5.1 KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

5.1.1 Định nghĩa và ví dụ

- Ánh xạ f từ không gian véc tơ V vào không gian véc tơ W thoả mãn với mọi $u, v \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) = \alpha f(u) \end{cases}$$

được gọi là ánh xạ tuyến tính (đồng cấu tuyến tính hay gọi tắt là đồng cấu) từ V vào W.

- Khi $V = W$ thì f được gọi là tự đồng cấu.

Ví dụ 5.1 1) *Ánh xạ không* $\mathbf{0}: V \to W$, $u \mapsto \mathbf{0}(u) = 0$

2) *Ánh xạ đồng nhất* $\mathrm{Id}_V : V \to V$, $u \mapsto \mathrm{Id}_V(u) = u$

3) Ánh xạ $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto f(x_1,\ldots,x_n) = (y_1,\ldots,y_m)$

Xác định bởi $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ là một ánh xạ tuyến tính.

Ngược lại, mọi ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ đều có dạng như trên.

Chẳng hạn, $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y,z) = (2x - 3y + z, 4x + 3z)$ là một ánh xạ tuyến tính.

5.1.2. Tính chất

Định lý 5.1

Ánh xạ $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi với mọi $u, v \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

Định lý 5.2 Nếu $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính thì

(i) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(ii) *với mọi* $v \in V:\ f(-v) = -f(v)$

(iii) $f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i),\ \ \forall x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R},\ \forall v_1,\ldots,v_n \in V.$

Định lý 5.3 Mỗi ánh xạ tuyến tính V vào W hoàn toàn được xác định bởi ảnh một cơ sở của V.

Nghĩa là với cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ cho trước của V

khi đó với mỗi hệ véc tơ $u_1, \ldots, u_n \in W$

Tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$ sao cho

$$f(e_i) = u_i,\ i = 1,\ldots,n.$$

Hệ quả 5.4 $f, g: V \to W$ là hai ánh xạ tuyến tính

$\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V

Khi đó

$$f = g \Leftrightarrow f(e_i) = g(e_i);\ \forall i = 1,\ldots,n.$$

5.1.3 Các phép toán trên các ánh xạ tuyến tính

5.1.3.1 $\mathrm{Hom}(V,W)$

- Tập các ánh xạ tuyến tính từ V vào W được ký hiệu là

$\mathrm{Hom}(V,W)$ hay $\mathrm{L}(V,W)$

Với mọi $f, g \in \mathrm{Hom}(V,W)$, với mọi $k \in \mathbb{R}$.

- Ta định nghĩa phép cộng hai ánh xạ tuyến tính bởi công thức

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v).$$

- Và phép nhân một số với ánh xạ tuyến tính bởi công thức

$$(kf)(v) = kf(v).$$

Với hai phép toán này thì $\mathrm{Hom}(V,W)$ có cấu trúc không gian véc tơ

$$\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$$

Ví dụ 5.2:

Cho hai ánh xạ tuyến tính $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh

$$f(x,y,z) = (3x-5y+2z, 4x+y-6z)$$

$$g(x,y,z) = (2x+6y-7z, x-5z)$$

$$\Rightarrow (3f)(x,y,z) = 3f(x,y,z) = (9x-15y+6z, 12x+3y-18z)$$

$$(2g)(x,y,z) = 2g(x,y,z) = (4x+12y-14z, 2x-10z)$$

$$\Rightarrow (3f-2g)(x,y,z) = (5x-27y+20z, 10x+3y-8z).$$

5.1.3.2 $\mathrm{End}V$

- Tập các tự đồng cấu của V, ký hiệu $\mathrm{End}V$.
- Với phép cộng hai ánh xạ tuyến tính và nhân một số với ánh xạ tuyến tính thì $\mathrm{End}V$ *là một không gian véc tơ .*

$$\dim \mathrm{End}\, V = \left(\dim V\right)^2.$$

- Mặt khác hợp của hai ánh xạ tuyến tính cũng là một ánh xạ tuyến tính.

Cho $f \in \mathrm{End}V$ và đa thức bậc n $\quad p(t) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n t^n$

Ta ký hiệu $p(f) = a_0\,\mathrm{Id}_V + a_1 f + \cdots + a_n f^n$

Trong đó $\quad f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ lần}} \quad f^0 = \mathrm{Id}_V \quad f^1 = f$

Ví dụ 5.3:

Cho ánh xạ tuyến tính $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh

$$f(x,y) = (3x-5y, 4x+y)$$

$$f^2(x,y) = \big(3(3x-5y) - 5(4x+y), 4(3x-5y) + (4x+y)\big) = (-11x-20y, 16x-19y)$$

Cho đa thức $p(t) = 50 - 9t + 2t^2$

$$\Rightarrow p(f)(x,y) = \left(50\,\mathrm{Id}_V - 9f + 2f^2\right)(x,y)$$

$$= 50(x,y) - 9(3x-5y, 4x+y) + 2(-11x-20y, 16x-19y) = (x+5y, -4x+3y).$$

5.2 NHÂN VÀ ẢNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Định lý 5.5 Giả sử $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính, khi đó:

a) Nếu V_1 là không gian con của V thì $f(V_1)$ là không gian con của W.

S là một hệ sinh của V_1 thì $f(S)$ là một hệ sinh của $f(V_1)$.

Do đó $\dim f(V_1) \le \dim V_1$.

b) Nếu W_1 là không gian con của W thì $f^{-1}(W_1)$ là không gian con của V.

Đặc biệt $f^{-1}(\mathbf{0})$ là một không gian véc tơ con của V.

ngoài ra nếu $W_1 \subset f(V)$ thì $\dim W_1 \le \dim f^{-1}(W_1)$.

Giả sử $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính,

- Nhân của f $\operatorname{Ker} f = f^{-1}\{\mathbf{0}\} = \{v \in V \mid f(v) = \mathbf{0}\} \subset V.$

$$\forall v \in V: \ v \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(v) = \mathbf{0}.$$

- Ảnh của f $\operatorname{Im} f = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\} \subset W.$

$$\forall u \in W: \ u \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists v \in V: \ u = f(v).$$

- Hạng của f $r(f) = \dim \operatorname{Im} f.$

Trường hợp ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto f(x_1,\dots,x_n) = (y_1,\dots,y_m)$$

Có công thức xác định ảnh cho bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

- Ảnh của f $\forall u = (y_1,\dots,y_m) \in \mathbb{R}^m: \ u \in \operatorname{Im} f$ khi và chỉ khi hệ phương trình trên có nghiệm.
- Nhân của f $\forall v = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n: \ v \in \operatorname{Ker} f$ khi và chỉ khi $(x_1,\dots,x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất của phương trình trên.

Định lý 5.6 Với mọi ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$ ta có

$$\dim V = r(f) + \dim \operatorname{Ker} f.$$

Ví dụ 5.5

Xét ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh:

$$f(x,y,z,t) = (2x - y + 3z + 5t, 3x - 2y + 3z + 4t, x + 3z + 6t).$$

Tìm một cơ sở của $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$. Từ đó suy ra hạng $r(f)$.

Giải: $(a,b,c) \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : (a,b,c) = f(x,y,z,t)$

Nói cách khác $(a,b,c) \in \operatorname{Im} f$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x & -y & +3z & +5t & = a \\ 3x & -2y & +3z & +4t & = b \\ x & & +3z & +6t & = c \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp khử Gauss ta được

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 & a \\ 3 & -2 & 3 & 4 & b \\ 1 & 0 & 3 & 6 & c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 & c \\ 0 & -1 & -3 & -7 & a-2c \\ 0 & -1 & -3 & -7 & b-a-c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 & c \\ 0 & -1 & -3 & -7 & a-2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-2a+c \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình có nghiệm khi $b - 2a + c = 0 \Leftrightarrow b = 2a - c$

$$u = (a,b,c) \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow u = (a, 2a - c, c) = a(1,2,0) + c(0,-1,1)$$

Vậy $\operatorname{Im} f$ có một cơ sở là $\{(1,2,0), (0,-1,1)\}$ Hạng $r(f) = 2$

$v = (x,y,z,t) \in \operatorname{Ker} f$ khi và chỉ khi (x,y,z,t) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x & -y & +3z & +5t & = 0 \\ 3x & -2y & +3z & +4t & = 0 \\ x & & +3z & +6t & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3z - 6t \\ y = -3z - 7t \end{cases}$$

Vậy $\operatorname{Ker} f$ có một cơ sở là $\{(-3,-3,1,0), (-6,-7,0,1)\}$

$$v = (-3z - 6t, -3z - 7t, z, t) = z(-3,-3,1,0) + t(-6,-7,0,1)$$

Nhận xét 5.1 Giả sử $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của V

Có thể chứng minh được $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ là một hệ sinh của $\operatorname{Im} f$.

Do đó mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ là cơ sở của $\operatorname{Im} f$.

Ví dụ trên có hạng $r(f) = 2$. Vì vậy ngoài cơ sở $\{(1,2,0), (0,-1,1)\}$ hai véc tơ cột bất kỳ của ma trận

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

đều là cơ sở của $\operatorname{Im} f$.

5.3TOÀN CẤU, ĐƠN CẤU, ĐẲNG CẤU

5.3.1 Toàn cấu

Ánh xạ tuyến tính và toàn ánh được gọi là toàn cấu.

Giả sử $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính,

Ba mệnh đề sau tương đương

(i) f toàn cấu,

(ii) Ảnh của hệ sinh của V là hệ sinh của W,

(iii) $r(f) = \dim W$.

5.3.2 Đơn cấu

Ánh xạ tuyến tính đơn ánh được gọi là đơn cấu.

Giả sử $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính,

Bốn mệnh đề sau tương đương

(i) f đơn cấu,

(ii) $\mathrm{Ker} f \subset \{\mathbf{0}\}$,

(iii) Ảnh của hệ độc lập tuyến tính của V là hệ độc lập tuyến tính của W,

(vi) $r(f) = \dim V$.

Từ (ii) suy ra f là một đơn cấu khi: $f(v) = \mathbf{0} \Rightarrow v = \mathbf{0}.$

5.3.3 Đẳng cấu

- Ánh xạ tuyến tính vừa đơn cấu vừa toàn cấu được gọi là đẳng cấu.
- Hai không gian V, W được gọi là đẳng cấu nếu có ánh xạ tuyến tính đẳng cấu $f: V \to W$.
- Nếu có ánh xạ tuyến tính đẳng cấu $f: V \to W$ thì

$$\begin{cases} r(f) = \dim V \text{ (đơn cấu)} \\ r(f) = \dim W \text{ (toàn cấu)} \end{cases} \Rightarrow \dim V = \dim W.$$

Định lý 5.8 Hai không gian V, W là đẳng cấu khi và chỉ khi

$$\dim V = \dim W.$$

Định lý 5.9

Giả sử $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính và $\dim V = \dim W$.

Khi đó: f đơn cấu khi và chỉ khi f toàn cấu, do đó đẳng cấu.

Nhận xét 5.2

1. Giả sử $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính và $\dim V = \dim W$.
   Để chứng minh f đẳng cấu ta chỉ cần chứng minh đơn cấu
   $$f(v) = \mathbf{0} \Rightarrow v = \mathbf{0}.$$
2. Ta đã biết rằng ánh xạ từ một tập hữu hạn vào một tập hữu hạn có cùng số phần tử là đơn ánh khi và chỉ khi là toàn ánh (chương 1). Điều này cũng còn đúng đối với ánh xạ tuyến tính giữa hai không gian véc tơ có cùng số chiều.

Ví dụ 5.6 Ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y) = (2x - y, x + y)$$

là một đơn cấu vì

$$f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x - y, x + y) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

do đó f là một đẳng cấu.

Ngoài ra ta cũng thấy hệ phương trình sau luôn tồn tại duy nhất nghiệm

$$\begin{cases} 2x - y = X \\ x + y = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{X + Y}{3} \\ y = \dfrac{-X + 2Y}{3} \end{cases}$$

Ví dụ 5.7 Ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbf{P}_2$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = (x+2y+3z)+(2x+5y+6z)t+(x+8z)t^2$$

$$f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+5y+3z=0 \\ x \qquad +8z=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -1$$

Do đó hệ phương trình chỉ có nghiệm tầm thường. Vậy f là một đẳng cấu.

5.4 MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

5.4.1 Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Giả sử $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính.

$\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của V.

$\mathscr{B}' = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ là một cơ sở của W.

Ma trận của hệ véc tơ $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$.

Được gọi là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}$ và $\mathscr{B}'$.

Ký hiệu $A = \left[f\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$

Xác định như sau $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ $\quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\omega_i;\ j = 1,\dots,n$

- Trường hợp tự đồng cấu f của không gian véc tơ V

  Ma trận của f trong cùng một cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ của V được ký hiệu $A = \left[f\right]_{\mathscr{B}}$

- Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong cơ sở chính tắc được gọi là ***ma trận chính tắc.***

Ví dụ 5.8 Tìm ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = (2x+y-4z, 3x+5z)$$

$\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V.

$\mathscr{B}' = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ W.

Định lý 5.10 Tương ứng $\mathrm{Hom}(V,W) \to \mathscr{M}_{m\times n}$

$$f \mapsto A = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

là một song ánh thỏa mãn các tính chất:

$$\left[f+g\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \left[f\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} + \left[g\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \left[\lambda f\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \lambda\left[f\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

$$r(f) = r\left(\left[f\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right).$$

Khi $V = V' = V''$ và ta chọn cố định một cơ sở của V thì có tương ứng 1-1 giữa các tự đồng cấu của V và các ma trận vuông cấp n.

Định lý 5.11 Tương ứng $\mathrm{End}(V) \to \mathscr{M}_n$

$$f \mapsto A = [f]_{\mathscr{B}}$$

là một song ánh thỏa mãn các tính chất:

$$[f+g]_{\mathscr{B}} = [f]_{\mathscr{B}} + [g]_{\mathscr{B}}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : [\lambda f]_{\mathscr{B}} = \lambda [f]_{\mathscr{B}}$$

$$[f \circ g]_{\mathscr{B}} = [f]_{\mathscr{B}} [g]_{\mathscr{B}}$$

$$r(f) = r([f]_{\mathscr{B}}).$$

Hệ quả 5.12

Cho $f \in \mathrm{End}(V)$, $\mathscr{B}$ là một cơ sở của V. Đặt $A = [f]_{\mathscr{B}}$

f là tự đẳng cấu khi và chỉ khi A khả nghịch.

Ma trận của f^{-1} trong cơ sở $\mathscr{B}$ có dạng $[f^{-1}]_{\mathscr{B}} = A^{-1}$

Hệ quả 5.13

Giả sử $p(t) = a_0 + \cdots + a_n t^n$ là một đa thức bậc n.

Ma trận của $p(f) = a_0 \mathrm{Id}_V + \cdots + a_n f^n$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ là

$$p(A) = a_0 I + \cdots + a_n A^n.$$

Ví dụ 5.13 Xét ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = (x+2y+2z, 3x+y+5z, x-y+z).$$

Ma trận chính tắc của f là $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Có ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$.

Do đó f là một đẳng cấu và ánh xạ ngược xác định như sau

$$f^{-1}(x,y,z) = \frac{1}{2}(6x-4y+8z, 2x-y+z, -4x+3y-5z).$$

5.4.2 Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

Giả sử $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính

$T = [t_{ij}]^{\mathscr{B}_1}_{\mathscr{B}'_1}$, $P = [p_{ki}]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}'_2}$ là ma trận chuyển cơ sở $\mathscr{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ sang $\mathscr{B}'_1 = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ của V; $\mathscr{B}_2 = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ sang $\mathscr{B}'_2 = \{\omega'_1, \dots, \omega'_m\}$ của W

$A = [f]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}_1}$, $A' = [f]^{\mathscr{B}'_2}_{\mathscr{B}'_1}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$; $\mathscr{B}'_1, \mathscr{B}'_2$

$$[p_{ki}]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}'_2} [f]^{\mathscr{B}'_2}_{\mathscr{B}'_1} = [f]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}_1} [t_{ij}]^{\mathscr{B}_1}_{\mathscr{B}'_1}$$

Hoặc $PA' = AT$ $\quad A' = P^{-1}AT$

CHƯƠNG 5: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

- Đặc biệt nếu f là tự đồng cấu của không gian véc tơ V.
- Gọi A, A' là ma trận của f trong hai cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ và T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì

$$A' = T^{-1}AT.$$

$$[f]_{\mathscr{B}'} = \left([t_{ij}]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^{-1}[f]_{\mathscr{B}}[t_{ij}]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = [p_{ij}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}[f]_{\mathscr{B}}[t_{ij}]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$$

29

CHƯƠNG 5: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

- Hai ma trận A, B được gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $B = T^{-1}AT$.
- Hai ma trận của một tự đồng cấu bất kỳ trong hai cơ sở khác nhau là đồng dạng.
- Nếu A, B đồng dạng thì $\det A = \det B$. Vì vậy ta có thể định nghĩa ***định thức của một tự đồng cấu*** f là

$$\det f = \det[f]_{\mathscr{B}}.$$

30

CHƯƠNG 5: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Nhận xét 5.3: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ sang cơ sở $\mathscr{B}_1$. Gọi A là ma trận của f trong cơ sở chính tắc và A' là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}_1$, khi đó $A' = T^{-1}$trong cơ sở $\mathscr{B}_1 = \{(1,1),(0,1)\}$.

Ví dụ 5.10: Cho ánh xạ tuyến tính

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f(x,y) = (2x+y, x-3y)$$

Tìm ma trận A' của f trong cơ sở $\mathscr{B}_1 = \{(1,1),(0,1)\}$.

(31)

CHƯƠNG 5: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Nhận xét 5.3: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^m$ sang cơ sở $\mathscr{B}_2$, T là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ sang cơ sở $\mathscr{B}_1$ và A là ma trận của f trong cở sở chính tắc, A' của f trong cơ sở $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ thì $A' = P^{-1}AT$.

Ví dụ 5.13: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; f(x,y,z) = (x+y+z, x+y-z)$

Ma trận A' của f trong cơ sở $\mathscr{B}_1 = \{(0,1,1),(1,0,1),((1,1,0)\}$, $\mathscr{B}_2 = \{(1,1),(0,1)\}$.

Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ sang cơ sở $\mathscr{B}_2$, T là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ sang cơ sở $\mathscr{B}_1$ và A là ma trận của f trong cở sở chính tắc thì

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = P^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

32

Ví dụ 5.14

Tự đồng cấu tuyến tính f có ma trận trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ta tìm ma trận A' của f trong cơ sở $\mathscr{B}' = \{e_1, e_3, e_2, e_4\}$

Ví dụ 5.15 Hai ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (x-2y, x, -3x+4y) \qquad g(x,y,z) = (x-2y-5z, 3x+4y)$$

Tìm ma trận chính tắc của f và g. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Tìm ma trận chính tắc của $g \circ f$, tính $\det(g \circ f)$

5.5 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH. QUAN HỆ GIỮA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

5.5.1 Biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính

Giả sử $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính.

$\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của V.

$\mathscr{B}' = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ là một cơ sở của W.

$(x_1, \dots, x_n) = (v)_{\mathscr{B}}$ là tọa độ của $v \in V$ trong cơ sở $\mathscr{B}$

$(y_1, \dots, y_m) = (f(v))_{\mathscr{B}'}$ là tọa độ của $f(v) \in W$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$.

$[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$.

Biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở $\mathscr{B}$ và $\mathscr{B}'$

- Dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \left[f(v)\right]_{\mathscr{B}'} = \left[f\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \left[v\right]_{\mathscr{B}}$$

- Dạng hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

5.5.2 Ánh xạ tuyến tính và hệ phương trình tuyến tính

Từ biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính viết dưới dạng hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

Cho phép giải quyết các bài toán về ánh xạ tuyến tính thông qua hệ phương trình tuyến tính và ngược lại.

Giả sử $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính

$\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V

$\mathcal{B}' = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ là một cơ sở của W

- Tìm $\operatorname{Im} f$: $\quad b \in W,\ b = b_1\omega_1 + \cdots + b_m\omega_m$

$b \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow$ Hệ phương trình $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ có nghiệm

- Tìm $\operatorname{Ker} f$: $\quad v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in V$

$v \in \operatorname{Ker} f$ khi và chỉ khi $(x_1, \ldots, x_n)$ là nghiêm của phương trình tuyến tính thuần nhất $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

Ví dụ 5.16 Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_2$ xác định bởi

$$f(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = (5a_0 + 2a_1 - 3a_2 + a_3) + (4a_0 + a_1 - 2a_2 + 3a_3)t + (a_0 + a_1 - a_2 - 2a_3)t^2.$$

a) Viết biểu thức tọa độ của f trong cơ sở chính tắc

b) Tìm một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ và $\operatorname{Im} f$.

Nhận xét 5.4:

- Từ hai định lý 5.11, 5.12, hệ quả và các ví dụ trên ta thấy rằng một bài toán về ánh xạ tuyến tính có thể chuyển sang bài toán ma trận hoặc bài toán hệ phương trình tuyến tính và ngược lại.
- Chẳng hạn để chứng minh định thức của ma trận A khác 0 ta chỉ cần chứng minh tự đồng cấu tuyến tính f với $A = [f]_{\mathcal{B}}$ là đơn cấu hoặc toàn cấu, hoặc hệ phương trình tuyến tính tương ứng có duy nhất nghiệm.
- $\dim \operatorname{Ker} f$ là chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất có hạng của ma trận hệ số bằng hạng của f.
- Áp dụng định lý chiều của không gian nghiệm hệ phương trình thuần nhất ta nhận được đẳng thức đã biết

$$\dim V = r(f) + \dim \operatorname{Ker} f.$$

5.6 CHÉO HOÁ MA TRẬN

5.6.1 Véc tơ riêng, giá trị riêng, không gian riêng

- λ được gọi là giá trị riêng của ma trận $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ nếu tồn tại $x_1, \dots, x_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad (A-\lambda I)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

- Khi đó $v=(x_1, \dots, x_n)\in\mathbb{R}^n$, $v\neq \mathbf{0}$ được gọi là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của ma trận A.
- Như vậy các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ là các nghiệm khác không của phương trình thuần nhất (5.30). Không gian nghiệm của (5.30) được gọi là ***không gian riêng ứng với giá trị riêng*** λ.

- λ được gọi là một *giá trị riêng của tự đồng cấu* f nếu tồn tại véc tơ $v\in V$, $v\neq\mathbf{0}$ sao cho $f(v)=\lambda v$.
- v là *véc tơ riêng ứng với giá trị riêng* λ.

Ví dụ 5.17

a) Xét ánh xạ đồng nhất $\mathrm{Id}_V: V\to V$. Với mọi $v\in V$, $\mathrm{Id}_V(v)=v$.

Vậy 1 là một giá trị riêng của Id_V và mọi véc tơ $v\neq\mathbf{0}$ là véc tơ riêng.

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi: $f(x,y)=(3x-y,-2x+4y)$.

Dễ dàng thấy $f(x,x)=2(x,x)$.

Vậy 2 là một giá trị riêng và mọi véc tơ $v=(x,x);\ x\neq 0$ là véc tơ riêng tương ứng.

Cho tự đồng cấu f của V. Với mỗi $\lambda\in\mathbb{R}$, ký hiệu

$$V_\lambda = \{v\in V \mid f(v)=\lambda v\} = \mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{Id}_V).$$

Định lý 5.14

1) λ là giá trị riêng của f khi và chỉ khi $V_\lambda\neq\{\mathbf{0}\}$.

2) Nếu λ là giá trị riêng của f thì mọi véc tơ $v\neq\mathbf{0}$ của V_λ đều là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

3) Với mọi λ, không gian con V_λ bất biến đối với f. Nghĩa là

$$\forall v\in V_\lambda \Rightarrow f(v)=\lambda v \Rightarrow f(f(v))=f(\lambda v)=\lambda f(v)\Rightarrow f(v)\in V_\lambda.$$

Nhận xét 5.4

Cho $f\in\mathrm{End}(V)$, $\mathscr{B}$ là một cơ sở của V. Đặt $A=[f]_{\mathscr{B}}$.

Khi đó $v\in V$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của f khi và chỉ khi $(v)_{\mathscr{B}}$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của ma trận A.

Nghĩa là

$$v\in V; (v)_{\mathscr{B}}=(x_1,\dots,x_n), v\neq\mathbf{0}: f(v)=\lambda v \Leftrightarrow (A-\lambda I)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.6.2 Đa thức đặc trưng

❖ A là một ma trận vuông cấp n. Định thức

$$\mathscr{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

là một đa thức bậc n của λ được gọi là ***đa thức đặc trưng của A.***

❖ Cho $f \in \mathrm{End}(V)$, $\mathscr{B}$ là một cơ sở của V. Đặt $A = [f]_{\mathscr{B}}$

Khi đó định thức

$$\mathscr{P}_f(\lambda) = \det\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_V\right) = \det(A - \lambda I)$$

không phụ thuộc vào cơ sở của V, cũng được gọi là ***đa thức đặc trưng của f.***

Định lý 5.15

λ_0 là giá trị riêng của A (tương ứng của f) khi và chỉ khi λ_0 là nghiệm của đa thức đặc trưng của A (tương ứng của f).

Ví dụ 5.18

Tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của tự đồng cấu của không gian $\mathbb{R}^2$ (ví dụ 5.17)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi: $f(x,y) = (3x - y, -2x + 4y)$

5.6.3 Điều kiện tự đồng cấu chéo hoá được và ma trận vuông chéo hoá được

- Tự đồng cấu f của không gian véc tơ V chéo hoá được nếu tồn tại một cơ sở của V để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.
- Như vậy f chéo hoá được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của V gồm các véc tơ riêng của f.
- Ma trận vuông A chéo hoá được nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

Định lý 5.16

Giả sử $v_1, \ldots, v_m$ là các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ của tự đồng cấu f (hoặc ma trận A) thì hệ véc tơ $\{v_1, \ldots, v_m\}$ độc lập tuyến tính.

Hệ quả 5.17

Nếu đa thức đặc trưng của tự đồng cấu f trong không gian n chiều V (hoặc ma trận A vuông cấp n) có đúng n nghiệm thực phân biệt thì f (tương ứng ma trận A) chéo hoá được.

Hệ quả 5.18 Giả sử $\mathscr{P}(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$

$m_1 + \ldots + m_k = n$ và các giá trị $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ khác nhau từng đôi một

Khi đó f (tương ứng ma trận A) chéo hoá được khi và chỉ khi

$$\dim V_{\lambda_i} = m_i;\ \forall\ i = 1,\ldots,k$$

5.6.4 Thuật toán chéo hoá

Bước 1: Viết đa thức đặc trưng dạng

$$\mathscr{P}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \ldots (\lambda_k - \lambda)^{m_k} Q(\lambda)$$

trong đó $Q(\lambda)$ là đa thức không có nghiệm thực.

- Nếu $m_1 + \cdots + m_k < n$ (khi bậc của $Q(\lambda) \geq 2$): không chéo hóa được
- Nếu $m_1 + \cdots + m_k = n$ thì chéo hóa được. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ là các giá trị riêng; tiếp tục bước 2

Bước 2: Với mỗi giá trị riêng λ_i tìm một cơ sở của không gian riêng V_{λ_i}

Các véc tơ riêng $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ có $(x_1, \ldots, x_n)$

là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \dim V_{\lambda_i} = d_i = n - r(A - \lambda_i I)$$

- Nếu $d_i < m_i$ với i nào đó, $1 \leq i \leq k$ thì f không hoá chéo được
- Nếu $d_i = m_i, \forall i : 1 \leq i \leq k$. Tiếp tục bước 3

Bước 3: Với mỗi giá trị riêng λ_i ; $i = 1, \ldots, k$ ta đã chọn được m_i véc tơ riêng độc lập tuyến tính.

- Gộp tất cả các véc tơ này ta được hệ gồm $m_1 + \ldots + m_k = n$ véc tơ riêng độc lập, đó là cơ sở $\mathscr{B}'$ cần tìm.
- Ma trận T có các cột là tọa độ của hệ véc tơ $\mathscr{B}'$.

Ví dụ 5.21

Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$