BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM HỌC 2022 - 2023
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Môn: **TIN HỌC** Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*) Ngày thi: **24/02/2023** Đề thi gồm 04 trang, 03 bài

TỔNG QUAN ĐỀ THI

	Tên bài	File chương trình	File dữ liệu	File kết quả
Bài 1	Chuỗi ADN	ADN.*	ADN.INP	ADN.OUT
Bài 2	Thu nhập ổn định	INCOME.*	INCOME.INP	INCOME.OUT
Bài 3	Năng lượng tối thiểu	ROBOT.*	ROBOT.INP	ROBOT.OUT

Dấu * được thay thế bởi `PAS` hoặc `CPP` tương ứng với ngôn ngữ lập trình `Pascal` hoặc `C++`.

Hãy lập trình giải các bài toán sau:

Bài 1. Chuỗi ADN (7,0 điểm)

Tiến sĩ Tuấn là một nhà sinh học phân tử có rất nhiều công trình nghiên cứu về sự đa dạng của các chuỗi ADN. Chuỗi ADN là một dãy các nuclêôtít được biểu diễn bằng một xâu kí tự chỉ chứa bốn loại kí tự `A, T, G, X` tương ứng với bốn loại nuclêôtít khác nhau. Ông đang nghiên cứu một chuỗi ADN được biểu diễn bởi một xâu N phần tử $S_1S_2\ldots S_N$. Một đoạn con $[i,j]$ được xác định bởi vị trí phần tử bắt đầu i và vị trí phần tử kết thúc j $(1 \le i \le j \le N)$ trong xâu là một dãy gồm các phần tử liên tiếp nhau $S_iS_{i+1}\ldots S_j$.

Tiến sĩ Tuấn định nghĩa một đoạn con là phức tạp nếu như đoạn đó chứa ít nhất hai kí tự khác nhau. Ví dụ, $[1,3]$ là một đoạn con phức tạp trong xâu `ATTTG`. Tiếp theo, ông định nghĩa độ đa dạng của một chuỗi ADN là số lượng đoạn con phức tạp trong xâu tương ứng. Hai đoạn con gọi là khác nhau nếu có ít nhất một trong hai vị trí bắt đầu và kết thúc của chúng là khác nhau.

Do sơ suất, tiến sĩ Tuấn làm mất thông tin một số phần tử trong chuỗi ADN đang nghiên cứu. Vì vậy, ông biểu diễn một kí tự chấm hỏi (?) cho mỗi phần tử bị mất thông tin.

Yêu cầu: Hãy giúp tiến sĩ Tuấn tính độ đa dạng nhỏ nhất của chuỗi ADN nêu trên khi thay mỗi kí tự chấm hỏi (?) bởi một trong bốn kí tự `A, T, G, X`.

Dữ liệu

Vào từ file văn bản `ADN.INP` gồm một dòng duy nhất chỉ chứa N kí tự thuộc tập `{A, T, G, X, ?}` viết liên tiếp nhau không có dấu cách $(1 \le N \le 10^6)$.

Kết quả

Ghi ra file văn bản `ADN.OUT` một số nguyên là độ đa dạng nhỏ nhất tìm được.

Ví dụ

ADN.INP	ADN.OUT	Giải thích
A?T?G	7	ATTTG là một chuỗi ADN có độ đa dạng ít nhất sau khi đã thay thế mỗi kí tự ? bởi một trong bốn kí tự A, T, G, X. Các đoạn con phức tạp bao gồm: $[1,2],[1,3],[1,4],[1,5],[2,5],[3,5],[4,5]$.

Ràng buộc

- Có 20% số test ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $N \le 10$.
- 20% số test khác ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $N \le 20$.
- 24% số test khác ứng với 24% số điểm thỏa mãn: $N \le 5000$.
- 16% số test khác ứng với 16% số điểm thỏa mãn: $N \le 10^5$.
- 20% số test còn lại ứng với 20% số điểm thoả mãn: $N \le 10^6$.

Bài 2. Thu nhập ổn định (7,0 điểm)

Ở một xã vùng cao có N hộ gia đình được đánh số từ 1 đến N. Do mạnh dạn áp dụng khoa học kỹ thuật vào làm kinh tế nên trong xã có nhiều hộ gia đình đã trở nên giàu có. Trong kỳ tổng kết cuối năm vừa qua, chính quyền xã biết được hộ gia đình thứ i $(1 \le i \le N)$ có thu nhập là $A_i^{(0)}$. Hưởng ứng phong trào toàn dân làm kinh tế nâng cao thu nhập và thu hẹp khoảng cách giàu nghèo, bắt đầu từ năm nay, gọi là năm thứ nhất, hàng năm chính quyền xã yêu cầu với mỗi hộ gia đình, hộ thứ i $(1 \le i \le N)$ phải nghiên cứu phương thức làm kinh tế năm trước của các hộ gia đình liên tiếp từ thứ L_i đến thứ R_i $(1 \le L_i \le R_i \le N)$ để học hỏi kinh nghiệm.

Với mỗi hộ gia đình X, nếu thu nhập năm trước lớn hơn hoặc bằng thu nhập của hộ có thu nhập cao nhất trong số các hộ gia đình mà hộ X phải học hỏi, thì hộ X giữ nguyên phương thức làm kinh tế cũ sao cho năm nay sẽ có thu nhập ổn định bằng năm trước. Trái lại, hộ X sẽ phải sửa đổi phương thức làm kinh tế với sự hỗ trợ của chính quyền sao cho thu nhập năm nay của hộ X sẽ phải bằng thu nhập cao nhất năm trước trong số các hộ mà hộ X học hỏi. Cụ thể, tại năm thứ t $(t \ge 1)$, hộ gia đình thứ i $(1 \le i \le N)$ sẽ có thu nhập là $A_i^{(t)} = \max(A_i^{(t-1)}, A_{L_i}^{(t-1)}, A_{L_i+1}^{(t-1)}, \ldots, A_{R_i}^{(t-1)})$.

Yêu cầu: Hãy giúp chính quyền xác định bắt đầu từ năm thứ bao nhiêu thì mỗi hộ gia đình đều sẽ có thu nhập ổn định năm sau bằng năm trước.

Dữ liệu

Vào từ file văn bản `INCOME.INP`:

- Dòng đầu chứa một số nguyên dương N $(N \le 3 \times 10^5)$.
- Dòng thứ hai chứa N số nguyên dương $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \ldots, A_n^{(0)}$ $(A_i^{(0)} \le 10^9, \forall i = 1, 2, \ldots, N)$.
- Dòng thứ i trong số N dòng tiếp theo chứa hai số nguyên dương L_i và R_i $(L_i \le R_i \le N)$.

Các số trên cùng một dòng cách nhau bởi dấu cách.

Kết quả

Ghi ra file văn bản `INCOME.OUT` một số nguyên t là năm mà bắt đầu từ đó trở đi, mỗi hộ gia đình đều có thu nhập ổn định năm sau bằng năm trước.

Ví dụ

INCOME.INP	INCOME.OUT	Giải thích
4 1 2 3 4 2 2 3 3 1 2 1 3	3	- Ở năm đầu tiên, thu nhập các hộ lần lượt là $(2, 3, 3, 4)$. - Ở năm thứ hai, thu nhập các hộ lần lượt là $(3, 3, 3, 4)$. - Từ năm thứ ba trở đi, thu nhập của các hộ giữ nguyên là $(3, 3, 3, 4)$.

Ràng buộc

- Có 18% số test ứng với 18% số điểm thỏa mãn: $N \leq 500$.
- 16% số test khác ứng với 16% số điểm thỏa mãn: $A_i^{(50)} = A_i^{(49)}, \forall i = 1, 2, \ldots, N$.
- 20% số test khác ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $\sum_{i=1}^{N}(R_i - L_i) \leq 10^6$.
- 24% số test khác ứng với 24% số điểm thỏa mãn: Không tồn tại i, j $(1 \leq i, j \leq N)$ thoả mãn $L_i < L_j$ và $R_j < R_i$.
- 22% số test còn lại ứng với 22% số điểm không có ràng buộc gì thêm.

Bài 3. Năng lượng tối thiểu (6,0 điểm)

Cuộc thi Robot tự hành năm nay có chủ đề về việc tiết kiệm năng lượng. Sân thi đấu cho các robot được thiết kế dưới dạng hình chữ nhật kích thước $W \times L$ và được chia thành các ô vuông đơn vị, xếp thành W dòng và L cột. Ô có toạ độ (r, c) là ô nằm tại dòng thứ r từ trên xuống $(1 \leq r \leq W)$ và tại cột thứ c từ trái sang $(1 \leq c \leq L)$. Ban đầu, sân thi đấu có N trạm sạc điện cho robot, mỗi trạm đặt tại một ô khác nhau. Với mỗi lượt thi đấu, robot sẽ được đặt vào một ô bất kì, tính cả các ô đã có trạm sạc điện. Sau khi được đặt vào sân, robot sẽ phải tìm đường đi có ít bước di chuyển nhất có thể để tới một trạm sạc điện. Một bước di chuyển của robot là việc di chuyển từ ô hiện tại tới một trong các ô kề cạnh nằm trong sân thi đấu, đồng thời mất đúng một đơn vị năng lượng.

Trong quá trình thi đấu, giám khảo sẽ liên tục đưa thêm vào hoặc bỏ bớt đi trạm sạc điện trong sân. Sau mỗi lần thay đổi, đội chơi sẽ phải nạp lại mức năng lượng tối thiểu cho robot của mình để đặt lại vào một ô bất kì của sân thi đấu nhằm bảo đảm robot đến được một trạm sạc điện trước khi hết năng lượng.

Tuấn là đội trưởng đội Robot tự hành đại diện cho tỉnh mình tham gia vòng một cấp Quốc gia. Để chuẩn bị cho cuộc thi, đội Tuấn phải thiết kế và lập trình thuật toán cho robot theo luật thi đấu của ban tổ chức đề ra.

Yêu cầu: Hãy giúp Tuấn tính năng lượng tối thiểu cho robot đặt vào sân thi đấu ban đầu và năng lượng tối thiểu cho robot sau mỗi lần ban tổ chức thay đổi trạm sạc điện trong sân.

Dữ liệu

Vào từ file văn bản `ROBOT.INP`:

- Dòng đầu chứa bốn số nguyên dương W, L, N và Q là kích thước của sân chơi $W \times L$, số trạm sạc điện ban đầu và số lượng truy vấn $(W \leq 15; L \leq 10^9; N \leq 50000; Q \leq 10^5)$.
- Mỗi dòng trong số N dòng tiếp theo chứa hai số nguyên dương r và c là tọa độ của một trạm sạc điện $(1 \leq r \leq W; 1 \leq c \leq L)$. Dữ liệu bảo đảm không có hai trạm sạc điện nào trùng toạ độ ô đặt.
- Mỗi dòng trong số Q dòng tiếp theo tương ứng với Q truy vấn thay đổi chứa hai số nguyên dương r và c $(1 \leq r \leq W; 1 \leq c \leq L)$. Nếu ô (r, c) đang có trạm sạc điện thì ban tổ chức sẽ loại bỏ trạm đó; Trái lại, ban tổ chức sẽ bổ sung thêm vào một trạm sạc điện tại ô (r, c).

Dữ liệu bảo đảm sau mỗi truy vấn luôn có ít nhất một trạm sạc điện trên sân.

Các số trên cùng một dòng cách nhau bởi dấu cách.

Kết quả

Ghi ra file văn bản `ROBOT.OUT` gồm $Q + 1$ dòng:

- Dòng đầu ghi một số nguyên là năng lượng tối thiểu tìm được cho robot đặt vào sân thi đấu ban đầu.
- Dòng thứ i trong số Q dòng tiếp theo ghi một số nguyên là năng lượng tối thiểu tìm được sau truy vấn thay đổi thứ i.

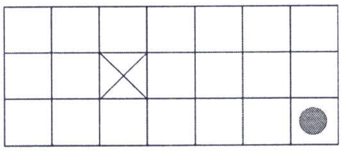
Ví dụ

ROBOT.INP	ROBOT.OUT
3 7 1 2	5
2 3	3
3 7	8
2 3	

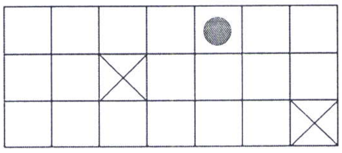
Giải thích

Trong ví dụ trên:

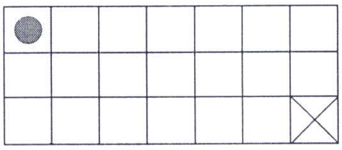
- Ban đầu, năng lượng tối thiểu cần tìm là 5, chẳng hạn khi robot đặt vào ô $(3, 7)$.



- Sau khi thêm trạm sạc điện ở ô $(3, 7)$ thì năng lượng tối thiểu cần tìm là 3, chẳng hạn khi robot đặt vào ô $(1, 5)$.



- Ở lần thay đổi thứ hai, do ô $(2, 3)$ có trạm sạc điện nên trạm đó sẽ bị loại bỏ. Khi đó, năng lượng tối thiểu cần tìm là 8, đó là trường hợp robot đặt vào ô $(1, 1)$.



Ràng buộc

- Có 16% số test ứng với 16% số điểm thỏa mãn: $W = 1$.
- 20% số test khác ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $W = 3$.
- 14% số test khác ứng với 14% số điểm thỏa mãn: $Q, L, N \leq 200$.
- 20% số test khác ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $Q = 1$.
- 14% số test khác ứng với 14% số điểm thỏa mãn: $L \leq 10000; Q \leq 100$.
- 16% số test còn lại ứng với 16% số điểm không có ràng buộc gì thêm.

– – – – – – – – – – – – – – HẾT – – – – – – – – – – – – – –

- *Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu;*
- *Giám thị KHÔNG được giải thích gì thêm.*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
	TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
	NĂM HỌC 2022 - 2023
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Môn: **TIN HỌC**
	Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)
	Ngày thi: **25/02/2023**
	Đề thi gồm 05 trang, 03 bài

TỔNG QUAN ĐỀ THI

	Tên bài	File chương trình	File dữ liệu	File kết quả
Bài 4	Nhà gỗ	WHOME.*	WHOME.INP	WHOME.OUT
Bài 5	Thiết bị thông minh	SDEV.*	SDEV.INP	SDEV.OUT
Bài 6	Canh tác lương thực	FOOD.*	FOOD.INP	FOOD.OUT

Dấu * được thay thế bởi `PAS` hoặc `CPP` tương ứng với ngôn ngữ lập trình `Pascal` hoặc `C++`.

Hãy lập trình giải các bài toán sau:

Bài 4. Nhà gỗ (7,0 điểm)

Công ty WooHome thiết kế lắp ráp nhà gỗ vừa nhập khẩu N cột gỗ loại đặc biệt có chiều cao lần lượt là $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Công ty cho ra mắt M mẫu thiết kế nhà, mẫu nhà thứ i $(1 \le i \le M)$ cần S_i cột trong số N cột gỗ trên làm cột trụ cho một ngôi nhà. Phòng kinh doanh của công ty đã tính toán với mỗi ngôi nhà gỗ được đặt hàng theo một trong M mẫu trên, công ty sẽ có thêm một khoản lợi nhuận cố định có giá trị là P.

Tuy nhiên, các cột gỗ được chọn cho ngôi nhà thi công có thể có chiều cao không đều nhau, nên khi thi công sẽ phải khắc phục để bảo đảm sự chắc chắn của ngôi nhà. Phòng kinh doanh dự kiến chi phí để khắc phục sự không đồng đều chiều cao các cột bằng một giá trị $(\max - \min)^2 \times C$, với C là hệ số giá thành thi công, max và min lần lượt là chiều cao cột gỗ lớn nhất và nhỏ nhất trong số những cột gỗ sử dụng cho ngôi nhà thi công. Như vậy, lợi nhuận dự kiến khi thi công một ngôi nhà theo mẫu là $P - (\max - \min)^2 \times C$. Ví dụ, với giá trị lợi nhuận cố định $P = 10$, một ngôi nhà thi công sử dụng 5 cột gỗ có chiều cao lần lượt là $4, 5, 3, 4, 5$, hệ số $C = 1$, thì công ty sẽ có lợi nhuận dự kiến là $10 - (5 - 3)^2 \times 1 = 6$. Lưu ý rằng mức lợi nhuận dự kiến có thể âm.

Là một công ty có thương hiệu, WooHome luôn có rất nhiều đơn đặt hàng cho mỗi mẫu nhà mới. Vì đây là các mẫu mới ra mắt, công ty muốn đáp ứng trước các đơn đặt hàng sao cho mỗi mẫu nhà có ít nhất một ngôi nhà được thi công.

Yêu cầu: Hãy giúp công ty tìm ra số lượng ngôi nhà thi công mỗi mẫu sao cho đạt được tối đa lợi nhuận dự kiến, thoả mãn mỗi mẫu nhà có ít nhất một ngôi nhà được thi công và mỗi cột được dùng tối đa một lần.

Dữ liệu

Vào từ file văn bản `WHOME.INP`:

- Dòng đầu chứa bốn số nguyên dương N, M, P và C $(N \le 10^5; M \le 6; P \le 10^9; C \le 10^6)$.
- Dòng thứ hai chứa N số nguyên dương $A_1, A_2, \ldots, A_N$ $(A_i \le 10^6, \forall i = 1, 2, \ldots, N)$.
- Dòng thứ ba chứa M số nguyên dương $S_1, S_2, \ldots, S_M$ $(2 \le S_i \le N, \forall i = 1, 2, \ldots, M)$.

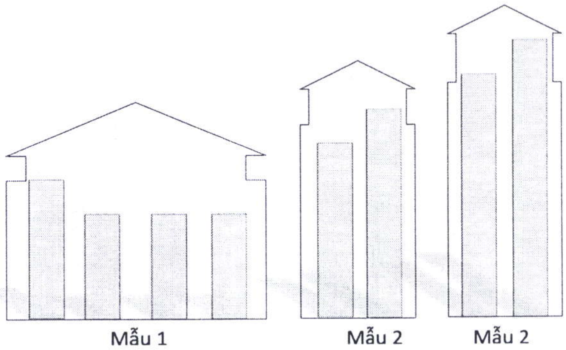
Dữ liệu bảo đảm $\sum_{i=1}^{M} S_i \le N$ và $S_i \neq S_j$ $(\forall i, j : 1 \le i < j \le M)$.

Các số trên cùng một dòng cách nhau bởi dấu cách.

Kết quả

Ghi ra file văn bản `WHOME.OUT` một số nguyên là tổng lợi nhuận dự kiến lớn nhất tìm được.

Ví dụ

WHOME.INP	WHOME.OUT	Giải thích
10 2 11 1 14 5 6 4 4 4 7 8 9 1 4 2	30	Lựa chọn tốt nhất là: - Mẫu 1: Thi công một ngôi nhà với 4 cột gỗ $5, 4, 4, 4$ cho lợi nhuận dự kiến là $11 - (5-4)^2 \times 1 = 10$. - Mẫu 2: Thi công hai ngôi nhà, ngôi nhà thứ nhất gồm 2 cột gỗ $6, 7$ cho lợi nhuận dự kiến là $11 - (7-6)^2 \times 1 = 10$, và ngôi nhà thứ hai gồm 2 cột gỗ $8, 9$ cho lợi nhuận dự kiến là $11 - (9-8)^2 \times 1 = 10$. Tổng lợi nhuận dự kiến là 30. 
4 1 7 2 8 5 4 7 3	-11	Một lựa chọn tốt nhất là thi công ngôi nhà với 3 cột $8, 5, 7$ cho lợi nhuận dự kiến là $7 - (8-5)^2 \times 2 = -11$.

Ràng buộc

- Có 25% số test ứng với 25% số điểm thỏa mãn: $N \leq 10; M = 1$.
- 25% số test khác ứng với 25% số điểm thỏa mãn: $N \leq 1000; M = 1; S_1 = 2$.
- 25% số test khác ứng với 25% số điểm thỏa mãn: $M = 2$.
- 25% số test còn lại ứng với 25% số điểm không có ràng buộc gì thêm.

Bài 5. Thiết bị thông minh (7,0 điểm)

Công ty S-HOME đang thiết kế một mẫu nhà thông minh thế hệ mới được trang bị K thiết bị thông minh. Bản thiết kế được vẽ trên mặt phẳng toạ độ Oxy với gốc toạ độ $(0, 0)$ là nơi đặt trung tâm điều khiển tất cả các thiết bị. Trên bản vẽ, kỹ sư thiết kế vạch ra N vùng hình chữ nhật quan trọng có các cạnh song song với hai trục Ox và Oy, nơi mà các thiết bị thông minh có thể được đặt vào. Các vùng hình chữ nhật được đánh số từ 1 đến N, vùng thứ i $(1 \leq i \leq N)$ được cho bởi bộ (L_i, B_i, R_i, T_i) với toạ độ góc trái dưới là (L_i, B_i) và góc phải trên là (R_i, T_i). Lưu ý rằng các vùng hình chữ nhật này có thể giao nhau.

Mỗi thiết bị thông minh sẽ được đặt tại một điểm có toạ độ nguyên dương (x, y) và phải nằm trong hoặc nằm trên cạnh của ít nhất một vùng hình chữ nhật quan trọng. Thiết bị này được điều khiển trực tiếp bởi trung tâm điều khiển tại $(0, 0)$ và có chi phí lắp đặt kết nối bằng $(x + y)$. Điểm (x, y) gọi là nằm trong hoặc trên cạnh vùng hình chữ nhật quan trọng thứ i khi và chỉ khi $L_i \leq x \leq R_i$ và $B_i \leq y \leq T_i$.

Yêu cầu: Hãy giúp công ty S-HOME xác định K vị trí đặt thiết bị thông minh để chi phí lớn nhất trong số các chi phí lắp đặt kết nối tới trung tâm điều khiển của K thiết bị nêu trên là nhỏ nhất. Lưu ý rằng các thiết bị thông minh không được đặt trùng vị trí của nhau.

Dữ liệu

Vào từ file văn bản `SDEV.INP`:

- Dòng đầu chứa hai số nguyên dương N và K ($N \leq 50000; K \leq 10^{18}$).
- Dòng thứ i trong số N dòng tiếp theo chứa bốn số nguyên dương L_i, B_i, R_i, T_i ($L_i < R_i \leq 5 \times 10^7$; $B_i < T_i \leq 5 \times 10^7$).

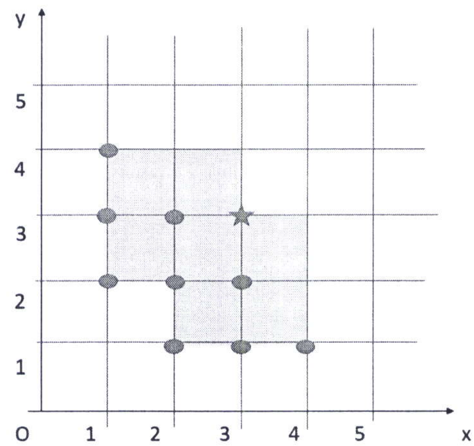
Dữ liệu bảo đảm giá trị K không lớn hơn tổng số điểm có tọa độ nguyên dương nằm trong hoặc trên cạnh của ít nhất một vùng hình chữ nhật quan trọng.

Các số trên cùng một dòng cách nhau bởi dấu cách.

Kết quả

Ghi ra file văn bản `SDEV.OUT` một số nguyên duy nhất là giá trị nhỏ nhất tìm được của chi phí lớn nhất trong số các chi phí lắp đặt kết nối tới trung tâm điều khiển của K thiết bị.

Ví dụ

SDEV.INP	SDEV.OUT	Giải thích
2 10 1 2 3 4 2 1 4 3	6	Một trong các phương án tối ưu là các thiết bị thông minh được đặt lần lượt tại các vị trí $(1,2)$,$(1,3)$,$(1,4)$,$(2,1)$,$(2,2)$,$(2,3)$,$(3,1)$,$(3,2)$,$(3,3)$,$(4,1)$ với chi phí lớn nhất cần tìm là chi phí lắp đặt của thiết bị tại ô $(3,3)$. 

Ràng buộc

- Có 16% số test ứng với 16% số điểm thỏa mãn: $N \leq 100; R_i, T_i \leq 1000, \forall i = 1, 2, \ldots, N$.
- 20% số test khác ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $N \leq 15$.
- 16% số test khác ứng với 16% số điểm thỏa mãn: $N \leq 1000$.
- 20% số test khác ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $R_i, T_i \leq 10^5, \forall i = 1, 2, \ldots, N$.
- 16% số test khác ứng với 16% số điểm thỏa mãn: $K \leq 10^5$.
- 12% số test còn lại ứng với 12% số điểm không có ràng buộc gì thêm.

Bài 6. Canh tác lương thực (6,0 điểm)

Trong một vương quốc có N vùng, được đánh số từ 1 đến N, vùng được đánh số 1 là kinh đô của vương quốc. Có đúng $N - 1$ con đường nối trực tiếp giữa các vùng với nhau bảo đảm mỗi vùng đều có thể tới được kinh đô thông qua các con đường này. Vương quốc thực hiện phương cách quản lý phân cấp từ kinh đô tới các vùng bên dưới. Cụ thể, vùng X gọi là quản lý vùng Y nếu mọi cách di chuyển thông qua các con đường từ vùng Y tới kinh đô đều luôn đi qua vùng X.

Các vùng đều có các thửa ruộng có thể canh tác lương thực trên đó, vùng thứ i $(1 \leq i \leq N)$ có Q_i thửa ruộng, mỗi thửa ruộng nếu canh tác dự kiến sẽ cho sản lượng đúng W_i tấn. Nhà vua mong muốn tổng sản lượng lương thực trên toàn vương quốc phải đạt tối thiểu S tấn, biết rằng:

- Do đặc thù mỗi vùng, vùng thứ i nếu sử dụng K_i thửa ruộng để canh tác lương thực sẽ tốn tổng chi phí canh tác và bảo vệ mùa màng là $K_i^2 \times C_i$.
- Nếu vùng X không sử dụng thửa ruộng nào để canh tác lương thực thì tất cả các vùng mà X quản lý cũng đều không canh tác lương thực.

Yêu cầu: Hãy giúp nhà vua xác định dãy $(K_1, K_2, \ldots, K_N)$ là số lượng thửa ruộng tương ứng được phân công canh tác cho từng vùng, sao cho tổng chi phí canh tác và bảo vệ mùa màng là nhỏ nhất mà vẫn đạt được sản lượng mong muốn của nhà vua, hoặc thông báo là không có cách phân công nào thỏa mãn.

Dữ liệu

Vào từ file văn bản `FOOD.INP`:

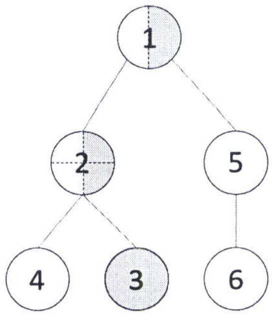
- Dòng đầu ghi hai số nguyên dương N và S $(N, S \leq 5000)$.
- Dòng thứ i trong số N dòng tiếp theo ghi ba số nguyên dương Q_i, W_i và C_i $(Q_i, W_i \leq 5000; C_i \leq 10^6)$.
- Mỗi dòng trong số $N - 1$ dòng tiếp theo ghi hai số nguyên dương u và v $(1 \leq u, v \leq N)$ thể hiện có con đường nối trực tiếp giữa hai vùng u và v.

Các số trên cùng một dòng cách nhau bởi dấu cách.

Kết quả

Ghi ra file văn bản `FOOD.OUT` một số nguyên duy nhất là tổng chi phí canh tác và bảo vệ mùa màng nhỏ nhất tìm được. Ghi ra -1 nếu không có phương án phân công nào thoả mãn.

Ví dụ

FOOD.INP	FOOD.OUT	Giải thích
6 9 2 1 5 4 3 1 1 3 2 1 2 4 1 1 10 1 7 1 1 2 2 3 2 4 1 5 5 6	11	Dãy $(K_1, K_2, \ldots, K_6) = (1, 2, 1, 0, 0, 0)$ cho tổng sản lượng lương thực là: $1 \times 1 + 2 \times 3 + 1 \times 3 + 0 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 7 = 10 \geq 9$, và là dãy cho chi phí nhỏ nhất cần tìm bằng: $1^2 \times 5 + 2^2 \times 1 + 1^2 \times 2 + 0^2 \times 4 + 0^2 \times 10 + 0^2 \times 1 = 11$ 

Ràng buộc

- Có 16% số test ứng với 16% số điểm thỏa mãn: $Q_i = 1, \forall i = 1, 2, \ldots, N$ và có các con đường trực tiếp từ kinh đô đến tất cả các vùng khác.
- 14% số test khác ứng với 14% số điểm thỏa mãn: $N, S \leq 500$.
- 20% số test khác ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $Q_i = W_i = 1, \forall i = 1, 2, \ldots, N$.
- 16% số test khác ứng với 16% số điểm thỏa mãn: $Q_i = 1, \forall i = 1, 2, \ldots, N$.
- 20% số test khác ứng với 20% số điểm thỏa mãn: Có các con đường trực tiếp từ kinh đô đến tất cả các vùng khác.
- 14% số test còn lại ứng với 14% số điểm không có ràng buộc gì thêm.

-------------- HẾT --------------

- *Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu;*
- *Giám thị KHÔNG được giải thích gì thêm.*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHẤM

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2022-2023

Môn: **TIN HỌC**

TỔNG QUAN ĐỀ THI

	Tên bài	File chương trình	File dữ liệu	File kết quả
Bài 1	Chuỗi ADN	ADN.*	ADN.INP	ADN.OUT
Bài 2	Thu nhập ổn định	INCOME.*	INCOME.INP	INCOME.OUT
Bài 3	Năng lượng tối thiểu	ROBOT.*	ROBOT.INP	ROBOT.OUT
Bài 4	Nhà gỗ	WHOME.*	WHOME.INP	WHOME.OUT
Bài 5	Thiết bị thông minh	SDEV.*	SDEV.INP	SDEV.OUT
Bài 6	Canh tác lương thực	FOOD.*	FOOD.INP	FOOD.OUT

Dấu * được thay thế bởi `PAS` hoặc `CPP` tương ứng với ngôn ngữ lập trình `Pascal` hoặc `C++`.

Bài 1. Chuỗi ADN (7 điểm)

Tổng quan

- Subtask 1: 20% số test ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $N \leq 10$.

  Thí sinh duyệt vét cạn tất cả các phương án thay thế. độ phức tạp tính toán là $O(4^N)$.

- Subtask 2: 20% số test ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $N \leq 20$.

  với mỗi dấu ?, thí sinh cần tìm chữ cái gần nhất phía trước và phía sau.

  nhận xét: dấu ? luôn biến đổi về một trong hai kí tự này. Do đó thí sinh có thể duyệt trong độ phức tạp $O(2^N)$.

- Subtask 3: 24% số test ứng với 24% số điểm thỏa mãn: $N \leq 5000$.

  sử dụng phương pháp quy hoạch động hai chiều. độ phức tạp $O(N^2)$.

- Subtask 4: 16% số test ứng với 16% số điểm thỏa mãn: $N \leq 10^5$.

  sử dụng công thức quy hoạch động kết hợp sử dụng cấu trúc dữ liệu nâng cao. độ phức tạp $O(N \log N)$.

- Subtask 5: 20% số test ứng với 20% số điểm thở mãn: $N \leq 10^6$.

  sử dụng nhận xét từ Subtask 2 và cách cài đặt từ Subtask 3, ta có thuật toán cải tiến với độ phức tạp tính toán là $O(N)$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Xét vị trí i $(1 \leq i \leq n)$ là vị trí của một kí tự ? trong xâu S. Gọi L_i và R_i là hai vị trí thở mãn:

- $L_i < i$, S_{L_i} là một chữ cái và với mọi j sao cho $L_i < j < i$, S_j là dấu ? (nếu S_j là dấu ? với mọi $1 \leq j < i$, ta coi $L_i = 0$).
- $R_i > i$, S_{L_i} là một chữ cái và với mọi j sao cho $i < j < R_i$, S_j là dấu ? (nếu S_j là dấu ? với mọi $i, j : i < j \leq n$, ta coi $R_i = n + 1$).

Ta có các nhận xét như sau:

- nếu $L_i < 1$ và $R_i > n$, xâu S chỉ gồm các dấu ?, đáp số bài toán là $\frac{n(n+1)}{2}$.
- nếu $L_i < 1$ và $R_i \le n$, ta chắc chắn thay ký tự S_i bởi S_{R_i}.
- nếu $L_i \ge 1$ và $R_i > n$, ta chắc chắn thay ký tự S_i bởi S_{L_i}.
- nếu $L_i \ge 1$ và $R_i \le n$ và $S_{L_i} = S_{R_i}$, ta chắc chắn thay ký tự S_i bởi S_{R_i}.
- nếu $L_i \ge 1$ và $R_i \le n$ và $S_{L_i} \ne S_{R_i}$, ta sẽ thay ký tự S_i bởi một trong hai chữ cái S_{L_i} hoặc S_{R_i}.

Từ nhận xét trên, ta sẽ thay những vị trí i trong xâu S nếu S_i là dấu hỏi và biết chắc chắn chỉ có một lựa chọn thay thế. Sau bước này, ta định nghĩa một *dãy hỏi chấm liên tiếp* là một cặp số (l, r) sao cho:

- $1 \le l \le r \le n$;
- với mọi vị trí j sao cho $l \le j \le r$, S_j là dấu ?;
- S_{l-1} và S_{r+1} là các chữ cái và $S_{l-1} \ne S_{r+1}$.

Tới đây, ta tiến hành liệt kê các dãy hỏi chấm liên tiếp trong xâu S theo thứ tự chỉ số tăng dần. Ta được danh sách các dãy hỏi chấm liên tiếp có dạng $(l_1, r_1), (l_2, r_2), \ldots, (l_k, r_k)$ với $r_i + 1 \le l_{i+1} - 1$ với mọi $i : 1 \le i < k$. Ta thấy rằng, với mọi vị trí j sao cho $l_i \le j \le r_i$, dấu ? ở vị trí j sẽ được thay bởi một trong hai chữ cái S_{l_i-1} hoặc S_{r_i+1}, và các vị trí j này sẽ được thay thế bởi cùng một ký tự.

Cuối cùng, ta sử dụng kỹ thuật Quy hoạch động với hàm số như sau: Gọi $F(i)$ và $G(i)$ lần lượt là số dãy con phức tạp nhỏ nhất có thể của dãy $S_1S_2\ldots S_{r_i}$ trong hai trường hợp:

- mọi vị trí j sao cho $l_i \le j \le r_i$, dấu ? ở vị trí j sẽ được thay bởi chữ cái S_{l_i-1};
- mọi vị trí j sao cho $l_i \le j \le r_i$, dấu ? ở vị trí j sẽ được thay bởi chữ cái S_{r_i-1}.

các giá trị $F(i)$ và $G(i)$ có thể được tính trực tiếp từ các giá trị $F(i-1)$ và $G(i-1)$ trong độ phức tạp thời gian là $O(1)$.

Tổng độ phức tạp thời gian của thuật toán là $O(n)$.

Bài 2. Thu nhập ổn định (7 điểm)

Tổng quan

- Subtask 1: 18% số test ứng với 18% số điểm thỏa mãn: $N \le 500$.

  Thực hiện thay đổi từng bước như yêu cầu đề bài. Độ phức tạp tính toán: $O(N^3)$.
- Subtask 2: 16% số test ứng với 16% số điểm thỏa mãn: $A_i^{(50)} = A_i^{(49)}, \forall i = 1, 2, \ldots, N$.

  Tương tự như subtask 1. Sử dụng thêm cấu trúc dữ liệu nâng cao để tìm max trên đoạn. Độ phức tạp: $O(N^2 \log N)$.
- Subtask 3: 20% số test ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $\sum_{i=1}^{N}(R_i - L_i) \le 10^6$.

  Xây dựng đồ thị với tất cả các cạnh. Sử dụng DFS tìm đường đi dài nhất. Độ phức tạp: $O(N + \sum(R - L))$.
- Subtask 4: 24% số test ứng với 24% số điểm thỏa mãn: Không tồn tại i, j $(1 \le i, j \le N)$ thoả mãn $L_i < L_j$ và $R_j < R_i$.

  Sử dụng kỹ thuật đỉnh giả dựng đồ thị với $2N$ đỉnh kết hợp cấu trúc dữ liệu DSU. Độ phức tạp: $O(N)$.

- Subtask 5: 22% số test ứng với 22% số điểm không có ràng buộc gì thêm.

  Chi các (L, R) thành log đoạn con. Dựng đồ thị với đoạn con. Độ phức tạp: $O(N \log N)$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Coi mỗi hộ là một đỉnh của đồ thị, ta thấy rằng hộ có thu nhập lớn hơn sẽ lan truyền dần đến các hộ có thu nhập thấp hơn, số năm để kết thúc quá trình lan truyền tương ứng là đường đi dài nhất trên đồ thị. Do đó ta dựng đồ thị với cạnh (u, v) tương ứng là hộ u có thể lan truyền tới hộ v. Do số cạnh là rất lớn do đó ta sẽ tạo các đỉnh trung gian bằng cây phân đoạn để đảm bảo số lượng cạnh không quá $N \log N$. Sau đó ta giải bài toán tìm đường đi dài nhất trên đồ thị có trọng số cạnh 0 và 1, dùng thuật toán loang chiều rộng BFS với độ phức tạp là $O(N \log N)$.

Bài 3. Năng lượng tối thiểu (6 điểm)

- Subtask 1: 16% số test ứng với 16% số điểm thỏa mãn: $W = 1$.

  Sử dụng cấu trúc dữ liệu căn bản. Độ phức tạp tính toán $O(\log(N + Q) * (N + Q))$.

- Subtask 2: 20% số test ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $W = 3$.

  Xét các trường hợp bằng tay cho $W = 3$. Kết hợp cài đặt tương tự subtask 1: Độ phức tạp tính toán giữ nguyên là $O(\log(N + Q) * (N + Q))$ do W là hằng số.

- Subtask 3: 14% số test ứng với 14% số điểm thỏa mãn: $Q, L, N \leq 200$.

  Duyệt toàn bộ theo yêu cầu đề bài. Độ phức tạp tính toán $O(L * W * Q^2)$.

- Subtask 4: 20% số test ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $Q = 1$.

  Sử dụng kỹ thuật chặt nhị phân để tìm kiếm kết quả. Độ phức tạp tính toán $O(\log(L) * W^3 * N)$.

- Subtask 5: 14% số test ứng với 14% số điểm thỏa mãn: $L \leq 10000; Q \leq 100$.

  Sử dụng kỹ thuật chặt nhị phân để tìm kiếm kết quả. Kết hợp sử dụng cấu trúc dữ liệu lưu trữ tính toán nâng cao. Độ phức tạp tính toán $O(\log(L) * Q * (Q + N))$.

- Subtask 6: 16% số test ứng với 16% số điểm không có ràng buộc gì thêm.

  Sử dụng cấu trúc hàng đợi ưu tiên. Kết hợp kỹ thuật tính toán lưu trữ với ánh xạ nhị phân. Độ phức tạp tính toán $O(2^W + W^2 * Q * \log Q)$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Dùng cấu trúc tập hợp có thứ tự để lưu lại các cột đang có trạm sạc điện. Với mỗi cặp cột liên tiếp, ta cần tính năng lượng tối thiểu khi robot đặt giữa hai cột (tính cả hai cột). Tập hợp các khoảng cách trên lưu vào tập hợp có thứ tự để mỗi lần truy vấn ta có thể cho ra luôn khoảng cách lớn nhất.

Kỹ thuật tính năng lượng tối thiểu giữa hai cột: Mỗi cột $[i]$, ta cần lưu khoảng cách gần nhất từ dòng thứ j trên cột tới các trạm sạc bên trái và bên phải.

Với mỗi điểm được thêm vào hay bớt đi ở vị trí (i, j), ta cần cập nhật khoảng cách tới tất cả các cột t: $i - w < t < i + w$. Với việc sử dụng bitmask tính trước của tất cả cấu hình của một cột, độ phức tạp với thao tác trên là $O(W^2)$. Độ phức tạp của thao tác tính trước bitmask là $O(W * 2^W)$. Sau khi cập nhật khoảng cách trái phải của các cột t $(i - w < t < i + w)$, ta cần cập nhật nhiều nhất $2 * W$ khoảng cách từ $2 * W$ cặp cột. Độ phức tạp của thao tác sửa tập hợp lưu khoảng cách là $O(W * \log Q)$.

Bài 4. Nhà gỗ (7 điểm)

Tổng quan

- Subtask 1: 25% số test ứng với 25% số điểm thỏa mãn: $N \leq 10; M = 1$.

  Duyệt tất cả các cách hoán vị N cột gỗ, sau đó gộp thành các nhóm theo thứ tự trên hoán vị, cho đến khi lợi nhuận thực tế âm. Độ phức tạp tính toán là $O(N! \times N)$.

- Subtask 2: 25% số test ứng với 25% số điểm thỏa mãn: $N \leq 1000; M = 1; S_1 = 2$.

  Sắp xếp lại các cọc gỗ theo thứ tự tăng dần chiều cao, sau đó sử dụng thuật toán quy hoạch động để tìm cách gộp tối ưu. Độ phức tạp tính toán là $O(N^2)$.

- Subtask 3: 25% số test ứng với 25% số điểm thỏa mãn: $M = 2$.

  Sắp xếp lại các cột gỗ theo thứ tự tăng dần chiều cao. Với nhận xét là mẫu dùng nhiều cột gỗ hơn sẽ chỉ có đúng một ngôi nhà được thi công, ta có thể xét các cột gỗ được dùng cho mẫu này. Sau đó đưa về trường hợp $M = 1$ và giải quyết bằng thuật toán quy hoạch động. Độ phức tạp tính toán là $O(N \log N)$.

- Subtask 4: 25% số test ứng với 25% số điểm không có ràng buộc gì thêm.

  Sắp xếp lại các cột gỗ theo thứ tự tăng dần chiều cao. Sử dụng thuật toán quy hoạch động và kỹ thuật mặt nạ bit để lưu trữ trạng thái. Độ phức tạp tính toán là $O(N \times 2^M)$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Tính chất: Trong cách chọn tối ưu, mỗi ngôi nhà đều sử dụng các cột gỗ liên tiếp trong dãy cột gỗ đã sắp xếp tăng dần theo chiều cao.

Thuật toán: Quy hoạch động sử dụng kỹ thuật bitmask để lưu trữ:

- Sắp xếp tăng dần dãy a.
- Gọi $f(i, k)$ (với i là một số tự nhiên không quá n và k là một tập con của $\{1, 2, \ldots, M\}$) là tổng lợi nhuận dự kiến lớn nhất khi sử dụng các cột gỗ $\{i, i+1, \ldots, N\}$ sao cho các mẫu nhà không thuộc tập k đều phải được thi công ít nhất một căn.
- Khi đó $f(i, k) = \min\{f(i+1, k), \min_{j=1}^{M}\{f(i+S_j, k \cup \{j\}) + P - (a[i+S_j-1] - a[i])^2 \times C\}\}$.
- Sử dụng kỹ thuật bitmask để lưu trữ trong quá trình tính toán f.

Độ phức tạp tính toán: $O(N \times 2^M \times M)$.

Bài 5. Thiết bị thông minh (7 điểm)

Tổng quan

- Subtask 1: 16% số test ứng với 16% số điểm thỏa mãn: $N \leq 100; R_i, T_i \leq 1000, \forall i = 1, 2, \ldots, N$.

  Thí sinh sử dụng mảng hai chiều để lưu lại các điểm đặt thiết bị. Không gian bộ giới hạn là $O(\max(R) * \max(T))$.

- Subtask 2: 20% số test ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $N \leq 15$.

  Thí sinh sử dụng nguyên lý bao hàm loại trừ và đưa về bài toán đếm số điểm đặt thiết bị hợp lệ. Độ phức tạp tính toán: $O(2^N)$.

- Subtask 3: 14% số test ứng với 14% số điểm thỏa mãn: $N \leq 1000$.

  Thí sinh sử dụng kỹ thuật rời rạc hóa để quản lý tập điểm hợp lệ. Độ phức tạp tính toán: $O(N^2)$.

- Subtask 4: 18% số test ứng với 18% số điểm thỏa mãn: $R_i, T_i \leq 10^5, \forall i = 1, 2, \ldots, N$.

  Thí sinh sử dụng kỹ thuật đường quét và cấu trúc dữ liệu nâng cao. Độ phức tạp tính toán $O(N + max(R) + max(T))$.

- Subtask 5: 18% số test ứng với 18% số điểm thỏa mãn: $K \leq 10^5$.

  Thí sinh lần lượt liệt kê các điểm hợp lệ theo thứ tự ưu tiên từ nhỏ tới lớn. và dừng lại tại điểm thứ k. Độ phức tạp tính toán $O(K * \log(N))$.

- Subtask 6: 14% số test ứng với 14% số điểm không có ràng buộc gì thêm.

  kết hợp ý tưởng của subtask 3 và subtask 4. Độ phức tạp tính toán $O(N \log N)$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Gọi $C(x, y)$ là số vùng hình chữ nhật quan trọng mà điểm (x, y) nằm trong hoặc trên cạnh của vùng đó. bài toán có thể được tóm tắt như sau: Gọi A là tập hợp các điểm (x, y) sao cho $C(x, y) > 0$, ta cần tìm giá trị $x + y$ lớn thứ k trong các điểm thuộc A.

Ta sử dụng kỹ thuật chia nhị phân để tìm đáp số, khi đó, bài toán trở thành: Cho một số nguyên s, đếm số điểm (x, y) trên mặt phẳng có $x + y \leq s$ và $C(x, y) > 0$.

Xét tập hợp X gồm các giá trị $1, 5 * 10^7 + 1, L_1, L_2, \ldots, L_n, R_1 + 1, R_2 + 1, \ldots, R_n + 1$. Ta liệt kê các giá trị phân biệt của tập hợp này theo thứ tự tăng dần, được dãy số $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_a$.

Xét tập hợp Y gồm các giá trị $1, 5 * 10^7 + 1, B_1, B_2, \ldots, B_n, T_1 + 1, T_2 + 1, \ldots, T_n + 1$. Ta liệt kê các giá trị phân biệt của tập hợp này theo thứ tự tăng dần, được dãy số $y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_b$.

Ta có các nhận xét sau:

- với mọi (i, u_1, u_2, v) sao cho $1 \leq i \leq a, x_(i-1) \leq u_1 < u_2 < x_i, 1 \leq v \leq 5 * 10^7$ ta luôn có $C(u_1, v) = C(u_2, v)$.
- với mọi (j, u, v_1, v_2) sao cho $1 \leq j \leq b, y_(j-1) \leq v_1 < v_2 < y_j, 1 \leq u \leq 5 * 10^7$ ta luôn có $C(u, v_1) = C(u, v_2)$.

Từ đây, ta có thể sử dụng kỹ thuật đường quét, kết hợp với cấu trúc dữ liệu cây phân đoạn (Segment Tree) để thực hiện việc đếm số điểm theo bài toán ở trên.

Độ phức tạp thời gian là $O(n \log n)$.

Bài 6. Canh tác lương thực (6 điểm)

Tổng quan

- Subtask 1: 16% số test ứng với 16% số điểm thỏa mãn: $Q_i = 1, \forall i = 1, 2, \ldots, N$ và có các con đường trực tiếp từ thủ đô đến tất cả các thành phố khác.

  Sử dụng thuật toán quy hoạch động tương tự giải bài toán cái túi. Độ phức tạp tính toán là $O(N \times S)$.

- Subtask 2: 14% số test khác ứng với 14% số điểm thỏa mãn: $N, S \leq 500$.

  Quy hoạch động trên cây. Độ phức tạp tính toán là $O(N \times S \times \max(Q_i))$.

- Subtask 3: 20% số test ứng với 20% số điểm thỏa mãn: $Q_i = W_i = 1, \forall i = 1, 2, \ldots, N$.

  Quy hoạch động trên cây và sử dụng kỹ thuật chuyển nhãn thông qua đỉnh cha chung gần nhất (LCA). Độ phức tạp tính toán là $O(N^2)$.

- Subtask 4: 16% số test ứng với 16% số điểm thỏa mãn: $Q_i = 1, \forall i = 1, 2, \ldots, N$.

  Đánh số lại các đỉnh của cây theo thứ tự tìm kiếm theo chiều sâu (DFS). Đưa về bài toán quy hoạch động trên dãy. Độ phức tạp tính toán là $O(N \times S)$.

- Subtask 5: 20% số test ứng với 20% số điểm thỏa mãn: Có các con đường trực tiếp từ thủ đô đến tất cả các thành phố khác.

  Quy hoạch động trên dãy, sử dụng cấu trúc bao lồi (convex hull) để giảm độ phức tạp tính toán. Độ phức tạp tính toán là $O(N \times S)$.

- Subtask 6: 14% số test ứng với 14% số điểm không có ràng buộc gì thêm.

  Đánh số lại các đỉnh của cây theo thứ tự tìm kiếm theo chiều sâu (DFS). Đưa về bài toán quy hoạch động trên dãy, sử dụng cấu trúc bao lồi (convex hull) để giảm độ phức tạp tính toán. Độ phức tạp tính toán là $O(N \times S)$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Thuật toán: Quy hoạch động sử dụng kỹ thuật bao lồi để tối ưu:

- Đánh số lại các vùng của vương quốc theo thứ tự thăm của thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu (DFS) bắt đầu từ vùng kinh đô.
- Gọi r_i là vùng sau cùng được thăm bởi DFS trong số những vùng mà i quản lý. Khi đó, tất cả các vùng mà i quản lý là: $i, i+1, \ldots, r_i$.
- Giả sử $k = (k_1, k_2, \ldots, k_N)$ là một phương án phân công hợp lệ, khi đó dãy k thỏa mãn tính chất: Nếu $k_i = 0$ thì $k_i = k_{i+1} = \ldots = k_{r_i} = 0$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$.
- Gọi $dp(i, sum)$ là chi phí nhỏ nhất để phân công cho các vùng $\{i, i+1, \ldots, N\}$ với điều kiện các vùng $\{1, 2, \ldots, i-1\}$ đã cho tổng sản lượng ít nhất là sum và các đỉnh quản lý i đều có canh tác lương thực.
- Khi đó $dp(i, sum) = \min\{dp(r_i + 1, sum), \min_{j=1}^{Q_i}\{dp(i+1, sum + j \times w_i) + j^2 \times c_i\}\}$.
- Chọn thứ tự tính toán thỏa mãn $dp(i, sum)$, $dp(i, sum + w_i)$, $dp(i, sum + 2w_i)$, $\ldots$ được tính liên tiếp nhau. Do công thức tính toán giữa hai lần liên tiếp chỉ khác nhau hai hạng tử đầu cuối nên có thể sử dụng một hàng đợi hai đầu (deque) để lưu trữ các hạng tử. Công thức tính là một hàm theo j, có thể sử dụng kỹ thuật bao lồi (convex hull) để tối ưu hóa quy hoạch động.

Độ phức tạp tính toán: $O(N \times S)$.

– – – – – – – – – – – – – – HẾT – – – – – – – – – – – – – –