§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

1. Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa hàm số. Hàm số chẵn, hàm số lẻ.

Hàm số tuần hoàn. Hàm số đơn điệu

Hàm số bị chặn. Hàm số hợp

Hàm số ngược

2. Các hàm số sơ cấp cơ bản

Hàm lũy thừa. Hàm số mũ. Hàm số lôgarit.

Các hàm số lượng giác. Các hàm số lượng giác ngược

các hàm hypebolic. Hàm số sơ cấp

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

1. Các khái niệm cơ bản

A. Định nghĩa hàm số

Cho $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$

Ánh xạ $f : X \to Y$

$$x \mapsto y = f(x)$$

gọi là một hàm số từ X vào Y.

* Ta thường kí hiệu hàm số dưới dạng công thức xác định ảnh là $y = f(x),\ \ x \in X$

❖ B. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Giả sử X là tập số thực sao cho $-x \in X$ với $\forall x \in X$

f là hàm số xác định trên X .

f được gọi là hàm số chẵn nếu $f(x) = f(-x), \forall x \in X$

f được gọi là hàm số lẻ nếu $f(x) = -f(-x), \forall x \in X$

❖ C. Hàm số tuần hoàn

Cho hàm số f xác định trên X .

f được gọi là tuần hoàn trên X nếu tồn tại số $\tau > 0$ sao cho với mọi $x \in X$, ta có:

$x + \tau \in X$ và $f(x + \tau) = f(x)$

Số T dương bé nhất trong các số τ gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn $f(x)$.

❖ D. Hàm số đơn điệu

Cho hàm số f xác định trên X , f được gọi là

tăng trên X nếu: $(\forall x_1, x_2 \in X)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

tăng ngặt trên X nếu: $(\forall x_1, x_2 \in X)\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

giảm trên X nếu: $(\forall x_1, x_2 \in X)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

giảm ngặt trên X nếu: $(\forall x_1, x_2 \in X)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

* f được gọi là hàm số đơn điệu trên X nếu nó tăng hoặc giảm trên X.

* f được gọi là đơn điệu ngặt trên X nếu nó tăng ngặt hoặc giảm ngặt trên X.

❖ E. Hàm số bị chặn

Hàm số $f(x)$ được gọi là

* bị chặn trên trong X nếu tồn tại số A sao cho:

$$f(x) \le A, \forall x \in X$$

* bị chặn dưới trong X nếu tồn tại số B sao cho:

$$f(x) \ge B, \forall x \in X$$

bị chặn trong X nếu tồn tại các số A, B sao cho

$$B \le f(x) \le A, \forall x \in X.$$

❖ F. Hàm số hợp

Cho các hàm số $f : X \to Y$ và $g : Y \to \mathbb{R}$

Ánh xạ

$$g \circ f : X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$$

gọi là hàm số hợp của hai hàm f và g

Ví dụ : Hàm số $z = (x^2 + x - 5)^3$ là hợp của hai hàm số

$$u = x^2 + x - 5, \quad z = u^3.$$

G. Hàm số ngược

Cho song ánh $f: X \to Y \quad (X, Y \subset \mathbb{R})$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Ánh xạ ngược $f^{-1}: Y \to X$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

gọi là hàm số ngược của hàm số *f*.

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

Người ta thường kí hiệu biến số là x, hàm số là y, nên nói hàm số $y = f^{-1}(x)$ là hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$ (chẳng hạn hàm số $y = \log_a x$ là hàm số ngược của hàm số $y = a^x$).

2. Các hàm số sơ cấp cơ bản

A. Các hàm số sơ cấp cơ bản

a. Hàm lũy thừa: $f(x) = x^{\alpha}\ (x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$

b. Hàm số mũ: $f(x) = a^{x}\quad (a > 0, a \neq 1)$

c. Hàm số lôgarit: $f(x) = \log_a x\quad (a > 0, a \neq 1)$

d. Các hàm số lượng giác:

$$f(x) = \sin x,\ f(x) = \cos x,\ f(x) = \tan x,\ f(x) = \cot x$$

e. Các hàm số lượng giác ngược:

$$f(x) = \arcsin x,\ f(x) = \arccos x,\ f(x) = \arctan x,\ f(x) = \operatorname{arccot} x$$

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

* Hàm arcsin là hàm số ngược của hàm sin: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$

arcsin: $[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$x \mapsto \arcsin x$$

Như vậy $y=\arcsin x \Leftrightarrow x=\sin y$

- Hàm arccos là hàm số ngược của hàm số

$$\cos : \; [0, \pi] \to [-1, 1]$$

Ta có

$$\arccos : \; [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$x \mapsto \arccos x$$

Như vậy, $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$.

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

- Hàm arctg là hàm số ngược của hàm số $\mathrm{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{arctg}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x \mapsto \mathrm{arctg}x$$

Như vậy, $y = \mathrm{arctg}x \Leftrightarrow x = \mathrm{tg}y$.

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

- Hàm arccotg là hàm số ngược của hàm $\cot g:(0,\pi)\to\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\text{arccotg}:\ \mathbb{R} &\to (0,\pi)\\ x &\mapsto \text{arccotg}x\end{aligned}$$

Như vậy, $y=\text{arccotg}x \Leftrightarrow x=\text{cotg}y$

❖ **Ví dụ :**

Tính $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \arccos\dfrac{-1}{2}, \text{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \text{arccotg}0.$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \text{vì} \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{và} \quad \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos\frac{-1}{2} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{vì} \quad \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} \quad \text{và} \quad \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$$

$$\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \quad \text{vì} \quad tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{và} \quad \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{arccotg}0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{vì} \quad \text{cotg}\frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{và} \quad \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$$

*** Nhận xét:**

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{arctg}x + \mathrm{arccotg}x = \frac{\pi}{2}$$

Thật vậy,

$$x = \sin(\arcsin x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x$$ hay $$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

…

f. Các hàm hypebôlic thuận

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$cothx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

*** Các công thức:**

$$ch^2x - sh^2x = 1$$

$$ch2x = ch^2x + sh^2x = 2ch^2x - 1$$

$$sh2x = 2shx.chx$$

$$ch(a+b) = cha.chb + sha.shb$$

...

g. Các hàm hữu tỉ

*** Dạng** $$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

$P(x), Q(x)$ **là các đa thức**

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

***Phân thức** $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **gọi là phân thức thực sự nếu**

bậc $P(x) <$ **bậc** $Q(x)$

*** Các phân thức dạng** $\dfrac{A}{(x-a)^n}, \dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$

trong đó $p^2 - 4q < 0,$

gọi là các phân thức tối giản.

Mệnh đề:

Mọi đa thức đều phân tích được thành tích các đa thức bậc nhất và bậc hai vô nghiệm.

Mọi phân thức thực sự đều viết được thành tổng các phân thức tối giản.

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

*** Cách viết phân thức thực sự** $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **thành tổng các phân thức tối giản:**

- Viết $Q(x) = (x-a)^n \dots (x^2 + px + q)^m$

trong đó $p^2 - 4q < 0$

- Viết

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \dots$$

$$+ \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + px + q)} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{B_m x + C_m}{(x^2 + px + q)^m}$$

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

Ví dụ:

Viết $\dfrac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}$ **thành tổng các phân thức tối giản.**

Giải:

$$x^3+2x^2+x = x(x+1)^2$$

Viết $\dfrac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$

$$\Rightarrow A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx = x^2-3x+2$$

$$(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A=x^2-3x+2$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B+C=-3 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=-6 \end{cases}$$

Vậy

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{6}{(x+1)^2}$$

❖ B. Hàm số sơ cấp

Hàm số sơ cấp là hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và phép lấy hàm hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số.

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa giới hạn hàm số

Định nghĩa giới hạn hàm số

Định nghĩa giới hạn một phía

Giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực

2. Tính chất của hàm số có giới hạn

3. Một số giới hạn đáng nhớ

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa giới hạn hàm số

A. Định nghĩa giới hạn hàm số

Cho hàm số f xác định trên tập $X = (a,b) \setminus \{x_0\}, x_0 \in (a,b)$

f được gọi là có giới hạn $l \in \mathbb{R}$ khi x dần đến x_0 nếu với mỗi số dương ε cho trước bé tùy ý, tồn tại một số dương δ sao cho:

$$(\forall x \in X)\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ hoặc $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$.

Chú ý: *Với điều kiện $0 < |x - x_0|$, ta chỉ cần xét những điểm x dần đến x_0 nhưng khác x_0 . Hàm số có thể không xác định tại x_0 .*

❖ B. Định nghĩa giới hạn một phía

- Cho hàm số f xác định trên khoảng $X=(x_0,b)$

Số thực l được gọi là giới hạn phải của hàm số $f(x)$ tại x_0 nếu với mỗi số dương ε cho trước bé tùy ý, tồn tại một số dương δ sao cho:

$$(\forall x\in X)\ x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow\left|f(x)-l\right|<\varepsilon$$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l$ hoặc $f(x_0^+)=l$

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

- Cho hàm số f xác định trên khoảng $X = (a, x_0)$

  Số thực l được gọi là giới hạn trái của hàm số $f(x)$ tại x_0 nếu với mỗi số dương ε cho trước bé tùy ý, tồn tại một số dương δ sao cho:

$$(\forall x \in X)\ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$ hoặc $f(x_0^-) = l$.

Nhận xét : Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ là

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = l.$$

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

❖ C. Giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực

Các giới hạn khi $x_0 = \pm\infty, l = \pm\infty$ được định nghĩa như sau:

Cho hàm số f xác định trên tập $X = (a,b) \setminus \{x_0\}, x_0 \in (a,b)$.

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ nếu với mỗi số dương A cho trước lớn tùy ý, tồn tại một số dương δ sao cho:

$$(\forall x \in X)\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ nếu với mỗi số âm A cho trước nhỏ tùy ý, tồn tại một số dương δ sao cho:

$$(\forall x \in X)\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < A$$

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

❖ 2. Cho hàm số f xác định trên khoảng $X = (a, +\infty)$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} : (\forall x \in X)\, x > A \Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ nếu

$$\forall A > 0, \exists B \in \mathbb{R} : (\forall x \in X)\, x > B \Rightarrow f(x) > A$$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ nếu

$$\forall A < 0, \exists B \in \mathbb{R} : (\forall x \in X)\, x > B \Rightarrow f(x) < A$$

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

❖ 3. Cho hàm số f xác định trên khoảng $X = (-\infty, a)$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} : (\forall x \in X)\, x < A \Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ nếu $\forall A > 0, \exists B \in \mathbb{R} : (\forall x \in X)\, x < B \Rightarrow f(x) > A$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ nếu $\forall A < 0, \exists B \in \mathbb{R} : (\forall x \in X)\, x < B \Rightarrow f(x) < A$
- Tương tự, ta có các định nghĩa $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty, \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

Ví dụ: Bằng định nghĩa, hãy chứng minh rằng

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

Giải:

$$|\sin x| \le |x|, \forall x$$

$\forall \varepsilon > 0$, lấy $\delta = \varepsilon$

$$(\forall x): 0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |\sin x - 0| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

Ví dụ: Bằng định nghĩa, chứng minh rằng

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

Giải:

$$\forall\varepsilon>0, \left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x>\frac{1}{\varepsilon} \text{ hoặc } x<-\frac{1}{\varepsilon}$$

Vậy $\forall\varepsilon>0, \exists A=\frac{1}{\varepsilon} (\forall x) x>A \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon \quad \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

$$\forall\varepsilon>0, \exists B=-\frac{1}{\varepsilon} (\forall x) x<B \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon \quad \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

2. Tính chất của hàm số có giới hạn

A. Sự liên hệ với dãy số

Định lí : Giả sử X là một khoảng chứa điểm x_0 và f là hàm số xác định trên tập hợp $X\setminus\{x_0\}$.

Khi đó:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \left(\forall\{x_n\}\subset X\setminus\{x_0\}\right)\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$$

Nhận xét : *Định lí đúng cả khi* $x_0=\pm\infty, l=\pm\infty$

Ví dụ : Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$

Giải:

Đặt $f(x) = \sin x$.

Lấy dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.

Mặt khác, nếu lấy dãy $\{x_n\}$ với $x_n = 2n\pi$ ta cũng có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

nhưng $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq 1$.

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

*** Tương tự, không tồn tại** $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$

B. Tính duy nhất của giới hạn

Định lí : Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ thì l là duy nhất.

C. Tính bị chặn

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ thì $f(x)$ bị chặn trong một lân cận đủ bé của x_0 $(x \neq x_0)$

Chứng minh:

Lấy $\varepsilon = 1,\ \exists\delta > 0: (\forall x)\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < 1.$

Suy ra $|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| \leq 1 + |l|.$

D. Tính chất thứ tự của giới hạn và nguyên lí kẹp.

Định lí: Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, khi đó

1. Nếu $c < l$ thì trong lân cận đủ bé của x_0 ta có $c < f(x)$.
2. Nếu $l < d$ thì trong lân cận đủ bé của x_0 ta có $f(x) < d$.
3. Nếu $c < l < d$ thì trong lân cận đủ bé của x_0 ta có $c < f(x) < d$.

Chú ý: Định lí trên không còn đúng khi thay các bất đẳng thức ngặt bằng các bất đẳng thức không ngặt.

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Định lí: Giả sử $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. Khi đó

1. Nếu $c \le f(x)$ trong lân cận của x_0 thì $c \le l$

2. Nếu $f(x) \le d$ trong lân cận của x_0 thì $l \le d$

3. Nếu $c \le f(x) \le d$ trong lân cận của x_0 thì $c \le l \le d$.

Định lí: (Nguyên lí kẹp)

Cho ba hàm số f, g, h thoả mãn các điều kiện:

$f(x) \le g(x) \le h(x)$ với mọi x trong lân cận nào đó của x_0

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$.

Khi đó $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$.

Định lí:

Giả sử $f(x) \le g(x)$ với mọi x trong lân cận nào đó của x_0 và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

Chú ý:

* Định lí cũng được chứng minh tương tự đối với các trường hợp $x_0 = +\infty,\ x_0 = -\infty$

* Định lí cũng được phát biểu tương tự khi $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty$.

❖ E. Các phép tính đại số của hàm có giới hạn

Định lí (Trường hợp giới hạn là hữu hạn):

1. $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l \Rightarrow |f(x)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} |l|$.

2. $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |f(x)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

3. $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l_1$ và $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l_2 \Rightarrow f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l_1 + l_2$.

4. $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l \Rightarrow \lambda . f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \lambda l, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$.

5. $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ và $g(x)$ bị chặn trong lân cận của x_0

$$\Rightarrow f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

6. $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l_1$ và $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l_2 \Rightarrow f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l_1 l_2$.

7. $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l_1$ và $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l_2 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dfrac{l_1}{l_2}$.

Chú ý:

*** Đối với các giới hạn vô định, ta áp dụng các phép toán như trên tập số thực mở rộng**

*** Các dạng giới hạn sau là vô định:**

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}.$$

F. Giới hạn của hàm số hợp

Mệnh đề

Cho các hàm số $f : X \to Y,\ g : Y \to \mathbb{R}$

Giả sử $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ **và** $f(x) \neq y_0$ **với mọi** x

trong lân cận đủ bé của $x_0 \quad (x \neq x_0)$

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = l.$$

Khi đó $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = l.$

Chứng minh:

Với mọi $\varepsilon > 0$, vì $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = l$ nên $\exists \delta > 0$ sao cho

$$(\forall y \in Y): 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - l)| < \varepsilon$$

Do $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ **và** $f(x) \neq y_0$ **với mọi** $\boldsymbol{x}$ **trong lân cận đủ bé của** x_0 $(x \neq x_0)$ nên với $\delta > 0, \exists \delta_1 > 0:$

$$(\forall x \in X) 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow 0 < |f(x) - y_0| < \delta$$

Chứng tỏ $(\forall x \in X): \; 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(x)) - l| < \varepsilon$

Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = l.$

G. Giới hạn của hàm đơn điệu

Định lí:

Giả sử hàm số f **tăng trên** (a,b). **Khi đó**

Nếu f **bị chặn trên thì** $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$

Nếu f **không bị chặn trên thì** $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$

H. Giới hạn của hàm số sơ cấp

Nếu hàm số sơ cấp $f(x)$ xác định tại x_0 thì

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

3. Một số giới hạn đáng nhớ

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

Tổng quát: Nếu $u(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$ và $u(x)\neq 0$ với $\forall x\neq x_0$

(x đủ gần x_0)

thì $\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}\xrightarrow[x\to x_0]{}1$ và $\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}\xrightarrow[x\to x_0]{}e$

Ví dụ: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x \to 2}(x+2)$;

b) $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0^+}\dfrac{|x|}{x}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0^-}\dfrac{|x|}{x}$.

e) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{|x|}{x}$.

Giải:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 2 + 2 = 4\,;$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 6\,;$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x} = 1\,;$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x} = -1.$

Ví dụ 1.9: Tính

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Giải:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2(x-4).(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4).(\sqrt{2x+1}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2.2\sqrt{2}}{2.3}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$

Ví dụ: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

❖ Giải:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x.\sin(-x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.4=4$$

§3. Đại lượng vô cùng bé (VCB), đại lượng vô cùng lớn (VCL)

1. Đại lượng VCB

A. Định nghĩa:

B. Tính chất đại số của VCB

C. So sánh các VCB

D. Nhận xét:

2. Đại lượng VCL

§3. Đại lượng vô cùng bé (VCB), đại lượng vô cùng lớn (VCL)

1. Đại lượng VCB

A. Định nghĩa:

Ánh xạ $\alpha : X \to \mathbb{R}$ được gọi là đại lượng VCB khi x dần đến x_0 (hoặc vô cùng bé tại x_0) nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

(x_0 có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$).

* Tương tự, ta có các định nghĩa VCB khi $x \to x_0^+, x \to x_0^-$.

B. Tính chất đại số của các vô cùng bé

*Tổng của hữu hạn vô cùng bé tại x_0 là một vô cùng bé tại x_0.

*Tích của hữu hạn vô cùng bé tại x_0 là một vô cùng bé tại x_0.

* Tích của một VCB tại x_0 và một hàm số bị chặn trong lân cận của x_0 là một VCB tại x_0.

Đại lượng vô cùng bé (VCB)

❖ C. So sánh các VCB

* Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ thì α gọi là VCB cấp cao hơn β tại x_0,

kí hiệu $\alpha = o(\beta)$ tại x_0.

Khi đó, β gọi là VCB cấp thấp hơn α tại x_0.

* Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ thì α,β được gọi là các VCB

tương đương tại x_0.

Kí hiệu $\alpha \sim \beta$ tại x_0.

Đại lượng vô cùng bé (VCB)

❖ D. Nhận xét:

* Nếu $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ tại x_0 thì $\alpha\beta \sim \alpha_1\beta_1$ tại x_0.

* Nếu $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ tại x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

* Nếu $\alpha = o(\beta)\ khi\ x \to x_0$ **thì** $\alpha + \beta \sim \beta\ \ khi\ x \to x_0$

Đại lượng vô cùng bé (VCB)

* (Qui tắc ngắt bỏ các VCB cấp cao)

Nếu α là VCB cấp thấp nhất trong các VCB $\alpha_i, \quad (i = \overline{1, m})$

β là VCB cấp thấp nhất trong các VCB $\beta_j, \quad (j = \overline{1, n})$

(khi dần đến x_0) thì $$\lim_{x \to x_0} \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Đại lượng vô cùng lớn (VCL)

2. Đại lượng VCL

A. Định nghĩa:

Ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}$ được gọi là đại lượng VCL khi x dần đến x_0 (hoặc VCL tại x_0) nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

(x_0 có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$).

Đại lượng vô cùng lớn (VCL)

❖ B. Tính chất của các VCL

* Tổng của hữu hạn VCL cùng dấu tại x_0 là một VCL tại x_0

Tích của hữu hạn VCL tại x_0 là một VCL tại x_0

* Nếu $f(x)$ là VCL tại x_0 thì $\dfrac{1}{f(x)}$ là vô cùng bé tại x_0.

Đại lượng vô cùng lớn (VCL)

❖ C. So sánh các VCL

* Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ thì f gọi là VCL cấp cao hơn g tại x_0,

hay g là VCL cấp thấp hơn f tại x_0.

* Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ thì f, g được gọi là các VCL

tương đương tại x_0.

Kí hiệu $f\sim g$ khi $x\to x_0$.

❖ D. Nhận xét:

* Nếu $f \sim f_1,\ g \sim g_1$ tại x_0 thì $fg \sim f_1 g_1$ tại x_0.

* Nếu $f \sim f_1,\ g \sim g_1$ tại x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

* Nếu f là VCL cấp cao hơn g tại x_0 thì $f + g \sim f$ tại x_0.

* (Qui tắc ngắt bỏ các VCL cấp thấp)

Giả sử f là VCL cấp cao nhất trong các VCL $f_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$

g là VCL cấp cao nhất trong các VCL $g_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$, (tại x_0).

Khi đó:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{n} g_j(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

❖ **Ví dụ :** Tính các giới hạn:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\left(\sin x.\cos\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{b) } \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$

Giải

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\sin x = 0,\ \left|\cos\frac{1}{x}\right| \le 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\sin x.\cos\frac{1}{x} = 0;$$

$$\text{b) } \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0,\ |\sin x| \le 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0.$$

❖ **Ví dụ :** Tính các giới hạn:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 4x}$$

$$\text{b) } \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - x^3}{\sin^2 x}$$

Giải:

a) $\sin 2x \sim 2x, \sin 4x \sim 4x$ tại 0 nên

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x} = \frac{1}{2};$$

$$\text{b)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^3}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}=1.$$

Ví dụ: Tìm các giới hạn:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{2x^2-2}$$

$$\text{b)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+2}$$

Giải:

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{2x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\text{b)} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Chú ý:

Đối với các VCL và VCB nói chung, $f \sim g$ và $f_1 \sim g_1$ tại x_0 không suy ra $f + f_1$ tương đương với $g + g_1$ tại x_0.

Ví dụ:

$$f(x) = x^3 + x^2, \quad g(x) = -x^3 + x^2$$

$$f_1(x) = g_1(x) = -x^2 \quad \text{(tại 0).}$$

§ 4. HÀM SỐ LIÊN TỤC

1) Khái niệm hàm số liên tục

A. Hàm số liên tục tại một điểm

B. Hàm số liên tục một phía

C. Điểm gián đoạn của hàm số

D. Hàm số liên tục trên một khoảng

E. Hàm số liên tục từng khúc

2) Các phép toán trên các hàm số liên tục

3) Các tính chất cơ bản của hàm số liên tục trên một đoạn

4) Các giới hạn đáng nhớ

§ 4. HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Khái niệm hàm số liên tục

A. Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số $f: X \to \mathbb{R}$ và $x_0 \in X$.

f được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(nghĩa là: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : (\forall x \in X)\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$).

B. Hàm số liên tục một phía

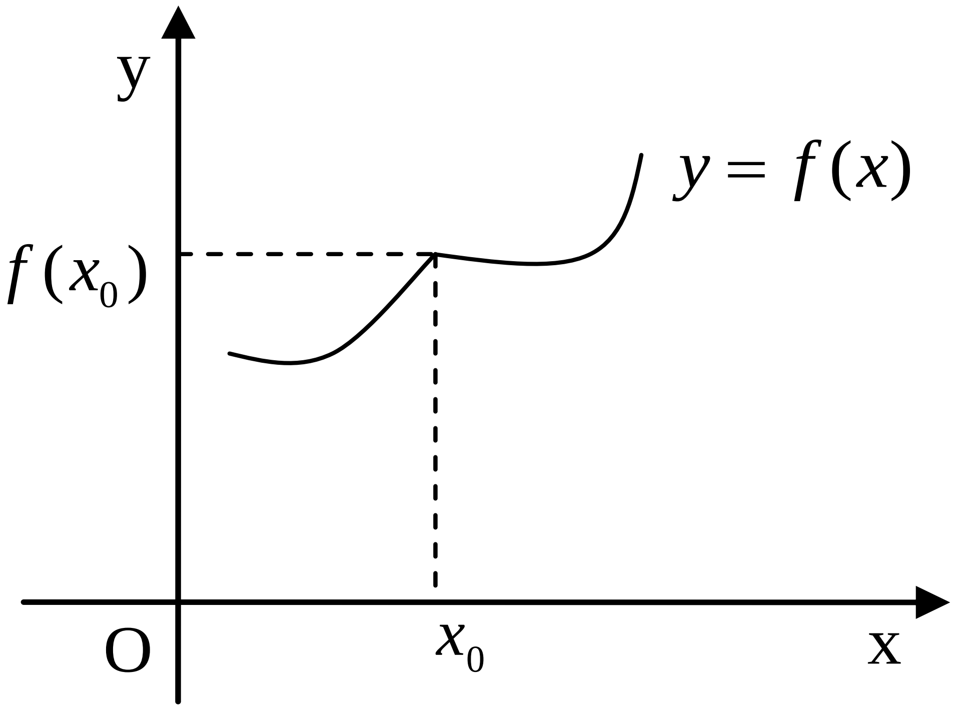
f được gọi là liên tục trái tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

f được gọi là liên tục phải tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

*** Nhận xét: f liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow f$ liên tục trái, liên tục phải tại x_0.**

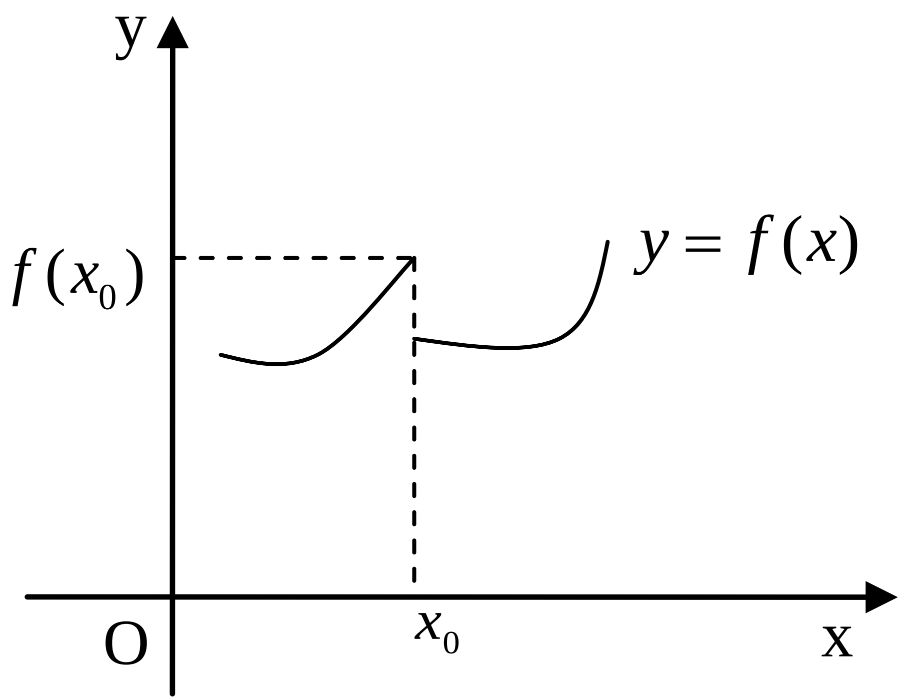
C. Điểm gián đoạn của hàm số

Nếu hàm số f không liên tục tại x_0 thì x_0 gọi là điểm gián đoạn của hàm số f .



Hàm số liên tục tại x_0

H.1.1



Hàm số không liên tục tại x_0

H.1.2

§ 4. HÀM SỐ LIÊN TỤC

* Phân loại điểm gián đoạn

Giả sử x_0 là điểm gián đoạn của hàm số *f*.

+ Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$ **thì** x_0 **gọi là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số** ***f*.**

+ Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$ **thì** x_0 **gọi là điểm gián đoạn loại 1 bỏ được của hàm số** ***f*.**

+ Nếu x_0 **không là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số** f **thì nó được gọi là điểm gián đoạn loại 2.**

D. Hàm số liên tục trên một khoảng

Hàm số f được gọi là liên tục trên (a,b) nếu f liên tục tại mọi $x \in (a,b)$.

Nếu hàm số f liên tục trên khoảng mở (a,b) và liên tục trái tại b, liên tục phải tại a thì ta nói f liên tục trên đoạn $[a,b]$.

E. Hàm số liên tục từng khúc

Hàm số f **được gọi là liên tục từng khúc trên** $\left[a,b\right]$ **nếu tồn tại** $a_1, a_2, ..., a_n \ (n \in \mathbb{N}^*)$ *sao cho* $a = a_1 < a_2 < ... < a_n = b$ **và** f **liên tục trên các khoảng** (a_i, a_{i+1}), f **có giới hạn phải hữu hạn tại** a_i, **có giới hạn trái hữu hạn tại** a_{i+1} $(i = 1, 2, ..., n-1)$

Ví dụ: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ **trên** $\left[0,4\right]$

2. Các phép toán trên các hàm số liên tục

Định lí :

Cho các hàm số $f, g : X \to \mathbb{R},\ x_0 \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}$

Nếu f, g liên tục tại x_0 thì:

$|f|,\ \ f+g, \lambda f,\ \ f.g$ **liên tục tại** x_0

$\dfrac{f}{g}$ **liên tục tại** x_0 **nếu** $g(x_0) \neq 0.$

Định lí trên cũng được phát biểu tương tự với các hàm liên tục trên khoảng X.

§ 4. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Định lí :

Cho các hàm số $f: X \to Y,\ \ g: Y \to \mathbb{R}$

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in Y$ và g liên tục tại y_0. Khi đó

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(y_0) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)).$$

Hệ quả:

Cho $f: X \to Y;\ \ g: Y \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$.

Nếu $f(x)$ liên tục tại x_0 và $g(y)$ liên tục tại $y_0 = f(x_0)$ thì hàm hợp $g(f(x))$ liên tục tại x_0.

Nhận xét:

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$

thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \quad a^b$

Ví dụ: Tính

$$a)\quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-2\sqrt{x}}{1+x}}$$

$$b)\quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^{\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}}$$

Ví dụ: Tính

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

❖ Giải:

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{1+x^2}\right)^{\left(-\frac{1+x^2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2x^2}{x^2+1}\right)}=e^{-2};$$

b) $$(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}\xrightarrow[x\to 0]{}e$$

Định lí :

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và tăng ngặt (giảm ngặt) trên khoảng X . Khi đó f là một song ánh từ X lên khoảng $f(X)=Y.$ Hàm số ngược $f^{-1}:Y\to X$ cũng là hàm liên tục và tăng ngặt (giảm ngặt) trên *Y.*

Định lí :

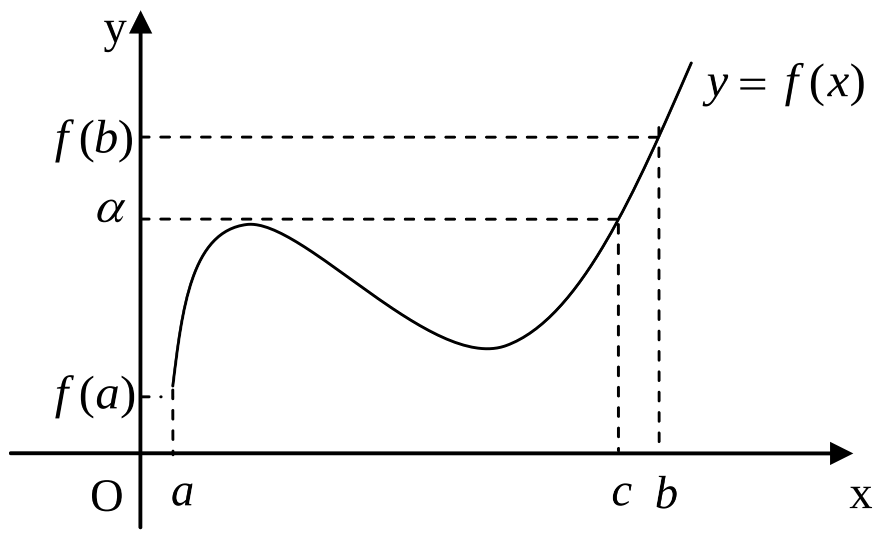
Hàm số sơ cấp $f(x)$ xác định tại x_0 thì liên tục tại x_0

3. Các tính chất cơ bản của hàm số liên tục trên một khoảng đóng

a. Tính trù mật

Định lí:(Định lí Bolzano- Cauchy)

Nếu hàm số f liên tục trên $[a, b]$ thì f nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$ (nghĩa là nếu α là một số thực nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ thì $\exists c \in [a,b]$ sao cho $f(c) = \alpha$).



H.1.3

Hệ quả:

Giả sử f liên tục trên $\left[a,b\right]$. Nếu $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a,b)$ sao cho $f(c)=0$.

Ví dụ :

Cho $f:\left[a,b\right]\to\left[a,b\right]$ là hàm số liên tục trên $\left[a,b\right]$.

Chứng minh rằng tồn tại $c\in\left[a,b\right]$ sao cho $f(c)=c$.

Giải:

Xét hàm số $\varphi(x)=f(x)-x$. Dễ thấy φ liên tục trên $\left[a,b\right]$.

Có $\varphi(a)\geq 0,\varphi(b)\leq 0\Rightarrow\varphi(a).\varphi(b)\leq 0$

$\Rightarrow\exists c\in\left[a,b\right]$ sao cho $\varphi(c)=0\Rightarrow f(c)=c.$

b. Tính bị chặn

Định lí: (Định lí Weierstrass)

Nếu f **liên tục trên** $[a,b]$ **thì**

***** f **bị chặn trên** $[a,b]$

***** f **đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên** $[a,b]$

c. Tính liên tục đều

*** Định nghĩa:**

Hàm số f được gọi là liên tục đều trên X nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ (\forall x, x' \in X)\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

*** Định lí (Định lí Heine)**

Nếu f liên tục trên $[a,b]$ thì f liên tục đều trên $[a,b]$

Ví dụ: Chứng minh rằng hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ **liên tục đều trên** $[0,+\infty)$.

Giải: **Lấy** a **bất kì thuộc** $(0,+\infty)$

Vì f **liên tục trên** $[0,a]$ **nên** f **liên tục đều trên** $[0,a]$

$$\forall \varepsilon>0,\ \forall x_1,x_2\in[a,+\infty)$$

$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\le\frac{|x_1-x_2|}{2\sqrt{a}}<\varepsilon\Leftrightarrow|x_1-x_2|<2\sqrt{a}\varepsilon.$$

Vậy, với mỗi $\varepsilon>0,$ **tồn tại** $\delta=2\sqrt{a}\varepsilon:\forall x_1,x_2\in[a,+\infty)$

$|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|<\varepsilon.$ **Vậy** f **liên tục đều trên** $[a,+\infty)$

4) Một số giới hạn đáng nhớ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\quad (0<a\neq 1),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

Nhận xét:

$$e^x - 1 \sim x \quad khi \ x \to 0$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad khi \quad x \to 0.$$