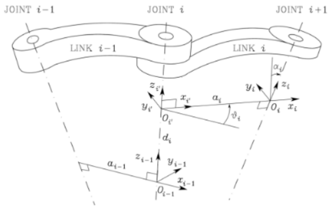
- **Tính $T_n^0(q)$ ntn?**

✓ Bước 1: gắn trục tọa độ cho các khớp
- ❖ Trục z_i gắn với trục khớp i
- ❖ O_i giao giữa z_i và đường vuông góc chung z_{i-1} và z_i
- ❖ Trục x_i dọc theo đường vuông góc chung z_{i-1} và z_i, hướng từ *i->i+1* ($\vec{x}_i = \vec{z}_{i-1} \times \vec{z}_i$)
- ❖ Trục y theo quy tắc bàn tay phải
- ❖ z_n song song z_{n-1} (khớp xoay)

✓ Bước 2: lập bảng tham số D-H
- ❖ a_i (chiều dài khâu): khoảng cách giữa O_i và $O_{i'}$
- ❖ d_i (độ dịch): khoảng cách giữa gốc O_{i-1} và $O_{i'}$ dọc theo z_{i-1}
- ❖ α_i (góc vặn khâu): góc giữa trục z_{i-1} và z_i nhìn từ x_i
- ❖ ϑ_i (góc khớp): góc giữa x_{i-1} và x_i nhìn từ z_{i-1}.

✓ Bước 3: Tính các ma trận chuyển vị: $A_1^0, \ldots, A_n^{n-1}$

$$\rightarrow T_n^0(q) = A_1^0 \ldots \times A_n^{n-1}$$



Ma trận chuyển đổi thuần nhất
(Homogeneous transformation matrix)

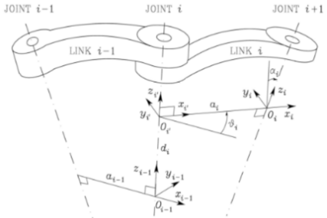
$$\boxed{T_n^0(q) = A_1^0(q_1) \times A_2^1(q_2) \ldots. \times A_n^{n-1}(q_n)}$$

- **Phương pháp Denavit-Hartenberg (D-H)**

$$\boxed{A_i^{i-1} = Rot(z, \vartheta_i) \times Trans(0,0,d_i) \times Trans(a_i,0,0) \times Rot(z, \alpha_i)}$$

Bảng tham số D-H

Khớp	a_i	α_i	d_i	ϑ_i	
1	a_1	α_1	d_1	ϑ_1	$A_1^0(q_1)$
2	a_2	α_2	d_2	ϑ_2	$A_2^1(q_2)$
3	a_3	α_3	d_3	ϑ_3	$A_3^2(q_3)$
...	...	...	...	...	...



Ma trận chuyển đổi thuần nhất giữa 0 và n
(Homogeneous transformation matrix)

$$\boxed{T_n^0(q) = A_1^0(q_1) \times A_2^1(q_2) \ldots. \times A_n^{n-1}(q_n)}$$

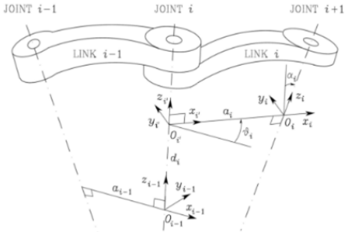
- **Phương pháp Denavit-Hartenberg (D-H)**

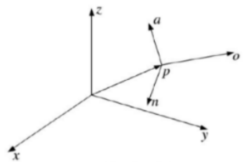
$$\boxed{A_i^{i-1} = Rot(z, \vartheta_i) \times Trans(0,0,d_i) \times Trans(a_i,0,0) \times Rot(x, \alpha_i)}$$

$$Rot(z,\vartheta_i) = \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i & 0 & 0 \\ s\vartheta_i & c\vartheta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Trans(0,0,d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trans(a_i,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Rot(x,\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i c\alpha_i & s\vartheta_i s\alpha_i & a_i c\vartheta_i \\ s\vartheta_i & c\vartheta_i c\alpha_i & -c\vartheta_i s\alpha_i & a_i s\vartheta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$





$P(P_x, P_y, P_z)$

$$F = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thành phần xoay

Thành phần tịnh tiến

Tịnh tiến theo các trục

$$\text{Trans}(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Xoay quanh x góc θ

$$\text{Rot}(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

Xoay quanh y góc θ

$$\text{Rot}(y,\theta) = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix}$$

Xoay quanh z góc θ

$$\text{Rot}(z,\theta) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

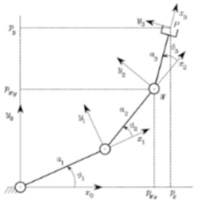
$$\begin{aligned} p_{Wx} &= p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ p_{Wy} &= p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 (s_1 s_{12} + c_1 c_{12}) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2 \end{aligned}$$

(1) $$c_2 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}, \quad s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2} \Rightarrow \boxed{\vartheta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2)}$$

(2) $$\begin{aligned} pw_x &= (a_1 + a_2 c_2) c_1 - a_2 s_2 s_1 \\ pw_y &= (a_1 + a_2 c_2) s_1 + a_2 s_2 c_1 \end{aligned}$$

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{Wy} - a_2 s_2 p_{Wx}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}, \quad c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{Wx} + a_2 s_2 p_{Wy}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} \Rightarrow \boxed{\vartheta_1 = \text{Atan2}(s_1, c_1)}$$

(3) $$\phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \Rightarrow \boxed{\vartheta_3 = \phi - \vartheta_1 - \vartheta_2}$$



End-effector có vị trí $P(p_x, p_y)$
và hướng $\phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \end{bmatrix}$$

- **Động học vận tốc (động học vị trí vi sai):** xác định quan hệ giữa vận tốc khớp và vận tốc dài/tuyến tính của end-effector.
- Động học vận tốc liên hệ với dịch chuyển vi sai

Phép tịch tiến vi sai

$$\text{Trans}(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Phép quay vi sai

$$\text{Rot}(x,\delta x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rot}(y,\delta y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rot}(z,\delta z) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & 0 & 0 \\ \delta z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(\bar{k}, d\theta) = \text{Rot}(x,\delta x).\text{Rot}(y,\delta y).\text{Rot}(z,\delta z) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Phép dịch chuyển vi sai của một khung tọa độ T so với khung tọa độ gốc

$T + dT = [\text{Trans}(dx, dy, dz).\ \text{Rot}(\bar{k}, d\theta)]T$

$dT = [\text{Trans}(dx, dy, dz).\ \text{Rot}(\bar{k}, d\theta) - I]T$

$dT = \Delta.T$

$\Delta = [\text{Trans}(dx, dy, dz).\ \text{Rot}(\bar{k}, d\theta) - I]$ là toán tử vi sai

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_e(q) = \begin{bmatrix} R_e(q) & p_e(q) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{p}_e &= J_P(q)\dot{q} \\ \omega_e &= J_O(q)\dot{q} \end{aligned} \Leftrightarrow v_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = J(q)\dot{q} \qquad \boxed{J = \begin{bmatrix} J_P \\ J_O \end{bmatrix}}$$

Ma trận Jacobian

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ROBOT} \\ \text{JACOBI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ d\theta_4 \\ d\theta_5 \\ d\theta_6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [D] = [J][D_\theta]$$

(Quan hệ chuyển dịch vi sai của tay robot và các khớp)

Thành phần vận tốc dài (Linear velocity)

$$\dot{p}_e = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_e}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} j_{Pi} \dot{q}_i \Rightarrow \begin{aligned} j_{Pi} &= z_{i-1} && \text{Khớp tịnh tiến} \\ j_{Pi} &= z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1}) && \text{Khớp xoay} \end{aligned}$$

Thành phần vận tốc góc (angular velocity)

$$\omega_e = \omega_n = \sum_{i=1}^{n} \omega_{i-1,i} = \sum_{i=1}^{n} j_{Oi} \dot{q}_i \Rightarrow \begin{aligned} j_{Oi} &= 0 && \text{Khớp tịnh tiến} \\ j_{Oi} &= z_{i-1} && \text{Khớp xoay} \end{aligned}$$

- **Ma trận Jacobian**

$$J = \begin{bmatrix} j_{P1} & & j_{Pn} \\ & \ldots & \\ j_{O1} & & j_{On} \end{bmatrix} \quad \text{Với} \quad \begin{bmatrix} j_{Pi} \\ j_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{Cho khớp tịnh tiến} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} & \text{Cho khớp xoay} \end{cases}$$

Số cột của J: số khớp tham gia chuyển động
Số hàng của J: là kích thước của không gian

- **Xác định J**

✓ J được tính theo hệ tọa độ gốc (base frame).

✓ z_{i-1} là cột thứ ba của ma trận xoay R_{i-1}^0, tức là $z_{i-1} = R_1^0(q_1) \ldots R_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) z_0$, với $z_0 = [0\ 0\ 1]^T$

✓ p_e là ba phần tử đầu tiên của cột thứ 4 của ma trân chuyển vị T_e^0 (base frame -> end-effector). Nếu biểu diễn đồng nhất $\tilde{p}_e$ dạng (4x1) ta có $\tilde{p}_e = A_1^0(q_1) \ldots A_n^{n-1}(q_n) \tilde{p}_0$, với $\tilde{p}_0 = [0\ 0\ 0\ 1]^T$

✓ p_{i-1} là ba phần tử đầu tiên của cột thứ 4 của ma trận chuyển vị T_{i-1}^0, tức là:
$\tilde{p}_{i-1} = A_1^0(q_1) \ldots A_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \tilde{p}_0$

- Ta có: $v_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = J(q)\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = J^{-1}(q) v_e$

- Phương trình chuyển động: $q(t_{k+1}) = q(t_k) + \dot{q}(t_k)\Delta t$

$$\boxed{q(t_{k+1}) = q(t_k) + J^{-1}(q(t_k)) v_e(t_k) \Delta t}$$

- Mối quan hệ giữa lực, mômen của các khớp với vị trí, tốc độ và gia tốc được biểu diễn trong phương trình chuyển động gọi là **phương trình động lực học**.
  - ✓ Lực tác động lên vật thể: $\sum \bar{F} = m\bar{a}$
  - ✓ Mômen quay của một vật: $\sum \bar{M} = J\bar{a}$
- Trong phương trình động lực học, lực và mômen là tín hiệu vào. Dựa vào phương trình động lực học, sẽ tính được lực, mômen cần thiết để khớp robot có thể chuyển động được với tốc độ và gia tốc mong muốn.

- **Phương trình động lực học Lagrange-Euler:**

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau}$$

✓ **L=K-P** Hàm Lagrange *(hiệu động năng và thế năng)*

✓ q là véctơ biến khớp gồm n thành phần q_i (θ_i với khớp quay, d_i khớp tịnh tiến)

✓ τ là lực tổng quát ứng với độ dịch chuyển khớp, với các thành phần $\tau_i(n_i$ (Nm) là mômen tương ứng với góc khớp) và f_i(N) là lực tương ứng với độ dịch chuyển của khớp).

- Lực, quán tính và năng lượng
  - ✓ Lực hướng tâm của vật m chuyển động quanh một điểm bán kính r và vận tốc góc là ω:

$$F_{ht} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = m\dot{\theta}^2 r$$

  - ✓ Vận tốc thẳng $v = \omega \times r$
  - ✓ Lực Coriolis: lực làm lệch quỹ đạo của vật m chuyển động với vận tốc v trên một hệ quy chiếu xoay với vân tốc góc ω

$$F_{cor} = -2m\omega \times v$$

  - ✓ Động năng của vật m chuyển động với vận tốc v: $K = \frac{1}{2}mv^2$
  - ✓ Động năng quay của vật m: $K_{quay} = \frac{1}{2}I\omega^2$
    với I là mômen quán tính: $I = \int \rho(r) r^2 dr$
    $\rho(r)$ là phân bố khối lượng của vật có bán kính r.
    Trường hợp đơn giản $I = mr^2 \rightarrow K_{quay} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$
  - ✓ Thế năng của vật m ở độ cao h trong trọng trường g: $P = mgh$

2. Lập quỹ đạo không gian khớp

- **Quỹ đạo 2-1-2: vận tốc biến đổi theo hình thang**
  - ✓ Quỹ đạo cong với dạng parabol ở điểm bắt đầu và cuối của chuyển động. **=>Vận tốc biến đổi theo hình thang**

=> Xác định phương trình Parabol và tham số t_c

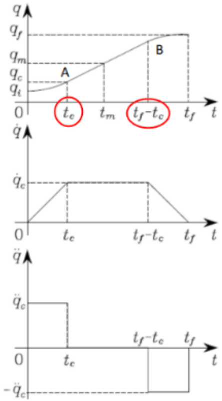
✓ $q(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{2}c_2 t^2$

$\dot{q}(t) = c_1 + c_2 t$

$\ddot{q}(t) = c_2$

✓ $q_m = \frac{q_f - q_i}{2}$ ở $t_m = \frac{t_f}{2}$

✓ $\dot{q}_A = \dot{q}_B = const$



2. Lập quỹ đạo không gian khớp

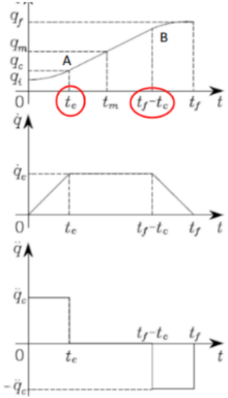
- Điều kiện biên:
  - ✓ $q_i = c_0$ (vị trí tại t=0)
  - ✓ $v_0 = 0 = c_1$ (vận tốc tại t=0) ➡ $c_0 = q_i$; $c_1 = 0$; $c_2 = \ddot{q}(t)$
  - ✓ $\ddot{q}(t) = c_2$ (gia tốc)
- Phương trình parabol:

$q(t) = q_i + \frac{1}{2}c_2 t^2$

$\rightarrow \dot{q}(t) = c_2 t$

$\ddot{q}(t) = c_2$

- Tại điểm A:
  - ✓ $q_A = q_c = q_i + \frac{1}{2}c_2 t_c^2$
  - ✓ $\dot{q}_A = c_2 t_c = \omega$
- Tại điểm B:
  - ✓ $q_B = q_A + \omega * \left((t_f - t_c) - t_c\right) = q_A + \omega * (t_f - 2t_c)$
  - ✓ $\dot{q}_B = \dot{q}_A = \omega$
- Tại điểm cuối:
  - ✓ $q_f = q_B + (q_A - q_i)$ (vì đoạn cong đối xứng qua đường thẳng
  - ✓ $\dot{q}_f = 0$ (vận tốc điểm cuối)



2. Lập quỹ đạo không gian khớp

- **Xác định thời gian làm "cong" cần thiết t_c**
  - ✓ $c_2 = \frac{\omega}{t_c}$
  - ✓ Thay q_A và q_B vào q_f ta có:

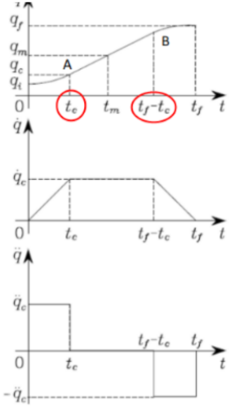
$q_f = q_i + c_2 t_c^2 + \omega(t_f - 2t_c)$

$\rightarrow q_f = q_i + \frac{\omega}{t_c}t_c^2 + \omega(t_f - 2t_c) = q_i + \omega(t_f - t_c)$

$\rightarrow t_c = \frac{q_i - q_f + \omega t_f}{\omega}$

- **Vận tốc lớn nhất**

$\omega_{max} = \frac{2(q_f - q_i)}{t_f}$ (vì $t_c \leq \frac{t_f}{2}$)



2. Lập quỹ đạo không gian khớp

- **Phương trình parabol đầu:**

$q(t) = q_i + \frac{1}{2}c_2 t^2$

$\rightarrow \dot{q}(t) = c_2 t$

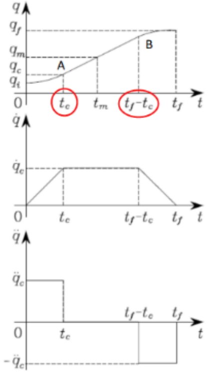
$\ddot{q}(t) = c_2$

- **Phương trình parabol cuối đối xứng với parabol đầu:**

$q(t) = q_f - \frac{1}{2}c_2(t_f - t)^2$ với $c_2 = \frac{\omega}{t_c}$

$\rightarrow \dot{q}(t) = c_2(t_f - t)$

$\ddot{q}(t) = -c_2$



Ví dụ 4.6 (Quan hệ giữa ma trận Jacobian, toán tử vi sai và vị trí mới của robot)

- Tính vị trí mới của tay robot 5 bậc tự do sau các phép dịch chuyển vi sai của các khớp robot:

$$D_\theta = \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ d\theta_4 \\ d\theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ -0.1 \\ 0.05 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}; T_5^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Giả sử robot chỉ quay theo các trục x,y.

Ví dụ 4.6 (Giải)

- Tính dịch chuyển vi sai theo từng trục và toán tử vi sai

$$D = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = JD_\theta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}1 \\ 0{,}05 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ -0{,}15 \\ -0{,}4 \\ 0 \\ -0{,}1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}15 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & -0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tính dịch chuyển vi sai khung T_5^0

$$\Rightarrow dT_5^0 = \Delta T_5^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}15 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & -0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}1 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}15 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tính vị trí mới của khung tọa độ tay robot sau khi dịch chuyển vi sai

$$T_5^{0\prime} = dT_5^0 + T_5^0 = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}1 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}15 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}1 & 0 & 5{,}1 \\ 0 & 0 & -1 & 2{,}85 \\ 0{,}1 & 1 & 0 & 2{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$