§1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm đạo hàm

   a. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

   b. Đạo hàm một phía

   c. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

   d. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

2. Các quy tắc tính đạo hàm

3. Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

§1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm đạo hàm

a. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Định nghĩa:

Giả sử $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(a,b), x_0 \in (a,b)$

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\text{hay } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$$

thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của hàm số f tại x_0

Kí hiệu $f'(x_0)$ hay $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$ hay $\dfrac{dy}{dx}(x_0)$

Khi đó ta nói f khả vi tại x_0

§1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

Đạo hàm $y'(x_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi của hàm số $y(x)$ tại x_0

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = \sin x$

Tại mọi $x_0 \in \mathbb{R}$, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2\cos\frac{x + x_0}{2}\sin\frac{x - x_0}{2}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \cos\frac{x + x_0}{2} . \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = \cos x_0$$

b. Đạo hàm một phía

$$f_p'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f_t'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Người ta còn kí hiệu các ĐH một phía như sau:

$$f_p'(x_0)\ hay\ f_+'(x_0)\, hay\ f'(x_0{}^+)$$

$$f_t'(x_0)\ hay\ f_-'(x_0)\, hay\ f'(x_0{}^-)$$

Nhận xét :

f **khả vi tại** $x_0 \Leftrightarrow f$ **khả vi trái, khả vi phải tại** x_0 **và**

$$f_t'(x_0) = f_p'(x_0) = f'(x_0)$$

§1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

Định lí : Nếu f khả vi tại x_0 thì

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x) \text{ khi } \Delta x\to 0$$

Hệ quả: **Nếu f khả vi tại x_0 thì f liên tục tại x_0**

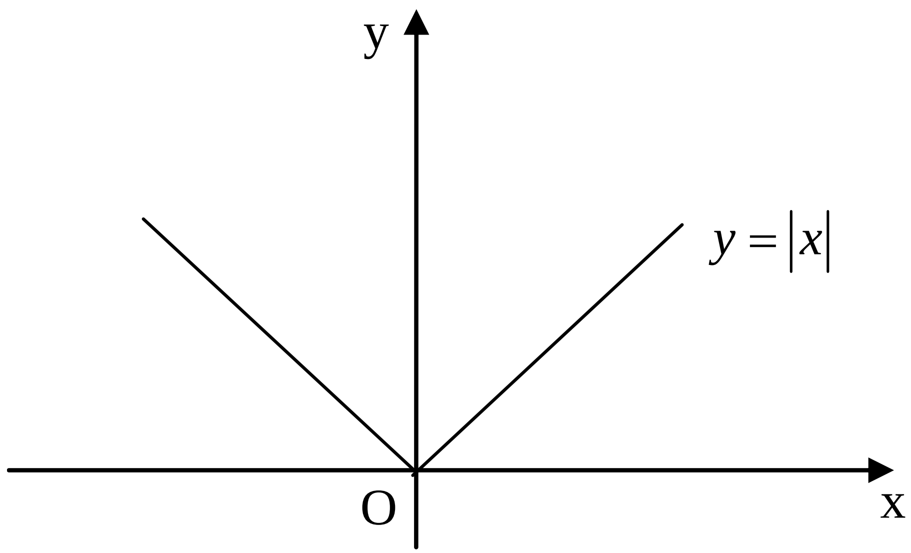
Nhận xét :

a) f có thể liên tục tại x_0 nhưng không khả vi tại x_0

* Chẳng hạn, xét hàm số $f(x) = |x|$

Dễ thấy f liên tục tại 0 nhưng không khả vi tại 0 vì

$$f_t'(0) = -1,\ f_p'(0) = 1$$



H.2.1

* Xét hàm số

$$f(x)=\begin{cases} x.\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

f liên tục tại 0 vì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$

f không khả vi tại 0 vì

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x.\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

không tồn tại.

b) Nếu f khả vi phải (hoặc trái) tại x_0 thì f liên tục phải (hoặc trái) tại x_0.

c. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Nếu f khả vi tại x_0 thì tồn tại tiếp tuyến của đồ thị hàm số f tại điểm $A(x_0, f(x_0))$.

Tiếp tuyến này không song song với trục Oy và có hệ số góc là $f'(x_0)$

d. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

Định nghĩa: Giả sử hàm số f khả vi tại mọi điểm $x \in (a,b)$

Hàm số

$$f' : (a,b) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

gọi là đạo hàm của hàm số f trên khoảng (a,b)

Ví dụ : Hàm số $\sin x$ có đạo hàm là hàm số $\cos x$ trên $\mathbb{R}$

* *Nếu f' liên tục trên (a,b) thì ta nói f khả vi liên tục trên (a,b).*

2. Các quy tắc tính đạo hàm

* Đạo hàm của tổng, hiệu, tích , thương

$$(u+v)' =$$

$$(\lambda.u)' =$$

$$(u.v)' =$$

$$(\frac{u}{v})' =$$

2. Các quy tắc tính đạo hàm

* Đạo hàm của hàm hợp

* Nếu $z = f(u(x))$ thì

$$z'(x) = f'(u(x)).u'(x)$$

* Phát biểu cách khác:

Xét hàm hợp $z = z(y),\ y = y(x)$

Có $z'(x) = \dfrac{dz}{dx}(x) = \dfrac{dz}{dy}\big(y(x)\big).\dfrac{dy}{dx}(x)$

Viết tắt: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}.\dfrac{dy}{dx}$

Định lí : (Đạo hàm của hàm ngược).

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

viết cách khác:

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$$

- *Các định lí trên được phát biểu tương tự với đạo hàm trên một khoảng .*

Ví dụ :

Tìm đạo hàm của hàm số $y = \arcsin x$ trên khoảng (-1,1).

Giải:

Hàm số $y = \arcsin x$ có hàm số ngược là $x = \sin y$

Với $x \in (-1,1) \Rightarrow y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$x'(y) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

Vậy $y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1,1).$

Định lí: (Đạo hàm của hàm cho theo tham số)

Xét hàm dạng tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Có: $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

3. Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

$$y = C \Rightarrow y' = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$y = x^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad y' = \alpha x^{\alpha - 1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$y = a^{x} \Rightarrow y' = a^{x} \ln a, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$y = e^{x} \Rightarrow y' = e^{x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$y = \log_a x \Rightarrow \ y' = \frac{1}{x\ln a}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$y=\sin x \Rightarrow\ y'=\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$y=\cos x \Rightarrow\quad y'=-\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$y=\operatorname{tg}x \Rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$y=\operatorname{cotg}x \Rightarrow y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\operatorname{cotg}^2 x),$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

$$y=\arcsin x \Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x\in(-1,1)$$

$$y=\arccos x \Rightarrow y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x\in(-1,1)$$

$$y=\mathrm{arctg}x \Rightarrow y'=\frac{1}{1+x^2},\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$y=\mathrm{arccotg}x \Rightarrow y'=-\frac{1}{1+x^2},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

$$y = \mathrm{sh}x \Rightarrow y' = \mathrm{ch}x$$

$$y = \mathrm{ch}x \Rightarrow y' = \mathrm{sh}x$$

$$y = \mathrm{th}x \Rightarrow y' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$

$$y = \coth x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$$

Nhận xét :

Dựa vào bảng đạo hàm trên và công thức đạo hàm của hàm số hợp, ta có:

$$y = a^u \Rightarrow y' = a^u \ln a.u', \ (a \in \mathbb{R})$$

$$y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{1}{1+u^2}.u'$$

…

Nhận xét (*Đạo hàm lôgarit*):

Trong một số trường hợp, trước khi tính đạo hàm, ta lấy lôgarit hai vế. Chẳng hạn:

*** Xét hàm số** $y(x) = u(x)^{v(x)} \quad (u(x) > 0, \forall x)$

Ta có $\ln y = v \ln u$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u} \qquad \Rightarrow y' = \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) y$$

* Xét hàm số $y = u^{\alpha} v^{\beta} w^{\gamma}$

($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ và $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ là các hàm số dương)

Ta có $\ln y = \alpha \ln u + \beta \ln v + \gamma \ln w$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \alpha \frac{u'}{u} + \beta \frac{v'}{v} + \gamma \frac{w'}{w}$$

$$\Rightarrow y' = y\left(\alpha \frac{u'}{u} + \beta \frac{v'}{v} + \gamma \frac{w'}{w}\right)$$

Ví dụ : Tính đạo hàm của hàm số sau:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$$

Giải:

$$f'(x) = 2x.\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad khi \;\; x \neq 0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

Ví dụ : Tính đạo hàm của hàm số

$$y = \ln|x|.$$

Giải:

$$y = \begin{cases} \ln x & khi \;\; x > 0 \\ \ln(-x) & khi \;\; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & khi \;\; x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) & khi \;\; x < 0 \end{cases}$$

Vậy $y' = \dfrac{1}{x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}^*$.

Ví dụ : Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^{\frac{x}{2}}\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$

Giải:

$$f'(x) = \left(x^{\frac{x}{2}}\right)'\sin\frac{x}{3} + x^{\frac{x}{2}}.\cos\frac{x}{3}.\frac{1}{3}$$

Đặt $u = x^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \ln u = \dfrac{x}{2}\ln x$

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{2}\ln x + \frac{x}{2}.\frac{1}{x} = \frac{1}{2}(\ln x + 1)$$

$$u' = \frac{1}{2}(\ln x + 1)x^{\frac{x}{2}}$$

Vậy $f'(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x + 1)x^{\frac{x}{2}}\sin\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}x^{\frac{x}{2}}.\cos\dfrac{x}{3}$

Ví dụ : Tính đạo hàm $y'(x)$ của hàm số

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$$

Giải:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1 - \dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}.$$

§2. VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa vi phân

a. Vi phân của hàm số tại một điểm

b. Vi phân của hàm số trên một khoảng

2. Các quy tắc tính vi phân

3. Áp dụng vi phân để tính gần đúng

§2. VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa vi phân

a. Vi phân của hàm số tại một điểm

* Giả sử hàm số f khả vi tại x_0

Vi phân của f tại x_0 kí hiệu là $df(x_0)$

§2. VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$$

$$df(x_0) = f'(x_0).dx$$

* Nhận xét:

***** Giả sử hàm số f khả vi tại x_0. Khi đó:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0).\Delta x + o(\Delta x)$$

Như vậy,

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + df(x_0) + o(\Delta x)$$

b. Vi phân của hàm số trên một khoảng

Cho hàm số f khả vi trên $(a,b) \subseteq X$.

Vi phân của f trên (a,b) là ánh xạ df xác định bởi công thức:

$$df(x) = f'(x)dx \quad \text{với} \quad \forall x \in (a,b)$$

$$df(x) = f'(x)\Delta x$$

Ví dụ:

Cho hàm số $y = \arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$

a) Tìm vi phân của hàm số

b) Tính vi phân của hàm số tại $x = 4, \quad dx = 2.$

Giải:

$$a)\ y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}} \cdot \frac{(1+x)(-1)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{x}}$$

$$(x>0)$$

$$dy = y'(x)dx = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{x}}.dx$$

$$b)\ dy(4) = -\frac{1}{10}dx.$$

Với $dx = 2,\ dy(4) = -\frac{1}{10}.2 = -\frac{1}{5}.$

2. Các quy tắc tính vi phân

Định lí : Nếu u,v khả vi trên (a,b) thì

$$* \; d(u+v) = du + dv$$

$$* \; d(\lambda u) = \lambda du, \;\; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$* \; d(u.v) = u.dv + v.du$$

$$* \; d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.du - u.dv}{v^2}.$$

$$khi\, v(x) \neq 0, \forall x \in (a,b).$$

Nhận xét : Biểu thức vi phân có tính bất biến.

$$dz = z'(u)du = z'(x)dx$$

3. Áp dụng vi phân để tính gần đúng

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0. Ta có:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

khi $|\Delta x|$ rất nhỏ.

Ví dụ : Tính gần đúng $\sqrt[3]{1,02}$

Giải:

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Áp dụng công thức $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

với $x_0=1$ và $\Delta x=0,02$, ta có:

$$\sqrt[3]{1,02}\approx 1+\frac{1}{3}.0,02\approx 1,0067.$$

§3. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

1. Đạo hàm cấp cao

2. Vi phân cấp cao

3. Lớp của một hàm

§3. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

1. Đạo hàm cấp cao

A. Định nghĩa

$$f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

Đạo hàm cấp *n* của f tại x_0 kí hiệu $f^{(n)}(x_0)$

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$

2. f được gọi là khả vi đến cấp *n* (hay khả vi *n* lần) trên X

nếu tồn tại $f^{(n)}(x)$ trên X, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. f được gọi là khả vi vô hạn lần trên X nếu $f(x)$ khả vi mọi cấp trên X.

Chú ý:

* Quy ước $f^{(0)}(x) = f(x),\ f^{(1)}(x) = f'(x)$

* Nếu f khả vi *n* lần trên X thì

$$\left(f^{(p)}\right)^{(q)} = f^{(p+q)} \quad (\forall p, q \in \mathbb{N} \text{ sao cho } p+q \le n)$$

B. Các phép tính

Định lí :

Cho f, g khả vi n lần trên X. Khi đó, ta có:

$$*(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

$$*(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$$

$$*(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$ (công thức Leibnitz)

tại mọi $x \in X$. $(\lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*)$

Ví dụ :

Cho hàm số $f(x) = \sin x.$ Chứng minh rằng:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Giải:

Trường hợp $n = 1,$ công thức đúng vì $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$

Giả sử công thức đúng với *n*

Có $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ công thức đúng với $n + 1.$ Vậy công thức đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*.$

Tương tự: $f(x) = \cos x$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ví dụ : Tính đạo hàm cấp 100 của hàm số $f(x) = x^2 \sin x.$

Giải:

Áp dụng công thức Leibnitz , ta có:

$$f^{(100)}(x) = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k} (x^2)^{(k)} (\sin x)^{(100-k)}$$

$$= C_{100}^{0} x^2 (\sin x)^{(100)} + C_{100}^{1} \left(x^2\right)' (\sin x)^{(99)} + C_{100}^{2} \left(x^2\right)'' (\sin x)^{(98)}$$

$$= x^2 \sin(x + 50\pi) + 200x \sin\left(x + \frac{99\pi}{2}\right) + 9900 \sin(x + 49\pi)$$

$$= x^2 \sin x - 200x \cos x - 9900 \sin x.$$

Ví dụ :

Cho $f(x)=\dfrac{1}{x+a}$, tính $f^{(n)}(x)$. $\quad (a\in\mathbb{R})$

Giải:

$$f(x)=(x+a)^{-1}\Rightarrow f'(x)=-1(x+a)^{-2}$$

$$\Rightarrow f''(x)=-1.(-2)(x+a)^{-3}$$

$$\Rightarrow f'''(x)=-1.(-2)(-3)(x+a)^{-4}$$

...

$$\Rightarrow f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}.$$

Ví dụ : Cho $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}$. Tính $f^{(n)}(x)$.

Giải:

$$f(x)=\frac{5}{2}.\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}.\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}.\frac{1}{x+1}$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{5}{2}.(-1)^n.\frac{(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}-\frac{1}{4}.(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{4}(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$(x\neq\pm1)$$

2. Vi phân cấp cao

A. Định nghĩa

Vi phân cấp n của f tại x_0 (nếu có) là vi phân của vi phân cấp n-1 của f tại x_0.

Kí hiệu: $d^n f(x_0)$.

Như vậy, $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n$

Ví dụ : Xét hàm số $f(x) = \sin x$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow d^n f(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) dx^n.$$

§3. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

Ví dụ: Cho $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$

Tính d^2y.

Giải: $d^2y = y''(x)dx^2$.

Có $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

$y'' = \dfrac{-x}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x^2+4}}$. Vậy $d^2y = \dfrac{-x}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x^2+4}}.dx^2$

B.Các phép tính

Định lí : Nếu f, g khả vi đến cấp n trên X thì

1. $d^n(f+g) = d^n f + d^n g$

2. $d^n(\lambda f) = \lambda d^n f\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3. $d^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k f d^{n-k} g$ (Công thức Leibnitz)

4. Nếu $g(x) \neq 0$ thì $\dfrac{f}{g}$ có vi phân đến cấp *n*.

Nhận xét:

Biểu thức vi phân cấp cao không có tính bất biến.

Ví dụ:

Xét hàm số hợp $y = x^2,\ x = t^2$

$$y''(t)dt^2 \neq y''(x)dx^2.$$

3. Lớp của một hàm

Định nghĩa

*Hàm f được gọi là thuộc lớp C^n trên X nếu f có đạo hàm đến cấp n trên X và $f^{(n)}$ liên tục trên X.

*Hàm f được gọi là thuộc lớp C^∞ trên X nếu f có đạo hàm mọi cấp n trên X.

*Hàm f được gọi là thuộc lớp C^0 trên X nếu f liên tục trên X

Định lí:

Cho $f, g \in C^n$ **trên** X. ***Khi đó:***

* $f+g,\ \lambda f,\ f.g \in C^n$ **trên** X

* $\dfrac{f}{g} \in C^n$ **trên** X **nếu** $g(x) \neq 0,\ \forall x \in X.$

Ví dụ:

Xét hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad khi \;\; x \in \left(-1, 0\right] \\ x^3 \; khi \;\; x \in (0,1) \end{cases}$$

Ta thấy $f \in C^1$ trên $(-1,1)$

§4. CÁC ĐỊNH LÍ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

1. Định lí Phécma (Fermat)
2. Định lí Rôn (Rolle)
3. Định lí Lagrăng (Lagrange)
4. Định lí Côsi (Cauchy)

§4. CÁC ĐỊNH LÍ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

1. Định lí Phécma (Fermat)

A. Điểm cực trị của hàm số

Cho hàm số f xác định trên $X, x_0 \in X$.

f được gọi là đạt cực đại tại x_0 nếu tồn tại $(a,b) \subset X$ sao cho $x_0 \in (a,b)$ và $f(x) \leq f(x_0)$ với $\forall x \in (a,b)$.

f được gọi là đạt cực tiểu tại x_0 nếu tồn tại $(a,b) \subset X$ sao cho $x_0 \in (a,b)$ và $f(x) \geq f(x_0)$ với $\forall x \in (a,b)$.

* *Hàm số đạt cực đại hoặc cực tiểu tại* x_0 *gọi là đạt cực trị tại* x_0.

B. Định lí Fermat

Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0.$

CM: Giả sử f đạt cực đại tại x_0

$$f_t'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

$$f_p'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Vì f khả vi tại x_0 nên $f_t'(x_0) = f_p'(x_0) = f'(x_0) = 0.$

Nhận xét :

a) Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì x_0 phải là điểm trong của X.

Như vậy nếu $f(x)$ chỉ xác định trên [*a*, *b*] thì không có khái niệm đạt cực trị tại các đầu mút *a*, *b*.

b) Hàm số đạt cực trị tại x_0 chưa chắc đã khả vi tại x_0.

Chẳng hạn, hàm số $f(x)=|x|$.

c) Điểm x_0 thỏa mãn điều kiện $f'(x_0)=0$ gọi là điểm dừng của hàm số f.

Các điểm dừng hoặc các điểm mà tại đó hàm số f không khả vi gọi là các điểm tới hạn của hàm số f.

Điểm cực trị của hàm số (nếu có) phải là điểm tới hạn.

2. Định lí Rôn (Rolle)

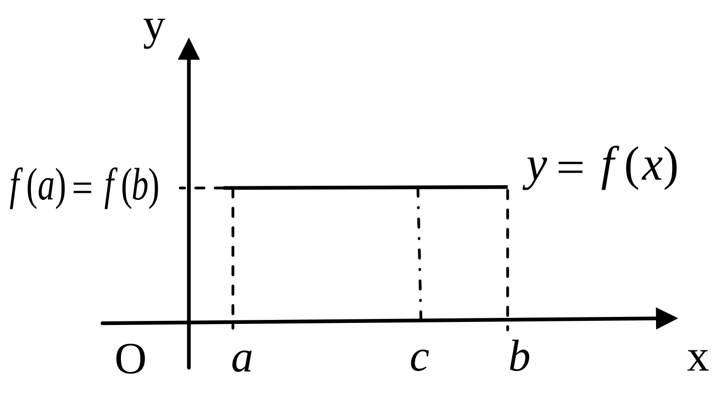
Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

$* f(x)$ liên tục trên $[a, b]$

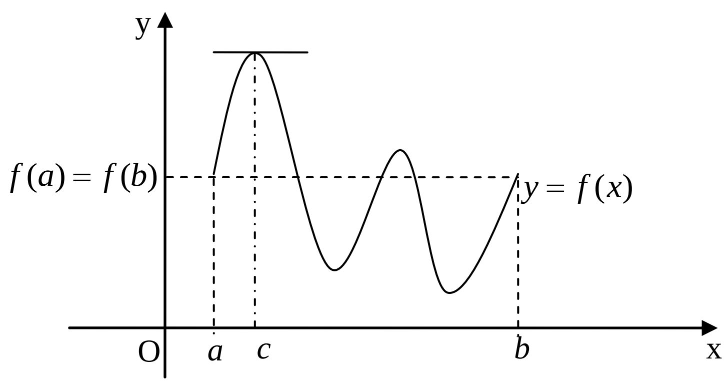
$* f(x)$ khả vi trên (a, b)

$* f(a) = f(b)$

Khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

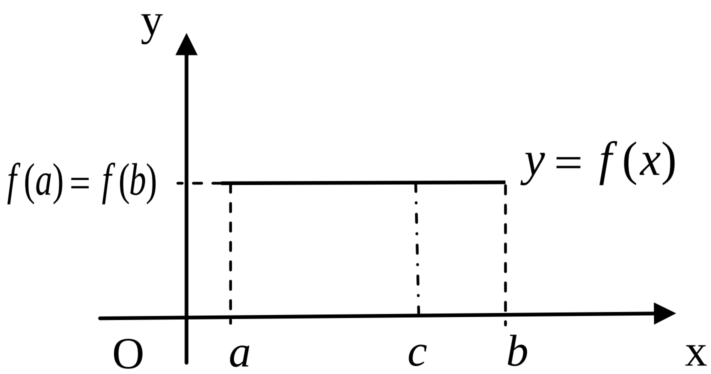


Nếu f không đổi



Nếu f thay đổi

*T/h1:

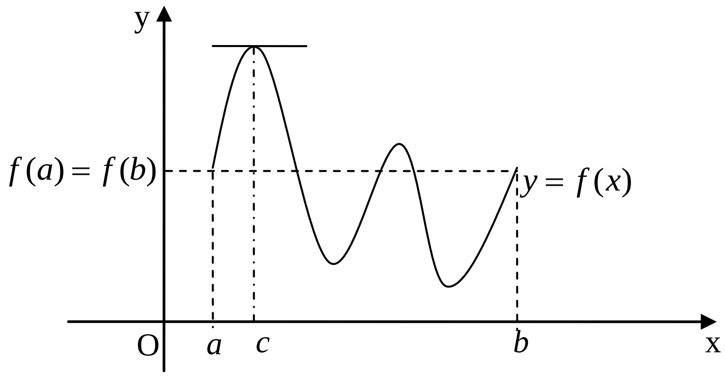


Nếu f không đổi

$$f(x)=m\quad \forall x\in[a,b]\Rightarrow f'(x)=0\quad \forall x\in(a,b)$$

$$\Rightarrow \exists c\in(a,b):\ f'(c)=0$$

§4. CÁC ĐỊNH LÍ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH



Nếu f thay đổi

f thay đổi trên $[a,b]$

Do f liên tục trên $[a,b]$ nên f đạt GTLN và GTNN trên $[a,b]$

Vì $f(a) = f(b)$ và GTLN khác GTNN

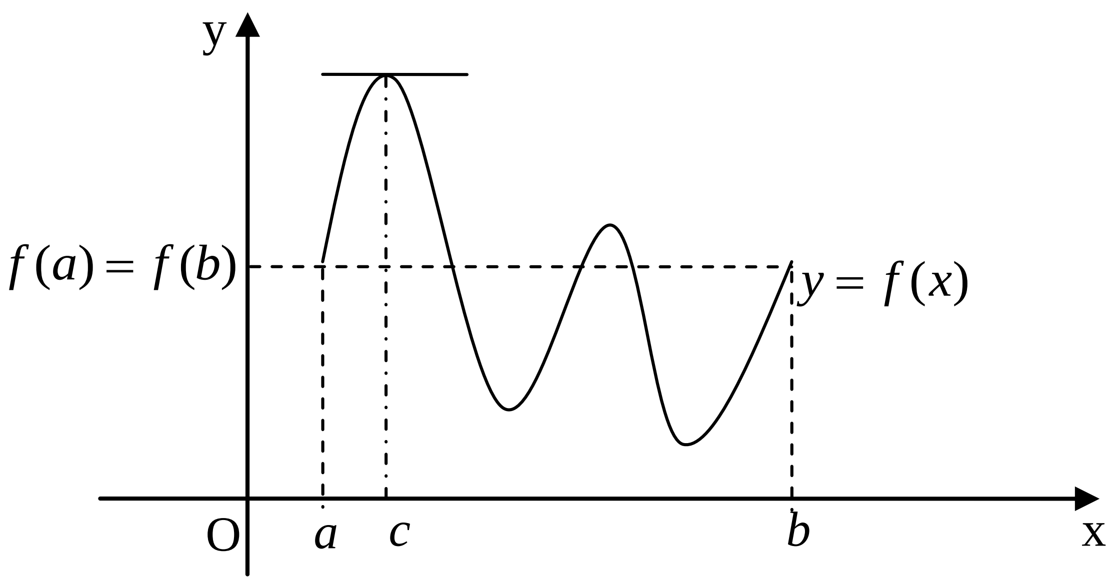
$\Longrightarrow$ f đạt GTLN hoặc GTNN tại một điểm c nào đó thuộc (a,b). c là điểm cực trị của hàm số và f khả vi tại c

$\Rightarrow f'(c) = 0$ *(theo định lí Fermat)*

Nhận xét :

Định lí Rolle có thể minh họa hình học như sau:

Trên đồ thị của hàm số $y = f(x)$, tồn tại ít nhất một điểm $M\left(c, f(c)\right)$ với $c \in (a,b)$, tại đó tiếp tuyến của đồ thị song song với trục Ox.



H.2.2

§4. CÁC ĐỊNH LÍ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Ví dụ : Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $f(a) = f(b) = 0.$

Chứng minh rằng với k là hằng số bất kỳ, phương trình $f'(x) = kf(x)$ có nghiệm.

Giải: Đặt $g(x) = f(x)e^{-kx}$

Dễ thấy g(x) liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b).

$$g'(x) = f'(x)e^{-kx} + f(x)e^{-kx}(-k)$$

$$g(a) = g(b) = 0.$$

$\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ sao cho $g'(c) = 0$

$$\Rightarrow \left[f'(c) - kf(c) \right] e^{-kc} = 0 \Rightarrow f'(c) = kf(c)$$

Vậy c là nghiệm của phương trình $f'(x) = kf(x)$.

3. Định lí Lagrăng (Lagrange)

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

* $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$
* $f(x)$ khả vi trên (a,b).

Khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

CM: Xét hàm số

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

Hàm φ thỏa mãn các điều kiện của định lí Rôn

...

4. Định lí Côsi (Cauchy)

Cho f, g là các hàm số thỏa mãn ba điều kiện:

* f, g liên tục trên $[a, b]$
* f, g khả vi trên (a, b)
* $g'(x) \neq 0$ với $\forall x \in (a,b)$

Khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

CM: Xét hàm số

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right]$$

Hàm φ thỏa mãn các điều kiện của định lí Rôn

...

§5. ỨNG DỤNG CÁC ĐỊNH LÍ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

1. Công thức Taylo (Taylor), công thức Maclôranh (Maclaurin)

2. Qui tắc Lôpitan (L'Hospital)

§5. ỨNG DỤNG CÁC ĐỊNH LÍ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

1. Công thức Taylo (Taylor), công thức Maclôranh (Maclaurin)

A. Công thức Taylor với phần dư Lagrange

Định lí: Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp $n+1$ trên (a,b), $x_0 \in (a,b)$

Khi đó, với mỗi $x \in (a,b)$ ta có:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

trong đó *c* là điểm nằm giữa x_0 và x.

* Công thức

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

gọi là công thức Taylor của hàm số $f(x)$ trong lân cận của x_0.

* Khi $x_0 = 0,$ công thức trên gọi là công thức Maclaurin của hàm số $f(x)$.

Ví dụ: Biểu diễn hàm số $f(x)=2x^3-3x^2+5x+1$

dưới dạng tổng các lũy thừa của $x+1.$

Giải:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k+\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x+1)^4$$

(*c* nằm giữa x và -1)

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k$$

$$f(x)=-9+17(x+1)-9(x+1)^2+2(x+1)^3.$$

B. Công thức Taylor với phần dư Peano

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp *n* liên tục trên (a,b), $x_0 \in (a,b)$.

Khi đó, với mỗi $x \in (a,b)$, ta có:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

* Khi $x_0 = 0$, ta có công thức khai triển Maclaurin của hàm số $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Chứng minh: (Công thức Taylor với phần dư Peano)

Áp dụng công thức Taylor với phần dư Lagrange:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

trong đó c là điểm nằm giữa x_0 và x.

Đặt $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Có $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$

$$\Rightarrow \alpha(x).(x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$$

…

C. Công thức Maclaurin với phần dư Peano của các hàm số thường dùng

1) $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4) $$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in X$$

X phụ thuộc α.

5) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad (x > -1).$$

*Từ công thức

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in X$$

*Với $\alpha = -1,$ ta có

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

Từ đó $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$$

* Với $\alpha = \frac{1}{2}$ ta có $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

* Với $\alpha = -\frac{1}{2}$ ta có $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$

Ví dụ:

Viết công thức Taylor của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

trong lân cận của điểm $x = -2$ đến số hạng

$o\left((x+2)^5\right).$

Giải:

Áp dụng công thức khai triển Maclaurin

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)$$

Có

$$\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{1-(x+2)}=-\sum_{k=0}^{5}(x+2)^k+o((x+2)^5)$$

Ví dụ : Hãy phân tích $e^{\sin x}$ đến x^3

Giải:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(\sin^3 x)$$

Có $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

Do đó $e^{\sin x} = 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^3)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3)$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

§5. ỨNG DỤNG CÁC ĐỊNH LÍ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Ví dụ : Tính $A = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$.

Giải:

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}{x+o\left(x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x+o\left(x\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}}{x} = 0.$$

Ví dụ : Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}$

Giải:

Áp dụng công thức khai triển Maclaurin của các hàm số $\sin x,\ \cos x$ ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{\frac{x^3}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Ví dụ:

Tính $A = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}.$

Giải:

$$\sqrt{1-e^{-x}} = \sqrt{1-\left(1-x+o(x)\right)} = \sqrt{x+o(x)} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

$$\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} = \sqrt{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \frac{x}{\sqrt{2}} + o(x)$$

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{x+o(x)} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

Vậy $A = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}+o(\sqrt{x}) - \dfrac{x}{\sqrt{2}} - o(x)}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1.$

2. Qui tắc Lôpitan (L'Hospital)

Định lí: (khử dạng $\frac{0}{0}$)

Giả sử các hàm số $f(x), g(x)$ xác định, khả vi trong lân cận của điểm x_0 (có thể trừ tại x_0)

$g'(x) \neq 0$ với mọi x thuộc lân cận trên.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Khi đó $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$

Chứng minh:

Đặt $f(x_0) = 0, g(x_0) = 0.$

Với mọi x trong lân cận nói trên của x_0,

(giả sử $x_0 < x$, trường hợp $x_0 > x$ thì tương tự).

f, g liên tục trên $\left[x_0, x\right]$, khả vi trên (x_0, x).

$\Rightarrow \exists c_x \in (x_0, x)$ sao cho $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ hay $\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Khi $x \to x_0$ thì $c_x \to x_0 \Rightarrow \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \to l.$ Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l.$

Định lí: (Khử dạng $\frac{\infty}{\infty}$)

Giả sử

các hàm số $f(x), g(x)$ khả vi trong lân cận của điểm x_0 (có thể trừ tại x_0)

$g'(x) \neq 0$ với mọi x thuộc lân cận trên.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty), \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty\ (-\infty)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Khi đó $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l.$

Nhận xét:

a) Các định lí trên vẫn đúng khi $x_0 = \pm\infty$ hoặc $l = \pm\infty$

b) Các định lí trên vẫn đúng với các giới hạn một phía**.**

c) Có thể không tồn tại $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ nhưng tồn tại $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Chẳng hạn, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

nhưng $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\cos x)'}{(2x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{2}$ không tồn tại.

* Một số giới hạn dạng vô định

a) Dạng vô định $\frac{0}{0}$

Ví dụ: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2x-\pi}$.

Giải:

* Vì $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{(\cos x)'}{(2x-\pi)'} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{-\sin x}{2} = -\dfrac{1}{2}$

nên theo quy tắc L'Hospital, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2x-\pi} = -\dfrac{1}{2}$.

* Ta có thể viết một cách ngắn gọn như sau:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)'}{(2x-\pi)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

b) Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Ví dụ : Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} \quad (\alpha>0)$

Giải

Áp dụng qui tắc Lôpitan, ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^{\alpha})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0.$$

c) Dạng vô định $0.\infty$

Ví dụ: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$

Giải:

Đưa giới hạn về dạng $\dfrac{0}{0}$ và áp dụng qui tắc Lôpitan, ta có:

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{4}}.\frac{\pi}{4}}=-\frac{16}{\pi}.$$

d) Dạng vô định $\infty - \infty$

Ví dụ: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

Giải:

Đưa giới hạn về dạng $\dfrac{0}{0}$ và áp dụng qui tắc Lôpitan:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}.$$

e) Dạng vô định 1^{∞}

Ví dụ: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

Giải:

$$A=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}\cdot\frac{\sin x-x}{x(1-\cos x)}}$$

Có $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}=e$

Áp dụng qui tắc Lôpitan với dạng $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{1-\cos x+x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x+x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2+\dfrac{x}{\sin x}\cos x}=-\frac{1}{3}.$$ Vậy $A=e^{-\frac{1}{3}}$.

f) Dạng vô định 0^0

Ví dụ: Tìm giới hạn $B = \lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{1+\ln x}}$

Giải:

$$B = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{1+\ln x}\ln x}$$

Áp dụng qui tắc Lôpitan với dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Có $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1+\ln x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow B = e^1 = e.$

g) Dạng vô định ∞^0

Ví dụ: Tìm giới hạn $C = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$

Giải:

$$C = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{tg}x \ln\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Đưa giới hạn về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$ và áp dụng qui tắc Lôpitan, ta có:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg}x.\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot gx} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x.\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Vậy $C = e^0 = 1.$

Ví dụ: Tìm giới hạn của dãy số có số hạng tổng quát sau:

$$u_n = (n^2 - n)^{\frac{1}{n}}$$

Giải:

Xét giới hạn hàm số: $A = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - x\right)^{\frac{1}{x}}$ (Dạng ∞^0)

$$A = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln\left(x^2 - x\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x-1}{x^2 - x}}{1} = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1$$

Vậy $\lim\limits_{n \to \infty} \left(n^2 - n\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$

§6. KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Sự biến thiên của hàm số
2. Cực trị của hàm số
3. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số
4. Hàm lồi
5. Tiệm cận
6. Khảo sát hàm số

§6. KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Sự biến thiên của hàm số

Định lí: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

* f liên tục trên đoạn $[a, b]$
* f khả vi trên khoảng (a,b)
* $f'(x)=0$ với mọi $x\in(a,b)$.

Khi đó $f(x)$ không đổi trên $[a, b]$.

1. Sự biến thiên của hàm số

Định lí: Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b).

Điều kiện cần và đủ để f tăng trên $[a, b]$ là $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

Điều kiện cần và đủ để f giảm trên $[a, b]$ là $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$

1. Sự biến thiên của hàm số

Định lí:

Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b).

* Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a,b)$ thì f tăng ngặt trên $\left[a,b\right]$.

* Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a,b)$ thì f giảm ngặt trên $\left[a,b\right]$.

1. Sự biến thiên của hàm số

Định lí: Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b).

Điều kiện cần và đủ để f tăng ngặt trên $[a, b]$ là:

* $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

* Tập $\{x \in (a,b) / f'(x) = 0\}$ không chứa bất kỳ khoảng mở nào.

• *Định lí được phát biểu tương tự trong trường hợp f giảm ngặt trên [a, b].*

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = \sin x - x$

$$f'(x) = \cos x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi$$

Tập $\left\{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ là tập hợp rời rạc. Vậy f giảm ngặt trên $\mathbb{R}$.

2. Cực trị của hàm số

Định lí: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0, khả vi trong một lân cận của x_0 (có thể không khả vi tại x_0). Khi đó:

* Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi x qua điểm x_0 thì f đạt cực đại tại x_0.

* Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi x qua điểm x_0 thì f đạt cực tiểu tại x_0.

Định lí: Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp *n* liên tục trong một lân của điểm x_0 và

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Khi đó:

1. Nếu *n* chẵn thì $f(x)$ đạt cực trị tại x_0

Đó là cực tiểu nếu $f^{(n)}(x_0) > 0$

Đó là cực đại nếu $f^{(n)}(x_0) < 0$

2. Nếu *n* lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0

Ví dụ: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3.$

Giải:

a) Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

$f''(x) = 6x - 6$

Vì $f''(0) = -6 < 0$ nên f đạt cực đại tại $x = 0, f(0) = 2$

Vì $f''(2) = 6 > 0$ nên f đạt cực tiểu tại $x = 2, f(2) = -2$

b) $f'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Hàm số f có một điểm tới hạn là $x = 0$

$f''(x) = 6x,\ f'''(x) = 6$

$f''(0) = 0,\ f'''(0) \neq 0 \Rightarrow f$ không đạt cực trị tại $x = 0$

Vậy hàm số không có cực trị.

Ví dụ: Tìm các khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$$

Giải:

Hàm số xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$ và khả vi trên $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right) = \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số giảm trên các khoảng $(-\infty, 0]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ và tăng trên các khoảng $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $[1, +\infty)$.

Hàm số đạt giá trị cực tiểu là 1 tại $x = 0, x = 1$

Hàm số đạt giá trị cực đại là $\sqrt[3]{2}$ tại $x = \frac{1}{2}$

3. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) GTLN,GTNN của hàm liên tục trên một đoạn

* Cho hàm số f liên tục trên $[a,b]$. Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của f trên $[a,b]$, ta làm như sau:

  * Tính $f(a), f(b)$
  * Tìm giá trị của f tại các điểm hàm số không khả vi
  * Tìm giá trị của f tại các điểm đạo hàm bằng 0
  * So sánh các giá trị tìm được ở trên.

Số lớn nhất trong các số trên là giá trị lớn nhất, số nhỏ nhất trong các số trên là giá trị nhỏ nhất.

3. GTLN, GTNN của hàm số

Ví dụ: Tìm GTNN, GTLN của hàm số $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$, $0\le x\le 3$

Giải:

* $f(0)=0, f(3)=\sqrt[3]{9}$

$$f'(x)=\frac{4}{3}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x(x-2)}} \qquad (x\neq 0, x\neq 2)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

* $f(1)=1$

* $f(0)=0,\ f(2)=0$

So sánh các giá trị 0, $\sqrt[3]{9}$,1, ta thấy:

f đạt giá trị lớn nhất là $\sqrt[3]{9}$ tại $x=3$

f đạt giá trị nhỏ nhất là 0 tại các điểm $x=0, x=2.$

b) GTLN,GTNN của hàm liên tục trên khoảng mở, khoảng vô hạn

Làm tương tự phần a. Tuy nhiên, thay vì tính $f(a), f(b),$ ta tìm giới hạn của hàm số khi $x \to a^+, x \to b^-, x \to +\infty, \ldots,$ tùy theo từng trường hợp.

Ví dụ: Tìm GTNN, GTLN của hàm số $f(x) = x^x, \quad \frac{1}{10} \le x < +\infty$

3. GTLN, GTNN của hàm số

Giải:

$$* \ f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10^{\frac{1}{10}}}, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^x = +\infty$$

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1), \ \forall x > 0; \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$* \ f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$$

* $f'(x)$ xác định tại mọi $x \in \left(\frac{1}{10}, +\infty\right)$

$$* \min\left\{\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}, \frac{1}{10^{\frac{1}{10}}}\right\} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$$ (bằng cách xét dấu đạo hàm)

Vậy f đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$ tại $x = \frac{1}{e}$. Hàm số không có GTLN.

4. Hàm lồi

a. Định nghĩa hàm lồi, hàm lõm và điểm uốn

- Hàm số f được gọi là lồi trên khoảng X nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

- Hàm số f được gọi là lõm trên X nếu $-f$ lồi trên X, nghĩa là

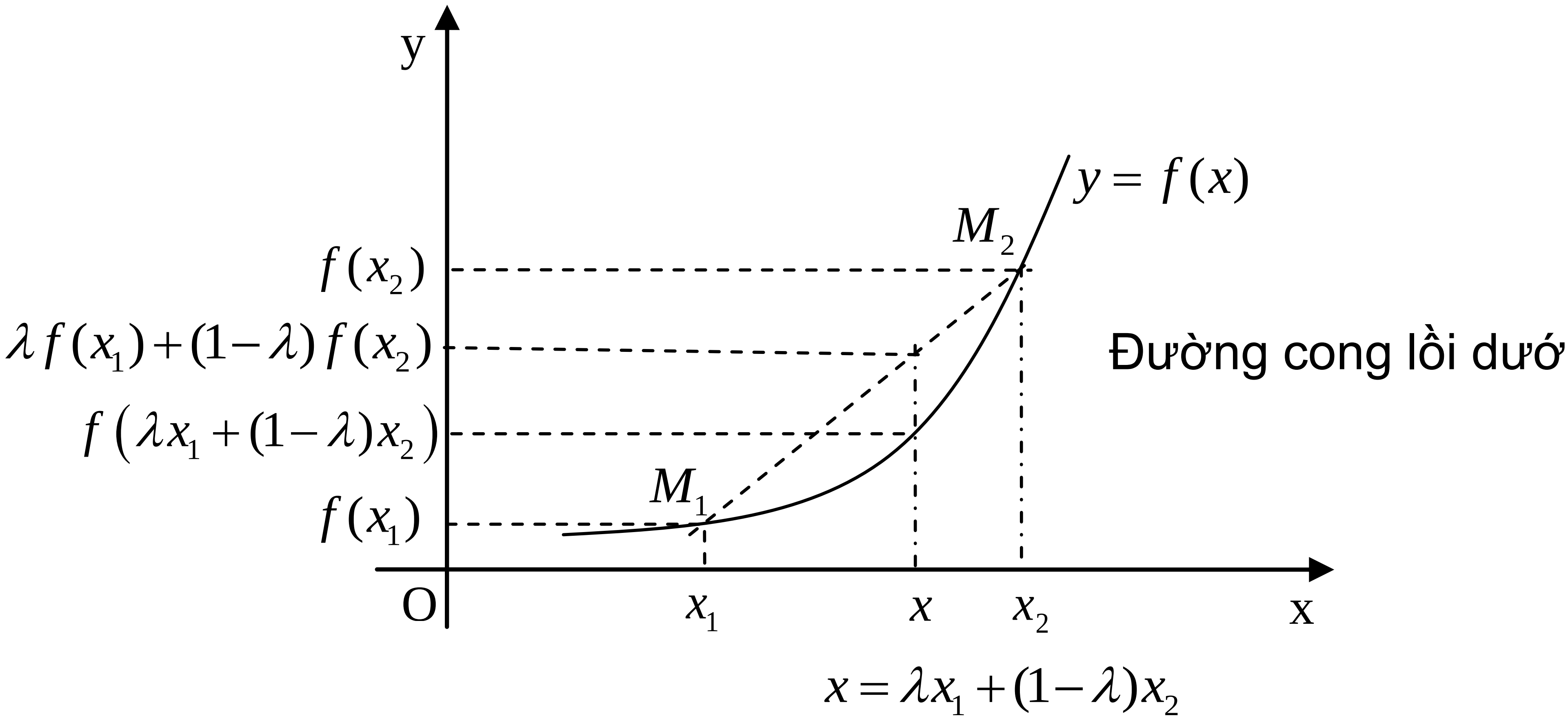
$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Nhận xét:

Hàm số f lồi trên X nếu với $\forall x_1, x_2 \in X\ (x_1 < x_2)$ cung M_1M_2 của đồ thị hàm số f nằm về phía dưới đoạn thẳng M_1M_2.

4. Hàm lồi

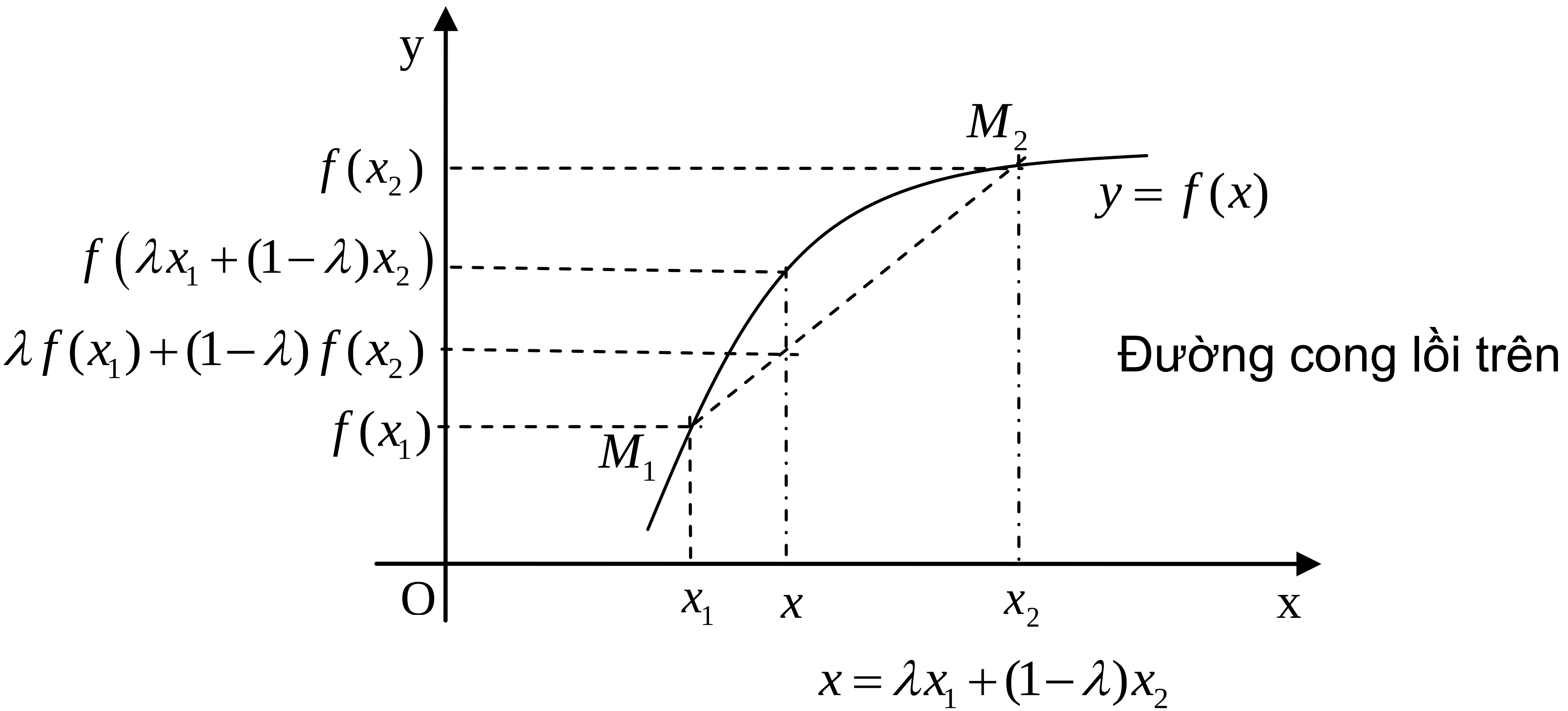
* Đồ thị của hàm số lồi quay bề lồi xuống dưới (Đường cong lồi dưới).



H.2.6

4. Hàm lồi

Đồ thị của hàm số lõm quay bề lõm xuống dưới (Đường cong lồi trên)



H.2.7

4. Hàm lồi

Định nghĩa: Giả sử đồ thị hàm số f có tiếp tuyến tại điểm $U(x_0, f(x_0))$

Điểm $U(x_0, f(x_0))$ được gọi là điểm uốn của đồ thị hàm số f nếu U là điểm phân chia giữa cung lồi trên và cung lồi dưới của đồ đồ thị hàm số f.

b. Điều kiện hàm lồi

Định lí: Giả sử hàm số f khả vi trên khoảng $X.$ Điều kiện cần và đủ để f lồi (lõm) trên X là $f'(x)$ tăng (giảm) trên $X.$

Hệ quả: Giả sử hàm số f khả vi đến cấp hai trên khoảng $X.$

Điều kiện cần và đủ để f lồi (lõm) trên X là:

$$f''(x) \geq 0 \;\; (f''(x) \leq 0), \;\; \forall x \in X$$

4. Hàm lồi

Hệ quả: Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp hai trên khoảng X và $a \in X$

Điều kiện cần và đủ để điểm $U(a, f(a))$ là điểm uốn của đồ thị hàm số f là $f''(a) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x đi qua a.

Chú ý:

Có thể không tồn tại đạo hàm cấp hai của f tại a nhưng điểm $U(a, f(a))$ là điểm uốn của đồ thị hàm số f.

Ví dụ:

Xét tính lồi, lõm và tìm điểm uốn của đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}\ln\frac{a}{x}, \quad a > 0$

Giải:

$$y' = -\frac{a}{x^2}\left(1 + \ln\frac{a}{x}\right), \qquad y'' = \frac{a}{x^3}\left(3 + 2\ln\frac{a}{x}\right) \qquad (x > 0)$$

$y'' = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\ln\frac{a}{x} = 0$ hay $x = ae^{\frac{3}{2}}$

$y'' < 0$ khi $x > a.e^{\frac{3}{2}}$ và $y'' > 0$ khi $x < ae^{\frac{3}{2}}$

Vậy hàm số lồi trong khoảng $\left(0, ae^{\frac{3}{2}}\right)$, lõm trong khoảng $\left(ae^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$

Điểm uốn: $U\left(ae^{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}ae^{-\frac{3}{2}}\right)$

4. Hàm lồi

Ví dụ: Cho $f(x) = x\ln x$ trên $(0,+\infty)$

a) Chứng minh f lồi trên $(0,+\infty)$

b) Chứng minh $\forall x, y, a, b \in (0,+\infty)$ thì

$$x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b} \ge (x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}$$

Giải:

a) $f'(x) = \ln x + 1,\ f''(x) = \dfrac{1}{x} \ge 0$ với $\forall x \in (0,+\infty)$.

Vậy f lồi trên $(0,+\infty)$

b) Ta lấy $x_1 = \dfrac{x}{a}, x_2 = \dfrac{y}{b}$ và $\lambda = \dfrac{a}{a+b}$

5. Tiệm cận

a. Khái niệm chung về tiệm cận

Đường thẳng Δ được gọi là tiệm cận của đường cong C_f nếu khoảng cách từ điểm $M(x, y) \in C_f$ đến Δ dần đến 0 khi M chạy ra vô cực trên C_f (tức là khi ít nhất một trong các tọa độ x, y của M dần tới vô cực).

5. Tiệm cận

b. Phân loại và cách tìm tiệm cận

* Đường thẳng $x = a$ được gọi là **tiệm cận đứng** của đường cong $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ hoặc } \left(\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \right)$$

5. Tiệm cận

* Đường thẳng $y = b$ được gọi là <u>**tiệm cận ngang**</u> của đường cong $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

*Tùy theo $x \to -\infty$ hay $x \to +\infty$ mà ta có tiệm cận ngang bên trái hay bên phải.

5. Tiệm cận

* Đường thẳng $y = ax + b\ (a \neq 0)$ là tiệm cận xiên của đường cong $y = f(x)$ nếu:

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left[f(x) - ax \right] \end{cases}$$

Tùy theo $x \to -\infty$ hay $x \to +\infty$ mà ta có tiệm cận xiên bên trái hay bên phải.

5. Tiệm cận

Nhận xét:

Về phía nào đó (khi $x \to +\infty$ hoặc khi $x \to -\infty$),

nếu đã có tiệm cận ngang thì không có tiệm cận xiên

vì $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

5. Tiệm cận

<u>VD:</u> Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 2^{-x}$.

Giải:

Hàm số xác định với mọi x nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{2^x} = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có TCN (bên phải) là đường $y = 0,$ không có TCX bên phải.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 2^{-x} = +\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có TCX bên trái, không có TCN bên trái.

5. Tiệm cận

<u>VD</u>: Tìm các tiệm cận của đường cong $y = x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$.

Giải:

MXĐ: $\begin{cases} e+\dfrac{1}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{ex+1}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{1}{e} \\ x > 0 \end{array}\right.$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\dfrac{1}{x^2}}{\left(e+\dfrac{1}{x}\right).-\dfrac{1}{x^2}} = 0.$$

$\Rightarrow x = 0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

5. Tiệm cận

$$\lim_{x\to -\frac{1}{e}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{e}^-} x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right) = +\infty \Rightarrow$$ đường thẳng

$$x = -\frac{1}{e}$$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

5. Tiệm cận

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cdot\left(e+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{e}.$$

Vậy đồ thị hàm số có TCX (cả hai phía) là $y=x+\frac{1}{e}$.

6. Khảo sát hàm số

(Xem tài liệu)