1. A, B, C, D là tập con của E. Chứng minh rằng:

a) Nếu $A \subset B, C \subset D$ thì $A \cup C \subset B \cup D$ và $A \cap C \subset B \cap D$.

b) Nếu $A \cup C \subset A \cup B,\ A \cap C \subset A \cap B$ thì $C \subset B$.

2. Đặt $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$, $C = \{4,5,6\}$ và $D = \{2,5,8\}$ là các tập con của $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

a) Liệt kê các phần tử của $A \cap \left(B \cup \overline{C}\right)$ và $\left(\overline{D} \cap B\right) \cup C$;

b) Biểu diễn các tập $\{5\}$, $\{4,6,10\}$, $\{2,8\}$ theo A, B, C, D.

3. Trong tập $X = \{2,3,6,9,12,13\}$ xét hai hàm mệnh đề $P(x)$: "$x \le 10$" và $Q(x)$: "x lẻ". Đặt $A = \{x \in X \mid P(x)\}, B = \{x \in X \mid Q(x)\}$. Hãy xác định các tập $A, B, A \cup B$, $A \cap B$ và $\overline{A} \cup \overline{B}$.

4. Chứng minh rằng nếu $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ là hai song ánh thì ánh xạ hợp $g \circ f$ cũng là một song ánh và $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

5. Rút gọn sau đó vẽ sơ đồ mạng của công thức đại số Boole sau:

$$A = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z')$$

6. Rút gọn sau đó vẽ sơ đồ mạng của công thức đại số Boole sau:

$$A = \left\{\left[\left(x' \vee z\right) \wedge \left(x \vee z'\right)\right] \vee y\right\} \wedge \left\{x \vee y \vee z\right\} \wedge \left\{\left[\left(y' \vee z\right) \wedge \left(y \vee z'\right)\right] \vee x\right\}.$$

7. Rút gọn sau đó vẽ sơ đồ mạng của công thức đại số Boole sau:

$$A = \left\{y \vee z'\right\} \wedge \left\{\left[\left(x' \vee z\right) \wedge \left(x \vee z'\right)\right] \vee y\right\} \wedge \left\{x \vee y \vee z\right\} \wedge \left\{\left[\left(y' \vee z\right) \wedge \left(y \vee z'\right)\right] \vee x\right\}$$

8. Tìm hàm Boole $F(x, y, z)$ nhận giá trị 1 khi và chỉ khi

a) $x = 0, y = 1, z = 1$; b) $y = 1, z = 0$; c) $x = 0, y = 1, z = 0$; d) $x = 0$ hoặc $y = 1, z = 1$.

Biểu diễn mạng các chuyển mạch tương ứng với kết quả tìm được.

9. Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có công thức xác định ảnh $f(x) = 5x - 2|x|$ là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Tìm công thức xác định ảnh của ánh xạ ngược nếu tồn tại.

10. Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có công thức xác định ảnh $f(x) = x^3 + 5$ là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Tìm công thức xác định ảnh của ánh xạ ngược nếu tồn tại.

11. Ánh xạ $f : [-1;1] \to [-1;3]$ có công thức xác định ảnh $f(x) = x^2 - 2x$ là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Tìm công thức xác định ảnh của ánh xạ ngược nếu tồn tại.

12. Ký hiệu $h = g \circ f$ là hợp của hai ánh xạ $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$. Chứng minh:

a) f, g đơn ánh thì h đơn ánh.

b) h đơn ánh thì f đơn ánh.

c) h đơn ánh và f toàn ánh thì g đơn ánh.

d) h toàn ánh và g đơn ánh thì f toàn ánh.

13. Cho hai ánh xạ $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$. Chứng minh:

a) Nếu $g \circ f$ đơn ánh và f toàn ánh thì g đơn ánh.

b) Nếu $g \circ f$ toàn ánh và g đơn ánh thì f toàn ánh.

14. Chứng minh rằng nếu f đơn ánh thì

a) $A \subset B \Leftrightarrow f(A) \subset f(B)$.

b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

c) Tìm ví dụ chứng tỏ rằng khi f không đơn ánh thì $f(A) \subset f(B)$ nhưng $A \not\subset B$ và $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$.

15. Cho ánh xạ $f: X \to Y$.

a) Chứng minh: $\forall A, B \subset Y, f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$,

trong đó $A \Delta B = \left(A \setminus B\right) \cup \left(B \setminus A\right)$ hiệu đối xứng của A và B.

b) Chứng minh rằng f đơn ánh khi và chỉ khi $\forall A, B \subset X, f(A \Delta B) = f(A) \Delta f(B)$

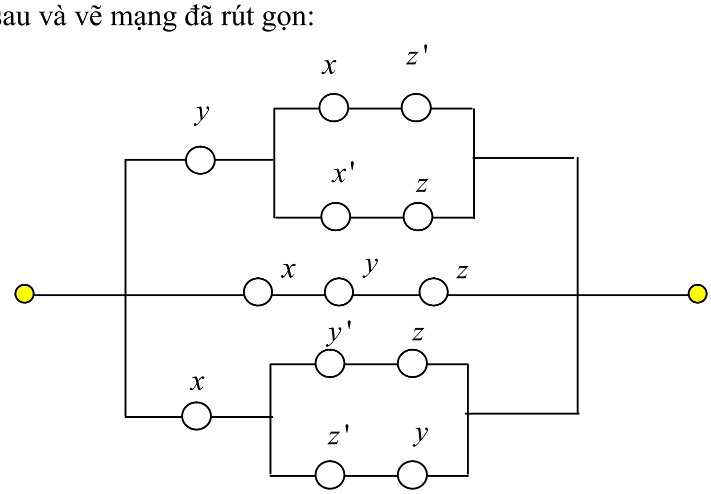
16. Các ánh xạ $f: X \to Y$ sau đây là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Xác định ánh xạ ngược nếu tồn tại.

a) $X = Y = \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 7$.

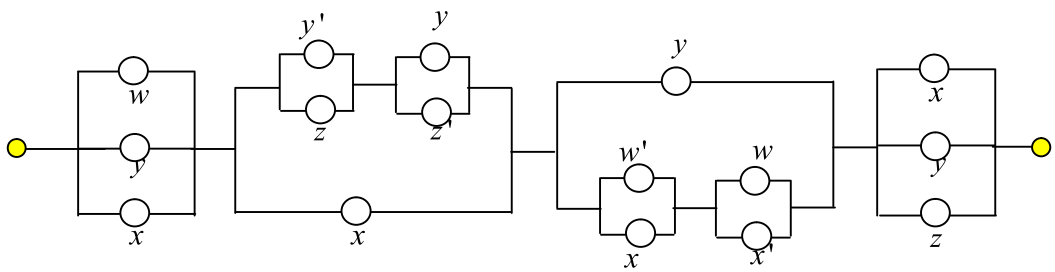
b) $X = Y = \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x$.

c) $X = \left[1; 3\right],\ Y = \left[-1; 3\right],\ f(x) = x^2 - 2x$.

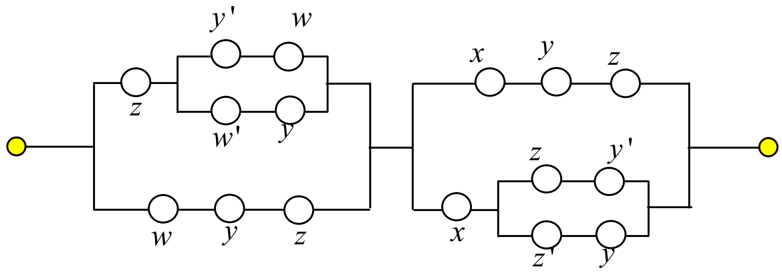
17. Rút gọn mạng sau và vẽ mạng đã rút gọn:



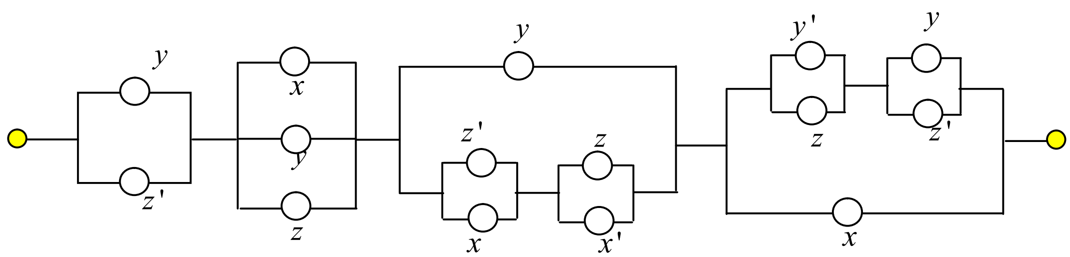
18. Rút gọn mạng sau và vẽ mạng đã rút gọn:



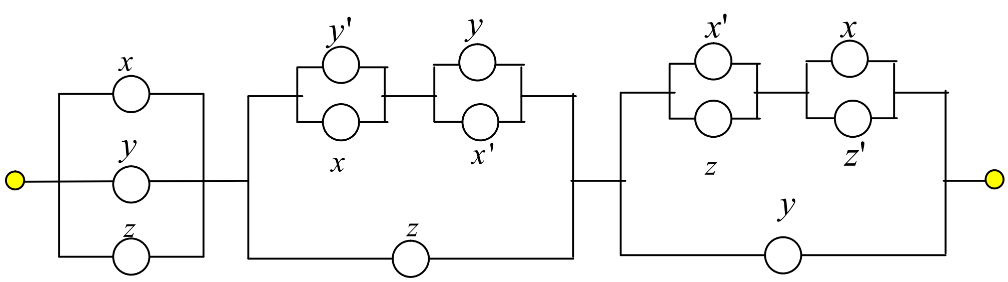
19. Rút gọn mạng sau và vẽ mạng đã rút gọn:



20. Rút gọn mạng sau và vẽ mạng đã rút gọn:



21. Rút gọn mạng sau và vẽ mạng đã rút gọn:



22. Tìm điều kiện của a, b, c để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b. \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

23. Biểu diễn ma trận $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ theo tổ hợp tuyến tính của các ma trận:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

24. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa mãn $XA = B$.

25. Giả sử U, V và W là ba không gian véc tơ con của một không gian véc tơ. Chứng minh rằng $(U \cap V) + (U \cap W) \subset U \cap (V + W)$.

26. Tìm tất cả các giá trị của m để véc tơ $u = (4, 16, 25)$ biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ: $v_1 = (3, 2, 5)$, $v_2 = (2, 4, 7)$, $v_3 = (5, 6, m)$.

27. Trong không gian véc tơ $\mathbf{P}_2$ (không gian véc tơ các đa thức bậc ≤ 2) cho họ véc tơ $\mathscr{B} = \left\{p_1, p_2, p_3\right\}$ với $p_1 = 1 - x - 3x^2$; $p_2 = 3 + 2x + 5x^2$; $p_3 = 2 + x + 4x^2$. Chứng minh rằng $\mathscr{B}$ là một cơ sở của $\mathbf{P}_2$. Tìm tọa độ của véc tơ $p = 5 + 9x + 5x^2$ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

28. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho họ véc tơ $\mathscr{S} = \left\{u_1, u_2, u_3\right\}$ với

$$u_1 = (2, -2, 1);\ u_2 = (1, 3, -2);\ u_3 = (1, -13, 8)$$

a) Hãy biểu diễn véc tơ $v = (-4, -4, 3)$ thành tổ hợp tuyến tính của họ $\mathscr{S}$.

b) Hãy xác định số chiều và một cơ sở của không gian véc tơ con sinh bởi họ $\mathscr{S}$.

29. Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 5x_1 + mx_2 + 4x_3 + 5x_4 = 13 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \end{cases}.$$

30. Xác định các giá trị của tham số m sao cho các hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + my - z = -2 \\ x + 2y + mz = 1 \end{cases}$$

i) Có duy nhất nghiệm. ii) Vô nghiệm. iii) Có nhiều hơn 1 nghiệm.

31. Ký hiệu $\mathscr{M}_n$ là không gian véc tơ các ma trận vuông cấp *n*. Với mỗi $A \in \mathscr{M}_n$, $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ ta ký hiệu và định nghĩa vết của A là $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a) Chứng minh rằng tập các ma trận vuông cấp *n* có vết bằng 0, ký hiệu $\mathscr{M}_n^0$, là không gian véc tơ con của $\mathscr{M}_n$.

b) Tìm chiều của $\mathscr{M}_n^0$.

32. Cho $W_1 = \left\{(x,y,0) \middle| \; x,y \in \mathbb{R}\right\}$, W_2 là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi hai véc tơ $(1,2,3)$ và $(1,-1,1)$.

a) Tìm điều kiện x,y,z để $u = (x,y,z) \in W_2$.

b) Tìm $W_1 + W_2$.

c) Tìm $W_1 \cap W_2$.

33. Trong không gian véc tơ $\mathbf{P}_2$ các đa thức bậc $\leq$ 2, xét các véc tơ: $u_1 = 1 + x - x^2$, $u_2 = 2 + 3x - x^2$ và $v_1 = 8 + 11x - 5x^2$, $v_2 = 5 + 7x - 3x^2$. Đặt U, V là hai không gian véc tơ con của $\mathbf{P}_2$ lần lượt sinh bởi hệ véc tơ $\{u_1, u_2\}$ và $\{v_1, v_2\}$.

a) Chứng minh $\{u_1, u_2\} \subset V$, $\{v_1, v_2\} \subset U$.

b) Từ đó suy ra $U = V$.

34. Cho hai véc tơ $u_1 = (3,1,-4)$, $u_2 = (2,5,-1)$ của $\mathbb{R}^3$.

a) Viết $v = (-1,17,8)$ thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

b) Tìm các giá trị của k để $(4,-3,k)$ viết được thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

c) Tìm điều kiện x,y,z để (x,y,z) viết được thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

35. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ xét các không gian véc tơ con:

$$U = \{(x,y,z): \; x + y + z = 0\}, V = \{(x,y,z): \; x = z\}, \; W = \{(0,0,z): \; z \in \mathbb{R}\}.$$

Chứng minh rằng: (i) $\mathbb{R}^3 = U + V$, (ii) $\mathbb{R}^3 = U + W$, (iii) $\mathbb{R}^3 = V + W$.
Trường hợp nào ở trên là tổng trực tiếp.

36. Đặt V_1, V_2 lần lượt là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$ gồm các véc tơ $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ thoả mãn hệ phương trình (I) và hệ phương trình (II):

$$(I) \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}, \quad (II) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - \; x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Hãy tìm chiều của các không gian con V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$.

37. Trong $\mathbb{R}^4$ xét hai hệ véc tơ: $v_1 = (2,1,2,1)$; $v_2 = (3,4,2,3)$; $v_3 = (2,3,1,2)$;

$$u_1 = (-1,-1,1,3) \; ; \; u_2 = (1,1,0,-1); \; u_3 = (1,1,1,1).$$

Đặt $V_1 = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$, $V_2 = \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$. Hãy tìm một cơ sở và suy ra chiều của các không gian con V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$.

38. Đặt $W_1 = \text{span}\left\{v_1, v_2, v_3\right\}$; $W_2 = \left\{(x,0,z,0)\middle| x,z \in \mathbb{R}\right\}$;

Với $v_1 = (-1,\ 2,\ 0\ ,-2)$; $v_2 = (1,-1,0,\ 1)$; $v_3 = (-2\ ,1,\ 1\ ,-1)$.

a) Chứng minh rằng $W_2 \subset W_1$.

b) Chỉ ra véc tơ thuộc W_1, W_2 trong những véc tơ sau:

$$u_1 = (1,3,-2,-3);\ u_2 = (0,1,-1,-2);\ u_3 = (4,0,2,0).$$

39. Cho hệ véc tơ $(S): \left\{v_1 = (1,m,m);\ v_2 = (m,1,m);\ v_3 = (m,m,1)\right\}$.

a) Với giá trị nào của tham số m thì hệ véc tơ (S) là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$?

b) Với $m = 3$, chứng tỏ rằng (S) là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$, tìm ma trận chuyển từ cơ sở (S) sang cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Tìm tọa độ của véc tơ $u = (0,0,14)$ trong cơ sở (S).

40. Trong $\mathbb{R}^3$ cho 2 cơ sở

$$\mathscr{A} = \left\{a_1 = (1,1,0); a_2 = (1,-1,0); a_3 = (0,0,1)\right\},$$
$$\mathscr{B} = \left\{b_1 = (1,1,1); b_2 = (0,2,3); b_3 = (0,2,-1)\right\}.$$

a) Tìm tọa độ của véc tơ $v = (3,5,-2)$ trong cơ sở $\mathscr{A}$ và trong cơ sở $\mathscr{B}$.

b) Tìm ma trận P chuyển từ $\mathscr{A}$ sang $\mathscr{B}$.

c) Nghiệm lại công thức $[v]_{\mathscr{A}} = P[v]_{\mathscr{B}}$.

41. Tính định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{bmatrix}$.

42. Tìm các giá trị t thỏa mãn $\begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} = 0$.

43. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Hãy tính AC, BC và $(xA + yB)C$.

44. Ký hiệu $\mathscr{M}_2$ là không gian véc tơ các ma trận vuông cấp 2. Tìm ví dụ chứng tỏ rằng các tập con sau không phải là không gian véc tơ con của $\mathscr{M}_2$.

a) Tập hợp W_1 gồm các ma trận cấp 2 có định thức bằng 0.

b) Tập hợp W_2 gồm các ma trận cấp 2 thỏa mãn $A^2 = A$.

45. Biện luận theo tham số *m* hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 4 & m & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

46. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & k \end{bmatrix}$. Tìm k để A là nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

47. Hai ma trận A, B được gọi là giao hoán nếu $AB = BA$. Tìm các ma trận giao hoán với ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

48. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$ và đa thức $f(x)$. Tính $A + B$, AB, $f(A)$.

49. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m^2 & m \\ 1 & 2 & m & 1 & m^2 \\ 0 & 0 & m^2 & m & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tính $\det(A)$.

50. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5-m \\ m+1 & 1 & 3 \\ 3 & m-1 & 3 \end{bmatrix}$; $m \in \mathbb{R}$.

a) Với giá trị nào của m thì tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}.

b) Cho $m = -1$ tìm A^{-1}.

51. Ký hiệu $\mathscr{M}_n$ là không gian véc tơ các ma trận vuông cấp *n*.

a) Cho $A \in \mathscr{M}_n$, chứng minh rằng tập $\mathscr{N}_n$ các ma trận $B \in \mathscr{M}_n$ giao hoán với ma trận A (thỏa mãn $AB = BA$) là không gian véc tơ con của $\mathscr{M}_n$.

b) Tìm một cơ sở của $\mathscr{N}_n$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

52. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ vuông cấp *n*. Ta gọi $\mathrm{Tr}A = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ (tổng các phần tử trên đường chéo chính) là vết của A. Chứng minh:

a) $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B$;

b) $\mathrm{Tr}AB = \mathrm{Tr}BA$ (kể cả trường hợp $AB \neq BA$);

c) Nếu $B = P^{-1}AP$ thì $\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}B$;

d) Tính vết của ma trận đơn vị cấp *n*.

53. Tìm ma trận X vuông cấp 2 thỏa mãn phương trình $X^2 - 2X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.

54. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Tính $P^{-1}AP$.

b) Tính $\det\left(A^4 - 16A^2 + 6I\right)$.

a) Tính $\mathrm{Tr}A$ (vết của A) và tính $\det(A)$.

55. Gọi $F, G : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_3$ là hai tự đồng cấu tuyến tính của không gian véc tơ các đa thức bậc ≤ 3 xác định bởi công thức: $F(p(t)) = p(t+1)$ và $G(p(t)) = p(t-1)$, $\forall p \in \mathbf{P}_3$.

a) Chứng minh rằng F, G là hai tự đồng cấu tuyến tính ngược của nhau, tức là $F \circ G = G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathbf{P}_3}$.

b) Viết ma trận A của F và B của G trong cơ sở chính tắc. Từ đó suy ra $B = A^{-1}$.

56.

a) Chứng minh định thức Vandermonde

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{k=i+1}^{n}(x_k - x_i)\right).$$

b) Áp dụng định thức Vandermonde hãy tính $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & x & 4 \\ 1 & 4 & x^2 & 16 \\ -1 & 8 & x^3 & 64 \end{vmatrix}$.

57. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{bmatrix}$, tìm một ma trận trực giao P sao cho $P^t AP$ là ma trận chéo.

58. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ và $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh

$$f(x,y) = (x - 2y, x, -3x + 4y),\ g(x,y,z) = (x - 2y - 5z, 3x + 4y).$$

Viết ma trận của $g \circ (2f)$ và $f \circ g$ trong cơ sở chính tắc.

59. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ của không gian véc tơ các đa thức bậc ≤ 2 có công thức xác định ảnh

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 2a_1 + a_2) + (2a_0 - a_1 + a_2)x + (3a_0 + 4a_1 + a_2)x^2 .$$

Viết ma trận A của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở chính tắc. Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}. Từ đó xác định $f^{-1}(b_0 + b_1x + b_2x^2)$.

60. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ xác định bởi:

$$f(x,y,z,t) = (x + 4y + 2z + 3t, -4x + 2y - 3z, 6x + 6y + 7z + 6t, 2x + 8y + 4z + 6t)$$

a) Viết ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ và $\operatorname{Im} f$.

61. Cho f là ánh xạ từ không gian véc tơ các ma trận vuông cấp 2 vào chính nó xác định bởi công thức: $f(A) = AM - MA$, trong đó $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Chứng minh f là một ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$.

c) Tìm hạng của f.

62. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ xác định bởi:

$$f(x,y,z,t) = (x + y + z + mt, x + y + mz + t, x + my + z + t, mx + y + z + t).$$

Viết ma trận của f trong cơ sở chính tắc. Tìm các giá trị m để:

a) f là một đẳng cấu;

b) $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

63. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ xét hệ véc tơ $\mathscr{S}$:

$$u_1 = (1,1,-1),\ u_2 = (1,2,3),\ u_3 = (5,-4,1)$$

a) Chứng tỏ rằng $\mathscr{S}$ là một hệ trực giao và là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của véc tơ $v = (x,y,z)$ trong cơ sở $\mathscr{S}$.

64. Cho u_1, u_2 là hai véc tơ trực giao độc lập tuyến tính của không gian véc tơ Euclide $\left(V;\left\langle , \right\rangle\right)$, đặt $W = \operatorname{span}\left\{u_1, u_2\right\}$. Với mọi $v \in V$, xét $v^* = \dfrac{\left\langle v; u_1 \right\rangle}{\left\langle u_1; u_1 \right\rangle} u_1 + \dfrac{\left\langle v; u_2 \right\rangle}{\left\langle u_2; u_2 \right\rangle} u_2 \in W$.

a) Chứng minh rằng $\left\langle v - v^*; u_1 \right\rangle = \left\langle v - v^*; u_2 \right\rangle = 0$. Từ đó suy ra rằng $v - v^*$ trực giao với mọi véc tơ $u \in W$.

b) Tìm v^* ứng với trường hợp $v = (1,3,7,5)$; $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,-3,4,-2)$ của $\mathbb{R}^4$.

65.

a) Cho $\left\{v_1, v_2, \dots, v_n\right\}$ là một hệ véc tơ trực giao. Chứng minh rằng

$$\left\|v_1 + v_2 + \dots + v_n\right\|^2 = \left\|v_1\right\|^2 + \left\|v_2\right\|^2 + \dots + \left\|v_n\right\|^2.$$

b) Nghiệm lại công thức trên với $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (-3,-3,0,6)$, $v_3 = (1,3,-6,2)$.

66. Trong không gian véc tơ Euclide $\left(V;\left\langle , \right\rangle\right)$.

a) Chứng minh bất đẳng thức hình bình hành $\left\|u+v\right\|^2 + \left\|u-v\right\|^2 = 2\left\|u\right\|^2 + 2\left\|v\right\|^2$.

b) Chứng minh công thức: $\left\langle u, v\right\rangle = \frac{1}{4}\left\|u+v\right\|^2 - \frac{1}{4}\left\|u-v\right\|^2$.

67. Trong $\mathbb{R}^4$ xét họ 3 véc tơ độc lập tuyến tính $S = \left\{u_1, u_2, u_3\right\}$:

$$u_1 = (1,1,1,1);\, u_2 = (1,1,2,4);\, u_3 = (1,2,-4,-3).$$

Hãy trực chuẩn hóa Gram-Schmidt họ véc tơ S.

68. Trong không gian véc tơ $\mathbf{P}_2$ các đa thức bậc ≤ 2, xét tích vô hướng

$$\left\langle f, g\right\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

a) Chứng minh rằng tập W các đa thức trực giao với $h(t) = 2t+1$ là một không gian véc tơ con của $\mathbf{P}_2$.

b) Tìm một cơ sở của không gian véc tơ con W.

69.

a) Tìm các giá trị k để dạng song tuyến tính sau là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$:

$$\eta\left(u, v\right) = x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + ky_1y_2 \quad \text{với } u = (x_1, y_1),\ v = (x_2, y_2).$$

b) Khi $k = 3$, viết ma trận A của η trong cơ sở chính tắc và ma trận B của η trong cơ sở $\left\{u_1 = (1,5),\ u_2 = (3,4)\right\}$. Nghiệm lại công thức $B = P^tAP$, trong đó P là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở mới.

70. Gọi W là tập các véc tơ của $\mathbb{R}^4$ trực giao với hai véc tơ $u = (1,-2,3,4)$ và $v = (3,-5,7,8)$.

a) Chứng minh rằng W là một không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm một cơ sở của W.

71. Cho véc tơ $u = (1,2,3,1) \in \mathbb{R}^4$. Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$ trực giao với u.

72.

a) Cho $\{w_1, \dots, w_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ Euclide $(V; \langle , \rangle)$. Chứng minh rằng với mọi $v \in V$: $\sum_{k=1}^{n} \langle v, w_k \rangle^2 = \|v\|^2$.

b) Cho $\{w_1, \dots, w_n\}$ là một hệ trực chuẩn của không gian véc tơ Euclide $(V; \langle , \rangle)$ và $v \in V$. Tính $\left\langle v - \sum_{k=1}^{n} c_k w_k ; v - \sum_{k=1}^{n} c_k w_k \right\rangle$ theo $\|v\|^2$ và c_k^2, với $c_k = \langle v, w_k \rangle$, $k = 1, \dots, n$. Từ đó suy ra rằng $\sum_{k=1}^{n} \langle v, w_k \rangle^2 \leq \|v\|^2$.

73. Cho dạng toàn phương $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 5z^2 + 4\lambda xy - 2xz + 4yz.$$

a) Viết ma trận của Q trong cơ sở chính tắc.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số λ để Q là dạng toàn phương xác định dương.

74. Cho dạng toàn phương

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 5z^2 + 6xy + 2xz + 2yz.$$

Tìm phép biến đổi tọa độ (tìm cơ sở mới) để đưa dạng toàn phương đã cho về chính tắc

a) bằng phương pháp Lagrange;

b) bằng phương pháp Jacobi.

75. Cho dạng toàn phương $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$Q(x, y, z) = 14x^2 + 17y^2 + 14z^2 - 4xy - 8xz - 4yz.$$

a) Viết ma trận của Q trong cơ sở chính tắc.

b) Tìm một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ để biểu thức toạ độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc.

76. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x).$$

a) Hãy viết ma trận A của ánh xạ f trong cơ sở chính tắc.

b) Viết ma trận P chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$,

$$e'_1 = (1, -1, 2),\ e'_2 = (-1, 1, -1),\ e'_3 = (1, -2, 1).$$

c) Hãy viết ma trận A' của ánh xạ f trong cơ sở $\mathscr{B}'$.

d) Tính $\det(A)$, $\det(A')$.

77. Giả sử $\mathscr{B} = \left\{e_1, e_2, e_3\right\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V. Tự đồng cấu f thỏa mãn $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = ae_1$, $f(e_3) = be_1 + ce_2$.

a) Viết ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}$.

b) Với mọi $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in V$, hãy xác định $f \circ f(v)$.

c) Chứng minh rằng f^3 là ánh xạ không.

78. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (3x + y + z, 2x + 4y + 2z, x + y + 3z)$$

a) Hãy viết ma trận A của ánh xạ f trong cơ sở chính tắc.

b) Tìm ma trận P sao cho $P^{-1}AP$ có dạng chéo.

c) Tính $\det(A^2 - 3A)$.

79. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận P sao cho $P^{-1}AP$ có dạng chéo.

b) Tính $A^3 - 3A^2$.

c) Tìm ma trận B thỏa mãn $B^2 = A$.

80.

a) Cho ma trận A đối xứng cấp 2 có hai giá trị riêng $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ và có véc tơ riêng $u = (1,1)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$. Tìm một véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 4$ (biết rằng hai véc tơ riêng ứng với hai giá trị riêng khác nhau là trực giao nhau).

b) Tìm ma trận A.

c) Tìm ma trận B thỏa mãn $B^2 = A$.