CHƯƠNG 5: LÍ THUYẾT CHUỖI

§1. CHUỖI SỐ

I. Đại cương về chuỗi số

II. Chuỗi số dương

III. Chuỗi đan dấu

IV. Chuỗi có số hạng mang dấu bất kì

§1. CHUỖI SỐ

I. ĐẠI CƯƠNG VỀ CHUỖI SỐ

1. Định nghĩa:

* Cho dãy số thực $\{u_n\}$. Biểu thức $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$

gọi là một chuỗi số thực. Kí hiệu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

$u_1, u_2, ..., u_n, ...$ là các số hạng của chuỗi.

u_n gọi là số hạng tổng quát của chuỗi.

* Tổng của n số hạng đầu tiên

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi.

* Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ thì ta nói chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là S. Khi đó ta viết $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S.$

* Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ hoặc không tồn tại thì ta nói chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

* Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ về S thì đặt

$$R_n = S - S_n$$

R_n gọi là phần dư thứ n của chuỗi.

* Nhận xét :

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ về S $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$

Ví dụ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

là một chuỗi số (gọi là chuỗi số điều hòa)

(Gọi là chuỗi số điều hòa vì mỗi số hạng của chuỗi là trung bình điều hòa của hai số hạng hai bên)

Trung bình điều hòa của x_1, x_2 là $\dfrac{2}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}}$

Ví dụ:

Chuỗi $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots$$

gọi là chuỗi Riemann với tham số α.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của chuỗi số sau:

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k, \quad a \neq 0 \quad \text{(Chuỗi cấp số nhân với công bội } q\text{)}$$

Giải:

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

$$S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1}$$

* Nếu $q = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow$ chuỗi phân kì.

* Nếu $q \neq 1$, $S_n = a\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

* Khi $q=-1,$ không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ nên không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Chuỗi phân kì.

* Nếu $|q|<1,$

Có $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}.$ Chuỗi hội tụ.

* Nếu $|q|>1,$

Có $\lim\limits_{n\to\infty} \left|q^n\right| = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n \notin \mathbb{R}.$ Chuỗi phân kì.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} aq^k$ hội tụ và có tổng là $\dfrac{a}{1-q}$ khi $|q|<1,$

phân kì khi $|q|\geq 1.$

Chẳng hạn,

* Chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}$ hội tụ và có tổng là $S=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

* Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ hội tụ và có tổng là $S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$

* Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ hội tụ và có tổng là $S=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$

* Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ và có tổng là $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$

* Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ phân kì.

* Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n$ phân kì.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của chuỗi số điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Giải: Có $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \forall n$$

$\Rightarrow$ Dãy $\{S_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.

(Vì giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$)

Vậy chuỗi số phân kì.

2. Điều kiện cần của chuỗi số hội tụ.

Định lí:

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

Chứng minh:

Giả sử chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là S.

Ta có $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ và $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0.$ Suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

Chú ý:

Điều kiện $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ chỉ là điều kiện cần của chuỗi số hội tụ, không phải là điều kiện đủ để chuỗi số hội tụ.

Chẳng hạn, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì.

Ví dụ:

Xét sự hội tụ của chuỗi số có số hạng tổng quát sau:

$$u_n = \sqrt{n^2 + n} - n.$$

Giải:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$ Vậy chuỗi đã cho phân kì.

3.Tính chất của chuỗi số hội tụ

*** <u>Tính chất 1:</u> Tính hội tụ hay phân kì của chuỗi không đổi khi thay đổi hữu hạn số hạng đầu tiên của chuỗi.**

<u>CM:</u> Giả sử ta thay đổi k số hạng đầu tiên của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (*)$

và ta có chuỗi $a_1 + a_2 + \ldots\ a_k +\ u_{k+1} + \ldots + u_n + \ldots \qquad (**)$

Gọi S_n, S'_n lần lượt là tổng riêng thứ n của các chuỗi $(*), (**)$.

Ta có: $S_n = S'_n + (u_1 + \ldots + u_k) - (a_1 + \ldots + a_k) = S'_n + a.$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S'_n + a.$$

Vậy các chuỗi $(*)$, $(**)$ cùng tính chất hội tụ hoặc phân kì.

*** Tính chất 2:**

Giả sử các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ và có tổng lần lượt là $A, B.$ Khi đó:

* Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n$ hội tụ và có tổng là λA $(\forall \lambda \in \mathbb{R}).$

Ta viết $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$

* Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ hội tụ và có tổng là $A + B.$

Ta viết $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$

II. CHUỖI SỐ DƯƠNG

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$ trong đó $u_n > 0$ với mọi $n,$

gọi là chuỗi số dương.

1. Điều kiện hội tụ của chuỗi số dương

Định lí:

Chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ $\Leftrightarrow$ dãy tổng riêng $\{S_n\}$ của nó bị chặn trên.

Chứng minh:

Vì $\{S_n\}$ là dãy tăng nên $\{S_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi nó bị chặn trên.

2. Các định lí so sánh

Định lí 1:

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$

$\boldsymbol{u_n \le v_n}$ với $\forall n \ge n_0 \in \mathbb{N}^*$

Khi đó:

* Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

* Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì.

Chứng minh:

Vì tính hội tụ hay phân kì của chuỗi không đổi khi thay đổi hữu hạn số hạng đầu tiên của chuỗi nên ta có thể coi

$u_n \le v_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Gọi S_n, S'_n lần lượt là tổng riêng thứ n của các chuỗi

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Ta có $S_n \le S'_n, \ \forall n$

* Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\{S'_n\}$ bị chặn trên

$\Rightarrow \{S_n\}$ bị chặn trên $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ .

* Nếu …

Định lí 2:

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Giả sử $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k.$

Khi đó:

* Nếu $0 < k < +\infty$ thì hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng tính chất hội tụ hoặc phân kì.

* Nếu $k = 0$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

* Nếu $k = +\infty$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

Chứng minh:

* Nếu $0 < k < +\infty$

Tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $k > \varepsilon$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ nên $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - k \right| < \varepsilon.$

$$\Leftrightarrow k - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < k + \varepsilon \Leftrightarrow v_n(k-\varepsilon) < u_n < v_n(k+\varepsilon)$$

* Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

* Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

* Nếu $k = 0$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} < 1 \ \Rightarrow u_n < v_n$$

Từ đó, nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

* Nếu $k = +\infty$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} > 1 \ \Rightarrow u_n > v_n$$

Từ đó, nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n}.$$

Giải:

Có $\frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n} \le \frac{1}{3^n}, \quad \forall n \ge 1$

mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ hội tụ

(vì là chuỗi cấp số nhân với công bội có gttđ nhỏ hơn 1)

nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n}$ hội tụ.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}.$$

Giải:

Có $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}} : \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ phân kì nên chuỗi đã cho phân kì.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Giải:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad khi\ n \to \infty$$

mà $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì nên chuỗi đã cho phân kì.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \qquad p > 0.$$

Giải:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(\ln n)^p} : \frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(\ln n)^p}$$

Ta thấy, tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $m > p$

$$\Rightarrow \frac{n}{(\ln n)^p} > \frac{n}{(\ln n)^m}$$

Có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{(\ln x)^m} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{m.(\ln x)^{m-1}} = \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{m!} = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\ln n)^m} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\ln n)^p} = +\infty$$

mà chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ phân kì.

3. Các dấu hiệu hội tụ của chuỗi số dương

a. Dấu hiệu Côsi

Định lí: Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Giả sử $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$

Khi đó:

* Nếu $l < 1$ thì chuỗi hội tụ.

* Nếu $l > 1$ thì chuỗi phân kì.

b. Dấu hiệu Đalămbe

Định lí: Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Giả sử $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$

Khi đó:

* Nếu $l < 1$ thì chuỗi hội tụ.

* Nếu $l > 1$ thì chuỗi phân kì.

c. Dấu hiệu tích phân

Định lí:

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục, dương, giảm trên $\left[1,+\infty\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

$$f(n) = u_n \quad \text{với} \quad \forall n \geq 1 (n \in \mathbb{N}^*).$$

Khi đó:

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ và $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cùng tính chất hội tụ hoặc phân kì.

*** <u>Chú ý:</u>**

Từ cách chứng minh định lí trên, ta có kết quả tương tự như sau:

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục, dương, giảm trên $\left[m,+\infty\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

$$f(n)=u_n \quad \text{với} \quad \forall n\geq m \ \ (n\in\mathbb{N}^*)$$

Khi đó:

$\int\limits_m^{+\infty} f(x)dx$ và $\sum\limits_{n=m}^{\infty} u_n$ cùng tính chất hội tụ hoặc phân kì.

d. Một số ví dụ:

<u>Ví dụ 1:</u> Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Giải:

Đặt $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n.(-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ (theo dấu hiệu Côsi)

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ của chuỗi số $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $(x\in\mathbb{R}, x>0)$

Giải:

Chuỗi đã cho hội tụ $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ hội tụ.

Đặt $u_n=\frac{x^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{x^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1}=0<1.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ (Theo dấu hiệu Đalămbe)

<u>Ví dụ 3:</u> Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Giải: (Chuỗi Riemann)

* Với $\alpha \le 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha}} = n^{-\alpha} \ge n^{0} = 1 \quad \text{với } \forall n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \ne 0$$

$\Rightarrow$ chuỗi phân kì.

* Với $\alpha > 0$

Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ liên tục, dương, giảm trên $[1, +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} = 0$$

$$f(n) = \frac{1}{n^{\alpha}}$$

mà $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ hội tụ nếu $\alpha > 1$, phân kì nếu $\alpha \le 1$

nên $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ nếu $\alpha > 1$, phân kì nếu $0 < \alpha \le 1$

Tóm lại:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{hội tụ nếu } \alpha > 1, \quad \text{phân kì nếu } \alpha \le 1$$

Ví dụ: Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Giải:

Có $(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n.\ln(\ln n)} = n^{\ln(\ln n)}$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(\ln n) = +\infty$ nên

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \, sao\, cho : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \ln(\ln n) > 2$$

$$\Rightarrow n^{\ln(\ln n)} > n^2$$

hay $$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

mà $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ (là chuỗi Riemann với $\alpha = 2 > 1$)

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^{1+\alpha} n} \qquad (\alpha > 0)$$

Giải:

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^{1+\alpha} x}$

$f(x)$ liên tục, dương, giảm trên $[2, +\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$f(n)=\frac{1}{n\ln^{1+\alpha}n}$$

Có $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{1+\alpha}x}=-\frac{1}{\alpha}(\ln x)^{-\alpha}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\ln^{\alpha}x}\Big|_{+\infty}^{2}=$

$$=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\ln^{\alpha}2}\in\mathbb{R}$$

Vậy $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{1+\alpha}x}$ hội tụ. Suy ra $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{1+\alpha}n}$ hội tụ.

(Theo dấu hiệu tích phân)

III. CHUỖI ĐAN DẤU

1. Định nghĩa

* Chuỗi số có dạng $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$

hoặc $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots$

trong đó $\{u_n\}$ là dãy số dương

gọi là chuỗi số đan dấu.

* Ta đi xét chuỗi số dạng

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n .$$

* Đối với chuỗi số $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - ...$

thì hoàn toàn tương tự.

2. Điều kiện hội tụ của chuỗi đan dấu

Định lí Leibnitz

Xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

Nếu $\{u_n\}$ là dãy số dương, giảm

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ hội tụ và có tổng là $S \le u_1$.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của chuỗi số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

Giải:

Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu.

Dãy $\left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\}$ là dãy số dương, giảm.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 0$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ. (Theo định lí Leibnitz)

Ví dụ: Xét sự hội tụ của chuỗi số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2+(-1)^n}{n}$$

Giải:

Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}$ hội tụ

(vì là chuỗi đan dấu, hội tụ theo định lí Leibnitz)

Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kì

Vậy chuỗi đã cho phân kì.

IV. CHUỖI CÓ SỐ HẠNG MANG DẤU BẤT KÌ

1. Sự hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ

*** Định lí:**

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Khi đó ta nói $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

*** Định nghĩa:** Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kì

thì ta nói $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bán hội tụ.

*** Chú ý:**

Khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kì thì không suy ra $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kì.

Tuy nhiên, nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kì theo dấu hiệu

Côsi hoặc Đalămbe (nghĩa là $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}>1$ hoặc

$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1)$ thì $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kì.

(vì khi đó $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0)$.

2. Một số tính chất của chuỗi bán hội tụ, hội tụ tuyệt đối

a) Chuỗi số hội tụ có tính chất kết hợp, không có tính chất giao hoán.

b) Chuỗi số hội tụ tuyệt đối có các tính chất kết hợp, giao hoán.

§2. CHUỖI HÀM

I. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

1. Cho dãy hàm số $\{ f_n(x)\}, \quad x \in (a,b)$

Biểu thức $f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ...$

gọi là một chuỗi hàm số xác định trên (a,b)

Kí hiệu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$

2. Điểm $x_0 \in (a,b)$ được gọi là điểm tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ hội tụ.

3. Tập hợp các điểm tụ của chuỗi hàm gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm.

4. Hàm số $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$

gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm.

5. Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ được gọi là hội tụ về hàm $S(x)$ trên X nếu: $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \quad \forall x \in X$.

Kí hiệu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$$

(Ta hiểu là với $\forall x_0 \in X$, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ hội tụ về $S(x_0)$ vì $\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$)

6. Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$ hội tụ trên X thì chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ cũng hội tụ trên X.

Ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ tuyệt đối trên X.

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

Giải:

Với mỗi $x_0 \in \mathbb{R}$,

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$ hội tụ $\Leftrightarrow x_0 > 1$

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là $(1, +\infty)$.

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Giải:

Với mỗi $x_0 \in \mathbb{R}$, xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0{}^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left| x_0^{n+1} \right|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\left| x_0^n \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left| x_0 \right|}{n+1} = 0 < 1$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_0{}^n}{n!} \right|$ hội tụ. Suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0{}^n}{n!}$ hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là tập $\mathbb{R}$.

Ví dụ: Tìm miền hội tụ và tổng của chuỗi hàm

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Giải:

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hội tụ và có tổng

là $\dfrac{1}{1-x}$ khi và chỉ khi $|x| < 1.$

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là $(-1,1).$

Tổng của chuỗi hàm là hàm số $S(x) = \dfrac{1}{1-x}.$

§2. CHUỖI HÀM

Ta có:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in (-1,1).$$

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right)$$

Giải:

Với mọi $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(x)=\frac{x}{1+x^2}-0+\frac{2x}{1+2^2x^2}-\frac{x}{1+x^2}+$$

$$\frac{3x}{1+3^2x^2}-\frac{2x}{1+2^2x^2}+\ldots+\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}$$

$$S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n} + nx^2} = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy chuỗi hàm đã cho hội tụ trên $\mathbb{R}$ và có tổng là hàm số $S(x) = 0, \quad (x \in \mathbb{R})$

Có $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right) = 0$

II. Sự hội tụ đều của chuỗi hàm

1. Định nghĩa:

Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ được gọi là hội tụ đều về hàm $S(x)$ trên X nếu:

Với mỗi $\varepsilon > 0,$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| S_n(x) - S(x) \right| < \varepsilon, \qquad \forall x \in X.$$

§2. CHUỖI HÀM

*** Nhận xét:**

Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều về hàm $S(x)$ trên X

thì nó hội tụ về $S(x)$ trên X.

2. Các tiêu chuẩn về sự hội tụ đều của chuỗi hàm

a. Tiêu chuẩn Côsi

* ĐL: Điều kiện cần và đủ để chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ

đều về hàm $S(x)$ trên X là:

Với mỗi $\varepsilon > 0,$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \left| S_{n+p}(x) - S_n(x) \right| < \varepsilon.$$

$$\forall x \in X.$$

b. Tiêu chuẩn Weierstrass

Định lí:

Giả sử $\left| f_n(x) \right| \le a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in X$

Khi đó:

Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên X.

Ví dụ: Xét chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + 2x^2}$

Có $\left| \frac{\cos nx}{n^2 + 2x^2} \right| \le \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + 2x^2}$

hội tụ tuyệt đối và đều trên $\mathbb{R}$.

3. Các tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều

Định lí 1:

Giả sử chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều về $S(x)$ trên X

và các hàm số $f_n(x)$ liên tục trên X với mọi n.

Khi đó $S(x)$ liên tục trên X.

Định lí 2:

Giả sử chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều về $S(x)$ trên $[a,b]$

và các hàm số $f_n(x)$ liên tục trên $[a,b]$ với mọi n.

Khi đó

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Định lí 3:

Giả sử chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều về $S(x)$ trên X

Các hàm số $f_n(x)$ có đạo hàm liên tục trên X với mọi n.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ hội tụ đều về $R(x)$ trên X

Khi đó $S'(x) = R(x)$ trên X.

nghĩa là $$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

§2. CHUỖI HÀM

* Tổng vô hạn hàm liên tục là hàm liên tục

* Tích phân của một tổng (vô hạn) bằng tổng các tích phân

* Đạo hàm của của một tổng (vô hạn) bằng tổng các đạo hàm

(Nếu các tổng (chuỗi) có mặt đều hội tụ đều)

I. CÁC KHÁI NIỆM CHUNG VỀ CHUỖI LŨY THỪA

1. Định nghĩa chuỗi lũy thừa

Chuỗi hàm có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (1)$

hoặc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad (2)$

gọi là chuỗi lũy thừa.

* **Nhận xét**: Chuỗi dạng (2) có thể đưa về dạng (1) bằng cách đặt $x - a = X$

2. Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

a) Định lí Abel

* Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0$ thì

nó hội tụ tuyệt đối tại $\forall x$ mà $|x| < |x_0|$.

* Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kì tại x_1 thì

nó phân kì tại $\forall x$ mà $|x| > |x_1|$.

§3. CHUỖI LŨY THỪA

Định lí: Đối với chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tồn tại số $R \geq 0$

sao cho chuỗi hội tụ tuyệt đối trên $(-R, R)$, phân kì trên các khoảng $(-\infty, -R), (R, +\infty)$.

Số R gọi là bán kính hội tụ của chuỗi.

Định lí: (Quy tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa)

Gọi R là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Giả sử $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ hoặc $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L.$

Khi đó:

Nếu $0 < L < +\infty$ thì $R = \frac{1}{L}.$

Nếu $L = 0$ thì $R = +\infty.$

Nếu $L = +\infty$ thì $R = 0.$

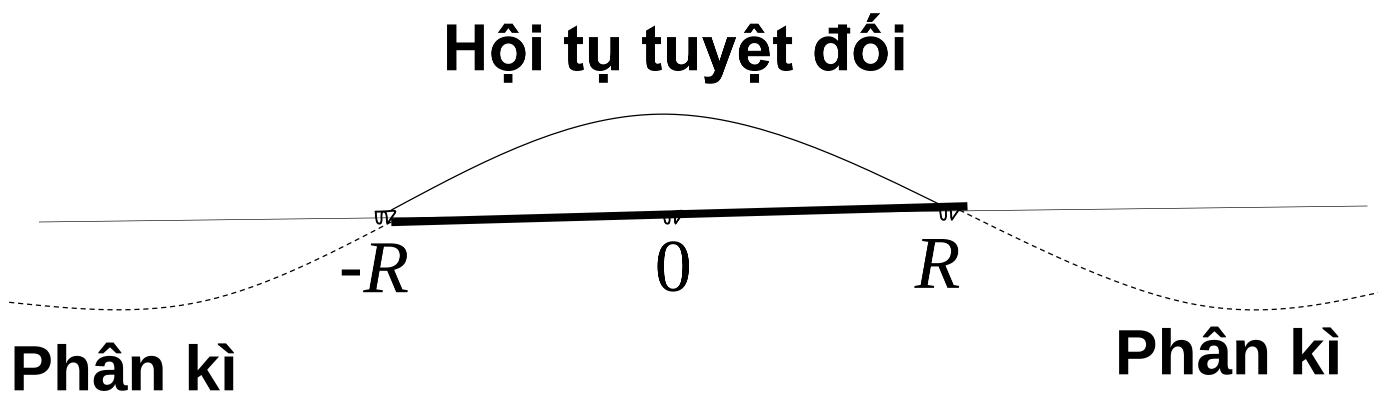
$R = 0$ nghĩa là chuỗi chỉ hội tụ tại $x = 0,$

$R = +\infty$ nghĩa là chuỗi hội tụ trên tập số thực $\mathbb{R}$.

§3. CHUỖI LŨY THỪA

*** Nhận xét:**

Để tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa, trước tiên ta tìm bán kính hội tụ của chuỗi, sau đó xét sự hội tụ của chuỗi tại các điểm $x = \pm R.$



Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Giải: Đặt $a_n = \frac{1}{n}$

Có $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1.$

* Tại $x = 1,$ có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì.

* Tại $x = -1,$ có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ (theo đl Leibnitz)

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là $[-1,1).$

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Giải:

Đặt $a_n = \dfrac{1}{n!}$

Có $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{(n+1)!} : \dfrac{1}{n!} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = +\infty.$

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là tập $\mathbb{R}$.

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

Giải:

Đặt $a_n = n^n$

Có $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 0.$

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là tập $\{0\}$

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:

$$2x^5 + \frac{4}{3}x^{10} + \frac{8}{5}x^{15} + \frac{16}{7}x^{20} + \dots$$

Giải:

Chuỗi có dạng $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n-1} x^{5n}.$

Đặt $x^5 = X,$ ta có chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n-1} X^n \quad (*)$

Đặt $a_n = \dfrac{2^n}{2n-1}.$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{2n+1}:\frac{2^n}{2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2(2n-1)}{2n+1} = 2.$$

$\Rightarrow$Bán kính hội tụ của chuỗi (*) là $R=\dfrac{1}{2}.$

* Tại $X=\dfrac{1}{2},$ có chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}.\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ phân kì.

* Tại $X=-\dfrac{1}{2},$ có chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}.\frac{1}{(-2)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ hội tụ.

$\Rightarrow$ Chuỗi (*) hội tụ khi $-\dfrac{1}{2}\le X<\dfrac{1}{2}.$

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là: $\left[-\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}},\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)$

3.Tính chất của chuỗi lũy thừa

a) Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ đều trên miền hội tụ của nó.

b) Tổng của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ là một hàm số liên tục trên miền hội tụ của nó.

c) Với $\forall a, b$ thuộc miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ta có:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx$$

Đặc biệt, $\forall x \in (0, R)$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

d) Với $\forall x$ thuộc miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ta có:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

§2. CHUỖI HÀM

Trên miền hội tụ của chuỗi lũy thừa, ta có:

* Tích phân của chuỗi bằng chuỗi các tích phân

* Đạo hàm của chuỗi bằng chuỗi các đạo hàm

*** Ví dụ:** Tính tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3x-2}{x}\right)^n$

Giải:

Đặt $\frac{3x-2}{x} = X$

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} nX^n$ (*)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ của chuỗi (*) là $R = 1.$

* Tại $X = 1$, có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} n$ phân kì (vì $\lim_{n\to\infty} n \neq 0$)

* Tại $X = -1$, có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ phân kì

(vì $\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n n\right| \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^n n \neq 0$)

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi (*) là $(-1,1)$

* Trên $(-1,1)$, ta có:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nX^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} nX^{n-1}\right) X = X.\sum_{n=1}^{\infty} \left(X^n\right)' = X\left(\sum_{n=1}^{\infty} X^n\right)' =$$

$$= X\left(\frac{X}{1-X}\right)' = \frac{X}{(1-X)^2}.$$

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là

$$-1 < \frac{3x-2}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1.$$

Trên $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, tổng của chuỗi hàm đã cho là:

$$\frac{\frac{3x-2}{x}}{\left(1-\frac{3x-2}{x}\right)^2} = \frac{x(3x-2)}{4(1-x)^2}.$$

II. KHAI TRIỂN HÀM SỐ THÀNH CHUỖI LŨY THỪA

1. Chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ ở lân cận của x_0

<u>Định nghĩa:</u>

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của x_0.

Chuỗi lũy thừa

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

gọi là chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ trong lân cận của x_0.

* Nếu $x_0 = 0,$ ta có chuỗi

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

gọi là chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x)$.

Ví dụ: Viết chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Giải:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \alpha$$

$$f''(0) = \alpha(\alpha - 1)$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)$$

Vậy chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x)$ là:

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + \dots$$

§3. CHUỖI LŨY THỪA

* **Định lí:**

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của x_0.

Nếu $f(x)$ viết được thành chuỗi lũy thừa trong lân cận của x_0

nghĩa là

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

thì chuỗi đó phải là chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$

trong lân cận của x_0.

Chứng minh:

Có $f(x_0) = a_0$

$$f^{(n)}(x_0) = a_n.n!$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (\forall n = 1, 2, \ldots)$$

Vậy chuỗi lũy thừa trên là chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$

trong lân cận của x_0.

§3. CHUỖI LŨY THỪA

*** Định nghĩa:**

Nếu chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ trong lân cận của x_0 hội tụ về hàm số $f(x)$ thì ta nói $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận của x_0.

Khi đó:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

2. Điều kiện đủ để hàm số khai triển được thành chuỗi lũy thừa

*** Định lí:** Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận của x_0.

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ với mọi x trong lân cận trên

$$\left(R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad c \in (x_0, x)\right)$$

thì $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận của x_0.

Chứng minh:

Theo công thức Taylor với phần dư Lagrange,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Từ đó, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1}(x) = f(x)$

hay $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$

Vậy $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận của x_0.

*** Định lí:**

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận của x_0.

Nếu $\left|f^{(k)}(x)\right| \le M \qquad \forall k = 1, 2, \ldots$

(mọi x thuộc lân cận đó)

thì $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận của x_0.

Chứng minh:

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le M\,\frac{\left|(x-x_0)^{n+1}\right|}{(n+1)!}$$

Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ hội tụ với $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}R_n(x) = 0.$$

Vậy $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận của x_0.

3. *Khai triển một số hàm thường dùng thành chuỗi Maclaurin*

a) Hàm số $f(x) = e^x$

Có $f^{(n)}(x) = e^x, \ \forall n = 1, 2, \ldots$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 1, \qquad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Với mọi x thuộc lân cận $(-h, h)$ của 0

$$\left| f^{(n)}(x) \right| = e^x \le e^h$$

Vậy $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Maclaurin trong lân cận của $0.$

§3. CHUỖI LŨY THỪA

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})$$

b) Hàm số $f(x) = \sin x$

Có $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & khi \;\; n = 2m \\ (-1)^m & khi \;\; n = 2m+1 \end{cases}$$

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le 1, \qquad \forall n = 1, 2, \ldots \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Vậy $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \ldots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

c) Hàm số $f(x)=\cos x$

Có $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=\cos n\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0 & khi\ \ n=2m+1\\ (-1)^m & khi\ \ n=2m\end{cases}$$

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le 1,\qquad \forall n=1,2,\ldots \qquad\qquad (\forall x\in\mathbb{R})$$

Vậy $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\ldots+\dfrac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+\ldots$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}\qquad (\forall x\in\mathbb{R})$$

d) Hàm số $f(x) = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \qquad (-1 < x \le 1)$$

e) Hàm số $f(x) = (1+x)^{\alpha}$

$$(1+x)^{\alpha} =$$

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$\left(-1 < x < 1\right)$$

*** Đặc biệt, khi** $\alpha = -1$

Có

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1) = -1.(-2).(-3)\ldots(-n) =$$

$$= (-1)^n.n!$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.n!}{n!} x^n$$

Vậy $\displaystyle \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ với $-1 < x < 1$

* Có $$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$ với $-1<x<1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$ với $-1<x<1$

Ví dụ: Khai triển hàm số $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$ thành chuỗi lũy thừa của $x-1.$

(chuỗi Taylor trong lân cận của điểm $x=1$)

Giải:

Viết $$\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

$$A(x+2)+B(x+1)=x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\2A+B=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1\\B=2\end{cases}$$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}$$

Có $\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{2}{3+(x-1)}=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{3}}=$

$$\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2.(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n$$

với $\left|\dfrac{x-1}{3}\right|<1$ hay $|x-1|<3$

Có $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2+(x-1)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}=$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n$$

với $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|<1$ hay $|x-1|<2$

Vậy $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n$

với $|x-1|<2\Leftrightarrow -1<x<3$

Ví dụ: Khai triển hàm số $f(x) = xe^x$ thành chuỗi lũy thừa của $x-1$. Từ đó tính tổng $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$.

Giải:

Có $f(x) = xe^x = [1+(x-1)]e^{x-1}.e =$

$$= e[1+(x-1)].\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} = e\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n!}\right]$$

$$= e\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n!}\right] =$$

$$= e\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{(k-1)!}\right]$$

$$= e\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-1)!}\right] = e\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{n!}(x-1)^n\right]$$

$$= e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n}{n!}(x-1)^n.$$

Vậy $xe^x = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n}{n!}(x-1)^n \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$

Lấy $x = 2,$ ta có: $2e^2 = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n}{n!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n}{n!} = 2e.$

Nhận xét: (**Giúp làm nhanh)** Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Nếu chỉ số *n* dưới dấu $\sum$ tăng thêm k thì phải chuyển u_n thành u_{n-k}

Ví dụ: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n-1)!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-2}}{(n-3)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+1)^{2n}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2(n+1)}}{n+1}$$

Ví dụ: Khai triển hàm số $f(x)=\ln\sqrt{x^2+4x+6}$ thành chuỗi Taylor ở lân cận $x=-2$ và tính tổng S của chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+2}}$$

Giải:

$$f(x)=\ln\sqrt{x^2+4x+6}=\frac{1}{2}\ln\left[(x+2)^2+2\right]$$

$$=\frac{1}{2}.\ln\left[2\left(1+\frac{(x+2)^2}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}.\left[\ln 2+\ln\left(1+\frac{(x+2)^2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}.\left[\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{(x+2)^2}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}.\left[\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{(x+2)^{2n}}{2^n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x+2)^{2n}}{n.2^{n+1}} = \frac{1}{2}\ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(x+2)^{2(n+1)}}{(n+1).2^{n+2}} \quad (*)$$

với $-1 < \dfrac{(x+2)^2}{2} \le 1$ hay $-\sqrt{2} - 2 \le x \le \sqrt{2} - 2$

Từ (*), lấy $x = -1,$ ta có:

$$\frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1).2^{n+2}} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1).2^{n+2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

* Nhận xét: Để khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa, người ta thường biến đổi hàm số đó, hoặc lấy tích phân, lấy đạo hàm,… để đưa về khai triển Maclaurin của các hàm số thường dùng.

Ví dụ: Khai triển hàm số $f(x) = \arctan x$ thành chuỗi Maclaurin.

Giải:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (x^2 < 1 \; hay \; |x| < 1)$$

Vậy

$$f(x) = \int_0^x f'(x)dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(-1 < x < 1)$$

§4. CHUỖI FOURIER

I. Một số khái niệm

1. Chuỗi lượng giác

*** Định nghĩa:** Chuỗi hàm có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

trong đó a_0, a_n, b_n là các hằng số $(n = 1, 2, \ldots)$

gọi là chuỗi lượng giác.

*** Định lí:**

Nếu các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ tuyệt đối thì chuỗi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

hội tụ tuyệt đối và đều trên $\mathbb{R}$.

2. Chuỗi Fourier

* **Định nghĩa:** Cho $f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

$f(x)$ bị chặn và khả tích trên $[-\pi, \pi]$.

Chuỗi lượng giác $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

trong đó

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

gọi là chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$.

§4. CHUỖI FOURIER

*** Định nghĩa:**

Nếu chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ hội tụ về hàm số $f(x)$ thì ta nói $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Fourier.

*** Định lí:**

Nếu hàm số $f(x)$ biểu diễn được thành chuỗi lượng giác, nghĩa là $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

và các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ tuyệt đối

thì chuỗi lượng giác đó phải là chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$

II. Điều kiện đủ để hàm số khai triển được thành chuỗi Fourier

1.Định lí Dirichlet (Điriclê)

Cho $f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi,$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi,\pi]$.

Khi đó chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ hội tụ về hàm $S(x)$ trên $\mathbb{R}$.

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right] \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

* **<u>Nhận xét:</u>** Nếu $f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi,\pi]$ thì $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Fourier tại các điểm liên tục của nó.

nghĩa là
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

trong đó $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,2,\ldots)$$

(với $\forall x$ mà tại đó f liên tục)

2. Chú ý:

a) Nếu $f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $2l,$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-l,l]$

thì khai triển Fourier của hàm số $f(x)$ là:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

trong đó:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\qquad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad n=1,2,\ldots$$

b) Giả sử $f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $2l$, cho bởi một biểu thức trên $(\alpha, \alpha + 2l)$, f đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $(\alpha, \alpha + 2l)$,

Khi đó khai triển Fourier của hàm số $f(x)$ là:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

trong đó:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

§4. CHUỖI FOURIER

c) Nếu $f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $2l$, chẵn, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $(0,l)$

thì khai triển Fourier của hàm số $f(x)$ là:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

trong đó:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\qquad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$n=1,2,\ldots$$

d) Nếu $f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $2l,$ lẻ, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $(0,l)$

thì khai triển Fourier của hàm số $f(x)$ là:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

trong đó:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

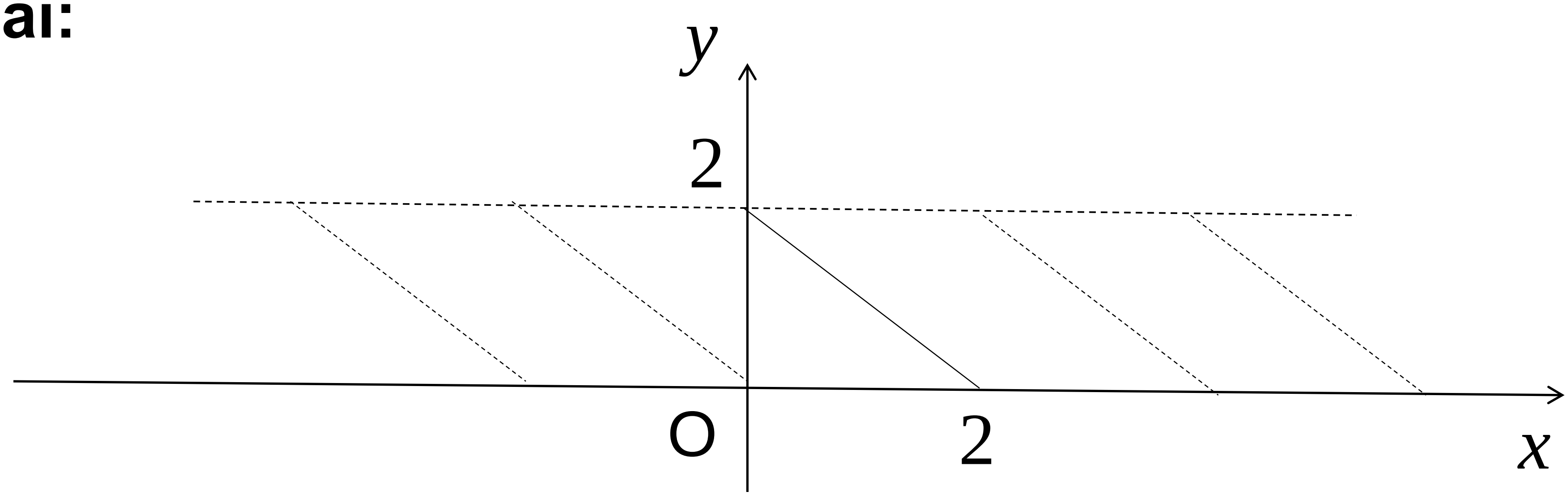
e) Cũng như đối với chuỗi hàm lũy thừa, khi áp dụng khai triển hàm số thành chuỗi Fourier, ta có thể tính được tổng của một số chuỗi đặc biệt.

Ví dụ: Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2.

$$f(x) = 2 - x \qquad x \in (0,2)$$

Khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier và tính tổng $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Giải:



$f(x)$ đơn điệu và bị chặn trên $(0,2)$

f tuần hoàn với chu kì $2l=2 \Rightarrow l=1.$

Khai triển Fourier của hàm số $f(x)$ là:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x$$

Trong đó

$$a_0=\int_0^2 (2-x)dx=\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=2$$

$$a_n = \int_0^2 (2-x)\cos n\pi x dx$$

Đặt $u = 2 - x,\ \ dv = \cos n\pi x dx$

$$\Rightarrow du = -dx,\ \ v = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$$

$$a_n = (2-x)\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^2 + \frac{1}{n\pi}\int_0^2 \sin n\pi x dx =$$

$$\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_2^0 = 0.$$

$$b_n = \int_0^2 (2-x)\sin n\pi x dx$$

Đặt $u = 2 - x,\ dv = \sin n\pi x dx$

$$\Rightarrow du = -dx,\ v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$$

$$b_n = (2-x)\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_2^0 - \frac{1}{n\pi}\int_0^2 \cos n\pi x dx =$$

$$\frac{2}{n\pi} - \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^2 = \frac{2}{n\pi}. \qquad (\forall n = 1,2,...)$$

§4. CHUỖI FOURIER

Vậy $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}$

với $\forall x \neq 2k, \quad (k \in \mathbb{Z})$

* Ta có: $2 - x = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}$ với $\forall x \neq 2k, \quad (k \in \mathbb{Z})$

Lấy $x = \frac{1}{2}$, có $\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$

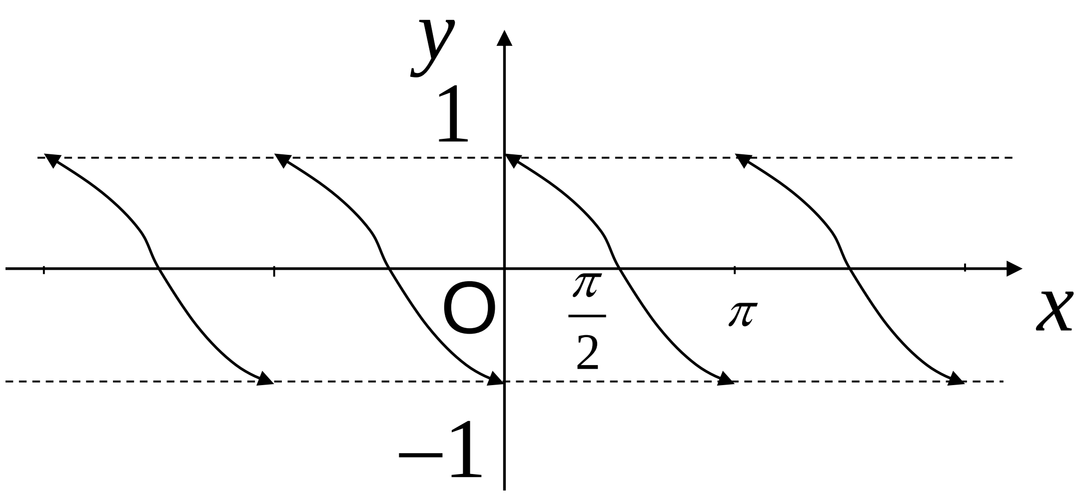
$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}.$ Vậy $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$

Ví dụ: Cho $f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π.

$$f(x) = \cos x \quad \text{trên} \quad (0, \pi).$$

Hãy khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier.

Giải:



§4. CHUỖI FOURIER

f tuần hoàn với chu kì $2l = \pi \Rightarrow l = \dfrac{\pi}{2}$

Hàm số $f(x)$ lẻ

(Vì $\forall x \in \left(0, \pi\right) \Rightarrow -x \in \left(-\pi, 0\right)$ và

$$f(-x) = f(-x+\pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x = -f(x))$$

Khai triển Fourier của hàm số $f(x)$ là:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx$$

trong đó

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.\sin 2nx dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left[\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x\right]dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x + \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$b_n = \frac{8}{\pi}\frac{n}{4n^2 - 1}.$$

Vậy $$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2 - 1}\sin 2nx$$

với $\forall x \neq k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

III. Khai triển hàm số bất kì thành chuỗi Fourier

1. Phương pháp thác triển tuần hoàn

Giả sử $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên (a,b)

Để khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier, ta lập hàm số

$F(x)$ tuần hoàn với chu kì $2l = b - a.$

$$F(x) = f(x), \ \forall x \in (a,b)$$

Từ khai triển Fourier của hàm số $F(x),$ ta suy ra khai triển Fourier của hàm số $f(x)$ trên (a,b)

§4. CHUỖI FOURIER

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

với $\forall x\in(a,b)$

trong đó:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx,\qquad a_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad n=1,2,\ldots$$

với $l=\dfrac{b-a}{2}$

2. Phương pháp thác triển chẵn, thác triển lẻ

Giả sử $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $(0,a)$

Để khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier, ta có thể dùng các

phương pháp thác triển chẵn, thác triển lẻ như sau:

§4. CHUỖI FOURIER

a. *Phương pháp thác triển chẵn*

Giả sử $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $(0,a)$

Để khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier, ta lập hàm số

$F(x)$ chẵn, tuần hoàn với chu kì $2l = 2a.$

$$F(x) = f(x), \ \forall x \in (0,a)$$

Từ khai triển Fourier của hàm số $F(x),$ ta suy ra khai triển Fourier của hàm số $f(x)$ trên $(0,a).$

§4. CHUỖI FOURIER

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{a}$$

với $\forall x \in (0, a).$

trong đó:

$$a_0 = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx. \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Khi đó, $f(x)$ được khai triển theo các hàm số cosin.

b. ***Phương pháp thác triển lẻ***

Giả sử $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $(0,a)$

Để khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier, ta lập hàm số

$F(x)$ lẻ, tuần hoàn với chu kì $2l = 2a.$

$$F(x) = f(x), \ \ \forall x \in (0,a)$$

Từ khai triển Fourier của hàm số $F(x),$ ta suy ra khai triển Fourier của hàm số $f(x)$ trên $(0,a).$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

với $\forall x \in (0,a)$.

trong đó:

$$b_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx. \qquad (n=1,2,...)$$

Khi đó, $f(x)$ được khai triển theo các hàm số sin.

Ví dụ: Cho $f(x) = x, \quad x \in (0,1)$

a) Khai triển hàm số thành chuỗi Fourier.

b) Khai triển hàm số theo các hàm sin và tính tổng của chuỗi

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

c) Khai triển hàm số theo các hàm cosin và tính tổng của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Giải:

a) Dùng phương pháp thác triển tuần hoàn, lập hàm số $F(x)$ tuần hoàn với chu kì $2l = 1,\ F(x) = f(x)$ trên $(0,1)$.

Từ khai triển Fourier của hàm số $F(x)$, ta có:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x$$

trong đó $a_0 = 2\int_0^1 x dx = 2\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = 1.$

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos 2n\pi x dx$$

Đặt $u = x,\ dv = \cos 2n\pi x dx$

$$\Rightarrow du = dx,\ \ v = \frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x$$

$$a_n = 2.\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x\Big|_0^1 - 2.\frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \sin 2n\pi x dx =$$

$$\frac{1}{2n^2\pi^2}\cos 2n\pi x\Big|_0^1 = 0.$$

$$b_n = 2\int_0^1 x \sin 2n\pi x dx$$

Đặt $u = x,\ dv = \sin 2n\pi x dx$

$$\Rightarrow du = dx,\ \ v = -\frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi x$$

$$b_n = 2\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \cos 2n\pi x dx \right]$$

$$= 2\left[-\frac{1}{2n\pi} + \frac{1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi x \Big|_0^1 \right] = -\frac{1}{n\pi} \qquad (\forall n = 1, 2, \ldots)$$

Vậy $f(x)=x=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}$ $\forall x\in(0,1)$

b) Dùng phương pháp thác triển lẻ, lập hàm số $F(x)$ lẻ, tuần hoàn với chu kì $2l = 2,\ F(x) = f(x)$ trên $(0,1).$

Từ khai triển Fourier của hàm số $F(x),$ ta có:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$$

trong đó $$b_n = 2\int_0^1 x \sin n\pi x dx$$

Đặt $u = x,\ dv = \sin n\pi x dx$

$$\Rightarrow du = dx,\ v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$$

$$b_n = 2\left[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x dx\right]$$

$$= 2\left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^1\right]$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi = -\frac{2}{n\pi}(-1)^n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (\forall n = 1, 2, \ldots)$$

Vậy $f(x) = x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin n\pi x \qquad \forall x \in (0,1)$

Lấy $x = \frac{1}{2}$, ta có:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin\frac{n\pi}{2}}{n} = \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2m}(-1)^{m}}{2m+1}$$

$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}.$ Vậy $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$

c) Dùng phương pháp thác triển chẵn, lập hàm số $F(x)$ chẵn, tuần hoàn với chu kì $2l = 2,\ F(x) = f(x)$ trên $(0,1)$.

Từ khai triển Fourier của hàm số $F(x)$, ta có:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

trong đó $a_0 = 2\int_0^1 x dx = 2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1.$

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x dx$$

Đặt $u = x,\ dv = \cos n\pi x dx$

$$\Rightarrow du = dx,\ \ v = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$$

$$a_n = 2\left[\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x dx\right] =$$

$$\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & khi \quad n = 2m \\ \dfrac{-4}{(2m+1)^2\pi^2} & khi \quad n = 2m+1 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2} \qquad \forall x \in (0,1)$

Dễ thấy công thức $x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2}$ đúng khi $x = 0$.

Lấy $x = 0$ ta có $0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^2}$

$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$. Vậy $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

§4. CHUỖI FOURIER