X, a\notin A$.

- Chọn $a\in X$ $\Rightarrow$ có $C_n^1=n$ cách.
- Chọn $A\subset X\setminus\{a\}$ $\Rightarrow$ có 2^{n-1} tập A $\Rightarrow$ Có $n.2^{n-1}$ cặp (a,A).

Cách 2: Do $C_n^k=C_n^{n-k}$. Với mỗi k, $1\le k\le n$.

- Ta chọn từ X ra $n-k$ phần tử để được tập A $\Rightarrow$ có C_n^{n-k} cách.
- Từ k phần tử còn lại ta lấy ra 1 phần tử bất kì $\Rightarrow$ được k cách.

$\Rightarrow$ Có $k.C_n^{n-k}=kC_n^k$ cách.

Cho k chạy từ 1 đến n ta có, tổng số cách chọn cặp (a,A) là: $\sum_{k=1}^{n}kC_n^k$

Từ đó, ta có đpcm.

Bài 7: Chứng minh $\forall k,n\in\mathbb{N}^*\left(0\le k\le n\right): C_n^0.C_n^k+C_n^1C_{n-1}^{k-1}+\ldots+C_n^k.C_{n-k}^0=2^k.C_n^k$

Hướng dẫn: Vế phải là tích của $2^kC_n^k$ trong đó 2^k là số tập con của tập có k phần tử, C_n^k là tập con có k phần tử của tập có n phần tử. Bài toán trở thành đếm cặp (A,B) trong đó $A\subset X=\{1,2,\ldots,n\}, |A|=k, B\subset A$.

Lời giải

Giả sử $X=\{1,2,3,\ldots,n\}$.

Đếm cặp (A,B) trong đó $A\subset X=\{1,2,\ldots,n\}, |A|=k, B\subset A$

Cách 1:

- Gọi A là tập con có k phần tử của X $\Rightarrow$ có C_n^k tập.
- Trong k phần tử còn lại của A, lấy một tập con B bất kì $\Rightarrow$ có 2^k tập B

$\Rightarrow$ Số cặp (A,B) là: $2^kC_n^k$.

Cách 2: $\forall i, 0 \le i \le k$, ta thực hiện như sau:

- Chọn ra tập B có i phần tử từ X $\Rightarrow$ có C_n^i tập B.
- Với mỗi B, ta chọn thêm $k-i$ phần tử của tập $X \setminus B$ để được tập $A \Rightarrow$ có C_{n-i}^{k-i} cách

$\Rightarrow$ Có $C_n^i.C_{n-i}^{k-i}$ cách chọn.

Cho i chạy từ 0 đến k ta có tổng số cách chọn là: $\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_{n-i}^{k-i}$. Suy ra đpcm.

Bài 8: Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\left(C_n^1\right)^2 + 2\left(C_n^2\right)^2 + \ldots + n\left(C_n^n\right)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}$

Hướng dẫn: Vế phải là tích $n.C_{2n-1}^{n-1}$ ta chia ra làm 2 bước:

- **Bước 1:** Chọn ra 1 phần tử từ tập có n phần tử $\Rightarrow$ có n cách.
- **Bước 2:** Chọn ra 1 tập con có $n-1$ phần tử từ tập có $2n-1$ phần tử còn lại.

$\Rightarrow$ Xây dựng cấu hình đếm: Xét tập X có $2n$ phần tử, chia làm X_1, X_2 mỗi tập có n phần tử

$\Rightarrow$ Chọn ra cặp (a, A) với $a \in X_1,\ A \subset X \setminus \{a\}$.

Vì $\left(C_n^k\right)^2 = C_n^k.C_n^{n-k}$ nên ta có, đẳng thức cần chứng minh trở thành: $C_n^1.C_n^{n-1} + 2C_n^2.C_n^{n-2} + \ldots + nC_n^n C_n^0 = nC_{2n-1}^{n-1}$

Lời giải

Xét $X_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $X_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, X = X_1 \cup X_2$.

Đếm số cặp (a, A) với $a \in X_1,\ A \subset X \setminus \{a\}$

Cách 1: Chọn $a \in X$ có $C_n^1 = n$ cách. Do tập $X \setminus \{a\}$ có $2n-1$ phần tử, chọn 1 tập $A \subset X \setminus \{a\}$ có $n-1$ phần tử $\Rightarrow$ có C_{2n-1}^{n-1}.

Vậy có nC_{2n-1}^{n-1} cặp (a, A).

Cách 2: Với mỗi $k, 1 \le k \le n$.

- Chọn từ X_1 ra một tập B có k phần tử $\Rightarrow$ có C_n^k cách.
- Từ B chọn ra 1 phần tử a $\Rightarrow$ có $C_k^1 = k$ cách, B còn $k-1$ phần tử.
- Chọn thêm 1 tập có $n-k$ phần tử của X_2 bổ sung vào B để được tập có $(n-k)+(k-1) = n-1$ phần tử $\Rightarrow$ được tập A: Có C_n^{n-k} cách.

Vậy có $kC_n^k C_n^{n-k} = k\left(C_n^k\right)^2$.

Cho k chạy từ 1 đến n ta có tổng số cách chọn cặp (a, A) là: $\sum_{k=1}^{n} k\left(C_n^k\right)^2$ $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 9: Cho số tự nhiên $n \ge 1$. Một hoán vị của tập $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ được gọi là hoán vị bảo tồn $a \in A$ nếu như phần tử a ở nguyên vị trí cũ của nó trong hoán vị mới. Kí hiệu $P_n(k)$ là số hoán vị bảo tồn đúng k phần tử của A. Chứng minh rằng:

a) $kP_n(k) = nP_{n-1}(k-1)$

b) $\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = n!$

Lời giải

a) Với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n$, ta đi đếm số cặp (i, f) trong đó f bảo tồn đúng k vị trí và $f(i) = i$

Cách 1: Ta có số cách chọn i là k và số cách chọn f là $P_n(k)$ nên số cặp (i, f) là $kP_n(k)$.

Cách 2: Ta xét i là một phần tử cố định (tức là $f(i) = i$). Khi đó, ta có một hoán vị bảo tồn $k-1$ phần tử của tập $A' = A \setminus \{i\}$ và với mỗi hoán vị bảo tồn $k-1$ phần tử của A' ta bổ sung thêm i vào ta sẽ được một hoán vị bảo tồn k phần tử của A. Vì có n cách chọn i và có $P_{n-1}(k-1)$ hoán vị bảo tồn $k-1$ phần tử của tập A' nên số cặp (i, f) là $nP_{n-1}(k-1)$

$\Rightarrow kP_n(k) = nP_{n-1}(k-1)$

b) Theo ý a) ta có: $\sum_{k=1}^{n} kP_n(k) = n\sum_{k=1}^{n} P_{n-1}(k-1)$. Mà $P_{n-1}(0) + P_{n-1}(1) + \ldots + P_{n-1}(n-1)$ chính là số hoán vị của tập B gồm $n-1$ phần tử mà trong đó bảo tồn $0, 1, 2, \ldots, n-1$ phần tử, do đó tổng này chính bằng số hoán vị của tập B và bằng $(n-1)!$ Vậy $\sum_{k=1}^{n} kP_n(k) = n(n-1)! = n!$

Từ các ví dụ trên, chúng ta bước đầu hình dung và hiểu rõ hơn của việc xây dựng các cấu hình đếm, giúp chúng ta có thể chứng minh các đẳng thức tổ hợp mà không phải tính toán, biến đổi đại số.

b. Các bài toán về tồn tại

Bài 1. Cho tập X là tập hữu hạn gồm n phần tử và các tập $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là các tập con của X gồm 3 phần tử sao cho $|A_i \cap A_j| \le 1, \forall i \ne j$. Chứng minh rằng tồn tại một tập con A của X có ít nhất $\left[\sqrt{2n}\right]$ phần tử mà nó không chứa bất kì một tập con trong số các tập $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Lời giải

Trong số các tập con của X mà nó không chứa bất kì một tập con trong số các tập $A_1, A_2, \ldots, A_m$ lấy A là tập có nhiều phần tử nhất, đặt $k = |A|$.

Đếm số phần tử của tập $X \setminus A$ bằng hai cách.

Cách 1: Do A có k phần tử nên số phần tử của $X \setminus A$ là $n-k$.

Cách 2: Lấy x là một phần tử của tập X mà không thuộc A. Do tính lớn nhất của k nên tập $A \cup \{x\}$ không thỏa mãn điều kiện bài toán, điều đó nghĩa là: tồn tại số $i(x) \in \{1,2,...,m\}$ sao cho $A_{i(x)} \subseteq A \cup \{x\}$, trong đó $x \in A_{i(x)}$ (nếu ngược lại thì ta thấy $A_{i(x)} \subseteq A$, trái với điều kiện của tập A).

Do $A_{i(x)} \subseteq A \cup \{x\}$ nên $A_{i(x)} \setminus \{x\} \subseteq A$.

Xét tập $M_x = A \cap A_{i(x)}$ có hai phần tử (do tập $A_{i(x)}$ có 3 phần tử, bỏ đi x còn hai phần tử thuộc A).

Do các tập $A_1, A_2, \ldots, A_m$ thỏa mãn $\left|A_i \cap A_j\right| \le 1, \forall i \ne j$ nên các tập M_x là phân biệt.

Xét phép biến đổi: $f(x) = M_x : X \setminus A \to K$, trong đó K là tập gồm 2 phần tử của A.

Nhận thấy $f(x)$ là một đơn ánh, suy ra $\left|X \setminus A\right| \le |K| = C_k^2 = \dfrac{k(k-1)}{2}$.

Suy ra $n-k \le \dfrac{k^2-k}{2} \Leftrightarrow k^2+k \ge 2n$ hay $k \ge \left[\sqrt{2n}\right]$.

(Chú ý: $\left(\left[\sqrt{2n}\right]-1\right)^2 + \left(\left[\sqrt{2n}\right]-1\right) \le \sqrt{2n}\left(\sqrt{2n}-1\right) < 2n$)

Bài 2 (Thi Duyên hải Bắc Bộ lần thứ nhất, 2008). Cho tập hợp S gồm 2015 phần tử. Giả sử $S_1, S_2, \ldots, S_{50}$ là 50 tập con của S thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $|S_i| = 100, \forall i = \overline{1,50}$.

ii) $\bigcup\limits_{i=1}^{50} S_i = S$.

Chứng minh rằng: Tồn tại hai tập con $S_i, S_j\ (i \ne j)$ mà $\left|S_i \cap S_j\right| \ge 4$.

Lời giải

Giả sử phản chứng: $\left|S_i \cap S_j\right| \le 3, \forall i \ne j$.

Gọi $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2015}\}$ và M là số bộ ba (a_k, S_i, S_j) trong đó a_i là phần tử của S, S_i và S_j là các tập con (trong 50 tập con đã cho) có chứa a_k. Đếm M theo 2 cách.

Cách 1: Chọn a_k trước. Với mỗi $k = \overline{1;2015}$, gọi m_k là số tập con của S chứa a_k. Do (ii) nên suy ra $m_k \ge 1, \forall k = \overline{1;2015}$

Khi đó có $C_{m_k}^2 = \dfrac{m_k(m_k-1)}{2}$ cách chọn cặp (S_i, S_j), nên ta có $M = \sum\limits_{k=1}^{2015} \dfrac{m_k(m_k-1)}{2}$.

Từ điều kiện (i) suy ra $\sum_{k=1}^{2015} m_k = \sum_{i=1}^{50} |S_i| = 5000$.

$$\Rightarrow M = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2015} m_k^2 - \sum_{k=1}^{2015} m_k\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^{2015} m_k\right)^2}{2015} - \sum_{k=1}^{2015} m_k\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5000^2}{2015} - 5000\right) > 3703.$$

Cách 2: Chọn cặp (S_i, S_j) trước. Có C_{50}^2 cách chọn cặp (S_i, S_j), với mỗi cách chọn có tối đa 3 cách chọn a_k (theo giả thiết phản chứng). Theo cách này $M \leq 3C_{50}^2 = 3675$ (vô lý)

Vậy ta có đpcm.

Bài 3 (CHKMO2007). Trong một trường có 2007 học sinh nam và 2007 học sinh nữ. Biết rằng mỗi học sinh không tham gia quá 100 CLB trong trường và với bất kì hai học sinh khác giới cùng tham gia chung ít nhất một câu lạc bộ. Chứng minh rằng: tồn tại một câu lạc bộ mà có ít nhất 11 học sinh nam và 11 học sinh nữ tham gia.

Lời giải

Giả sử phản chứng: Mỗi câu lạc bộ bất kì hoặc là có nhiều nhất 10 học sinh nam hoặc là có nhiều nhất 10 học sinh nữ tham gia.

Ta xét tập S là tập các bộ ba không thứ tự $(m; f; c)$ trong đó: m là học sinh nam, f là học sinh nữ, c là câu lạc bộ mà m và f cùng tham gia. Ta đếm $|S|$ theo hai cách:

Cách 1: Do giả thiết hai học sinh khác giới bất kì đều cùng tham gia ít nhất một câu lạc bộ nên ta có: $|S| \geq 2007^2$.

Cách 2: Gọi X là tập hợp các câu lạc bộ mà mỗi câu lạc bộ có nhiều nhất 10 học sinh nam tham gia; Y là tập hợp các câu lạc bộ mà mỗi câu lạc bộ có ít nhất 11 học sinh nam tham gia (do giả thiết phản chứng thì mỗi câu lạc bộ trong Y có nhiều nhất 10 học sinh nữ tham gia). Như vậy, ta đã phân hoạch S thành hai tập.

TH1: Đếm số bộ $(m; f; c)$ mà $c \in X$ ta thấy: m có nhiều nhất 10 cách chọn.

Với mỗi cách chọn m thì do giả thiết mỗi học sinh tham gia không quá 100 câu lạc bộ nên ta sẽ có nhiều nhất 100 cách chọn c.

Với mỗi cách chọn $m;c$ thì f có nhiều nhất 2007 cách chọn.

Trong trường hợp này có nhiều nhất $10.100.2007$ bộ

TH2: Đếm số bộ $(m; f; c)$ mà $c \in Y$, tương tự cũng có nhiều nhất $10.100.2007$ bộ

Suy ra $|S| \leq 10.100.2007 + 10.100.2007 = 2000.2007 \Rightarrow$ vô lý.

Vậy điều giả sử là sai (đpcm).

3.3. Nguyên lí Fubini

3.3.1. Phát biểu nguyên lí

Cho m, n là hai số nguyên dương và các tập $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ là các tập có hữu hạn phần tử, kí hiệu S là tập con của tập $A \times B$.

$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A, b_j \in B\}$ là một bảng gồm m hàng và n cột.

Khi đó: $|S| = \sum_{j=1}^{n} |S(*, b_j)| = \sum_{i=1}^{m} |S(a_i, *)|$

Trong đó: $S(*, b_j) = \{(a_i, b_j) \in S\}, j = 1, 2, \ldots, n$

$S(a_i, *) = \{(a_i, b_j) \in S\}, i = 1, 2, \ldots, m.$

Ở đây ta tính $|S|$ theo hai cách: Tính theo phần tử của A và tính theo phần tử của B.

3.3.2. Chứng minh nguyên lí

Với bảng số dạng $(a_{ij})_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}$ có m hàng và n cột được điền các số thực, tổng các phần tử tính theo hàng là $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ và tổng các phần tử tính theo cột là $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Khi đó hai tổng này phải bằng nhau vì cùng bằng tổng tất cả các phần tử trong bảng.

Quay lại nguyên lí, xét bảng $M = (a_{ij})$ gồm m hàng và n cột được xác định như sau:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \ khi \ (a_i, b_j) \in S \\ 0 \ khi \ (a_i, b_j) \notin S \end{cases}$$ (Đánh số 1 thay thế cho các cặp $(a, b) \in S$)

Khi đó $|S(*, b_j)|$ là tổng các phần tử thuộc cột thứ j và $|S(a_i, *)|$ là tổng các phần tử của dòng thứ i.

Lấy tổng $|S(*, b_j)|$ theo cột ta được $\sum_{j=1}^{n} |S(*, b_j)|$

Lấy tổng $|S(a_i, *)|$ theo hàng ta được $\sum_{i=1}^{m} |S(a_i, *)|$

Vậy ta có: $|S| = \sum_{j=1}^{n} |S(*, b_j)| = \sum_{i=1}^{m} |S(a_i, *)|$.

3.3.3. Những dạng toán ứng dụng nguyên lí Fubini

a. Các bài toán về chứng minh

Bài 1. Trong một hội thảo, mỗi người thuộc đúng 3 nhóm, mỗi nhóm có đúng 3 người. Chứng minh số nhóm bằng số người.

Lời giải

Giả sử có m người được đánh số từ 1 đến m và n nhóm là $G_1, G_2, ..., G_n$. Nếu người thứ i thuộc nhóm G_j thì ta đánh số 1 vào, không thuộc nhóm thì đánh số 0.

Ta lập bảng sau:

	G_1	G_2	G_3	G_4	...	G_n
1	1	1	0	1	...	0
2	0	1	1	1		0
3	1	0	1	0		1
...	...	...	...	...	...	...
m	1	1	0	1	0	0

Bảng 1.

Ta đếm số cặp $S = \{(i, Gj) \mid i \in Gj\}$.

Khi đó số phần tử của S chính là tổng số các số trong bảng.

Theo nguyên lý Fubini, ta tính tổng theo cột, do mỗi nhóm chỉ có đúng 3 người nên mỗi cột đều có tổng bằng $3 \Rightarrow |S| = 3n$.

Ta tính tổng trên theo hàng, mỗi người chỉ thuộc đúng 3 nhóm, mỗi hàng có 3 số 1, mỗi hàng có tổng bằng $3 \Rightarrow |S| = 3m$.

Vậy $3n = 3m \Leftrightarrow n = m$.

Bài 2 (IMC 2002). Có 200 thí sinh tham gia cuộc thi toán, đề có 6 bài. Mỗi bài được giải bởi ít nhất 120 thí sinh. Chứng minh có 2 thí sinh mà bài nào cũng được giải bởi 1 trong 2 thí sinh đó.

Lời giải

Sử dụng phương pháp phản chứng: Giả sử cứ 2 thí sinh bất kì thì tồn tại 1 bài mà cả 2 thí sinh không giải được.

Đánh số thứ tự các bài toán là $1,2,3,4,5,6$ và số thứ tự các học sinh là $1,2,...,200$. Xây dựng bảng (a_{ij}) kích thước 6×200, với $a_{ij} = 1$ nếu bài toán i không giải được bởi học sinh j, $a_{ij} = 0$ nếu bài toán i giải được bởi học sinh j.

Gọi T là tập hợp các cặp số 1 thuộc cùng một dòng của ma trận $\left(a_{ij}\right)$. Ta sẽ đếm số phần tử của T theo 2 cách.

Đếm theo dòng: Theo giả thiết, mỗi cặp cột có ít nhất một cặp số 1 thuộc cùng 1 dòng. Do có 200 cột nên $|T| \geq C_{200}^2 = 19900$.

Đếm theo cột: Do mỗi bài có ít nhất 120 thí sinh làm được nên có nhiều nhất 80 thí sinh không làm được mỗi bài hay mỗi dòng có nhiều nhất C_{80}^2 cặp số 1, ta có $|T| \leq 6C_{80}^2 = 18960$

Suy ra $19900 \leq |T| \leq 18960 \Rightarrow$ vô lý.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3 (Hồng Kông 1994). Một trường học có m giáo viên và n học sinh thỏa mãn điều kiện sau:

i) Mỗi giáo viên dạy đúng p học sinh.

ii) Với hai học sinh phân biệt thì có đúng q giáo viên dạy họ.

Chứng minh rằng: $\dfrac{m}{q} = \dfrac{n(n-1)}{p(p-1)}$.

Lời giải

Lập bảng gồm m dòng và n cột và $a_{ij} = 1$ nếu giáo viên i dạy học sinh j và $a_{ij} = 0$ nếu ngược lại. Từ điều kiện (i) thì mỗi dòng có đúng p số 1. Ta đếm cặp số 1 cùng 1 dòng.

Cách 1: Đếm theo dòng, mỗi dòng có p số một nên sẽ có C_p^2 cặp và có m dòng nên sẽ có số cặp là $m.C_p^2$ (1)

Cách 2: Đếm theo cột, theo điều kiện (ii) với hai cột bất kì (hai học sinh bất kì) sẽ có đúng q cặp số 1. Nên sẽ có số cặp là $q.C_n^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $m.C_p^2 = q.C_n^2$ hay $\dfrac{m}{q} = \dfrac{n(n-1)}{p(p-1)}$ (đpcm).

Bài 4. Cho m học sinh tham gia giải n bài toán, học sinh làm đúng 1 bài được 1 điểm, làm sai không được điểm. Nhận thấy: Mỗi học sinh giải được ít nhất 1 bài toán, mỗi bài có ít nhất 1 học sinh giải được. Hơn nữa, nếu học sinh giải được một bài thì số điểm của học sinh bằng số người giải được bài toán đó. Chứng minh $m = n$.

Lời giải

Tạo bảng gồm m dòng và n cột $\left(a_{ij}\right)$ thỏa mãn: $a_{ij} = 1$ nếu người thứ i trả lời đúng bài toán thứ j và $a_{ij} = 0$ nếu người thứ i trả lời sai bài toán thứ j.

Giả sử $n > m$, kí hiệu $d_1, d_2, ..., d_m$ tương ứng là tổng các phần tử của dòng $1,\ 2, \ldots, m$. Khi đó tương ứng sẽ có m cột có tổng phần tử mỗi cột là $d_1, d_2, ..., d_m$.

Số phần tử của mảng là $S = d_1 + d_2 + ... + d_m$ (tính theo hàng).

Do $n > m$ nên tổng này nhỏ hơn tổng các phần tử tính theo cột, điều này vô lý.

Tương tự khi $n < m$ cũng không xảy ra.

Vậy $m = n$ (đpcm).

b. Các bài toán về bất đẳng thức, cực trị tổ hợp

Bài 1. Trong một kì thi, 8 giám khảo đánh giá từng thí sinh chỉ bằng hai từ đúng hoặc sai. Biết rằng với bất kì hai thí sinh nào cũng nhận được kết quả như sau: có hai giám khảo cùng cho đúng; có hai giám khảo với người thứ nhất cho đúng và người thứ hai cho sai; có hai giam khảo với người thứ nhất cho sai, người thứ hai cho đúng; cuối cùng có hai giám khảo cùng cho sai. Hỏi số thí sinh lớn nhất có thể bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi n là số thí sinh.

Ta xét hình chữ nhật $8 \times n$ gồm 8 hàng và n cột sao cho ô vuông ở hàng thứ i và cột thứ j cho số 0 (số 1) nếu vị giám khảo thứ i đánh giá thí sinh thứ j sai (đúng).

Từ giả thiết đề bài ta suy ra bất cứ hai cột nào của bảng cũng có tính chất: 8 hàng của hai cột này chứa các cặp số $00, 01, 10, 11$ và mỗi cặp số xuất hiện hai lần.

Ta chứng minh, không tồn tại bảng gồm 8 cột có tính chất trên.

Giả sử tồn tại một bảng như thế.

Do trong một cột bất kì, ta đổi số 0 thành số 1 và ngược lại thì tính chất trên vẫn được bảo toàn. Vì vậy ta có thể giả sử hàng đầu tiên gồm các số 0.

Gọi a_i là số các số 0 nằm ở hàng thứ i. Ta có tổng các số 0 là $8.4 = 32$, hơn nữa số lần xuất hiện của cặp 00 là $2.C_8^2 = 56$.

Mặt khác, số này cũng bằng $\sum_{i=1}^{8} C_{a_i}^2$.

Vì $a_1 = 8$ nên ta có $\sum_{i=2}^{8} a_i = 24$. Từ đó suy ra $\sum_{i=2}^{8} C_{a_i}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{8}\left(a_i^{\ 2} - a_i\right) \geq 30$

Do vậy $56 = \sum_{i=1}^{8} C_{a_i}^2 = C_8^2 + \sum_{i=2}^{8} C_{a_i}^2 \geq 58$ (vô lí)

Nên ta suy ra số thí sinh nhiều nhất chỉ có thể là 7.

Bảng sau chứng tỏ có thể có 7 thí sinh:

0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1

Bảng 2.

Bài 2. Cho A là tập hợp gồm 8 phần tử. Tìm số lớn nhất các tập con gồm 3 phần tử của A sao cho giao của hai tập bất kì trong các tập con này không phải là tập gồm hai phần tử.

Lời giải

Gọi $B_1, B_2, ..., B_n$ là số tập con của A thỏa: $|B_i| = 3$, $|B_i \cap B_j| \neq 2$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$

Giả sử có phần tử a thuộc vào 4 tập trong các tập $B_1, B_2, ..., B_n$ (chẳng hạn a thuộc 4 tập $B_1, B_2, ..., B_n$). Khi đó: $|B_i \cap B_j| \geq 1\ \forall i, j = 1, 2, 3, 4$.

Mặt khác với $i \neq j$ thì $B_i \neq B_j$ nên $|B_i \cap B_j| \neq 3$.

$\Rightarrow |B_i \cap B_j| = 1\ \forall i, j = 1, 2, 3, 4; i \neq j$.

$\Rightarrow |A| \geq 1 + 4.2 = 9$ (vô lí).

Như vậy mỗi phần tử thuộc tập A thì sẽ thuộc nhiều nhất ba tập trong số các tập $B_1, B_2, ..., B_n$. Khi đó, suy ra $3n \leq 3.8 \Rightarrow n \leq 8$.

Xét $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; B_1 = \{1, 2, 3\}$, $B_2 = \{1, 4, 5\}$, $B_3 = \{1, 6, 7\}$, $B_4 = \{3, 4, 8\}$ và $B_5 = \{6, 2, 8\}$, $B_6 = \{8, 7, 5\}$, $B_7 = \{3, 5, 6\}$, $B_8 = \{2, 4, 7\}$

Là các tập con gồm ba phần tử của A và $|B_i \cap B_j| \neq 2$.

Vậy số tập con lớn nhất là 8.

Bài 3. Trong một cuộc thi có 11 thí sinh tham gia giải 9 bài toán. Hai thí sinh bất kì giải chung với nhau không quá 1 bài. Tìm k lớn nhất để mọi bài toán có ít nhất k thí sinh giải được.

Lời giải

Gọi H_i là thí sinh thứ i và tập các bài toán là $\{b_1, b_2, ..., b_9\}$.

Theo đề bài ta có: $|H_i \cap H_j| \le 1, \forall i \ne j$.

Đặt n_i là số thí sinh giải được bài b_i.

Ta đi đếm bộ (b_i, H_j, H_l), trong đó $b_i \in H_j \cap H_l$.

$\Rightarrow$ Số bộ này chính bằng: $\sum\limits_{i<j} |H_i \cap H_j|$

Mặt khác: số bộ này lại bằng $\sum\limits_{i=1}^{9} C_{n_i}^2$.

$\Rightarrow$ Ta có: $\sum\limits_{i<j} |H_i \cap H_j| = \sum\limits_{i=1}^{9} C_{n_i}^2$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{9} (n_i^2 - n_i) \le 2\sum_{i<j} |H_i \cap H_j| \le 2.C_{11}^2 = 110 \Rightarrow 9(k^2 - k) \le 110 \Rightarrow k \le 4.$$

Với $k = 4$. Giả sử tồn tại $n_i \ge 5 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{9} (d_i^2 - d_i) \ge 8.12 + 20 = 116$ (vô lí).

$$\Rightarrow n_i = 4, \forall i = \overline{1,9} \Rightarrow \sum_{i<j} |H_i \cap H_j| = 54 = C_{11}^2 - 1.$$

Do đó, tồn tại $(i; j)$ sao cho $H_i \cap H_j = \varnothing$.

Giả sử $H_1 \cap H_2 = \varnothing$ và $|H_i \cap H_j| = 1, \forall i < j, (i; j) \ne (1; 2)$.

- Nếu tồn tại i để $|H_i| \le 3, \forall i \ne 1, 2 \Rightarrow |H_i \cap H_t| = 1, \forall t \in \{1, 2, ..., 11\} \setminus \{i\}$.
- Nên tồn tại một phần tử của H_i thuộc ít nhất $\left[\frac{10}{3}\right] + 1 = 4$ tập $H_t, t \ne i$.

$\Rightarrow$ tồn tại một phần tử thuộc nhiều hơn 5 tập H_j (vô lí).

$$\Rightarrow |H_i| \ge 4 \Rightarrow \sum_{i=1}^{11} |H_i| \ge 36 + |H_1| + |H_2| > 36 \text{ (vô lí).}$$

Do đó $k \le 3$. Với $k = 3$ ta chỉ ra như bảng sau:

Quy ước: số 1 là thí sinh giải được bài đó; số 0 là thí sinh không giải được bài đó.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9
H_1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
H_2	1	0	0	0	1	0	0	0	1
H_3	0	1	1	0	0	1	0	1	0
H_4	0	1	0	1	1	0	0	0	0
H_5	0	0	0	1	0	0	0	1	1
H_6	0	0	1	0	0	0	1	0	1
H_7	0	0	0	0	1	1	0	0	0
H_8	1	1	0	0	0	0	0	0	0
H_9	0	0	1	0	0	0	0	0	0
H_{10}	0	0	0	0	0	1	1	0	0
H_{11}	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Bảng 3.

Bài 4. Trên một đường tròn cho 2011 điểm phân biệt. Giả sử trong số các điểm này có đúng k điểm được tô màu đen. Một cách tô màu được gọi là "tốt" nếu tồn tại ít nhất một cặp điểm màu đen sao cho phần trong của một trong hai cung đó tạo bởi hai điểm chứa đúng 1006 điểm của E. Tìm k nhỏ nhất sao cho mọi cách tô màu k của điểm của E đều "tốt".

Lời giải

Đặt $E=\{0,1,2,...,2010\}$. Ta sẽ xét theo $\bmod 2011$

Một cách tô tốt khi và chỉ khi tồn tại i, j sao cho $|i-j| = \left[\begin{array}{l}1007\\1004\end{array}\right.(\text{mod } 2011)\ (*)$

Xét một tập $T \subset E, |T| = 1006$. Ta sẽ chứng minh tồn tại i, j thỏa $(*)$

Thật vậy: với mỗi $i \in T$ thì tồn tại $i_1 \neq i_2 \notin T$ sao cho: $|i-i_1|, |i-i_2| \equiv 1007,1004$

Mặt khác, mỗi $a \in E \setminus T$ được tính hai lần.

Suy ra $|E \setminus T| = |T| \Rightarrow 1005 = 1006$ (vô lí) $\Rightarrow n$ là số tốt, do đó $k_{\min} \le 1006$.

Do $2011 \backslash 3$ nên $E = \{3k \mid k = -1006, -1005, ..., 1004\}$ (mod 2011)

Chọn $T = \{3k \mid k = 0,1,2,...,1004\}$

Suy ra $\forall i \neq j \in T: |i-j| = 3|k_i - k_j| \equiv \left[\begin{array}{l}1007\\1004\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3k_i \equiv 3k_j + 1007\ (1)\\3k_i \equiv 3k_j + 1004\ (2)\end{array}\right. \text{(mod 2011)}$$

$(1) \Leftrightarrow 3(1005 - k_i + k_j) \equiv -3 \text{ (mod 2011)}$

$\Leftrightarrow 1006 - k_i + k_j \vdots 2011$ (*vô lí*)

Tương tự, từ (2) ta suy ra vô lí.

Vậy $k_{\min} = 1006$.

Bài 5. Cho một bảng kích thước 2012×2012 được điền các số tự nhiên từ 1 đến 2012^2 theo quy tắc sau: Hàng thứ nhất ta điền các số từ 1 đến 2012 từ trái qua phải, ở hàng thứ hai ta đánh các số từ 2013 đến 4024 từ phải qua trái, các hàng tiếp theo được đánh theo kiểu zích zắc tương tự như trên. Hãy tìm các phủ kín bằng trên bởi 1006×2012 quân cơ Domino sao cho tổng của tích các số trên mỗi quân cờ Domino lớn nhất.

Lời giải

Đặt $A = \{1, 2, ..., 2012^2\}$

Gọi a_i, b_i là 2 số được ghi trên quân cờ Domino thứ i với $a_i, b_i \in \{1, 2, ..., 1006 \times 2012\}$; $i = \overline{1, 1006 \times 2012}$ và $S = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ với $n = 1006 \times 2012$. Ta cần tìm $S_{\min}$.

Vì $xy = \dfrac{x^2 + y^2 - (x-y)^2}{2}$ nên ta có $S = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 + b_i^2\right) - \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i - b_i\right)^2$

Mặt khác, a_i, b_i là các số tự nhiên khác nhau thuộc tập A

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 + b_i^2\right) = \sum_{i=1}^{2n}\left(i^2\right)$$

Vì $(a_i - b_i)^2 \geq 1 \Rightarrow S \leq \dfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2n} i^2 - n\right)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a_i, b_i là 2 số tự nhiên liên tiếp.

Vậy để S lớn nhất, ta phủ các quân cờ Domino sao cho mỗi quân cờ chưa 2 số tự nhiên liên tiếp.

3.4. Một số bài toán trong các kì thi học sinh giỏi

Bài 1 (IMO 1989). Cho n và k là các số nguyên dương thỏa mãn tính chất: Tồn tại một tập T gồm n điểm trên mặt phẳng thỏa mãn:

i) Không có 3 điểm nào thẳng hàng.

ii) Cho một điểm P bất kì trong T, có ít nhất k điểm trong T có cùng khoảng cách với P.

Chứng minh: $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$

Lời giải

Xét tập $A = T = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ và $B = \{l_{ij} \mid 1 \le i < j \le n\}$ với l_{ij} là đường trung trực của đoạn P_iP_j. Ta có $|B| = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Xét tập $S = \left\{\left(P_i, l_{jk}\right) \mid P_i \in l_{jk}\right\}$. Đếm số phần tử S.

Cách 1: Do không có 3 điểm nào thẳng hàng nên $\left|S\left(*, l_{jk}\right)\right| \le 2$

Theo nguyên lí Fubini, ta có: $|S| = \sum\limits_{l_{jk} \in B} \left|S\left(*, l_{jk}\right)\right| \le 2|B| = 2C_n^2 = n^2 - n \ (1)$

Cách 2: Với mỗi điểm P_i có ít nhất k điểm khác cách đều P_i nên P_i nằm trên các đường trung trực của 2 điểm trong k điểm đó, mà có n điểm P_i, suy ra $\left|S\left(P_j, *\right)\right| \ge C_k^2$

Theo nguyên lí Fubini, ta có: $|S| = \sum\limits_{P_j \in A} \left|S\left(P_j, *\right)\right| \ge nC_k^2 = \frac{nk(k-1)}{2} \ (2)$

Kết hợp (1) và (2), ta có $\frac{nk(k-1)}{2} \le n(n-1) \Leftrightarrow k^2 - k - 2n + 2 \le 0$

$\Leftrightarrow k \le \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2n - \frac{7}{4}} < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$

Bài 2 (IMO 1998). Trong một cuộc thi có a thí sinh và b giám khảo, trong đó $b \ge 3$ và là số nguyên lẻ. Mỗi giám khảo đánh giá "đạt" hoặc "trượt". Giả sử rằng với hai giám khảo bất kì, họ đánh giá giống nhau với tối đa k thí sinh. Chứng minh rằng: $\frac{k}{a} \ge \frac{b-1}{2b}$.

Xét bảng số $b \times a$ với các hàng được đánh số theo các giám khảo và các cột được đánh số theo các thí sinh. Phần tử tương ứng của ma trận nhận giá trị bằng 1 nếu giám khảo đánh giá thí sinh là "đạt" và nhận giá trị bằng 0 nếu ngược lại.

Đặt S là tập hợp các cặp các số 0 hoặc 1 trong cùng một cột. Ta đếm số phần tử của S theo 2 cách.

Cách 1: Vì 2 giám khảo đánh giá giống nhau nhiều nhất là k thí sinh nên với hai hàng bất kì, có nhiều nhất k cặp thuộc S. Do đó : $|S| \le kC_b^2 = \frac{kb(b-1)}{2}$.

Cách 2: Với mỗi cột trong bảng, giả sử có p số 0 và q số 1. Khi đó có đúng $C_p^2 + C_q^2$ cặp thuộc S. Ta có $p+q=b$ và

$$C_p^2 + C_Q^2 = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} = \frac{(p+q)^2 - 2pq - (p+q)}{2} \ge \frac{(p+q)^2 - \frac{(p+q)^2}{2} - (p+q)}{2} = \frac{b^2-2b}{4}$$

$\Rightarrow C_p^2 + C_q^2 \ge \frac{(b-1)^2}{4}$. Và vì có a cột nên ta có: $|S| \ge \frac{a(b-1)^2}{4}$.

Vậy $\frac{a(b-1)^2}{4} \le |S| \le \frac{kb(b-1)}{2} \Leftrightarrow \frac{k}{a} \ge \frac{b-1}{2b}$ (đpcm).

Bài 3 (IMO Shortlist 2004, C1). Cho 10001 SV ở 1 trường đại học. Mỗi sinh viên tham gia các CLB (mỗi SV có thể tham gia nhiều CLB khác nhau). Mỗi CLB thuộc một hội (mỗi CLB có thể tham gia nhiều hội khác nhau). Có tất cả k hội. Giả sử các điều sau xảy ra:

i) Hai SV bất kì luôn cùng thuộc đúng một CLB nào đó.

ii) Chọn ra một SV và một hội thì có đúng một CLB của hội đó mà SV tham gia.

iii) Mỗi CLB có số lẻ SV tham gia. Hơn nữa, nếu CLB có $2m+1$ SV (m nguyên dương) thì CLB đó thuộc đúng m hội.

Tìm tất cả giá trị của k.

Lời giải

Đặt $n=10001$. Xét S là tập hợp các bộ ba (a,C,H) trong đó a là SV của trường, C là CLB mà a tham gia, H là hiệp hội quản lí C. Ta đếm $|S|$ theo 2 cách:

Cách 1: Ta chọn H trước, có k cách chọn H, có n cách chọn a, mỗi cặp (a,H) thì có đúng 1 cách chọn C. Vậy có $|S| = nk$.

Cách 2: Ta chọn C trước. Với mỗi C, gọi $|C|$ là số SV tham gia CLB C, theo giả thiết có đúng $\frac{|C|-1}{2}$. Gọi M là tập hợp tất cả các CLB, ta có: $\sum_{C\in M} \frac{|C|(|C|-1)}{2}$.

Vì mỗi cặp SV đều tham gia chung đúng 1 CLB nên tổng số cặp SV trong các CLB chính là tổng số cặp SV của trường, nghĩa là: $C_n^2 = \sum_{C\in M} C_{|C|}^2 = \sum_{C\in M} \frac{|C|(|C|-1)}{2} = |S|$.

Vậy ta có: $C_n^2 = nk \Leftrightarrow k = \frac{n-1}{2} = 5000$.

Bài 4 (VMO 2001). Cho bảng ô vuông kích thước 2000×2001 (bảng gồm 2000 hàng và 2001 cột). Hãy tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho ta có thể tô màu k ô vuông con của bảng thỏa điều kiện: hai ô vuông con nào được tô màu cũng không có đỉnh chung.

Lời giải

Kí hiệu $(i;j)$ là ô vuông nằm ở hàng thứ i và cột thứ j. Kí hiệu $k(T)$ là số ô vuông được tô màu ở cách tô màu T.

Xét một cách tô màu T thỏa yêu cầu bài toán.

Ta thấy nếu ô $(i;j)$ được tô màu $(1\le i\le 1999)$ thì các ô $(i+1;j)$ và các ô kề với nó trong cũng một hàng không được tô màu. Ta xét phép biến đổi sau đối với T

Xóa tất cả các ô $(i;j)$ mà i lẻ và tô màu các ô $(i+1;j)$. Khi thực hiện phép biến đổi trên ta thu được cách tô màu T' thỏa mãn đề bài và:

- $k(T')=k(T)$
- Tất cả các ô nằm trên hàng thứ $2i-1\left(i=1,2,...,10^3\right)$ đều không được tô màu.

Từ điều kiện đề bài, suy ra trong một hàng có không quá 1001 ô được tô màu. Do đó $k(T)\le 1001.10^3$.

Vì vậy $k(T)\le 1001.10^3$ với mọi cách tô màu T thỏa yêu cầu bài toán.

Ta xét cách tô màu sau: Tô các ô $(2i;2j-1)$ với $i=1,2,...,10^3; j=1,2,...,1001$. Ta thấy cách tô này thỏa yêu cầu bài toán và số ô được tô màu là 1001.10^3.

Vậy $k_{\max}=1001.10^3$.

Bài 5 (IMO 1987). Gọi $p_n(k)$ là số hoán vị của $[n]$ có đúng k điểm cố định. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{n}k.p_n(k)=n!$

Lời giải

Đếm tất cả các cặp (x,s) với S là một hoán vị của $[n]$ và x là điểm cố định của S.

Với mỗi phân tử x, ta có $(n-1)!$ hoán vị nhận x là điểm cố định. Suy ra số cặp (x,s) là $S=\sum_{x\in[n]}(n-1)!=n\cdot(n-1)!=n!$ (1)

Mặt khác, với mỗi hoán vị S có đúng k điểm cố định thì ta có k cặp (x,s). Do đó ta có: $S=\sum_{k=0}^{n}k\cdot p_n(k)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

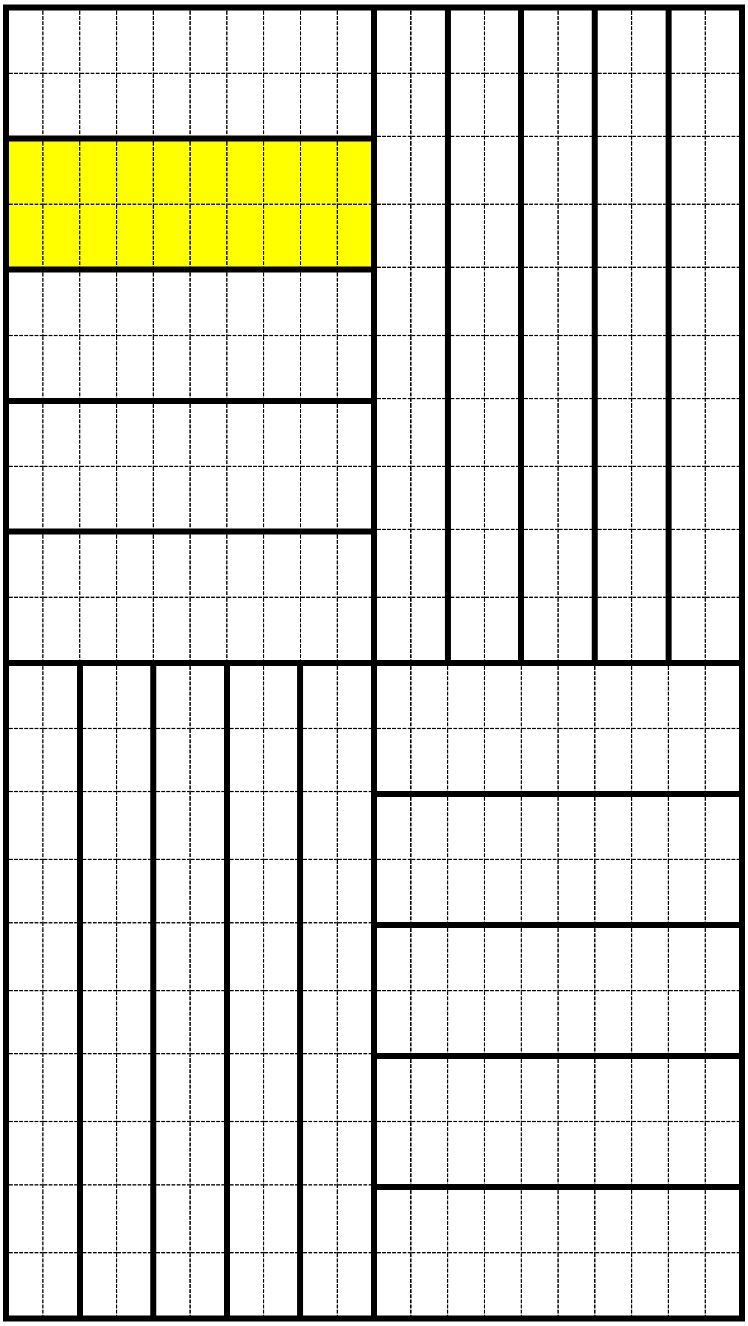
Bài 6 (IMO 2001). 21 nữ sinh và 21 nam sinh tham gia kì thi Toán học. Biết rằng:

i) Mỗi thí sinh giải được nhiều nhất 6 bài toán.

ii) Với mỗi cặp nam nữ thì cả hai sẽ giải được ít nhất một bài toán

Chứng minh rằng tồn tại một bài toán sao cho có ít nhất 3 nữ và ít nhất 3 nam giải được.

Lời giải



Bảng 4.

Trước tiên, chú ý rằng kết quả đòi hỏi đề bài đúng với trường hợp 20 nữ sinh và 20 nam sinh tham gia cuộc thi, hay bài toán đúng cho khối 20×20. Thật vậy, ta tạo ra 20 hình chữ nhật kích thước 2×10 và đánh số $1,2,3,\ldots,20$. Ta chia khối 20×20 này thành 4 khối, mỗi khối 10×10. Ở bên trên phía trái và bên dưới phía phải ta đặt mỗi bên 5 hình chữ nhật 2×10 nằm ngang, còn phần bên trên phía phải và bên dưới phía trái ta đặt mỗi bên 5 hình chữ nhật

2×10 nằm dọc (xem hình). Bây giờ mỗi hàng gồm 5 hình chữ nhật đứng, 1 hình chữ nhật nằm ngang, hay mỗi hàng có 6 số khác nhau, tương tự mỗi cột cũng có 6 số khác nhau.

Giả sử với 1 số a bất kì nằm trong ô chữ nhật 2×10 nằm ngàng (màu vàng), thì số đó sẽ nằm trong 10 cột và 2 hàng, nếu ô chữ nhật đứng thì ngược lại, vì thế nên không có số nào nằm trong 3 hàng và 3 cột. Điều này chứng tỏ rằng bài toán cho khối 20×20.

Trở lại với trường hợp khối 21×21, ta giả sử tồn tại sự sắp xếp được gọi là chấp nhận được nếu không có số nguyên nào nằm ở ít nhất 3 hàng và 3 cột (giả sử phản chứng). Ta tô ô chữ nhật màu trắng nếu ô đó có chứa số nguyên xuất hiện ở tối thiểu 3 hàng và màu đen nếu chứa số nguyên chỉ xuất hiện ở một hoặc hai hàng. Ta đếm các ô vuông màu trắng và đen.

Mỗi hàng có 21 ô và chứa nhiều nhất 6 số nguyên khác nhau. Ta có $6\times3<21$, vì vậy trong mỗi hàng phải chưa ít nhất 1 số mà số này xuất hiện tối thiểu 3 lần, vậy số đó nằm tối đa là 2 hàng. Do đó có tối đa 5 số khác nhau trong mỗi hàng mà mỗi một trong những số này xuất hiện ở ít nhất 3 hàng. Mỗi số nguyên này có thể xuất hiện tối đa là hai lần trong cùng một hàng, vì thế có tối đa $5\times2=10$ ô màu trắng trong 1 hàng. Điều này chứng tỏ có tối đa 210 ô màu trắng trong bảng.

Tương tự với cột thì sẽ có tối đa có 210 ô đen, đến đây mâu thuẫn vì $210+210\neq441$.

Bài 7 (China 1993). Có 7 thí sinh tham gia thi toán, đề có n bài. Mỗi bài được giải bởi không quá 3 thí sinh, mỗi cặp thí sinh cùng giải được ít nhất 1 bài. Tìm GTNN của n.

Lời giải

Ta xác định bảng ô vuông với các hàng là thí sinh được đánh số từ 1 đến 7, cột là các bài $B_1,B_2,...,B_n$. Điền số 1 vào ô $\left(i,B_j\right)$ nếu người thứ i giải được bài B_j, điền số 0 vào trong trường hợp ngược lại.

	B_1	B_2	B_3	B_4	….	B_n
1	1	1	0	1	….	0
2	0	1	1	1		0
3	1	0	1	0		1
7	1	1	0	1	0	0

Bảng 5.

Do mỗi cặp thí sinh cùng giải được ít nhất 1 bài nên ta đếm số cặp số 1 trong cùng 1 cột.

Gọi S là số cặp số 1 trong cùng một cột.

Cách 1: Mỗi cột tối đa 3 số 1 $\Rightarrow$ số cặp số 1 trong 1 cột tối đa là C_3^2, có n cột $\Rightarrow S\leq3n$

Cách 2: Với mỗi cặp hàng, có ít nhất 1 cột mà 2 ô thuộc cột đó là 2 số 1 $\Rightarrow$ có ít nhất $C_7^2=21$ cặp số $1\Rightarrow S\geq21$.

Vậy $3n \geq 21 \Rightarrow n \geq 7$. Vậy n nhỏ nhất là 7 khi mỗi bài có đúng 3 thí sinh làm được và mỗi cặp thí sinh giải được cùng nhau đúng 1 bài. Ta có bảng cụ thể sau:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	0
3	1	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	1	0	0	1
5	0	1	0	0	1	1	0
6	0	0	1	1	0	1	0
7	0	0	1	0	1	0	1

Bảng 6.

Bài 8 (China TST 1992). Có 16 sinh viên tham gia kì thi. Mỗi bài có 4 phương án trả lời, sinh viên chỉ được chọn một phương án cho mỗi bài. Sau khi kiểm tra, thấy rằng bất kì 2 sinh viên nào có chung nhiều nhất 1 câu trả lời. Tìm giá trị lớn nhất của số bài trong đề thi.

Lời giải

Giả sử có m bài toán $P_1, P_2, \ldots, P_m$, với mỗi bài toán P_i. Gọi a_i là số sinh viên trả lời đáp án thứ nhất, tương tự có b_i, c_i, d_i. Khi đó $a_i + b_i + c_i + d_i = 16$

Ta có ít nhất $4.C_4^2 = 24m$ cặp với 1 câu trả lời giống nhau cho mỗi vấn đề. Có m bài toán $\Rightarrow$ ít nhất $24m$ cặp, nhưng có nhiều nhất $C_{16}^2 = 120$ cặp. Do đó có m nhiều nhất là 5.

Chứng minh $m = 5$ thỏa mãn. Dưới đây là một cách:

Sinh viên	Bài 1	Bài 2	Bài 3	Bài 4	Bài 5
1	A	A	A	A	A
2	A	B	B	B	B
3	A	C	C	C	C
4	A	D	D	D	D
5	B	A	C	D	B
6	B	C	A	B	D
7	B	D	B	A	C
8	B	B	D	C	A
9	C	A	D	B	C
10	C	D	A	C	B
11	C	B	C	A	D
12	C	C	B	D	A
13	D	A	B	C	D
14	D	B	A	D	C
15	D	C	D	A	B
16	D	D	C	B	A

Bảng 7.

3.5. Bài tập tự luyện

Bài 1. Chứng minh đẳng thức $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

Bài 2. Chứng minh đẳng thức $\sum \frac{k!}{k_1!k_2!...k_n!} = n^k$, trong đó bộ $(k_1, k_2, ..., k_n)$ thỏa $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$

Bài 3. Cho trước một số nguyên dương lẻ $n > 1$ và các số nguyên $k_1, k_2, ..., k_n$. Kí hiệu $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ là một trong $n!$ hoán vị của $A = \{1, 2, ..., n\}$. Chứng minh rằng tồn tại hai hoán vị b và c và số nguyên m sao cho $\sum_{i=1}^{n} k_i (b_i - c_i) = m.n!$.

Bài 4. Trong một hội nghị có 35 người tham gia. Biết rằng có 110 cặp đôi một quen nhau. Chứng minh rằng có thể chọn ra 4 thành viên xếp ngồi vào một bàn tròn sao cho hai người ngồi gần nhau thì quen nhau.

Bài 5. Cho 16 bạn học sinh làm một bài kiểm tra trắc nghiệm, trong đó mỗi câu hỏi có 4 lựa chọn. Sau bài kiểm tra, ta thấy rằng với hai học sinh bất kì có nhiều nhất một câu trả lời giống nhau. Hỏi bài kiểm tra có nhiều nhất bao nhiêu câu hỏi?

Bài 6 (Chọn đội tuyển PTNK). Cho số nguyên dương n. Xét tập hợp $X = \{1, 2, ..., 4n\}$. Hai tập con A, B của X được gọi là không giống nhau, nếu $|A\Delta B| \geq 2n+1$ (Ở đây $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ là hiệu đối xứng của A và B).

Xét tập $M = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ gồm m tập con đôi một không giống nhau của X.

a) Chứng minh rằng $m \leq 2n$

b) Chứng minh rằng: $m \leq \frac{4(n+1)}{3}$.

Bài 7 (IMO 2005). Trong một cuộc thi toán trong đó đề thi có 6 bài. Mỗi một cặp bài toán được giải bởi nhiều hơn $\frac{2}{5}$ số thí sinh. Không có ai giải được 6 bài. Chứng minh rằng có ít nhất 2 thí sinh giải được đúng 5 bài.

Bài 8 (USAMO 2001). Có 8 hộp, mỗi hộp chứa 6 viên bi. Mỗi viên bi được tô màu sao cho:

i) Mội hộp chứa các viên bi khác màu.

ii) Không có hai màu nào cùng xuất hiện nhiều hơn trong một hộp.

Tìm số màu ít nhất cần dùng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tài liệu tham khảo tiếng Việt

1. Đoàn Quỳnh, Đặng Hùng Thắng, Nguyễn Vũ Lương và Trần Nam Dũng. 2018. *Tài liệu chuyên Toán Đại số và Giải tích 11*. NXB Giáo Dục Việt Nam.

2. Đoàn Quỳnh, Đặng Hùng Thắng, Nguyễn Vũ Lương và Trần Nam Dũng. 2018. *Tài liệu chuyên Toán bài tập Đại số và Giải tích 11*. NXB Giáo Dục Việt Nam.

3. Hoàng Minh Quân và Phan Đức Minh. 2012. *Tuyển tập các chuyên đề Tổ hợp*. Diễn đàn Mathscope.

4. Trần Mạnh Sang. 2014. *Báo cáo sáng kiến các phương pháp đếm nâng cao*.

5. Nguyễn Tăng Vũ. *Đếm bằng hai cách trong tổ hợp*. Tập san toán học Star Education.

6. Trần Nam Dũng. 2010. *Kỹ thuật đếm bằng hai cách và ứng dụng trong giải toán*. Kỷ yếu Hội nghị Khoa học, Các chuyên đề chuyên Toán – Bồi dưỡng học sinh giỏi THPT, Nam Định.

7. Nguyễn Văn Mậu, Đặng Huy Ruận, Đặng Hùng Thắng, Trần Nam Dũng và Vũ Đình Hòa. *Chuyên đề chọn lọc Tổ hợp và Toán rời rạc*. NXB Giáo Dục.

8. Nguyễn Tất Thu. *Một số dạng toán cực trị tổ hợp, rời rạc và định hướng cách giải.*

9. Vũ Dương Thuy và Nguyễn Văn Nho. 2001. *40 năm Olympic Toán học Quốc tế (1995 – 2000)*. NXB Giáo Dục/

10. https://diendantoanhoc.net/

Tài liệu tham khảo tiếng Anh

1. Law Ka Ho, Leung Tat Wing and Li Kin Yin. 2008. Double counting. Mathematical Excalibur.

2. Stasys Jukna. 2011. Extremal Combinatorics: With Applications in Computer Science. Second Edition, Springer.

3. G¨unter M. Ziegler and Martin Aigner. Proofs from THE BOOK. Fourth Edition, Springer.

4. Arthur T. Benjamin and Jennifer J. Quinn. 2003. Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof. The Mathematical Association of America.

5. Titu Andreescu and Zuming Feng. 102 Combinatorial Problems. Birkh¨auser.

6. Yufei Zhao. 2007. Counting in Two Ways. MOP 2007 Black Group.

7. Reid Barton. 2005. Counting in two ways.

8. Carl G. Wagner. 2005. Basic Combinatorics.

9. https://artofproblemsolving.com/

NHẬN XÉT CỦA GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN

Giáo viên hướng dẫn

(Ký và ghi rõ họ, tên)

NHẬN XÉT CỦA GIÁO VIÊN PHẢN BIỆN 1

Giáo viên phản biện 1

(Ký và ghi rõ họ, tên)

NHẬN XÉT CỦA GIÁO VIÊN PHẢN BIỆN 2

Giáo viên phản biện 2

(Ký và ghi rõ họ, tên)