4.1 KHÁI NIỆM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

4.1.1 Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình tuyến tính n ẩn có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \textbf{(4.1)}$$

trong đó $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n ẩn ,

a_{ij} là hệ số của ẩn thứ j trong phương trình i,

b_i là vế phải của phương trình thứ i; $i = 1,\ldots, m$; $j = 1,\ldots, n$.

- Khi các vế phải $b_i = 0$ thì hệ phương trình được gọi là *thuần nhất*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- *Nghiệm của hệ phương trình* là bộ gồm n số $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ sao cho khi thay vào hệ phương trình ta có các đẳng thức.
- Giải một hệ phương trình là đi tìm tập hợp nghiệm của hệ.
- Hai hệ phương trình cùng ẩn là tương đương nếu tập hợp nghiệm của chúng bằng nhau.

4.1.2 Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Xét đẳng thức

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A được gọi là ma trận hệ số, B ma trận vế sau và X ma trận ẩn

- Hệ phương trình được viết lại dưới dạng ma trận $AX = B$

4.1.3 Dạng véc tơ của hệ phương trình tuyến tính

- Nếu ta ký hiệu véc tơ cột thứ i của ma trận A là $v_i = (a_{1i},\ldots,a_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ và véc tơ vế sau $b = (b_1,\ldots,b_m) \in \mathbb{R}^m$.
- Hệ phương trình được viết dưới dạng véc tơ

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n = b.$$

- Với cách viết này ta thấy rằng hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$b \in \operatorname{span}\left\{ v_1,\ldots,v_n \right\}.$$

Ví dụ 4.1 Xét hệ phương trình viết dưới dạng tổng quát

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \end{cases}$$

Hệ phương trình viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$ Hoặc $$x_1\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Xét các véc tơ:

$$v_1=(2,4,8),\ v_2=(2,3,5),\ v_3=(-1,-1,-3),\ v_4=(1,2,4);\ b=(4,6,12).$$

Hệ phương trình trên có thể viết dưới dạng véc tơ:

$$x_1(2,4,8)+x_2(2,3,5)+x_3(-1,-1,-3)+x_4(1,2,4)=(4,6,12)$$

4.2 ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM

Định lý 4.1: (Kronecker-Capelli)

Hệ phương trình (4.1) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A)=r(\tilde{A})$

trong đó $\tilde{A}$ là ma trận có được bằng cách bổ sung thêm vào ma trận hệ số A một cột cuối là vế phải của hệ phương trình

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Hệ (4.1) có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$x_1v_1+x_2v_2+\ldots+x_nv_n=b \Leftrightarrow b\in \operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_n\} \Leftrightarrow r(v_1,\ldots,v_n)=r(v_1,\ldots,v_n,b)$$

Do đó $r(A)=r(\tilde{A})$

Ví dụ 4.2 Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \end{cases}$$

Ma trận hệ số

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ma trận bổ sung cột cuối

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & -3 \end{vmatrix}=4\neq 0$$

$3\le r(A)\le r(\tilde{A})\le 3$

Hạng $r(A)=r(\tilde{A})=3$

Do đó hệ phương trình có nghiệm

4.3 PHƯƠNG PHÁP CRAMER

Hệ n phương trình tuyến tính n ẩn có ma trận hệ số A có định thức khác không được gọi là hệ Cramer.

Định lý 4.2: Mọi hệ Cramer đều tồn tại duy nhất nghiệm.

Hệ Cramer n ẩn

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i\ ,\ i=1,\ldots,n$$

có nghiệm

$$x_i=\frac{D_i}{D};\ i=1,\ldots,n$$

Trong đó $D=\det A=D_{\mathscr{B}}\{v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_n\}$

$$D_i=D_{\mathscr{B}}\{v_1,\ldots,v_{i-1},b,v_{i+1},\ldots,v_n\}$$

D_i là định thức của hệ các véc tơ cột các hệ số của hệ phương trình nhưng véc tơ cột thứ i được thay bởi véc tơ cột vế sau.

$\det(A) \neq 0, \Rightarrow$ hệ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$

Do đó b được biểu diễn duy nhất thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Nghĩa là tồn tại duy nhất $x_1, x_2, \dots, x_n$ sao cho

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = b$$

Gọi $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$

$$D_i = D_{\mathscr{B}}\{v_1, \dots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \dots, v_n\} = D_{\mathscr{B}}\left\{v_1, \dots, v_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k v_k, v_{i+1}, \dots, v_n\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k D_{\mathscr{B}}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_k, v_{i+1}, \dots, v_n\}$$

$$= x_i D_{\mathscr{B}}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\} = x_i D \quad \Rightarrow x_i = \frac{D_i}{D},\ i = 1, \dots, n$$

Ví dụ 4.3: Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 22 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 66$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -22 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 44$$

Do đó hệ có nghiệm $x = \dfrac{66}{22} = 3,\ y = \dfrac{-22}{22} = -1,\ z = \dfrac{44}{22} = 2$

Ví dụ 4.4 Giải và biện luận theo tham số λ hệ phương trình

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases}$$

Ta có $\det A = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^3$

- Khi $\lambda \neq -3,\ \lambda \neq 1$: Hệ đã cho là hệ Cramer nên có nghiệm duy nhất $$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda + 3}$$
- Khi $\lambda = 1$: $r(A) = r(\widetilde{A}) = 1$ Hệ phương trình có vô số nghiệm $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$ với x_2, x_3, x_4 tuỳ ý
- Khi $\lambda = -3$: $\det A = 0 \Rightarrow r(A) < 4,\ r(\widetilde{A}) = 4$ hệ vô nghiệm

4.4. PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Định lý 4.3

Hệ Cramer $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ ; i = 1, \dots, n$

với các ma trận tương ứng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

có nghiệm dạng ma trận $X = A^{-1}B$

Ví dụ 4.5 Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = c \end{cases}$

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ Có ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Vậy hệ có nghiệm

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40a + 16b + 9c \\ 13a - 5b - 3c \\ 5a - 2b - c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -40a + 16b + 9c \\ x_2 = 13a - 5b - 3c \\ x_3 = 5a - 2b - c \end{cases}$$

Nhận xét 4.1

Từ công thức đổi tọa độ (3.12), công thức (4.22) về ma trận chuyển cơ sở và từ ví dụ trên ta thấy

Nếu $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \forall i = 1,\dots,n \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} b_j = x_i, \forall i = 1,\dots,n \end{cases}$ và $A = \left[a_{ij}\right]$ thì $A^{-1} = \left[c_{ij}\right]$

Nói cách khác $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ thì $B = A^{-1}$

4.5. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP KHỬ GAUSS

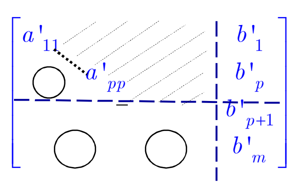
Khi thực hiện các biến đổi sơ cấp sau lên các phương trình của hệ

- Đổi chỗ hai phương trình;
- Nhân, chia một số khác 0 vào cả 2 vế của một phương trình;
- Cộng vào một phương trình một tổ hợp tuyến tính các phương trình khác

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \dots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i & \text{Phương trình thứ } \boldsymbol{i} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j & \text{Phương trình thứ } \boldsymbol{j} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

thì sẽ được hệ mới tương đương.

Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp để đưa hệ phương trình về hệ tương đương với ma trận bổ sung của hệ mới có dạng



trong đó $a'_{11} \dots a'_{pp} \neq 0$

- Nếu một trong các $b'_{p+1},\dots,b'_m$ khác 0 thì có phương trình vế trái bằng 0, vế phải khác 0 nên hệ vô nghiệm.
- Nếu $b'_{p+1}=\dots=b'_m=0$ thì hệ đã cho tương đương với hệ p phương trình

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1+a'_{12}x'_2+ \quad \dots \quad +a'_{1n}x'_n=b'_1 \\ \qquad a'_{22}x'_2+ \quad \dots \quad +a'_{2n}x'_n=b'_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a'_{pp}x'_p+\dots+a'_{pn}x'_n=b'_p \end{cases}$$

Ta được các nghiệm $x'_1,\dots,x'_p$ phụ thuộc $x'_{p+1},\dots,x'_n$.

- Có thể nhận thấy rằng khi ta biến đổi tương đương lên các phương trình thì thực chất là biến đổi các hệ số của các phương trình.
- Vì vậy khi thực hành ta chỉ cần biến đổi ma trận bổ sung của hệ để đưa về ma trận có dạng dưới đường chéo bằng 0, từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình.
- Khi biến đổi ta nên để hệ số của phương trình dễ triệt tiêu hệ số phương trình khác lên hàng trên.

Ví dụ 4.6 Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=a \\ 2x_1+5x_2+3x_3=b \\ x_1 \qquad +8x_3=c \end{cases}$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 0 & 8 & c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 2 & -5 & a-c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40a+16b+9c \\ 0 & 1 & 0 & 13a-5b-3c \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x_1=-40a+16b+9c \\ x_2=13a-5b-3c \\ x_3=5a-2b-c \end{cases}$

Ví dụ 4.7 Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8 \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9 \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7 \\ x_1+8x_2-7x_3=12 \end{cases}$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=2 \\ x_3=1 \end{cases}$$

Ví dụ 4.8 Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4=3 \\ 4x_1+x_2+4x_3+mx_4=2 \\ x_1-6x_2-9x_3-20x_4=-11 \\ 2x_1+3x_2+6x_3+8x_4=5 \end{cases} \quad \bar{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 20 & 32 & 64 & 36 \\ 0 & 15 & 24 & 48 & 27 \\ 0 & -5 & -8 & m-16 & -8 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & \frac{16}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \end{bmatrix}$$

♦ $m=0$: hệ vô nghiệm; ♦ $m\neq 0$: hệ có vô số nghiệm

$$x_4=\frac{1}{m},\ x_2=\frac{9}{5}-\frac{16}{5m}-\frac{8}{5}x_3,\ x_1=-\frac{1}{5}+\frac{4}{5m}-\frac{3}{5}x_3\ ;\ x_3 \text{ tùy ý}$$

4.6 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có ít nhất nghiệm tầm thường

$$x_1=\ldots=x_n=0.$$

Nhận xét 4.2

Vế sau của hệ phương trình thuần nhất luôn bằng 0 do đó không thay đổi khi ta giải hệ theo phương pháp khử Gauss. Vì vậy để giải hệ phương trình thuần nhất ta chỉ cần biến đổi ma trận hệ số của hệ.

Ví dụ 4.10 Giải hệ phương trình thuần nhất $\begin{cases} 2x_1-3x_2-3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1-7x_2-5x_3-6x_4=0 \\ 3x_1-5x_2-4x_3-4x_4=0 \end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 3 & -5 & -4 & -4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1-3x_3+2x_4=0 \\ x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3x_3-2x_4 \\ x_2=x_3-2x_4 \end{cases} \quad x_3,x_4 \text{ tùy ý.}$$

Định lý 4.5 Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a) Hệ phương trình chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $r(A)=n$.

b) Nếu $r(A)=p<n$ thì tập hợp nghiệm của hệ phương trình là không gian véc tơ con $n-p$ chiều của $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 4.11 Tập $W_2 = \left\{ u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x - 3y + 4z = 0 \right\}$

là không gian con của $\mathbb{R}^3$ có chiều $\dim W_2 = 3 - 1 = 2.$

Ví dụ 4.12

Đặt V_1, V_2 lần lượt là tập hợp nghiệm của hệ phương trình (I) và hệ phương trình (II)

$$(I)\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

CHƯƠNG 4: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Hệ phương trình (I)

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 5 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 5 & 30 & -25 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases} \quad v = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in V_1 \Leftrightarrow \begin{aligned} v &= (8x_3 - 7x_4, -6x_3 + 5x_4, x_3, x_4) \\ &= x_3(8,-6,1,0) + x_4(-7,5,0,1) \end{aligned}$$

$$V_1 = \left\{ x_3(8,-6,1,0) + x_4(-7,5,0,1) \middle| x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 3 & -5 & -4 & -4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in V_2 \Leftrightarrow v = (3x_3 - 2x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4) = x_3(3,1,1,0) + x_4(-2,-2,0,1)$$

$$V_2 = \left\{ x_3(3,1,1,0) + x_4(-2,-2,0,1) \middle| x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

CHƯƠNG 4: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

$V_1 \cap V_2$ là không gian nghiệm của hệ 6 phương trình

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 5 & 7 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 3 & -5 & -4 & -4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Do đó hệ phương trình có nghiệm:

$x_1 = -x_2 = x_3 = x_4$; x_4 tùy ý

$$V_1 \cap V_2 = \left\{ x_4(1,-1,1,1) \middle| x_4 \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \dim V_1 + V_2 = 3$$

CHƯƠNG 4: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Ví dụ 4.13 Hệ phương trình thuần nhất có n phương trình $n+1$ ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_{2,n+1}x_{n+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + a_{n,n+1}x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Đặt D_j ($j = 1, \ldots, n+1$) là định thức của ma trận vuông cấp n có được bằng cách xóa cột thứ j của ma trận hệ số

$$A = \left[a_{ij} \right]_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n+1}}}$$

Xóa cột thứ j

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{n,n+1} \end{vmatrix}$$

Nếu tồn tại $D_{j_0} \neq 0$ thì $r(A) = n$, do đó không gian nghiệm của hệ có chiều bằng 1 và tập hợp nghiệm có dạng

$$\left\{ t\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_j^0, \dots, x_{n+1}^0\right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

Trong đó $\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_j^0, \dots, x_{n+1}^0\right)$

là một nghiệm khác không của hệ.

Khai triển theo hàng thứ nhất định thức cấp $n+1$

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_j & \dots & y_{n+1} \\ a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{n,n+1} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = y_1(-1)^2 D_1 + y_2(-1)^3 D_2 + \dots + y_j(-1)^{j+1} D_j + \dots + y_{n+1}(-1)^{n+2} D_{n+1}$$

$$\boldsymbol{D} = y_1 D_1 + y_2(-D_2) + \dots + y_j\left((-1)^{j+1} D_j\right) + \dots + y_{n+1}\left((-1)^n D_{n+1}\right)$$

Khai triển theo hàng thứ nhất định thức cấp $n+1$

$$\boldsymbol{D} = y_1 D_1 + y_2(-D_2) + \dots + y_j\left((-1)^{j+1} D_j\right) + \dots + y_{n+1}\left((-1)^n D_{n+1}\right)$$

Thay $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ bởi các hệ số của phương trình thứ i; $i = 1, \dots, n$

$$y_1 = a_{i1},\ y_2 = a_{i2},\ \dots,\ y_{n+1} = a_{i,n+1}$$

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_j & \dots & y_{n+1} \\ a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{n,n+1} \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i,n+1} \\ a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{n,n+1} \end{vmatrix} = 0$$

Khi đó định thức $\boldsymbol{D}$ tương ứng bằng 0 (vì hàng thứ 1 và hàng thứ $i+1$ bằng nhau).

$$y_1 D_1 + y_2(-D_2) + \dots + y_j\left((-1)^{j+1} D_j\right) + \dots + y_{n+1}\left((-1)^n D_{n+1}\right) = \boldsymbol{D}.$$

Thay $y_1 = a_{i1},\ y_2 = a_{i2},\ \dots,\ y_{n+1} = a_{i,n+1}$ vào đẳng thức trên ta được

$$a_{i1}(D_1) + a_{i2}(-D_2) + \dots + a_{ij}\left((-1)^{j+1} D_j\right) + \dots + a_{i,n+1}\left((-1)^n D_{n+1}\right) = 0$$

Với mọi i; $i = 1, \dots, n$

Điều này chứng tỏ $\left(D_1, -D_2, \dots, (-1)^{j+1} D_j, \dots, (-1)^n D_{n+1}\right)$

là một nghiệm khác không của hệ phương trình.

Do đó tập hợp nghiệm có dạng

$$\left\{ t\left(D_1, -D_2, \dots, (-1)^{j+1} D_j, \dots, (-1)^n D_{n+1}\right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Định lý 4.6

Giả sử $(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$ là một nghiệm của phương trình không thuần nhất **(*)**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó $(x_1,\dots,x_n)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng **(**)**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (**)$$

khi và chỉ khi

$(x_1+\bar{x}_1,\dots,x_n+\bar{x}_n)$ là nghiệm của hệ phương trình **(*)**.

Ví dụ 4.12 Giải và biện luận theo tham số a, b hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = 1 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = 1 \end{cases}$$

Hệ có một nghiệm riêng

$\bar{x}_1 = 1,\ \bar{x}_2 = 0,\ \bar{x}_3 = 0$

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix}$

- Trường hợp $a = b$: $r(A) = 1$, hệ phương trình tương đương với một phương trình do đó có vô số nghiệm

  $x_1 = 1 - ax_2 - a^2x_3 \quad x_2, x_3$ tùy ý.

- Trường hợp $a \neq b$: $r(A) = 2$, do đó không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất có chiều bằng 1.

Theo ví dụ 4.12 không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất tương ứng có chiều bằng 1 và có dạng

$$\{t(D_1,-D_2,D_3) \mid t\in\mathbb{R}\} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} = ab(b-a) \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ 1 & b^2 \end{vmatrix} = (a+b)(b-a) \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = b-a$$

Do đó $(ab,-(a+b),1)$

là một nghiệm khác không của hệ phương trình thuần nhất

Nghiệm của hệ thuần nhất $\begin{cases} x_1 = abt \\ x_2 = -(a+b)t \\ x_3 = t;\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$ Nghiệm của hệ đã cho $\begin{cases} x_1 = 1+abt \\ x_2 = -(a+b)t \\ x_3 = t;\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$