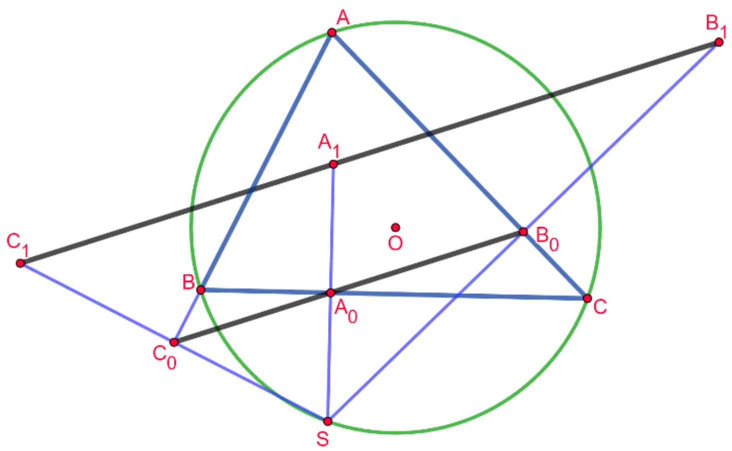
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ CẦN THƠ

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG

---🕮---

CHUYÊN ĐỀ

ĐƯỜNG THẲNG SIMSON – ĐƯỜNG THẲNG STEINER



GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN
PHẠM ĐOAN NGỌC

HỌC SINH THỰC HIỆN
LƯƠNG THỊ PHƯƠNG AN
LÊ ĐĂNG KHOA
LỚP 10A1

Cần Thơ, Tháng 4/2019

MỤC LỤC

DANH SÁCH HÌNH

Chương I. GIỚI THIỆU

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hình học là một trong những lĩnh vực cổ xưa nhất của Toán học, cùng với Số học đã được hình thành trong thời kì sơ khai của loài người. Từ lâu, Hình học luôn được coi là một bộ môn được yêu thích bởi những khám phá mới mẻ từ những định luật, định lý tiêu biểu được sử dụng rộng rãi cho đến ngày nay như: định lí Pythagoras, định lí Thales, tiên đề Euclid, ... nhưng đồng thời cũng là nỗi sợ hãi của không ít học sinh bởi sự tư duy logic và đầy tính trừu tượng của nó. Học sinh đã được làm quen với bộ môn này từ những năm tháng Tiểu học. Qua thời gian và các cấp học, kiến thức Hình học ngày càng được nâng cao. Tuy nhiên, vẫn còn nhiều định lí chưa được khai thác và áp dụng một cách triệt để. Đường thẳng Simson và đường thẳng Steiner là những ví dụ điển hình.

Nhà toán học người Scotland là Robert Simson (1687 – 1786) đã tìm ra một đường thẳng đẹp xuất hiện trong tam giác nội tiếp đường tròn. Người ta đặt tên cho nó là đường thẳng Simson. Đường thẳng Steiner là một hệ quả của đường thẳng Simson. Đây là những mô hình được áp dụng để chứng minh các điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy,… vô cùng hay và độc đáo. Nhằm hiểu được và khai thác sâu hơn về hai đường thẳng Simson và đường thẳng Steiner, chuyên đề này được biên soạn nhằm tìm hiểu và ứng dụng nó vào các bài toán từ đơn giản đến nâng cao, các bài toán trong kì thi Quốc gia và Quốc tế.

2. MỤC TIÊU NGHIÊN CỨU

Mục tiêu chính khi nghiên cứu đề tài này là để giúp người đọc nắm vững các lí thuyết cơ bản bao gồm định nghĩa và tính chất của đường thẳng Simson, đường thẳng Steiner. Bên cạnh đó, tìm hiểu thêm một số tính chất mở rộng và các hệ quả, mô hình các điểm phát triển từ các đường thẳng trên. Đồng thời, có thể ứng dụng mô hình đường thẳng Simson, Steiner trong giải các bài toán hình học phẳng.

Nhóm tác giả

Chương II. NỘI DUNG

1. ĐƯỜNG THẲNG STEINER

1.1. Định nghĩa

1.1.1. Bài toán

Cho ΔABC và điểm S không trùng với các đỉnh A, B, C của tam giác. Giả sử A_0, B_0, C_0 lần lượt là hình chiếu của S lên BC, AC, AB. Khi đó điểm S thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC khi và chỉ khi A_0, B_0, C_0 thẳng hàng.

Chứng minh

$(\Rightarrow)$

Xét tứ giác $ABSC$ nội tiếp $\Rightarrow ACS = SBC_0 \Rightarrow B_0SC = C_0SB$ (cùng phụ hai góc bằng nhau) (1)

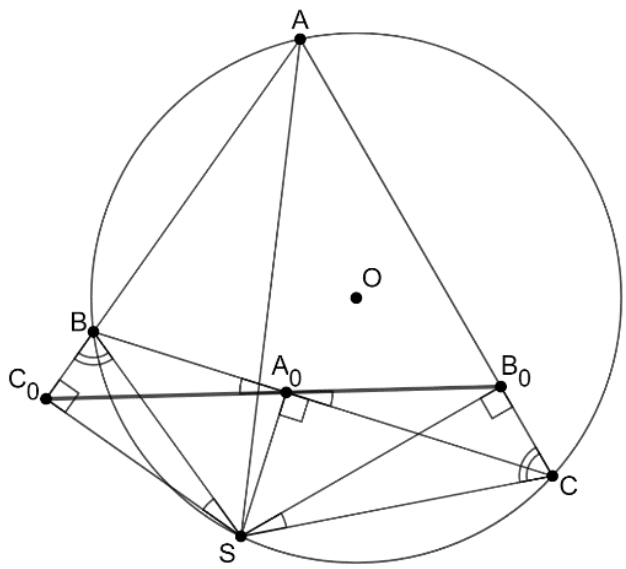
Mặt khác:

Xét A_0BC_0S nội tiếp $\Rightarrow C_0SB = C_0A_0B$ (2)

Xét A_0B_0CS nội tiếp $\Rightarrow B_0SC = B_0A_0C$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ $\Rightarrow C_0A_0B = B_0A_0C$

Suy ra A_0, B_0, C_0 thẳng hàng.



Hình 1. 1

$(\Leftarrow)$

Xét A_0BC_0S nội tiếp $\Rightarrow C_0SB = C_0A_0B$

Xét A_0B_0CS nội tiếp $\Rightarrow B_0SC = B_0A_0C$

Mà $C_0A_0B = B_0A_0C$ (2 góc đối đỉnh)

Suy ra $B_0SC = C_0SB$

$\Rightarrow \Delta C_0SB \sim \Delta B_0SC\,(g-g)$

$\Rightarrow C_0BS = B_0CS$

$\Rightarrow ABSC$ nội tiếp

$\Rightarrow S \in (O)$

1.1.2. Định nghĩa

Đường thẳng d đi qua A_0, B_0, C_0 được gọi là đường thẳng Simson của điểm S đối với ΔABC. Ký hiệu: $\Delta_{S/\Delta ABC}$

1.2. Các tính chất

Tính chất 1.2.1. Lấy $R \in (O)$ sao cho CS, CR đối xứng với nhau qua đường phân giác của ACB (hai đường đẳng giác của ACB). Khi đó $\Delta_S \perp CR$.

Chứng minh

Đặt $H = CR \cap \Delta_S$

Kẻ CF là tia phân giác của ACB.

$\Rightarrow ACF = BCF$

mà $RCF = SCF$ (tính chất trục đối xứng)

$\Rightarrow C_1 = C_2$

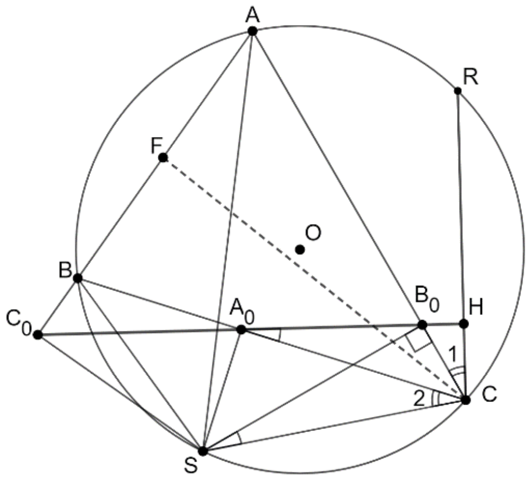
Mặt khác: $ACB + C_2 + B_0SC = 90^0$

Và $B_0SC = B_0A_0C$ (A_0B_0CS nội tiếp)

$\Rightarrow ACB + C_2 + B_0A_0C = 90^0$

$\Rightarrow \Delta HA_0C$ vuông tại H

$\Rightarrow \Delta_S \perp CR$ (đpcm)



Hình 1. 2

Tính chất 1.2.2. Gọi A' là giao điểm của SA_0 với đường tròn (O). Khi đó $AA' \parallel \Delta_S$.

Chứng minh

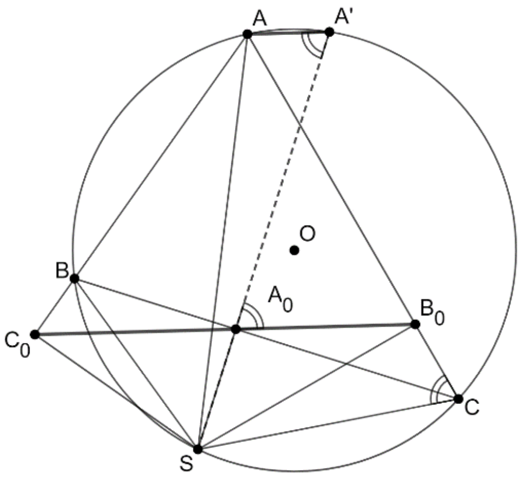
Do A_0B_0CS nội tiếp

Nên ta có $A'A_0B_0 = SCA$

Mà $SCA = SA'A$ (cùng chắn SA)

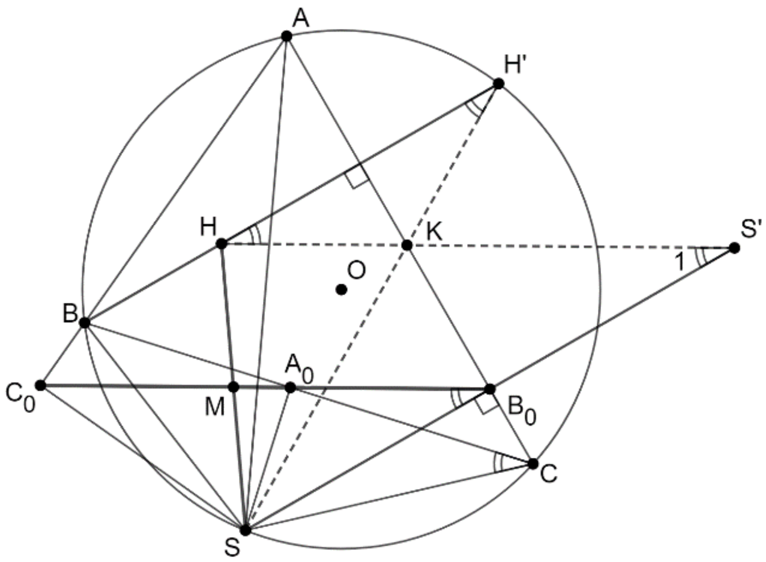
$\Rightarrow A'A_0B_0 = SA'A$

$\Rightarrow \Delta_S \parallel AA'$ (đpcm)



Hình 1. 3

Tính chất 1.2.3. Gọi H là trực tâm của ΔABC. Khi đó Δ_S đi qua trung điểm của HS.



Hình 1. 4

Chứng minh

Gọi $M = HS \cap \Delta_S$.

Ta sẽ chứng minh M là trung điểm của HS.

Lấy H' đối xứng H qua AC.

Dễ thấy $H' \in (O)$.

Gọi $K = H'S \cap AC$ và $S' = HK \cap SB_0$.

Dễ dàng chứng minh S' đối xứng S qua AC.

Ta có: $HH' \parallel SS'$ (do cùng $\perp AC$) nên $S'_1 = KHH'$

Mà $KHH' = KH'H$ (tính chất trục đối xứng)

Và $KH'H = SCA_0$ (cùng chắn BS)

$SCA_0 = SB_0A_0$ (A_0B_0CS nội tiếp)

Suy ra $S'_1 = SB_0A_0 \Rightarrow MB_0 \parallel HS'$

Mà B_0 là trung điểm của SS' (tính chất trục đối xứng)

$\Rightarrow M$ là trung điểm của HS (đpcm).

Tính chất 1.2.4. Gọi H là trực tâm ΔABC. Giao điểm M của HS và Δ_S thuộc đường tròn Euler ΔABC.

Chứng minh

Gọi E là tâm đường tròn Euler của ΔABC

$\Rightarrow E$ là trung điểm của OH

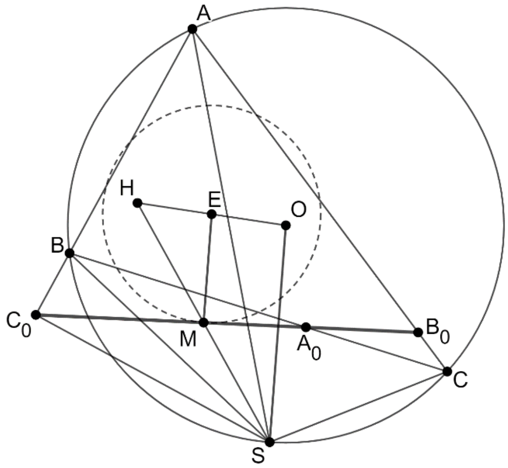
Theo *tính chất 1.2.3*: M là trung điểm của HS

$\Rightarrow EM$ là đường trung bình của ΔHOS

$\Rightarrow EM = \dfrac{1}{2} OS$

Mà bán kính đường tròn Euler bằng nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

$\Rightarrow M \in$ đường tròn Euler của ΔABC (đpcm).



Hình 1. 5

Tính chất 1.2.5. Giả sử tứ giác $ABCD$ điều hòa. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của D trên BC, CA, AB. Khi đó M là trung điểm của NP.

Chứng minh

Theo mô hình cơ bản của đường thẳng Simson, ta có M, N, P thẳng hàng.

Từ A kẻ đường thẳng song song với NP cắt CB tại G.

Theo định lý Thales, ta có:

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BG} = \dfrac{AB}{BP} \left(1\right)$

và $\dfrac{CG}{CM} = \dfrac{CA}{CN} \left(2\right)$

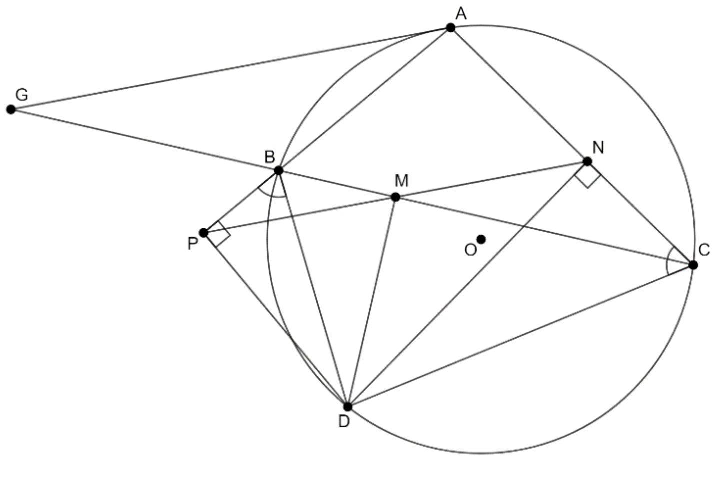
Xét ΔDBP và ΔDCN :

$DPB = DNC = 90^0$

$DBP = DCN$ (do $ABCD$ nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta DBP \sim \Delta DCN \left(g.g.\right)$

$\Rightarrow \dfrac{BP}{CN} = \dfrac{DB}{DC} \left(3\right)$



Hình 1. 6

Do tứ giác $ABDC$ điều hòa $\Rightarrow AB.CD = AC.BD$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BP}{CN}$ (do (3))

$\Leftrightarrow \dfrac{AB}{BP} = \dfrac{CA}{CN} \Leftrightarrow \dfrac{BM}{BG} = \dfrac{CG}{CM}$ (do (1) và (2))

$\Rightarrow (GMBC) = -1$

$\Rightarrow A(GMBC) = -1$

Mà $AG \parallel NP$

$\Rightarrow M$ là trung điểm NP (đpcm)

Tính chất 1.2.6. Góc giữa 2 đường thẳng Simson ứng với 2 điểm S, S' bằng $\dfrac{1}{2}$ góc giữa OS và OS'.

Chứng minh

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của S trên BC, AB.

E, F lần lượt là hình chiếu của S' trên BC, AC.

Đặt $S_1 = \Delta_{S/\Delta ABC} \cap \Delta_{S'/\Delta ABC}$.

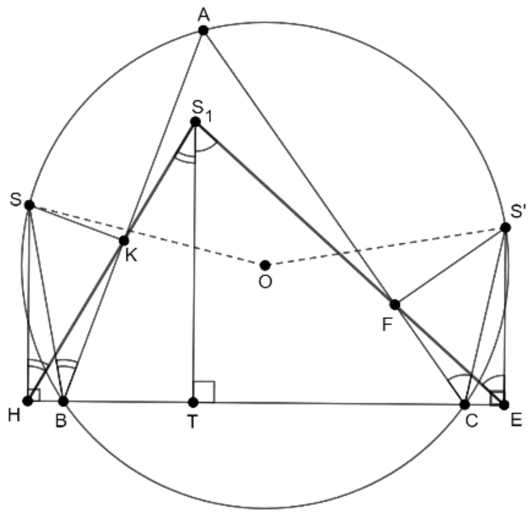
Kẻ $ST \perp BC$ $(T \in BC)$

Suy ra $SH \parallel S_1T \parallel S'E$

Ta có: $HS_1T = KHS$ (2 góc so le trong)

Mà $KHS = KBS$ ($SHBK$ nội tiếp)

$KBS = \dfrac{1}{2} AS$



Hình 1. 7

Tương tự, ta cũng có $TS_1E = \dfrac{1}{2} AS'$

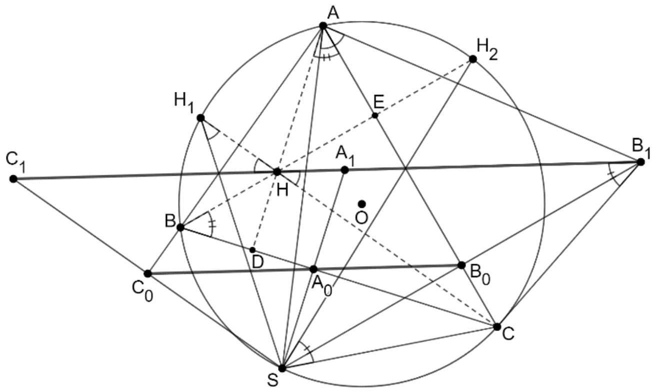
Suy ra $HS_1E = HS_1T + TS_1E = \dfrac{1}{2}\left(AS + AS'\right) = \dfrac{1}{2} SS' = \dfrac{1}{2} SOS'$ (đpcm).

2. ĐƯỜNG THẲNG STEINER

2.1. Định nghĩa

2.1.1. Bài toán

Cho ΔABC và điểm S thuộc đường tròn tâm (O) ngoại tiếp ΔABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là điểm đối xứng của S qua BC, CA, AB. Khi đó A_1, B_1, C_1 thẳng hàng và đường thẳng đi qua 3 điểm này đi qua trực tâm H của ΔABC.



Hình 2. 1

Chứng minh

Đặt $A_0 = SA_1 \cap BC, B_0 = SB_1 \cap AC, C_0 = SC_1 \cap AB$.

Theo mô hình đường thẳng Simson: A_0, B_0, C_0 thẳng hàng.

Suy ra theo tính chất của đường trung bình, ta có A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

Gọi H_1, H_2 lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC.

Dễ dàng chứng minh được $H_1, H_2 \in (O)$.

Kẻ đường cao AD, BE. Ta có tứ giác $ABDE$ nội tiếp $\Rightarrow HAC = H_2BC$

mà $H_2BC = H_2SC$ (cùng chắn cung nhỏ H_2C)

$H_2SC = HB_1C$ (tính chất trục đối xứng)

Suy ra $HAC = HB_1C \Rightarrow AHCB_1$ nội tiếp $\Rightarrow CHB_1 = CAB_1$

Mặt khác $CAB_1 = CAS$ (tính chất trục đối xứng)

$CAS = HH_1S$ (cùng chắn cung nhỏ SC)

$HH_1S = H_1HC_1$ (tính chất trục đối xứng)

Suy ra $CHB_1 = H_1HC_1 \Rightarrow A_1, B_1, C_1, H$ thẳng hàng. (đpcm)

2.1.2. Định nghĩa

Đường thẳng d đi qua A_1, B_1, C_1 được gọi là đường thẳng Steiner của điểm S đối với ΔABC.

2.2. Định lý Collings

2.2.1. Bài toán

Cho ΔABC có trực tâm H và đường thẳng d đi qua H. Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là đường thẳng đối xứng với d qua BC, AC, AB. Khi đó, d_1, d_2, d_3 đồng quy tại điểm P thuộc (ABC).

Chứng minh

Đặt $D = AH \cap (O)$

$E = BH \cap (O)$

Dễ thấy D, E lần lượt đối xứng với H qua BC, AC

$\Rightarrow D \in d_1$

Và $E \in d_2$

Ta có:

$D_1 = H_1$ (tính chất trục đối xứng)

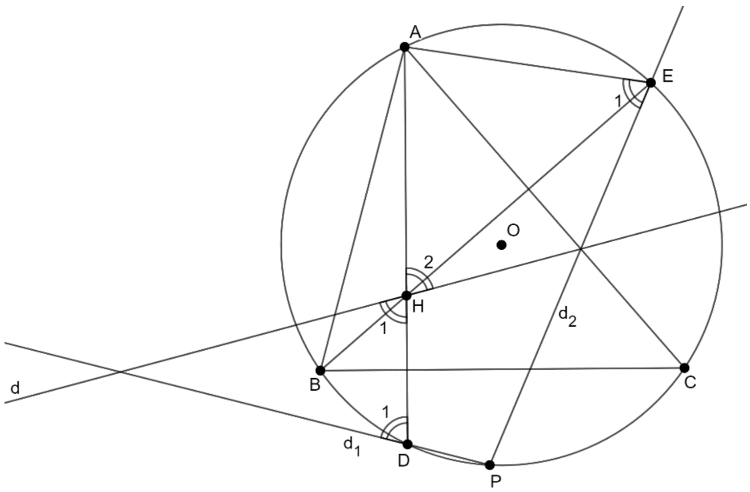
$H_1 = H_2$ (2 góc đối đỉnh)

$H_2 = E_1$ (tính chất trục đối xứng)

Suy ra $D_1 = E_1$

$\Rightarrow AEPD$ nội tiếp

$\Rightarrow P \in (O)$



Hình 2. 2

Chứng minh tương tự, ta có cũng có d_1 cắt d_3 tại điểm P' thuộc (O)

Do đó, d_1, d_2, d_3 đồng quy tại một điểm thuộc (ABC) (đpcm).

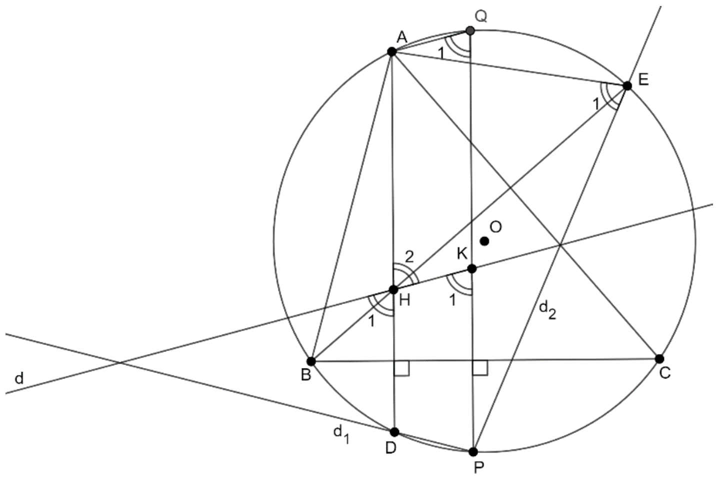
2.2.2. Định nghĩa

Giao điểm P của d_1, d_2, d_3 được gọi là điểm **anti Steiner** của d đối với ΔABC.

2.3. Các tính chất

Tính chất 2.3.1. Đường thẳng Simson và đường thẳng Steiner song song với nhau.

Tính chất 2.3.2. Nếu P là điểm *anti – Steiner* của d đối với ΔABC, đường thẳng qua P vuông góc với BC cắt $\left(ABC\right)$ tại điểm thứ hai là Q. Khi đó $AQ \parallel d$.



Hình 2. 3

Chứng minh

Đặt $K = d \cap PQ$.

Ta có:

$Q_1 = E_1$ (do cùng chắn AP)

$H_2 = E_1$ (tính chất trục đối xứng)

$H_1 = H_2$ (2 góc đối đỉnh)

Suy ra $Q_1 = H_1$

Mặt khác, vì $HD \parallel KP$ (do cùng $\perp BC$) nên $H_1 = K_1$

$\Rightarrow Q_1 = K_1$

Vậy $AQ \parallel d$ (đpcm).

3. ÁP DỤNG MÔ HÌNH ĐƯỜNG THẲNG SIMSON, SEINER TRONG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

Bài 1 (TTT – 80). Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm ngoài (O). M là một điểm thay đổi trên đường thẳng đi qua A vuông góc với OA. Gọi MB, MC là các tiếp tuyến của (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ $AE \perp MB,\ AF \perp MC\ (E \in MB,\ F \in MC)$. Chứng minh rằng EF đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

Vì $MAO = MCO = MBO = 90^0$.

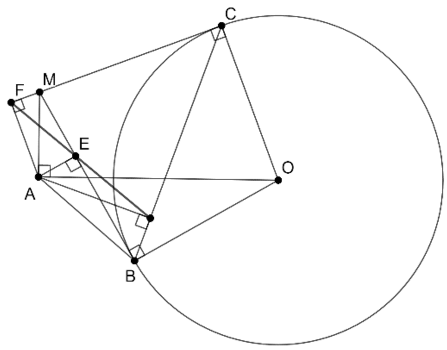
$\Rightarrow$ Tứ giác $MAOC$ và tứ giác $MABO$ nội tiếp.

Suy ra 4 điểm M,B,C,A đồng viên.

$\Rightarrow A \in (MBC)$

$\Rightarrow E,F \in \Delta_{A/\Delta MBC}$

$\Rightarrow$ Đường thẳng EF luôn đi qua hình chiếu của A trên BC.



Hình 3. 1

Bài 2 (TTT – 80). Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm thay đổi trên cung nhỏ BC. Kẻ $ME \perp AB,\ MF \perp AC\ (E \in AB,\ F \in AC)$

1) Xác định vị trí điểm M để EF đi qua trung điểm của BC.

2) Kẻ $AP \perp MB,\ AQ \perp MC\ (P \in MB,\ Q \in MC)$. Chứng minh rằng PQ đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

1) Đặt $K = BC \cap EF$. Khi đó, $E,F,K \in \Delta_{M/\Delta ABC}$.

Giả sử: K là trung điểm BC

$\Rightarrow OK \perp BC$ mà $MK \perp BC$

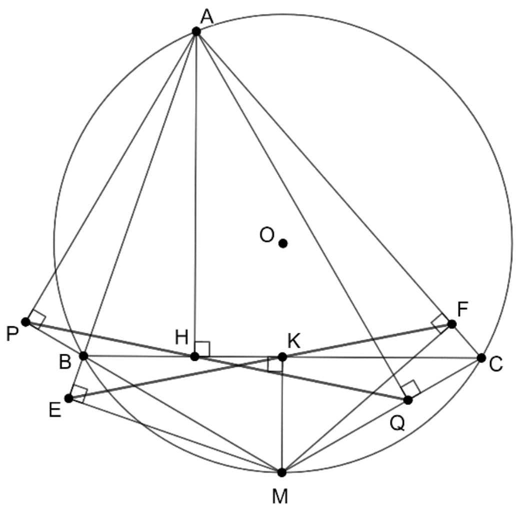
$\Rightarrow O,K,M$ thẳng hàng.

$\Rightarrow M$ là trung điểm của cung nhỏ BC.

2) Gọi H là hình chiếu của A trên BC.

Suy ra $P,Q,H \in \Delta_{A/\Delta MBC}$

Vậy PQ luôn đi qua hình chiếu của A trên BC.



Hình 3. 2

Bài 3. Cho ΔABC nhọn. M là điểm thuộc cung nhỏ BC. Gọi D, H lần lượt là hình chiếu của M trên AC, AB. Xác định vị trí của M để DH ngắn nhất.

Hướng dẫn

Hạ $ME \perp BC\left(E \in BC\right) \Rightarrow H,\ E,\ D \in \Delta_{M/\Delta ABC}$ hay $H,\ E,\ D$ thẳng hàng.

Xét ΔMHD và ΔMBC có:

$MHD = MBC$ ($MEBH$ nội tiếp)

$MDH = MCB$ ($MEDC$ nội tiếp)

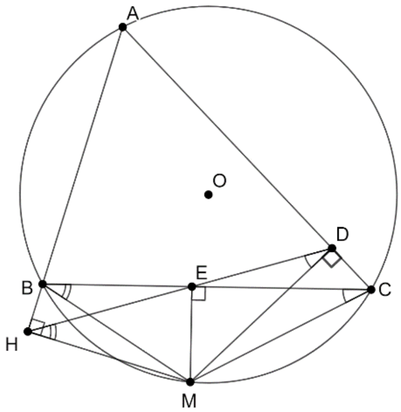
$\Rightarrow \Delta MHD \sim \Delta MBC\left(g.g.\right)$

Mặt khác: $MB \ge MH \Rightarrow 1 \ge \dfrac{MB}{MH} = \dfrac{HD}{BC}$

$\Rightarrow HD \le BC$. Suy ra HD lớn nhất khi $HD = BC$

$\Rightarrow MH = MB \Rightarrow MB \perp AB$ hay AM là đường kính

$\Rightarrow M$ đối xứng A qua O.



Hình 3. 3

Bài 4. Cho xOy và điểm A cố định thuộc tia phân giác của xOy. Dựng đường tròn tâm $\left(I\right)$ qua O và A cắt Ox, Oy lần lượt tại B, C. Dựng hình bình hành $OBMC$. Chứng minh M thuộc một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

Đặt $E = AI \cap BC$

Vì A thuộc tia phân giác của xOy nên $AC = AB$

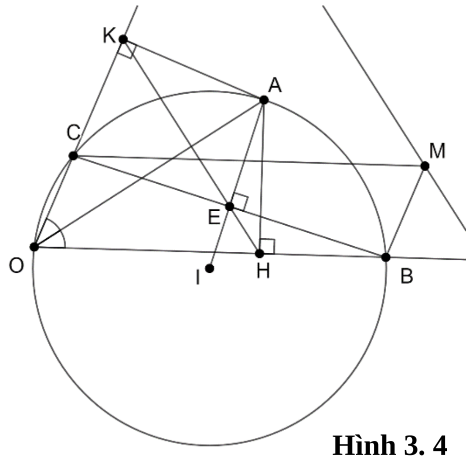
$\Rightarrow AI \perp BC$ tại E là trung điểm của BC

Kẻ $AH \perp Ox,\ AK \perp Oy$

$\Rightarrow K,\ H$ cố định và $K,\ E,\ H$ thẳng hàng

$\Rightarrow E$ di chuyển trên $\Delta_{A/\Delta OBC}$ cố định

Mặt khác: $OM = 2OE$ ($OBMC$ là hình bình hành)



Hình 3. 4

Suy ra M thuộc đường thẳng song song với đường thẳng *Simson* của điểm A đối với ΔOBC và cách O một khoảng không đổi.

Bài 5. Cho ΔABC nội tiếp (O) và đường phân giác AD. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC. Từ D, kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt PQ tại M. Chứng minh rằng M thuộc trung tuyến kẻ từ A của ΔABC.

Hướng dẫn

Đặt $I = AD \cap (O)$. Kẻ $IK \perp AB, IH \perp AC$.

Đặt $E = OI \cap BC$

$\Rightarrow IE \perp BC$ tại E là trung điểm của BC

$\Rightarrow K, E, H \in \Delta_{I/\Delta ABC}$ hay K, E, H thẳng hàng

Theo tính chất đường phân giác: $AD \perp PQ$ và $AI \perp HK$

$\Rightarrow PQ \parallel HK$

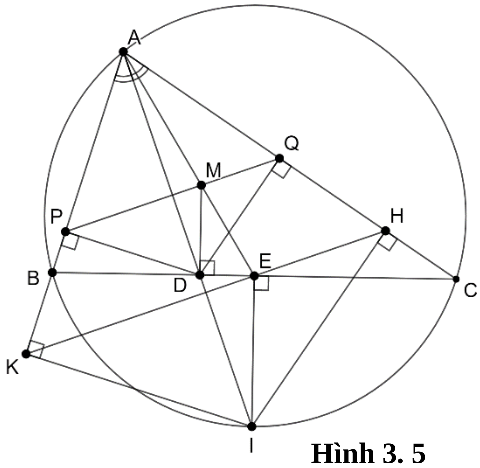
Đặt $M' = AE \cap PQ \Rightarrow \dfrac{AQ}{AK} = \dfrac{AM'}{AE}$ (*Thales*)

Mặt khác, $DP \parallel IK$ (cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \dfrac{AQ}{AK} = \dfrac{AD}{AI}$

Suy ra $\dfrac{AD}{AI} = \dfrac{AM'}{AE} \Rightarrow DM' \parallel IE$

Mà $IE \perp BC \Rightarrow DM' \perp BC$

Suy ra $M \equiv M'$. Ta có đpcm.



Hình 3. 5

Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). d_A, d_B, d_C, d_D lần lượt là các đường thẳng *Simson* của A, B, C, D tương ứng đối với $\Delta BCD, \Delta CDA, \Delta DAB, \Delta ABC$. Chứng minh rằng d_A, d_B, d_C, d_D đồng quy.

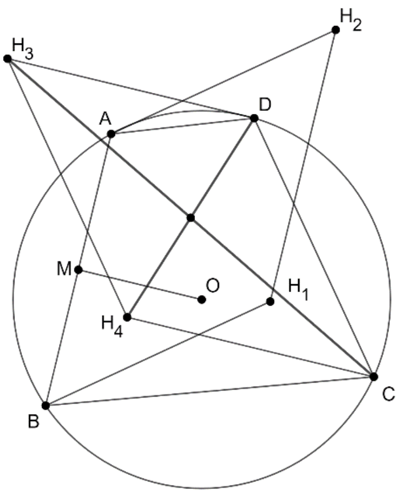
Hướng dẫn

Gọi M là trung điểm của AB.

Gọi H_A, H_B, H_C, H_D lần lượt là trực tâm của $\Delta BCD, \Delta CDA, \Delta DAB, \Delta ABC$.

$\Rightarrow$ Đường thẳng *Steiner* của điểm A, B, C, D đối với $\Delta BCD, \Delta CDA, \Delta DAB, \Delta ABC$ đi qua H_A, H_B, H_C, H_D

$\Rightarrow d_A, d_B, d_C, d_D$ lần lượt đi qua trung điểm của AH_1, BH_2, CH_3, DH_4 (1)



Hình 3. 6

Bổ đề: Cho ΔABC nội tiếp (O), trực tâm H. M là trung điểm của AB. Khi đó $HC = 2OM$.

Chứng minh:

Kẻ đường kính AK.

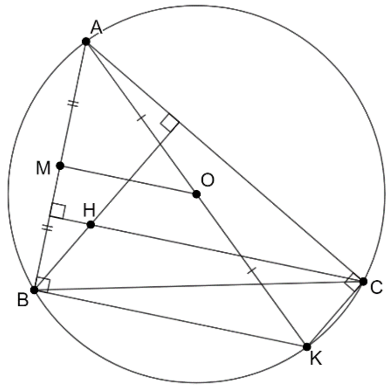
Dễ dàng chứng minh được $HBKC$ là hình bình hành.

$\Rightarrow CH = BK$

Mặt khác, xét ΔABK có MO là đường trung bình

$\Rightarrow BK = 2MO$

Suy ra $CH = 2OM$ (đpcm)



Hình 3. 7

Quay lại bài toán: Áp dụng bổ đề trên, ta có: $CH_4 = 2OM$, $DH_3 = OM$

$\Rightarrow CDH_3H_4$ là hình bình hành

$\Rightarrow CH_3,\ DH_4$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (2)

Tương tự: $AH_1,\ BH_2$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (3)

$(1)(2)(3) \Rightarrow d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4$ đồng quy (đpcm).

Bài 7. Cho ΔABC cố định và điểm M thay đổi trên cạnh BC. Gọi D, E lần lượt là điểm đối xứng của M qua AB, AC. Chứng minh rằng trung điểm X của đoạn thẳng DE luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

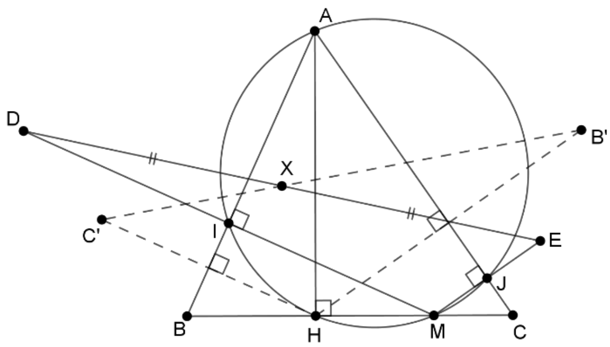
Đặt $I = MD \cap AB$ và $J = ME \cap AC$.

Kẻ đường cao AH.

Dễ dàng chứng minh được tứ giác $AIHM$ và $AHMJ$ nội tiếp

$\Rightarrow A, I, H, M, J$ cùng thuộc đường tròn đường kính AM.

Gọi B', C' lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC.



Hình 3. 8

$\Rightarrow B'C'$ là đường thẳng *Steiner* của điểm H đối với ΔAJI.

Dễ thấy $XJ,\ XI$ là hai đường trung bình của ΔMDE.

$$\Rightarrow \begin{cases} XJ \parallel MI \\ XI \parallel MJ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} XJ \perp AB\ (MI \perp AB) \\ XI \perp AC\ (MJ \perp AC) \end{cases}$$

$\Rightarrow X$ là trực tâm của ΔMDE .

$\Rightarrow X$ thuộc đường thẳng *Steiner* của điểm H đối với ΔAIJ.

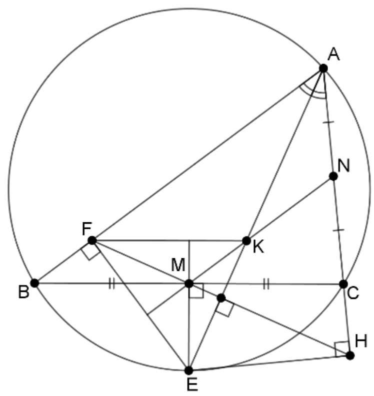
$\Rightarrow X \in B'C'$

Mà H cố định nên $B'C'$ cố định.

Ta có đpcm.

Bài 8 (THTT). Cho ΔABC $(AB > AC)$. Đường phân giác của BAC cắt (O) tại E (E khác A). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CA. F là hình chiếu của E lên AB. K là giao điểm của MN và AE. Chứng minh rằng $KF \parallel BC$.

Hướng dẫn



Hình 3. 9

Dễ thấy MN là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow MN \parallel AB$

Mà $EF \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow MN \perp EF$ hay $KM \perp EF$ (1)

Kẻ $EH \perp AC$ $(H \in AC)$.

$\Rightarrow FH \perp AE$ (tính chất đường phân giác)

Mặt khác, áp dụng mô hình đường thẳng *Simson* của điểm E đối với ΔABC

$\Rightarrow F, M, H$ thẳng hàng

Suy ra $FM \perp EK$ (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow M$ là trực tâm của ΔEFK

$\Rightarrow EM \perp KF$

Mà $EM \perp BC$ (tính chất đường phân giác)

$\Rightarrow KF \parallel BC$ (đpcm).

Bài 9. Cho ΔABC nội tiếp (O). Đường tròn (O') tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với AB, AC tại S, E, F. Gọi giao điểm thứ hai của AS với (O') là D. Từ S hạ chân các đường vuông góc $H, K,$ L xuống DE, DF, EF. Chứng minh rằng L là trung điểm của HK.

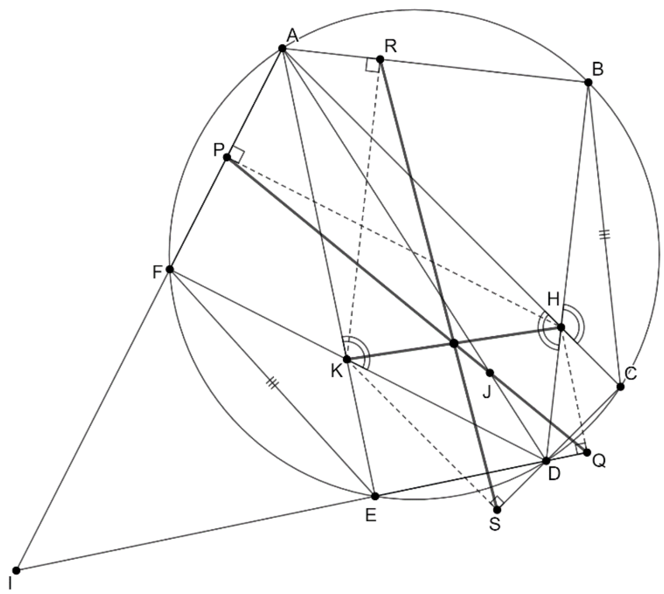
Hướng dẫn

Bài 10. Cho hình bình hành $ABCD$ có A nhọn. Lấy điểm T thuộc BC sao cho ΔATD nhọn. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABT, \Delta ADT, \Delta CDT$. Chứng minh rằng trực tâm H của $\Delta O_1O_2O_3$ nằm trên đường thẳng AD.

Hướng dẫn

Bài 11 (TTT – 80). Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn đường kính AD và $BC = EF$. Gọi H, K lần lượt là giao điểm của AC với BD và AE với DF. P, Q và R, S lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các đường thẳng AF, DE và K trên các đường thẳng AB, CD. Chứng minh rằng RS, PQ, HK đồng quy.

Hướng dẫn



Hình 3. 10

Gọi $I = AF \cap ED$.

Kẻ $HJ \perp AD\ (J \in AD)$.

• Chứng minh tứ giác $IAHD$ nội tiếp.

Ta có: $BHC = \dfrac{sđ\ BC + sđ\ AD}{2}$

$$AKD = \frac{sđ\ EF + sđ\ AD}{2}$$

Theo giả thiết, $BC = EF$

nên $sđ\ BC = sđ\ EF$

$\Rightarrow BHC = AKD$

Mặt khác, ta có: $EIF = \dfrac{sđ\ AD - sđ\ EF}{2}$

$\Rightarrow AKD + EIF = \dfrac{2sđ\ AD}{2} = 180^0$

Nên $BHC + EIF = 180^0$

$\Rightarrow AHD + EIF = 180^0$. Do đó tứ giác $IAHD$ nội tiếp.

• Áp dụng mô hình đường thẳng *Simson* của điểm H đối với ΔIAD

Suy ra 3 điểm P, J, Q thẳng hàng.

• Do AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp lục giác $ABCDEF$

Nên $AE \perp ID$ và $AF \perp ID \Rightarrow K$ là trực tâm của ΔIAD

Theo *tính chất 1.2.3,* ta có $\Delta_{H/\Delta IAD}$ đi qua trung điểm của HK

hay PQ đi qua trung điểm của HK

Chứng minh tương tự: RS đi qua trung điểm HK. Ta có đpcm.

4. MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG CÁC KỲ THI HỌC SINH GIỎI

Bài 1 (VMO 2004). Cho ΔABC nhọn nội tiếp (O), trực tâm H. D là điểm trên cung nhỏ BC, lấy E sao cho CE song song và bằng AD. K là trực tâm của ΔACE. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của K trên BC và AB. Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm HK.

Hướng dẫn

Theo giả thiết: $ADCE$ là hình bình hành

$\Rightarrow ADC = AEC$

K là trực tâm của ΔACE, dễ thấy $AKC + AEC = 180^0$

$\Rightarrow AKC + ADC = 180^0$

$\Rightarrow ADCK$ nội tiếp

$\Rightarrow K \in (O)$

Đặt $I = EK \cap AC \Rightarrow KI \perp AC$ (K là trực tâm của ΔACE)

$\Rightarrow Q, I, P \in \Delta_{K/\Delta BC}$ hay P, I, Q thẳng hàng

Đặt $M = AH \cap (O), N = AH \cap PQ$

Dễ thấy $BPKQ$ nội tiếp

$\Rightarrow QBK = QPK$ (cùng chắn QK)

Mà $QBK = AMK$ (cùng chắn AK)

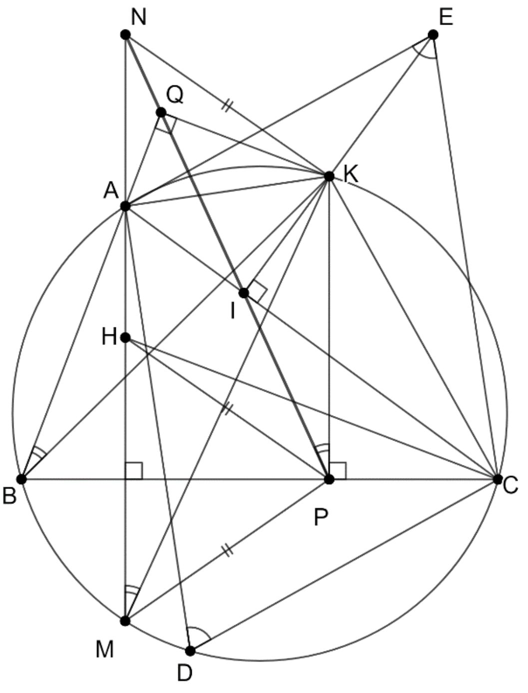
$\Rightarrow QPK = AMK$

$\Rightarrow MNKP$ nội tiếp

Mà $MN \parallel KP$ (cùng $\perp BC$)

$\Rightarrow MNKP$ là hình thang cân

$\Rightarrow KN = PM$



Hình 4. 1

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được BC là đường trung trực của HM

$\Rightarrow PH = PM$

Suy ra $KN = PH \Rightarrow KNHP$ là hình bình hành

$\Rightarrow PQ$ đi qua trung điểm của HK (đpcm).

Bài 2 (IMO – 2007). Cho 5 điểm A,B,C,D,E sao cho $ABCD$ là hình bình hành và $BCED$ nội tiếp trong (O). d là đường thẳng qua A cắt CD,BC tại F,G. Giả sử $EF=EG=EC$. Chứng minh rằng d là đường phân giác của DAB.

Hướng dẫn

Kẻ $EI\perp CF,\ EJ\perp CG\ \left(I\in CF,\ J\in GC\right)$

Do $EF=EG=EC$

$\Rightarrow I,J$ là trung điểm của FC và GC

Gọi K là giao điểm của 2 đường chéo của hình bình hành $ABCD$.

$\Rightarrow K$ là trung điểm của BD

Theo tính chất của đường trung bình, dễ dàng chứng minh được I,J,K thẳng hàng.

Mặt khác: $E\in(BDC)$

$\Rightarrow IJ$ là đường thẳng *Simson* của điểm E đối với với ΔBDC

$\Rightarrow K\in\Delta_{E/\Delta BDC}$

$\Rightarrow EK\perp BD$

$\Rightarrow \Delta EBD$ cân tại E

$\Rightarrow EBD=EDB$

Mà $EDB=ECF$ ($BDEC$ nội tiếp)

$EBD=ECD$ (cùng chắn ED)

$\Rightarrow CE$ là tia phân giác góc GCF.

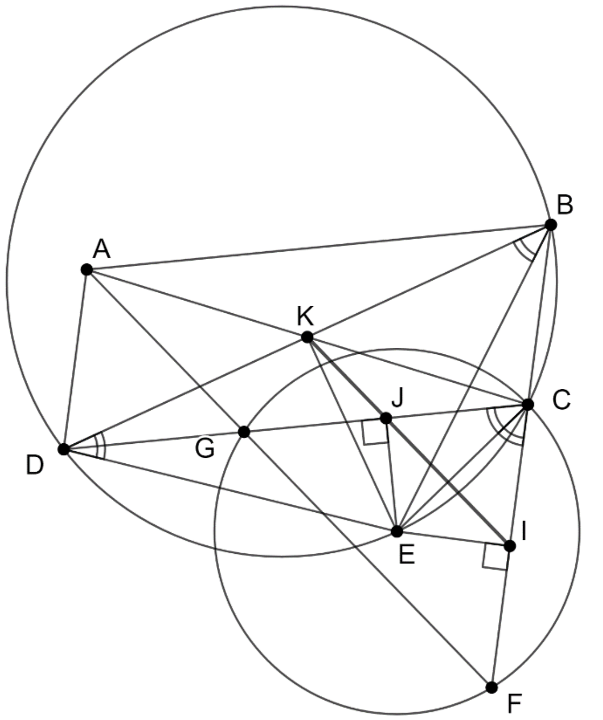
Suy ra $\Delta CJE=\Delta CIE$ (g.c.g)

$\Rightarrow CJ=CI$

$\Rightarrow CF=CG$

$\Rightarrow \Delta CFG$ cân tại C

$\Rightarrow CFG=CGF$



Hình 4. 2

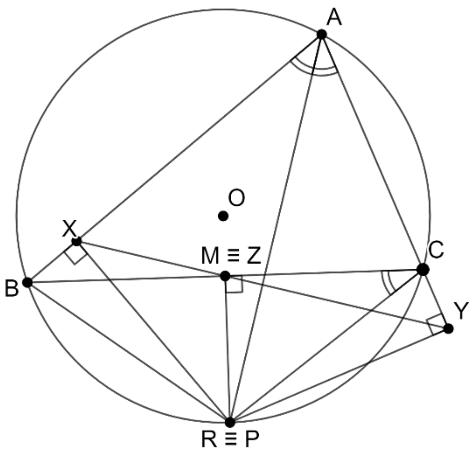
Mà: $CFG=DAG$ ($AD\parallel BC$, hai góc so le trong)

$CGF=FAB$ ($AB\parallel CD$, hai góc so le trong)

$\Rightarrow DAG=FAB$ (đpcm).

Bài 3 (Olympic Toán học Canada, 2001). Cho ΔABC với $AB > AC$. Gọi P là giao điểm của đường trung trực của BC và đường phân giác trong của BAC. Dựng các điểm X trên AB và Y trên AC sao cho $PX \perp AB$ và $PY \perp AC$. Gọi Z là giao điểm của XY và BC. Xác định giá trị tỉ số $\frac{BZ}{ZC}$.

Hướng dẫn



Hình 4. 3

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Giả sử R là giao điểm của đường phân giác trong của BAC và (O).

Ta có $BOR = 2BAR = 2CAR = COR$

$\Rightarrow BR = CR$ và R thuộc đường trung trực của BC.

Suy ra $R \equiv P$ và tứ giác $ABCP$ nội tiếp.

Giả sử các điểm X, Y, M lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ P xuống các cạnh AB, AC, BC của ΔABC.

Áp dụng mô hình đường thẳng *Simson* của điểm P với ΔABC

$\Rightarrow X, Y, M$ thẳng hàng.

Suy ra $M \equiv Z$ và $BZ = ZC = BM = MC = 1$

$\Rightarrow \frac{BZ}{ZC} = 1$

Bài 4 (IMO 1998 Shortlisted Problem). Cho ΔABC nội tiếp (O), bán kính R, trực tâm H. Gọi D, E, F lần lượt là điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua BC, AC, AB. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng khi $OH = 2R$.

Hướng dẫn

Cho ΔPQR là tam giác đồng dạng của tam giác ABC với tỉ số đồng dạng là $\frac{1}{2}$ với A là trung điểm QR, B là trung điểm của RP và C là trung điểm của PQ. Gọi D', E', F' là chân các đường vuông góc vẽ từ O đến các cạnh QR, RP, PQ.

Ta có thể dễ dàng chứng minh D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi D', E', F' thẳng hàng.

Mặt khác khi D', E', F' thẳng hàng thì 3 điểm này nằm trên đường thẳng *Simson* của điểm O ứng với tam giác RPQ

$\Rightarrow$ Tứ giác $ORPQ$ nội tiếp.

Bổ đề: Cho tam giác ABC, lần lượt lấy A là trung điểm QR, B là trung điểm của RP và C là trung điểm của PQ.Ta chứng minh được trực tâm H của tam giác ABC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR.

Giải:

(Vẽ hình cái bổ đề)

Do H là trực tâm tam giác ABC nên ta có:

- $AH \perp BC$

Mà $BC \parallel QR$

$\Rightarrow AH \perp QR$

Tương tự ta có $BH \perp RP$

Mà A và B lần lượt là trung điểm của QR, RP

$\Rightarrow AH$ nằm trên đường trung trực của QR và BH nằm trên đường trung trực của RP

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác QPR

Quay lại bài toán:

Ta có H là tâm $\left(QPR\right)$ theo bổ đề trên.

Vậy $OH = 2R$ do $\Delta ABC \sim \Delta QPR$ với tỉ số $\frac{1}{2}$.(đpcm)

Bài 5 (Chọn đội tuyển JBMO của Rumani năm 2001). Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\left(O\right)$. Với E là một điểm bất kỳ trên (O), ta có K, L, M, N lần lượt là hình chiếu của E lên DA, AB, BC, CD. Chứng minh rằng N là trực tâm của ΔKLM khi và chỉ khi $ABCD$ là hình chữ nhật.

Hướng dẫn

Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của E lên BD, AC.

Theo mô hình đường thẳng *Simson*, ta có các bộ điểm thẳng hàng sau:

- $L, K, P \left(\Delta_{E/\Delta ABD}\right)$
- $M, Q, L \left(\Delta_{E/\Delta ABC}\right)$
- $M, N, P \left(\Delta_{E/\Delta BCD}\right)$

- $N,\,K,\,Q\,\left(\Delta_{E/\Delta ACD}\right)$

Gọi $U,\,V$ lần lượt là giao điểm của $EP,\,EQ$ với (O)

Theo *tính chất 1.2.2,* ta có $UA \parallel KL,\,UC \parallel MN,\,VB \parallel ML,\,VD \parallel NK$.

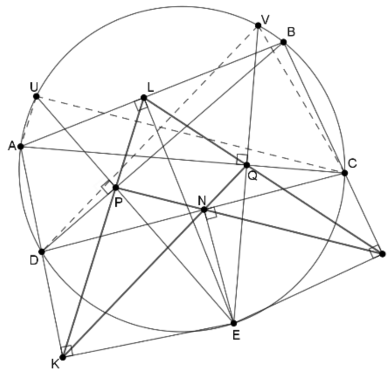
Do đó N là trực tâm của ΔKLM khi và chỉ khi:

$MN \perp KL$ và $NK \perp ML$

$\Leftrightarrow UA \perp UC$ và $VB \perp VD$

$\Leftrightarrow AC$ và BD là 2 đường kính của (O)

$\Leftrightarrow ABCD$ là hình chữ nhật (đpcm).



TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đoàn Quỳnh (chủ biên), Văn Như Cương, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Hà, Đỗ Thanh Sơn, Lê Bá Khánh Trình, *Tài liệu chuyên toán Hình học 10*, NXB Giáo Dục Việt Nam, năm 2016.

[2] Đoàn Quỳnh (chủ biên), Văn Như Cương, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Hà, Đỗ Thanh Sơn, Lê Bá Khánh Trình, *Tài liệu chuyên Toán bài tập Hình học 10*, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2016.

[3] Bộ Giáo dục và Đào tạo, Hội Giáo dục Việt Nam, *Tạp chí Toán học và tuổi trẻ*.

[4] Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Tạp chí Toán tuổi thơ*, số 80, 10/2009.

[5] Nguyễn Bá Đang, *Những định lí chọn lọc trong hình học phẳng và các bài toán áp dụng*, NXB Giáo Dục Việt Nam, năm 2016

[6] https://artofproblemsolving.com/

[7] https://diendantoanhoc.net/

NHẬN XÉT CỦA GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN

Giáo viên hướng dẫn

(Ký và ghi rõ họ tên)

NHẬN XÉT CỦA GIÁO VIÊN PHẢN BIỆN 1

Giáo viên phản biện 1

(Ký và ghi rõ họ tên)

NHẬN XÉT CỦA GIÁO VIÊN PHẢN BIỆN 2

Giáo viên phản biện 2

(Ký và ghi rõ họ tên)