## 3.1 MA TRẬN

- Lý thuyết ***ma trận*** thực sự ra đời từ đầu thế kỷ 19, mặc dù nhiều loại bảng số có tính chất đặc biệt đã được biết đến từ hàng trăm năm nay.
- Các ma trận vuông xuất hiện đầu tiên ở đầu thế kỷ 19 trong các công trình về dạng toàn phương và về các phép thế tuyến tính.
- Phép nhân hai ma trận vuông cấp 3 được Gauss (Gau-xơ) đưa ra vào năm 1801.
- Tên gọi ma trận (Matrix) được nhà toán học Anh Sylvester (Synvét) đưa ra năm 1850.
- Cayley (Kê-li) là người đầu tiên mô tả một cách tổng quát các phép tính với các ma trận bất kỳ và ma trận nghịch đảo (1858).
- Peano là người đầu tiên đưa ra cách biểu diễn một ánh xạ tuyến tính qua các ma trận. Còn Gauss là người đầu tiên sử dụng ma trận để nghiên cứu các dạng toàn phương.



CHƯƠNG 3: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

### 3.1.1 KHÁI NIỆM MA TRẬN

- Một bảng số có $m$ hàng $n$ cột

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

được gọi là một **ma trận cỡ $m \times n$**

$a_{ij}$ là phần tử ở hàng thứ $i$ và cột $j$.

- Tùy theo tính chất các phần tử $a_{ij}$ ta có ma trận tương ứng.
- Ma trận $A$ được gọi là ma trận nguyên (thực, phức) nếu các phần tử $a_{ij}$ là các số nguyên (số thực, số phức).
- Nếu không chỉ rõ cụ thể thì ta xem $A$ là ma trận thực.



CHƯƠNG 3: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

- Ma trận $A$ cỡ $m \times n$ có thể được viết tắt dạng

$$A=\left[a_{ij}\right]_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}} \quad \text{hoặc} \quad A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

- Khi $m=n$ ta nói $A$ là ma trận ***vuông cấp n***
- Tập hợp tất cả các ma trận cỡ $m \times n$ được ký hiệu $\mathcal{M}_{m\times n}$
- Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp $n$ được ký hiệu $\mathcal{M}_n$

**Ví dụ 3.1** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & \pi \\ -3 & 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ là một ma trận cỡ $2\times 3$



CHƯƠNG 3: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

- ***Hai ma trận bằng nhau*** khi cùng cỡ và có các phần tử tương ứng đều bằng nhau

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[b_{ij}\right]_{m'\times n'} \Leftrightarrow \begin{cases} m=m' \\ n=n' \\ a_{ij}=b_{ij},\ \forall i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n} \end{cases}$$

**Ví dụ 3.2** $\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+w-1 & 2w+3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x=x+4 \\ 3y=x+y+6 \\ 3z=z+w-1 \\ 3w=2w+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=4 \\ 2y=x+6 \\ 2z=w-1 \\ w=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=1 \\ w=3 \end{cases}$$

## 3.1.2 CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN

### 3.1.2.1. Phép cộng ma trận

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[c_{ij}\right]_{m\times n},\ c_{ij}=a_{ij}+b_{ij};\forall i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n}$$

**Ví dụ 3.3** $\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 9 & 4 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 8 & 5\\ -3 & 1 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 5\\ 6 & 5 & 6\end{bmatrix}$

### 3.1.2.2. Phép nhân một số với ma trận

$$k\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ka_{ij}\right]_{m\times n}$$

**Ví dụ 3.4** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1/2 & -1 & 0\\ 3 & -8 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/4 & -1/2 & 0\\ 3/2 & -4 & 5\end{bmatrix}$





**Ví dụ 3.5** Tìm $x, y, z$ và $w$ thỏa mãn

$$3\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{bmatrix}$$

Thực hiện phép cộng ma trận và nhân một số với ma trận ta được

$$\begin{bmatrix}3x & 3y\\ 3z & 3w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+4 & x+y+6\\ z+w-1 & 2w+3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x=x+4\\ 3y=x+y+6\\ 3z=z+w-1\\ 3w=2w+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=4\\ 2y=x+6\\ 2z=w-1\\ w=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=4\\ z=1\\ w=3\end{cases}$$





**Tính chất 3.1**

Các tính chất sau đây đúng đối với các ma trận cùng cỡ $m\times n$

1) $A+(B+C)=(A+B)+C$

2) Ma trận có các phần tử đều bằng $0$ gọi là ma trận không và ký hiệu $\mathbf{0}$ thỏa mãn

$$A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A$$

3) $A+(-A)=\mathbf{0}$, trong đó $-A=\left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$

4) $A+B=B+A$





Ta cũng kiểm chứng được các tính chất sau đúng với mọi số thực $k, h$ với mọi ma trận cỡ $m\times n$

5) $k(A+B)=kA+kB$

6) $(k+h)A=kA+hA$

7) $k(hA)=(kh)A$

8) $1A=A$

- Với 8 tính chất này tập $\mathcal{M}_{m\times n}$ là một không gian véc tơ.
- Ký hiệu $E_{ij}$ là ma trận cỡ $m\times n$ có các phần tử đều bằng $0$ ngoại trừ phần tử ở hàng $i$ cột $j$ bằng 1.
- Hệ các ma trận $\left\{E_{ij}\,\middle|\,i=\overline{1,m}\ ;j=\overline{1,n}\right\}$ là một cơ sở của $\mathcal{M}_{m\times n}$

  $\dim\mathcal{M}_{m\times n}=m.n$

## CHƯƠNG 3: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

**Ví dụ 3.6**

Ma trận cỡ $2\times 3$ bất kỳ có thể biểu diễn duy nhất thành tổ hợp tuyến tính các ma trận $E_{ij}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{13}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ a_{21}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{23}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} + a_{23}E_{23}$$

$$\dim \mathcal{M}_{2\times 3} = 6$$



## CHƯƠNG 3: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

### 3.1.2.3 Phép nhân ma trận

Tích hai ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ và $B = \left[b_{ij}\right]_{p\times n}$

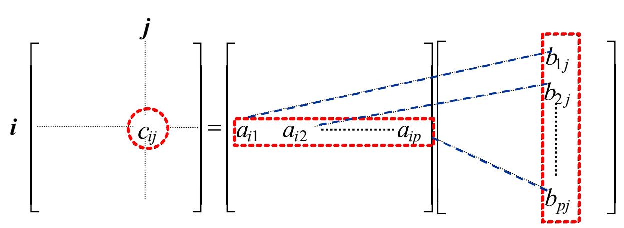
là ma trận cỡ $m \times n$ được ký hiệu và định nghĩa bởi $AB = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \quad \text{với mọi} \quad i = \overline{1,m}\ ;\ j = \overline{1,n}$$

- Tồn tại ma trận tích $AB$ khi số cột của ma trận $A$ bằng số hàng của ma trận $B$.
- Phần tử ở hàng thứ $i$ cột thứ $j$ của ma trận tích $AB$ bằng tổng của tích các phần tử hàng thứ $i$ của ma trận $A$ với các phần tử tương ứng cột thứ $j$ của ma trận $B$.



## CHƯƠNG 3: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC




- Vậy phần tử ở hàng thứ $i$ cột thứ $j$ của $AB$ bằng tổng của tích các phần tử hàng thứ $i$ của $A$ với các phần tử tương ứng cột thứ $j$ của $B$



## CHƯƠNG 3: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

**Ví dụ 3.7**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 3 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3z & y+3w \\ -x & -y \\ 2x+4z & 2y+4w \end{bmatrix}$$

- Ta thấy rằng tích của hai ma trận $A$ và $B$ định nghĩa được khi số cột của $A$ bằng số hàng của $B$.
- Vì vậy có thể định nghĩa $AB$ nhưng không định nghĩa được $BA$ nếu số cột của $B$ không bằng số hàng của $A$.
- Khi $A$, $B$ là hai ma trận vuông cùng cấp thì ta có đồng thời $AB$ và $BA$. Mặc dầu vậy chưa chắc có đẳng thức $AB = BA$.
- Nói cách khác tích ma trận không có tính giao hoán.





Chẳng hạn, xét

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 11 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





## Tính chất 3.2

Giả sử $A$, $B$, $C$ là các ma trận với số cột số hàng thích hợp để các phép toán sau xác định được, khi đó ta có các đẳng thức:

1) $A(BC) = (AB)C$ *tính kết hợp.*

2) $A(B+C) = AB + AC$ *tính phân phối bên trái phép nhân ma trận với phép cộng.*

3) $(B+C)A = BA + CA$ *tính phân phối bên phải phép nhân ma trận với phép cộng.*

4) Với mọi $k \in \mathbb{R}$, $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.





5) Với mọi số tự nhiên dương $n$ ta xét ma trận $I_n$ vuông cấp $n$ có các phần tử trên đường chéo bằng 1 và các phần tử ở vị trí khác đều bằng $0$.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Khi đó với mọi ma trận $A$ cỡ $m \times n$ ta có.

$$I_m A = A = AI_n$$

- Ma trận $I_n$ được gọi là ***ma trận đơn vị*** cấp $n$.

Chẳng hạn

Xét ma trận $A$ cỡ $2\times 3$ $\quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}$

$$AI_3=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}=A$$

$$I_2A=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}=A$$





Khác với phép nhân các số: tích hai số khác $0$ là một số khác $0$. Tuy nhiên ta có thể tìm được hai ma trận khác $\mathbf{0}$ có tích là ma trận $\mathbf{0}$.

Chẳng hạn

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0\\ 2 & 4 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 3 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$A,B\neq \mathbf{0}$ nhưng $AB=\mathbf{0}.$





### 3.1.2.4 Đa thức ma trận vuông

Giả sử $p(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_kt^k$ là một đa thức bậc $k$.

Với mọi ma trận $A$ vuông cấp $n$, ta định nghĩa đa thức của ma trận $A$ như sau:

$$p(A)=a_0I+a_1A+\cdots+a_kA^k.$$

**Ví dụ 3.8**

Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ và đa thức $p(t)=5-4t+2t^3$.

$$p(A)=5\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix} -13 & 52\\ 104 & -117\end{bmatrix}.$$





### 3.1.2.5 Ma trận chuyển vị

Cho ma trận $A$ cỡ $m\times n$, nếu ta đổi các hàng của ma trận $A$ thành các cột (và do đó các cột thành các hàng) thì ta được ma trận mới cỡ $n\times m$, gọi là ma trận chuyển vị của ma trận trên $A$, ký hiệu $A^t$

$$A^t=\left[c_{ij}\right]_{n\times m},\quad c_{ij}=a_{ji};i=\overline{1,n}\ ;j=\overline{1,m}$$

**Ví dụ 3.9**

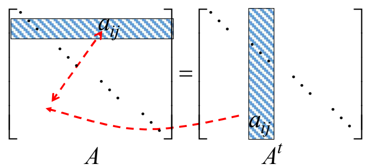
$$A=\begin{bmatrix} -4 & 1\\ 2 & 0\\ 5 & 9\end{bmatrix}\ \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix} -4 & 2 & 5\\ 1 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

**Tính chất 3.3**

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) $(kA)^t = kA^t$

3) $(AB)^t = B^t A^t$




- Nếu $A = A^t$ thì $A$ được gọi là ***ma trận đối xứng*** ($A$ là ma trận vuông có các phần tử đối xứng nhau qua đường chéo thứ nhất).
- $A = -A^t$ thì $A$ được gọi là ***phản đối xứng*** ($A$ là ma trận vuông có các phần tử đối xứng và trái dấu qua đường chéo thứ nhất, các phần tử trên đường chéo thứ nhất bằng $0$).





## 3.1.3 MA TRẬN CỦA MỘT HỆ VÉC TƠ

### 3.1.3.1 Định nghĩa ma trận của một hệ véc tơ

- Giả sử $V$ là không gian $n$ chiều với một cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ $\{v_1, \dots, v_m\}$ là một hệ véc tơ của $V$ có tọa độ trong cơ sở $\mathscr{B}$:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \ , j = 1,\dots,m$$

- Khi đó ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$

  có các cột là tọa độ của các véc tơ $\{v_1, \dots, v_m\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ gọi là ma trận của hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_m\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

- Ngược lại, với ma trận $A$ cỡ $n \times m$ cho trước thì ta có hệ $m$ véc tơ mà toạ độ của nó trong cơ sở $\mathscr{B}$ là các cột của $A$.









Nói riêng, nếu $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

ta ký hiệu

$$(u)_{\mathscr{B}} = (x_1, \dots, x_n) \qquad \left[u\right]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

**Ví dụ 3.10**

Xét hệ véc tơ $v_1 = (4,1,3,-2)$, $v_2 = (1,2,-3,2)$, $v_3 = (x,y,z,t)$

Có ma trận trong cơ sở chính tắc $\begin{bmatrix} 4 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 3 & -3 & z \\ -2 & 2 & t \end{bmatrix}$

### 3.1.3.2 Ma trận chuyển cơ sở

- Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ là hai cơ sở của $V$.
- Ma trận của hệ véc tơ $\mathscr{B}'$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ được gọi là ***ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$***.

Nghĩa là nếu $e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i$ , $j = 1,\dots,n$ thì $T = \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$

là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$.

$$\forall u \in V: u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x'_j\right) e_i.$$





- Ta có ***công thức đổi tọa độ***

$$\left[x_i\right]_{n\times 1} = \left[t_{ij}\right]_{n\times n} \left[x'_j\right]_{n\times 1}$$

$$\left[u\right]_{\mathscr{B}} = \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \left[u\right]_{\mathscr{B}'}, \quad \left[u\right]_{\mathscr{B}'} = \left[p_{ij}\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \left[u\right]_{\mathscr{B}}$$

- Nếu $A, A'$ lần lượt là ma trận của $\{v_1, \dots, v_n\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ và $\mathscr{B}'$ thì

$$A = \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} A' \quad \text{Hoặc} \quad A' = \left[p_{ij}\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} A$$





**Ví dụ 3.11**

Hai hệ véc tơ $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}, \mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2\}$

với $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ và $e'_1 = (1,1)$, $e'_2 = (4,3)$

là hai cơ sở của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$ (Xem ví dụ 2.16 Chương 2)

$$u = (x,y) = xe_1 + ye_2 = (4y-3x)e'_1 + (x-y)e'_2$$

$$(u)_{\mathscr{B}} = (x,y)$$

$$(u)_{\mathscr{B}'} = (4y-3x, x-y)$$





$\mathscr{B} = \{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$ $\quad \mathscr{B}' = \{e'_1 = (1,1),\ e'_2 = (4,3)\}$

- Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$ là $T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

do đó $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4y-3x \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$(u)_{\mathscr{B}'} = (4y-3x, x-y) \Rightarrow (e_1)_{\mathscr{B}'} = (-3,1); (e_2)_{\mathscr{B}'} = (4,-1)$$

- Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang cơ sở $\mathscr{B}$ là $P = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

do đó $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4y-3x \\ x-y \end{bmatrix}$

$\mathscr{B}=\{e_1=(1,0),\, e_2=(0,1)\}\qquad \mathscr{B}'=\{e'_1=(1,1),\, e'_2=(4,3)\}$

$(u)_{\mathscr{B}'}=(4y-3x, x-y)\Rightarrow (e_1)_{\mathscr{B}'}=(-3,1);\ (e_2)_{\mathscr{B}'}=(4,-1)$

Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang cơ sở $\mathscr{B}$ là

$$P=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Gọi $A, A'$ lần lượt là ma trận của hệ véc tơ sau trong cơ sở $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$

$$v_1=(4,-3),\ v_2=(5,8);\ v_3=(x,y)$$

$$A=\begin{bmatrix}4 & 5 & x\\ -3 & 8 & y\end{bmatrix}\Rightarrow A'=PA=\begin{bmatrix}-24 & 17 & 4y-3x\\ 7 & -3 & x-y\end{bmatrix}$$





## 3.1.4 HẠNG CỦA MA TRẬN

Ta gọi hạng của hệ các véc tơ cột của $A$ là ***hạng của ma trận $A$***

ký hiệu $\boldsymbol{r(A)}$.

### 3.1.4.1 Tìm hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp

- Ta tìm hạng của ma trận A thông qua tìm hạng của hệ véc tơ cột và sử dụng các kết quả sau.
- Hạng $r(S)$ của một hệ véc tơ $S$ của không gian $V$ là số véc tơ của một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $S$ hay là chiều của $\operatorname{span}S$ (xem Định lý 2.16).





- Vì vậy khi ta thực hiện liên tiếp các phép biến đổi sau, gọi là các phép biến đổi sơ cấp, thì $\operatorname{span}S$ không đổi do đó hạng của hệ không thay đổi:

  *1) Đổi chỗ cho nhau hai véc tơ của hệ*

  *2) Nhân vào một véc tơ của hệ một số khác* $0$

  *3) Cộng vào một véc tơ của hệ một tổ hợp tuyến tính các véc tơ khác của hệ*

- Vì vậy để tìm hạng của một ma trận ta thực hiện các biến đổi sơ cấp lên các cột (sau này ta sẽ chứng minh được rằng ta cũng có thể biến đổi theo các hàng) để đưa ma trận về dạng hình bậc thang, từ đó suy ra hạng của ma trận cần tìm.





**Ví dụ 3.12**

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 4\\ -1 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow[-2c_1+c_4\to c_4]{\substack{3c_1+c_2\to c_2\\ -4c_1+c_3\to c_3}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 7 & -7 & 0\\ -1 & -5 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2+c_3\to c_3]{\substack{c_1\to c_1\\ c_2\to c_2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 7 & 0 & 0\\ -1 & -5 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Vậy $r(A)=2$

$$B=\begin{bmatrix}-1&2&1&-1&1\\a&-1&1&-1&-1\\1&a&0&1&1\\1&2&2&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[c_5\to c_3]{\substack{c_1\to c_4\\c_2\to c_5\\c_3\to c_1\\c_4\to c_2}}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&2\\1&-1&-1&a&-1\\0&1&1&1&a\\2&-1&1&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{c_1\to c_1\\c_1+c_2\to c_2\\-c_1+c_3\to c_3\\c_1+c_4\to c_4\\-2c_1+c_5\to c_5}}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&0&-2&a+1&-3\\0&1&1&1&a\\2&1&-1&3&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{c_1\to c_1\\c_2\to c_3\\c_3\to c_2\\-(a+3)c_2+(a+1)c_3+2c_4\to c_4\\(3-2a)c_2-3c_3+2c_5\to c_5}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&-2&0&0&0\\0&1&1&0&0\\2&-1&1&2-2a&2-2a\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&-2&0&0&0\\0&1&1&0&0\\2&-1&1&2-2a&0\end{bmatrix}$$

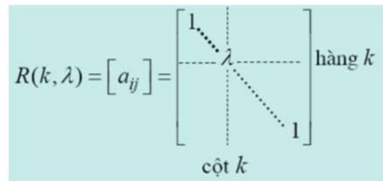
Vậy $r(B)=\begin{cases}4 & \text{nếu } a\neq 1\\3 & \text{nếu } a=1\end{cases}$





**3.1.4.2 Các ma trận tương ứng với các phép biến đổi sơ cấp**

Xét các ma trận vuông cấp $n$ sau:




$$a_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\1 & i=j\neq k\\\lambda & i=j=k\end{cases}$$

Chẳng hạn $R(2,\lambda)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$



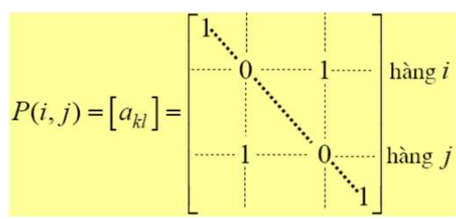


1) Nếu nhân $R(k,\lambda)$ vào bên phải của ma trận $A$ thì ma trận tích $AR(k,\lambda)$ có được bằng cách nhân thêm $\lambda$ vào cột $k$ của ma trận $A$.

$$\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\\a_4&b_4&c_4&d_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&\lambda b_1&c_1&d_1\\a_2&\lambda b_2&c_2&d_2\\a_3&\lambda b_3&c_3&d_3\\a_4&\lambda b_4&c_4&d_4\end{bmatrix}$$








$$a_{kl}=\begin{cases}1 & k=l\neq i;j\\0 & k=l \text{ và bằng } i \text{ hay } j\\1 & k=i, l=j\\1 & k=j, l=i\\0 & \text{trong các trường hợp khác}\end{cases}$$

Chẳng hạn $P(1,3)=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

2) Nếu nhân $P(i,j)$ vào bên phải của ma trận $A$ thì ma trận tích $AP(i,j)$ có được bằng cách đổi chỗ hai cột $i$ và $j$ của $A$ cho nhau.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 & b_1 & a_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 & d_3 \\ c_4 & b_4 & a_4 & d_4 \end{bmatrix}$$





$$Q(i,j,\lambda)=[a_{kl}]=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots\, 1 & & & \\ & \vdots & \ddots & & \\ \cdots & \lambda & \cdots & 1 & \\ & \vdots & & & \ddots\, 1 \end{bmatrix} & \text{hàng } i \\ \quad\quad\text{cột } j & \end{array}$$

$$a_{kl}=\begin{cases} 1 & k=l \\ \lambda & k=i, l=j \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác} \end{cases}$$

Chẳng hạn

$$Q(3,1;\lambda)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





3) Nếu nhân $Q(i,j,\lambda)$ vào bên phải của ma trận $A$ thì ma trận tích $AQ(i,j,\lambda)$ có được bằng cách nhân $\lambda$ vào cột $i$ và cộng vào cột $j$ của ma trận $A$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+\lambda c_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2+\lambda c_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3+\lambda c_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4+\lambda c_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}$$





4) Nếu nhân $P$, $Q$, $R$ vào bên trái của ma trận $A$ thì ta có các kết quả tương tự như trên, trong đó các tác động lên cột đổi thành tác động lên hàng

Chẳng hạn

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ \lambda a' & \lambda b' & \lambda c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \lambda a'+a'' & \lambda b'+b'' & \lambda c'+c'' \end{bmatrix}$$

## 3.2 ĐỊNH THỨC

- Định thức của ma trận vuông cấp 2 bằng tích đường chéo thứ nhất trừ tích đường chéo thứ hai

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Định thức của ma trận vuông cấp $n$ tổng quát được xét trong chương này.
- Ma trận và định thức ngày nay luôn đi liền với nhau và hầu như mọi người đều cho rằng khái niệm định thức phải ra đời sau khái niệm ma trận, nhưng sự thực ngược lại.
- Định thức hình thành là nhằm để giải các hệ phương trình tuyến tính mà việc làm này đã có một lịch sử lâu đời trước đó.
- Khái niệm định thức lần đầu tiên được Leibniz (Lépnít) đưa ra vào năm 1693 khi bàn đến việc giải hệ phương trình tuyến tính.





- Định thức được tiếp tục phát triển và nghiên cứu qua các công trình của Cramer (Còrame) (Thụy sĩ), Jacobi (ia-cô-bi) (Đức), Laplace (Pháp), Vandermonde (Văngđécmông) (Hà Lan).
- ·Cauchy (Cô-si) (Pháp) là người đầu tiên nghiên cứu khái niệm định thức một cách hệ thống.
- Ngoài ứng dụng để giải hệ phương trình tuyến tính, định thức còn được sử dụng để nghiên cứu những vấn đề của ma trận như: ma trận nghịch đảo, hạng của ma trận, tìm giá trị riêng...
- Khảo sát tính chất độc lập của một hệ véc tơ.
- Định thức Jacobi được sử dụng trong phép đổi biến số của tích phân nhiều lớp.
- Định thức Wronsky (vrông-xki) dùng để kiểm tra tính chất độc lập tuyến tính của các nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.





### 3.2.1 HOÁN VỊ VÀ PHÉP THẾ

- Mỗi song ánh $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ được gọi là một phép thế bậc $n$.
- Ta thường ký hiệu một phép thế bằng một ma trận có hàng thứ nhất là các số $1, 2, \dots, n$ sắp theo thứ tự tăng dần còn hàng thứ hai là ảnh của nó

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix}.$$

- Ảnh của một phép thế được gọi là hoán vị. Với phép thế $\sigma$ ta có hoán vị tương ứng

$$[\sigma(1) \;\; \sigma(2) \;\; \dots \;\; \sigma(n)].$$

- Tập các phép thế bậc $n$ ký hiệu $S_n$. Tập $S_n$ có đúng $n!$ phần tử.
- Chẳng hạn $S_2$ có 2 phần tử, $S_3$ có 6 phần tử ...





### *Dấu của phép thế*

- Mỗi cặp $i < j$ mà $\sigma(i) > \sigma(j)$ được gọi là một nghịch thế của phép thế $\sigma$.
- Giả sử $k$ là số các nghịch thế của $\sigma$, ta định nghĩa và ký hiệu dấu của phép thế $\sigma$ là

$$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^k.$$

- Phép thế nhận dấu + nếu số các nghịch thế chẵn và nhận dấu – nếu số các nghịch thế lẻ.

**Ví dụ 3.13** Hoán vị $[1\ 3\ 2]$ ứng với phép thế $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ có một nghịch thế. Vậy $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^1 = -1$.

## Cách tìm số các nghịch thế của phép thế $\sigma$

- Gọi $k_1$ là số các số trong $[\sigma(1)\ \sigma(2)\ \dots\ \sigma(n)]$ đứng trước $\sigma(i_1)=1$; ($k_1$ là số các nghịch thế ứng với 1).
- Xóa $\sigma(i_1)=1$, tồn tại $i_2$ sao cho $\sigma(i_2)=2$, gọi $k_2$ là số các số còn lại trong $[\sigma(1)\ \sigma(2)\ \dots\ \sigma(n)]$ đứng trước $\sigma(i_2)$; ($k_2$ là số các nghịch thế ứng với 2).
- Xóa $\sigma(i_2)=2$ và tiếp tục đếm như thế ...

Cuối cùng số các nghịch thế của $\sigma$ là: $k=k_1+k_2+\dots+k_{n-1}$.

**Ví dụ 3.14** Hoán vị $\begin{bmatrix}4 & 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$ có $k_1=2, k_2=2,\ k_3=1$.

Vậy $k=5$ và $\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^5=-1$.





**Tính chất 3.4**

1) Cặp $(i,j)$ là một nghịch thế của phép thế $\sigma$ khi và chỉ khi dấu của $i-j$ và $\sigma(i)-\sigma(j)$ trái dấu. Vậy

$$\operatorname{sgn}\sigma=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\right).$$

2) Phép thế chuyển vị $\sigma=[i_0\ \ j_0]$ là phép thế chỉ biến đổi hai phần tử $i_0, j_0$ cho nhau và giữ nguyên các phần tử còn lại

$$\sigma=\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & i_0 & \dots & j_0 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & j_0 & \dots & i_0 & \dots & n\end{bmatrix}.$$

$k_1=\dots=k_{i_0-1}=0\ \ k_{i_0}=j_0-i_0\ \ k_{i_0+1}=\dots=k_{j_0-1}=1$

$k_{j_0}=\dots=k_n=0\quad\Rightarrow k=2(j_0-i_0)-1\ \Rightarrow\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^k=-1.$





3) Với mọi $\sigma,\mu\in S_n$ $\quad\operatorname{sgn}(\sigma\circ\mu)=\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\mu$

Thật vậy, khi $(i,j)$ chạy khắp tập

$$\{1,2,\dots,n\}\times\{1,2,\dots,n\}\backslash\{(1,1),(2,2)\dots,(n,n)\}$$

thì $(\mu(i),\mu(j))$ cũng chạy khắp tập này

$$\operatorname{sgn}\sigma=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\right)=\prod_{1\le\mu(i)\ne\mu(j)\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{\mu(i)-\mu(j)}\right)=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{\mu(i)-\mu(j)}\right)$$

$$\Rightarrow\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\mu=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{\mu(i)-\mu(j)}\right)\cdot\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\mu(i)-\mu(j)}{i-j}\right)$$

$$=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{i-j}\right)=\operatorname{sgn}(\sigma\circ\mu)$$

4) Với mọi chuyển vị $[i_0\ j_0]$ và phép thế $\mu$

$$\operatorname{sgn}\mu\circ[i_0\ j_0]=-\operatorname{sgn}\mu$$





## 3.2.2 ĐỊNH NGHĨA ĐỊNH THỨC

Khi giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$

ta tính các định thức

$$D=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}=ab'-ba'\quad D_x=\begin{vmatrix}c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}=cb'-bc'\quad D_y=\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}=ac'-ca'$$

Như vậy định thức của ma trận vuông cấp 2: $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

- Định thức của ma trận vuông cấp 2 có thể biểu diễn như sau:

Xét nhóm đối xứng $S_2$ có 2 phần tử

$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ có dấu $\operatorname{sgn}\sigma_1 = 1, \operatorname{sgn}\sigma_2 = -1$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= \operatorname{sgn}\sigma_1\, a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)} + \operatorname{sgn}\sigma_2\, a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}\sigma\; a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}$$





***Định thức của ma trận vuông cấp n*** bất kỳ được mở rộng như sau

- Định thức của ma trận vuông $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$

được ký hiệu là $\det A$ hay $|A|$ và xác định bởi biểu thức

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

- Như vậy định thức của ma trận vuông là tổng của $n!$ số hạng, mỗi số hạng là tích gồm $n$ phần tử trên $n$ hàng ở trên $n$ cột khác nhau của ma trận và nhân với dấu của hoán vị tương ứng.





**Ví dụ 3.15** Nhóm đối xứng $S_3$ có 6 phần tử là

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \sigma_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{sgn}\sigma_1 = \operatorname{sgn}\sigma_4 = \operatorname{sgn}\sigma_5 = 1 \quad \operatorname{sgn}\sigma_2 = \operatorname{sgn}\sigma_3 = \operatorname{sgn}\sigma_6 = -1$$

Vậy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}\sigma\; a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$





**Ví dụ 3.16**

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & x \\ 3 & y & 4 \\ z & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2.y.6 + 5.4.z + x.3.1 - x.y.z - 5.3.6 - 2.4.1$$

$$= 12y + 20z + 3x - xyz - 90 - 8$$

$$= 3x + 12y + 20z - xyz - 98.$$

**Ví dụ 3.17**

Tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Xét phép thế $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$

có $\operatorname{sgn}\sigma_0 = (-1)^0 = 1$

Với mọi $\sigma \in S_n$

nếu $\sigma \neq \sigma_0$ thì tồn tại $k$ sao cho $\sigma(k) \neq k$

do đó tồn tại $k'$ sao cho $\sigma(k') < k'$

$$\Rightarrow a_{k'\sigma(k')} = 0 \;\Rightarrow a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)} = 0$$

Vậy

$$D_n = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn}\sigma_0 \cdot a_{11}\dots a_{nn} = a_{11}\dots a_{nn}.$$





Tương tự

$$D'_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\dots a_{nn}$$

**Ví dụ 3.18**

$$\begin{vmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & -7 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-7)\cdot(-1)\cdot 3 = 42$$





**Ví dụ 3.19** Tính định thức

$$D''_n = \begin{vmatrix} & & & & a_{1n} \\ & 0 & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_{n-1,2} & \dots & \dots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Xét phép thế

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

thoả mãn $\sigma_1(k) + k = n+1$

$k_1 = n-1,\ k_2 = n-2, \dots, k_{n-1} = 1$

$\Rightarrow k = 1 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}\sigma_1 = (-1)^{n(n-1)/2}$

Với mọi $\sigma \in S_n$, nếu $\sigma \neq \sigma_1$ thì tồn tại $k$ sao cho $\sigma(k) + k < n+1$

$$\Rightarrow a_{k\sigma(k)} = 0 \Rightarrow a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)} = 0$$

$$D''_n = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn}\sigma_1 \cdot a_{n1}\dots a_{k,n-k}\dots a_{1n}$$





Tương tự

$$D'''_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & \\ \vdots & \vdots & ⋰ & & \\ \vdots & ⋰ & & 0 & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} a_{n1}\dots a_{k,n-k}\dots a_{1n}$$

**Ví dụ 3.20**

$$\begin{vmatrix} a & b & x \\ c & y & 0 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{3.2}{2}} xyz = -xyz$$

- Định thức của ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ của hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_n\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ của không gian véc tơ $V$ cũng được gọi là định thức của hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_n\}$ và ký hiệu $D_{\mathscr{B}}\{v_1, \dots, v_n\}$. Vậy

$$D_{\mathscr{B}}\{v_1, \dots, v_n\} = \det A$$

**Ví dụ 3.21**

Hệ véc tơ $v_1 = (2,4,1)$, $v_2 = (3,6,-2)$, $v_3 = (-1,5,2)$

có ma trận trong cơ sở chính tắc $\mathscr{B}$ của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Vậy} \quad D_{\mathscr{B}}\{v_1, v_2, v_3\} = \det A = 49$$





## 3.3.3 CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐỊNH THỨC

1) Nếu đổi chỗ hai hàng của ma trận thì định thức đổi dấu.

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n},\ A' = \left[a'_{ij}\right]_{n\times n},\ a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{nếu } i \neq k, m \\ a_{kj} & \text{nếu } i = m \\ a_{mj} & \text{nếu } i = k \end{cases}$$

Đổi chỗ hai hàng $m$ và $k$ cho nhau

thì $\det A' = -\det A$

**Ví dụ 3.22**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$





2) Định thức có tính chất tuyến tính đối với mỗi hàng .

Ma trận $C = \left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ có hàng thứ $k$ là tổ hợp tuyến tính của hàng thứ $k$ của $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ và $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$

Nghĩa là $\begin{cases} c_{ij} = a_{ij} = b_{ij} & \text{nếu } i \neq k \\ c_{kj} = \alpha\, a_{kj} + \beta\, b_{kj}; & \text{với mọi } j = 1, \dots, n. \end{cases}$

thì $\det C = \alpha \det A + \beta \det B$

**Ví dụ 3.23**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 & \alpha c_1 + \beta c_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$





3) Từ 1) và 2) suy ra rằng trong một ma trận có hai hàng tỷ lệ thì định thức bằng $0$.

**Ví dụ 3.24**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix} = -k \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

4) Nếu ta cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính các hàng khác thì định thức không thay đổi .

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' + \alpha a + \beta a' & b'' + \alpha b + \beta b' & c'' + \alpha c + \beta c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

5) Định thức của ma trận chuyển vị bằng định thức của ma trận đó

$$\det A^t = \det A.$$

**Ví dụ 3.25**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

6) Từ 5) suy ra rằng các tính chất của định thức đúng với hàng thì cũng đúng với cột và ngược lại. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh các định lý về định thức đúng với hàng. Chẳng hạn, từ 4) suy ra nếu ta cộng vào một cột một tổ hợp tuyến tính các cột khác thì định thức không thay đổi.





**Ví dụ 3.26**

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a+n-1 & a & 1 & \dots & 1 \\ a+n-1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} = (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a-1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow D_n = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$





7) Định thức của mọi hệ $n$ véc tơ phụ thuộc tuyến tính của không gian véc tơ $n$ chiều đều bằng $0$.

Nếu hệ véc tơ $\{v_1,\dots,v_n\}$ phụ thuộc tuyến tính thì có một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại. Chẳng hạn $v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-1}v_{n-1}$

$$\Rightarrow \det A = D_{\mathscr{B}}\{v_1,\dots,v_{n-1},v_n\} = D_{\mathscr{B}}\{v_1,\dots,v_{n-1},\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-1}v_{n-1}\}$$

Tách cột cuối thành tổng của $n-1$ định thức ta được

$$\det A = D_{\mathscr{B}}\{v_1,\dots,v_{n-1},\alpha_1 v_1\} + \dots + D_{\mathscr{B}}\{v_1,\dots,v_{n-1},\alpha_{n-1}v_{n-1}\} = 0 + \dots + 0 = 0$$

8) $$\overline{\det(A)}(\bmod p) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, \overline{a}_{1\sigma(1)}\dots\overline{a}_{n\sigma(n)} = \begin{vmatrix} \overline{a}_{11} & \dots & \overline{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{n1} & \dots & \overline{a}_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Ví dụ 3.27**

$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $a_{ij} = \pm 1$

$$\overline{\det(A)}(\bmod 2) = \begin{vmatrix} \overline{1} & \dots & \overline{1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{1} & \dots & \overline{1} \end{vmatrix} = \overline{0}(\bmod 2) \Rightarrow \det A \text{ chẵn}$$





## 3.2.4 CÁC CÁCH TÍNH ĐỊNH THỨC

### 3.2.4.1 Khai triển theo hàng, theo cột

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$

Ký hiệu $M_{ij}$ là định thức của ma trận cấp $n-1$ có được bằng cách xoá hàng $i$ cột $j$ của ma trận $A$

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ Hàng } i$$

Cột $j$

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

được gọi là phần bù đại số của $a_{ij}$

*Công thức khai triển định thức của $A$ theo cột thứ $j$*

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + a_{nj}(-1)^{n+j}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$





*Công thức khai triển định thức của $A$ theo hàng thứ $i$*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

**Nhận xét 3.5**

Công thức khai triển theo cột thứ $j$ và công thức khai triển theo hàng thứ $i$ (trong đó việc chọn hàng thứ $i$ và cột thứ $j$ là tùy ý) cho phép tính định thức cấp $n$ theo tổng các số hạng dạng $a_{ij}A_{ij}$. Nếu ở hàng thứ $i$ hoặc cột $j$ có số hạng $a_{ij} = 0$ thì $a_{ij}A_{ij} = 0$. Vì vậy để tính định thức ta thức hiện các bước sau:

- Chọn hàng $i$ hoặc cột $j$ có nhiều phần tử bằng $0$ hoặc dễ triệt tiêu.
- Thực hiện các phép biến đổi để triệt tiêu các phần tử trên hàng (hoặc cột) đã chọn, cuối cùng trên hàng hoặc cột này chỉ có một phần tử khác $0$.
- Khai triển theo hàng hoặc cột đã triệt tiêu.





**Ví dụ 3.28**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} -c_1 + c_3 \to c_3 \\ -2c_1 + c_4 \to c_4 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} & 2 & 2 & 2 \\ 1 & & & \\ & -1 & -4 & -6 \\ & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

Khai triển theo hàng thứ 2 ta được

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \qquad D = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

Tiếp tục triệt tiêu hàng thứ nhất của định thức trên ta có

$$D = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = (-2)(-3)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} = 6(-9+5) = -24$$





## 3.2.4.2 Định lý khai triển Laplace (theo $k$ hàng $k$ cột)

Từ ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ta để ý $k$ hàng: $i_1,\ldots,i_k$ và $k$ cột: $j_1,\ldots,j_k$

Giao của $k$ hàng $k$ cột này là một ma trận cấp $k$

Định thức của ma trận này được ký hiệu là $M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$

Nếu từ ma trận $A$ ta xoá đi $k$ hàng $i_1,\ldots,i_k$ và k cột $j_1,\ldots,j_k$ thì ta có ma trận con cấp $n-k$. Định thức của ma trận này được ký hiệu là $\overline{M}_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$

$$A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} = (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}\,\overline{M}_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$$

được gọi là phần bù đại số của $M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$

**Ví dụ 3.29**

Chọn hàng 1, 3

Chọn cột 2, 5

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} & & & & \\ a_{21} & & a_{23} & a_{24} & \\ & & & & \\ a_{41} & & a_{43} & a_{44} & \\ a_{51} & & a_{53} & a_{54} & \end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{Hàng 1}\\ \\ \text{Hàng 3}\\ \\ \\ \end{array}\\ \quad\quad\text{Cột 2}\quad\quad\quad\text{Cột 5}\end{array}$$

$$M_{13}^{25}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35}\end{vmatrix}$$

$$A_{13}^{25}=(-1)^{1+3+2+5}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54}\end{vmatrix}$$





**Định lý 3.4** (Khai triển Laplace)

1) Khai triển $k$ hàng $i_1, \dots, i_k$

$$\det A=\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k} A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$$

Định thức của $A$ bằng tổng tất cả các định thức con cấp $k$ nằm trên $k$ hàng $i_1, \dots, i_k$ nhân với phần bù đại số tương ứng của nó

2) Khai triển $k$ cột $j_1, \dots, j_k$

$$\det A=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k} A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$$





**Ví dụ 3.30**

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{kk+1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

Khai triển $k$ hàng đầu $i_1=1, \dots, i_k=k$

Từ điều kiện $1\le j_1<\dots<j_k\le n \quad\Rightarrow k\le j_k\le n$





- Nếu $j_k>k$ thì $M_{1,\dots,k}^{j_1,\dots,j_k}=0$ vì định thức này có ít nhất một cột bằng 0.
- Nếu $j_k=k$ thì $M_{1,\dots,k}^{j_1,\dots,j_k}=M_{1,\dots,k}^{1,\dots,k}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk}\end{vmatrix}$

và $A_{1,\dots,k}^{1,\dots,k}=(-1)^{1+\dots+k+1+\dots+k}\begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$

Vậy $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$

**Ví dụ 2.31**

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0\\ c & d & 0 & 0 & 0\\ e & f & 2 & 2 & 2\\ g & h & -1 & -4 & -6\\ i & j & 2 & -1 & -7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2\\ -1 & -4 & -6\\ 2 & -1 & -7\end{vmatrix}=24(ad-bc)$$

**Ví dụ 3.32** Với mọi ma trận cùng cấp $A$, $B$ luôn có

$$\det AB=\det A\det B$$

Giả sử $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ $C=AB=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$





Xét định thức cấp $2n$

$$D_{2n}=\left|\begin{array}{ccc:ccc} & a_{ij} & & 0 & \cdots & 0\\ & & & \vdots & \ddots & \vdots\\ & & & 0 & \cdots & 0\\ \hdashline -1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 0 & & b_{ij} & \\ 0 & 0 & -1 & & & \end{array}\right|$$

Khai triển Laplace theo $n$ hàng đầu ta có $D_{2n}=\det A\det B$





Nhân $b_{11}$ với cột $1$ cộng vào cột $n+1$ thì định thức $D_{2n}$ trở thành:
Tiếp tục nhân $b_{21}$ với cột $2$, …. $b_{n1}$ với cột $n$ của $D_{2n}$ xong cộng tất cả vào cột $n+1$ thì định thức $D_{2n}$ trở thành:

$$D_{2n}=\left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11}+\ldots+a_{1n}b_{n1} & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}b_{11}+\ldots+a_{nn}b_{n1} & 0 & 0\\ \hdashline -1 & & & 0 & b_{12} & b_{1n}\\ & -1 & & \vdots & \ddots & \vdots\\ & & -1 & 0 & b_{n2} & b_{nn}\end{array}\right|$$

$$a_{11}b_{11}+\ldots+a_{1n}b_{n1}=c_{11}\ \cdots\ a_{n1}b_{11}+\ldots+a_{nn}b_{n1}=c_{n1}$$





Tiếp tục biến đổi tương tự như trên cuối cùng được

$$D_{2n}=\left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn}\\ \hdashline -1 & & & 0 & & 0\\ & -1 & & & & \\ & & -1 & 0 & & 0\end{array}\right|$$

Khai triển Laplace theo $n$ hàng cuối ta được

$$D_{2n}=(-1)^{1+2+\ldots+n+n+1+\ldots+2n}\begin{vmatrix} -1 & & \bigcirc\\ & -1 & \\ \bigcirc & & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{vmatrix}=\det C$$

### 3.2.5 ỨNG DỤNG ĐỊNH THỨC ĐỂ TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

- Ma trận vuông $A$ được gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp $B$ sao cho

$$AB = BA = I.$$

- Phép nhân ma trận có tính kết hợp nên ma trận $B$ ở định nghĩa trên nếu tồn tại thì duy nhất, ta gọi ma trận này là ***ma trận nghịch đảo*** của $A$.

- Ma trận nghịch đảo của $A$, ký hiệu $A^{-1}$.





Điều kiện cần và đủ để ma trận $A$ tồn tại ma trận nghịch đảo là

$$\det A \neq 0.$$

- Điều kiện cần

$$\det A \det A^{-1} = \det AA^{-1} = \det I = 1 \quad \Rightarrow \det A \neq 0.$$

- Điều kiện đủ

Ma trận nghịch đảo $A^{-1}$ của ma trận $A$ có dạng

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^t$$

$B = \left[A_{ij}\right]_{n\times n}$ được gọi là ma trận phụ hợp của $A$

$A_{ij}$ là phần bù đại số của phần tử $a_{ij}$ của ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$.





$$\begin{array}{l} \\ \text{Hàng } k \\ \\ \text{Hàng } i \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Khai triển theo hàng thứ $k$

$$= a_{k1}A_{k1} + \ldots + a_{kn}A_{kn} = \det A$$

$$\begin{array}{l} \\ \text{Hàng } k \\ \\ \text{Hàng } i \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Khai triển theo hàng thứ $k$

$$= a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0$$





$$a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \Rightarrow AB^t = (\det A)I$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{\det A}B^t\right) = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}B^t$$

Ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ vuông cấp 2 với định thức $|A| = ad - bc \neq 0$ có ma trận nghịch đảo là

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^t = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**Ví dụ 3.33**

$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ có ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

**Ví dụ 3.34**

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix} \text{ có } \det A=-1$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&3\\0&8\end{vmatrix}=40 \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&3\\1&8\end{vmatrix}=-13 \quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&5\\1&0\end{vmatrix}=-5$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\0&8\end{vmatrix}=-16 \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\1&8\end{vmatrix}=5 \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}=2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\5&3\end{vmatrix}=-9 \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\2&3\end{vmatrix}=3 \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}40&-13&-5\\-16&5&2\\-9&3&1\end{bmatrix}^t=-\begin{bmatrix}40&-16&-9\\-13&5&3\\-5&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}$$





**Ví dụ 3.35**

$$A=\begin{bmatrix}2&5&1\\7&3&2\\4&1&3\end{bmatrix} \text{ có } \det A=-56$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}=7, A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}7&2\\4&3\end{vmatrix}=-13, A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}7&3\\4&1\end{vmatrix}=-5$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5&1\\1&3\end{vmatrix}=-14, A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2, A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&5\\4&1\end{vmatrix}=18$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5&1\\3&2\end{vmatrix}=7, A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&1\\7&2\end{vmatrix}=3, A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&5\\7&3\end{vmatrix}=-29$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-56}\begin{bmatrix}7&-13&-5\\-14&2&18\\7&3&-29\end{bmatrix}^t=-\frac{1}{56}\begin{bmatrix}7&-14&7\\-13&2&3\\-5&18&-29\end{bmatrix}$$





## Tìm ma trận nghịch đảo theo phương pháp Gauss-Jordan

Để tìm ma trận nghịch đảo $A^{-1}$ ta thực hiện các bước sau:

1) Viết ma trận đơn vị $I$ bên phải ma trận $A$: $A\,|\,I$

2) Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp đồng thời lên các hàng của $A\,|\,I$ để đưa ma trận $A$ ở vế trái về ma trận đơn vị

3) Khi vế trái trở thành ma trận đơn vị thì vế phải là ma trận $A^{-1}$

$$A\,|\,I \rightarrow \ldots\ldots\ldots \rightarrow I\,|\,A^{-1}$$





**Ví dụ 3.36**

Tìm $A^{-1}$ với $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&5&3&0&1&0\\1&0&8&0&0&1\end{array}\right. \quad \begin{array}{c}h_1\to h_1\\-2h_1+h_2\to h_2\\-h_1+h_3\to h_3\end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&-2&5&-1&0&1\end{array}$$

$$\begin{array}{c}h_1\to h_1\\h_2\to h_2\\2h_2+h_3\to h_3\end{array} \begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&-1&-5&2&1\end{array} \quad \begin{array}{c}h_1\to h_1\\-h_2\to h_2\\-h_3\to h_3\end{array} \begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}$$

$$\begin{array}{c}-3h_3+h_1\to h_1\\3h_3+h_2\to h_2\\h_3\to h_3\end{array} \begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-14&6&3\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array} \quad \begin{array}{c}-3h_2+h_1\to h_1\\h_2\to h_2\\h_3\to h_3\end{array} \begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-40&16&9\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}$$

## 3.2.6 TÌM HẠNG CỦA MA TRẬN BẰNG ĐỊNH THỨC

- Định thức của một hệ phụ thuộc tuyến tính bằng $0$. Do đó nếu định thức $D_{\mathscr{B}}\{v_1, \dots, v_n\} \neq 0$ thì hệ $\{v_1, \dots, v_n\}$ độc lập tuyến tính.
- Ngược lại, giả sử hệ $\{v_1, \dots, v_n\}$ độc lập tuyến tính, ta chứng minh $D_{\mathscr{B}}\{v_1, \dots, v_n\} \neq 0$.
- Vậy hệ $\{v_1, \dots, v_n\}$ trong không gian véc tơ $n$ chiều là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $D_{\mathscr{B}}\{v_1, \dots, v_n\} \neq 0$.

Ta cũng chứng minh được nếu $T = \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang $\mathscr{B}$ là $T^{-1}$

$$T = \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \Rightarrow \left[t'_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = T^{-1}.$$





**Định lý 3.12**

Giả sử $A = \left[a_{ij}\right]$ là một ma trận cỡ $m \times n$. Nếu có định thức con cấp $p$ khác $0$ và mọi định thức con cấp $p+1$ bao quanh nó đều bằng $0$ thì $r(A) = p$.

**Hệ quả 3.13** Giả sử $A$ là một ma trận cỡ $m \times n$ thì

$$r(A) = r(A^t) \leq \min(m, n).$$

**Ví dụ 3.37**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 20. \qquad \text{Vậy } r(A) = 2.$$





**Ví dụ 3.38**

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$ nhưng $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Bao định thức này bởi định thức cấp 3 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$

Định thức cấp 4 duy nhất $|B| = 0$.

Vậy $r(B) = 3$.





**Ví dụ 3.39**

Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$|A| = (a+3)(a-1)^3$

- Khi $a \neq -3, a \neq 1$ thì $r(A) = 4$;
- Khi $a = 1 \Rightarrow r(A) = 1$
- Khi $a = -3$, $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -16$

$\Rightarrow r(A) = 3.$