Géométrie discrète

III. Triangulation 2D

Christophe Fiorio

LIRMM
UMR CNRS-UM

Master Imagina

Problématique

Comment manipuler un espace continu algorithmiquement ?

Problématique

Comment manipuler un espace continu algorithmiquement ?

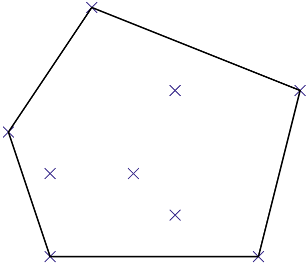
Une solution

Une solution est de subdiviser un espace en cellules bien identifiées afin d’obtenir un espace discret combinatoire plus facilement manipulable algorithmiquement.

Définir des modèles géométriques discrets :

- droites, plans, . . ., discrets
- enveloppe convexe d'un ensemble de points $\rightarrow$ polygones convexes
- Diagrammes de Voronoï
- Triangulation
  - 2D : Delaunay
  - 3D : Delaunay ou Marching Cube

Soit un ensemble de points $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$, l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$ est définie par :

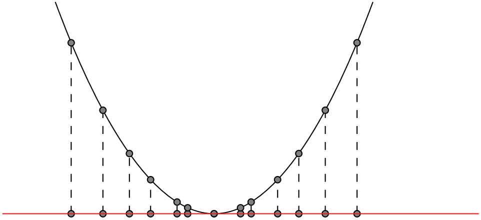


$$\begin{aligned} conv\,(\mathcal{P}) &= \left\{\sum_i^n \lambda_i p_i, \lambda_i \geq 0, \sum_i^n \lambda_i p_i = 1\right\} \\ &= \left\{\begin{array}{l} \text{arêtes } [p_i p_j] \text{ telles que tous les points de } \mathcal{P} \text{ sont} \\ \text{dans un même demi-plan limité par } (p_i p_j) \end{array}\right\} \end{aligned}$$

entrée : un ensemble $\mathcal{P}$ de n points du plan

sortie : la liste ordonnée des points de l'enveloppe convexe *conv* $(\mathcal{P})$

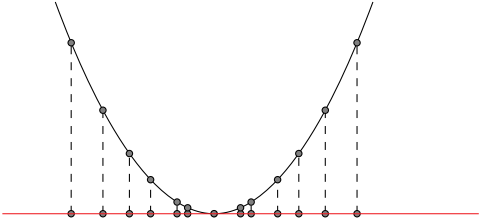
- La borne inférieure : $\Omega(n \log n)$



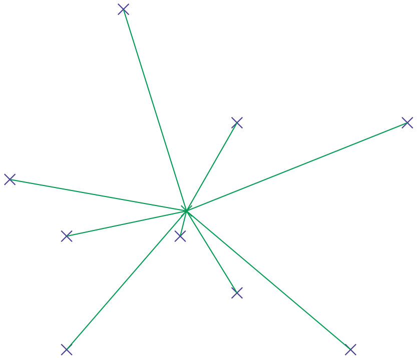
entrée : un ensemble $\mathcal{P}$ de n points du plan

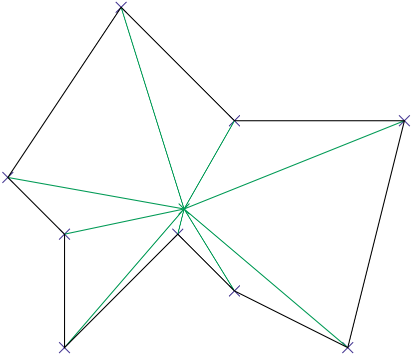
sortie : la liste ordonnée des points de l'enveloppe convexe $conv\left(\mathcal{P}\right)$

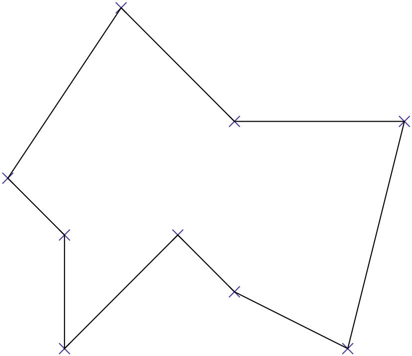
- La borne inférieure : $\Omega\left(n \log n\right)$

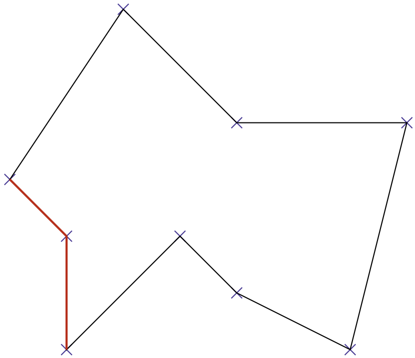


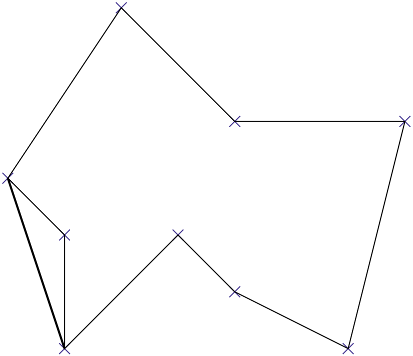
- La borne supérieure : algorithme naïf en $O\left(n^3\right)$

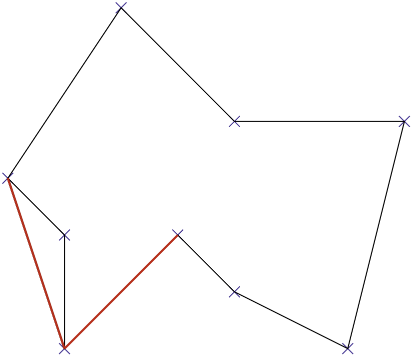


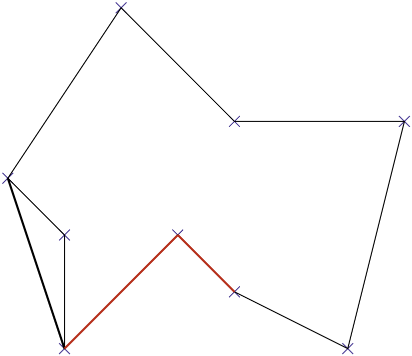


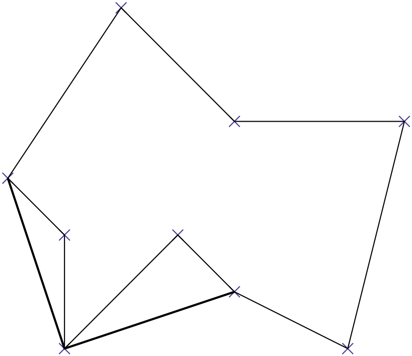


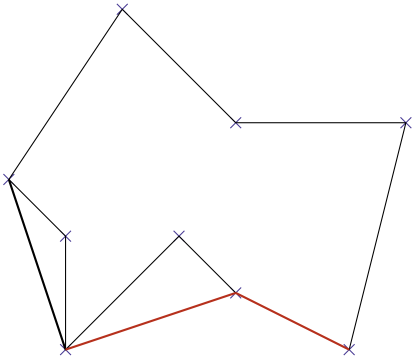


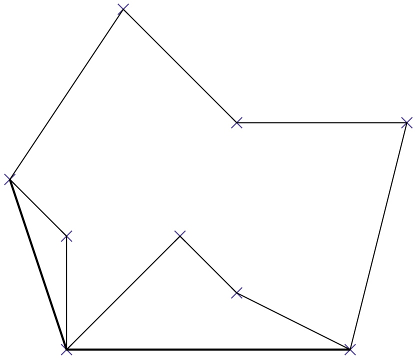


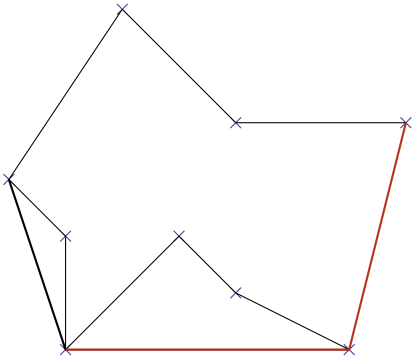


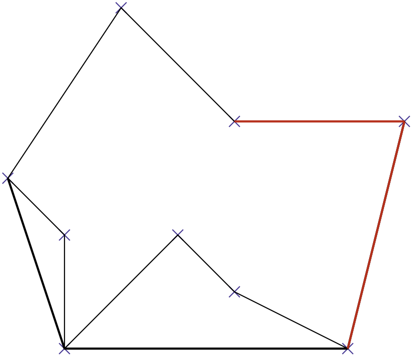


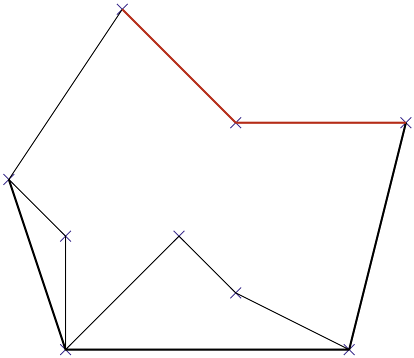


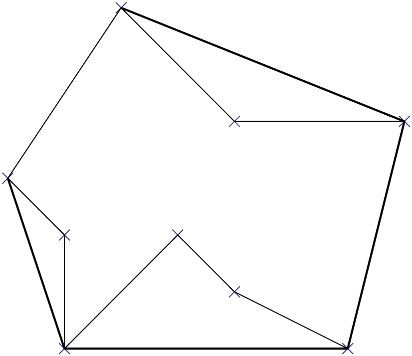


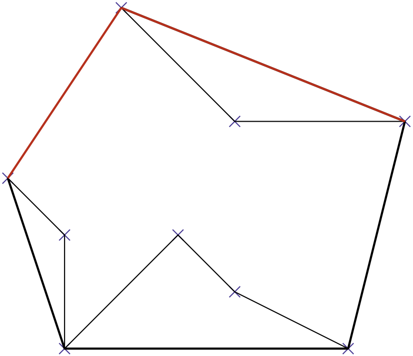


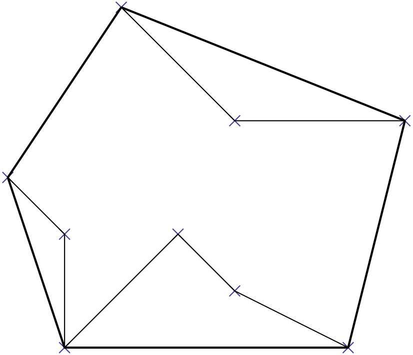


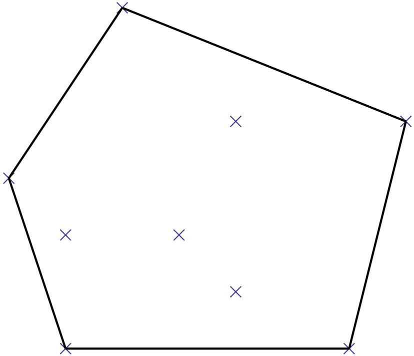












Complexité de $O(n \log n)$

Le problème avec l'algorithme de Graham est qu'il ne s'étend pas à la dimension supérieure car il est basé sur un ordre de parcours.

questions : à quelle complexité doit-on s'attendre ? $\Omega(n \log n)$ est elle atteignable ?

Le nombre de sommets, arêtes et faces vérifient :

$$s - a + f = 2$$

Formule d'Euler $\Rightarrow n - a + f \geq 2$

Incidence arêtes-facettes : $2a \geq 3f \Longrightarrow \begin{cases} a \leq 3n - 6 \\ f \leq 2n - 4 \end{cases}$ avec égalité quand toutes les facettes sont des triangles.

- complexité combinatoire : $O(n)$
- complexité algorithmique : $O(n \log n)$?

Réponse : oui mais nécessite un algorithme probabiliste

Solution plus simple : un algorithme incrémental

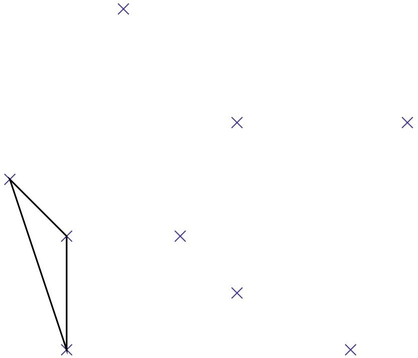
L'algorithme de construction de l'enveloppe convexe peut se schématiser ainsi :

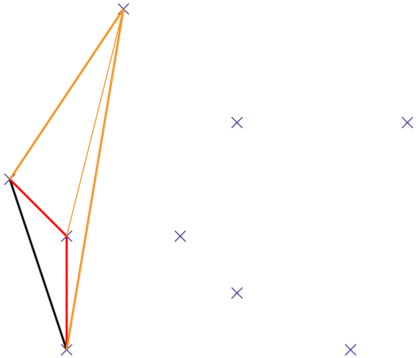
1. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de *n* points de $\mathbb{R}^3$ dont on cherche l'enveloppe convexe
2. Soit $\mathcal{B}$ l'enveloppe convexe déjà calculée
3. pour chaque $p_i \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}$
    - Soit $\sigma_i(\mathcal{B})$ l'ensemble des facettes de $\mathcal{B}$ visibles de p_i, c'est à dire dont le plan support sépare $\mathcal{B}$ de p_i
    - Soit η_i, appelé *horizon*, l'ensemble des arêtes partagées par les facettes de $\sigma_i(\mathcal{B})$ et de $\mathcal{B} \setminus \sigma_i(\mathcal{B})$
    - supprimer les facettes appartenant à $\sigma_i(\mathcal{B})$
    - créer de nouvelles facettes $[p_i, g], \forall g \in \eta_i$
    - créer les nouvelles adjacences

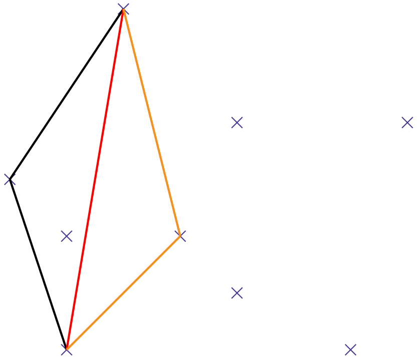
Complexité

proportionnelle au nombre de facettes créées et supprimées, c'est à dire au nombre de facette des $\sigma_i(\mathcal{B})$.

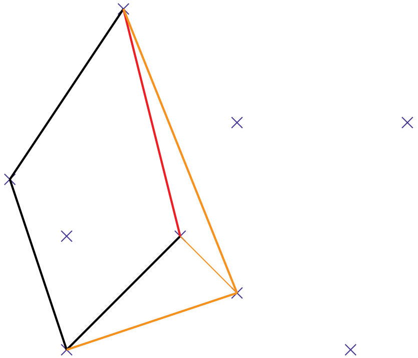
Algorithme incrémental
version dans le plan

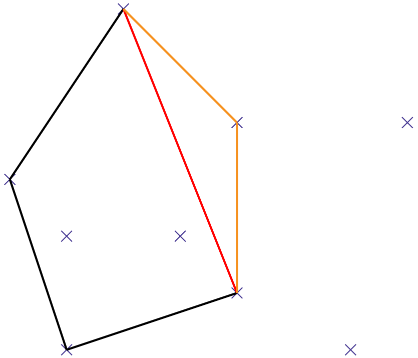


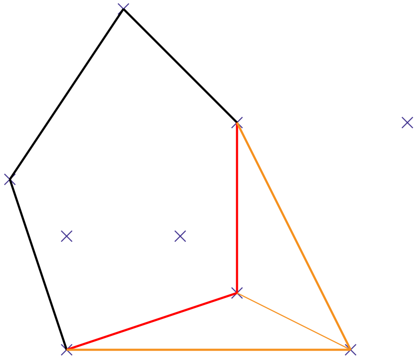


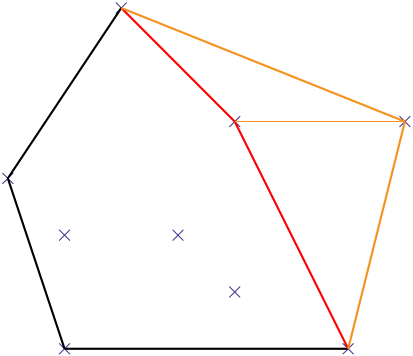


Algorithme incrémental
version dans le plan

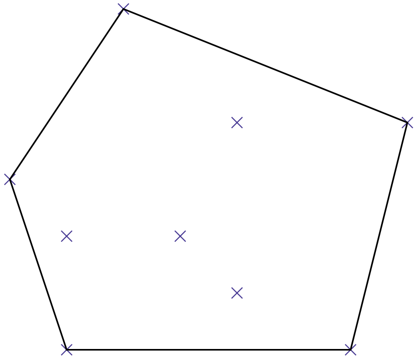








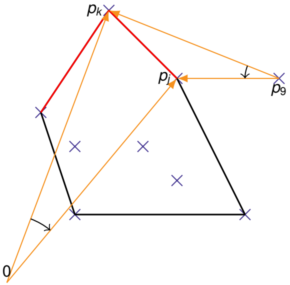
Algorithme incrémental
version dans le plan



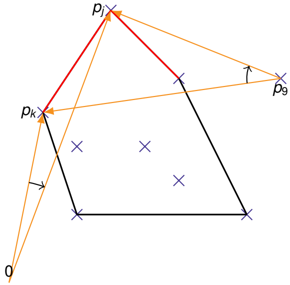
L'algorithme de construction de l'enveloppe convexe dans un plan peut donc s'écrire :

1. Trier les points p_i par abscisses, puis ordonnées croissantes
2. Construire un premier polygone avec les 3 premiers points p_1, p_2, p_3
3. pour chaque $p_i \in \mathcal{P} \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$
   - Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des points de l'enveloppe convexe courante visible de p_i, et p_{i_1} et p_{i_k} les points extrémaux de cet ensemble
   - créer 2 nouvelles arêtes $[p_{i_1}, p_i]$ et $[p_{i_k}, p_i]$
   - supprimer les arêtes $[p_{i_1}, p_{i_2}], \ldots, [p_{i_{k-1}}, p_{i_k}]$.

1. Le dernier point rajouté est visible du nouveau point. On le marque comme visible.
2. Étant donné le dernier point p_j marqué comme visible, et le point p_k suivant p_j sur l'enveloppe convexe, il suffit de comparer les orientations couples de vecteurs (p_i, p_j) et (p_i, p_k) avec celle du couple de vecteurs $(0, p_j)$ et $(0, p_k)$.
3. Elles doivent être opposées si p_k est visible.



orientations opposées $\Rightarrow$ p_k visible



mêmes orientations$\Rightarrow$ p_k non visible

Le produit mixte permet de calculer le volume signé du polyèdre engendré par les vecteurs du produit.

En 3D, le produit mixte s'écrit : $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u}.\vec{v} \wedge \vec{w}$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

$$det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = x_u y_v z_w + x_v y_w z_u + x_w u_u z_v - x_u y_w z_v - x_v y_u z_w - x_w y_v z$$

En 2D, le déterminant $det\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est donné par l'expression

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - x_v y_u$$

- la valeur = le volume du parallélépipède
- le signe = l'orientation

2D : signe de l'angle orienté

3D : positif si le parallélépidède peut être obtenu par déformation du cube unité sans jamais l'applatir

Dans notre cas,

$$det\left(\overrightarrow{0p_k}, \overrightarrow{0p_j}\right) \times det\left(\overrightarrow{p_ip_k}, \overrightarrow{p_ip_j}\right) < 0 \Rightarrow \text{orientations opposées}$$

1. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de n points de $\mathbb{R}^3$ dont on cherche l'enveloppe convexe
2. Soit $\mathcal{B}$ l'enveloppe convexe déjà calculée
3. pour chaque $p_i \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}$
   - Soit $\sigma_i(\mathcal{B})$ l'ensemble des facettes de $\mathcal{B}$ visibles de p_i, c'est à dire dont le plan support sépare $\mathcal{B}$ de p_i
   - Soit η_i, appelé *horizon*, l'ensemble des arêtes partagées par les facettes de $\sigma_i(\mathcal{B})$ et de $\mathcal{B} \setminus \sigma_i(\mathcal{B})$
   - supprimer les facettes appartenant à $\sigma_i(\mathcal{B})$
   - créer de nouvelles facettes $[p_i, g], \forall g \in \eta_i$
   - créer les nouvelles adjacences

Points clefs de l'algorithme :

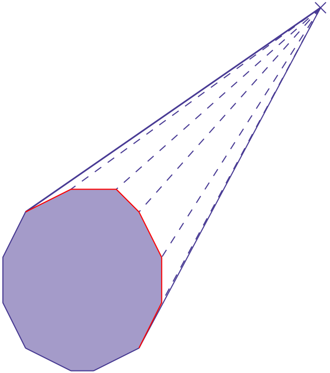
- nombre de facette de $\sigma_i(\mathcal{B})$ (facettes visibles)
- localiser rapidement les facettes de l'horizon η_i

Points clefs de l'algorithme :

- nombre de facette de $\sigma_i(\mathcal{B})$ (facettes visibles)
- localiser rapidement les facettes de l'horizon η_i

Complexité :

- théorème [McMullen 1971] : l'enveloppe convexe de n points en dimension d a $\Theta\left(n^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}\right)$ faces
- # facettes de $\eta_i = O\left(i^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}\right)$
- localiser rapidement : trier et partir de p_{i-1}
- Complexité de l'algorithme :
  $O(n \log n) + O\left(\sum_{i=1}^{n} i^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}\right)$
  $O\left(n \log n + n^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor}\right)$



Optimale pour d *paire* et quadratique pour $d = 3$

De l'enveloppe convexe à la triangulation

Définition (triangulation)

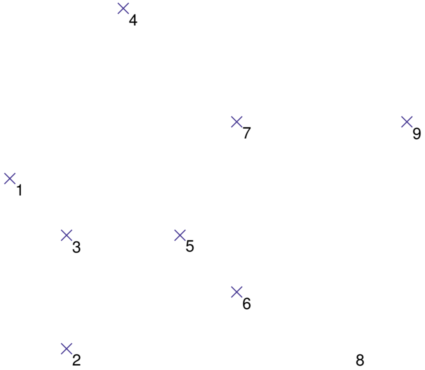
Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de n points du plan, on appelle *Triangulation* de $\mathcal{P}$ un ensemble maximal de d simplexes tel que deux simplexes ne s'intersectent pas ou s'intersectent selon une face commune ; l'union des simplexes doit être égale à l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$

Définition (triangulation)

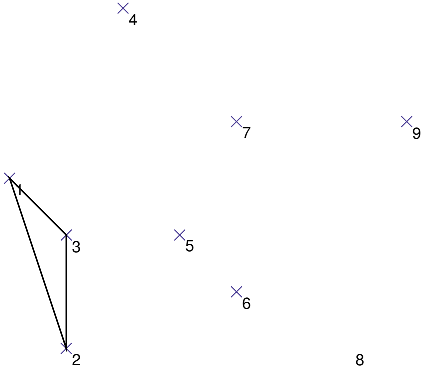
Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de n points du plan, on appelle *Triangulation* de $\mathcal{P}$ un ensemble maximal de d simplexes tel que deux simplexes ne s'intersectent pas ou s'intersectent selon une face commune ; l'union des simplexes doit être égale à l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$

Pour calculer une triangulation, il suffit d'appliquer l'algorithme incrémental de calcul d'enveloppe convexe sans effacer les facettes de l'*horizon* à chaque étape.

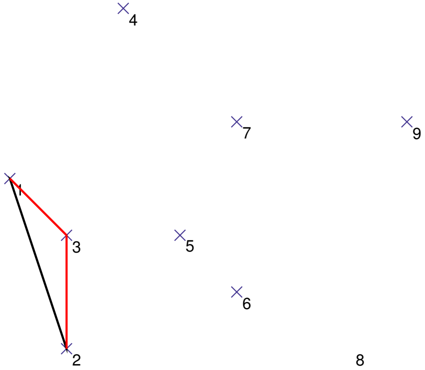
Algorithme incrémental



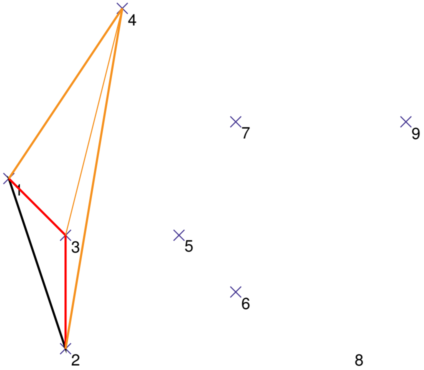
Algorithme incrémental

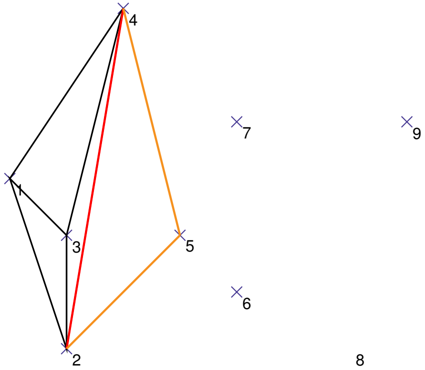


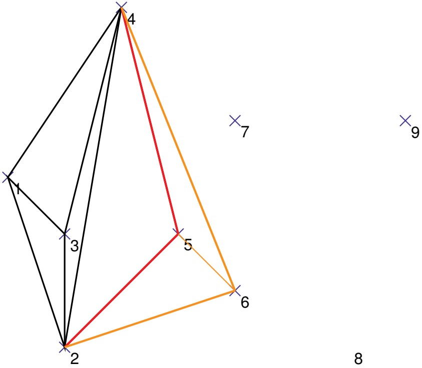
Algorithme incrémental



Algorithme incrémental

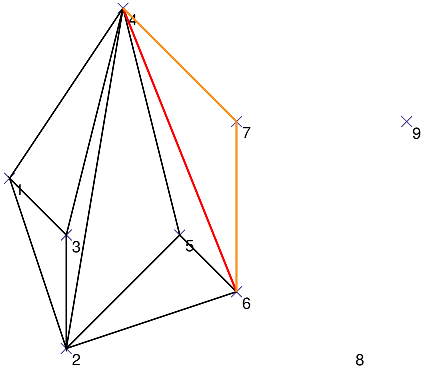



4
7
9
1
3
5
6
2
8

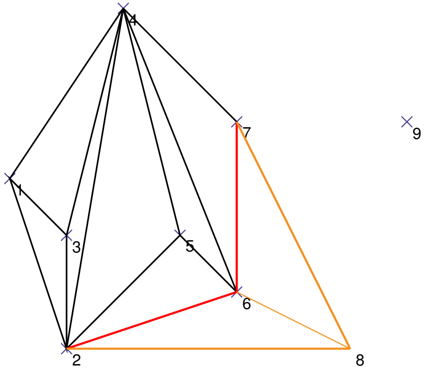


4
7
9
1
3
5
6
2
8

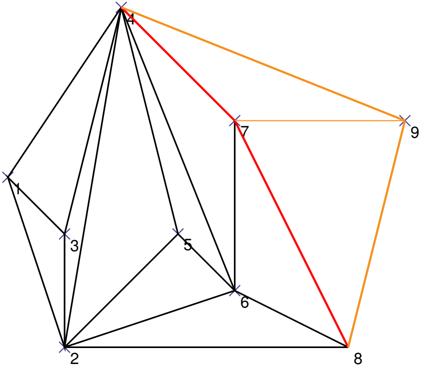
Algorithme incrémental



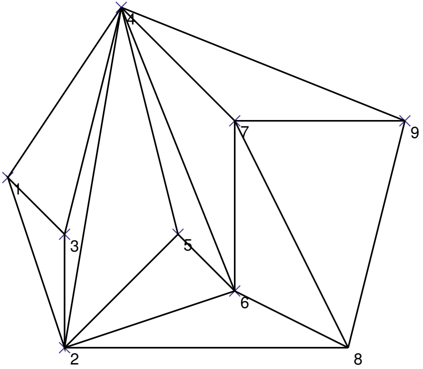
Algorithme incrémental



Algorithme incrémental



Algorithme incrémental



La triangulation ainsi obtenue n'est pas « régulière » et certains triangles sont très « plats »