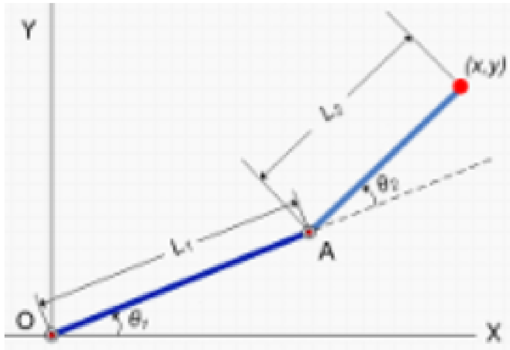
Обратная задача кинематики
6ти осевой робот-манипулятор



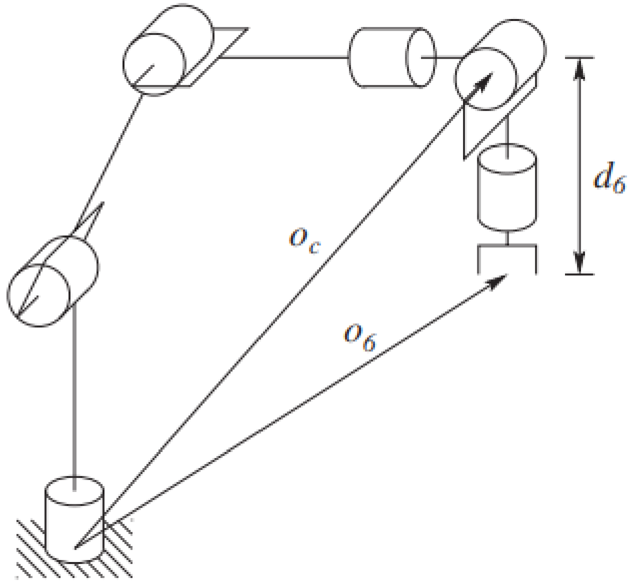
В робототехнике, есть две основные задачи кинематики:
прямая и обратная.

Рассмотрим эти задачи на стандартном примере манипулятора.

Прямая задача — это вычисление положения (X, Y, Z) рабочего органа манипулятора по его *кинематической схеме* и заданной ориентации (A1, A2… An) его звеньев (n — число степеней свободы манипулятора, A — углы поворота).

Обратная задача — это вычисление углов (A1, A2… An) по заданному положению (X, Y, Z) рабочего органа и опять же известной схеме его кинематики.

Т.о., решение прямой задачи говорит — где будет находиться рабочий орган манипулятора, при заданных углах его суставов, а обратная задача, наоборот, говорит: как нужно «вывернуться» манипулятору, чтобы его рабочий орган оказался в заданном положении.



o_c
o_6
d_6

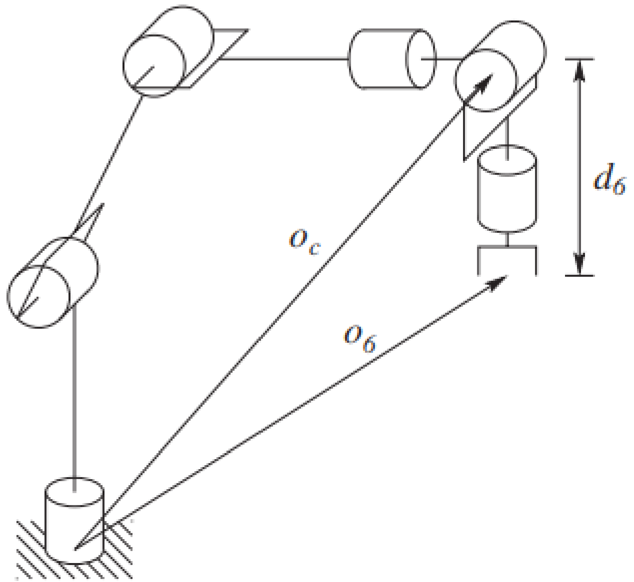


Рисунок 5.1: Вектор o_c — это положение центральной точки запястья, а o_6 — положение рабочего органа относительно базы робота. Координаты центральной точки запястья не зависят от переменных ориентации запястья θ_4, θ_5 и θ_6.

Начало координат рабочего органа (желаемые координаты которого указаны как o) получается путем переноса расстояния d_6 вдоль z_5 от o_c. В нашем случае z_5 и z_6 — это одна и та же ось, а третий столбец R показывет направление z_6 относительно базовой системы координат.

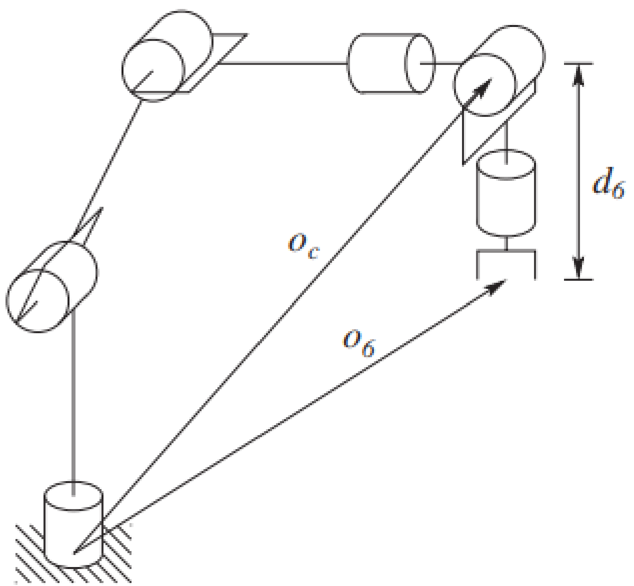
$$o = o_c^0 + d_6 R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

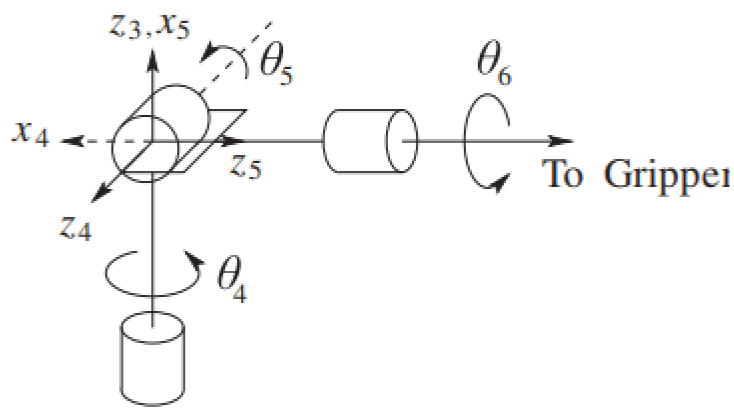
Таким образом, чтобы расположить рабочий орган робота в точке с координатами, заданными o, и с желаемой ориентацией, необходимо и достаточно, чтобы центр запястья o_c имел координаты, заданные как

$$o_c^0 = o - d_6 R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ориентация рабочего органа $o_6x_6y_6z_6$ относительно базы робота задается как R. Если рабочий орган o обозначен o_x, o_y, o_z, а компоненты центра запястья o_c обозначены x_c, y_c, z_c, то получим

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_x - d_6 r_{13} \\ o_y - d_6 r_{23} \\ o_z - d_6 r_{33} \end{bmatrix}$$





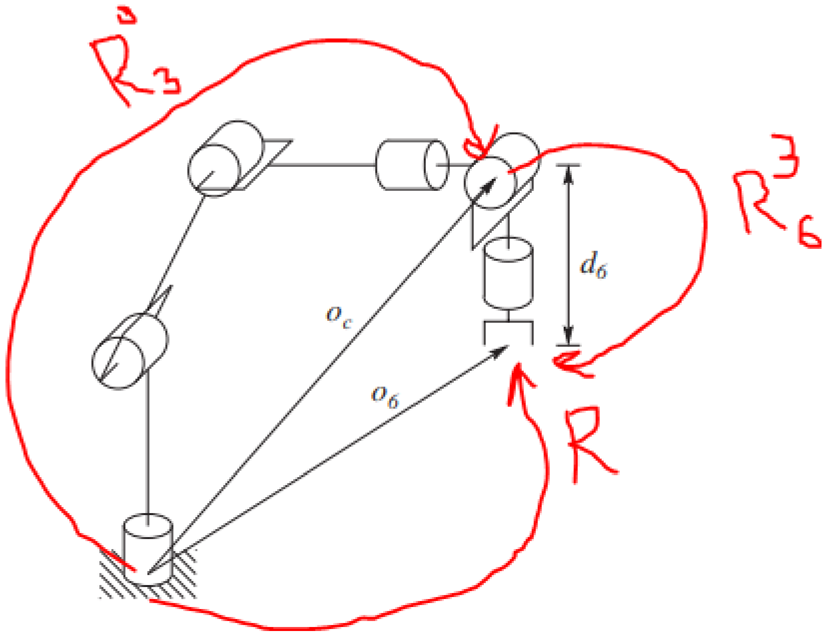
$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 & z_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 & z_1 \cdot y_0 \\ x_1 \cdot z_0 & y_1 \cdot z_0 & z_1 \cdot z_0 \end{bmatrix}$$

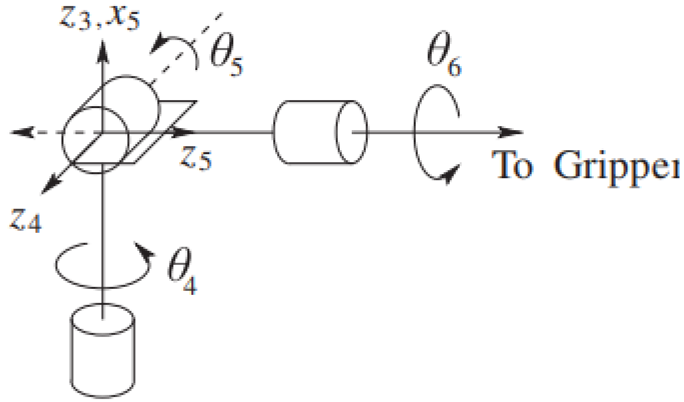
$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_x - d_6 r_{13} \\ o_y - d_6 r_{23} \\ o_z - d_6 r_{33} \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

Используя уравнение (5.11), мы можем найти значения первых трех переменных, значения R03 и определить ориентацию рабочего органа относительно $o_3x_3y_3z_3$ из выражения

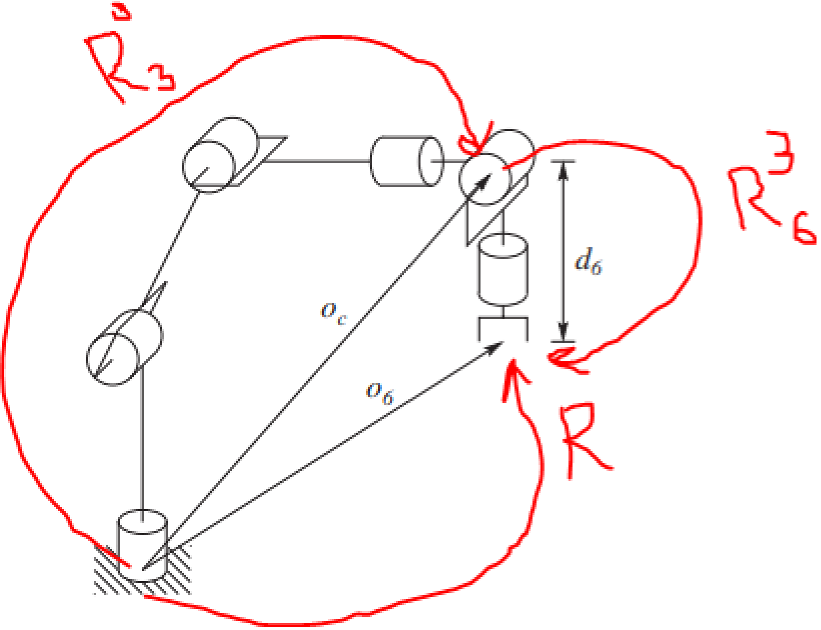
$$R = R_3^0 R_6^3 \tag{5.12}$$

$$R_6^3 = (R_3^0)^{-1} R = (R_3^0)^T R \tag{5.13}$$





геометрический подход



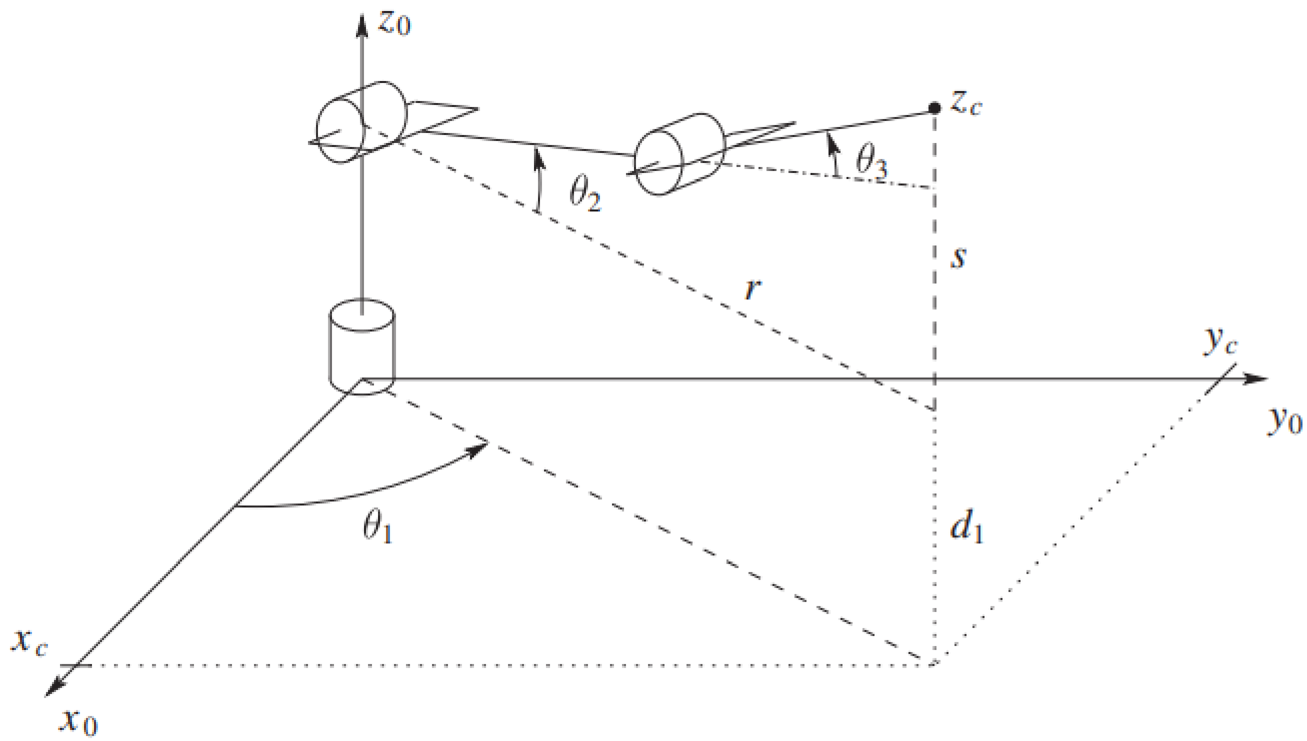


Рисунок 5.4: Первые три звена манипулятора.

$$\theta_1 = \mathrm{Atan2}(x_c, y_c) \tag{5.14}$$

$$\theta_1 = \pi + \mathrm{Atan2}(x_c, y_c) \tag{5.15}$$

geometрический подход

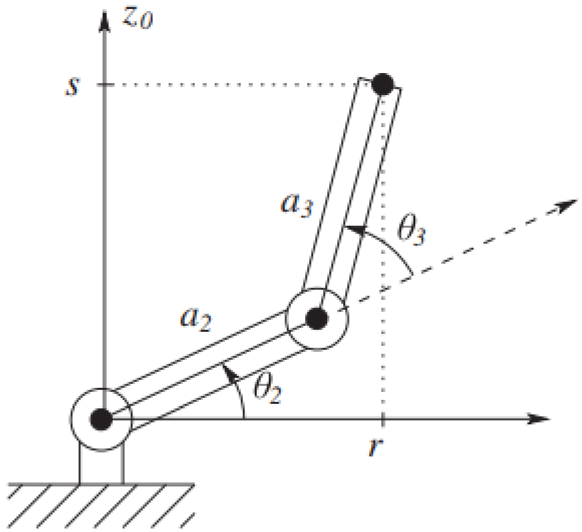


Рисунок 5.8: Проекция на плоскость, образованную звеньями 2 и 3.

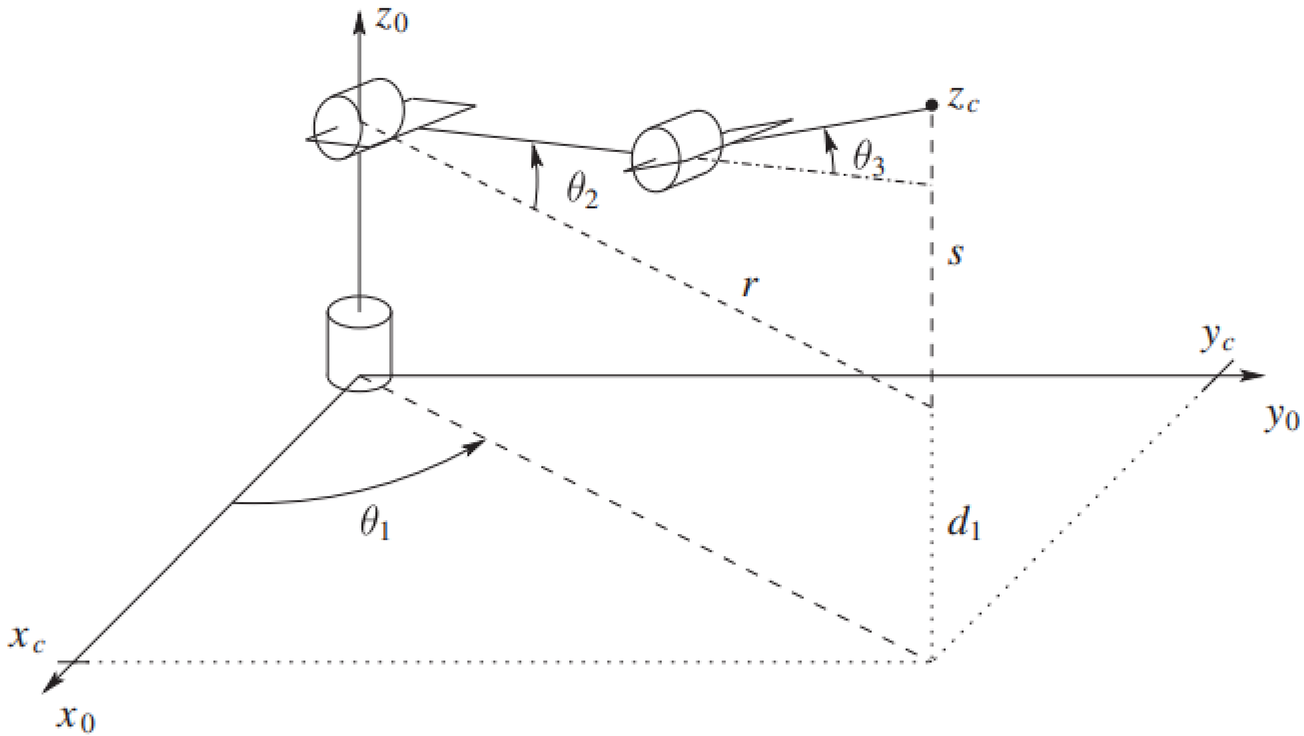
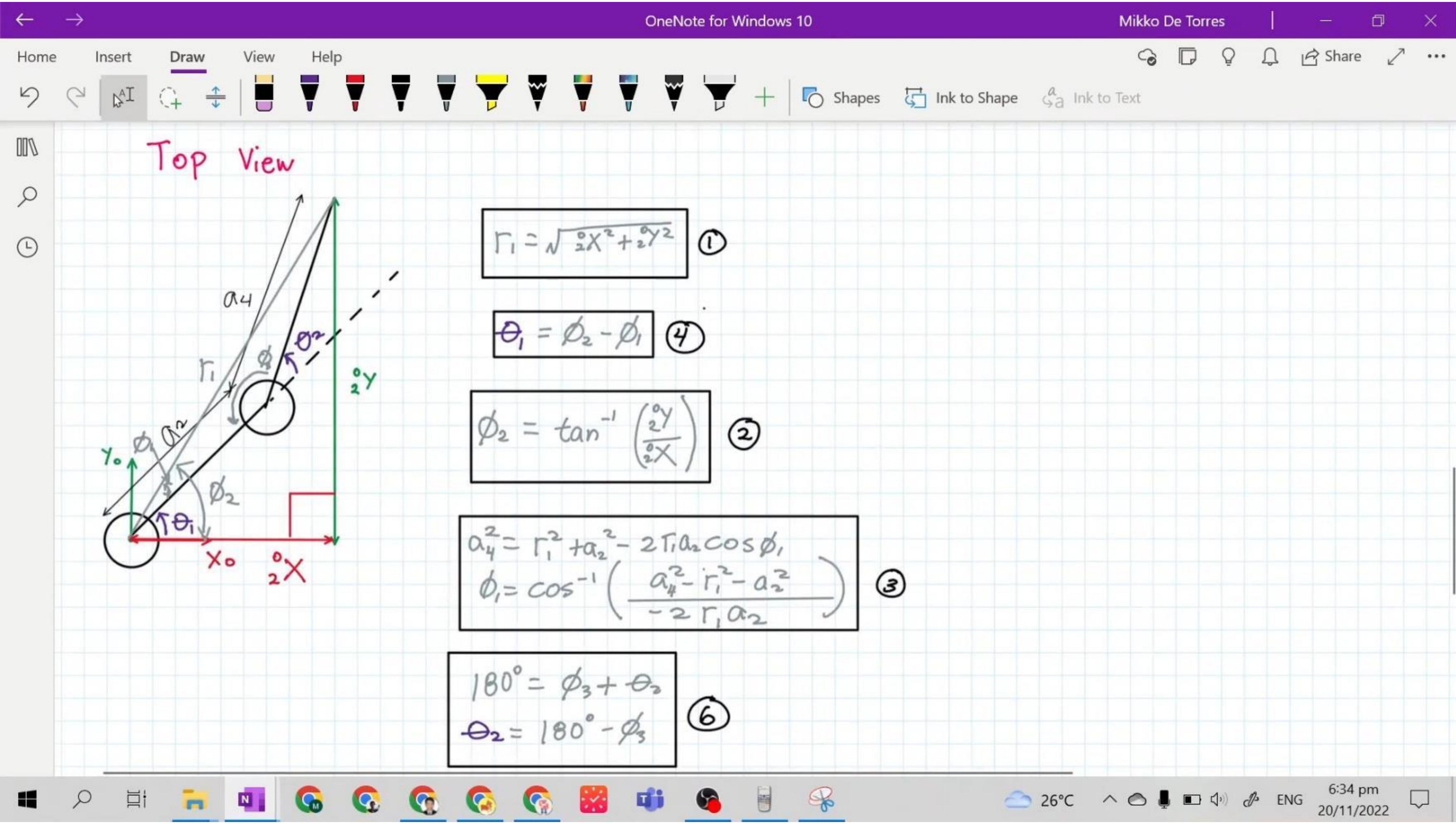


Рисунок 5.4: Первые три звена манипулятора.

См. лекцию 4, стр. 26.



геометрический подход

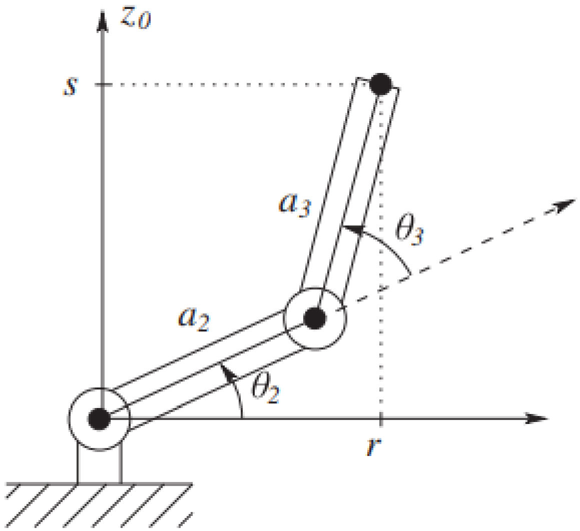


Рисунок 5.8: Проекция на плоскость, образованную звеньями 2 и 3.

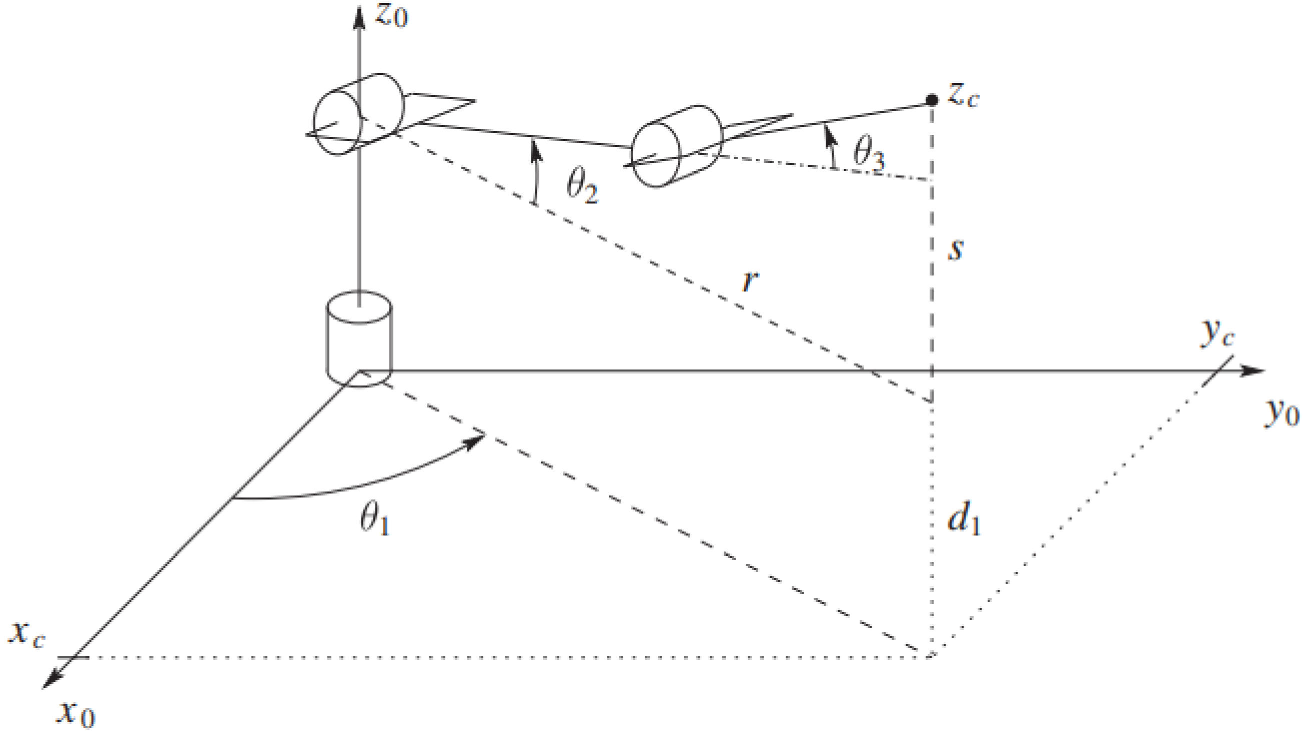
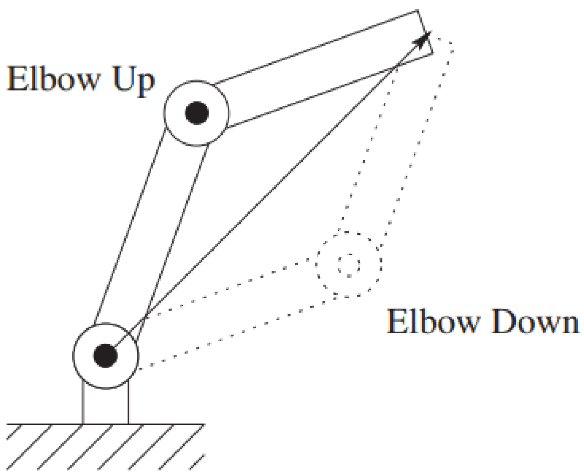
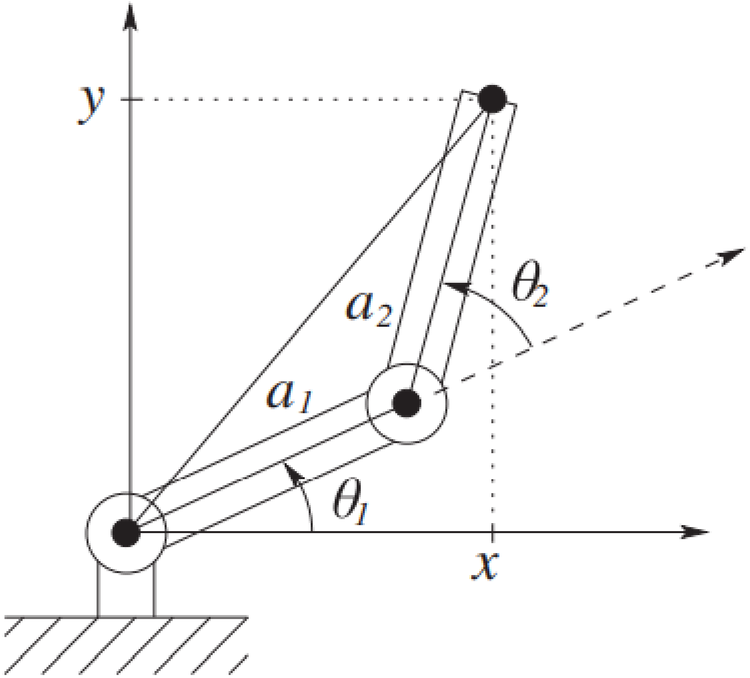


Рисунок 5.4: Первые три звена манипулятора.



Вывод формул



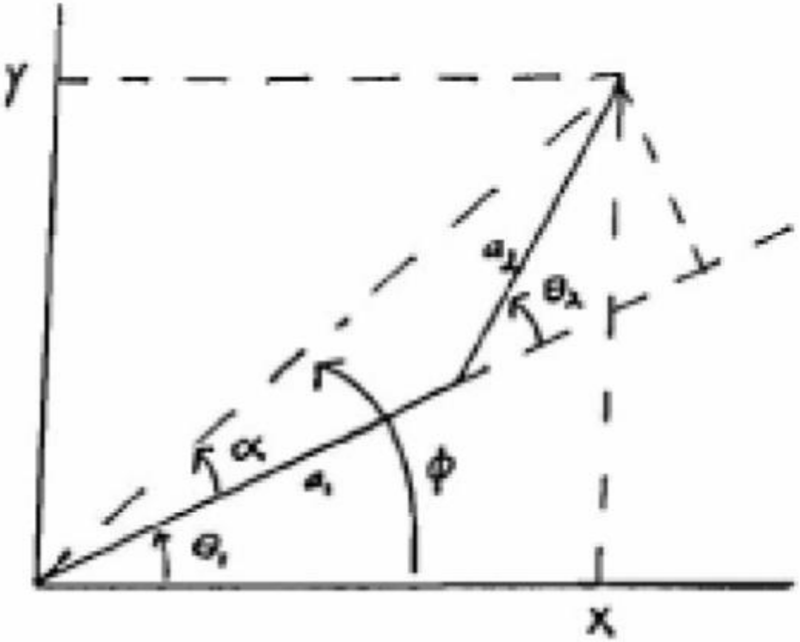
Используя закон косинусов, мы видим, что угол θ2 определяется выражением

$$\cos\theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} := D$$

$$\sin(\theta_2) = \pm\sqrt{1 - D^2}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{\pm\sqrt{1 - D^2}}{D}$$

Верхняя и нижняя конфигурация манипулятора решается путем выбора отрицательного и положительного знаков в последнем уравнении соответственно.

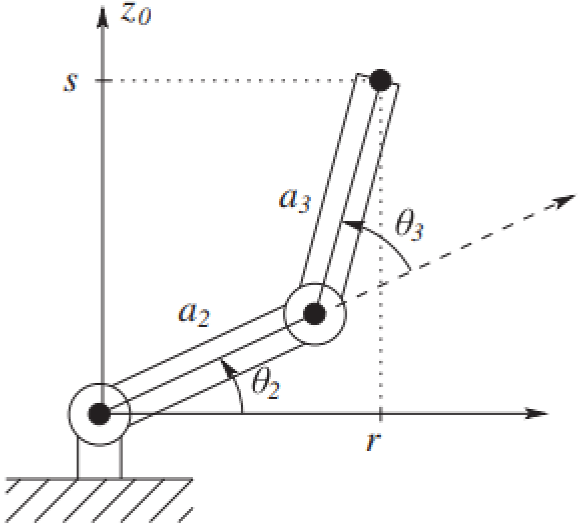


$$\theta_1 = \phi - a \text{ where } \phi = \tan^{-1}(y/x);\ a = \tan^{-1}\left(\frac{a_2\sin\theta_2}{a_1 + a_2\cos\theta_2}\right)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}(y/x) - \tan^{-1}\left(\frac{a_2\sin\theta_2}{a_1 + a_2\cos\theta_2}\right)$$

Обратите внимание, что угол θ1 зависит от θ2. Это имеет физический смысл, поскольку мы ожидаем, что для θ1 потребуется другое значение в зависимости от того, какое решение выбрано для θ2.

Применение к нашему роботу



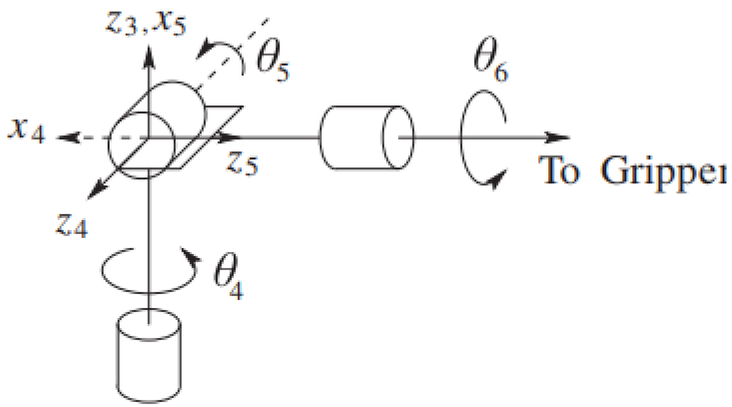
$$\cos\theta_3 = \frac{r^2 + s^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} = \frac{x_c^2 + y_c^2 - d^2 + (z_c - d_1)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} := D$$

$$r^2 = x_c^2 + y_c^2 - d^2$$

$$s = z_c - d_1$$

$$\theta_3 = \text{Atan2}\left(D, \pm\sqrt{1 - D^2}\right)$$

$$\theta_2 = \text{Atan2}(r, s) - \text{Atan2}(a_2 + a_3c_3, a_3s_3) = \text{Atan2}\left(\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d^2}, z_c - d_1\right) - \text{Atan2}(a_2 + a_3c_3, a_3s_3) \quad ($$



Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
4	0	-90	0	θ_4
5	0	90	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6

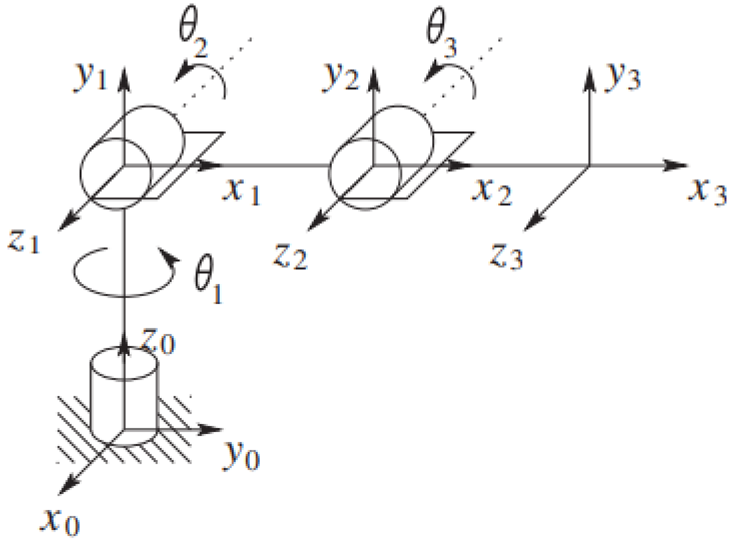
$$
\begin{aligned}
A_i &= \mathrm{Rot}_{z,\theta_i}\mathrm{Trans}_{z,d_i}\mathrm{Trans}_{x,a_i}\mathrm{Rot}_{x,\alpha_i} \\
&= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
T_6^3 &= A_4 A_5 A_6 \\
&= \begin{bmatrix} R_6^3 & o_6^3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & c_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
R_6^3 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix}
$$



Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	90	d_1	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

$$
\begin{aligned}
A_i &= \mathrm{Rot}_{z,\theta_i}\mathrm{Trans}_{z,d_i}\mathrm{Trans}_{x,a_i}\mathrm{Rot}_{x,\alpha_i} \\
&= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
R_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
R_6^3 &= \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix} \\
R_3^0 &= \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix} \\
R_6^3 &= (R_3^0)^T R
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_4s_5 &= c_1c_{23}r_{13} + s_1c_{23}r_{23} + s_{23}r_{33} \\
s_4s_5 &= -c_1s_{23}r_{13} - s_1s_{23}r_{23} + c_{23}r_{33} \\
c_5 &= s_1r_{13} - c_1r_{23}
\end{aligned}
$$

$$
\theta_5 = \text{Atan2}\left(r_{33}, \sqrt{1 - r_{33}^2}\right) \qquad \theta_5 = \text{Atan2}\left(r_{33}, -\sqrt{1 - r_{33}^2}\right)
$$

$$
\theta_5 = \text{Atan2}\left(s_1r_{13} - c_1r_{23}, \pm\sqrt{1 - (s_1r_{13} - c_1r_{23})^2}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_4 &= \text{Atan2}(r_{13}, r_{23}) \\
\theta_6 &= \text{Atan2}(-r_{31}, r_{32})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_4 &= \text{Atan2}(c_1c_{23}r_{13} + s_1c_{23}r_{23} + s_{23}r_{33}, \\
&\qquad -c_1s_{23}r_{13} - s_1s_{23}r_{23} + c_{23}r_{33}) \\
\theta_6 &= \text{Atan2}(-s_1r_{11} + c_1r_{21}, s_1r_{12} - c_1r_{22})
\end{aligned}
$$

Заключение. Все формулы вместе.

$$o = \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_c &= o_x - d_6 r_{13} \\ y_c &= o_y - d_6 r_{23} \\ z_c &= o_z - d_6 r_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \mathrm{Atan2}(x_c, y_c) \\
\theta_2 &= \mathrm{Atan2}\left(\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d^2}, z_c - d_1\right) \\
&\qquad -\mathrm{Atan2}(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3) \\
\theta_3 &= \mathrm{Atan2}\left(D, \pm\sqrt{1 - D^2}\right), \\
&\qquad D = \frac{x_c^2 + y_c^2 - d^2 + (z_c - d_1)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3} \\
\theta_4 &= \mathrm{Atan2}(c_1 c_{23} r_{13} + s_1 c_{23} r_{23} + s_{23} r_{33}, \\
&\qquad -c_1 s_{23} r_{13} - s_1 s_{23} r_{23} + c_{23} r_{33}) \\
\theta_5 &= \mathrm{Atan2}\left(s_1 r_{13} - c_1 r_{23}, \pm\sqrt{1 - (s_1 r_{13} - c_1 r_{23})^2}\right) \\
\theta_6 &= \mathrm{Atan2}(-s_1 r_{11} + c_1 r_{21}, s_1 r_{12} - c_1 r_{22})
\end{aligned}$$