6.1 DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

6.1.1 Định nghĩa dạng song tuyến tính

Một dạng song tuyến tính của không gian véc tơ V là một ánh xạ

$$\begin{array}{rcl} \eta : V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \eta(u,v) \end{array}$$

sao cho khi cố định mỗi biến thì nó trở thành ánh xạ tuyến tính đối với biến kia. Nghĩa là

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \quad \forall u_1, u_2, v;\ \ u, v_1, v_2 \in V$$

$$\eta(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 \eta(u_1, v) + \alpha_2 \eta(u_2, v)$$

$$\eta(u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \beta_1 \eta(u, v_1) + \beta_2 \eta(u, v_2)$$

- Dạng song tuyến tính η được gọi là có tính:

i. Đối xứng Nếu $\eta(u,v) = \eta(v,u)$ với mọi $u, v \in V$.

ii. Không âm Nếu $\eta(u,u) \geq 0$ với mọi $u \in V$.

iii. Không dương Nếu $\eta(u,u) \leq 0$ với mọi $u \in V$.

iv. Xác định Nếu $\eta(u,u) = 0$ khi và chỉ khi $u = \mathbf{0}$.

- Dạng song tuyến tính xác định và không âm gọi là xác định dương.
- Vậy η xác định dương khi và chỉ khi $\eta(u,u) > 0$ với mọi $u \neq \mathbf{0}$.
- Một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương được gọi là ***tích vô hướng*** .
- Ta thường ký hiệu tích vô hướng của u và v là $\langle u,v \rangle$ thay cho $\eta(u,v)$

Ví dụ 6.1 Ánh xạ $\eta_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định như sau

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2);\ \eta_1(x,y) = 2x_1y_1 - 5x_1y_2 + x_2y_1 + 7x_2y_2$$

có tính chất $\eta_1(x,y) \neq \eta_1(y,x)$

$$\eta_1(x,x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 = 2(x_1 - x_2)^2 + 5x_2^2$$

Do đó η_1 là một dạng song tuyến tính xác định dương nhưng không đối xứng.

Ánh xạ $\eta_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định như sau

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2);\ \eta_2(x,y) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 7x_2y_2$$

$$\eta_2(x,y) = \eta_2(y,x) \quad \eta_2(x,x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 = 2(x_1 - x_2)^2 + 5x_2^2$$

η_2 là một tích vô hướng của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$.

6.1.2 Ma trận và biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính

Giả sử $\eta : V \times V \to \mathbb{R}$ là một dạng song tuyến tính của không gian véc tơ V

$\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của V

Ma trận vuông cấp n, ký hiệu

$$A = [\eta]_{\mathscr{B}} = \left[a_{ij}\right]_{n \times n},\ a_{ij} = \eta(e_i, e_j)$$

được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính η trong cơ sở $\mathscr{B}$

$$\forall x, y \in V;\ x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n,\ y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$$

$$\eta(x,y) = \eta(x_1e_1 + \dots + x_ne_n, y_1e_1 + \dots + y_ne_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \quad \textbf{(6.7)}$$

được gọi là biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính η trong cơ sở $\mathscr{B}$

Nếu đồng nhất ma trận một hàng một cột $[a]$ với chính phần tử a, thì biểu thức tọa độ có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\eta(u,v) = [u]_{\mathscr{B}}^t [\eta]_{\mathscr{B}} [v]_{\mathscr{B}}$$

Ngược lại ta có thể chứng minh được, ánh xạ η: $V \times V \to \mathbb{R}$ có biểu thức tọa độ xác định bởi (6.7) là một dạng song tuyến tính.

Ví dụ 6.2 Ánh xạ $\eta: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định như sau

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\eta(x,y) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$$

$\eta(e_1,e_1) = \eta\big((1,0,0),(1,0,0)\big) = 3$ $\quad\eta(e_1,e_2) = \eta\big((1,0,0),(0,1,0)\big) = -2$

$\eta(e_1,e_3) = \eta\big((1,0,0),(0,0,1)\big) = 0$ $\quad\eta(e_2,e_1) = \eta\big((0,1,0),(1,0,0)\big) = 5$

$\eta(e_2,e_2) = \eta\big((0,1,0),(0,1,0)\big) = 7$ $\quad\eta(e_2,e_3) = \eta\big((0,1,0),(0,0,1)\big) = -8$

$\eta(e_3,e_1) = \eta\big((0,0,1),(1,0,0)\big) = 0$ $\quad\eta(e_3,e_2) = \eta\big((0,0,1),(0,1,0)\big) = 4$

$\eta(e_3,e_3) = \eta\big((0,0,1),(0,0,1)\big) = -1$

Ma trận của η trong cơ sở chính tắc
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & -8 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}$$

6.1.3 Biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

$A = [a_{ij}] = [\eta]_{\mathscr{B}}$ $\quad$ $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$

$A' = [a'_{ij}] = [\eta]_{\mathscr{B}'}$ $\quad$ $\mathscr{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$

là ma trận của η trong cơ sở

$T = \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}, e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$

$$a'_{ij} = \eta(e'_i, e'_j) = \eta\left(\sum_{k=1}^{n} t_{ki}e_k, \sum_{l=1}^{n} t_{lj}e_l\right) = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}\left(\sum_{l=1}^{n} \eta(e_k, e_l)t_{lj}\right) = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl}t_{lj}\right)$$

Vậy $\quad A' = T^tAT \quad [\eta]_{\mathscr{B}'} = T^t[\eta]_{\mathscr{B}}T$

$$[u]_{\mathscr{B}'}^t[\eta]_{\mathscr{B}'}[v]_{\mathscr{B}'} = \eta(u,v) = [u]_{\mathscr{B}}^t[\eta]_{\mathscr{B}}[v]_{\mathscr{B}} = [u]_{\mathscr{B}'}^tT^t[\eta]_{\mathscr{B}}T[v]_{\mathscr{B}'}$$

Ví dụ 6.3 $\eta(x,y) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$

Ma trận của η có trong cơ sở chính tắc

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & -7 & -8 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

(xem ví dụ 6.2)

Xét cơ sở $\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$

$e'_1 = (1,3,4),\ e'_2 = (2,0,3),\ e'_3 = (3,1,2)$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $\mathscr{B}'$
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ma trận của η trong cơ sở $\mathscr{B}'$
$$A' = T^tAT = \begin{bmatrix} 11 & -48 & 33 \\ 18 & 3 & 20 \\ 1 & -2 & 31 \end{bmatrix}$$

Chẳng hạn

$$\eta(e'_1, e'_3) = 3.1.3 - 2.1.1 + 5.3.3 + 7.3.1 - 8.3.2 + 4.4.1 - 4.2 = 33$$

6.2 DẠNG TOÀN PHƯƠNG

6.2.1 Định nghĩa dạng toàn phương

- Giả sử $\eta: V\times V\to\mathbb{R}$ là một dạng song tuyến tính của không gian véc tơ V
- Ánh xạ $Q: V\to\mathbb{R}$ xác định bởi công thức $Q(v)=\eta(v,v)$ được gọi là một dạng toàn phương của không gian véc tơ V

$\mathscr{B}=\{e_1,\dots,e_n\}$ là một cơ sở của $V: \forall v\in V;\ v=x_1e_1+\ldots+x_ne_n$

$$Q(v)=\eta(v,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\eta(e_i,e_j)x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

- Như vậy dạng toàn phương có biểu thức tọa độ là một ***đa thức đẳng cấp bậc 2.***

Ngược lại

Ánh xạ $Q: V\to\mathbb{R}$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở $\mathscr{B}$ nào đó là một đa thức đẳng cấp bậc 2

$\mathscr{B}=\{e_1,\dots,e_n\}$

$$Q(v)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\,;\ v=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$$

thì Q là một dạng toàn phương ứng với dạng song tuyến tính η có $\eta(e_i,e_j)=a_{ij}$.

Ví dụ 6.4 Xét dạng song tuyến tính $\eta:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$\forall x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2);\ \eta(x,y)=2x_1y_1-5x_1y_2+x_2y_1+7x_2y_2$

Dạng toàn phương tương ứng là

$$Q(x)=\eta(x,x)=2x_1^2-4x_1x_2+7x_2^2$$

các dạng song tuyến tính

$\eta_1:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\ \eta_1(x,y)=2x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+7x_2y_2$

$\eta_2:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\ \eta_2(x,y)=2x_1y_1+2x_1y_2-6x_2y_1+7x_2y_2$

$\eta_3:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\ \eta_3(x,y)=2x_1y_1-4x_2y_1+7x_2y_2$

Thỏa mãn $\eta_1(x,x)=\eta_2(x,x)=\eta_3(x,x)=\eta(x,x)=Q(x)$

- Ví dụ trên chứng tỏ cùng một dạng toàn phương Q có nhiều dạng song tuyến tính η thỏa mãn $Q(x)=\eta(x,x)$.
- Tuy nhiên chỉ có duy nhất một dạng song tuyến tính đối xứng η thỏa mãn $Q(x)=\eta(x,x)$.
- Dạng song tuyến tính đối xứng η này được gọi là ***dạng cực của*** Q
- Dạng cực của Q được xác định bởi công thức

$$\eta(x,y)=\frac{1}{2}\big(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\big)$$

6.2.3 Ma trận và biểu thức tọa độ của dạng toàn phương

- Ma trận của dạng cực η của Q trong cơ sở $\mathscr{B}$ cũng được gọi là ***ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở $\mathscr{B}$*** ký hiệu $A=[Q]_{\mathscr{B}}$ và xác định như sau

$$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n},\ a_{ij}=\eta(e_i,e_j)=\eta(e_j,e_i)=a_{ji}$$

- Như vậy ma trận của dạng toàn phương là ma trận đối xứng.
- Biểu thức tọa độ của dạng toàn phương Q trong cơ sở $\mathscr{B}$ được viết dưới dạng ma trận

$$Q(x)=\left[x\right]_{\mathscr{B}}^{t}\left[Q\right]_{\mathscr{B}}\left[x\right]_{\mathscr{B}}$$

Ví dụ 6.5 Dạng toàn phương

$$\forall x=(x_1,x_2),\ Q(x)=2x_1^2-4x_1x_2+7x_2^2$$

Dạng cực tương ứng

$$\forall x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2);\ \eta(x,y)=2x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+7x_2y_2$$

Có ma trận trong cơ sở chính tắc

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 7\end{bmatrix}$$

Ví dụ 6.6 Dạng toàn phương của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^{2}-2x_1x_2+x_2^{2}+4x_1x_3+4x_3^{2}+6x_2x_3$$

Dạng cực tương ứng

$$\forall x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3)$$

$$\eta(x,y)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2+2x_1y_3+2x_3y_1+4x_3y_3+3x_2y_3+3x_3y_2$$

Có ma trận trong cơ sở chính tắc

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

6.2.4 Biểu thức tọa độ dạng chính tắc của một dạng toàn phương

- Biểu thức tọa độ của dạng toàn phương Q trong cơ sở nào đó của V có dạng

$$Q(x)=a_{11}x_1^{\,2}+a_{22}x_2^{\,2}+\ldots+a_{nn}x_n^{\,2}$$

được gọi là biểu thức tọa độ có dạng chính tắc của Q.

- Ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở có biểu thức tọa độ dạng chính tắc là ma trận chéo.

6.2.5 Đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Lagrange

Giả sử trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ của không gian véc tơ V

dạng toàn phương Q có biểu thức tọa độ

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \,,\; a_{ij} = a_{ji} \,;\; x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Ta thực hiện các phép đổi tọa độ bằng cách sử dụng hai đẳng thức:

$$a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Trường hợp 1:

Giả sử có $a_{ii} \neq 0$, chẳng hạn $a_{11} \neq 0$, ta có thể sắp xếp lại

$$Q(x) = a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right) + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2 - a_{11}\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}x_i x_j$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i \\ y_j = x_j; \quad j = 2,\dots,n \end{cases}$ thì $Q(x) = a_{11}y_1^2 + \displaystyle\sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}y_i y_j$

Trường hợp 2:

Nếu mọi $a_{ii} = 0$ và có $a_{ij} \neq 0$ chẳng hạn $a_{12} \neq 0$

Đặt $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_j = y_j \quad ; \quad j = 3,\dots,n \end{cases}$

thì $Q(x) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}y_i y_j$ có $a'_{11} = a_{12} \neq 0$

vì vậy ta có thể đưa về trường hợp 1.

Tiếp tục quá trình này với biểu thức $\displaystyle\sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}y_i y_j$

Tiếp tục quá trình trên cuối cùng nhận được

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

thỏa mãn $Q(v) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$

Xét hệ véc tơ có tọa độ là các cột của ma trận trên

$$e'_1 = (a_{11},\dots,a_{n1}), \;\dots\;, \; e'_n = (a_{1n},\dots,a_{nn})$$

$$\forall v \in V: \; v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = z_1e'_1 + \cdots + z_ne'_n$$

$$Q(v) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$$

Nói cách khác $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ là cơ sở cần tìm để biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc.

Ví dụ 6.7 Dạng toàn phương của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$

$$\forall x=(x_1,x_2,x_3);\; Q(x)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

$$Q(x)=x_1^2+2x_1(2x_2+x_3)+4x_2^2+x_3^2+2x_2x_3$$

$$=(x_1+2x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2+4x_2^2+x_3^2+2x_2x_3$$

$$=(x_1+2x_2+x_3)^2-2x_2x_3=y_1^2-2y_2y_3=z_1^2-2z_2^2+2z_3^2$$

$$\begin{cases} y_1=x_1+2x_2+x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=y_1-2y_2-y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1=z_1 \\ y_2=z_2+z_3 \\ y_3=z_2-z_3 \end{cases}$$

CHƯƠNG 6:KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE, DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Ví dụ 6.7 Dạng toàn phương của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$

$$\forall x=(x_1,x_2,x_3);\; Q(x)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

$$\begin{cases} y_1=x_1+2x_2+x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=y_1-2y_2-y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1=z_1 \\ y_2=z_2+z_3 \\ y_3=z_2-z_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Cơ sở mới $\quad e'_1=(1,0,0)$, $e'_2=(-3,1,1)$, $e'_3=(-1,1,-1)$

$$x=(x_1,x_2,x_3)=z_1e'_1+z_2e'_2+z_3e'_3$$

$$Q(x)=z_1^2-2z_2^2+2z_3^2$$

CHƯƠNG 6:KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE, DẠNG TOÀN PHƯƠNG

6.2.6 Đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Jacobi

Cho dạng toàn phương Q trong không gian véc tơ V (không giả thiết không gian Euclide) với dạng cực tương ứng η

có ma trận trong cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,\dots,e_n\}$

$$A=\left[a_{ij}\right]:\; a_{ij}=\eta(e_i,e_j);\; i,j=1,\dots,n$$

Giả sử các định thức con chính của A đều khác không

$$D_1=a_{11}\neq 0,\; D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0,\dots,D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

CHƯƠNG 6:KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE, DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Khi đó với mỗi $j=1,2,\dots,n$; hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1j}x_j=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2j}x_j=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\dots+a_{jj}x_j=1 \end{cases} \qquad \textbf{(6.20)}$$

là hệ Cramer do đó có duy nhất nghiệm, ký hiệu $\left(\alpha_{1j},\alpha_{2j},\dots,\alpha_{jj}\right)$

Đặt $\quad f_j=\alpha_{1j}e_1+\alpha_{2j}e_2+\dots+\alpha_{jj}e_j \quad \alpha_{jj}=\dfrac{D_{j-1}}{D_j}\neq 0\;;\;\forall j=1,\dots,n; D_0=1$

Xét hệ véc tơ
$$\begin{cases} f_1=\alpha_{11}e_1=\dfrac{1}{a_{11}}e_1 \\ f_2=\alpha_{12}e_1+\alpha_{22}e_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n=\alpha_{1n}e_1+\alpha_{2n}e_2+\dots+\alpha_{nn}e_n \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh hệ véc tơ $\mathscr{B}' = \{f_1, \dots, f_n\}$ là một cơ sở của V và biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc.

$\det_{\mathscr{B}}\{f_1, \dots, f_n\} = \alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{nn} \neq 0$ nên hệ $\mathscr{B}'$ độc lập tuyến tính vì vậy là một cơ sở của V.

Ta có
$$\begin{cases} \eta(f_j, e_i) = a_{i1}\alpha_{1j} + a_{i2}\alpha_{2j} + \dots + a_{ij}\alpha_{jj} = 0;\ \forall i = 1,\dots, j-1 \\ \eta(f_j, e_j) = a_{j1}\alpha_{1j} + a_{j2}\alpha_{2j} + \dots + a_{jj}\alpha_{jj} = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \eta(f_j, f_i) = 0\ ;\ \forall i < j \\ \eta(f_j, f_j) = \eta(f_j, \alpha_{1j}e_1 + \dots + \alpha_{jj}e_j) = \alpha_{jj}\eta(f_j, e_j) = \alpha_{jj} \end{cases}$$

Mặt khác dạng song tuyến tính η đối xứng nên $\eta(f_j, f_i) = 0$ với mọi $i > j$.

Vậy
$$\eta(f_i, f_j) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ \alpha_{jj} = \dfrac{D_{j-1}}{D_j} & \text{nếu } i = j \end{cases} \quad \text{với} \quad i, j = 1, \dots, n$$

Gọi A' là ma trận của Q trong cơ sở $\mathscr{B}'$

T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}; T^t A T = A' = \left[\eta(f_i, f_j)\right] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Biểu thức toạ độ của Q trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng chính tắc

$$v = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n \Rightarrow Q(v) = \frac{1}{D_1}y_1^2 + \frac{D_1}{D_2}y_2^2 + \dots + \frac{D_{n-1}}{D_n}y_n^2$$

Ví dụ 6.9 Cho dạng toàn phương Q của $\mathbb{R}^3$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc $Q(v) = x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc Có các định thức con chính

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_1 = 1,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -8,\ D_3 = |A| = -9$$

- $j = 1$ ta có $\alpha_{11} = \dfrac{1}{D_1} = 1 \Rightarrow f_1 = e_1 = (1,0,0)$
- $j = 2$: Hệ phương trình (6.20) có dạng $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 = 1 \end{cases}$

Có nghiệm $x_1 = -\dfrac{1}{4}, x_2 = -\dfrac{1}{8} \quad \Rightarrow f_2 = -\dfrac{1}{4}e_1 - \dfrac{1}{8}e_2$

- $j = 3$: Hệ phương trình (6.20) có dạng $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Có nghiệm $x_1 = -\dfrac{2}{9}, x_2 = \dfrac{1}{3}, x_3 = \dfrac{8}{9}$

Chọn cơ sở
$$f_1 = e_1 = (1,0,0)$$
$$f_2 = -\frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{8}e_2 = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0\right)$$
$$f_3 = -\frac{2}{9}e_1 + \frac{1}{3}e_2 + \frac{8}{9}e_3 = \left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{8}{9}\right)$$

Trong cơ sở mới này biểu thức tọa độ của Q có dạng

$$\forall v = (x_1, x_2, x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = y_1f_1 + y_2f_2 + y_3f_3$$
$$Q(v) = \frac{1}{D_1}y_1^2 + \frac{D_1}{D_2}y_2^2 + \frac{D_2}{D_3}y_3^2 = y_1^2 - \frac{1}{8}y_2^2 + \frac{8}{9}y_3^2$$

Ví dụ 6.10 Cho dạng toàn phương Q của $\mathbf{P}_2$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc

$$v = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \,;\; Q(v) = a_0^2 - 2a_0 a_1 + 2a_1^2 + 4a_0 a_2 + 4a_2^2 + 2a_1 a_2$$

Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc Có các định thức con chính

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad D_1 = 1,\; D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\; D_3 = |A| = -9$$

- $j = 1$ ta có $\alpha_{11} = \dfrac{1}{D_1} = 1 \;\Rightarrow f_1 = 1$
- $j = 2$: Hệ phương trình (6.20) có dạng $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$

Có nghiệm $x_1 = x_2 = 1 \;\Rightarrow f_2 = 1 + t$

CHƯƠNG 6:KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE, DẠNG TOÀN PHƯƠNG

- $j = 3$: Hệ phương trình (6.20) có dạng $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

Có nghiệm $x_1 = \dfrac{5}{9},\; x_2 = \dfrac{1}{3},\; x_3 = -\dfrac{1}{9}$

Chọn cơ sở $f_1 = 1 \quad f_2 = 1 + t \quad f_3 = \dfrac{5}{9} + \dfrac{1}{3}t - \dfrac{1}{9}t^2$

Trong cơ sở mới này biểu thức tọa độ của Q có dạng

$$\forall v = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = b_0 + b_1(1+t) + b_2\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2\right)$$

$$Q(v) = \frac{1}{D_1} b_0^2 + \frac{D_1}{D_2} b_1^2 + \frac{D_2}{D_3} b_2^2 = b_0^2 + b_1^2 - \frac{1}{9} b_2^2$$

CHƯƠNG 6:KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE, DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Nhận xét 6.2

- Một dạng toàn phương có thể đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Jacobi khi mọi định thức con góc bên trái $D_k \neq 0,\ \forall\, k = 1, 2, \ldots$
- Vì vậy có thể đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Lagrange nhưng chưa chắc có dạng chính tắc theo phương pháp Jacobi.
- Chẳng hạn dạng toàn phương của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$
  $\forall x = (x_1, x_2, x_3);\; Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
  không sử dụng phương pháp Jacobi được vì $D_2 = 0$
- Cùng một dạng toàn phương ta có thể đưa về các dạng chính tắc với các hệ số khác nhau. Tuy nhiên số các hệ số dương và hệ số âm là như nhau. Ta sẽ chứng minh điều này qua luật quán tính.

CHƯƠNG 6:KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE, DẠNG TOÀN PHƯƠNG

6.2.7 Luật quán tính

Giả sử $A = [a_{ij}] = [Q]_{\mathscr{B}};\ A' = [a'_{ij}] = [Q]_{\mathscr{B}'}$ là hai ma trận của Q trong hai cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\},\ \mathscr{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ của V

$T = \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$

Ta có $A' = T^t A T$ Do đó $r(A') = r(T^t A T) \leq r(A)$

Mặt khác $A = (T^t)^{-1} A' T^{-1}$ Do đó $r(A) \leq r(A')$

- Do đó ta có thể định nghĩa hạng của dạng toàn phương Q là hạng của ma trận của nó trong một cơ sở nào đó.

Định lý 6.1 (Sylvester - Jacobi)

Số các hệ số dương và số các hệ số âm trong biểu thức tọa độ dạng chính tắc của một dạng toàn phương Q là những bất biến của dạng đó (tức là không phụ thuộc vào việc lựa chọn cơ sở).

- Số các hệ số dương được gọi là **chỉ số quán tính dương** và số các hệ số âm được gọi là **chỉ số quán tính âm** của dạng toàn phương.
- Giả sử (p,q) là cặp chỉ số quán tính dương và âm của dạng toàn phương Q trong không gian n chiều V thì $p+q=r$ (hạng của Q).

- Trường hợp $r=n$: Q được gọi là không suy biến.
- Trường hợp $p=n$: Q được gọi là xác định dương.
- Trường hợp $q=n$: Q được gọi là xác định âm.

- Q xác định dương khi và chỉ khi $Q(v)>\mathbf{0}$, với mọi $v\neq\mathbf{0}$.
- Q xác định âm khi và chỉ khi $Q(v)<\mathbf{0}$, với mọi $v\neq\mathbf{0}$.

Nếu η là dạng cực của dạng toàn phương Q thì:

- Q xác định dương khi và chỉ khi η xác định dương.
- Q xác định âm khi và chỉ khi η xác định âm.
- Q không suy biến khi và chỉ khi η xác định.

Ví dụ 6.11 Cho dạng toàn phương Q của $\mathbb{R}^3$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc $Q(v)=x_1^2-4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

❖ Phương pháp Lagrange

$$Q(v)=x_1^2+2x_1(-2x_2+x_3)-4x_2^2+x_3^2+2x_2x_3$$
$$=(x_1-2x_2+x_3)^2-8x_2^2+6x_2x_3=(x_1-2x_2+x_3)^2-2(2x_2-\frac{3}{4}x_3)^2+\frac{9}{2}x_3^2$$

❖ Phương pháp Jacobi

$$D_1=1,\ D_2=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & -4\end{vmatrix}=-8,\ D_3=|A|=-9 \qquad A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & -4 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$Q(v)=\frac{1}{D_1}y_1^2+\frac{D_1}{D_2}y_2^2+\frac{D_2}{D_3}y_3^2=y_1^2-\frac{1}{8}y_2^2+\frac{8}{9}y_3^2$$

Chỉ số quán tính $(p,q)=(2,1)$

Định lý 6.2 (Sylvester)

Giả sử dạng toàn phương Q có ma trận là A trong một cơ sở nào đó của V. Khi đó

i. Q xác định dương khi và chỉ khi các định thức con góc trái của A luôn dương.

ii. Q xác định âm khi và chỉ khi các định thức con cấp chẵn là dương và cấp lẻ là âm.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

6.3 TÍCH VÔ HƯỚNG, KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE

6.3.1 Định nghĩa tích vô hướng và tính chất

- Một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương được gọi là tích vô hướng.
- Một không gian véc tơ với một tích vô hướng $<,>$ được gọi là không gian véc tơ Euclide.

Ví dụ 6.12

$\mathbb{R}^n$ là không gian véc tơ Euclide với tích vô hướng xác định như sau

$$x = (x_1,\dots,x_n);\ y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

Ví dụ 6.13

- *Tích vô hướng có trọng số* của không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ ứng với các hằng số dương $c_1, \dots, c_n$ được định nghĩa

$$x = (x_1,\dots,x_n);\ y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle x, y\rangle = c_1x_1y_1 + \dots + c_nx_ny_n$$

- Các hằng số $c_i > 0$ là các trọng số, trọng số c_i lớn thì số hạng thứ i trong tích vô hướng cũng lớn theo.
- Tích vô hướng có trọng số đặc biệt quan trọng trong thống kê và xử lý dữ liệu, khi ta muốn nhấn mạnh một thành phần nào đó so với các thành phần khác.

Chẳng hạn $\langle u,v\rangle = 2u_1v_1 + 5u_2v_2\,;\ u=(u_1,u_2), v=(v_1,v_2)$

Là một tích vô hướng của $\mathbb{R}^2$ với hai trọng số 2 và 5.

Ví dụ 6.14

Tích phân

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

xác định một tích vô hướng của không gian véc tơ $C^0_{[a,b]}$

các hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$

- Giả sử V là một không gian véc tơ Euclide với tích vô hướng $\langle\ ,\ \rangle$
- Với mỗi véc tơ $v \in V$ ta định nghĩa và ký hiệu chuẩn hay ***môđun*** của véc tơ v qua biểu thức

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

- Nếu $||v|| = 1$ thì v được gọi là véc tơ đơn vị.

Ví dụ 6.15 $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

$$v = (1,-2,\ 3) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \|v\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$f(x) \in C^0_{[a,b]} \Rightarrow \|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b |\,f(x)\,|^2\,dx}$$

Tính chất 6.3 ***Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz***

Với mọi $u, v \in V$ luôn có

$$\left|\left\langle u, v\right\rangle\right| \le \|u\| \cdot \|v\| \qquad \left|\left\langle v, u\right\rangle\right|^2 \le \left\langle v, v\right\rangle \left\langle u, u\right\rangle$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi u, v phụ thuộc tuyến tính

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\left|\left\langle v, u\right\rangle\right|^2 \le \left\langle v, v\right\rangle \left\langle u, u\right\rangle$$

vào không gian $\mathbb{R}^n$, ta có ***bất đẳng thức Bunnhiacopsky***

$$\left(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n\right)^2 \le \left(x_1^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2}\right)\left(y_1^{\,2} + \ldots + y_n^{\,2}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các thành phần của $(x_1, \ldots, x_n)$ và $(y_1, \ldots, y_n)$ tỉ lệ.

6.3.2 Trực giao - trực chuẩn hoá Gram-Shmidt

- Hai véc tơ $u, v \in V$ gọi là trực giao nhau, ký hiệu $\boldsymbol{u \perp v}$ nếu $\langle u, v\rangle = 0$.
- Hệ các véc tơ $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ của V được gọi là hệ trực giao nếu hai véc tơ bất kỳ của hệ S đều trực giao nhau.
- Hệ trực giao các véc tơ đơn vị được gọi là hệ trực chuẩn.

Định lý 6.4

Mọi hệ trực chuẩn là hệ độc lập tuyến tính.

Định lý 6.5

Giả sử $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là một hệ độc lập tuyến tính các véc tơ của không gian Euclide V,

Khi đó ta có thể tìm được hệ trực chuẩn $S' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sao cho

$$\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_k\} = \operatorname{span}\{u_1,\ldots,u_k\};\ \forall k = 1,\ldots,n$$

Ta xây dựng hệ trực chuẩn S' theo các bước quy nạp sau đây mà được gọi là ***quá trình trực chuẩn hoá Gram-Shmidt*** .

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \overline{v_2} = -\left\langle u_2, v_1\right\rangle v_1 + u_2 \Rightarrow \overline{v_2} \perp v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{\overline{v_2}}{\left\|\overline{v_2}\right\|}$$

$$\overline{v_k} = -\sum_{i=1}^{k-1} \left\langle u_k, v_i\right\rangle v_i + u_k \Rightarrow \overline{v_k} \perp v_i; \forall i = 1, \ldots, k-1 \Rightarrow v_k = \frac{\overline{v_k}}{\left\|\overline{v_k}\right\|}$$

Ví dụ 6.15 Trực chuẩn hoá hệ độc lập tuyến tính của $\mathbb{R}^3$

$$u_1=(1,1,1);\ u_2=(-1,1,1);\ u_3=(1,2,1)$$

$$\|u_1\|=\sqrt{3}\Rightarrow v_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\overline{v_2}=-\langle u_2,v_1\rangle v_1+u_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+(-1,1,1)=\frac{2}{3}(-2,1,1)$$

$$\|\overline{v_2}\|=\frac{2}{3}\|(-2,1,1)\|=\frac{2}{3}\sqrt{6}\Rightarrow v_2=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\overline{v_3}=-\langle u_3,v_1\rangle v_1-\langle u_3,v_2\rangle v_2+u_3=\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(0,1,-1)$$

$$\|\overline{v_3}\|=\frac{1}{2}\|(0,1,-1)\|=\frac{1}{2\sqrt{2}}\Rightarrow v_3=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Ví dụ 6.16

Trong không gian véc tơ $\mathbf{P}_2$ các đa thức bậc ≤ 2 với tích vô hướng xác định theo công thức

$$\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(t)q(t)dt$$

Cơ sở chính tắc $1,\,t,\,t^2$ không phải là một cơ sở trực chuẩn

$$\langle 1,t\rangle=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}\quad \langle 1,t^2\rangle=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}\quad \langle t,t^2\rangle=\int_0^1 t^3dt=\frac{1}{4}$$

Trực chuẩn hóa Gram-Shmidt cơ sở này.

$$\langle 1,1\rangle=\int_0^1 dt=1\Rightarrow u_1(t)=1$$

$$\overline{u_2(t)}=-\langle t,u_1(t)\rangle u_1(t)+t=-\frac{1}{2}+t\quad \|\overline{u_2(t)}\|=\sqrt{\int_0^1\left(-\frac{1}{2}+t\right)^2dt}=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow u_2(t)=2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}(2t-1)$$

$$\langle t^2,u_1(t)\rangle=\frac{1}{3};\langle t^2,u_2(t)\rangle=\int_0^1 t^2\sqrt{3}(2t-1)dt=\sqrt{3}\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\overline{u_3(t)}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{3}(2t-1)+t^2=t^2-t+\frac{1}{6}$$

$$\|\overline{u_3(t)}\|=\frac{1}{6}\sqrt{\int_0^1\left(6t^2-6t+1\right)^2dt}=\frac{1}{6}\sqrt{\int_0^1(36t^4+36t^2+1-72t^3+12t^2-12t)dt}$$

$$\|\overline{u_3(t)}\|=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{36}{5}-\frac{72}{4}+\frac{48}{3}-\frac{12}{2}+1}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{36}{5}-7}=\frac{1}{6\sqrt{5}}$$

$$u_3(t)=6\sqrt{5}\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)=\sqrt{5}(6t^2-6t+1)$$

6.3.3 Cơ sở trực chuẩn

Một cơ sở của không gian véc tơ V đồng thời là hệ trực chuẩn được gọi là một cơ sở trực chuẩn.

Ví dụ 6.17

Cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^n$ là cơ sở trực chuẩn.

Định lí 6.6

Mọi hệ trực chuẩn của V đều có thể bổ sung thêm để trở thành cơ sở trực chuẩn.

Hệ quả 6.7

Mọi không gian véc tơ Euclide đều tồn tại cơ sở trực chuẩn.

Định lý 6.8

Giả sử $\{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V

Với mọi $u, v \in V$, ta có

1) $v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n$.

2) $\langle u, v \rangle = \langle u, e_1 \rangle \langle v, e_1 \rangle + \dots + \langle u, e_n \rangle \langle v, e_n \rangle$.

3) $\|v\|^2 = \langle v, e_1 \rangle^2 + \dots + \langle v, e_n \rangle^2$.

Chứng minh

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow \langle v, e_i \rangle = \langle x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, e_i \rangle = x_i \langle e_i, e_i \rangle = x_i$$

$$u = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \quad \langle v, u \rangle = \langle x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Nhận xét 6.4:

1) Trong không gian với hệ trục tọa độ trực chuẩn $Oxyz$ với các véc tơ đơn vị trên các trục tương ứng là $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Véc tơ đơn vị $\vec{n} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ bất kỳ có

$$x = \vec{n}.\vec{i} = \cos\alpha,\ y = \vec{n}.\vec{j} = \cos\beta,\ z = \vec{n}.\vec{k} = \cos\gamma$$

nghĩa là $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, trong đó α, β, γ lần lượt là góc của véc tơ $\vec{n}$ với các trục tọa độ.

2) Trường hợp $\{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở trực giao của V thì

$$\forall v \in V : v = \frac{\langle v, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 + \frac{\langle v, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2 + \dots + \frac{\langle v, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n.$$

6.3.4 Không gian con trực giao, phần bù trực giao

- Véc tơ $v \in V$ trực giao với tập con $S \subset V$, ký hiệu $v \perp S$, nếu v trực giao với mọi véc tơ của S

$$v \perp S \Leftrightarrow \langle v, u \rangle = 0,\ \forall u \in S$$

- Tập con S_1 trực giao với tập con S_2, ký hiệu $S_1 \perp S_2$, nếu mọi véc tơ của S_1 đều trực giao với mọi véc tơ của S_2

$$S_1 \perp S_2 \Leftrightarrow v \perp u;\ \forall v \in S_1, \forall u \in S_2$$

Định lý 6.9

1. $v \perp S \Leftrightarrow v \perp \operatorname{span} S$

$$\forall u \in \operatorname{span} S : u = x_1 u_1 + \dots + x_k u_k; u_1, \dots, u_k \in S$$

$$\Rightarrow \langle v, u \rangle = \langle v, x_1 u_1 + \dots + x_k u_k \rangle = x_1 \langle v, u_1 \rangle + \dots + x_k \langle v, u_k \rangle = 0$$

$$\langle v, u \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v, u_1 \rangle = \dots = \langle v, u_k \rangle = 0$$

2. Giả sử $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của W, khi đó:

$$v \perp W \Leftrightarrow v \perp e_i;\ \forall i = 1, \dots, k$$

3. Với mọi tập con $S \subset V$, ký hiệu $S^\perp = \{v \in V \mid v \perp u,\ \forall u \in S\}$. Ta có:

Tập $S^\perp$ là không gian véc tơ con của V.

$$\mathbf{0} \in S^\perp \Rightarrow S^\perp \neq \varnothing \quad \forall v_1, v_2 \in S^\perp; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall u \in S$$

$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, u \rangle = \alpha \langle v_1, u \rangle + \beta \langle v_2, u \rangle = 0 \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in S^\perp$$

$$S^{\perp}=(\operatorname{span} S)^{\perp} \quad V=(\operatorname{span} S)\oplus S^{\perp} \quad \left(S^{\perp}\right)^{\perp}=\operatorname{span} S \qquad \textbf{(6.52)}$$

$1) \Rightarrow\ S^{\perp}=(\operatorname{span} S)^{\perp}$ Giả sử $\{e_1,\dots,e_k\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\operatorname{span} S$

$\forall v\in V$, đặt $u=\langle v,e_1\rangle e_1+\dots+\langle v,e_k\rangle e_k\in\operatorname{span} S$

$\langle v-u,e_i\rangle=0, \forall i=1,\dots,k \Rightarrow v-u\in(\operatorname{span} S)^{\perp}=S^{\perp}$. Vậy $V=(\operatorname{span} S)+S^{\perp}$

$\forall u\in(\operatorname{span} S)\cap S^{\perp}\Rightarrow\langle u,u\rangle=0\Rightarrow u=\mathbf{0} \quad \Rightarrow V=(\operatorname{span} S)\oplus S^{\perp}$

$S\subset\left(S^{\perp}\right)^{\perp}\Rightarrow\operatorname{span} S\subset\left(S^{\perp}\right)^{\perp}$

$\forall v\in\left(S^{\perp}\right)^{\perp}\subset V=(\operatorname{span} S)\oplus S^{\perp}\Rightarrow\ v=u_1+u_2;\ u_1\in\operatorname{span} S,\ u_2\in S^{\perp}$

$\Rightarrow\ 0=\langle v,u_2\rangle=\langle u_1+u_2,u_2\rangle=\langle u_1,u_2\rangle+\langle u_2,u_2\rangle=\langle u_2,u_2\rangle$

$\Rightarrow u_2=\mathbf{0}\Rightarrow v=u_1\in\operatorname{span} S \quad\Rightarrow\left(S^{\perp}\right)^{\perp}\subset\operatorname{span} S$

4. Với mọi không gian con W của V. Ta có

$$V=W\overset{\perp}{\oplus}W^{\perp} \qquad \left(W^{\perp}\right)^{\perp}=W$$

Hai không gian con W, $W^{\perp}$ được gọi là phần bù trực giao của nhau.

5. Nếu hệ véc tơ $\{e_1,\dots,e_k\}$ là một cơ sở trực chuẩn của W và $\{e_{k+1},\dots,e_{k+n}\}$ là một cơ sở trực chuẩn $W^{\perp}$

thì $\{e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_{k+n}\}$ là cơ sở trực chuẩn của V.

6. Trong không gian véc tơ Euclide $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng thông thường, xét hệ véc tơ

$$u_1=(a_{11},\dots,a_{1n}),\dots,u_m=(a_{m1},\dots,a_{mn})$$

Đặt $S=\{u_1,\dots,u_m\}$, khi đó:

$S^{\perp}$ là không gian nghiệm của hệ $\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$ **(6.55)**

Ví dụ 6.18 Xét $W=\{(0,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$

Ta có $W^{\perp}=\{(x,y,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ và $\mathbb{R}^3=W\overset{\perp}{\oplus}W^{\perp}$

Nhận xét 6.2

Gọi W là không gian nghiệm của phương trình thuần nhất $AX=0$ hoặc dưới dạng tổng quát

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0\\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0\end{cases}$$

- Trong chương 5, theo công thức (5.27) ta có thể xem W là nhân của ánh xạ tuyến tính có ma trận trong cơ sở chính tắc là A.
- Mặt khác theo định lý 6.9 ta cũng có thể xem W là tập tất cả các véc tơ trực giao với mọi véc tơ hàng của A, do đó W là phần bù trực giao của không gian véc tơ sinh bởi các véc tơ hàng của A.
- Theo (6.52), (6.55) ta có $\dim W=n-r(A)$
- Kết quả này cho một cách chứng minh khác của định lý 5.4 chương 5 và công thức (6.13) chương 6.

6.4 MA TRẬN TRỰC GIAO VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH TRỰC GIAO

6.4.1 Ma trận trực giao

- Ma trận vuông A được gọi là ma trận trực giao nếu $A^tA = I$.
- Như vậy ma trận trực giao A là khả nghịch và có $A^{-1} = A^t$.
- Ma trận $A = [a_{ij}]$ vuông cấp n là ma trận trực giao khi

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } j = k \\ 0 & \text{nếu } j \neq k \end{cases}$$

δ_{ij} là ***ký hiệu Kronecker***

Vậy ma trận A trực giao khi và chỉ khi các véc tơ cột tạo thành hệ trực chuẩn

Mặt khác vì $A^{-1} = A^t$ nên ta cũng có $AA^t = I$, do đó các véc tơ hàng của A cũng tạo thành hệ trực chuẩn

$$\det(A^tA) = \det I \Rightarrow \det(A) = \pm 1$$

Ví dụ 6.19

Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

có các cột là hệ trực chuẩn do đó là ma trận trực giao

Ví dụ 6.20 Mọi ma trận vuông cấp 2 trực giao đều có dạng

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \text{hoặc} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Thật vậy, nếu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ và $A^tA = I \Rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ba+dc & b^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+c^2=1 & (1) \\ ab+cd=0 & (2) \\ b^2+d^2=1 & (3) \end{cases}$$

Hệ phương trình (2) & (3) là hệ Cramer với ẩn b, d có nghiệm duy nhất $b = -\dfrac{c}{|A|}, d = \dfrac{a}{|A|}$

Kết hợp với phương trình (1), tùy theo định thức $\det A = 1$ hoặc $\det A = -1$ ta có hai dạng của ma trận A

Định lý 6.10

Ma trận của một cơ sơ trực chuẩn viết trong cơ sở trực chuẩn là một ma trận trực giao.

Như vậy mọi ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn sang cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao.

Gọi $A = \left[a_{ij}\right]$ là ma trận của cơ sở trực chuẩn $\{v_1,\dots,v_n\}$ viết trong cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$

$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i = \sum_{i=1}^{n}\langle e_i, v_j\rangle e_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik} = \langle v_j, v_k\rangle = \delta_{jk}$ Vậy A là ma trận trực giao

6.4.2 Ánh xạ tuyến tính trực giao (TK)

Giả sử V và V' là hai không gian véc tơ Euclide

Ánh xạ tuyến tính $f: V \to V'$ được gọi là ánh xạ trực giao nếu với mọi $u, v \in V$

$$\langle f(u), f(v)\rangle_{V'} = \langle u, v\rangle_V$$

Nếu $f(u)=0$ thì $0=\langle f(u), f(u)\rangle=\langle u, u\rangle \Rightarrow u=\mathbf{0}$, do đó mọi ánh xạ tuyến tính trực giao đều đơn cấu.

Vì vậy mọi tự đồng cấu tuyến tính trực giao là đẳng cấu.

Định lý 6.11

Giả sử f là tự đồng cấu tuyến tính của không gian véc tơ Euclide V

$\mathcal{B}=\{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V,

Khi đó f trực giao khi và chỉ khi $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V

$$\begin{cases}\langle f(u), f(v)\rangle_{V'}=\langle u,v\rangle_V \\ \forall u,v\in V\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\langle f(e_i), f(e_j)\rangle_{V'}=\langle e_i,e_j\rangle_V \\ \forall i,j=1,\ldots,n\end{cases}$$

6.4.3 Ma trận của tự đẳng cấu trực giao (TK)

- Giả sử $A=[a_{ij}]$ là ma trận của tự đẳng cấu f trong không gian Euclide V với cơ sở trực chuẩn $\mathcal{B}=\{e_1, \ldots, e_n\}$

  Theo định lý 6.10 và định lý 6.11 thì tự đẳng cấu f là trực giao khi và chỉ khi A là một ma trận trực giao.

- Vậy ma trận của tự đẳng cấu trực giao trong một cơ sở trực chuẩn là một ma trận trực giao.
- Ngược lại, nếu A là ma trận trực giao và f là tự đồng cấu tuyến tính có ma trận trong cơ sở trực chuẩn là A thì f là ánh xạ trực giao.

Định lý 6.12 Mọi ma trận trực giao chỉ có các giá trị riêng là ± 1.

Giả sử f là tự đẳng cấu trực giao có ma trận trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là A.

Giả sử $v\neq\mathbf{0}$ là một véc tơ riêng giá trị riêng λ. Khi đó

$$\langle f(v), f(v)\rangle=\langle \lambda v, \lambda v\rangle=\lambda^2\langle v,v\rangle$$

$$\langle f(v), f(v)\rangle=\langle v,v\rangle \Rightarrow \lambda^2\langle v,v\rangle=\langle v,v\rangle$$

$$\langle v,v\rangle\neq 0 \Rightarrow \lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm 1$$

6.5 CHÉO HOÁ TRỰC GIAO MA TRẬN, TỰ ĐỒNG CẤU ĐỐI XỨNG

6.5.1 Bài toán chéo hoá trực giao

Cho ma trận A tìm ma trận trực giao T sao cho T^tAT là ma trận chéo

Định lý 6.13 (điều kiện cần)

Nếu A chéo hoá trực giao được thì A là ma trận đối xứng.

T^tAT là ma trận chéo thì $\left(T^tAT\right)^t=T^tAT \Rightarrow T^tA^tT=T^tAT \Rightarrow A^t=A$

Ta chứng minh đây cũng là điều kiện đủ bằng cách xét tự đồng cấu đối xứng.

6.5.2 Tự đồng cấu đối xứng

Tự đồng cấu $f: V\to V$ được gọi là đối xứng nếu với mọi $u, v\in V$

$$\langle f(u), v\rangle=\langle u, f(v)\rangle$$

Định lý 6.14

Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của V, khi đó tự đồng cấu f là đối xứng khi và chỉ khi với mọi $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle$$

Điều kiện cần hiển nhiên

Ngược lại, giả sử $\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle$

$\forall v, u \in V : v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n;\ u = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$

$\langle f(v), u \rangle = \langle x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n), y_1e_1 + \dots + y_ne_n \rangle$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j \langle f(e_i), e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j \langle e_i, f(e_j) \rangle = \langle v, f(u) \rangle$$

Như vậy để chứng minh một tự đồng cấu là đối xứng ta chỉ cần kiểm tra tính đối xứng đúng với một cơ sở nào đó

Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ là cơ sở trực chuẩn và $A = [a_{ij}]$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}$

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle f(e_j), e_i \rangle e_i$$

Vậy với mọi $i, j = 1, \dots, n$: $a_{ij} = \langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle = a_{ji}$

Định lý 6.15

f đối xứng khi và chỉ khi ma trận A của f trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là ma trận đối xứng.

Ví dụ 6.22 Ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, -x + 2y + z, 2x + y + 4z)$$

Ma trận trong cơ sở chính tắc

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

là ma trận đối xứng nên f là một tự đồng cấu đối xứng

Ta cũng có thể kiểm tra lại điều kiện đồng cấu đối xứng như sau

$$f(e_1) = (1, -1, 2)$$
$$f(e_2) = (-1, 2, 1)$$
$$f(e_3) = (2, 1, 4)$$

$$\langle f(e_1), e_2 \rangle = -1 = \langle e_1, f(e_2) \rangle$$
$$\langle f(e_1), e_3 \rangle = 2 = \langle e_1, f(e_3) \rangle$$
$$\langle f(e_2), e_3 \rangle = 1 = \langle e_2, f(e_3) \rangle$$

Định lý 6.16

Các giá trị riêng của một ma trận đối xứng là các số thực. Nói cách khác, đa thức đặc trưng của ma trận đối xứng vuông cấp n có n nghiệm thực.

Giả sử f là tự đồng cấu đối xứng có ma trận trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là ma trận đối xứng A cấp n.

Giả sử $\lambda = a + ib$ là nghiệm của đa thức đặc trưng $\mathscr{P}(\lambda) = |A - \lambda I|$. Khi đó tồn tại hai véc tơ độc lập tuyến tính $u, v \in V$ sao cho

$$\begin{cases} f(v) = av - bu \\ f(u) = bv + au \end{cases} \quad \begin{aligned} &\langle f(v), u \rangle = a\langle v, u \rangle - b\langle u, u \rangle, \langle v, f(u) \rangle = a\langle v, u \rangle + b\langle v, v \rangle \\ &\langle f(v), u \rangle = \langle v, f(u) \rangle \Rightarrow -b\langle u, u \rangle = b\langle v, v \rangle \ge 0 \Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

Vậy mọi nghiệm của đa thức đặc trưng là nghiệm thực.

Định lý 6.17

Hai véc tơ riêng ứng với hai giá trị riêng khác nhau của một tự đồng cấu đối xứng là trực giao nhau.

$$f(v_1)=\lambda_1 v_1,\ f(v_2)=\lambda_2 v_2;\ v_1,v_2\neq 0;\lambda_1\neq\lambda_2$$

$$\lambda_1\langle v_1,v_2\rangle=\langle f(v_1),v_2\rangle=\langle v_1,f(v_2)\rangle=\lambda_2\langle v_1,v_2\rangle$$

$$\Rightarrow(\lambda_1-\lambda_2)\langle v_1,v_2\rangle=0\Rightarrow\langle v_1,v_2\rangle=0$$

Định lý 6.18

Mọi tự đồng cấu đối xứng f trong V đều tồn tại một cơ sở trực chuẩn của V gồm các véc tơ riêng của f. Nói cách khác mọi tự đồng cấu đối xứng đều chéo hóa trực giao được.

Hệ quả 6.19 Mọi ma trận đối xứng đều chéo hoá trực giao được.

6.5.4 Thuật toán chéo hoá trực giao

Để chéo hoá trực giao một ma trận đối xứng A, nghĩa là tìm ma trận trực giao T sao cho T^tAT có dạng chéo, ta thực hiện các bước sau.

- **Bước 1**: Tìm các giá trị riêng của A (nghiệm đa thức đặc trưng).
- **Bước 2**: Với mỗi giá trị riêng tìm được ở bước 1, tìm một cơ sở của không gian riêng tương ứng và trực chuẩn hoá Gram-Shmidt cơ sở này.
- **Bước 3**: Gộp các cơ sở đã được trực chuẩn hoá ở bước 2 ta có một cơ sở trực chuẩn của V gồm các véc tơ riêng của A.

Ma trận các véc tơ của cơ sở này là ma trận trực giao T cần tìm.

Ví dụ 6.23 Chéo hoá trực giao ma trận đối xứng

$$A=\begin{bmatrix}0&2&2\\2&3&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}$$

Đa thức đặc trưng $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&2&2\\2&3-\lambda&-1\\2&-1&3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-\lambda&2&2\\4-\lambda&3-\lambda&-1\\4-\lambda&-1&3-\lambda\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}(4-\lambda)&2&2\\0&1-\lambda&-3\\0&-3&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(4-\lambda)&4&2\\0&-2-\lambda&-3\\0&0&4-\lambda\end{vmatrix}=-(4-\lambda)^2(\lambda+2)$$

- Với giá trị riêng $\lambda_1=-2$, véc tơ riêng $u=(x,y,z)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{bmatrix}2&2&2\\2&5&-1\\2&-1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}2&2&2\\2&5&-1\\2&-1&5\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&3&-3\\0&-3&3\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương với hệ $\begin{cases}x+2y=0\\y-z=0\end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases}x=-2y\\y=z\end{cases}$

$u=(-2y,y,y)=y(-2,1,1)$ Chọn $u_1=(-2,1,1)$

Trực chuẩn hoá được $v_1=(-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$

➢ Với giá trị riêng $\lambda_2 = 4$, véc tơ riêng $u = (x,y,z)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{bmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Hệ phương trình tương đương với

$$2x - y - z = 0$$

$$u = (x,y,z) = \left(y/2 + z/2, y, z\right) = y/2(1,2,0) + z/2(1,0,2)$$

Chọn $u_2 = (1,2,0)$, $u_3 = (1,0,2)$

Trực chuẩn hoá được

$$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

$$v_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

$$T = \begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}}\end{bmatrix} \quad T^t A T = \begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

6.5.5 Đưa biểu thức tọa độ của dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng chéo hoá trực giao

- Giả sử Q là dạng toàn phương trong không gian Euclide V với cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ có ma trận $A = [a_{ij}]$ (ma trận đối xứng).
- Theo hệ quả (6.19) ta có thể hoá chéo trực giao ma trận $A = [a_{ij}]$, nghĩa là ta tìm được ma trận trực giao T để $T^t A T$ là ma trận chéo.
- T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}'$ gồm các véc tơ riêng của A.
- Vì vậy biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng chính tắc.

Ví dụ 6.24 Cho dạng toàn phương $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định như sau

Với mọi $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$Q(v) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

Ma trận của Q cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

Theo Ví dụ 6.23 tồn tại cơ sở $\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$

$$e'_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

$$e'_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

$$v = (x_1, x_2, x_3) = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3$$

$$Q(v) = -2x'^2_1 + 4x'^2_2 + 4x'^2_3$$

Nhận xét 6.3

Khi sử dụng phương pháp Lagrange và phương pháp Jacobi thì ma trận T nhận được nói chung không phải là ma trận trực giao

BÀI TẬP