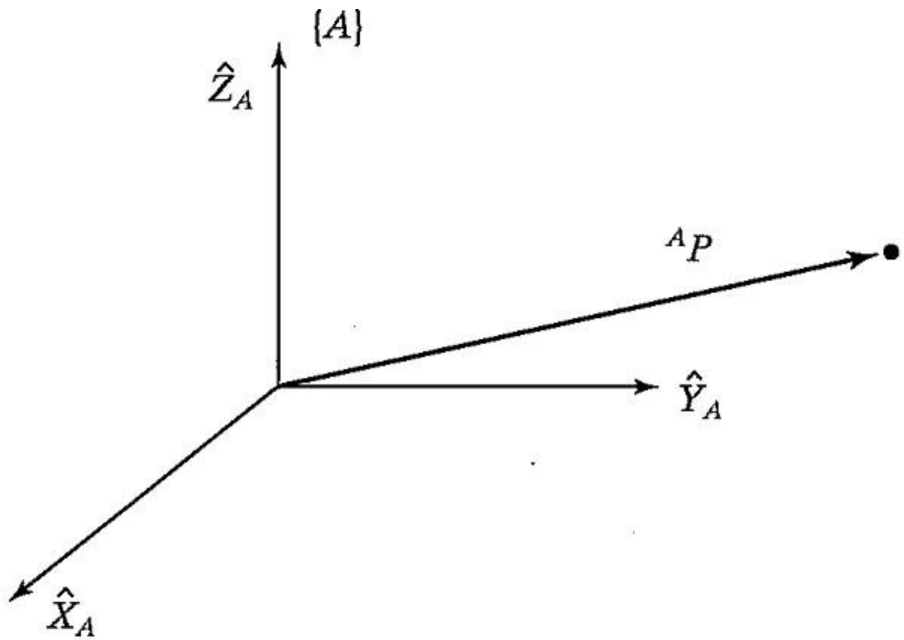
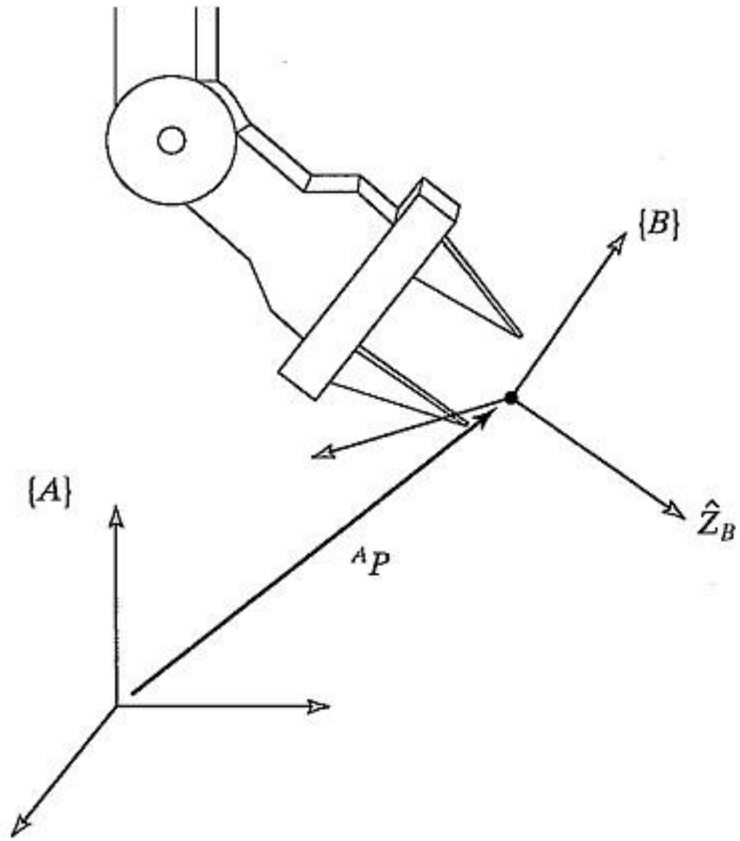
Описание координат в пространстве и преобразования над ними

Описание позиции объекта в простанстве



$$ {}^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} $$

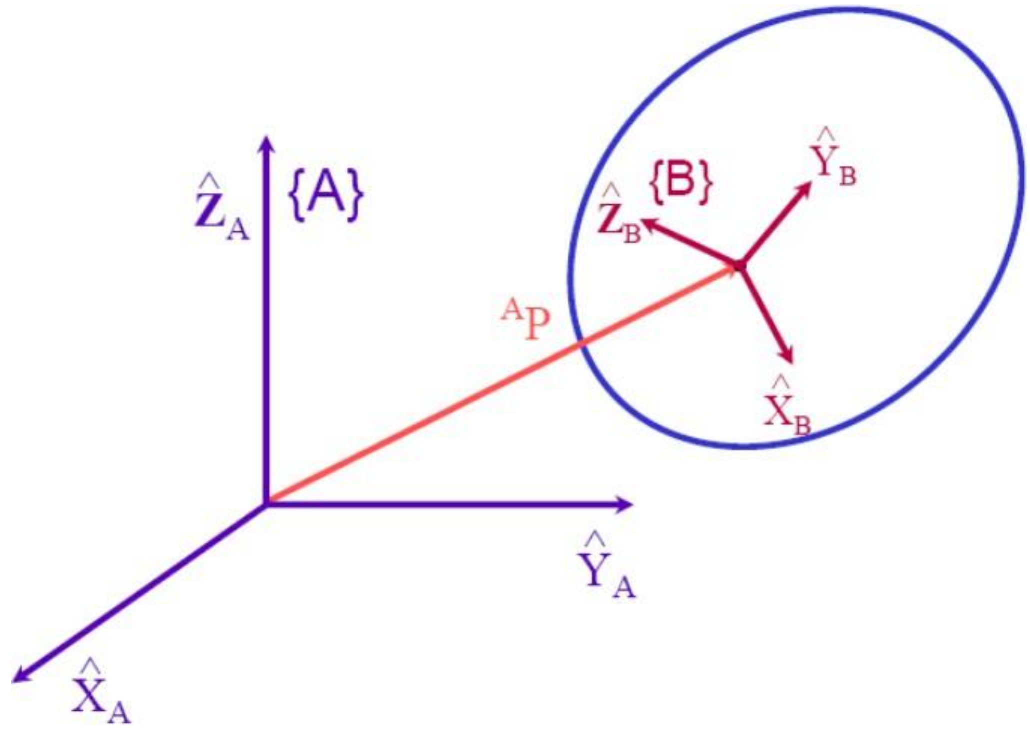
Описание ориентации объекта в простанстве



Обозначим единичные векторы, задающие главные направления системы координат {B}, как $\hat{X}_B$, $\hat{Y}_B$, and $\hat{Z}_B$.

По отношению к {A}, они будут иметь следующи вид

${}^A\hat{X}_B$, ${}^A\hat{Y}_B$, and ${}^A\hat{Z}_B$



Сложив эти три вектора вместе – получим **матрицу поворота** 3x3

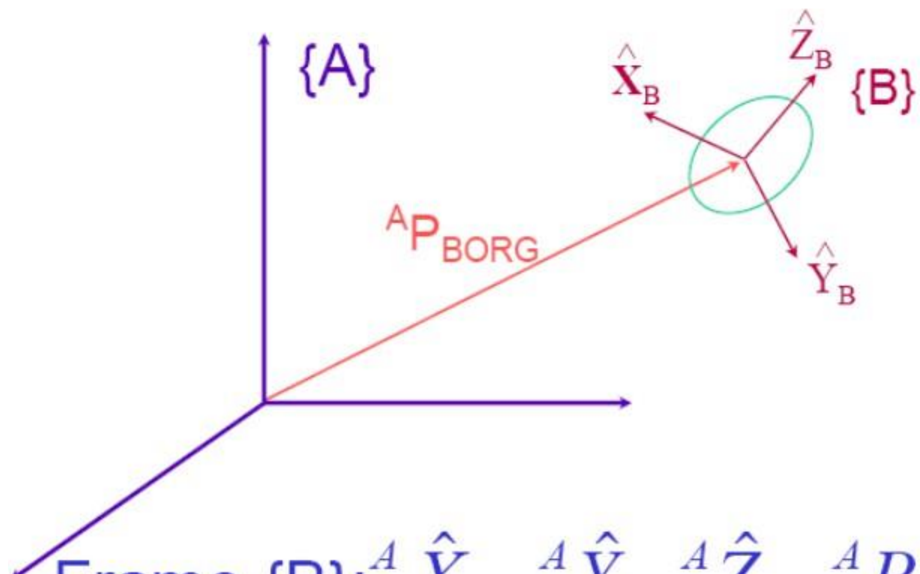
$$ {}^{A}_{B}R = \left[\ {}^{A}\hat{X}_{B}\quad {}^{A}\hat{Y}_{B}\quad {}^{A}\hat{Z}_{B}\ \right] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$

r ij — проекция этого вектора на единичные направления системы отсчета

$$ {}^{A}_{B}R = \left[\ {}^{A}\hat{X}_{B}\quad {}^{A}\hat{Y}_{B}\quad {}^{A}\hat{Z}_{B}\ \right] = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} $$

Описание {B}

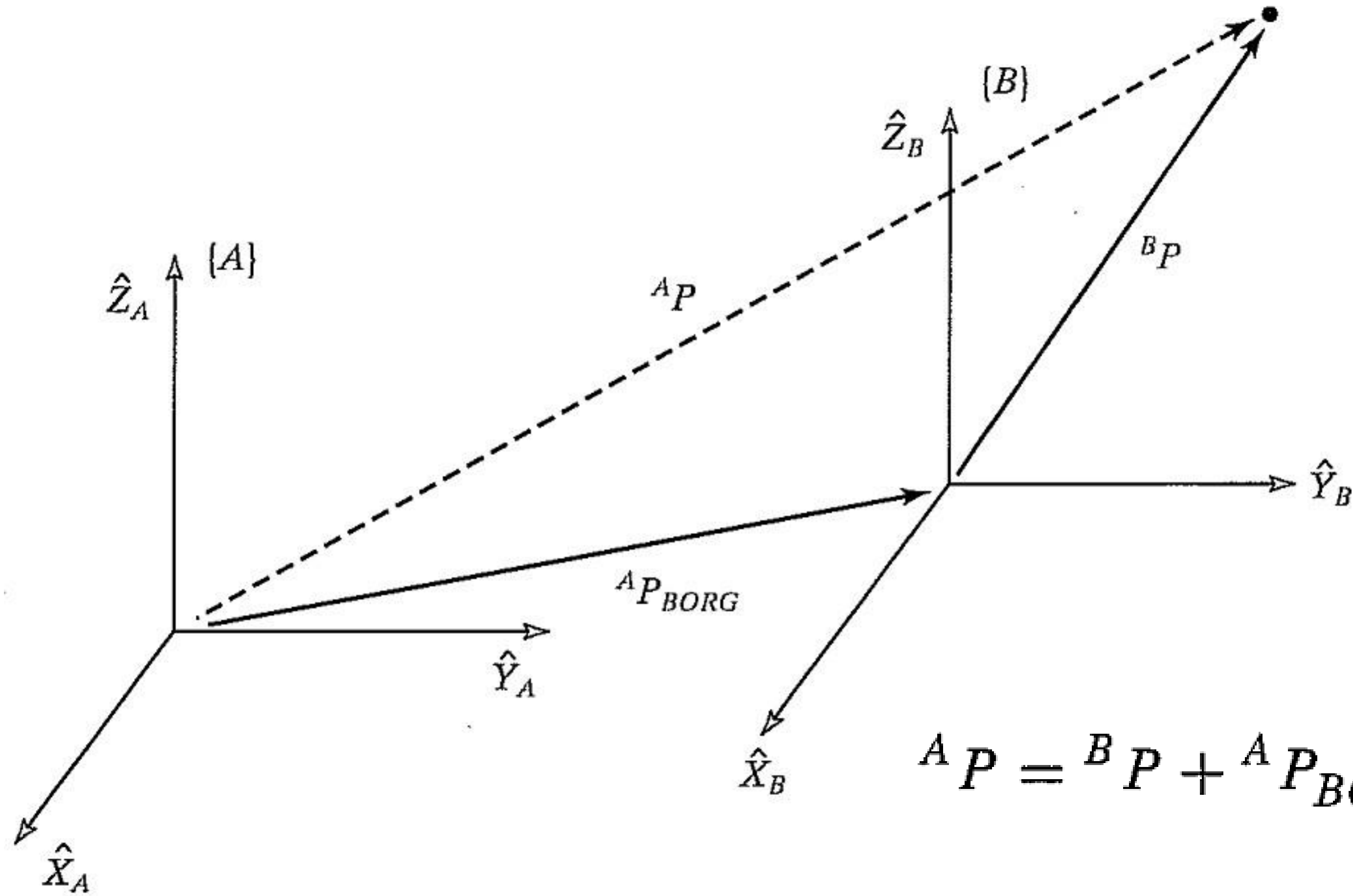
Точка принадляжащая {B}, положение которой мы описываем, может быть выбрана произвольно, однако для удобства точка, положение которой мы будем описывать, выбрана в качестве начала отсчета, связанного с {B}.



Frame {B}: $^{A}\hat{X}_B, {}^{A}\hat{Y}_B, {}^{A}\hat{Z}_B, {}^{A}P_{Borg}$

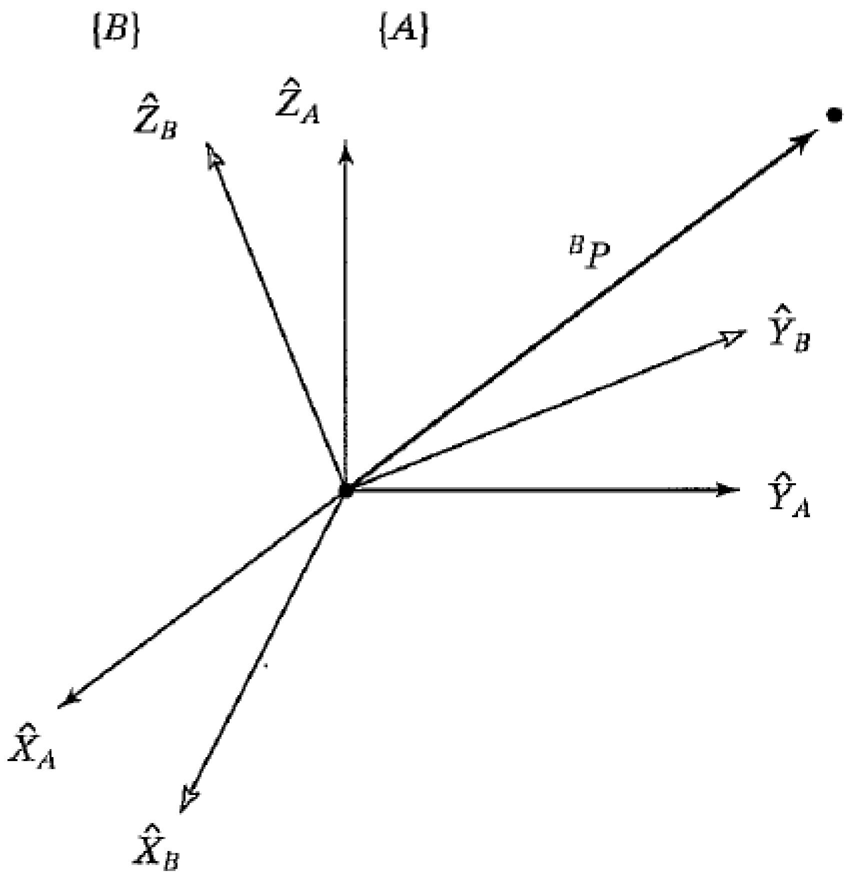
$$\{B\} = \left\{ {}^{A}_{B}R \quad {}^{A}P_{Borg} \right\}$$

Смещение



$$^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}.$$

Поворот



$$
\begin{aligned}
{}^A px &= {}^B\hat{X}_A \cdot {}^B P, \\
{}^A p_y &= {}^B\hat{Y}_A \cdot {}^B P, \\
{}^A p_z &= {}^B\hat{Z}_A \cdot {}^B P.
\end{aligned}
$$

Поворот

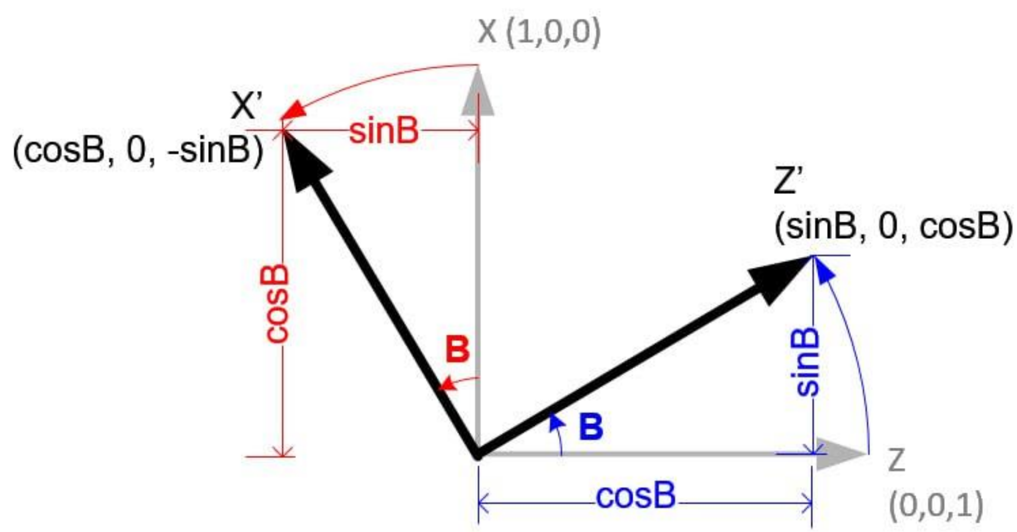
Компоненты ^{A}P могут быть рассчитаны как

$$
\begin{aligned}
{}^{A}px &= {}^{B}\hat{X}_A \cdot {}^{B}P, \\
{}^{A}p_y &= {}^{B}\hat{Y}_A \cdot {}^{B}P, \\
{}^{A}p_z &= {}^{B}\hat{Z}_A \cdot {}^{B}P.
\end{aligned}
\qquad (2.12)
$$

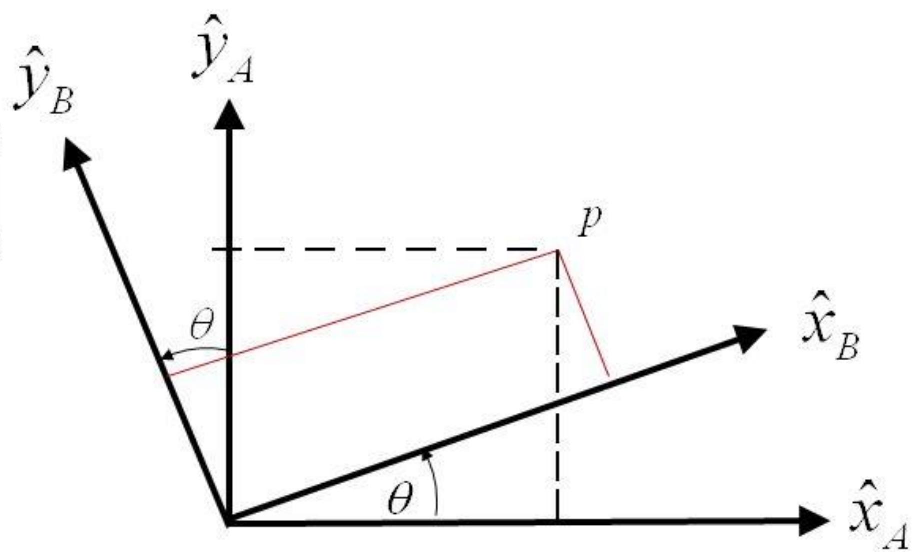
(2.13) можно записать компактно, используя матрицу поворота $^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P.$

$$
{}^{A}_{B}R = \left[\, {}^{A}\hat{X}_B \quad {}^{A}\hat{Y}_B \quad {}^{A}\hat{Z}_B \,\right] = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}^{T}_{A} \\ {}^{B}\hat{Y}^{T}_{A} \\ {}^{B}\hat{Z}^{T}_{A} \end{bmatrix}.
$$

Поворот



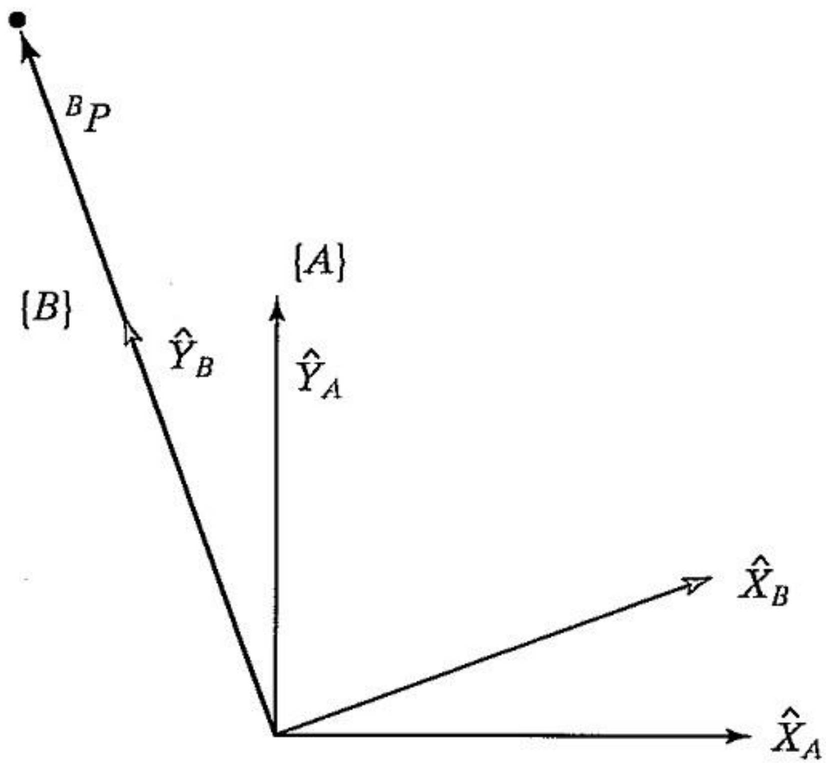
$$^{A}R_{B} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$



Пример

{B} повернуто относительно {A}

вокруг оси Z на 30 градусов. Дано ^{B}P Найти ^{A}P

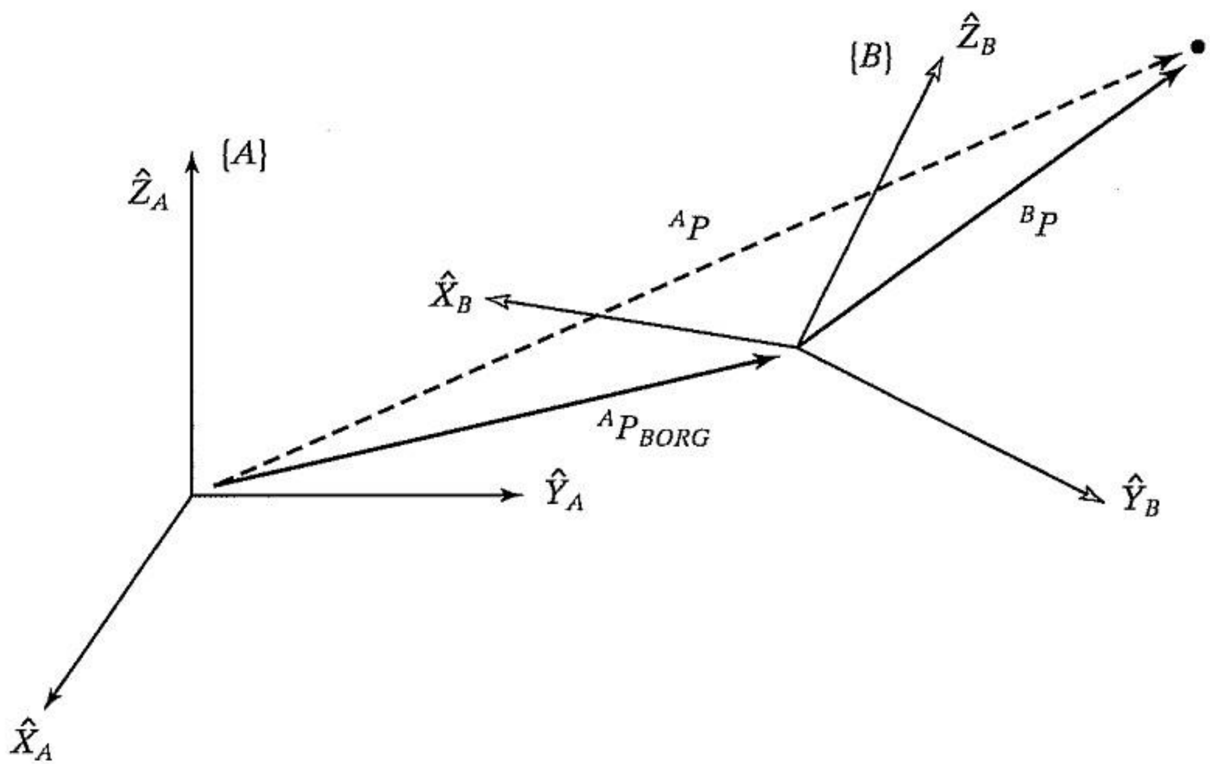


$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ ^{B}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, $$

$$ ^{A}P = {}^{A}_{B}R\, {}^{B}P = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.732 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Смещение и поворот



Смещение и поворот (матрица перехода)

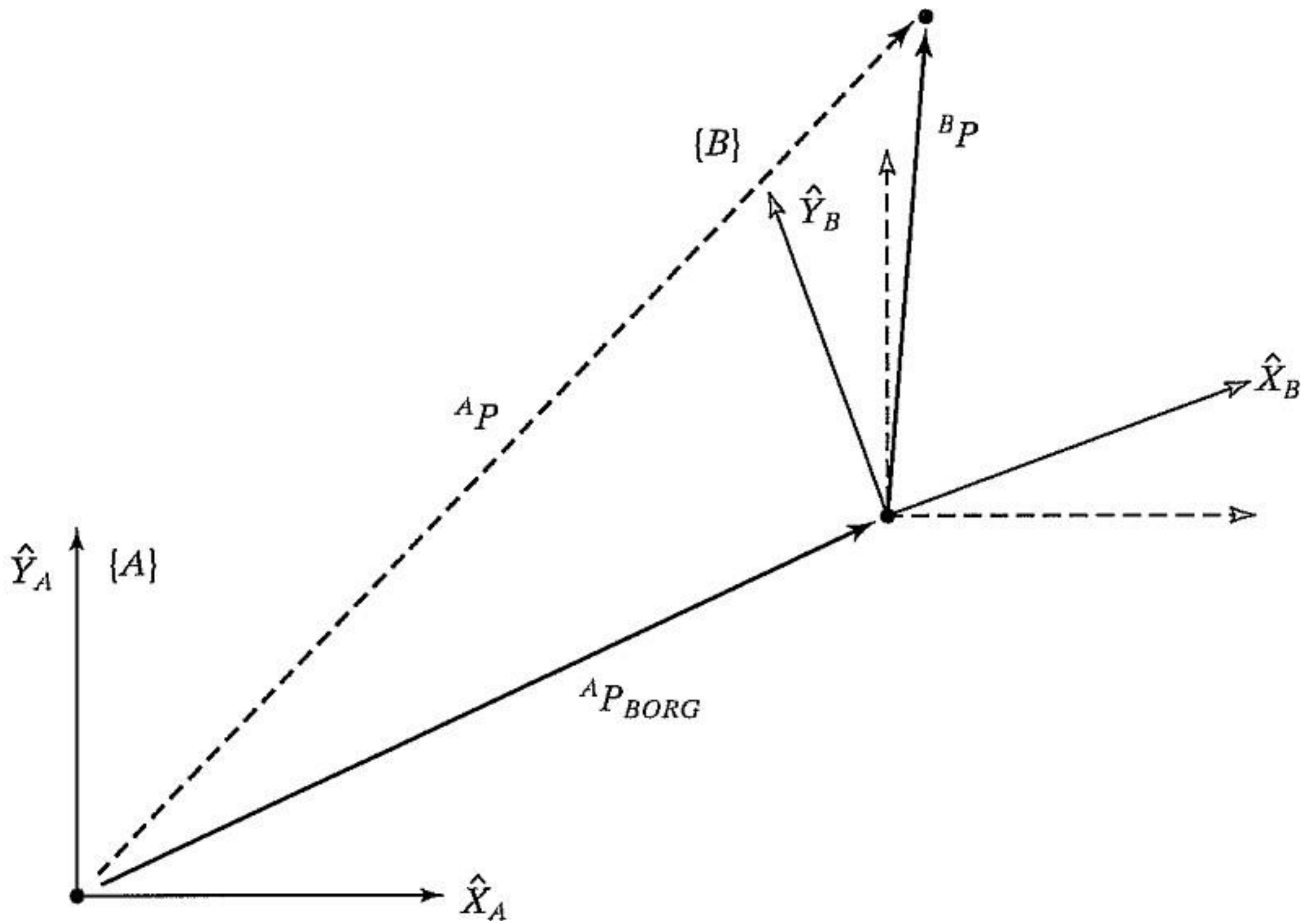
$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}. \tag{2.17}$$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P. \tag{2.18}$$

$$ \begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Пример

{B} повернуто относительно {A} вокруг Z_A на 30 градусов, и смещено на 10 единиц по X_A и на 5 единиц по Y_A. ^{B}P равен [3.0, 7.0, 0.0]. Найти ^{A}P



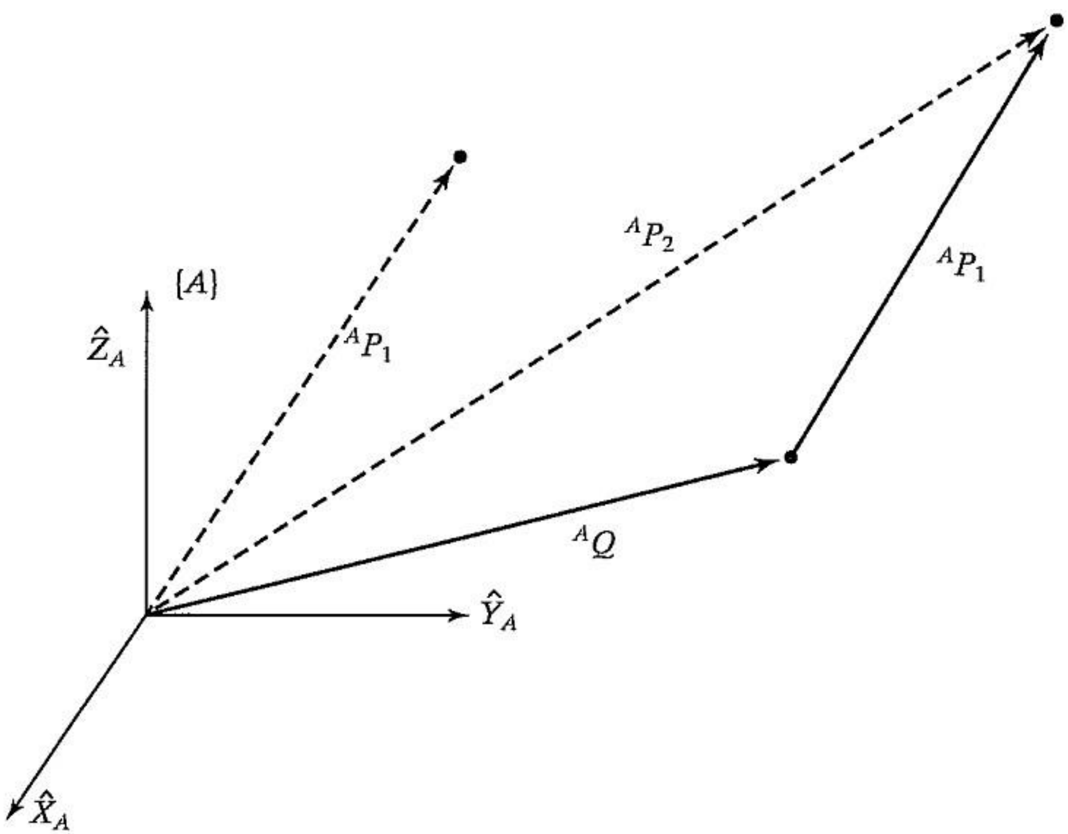
Решение

$$
{}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 5.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.21}
$$

$$
{}^{B}P = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 7.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \tag{2.22}
$$

$$
{}^{A}P = {}^{A}_{B}T \; {}^{B}P = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0.000 \end{bmatrix}. \tag{2.23}
$$

Смещение и поворот (матрица перехода)



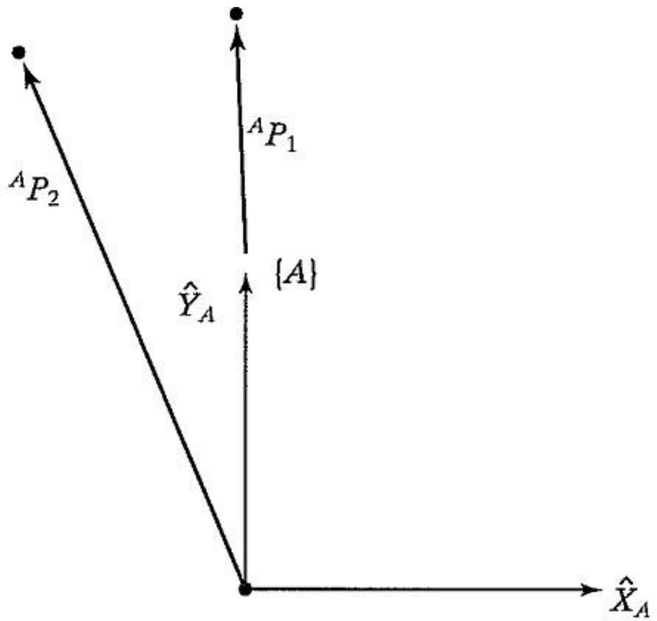
$$^{A}P_2 = {}^{A}P_1 + {}^{A}Q.$$

$$^{A}P_2 = D_Q(q)\,{}^{A}P_1$$

$$D_Q(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2.26)$$

Поворот

«Фиксированная система координат, объект вращается вокруг вектора»



$$ {}^{A}P_2 = R\, {}^{A}P_1. $$

$$ {}^{A}P_2 = R_K(\theta)\, {}^{A}P_1. $$

$$ R_z(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Пример

На предыдущем слайде показан вектор $^{A}P_1$. Найти результирующий вектор $^{A}P_2$ после поворота $^{A}P_1$ на 30 градусов относительно Z.

$$R_z(30.0) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

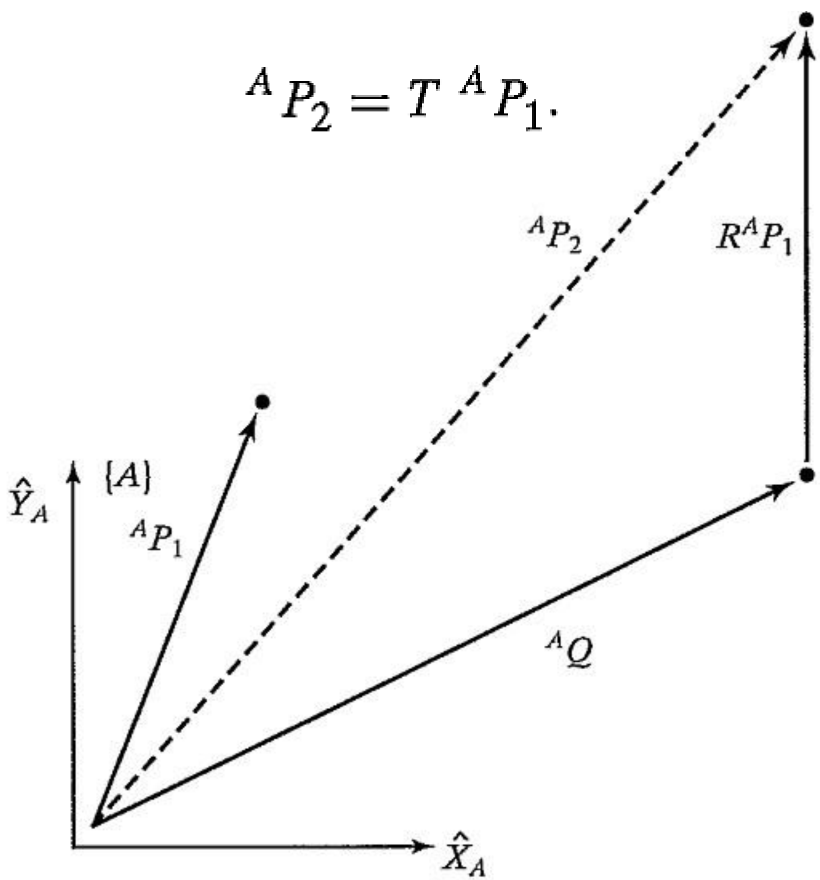
$$^{A}P_1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

we calculate $^{A}P_2$ as

$$^{A}P_2 = R_z(30.0)\, ^{A}P_1 = \begin{bmatrix} -1.000 \\ 1.732 \\ 0.000 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Операторы преобразования

$$^{A}P_2 = T\ ^{A}P_1.$$



Операторы преобразования

На предыдущем слайде показан вектор $^AP_1$. Найти результирующий вектор $^AP_2$ после поворота $^AP_1$ на 30 градусов относительно Z и смещения по X на 10 единиц и на 5 единиц по Y. $^AP_1$ равен $[3.0, 7.0, 0.0]^T$.

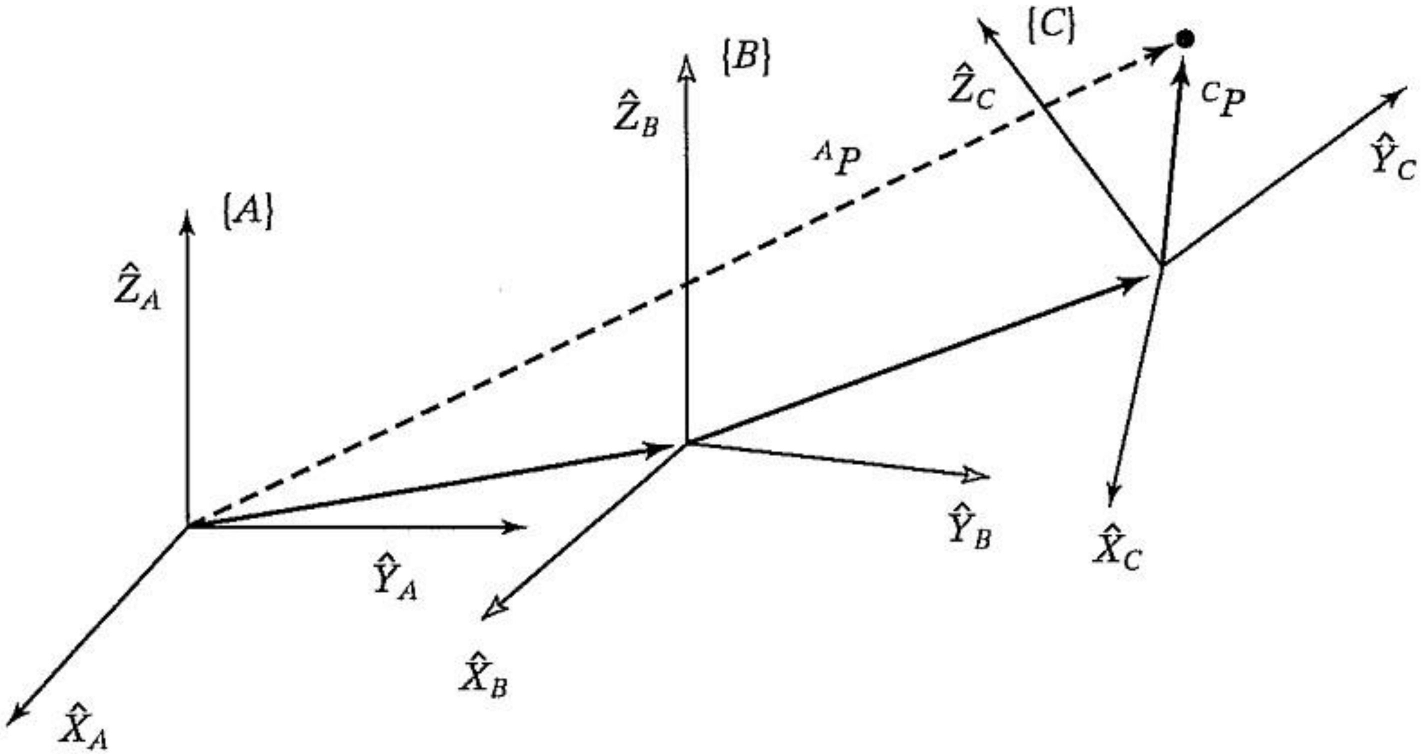
$$T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 5.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Given

$$^AP_1 = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 7.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

$$^AP_2 = T\, ^AP_1 = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0.000 \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

Составные преобразования



Дано ${}^{C}P$. Найти ${}^{A}P$

Составные преобразования

$$ {}^{B}P = {}^{B}_{C}T\,{}^{C}P; \tag{2.37} $$

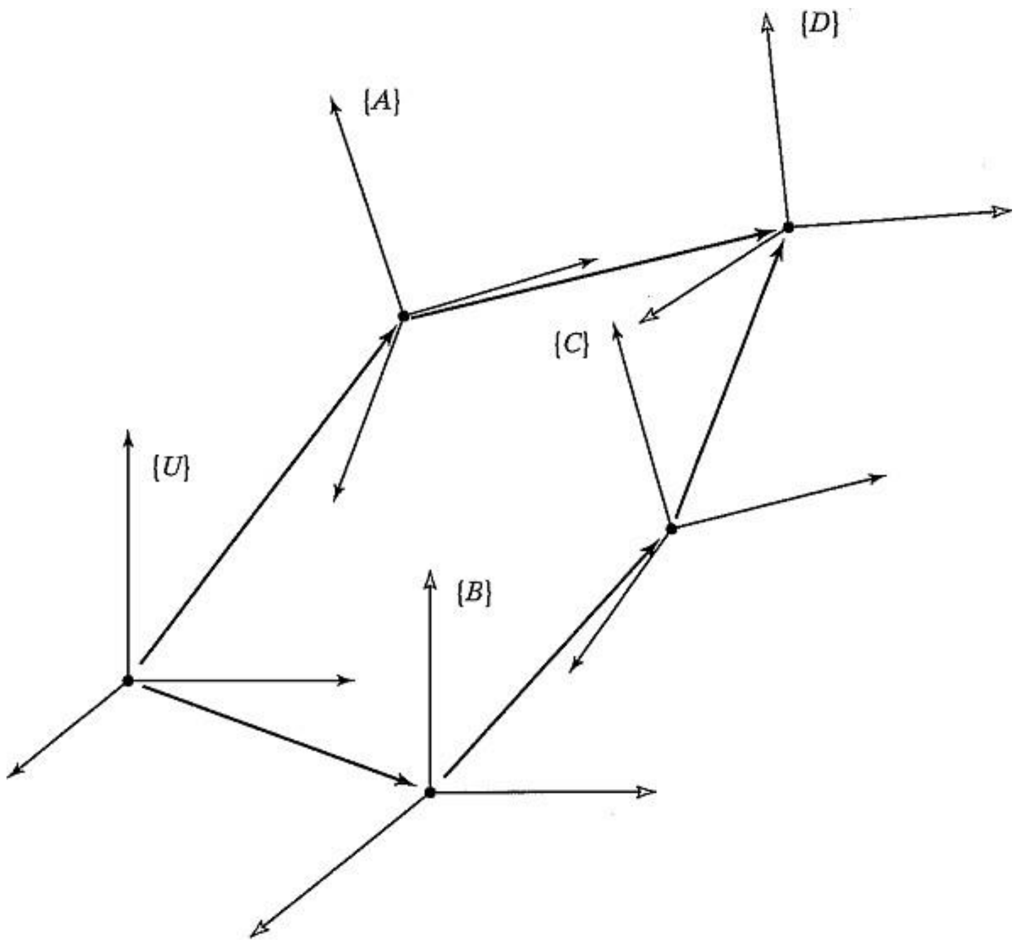
$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P. \tag{2.38} $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}P, \tag{2.39} $$

$$ {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T. \tag{2.40} $$

$$ {}^{A}_{C}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R & & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{CORG} + {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{2.41} $$

Уравнения преобразования



$$ {}^U_D T = {}^U_A T \, {}^A_D T; $$

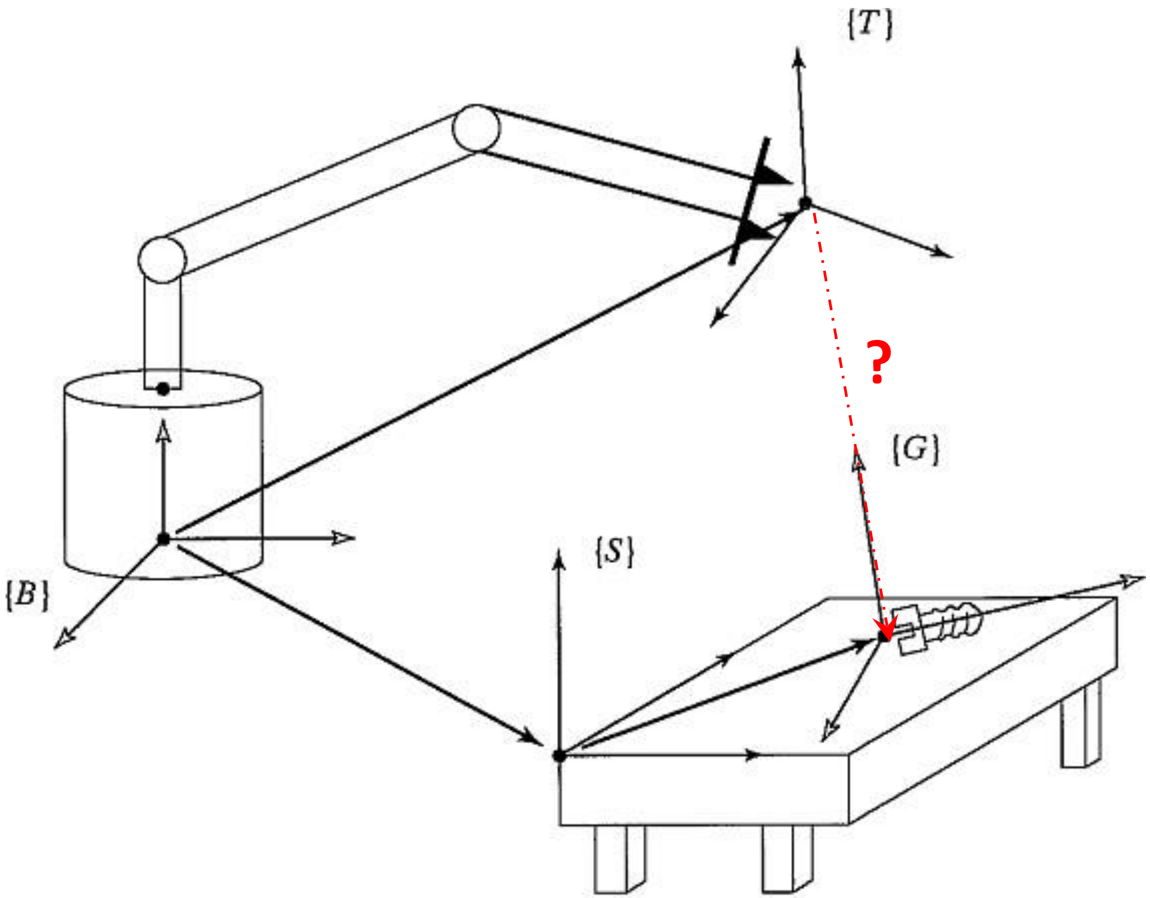
$$ {}^U_D T = {}^U_B T \, {}^B_C T \, {}^C_D T. $$

$$ {}^U_A T \, {}^A_D T = {}^U_B T \, {}^B_C T \, {}^C_D T. $$

$$ {}^B_C T = {}^U_B T^{-1} \, {}^U_A T \, {}^A_D T \, {}^C_D T^{-1}. $$

Уравнения преобразования

Пример



$$ {}^{T}_{G}T = {}^{B}_{T}T^{-1}\ {}^{B}_{S}T\ {}^{S}_{G}T. $$

Порядок поворота

Пример

$$R_z(30) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

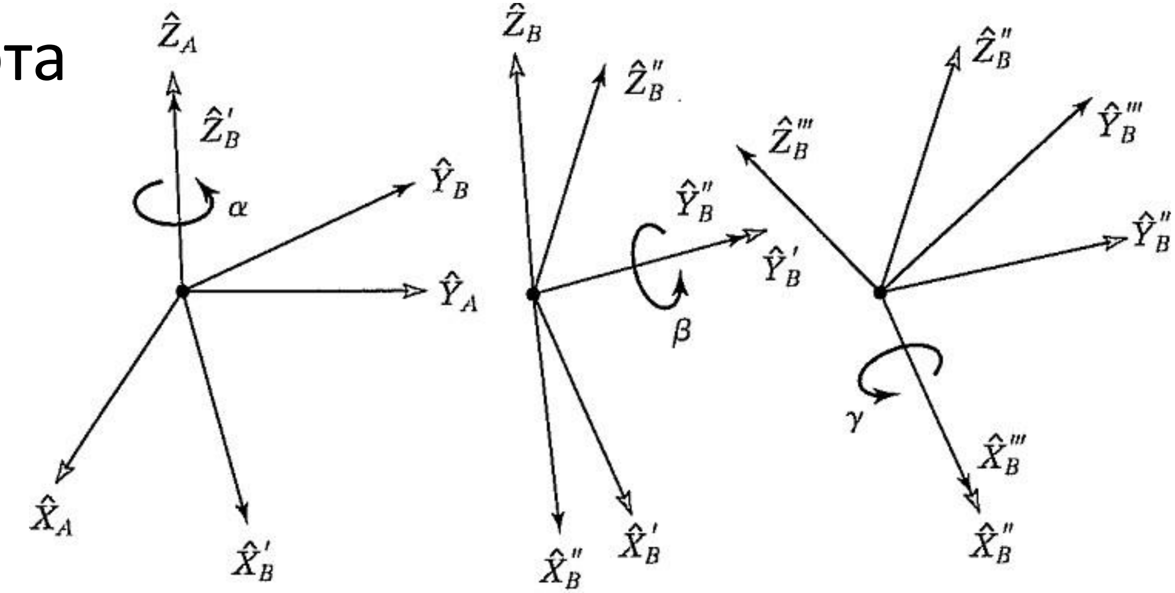
$$R_x(30) = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.866 & -0.500 \\ 0.000 & 0.500 & 0.866 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

Порядок имеет значение!

$$R_z(30)R_x(30) = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.43 & 0.25 \\ 0.50 & 0.75 & -0.43 \\ 0.00 & 0.50 & 0.87 \end{bmatrix}$$

$$\neq R_x(30)R_z(30) = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.50 & 0.00 \\ 0.43 & 0.75 & -0.50 \\ 0.25 & 0.43 & 0.87 \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

Порядок поворота



$$
\begin{aligned}
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'} &= R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$