Tuyển tập đề thi cuối kì môn Đại số
(sưu tầm)

TS. Khổng Văn Hải

Version - 11/2024

Mục lục

Tài liệu này được tổng hợp từ các đề thi lưu trữ tại văn phòng Khoa Toán - Tin, Đại học Bách khoa Hà Nội. Trong quá trình biên soạn, khó tránh khỏi sai sót. Mọi ý kiến đóng góp xin vui lòng gửi về email: hai.khongvan@hust.edu.vn.

1 Năm 2015

1.1 Kì 20151 - Đề 1

Đề 1: ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 20151

Câu 1. Hãy dùng các ký hiệu diễn tả và viết mệnh đề phủ định của mệnh đề sau: "Với mọi số tự nhiên n chia hết cho 2 và 3 thì n chia hết cho 6".

Câu 2. Giải phương trình phức $z^2+(i-10)z+23-11i=0$ với i là đơn vị ảo.

Câu 3. Cho $A=\begin{bmatrix}1&3&1\\2&8&1\\-1&-3&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&1&3\\-1&2&2\end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thoả mãn $AX=B^T$.

Câu 4. Tìm a,b để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3+ax_4 &=3\\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4 &=b+1\\ 3x_1-x_2+2x_3+4x_4 &=2b-1\end{cases}$$

Câu 5. Cho ánh xạ tuyến tính $f:P_2[x]\to P_2[x]$ thoả mãn:

$$f(1-x^2)=-3+3x-6x^2, f(3x+2x^2)=17+x+16x^2, f(2+6x+3x^2)=32+7x+25x^2.$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Tính $f(1+x^2)$

b) Xác định m để vector $v=1+x+mx^2$ thuộc $\operatorname{Im} f$

Câu 6. Cho dạng toàn phương

$$\omega(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2-x_2^2+2x_3^2+6x_1x_2$$

1. Tìm a để ω xác định dương.
2. Khi $a=1$, hãy đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao (chỉ rõ phép biến đổi).

Câu 7. Cho không gian $P_{2015}[x]$ – các đa thức bậc không vượt quá 2015 và tập

$$W_1=\left\{p\in P_{2015}[x]\,\middle|\,p(-x)=p(x),\forall x\in\mathbb{R}\right\}.$$

Chứng minh rằng W_1 là không gian con của $P_{2015}[x]$. Chỉ ra số chiều và một cơ sở của W_1 (không cần chứng minh).

Câu 8. Cho ma trận A vuông cấp $n>2$. Chứng minh rằng $r(A)=r(A^TA)$ với $r(X)$ là hạng của ma trận X.

2 Năm 2016

2.1 Kì 20161 - Nhóm ngành 1 - Đề 1

Câu 1. Giả phương trình phức $z^6 + iz^4 - z^2 - i = 0$, với i là đơn vị ảo.

Câu 2. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = \left(x + y, x - y\right)$ và $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$. Tìm a biết $f^{-1}(A) = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = a\right\}$

Câu 3. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thoả mãn $AX = B^T$

Câu 4. Tìm a, b để không gian nghiệm của hệ số có số chiều là 1.

$$\begin{cases} bx & +3y & +z & = 0 \\ (1+2b)x & +(a+5)y & +2z & = 0 \\ (2b-1)x & +(a+2)y & +z & = 0 \end{cases}$$

Câu 5. Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho các vector $v_1 = (1;2;-1;0), v_2 = (2;2;-1;3), v_3 = (-1;-2;2;-1), v_4 = (1;0;1;2)$. Đặt $V_1 = \text{span}\{v_1, v_2\}, V_2 = \text{span}\{v_3, v_4\}$. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian $V_1 + V_2$

Câu 6. Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn:

$$f(1+x^2) = 2 + 5x + 3x^2,\ f(-1+2x+3x^2) = 7(x+x^2),\ f(x+x^2) = 3(x+x^2).$$

a) Tìm ma trận của f và $f^2 = f \circ f$ đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$.

b) Xác định m để vectơ $v = 2 + mx + 5x^2$ thuộc $\operatorname{Im} f$.

Câu 7. Cho dạng toàn phương $\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2$.

a) Tìm a để $\omega = 1$ là một mặt ellipsoid.

b) Khi $a = -5$, hãy đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao (chỉ rõ phép biến đổi).

Câu 8. Cho ma trận thực A vuông cấp 2017. Chứng minh rằng:

$$\det(A - A^T)^{2017} = 2017(\det A - \det A^T).$$

2.2 Kì 20161 - Nhóm ngành 1 - Đề 3

Câu 1. Cho A, B là các tập hợp thoả mãn $A \setminus B \subset B \setminus A$. Chứng minh rằng $A \subset B$.

Câu 2. Cho ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = iz^2 + (4-i)z - 9i$, với i là đơn vị ảo. Xác định $f^{-1}(\{7\})$.

Câu 3. Tìm z biết $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6-x^3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6-x \end{vmatrix} = 0$

Câu 4. Tìm a, b để hệ sau có vô số nghiệm phụ thuộc vào 1 tham số:

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & +ax_4 & = 2 \\ 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +(3a+1)x_4 & = b+6 \\ 3x_1 & +4x_2 & -13x_3 & +(2a-2)x_4 & = -b-1 \end{cases}$$

Câu 5. Trong không gian $P_3[x]$– các đa thức có bậc không vượt quá 3, cho các vector $v_1 = 1 + x + x^2 + 2x^3, v_2 = x - x^2 - x^3, v_3 = 2 + 5x - 2x^2, v_4 = 3 + 7x + 3x^2$. Đặt $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}, V = \operatorname{span}\{v_3, v_4\}$. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con $V_1 \cap V_2$.

Câu 6. Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ -10 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, xY2\}$ của $P_2[x]$.

a) Tính $f(1 + x + x^2)$. Tìm m để $v = 1 - x + mx^2$ thuộc $\ker f$

b) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo.

Câu 7. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc $\langle(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ cho các vector $u_1 = (1;1;0), u_2 = (1;2;1), u_3 = (3l4l1), v = (2;2;3)$ và đặt $H = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\}$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H.

b) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H.

Câu 8. Cho A, B là các ma trận vuông cấp $n \geq 1$. Chứng minh rằng $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$, ở đó $r(X)$ là hạng của ma trận X.

2.3 Kì 20163 - Nhóm ngành 1 - Đề 1

Câu 1. Cho ánh xạ $f: X \to Y$ và $A \subset X$. Chứng minh $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Câu 2. Cho phương trình $z^2 - (5+3i)z + (8+4i) = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2. Tính độ dài đoạn AB, với A, B là điểm biểu diễn z_1, z_2.

Câu 3. Tìm điều kiện của m để ma trận

$$\begin{bmatrix} 1+m & 2+m & -m \\ 3+m & -1+m & 2-m \\ -1+m & m & 1-m \end{bmatrix}$$

khả nghịch.

Câu 4. Tìm m để hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + mx_4 &= 0 \end{cases}$$

có nghiệm không tầm thường và khi đó tìm công thức nghiệm.

Câu 5. Trong không gian $P_2[x]$, cho các vectơ $u_1 = 1 + x - x^2$, $u_2 = 3x - x^2$, $u_3 = 2 - 2x + x^2$, $u_4 = 3 + 2x - 2x^2$. Chứng minh mỗi hệ gồm 3 trong 4 vectơ kể trên đều là một cơ sở của không gian $P_2[x]$.

Câu 6. Cho toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-7x_1 - 12x_2 + 4x_3, 4x_1 + 7x_2 - 2x_3, -x_1 - 2x_2).$$

a) Xác định ma trận của f đối với cơ sở $B = \{(1;0;1), (0;1;1), (0;0;1)\}$.

b) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f theo cơ sở đó có dạng chéo.

Câu 7. Trên không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc $\langle,\rangle$ và cơ sở chính tắc $E = \{e_1 = (1;0;0), e_2 = (0;1;0), e_3 = (0;0;1)\}$:

a) Cho biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3, f(e_3) = e_1$. Chứng minh $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ với mọi $u, v \in \mathbb{R}^3$.

b) Ma trận của f đối với một cơ sở trực chuẩn bất kỳ có chéo hóa trực giao được không? Tại sao?

Câu 8. Cho A là ma trận vuông thực cấp n thỏa mãn $A^2 + 2017E = 0$. Chứng minh $\det(A) > 0$.

3 Năm 2017

3.1 Kì 20171 - Nhóm ngành 1 - Đề 2

Câu 1. Giải phương trình trong trường số phức:

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^2-(5+i)\left(\frac{z+1}{z}\right)+8+i=0$$

Câu 2. Giải phương trình ma trận:

$$X^2-2X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 8 & 15\end{pmatrix}$$

Câu 3. Giải và biện luận theo hệ số thực a hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +a^2x_4 & =0\\ x_1 & +(2-a)x_2 & +4x_3 & & =0\\ 2x_1 & +(4-a)x_2 & +(10-a)x_3 & +4x_4 & =0\end{cases}$$

Câu 4. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z,s,t)=(x+2y+z-3s+4t,2x+5y+4z-5s+5t,x+4y+5z-s-2t)$$

với $\forall(x,y,z,s,t)\in\mathbb{R}^5$.

a) Tìm một cơ sở vô chiều của Im f.

b) Trên $\mathbb{R}^3$ xét tất cả các hướng chính tắc, cho $u=(1;0;2)$, tìm $\omega\in\mathrm{Im}f$ sao cho $\|u-\omega\|\le\|u-v\|$ với mọi vectơ $v\in\mathrm{Im}f$.

c) Hãy bổ sung thêm các vectơ: tìm vecto nào cần thêm vào để f có thể có hạng lớn hơn trong câu (a) để được hình mới trở thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Câu 5. Rút gọn dạng toàn phương sau bằng phương pháp trực giao $\varphi(x)=(x_1-2x_2+3x_3)^2$, với $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Hãy nhận dạng mặt bậc hai sau: $x_1(x)=6x_2+6$.

Câu 6. Cho $G=(\mathbb{R}\backslash 0)\times\mathbb{R}^2$ là một phép toán hai ngôi trên G xác định bởi $(x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(x_1x_2,x_2y_1+y_2)$. Hỏi $(G,*)$ có phải là một nhóm không? Tại sao?

Câu 7. Giả sử rằng $A,B\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ - tập các ma trận thực vuông cấp n, với $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Ký hiệu $\sigma_R(AB)$ là tập các trị riêng của AB. Chứng minh rằng: $\sigma_R(BA)\subset\sigma_R(AB)$.

3.2 Kì 20171 - Nhóm ngành 1 - Đề 4

Câu 1. Giải phương trình trên trường số phức: $(z+i)^2 = (z-i)^9$.

Câu 2. Giải phương trình ma trận:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Câu 3. Giải và biện luận theo hệ số thực a hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -x_4 & = 0, \\ & ax_2 & +(1-a)x_3 & +(a^2+1)x_4 & = 0, \\ 2x_1 & +(4-a)x_2 & -4x_3 & -2(a^2+1)x_4 & = 0. \end{cases}$$

Câu 4. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (4x+2y-2z, 2x+y-z, -2x-y+z).$$

a) Với tích vô hướng chính tắc của $\mathbb{R}^3$, hãy tìm một cơ sở trực chuẩn để ma trận của f theo hệ cơ sở đó có dạng đường chéo.

b) Tìm tọa độ của vectơ $\omega = (1;0;1)$ theo hệ cơ sở trực chuẩn đó.

c) Hãy tìm giá trị lớn nhất của $\varphi(x,y,z) = 4x^2+y^2+z^2+4xy-4xz-2yz$ với $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2 = 16$.

Câu 5. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ trang bị tích vô hướng chính tắc, cho:

$$V_1 = \text{Span}\{v_1 = (1;2;3;1), v_2 = (2;0;-2;1)\},$$

$$V_2 = \text{Span}\{v_3 = (1;3;5;2), v_4 = (3;8;13;3)\}.$$

Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của $V_1 \cap V_2$. Tìm hình chiếu của vectơ $\omega = (1;1;0;1)$ lên $V_1 \cap V_2$.

Câu 6. Cho $P_2[x]$ là tập các đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2 và ánh xạ $\varphi : P_2[x] \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$\varphi(p(x)) = (p(0), p(-1), p(1)).$$

Hỏi φ có phải là một đẳng cấu không? Giải thích.

Câu 7. Ký hiệu $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ là tập các ma trận thực kích cỡ $n \times 1$. Giả sử rằng A, B là hai ma trận vuông thực cấp n, với $0 < n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $X^T AY = X^T BY, \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng $A = B$.

3.3 Kì 20173 - Nhóm ngành 1 - Đề 1

Câu 1 (2đ). 1. Cho p, q, r là 3 mệnh đề. Hỏi hai mệnh đề

$$(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \wedge (r \Leftrightarrow p) \quad \text{và} \quad (p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p)$$

có tương đương hay không? Tại sao?"

2. Ánh xạ $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ là đơn ánh không? Tại sao?

Câu 2 (1đ). Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = (-1+i)^{10}(\sqrt{3}-i)^{15}$.

Câu 3 (1đ). Tìm m để phương trình ma trận sau có vô số nghiệm:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & m \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Câu 4 (1đ). Chứng minh rằng

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), | \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

là không gian con của không gian $\mathscr{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2. Tìm số chiều của F.

Câu 5 (2đ). Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, -x + 2y - z, z)$$

1. Chứng minh f là một phép biến đổi tuyến tính và tìm ma trận của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

2. Tìm trị riêng và vector riêng của f.

Câu 6 (1đ). Nhận dạng đường bậc hai $4xy - 4\sqrt{2}y = 1$.

Câu 7 (1đ). Cho $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng ma trận sau khả nghịch:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1^2 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & 1+a_2^2 & -a_3 & a_4 \\ a_3 & a_2 & 1+a_3^2 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & 1+a_1^2 \end{pmatrix}$$

Câu 8 (1đ). Gọi $C(\mathbb{R})$ là không gian vectơ các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Cho n số thực $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ từng đôi một khác nhau.

Chứng minh rằng hệ các vectơ

$$\left\{ f_1(x) = e^{\lambda_1 x}, f_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \ldots, f_n(x) = e^{\lambda_n x} \right\} \subset C(\mathbb{R})$$

độc lập tuyến tính.

3.4 Kì 20173 - Nhóm ngành 1 - Đề 2

Câu 1. 1. Cho p, q, r là 3 mệnh đề. Hỏi hai mệnh đề

$$(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \text{ và } (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$$

có tương đương hay không? Tại sao?"

2. Ánh xạ $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{4x-5}{x-3}$ là đơn ánh không? Tại sao?

Câu 2. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = (1-i)^{20}(-1+i\sqrt{3})^{10}$.

Câu 3. Tìm m để phương trình ma trận sau có vô số nghiệm:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & m \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Câu 4. Chứng minh rằng

$$F = \left\{ \left(x, y, z, t\right) \in \mathbb{R}^4 \left| 2x - y - z + t = 0 \right. \right\}$$

là không gian con của không gian $\mathbb{R}^4$. Tìm số chiều của F.

Câu 5. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, x + 3z, y + z)$$

1. Chứng minh f là một phép biến đổi tuyến tính và tìm ma trận của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
2. Tìm trị riêng và vector riêng của f.

Câu 6. Nhận dạng đường bậc hai $4xy + 2\sqrt{2}x = 1$.

Câu 7. Cho $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng ma trận sau khả nghịch:

$$A = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -(1+t^2) \\ y & x & -(1+t^2) & z \\ z & 1+t^2 & x & -y \\ 1+t^2 & -z & y & x \end{pmatrix}$$

Câu 8. Gọi $C(\mathbb{R})$ là không gian vectơ các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Cho n số thực $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ từng đôi một khác nhau.

Chứng minh rằng hệ các vectơ

$$\left\{ f_1(x) = e^{\lambda_1 x}, f_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \ldots, f_n(x) = e^{\lambda_n x} \right\} \subset C(\mathbb{R})$$

độc lập tuyến tính.

3.5 Kì 20173 - Nhóm ngành 2 - Đề 3

Câu 1 (2đ). 1. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{4x}{x^2+3}$. Tìm $f^{-1}([1;2])$.

2. Ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3+3x+1$ có đơn ánh không? Tại sao?

Câu 2 (1đ). Tìm $z\in\mathbb{C}$ sao cho $z^7-z^2=0$.

Câu 3 (1đ). Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$X\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&-1\\1&1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2&-7\\15&2&-13\end{bmatrix}.$$

Câu 4 (1đ). Trong $\mathbb{R}^3$, cho 3 vectơ $\mathbf{u}=(1;2;0)$, $\mathbf{v}=(1;1;1)$, $\mathbf{w}=(3;5;1)$. Xác định số chiều của không gian con sinh bởi hệ các vectơ $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$.

Câu 5 (1.5đ). Chéo hóa ma trận $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-8&4&-6\\8&1&9\end{bmatrix}$.

Câu 6 (1.5đ). Cho ánh xạ $f:P_2(x)\to\mathbb{R}^3, f(ax^2+bx+c)=(a,b,c+m)$.

1. Tìm m để f là ánh xạ tuyến tính.

2. Tìm ma trận của f đối với các cơ sở chính tắc của $P_2(x)$ và $\mathbb{R}^3$ khi $m=0$.

Câu 7 (1đ). Gọi $\varepsilon_k\,(k=\overline{1,7})$ là các nghiệm của phương trình $z^7-1=0$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{7}\varepsilon_k^3=0.$$

Câu 8 (1đ). Cho A là ma trận khả nghịch. Chứng minh rằng nếu λ là trị riêng của A thì $\dfrac{1}{\lambda}$ là trị riêng của A^{-1}.

3.6 Kì 20173 - Nhóm ngành 2 - Đề 4

Câu 1 (2đ). 1. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{12x}{9x^2+4}$. Tìm $f^{\mathbb{R}}$.

2. Ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+3x^2+3x+7$ có toàn ánh không? Tại sao?

Câu 2 (1đ). Tìm $z\in\mathbb{C}$ sao cho $z^6+z^2=0$.

Câu 3 (1đ). Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$X\begin{bmatrix}1&3&-2\\2&5&-3\\-3&2&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&-2\\10&-2&9\end{bmatrix}.$$

Câu 4 (1đ). Trong $\mathbb{R}^3$, cho 3 vectơ $a=(2;1;0)$, $b=(2;-3;1)$, $c=(8;0;1)$. Xác định số chiều của không gian con sinh bởi hệ các vectơ $\{a,b,c\}$.

Câu 5 (1.5đ). Chéo hóa ma trận $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-8&4&-6\\8&1&9\end{bmatrix}$.

Câu 6 (1.5đ). Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to P_2[x], f(a,b,c)=ax^2+bx+c+m$.

1. Tìm m để f là ánh xạ tuyến tính.
2. Tìm ma trận của f đối với các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $P_2[x]$ khi $m=0$.

Câu 7 (1đ). Gọi $\varepsilon_k\,(k=1,8)$ là các nghiệm của phương trình $z^7-1=0$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{8}\varepsilon_k^4=0.$$

Câu 8 (1đ). Cho A là ma trận khả nghịch. Chứng minh rằng nếu λ là trị riêng của A thì $\dfrac{1}{\lambda}$ là trị riêng của A^{-1}.

4 Năm 2018

4.1 Kì 20181 - Nhóm ngành 1 - Đề 1

Câu 1 (1đ)**.** Cho các tập hợp con của $\mathbb{R}$ là $A = [1;3], B = (m; m+3)$. Tìm m để $(A \setminus B) \subset (A \cap B)$.

Câu 2 (1đ)**.** Tìm các số phức z thỏa mãn $z^3 = 4\sqrt{3} - 4i$, i là đơn vị ảo.

Câu 3 (1đ)**.** Giải phương trình ma trận:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} - X.$$

Câu 4 (4đ)**.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0, \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = 0, \\ -x_1 & +(m-3)x_2 & -3x_3 & +7x_4 & = m, \end{cases}$$

(trong đó m là tham số).

(a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

(b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

(c) Khi $m = 0$, các nghiệm của hệ phương trình lập thành một không gian vectơ con U của $\mathbb{R}^4$. Tìm số chiều và một cơ sở của U.

(d) Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, tìm hình chiếu trực giao của $\mathbf{v} = (4; 5; -6; -9)$ lên không gian con U ở câu (c).

Câu 5 (2đ)**.** Cho biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 3x_2 + x_3; -x_1 - x_2 + x_3; -3x_1 + 2x_2 + 2x_3).$$

(a) Tìm một hệ vectơ $\mathbf{u} = (1; 3; m) \in \mathrm{Im}(f)$. Ánh xạ trên có phải là toàn ánh không? Vì sao?

(b) Tìm cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để đối với cơ sở đó ma trận của f có dạng đường chéo.

Câu 6 (1đ)**.** Trong không gian vectơ tập các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, chứng minh hệ vectơ con

$$B = \{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin 10x, \cos 10x\}$$

là hệ độc lập tuyến tính.

4.2 Kì 20181 - Nhóm ngành 1 - Đề 2

Câu 1 (1đ)**.** Cho các tập hợp con của $\mathbb{R}$ là $A = [2;4], B = (m; m+1)$. Tìm m để $(B \setminus A) \subset (A \setminus B)$.

Câu 2 (1đ)**.** Tìm các số phức z thỏa mãn $z^3 = 4\sqrt{3} + 4i$, i là đơn vị ảo.

Câu 3 (1đ)**.** Giải phương trình ma trận:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + X.$$

Câu 4 (4đ)**.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = m, \\ 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0, \\ -x_1 & +mx_2 & -2x_3 & -x_4 & = 0, \end{cases}$$

(trong đó m là tham số).

(a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

(b) Tìm m để hệ phương trình vô nghiệm.

(c) Khi $m = 0$, các nghiệm của hệ phương trình lập thành một không gian vectơ con U của $\mathbb{R}^4$. Tìm số chiều và một cơ sở của U.

(d) Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, tìm hình chiếu trực giao của $\mathbf{v} = (5;2;4;-3)$ lên không gian con U ở câu (c).

Câu 5 (2đ)**.** Cho biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 3x_2 + x_3; x_1 + x_2 + x_3; 3x_1 - 2x_2 + 2x_3).$$

(a) Tìm một hệ vectơ $\mathbf{u} = (3;5;m) \in \operatorname{Im}(f)$. Ánh xạ trên có phải là toàn ánh không? Vì sao?

(b) Tìm cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để đối với cơ sở đó ma trận của f có dạng đường chéo.

Câu 6 (1đ)**.** Trong không gian vectơ tập các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, chứng minh hệ vectơ con

$$B = \{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin 10x, \cos 10x\}$$

là hệ độc lập tuyến tính.

4.3 Kì 20181 - Nhóm ngành 1 - Đề 3

Câu 1 (1đ)**.** Cho các mệnh đề A, B, C. Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề:

$$(A \vee B) \rightarrow \overline{C}.$$

Câu 2 (1.5đ)**.** Cho ánh xạ $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ xác định bởi $f(z) = 2z^3 - 1$. Ánh xạ f có phải là đơn ánh không? Vì sao? Xác định tích các mô đun của các phần tử trong tập nghịch ảnh $f^{-1}(\{5+2i\})$.

Câu 3 (2đ)**.** Cho ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tính $\det(A+2E)^5$, trong đó E là ma trận đơn vị cấp 3.

(b) Giải phương trình ma trận $AX = [0 \quad 0 \quad 0]^T$.

Câu 4 (1.5đ)**.** Trong không gian $P_3[x]$, cho hệ vectơ:

$$u_1 = 1+2x-x^3, \quad u_2 = 2-x+x^2+2x^3, \quad u_3 = -1+x-x^2+x^3, \quad u_4 = 4+2x^2,$$

và các không gian vectơ con $V_1 = \text{span}\{u_1, u_2\}$, $V_2 = \text{span}\{u_3, u_4\}$. Tìm số chiều và cơ sở của không gian con $V_1 + V_2$ và $V_1 \cap V_2$.

Câu 5 (2đ)**.** Cho biến đổi tuyến tính trên không gian $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(1;2;-1) = (2;2;4), \quad f(2;1;3) = (1;2;-1), \quad f(1;1;2) = (2;3;1).$$

(a) Xác định $\text{Im}(f)$.

(b) Tìm các giá trị riêng của f.

Câu 6 (2đ)**.** Cho dạng toàn phương:

$$h(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

(a) Tìm điều kiện của a để dạng toàn phương xác định dương.

(b) Với $a = 2$, ta có duy nhất một tích vô hướng $\langle u, v\rangle$ trên $\mathbb{R}^3$ thoả mãn $\langle u, u\rangle = h(u)$. Tìm một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng này thông qua việc trực chuẩn hoá Gram- Smith cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

4.4 Kì 20181 - Nhóm ngành 1 - Đề 4

Câu 1. Cho các mệnh đề A, B, C. Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề $\overline{A} \to (B \wedge C)$.

Câu 2. Cho ánh xạ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ xác định bởi $f(z) = 2z^3 + 1$. Ánh xạ f có phải là toàn ánh không? Vì sao? Xác định tích các mô đun của các phần tử trong tập nghịch ảnh $f^{-1}(\{5-2i\})$.

Câu 3. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Tính $\det(A-2E)^5$, trong đó E là ma trận đơn vị cấp 3.

(b) Giải phương trình ma trận $XA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Câu 4. Trong không gian $P_3[x]$, cho hệ vectơ $u_1 = 1 - 2x - x^3$, $u_2 = 2 - x - x^2 + 2x^3$, $u_3 = -1 + x - x^2 - x^3$, $u_4 = 4 - 4x + 2x^2 + 2x^3$ và các không gian vectơ con $V_1 = \text{span}\{u_1, u_2\}$, $V_2 = \text{span}\{u_3, u_4\}$. Tìm số chiều và 1 cơ sở của các không gian con $V_1 + V_2$ và $V_1 \cap V_2$.

Câu 5. Cho biến đổi tuyến tính trên không gian $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(2;3;-1) = (6;2;-2), \quad f(1;1;3) = (2;3;-1), \quad f(3;1;-1) = (5;4;-2).$$

(a) Xác định $\dim \text{Im}(f)$.

(b) Tìm các giá trị riêng của f.

Câu 6. Cho dạng toàn phương $h(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

(a) Tìm điều kiện của a để dạng toàn phương xác định dương.

(b) Với $a = 4$, ta có duy nhất một tích vô hướng (u, v) trên $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn $\langle u, v\rangle = h(u)$. Tìm một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng này thông qua việc trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

4.5 Kì 20181 - Nhóm ngành 2 - Đề 5

Câu 1. Tìm các nghiệm phức của phương trình $z^4 = (\sqrt{3}+i)^6$ thỏa mãn điều kiện: $|z-2i| < 3$.

Câu 2. Cho các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 14 & 11 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận X thỏa mãn $AX = B - X$.

Câu 3. Trong không gian $P_2[x]$, cho các vectơ:

$$v_1 = 1 + x + x^2, \quad v_2 = 2 + mx - x^2, \quad v_3 = 4 + 5x + x^2, \quad v_4 = 10 + 11x - 5x^2.$$

(a) Xác định m để $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc tuyến tính.

(b) Với $m = 2$, chứng minh B là một cơ sở của không gian $P_2[x]$. Tìm tọa độ của vector v đối với cơ sở đó.

Câu 4. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thỏa mãn:

$$f(1,0,1) = (3,3,9), \quad f(2,-1,1) = (-1,3,1), \quad f(0,1,1) = (1,-2,3).$$

(a) Lập ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

(b) Xác định $f(3;4;5)$

(c) Xác định số chiều và một cơ sở của $\ker(f)$.

Câu 5. Trong $\mathbb{R}^4$, xét không gian con V sinh bởi các vectơ:

$$v_1 = (1,1,2,-1), \quad v_2 = (1,2,1,1), \quad v_3 = (3,4,5,-1).$$

Đặt $V = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

(a) Xác định số chiều và một cơ sở của V.

(b) Tìm hình chiếu trực giao của vectơ $v = (4,1,4,0)$ lên V.

Câu 6. Cho A cỡ $m \times n$ với $m \le n$ có hạng bằng m. Chứng minh tồn tại ma trận B, cỡ $n \times m$ sao cho $AB = E$, với E là ma trận đơn vị.

4.6 Kì 20181 - Nhóm ngành 2 - Đề 6

Câu 1. Tìm các nghiệm phức của phương trình

$$z^5 = (1+\sqrt{3}i)^6$$

thỏa mãn điều kiện:

$$|z - i\sqrt{3}| < 2.$$

Câu 2. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận X thỏa mãn

$$AX = B - X.$$

Câu 3. Trong không gian $P_2[x]$ cho các vectơ

$$v_1 = 1 - x + x^2, \quad v_2 = 2 + x - x^2, \quad v_3 = 5 + mx + 2x^2, \quad v = 8 - 9x + 11x^2.$$

a) Xác định m để hệ $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc tuyến tính.

b) Với $m = -1$, chứng minh B lập thành cơ sở của không gian $P_2[x]$. Tìm tọa độ của vectơ v đối với cơ sở B.

Câu 4. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thỏa mãn:

$$f(2,1,0) = (4,5,-2), \quad f(1,-1,0) = (-1,1,-1), \quad f(0,1,1) = (6,6,-2).$$

a) Lập ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Xác định $f(3,4,1)$.

c) Xác định số chiều và một cơ sở của $\ker(f)$.

Câu 5. Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho các vectơ

$$v_1 = (1,2,2,-1), \quad v_2 = (2,3,1,1), \quad v_3 = (4,7,5,-1).$$

Đặt $V = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

a) Xác định số chiều và một cơ sở của V.

b) Tìm hình chiếu trực giao của vectơ $v = (3,5,6,-6)$ lên V.

Câu 6. Cho ma trận A có kích thước $m \times n$ với $m \le n$, có hạng bằng m. Chứng minh tồn tại ma trận B có kích thước $n \times m$ sao cho $AB = E$, với E là ma trận đơn vị.

4.7 Kì 20181 - Nhóm ngành 3 - Đề 7

Câu 1 (1đ). Cho mệnh đề P : "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y > x$".

a) Xác định mệnh đề phủ định của P.

b) Mệnh đề P muốn khẳng định điều gì?

Câu 2 (1đ). Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

Câu 3 (2đ). Cho các vector:

$$v_1 = (2,1,5,8); \quad v_2 = (1,-1,3,5); \quad v_3 = (0,2,1,6); \quad v_4 = (-3,5,2,1).$$

a) Chứng minh v_1, v_2, v_3, v_4 lập thành một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm tọa độ của vector $v = (-5,15,15,13)$ đối với cơ sở trên.

Câu 4 (3đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(3,2,1) = (8,3,3); \quad f(3,2,0) = (6,5,3); \quad f(3,0,0) = (6,3,9).$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm các giá trị riêng, vector riêng của f.

c) Tìm số chiều của không gian hạt nhân và không gian ảnh của f.

Câu 5 (2đ). Trong không gian $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các vector:

$$v_1 = (-1,1,1,-1,-1); \quad v_2 = (2,1,4,-4,2); \quad v_3 = (5,-4,-3,7,1).$$

Ký hiệu V là không gian sinh bởi v_1, v_2, v_3.

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của V bằng phương pháp Gram-Schmidt.

b) Tìm hình chiếu trực giao của vector $v = (1,2,3,4,5)$ lên V.

Câu 6 (1đ). Chứng minh rằng nếu ma trận A đồng dạng với ma trận B thì A^4 cũng đồng dạng với B^4.

4.8 Kì 20181 - Nhóm ngành 3 - Đề 8

Câu 1 (1đ)**.** Cho mệnh đề P : "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y < x$".

a) Xác định mệnh đề phủ định của P.

b) Mệnh đề P muốn khẳng định điều gì?

Câu 2 (1đ)**.** Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

Câu 3 (2đ)**.** Cho các vector:

$$v_1 = (2,1,0,-3); \quad v_2 = (1,-1,2,5); \quad v_3 = (5,3,1,2); \quad v_4 = (8,5,6,1).$$

a) Chứng minh v_1, v_2, v_3, v_4 lập thành một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm tọa độ của vector $v = (23,14,17,-5)$ đối với cơ sở trên.

Câu 4 (3đ)**.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(1,2,3) = (13,-7,-2); \quad f(1,2,0) = (4,2,-2); \quad f(2,0,0) = (4,0,4).$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm các giá trị riêng, vector riêng của f.

c) Tìm số chiều của không gian hạt nhân và không gian ảnh của f.

Câu 5 (2đ)**.** Trong không gian $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các vector:

$$v_1 = (1,-1,-1,1,1); \quad v_2 = (2,1,4,-4,2); \quad v_3 = (4,-3,-2,6,0).$$

Ký hiệu V là không gian sinh bởi v_1, v_2, v_3.

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của V bằng phương pháp Gram-Schmidt.

b) Tìm hình chiếu trực giao của vector $v = (0,2,4,6,8)$ lên V.

Câu 6 (1đ)**.** Chứng minh rằng nếu ma trận A đồng dạng với ma trận B thì A^4 cũng đồng dạng với B^4.

4.9 Kì 20183 - Nhóm ngành 1 - Đề 1

Câu 1. Xét xem mệnh đề sau đúng hay sai: "Nếu số thực x thoả mãn phương trình $x^2-2x+10=0$ thì x phải là số âm."

Câu 2. Gọi $\mathbb{C}$ là tập hợp các số phức. Xét ánh xạ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ xác định bởi công thức:

$$f(z)=z^6-2z^3-2+i.$$

Xác định tập hợp $f^{-1}(\{1+i\})$.

Câu 3. Cho các ma trận:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&1&0\\1&1&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4&3&4\\4&2&-2\end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận X thoả mãn $XA=B$.

Câu 4. Gọi G là tập hợp các ma trận vuông cấp n với định thức khác 0. Chứng minh rằng G là một nhóm với phép nhân ma trận.

Câu 5. Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho các vector:

$$v_1=(1;1;0;1),\quad v_2=(2;1;-1;2),\quad v_3=(-1;2;1;0),\quad v_4=(1;2;-1;2).$$

Đặt $U=\text{Span}\{v_1,v_2\}$, $V=\text{Span}\{v_3,v_4\}$.

a Tìm giá trị m sao cho vector $\alpha=(1;5;m;12)$ thuộc không gian $U+V$.

b Xác định số chiều và một cơ sở của $U\cap V$.

c Tìm hình chiếu trực giao của vector $v=(3;2;0;6)$ lên U.

Câu 6. Ánh xạ tuyến tính $f:P_2[x]\to P_2[x]$ có ma trận $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&-1\\1&1&3\end{bmatrix}$ đối với cơ sở $B=\{v_1,v_2,v_3\}$, với:

$$v_1=1,\ v_2=1+x,\ v_3=2-x+x^2.$$

(a) Xác định ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $E=\{1,x,x^2\}$. Tính $f(4+3x+2x^2)$. (b) Tìm số chiều và một cơ sở của $\ker(f)$.

Câu 7. Cho A là ma trận thực vuông cấp 4. Biết rằng đa thức đặc trưng $\det(A-\lambda E)$ nhận các số phức $\lambda_1=1+2i$ và $\lambda_2=3-2i$ làm nghiệm. Tính $\det(A)$.

4.10 Kì 20183 - Nhóm ngành 1 - Đề 2

Câu 1. Xét xem mệnh đề sau đúng hay sai: "Nếu số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $n^2 = 6$ thì n phải là số lẻ".

Câu 2. Gọi $\mathbb{C}$ là tập hợp các số phức. Xét ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ xác định bởi công thức $f(z) = z^6 + 7z^3 - 6 + i$. Xác định tập hợp $f^{-1}(\{2+i\})$.

Câu 3. Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

Tìm ma trận X thỏa mãn $AX = B$

Câu 4. Gọi G là tập hợp các ma trận vuông cấp n với định thức bằng 1. Chứng minh rằng G là một nhóm với phép nhân ma trận.

Câu 5. Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho các vectơ $v_1 = (1,1,-1,2)$, $v_2 = (1,2,0,1)$, $v_3 = (2,1,-1,1)$, $v_4 = (3,1,1,-4)$. Đặt $U = \text{Span}\{v_1, v_2\}$, $V = \text{Span}\{v_3, v_4\}$.

a) Tìm giá trị m sao cho vectơ $\alpha = (19, m, 1, -8)$ thuộc không gian $U + V$.

b) Xác định số chiều và một cơ sở của $U \cap V$.

c) Tìm hình chiếu trực giao của vectơ $v = (5,4,-1,8)$ lên U.

Câu 6. Ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ với $v_1 = 1$, $v_2 = 2 + x$, $v_3 = 1 - 2x + x^2$.

a) Xác định ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2\}$. Tính $f(4 + 2x - 3x^2)$.

b) Tìm số chiều và một cơ sở của $\ker(f)$.

Câu 7. Cho A là ma trận thực vuông cấp 4. Biết rằng đa thức đặc trưng $\det(A - \lambda E)$ nhận các số phức $\lambda_1 = 1 + 2i$ và $\lambda_2 = 3 - 2i$ làm nghiệm. Tính $\det(A)$

4.11 Kì 20183 - Nhóm ngành 2 - Đề 1

Câu 1. Chứng minh đẳng thức tập hợp sau: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$.

Câu 2. Tìm các số phức z thỏa mãn $(1 - i\sqrt{3})^z = (1+i)^4$ trong đó i là đơn vị ảo.

Câu 3. Cho hệ:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = m \\ x_1 & +x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = 2 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +2x_4 & = m+1 \end{cases} \quad \text{(m là tham số)}$$

a) Tìm m để hệ vô nghiệm.

b) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

Câu 4. Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho các vectơ: $u_1 = (2,1,-1,1), u_2 = (0,3,-2,1)$, $u_3 = (1,-1,2,4)$, $u = (m,3,1,3)$.
a) Chứng minh $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính của $\mathbb{R}^4$.
b) Cho $U = \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$. Tìm m để $u \in U$ và xác định tọa độ của u theo cơ sở B của U khi đó.

Câu 5. Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, -3x_2 + x_3, x_1 + 2x_2).$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B = \{u_1 = (2,3,0), u_2 = (1,2,-1), u_3 = (-1,-2,2)\}$ của $\mathbb{R}^3$ và tìm hạng của f.

b) Toán tử f có chéo hóa được hay không? Vì sao?

Câu 6. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chuẩn tắc, cho các vectơ $u_1 = (1,2,1,0)$, $u_2 = (-1,1,2,3)$, $u_3 = (3,2,0,1)$. Các vectơ trực giao với cả 3 vectơ trên lập thành một không gian vectơ con U của $\mathbb{R}^4$. Tìm một cơ sở nào đó của U.

Câu 7. Cho A là ma trận vuông thực cấp 2019 và E là ma trận đơn vị cùng cấp. Chứng minh $\det(A^2 + E) \geq 0$.

4.12 Kì 20183 - Nhóm ngành 3 - Đề 1

Câu 1. Hai mệnh đề $(\overline{A} \to B) \wedge C$ và $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ có tương đương logic không?

Câu 2. Tính căn bậc 8 của số phức $z = -2$.

Câu 3. Tìm cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +4x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 \\ -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}$$

Câu 4. a) Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (2x - y, z + x)$, tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở: $B = \{(1,2,3),(1,2,0),(1,0,0)\}$ và $E = \{(1,0),(0,1)\}$.

b) Tìm giá trị riêng, vector riêng của phép biến đổi tuyến tính f trên $P_2[x]$ biết rằng ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 18 \\ 2 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Câu 5. Tìm hình chiếu của vector $u = (1,2,3)$ lên không gian $\text{span}\{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1)\}$.

4.13 Kì 20183 - Nhóm ngành 3 - Đề 2

Câu 1 (2đ)**.** Hai mệnh đề $(A \to B) \vee C$ và $(A \wedge B) \to C$ có tương đương logic không?

Câu 2 (1đ)**.** Tính căn bậc 8 của số phức $z = -2i$.

Câu 3 (2đ)**.** Tìm cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 16x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 7x_1 + 12x_2 - 24x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 4 (3đ)**.** a) Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (2x + 3y, z - 2x)$, tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở: $B = \{(1,2,3), (1,2,0), (1,0,0)\}$ và $E = \{(1,0), (0,1)\}$.

b) Tìm giá trị riêng, vector riêng của phép biến đổi tuyến tính f trên $P_2[x]$ biết rằng ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -10 & 9 & 8 \\ 8 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Câu 5 (2đ)**.** Tìm hình chiếu của vector $u = (3,2,1)$ lên không gian $span\{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1)\}$.

5 Năm 2019

5.1 Kì 20193 - Nhóm ngành 1 - Đề 2

Câu 1. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x$ và tập $A=\{0,1,2\}$. Xác định $f(A)$.

Câu 2. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 7 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 + (m+3)x_4 = m+6. \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss với $m=3$.

b) Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm.

Câu 3. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(6x_1-2x_2+5x_3, 2x_1-x_2+x_3, x_2+2x_3)$$

.

a) Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm dim Im f và dim Ker f.

c) Vecto $u=(3,2,1)$ có thuộc Im f không? Tại sao?

Câu 4. Chéo hóa ma trận $\begin{bmatrix} 12 & 3 & -3 \\ -8 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ biết rằng 3,6 là các trị riêng của nó.

Câu 5. Cho không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho $W=Span\{(1,1,1),(3,4,5),(6,7,8)\}$.

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của W.

b) Tìm hình chiếu trực giao của $u=(4,2,6)$ lên W.

Câu 6. Cho A là một ma trận thực vuông. Chứng minh rằng $\det(A^2+I)\geq 0$, ở đó I là ma trận đơn vị cùng cấp với A.

5.2 Kì 20191 - Nhóm ngành 1 - Đề 4

Câu 1. Cho $f(z)=z^3+(1+2i)z^2+(1+2i)z+2i$. Tính $f(-2i)$ và giải phương trình $f(z)=0$.

Câu 2. Ánh xạ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$, $f(x,y)=(x^3+2y^2)+(3x^3+7y)i$ có toàn ánh không? Vì sao?

Câu 3. Tìm $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$ để hệ

$$\begin{cases} 2x & +y & +z & =\beta-2, \\ x & +\lambda y & +2z & =3, \\ 2x & -\lambda y & -z & =1 \end{cases}$$

có vô số nghiệm.

Câu 4. Cho $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid V và phép biến đổi tuyến tính $f:V\to V$ có ma trận theo cơ sở E là

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}.$$

Tìm cơ sở trực chuẩn $F=\{f_1,f_2,f_3\}$ sao cho ma trận của f theo cơ sở F là ma trận đường chéo.

Câu 5. Cho $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ là cơ sở của không gian vectơ V. Hệ

$$F=\{f_1=e_1+2e_2-2e_3,\ f_2=2e_1-3e_2+e_3,\ f_3=3e_1-e_2-e_3\}$$

có phải là một cơ sở của V hay không? Vì sao?

Câu 6. Ký hiệu $P_2(x)$ là không gian vectơ của đa thức có bậc ≤ 2.

(1) Cho toán tử tuyến tính $f:P_2(x)\to P_2(x)$ xác định bởi:

$$f(a+bx+cx^2)=2a-b+(2b+c)x+(a+b+c)x^2.$$

Tìm $\dim\operatorname{Im} f$.

(2) Trên $P_2(x)$ cho tích vô hướng $\langle p(x),q(x)\rangle=\int_0^1 p(x)q(x)dx$ và $u_1(x)=1, u_2(x)=x, v(x)=x^2$. Tìm hình chiếu trực giao của vectơ $v(x)$ lên $\operatorname{Span}\{u_1,u_2\}$.

Câu 7. Cho A là ma trận vuông cấp n khả nghịch thỏa mãn $9A=A^{-1}$. Tính $\det(A-A^{2017})$.

Câu 8. Trong không gian vectơ các hàm số liên tục trên $[a,b]$, chứng minh hệ vectơ

$$\{u_k(x)-|x-\lambda_k|, k=\overline{1,n} \text{ với } \lambda_i\ne\lambda_j, i\ne j, i,j=\overline{1,n}\}$$

độc lập tuyến tính.

5.3 Kì 20193 - Nhóm ngành 1 - Đề 1

Câu 1. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x$ và tập $A=\{0,1,2\}$. Xác định $f(A), f^{-1}(A)$.

Câu 2. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =2 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +3x_4 & =7 \\ 2x_1 & -3x_2 & -x_3 & & =-2 \\ -4x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +(m+3)x_4 & =m+6. \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss với $m=2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm.

Câu 3. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2+x_3, 6x_1-2x_2+5x_3).$$

a) Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm dim Im f và dim Ker f.

c) Vecto $u=(1,2,3)$ có thuộc Im f không? Tại sao?

Câu 4. Chéo hóa ma trận $\begin{bmatrix} 12 & -8 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ biết rằng 3,6 là các trị riêng của nó.

Câu 5. Cho không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho $W=Span\{(0,1,2),(3,4,5),(6,7,8)\}$.

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của W.

b) Tìm hình chiếu trực giao của $u=(3,1,5)$ lên W.

Câu 6. Cho A là một ma trận thực vuông. Chứng minh rằng $\det(A^2+I)\geq 0$, ở đó I là ma trận đơn vị cùng cấp với A.

5.4 Kì 20193 - Nhóm ngành 1 - Đề 2

Câu 1. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x$ và tập $A=\{0;1;2\}$. Xác định $f(A)$, $f^{-1}(A)$.

Câu 2. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =2, \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +3x_4 & =7, \\ -x_1 & -3x_2 & +2x_3 & & =-2, \\ 3x_1 & +4x_2 & -4x_3 & +(m+3)x_4 & =m+6. \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss với $m=3$.

(b) Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm.

Câu 3. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(6x_1-2x_2+5x_3, 2x_1-x_2+x_3, x_2+2x_3).$$

(a) Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm $\dim \operatorname{Im} f$ và $\dim \operatorname{Ker} f$.

(c) Vectơ $u=(3,2,1)$ có thuộc $\operatorname{Im} f$ không? Tại sao?

Câu 4. Chéo hóa ma trận:

$$A=\begin{bmatrix} 12 & 3 & -3 \\ -8 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

biết rằng $3;6$ là các trị riêng của nó.

Câu 5. Cho không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc cho $W=\operatorname{span}\{(1,1,1),(3,4,5)\}$.

(a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của W.

(b) Tìm hình chiếu trực giao của $u=(4,2,6)$ lên W.

Câu 6. Cho A là một ma trận thực vuông. Chứng minh rằng $\det(A^2+I)\geq 0$, ở đó I là ma trận đơn vị cùng cấp với A.

5.5 Kì 20193 - Nhóm ngành 1 - Đề 4

Câu 1. Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng nếu $A \subset C$ thì $A \times B \subset C \times B$.

Câu 2. Cho hai ánh xạ $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = x + 2, \quad g(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 4}.$$

(a) Ánh xạ g có phải toàn ánh không? Tìm Im g.

(b) Xác định ánh xạ tích hợp $g \circ f$.

Câu 3. Cho các vectơ $u_1 = (-1, 4, -2, -5, 1)$; $u_2 = (5, 1, 7, 6, 2)$; $u_3 = (3, 2, 4, 6, 0)$; $u_4 = (2, -1, 3, 0, 2)$ trong không gian $\mathbb{R}^5$. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian sinh bởi các vectơ này.

Câu 4. Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_3[x] \to P_2[x]$ xác định bởi:

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a + b) + 2cx + dx^2 \quad \text{với mọi } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Xác định ma trận của f theo cặp cơ sở chính tắc của các không gian $P_3[x], P_2[x]$."

Câu 5. Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Câu 6. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng thông thường cho các vectơ

$$u = (-2, 0, -1, 1), \quad v = (1, -2, 1, 0).$$

(a) Tính khoảng cách giữa 2 vectơ u, v.

(b) Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ vectơ u, v.

Câu 7. Cho α là argument của số phức $1 + i\sqrt{2}$, n là một số nguyên dương. Rút gọn số phức

$$z = (1 + i\sqrt{2})^n + (1 - i\sqrt{2})^n$$

theo n và α.

5.6 Kì 20193 - Nhóm ngành 2 - Đề 3

Câu 1. Cho các tập hợp A, B, C, D. Chứng minh rằng nếu $A \subset C$ và $B \subset D$ thì $A \times B \subset C \times D$.

Câu 2. Cho hai ánh xạ $f, g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = x - 2, \quad g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}.$$

a) Ánh xạ g có phải đơn ánh không? Tìm $\operatorname{Im}(g)$.

b) Xác định ánh xạ hợp $g \circ f$.

Câu 3. Cho các vector $u_1 = (2, -1, 3, 0, 2), u_2 = (1, -4, 2, 5, -1), u_3 = (3, 2, 4, 6, 0), u_4 = (7, 0, 10, 6, 4)$ trong không gian $\mathbb{R}^5$. Tìm chiều và một cơ sở của không gian con sinh bởi các vector này.

Câu 4. Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_3[x]$ xác định bởi: $f(p) = xp + 2p$. Xác định ma trận của f theo cặp cơ sở chính tắc của các không gian $P_2[x], P_3[x]$.

Câu 5. Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Câu 6. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng thông thường cho các vector $u = (1, -2, 1, 0), v = (-2, 0, -1, 1)$.

a) Tính góc giữa 2 vector u, v.

b) Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ vector u, v.

Câu 7. Cho α là argument của số phức $1 + i\sqrt{2}$, n là một số nguyên dương. Rút gọn số phức $z = (1 + i\sqrt{2})^n + (1 - i\sqrt{2})^n$ theo n và α.

5.7 Kì 20193 - Nhóm ngành 2 - Đề 4

Câu 1. Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng nếu $A \subset C$ thì $A \times B \subset C \times B$.

Câu 2. Cho hai ánh xạ $f, g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = x + 2, \quad g(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 4}.$$

a) Ánh xạ g có phải đơn ánh không? Tìm $\operatorname{Im}(g)$.

b) Xác định ánh xạ hợp $g \circ f$.

Câu 3. Cho các vector $u_1 = (-1, 4, -2, -5, 1), u_2 = (5, 1, 7, 6, 2), u_3 = (3, 2, 4, 6, 0), u_4 = (2, -1, 3, 0, 2)$ trong không gian $\mathbb{R}^5$. Tìm chiều và một cơ sở của không gian con sinh bởi các vector này.

Câu 4. Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_3[x] \to P_3[x]$ xác định bởi: $f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a + b) + 2cx + dx^2$ với mọi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Xác định ma trận của f theo cặp cơ sở chính tắc của các không gian $P_3[x], P_2[x]$.

Câu 5. Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Câu 6. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng thông thường cho các vector $u = (-2, 0, -1, 1), v = (1, -2, 1, 0)$.

a) Tính góc giữa 2 vector u, v.

b) Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ vector u, v.

Câu 7. Cho α là argument của số phức $1 + i\sqrt{2}$, n là một số nguyên dương. Rút gọn số phức $z = (1 + i\sqrt{2})^n + (1 - i\sqrt{2})^n$ theo n và α.

5.8 Kì 20193 - Nhóm ngành 3 - Đề 5

Câu 1. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 - 2x$. Anh xạ f có đơn ánh, toàn ánh không? Tại sao?

Câu 2. Biết $i^2 = -1$, tìm tất cả số phức z thỏa mãn phương trình:

$$z^2 - (1+2i)z + 1 + 7i = 0$$

Câu 3. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Gọi E là ma trận đơn vị cấp 2. Tìm ma trận X thỏa mãn $AX = 3A^2 - 5E$.

Câu 4. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ -2 & -7 & -3 & m-18 \\ -1 & -1 & 5 & 2m+1 \end{pmatrix}$. Tìm m sao cho ma trận A có hạng bằng 4.

Câu 5. Cho toán tử tuyến tính $f : P_1[x] \to P_1[x]$ xác định bởi:

$$f(a_0 + a_1 x) = (2a_0 + a_1) + (-2a_0 + 5a_1)x.$$

Tìm một cơ sở của $P_1[x]$ để ma trận của f theo cơ sở đó có dạng chéo.

Câu 6. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, 5x_1 - 4x_2 + 4x_3)$$

a) Toán tử f có đơn ánh không? Tại sao?

b) Cho $U = \text{Span}\{u_1 = (1,2,-3), u_2 = (2,0,1)\}$. Xác định $\dim f(U)$.

c) Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chuẩn, cho các vector $u = (-3,7,-6)$ và $W = Span\{u_1 = (1,1,2), u_2 = (3,-2,6)\}$. Tìm hình chiếu trực giao của vector u lên không gian W.

Câu 7. Cho $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính từ không gian vector V vào không gian vector W. Giả sử $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ là một cơ sở của Kerf và $\{e_1, e_2, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$ là cơ sở của V. Chứng minh $\{f(e_{k+1}), ..., f(e_n)\}$ là cơ sở của Imf.

5.9 Kì 20193 - Nhóm ngành 3 - Đề 6

Câu 1 (1đ). Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=-x^2+2x$. Ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không? Tại sao?

Câu 2 (1đ). Biết $i^2=-1$, tìm tất cả số phức z thỏa mãn phương trình sau:

$$z^2+(2+i)z-1+7i=0$$

Câu 3 (1đ). Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}$. Gọi E là ma trận đơn vị cấp 2. Tìm ma trận X thỏa mãn $AX=3A^2-5E$.

Câu 4 (1đ). Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ -2 & -3 & -7 & m-18\\ 1 & 1 & 3 & 7\\ -1 & 5 & -1 & 2m+1\end{pmatrix}$.
Tìm m sao cho ma trận A có hạng bằng 4.

Câu 5 (2đ). Cho toán tử tuyến tính $f:P_1[x]\to P_1[x]$ xác định bởi

$$f(a_0+a_1x)=(5a_0-a_1)+(2a_0+2a_1)x.$$

Tìm một cơ sở của $P_1[x]$ để ma trận của f theo cơ sở đó có dạng chéo.

Câu 6. [2đ] Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(4x_1-4x_2+5x_3,-x_1+x_2+x_3,x_1-x_2+2x_3)$$

a) Toán tử f có đơn cấu không? Tại sao?

b) Cho $U=Span\{u_1=(1,2,-3),u_2=(2,0,1)\}$. Xác định $\dim f(U)$.

Câu 7 (1đ). Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho các vector $u=(-2,8,-4)$ và $W=Span\{u_1=(1,1,2),u_2=(3,-2,6)\}$. Tìm hình chiếu trực giao của vector u lên không gian W.

Câu 8 (1đ). Cho $f:V\to W$ là ánh xạ tuyến tính từ không gian vector V vào không gian vector W. Giả sử $\{e_1,e_2,...,e_k\}$ là một cơ sở của Kerf và $\{e_1,e_2,...,e_k,e_{k+1},...,e_n\}$ là một cơ sở của V. Chứng minh $\{f(e_{k+1}),...,f(e_n)\}$ là một cơ sở của Imf.

6 Năm 2020

6.1 Kì 20201 - Nhóm ngành 1 - Đề 1

Câu 1. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=x^3+3x^2+mx+1, m\in\mathbb{R}$. Tìm điều kiện cho m để ánh xạ f là đơn ánh.

Câu 2. Giải phương trình phức: $z^5-(3-i)z^3+4z=0$.

Câu 3. Trong không gian $P_3[x]$, cho các vector:

$$q_1=3x-2x^2+x^3,\quad q_2=1+2x+x^2-3x^3,\quad q_3=2+x+4x^2-3x^3.$$

Đặt $W=\text{Span}\{q_1,q_2,q_3\}$.

a) Tìm số chiều và một cơ sở của W.

b) Xác định m để vector $u=5+x+mx^2-8x^3$ thuộc W.

Câu 4. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z)=(x-y-z+m,-x+y-z,-x-y+z).$$

a) Tìm m để f là phép biến đổi tuyến tính.

b) Tìm các giá trị riêng và vector riêng của f khi $m=0$.

c) Cho tích vô hướng trong $\mathbb{R}^3$ là tích vô hướng chính tắc. Khi $m=0$, tìm một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f theo cơ sở đó là ma trận đường chéo. Chỉ ra ma trận của f theo cơ sở đó.

Câu 5. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng được cho bởi:

$$\langle x,y\rangle=x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3,\quad \forall x=(x_1,x_2,x_3),y=(y_1,y_2,y_3).$$

Cho các vector $v_1=(1;0;0), v_2=(0;1;1), v_3=(1;2;1)$.

a) Tìm một cơ sở của không gian $H=\{u\in\mathbb{R}^3: u\perp v_1, u\perp v_2\}$.

b) Tìm vector $v\in\text{Span}\{v_1,v_2\}$ sao cho v trực giao với v_3 và $\|v\|=\sqrt{7}$.

Câu 6. Cho ma trận vuông cấp 4: $A=[a_{ij}], a_{ij}\in\mathbb{Z}, 1\le i,j\le 4$ và λ là một giá trị riêng của A. Chứng minh rằng nếu λ là số hữu tỉ thì λ là số nguyên.

6.2 Kì 20201 - Nhóm ngành 1 - Đề 3

Câu 1. Cho ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ xác định bởi $f(z) = z^5(\sqrt{3} - i)^{2020}$. Xác định tập nghịch ảnh $f^{-1}(\{2^{2020}\})$.

Câu 2. Cho các tập con A, B của tập hợp X và $(X \setminus A) \subset B$. Chứng minh rằng $(X \setminus B) \subset A$.

Câu 3. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vector $v_1 = (2;1;-1;0)$, $v_2 = (1;2;1;1)$, $v_3 = (-1;1;2;1)$, $v_4 = (1;-2;-4;-2)$.

a) Vector v_4 có thuộc Span$\{v_1, v_2, v_3\}$ không? Tại sao?

b) Đặt $U = \text{Span}\{v_1, v_2\}, V = \text{Span}\{v_3, v_4\}$. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con $U + V$, với $U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}$.

Câu 4. Cho toán tử tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn:

$$f\left(1 - x + x^2\right) = 1 + 5x + x^2, f(x - x^2) = 1 + 2x + x^2, \quad f(2 + x^2) = 2 + 9x + 2x^2.$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$.

b) Tìm các giá trị riêng của vector riêng của f.

Câu 5. Cho không gian Euclid $P_2[x]$ với tích vô hướng xác định bởi:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx, \quad \forall p, q \in P_2[x].$$

Tìm hình chiếu trực giao của vector $v = x + x^2$ lên không gian $W = \text{Span}\{1 + x, x^2\}$.

Câu 6. Cho A là ma trận vuông cấp 2021 thỏa mãn $(A + A^T)^{2021} = 0$. Chứng minh rằng A là ma trận phản đối xứng, tức là $A^T = -A$.

7 Năm 2021

7.1 Kì 20221 - Nhóm ngành 1 - Đề 1

Câu 1. Giải phương trình sau trong trường số phức:

$$(z-3)^7+5(z-3)^2=0.$$

Câu 2. Tìm tất cả các số thực m để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường:

$$\begin{cases} mx_1+x_2+(m+1)x_3=0, \\ x_1+(m+1)x_2+mx_3=0, \\ (m+1)x_1+mx_2+x_3=0. \end{cases}$$

Câu 3. Trong $P_2[x]$, không gian vectơ tất cả các đa thức với hệ số thực bậc không quá 2, cho các vectơ:

$$v_1=1+3x+x^2, \quad v_2=2+6x+2x^2, \quad v_3=2+5x+x^2, \quad v_4=-1+2x^2.$$

Xác định một cơ sở và số chiều của không gian con $W=\text{Span}\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ trong $P_2[x]$.

Câu 4. Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ biết rằng:

$$f(1,0,0)=(1,2,4), \quad f(1,1,0)=(2,3,7), \quad f(1,1,1)=(1,4,6).$$

a) Viết ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tất cả các số thực m,n để vectơ $v=(m,n,1)$ thuộc $\text{Ker}(f)$.

c) Với tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{R}^3$, tìm hình chiếu trực giao của vectơ $u=(2,3,4)$ lên $\text{Ker}(f)$.

Câu 5. Trong hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho mặt bậc hai có phương trình:

$$x^2+z^2-2xy+2yz-4y=3.$$

a) Viết phương trình trên dưới dạng ma trận và tìm tất cả các giá trị riêng của ma trận đối xứng tương ứng với dạng toàn phương xuất hiện trong phương trình.

b) Đưa mặt bậc hai trên về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao và tịnh tiến.

Câu 6. Tìm định thức của ma trận X biết rằng:

$$3\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_3,$$

trong đó E_3 là ma trận đơn vị cấp 3.

Câu 7. Chứng minh rằng không tồn tại một ma trận thực A vuông cấp 3 thỏa mãn $A^6+5E=0$, trong đó E là ma trận đơn vị và A là ma trận không có cùng cấp 3.

7.2 Kì 20221 - Nhóm ngành 1 - Đề 3

Câu 1. Giải phương trình: $\overline{(z+1)^7} = \dfrac{-1}{(z+1)^2}$ trong trường số phức.

Câu 2. Tìm tất cả các số thực m để ma trận sau khả nghịch:

$$\begin{bmatrix} m & 1 & -2 \\ 1 & -m & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Câu 3. Cho các vectơ:

$$\mathbf{v}_1 = (1,6,4), \quad \mathbf{v}_2 = (3,9,3), \quad \mathbf{v}_3 = (2,4,0), \quad \mathbf{v}_4 = (-1,0,2).$$

Trong $\mathbb{R}^3$, đặt $W_1 = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, $W_2 = \text{span}\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ và $W = W_1 + W_2$.

(a) Xác định một cơ sở và số chiều của W.

(b) Với tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{R}^3$, tìm hình chiếu trực giao của vectơ $\mathbf{u} = (-2,0,1)$ lên W.

Câu 4. Cho toán tử tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ biết rằng:

$$f(1) = 4x^2 + 2x + 1, \quad , f(x+1) = 7x^2 + 3x + 2, \quad f(x^2 + x + 1) = 6x^2 + 4x + 1.$$

(a) Tính $f(5 - 3x - 23x^2)$.

(b) Tìm tất cả các số thực n, m để $v = x^2 + nx + m \in \text{Ker}(f)$.

Câu 5. Trên $\mathbb{R}^3$, cho dạng toàn phương:

$$q(u) = x^2 + z^2 - 12xy + 2yz, \quad \forall u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Gọi φ là dạng song tuyến tính đối xứng tương ứng với dạng toàn phương q. Tính giá trị $\varphi(u,v)$ với $\mathbf{u} = (-1,1,2)$ và $\mathbf{v} = (1,2,3)$.

(b) Rút gọn dạng toàn phương q bằng phương pháp chéo hóa trực giao.

Câu 6. Tìm tất cả các số thực m để hệ không có nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -mx_3 & +4x_4 & = 0, \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = 0, \\ 5x_1 & -x_2 & +3x_3 & +3x_4 & = 0, \\ -2x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = 0. \end{cases}$$

Câu 7. Cho một ma trận thực A vuông cấp n thỏa mãn:

$$A^4 + A^2 + 2E = 0,$$

trong đó E,0 lần lượt là ma trận đơn vị và ma trận không có cùng cấp. Chứng tỏ rằng $n \neq 3$.

7.3 Kì 20221 - Nhóm ngành 1 - Đề 4

Câu 1. Giải phương trình: $\overline{(z-1)^2} = \dfrac{-1}{\overline{(z-1)^7}}$ trong trường số phức.

Câu 2. Tìm tất cả các số thực m để ma trận sau khả nghịch:

$$\begin{bmatrix} m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -m \end{bmatrix}$$

Câu 3. Cho các vectơ:

$$\mathbf{v}_1 = (1,-3,2), \quad \mathbf{v}_2 = (2,-3,1), \quad \mathbf{v}_3 = (1,-1,0), \quad \mathbf{v}_4 = (-2,7,-5).$$

Trong $\mathbb{R}^3$, đặt $W_1 = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, $W_2 = \text{span}\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ và $W = W_1 + W_2$.

(a) Xác định một cơ sở và số chiều của W.

(b) Với tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{R}^3$, tìm hình chiếu trực giao của vectơ $\mathbf{u} = (-0,-3,2)$ lên W.

Câu 4. Cho toán tử tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ biết rằng:

$$f(-x+1) = x^2 + x, \quad , f(-x^2+1) = 5x^2 + x + 2, \quad f(2x^2 + x + 1) = 5x^2 + 5x.$$

(a) Tính $f(5 - 3x + 23x^2)$.

(b) Tìm tất cả các số thực n, m để $v = nx^2 + mx - 2 \in \text{Ker}(f)$.

Câu 5. Trên $\mathbb{R}^3$, cho dạng toàn phương:

$$q(u) = x^2 - z^2 - 4xy + 4yz, \quad \forall u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Gọi φ là dạng song tuyến tính đối xứng tương ứng với dạng toàn phương q. Tính giá trị $\varphi(u,v)$ với $\mathbf{u} = (-2,1,-1)$ và $\mathbf{v} = (-1,4,0)$.

(b) Rút gọn dạng toàn phương q bằng phương pháp chéo hóa trực giao.

Câu 6. Tìm tất cả các số thực m để hệ không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +mx_3 & +x_4 & = 0, \\ 5x_1 & +x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 0, \\ 5x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = 0, \\ 3x_1 & & -2x_3 & +5x_4 & = 0. \end{cases}$$

có số chiều bằng một.

Câu 7. Cho một ma trận thực A vuông cấp n thỏa mãn:

$$A^4 - A^2 + 2E = 0,$$

trong đó E,0 lần lượt là ma trận đơn vị và ma trận không có cùng cấp. Chứng tỏ rằng $n \neq 3$.

7.4 Kì 20221 - Nhóm ngành 2 - Đề 5

Câu 1 (1đ)**.** Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn:

$$z^5 = \left(\sqrt{3}+i\right)^{15}.$$

Câu 2 (1đ)**.** Tìm tất cả số thực m để ma trận sau có hạng bằng 2:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & m & 1 \\ 1 & 3 & m \\ 0 & m+3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Câu 3 (1đ)**.** Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, chứng minh rằng

$$B = \{\mathbf{v}_1 = (1;2;-1), \mathbf{v}_2 = (2;3;1), \mathbf{v}_3 = (1;1;6)\}$$

là một cơ sở. Tìm tọa độ của $\mathbf{u} = (1;1;10)$ đối với B.

Câu 4 (3đ)**.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x]$ có ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

đối với cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2\}$.

a) Xác định $f(1+x)$ và $f^2(1+x)$, ở đó $f^2 = f \circ f$.

b) Tìm một cơ sở của $\mathbb{P}_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo. Viết ma trận chéo đó.

Câu 5 (3đ)**.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, cho các vectơ

$$\mathbf{v}_1 = (1;-1;0), \mathbf{v}_2 = (1;0;1), \mathbf{v}_3 = (3;-1;2)$$

và không gian con $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

a) Xác định góc giữa hai vectơ $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$.

b) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con W.

c) Tìm hình chiếu trực giao của $\mathbf{v} = (1;-4;3)$ lên W.

Câu 6 (1đ)**.** Cho A là ma trận vuông cấp 20, thỏa mãn $A^{23} = 0$. Chứng minh rằng ma trận

$$(A - 2023E)$$

không suy biến, trong đó E là ma trận không và ma trận đơn vị cùng cấp với A.

7.5 Kì 20221 - Nhóm ngành 2 - Đề 6

Câu 1 (1đ)**.** Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn:

$$z^5 = \left(\sqrt{3} - i\right)^{15}.$$

Câu 2 (1đ)**.** Tìm tất cả số thực m để ma trận sau có hạng bằng 2:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 0 & m+2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Câu 3 (1đ)**.** Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, chứng minh rằng

$$B = \{\mathbf{v}_1 = (-1;2;1), \mathbf{v}_2 = (1;3;2), \mathbf{v}_3 = (6;1;1)\}$$

là một cơ sở. Tìm tọa độ của $\mathbf{u} = (25;12;9)$ đối với B.

Câu 4 (3đ)**.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x]$ có ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

đối với cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2\}$.

a) Xác định $f(1-x)$ và $f^2(1-x)$, ở đó $f^2 = f \circ f$.

b) Tìm một cơ sở của $\mathbb{P}_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo. Viết ma trận chéo đó.

Câu 5 (3đ)**.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, cho các vectơ

$$\mathbf{v}_1 = (0;-1;1), \mathbf{v}_2 = (1;0;1), \mathbf{v}_3 = (2;-1;3)$$

và không gian con $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

a) Xác định góc giữa hai vectơ $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$.

b) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con W.

c) Tìm hình chiếu trực giao của $\mathbf{v} = (3;-4;1)$ lên W.

Câu 6 (1đ)**.** Cho A là ma trận vuông cấp 20, thỏa mãn $A^{23} = 0$. Chứng minh rằng ma trận

$$(A + 2023E)$$

không suy biến, trong đó E lần lượt là ma trận không và ma trận đơn vị cùng cấp với A.

7.6 Kì 20221 - Nhóm ngành 3 - Đề 7

Câu 1. Cho các mệnh đề p,q,r sao cho mệnh đề $(p\wedge q)\to r$ sai. Hỏi mệnh đề $q\to(r\vee p)$ là đúng hay sai? Vì sao?

Câu 2. Cho ánh xạ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ xác định bởi $f(z)=z^2-(8+i)z+17+3i$. Xác định tập nghịch ảnh $f^{-1}((1+i)^2)$.

Câu 3. Trong không gian vector $\mathbb{R}^4$ cho các vector

$$v_1=(1,2,-1,-2),v_2=(0,1,3,2),v_3=(2,-1,4,1),v_4=(4,4,5,-1)$$

và các không gian con $U=\text{span}\{v_1,v_2\},W=\text{span}\{v_3,v_4\}$.

1. Tìm hạng của hệ $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.
2. Xác định một cơ sở của không gian con $U\cap W$.

Câu 4. Cho ánh xạ tuyến tính $f:P_2[x]\to P_2[x]$ thỏa mãn

$$f(1+x)=2-2x^2,\quad f(1-x^2)=1-x^2,\quad f(1+x-x^2)=1-x-4x^2.$$

1. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $E=\{1,x,x^2\}$. Tính $f(1+2x+3x^2)$.
2. Xác định một cơ sở và số chiều của Ker f.

Câu 5. Đưa dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ sau về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao:

$$\omega(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1$$

với mọi $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$.

Câu 6. Cho ma trận thực A vuông cấp 2023 thỏa mãn $A^{20}=0$. Chứng minh phương trình $(A-23E)X=A$ có nghiệm duy nhất, trong đó $0,E$ lần lượt là ma trận không và ma trận đơn vị cùng cấp với A.

7.7 Kì 20221 - Nhóm ngành 3 - Đề 8

Câu 1. Cho các mệnh đề p, q, r sao cho mệnh đề $(p \wedge q) \to r$ sai. Hỏi mệnh đề $q \to (r \vee p)$ là đúng hay sai? Vì sao?

Câu 2. Cho ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ xác định bởi $f(z) = z^2 - (8-i)z + 17 - 3i$. Xác định tập nghịch ảnh $f^{-1}((1-i)^2)$.

Câu 3. Trong không gian vector $\mathbb{R}^4$ cho các vector

$$v_1 = (-1;2;1;-2), v_2 = (3;1;0;2), v_3 = (4;-1;2;1), v_4 = (5;4;4;-1)$$

và các không gian con $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}, W = \operatorname{span}\{v_3, v_4\}$.

1. Tìm hạng của hệ $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
2. Xác định một cơ sở của không gian con $U \cap W$.

Câu 4. Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn

$$f(1+x) = 1 + 4x^2, \quad f(1-x^2) = 1 + x + 3x^2, \quad f(1+x-x^2) = 2 + 2x + 6x^2.$$

1. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2\}$. Tính $f(1+2x+3x^2)$.
2. Xác định một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} f$.

Câu 5. Đưa dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ sau về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao:

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1$$

với mọi $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Câu 6. Cho ma trận thực A vuông cấp 2023 thỏa mãn $A^{20} = 0$. Chứng minh phương trình $(A + 23E)X = A$ có nghiệm duy nhất, trong đó $0, E$ lần lượt là ma trận không và ma trận đơn vị cùng cấp với A.

8 Năm 2022

8.1 Kì 20222 - Nhóm ngành 3 - Đề 5

Câu 1 (1đ). Trong các số phức thỏa mãn $(z-i)^5+2=0$, tìm số phức có phần thực nhỏ nhất.

Câu 2 (1đ). Tìm tất cả các số thực n để ma trận sau có hạng bằng 3:

$$\begin{bmatrix} n & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -8n & 1 \end{bmatrix}.$$

Câu 3 (1đ). Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & =-3 \\ 2x_1 & -4x_2 & +3x_3 & -2x_4 & =11 \\ 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & +3x_4 & =3 \\ & -2x_2 & -3x_3 & +x_4 & =-2. \end{cases}$$

Câu 4 (3đ). Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{P}_2[x]\to\mathbb{P}_2[x]$ biết rằng $f(1)=-1$, $f(1+x^2)=-1+x-x^2$ và $f(2x+x^2)=-x+x^2$.

a) Viết ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $P_2[x]$.

b) Tìm tất cả các giá trị riêng của f và xác định một vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng lớn nhất của f.

c) Tìm chiều của không gian con $\ker(f^2)$, ở đây $f^2=f\circ f$.

Câu 5 (3đ). Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho hai vectơ

$$\mathbf{u}_1=(1;-2;-5),\quad \mathbf{u}_2=(2;1;-1).$$

Đặt $W=\{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3 \mid \mathbf{w}\perp\mathbf{u}_1\}$.

a) Chứng minh rằng W là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm một cơ sở trực chuẩn của W.

c) Tìm hình chiếu trực giao của $\mathbf{u}_2$ lên không gian W.

Câu 6 (1đ). Cho ma trận

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2-m & -4 & 1-m \\ m+1 & 2 & m \end{bmatrix},$$

với m là một số thực. Chứng tỏ rằng A^{2023} là ma trận của một đơn cấu tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ trong một cơ sở nào đó của $\mathbb{R}^3$.

8.2 Kì 20222 - Nhóm ngành 3 - Đề 6

Câu 1 (1đ)**.** Trong các số phức thỏa mãn $(z+i)^5+3=0$, tìm số phức có phần thực nhỏ nhất.

Câu 2 (1đ)**.** Tìm tất cả các số thực m để ma trận sau có hạng bằng 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & m & 1 & -2 \\ 0 & m & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -8m & 1 \end{bmatrix}.$$

Câu 3 (1đ)**.** Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +4x_3 & +x_4 & =5, \\ -2x_1 & +x_2 & -x_3 & +3x_4 & =-7, \\ 5x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -4x_4 & =8, \\ 3x_1 & & -2x_3 & +2x_4 & =-1. \end{cases}$$

Câu 4 (3đ)**.** Cho toán tử tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ biết rằng $f(x^2)=x^2$, $f(x+x^2)=-1+x+x^2$ và $f(1+x+x^2)=x^2$.

(a) Viết ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $P_2[x]$.

(b) Tìm tất cả các giá trị riêng của f và xác định một vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng lớn nhất của f.

(c) Tìm chiều của không gian con $\ker(f^2)$, ở đây $f^2 = f \circ f$.

Câu 5 (3đ)**.** Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho hai vectơ

$$v_1 = (-1;3;10), \quad v_2 = (3;1;-1).$$

Đặt $W = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid w \perp v_1\}$.

(a) Chứng minh rằng W là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm một cơ sở trực chuẩn của W.

(c) Tìm hình chiếu trực giao của v_2 lên không gian W.

Câu 6 (1đ)**.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} a+3 & -1 & a+1 \\ 3 & 2 & 1 \\ a+1 & -2 & a \end{bmatrix}$ với a là một số thực. Chứng tỏ rằng A^{2023} là ma trận của một toàn cấu tuyến tính $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ trong một cơ sở nào đó của $\mathbb{R}^3$.

9 Năm 2023

9.1 Kì 20231 - Nhóm ngành 1 - Đề 1

Câu 1. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+2$ và tập hợp $A=[-1,7]$. Tìm $f^{-1}(A)$

Câu 2. Tìm $\arg(z)$ với $z=\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{17}(1+i)^{21}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{15}}$

Câu 3. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để hệ $\begin{cases} 2x-y+3z+t=-1\\ z+3y-z+4t=3\\ 5x+y+5z+6t=m\end{cases}$ có nghiệm

Câu 4. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 4 & -3 & 5 & m\\ -1 & -8 & 11 & -4\end{bmatrix}$ Tìm $m\in\mathbb{R}$ để $r(A)$ nhỏ nhất.

Câu 5. Ký hiệu $P_2[x]$ là không gian vec tơ các đa thức bậc ≤ 2. Cho ánh xạ tuyến tính $f:P_2[x]\to\mathbb{R}^3$ như sau: $f(a+bx+cx^2)=(2a+c,2b-c,a+3b-c)$. Tìm $\dim(\ker f)$

Câu 6. Trong $\mathbb{R}^2$ cho 4 vector $u_1=(2;-1)$, $u_2=(1;2)$ và $v_1=(6;-2)$, $v_2=(-2;9)$. Một phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_2$ sao cho $f(u_k)=v_k, k=\overline{1,2}$. Tìm ma trận của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}_2$.

Câu 7. Trong $P_2[x]$ cho 4 vector $p_1=2-x+3x^2$, $p_2=-1+2x-x^2$, $q_1=5-x+8x^2$, $q_2=-1+5x+mx^2$. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để $\operatorname{span}\{p_1,p_2\}=\operatorname{span}\{q_1,q_2\}$

Câu 8. Cho đa thức $p(x)=(x-1)^5$ và $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$. Tìm các giá trị riêng của ma trận $B=p(A)$.

Câu 9. Cho V là không gian Euclide n chiều $n>2$ với ký hiệu tích vô hướng là $<,>$. Trong V cho 2 vector đơn vị trực giao với nhau e_1,e_2. Ký hiệu $W=\{x\in V|<x,e_1>=<x,e_2>=0\}$ là không gian con của V. Chứng minh $\dim V=n-2$.

9.2 Kì 20231 - Nhóm ngành 1 - Đề 2

Câu 1 (1đ)**.** Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+3$ và tập hợp $A=[-2;10]$. Tìm $f^{-1}(A)$.

Câu 2 (1đ)**.** Tìm $\arg(z)$ với

$$z=\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^{17}\left(1+i\sqrt{3}\right)^{13}}{(1-i)^{15}}.$$

Câu 3 (1đ)**.** Tìm $m\in\mathbb{R}$ để hệ

$$\begin{cases} x & -2y & +z & +2t & =2,\\ 2x & -y & +2z & -3t & =m,\\ 5x & -7y & +5z & +3t & =4\end{cases}$$

có nghiệm.

Câu 4 (1đ)**.** Cho ma trận

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -2 & 0\\ 7 & -7 & 1 & 6\\ 3 & m & -5 & -2\end{bmatrix}.$$

Tìm $m\in\mathbb{R}$ để $\operatorname{rank}(A)$ nhỏ nhất.

Câu 5 (1đ)**.** Ký hiệu $P_2[x]$ là không gian vectơ tất cả các đa thức có bậc ≤ 2. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to P_2[x]$ như sau:

$$f(a,b,c)=(a+2b)+(2a-b+c)x+(3a+b+c)x^2.$$

Tìm $\dim(\ker f)$.

Câu 6 (1.5đ)**.** Trong $\mathbb{R}^2$, cho 4 vectơ

$$u_1=(1,-2),\quad u_2=(2,1),\quad v_1=(-4,5),\quad v_2=(-3,5).$$

Một phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ sao cho $f(u_k)=v_k$ $(k=\overline{1,2})$. Tìm ma trận của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

Câu 7 (1.5đ)**.** Trong $P_2[x]$, cho 4 vectơ

$$p_1=1+3x+x^2,\quad p_2=-2+2x-3x^2,\quad q_1=-3+7x-5x^2,\quad q_2=7+mx+9x^2.$$

Tìm $m\in\mathbb{R}$ để $\operatorname{span}\{p_1,p_2\}=\operatorname{span}\{q_1,q_2\}$.

Câu 8 (1đ)**.** Cho đa thức $p(x)=(x+2)^4$ và $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&1&3\\1&1&3\end{bmatrix}$. Tìm các giá trị riêng của ma trận $B=p(A)$.

Câu 9 (1đ)**.** Cho V là không gian Euclid n chiều $(n>2)$ với ký hiệu tích vô hướng là $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Trong V, cho 2 vectơ đơn vị trực giao với nhau e_1,e_2. Ký hiệu

$$W=\{x\in V\mid \langle x,e_1\rangle=\langle x,e_2\rangle=0\}$$

là không gian con của V. Chứng minh $\dim W=n-2$.

9.3 Kì 20231 - Nhóm ngành 1 - Đề 3

Câu 1 (1đ)**.** Cho các tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 \leq 0\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 \leq 0\}; \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\}.$$

Tìm tập hợp $D = (A \cap B) \setminus C$.

Câu 2 (1đ)**.** Giải phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Câu 3 (1đ)**.** Cho $W \subset \mathbb{R}^4$ là không gian các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -x_1 & +3x_2 & +x_3 & +3x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -5x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -7x_2 & & -7x_4 & = 0 \end{cases}. \text{ Tìm } \dim W.$$

Câu 4 (1đ)**.** Cho ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 2 + z^5$. Tìm các phần tử của tập hợp $f^{-1}\left(\{1 + i\sqrt{3}\}\right)$.

Câu 5 (1đ)**.** Trong không gian $P_2[x]$ các đa thức có bậc ≤ 2, cho 4 vectơ

$$u_1 = 2 - x + x^2; \quad u_2 = 3 + 2x - 2x^2; \quad u_3 = -1 + x - x^2; \quad v = 3 + 3x + mx^2.$$

Tìm $m \in \mathbb{R}$ để $v \in \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

Câu 6 (1.5đ)**.** Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, hãy xây dựng một cơ sở trực chuẩn từ cơ sở $E = \{e_1 = (1; 0; -1), \quad e_2 = (0; 1; -1), \quad e_3 = (1; 1; 0)\}$. bằng phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt.

Câu 7 (1.5đ)**.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to P_2[x]$ xác định bởi

$$f(a, b, c, d) = (2a - b + c - d) + (a - b + 2c + d)x + (3a - 2b + 3c)x^2.$$

Tìm $\dim(\operatorname{Im} f)$.

Câu 8 (1đ)**.** Gọi $z_k\,(k = \overline{1,8})$ là các nghiệm của phương trình $\sum_{k=0}^{8} z^k = 0$ trong trường số phức.

Tính $S = \sum_{k=1}^{8} z_k^5$

Câu 9 (1đ)**.** Cho đa thức $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và A là ma trận vuông cấp n có trị riêng là $\lambda \in \mathbb{R}$. Tính định thức ma trận

$$B = p(A) - p(\lambda)E,$$

trong đó E là ma trận đơn vị cấp n.

9.4 Kì 20231 - Nhóm ngành 1 - Đề 4

Câu 1. Cho các tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 - 6x + 5 \le 0\right\}, B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 - 8x + 12 \le 0\right\}, C = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 - x - 6 \le 0\right\}$. Tìm tập hợp $D = (A \cap B) \setminus C$.

Câu 2. Giải phương trình ma trận:

$$X \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -7 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Câu 3. Cho $W \subset \mathbb{R}^4$ là không gian các nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Tìm $\dim(W)$

Câu 4. Cho ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^6 - i$. Tìm các phần tử của tập hợp $f^{-1}\left(\left\{-\sqrt{3}\right\}\right)$.

Câu 5. Trong không gian $P_2[x]$ các đa thức có bậc ≤ 2 cho 4 vector $u_1 = 2 - x, u_2 = 1 + 2x + 7x^2, u_3 = -3 + 2x + x^2,\ v = 3 + 7x + mx^2$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để $v \in \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

Câu 6. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc hãy xây dựng cơ sở trực chuẩn từ cơ sở $E = \{e_1 = (0;-1;2), e_2 = (1;-1;3), e_3 = (1;-3;2)\}$ bằng phương pháp trực giao hoá Gram-Schmidt.

Câu 7. Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to \mathbb{R}^4$ xác định bởi

$$f(a + bx + cx^2) = (a + 2b - c, 2a - b + 3c, 4a + 3b + c, a - 3b + 4c).$$

Tìm $\dim(\operatorname{Im} f)$.

Câu 8. Gọi $z_k, k = \overline{1,6}$ là các nghiệm của phương trình $\sum\limits_{k=0}^{6} z^k = 0$ trong trường số phức. Tính $S = \sum\limits_{k=1}^{6} z_k^9$.

Câu 9. Cho đa thức $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và A là ma trận vuông cấp n có trị riêng là $\lambda \in \mathbb{R}$. Tính định thức của ma trận $B = p(A) - p(\lambda)E$ trong đó E là ma trận đơn vị cấp n.

9.5 Kì 20231 - Nhóm ngành 2 - Đề 5

Câu 1 (1đ). Cho $A = (-\infty, 4)$, $B = [1, +\infty)$, $C = (3, +\infty)$, và $D = (-\infty, 2)$. Xác định tập hợp

$$\big((A \cap B) \setminus C\big) \cup D.$$

Câu 2 (1đ). Tìm nghiệm phức của phương trình:

$$z - 4i\overline{z} + 15 = 0.$$

Câu 3 (1đ). Tìm m để hệ vectơ sau độc lập tuyến tính:

$$\{(1, m-1, 0), (0, 0, m), (m^2 - m, m, 0)\}.$$

Câu 4 (1đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_2 + 2x_3, -x_1 + 2x_2).$$

Tìm một cơ sở của $\mathrm{Im}(f)$.

Câu 5 (2đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$f(1, 0) = (0, 1), \quad f(1, 1) = (2, 0).$$

a) Tìm các giá trị riêng của ánh xạ tuyến tính f.

b) Tìm một cơ sở trong $\mathbb{R}^2$ để ma trận của f theo hệ cơ sở đó có dạng chéo.

Câu 6 (2đ). Trong không gian $P_2[x]$, cho các đa thức:

$$p_1 = 1 + 2x + x^2, \quad p_2 = 4 + 2x + x^2, \quad p_3 = 10 + 2x + x^2.$$

a) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian $W = \mathrm{span}\{p_1, p_2, p_3\}$.

b) Xác định m để $p = 1 + mx + x^2 \in W$.

Câu 7 (2đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$, xét tích vô hướng $\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, với $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$. Cho $p = (m^2, 2m+1, 2)$ và $q = (1, 1, 1)$.

a) Tìm m để $\langle p, q\rangle$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm một cơ sở trực giao của không gian $H = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \perp q\}$.

9.6 Kì 20231 - Nhóm ngành 2 - Đề 6

Câu 1 (1đ). Cho $A = (-\infty, 3)$, $B = [0, +\infty)$, $C = (2, +\infty)$ và $D = (-\infty, 1)$. Xác định tập hợp $[(A \cap B) \setminus C] \cup D$

Câu 2 (1đ). Tìm nghiệm phức của phương trình: $z - 2i\overline{z} + 9 = 0$

Câu 3 (1đ). Tìm m để hệ véctơ sau độc lập tuyến tính:

$$\{(1, 0, m^2 - m), (m - 1, 0, m), (0, m, 0)\}.$$

Câu 4 (1đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 2x_3, -x_1 + 2x_2, x_1 - x_2 + 2x_3).$$

Tìm một cơ sở của $\operatorname{Im}(f)$

Câu 5 (2đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(0, 1) = (1, 0)$ và $f(1, 1) = (0, 2)$.

1. Tìm các giá trị riêng của ánh xạ tuyến tính f.
2. Tìm một cơ sở trong $\mathbb{R}^2$ để ma trận của f theo hệ cơ sở đó có dạng chéo.

Câu 6 (2đ). Trong không gian $P_2[x]$ cho các đa thức

$$p_1 = 1 + 2x + x^2, \quad p_2 = 4 + 2x + x^2, \quad p_3 = 7 + 2x + x^2.$$

1. Tìm một cơ sở và số chiều của không gian $W = \operatorname{span}\{p_1, p_2, p_3\}$.
2. Xác định m để $p = 1 + mx + x^2$ thuộc W.

Câu 7 (2đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3$, với $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$. Cho $p = (2m^2, 2m + 1, 2)$ và $q = (1, 1, 1)$.

1. Tìm m để $\langle p, q\rangle$ đạt giá trị nhỏ nhất.
2. Tìm một cơ sở trực giao của không gian $H = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \perp q\}$.

9.7 Kì 20231 - Nhóm ngành 3 - Đề 7

Câu 1 (1đ)**.** Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn $z^2 + (2+i)z = 1+5i$

Câu 2 (1đ)**.** Tìm ma trận X thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} X - 2X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Câu 3 (1đ)**.** Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các véctơ $u_1 = (1,3,2)$, $u_2 = (1,2,-1)$, $u_3 = (2,5,1)$. Tìm m để $u = (1,1,m)$ thuộc $\operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

Câu 4 (2đ)**.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(1,1,1) = (4,2,6)$, $f(1,1,0) = (3,0,3)$, $f(1,0,1) = (2,3,5)$.

1. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
2. Tìm m để $(m,1,3) \in \ker(f)$.

Câu 5 (2đ)**.** Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chuẩn, cho các véctơ $v_1 = (1,1,-2)$, $v_2 = (2,3,-3)$, $v_3 = (3,4,-5)$. Đặt $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

1. Xác định một cơ sở và số chiều của V.
2. Tìm hình chiếu vuông góc của $u = (1,-6,2)$ lên V.

Câu 6 (1đ)**.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Biết f có vectơ riêng $(3,2)$ ứng với trị riêng 1 và có vectơ riêng $(2,1)$ ứng với trị riêng 2, tìm $f(4,3)$.

Câu 7 (1đ)**.** 1. Tìm tất cả các trị riêng của ma trận

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Tìm giá trị lớn nhất của $x^2 + y^2 + z^2$ với điều kiện $6x^2 + 7y^2 + 5z^2 - 4xy - 4xz = 1$.

9.8 Kì 20231 - Nhóm ngành 3 - Đề 8

Câu 1 (1đ). Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn $z^2 + (2-i)z = 1-5i$.

Câu 2 (1đ). Tìm ma trận X thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} X - 2X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Câu 3 (1đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các véctơ $u_1 = (1,4,m)$, $u_2 = (1,2,-1)$, $u_3 = (2,5,1)$. Tìm m để $u = (1,4,m)$ thuộc $\text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

Câu 4 (2đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(1,1,1) = (2,2,4), \quad f(0,1,1) = (1,1,2), \quad f(1,0,1) = (0,3,3)$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm m để $(m,1,1) \in \ker(f)$.

Câu 5 (2đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chuẩn, cho các véctơ $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (2,1,3)$, $v_3 = (3,-1,2)$. Đặt $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

a) Xác định một cơ sở và số chiều của V.

b) Tìm hình chiếu vuông góc của $u = (1,4,8)$ lên V.

Câu 6 (1đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Biết f có vectơ riêng $(2,3)$ ứng với trị riêng 1 và có vectơ riêng $(1,2)$ ứng với trị riêng 2, tìm $f(1,3)$.

Câu 7 (2đ). 1. Tìm tất cả các trị riêng của ma trận

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^2 + y^2 + z^2$ với điều kiện $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 + 4xy + 4xz = 1$.