CHƯƠNG 2.
LÝ THUYẾT XÁC SUẤT

GIỚI THIỆU

- Tín hiệu xác định:
  - Là tín hiệu có thể được biểu diễn bằng biểu thức toán học, theo quy luật được xác định hoặc theo một bảng tìm kiếm.
  - Đây là tín hiệu có giá trị được xác định trước một cách chính xác tại mỗi thời điểm.
- Tín hiệu ngẫu nhiên (không xác định):
  - Là tín hiệu được tạo một cách ngẫu nhiên, không thể mô tả một cách rõ ràng trước khi nó xảy ra (ví dụ: nhiễu).
  - Nhiễu kết hợp với tín hiệu bản tin trong quá trình truyền trên đường truyền và làm sai lệch thông tin.
  - Mặc dù không có sự chắc chắn về bản chất chính xác của tín hiệu nhiễu, người ta sử dụng các phương pháp mang tính xác suất để mô tả hành vi của chúng.

CƠ BẢN VỀ XÁC SUẤT

CƠ BẢN VỀ XÁC SUẤT

- *Thí nghiệm* (experiment): Một quá trình quan sát
- *Đầu ra* (outcome): kết quả của thí nghiệm
- *Thí nghiệm ngẫu nhiên* (random experiment):
  - Một thí nghiệm được gọi là thí nghiệm ngẫu nhiên nếu đầu ra của nó là không duy nhất và vì vậy không thể dự đoán với sự chắc chắn.
  - Ví dụ tung một đồng xu, tung một viên xúc sắc, lựa chọn một bản tin trong số nhiều bản tin để truyền.
- *Không gian mẫu* (sample space), *điểm mẫu* (sample point) và *sự kiện* (event):
  - Tập S gồm tất cả các đầu ra có thể của một thí nghiệm ngẫu nhiên cho trước được gọi là không gian mẫu hay sự kiện chắc chắn.
  - Một phần tử (đầu ra) trong S được gọi một điểm mẫu.
  - Một sự kiện A là một tập con của không gian mẫu $A \subset S$.

CƠ BẢN VỀ XÁC SUẤT

- *Thí nghiệm* (experiment): Một quá trình quan sát
- *Đầu ra* (outcome): kết quả của thí nghiệm
- *Thí nghiệm ngẫu nhiên* (random experiment):
  - Một thí nghiệm được gọi là thí nghiệm ngẫu nhiên nếu đầu ra của nó là không duy nhất và vì vậy không thể dự đoán với sự chắc chắn.
  - Ví dụ tung một đồng xu, tung một viên xúc sắc, lựa chọn một bản tin trong số nhiều bản tin để truyền.
- *Không gian mẫu* (sample space), *điểm mẫu* (sample point) và *sự kiện* (event):
  - Tập S gồm tất cả các đầu ra có thể của một thí nghiệm ngẫu nhiên cho trước được gọi là không gian mẫu hay sự kiện chắc chắn.
  - Một phần tử (đầu ra) trong S được gọi một điểm mẫu.
  - Một sự kiện A là một tập con của không gian mẫu $A \subset S$.

CƠ BẢN VỀ XÁC SUẤT

- Bù của sự kiện A $(\bar{A})$ là sự kiện chứa tất cả các điểm mẫu trong S nhưng không nằm trong A.
- Hợp của sự kiện A và B $(A \cup B)$: là sự kiện chứa tất cả các điểm mẫu hoặc trong A, hoặc trong B hoặc cả hai.
- Giao của sự kiện A và B $(A \cap B)$: là sự kiện chứa tất cả các điểm mẫu nằm trong cả A và B.
- Sự kiện rỗng $(\emptyset)$: là sự kiện không chứa điểm mẫu nào
- Hai sự kiện A và B được gọi là không giao nhau $(A \cap B = \emptyset)$ khi chúng không có điểm mẫu chung nào, nghĩa là A và B không thể xảy ra đồng thời.

Ví dụ 1.1

- Tung một viên xúc sắc và quan sát số chấm xuất hiện ở mặt trên cùng.
- (a) Xây dựng không gian mẫu.
- (b) Nếu A là sự kiện các số lẻ xảy ra, B là sự kiện các số chẵn xảy ra, và C là sự kiện số nguyên tố xảy ra, hãy viết các tập con tương ứng của nó.
- (c) Tìm sự kiện sao cho xảy ra số chẵn hoặc số nguyên tố.
- (d) Liệt kê các đầu ra của một sự kiện ở đó xảy ra số chẵn nguyên tố.
- (e) Tìm sự kiện mà một số nguyên tố không xảy ra.
- (f) Tìm sự kiện mà 7 chấm xuất hiện ở mặt trên cùng.
- (g) Tìm sự kiện mà các số lẻ và số chẵn đồng thời xảy ra.

Tiên đề về xác suất

- Gọi P(A) là xác suất của sự kiện A trong không gian mẫu S. Nó phải thỏa mãn các tiên đề sau:
- (1) $0 \leq P(A) \leq 1$
- (2) $P(S) = 1$ (sự kiện chắc chắn)
- (3) $P(A \cup B)$=$P(A) + P(B)$ nếu $A \cap B = \emptyset$
- (4) $P(A \cup B \cup C)$=$P(A) + P(B)$ +$P(C)$ nếu A, B,C trong S là các sự kiện loại trừ lẫn nhau.

Một số định lý cơ bản về xác suất

- (1) $P(\emptyset) = 0$
- (2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) \leq 1$
- (3) $P(A) \leq P(B)$ nếu $A \subset B$
- (4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- (5) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ bởi vì $P(A \cap B) \geq 0$
- (6) $P(A \cup B \cup C)$=$P(A) + P(B)$ +$P(C)$ - $P(A \cap B)$-$P(A \cap C)$-$P(C \cap B)$+ $P(A \cap B \cap C)$

Ví dụ 1.2

- Tung hai viên xúc sắc. Tìm xác suất của sự kiện tổng của hai mặt trên của hai viên xúc sắc bằng 8.

Giải

- Tổng 8 xuất hiện trong các trường hợp sau:
- (2,6); (3,5); (4,4); (5,3); (6,2) (5 trường hợp).
- Tổng số các đầu ra có thể xảy ra là : 6 x 6 = 36
- Vì vậy P(tổng = 8) = 5/36

Ví dụ 1.3

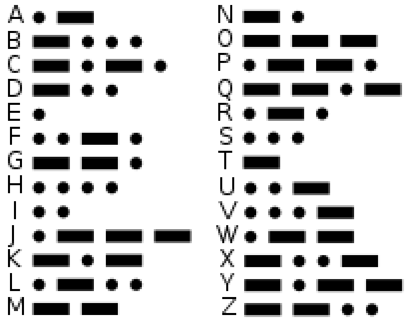
- Một quả bóng được chọn ngẫu nhiên từ một hộp gồm 5 bóng đỏ, 4 bóng xanh lá cây, 3 bóng xanh da trời. Tìm xác suất để (a) là bóng xanh lá cây; (b) không phải xanh lá cây; (c) đỏ hoặc xanh da trời.

Ví dụ 1.4

- Hai quân bài được rút ngẫu nhiên từ một bộ bài gồm 52 quân bài. Tìm xác suất sao cho (a) cả hai quân bài là cơ và (b) một quân bài cơ và một quân bài nhép.

Ví dụ 1.5

- Nguồn điện báo phát ra hai ký hiệu, dấu gạch ngang và dấu chấm. Người ta quan sát thấy dấu gạch ngang có khả năng xảy ra gấp ba lần dấu chấm. Tìm xác suất xảy ra dấu gạch ngang và dấu chấm



Ví dụ 1.6

- Một bản tin số dài 1000 ký tự. Trung bình 0,1% ký tự nhận được bị sai.
- (a) xác suất nhận đúng bằng bao nhiêu?
- (b) Có bao nhiêu ký tự được nhận đúng.

Xác suất có điều kiện

- Xác suất có điều kiện của một sự kiện A với B đã xảy ra (P(A|B)) được định nghĩa như sau:
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ nếu P(B)>0
- Ở đó $P(A \cap B)$ là xác suất kết hợp của A và B.
- Tương tự: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- $P(A \cap B)$=P(A|B).P(B)= P(B|A).P(A)
- $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$ (Luật Bayes)

Ví dụ 1.7

Giới tính	Có việc làm (E)	Thất nghiệp (U)	Tổng cộng
Nam (M)	250	50	300
Nữ (F)	150	100	250
Tổng cộng	400	150	550

- (a) Nếu một người là nam giới, xác suất người đó thất nghiệp là bao nhiêu?
- (b) Nếu một người là nữ giới, xác suất người đó có việc làm là bao nhiêu?
- (c) Nếu một người có việc làm, xác suất người đó là nam giới là bao nhiêu?

$$P(U|M) = \frac{P(U \cap M)}{P(M)} = \frac{50/550}{300/550} = \frac{1}{6}$$

Các sự kiện độc lập

- Hai sự kiện A và B được gọi là độc lập (thống kê) nếu:
- P(B|A)=P(B) hoặc P(A|B)=P(A)
- Điều đó nghĩa là xác suất xảy ra của sự kiện A không có ảnh hưởng đến việc xảy ra của sự kiện B và ngược lại. Ngược lại, chúng được gọi là phụ thuộc.
- Khi đó ta có:
- $P(A \cap B)$=P(A).P(B)

Ví dụ 1.8

- Xác định xác suất của sự kiện có ít nhất một mặt ngửa khi tung 3 lần một đồng xu công bằng.

Ví dụ 1.9

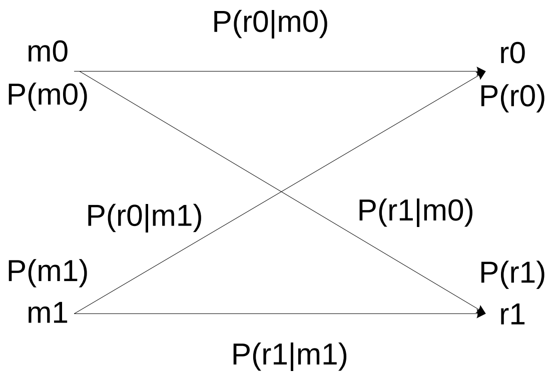
- Một thí nghiệm quan sát năm vị trí xung liên tiếp trên một đường truyền. Các xung có thể dương, âm hoặc bằng 0. Mỗi loại xung tại một vị trí là độc lập với nhau. Nếu xác suất xảy ra xung dương và xung âm tại vị trí thứ *i* (x_i) là p =0,5 và q=0,2 tương ứng thì (a) xác suất tất cả các xung đều âm là bao nhiêu và (b) xác suất hai xung đầu tiên là dương, hai xung tiếp theo bằng 0 và xung cuối cùng là âm là bao nhiêu?

Xác suất tổng

- Gọi A_1, A_2, …, A_n là loại trừ lẫn nhau ($A_i \cap A_J = \emptyset$) và là tập đầy đủ $\cup_{i=1}^{n} A_i = S$.
- B là sự kiện bất kỳ trong S:
- $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i).\ P(A_i)$
- Đây được gọi là xác suất tổng của sự kiện B.
- $P(\boldsymbol{A}_i|B) = \frac{P(B|A_i).P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$ (Định lý Bayes)

Ví dụ 1.10

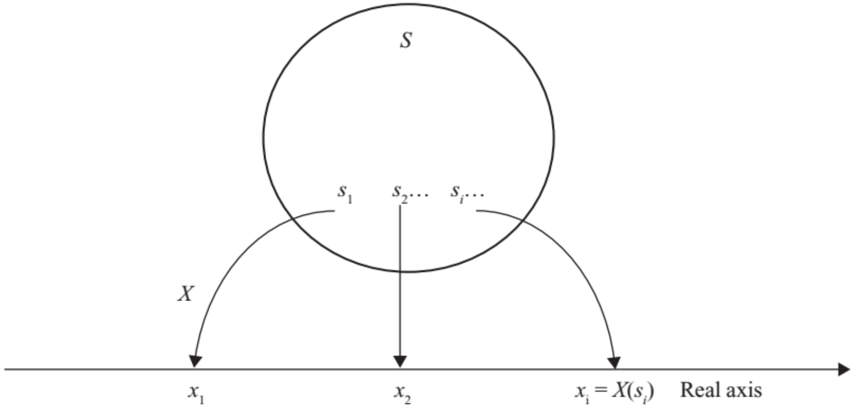
- Một hệ thống truyền tin nhị phân truyền 0 hoặc 1. Do nhiễu kênh, 1 có thể được nhận là 0 và ngược lại. Gọi m_0 và m_1 là các sự kiện truyền 0 và 1 tương ứng. Gọi r_0 và r_1 là các sự kiện nhận 0 và 1 tương ứng. Cho $P(m_0)=0,5$; $P(r_1|m_0)=0,2$ và $P(r_0|m_1)=0,1$.
- (a) Tính $P(r_0)$ và $P(r_1)$
- (b) Nếu nhận được 1, xác suất 1 đã được gửi là bao nhiêu?
- (c) Nếu nhận được 0 thì xác suất 0 đã gửi là bao nhiêu?
- (d) Tính xác suất sai P_e
- (e) Tính xác suất P_c là xác suất tín hiệu được truyền đã đến phía thu một cách chính xác.



BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ ĐẶC TÍNH CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

Biến ngẫu nhiên

- Đầu ra của một thí nghiệm có thể là một số thực hoặc một ký hiệu.
- Ví dụ tung một viên xúc sắc ta được đầu ra là một số và tung một đồng xu ta được đầu ra là mặt sấp hoặc mặt ngửa.
- Để thuận tiện cho việc phân tích toán học, thường xét đến bài toán đầu ra là một số thực.
- Gọi S là không gian mẫu của một số thí nghiệm ngẫu nhiên.
- Biến ngẫu nhiên $X(s_i)$ (hoặc đơn giản là X) là một hàm thực ấn định một số thực vào mỗi điểm mẫu s_i của S và số thực được gọi là giá trị của $X(s_i)$.
- Sơ đồ hệ thống mô tả biến ngẫu nhiên BNN được mô tả dưới đây:



Biến ngẫu nhiên

(1) Biến ngẫu nhiên rời rạc: BNN được gọi là rời rạc nếu nó nhận một giá trị hữu hạn hoặc một số vô hạn các giá trị riêng biệt có thể đếm được.

Ví dụ BNN rời rạc là số xe ô tô đi qua đường trong một thời gian xác định.

(2) Biến ngẫu nhiên liên tục: Nếu một BNN nhận bất cứ một giá trị trong một khoảng nào đó hoặc các khoảng trên một trục thực thì nó được gọi là BNN liên tục. Vùng phổ của X trong trường hợp này là không đếm được.

Ví dụ cho BNN liên tục là phép đo điện áp nhiễu qua các đầu cuối của một số thiết bị điện tử.

Ví dụ 1.11

Tung hai đồng xu công bằng. Giả định rằng BNN X biểu diễn số mặt ngửa xuất hiện. Tìm các giá trị X có thể nhận được. Mô tả về mặt hệ thống ánh xạ các điểm mẫu vào các số thực trên trục thực.

Biến ngẫu nhiên rời rạc và hàm khối lượng xác suất

Xét BNN rời rạc X có thể nhận các giá trị x_1, x_2, x_3... Giả sử rằng các giá trị này có xác suất được cho bởi:

$P(X=x_i)=f(x_i)$; i = 1,2,3,...

Hàm f(x) được gọi là hàm khối lượng xác suất (PMF), hay phân phối xác suất rời rạc hay đơn giản là hàm xác suất của BNN rời rạc X. f(x) thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $0 \le f(x_i) \le 1$; i=1,2,3,...

(2) f(x)=0 nếu $x \neq x_i$

(3) $\sum_i f(x_i) = 1$

Ví dụ 1.12

Tìm hàm xác suất của BNN X của ví dụ 1.11

Hàm phân phối tích lũy

Hàm phân phối tích lũy (CDF) hoặc đơn giản là hàm phân phối của một BNN liên tục hoặc rời rạc được cho bởi:

F(x) = P(X$\leq x$)

CDF F(x) có tính chất sau:

(1) $0 \leq F(x) \leq 1$

(2) F(x) là hàm không giảm đơn điệu nghĩa là $F(x_1) \leq F(x_2)$ nếu $x_1 \leq x_2$

(3) $F(-\infty)=0$

(4) $F(\infty)=1$

Hàm phân phối xác suất cho BNN rời rạc

CDF của một BNN rời rạc X được cho bởi:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

Nếu X nhận một số hữu hạn các giá trị x_1, x_2, x_3… thì hàm phân bố có thể được biểu diễn như sau:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ \ldots & \ldots \\ f(x_1) + \cdots + f(x_n) & x > x_n \end{cases}$$

Ví dụ 1.13

(a) Tìm hàm phân phối tích lũy của BNN X của ví dụ 1.12

(b) Vẽ sơ đồ

BNN liên tục và hàm mật độ xác suất

Hàm phân phối của một BNN liên tục được cho bởi:

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ $\quad -\infty < x < \infty$

Ở đó f(x) thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) f(x) ≥ 0

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

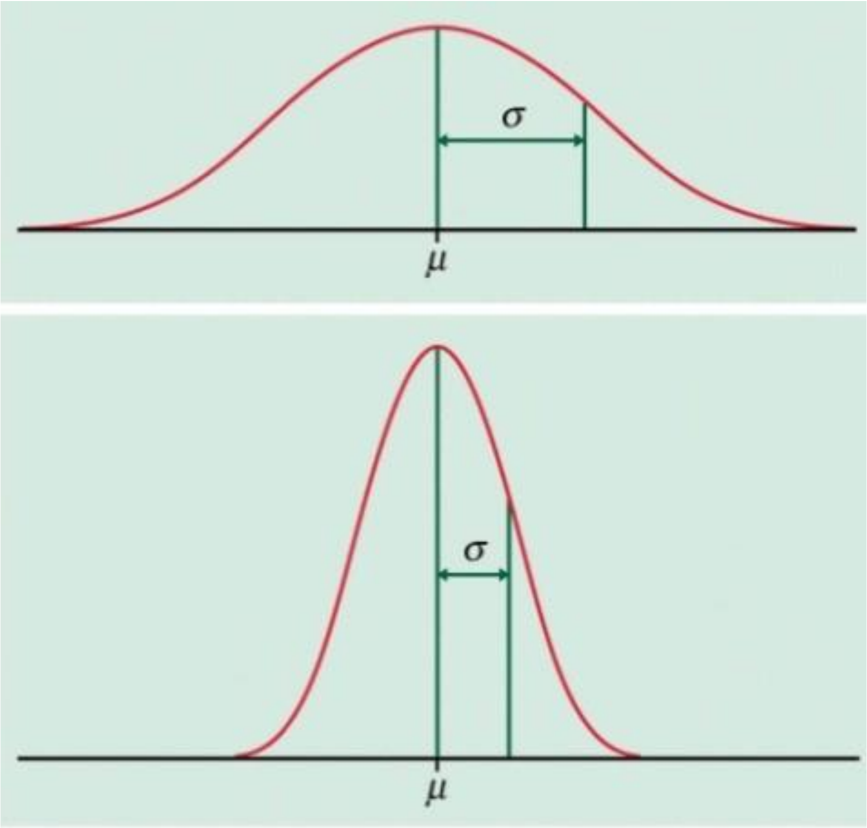
(3) P(a<X<b)=$\int_{a}^{b} f(x)dx$

$f(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất (PDF) hay đơn giản là hàm mật độ.

TRUNG BÌNH THỐNG KÊ

Trung bình thống kê

- *Kỳ vọng* hay *trung bình* của một BNN X được định nghĩa như sau:
- $$\mu = E(X) = \begin{cases} \sum_i x_i f(x_i) & X \text{ rời rạc} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & X \text{ liên tục} \end{cases}$$
- *Phương sai* và *độ lệch chuẩn*: Phương sai của một BNN X được biểu diễn như sau:
- $$Var(X) = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i) & X \text{ rời rạc} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx & X \text{ liên tục} \end{cases}$$
- Căn bậc 2 của phương sai (σ) được gọi là *độ lệch chuẩn* của X.


σ
μ
σ
μ