

**CẤU TRÚC DỮ LIỆU VÀ GIẢI THUẬT**  
**BÀI LUYỆN TẬP SỐ 2 – THỜI GIAN: 100 GIỜ**

**BÀI A: LŨY THỪA**

Cho số nguyên dương  $N$  và  $K$ . Hãy tính  $N^K$  modulo  $10^9+7$ .

**Input:**

Dòng đầu tiên là số lượng bộ test  $T$  ( $T \leq 20$ ).

Mỗi test gồm 1 số nguyên  $N$  và  $K$  ( $1 \leq N \leq 1000$ ,  $1 \leq K \leq 10^9$ ).

**Output:**

Với mỗi test, in ra đáp án trên một dòng.

**Ví dụ:**

Input:	Output
2	8
2 3	16
4 2	

**B. TÌM BỘI SỐ**

Cho số nguyên  $N$ . Nhiệm vụ của bạn cần tìm số nguyên  $X$  nhỏ nhất là bội của  $N$ , và  $X$  chỉ chứa hai chữ số 0 và 9.

**Input:**

Dòng đầu tiên là số lượng bộ test  $T$  ( $T \leq 10000$ ).

Mỗi bộ test chứa số nguyên  $N$  trên một dòng ( $1 \leq N \leq 500$ ).

**Output:**

Với mỗi test in ra đáp án tìm được trên một dòng.

**Ví dụ:**

Input	Output
3	90
2	90
5	99
11	

**C. KÝ TỰ ĐẶC BIỆT**

Cho một chuỗi  $s$ . Chuỗi  $F(s)$  được xác định bằng cách ghép chuỗi  $s$  ban đầu với chuỗi  $s$  sau khi đã được quay vòng sang bên phải 1 ký tự (ký tự cuối cùng của  $s$  được chuyển lên đầu).

Thực hiện liên tiếp các bước cộng chuỗi như trên với chuỗi mới thu được, ta có được chuỗi  $X$ .

$$X = F_k(s) = F(F_{k-1}(s)) \text{ với } F_0(s) = s.$$

Nhiệm vụ của bạn là hãy xác định kí tự thứ N trong xâu X là kí tự nào?

### Input

Gồm một xâu s có độ dài không vượt quá 30 kí tự và số nguyên N ( $1 \leq N \leq 10^{18}$ ).

### Output

In ra kí tự tìm được.

### Ví dụ

Input	Output
COW 8	C

Giải thích test: COW  $\rightarrow$  COWWCO  $\rightarrow$  COWWCOOCOWWC. Kí tự thứ 8 là 'C'.

## D. TRÒ CHƠI TRÊN BẢNG SỐ

Cho bảng số A gồm n hàng và n cột. Các hàng được đánh số từ 1 đến n, từ trên xuống dưới, các cột của lưới được đánh số từ 1 đến n, từ trái sang phải. Ô giao của hàng i và cột j gọi là ô (i, j) và được điền một số nguyên  $a_{ij}$  có giá trị tuyệt đối không vượt quá  $10^9$ .

Xét trò chơi đối kháng giữa hai người trên bảng như sau: Trò chơi diễn ra trong n lượt đi, mỗi lượt người thứ nhất chọn một hàng, người thứ hai chọn một cột. Giả sử, tại một lượt đi, nếu người chơi thứ nhất chọn hàng i, người chơi thứ hai chọn cột j, khi đó người thứ nhất được cộng  $a_{ij}$  điểm, người thứ hai được cộng  $-a_{ij}$  điểm. Sau lượt đi đó, bảng bị xóa hàng và cột mà hai người chơi vừa chọn. Người có điểm càng cao càng thể hiện sự thông minh của mình.

**Yêu cầu:** Cho bảng số A và biết cả hai người đều chơi tối ưu, hãy tính điểm lớn nhất mà người thứ nhất có thể đạt được.

### Input

Dữ liệu vào gồm nhiều bộ dữ liệu tương ứng với nhiều test. Dòng đầu tiên ghi K ( $K \leq 100$ ) là số bộ test. Tiếp theo là K nhóm dòng, mỗi nhóm là một bộ dữ liệu có cấu trúc như sau:

- Dòng đầu của nhóm ghi số n ( $n \leq 8$ );
- n dòng sau, mỗi dòng chứa n số nguyên mô tả bảng số.

### Output

Với mỗi bộ dữ liệu, ghi ra trên một dòng một số nguyên là điểm lớn nhất có thể của người thứ nhất tương ứng với dữ liệu vào.

### Ví dụ:

Input	Output
3 2 10 10 -5 -5 2	5 5 -10

10 -5	
10 -5	
2	
10 -5	
-5 10	

## E. XÓA CHỮ SỐ

Cho một số có N chữ số. Bạn hãy xóa đi K chữ số để được số còn lại sau khi xóa là lớn nhất có thể.

**Input:** Dòng 1: số N và K ( $1 \leq K < N \leq 500\,000$ ).

Dòng 2: Số có N chữ số, bắt đầu bằng số khác 0.

**Output:** Số lớn nhất có thể sau khi xóa K chữ số.

**Ví dụ**

Input	Output
4 2 1924	94

## F. MÁY ATM

Một máy ATM hiện có n ( $n \leq 30$ ) tờ tiền có giá trị  $t[1], t[2], \dots, t[n]$ . Hãy tìm cách trả ít tờ nhất với số tiền đúng bằng S.

**Input**

Dòng đầu tiên gồm 2 số nguyên n và S ( $S \leq 10^9$ )

Dòng thứ hai chứa n số nguyên  $t[1], t[2], \dots, t[n]$  ( $t[i] \leq 10^9$ )

**Output**

Số tờ tiền ít nhất phải trả.

**Ví dụ**

Input	Output
3 5 1 4 5	1

## G. KÝ TỰ LẶP TRONG HAI XÂU LIÊN TIẾP

Cho một dãy các xâu ký tự chỉ bao gồm các chữ cái in hoa từ A đến Z, trong đó các ký tự trong mỗi xâu đều đã được sắp xếp theo thứ tự từ điển và mỗi chữ cái chỉ xuất hiện nhiều nhất một lần (tức là độ dài xâu tối đa là 26). Nếu một ký tự xuất hiện trong hai xâu liên tiếp thì được coi là một lần lặp. Hãy tìm

cách sắp xếp lại thứ tự các xâu sao cho số lần lặp là nhỏ nhất có thể. Ví dụ dưới đây là cùng một dãy xâu nhưng với cách sắp xếp lại thì số lần lặp chỉ còn 2.

ABC		ABEF	
ABEF		DEF	
DEF	=> Số lần lặp là 6	ABC	=> Số lần lặp là 2.
ABCDE		FGH	
FGH		ABCDE	

**Input:** Dòng đầu tiên ghi số N ( $2 \leq N \leq 10$ ) là số xâu ký tự. N dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi một xâu.

**Output:** In ra trên một dòng số lần lặp nhỏ nhất có thể.

**Ví dụ:**

Test 1	Test 2	Test 3
Input : 5 ABC ABEF DEF ABCDE FGH  Output : 2	Input : 6 BDE FGH DEF ABC BDE ABEF  Output : 3	Input : 4 XYZ XYZ ABYZ Z  Output : 4

## H. XÓA DẤU NGOẶC

Cho biểu thức toán học đúng, bạn cần tìm tất cả các biểu thức đúng có thể bằng cách xóa bỏ các cặp dấu ngoặc tương ứng với nhau từ biểu thức ban đầu.

Ví dụ: Cho biểu thức:  $(2+(2*2)+2)$

Các biểu thức tìm được:

$(2+2*2+2)$

$2+(2*2)+2$

$2+2*2+2$

Các biểu thức  $(2+2*2)+2$  và  $2+(2*2)+2$  không được chấp nhận vì không xóa đi các cặp dấu ngoặc tương ứng với nhau

**Input**

Một dòng chứa biểu thức gồm các số nguyên không âm và các dấu +, \*, -, /, và dấu ngoặc (, ).

Biểu thức không quá 200 ký tự, có chứa ít nhất 1 và không quá 10 cặp dấu ngoặc.

**Output**

In ra tất cả các biểu thức khác nhau thỏa mãn đầu bài theo thứ tự từ điển

**Ví dụ**

Test 1	Test 2	Test 3
Input: $(0 / (0))$  Output: $(0 / 0)$ $0 / (0)$ $0 / 0$ $(0 / 0)$ $0 / (0)$ $0 / 0$	Input: $(2 + (2 * 2) + 2)$  Output: $(2 + 2 * 2 + 2)$ $2 + (2 * 2) + 2$ $2 + 2 * 2 + 2$	Input: $(1 + (2 * (3 + 4)))$  Output: $(1 + (2 * 3 + 4))$ $(1 + 2 * (3 + 4))$ $(1 + 2 * 3 + 4)$ $1 + (2 * (3 + 4))$ $1 + (2 * 3 + 4)$ $1 + 2 * (3 + 4)$ $1 + 2 * 3 + 4$

## I. GẤP ĐÔI DÃY SỐ

Một dãy số tự nhiên bắt đầu bởi con số 1 và được thực hiện N-1 phép biến đổi “gấp đôi” dãy số như sau: Với dãy số A hiện tại, dãy số mới có dạng A, x, A trong đó x là số tự nhiên bé nhất chưa xuất hiện trong A.

Ví dụ với 2 bước biến đổi, ta có  $[1] \rightarrow [1\ 2\ 1] \rightarrow [1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 2\ 1]$ .

Các bạn hãy xác định số thứ K trong dãy số cuối cùng là bao nhiêu?

### Input:

Dòng đầu tiên là số lượng bộ test T ( $T \leq 20$ ).

Mỗi test gồm số nguyên dương N và K ( $1 \leq N \leq 50$ ,  $1 \leq K \leq 2^N - 1$ ).

### Output:

Với mỗi test, in ra đáp án trên một dòng.

### Test ví dụ:

Input:	Output
2	2
3 2	4
4 8	

Giải thích test 1: Dãy số thu được là  $[1, 2, 1, 3, 1, 2, 1]$ .

Giải thích test 2: Dãy số thu được là  $[1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1]$ .

## J. XÓA CHỮ SỐ

Cho một số có N chữ số. Bạn hãy xóa đi K chữ số để được số còn lại sau khi xóa là lớn nhất có thể.

**Input:** Dòng 1: số N và K ( $1 \leq K < N \leq 500\,000$ ).

Dòng 2: Số có N chữ số, bắt đầu bằng số khác 0.

**Output:** Số lớn nhất có thể sau khi xóa K chữ số.

**Ví dụ**

Input	Output
4 2 1924	94

## K. TÌM DÃY SỐ

Cho trước một dãy số dương có N phần tử. Bạn biết trước tổng của bất kì 2 phần tử nào trong dãy số, hãy tìm dãy số ban đầu.

**Input**

Dòng đầu tiên là N, số phần tử của dãy số. ( $2 \leq N \leq 1000$ )

N dòng sau, mỗi dòng gồm N số (mỗi số  $\leq 100\,000$ ) mô tả ma trận biểu diễn tổng của 2 phần tử trong dãy.

\*  $S(i,j) = 0$  nếu  $i = j$ .

\*  $S(i,j) = A[i] + A[j]$  với  $i \neq j$ , là tổng của phần tử thứ i và thứ j trong dãy số.

**Output**

In ra trên 1 dòng dãy số cần tìm. Input luôn đảm bảo có 1 đáp số duy nhất.

**Ví dụ**

Test 1	Test 2
Input1: 2 0 2 2 0 Output1: 1 1	Input2: 4 0 3 6 7 3 0 5 6 6 5 0 9 7 6 9 0 Output2: 2 1 4 5

## L. DÃY SỐ ĐỐI XỨNG

Cho dãy số gồm có  $N$  phần tử. Dãy số  $A$  được gọi là đối xứng nếu như  $A[i] = A[N-i+1]$  với mọi giá trị  $i$  từ 1 đến  $N$ .

Bạn được phép sử dụng thao tác gộp số, tức loại bỏ đi 2 số liền nhau trong dãy số và thay thế chúng bằng một số mới có giá trị bằng tổng của 2 số đã chọn.

Với một dãy số cho trước, hãy tính số thao tác sử dụng ít nhất để có thể biến đổi dãy số ban đầu thành một dãy số đối xứng?

### Input

Dòng đầu tiên là  $N$  ( $N \leq 10^6$ ), số lượng phần tử trong dãy số ban đầu.

Dòng tiếp theo gồm  $N$  số nguyên  $A[i]$  ( $1 \leq A[i] \leq 10^9$ ).

### Output

In ra một số nguyên là đáp án của bài toán.

### Ví dụ

Test 1	Test 2
Input: 3 1 2 3 Output: 1	Input: 4 1 4 3 2 Output: 2

## M. BIỂU THỨC

Một dãy gồm  $n$  số nguyên không âm  $a_1, a_2, \dots, a_n$  được viết thành một hàng ngang, giữa hai số liên tiếp có một khoảng trắng, như vậy có tất cả  $(n-1)$  khoảng trắng. Người ta muốn đặt  $k$  dấu cộng và  $(n-1-k)$  dấu trừ vào  $(n-1)$  khoảng trắng đó để nhận được một biểu thức có giá trị lớn nhất.

Ví dụ, với dãy gồm 5 số nguyên 28, 9, 5, 1, 69 và  $k = 2$  thì cách đặt  $28+9-5-1+69$  là biểu thức có giá trị lớn nhất.

Yêu cầu: Cho dãy gồm  $n$  số nguyên không âm  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và số nguyên dương  $k$ , hãy tìm cách đặt  $k$  dấu cộng và  $(n-1-k)$  dấu trừ vào  $(n-1)$  khoảng trắng để nhận được một biểu thức có giá trị lớn nhất.

### Input

- Dòng đầu chứa hai số nguyên dương  $n, k$  ( $k < n \leq 10^5$ );
- Dòng thứ hai chứa  $n$  số nguyên không âm  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $a_n \leq 10^6$ )

### Output

- Một số nguyên là giá trị của biểu thức đạt được.

### Ví dụ

Input	Output
5 2 28 9 5 1 69	100

**N. GIA VỊ CHUA VA CAY** - Một nhà hàng rất nổi tiếng với các món ăn chua và cay. Hiện tại đang có tất cả N loại gia vị. Mỗi loại có độ chua  $S_i$  và độ cay  $B_i$  đặc trưng. Khi trộn K loại gia vị vào món ăn, độ chua của món ăn sẽ bằng tích độ chua của K loại gia vị, trong khi đó độ cay sẽ bằng tổng độ cay của K loại gia vị. Để cho món ăn được hấp dẫn và hài hòa, đầu bếp sẽ chọn các loại gia vị sao cho sự chênh lệch giữa độ chua và độ cay của món ăn là nhỏ nhất. Dĩ nhiên, cần phải chọn ít nhất một loại gia vị cho món ăn. Các bạn hãy giúp đầu bếp thực hiện công việc này.

**Input:** Dòng đầu tiên là số thành phần gia vị N ( $1 \leq N \leq 10$ ). N dòng tiếp theo, mỗi dòng gồm 2 số  $S_i, B_i$  mô tả đặc trưng vị chua và vị cay của gia vị đó. Input được đảm bảo rằng nếu trộn tất cả các loại gia vị, thì độ cay và độ chua của món ăn sẽ nhỏ hơn  $10^9$ .

**Output:** In ra sự chênh lệch nhỏ nhất giữa vị chua và vị cay của món ăn.

Ví dụ:

Test 1	Test 2	Test 3
Input: 1 3 10  Output: 7	Input: 2 3 8 5 8  Output: 1	Input: 4 1 7 2 6 3 8 4 9  Output: 1

*Giải thích test 3: Đầu bếp sẽ chọn 3 gia vị cuối. Độ chua của món ăn sẽ bằng  $2*3*4 = 24$ , còn độ cay là  $6+8+9 = 23$ . Hiệu của chúng bằng 1*

### O. NHẦM CHỮ SỐ

Trong một buổi học toán, giáo viên viết 2 số nguyên, A và B, và yêu cầu Tèo thực hiện phép cộng. Tèo hông bao giờ tính toán sai, nhưng thỉnh thoảng cậu ta không chép các con số một cách chính xác. Lỗi duy nhất của là ghi nhầm '5' thành '6' hoặc ngược lại. Cho hai số, A và B, tính tổng nhỏ nhất và lớn nhất mà Tèo có thể nhận được.

**Input:** Có một dòng chứa hai số nguyên dương A và B ( $1 \leq A, B \leq 1\,000\,000$ ).

**Output:** In ra 2 số nguyên cách nhau một dấu cách, tổng nhỏ nhất và lớn nhất mà Perica có thể nhận được.

Ví dụ:



Test 1	Test 2	Test 3
Input: 11 25	Input: 1430 4862	Input: 16796 58786
Ouput: 36 37	Ouput: 6282 6292	Ouput: 74580 85582

## P. ĐẾM DÂY

Cho số nguyên dương  $n$ . Hãy cho biết có bao nhiêu dãy số nguyên dương có tổng các phần tử trong dãy bằng  $n$ .

**Dữ liệu vào:** dòng đầu tiên chứa số nguyên  $T$  là số bộ dữ liệu, mỗi bộ dữ liệu ghi một số nguyên dương  $n$  duy nhất không qua  $10^{18}$ .

**Kết quả:** Mỗi bộ dữ liệu ghi ra một số nguyên duy nhất là số dư của kết quả tìm được khi chia cho 123456789.

Ví dụ:

Input	Output
1	4
3	

## Q. DÂY XÂU FIBONACI

Một dãy xâu ký tự  $G$  chỉ bao gồm các chữ cái A và B được gọi là dãy xâu Fibonacci nếu thỏa mãn tính chất:  $G(1) = A$ ;  $G(2) = B$ ;  $G(n) = G(n-2) + G(n-1)$ . Với phép cộng (+) là phép nối hai xâu với nhau. Bài toán đặt ra là tìm ký tự ở vị trí thứ  $i$  (tính từ 1) của xâu Fibonacci thứ  $n$ .

**Dữ liệu vào:** Dòng 1 ghi số bộ test. Mỗi bộ test ghi trên một dòng 2 số nguyên  $N$  và  $i$  ( $1 < N < 93$ ). Số  $i$  đảm bảo trong phạm vi của xâu  $G(N)$  và không quá 18 chữ số. **Kết quả:** Ghi ra màn hình kết quả tương ứng với từng bộ test.

Input	Output
2	A
6 4	B
8 19	

## R. HỆ CƠ SỐ K

Cho hai số  $A, B$  ở hệ cơ số  $K$ . Hãy tính tổng hai số đó ở hệ cơ số  $K$ .

**Input:** Chỉ có 1 dòng ghi 2 số  $K, A, B$

( $2 \leq K \leq 10$ ;  $A$  và  $B$  nếu biểu diễn trong hệ cơ số 10 đều nhỏ hơn  $10^9$ )

**Output:** In ra tổng của  $A$  và  $B$  trong hệ cơ số  $K$

**Ví dụ:**

Input	Output
2 1 10	11

## S. TÌM KIẾM NHỊ PHÂN

Cho dãy số  $A[]$  gồm có  $N$  phần tử đã được sắp xếp tăng dần và số  $K$ .

Nhiệm vụ của bạn là kiểm tra xem số  $K$  có xuất hiện trong dãy số hay không. Nếu có hãy in ra vị trí trong dãy  $A[]$ , nếu không in ra “NO”.

**Input:**

Dòng đầu tiên là số lượng bộ test  $T$  ( $T \leq 10$ ).

Mỗi test bắt đầu bằng số nguyên  $N$  và  $K$  ( $N \leq 100\,000$ ,  $0 \leq K \leq 10^6$ ).

Dòng tiếp theo gồm  $N$  số nguyên  $A[i]$  ( $0 \leq A[i] \leq 10^6$ ), các phần tử là riêng biệt.

**Output:**

Với mỗi test in ra trên một dòng đáp án tìm được.

**Test ví dụ:**

Input:	Output
2	3
5 3	NO
1 2 3 4 5	
6 5	
0 1 2 3 9 10	

## T. ĐẾM SỐ BÍT 1

Cho số nguyên dương  $N$ . Mỗi bước, bạn sẽ biến đổi  $N$  thành  $\lfloor N/2 \rfloor$ ,  $N \bmod 2$ ,  $\lfloor N/2 \rfloor$ . Sau khi thực hiện một cách triệt để, ta thu được một dãy số chỉ toàn số 0 và 1.

Nhiệm vụ của bạn là hãy đếm các số bằng 1 trong đoạn  $[L, R]$  của dãy số cuối cùng.

**Input:**

Dòng đầu tiên là số lượng bộ test  $T$  ( $T \leq 20$ ).

Mỗi test gồm 3 số nguyên  $N, L, R$  ( $1 \leq N, L, R < 2^{50}$ ,  $0 \leq R-L \leq 100\,000$ ).

**Output:**

Với mỗi test, in ra đáp án trên một dòng.

**Ví dụ:**

Input:	Output
2	4
7 2 5	5
10 3 10	

Giải thích test 1:  $[7] \rightarrow [3, 1, 3] \rightarrow [1, 1, 1, 1, 3] \rightarrow [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ .

Giải thích test 2: Dãy số sau khi biến đổi là  $[1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1]$ .