2.1 KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VÉC TƠ

2.1.1. Định nghĩa và các ví dụ

Giả sử V là tập khác $\varnothing$, K là tập số thực hoặc tập số phức.

V được gọi là không gian véc tơ trên tập K nếu có hai phép toán:

- Phép toán trong $+: \begin{array}{l} V \times V \to V \\ (u,v) \mapsto u+v \end{array}$
- Phép toán ngoài $\begin{array}{l} K \times V \to V \\ (\alpha,u) \mapsto \alpha u \end{array}$

thoả mãn các tiên đề sau với mọi $u, v, w \in V$ và $\alpha, \beta \in K$.

- V_1 $(u+v)+w = u+(v+w)$
- V_2 Có $\mathbf{0} \in V$ sao cho $u+\mathbf{0} = \mathbf{0}+u = u$
- V_3 Với mỗi $u \in V$ có $-u \in V$ sao cho $u+(-u) = (-u)+u = \mathbf{0}$
- V_4 $u+v = v+u$
- V_5 $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$
- V_6 $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
- V_7 $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
- V_8 $1u = u$, trong đó 1 là phần tử đơn vị của K.

Khi $K = \mathbb{R}$ thì V được gọi là không gian véc tơ thực.

Khi $K = \mathbb{C}$ thì V thì được gọi là không gian véc tơ phức.

Các phần tử của V được gọi là các véc tơ.

Ví dụ 2.1 Giả sử K là tập số thực hoặc tập số phức,

xét $K^n = \left\{ x = (x_1,\dots,x_n) \,\middle|\, x_i \in K, i = \overline{1,n} \right\}$

Ta định nghĩa: $(x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$

$\alpha(x_1,\dots,x_n) = (\alpha x_1,\dots,\alpha x_n),\ \forall \alpha \in K$

Dễ dàng kiểm chứng lại hai phép toán này thoả mãn 8 tiên đề của không gian véc tơ có véc tơ không là

$$\mathbf{0} = \underbrace{(0,\dots,0)}_{n \text{ phần tử}}$$

phần tử đối của $x = (x_1, \dots, x_n)$ là $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$

Khi $K = \mathbb{R}$ ta có không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^n$.

Khi $K = \mathbb{C}$ ta có không gian véc tơ phức $\mathbb{C}^n$.

Ví dụ 2.2

Cho $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}$, $\boldsymbol{X} \neq \varnothing$; Ký hiệu $\mathbb{R}^{\boldsymbol{X}}$ là tập các hàm số xác định trên tập con $\boldsymbol{X}$.

$$\mathbb{R}^{\boldsymbol{X}} = \{ f : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R} \}$$

Ta định nghĩa phép toán cộng và nhân với số thực như sau:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x),\ \forall x \in \boldsymbol{X}$$

Với hai phép toán này $\mathbb{R}^{\boldsymbol{X}}$ có cấu trúc không gian véc tơ thực với véc tơ không là hàm hằng $\mathbf{0}(x) = 0,\ \forall\, x \in \boldsymbol{X}$.

Ví dụ 2.3

Gọi $\mathbf{P}_n$ là tập các đa thức bậc $\le n$, n là số nguyên dương cho trước:

$$\mathbf{P}_n = \left\{ p \middle| p = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n ; a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Ta định nghĩa phép cộng hai đa thức và phép nhân một số với một đa thức như phép cộng hàm số và phép nhân một số với hàm số trong Ví dụ 2.2 thì $\mathbf{P}_n$ là không gian véc tơ với véc tơ không là đa thức $\mathbf{0}$.

Không gian $\mathbf{P}_n$ còn được ký hiệu $\mathbb{R}^n[x]$.

2.1.2. Tính chất

1) Véc tơ $\mathbf{0}$ là duy nhất.
   Với mọi $u \in V$, véc tơ đối $-u$ của u là duy nhất.

2) Có luật giản ước: $u + v = u + w \Rightarrow v = w$.

3) Với mọi $u \in V$, $0u = \mathbf{0}$, $(-1)u = -u$.

4) Với mọi $\alpha \in K$, $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

5) Nếu $\alpha u = \mathbf{0}$ thì $\alpha = 0$ hoặc $u = \mathbf{0}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$$

- Biểu thức trên được gọi là ***một tổ hợp tuyến tính*** của các véc tơ $u_1, \ldots, u_n$.
- Véc tơ v biểu diễn được thành một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1, \ldots, u_n$ khi và chỉ khi tồn tại $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sao cho

$$v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

2.2. KHÔNG GIAN VÉC TƠ CON

2.2.1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa

Tập con $W \neq \varnothing$ của V thỏa mãn thỏa mãn điều kiện

$$\forall u, v \in W:\ u + v \in W \quad (2.1)$$

$$\forall u \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R}:\ \alpha u \in W \quad (2.2)$$

được gọi là không gian véc tơ con của V

Định lý 2.2:
Giả sử tập con $W \neq \varnothing$ của V, khi đó W không gian véc tơ con của V khi và chỉ khi:

$$\forall u, v \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}:\ \alpha u + \beta v \in W$$

Ví dụ 2.4 $W_1 = \{u = (x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

$W_2 = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - 3y + 4z = 0\}$

là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$

2.2.2. Không gian con sinh bởi một họ véc tơ

Định lý 2.3:
Nếu $(W_i)_{i\in I}$ là họ các không gian con của V thì $\bigcap_{i\in I} W_i$ cũng là không gian con của V.

Định nghĩa

Cho S là tập con của V

Không gian W bé nhất chứa S được gọi là *không gian sinh bởi hệ* S, ký hiệu $W = \operatorname{span} S$, và S *được gọi là hệ sinh* của W

Khi S hữu hạn thì W được gọi là không gian véc tơ *hữu hạn sinh*

Định lý 2.4

$W = \operatorname{span} S$ bằng tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của S.

Ví dụ 2.6

Không gian véc tơ con $W_2 = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - 3y + 4z = 0\}$ có tính chất

$$u = (x, y, z) \in W_2 \Leftrightarrow 2x - 3y + 4z = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}y - 2z$$

$$u = (x, y, z) \in W_2 \Leftrightarrow u = \left(\frac{3}{2}y - 2z, y, z\right) = \frac{y}{2}(3,2,0) + z(-2,0,1)$$

Xét $v_1 = (3,2,0)$, $v_2 = (-2,0,1) \in W_2$, ta được $W_2 = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$.

Ta cũng có

$$u = (x, y, z) \in W_2 \Leftrightarrow u = \left(\frac{3}{2}y - 2z, y, z\right) = y\left(\frac{3}{2}, 1, 0\right) - z(2, 0, -1)$$

Do đó $W_2 = \operatorname{span}\{v'_1, v'_2\}$; $v'_1 = \left(\frac{3}{2}, 1, 0\right)$, $v'_2 = (2, 0, -1)$

- Như vậy một không gian véc tơ có thể được sinh bởi nhiều hệ sinh khác nhau.

2.2.3. Tổng của một họ không gian véc tơ con

Giả sử $W_1, \dots, W_n$ là n không gian con của V

Ký hiệu

$$W_1 + \cdots + W_n = \{u_1 + \cdots + u_n \mid u_i \in W_i; \forall i = 1, \dots, n\}$$

$W_1 + \dots + W_n$ cũng là không gian véc tơ con của V và được gọi là ***tổng của các không gian véc tơ con*** $W_1, \dots, W_n$.

$$u \in W_1 + \cdots + W_n \Leftrightarrow u = u_1 + \cdots + u_n,\ u_i \in W_i;\ \forall i = 1, \dots, n$$

Nói chung cách biểu diễn véc tơ của không gian tổng thành tổng các véc tơ của các không gian con là không duy nhất.

Ngoài ra, ta có thể chứng minh được.

$$W_1 + \cdots + W_n = \operatorname{span}(W_1 \cup \dots \cup W_n)$$

Nếu mọi $u \in W_1 + \cdots + W_n$ được viết một cách duy nhất dưới dạng $u = u_1 + \cdots + u_n, u_i \in W_i, i = 1,...,n$ thì tổng các không gian con này được gọi là tổng trực tiếp. Lúc đó ta ký hiệu $W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$.

Định lý 2.5:

Giả sử W_1, W_2 là hai không gian con của V, khi đó tổng hai không gian con này là tổng trực tiếp $W_1 \oplus W_2$ khi và chỉ khi $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$

Ví dụ 2.7

$$W_1 = \{u = (x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$W_2 = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - 3y + 4z = 0\}$$

$$\forall u \in \mathbb{R}^3 : u = (x, y, z) = (x, y - 4z/3, 0) + (0, 4z/3, z) \in W_1 + W_2$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^3 \subset W_1 + W_2 \Rightarrow W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3.$$

Ta cũng có thể nhận thấy rằng cách viết không duy nhất, chẳng hạn

$$u = (x, y, z) = (0, y - (2x + 4z)/3, 0) + (x, (2x + 4z)/3, z) \in W_1 + W_2.$$

Vậy tổng của hai không gian véc tơ con này không phải là tổng trực tiếp.

Ta cũng có $W_1 \cap W_2 = \left\{ \frac{y}{2}(3, 2, 0) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} \neq \{(0, 0, 0)\}$.

Ví dụ 2.8

$$W_1 = \{u = (x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$W_4 = \{u = (0, z, z) | z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\forall u \in \mathbb{R}^3 : u = (x, y, z) = (x, y - z, 0) + (0, z, z) \in W_1 + W_4$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^3 \subset W_1 + W_4 \Rightarrow W_1 + W_4 = \mathbb{R}^3$$

$$W_1 \cap W_4 = \{(0, 0, 0)\}.$$

Vậy tổng của hai không gian véc tơ con này là tổng trực tiếp

$$\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_4.$$

2.3. ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH, PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

- Cho hệ n véc tơ $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ của V (các véc tơ này có thể trùng nhau).

  Hệ $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ ***phụ thuộc tuyến tính*** khi và chỉ khi tồn tại $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho

  $$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \mathbf{0}.$$

- Hệ không phụ thuộc tuyến tính được gọi ***hệ là độc lập tuyến tính.***
- Vậy hệ S độc lập tuyến tính nếu với mọi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

  $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \mathbf{0}$ thì $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$

Ví dụ 2.9 $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \mathbf{0}$$

Hệ $\{e_1, e_2, e_3\}$ là độc lập

Ví dụ 2.10

- Hệ chứa véc tơ $\mathbf{0}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính
- Hệ hai véc tơ $\{u_1, u_2\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng tỷ lệ, nghĩa là $u_1 = \alpha u_2$ hoặc $u_2 = \alpha u_1$
- Xét các véc tơ $u_1 = (4,-2,8)$, $u_2 = (-6,3,-12)$, $u_3 = (3,-2,5)$
  Hệ hai véc tơ $\{u_1, u_2\}$ phụ thuộc tuyến tính $(u_2 = -3/2u_1)$
  và hệ $\{u_1, u_3\}$ độc lập tuyến tính

Định lý 2.6

1) Nếu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính và $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ thì cách viết này là duy nhất.

2) Hệ véc tơ chứa hệ con phụ thuộc tuyến tính là hệ phụ thuộc tuyến tính. Vì vậy, mọi hệ con của hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính.

3) Một hệ véc tơ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại.

4) Giả sử hệ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính. Khi đó hệ $\{v_1, \ldots, v_n, u\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi u là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $\{v_1, \ldots, v_n\}$, khi đó ta có thể biểu diễn duy nhất $u = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$

2.4. HỆ CON ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH TỐI ĐẠI. HẠNG CỦA MỘT HỆ HỮU HẠN CÁC VÉC TƠ

2.4.1. Hệ con độc lập tuyến tính tối đại

Cho hệ S các véc tơ của không gian véc tơ V. Hệ con S' của hệ S được gọi là độc lập tuyến tính tối đại của S nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

1) S' là hệ độc lập tuyến tính.

2) Nếu thêm bất kỳ véc tơ nào của S vào S' thì ta có hệ phụ thuộc tuyến tính *(tối đại).*

Định lý 2.7

1) Nếu $\boldsymbol{S}'$ là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\boldsymbol{S}$ thì mọi véc tơ của $\boldsymbol{S}$ là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của $\boldsymbol{S}'$ và cách biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính là duy nhất.

2) Giả sử $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là hệ con độc lập tuyến tính của một hệ hữu hạn $\boldsymbol{S}$. Khi đó ta có thể bổ sung thêm để được một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\boldsymbol{S}$ chứa $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Ví dụ 2.11 Tìm hệ con độc lập tuyến tính tối đại hệ véc tơ

$$u_1 = (3,1,4),\ u_2 = (2,-3,5),\ u_3 = (5,-2,9),\ u_4 = (1,4,-1)$$

- Hai véc tơ $\{u_1, u_2\}$ độc lập vì không tỉ lệ
- Có thể kiểm tra được: $u_3 = u_1 + u_2;\ \ u_4 = u_1 - u_2$

Vậy $\{u_1, u_2\}$ là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S

Tương tự có thể kiểm tra được $\{u_1,u_3\}$, $\{u_1,u_4\}$, $\{u_2,u_3\}$, $\{u_2,u_4\}$ cũng là các hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S

2.4.2. Hạng của một hệ hữu hạn các véc tơ

Bổ đề 2.8 (Định lý thế Steinitz (Xtêi-nít)):

Nếu hệ S độc lập tuyến tính có n véc tơ và mỗi véc tơ của S là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ R có k véc tơ thì $n \le k$.

Định lý 2.9:

Mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ hữu hạn S đều có số phần tử bằng nhau.

Định nghĩa

- Số các véc tơ của một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S được gọi là ***hạng*** (rank) của S, ký hiệu $r(S)$.
- Qui ước hệ chỉ có một véc tơ không $\{\mathbf{0}\}$ có hạng là 0.

Ví dụ 2.12 Hệ véc tơ

$$u_1 = (3,1,4),\ u_2 = (2,-3,5),\ u_3 = (5,-2,9),\ u_4 = (1,4,-1)$$

Các hệ con độc lập tuyến tính tối đại.

$\{u_1,u_2\}$ $\{u_1,u_3\}$ $\{u_1,u_4\}$

$\{u_2,u_4\}$ $\{u_2,u_3\}$

$\{u_3,u_4\}$

Các hệ con độc lập tuyến tính tối đại đều có 2 phần tử.

Vậy có hạng bằng 2.

2.5. CƠ SỞ, SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VÉC TƠ TOẠ ĐỘ CỦA MỘT VÉC TƠ

Định nghĩa Mỗi hệ sinh độc lập tuyến tính của V được gọi là ***một cơ sở*** của V.

Định lý 2.10

Giả sử $\{e_1, \dots, e_n\}$ là một hệ các véc tơ của V. Các mệnh đề sau là tương đương

(i) Hệ $\{e_1,\dots,e_n\}$ là một cơ sở của V

(ii) Hệ $\{e_1,\dots,e_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính tối đại của V

(iii) Mọi véc tơ $u \in V$ tồn tại một cách viết duy nhất

$$u = x_1e_1 + \dots + x_ne_n;\ x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$$

$(x_1, \dots, x_n)$ được gọi là ***toạ độ của véc tơ*** u trong cơ sở $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Ký hiệu $\quad (u)_{\mathscr{B}} = (x_1,\dots,x_n) \quad \mathscr{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$

Ví dụ 2.13 Hai hệ véc tơ $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}, \mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2\}$

với $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ và $e'_1 = (1,1)$, $e'_2 = (4,3)$

là hai cơ sở của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$.

$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$u = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2$$

$$u = (x, y) = x'e'_1 + y'e'_2 = x'(1,1) + y'(4,3) = (x' + 4y', x' + 3y')$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' + 4y' = x \\ x' + 3y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4y - 3x \\ y' = x - y \end{cases}$$

Vậy $(u)_{\mathscr{B}} = (x, y);\ (u)_{\mathscr{B}'} = (4y - 3x, x - y)$

Chẳng hạn $u = (3,1), (u)_{\mathscr{B}'} = (-5,2); v = (-1,2), (v)_{\mathscr{B}'} = (11,-3)$

$\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ được gọi là cơ sở chính tắc của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$.

Định lý 2.11

Giả sử V là không gian hữu hạn sinh và $\{v_1, \dots, v_k\}$ là hệ độc lập tuyến tính các véc tơ của V. Khi đó có thể bổ sung thêm để có được hệ $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+m}\}$ là một cơ sở của V.

- Mọi không gian hữu hạn sinh đều tồn tại cơ sở.
- Số phần tử của mọi cơ sở của đều bằng nhau.
- Số véc tơ của một cơ sở của V được gọi là số chiều của V.
- Ký hiệu $\dim V$.
- Quy ước $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

Ví dụ 2.14 Trong không gian $\mathbb{R}^n$ hệ véc tơ $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gọi là cơ sở chính tắc.

Vậy $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Ví dụ 2.15

Hệ $\mathscr{B} = \{1, x, \dots, x^n\}$ là một cơ sở của $\mathbf{P}_n$

được gọi là cơ sở chính tắc.

Vậy $\dim \mathbf{P}_n = n + 1$.

Chú ý 2.14:

Không gian $\mathbf{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_n$ là một ví dụ về không gian véc tơ *không hữu hạn sinh*

Định lý 2.14

Giả sử $\dim V = n$ và $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ là hệ m véc tơ của V. Khi đó:

(i) Nếu hệ S độc lập tuyến tính thì $m \le n$

(ii) Nếu hệ S là hệ sinh của thì $m \ge n$

(iii) Nếu $m = n$ thì hệ S độc lập tuyến tính khi và chỉ khi S là hệ sinh

Định lý 2.15

Giả sử W_1, W_2 là hai không gian con của V thì

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

Nói riêng

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

Ví dụ 2.16

$$W_1 = \{u = (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$W_2 = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 4z = 0\}$$

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3;\ W_1 \cap W_2 = \left\{ \frac{y}{2}(3, 2, 0) \,\Big|\, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim W_1 = \dim W_2 = 2,\ \dim(W_1 + W_2) = 3, \dim(W_1 \cap W_2) = 1$$

$$\dim W_1 + \dim W_2 = 4 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2).$$

$$W_4 = \{u = (0, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\dim W_4 = 1 \qquad W_1 \oplus W_4 = \mathbb{R}^3$$

$$\dim(W_1 \oplus W_4) = 3 = \dim W_1 + \dim W_4.$$

Định lý 2.16

Giả sử $\boldsymbol{S}$ là hệ hữu hạn các véc tơ của V, $\boldsymbol{S}_0$ là một hệ con của $\boldsymbol{S}$. Đặt $\boldsymbol{W} = \mathbf{span}\boldsymbol{S}$. Khi đó:

1) Hệ $\boldsymbol{S}_0$ là một con độc lập tuyến tính tối đại của $\boldsymbol{S}$ khi và chỉ khi $\boldsymbol{S}_0$ là một cơ sở của W, do đó $\boldsymbol{r(S) = \dim W}$.
2) Khi thực hiện một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp sau lên hệ $\boldsymbol{S}$:
   - Nhân một số khác 0 với một véc tơ của hệ $\boldsymbol{S}$/
   - Cộng vào một véc tơ của hệ $\boldsymbol{S}$ một tổ hợp tuyến tính các véc tơ khác của $\boldsymbol{S}$; thì hệ $\boldsymbol{S}$ biến thành hệ $\boldsymbol{S}'$/

Đặt $W' = \operatorname{span}\boldsymbol{S}'$ thì $W = W'$, do đó $r(\boldsymbol{S}) = r(\boldsymbol{S}') = \dim W$.

Nhận xét 2.2:

- Để tìm hạng của hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_n\}$ ta có thể sử dụng một trong hai cách sau:

Cách 1: Áp dụng định lý 2.16 bằng cách thực hiện các phép biến đổi sơ cấp lên hệ véc tơ đã cho để đưa về hệ véc tơ dạng bậc thang mà ta dễ dàng nhận được hạng của nó.

trong đó các phần tử * là tùy ý có thể bằng 0, nhưng các phần tử khác 0 ở vị trí trên cùng của các cột tạo thành hình bậc thang

Khi đó các cột khác 0 tạo thành hệ véc tơ độc lập tuyến tính tối đại cần tìm.

$$\begin{matrix} * & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ * & * & 0 & 0 & \cdots \\ * & * & * & 0 & \cdots \\ * & * & * & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

Cách 2: Áp dụng tính chất 2.6 theo từng bước như sau:

1. Loại các véc tơ $v_i = \mathbf{0}$,
2. Giả sử $v_{i_j} \neq \mathbf{0}$, loại các véc tơ v_i tỉ lệ với v_{i_j},
3. Giả sử $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ độc lập, khi đó $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}, v_j\}$ độc lập khi và chỉ khi v_j không biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$.
4. Tiếp tục quá trình này cuối cùng tìm được hệ con độc lập tuyến tính tối đại

Ví dụ 2.17 Tìm hạng của hệ véc tơ sau:

$$v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (1,-1,1,-1),\ v_3 = (1,3,1,3),\ v_4 = (1,2,0,2),\ v_5 = (1,2,1,2)$$